

61

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

KWARTALNIK

SPIS TREŚCI DO TOMU XVIII — 1972

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA

SPIS TREŚCI DO TOMU XVIII

M. Białko, W. Sieńko: Synteza transmitancji przy użyciu wzmacniaczy operacyjnych i pasywnych układów <i>RC</i>	39
M. Białko, L. Spiralski, K. Skibiński: Pomiary parametrów charakteryzujących podstawowe scalone układy logiczne	469
M. Białko, Z. Tomaszewski: Tranzystorowa realizacja żyratora	739
S. Budkowski, T. Kończyk: Licznik łańcuchowy jako generator liczb pseudolosowych	101
J. Droszcz: Właściwości tranzystora polowego typu MOSFET jako zmiennego rezystora sterowanego napięciem	725
S. Dymowski: Pewne twierdzenia dotyczące liniowych pasywnych czwórników <i>RC</i> o bezzerowych transmitancjach	325
S. Dymowski: Pojemności krytyczne i oporności krytyczne liniowego pasywnego czwórnika <i>RC</i> o bezzerowych transmitancjach	313
Z. Grochowski: Licznik cząsteczek z elektryczną komorą czujnikową	87
J. Hańderek, J. Dudek, B. Esop: Efekt termoelektryczny w układach kontaktów metal-PbTiO ₃ -metal	67
K. Jachowicz-Kociółek: Metoda obliczania ustalonych prądów zwarciovych przy zwarciach wewnętrznych w uzwojeniu stojana maszyny synchronicznej z wirnikiem cylindrycznym	189
J. Kaliński: Pewna możliwość zwiększenia dokładności urządzeń pomiarowych układów automatyki	705
M. Kitliński: Analiza możliwości realizacji cyrkulatorów <i>n</i> -ramiennych	483
A. Kobus: Podstawy teorii hallotronu	495
T. J. Kobylarz: Bezpośrednia metoda projektowania linearnych układów elektrycznych za pomocą programów maszynowej analizy przy stosowaniu <i>mixed method</i>	19
Z. Kosowicz: Wpływ średnicy wirnika na warunki samohamowności klatkowych silników wykonawczych	381
M. Kozłowski: Dobór mocy znamionowych uzwojeń w transformatorze trójuzwojeniowym z punktu widzenia ich wytrzymałości zwarcioviej	205
H. S. Kozłowski, J. Kosk: Wpływ kształtu i położenia osiowych kanałów wentylacyjnych na skuteczność chłodzenia maszyn elektrycznych	351
M. Krakowski: Impedancje liniowych obwodów elektrycznych	443
C. Królikowski: Jedna z metod analitycznego ujmowania charakterystyk napięciowo-prądowych łukowych palników plazmowych prądu stałego	403
C. Królikowski: Metoda wyznaczania obszaru stabilnej pracy palników plazmowo-łukowych z łukiem pośrednim i bezpośrednim	551
W. Kuźniar: Pomiary napięć udarowych metodami prostownikowo-kondensatorowymi	607
F. Lachowicz: Oddziaływanie indukcyjne prądu zwarcia z ziemią w napowietrznej linii energoelektrycznej na szyny jednotorowej linii kolejowej	567
W. Lasocki: Zastępczy schemat cieplny transformatora suchego	231
S. Łukasik: Zagadnienia dokładności estymatora kalmanowskiego w warunkach niepełnej znajomości modelu procesu	421
J. Migdałski: Niezawodność przełączników wieloprzerwowych	113
T. Missala: Teoria selsyna różnicowego i analiza błędów wynikających z niedokładności obróbki	151

M. Nałęcz, J.E. Rijnsdorp: Mnożnik trzech wielkości z ruchomym hallotronem i jego zastosowania w technice pomiarowej	3
R. Niewiedział: Uogólnienie charakterystyk wyładowania łukowego w łukowym palniku plazmowym prądu stałego	677
W. Pajewski: Fale akustyczne w elektronice	285
K. Przanowski: Przesył energii elektrycznej liniami o napięciu wyższym od 420 kV	247
K. Schoepp: Analiza harmoniczna pola elektromagnetycznego w szczelinie przetwornikowej jawnobiegunowej maszyny synchronicznej	653
A. Smoliński: Standardowe sygnały impulsowe wielkiej częstotliwości	515
J. J. Włodek: Algorytm oceny rodzaju tolerowania prostokątnego impedancji dwójników . .	57
K. Zakrzewski: Obliczanie zastępczych parametrów masywnego żelaza	339
K. Zakrzewski, J. Turowski: Metody analizy ekranowania magnetycznego kadzi transformatorów	575
J. Żurada: Właściwości częstotliwościowe i szumowe rzeczywistego źródła prądowego sterowanego napięciem (DVCCS)	459

CONTENTS

M. Białko, W. Sieńko: Transfer Function Synthesis Using Operational Amplifiers and Passive RC Networks	39
M. Białko, L. Spiralski, K. Skibiński: Measurement of Basic Integrated Logic Circuit Parameters	469
M. Białko, Z. Tomaszewski: A Transistor Gyrator Realisation	739
S. Budkowski, T. Kończyk: Feedback Shift Register as Generator of Pseudo-Random	101
J. Droszcz: Properties of a Field Effect MOSFET-Type Transistor as a Variable Resistor of Voltage Control	725
S. Dymowski: Certain Theorems About Linear Passive RC Two-Ports Having Transmittances Without Zeros	325
S. Dymowski: Critical Capacities and Critical Resistances of Linear Passive RC Two-Port Having Transmittances Without Zeros	313
Z. Grochowski: Particles Counter with Electric Sensing Zone	87
J. Hańderek, J. Dudek, B. Esop: Seebeck Effect in Metal-PbTiO ₃ -Metal Contact Systems	67
K. Jachowicz-Kociołek: Method of Computing Steady-State Current by Internal Faults in Stator's Winding of a Synchronous Machine with a Cylindrical Rotor	189
J. Kaliński: Possibility of Increasing the Accuracy of Automatic Systems Measuring Sets . .	705
M. Kitliński: The Analysis of the Realization Possibilities of <i>n</i> -Port Lumped Element Circulator	483
A. Kobus: Foundations of the Hall Generator Theory	495
T. J. Kobylarz: The Direct Design of Linear Circuits by Means of Computer Circuit Analysis Programs Having a Mixed Method Approach	19
Z. Kosowicz: Influence of the Rotor Diameter of a Squirrel Cage Servomotor Upon Its Self-breaking Properties	381
M. Kozłowski: Choice of Ratings of Windings in Three-Winding Transformer From the Viewpoint of Their Short-Circuit Strenght	205
H. S. Kozłowski, J. Kosk: The Influence of Form and Position of Axial Ventilating Ducts on Effectiveness of Cooling of Electric Machines	351
M. Krakowski: Impedances of Linear Electrical Networks	443
C. Królikowski: One of the Methods of Analitical Formulating Voltage-Current Characteristics of D.C. Plasma Torches	403
C. Królikowski: Method of Determining the Stable Work Area of Direct and Indirect Arc Plasma Torches	551

W. Kuźniar: Surge Voltage Recording by Means of Some Rectifier-Capacitor Arrangements	607
F. S. Lachowicz: Inductive Influence in Rails of a Single Track from Short-Circuit Current in an Overhead Power Line	567
W. Lasocki: Thermal Equivalent Circuit for Dry Transformers	231
S. Łukasik: Kalman Estimation Accuracy Due to Modeling Error	421
J. Migdałski: Reliability of Multicomponent Complex Switching Systems	113
T. Missala: A New Theory of Differential Selsyn and an Analysis of Inaccuracies Caused by Improper Mechanical Works	151
M. Nałęcz, J.E. Rijnsdorp: A Hall Effect Three-Variable Multiplier With Moving Part and Possible Applications in Process Instrumentation	3
R. Niewiedział: Generalisation of Arcing Characteristics in Direct Current Plasmatron	677
W. Pajewski: Acoustic Waves in Electronics	285
K. Przanowski: Electrical Energy Transmission With Lines Having Voltage of over 420 kV	247
K. Schoepp: Harmonic Analysis of Electromagnetic Field in Salient Pole Air Gap of Synchronous Machine	653
A. Smoliński: Standard High Frequency Pulse Signals	515
J. J. Włodek: Algorithm for Evaluation of Kind of Rectangular Tolerancing of Two-Terminal Networks Impedance	57
K. Zakrzewski: Equivalent Parameters of Solid Iron	339
K. Zakrzewski, J. Turowski: Method of Analysis of Transformer Tank Shieldings	575
J. Żurada: Frequency and Noise Properties of a Physical Voltage Controlled Current Source DVCCS	459

TABLE DES MATIÈRES

M. Białko, Z. Tomaszewski: Réalisation d'un gyrateur transistorisé	739
S. Budkowski, T. Kończyk: Compteur en anneau comme générateur des nombres aléatoires	101
S. Dymowski: Certains théorèmes concernant les quadripôles passifs RC aux transmittances sans zéros	325
S. Dymowski: Capacités critiques et résistances critiques d'un quadripôle linéaire passif aux transmittances sans zéros	313
K. Jachowicz-Kociołek: La méthode de calcul des courants stationnaires en cas des court-circuit interne dans l'enroulement de stator d'une machine synchrone avec le rotor cylindrique	189
J. Kaliński: Une certaine possibilité d'accroissement de la précision des installations de mesure des systèmes de l'automatique	705
A. Kobus: Les principes fondamentaux de la théorie d'un générateur à effet Hall	495
T. J. Kobylarz: Une méthode directe de projeter des réseaux électriques linéaires à l'aide des programmes pour l'analyse de computer, en utilisant <i>mixed method</i>	19
W. Lasocki: Le circuit équivalent thermique pour un transformateur sec	231
T. Missala: La théorie de selsyn différentiel et l'analyse des fautes résultant de l'inexactitude du traitement	151
M. Nałęcz, J.E. Rijnsdorp: Le multiplicateur de trois grandeurs avec le générateur mobile à effet Hall et ses applications pour des mesures	3
R. Niewiedział: Généralisation des caractéristiques de la décharge dans un brûleur plasmétique à arc à courant continu	677
K. Zakrzewski: Détermination des paramètres équivalents du fer massif	339
K. Zakrzewski, J. Turowski: Les méthodes d'analyse du blindage magnétique de la cuve des transformateurs	575
J. Żurada: Les propriétés de fréquence et de bruit d'une source du courant contrôlée par tension (DVCCS)	459

INHALT

M. Białko, W. Sieńko: Transmittanzsynthese unter Anwendung von Operationsverstärkern und passiven RC-Schaltungen	39
M. Białko, L. Spiralski, K. Skibiński: Parameterbemessungen integrierter logischer Grundsysteme	469
M. Białko, Z. Tomaszewski: Transistorische Realisation eines Gytrators	739
S. Budkowski, T. Kończyk: Kettenzähler als Generator pseudostochastischer Zahlen	101
J. Droszcz: Eigenschaften des MOSFET-Transistors als spannungsgesteuerten Resistors	725
S. Dymowski: Einige Theorem über lineare passive RC-Vierpole mit nullosen Gegenseinleitwerten	325
S. Dymowski: Kritische Kapazitäten und kritische Widerstände eines linearen, passiven RC-Vierpoles mit nullosen Gegenseinleitwerten	313
Z. Grochowski: Molekülenzähler mit elektrischer Fühlkammer	87
J. Hańderek, J. Dudek, B. Esop: Thermoelektrischer Effect in Kontaktschaltungen Metall-PbTiO ₃ -Metall	67
K. Jachowicz-Kociołek: Berechnungsverfahren von Dauerkurzschlussströmen bei inneren Kurzschlüssen in Statorwicklungen einer Synchronmaschine mit Zylinderrotor	189
J. Kaliński: Eine Möglichkeit zur Vergrößerung der Genauigkeit der Messeinrichtungen automatischer Systeme	705
M. Kitliński: Analyse der Realisierungsmöglichkeit eines <i>n</i> -armigen Zirkulators	483
A. Kobus: Theoretische Grundlagen des Hall-Generators	495
T. J. Kobylarz: Direkte Methode zum rechnerunterstützten Schaltungsentwurf elektrischer Netzwerke mittels s.g. <i>mixed method</i>	19
Z. Kosowicz: Einfluss des Läuferdurchmessers auf die Selbstbremsungsverhältnisse von Asynchron-Umkehrmotoren	381
M. Kozłowski: Wahl von Nennleistungen von Wicklungen im Dreiwicklungstransformator hinsichtlich ihrer Kurzschlussfestigkeit	205
H. S. Kozłowski, J. Kosk: Einfluss der Form und Lage der Axialventilationskanäle auf die Kühlungswirksamkeit elektrischer Maschinen	351
M. Krakowski: Impedanz eines linearen elektrischen Kreises	443
C. Królikowski: Über eine Methode zur analytischen Bestimmung der Strom-Spannungskennlinien des Gleichstrom-Lichtbogen-Plasmabrenners	403
C. Królikowski: Methode der Bestimmung eines stabilen Arbeitsbereiches direkter und indirekter Lichtbogen-Plasmabrenner	551
W. Kuźniar: Mittels Stromrichter-Kondensatoren durchgeführte Stoss Spannungsmessungen	607
F. S. Lachowicz: Induktionsbeeinflussung auf einspurige Eisenbahngleise des Stromkurzschlusses mit Boden in energoelektrischer Freiluftleitung	567
W. Lasocki: Ersatzschaltbildschema des Trockentransformators für Wärmeerscheinungen	231
S. Łukasik: Genauigkeitsproblem Kalmannischen Estimators bei beschränkter Kenntnis des Prozessmodells	421
T. Missala: Theorie des Differenz-Selsyns und Analyse der durch Bearbeitungsungenauigkeiten verursachten Fehler	151
M. Nałecz, J.E. Rijnsdorp: Ein Hall-Generator Multiplikationsglied von drei Komponenten und seine Anwendungsmöglichkeiten in der Verfahrenstechnik	3
R. Niewiedzial: Verallgemeinerung von Charakteristiken der Bogenentladung in einem Gleichstrom-Plasmastrahlbrenner	677
W. Pajewski: Akustische Wellen in Elektronik	285
K. Przanowski: Energietransport mittels Kabeln mit Spannung über 420 kV	247
K. Schoepp: Analyse der Oberwellen des elektromagnetischen Feldes in Luftspalt einer Schenkelpolsynchronmaschine	653
A. Smoliński: Standardimplussignale mit hohen Frequenzen	515

J. J. Włodek: Beurteilungsalgorithmus der Toleranzweise gradwinkliger Zweipolimpedanz	57
K. Zakrzewski: Berechnung der Ersatzschaltbildparametern des massiven Eisens	339
K. Zakrzewski, J. Turowski: Zur Analyse der magnetischen Abschirmung des Transformatorenkessels	575
J. Żurada: Frequenz- und Rauschverhalten einer spannungsgesteuerten physischen Stromquelle (DVCCS)	459

СОДЕРЖАНИЕ

М. Бялко, В. Сенько: Синтез передаточных функций с применением операционных усилителей и пассивных схем RC	39
М. Бялко, З. Томашевски: Транзисторная реализация жиратора	739
М. Бялко, Л. Спиральски, К. Скибиньски: Измерение параметров фундаментальных интегральных логических схем	469
С. Будковски, Т. Коньчик: Цепной счетчик как генератор псевдослучайных чисел	101
Е. Ю. Влодек: Алгоритм оценки вида прямоугольных допусков импеданса двухполюсников	57
З. Гроховски: Счетчик частиц с электрическим датчиком	87
Я. Дрош: Характерные черты транзистора MOSFET применяемого в качестве переменного резистора управляемого напряжением	725
С. Дымовски: Критические емкости и критические сопротивления линейного пассивного четырехполюсника RC с безнульными передаточными функциями	313
С. Дымовски: Некоторые теоремы о линейных пассивных четырехполюсниках RC с безнульными передаточными функциями	325
Я. Жurada: Частотные и шумовые свойства действительного источника тока управляемого напряжением (DVCCS)	459
З. Закшевски: Определение параметров замещения массивного ферромагнетика	339
К. Закшевски, Я. Туrowski: Методы анализа магнитного экранирования баков трансформатора	575
Е. Калиньски: Некоторая возможность увеличения точности электронных измерительных устройств в системах автоматики	705
М. Китлиньски: Анализ возможности построения n -воротных ферритных циркуляторов	483
А. Кобус: Основы теории датчиков Холла	495
Т. Кобыляж: Непосредственный метод проектирования линейных электрических цепей с помощью программ машинного анализа при применении „mixed method”	19
М. Козловски: Подбор номинальных мощностей обмоток в трехобмоточном трансформаторе с точки зрения динамической прочности	205
Х. С. Козловски, Я. Коск: Влияние формы и размещения аксиальных вентиляционных каналов на эффективность охлаждения электрических машин	351
З. Косович: Влияние диаметра короткозамкнутого ротора исполнительного двигателя на критерий отсутствия самохода	381
М. Краковски: Сопротивления линейных электрических цепей	443
Ч. Круликовски: Один из методов аналитического подхода к вопросу вольтамперных характеристик дуговых плазменных горелок постоянного тока	403
Ч. Круликовски: Метод определения области стабильной работы дуговых плазменных горелок с посредственной и непосредственной дугой	551
В. Кузьняр: Измерения ударных напряжений выпрямительно-конденсаторными методами	607
С. Лукасик: Вопросы точности кальмановской оценки при неполной информации о процессе	421

Ф. С. Ляхович: Индукционное влияние тока короткого замыкания на землю в воздушной линии электропередачи, на рельсы однопутной железнодорожной линии . . .	567
В. Лясоцки: Тепловая схема замещения сухого трансформатора	231
Я. Мигдальски: Надежность многоэлементных переключателей	113
Т. Миссалья: Теория дифференциального сельсина и анализа ошибок, вытекающих из неточности обработки	151
М. Налэнч, Я. Э. Рийнсдорп: Умножитель трех величин с движущимся датчиком Холла и его применение в контрольно-измерительной технике	3
Р. Неведзял: Обобщение характеристик дугового разряда в плазменной дуговой горелке постоянного тока	677
Я. Ханьдерек, Ю. Дудек, Б. Эзоп: Термоэлектрический эффект в системе контактов металл-РbTiO ₃ -металл	67
В. Паевски: Акустические волны в электронике	285
К. Пшановски: Передача электроэнергии по линиям сверхвысоких напряжений (свыше 420 кв.)	247
А. Смолински: Стандартные импульсные сигналы в ч.	515
К. Шеп: Гармонический анализ электромагнитного поля в воздушном зазоре явнополюсной синхронной машины	653
К. Яхович-Котёлэк: Метод расчета установившихся токов внутренних коротких замыканий в обмотке статора неявнополюсной синхронной машины	189

KOMITET ELEKTROTECHNIKI
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XVIII·ZESZYT 1

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1972

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny

PROF. DR WITOLD NOWICKI

Członkowie

PROF. TADEUSZ CHOLEWICKI, PROF. EUGENIUSZ JEZERSKI,
PROF. DR WITOLD ROSIŃSKI, PROF. DR STANISŁAW RYŻKO

Sekretarz

JANINA MATHEISEL

ADRES REDAKCJI

*Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1
Instytut Teleelektroniki, Gmach Elektroniki
pokój 343, tel. 21-007-564 oraz 25-09-10*

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Młódzka 10

Nakład 640 (515+125)	Oddano do składania 22. X. 1971 r.
Ark. wyd. 19,5 ark. druk. 15,25	Podpisano do druku w lutym 1972
Papier druk. sat. kl. III, 80 g, 70×100	Druk ukończono w marcu 1972
Zamówienie nr 1376/71	Cena zł 40.— A-89

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

A Hall Effect Three-Variable Multiplier with Moving Part and Possible Applications in Process Instrumentation

MACIEJ NAŁĘCZ (WARSZAWA)

Institute of Automatic Control, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland

JOHN E. RIJNSDORP (TWENTE)

Afdeling, CT Technische Hoge School, Twente, Netherlands

The article has been delivered on 12.2.1971

The paper presents a new method of multiplication of three variables, whereby one of the variables is related to mechanical displacement of a Hall Generator in a nonuniform magnetic field. The configurations of the magnetic circuits are discussed and the functions of an actual multiplier constructed at the Institute of Automatic Control of the Polish Academy of Sciences are presented. In the second part some possible applications of the three-variable multiplier to process instrumentation are given.

1. INTRODUCTION

The idea of using the Hall Effect in measurements of mechanical displacements and vibrations was presented some years ago [1, 2]. If magnetic flux density B (gauss) acts on

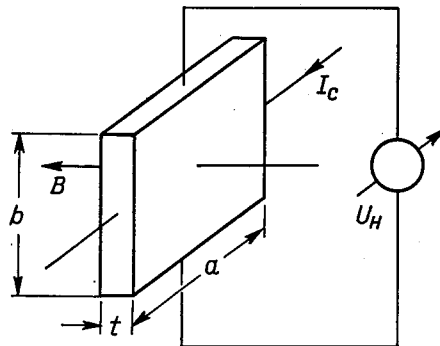


Fig. 1. Hall Effect Generator

a perpendicularly located semiconductor plate (Fig. 1) and the value of the control current is I_c (amperes), a Hall voltage U_H (volts) will occur at the output electrodes of the plate and its value is defined by the following formula:

$$U_H = R_H \frac{B \cdot I_c}{t} 10^{-8} \quad (1)$$

where:

R_H = Hall constant ($\text{cm}^3/\text{A sec}$),

t = thickness of plate (cm).

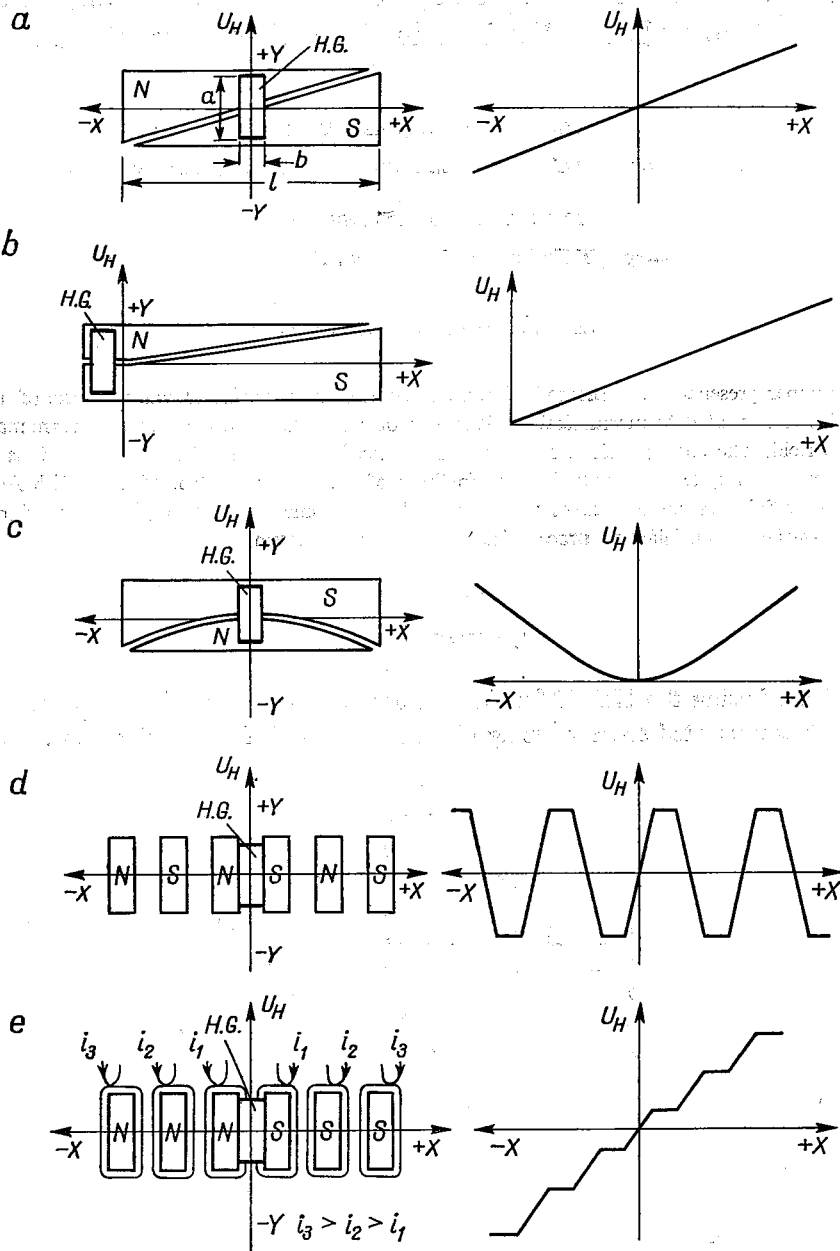


Fig. 2. Configurations of magnetic circuits and related characteristics of Hall Effect transducer for measuring mechanical displacements

If the Hall generator is moved mechanically in a non-uniform magnetic field, the Hall voltage output will vary with displacement

$$U_H = f(x) \quad (2)$$

where x = mechanical displacement (cm).

Using this principle a seismograph [3], accelerometer [4], pendulum, microphone, and an instrument for measuring the hand tremors [5] were constructed. Some configurations of the magnetic circuit producing the nonlinear magnetic field strength were presented too.

This paper proposes another configuration of the magnetic circuit (Fig. 2). The Hall plate is moving in the air gap between two North Poles (N) and two South Poles (S) in the x direction. In Fig. 2 are shown the lower poles; the other poles of the same shape but of opposite polarity are located above the plane of the paper. The function $U_H = f(x)$ can be linear with zero in the middle (Fig. 2a), linear starting from zero (Fig. 2b), nonlinear with any desired shape (Fig. 2c) or of digital type (Fig. 2d). In this case permanent magnets or magnetized magnetic tape may be used.

The permanent magnets can be replaced by a series of electromagnets. The maximum value of the magnetic field may be different for each electromagnet (Fig. 2e).

Using a magnetic circuit similar to that presented in Fig. 2a, a construction of a three-variable Hall Effect multiplier was proposed [6] and briefly reported at the International Measurement Cooperation Conference (IMEKO) 1967 in Warsaw [7].

2. PRINCIPLE OF OPERATION

The Hall Generator itself gives an easy possibility of multiplication of two factors: magnetic field density B (or the current of the corresponding electromagnet coil I_{el}) and the control current I_c , when the Hall constant R_H and the thickness of the plate t are constant (1):

$$U_H = k_1 \cdot B \cdot I_c. \quad (3)$$

The perpendicular component B of the magnetic field density in the configuration of Fig. 2a is an odd-symmetric function with respect to the middle of the air gap (see Fig. 3). Here Y is the coordinate along the middle of the Hall generator plate. B rapidly approaches an asymptotic value ($B_{\max}$) on either side of the air gap.

In first approximation this relationship between B and Y can be approximated by a step-type function (See dashed line in Fig. 3). Then the average value of B is proportional to the algebraic sum of the area of the upper trapezoidal part of the plate where $B \approx -B_{\max}$, and the area of the lower trapezoidal part of the plate, where $B \approx +B_{\max}$ (See Fig. 2a):

$$\bar{B} = \frac{B_{\max} \left[-\left(\frac{a}{2} - x \tan \beta\right) b + \left(\frac{a}{2} + x \tan \beta\right) b \right]}{ab} = \frac{2B_{\max} \tan \beta}{a} x \quad (4)$$

where:

a is the height of the plate,

b is the width of the plate,

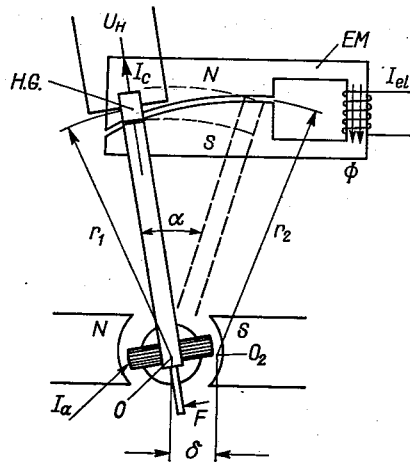


Fig. 4. Hall Effect three-variable multiplier

The value and sign of magnetic field density B depend on the position of the plate and on the value of electromagnet current I_{el} . The value of the Hall voltage U_H (3), depends on the component of the magnetic field density B which is perpendicular to the plate. Therefore the electromagnet should be constructed in the way it is presented in Fig. 5

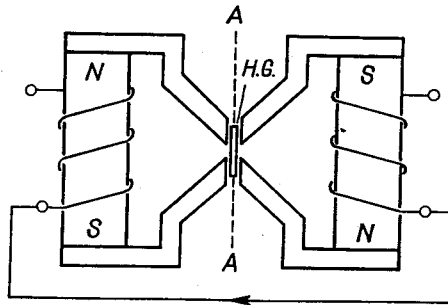


Fig. 5. Configuration of magnetic circuit of the three-variable multiplier

which shows the plane perpendicular to Fig. 4 (indicated by A—A). When the angular movement α_x of the arm with the Hall generator is caused by an external force F (Fig. 4), then the Hall voltage is equal to:

$$U_H = k_5 \cdot F \cdot I_{el} \cdot I_c. \quad (7)$$

The Hall generator may also be mounted on the pointer of a moving-coil instrument. The movement is then proportional to the current I_α , and the formula for Hall voltage will be the following:

$$U_H = k_6 I_\alpha \cdot I_{el} \cdot I_c \quad (8)$$

In this last case (8) one obtains a three-variable multiplier, where the currents of (a) the moving-coil instrument, (b) the electromagnet, and (c) the control current of the Hall generator are multiplied.

3. CONSTRUCTION OF THE INSTRUMENT

Fig. 6 presents the three variable multiplier constructed at the Institute of Automatic Control of the Polish Academy of Sciences. This illustration shows part of the moving arm (1) with the unseen Hall generator between the pole-pieces (4) of the electromagnets

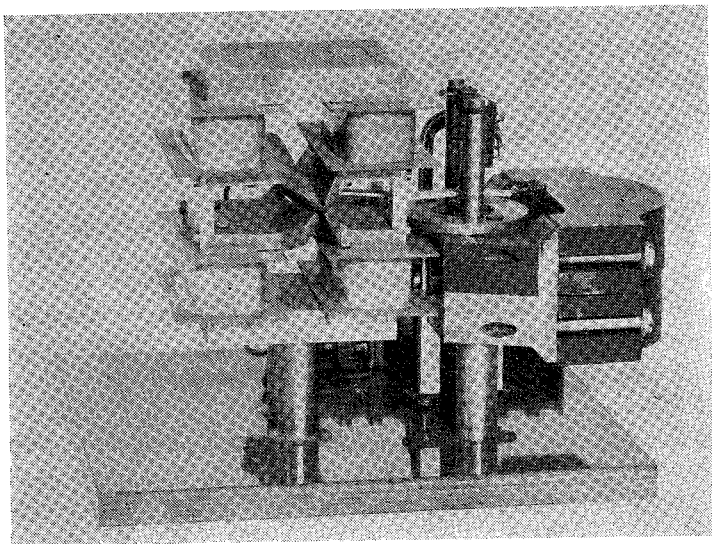


Fig. 6. Photo of the Hall Effect three-variable multiplier constructed at the Institute of Automatic Control, Polish Academy of Sciences

(2) with four coils (3). The connections of control current I_c and the Hall voltage U_H of the Hall generator are made by springs (5). The movement of the arm is caused by the moving-coil instrument with the coil (6) and magnetic system (7). In many applications it is important to have linear relationships between the variables presented in equations (6), (7), and (8).

Errors of Hall generator transducers in mechanical measurements arise from several sources [6]. Some are connected with the technology of the Hall generator itself, such as unsymmetrical location of Hall electrodes, voltages induced in the wires coming to the Hall generator, nonlinearity of the function $U_H = f(B)$ and the influence of temperature on the Hall constant and internal resistance. These errors are easy to compensate in electronic circuits.

Some come from the magnetic circuit, like: additional voltages from earth or outside magnetic fields and, which is much more important, nonlinearity of the function $B = f(x)$ and the influence of the ferromagnetic material of the electromagnets. The nonlinearity of the function $B = f(x)$ is apparent in the case of angular displacement x_a (Fig. 4), because the distance between two arcs determines the change of the Hall voltage. However, for a certain range of x , B can be considered as a linear function of x .

The influence of the hysteresis loop and eddy currents of the ferromagnetic material of the electromagnets can be disregarded when the laminated electromagnet core and its pole pieces are made from permalloy punchings and glued together (Fig. 6).

4. EXPERIMENTAL RESULTS

The following characteristics of the device have been obtained from experimental tests

$$U_H = f_1(I_c); \text{ for several values of } I_{el} \text{ and } I_\alpha = \text{const.} \quad (\text{Fig. 7})$$

$$U_H = f_2(I_\alpha); \text{ for several values of } I_c \text{ and } I_{el} = \text{const.} \quad (\text{Fig. 8})$$

$$U_H = f_3(I_{el}); \text{ for several values } I_\alpha \text{ and } I_c = \text{const.} \quad (\text{Fig. 9})$$

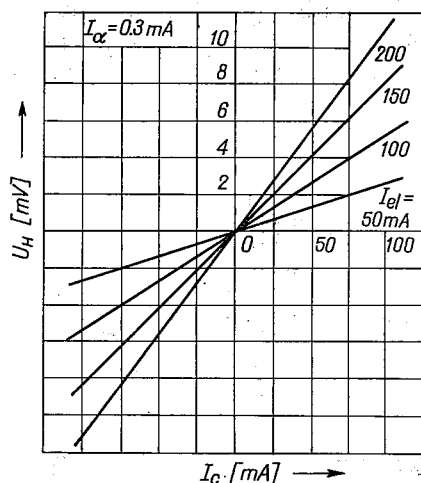


Fig. 7. Hall voltage U_H as a function of control current I_c , for several values of electromagnet coil current I_{el} ($I_\alpha = \text{const.}$)

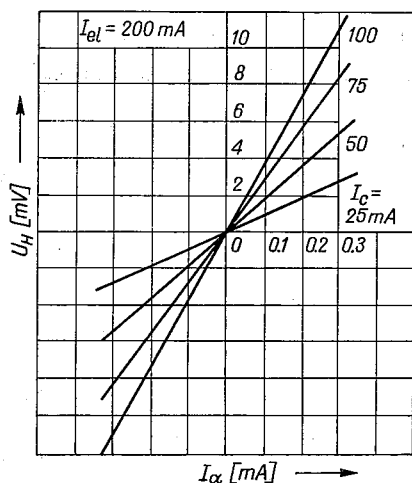


Fig. 8. Hall voltage U_H as a function of moving coil instrument current I_α , for several values of control current I_c ($I_{el} = \text{const.}$)

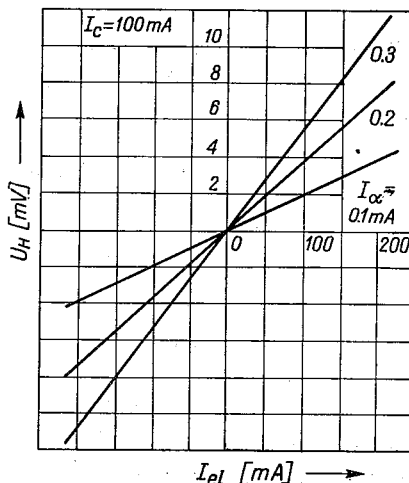


Fig. 9. Hall voltage U_H as a function of electromagnet coil current I_{el} , for several values of the moving coil instrument current I_α ($I_c = \text{const.}$)

The measurements were done using direct current, but sometimes it is more convenient to use alternating current, for example for control current I_c . Then the Hall voltage is also a.c. and it is easier to amplify the signal, which may be important for telemetering purposes.

5. POSSIBLE APPLICATIONS OF THE THREE VARIABLE MULTIPLIER TO PROCESS INSTRUMENTATION

The three variable multiplier can be applied to the measurement of fluid flow rate in the process industry. The primary device widely used for this purpose is the rectangular orifice plate (Fig. 10). In the opening of the orifice the velocity of the fluid is larger than

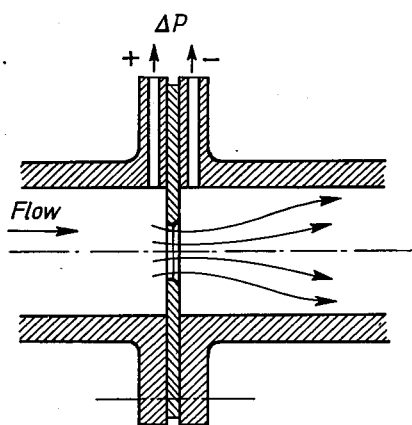


Fig. 10. Orifice plate with flange taps

it is upstream, hence pressure head is converted into kinetic energy in accordance with Bernoulli's law. It can be shown [8] that the differential pressure ΔP across the orifice is equal to:

$$\Delta P = k_7 \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) = k_8 \frac{(\rho v A)^2}{\rho} = k_8 \frac{Q^2}{\rho} \quad (9)$$

where:

ρ is the fluid density,

A is the internal cross-sectional area of the pipe,

Q is the mass flow rate, and

v is the velocity.

When the measurement has been set up correctly [9], coefficient k_8 can be considered as a constant over the range of the flow measurement.

In present day industrial practice [10], the differential pressure is converted into a torque by means of one or two diaphragms, or into a displacement by means of bellows and springs. Fig. 11 shows one of the possibilities. Here the upstream and the downstream pressures have been applied to two bellows. The displacement of the connecting

rod c is converted into a rotation of arm m with respect to pivot O . The rotation, which is proportional to the applied differential pressure ΔP :

$$x_\alpha = k_9 \Delta P \quad (10)$$

can be used as the mechanical input of the three variable multiplier.

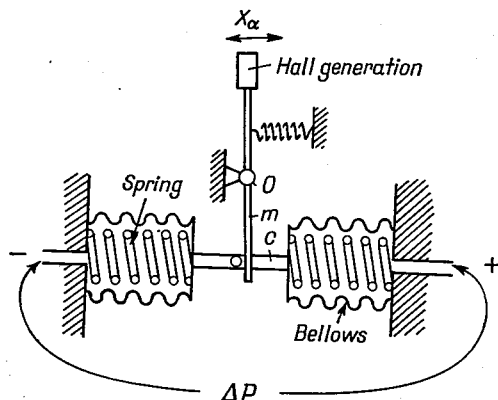


Fig. 11. Scheme of simple differential pressure transducer

Using (9):

$$x_\alpha = k_9 k_8 \frac{Q^2}{\rho} = k_{10} \frac{Q^2}{\rho}. \quad (11)$$

The other inputs (the control current I_c , and the electromagnet coil current I_{el}) can now be used for a variety of purposes.

5.1. Mass flow measurement

Either current can be obtained from an electronic instrument for measuring the in-line density ρ . The output signal of these instruments usually is a current I_ρ in the milliamperere range (e.g. 1—5, 4—20, or 10—50 mA). If the instrument has no built-in zero shift, it is then necessary to apply a constant zeroing current I_0 in the opposite direction (1, 4 or 10 mA). When, for instance, I_c is chosen for ρ :

$$I_c = I_\rho - I_0 = k_{11} \rho. \quad (12)$$

Introducing (12) and (11) into (6) yields:

$$U_H = k_4 \left(k_{10} \frac{Q^2}{\rho} \right) I_{el} (k_{11} \rho) = k_{12} Q^2 \quad (13)$$

or,

$$Q = k_{13} \sqrt{x_\alpha I_c} \quad (14)$$

where:

$$k_{12} = k_4 k_{10} k_{11} I_{el}, \quad (15)$$

$$k_{13} = (k_{10} k_{11})^{-1/2}, \quad (16)$$

$$x_\alpha = k_9 \Delta P, \quad (10)$$

$$I_c = k_{11} \rho. \quad (12)$$

The mass flow rate is therefore proportional to the square root of the Hall voltage divided by the electromagnet coil current, which certainly is an improvement over the conventional instrument (where the mass flow rate is proportional to the square root of the output multiplied by the density). The third input (here I_{el}) can be used to adjust the constant of proportionality, or, in other words, the measuring span of the instrument. In this way a relatively simple device is obtained for measuring mass flow rate, the span of which can be adjusted from a distance, e.g. from the control room where the operation of the plant is supervised.

5.2. Mass-flow measurement for gases

In the case of measurement of gas flow rate, the density depends on the pressure P and the absolute temperature T in accordance with the gas law [11]:

$$\rho = \frac{MP}{ZRT} \quad (17)$$

where:

M is the molecular weight,

R is the universal gas constant,

Z is the compressibility factor which accounts for the deviation from the ideal gas law (a function of P/P_{critical} and T/T_{critical} , see [11]).

Under normal operating conditions, the deviation ΔT of the absolute value of the temperature from its average value $\bar{T}$ is usually small. Then

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\bar{T} + \Delta T} = \frac{1}{\bar{T} \left(1 + \frac{\Delta T}{\bar{T}}\right)} \approx \frac{1}{\bar{T}} \left(1 - \frac{\Delta T}{\bar{T}}\right) = \frac{1}{\bar{T}^2} (2\bar{T} - T) \quad (18)$$

e.g., when $\bar{T} = 300^\circ \text{K}$, and $\Delta T = \pm 30^\circ \text{C}$, the error goes from -1% (for $T = 270^\circ \text{K}$) via 0% (for $T = 300^\circ \text{K}$) to $+1\%$ (for $T = 330^\circ \text{K}$). By replacing $1/\bar{T}$ in (18) by $1.005/\bar{T}$, the error is reduced to $\pm 0.5\%$. This value is acceptable in view of the total error of flow measurement by orifice, which is at least two percent of full scale. Except for conditions close to the critical temperature and pressure, Z can be approximated by its average value.

A current proportional to the right hand side of (14) can be obtained from an industrial temperature measuring device together with a biasing current (corresponding to the term $2\bar{T}$ in (14)). When this current (I_c), and the current (I_{el}) obtained from the pressure measuring device (corrected by a zeroing current; see above formula (12)) are used as

inputs to the three-variable multiplier,

$$I_c = k_{14} \frac{1}{T}, \quad I_{el} = k_{15} P. \quad (19)$$

The output voltage is given by using (11) and (19) in (6):

$$\begin{aligned} u_H &= k_4 \left(k_{10} \frac{Q^2}{\rho} \right) \left(k_{14} \frac{1}{T} \right) (k_{15} P) \\ &= k_{16} \left(\frac{Q^2}{\rho} \right) \left(\frac{P}{T} \right) \\ &= k_{16} \left(\frac{Q^2}{\rho} \right) \left(\frac{\rho ZR}{M} \right) \quad (\text{see (17)}) \\ &= \frac{k_{16} ZR (Q)^2}{M} \\ &= k_{17} Q^2 \end{aligned} \quad (20)$$

or,

$$Q = k_{18} \sqrt{x_\alpha I_c I_{el}} \quad (21)$$

where:

$$k_{18} = \sqrt{k_4 M / ZR k_{16}} \quad (22)$$

$$x_\alpha = k_9 \Delta P \quad (10)$$

$$I_c = k_{14} \frac{1}{T} \quad (19)$$

$$I_{el} = k_{15} P. \quad (19)$$

The last step in (20) is sound when the molecular weight of the gas is practically constant.

Again a relatively simple instrument is obtained for measuring mass flow rate of gas having a quadratic scale.

5.3. Heat flow measurement

In some cases it is desirable to control the heat flow rate absorbed by a heat exchanger, evaporator, condenser, etc. Provided the heating or the heated fluid does not change phase, the heat flow rate H is approximately equal to (see Fig. 12)

$$H = c_p Q |T_{in} - T_{out}| \quad (23)$$

where c_p is the specific heat of the fluid.

When the current obtained from the differential temperature measuring device is connected to the electromagnet coils and the Hall generator in series:

$$I_c = k_{18} |T_{in} - T_{out}| \quad (24)$$

$$I_{el} = k_{19} |T_{in} - T_{out}|. \quad (25)$$

The Hall voltage equals (by substitution of (11), (24), and (25) into (6)):

$$U_H = k_4 \left(k_{10} \frac{Q^2}{\rho} \right) k_{18} k_{19} (T_{in} - T_{out})^2 = k_{20} \frac{Q^2}{\rho} (T_{in} - T_{out})^2 \quad (26)$$

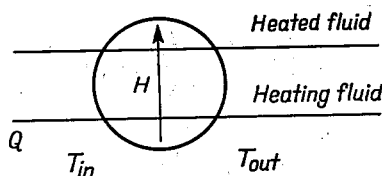


Fig. 12. Heat exchanger with heating fluid not changing phase

and, with (21) and $\rho \approx \text{constant}$:

$$U_H = k_{21} H^2 \quad (27)$$

or,

$$H = k_{22} \sqrt{x_\alpha I_c I_{el}} \quad (28)$$

where:

$$k_{22} = \sqrt{k_4 \rho / k_{20}} \quad (29)$$

$$x_\alpha = k_9 \Delta P \quad (10)$$

$$I_c = k_{18} |T_{in} - T_{out}| \quad (24)$$

$$I_{el} = k_{19} |T_{in} - T_{out}|. \quad (25)$$

There is no correction for variations of ρ in conventional heat flow meters [12], hence the final step in the derivation of (20) is not objectionable in industrial applications.

5.4. Internal reflux flow measurements

A special case of 5.3 is the measurement of internal reflux flow rate in distillation columns [13, 14]. The relationship between internal (R_{INT}) and external (Q) reflux flow rate (see Fig. 13) is given by:

$$R_{INT} = Q[1 + k_{23}(\Delta T)] \quad (30)$$

where (ΔT) is the degree of subcooling of the reflux (expressed in °F or °C). When the current obtained from the differential temperature measuring device supplemented by the correct biasing current is connected to the electromagnet coils and the Hall generator in series, the Hall voltage equals (in analogy to the derivation of (26)):

$$U_H = k_{24} \frac{Q^2}{\rho} [1 + k_{23}(\Delta T)]^2 \quad (31)$$

and, with (30), and $\rho \approx \text{constant}$:

$$U_H = k_{25} R_{INT}^2 \quad (32)$$

or

$$R_{INT} = k_{26} \sqrt{x_{\alpha} I_c I_{el}} \quad (33)$$

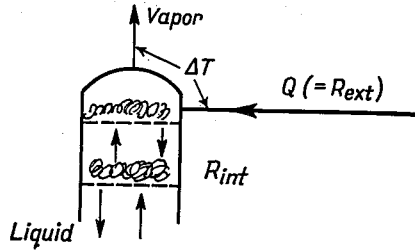


Fig. 13. External and internal reflux flow in distillation column

where:

$$k_{26} = \sqrt{k_4 \rho / k_{24}} \quad (34)$$

$$x_{\alpha} = k_9 \Delta P \quad (10)$$

$$I_c = k_{27} [1 + k_{23} (\Delta T)] \quad (35)$$

$$I_{el} = k_{28} [1 + k_{23} (\Delta T)]. \quad (36)$$

5.5. Component flow measurement

When a fluid stream contains an important component, the three-variable multiplier can be used to calculate the flow rate pertaining to this component. This requires a concentration measuring device having a current output signal and connected to the electro-magnet coils and the Hall generator in series. Again, in analogy to the derivation of (27) and (28):

$$U_H = k_{28} \frac{Q^2}{\rho} X^2 \approx k_{29} (QX)^2 \quad (37)$$

or,

$$QX = k_{30} \sqrt{x_{\alpha} I_c I_{el}} \quad (38)$$

where:

$$k_{30} = \sqrt{k_4 \rho / k_{28}} \quad (39)$$

$$x_{\alpha} = k_9 \Delta P \quad (10)$$

$$I_c = k_{31} X \quad (40)$$

$$I_{el} = k_{32} X \quad (41)$$

and X is the concentration of the important component in the fluid.

FINAL REMARKS

In principle, the same instrument can be used for all above mentioned applications. It can then also be used as an ordinary flow measuring instrument whereby I_c and I_{el} are constant currents. In all cases, the instrument has a quadratic scale.

In industries where flammable or explosive fluids are being processed, the instrument should be made explosion proof [15].

The output signal of the instrument can easily be transmitted over distances common in modern plants (100 ÷ 1000 feet) because the impedance level is low, and the voltage level is higher than that of industrial thermocouples.

By introduction of I_{el} or I_c in the form of an ac current, U_H becomes an ac voltage which can simplify the instrumentation at the receiving end.

7. CONCLUSION

The three-variable Hall-effect multiplier is a simple and reliable device for computing the product of a mechanical displacement or rotation and two electrical currents. It shows good promise of being useful in the process instrumentation field, among others, when the mechanical input is associated with orifice flow measurement. Of course, many other applications are possible too, provided the mechanical output from an instrument can be connected to the corresponding input of the three-variable multiplier.

Acknowledgment. The part of this study connected with construction of the instrument was performed at the Institute of Automatic Control of the Polish Academy of Sciences and the part dealing with applications at Polytechnic Institute of Brooklyn.

The authors want to express their thanks to Mr. Henryk Ziomecki of the Institute of Automatic Control of the Polish Academy of Sciences for his work on construction of the multiplier, to the Department of Electrical Engineering of Polytechnic Institute of Brooklyn for support in preparing this material for publication, and to the National Science Foundation for the Fellowship award under which the second author has done his work.

REFERENCES

1. M. Nałecz, Mechanical Measurement — Use of Hall Effect, *Elektronik Technology*, Vol. 38, 1, pp. 15—17 (1961).
2. M. Nałecz and Z. L. Warsza, Hall Effect Transducers for Measurement of Mechanical Displacements, *Solid-State Electronics*, Vol. 9, pp. 485—495 (1966).
3. M. Nałecz and I. Zawicki, A Seismograph with Hall Transducer, *Bull. Seismological Soc. Am.*, Vol. 52, no. 12, April 1962.
4. M. Nałecz and H. Ziomecki, A Hall Effect Accelerometer, *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 276, no. 1, July 1963.
5. M. Nałecz, On Accuracy and Sensitivity of the Hall Generator Transducer in Mechanical Measurements, *Acta IMEKO*, 1964, 21-PO-183, III International Measurements Cooperation Conference Stockholm 1964.
6. M. Nałecz, Regulator wieloparametrowy, Patent 54683, 19.XII.1964.

7. M. Nałęcz, Z. Dunajski, W. Torbicz, H. Ziomecki, Three-Variable Multiplier, Inductance Meter and Analog Memory Device on the Basis of Hall Effect, Acta IMEKO-1967, PO-156, IV International Measurements Cooperation Conference, Warsaw 1967.
8. Fluid Meters, Their Theory and Application, A.S.M.E., Research Committee on Fluid Meters, 5th Ed. (1959).
9. ASME PTC 19.5; 4 Instruments and Apparatus: Flow Measurement (Issued 1959).
10. G. C. Carroll, Industrial Process Measuring Instruments, McGraw-Hill (1962).
11. J. H. Perry, Chemical Engineers' Handbook, McGraw-Hill, 4th Ed. (1963), Chapt. 3.
12. M. W. Oglesby and D. E. Lupfer, Feed Enthalpy Computer Control of a Distillation Column, Control Eng., Vol. 9, No. 2, 87—8, Feb. 1962.
13. D. E. Lupfer and D. E. Berger, Computer Control of Distillation Reflux, I.S.A. Journal 6 (1959), No. 6 (June), 34—9.
14. *ibid.*, Oil & Gas Journal 57 (1959), No. 32 (Aug. 3), 68—72.
15. BS229, Flameproof Enclosure for Electrical Apparatus, British Standards Institute.

M. NAŁĘCZ, J. E. RIJNSDORP

MNOŻNIK TRZECH WIELKOŚCI Z RUCHOMYM HALLOTRONEM I JEGO ZASTOSOWANIA W TECHNICIE POMIAROWEJ

Streszczenie

W artykule podano zasadę działania nowego elementu mnożącego trzy wielkości. Jedną z wielkości wejściowych może być przesunięcie mechaniczne wywołujące ruch hallotronu w niejednorodnym polu magnetycznym wytworzonym przez elektromagnes. Przedstawiono konstrukcję oraz charakterystyki elementu mnożącego, wykonanego w Instytucie Automatyki PAN. W drugiej części artykułu podano zastosowania elementu mnożącego trzy wielkości w układach pomiarowych.

M. NAŁĘCZ, J. E. RIJNSDORP

LE MULTIPLICATEUR DE TROIS GRANDEURS AVEC LE GÉNÉRATEUR MOBILE À EFFET HALL ET SES APPLICATIONS POUR DES MESURES

Résumé

L'article présente le principe de fonctionnement d'un nouveau multiplicateur de trois grandeurs. Une des trois grandeurs peut être le déplacement d'élément à effet Hall dans le champ magnétique d'électro-aimant.

On donne la construction et les caractéristiques du multiplicateur produit dans l'Institut d'Automatique de l'Académie Polonaise des Sciences.

La deuxième partie du travail est consacré aux applications du multiplicateur pour les mesures.

M. NAŁĘCZ, J. E. RIJNSDORP

EIN HALL-GENERATOR-MULTIPLIKATIONSGLIED VON DREI KOMPONENTEN UND SEINE ANWENDUNGSMÖGLICHKEITEN IN DER VERFAHRENSTECHNIK

Zusammenfassung

Im Beitrag wird eine neue Methode der Multiplizierung dreier veränderlichen Größen angegeben, von denen eine die mechanische Verschiebung des Hallgenerators im nicht homogenem magnetischen Feld ist. Es werden die Konstruktion und Kennlinien eines im Institut für Automatisierung der Polnischen

Akademie der Wissenschaften ausgeführten Modells beschrieben. Im zweiten Teil des Beitrages wurden die Anwendungsmöglichkeiten der Multiplikationsglieder von drei Komponenten in der Verfahrenstechnik behandelt.

М. НАЛЭНЧ, ДЖОН Е. РИЙНДОРП

УМНОЖИТЕЛЬ ТРЕХ ВЕЛИЧИН С ДВИЖУЩИМСЯ ДАТЧИКОМ ХОЛЛА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКЕ

Р е з ю м е

В статье описан принцип действия нового типа умножителя трех величин, одной из которых может быть например механическое перемещение, вызывающее перемещение датчика Холла в неоднородном магнитном поле, которое возбуждается электромагнитом.

Показана конструкция и приведены характеристики умножительного блока, сконструированного в Институте Автоматики ПАН.

Во второй части статьи приведены некоторые возможные применения умножительного блока в измерительной технике.

The Direct Design of Linear Circuits by Means of Computer Circuit Analysis Programs Having a Mixed Method Approach

THADDEUS J. KOBYLARZ¹⁾

Stevens Institute of Technology, Hoboken, New Jersey, USA

The article has been delivered on 31.3.1971

Computer aided design of circuits is usually performed by iterative analysis or by special programs written for severely restricted topologies. An algorithm is described in this paper which will permit direct, rather than iterative, design of circuits for which topological restrictions are slight. An additional advantage exists for the algorithm in that it includes much of the computational steps found in the class of mixed-method circuit analysis algorithms. This means that only a few changes need to be made in order to convert a mixed-method circuit analysis program into a circuit design program. Because many such analysis programs have been used and debugged over a period of several years, the direct design conversion can quickly attain widespread use with programs having proven results.

1. INTRODUCTION

This paper addresses itself to the problem of converting the "mixed method" approach of circuit analysis (Ref. 1) into a technique capable of yielding design equations with a digital computer. The motive here is to retain as much as possible of an original circuit analysis program and supplement it with relatively simple algorithms to achieve a synthesis program. Because many mixed method circuit analysis programs exist which have been used for a number of years and are virtually completely debugged, the availability of such alterations can greatly hasten the widespread use of design programs. It is also important to point out that the conversion is to direct design; as opposed to design by iterative analysis. Design by iterative analysis is largely a heuristic art. Therefore, direct design is capable of yielding results with increased frequency and reliability.

It may be premature, in the sense of comprehension, to now indicate the alterations needed to convert a circuit analysis program into a direct design program. However, it seems appropriate at this point to manifest the simplicity of the conversion. Direct design can be achieved as follows:

1. Find the tie-set equations from a tree with the following properties:
 - a. Unknown voltage constrained branches regarded as voltage generators,
 - b. Unknown current constrained branches regarded as current generators,

¹⁾ On leave at the Katedra Teletransmisji Przewodowej, Politechnika Warszawska, Warsaw, through a Polish Academy of Sciences/U.S. National Academy of Sciences Research Exchange Grant.

- c. Known constrained elements regarded as tree branches,
- d. Unknown unconstrained elements regarded as links,
- e. A tree/co-tree assignment which conforms to Table 1 for the remaining elements
2. Find the cut-set equations from a tree with the following properties:
 - a. Known constrained elements regarded as links,
 - b. Unknown unconstrained elements regarded as tree branches,
 - c. Properties a, b, and e of step 1.
3. Operate the remainder of the mixed method analysis program without alteration to find:
 - a. Current equations for unknown voltage constrained elements and for unknown unconstrained elements,
 - b. Voltage equations for unknown current constrained elements and for unknown unconstrained elements,
 - c. Any other equations desired by the user.

Mixed method analysis programs invariably have algorithms which determine the tie-set and cut-set equations. Therefore, the only new requirement posed by steps 1. and 2. is to form trees with the properties cited above. The generation of these trees does not represent the subject matter here. Rather, this report is devoted to the development of the above three steps and the justification of this algorithm.

The synthesis relationships, which such a program yields, are for unknown branches (one-ports) of a partially designed circuit. These relationships may then be utilized to formulate the topology and element values of the unknown branches. The basic topology of the circuit must be specified by a user. Included in the specification are known elements, imbedded constraints (Ref. 2), and the unknown branches. The constraints correspond to the branch voltages and branch currents required in the design. As many unknown branches may be specified, as there are constraints. The resultant design equations are functions of the independent sources (generators), known circuit branches, and the constraints. The algorithm also permits computations of branch voltages and branch currents, of branches with known elements, in terms of the same variables. (Note — The word *algorithm* is used in a generic sense throughout the paper. That is, an algorithm consists of sub-algorithms, which are themselves algorithms, consisting of sub-algorithms, etc.)

Although numerical computation of effective impedance or effective admittance for the unknown one-ports may be performed, the most effective use is made when the supplementary algorithms are applied to an analysis program with some symbolic capability. For example, the mixed method program NASAP (Ref. 3, 4) yields rational polynomials in the Laplace variable " S " with numerical coefficients. The topological determination of an unknown branch is simpler to achieve from a ratio of such polynomials than from a numerical phasor.

The program NASAP '69 Nonlinear (Ref. 5, 6) has the additional feature of being completely symbolic. (Note — This program can perform linear and nonlinear analysis in the time domain. Linear analysis can also be performed in the frequency domain.) Not only does one achieve polynomials of " S " in this case, but the coefficients are symbolic. In this way the design equations can be related to the known circuit elements. Of course, design can be performed on d.c. circuits as well.

The supplementary algorithms have been tested successfully with NASAP '69 Non-linear. Description of the tests and the mechanics in using the program can be found in reference 7. Because the two NASAP programs take a signal-flow graph approach to analysis, relationships of the supplementary algorithms to signal-flow graphs will be drawn. Furthermore, known circuit branches will be assumed to consist of an element accepted by the NASAP programs (Table 1). It should be emphasized, however, that

Table 1

Circuit Elements		
Type	Tree Representation	Co-tree Representation
Resistor	$V = RI$	$I = V/R$
Capacitor	$V = I/SC$	$I = CSV$
Inductor	$V = LSI$	$I = V/SL$
Transresistor	$V_2 = r_{21} I_1$	None
Transconductor	None	$I_2 = g_{21} V_1$
Current Amplifier	None	$I_2 = B_{21} I_1$
Voltage Amplifier	$V_2 = u_{21} V_1$	None
Voltage Generator	$V = F_v(S)$	None
Current Generator	None	$I = F_i(S)$

the supplementary algorithms are general and can be applied to other mixed method matrix approaches, even if "standard" branches are incorporated (Ref. 1).

Concepts such as a "dichotomous" (primitive) signal-flow graph and "closed system" analysis (Mason's rule) will be useful at times. Should information regarding these concepts appear necessary, references 8 through 12 may be helpful.

Although the application of "constraint imbedding" synthesis is not regarded as appropriate subject matter, one example will be given in order to assist in understanding this concept and to stimulate interest. Assume it is desired to compensate the transistor am-

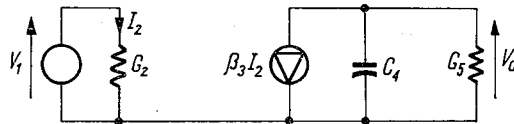


Fig. 1. Transistor Amplifier

plifier, shown in figure 1, such that a desired transfer function $T(S) = V_c(S)/V_1(S)$ is achieved. Because a single constraint $V_c(S)$ exists, one unknown branch may be added to the circuit. The supplementary algorithms permit several locations for the unknown branch. One choice is shown in figure 2. The utilization of a symbolic synthesis program for the circuit shown in figure 2 would lead to equations of the form:

$$I_x = \dot{F}_a(S)V_1(S) + F_b(S)V_c(S),$$

$$V_x = F_c(S)V_1(S) + F_d(S)V_c(S),$$

Because the transfer function $T(S)$ is known, the user would determine the following function for synthesizing the unknown branch:

$$Z_x(S) = \frac{1}{Y_x(S)} = \frac{V_x(S)}{I_x(S)} = \frac{F_c(S) + T(S)F_d(S)}{F_a(S) + T(S)F_b(S)}.$$

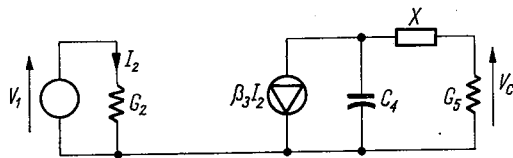


Fig. 2. Amplifier with Unknown Compensation

For the specific circuit shown in figure 2, one has:

$$I_x = G_5 V_c$$

$$V_x = -\frac{\beta_3 G_2}{C_4 S} V_1 - \left(1 + \frac{G_5}{C_4 S}\right) V_c.$$

Assume:

$$T(S) = -K/(1 + \tau S).$$

This yields:

$$Z_x(S) = \frac{V_x}{I_x} = \frac{1}{G_5} \left(\frac{\tau \beta_3 G_2}{K C_4} - 1 \right) + \frac{1}{C_4 S} \left(\frac{\beta_3 G_2}{K G_5} - 1 \right).$$

If the designer had desired to increase the bandwidth of the amplifier, i.e. $\tau < C_4/G_5$, then the unknown branch is realizable by a series R - C circuit.

The function $Z_x(S)$ will, in general, consist of a one-port network containing elements shown in table 1. Of course, the potential exists for "computerizing" the determination of $Z_x(S)$ and its topology. However, this paper is concerned with finding currents (I_x) and voltages (V_x) of unknown branches.

There exist a number of circuit conditions which will be assumed throughout all or most of the paper. In order to relieve the burden of repeating the conditions several times, they will now be enumerated and henceforth cited by number:

1. The circuits consist only of linear elements. (See reference 13 for a definition and some of its consequences.)

2. Each known branch of a circuit consists of a single element appearing in table 1. (It is possible to eliminate this requirement in order to allow standard branches.)

3. The unknown branches are directly controlled one-ports. (This signifies that an unknown branch is connected to the remainder of the circuit at exactly two nodes. Furthermore, the branch current can be written as a function of only the branch voltage $V_x(S)$ or conversely $Z_x(S)$.)

4. Constraints are only designated for directly controlled branches. (The directly controlled branches include the unknown branches and the passive elements: resistors, capacitors, and inductors. An extension which permits constraints to other elements is planned for a future publication.)

5. The designed circuit is analyzeable. (This signifies that it is possible to replace each unknown branch by either its effective admittance $Y_x(S)$ or effective impedance $Z_x(S)$ and determine unique values for all branch voltages and branch currents, including the original constraints. This condition establishes the existence of certain matrix inverses required by the supplementary algorithms.)

6. No branch has both a voltage and a current constraint.

7. The circuit does not have a tie-set consisting of independent voltage sources and voltage constrained elements.

8. The circuit does not have a cut-set consisting of independent current sources and current constrained elements.

The subsequent mathematics will treat matrices, vectors, and scalars. So that a distinction can be made, matrices will appear in script (as $\mathbf{A}$), vectors with one underline (as $\underline{V}$), and scalars with no underline. An inverse will be designated by a “-1” superscript (as $\mathbf{A}^{-1}$) and a transpose by a “ T ” superscript (as $\mathbf{A}^T$). Usually column vectors are utilized in the relationships shown.

2. MIXED METHOD ANALYSIS RELATIONSHIPS

The purpose of this section is to establish a basis for the determination of the algorithms. To do this, symbology will be defined and the fundamental mixed method relationships will be presented in terms of constraints and unknown branches. It is not intended to necessarily describe any new concepts at this point.

Table 2

Glossary of Symbols

E_B	— Branch voltages
I_B	— Branch currents
E_T	— Tree branch voltages
I_T	— Tree branch currents
V_L	— Link voltages
J_L	— Link currents
E_E	— Independent voltages (sources or generators)
I_E	— Currents of independent voltage sources
J_I	— Independent currents
V_I	— Voltages of independent current sources
E_D	— Voltages of unconstrained known, dependent elements in tree
I_D	— Currents of E_D elements
J_D	— Currents of unconstrained, known, dependent elements in co-tree
V_D	— Voltages of J_D elements
E_C	— Constrained voltages
I_C	— Currents of voltage constrained elements
J_C	— Constrained currents
V_C	— Voltages of current constrained elements
E_x	— Voltages of unconstrained, unknown branches in tree
I_x	— Currents of E_x elements
J_x	— Currents of unconstrained, unknown branches in co-tree
V_x	— Voltages of J_x elements

Many symbols are needed for the relationships. The glossary in table 2 defines the symbols employed. Observe that nearly without variation, "E" and "I" are used for tree branches, whereas "V" and "J" are used for links. The known, dependent elements in the table represent an element of table 1 which is not a generator.

Because tree elements and link elements are mutually exclusive, one can write:

$$\underline{E}_B = [\underline{V}_L, \underline{E}_T]^t, \quad (1)$$

$$\underline{I}_B = [\underline{J}_L, \underline{I}_T]^t. \quad (2)$$

Assume now that the dependent elements are assigned to the tree and the co-tree as shown by the relationships below:

$$\underline{E}_T = [\underline{E}_E, \underline{E}_D, \underline{E}_C, \underline{E}_x]^t, \quad (3)$$

$$\underline{I}_T = [\underline{I}_E, \underline{I}_D, \underline{I}_C, \underline{I}_x]^t, \quad (4)$$

$$\underline{J}_L = [\underline{J}_I, \underline{J}_D, \underline{J}_C, \underline{J}_x]^t, \quad (5)$$

$$\underline{V}_L = [\underline{V}_I, \underline{V}_D, \underline{V}_C, \underline{V}_x]^t. \quad (6)$$

Because of condition 3., an unknown can be made either a link or a tree branch. Condition 4. assures no contradiction of assignment between the preceding equations and the tree/co-tree representations. Conditions 6., 7., and 8. also avoid conflicts. Care needs to be taken, however, with the dependent element tree/co-tree assignment since not all dependent elements can be in either of the two. For example, a circuit having a tie-set of generators, voltage constraints, and a voltage amplifier could not be employed.

The fundamental tie-set or loop matrix $\mathbf{T}$ is used in representing Kirchoff's voltage law (KVL) as follows:

$$\mathbf{T}\underline{E}_B = [\mathbf{1} \mid -\mathbf{L}][\underline{V}_L, \underline{E}_T]^t = \mathbf{0}.$$

Considering the preceding relationship and equations (1), (3), (6), allows one to write:

$$\mathbf{1} \cdot \underline{V}_L = \underline{V}_L = \mathbf{L} \cdot \underline{E}_T.$$

Or:

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_I \\ \underline{V}_D \\ \underline{V}_C \\ \underline{V}_x \end{bmatrix} = + \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{L}_{12} & \mathbf{L}_{13} & \mathbf{L}_{14} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} & \mathbf{L}_{23} & \mathbf{L}_{24} \\ \mathbf{L}_{31} & \mathbf{L}_{32} & \mathbf{L}_{33} & \mathbf{L}_{34} \\ \mathbf{L}_{41} & \mathbf{L}_{42} & \mathbf{L}_{43} & \mathbf{L}_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{E}_E \\ \underline{E}_D \\ \underline{E}_C \\ \underline{E}_x \end{bmatrix}, \quad (7)$$

If the number of constraints, hence unknown branches, are zero, then equation (7) reduces to one of the relationships employed in analysis by the mixed method.

The fundamental cut-set matrix $\mathbf{C}$ is used in representing Kirchoff's current law (KCL). It is related to the fundamental tie-set matrix as follows (Ref. 14):

$$\mathbf{C}\underline{I}_B = [\mathbf{L}^t \mid \mathbf{1}][\underline{J}_L, \underline{I}_T]^t = \mathbf{0}.$$

Considering the preceding relationship and equations (2), (4), (5) allows one to write:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_E \\ \underline{I}_D \\ \underline{I}_C \\ \underline{I}_x \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11}^t & \mathbf{L}_{21}^t & \mathbf{L}_{31}^t & \mathbf{L}_{41}^t \\ \mathbf{L}_{12}^t & \mathbf{L}_{22}^t & \mathbf{L}_{32}^t & \mathbf{L}_{42}^t \\ \mathbf{L}_{13}^t & \mathbf{L}_{23}^t & \mathbf{L}_{33}^t & \mathbf{L}_{43}^t \\ \mathbf{L}_{14}^t & \mathbf{L}_{24}^t & \mathbf{L}_{34}^t & \mathbf{L}_{44}^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{J}_I \\ \underline{J}_D \\ \underline{J}_C \\ \underline{J}_x \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Equation (8) also reduces for no unknowns to one of the basic relationships employed by mixed method analysis. The remaining relationship used by this analysis procedure involves the dependent source matrix $\mathbf{D}$. For the sake of convenience, this relationship will be considered to consist of the following three equations:

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_D \\ \underline{J}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{EE} & \mathbf{D}_{EI} \\ \mathbf{D}_{IE} & \mathbf{D}_{II} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{E}_B \\ \underline{I}_B \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_C \\ \underline{J}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{EC} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{JC} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_C \\ \underline{V}_C \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_x \\ \underline{J}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{Ex} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{Jx} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_x \\ \underline{V}_x \end{bmatrix}. \quad (11)$$

It is possible to write equations (9), (10), and (11) because of circuit conditions 1., 2., 3., 4., and 6. Of course, when analysis is performed, no constraints nor unknown branches exist and only (9) is utilized.

It is of interest to relate the preceding to NASAP programs. Therefore, the mixed method equations will be represented in terms of signal flow graphs and analysis by Mason's rule. When no unknowns are assumed to exist, reduced versions of (7) and (8), and only equation (9) need to be considered. In order to simplify the resultant signal-flow graph, the following source and two sink vectors are defined:

$$\underline{G} = [\underline{E}_E, \underline{J}_I]^t, \quad (12)$$

$$\underline{W} = [\underline{E}_D, \underline{J}_D]^t, \quad (13)$$

$$\underline{Y} = [\underline{V}_I, \underline{V}_D, \underline{I}_E, \underline{I}_D]^t. \quad (14)$$

By combining (7) and (8), rearranging rows, and substituting (12), (13), and (14), it is possible to write:

$$\underline{Y} = \mathbf{M}_G \underline{G} + \mathbf{M}_W \underline{W}. \quad (15)$$

Note that equation (15) represents expressions for KVL and KCL. Also, $\mathbf{M}_G$ and $\mathbf{M}_W$ possesses entries having the values 1, -1, and 0.

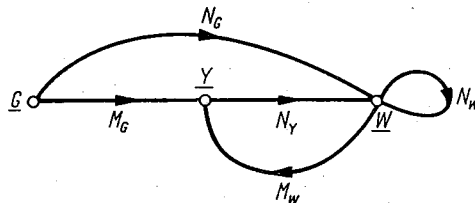


Fig. 3. Mixed Method Signal-Flow Graph

The substitution of (12), (13), and (14) into (9) yields the form:

$$\underline{W} = \mathbf{N}_G \underline{G} + \mathbf{N}_W \underline{W} + \mathbf{N}_Y \underline{Y}. \quad (16)$$

The signal-flow graph corresponding to the simultaneous linear equations of (15) and (16) is shown in figure 3. Mason's rule computes the determinant of the linear equations

by a loop gain equation. (Ref. 11) In terms of figure 3, the determinant is for finding the inverse of:

$$\Delta = (1 - N_W - N_Y M_W). \quad (17)$$

A simple dimensional analysis shows that Δ is square and dimensional consistency exists for the matrix operations. If an inverse of (17) exists, i.e. its determinant is non-zero, then a solution vector exists for (15) and (16); and Mason's rule may be applied. The following shows that an inverse for (17) is sufficient for a solution. Substitution of (15) into (16) yields:

$$\underline{W} = (N_G + N_Y M_G) \underline{G} + (N_W + N_Y M_W) \underline{W}.$$

Or:

$$(1 - N_W - N_Y M_W) \underline{W} = (N_G + N_Y M_G) \underline{G}. \quad (18)$$

As can be seen, the coefficient of $\underline{W}$ is the loop gain equation shown in (17). If Δ^{-1} exists, (18) has a solution for $\underline{W}$. Knowledge of $\underline{W}$ allows $\underline{Y}$ to be found via (15).

The coefficients N_G and $N_Y M_G$ in equation (18) represent the forward path gains between the sources $\underline{G}$ and the sink $\underline{W}$.

This paper will assume that the inverse of (17) exists for a designed circuit. In effect, this is a re-statement of condition 5. from the point of view that Mason's rule is used.

3. ALGORITHM WHEN UNKNOWNNS HAVE CONSTRAINTS

The conditions cited in section 1. permit constraints to be applied to any branch which is directly controlled. This includes unknown branches because of condition 4. It is notationally more convenient to treat synthesis when constraints are only applied to unknown branches and then when constraints are only applied to known branches, rather than both cases simultaneously. The simpler of the two cases, constraints only applied to unknowns, will now be considered.

Because of conditions 3. and 4., it is only necessary to find a current (voltage) equation for each voltage (current) constrained element. Therefore, $\underline{I}_C = \underline{I}_x$ and $\underline{V}_C = \underline{V}_x$. This affords the following simplifications of the general equations (7) and (8):

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_I \\ \underline{V}_D \\ \underline{V}_C \end{bmatrix} = + \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{E}_E \\ \underline{E}_D \\ \underline{E}_C \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_E \\ \underline{I}_D \\ \underline{I}_C \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L'_{11} & L'_{12} & L'_{13} \\ L'_{21} & L'_{22} & L'_{23} \\ L'_{31} & L'_{32} & L'_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{J}_I \\ \underline{J}_D \\ \underline{J}_C \end{bmatrix} \quad (20)$$

The preceding equations tacitly assume the known dependent elements allow the tree/co-tree structure implied. Equation (9) remains unaltered except for a reduction in the distinct vectors which compose $[\underline{E}_B, \underline{I}_B]^t$. Equations (10) and (11) are identical to each other since only unknown elements are constrained. Therefore, only (10) will be considered.

The goal for design is to establish the diagonal entries of equation (10). This can be accomplished by finding equations for $[I_C, V_C]^t$ in terms of known quantities. Because of the diagonal property, a simple ratio establishes the design equations.

Observe that equations (19) and (20) do not include the quantities I_C and V_C on the right-hand-side. Because of this, it is possible to rewrite the two equations as follows:

$$\underline{Y} = \mathbf{M}_G \underline{G} + \mathbf{M}_W \underline{W} + \mathbf{M}_C \underline{C} \quad (21)$$

$$\underline{X} = \mathbf{P}_G \underline{G} + \mathbf{P}_W \underline{W} + \mathbf{P}_C \underline{C}. \quad (22)$$

Where: The symbols previously defined in (12), (13), (14) for $\underline{G}$, $\underline{W}$, and $\underline{Y}$ are the same;

$$\underline{C} = [E_C, J_C]^t, \quad (23)$$

$$\underline{X} = [V_C, I_C]^t. \quad (24)$$

Equation (9) can be written in the form:

$$\underline{W} = \mathbf{N}_G \underline{G} + \mathbf{N}_W \underline{W} + \mathbf{N}_Y \underline{Y} + \mathbf{N}_X \underline{X} + \mathbf{N}_C \underline{C}. \quad (25)$$

Now equations (21), (22), and (25) represent exactly the same form of analysis equations shown for (15) and (16). This becomes evident when the constrained unknowns are considered as sources, i.e.

$$\underline{G}' = [\underline{G}, \underline{C}]^t, \quad (26)$$

$$\underline{Y}' = [\underline{Y}, \underline{X}]^t. \quad (27)$$

Substitution of (26) and (27) allows the reduction of (21), (22), and (25) into the following form:

$$\underline{Y}' = \mathbf{M}'_G \underline{G}' + \mathbf{M}'_W \underline{W}, \quad (28)$$

$$\underline{W} = \mathbf{N}'_G \underline{G}' + \mathbf{N}'_W \underline{W} + \mathbf{N}'_Y \underline{Y}'. \quad (29)$$

The signal-flow graph for the preceding two equations is also the same as in figure 3. Hence, the sufficiency condition for analysis by Mason's rule is the existence of an inverse to the following:

$$\Delta' = (1 - \mathbf{N}'_W - \mathbf{N}'_Y \mathbf{M}'_W). \quad (30)$$

Of course, an inverse to (30) exists if the circuit with unknowns can be analyzed by Mason's rule when the unknown branches are replaced by independent sources having the values of the constraints.

Equations (28), (29), and (30) make it possible to state the algorithm for unknown, constrained branches. "Replace each voltage (current) constrained branch, which is unknown, by a voltage (current) generator." No alteration is made to the remainder mixed method analysis program, since equations (28), (29), and (30) can be viewed as the same analysis equations in (15), (16), and (17). The program merely finds the current (voltage) equations for the voltage (current) constrained branches.

It is quite important to show that the algorithm yields correct results when design equations are achieved and when the designed circuit is analyzable (condition 5.) That is to say, a proof will now be provided which demonstrates that a "sufficiency condition for the applicability of the design equations, yielded by the algorithm, is that it is possible

to analyze the circuit if no branches were unknown." As can be seen, this is a very broad sufficiency condition one usually expects a designer to propose a meaningful circuit topology from a-priori knowledge of the design problem. The proof of the sufficiency condition will be accomplished in the following manner:

1. An equation for the designed value of $\underline{X}$ will be obtained from equations (21), (22), (25), (28), (29), and (30) in terms of $\underline{G}$.
2. The same equation will also be obtained for an $\underline{X}'$ in terms of $\underline{G}$, which results from an analysis of the designed circuit.

Manipulation of equations (28) and (29) yields the following relationship:

$$(1 - \mathbf{N}_W - \mathbf{N}_Y' \mathbf{M}_W') \underline{W} = (\mathbf{N}_G' + \mathbf{N}_Y' \mathbf{M}_G') \underline{G}'.$$

Considering the significance of the right-hand-side of the preceding equation in terms of equations (21), (22), and (25) yields the following result:

$$(1 - \mathbf{N}_W - \mathbf{N}_Y' \mathbf{M}_W') \underline{W} = (\mathbf{N}_G + \mathbf{N}_Y \mathbf{M}_G + \mathbf{N}_X \mathbf{P}_G) \underline{G} + (\mathbf{N}_C + \mathbf{N}_Y \mathbf{M}_C + \mathbf{N}_X \mathbf{P}_C) \underline{C}. \quad (31)$$

Assuming the existence of an inverse, equation (31) can be solved and substituted into equation (22). The form of equation resulting from the substitution is:

$$\underline{X} = \mathbf{A}_G \underline{G} + \mathbf{A}_C \underline{C} \quad (32)$$

The final two steps are to solve for $\underline{X}$ in equation (32), and then to evaluate the diagonal terms of equation (10) from:

$$D_{ii} = C_i/X_i.$$

This results in a matrix $\mathbf{D}_C$ that obeys the equality:

$$\underline{C} = \mathbf{D}_C \underline{X} \quad (33)$$

A substitution of (33) into (32) yields the desired relationships:

$$\underline{X} = \mathbf{A}_G \underline{G} + \mathbf{A}_C (\mathbf{D}_C \underline{X}). \quad (34)$$

Assume now that an analysis is made of the designed circuit. The symbols $\underline{C}'$, $\underline{X}'$, and $\underline{W}'$ will be employed for the analysis equations. Further assume that the same tree/co-tree is selected in the analysis. If this is done, then equations (21), (22), (25), (28), and (29) still apply except that $\underline{C}'$ is now an unknown and the following relationship must be used:

$$\underline{C}' = \mathbf{D}_C \underline{X}' \quad (35)$$

Since the aforementioned five relationships again apply, an equation exactly the same as (31), except for the use of $\underline{W}'$ and $\underline{C}'$, can be derived. Because Δ' is assumed to have an inverse, $\underline{W}'$ can be written as the same linear function of $\underline{G}$ and $\underline{C}'$. A substitution of this linear function into the analysis counterpart of (22) yields the following form of solution for $\underline{X}'$:

$$\underline{X}' = \mathbf{A}_G \underline{G} + \mathbf{A}_C \underline{C}'.$$

A substitution of (35) into the preceding equation yields:

$$\underline{X}' = \underline{A}_G \underline{G} + \underline{A}_C (\underline{D}_C \underline{X}'). \quad (36)$$

Observe that equations (34) and (36) are exactly the same except for a change in variable designations. Since a unique solution exists (analyzeability), $\underline{X} = \underline{X}'$. It is a simple matter to show all other circuit values are the same. Therefore, the design must be valid.

A question still unanswered is "what are the necessary and sufficient conditions for the algorithm to yield design equations?" Observe that the algorithm stated earlier represents a transformation from a circuit with some unknown branches to a circuit for which all branches are known. Therefore, the question of design equation determination is actually whether analysis can be performed on the transformed circuit. The conditions for analysis represent a tedious and lengthy subject when active elements are permitted. Because analysis is not the interest of this paper, this will not be pursued in detail. Several comments relating to the existence of solutions will, however, be mentioned.

Should conditions 1, 2, 3, 4, 6, 7, and 8, be satisfied, then the main cause of no design solution is a singular Δ' . This singularity is generally attributable to active elements. These elements can give rise to unstable systems due to positive feedback. A singularity can also exist for passive networks. Figure 4, for instance cannot be used for design at the

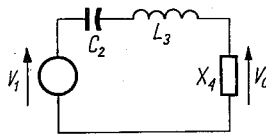


Fig. 4. Passive Circuit Example

L - C resonant frequency. Another point suggested by figure 4, is that a suitable X_4 can exist, for the designer, and an analysis may be possible after the circuit has been designed. The converse may also exist when active elements are used. That is, equations (28) and (29) may be capable of solution. However, an analysis of the designed circuit may yield a singularity due to additional loops.

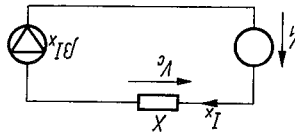


Fig. 5. Circuit with No Solution

The problems cited above can be relieved to a great extent when symbolic analysis is performed. The determinants arising from the algorithm and from the designed circuits can always be evaluated in terms of symbols. This allows the user to test for a singularity and make the necessary adjustments to stabilize the circuit. Unfortunately not all problems

are resolved by symbolic analysis. It is possible to devise circuits with no solution. Figure 5 is an example of this situation. The consequence of using the design algorithm for this circuit is that I_X will not have forward paths and is non-determinable.

4. ALGORITHM WHEN NO UNKNOWNNS HAVE CONSTRAINTS

The intention of this algorithm is to provide a simple means for determining both the voltages and currents of the unknown branches. In this particular case, equations (7) through (11) must be used in their entirety. These relationships will first be simplified by adopting the following definitions:

$$\underline{K} = [\underline{V}_C, \underline{I}_C]^t, \quad (37)$$

$$\underline{U} = [\underline{E}_X, \underline{J}_X]^t, \quad (38)$$

$$\underline{X} = [\underline{V}_X, \underline{I}_X]^t. \quad (39)$$

Observe that the preceding definition of $\underline{X}$ differs from (39). The quantities $\underline{G}$, $\underline{W}$, $\underline{Y}$, and $\underline{C}$ will retain their original definitions. A substitution of the above seven vectors allows equations (7) through (11) to be written in the following form:

$$\underline{Y} = \underline{M}_G \underline{G} + \underline{M}_W \underline{W} + \underline{M}_C \underline{C} + \underline{M}_U \underline{U}, \quad (40)$$

$$\underline{K} = \underline{P}_G \underline{G} + \underline{P}_W \underline{W} + \underline{P}_C \underline{C} + \underline{P}_U \underline{U}, \quad (41)$$

$$\underline{X} = \underline{Q}_G \underline{G} + \underline{Q}_W \underline{W} + \underline{Q}_C \underline{C} + \underline{Q}_U \underline{U}, \quad (42)$$

$$\underline{W} = \underline{N}_G \underline{G} + \underline{N}_W \underline{W} + \underline{N}_C \underline{C} + \underline{N}_U \underline{U} + \underline{N}_Y \underline{Y} + \underline{N}_K \underline{K} + \underline{N}_X \underline{X}, \quad (43)$$

$$\underline{C} = \underline{D}_C \underline{K}, \quad (44)$$

$$\underline{U} = \underline{D}_U \underline{X}. \quad (45)$$

A manipulation of equations (40) through (44) will now be performed so as to suggest an algorithm for finding $\underline{U}$ and $\underline{X}$. The first step will be to determine a relationship for $\underline{U}$ since (45) cannot be employed. Equation (41) will be used for this purpose:

$$\underline{U} = \underline{P}_U^{-1} (\underline{K} - \underline{P}_G \underline{G} - \underline{P}_W \underline{W} - \underline{P}_C \underline{C}). \quad (46)$$

Note that by requiring the number of unknown branches to equal the number of constraints, $\underline{P}_U$ will be square. Observe that (46) does not have $\underline{U}$ or $\underline{X}$ on the right-hand-side. It is also desirable to eliminate $\underline{U}$ from (40) and (42). This can be done by substituting (46):

$$\underline{Y} = (\underline{M}_G - \underline{M}_U \underline{P}_U^{-1} \underline{P}_G) \underline{G} + (\underline{M}_W - \underline{M}_U \underline{P}_U^{-1} \underline{P}_W) \underline{W} + (\underline{M}_C - \underline{M}_U \underline{P}_U^{-1} \underline{P}_C) \underline{C} + \underline{M}_U \underline{P}_U^{-1} \underline{K}, \quad (47)$$

$$\underline{X} = (\underline{Q}_G - \underline{Q}_U \underline{P}_U^{-1} \underline{P}_G) \underline{G} + (\underline{Q}_W - \underline{Q}_U \underline{P}_U^{-1} \underline{P}_W) \underline{W} + (\underline{Q}_C - \underline{Q}_U \underline{P}_U^{-1} \underline{P}_C) \underline{C} + \underline{Q}_U \underline{P}_U^{-1} \underline{K}. \quad (48)$$

From condition 4., $\underline{D}_C$ is a diagonal matrix and therefore has an inverse. (Note — A non-zero and finite frequency is assumed if capacitors and/or inductors have constraints.) This means that the following computation can easily be made:

$$\underline{K} = \underline{D}_C^{-1} \underline{C}. \quad (49)$$

A substitution of (49) and the two following definitions into (46), (47), (48) result in the forms shown by (52) and (53):

$$\underline{G}' \triangleq [\underline{G}, \underline{C}]', \quad (50)$$

$$\underline{Y}' = [\underline{Y}, \underline{X}, \underline{U}]', \quad (51)$$

$$\underline{Y}' = \underline{M}'_G \underline{G}' + \underline{M}'_W \underline{W}, \quad (52)$$

$$\underline{W} = \underline{N}'_G \underline{G}' + \underline{N}'_Y \underline{Y}' + \underline{N}'_W \underline{W}, \quad (53)$$

$$\underline{\Delta}' = (\mathbf{1} - \underline{N}'_W - \underline{N}'_Y \underline{M}'_W). \quad (54)$$

Observe that (52) and (53) are precisely the same form as shown in (28) and (29). This means an algorithm which effectively manipulates (40), (41), and (42) into (46), (47), and (48) and also performs (49) could be used to convert an analysis program into a synthesis program. This algorithm will now be developed.

Relationships (46), (47), and (48) are expressions of KVL and KCL. For a KVL equation, the left-hand-side is a link vector, while the right-hand-side consists of tree-branches. Equation (51) indicates that all unknown branches are to be considered links when determining the KVL equations. Now, if the relationship shown by (49) is employed, then all branches with constraints are to be considered as part of the tree used for the KVL equations. The remaining elements represented by $\underline{G}$ and $\underline{Y}$, are regarded as in the tree or co-tree in accordance to table 1 and the topological requirements for forming the tree.

Equations (50) and (51) imply that the assignment for the constraints and unknowns reverse when forming the KCL equations. That is, all constrained elements become links, while the unknown branches are to be in the tree. Of course, the elements corresponding to $\underline{G}$ and $\underline{Y}$ should retain the same assignments as for the KVL equations.

The implementation of (49) is a simple matter. Its substitution into (46), (47), and (48) need not be made by the supplementary algorithm, since the computation of $\underline{K}$ can be readily performed in the regular analysis program. For instance, NASAP'69 Nonlinear tagged the nodes representing $\underline{C}$ as sources. By specifying $\underline{D}_C^{-1}$ as part of the dependent source matrix, $\underline{K}$ was computed automatically from (49).

A stepwise statement of the algorithm follows:

1. Find the tie-set equations regarding all known constrained elements in a tree and all unknown unconstrained elements as links.
2. Find the cut-set equations regarding all known constrained elements as links and all unknown unconstrained elements in a tree. The user will supply the branch relation matrices (43) and (49).

The major feature of the two steps is that much of a mixed method analysis program can remain in tact. No changes, other than the generation of the two trees, is required. The remainder of an analysis program will automatically determine equations (52) and (53) from the two steps and from matrices (43) and (49). It then will solve (52) and (53) from its existing algorithms.

Again, it is vital to show that correct results are achieved when the algorithm can be employed and the designed circuit can be analyzed. The following lemma simplifies the

proof of the preceding validity theorem immensely; equations (49), (52), and (53), determined by manipulation, will be exactly the same as yielded by the algorithm. Equations (49) and (53) are obviously the same since they represent the dependent source matrix specified by the user. Now, it was tacitly assumed that topology and the elements are exactly the same for using the algorithm as the development leading to the algorithm. Equation (52) represents expressions of KVL and KCL in the circuit. But the algorithm was written to provide exactly the same tree for the KVL equations as is suggested by equations (46), (47), and (48). That is, these three equations specify the tree/co-tree assignment for the unknown branches and for the constrained branches. The remaining branches are assigned by some computer algorithm (or by the user). Nevertheless, it is assumed that the remaining assignment is consistent between the development of (46), (47), and (48) and the algorithm. This means exactly the same tree, for the same topology, was used to develop the KVL part of (52) as is used to find the KVL equations from the algorithm. Hence, the tie-sets are identical, causing exactly the same matrix locations for the zero and non-zero matrix entries. The only remaining possibility of a difference is to have opposite signs when an entry is non-zero. In order for this to occur, a positive assumed voltage direction for the developed equations must be different than that used in the algorithm. Since the network topology represents a directed graph, for which the direction depends upon assumed positive voltage direction, and the topology is held constant, then change in signs is not possible. This means the algorithm yields exactly the same equations as those developed by the manipulation of (40) through (42).

A corollary follows directly from the preceding lemma; if equation (41) exists for the circuit and the algorithm can be employed, then $\mathbf{P}_U$ and $\mathbf{P}_U^{-1}$ exist. Proof of this is simple. The corollary proposes (41) exists, hence $\mathbf{P}_U$ exists. From this theorem, when possible to employ the algorithm, it will determine equation (46). Hence, the term $\mathbf{P}_U^{-1}\mathbf{K}$ will be found and $\mathbf{P}_U^{-1}$ exists.

The lemma of equation identity permits the proof of algorithm validity in a relatively straight-forward manner. In performing validation, equations for both $\underline{X}$ and $\underline{U}$ will be obtained with respect to the design algorithm. Afterwards, it will be shown that $\underline{X}$ and $\underline{U}$ will satisfy the equations used in the analysis of the designed circuit. Assume that the algorithm could be applied to design some circuit. That is, the necessary inverses existed and the diagonal matrix $\mathbf{D}_X$ was determined from $D_{ii}(\in \mathbf{D}_X) = U_i/X_i$. Now, it is needed to show that an analysis program operating on equations (40) through (45) yields exactly the same voltages and currents as in the design program. Because of condition 5., an analysis of the equations must yield a unique solution. Therefore, if one shows that the branch voltages, computable from the design algorithm, satisfy equations (40) through (45) then all computations from analysis are the same as the quantities for design.

It should be pointed out in passing that by the lemma on the identity of equations, equations (46), (47), and (48) apply to the design algorithm. Also, by the corollary of the lemma, $\mathbf{P}_U^{-1}$ and $\mathbf{P}_U$ exist; implying the equations must also apply to the analysis. The essential difference between design and analysis is the matrix $\mathbf{D}_U$. This matrix is an unknown in design, but a known in analysis.

At this point compare equations (44) and (49). Since both analysis and design can be performed, $\mathbf{D}_C$ and $\mathbf{D}_C^{-1}$ exist. Equation (49) used in design must be satisfied because

it was the means used to compute K . This means (44) must also be satisfied. Consider now equation (45); the diagonal entries are U_i/X_i where $U_i \in \underline{U}$ and $X_i \in \underline{X}$. Therefore, this equation must be satisfied.

Now consider equations (52) and (53) which were used by the design algorithm. Because the design was possible, the necessary inverse to find $\underline{W}$ from $\underline{G}' = [\underline{G}, \underline{C}]'$ must have existed. Therefore, it was also possible to compute $\underline{Y}^{-1}$ in equation (52). This means (52) and (53) are satisfied in the design program. But, equation (53) is merely (43) with different notation. Therefore, (43) is satisfied by the values computed during design.

By means of the lemma on the identity of equations, equation (52) must represent (46), (47), and (48). However, the corollary of the theorem indicates $\mathbf{P}_U$ and $\mathbf{P}_U^{-1}$ exist. Therefore, (40), (41), and (42) are derivable from (46), (47), (48) and conversely. Now (46), (47), (48) must be satisfied since they represent design equations. This means (40), (41), and (42) must be satisfied. The proof is now terminated by the following reasoning. Condition 5. implies the analysis program operating on equations (40) through (45) have a unique solution. But, it was shown that all voltages and currents employed in the design satisfy (40) through (45). Hence, the design must be valid.

5. CONCLUSIONS

Section 1. contained a statement of an algorithm which represents the composite of the algorithms indicated for the two special cases in sections 3. and 4. It is relatively straightforward to show the consistency of the composite algorithm and the special cases. The algorithm of section 3. states: Replace each voltage (current) constrained branch, which is unknown, by a voltage (current) generator. This corresponds to the statements given as 1.a., 1.b., and properties a,b of 2.c. in the composite algorithm. It is, of course, desired to determine current (voltage) equations for unknown voltage (current) constrained branches. This is indicated by the first parts of statements 3.a. and 3.b.

The algorithm in section 4. states: 1. Find the tie-set equations regarding all known constrained elements in a tree and all unknown unconstrained branches as links. 2. Find the cut-set equations regarding all known constrained elements as links and all unknown unconstrained elements in a tree. Part 1. of the preceding algorithm is represented by 1.c. and 1.d. of the composite algorithm. Whereas, part 2. is represented by 2.a. and 2.b. Since both voltage and current equations are needed for unknown unconstrained branches, the second parts of 3.a. and 3.b. are indicated by the composite algorithm.

The development in the special cases was based on circuits having elements specified by table 1. Hence, statements 1.e. and 2.c. (e) are included in the composite algorithm. Statement 3.c. merely asserts that voltage and current equations can be computed for other than unknown branches.

It should be self-evident that the composite algorithm does not violate the validity of the two special case algorithms. Now the two special cases have identical sufficiency conditions for a correct design. Therefore, this sufficiency condition applies to the composite algorithm.

An important point relating to known constrained branches is that equation (49) must be obeyed. What this signifies is that R - L - C elements with voltage (current) constraints are regarded as admittances (impedances). Unconstrained R - L - C elements can be whichever is suitable for the two trees. However, the assignment must be consistent for both trees.

The algorithm is not applicable to all topologies and may fail due to either of the following:

1. Necessary inverses do not exist.
2. One or both of the two trees does not exist.

The existence of inverses relates to whether an equivalent analysis problem has a solution. This classical question is unresolved for the general case and will not be pursued here. The partial discussion in section 3., pertaining to a singular Δ' , basically applies.

Because two trees need to be generated, this problem is considerably more complicated than for analysis wherein only one tree is generated. It is possible, for example, to make a tree/co-tree assignment of the unconstrained R - L - C elements such that a tree exists for the tie-set equations and not for the cut-set equations or conversely even though a different assignment yields trees for both equations. Figures 6. and 7. demonstrate this. For figure 6., the unconstrained elements Z_4 and Z_5 are assigned as tree branches. The element Z_3 is a co-tree link. Applying step 1. of the composited algorithm, a tree does exist

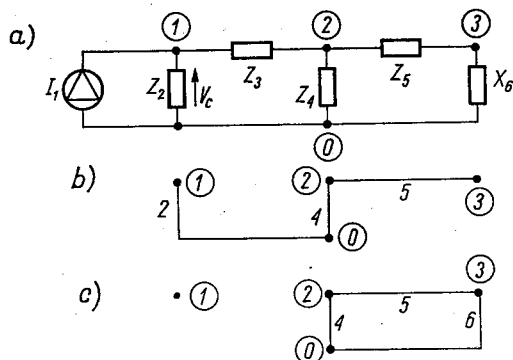


Fig. 6. Algorithm Failure

- a) Circuit
b) For Tie-Set Equations
c) For Cut-Set Equations

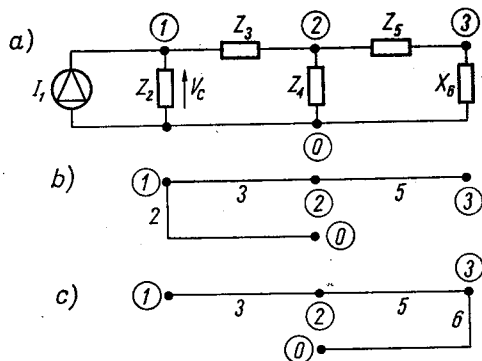


Fig. 7. Algorithm Applicability

- a) Circuit
b) For Tie-Set Equations
c) For Cut-Set Equations

for the tie-set equations. However, step 2. does not yield a tree due to a loop and an isolated node. Had Z_3 and Z_5 been assigned as tree branches and Z_4 a link, trees would be generated by both steps. This is shown in figure 7.

Situations also exist wherein the algorithm cannot be employed regardless of the unconstrained R - L - C tree/co-tree assignment. For example, a loop consisting of constrained branches prevents a tree from being generated in step 1. Similarly, cut-sets of unknown branches, loops of unknown branches, and cut-sets of constrained branches cause the algorithm to fail. Because of the tree/co-tree assignment switch between unknown branches and constrained branches, one can conclude that each unknown branch must be in a tie-set with at least one constrained branch and conversely.

Although this paper is based on mixed method analysis, it appears reasonable to conjecture that other analysis approaches can be modified into similar design programs. For example, it may be possible to convert topological algorithms such as that devised by Bellert and Woźniacki (Ref. 15) into a design program. The modification cannot be expected to be identical to that which is described in this paper. However, there exists every reason to believe that a similarity to the composited algorithm will manifest itself. No work has been done with respect to conversion of other algorithms and this problem is a matter for future research.

REFERENCES

1. F. H. Branin, Computer Methods of Network Analysis, Proc. of IEEE, vol. 55, No. 11, Nov., 1967.
2. E. Kozemchak and M. Murray-Lasso, Computer-Aided Circuit Design by Singular Imbedding, BSTJ. Vol. 48, No. 1, Jan. 1969.
3. R. Carpenter and W. W. Happ, Computer-Aided Circuit Design. Part 3. Analyzing Circuits with Symbols, Electronics, 39.25.92—98, 1966.
4. R. Carpenter, NASAP. Network Analysis for Systems Applications Program. Present Capabilities of a Maintained Program. Computer Aided Circuit Design Seminar sponsored by NASA ERC, Cambridge, Mass., 1967.
5. T. Kobylarz, Symbolic Analysis of Linear and Nonlinear Circuits Utilizing Digital Computers, Proc. of the Hawaii International Conference on Systems Sciences, Honolulu, Hawaii, Jan., 1969, published by Western Periodicals Co., Honolulu.
6. T. Kobylarz, Simulation of Linear and Nonlinear Circuits for Symbolic Analysis and Transient Response, IEEE Trans. on Education, December, 1969.
7. T. Kobylarz, Literal Synthesis of Circuits by Digital Computers, Proc. of the Fourth Colloquium on Microwave Communication, Technika Haza, Budapest, Hungary, April, 1970.
8. R. Carpenter and W. W. Happ, Algorithms for the Dichotomous Representation of Macro-circuits. Proc. Fourth Annual Allerton Conf. on Circuit and System Theory, 1966.
9. W. W. Happ, Flowgraph Techniques for Closed Systems, IEEE Trans. AES-2, 3.252-264, 1966.
10. H. Potash and L. McNamee, Application of Unilateral and Graph Techniques to Analysis of Linear Circuits, Proc. of the ACM National Conference, 1968.
11. S. J. Mason, Further Properties of Signal Flow Graphs. Proc. of the IRE, July, 1956.
12. B. C. Kuo, Linear Networks and Systems, Mc-Graw-Hill, N.Y.C., 1967.
13. T. J. Kobylarz, Nonlinear Network Computer Analysis, Computer-Aided Integrated Circuit Design, J. Herskowitz, Ed. McGraw-Hill, N.Y.C., 1969.
14. T. E. Stern, Theory of Nonlinear Networks and Systems, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1965.
15. S. Bellert and H. Woźniacki, Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych, Wyd. Naukowo Techniczne, Warsaw, Poland, 1968.

T. J. KOBYLARZ

BEZPOŚREDNIA METODA PROJEKTOWANIA LINEARNYCH UKŁADÓW ELEKTRYCZNYCH
ZA POMOCĄ PROGRAMÓW MASZYNOWEJ ANALIZY PRZY STOSOWANIU *MIXED METHOD*

Streszczenie

Projektowanie układów elektrycznych za pomocą komputerów jest zazwyczaj przeprowadzane przy zastosowaniu procesu iteracyjnego lub specjalistycznych programów służących dla określonych struktur.

W pracy opisany jest algorytm, który pozwala na bezpośrednie, w przeciwieństwie do metod iteracyjnych, projektowanie układów przy niewielkich ograniczeniach dotyczących topologii. Dodatkową zaletą algorytmu jest wykorzystywanie wielu procedur obliczeniowych stosowanych w klasie analizy obwodów objętej mianem *mixed method*. Należy dokonać tylko kilku zmian, aby z programu analizy opartego na *mixed method* otrzymać program projektowania układów.

Ponieważ w przeciągu ostatnich lat opracowano szereg programów analizy, wydaje się, że opisana prosta metoda zamiany programów analizy na programy projektowania może znaleźć szybko powszechne zastosowanie w połączeniu z programami dającymi pewne, sprawdzone wyniki.

T. J. KOBYLARZ

UNE MÉTHODE DIRECTE DE PROJETER DES RÉSEAUX ÉLECTRIQUES LINÉAIRES À L'AIDE DES PROGRAMMES POUR L'ANALYSE DE COMPUTER, EN UTILISANT *MIXED METHOD*

R e s u m é

Le fait de projeter des réseaux électriques à l'aide des computers est toujours réalisé par application du procédé d'itération ou de programmes spécialistes, réels pour des structures choisies.

Dans ce travail l'auteur décrit un algorithme qui, contrairement aux méthodes d'itération, permet de projeter des réseaux directement, ne faisant que quelques restrictions concernant la topologie. Une autre valeur de l'algorithme est celle de pouvoir profiter de nombreux procédés de calcul qui sont appliqués à l'analyse des réseaux appelée *mixed method*. En faisant seulement quelques changements on peut facilement obtenir le programme pour projeter des réseaux du programme d'analyse fondé sur *mixed method*.

Comme durant les dernières années on a élaboré de nombreux programmes d'analyse qui donnent des résultats sûrs et vérifiés, il semble que cette méthode de changer les programmes d'analyse en programmes pour projeter des réseaux puisse être employée très vite universellement.

T. J. KOBYLARZ

DIREKTE METHODE ZUM RECHNERUNTERSTÜTZTEN SCHALTUNGSENTWURF ELEKTRISCHER NETZWERKE MITTELS S.G. *MIXED METHOD*

Z u s a m m e n f a s s u n g

Rechnerunterstützter Schaltungsentwurf elektrischer Netzwerke wird meist mittels Iterationsprozesse oder spezieller für bestimmte Strukturen gültiger Programme durchgeführt.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Algorithmus beschrieben, der im Gegenteil zum Iterationsverfahren einen Schaltungsentwurf mit nur geringen Topologieeinschränkungen zulässt. Ein weiterer Vorteil dieses Algorithmus ist die Anwendung mehrerer Rechenprozeduren, die von den s.g. *mixed-method*-Analyse-Verfahren her bekannt sind. Es sind lediglich einige Veränderungen einzuführen, um aus dem genannten Analysenprogramm nach der *mixed method* einen Schaltungsentwurf zu erhalten.

Da in den letzten Jahren eine Reihe von Analysenverfahren entstanden ist, ist anzunehmen, dass sich die beschriebene Methode der Schaltungsanalyse zum Schaltungsentwurf modifizieren lässt und eine breite Anwendung in Verbindung mit bereits erprobten Programmen findet.

Т. КОБЫЛЯЖ

НЕПОСРЕДСТВЕННЫЙ МЕТОД ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММ МАШИННОГО АНАЛИЗА ПРИ ПРИМЕНЕНИИ „MIXED METHOD”

Резюме

Проектирование электрических цепей при помощи компьютеров производится обычно при применении процесса итерации или же специализированных программ, признанных верными для определенных структур.

В работе описан алгоритм, который, в противоположность методам итерации, дает возможность непосредственного проектирования цепей при небольших ограничениях, касающихся топологии. Дополнительным преимуществом алгоритма является возможность использования многих расчетных процедур, применяемых в классе анализа цепей так называемых „mixed method”. Следует произвести только несколько изменений: чтобы из программы анализа, произведенного на основании „mixed method”, получить программу проектирования цепей.

В виду того, что на протяжении последних лет был разработан ряд анализов, следует, что описанный простой метод замены программ анализа на программы проектирования, может найти всеобщее применение вместе с программами, дающими надежные проверенные результаты.

Synteza transmitancji przy użyciu wzmacniaczy operacyjnych i pasywnych układów RC

MICHAŁ BIAŁKO (GDAŃSK), WIESŁAW SIENKO (GDAŃSK)

Instytut Technologii Elektronicznej Politechniki Gdańskiej

Otrzymano 1.10.1970

W artykule zostały omówione i sklasyfikowane podstawowe metody syntezy transmitancji napięciowych, w których bezpośrednio wykorzystuje się wzmacniacze operacyjne oraz pasywne układy RC . Rozpatrzone modele syntezy mają znaczenie praktyczne i mogą być praktycznie realizowane zarówno przy użyciu elementów indywidualnych jak i w postaci scalonej.

1. WPROWADZENIE

Synteza układów elektrycznych na płaszczyźnie częstotliwości obejmuje metody przejścia od zadanych charakterystyk częstotliwości do obiektów fizycznych realizujących te charakterystyki. Ponieważ nie każda charakterystyka może być zrealizowana w danej klasie elementów i układów, wobec tego istnieje problem aproksymacji zadanej charakterystyki częstotliwościowej funkcjami spełniającymi warunki fizycznej realizowalności w tej klasie. Ponadto każdej fizycznie realizowalnej funkcji odpowiada nieskończony zbiór układów, spośród których należy wybrać układ optymalny z punktu widzenia przyjętego kryterium optymalności. Jako kryterium optymalności może służyć, dla przykładu, minimalizacja ilości elementów reaktancyjnych występujących w układzie, minimalizacja czułości charakterystyk przy zmianach parametrów układu czy też wyeliminowanie cewki indukcyjnej jako elementu.

W ciągu ostatnich kilkunastu lat szczególną uwagę poświęcono klasie liniowych, stacjonarnych układów złożonych z elementów aktywnych oraz elementów pasywnych R i C . Jednym z zasadniczych powodów zainteresowania się tą klasą układów była możliwość eliminacji cewki indukcyjnej jako elementu konstrukcyjnego. Fakt ten miał duże znaczenie zwłaszcza dla zastosowań małowartościowościowych, kiedy to cewka staje się elementem drogim, o dużych rozmiarach i o własnościach znacznie odbiegających od przyjętego modelu idealnego. Jednak najsilniejszym czynnikiem stymulującym rozwój tej klasy układów było pojawienie się i rozwój technik mikroelektronicznych i związana z tym konieczność poszukiwania układowych analogów indukcyjności. W początkowym okresie nie było możliwości szerokiego zastosowania powstających metod syntezy w prak-

tyce ze względu na to, że element aktywny musiał być konstruowany w oparciu o lampę elektronową. Dopiero rozwój technologii półprzewodnikowych doprowadził do sytuacji, kiedy element aktywny jest często tańszy i łatwiejszy do wykonania niż elementy pasywne.

Omawianą klasę liniowych, stacjonarnych układów złożonych z elementów aktywnych oraz elementów RC można podzielić na kilka podklas w zależności od typu użytego elementu aktywnego. Typ użytego elementu aktywnego determinuje także metodę syntezy zadanej funkcji układowej. Tak więc wyróżnia się syntezę przy użyciu wzmacniaczy operacyjnych, źródeł sterowanych, konwerterów ujemnoimpedancyjnych oraz żyratorów. Spośród wyżej wymienionych metod największe znaczenie praktyczne posiada metoda syntezy przy użyciu wzmacniaczy operacyjnych ze względu na to, że element ten w formie scalonej jest w tej chwili powszechnie dostępny. Należy także podkreślić, że wszystkie wymienione elementy aktywne mogą być zbudowane w oparciu o wzmacniacz operacyjny.

2. WZMACNIACZ OPERACYJNY (W.O.) — DEFINICJA I WŁASNOŚCI¹⁾

2.1. Definicja idealnego w.o.

W większości istniejących modeli syntezy wzmacniacz operacyjny (w.o.) traktuje się jako element idealny zdefiniowany za pomocą następujących zależności:

$$U_0 = -K(U_1 - U_2), \quad (1.a)$$

$$K \rightarrow \infty, \quad (1.b)$$

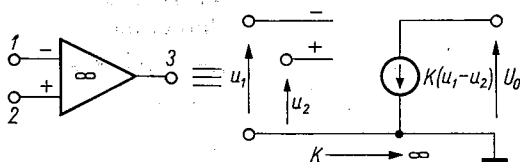
$$U_1 - U_2 = 0 \Rightarrow U_0 = 0, \quad (1.c)$$

gdzie:

U_0 — napięcie na wyjściu wzmacniacza,

U_1 — napięcie na wejściu odwracającym fazę ($-$),

U_2 — napięcie na wejściu nieodwracającym fazy ($+$).



Rys. 1. Symbol graficzny i małosygnałowy schemat zastępczy wzmacniacza operacyjnego

Symbol w.o. jako elementu obwodowego ²⁾ oraz jego małosygnałowy schemat zastępczy pokazane są na rysunku 1. Na podstawie zależności (1) oraz schematu zastępczego

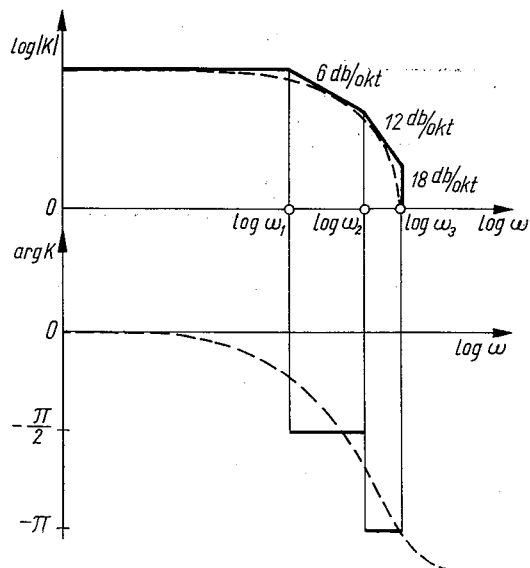
¹⁾ Bardziej szczegółowe dane na temat własności wzmacniacza operacyjnego można znaleźć w pracy [16].

²⁾ Wzmacniacz operacyjny można w sposób ogólniejszy zdefiniować jako element o dwóch wejściach i dwóch wyjściach. Wtedy zależność (1.a) daje związek między różnicą napięć na wyjściach wzmacniacza i różnicą napięć na jego wejściach.

można stwierdzić, że w.o. jest szczególną postacią sterowanego źródła napięciowego. Napięcie U_0 na wyjściu wzmacniacza jest proporcjonalne do różnicy napięć na jego dwóch wejściach, przy czym współczynnik proporcjonalności K (wzmocnienie w.o.) jest stałą dążącą do nieskończoności niezależnie od częstotliwości przykładanych sygnałów. Impedancja wejściowa w.o. widziana z zacisków 1, 2 dąży do nieskończoności, natomiast impedancja wyjściowa jest równa zero. Z punktu widzenia zastosowań praktycznych ważna jest również własność w.o. dana zależnością (1.c). Polega ona na tym, że przy nieobecności sygnału użytecznego na wejściu, sygnał na wyjściu wzmacniacza jest też równy zero. Wymaga to odpowiedniej kompensacji wyjściowego poziomu odniesienia. Dzięki tej własności istnieje możliwość bezpośredniego łączenia między sobą szeregu wzmacniaczy bez konieczności stosowania układów rozdzielających.

2.2. Własności nieidealnego w.o.

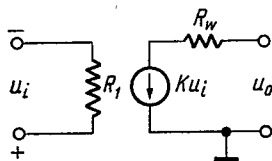
W praktyce w.o. jest elementem nieidealnym. Przede wszystkim jego wzmocnienie jest funkcją zależną od częstotliwości. Moduł wzmocnienia osiąga maksymalną wartość rzędu $80 \div 120$ dB dla częstotliwości bliskich zera, a następnie monotonicznie maleje dla dużych częstotliwości. Ograniczoność pasma przenoszenia w.o. związana jest z parametrami



Rys. 2. Typowe charakterystyki częstotliwościowe nieidealnego wzmacniacza operacyjnego

trem f_T oraz pojemnościami pasożytniczymi tranzystorów używanych do konstrukcji w.o. Również admitancja wejściowa i impedancja wyjściowa w.o. osiągają wartości skończone różne od zera. Typowy przebieg zależności modułu i fazy wzmocnienia w funkcji częstotliwości pokazany jest na rysunku 2. Nowoczesne w.o. wykonywane w technice scalonej osiągają wartości częstotliwości, przy której moduł wzmocnienia maleje do wartości 0 dB,

rzędu kilkudziesięciu do kilkuset MHz. Uwzględniając różne od zera wartości admitancji wejściowej i impedancji wyjściowej w.o. jego schemat zastępczy będzie miał postać jak na rysunku 3.



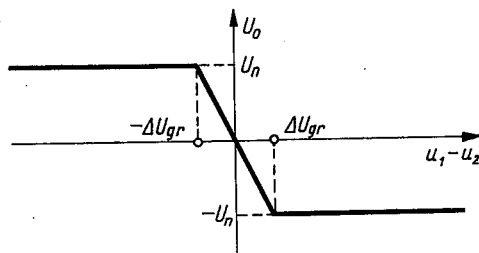
Rys. 3. Schemat zastępczy nieidealnego wzmacniacza operacyjnego

Dla wyznaczenia transmitancji napięciowej $K(s)$ wzmacniacza korzysta się z wykresów Bodego aproksymujących charakterystykę wzmocnienia wzmacniacza nieidealnego:

$$K(s) = \frac{K_0}{(s + \omega_1)(s + \omega_2)(s + \omega_3)}. \quad (2)$$

Zależność ta jest słuszna w paśmie przepuszczania wzmacniacza.

W.o. bez zewnętrznej pętli sprzężenia zwrotnego rzadko jest wykorzystywany jako układ liniowy ze względu na łatwość nasycania się. Typowa charakterystyka w.o. dla prądu stałego pokazana jest na rysunku 4. Przykładowo można pokazać, że dla współ-



Rys. 4. Charakterystyka wzmacniacza dla prądu stałego bez zewnętrznej pętli sprzężenia zwrotnego

czynnika wzmocnienia $K = 20\,000$ i napięcia nasycenia $U_n = 10\text{ V}$ $|\Delta U_{gr}| = 0,5\text{ mV}$, tzn. dopuszczalna różnica napięć na wejściu wzmacniacza wynosi tylko $0,5\text{ mV}$. Dla poszerzenia zakresu liniowej pracy wzmacniacza i stabilizacji jego wzmocnienia, w.o. stosowany jest z reguły w układzie z ujemnym sprzężeniem zwrotnym. Podstawowe rodzaje tego typu układów i ich zastosowanie do syntezy transmitancji zostaną omówione w dalszej części pracy.

3. METODY SYNTEZY TRANSMITANCJI PRZY UŻYCIU WZMACNIACZY OPERACYJNYCH

3.1. Klasyfikacja metod

Wszystkie znane obecnie metody syntezy transmitancji z użyciem wzmacniaczy operacyjnych i pasywnych układów RC o stałych skupionych można podzielić na kilka grup:

- 1) metody oparte na rozkładzie RC : — RC wielomianów,

- 2) metody oparte na technice porównywania współczynników,
- 3) metody zmiennych stanu.

Każda z wymienionych grup może być podzielona na mniejsze podgrupy w zależności od konfiguracji użytych układów.

W niniejszej pracy scharakteryzowane zostaną metody należące do dwóch pierwszych grup.

3.2. Opis metod syntezy opartych na rozkładzie RC : — RC wielomianów

Syntezę zadanej transmitancji przeprowadza się w oparciu o model złożony z dwóch podukładów: aktywnego, który stanowi jeden lub więcej wzmacniaczy operacyjnych oraz pasywnego zbudowanego z elementów R i C , przy czym nie zakłada się szczegółowej topologii podukładu pasywnego. Do rozważań przyjmuje się najczęściej idealny model w.o. Dla tak założonej ogólnej struktury wyznacza się funkcję przenoszenia, która w przypadku gdy $K \rightarrow \infty$, gdzie K jest współczynnikiem wzmocnienia w.o., zależy tylko od parametrów charakteryzujących podukład pasywny RC . Parametry te, jak wiadomo, są funkcjami wymiernymi zmiennej s , o biegunach leżących na ujemnej półosi rzeczywistej płaszczyzny s . Oznaczmy w dalszym ciągu przez

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3.1)$$

zadaną transmitancję, podlegającą syntezie. Jest to w ogólnym przypadku funkcja wymierna, przy czym nie zakłada się ograniczeń na położenie biegunów i zer na płaszczyźnie zespolonej s .

Aby istniała możliwość realizacji tego typu funkcji w oparciu o przedstawiony powyżej model syntezy należy pokazać, że istnieje rozkład zadanej funkcji $H(s)$ na funkcje charakteryzujące podukład pasywny RC , a więc na funkcje wymierne o biegunach leżących na ujemnej półosi rzeczywistej płaszczyzny s . Rozkład taki istnieje i opiera się na następującym twierdzeniu:

Twierdzenie o rozkładzie RC : — RC wielomianu

Niech $P(s)$ będzie dowolnym wielomianem rzeczywistym, natomiast $Q(s)$ niech będzie wielomianem rzeczywistym mającym tylko różne (pojedyncze), ujemne, rzeczywiste pierwiastki i niech będzie spełniona nierówność:

$$\text{st}P(s) - \text{st}Q(s) \leq 1, \quad (3.2)$$

gdzie $\text{st}P(s)$, $\text{st}Q(s)$ oznacza odpowiednio stopień wielomianu $P(s)$ i $Q(s)$. Wtedy iloraz $\frac{P(s)}{Q(s)}$ może być wyrażony w postaci:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = Y_{RC}^a - Y_{RC}^b, \quad (3.3)$$

gdzie Y_{RC}^a (Y_{RC}^b) jest admitancją dwójnika pasywnego złożonego z elementów R i C .

D o w ó d

Niech $R(s)$ oznacza następujący wielomian stopnia ($\text{st } Q(s)+1$):

$$R(s) = sQ(s). \quad (3.4)$$

Wielomian $R(s)$ jest wielomianem rzeczywistym posiadającym różne, niedodatnie pierwiastki rzeczywiste. W związku z tym rozkład funkcji $\frac{P(s)}{R(s)}$ na ułamki proste będzie miał następującą postać:

$$\frac{P(s)}{R(s)} = k_{\infty}^+ + \frac{k_0^+}{s} + \sum_i \frac{k_i^+}{s + \sigma_i^+} - k_{\infty}^- - \frac{k_0^-}{s} - \sum_j \frac{k_j^-}{s + \sigma_j^-}, \quad (3.5)$$

gdzie współczynniki k_i^+ i k_j^- są rzeczywiste i nieujemne, przy czym $k_{\infty}^+ = k_{\infty}^- = 0$, jeśli $\text{st } P(s) < \text{st } R(s)$, natomiast liczby σ_i^+ i σ_j^- są rzeczywiste i dodatnie z założenia.

Wobec tego z (3.4) i (3.5) otrzymuje się:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = sk_{\infty}^+ + k_0^+ + \sum_i \frac{sk_i^+}{s + \sigma_i^+} - k_{\infty}^- s - k_0^- - \sum_j \frac{sk_j^-}{s + \sigma_j^-}. \quad (3.6)$$

Grupując w wyrażeniu (3.6) wyrazy dodatnie i ujemne oraz oznaczając sumy w nawiasach odpowiednio przez Y_{RC}^a i Y_{RC}^b otrzymuje się w dalszym ciągu:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \left(sk_{\infty}^+ + k_0^+ + \sum_i \frac{sk_i^+}{s + \sigma_i^+} \right) - \left(sk_{\infty}^- + k_0^- + \sum_j \frac{sk_j^-}{s + \sigma_j^-} \right) = Y_{RC}^a - Y_{RC}^b, \quad (3.7)$$

gdzie:

$$Y_{RC}^a = sk_{\infty}^+ + k_0^+ + \sum_i \frac{k_i^+ s}{s + \sigma_i^+}, \quad (3.7.a)$$

$$Y_{RC}^b = sk_{\infty}^- + k_0^- + \sum_j \frac{k_j^- s}{s + \sigma_j^-}. \quad (3.7.b)$$

Z budowy związków (3.7.a) i (3.7.b) wynika bezpośrednio, że funkcje Y_{RC}^a i Y_{RC}^b są admitancjami dwójników pasywnych RC .

Udowodnione wyżej twierdzenie można wykorzystać do rozkładu zadanej transmitancji $H(s)$ na funkcje charakteryzujące dwurodne dwójniki pasywne RC .

Transmitancja $H(s)$ podlegająca syntezie dana jest związkiem (3.1):

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}.$$

Weźmy pod uwagę rzeczywisty wielomian $Q(s)$ o różnych, ujemnych rzeczywistych pierwiastkach i taki, że spełniona jest nierówność:

$$\text{st } Q(s) + 1 \geq \max[\text{st } N(s), \text{st } D(s)]. \quad (3.8)$$

Ze związków (3.1) i (3.8) oraz twierdzenia o rozkładzie RC : — RC wielomianu otrzymuje się:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)/Q(s)}{D(s)/Q(s)} = \frac{Y_{RC}^1 - Y_{RC}^2}{Y_{RC}^3 - Y_{RC}^4}, \quad (3.9)$$

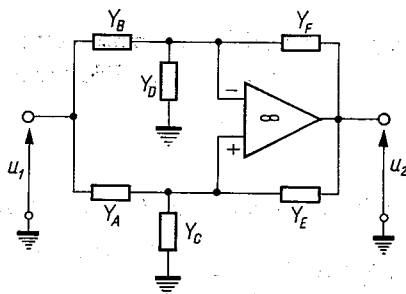
gdzie Y_{RC}^i , $i = 1, 2, 3, 4$, jest admitancją dwójnika pasywnego RC .

Należy zwrócić uwagę, że położenia pierwiastków wielomianu $Q(s)$ nie wpływają na położenie biegunów i zer syntezywanej transmitancji. Określają one jednak inne własności układu, takie jak czułość zrealizowanej funkcji układowej czy liczba oraz wartości elementów pasywnych użytych do realizacji.

Powyższe ogólne uwagi dotyczące syntezy zadanej transmitancji $H(s)$ w oparciu o model złożony ze wzmacniacza operacyjnego i podukładu pasywnego RC mogą być zreasumowane w postaci następującego twierdzenia:

Dowolną rzeczywistą, wymierną funkcję $H(s)$ można zrealizować w układzie złożonym ze wzmacniacza operacyjnego oraz podukładu pasywnego RC .

Dla udowodnienia tego twierdzenia wystarczy pokazać, że istnieje układ, którego transmitancja ma postać analogiczną do tej, która wynika ze związku (3.9). Układ taki,



Rys. 5. Schemat blokowy układu o transmitancji danej zależnością (3.13)

tj. model syntezy, pokazany jest na rysunku 5 [13]. Zakłada się, że dwójniki o admitancjach $Y_A, Y_B, Y_C, Y_D, Y_E, Y_F$ zbudowane są z elementów R i C .

Transmitancja napięciowa T_u tego układu definiowana jako:

$$T_u = \frac{U_2}{U_1} \quad (3.10)$$

wyraża się wzorem:

$$T_u = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Y_A(Y_B + Y_D + Y_F) - Y_B(Y_A + Y_C + Y_E)}{Y_F(Y_A + Y_C + Y_E) - Y_E(Y_B + Y_D + Y_F)} \quad (3.11)$$

Jeżeli założy się:

$$Y_B + Y_D + Y_F = Y_A + Y_C + Y_E, \quad (3.12)$$

to stąd otrzymuje się:

$$T_u = \frac{Y_A - Y_B}{Y_F - Y_E}. \quad (3.13)$$

Ponieważ zadana funkcja $H(s)$ może być wyrażona w formie (3.9), więc z porównania związków (3.9) i (3.13) wynika, że może być ona zrealizowana jako transmitancja napięciowa T_u układu z rysunku 5, przy czym

$$\begin{aligned} Y_A &= Y_{RC}^1 & Y_F &= Y_{RC}^3, \\ Y_B &= Y_{RC}^2 & Y_E &= Y_{RC}^4. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Postać dwójników Y_C i Y_D występujących w układzie można znaleźć ze związków (3.9), (3.12) i (3.13):

$$Y_C - Y_D = (Y_F - Y_E) - (Y_A - Y_B) = \frac{D(s) - N(s)}{Q(s)}. \quad (3.15)$$

Korzystając znowu z twierdzenia o rozkładzie RC : $-RC$ wielomianu otrzymuje się:

$$Y_C - Y_D = \frac{D(s) - N(s)}{Q(s)} = Y_{RC}^5 - Y_{RC}^6, \quad (3.16)$$

stąd:

$$\begin{aligned} Y_C &= Y_{RC}^5, \\ Y_D &= Y_{RC}^6. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Wykorzystany w powyższym dowodzie twierdzenia układ ma znaczenie nie tylko teoretyczne, ale także praktyczne jako model syntezy. Dla ilustracji tej metody syntezy rozważmy następujący przykład.

Przykład 1

Należy zrealizować transmitancję napięciową $H(s)$ o postaci:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{-10}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}.$$

Jest to znormalizowana postać transmitancji dolnoprzepustowego filtra o maksymalnie płaskiej charakterystyce modułu. Wzmocnienie w środku pasma wynosi 10.

Wybierając wielomian $Q(s) = s + \sigma$, gdzie $\sigma > 0$, otrzymuje się:

$$\frac{N(s)}{Q(s)} = \frac{-10}{s + \sigma} = \frac{-10 + bs - bs}{s + \sigma} = \frac{bs}{s + \sigma} - \frac{bs + 10}{s + \sigma}$$

Niech $bs + 10 = s + \sigma$; stąd

$$b = \frac{s + \sigma - 10}{s}$$

$$\text{dla } \sigma = 10, \quad b = 1$$

oraz

$$\frac{N(s)}{Q(s)} = \frac{s}{s + 10} - 1,$$

natomiast

$$\frac{D(s)}{Q(s)} = \frac{s^2 + \sqrt{2}s + 1}{s + 10} = s + \frac{1}{10} + \frac{\sqrt{2}s}{s + 10} - \frac{10,1s}{s + 10} = s + \frac{1}{10} - \frac{8,69s}{s + 10}$$

oraz

$$\frac{D(s) - N(s)}{Q(s)} = \frac{s^2 + \sqrt{2}s + 11}{s + 10} = s + \frac{11}{10} + \frac{\sqrt{2}s}{s + 10} - \frac{\frac{111}{10}s}{s + 10} = s + \frac{11}{10} - \frac{9,69s}{s + 10}.$$

Zastosowany rozkład prowadzi do dwójników Y_A i Y_B o minimalnej liczbie pojemności.

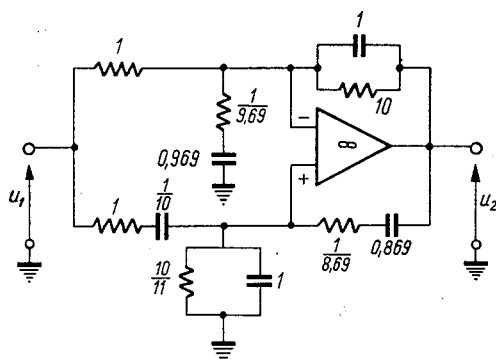
Korzystając ze związków (3.14) i (3.17) otrzymuje się ostatecznie:

$$Y_A = \frac{s}{s+10}, \quad Y_B = 1,$$

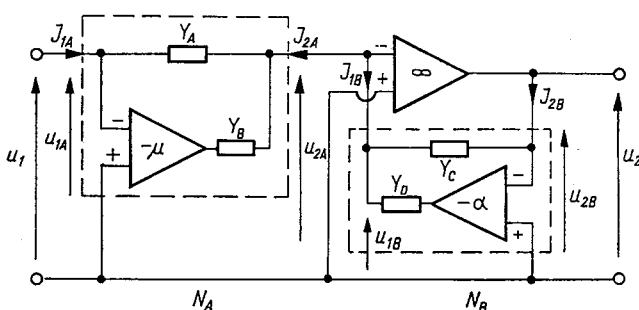
$$Y_F = s + \frac{1}{10}, \quad Y_E = \frac{8,69s}{s+10},$$

$$Y_C = s + \frac{11}{10}, \quad Y_D = \frac{9,69s}{s+10}.$$

Postać funkcji Y_i , $i = A, B, C, D, E, F$, prowadzi do ich bezpośredniej syntezy według drugiej formy Fostera dwójników RC . Końcowa realizacja układu pokazana jest na rysunku 6. Warto zwrócić uwagę, że użyto tutaj pięciu pojemności, chociaż do realizacji funkcji 2-go stopnia wystarczą dwie.



Rys. 6. Schemat filtra dolnoprzepustowego o maksymalnie płaskiej charakterystyce modułu

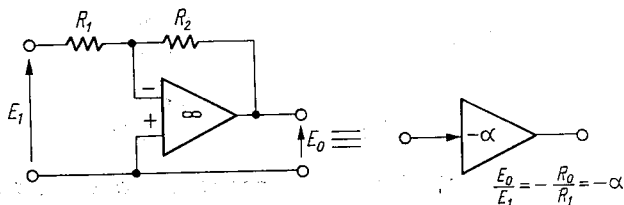


Rys. 7. Model syntezy

W pracy [15] zaproponowano model syntezy transmitancji napięciowej składający się z trzech elementów aktywnych oraz czterech dwójników pasywnych RC . Zmniejszenie liczby elementów pasywnych, a zwłaszcza kondensatorów, jest szczególnie korzystne przy wykonywaniu układu w postaci scalonej.

Omówiony model układu pokazany jest na rysunku 7. Użyto tutaj trzech wzmacniaczy operacyjnych z uziemionym wejściem nieodwracającym fazy, przy czym dwa z nich

posiadają skończoną wartość współczynnika wzmocnienia równą odpowiednio α i μ . Wzmacniacze takie łatwo jest zbudować w oparciu o idealny wzmacniacz operacyjny. Jedno z możliwych rozwiązań pokazane jest na rysunku 8. W układzie podanym na ry-



Rys. 8. Realizacja wzmacniacza o skończonej wartości współczynnika wzmocnienia

sunku 7 wyróżnić można zasadniczo dwa podukłady N_A i N_B . Podukład N_A włączony jest pomiędzy wejście układu i wejście odwracające fazę wzmacniacza operacyjnego, natomiast podukład N_B umieszczony jest w drodze zwrotnej wzmacniacza. Obydwa podukłady charakteryzowane są za pomocą macierzy admitancyjnych:

$$\mathbf{Y}_A = \begin{bmatrix} y_{11A} & y_{12A} \\ y_{21A} & y_{22A} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{Y}_B = \begin{bmatrix} y_{11B} & y_{12B} \\ y_{21B} & y_{22B} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Z własności wzmacniacza operacyjnego wynika, że napięcie U_{2A} jest równe zero. Wynika to z faktu, że przy wartości współczynnika wzmocnienia w.o. zmierzającej do nieskończoności skończona wartość napięcia U_2 wymaga zerowej wartości napięcia U_{2A} . Na podstawie tego stwierdzenia otrzymuje się:

$$I_{2A} = y_{21A}U_{1A} + y_{22A}U_{2A} = y_{21A}U_1, \quad (3.20)$$

gdyż:

$$\begin{aligned} U_{2A} &= 0, \\ U_{1A} &= U_1. \end{aligned}$$

Podobnie dla podukładu N_B napięcie U_{1B} jest równe zero; stąd otrzymuje się:

$$I_{1B} = y_{11B}U_{1B} + y_{12B}U_{2B} = y_{12B}U_{2B}, \quad (3.21)$$

gdyż:

$$\begin{aligned} U_{1B} &= 0, \\ U_{2B} &= U_2. \end{aligned}$$

Ze względu na fakt, że impedancja wejściowa wzmacniacza operacyjnego jest nieskończenie duża, jego prąd wejściowy jest pomijalny, w związku z czym zachodzi równość:

$$I_{2A} = -I_{1B}. \quad (3.22)$$

Z powyższych równań otrzymuje się:

$$y_{21A}U_1 = -y_{12B}U_2. \quad (3.23)$$

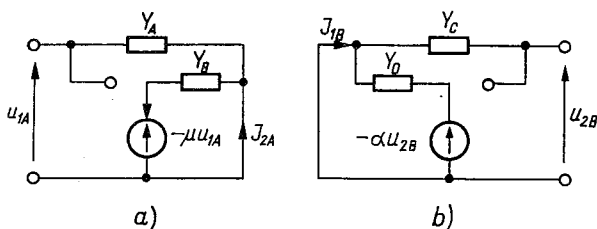
Stąd transmitancja napięciowa układu:

$$T_u = \frac{U_2}{U_1} = -\frac{y_{21A}}{y_{12B}}. \quad (3.24)$$

Admitancje wzajemne y_{21} i y_{12} podukładów N_A i N_B można wyznaczyć korzystając ze schematów zastępczych pokazanych na rysunku 9a i b. Elementarna analiza daje następujące rezultaty:

$$y_{21A} = -Y_A + \mu Y_B, \quad (3.25)$$

$$y_{12B} = -Y_C + \alpha Y_D. \quad (3.26)$$



Rys. 9. Schematy zastępcze podukładów N_A i N_B w stanie zwarcia odpowiednio: a) — wyjścia i b) wejścia

Stąd ostatecznie otrzymuje się:

$$T_u = -\frac{Y_A - \mu Y_B}{Y_C - \alpha Y_D} = \frac{\mu Y_B - Y_A}{Y_C - \alpha Y_D}. \quad (3.27)$$

Procedura syntezy jest analogiczna jak w przypadku poprzednio opisanego modelu syntezy. Zadana transmitancję $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ sprowadza się do postaci (3.9), a następnie dokonuje się następującej identyfikacji:

$$\begin{aligned} \mu Y_B &= Y_{RC}^1, & Y_A &= Y_{RC}^2, \\ Y_C &= Y_{RC}^3, & Y_D &= Y_{RC}^4. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ostatnim etapem realizacji jest synteza dwójników pasywnych RC danych związkami (3.28). Charakterystyczną cechą opisanego modelu syntezy jest możliwość niezależnej zmiany położenia biegunów i zer funkcji przenoszenia poprzez zmiany współczynników wzmacnienia α i μ .

Przykład 2

Jako ilustracja metody pokazana zostanie realizacja transmitancji filtra rozważana w przykładzie 1:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{-10}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}.$$

Wybierając wielomian $Q(s) = s + 10$ otrzymuje się:

$$\frac{N(s)}{Q(s)} = \frac{-10}{s + 10} = -1 + \frac{s}{s + 10}$$

oraz

$$\frac{D(s)}{Q(s)} = \frac{s^2 + \sqrt{2}s + 1}{s + 10} = s + \frac{1}{10} - \frac{8,69s}{s + 10}$$

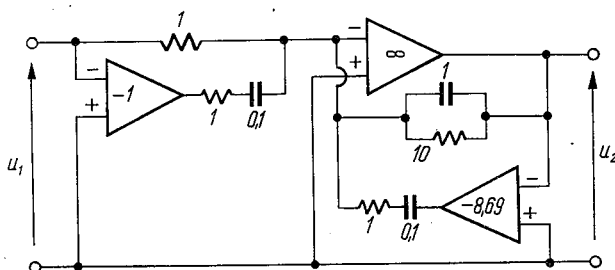
Korzystając ze związków (3.28) otrzymuje się:

$$Y_A = 1,$$

$$\mu Y_B = \frac{s}{s + 10}$$

$$Y_C = s + \frac{1}{10}$$

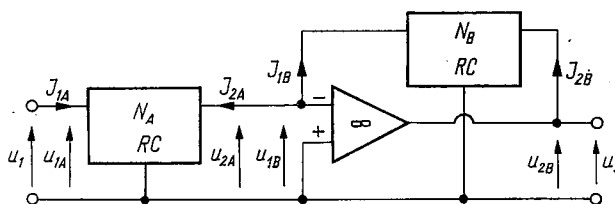
$$\alpha Y_D = \frac{8,69}{s + 10}$$



Rys. 10. Schemat filtru syntezowanego w przykładzie 2

Końcowa realizacja układu pokazana jest na rysunku 10. Warto zwrócić uwagę, że ta sama funkcja została zrealizowana przy użyciu trzech pojemności.

Oprócz wyżej omówionych metod w praktyce bardzo często wykorzystuje się metodę realizacji nazywaną syntezą przy użyciu w.o. z jednopętlowym sprzężeniem



Rys. 11. Model syntezy wykorzystujący wzmacniacz operacyjny z jednopętlowym sprzężeniem

zwrotnym [9, 12]. Podstawowy model tej metody syntezy składa się z dwóch podukładów pasywnych N_A i N_B oraz wzmacniacza operacyjnego odwracającego fazę napięcia. Pokazane to jest na rysunku 11.

Podukłady pasywne N_A i N_B charakteryzowane są za pomocą macierzy admitancyjnych:

$$\mathbf{Y}_A = \begin{bmatrix} y_{11A} & y_{12A} \\ y_{21A} & y_{22A} \end{bmatrix}, \quad y_{21A} = y_{12A} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{Y}_B = \begin{bmatrix} y_{11B} & y_{12B} \\ y_{21B} & y_{22B} \end{bmatrix}, \quad y_{12B} = y_{21B} \quad (3.30)$$

Ponieważ struktury układów podanych na rysunkach 7 i 11 są identyczne, wobec tego na podstawie związków (3.24) i (3.29) transmitancja napięciowa analizowanego układu ma postać:

$$T_u = - \frac{y_{12A}}{y_{12B}}. \quad (3.31)$$

Z równania (3.31) wynika, że bieguny syntezywanej transmitancji zależą wyłącznie od zer admitancji wzajemnej y_{12B} układu pasywnego N_B . Jak wiadomo, zera niezrównoważonego czwórnika pasywnego złożonego z elementów RC mogą się znajdować w dowolnym miejscu płaszczyzny zespolonej z wyjątkiem dodatniej półosi rzeczywistej. Stąd wynika, że w omawianym modelu syntezy istnieje możliwość uzyskania zespolonych biegunów transmitancji napięciowej. Ze względu na stabilność całego układu położenie biegunów funkcji T_u musi być ograniczone do lewej półpłaszczyzny s . Podobnie, zera transmitancji danej wzorem (3.31) są określone przez zera admitancji wzajemnej y_{12A} niezrównoważonego czwórnika pasywnego N_A . Z powyższego widać, że rozważany model nie pozwala na realizację jedynie funkcji o zerach leżących na dodatniej półosi rzeczywistej.

Procedura syntezy jest podobna do tych, które zastosowano w poprzednio opisanych modelach syntezy. Wybierając wielomian $Q(s)$ o własnościach danych związkiem (3.8), zadaną transmitancję $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ sprowadza się do postaci $H(s) = \frac{N(s)/Q(s)}{D(s)/Q(s)}$, a następnie dokonuje się identyfikacji:

$$y_{12A} = \frac{N(s)}{Q(s)}, \quad (3.32)$$

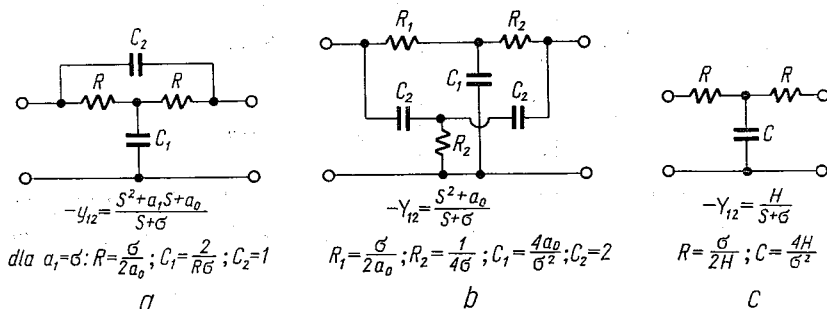
$$-y_{12B} = \frac{D(s)}{Q(s)}. \quad (3.33)$$

Końcowym etapem syntezy jest realizacja czwórników pasywnych N_A i N_B o zadanych związkami (3.32) i (3.33) admitancjach wzajemnych. W ogólnym przypadku realizacji takiej można dokonać stosując jedną ze znanych technik — Guillemina, Dasher'a lub Fialkova-Gersta [1, 2]. Dla transmitancji pierwszego i drugiego stopnia stosuje się typowe układy pasywne pozwalające na realizację zer i biegunów zespolonych. Kilka takich układów pokazanych jest na rysunku 12.

Przykład 3

Jako ilustracja omawianej metody syntezy pokazana zostanie realizacja transmitancji rozważanej w poprzednich przykładach:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{-10s}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}.$$



Rys. 12. Schematy układów realizujących zera i bieguny zespolone

Wielomian $Q(s)$ wybieramy w postaci $Q(s) = s + \sigma$, gdzie $\sigma > 0$.

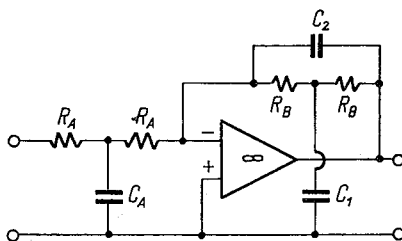
Stąd otrzymuje się:

$$y_{12A} = \frac{N(s)}{Q(s)} = \frac{-10}{s + \sigma}$$

oraz

$$-y_{12B} = \frac{D(s)}{Q(s)} = \frac{s^2 + \sqrt{2}s + 1}{s + \sigma} = \frac{s^2 + a_1 s + a_0}{s + \sigma}.$$

W celu realizacji admittancji wzajemnej y_{12A} można użyć układu z rysunku 12c. Natomiast jako układ N_B może być zastosowany układ z rysunku 12a. Należy zwrócić uwagę, że zastosowanie układów o ustalonej topologii ogranicza jednocześnie dowolność w wyborze wielomianu $Q(s)$. I tak, ponieważ podukład N_B ma strukturę obwodu typu T zmostkowanego, więc wielomian $Q(s)$ musi być wybrany w postaci $Q(s) = s + \sigma$, gdzie $\sigma = a_1$. Szczegółowy schemat syntezy dla tego przypadku pokazany jest na rysunku 13.



Rys. 13. Schemat filtra syntezowanego w przykładzie 3

Znormalizowane wartości elementów układów N_A i N_B dla $\sigma = \sqrt{2}$ są następujące:

$$R_A = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 10} = 0,0707, \quad R_B = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707,$$

$$C_A = \frac{4 \cdot 10}{2} = 20, \quad C_1 = \frac{2}{0,707 \cdot \sqrt{2}} = 2, \quad C_2 = 1.$$

Warto zwrócić uwagę, że tym razem funkcja $H(s)$ została zrealizowana przy użyciu trzech pojemności.

W celu otrzymania rzeczywistych wartości elementów układu należy dokonać denormalizacji. Jeżeli elementy znormalizowane oznaczy się przez R_n , C_n , to wartości elementów rzeczywiście występujących w układzie wyznacza się ze związków:

$$C = \frac{1}{rk} C_n,$$

$$R = rR_n,$$

gdzie r jest współczynnikiem normalizacji oporowej oraz k jest współczynnikiem normalizacji częstotliwościowej:

$$k = \frac{\omega_0}{\omega_n}.$$

Wybierając współczynnik $r = 10^5$, dla filtru dolnoprzepustowego o częstotliwości granicznej $f_0 = 100$ Hz otrzymuje się następujące rzeczywiste wartości elementów:

$$R_A = 10^5 \cdot 0,0707 = 7,07 \text{ k}\Omega,$$

$$R_B = 10^5 \cdot 0,707 = 70,7 \text{ k}\Omega,$$

$$C_A = \frac{20}{10^5 \cdot 628} = 0,31 \text{ }\mu\text{F},$$

$$C_1 = \frac{2}{10^5 \cdot 628} = 0,031 \text{ }\mu\text{F},$$

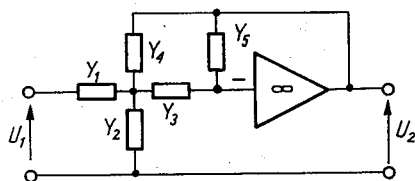
$$C_2 = \frac{1}{10^5 \cdot 628} = 0,015 \text{ }\mu\text{F},$$

3.3. Opis metod syntezy opartych na technice porównywania współczynników

Charakterystycznym dla tych metod jest przyjęcie modelu syntezy o zadanej a priori topologii. Procedura syntezy sprowadza się do porównania współczynników, przy odpowiednich potęgach zmiennej s , syntezywanej transmitancji oraz transmitancji przyjętego modelu. W rezultacie takiego porównania uzyskuje się zespół równań na ogół nieliniowych, których rozwiązanie pozwala wyznaczyć wartości elementów układu. Warto zwrócić uwagę, że na ogół zespół równań nie posiada dokładnie jednego rozwiązania, w związku z czym istnieje możliwość doboru wartości elementów. Metody syntezy oparte na technice porównywania współczynników są bardzo efektywne dla transmitancji niskiego rzędu, a szczególnie drugiego.

W chwili obecnej istnieje wiele modeli pozwalających na realizację różnego typu transmitancji. Do najbardziej znanych w tej grupie metod należy metoda Brennana i Bridgmana [14], w której wykorzystuje się wzmacniacz operacyjny z wielopętlowym sprzężeniem zwrotnym. Przykładowo, model syntezy z wielopętlowym sprzężeniem zwrotnym pokazany jest na rysunku 14. Można pokazać, że transmitancja napięciowa tego układu wyraża się następującą zależnością:

$$T_u = \frac{U_2}{U_1} = - \frac{Y_1 Y_3}{Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_2 Y_4}. \quad (3.34)$$



Rys. 14. Wzmacniacz operacyjny z wielopętlowym sprzężeniem zwrotnym

Każdy z elementów Y_i , $i = 1, 2 \dots 5$, pokazanych na rysunku 14 reprezentuje albo oporność albo pojemność.

Z postaci związku (3.34) można wywnioskować, że ta metoda nie pozwala na realizację zer zespolonych. Jako ilustrację omawianego modelu syntezy rozważmy następujący przykład.

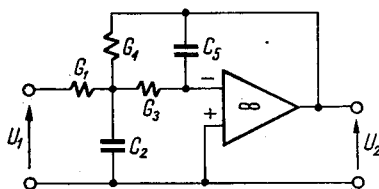
Przykład 4

Należy dokonać syntezy filtra dolnoprzepustowego o transmitancji danej związkiem:

$$H(s) = \frac{-10}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad (3.35)$$

Z porównania liczników zadanej transmitancji oraz transmitancji danej związkiem (3.34) wynika, że elementy o admitancjach Y_1 i Y_3 muszą być opornikami. Podobnie z porównania mianowników tych funkcji wynika, że elementy o admitancjach Y_5 oraz Y_2 muszą być kondensatorami, natomiast element o admitancji Y_4 opornikiem. Stąd otrzymuje się:

$$\begin{aligned} Y_1 &= G_1, & Y_3 &= G_3, & Y_5 &= sC_5, \\ Y_2 &= sC_2, & Y_4 &= G_4. \end{aligned}$$



Rys. 15. Schemat filtra syntezowanego w przykładzie 4

Układ z tymi elementami pokazany jest na rysunku 15, natomiast jego transmitancja przybiera postać:

$$T_u = \frac{-G_1 G_3}{s^2 \cdot C_2 C_5 + s C_5 (G_1 + G_3 + G_4) + G_3 G_4} \quad (3.36)$$

Porównując odpowiednie współczynniki funkcji (3.35) i (3.36) otrzymuje się układ równań:

$$\begin{aligned} G_1 G_3 &= 10, \\ C_2 C_5 &= 1, \\ C_5 (G_1 + G_3 + G_4) &= \sqrt{2}, \\ G_3 G_4 &= 1. \end{aligned}$$

Jedno z możliwych rozwiązań powyższego układu równań jest następujące:

$$G_1 = \frac{10}{11}, \quad G_3 = 11, \quad G_4 = \frac{1}{11}, \quad C_2 = 22, \quad C_5 = \frac{1}{22}.$$

Tutaj do realizacji funkcji drugiego rzędu danej wzorem (3.35) wystarcza użycie tylko dwóch pojemności, co jest niewątpliwie zaletą modelu.

4. ZAKOŃCZENIE

We wszystkich omawianych powyżej modelach syntezy wzmacniacz operacyjny traktowany był jako element idealny, zdefiniowany równaniami (1a, b, c). Można jednak wykazać, że dzięki zastosowaniu ujemnego sprzężenia zwrotnego model idealny jest dostatecznie dobrym przybliżeniem elementu rzeczywistego. Z drugiej jednak strony istnienie ujemnego sprzężenia zwrotnego stwarza problem zapewnienia stabilności w praktycznie realizowanych układach. Możliwość pojawienia się oscylacji związana jest z tym, że charakterystyka rzeczywistego wzmacniacza operacyjnego opada szybciej niż 12 dB/okt. Aby więc zapewnić bezwzględnie stabilną pracę układu wzmacniacz operacyjny z reguły jest skompensowany w ten sposób, że moduł jego wzmocnienia nie opada szybciej niż 6 dB/okt.

W związku z omówieniem w tej pracy szeregu metod syntezy wykorzystujących wzmacniacz operacyjny powstaje pytanie: która z przedstawionych metod jest najbardziej korzystna? Odpowiedź nie może być jednoznaczna, ponieważ optymalność tej lub innej metody zależy od przyjętego kryterium optymalności. I tak na przykład synteza przy użyciu w.o. z wielopętlowym sprzężeniem zwrotnym pozwoliła na użycie minimalnej liczby elementów potrzebnych do realizacji filtra dolnoprzepustowego. Można natomiast pokazać, że metoda ta praktycznie nie nadaje się do realizacji filtrów o dużych dobrociach ze względu na konieczność jednoczesnego użycia elementów o bardzo dużych i bardzo małych wartościach.

W praktyce bardzo często korzysta się z metody realizacji wykorzystującej wzmacniacz operacyjny z jednopętlowym sprzężeniem zwrotnym. Zastosowanie tego modelu syntezy pozwala na realizację układów o dużych dobrociach, prowadzi do małego rozrzutu w wartościach potrzebnych elementów oraz pozwala na osiągnięcie stosunkowo dużych wzmocnień.

W pracy przedstawiono jedynie te metody syntezy, w których stosuje się bezpośrednio wzmacniacz operacyjny jako element aktywny.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. E. A. Guillemin, *Synthesis of Passive Networks*, Wiley N. Y. 1957.
2. N. Balabanian, *Network Synthesis*, Englewood Cliffs, N. J. 1958.
3. S. Seshu, N. Balabanian, *Linear Network Analysis*, John Wiley & Sons, N.Y. 1959.
4. B. K. Kinariwala, *Synthesis of Active RC-Networks*, Bell System Tech. J., vol. 38, Sept. 1959.
5. I. W. Sandberg, *Synthesis of Driving-Point Impedance with Active RC Networks*, Bell System Tech. J., vol. 39, July 1960.

6. S. K. Mitra, Recent Developments in Active Network Synthesis and Future Promise, S.S.C.T. Praga, czerwiec 1968.
7. E. S. Kuh, R. N. Biswas, Multiple Loop Feedback Synthesis and Sensitivity Optimization, S.S.C.T. Praga, czerwiec 1968.
8. Handbook of Operational Amplifier Applications, Burr-Brown Research Corporation, 1963.
9. Handbook of Operational Amplifier-Active RC Networks, Burr-Brown Research Corporation, 1966.
10. K. L. Su, Active Network Synthesis, McGraw-Hill Book Co., N.Y. 1965.
11. L. P. Huelsman, Theory and Design of Active RC Circuits, Mc Graw-Hill, N.Y. 1968.
12. S. K. Mitra, Analysis and Synthesis of Linear Active Networks, John Wiley, N.Y. 1969.
13. S. K. Mitra, Active RC Filters Employing a Single Operational Amplifier as the Active Element, Proc. of Hawaii Int. Conf. on System Sciences, Honolulu, Jan. 1968.
14. A. Bridgman, R. Brennan, Simulation of Transfer Function Using Only One Operational Amplifier, Proc. WESCON Contr. Record, 1, 1957.
15. M. V. Mathews, W. Seifert, Transfer Function Synthesis with Computer Amplifiers ..., Proc. Western Joint Computer Conference, March 1955.
16. M. Białko, Układy mikroelektryczne, WKiŁ, Warszawa 1969.

M. BIAŁKO, W. SIENKO

TRANSFER FUNCTION SYNTHESIS USING OPERATIONAL AMPLIFIERS AND PASSIVE RC NETWORKS

Summary

In the paper the classification of basic voltage transfer function synthesis methods are considered and described in which operational amplifiers and passive RC networks are applied. The synthesis models under consideration are of practical importance and can be practically realized either using individual elements or in integrated form.

M. BIALKO, W. SIENKO

TRANSMITTANZSYNTHESE UNTER ANWENDUNG VON OPERATIONSVERSTÄRKERN UND PASSIVEN RC-SCHALTUNGEN

Zusammenfassung

Im Aufsatz wurden Grundmethoden der Synthese von Spannungsübertragungsfunktionen beschrieben und klassifiziert, in denen Operationsverstärker und passive RC-Schaltungen ausgenutzt werden. Die angeführten Synthesemodelle sind von praktischer Bedeutung sowohl bei Anwendung einzelner Elemente, als auch bei integrierter Ausführung.

Н. БЯЛКО, В. СЕНЬКО

СИНТЕЗ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ОПЕРАЦИОННЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ И ПАССИВНЫХ СХЕМ RC

Резюме

В статье обсуждены и классифицированы основные методы синтеза передаточных функций напряжения, в которых непосредственно применены операционные усилители и пассивные схемы RC. Обсужденные модели синтеза имеют практическое значение и могут быть реализованы в практике как с применением индивидуальных элементов, так и интегральных схем.

Algorytm oceny rodzaju tolerowania prostokątnego impedancji dwójników

JERZY J. WŁODEK (WARSZAWA)

Zakład Doświadczalny Budowy Aparatury Naukowej PAN

Otrzymano 2.12.1970

W pracy rozważa się możliwość oceny rodzaju tolerowania prostokątnego impedancji biernych dwójników. Zagadnienie to zostało rozwiązane za pomocą szczegółowej analizy zmian modułów i argumentów dwu wektorów opisujących dokładność i precyzję tolerowania prostokątnego.

1. WPROWADZENIE

W procesie projektowania procedura poszukiwania optymalnego rodzaju tolerowania prostokątnego impedancji polega na przyjęciu odpowiedniej strategii, bazującej na jednym lub kilku wzorach matematycznych, z których możemy bardzo łatwo wydedukować prawie wszystkie, czasem nie wyczuwalne intuicyjnie, własności tolerowanych impedancji; ponadto wzory te umożliwią poprawną ocenę i rzucenie właściwego światła na naturę rozwiązania [5]. W niniejszej pracy zostaną szczegółowo omówione dwie w pewnym sensie przeciwstawne koncepcje podejścia do tego zagadnienia.

Umawiamy się mianowicie, że przez precyzję realizacji impedancji, opisanej w założeniach projektowych wartością nominalną Z_N , należy rozumieć wielkość pola prostokąta rozrzutu, w którym układają się punkty końcowe wektorów reprezentujących impedancje losowe Z .

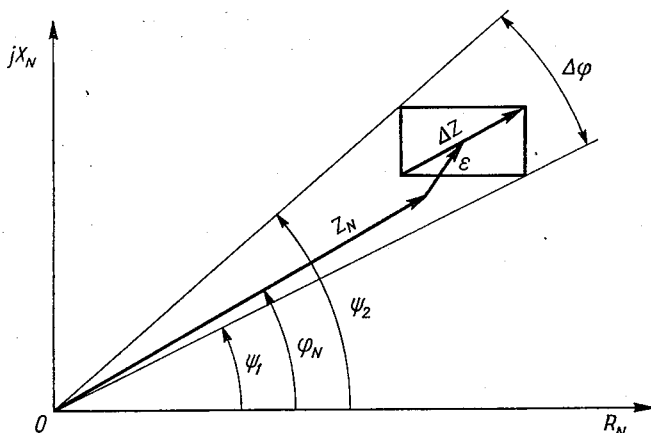
Miarą precyzji, a tym samym wielkości prostokąta rozrzutu jest wektor precyzji ΔZ , którego moduł jest równy przekątnej prostokąta rozrzutu (rys. 1). Określa on jednoznacznie powtarzalność wyników realizacji impedancji. Punkt środkowy wektora precyzji ΔZ , który jest równocześnie środkiem symetrii prostokąta rozrzutu, leży w punkcie końcowym wektora reprezentującego wartość średnią impedancji $\bar{Z}$, przyjętą za wartość najbardziej prawdopodobną.

Natomiast przez dokładność realizacji impedancji, opisanej w założeniach projektowych wartością nominalną Z_N , należy rozumieć odległość środka symetrii prostokąta rozrzutu od punktu końcowego wektora nominalnego. Miarą dokładności realizacji impedancji jest wektor dokładności ε .

Wiadomo bowiem, że wartość nominalna impedancji jest wartością graniczną, do której możemy zbliżyć się zmniejszając powierzchnię prostokąta rozrzutu oraz zmniejsz-

szając odległość środka symetrii prostokąta rozrzutu od punktu końcowego impedancji nominalnej, ale której nigdy nie możemy osiągnąć w sposób pewny.

Pierwsza koncepcja polega na badaniu zmian tolerancji argumentu impedancji $\Delta\varphi$ na skutek zmiany wartości numerycznych i znaków składowych wektora dokładności ε_R i ε_X , przy zachowaniu warunku $|\varepsilon|^2 = \varepsilon_R^2 + \varepsilon_X^2$, oraz przy założeniu, że nie zmieniają się moduł i argument wektora precyzji ΔZ [6]. W pewnych sytuacjach projektowych, koncepcja ta jest interpretowana jako sposób dobierania takich dokładności realizacji części składowych impedancji, przy ściśle ustalonej precyzji realizacji impedancji, który zapewni uzyskanie minimalnej tolerancji argumentu $\Delta\varphi$. W drugiej koncepcji spotykamy się z odmiennym sformułowaniem zagadnienia, mianowicie zakłada się niezmienną tolerancji argumentu $\Delta\varphi$ i bada zależność zmian modułu i argumentu wektora precyzji ΔZ od zmian modułu i argumentu wektora dokładności ε . Mówiąc inaczej, polega ona na takim doborze części składowych wektora dokładności ε_R i ε_X , przy zachowaniu ustalonej tolerancji argumentu impedancji, że dochodzi się do ekonomicznie optymalnej powierzchni pola rozrzutu [6].



Rys. 1. Obraz geometryczny impedancji tolerowanej prostokątnie: Z_N — wektor impedancji nominalnej, ε — wektor dokładności, ΔZ — wektor precyzji, $\Delta\varphi$ — tolerancja argumentu

W celu utworzenia jednego z możliwych wzorów, który w sposób prosty ujmowałby zależność tolerancji argumentu impedancji od trzech wektorów Z_N , ε i ΔZ postępujemy, jak następuje. Przede wszystkim wprowadzamy oznaczenia (rys. 1)

$$\Phi_N = \operatorname{tg} \varphi_N = \frac{X_N}{R_N},$$

$$\Phi_1 = \operatorname{tg} \psi_1 = \frac{X_N + \varepsilon_X - \frac{1}{2} \Delta X}{R_N + \varepsilon_R + \frac{1}{2} \Delta R}, \quad (1)$$

$$\Phi_2 = \operatorname{tg} \psi_2 = \frac{X_N + \varepsilon_X + \frac{1}{2} \Delta X}{R_N + \varepsilon_R - \frac{1}{2} \Delta R}. \quad (2)$$

Kąt zawarty pomiędzy dwoma półprostymi, opisanymi równaniami [1]

$$jX = j\Phi_1 R, \quad (3)$$

$$jX = j\Phi_2 R, \quad (4)$$

równy jest tolerancji argumentu impedancji tolerowanej prostokątnie

$$\Delta\varphi = \operatorname{arctg} \frac{(R_N + \varepsilon_R)\Delta X + (X_N + \varepsilon_X)\Delta R}{(R_N + \varepsilon_R)^2 + (X_N + \varepsilon_X)^2 - \frac{1}{4}[(\Delta R)^2 + (\Delta X)^2]}. \quad (5)$$

Wzór ten daje możliwość przeanalizowania i numerycznej oceny relacji pomiędzy tolerancją argumentu impedancji i składowymi wektorów dokładności ε i precyzji ΔZ .

Zauważymy, że wartość numeryczna tolerancji argumentu impedancji zależy od wielkości powierzchni prostokątnego pola rozrzutu i jego położenia względem początku kartezjańskiego układu współrzędnych prostokątnych.

2. PIERWSZA KONCEPCJA

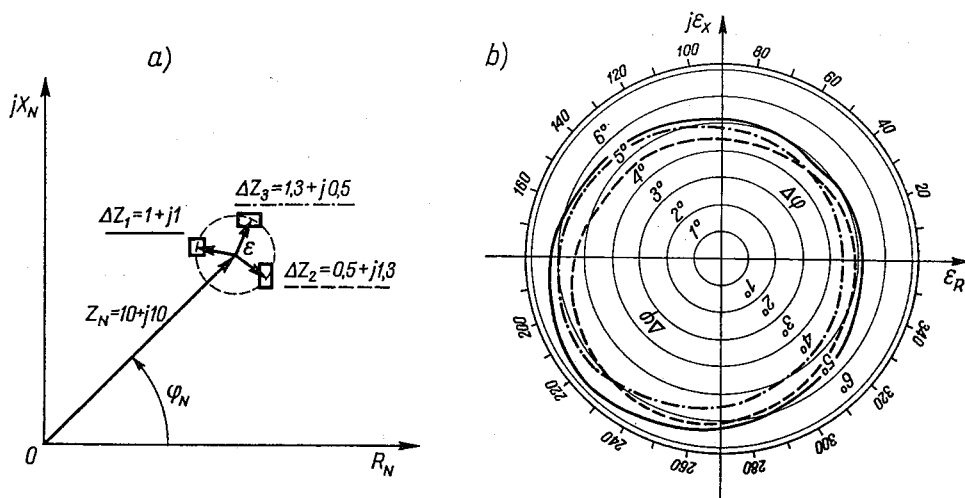
Stosowanie pierwszej koncepcji w procesie projektowania sprowadza się do śledzenia przebiegu zmian tolerancji argumentu impedancji $\Delta\varphi$ w przypadku, gdy punkt końcowy wektora dokładności ε przemieszcza się po okręgu o promieniu $|\varepsilon|$, w wyniku wirowania wektora dokładności ε wokół punktu końcowego wektora Z_N (rys. 2a).

Równocześnie z punktem końcowym wektora dokładności ε przemieszcza się prostokątne pole rozrzutu, przy czym nie ulegają zmianie wartości bezwzględne składowych wektora precyzji ΔZ oraz zostaje zachowana ich równoległość względem odpowiednich osi kartezjańskiego układu współrzędnych prostokątnych. Zatem przemieszczające się prostokątne pole rozrzutu nie zmienia wielkości powierzchni i nie ma rotacji. Przejrzyste zobrazowanie otrzymanych wyników zapewnia wykres kołowy (rys. 2b), który będzie niżej szczegółowo omówiony.

Rodzina okręgów o wspólnym środku, nazywana również [2] pękiem eliptycznych okręgów o wierzchołkach Z_N i ∞ , razem z kartezjańskim układem współrzędnych prostokątnych tworzy wykres kołowy. Środek pęku eliptycznego okręgów nazywamy biegunem wykresu kołowego. Promienie okręgów $r = |Z - Z_N|$ są przyporządkowane określonym wartościom numerycznym tolerancji argumentu impedancji, wyrażonym na wykresie kołowym w stopniach. Biegun wykresu kołowego leży w punkcie początkowym kartezjańskiego układu współrzędnych prostokątnych, w którym na osi odciętych są odkładane wartości numeryczne unormowanej składowej ε_R , a na osi rzędnych — unormowanej składowej ε_X . Moduł wektora dokładności ε na wykresie kołowym jest doprowadzony do wartości numerycznej maksymalnego promienia pęku eliptycznego okręgów.

Pęk ortogonalny do pęku eliptycznego tworzy rodzina prostych przechodzących przez biegun wykresu kołowego; tę rodzinę prostych nazywa się [2] pękiem hiperbolicznym okręgów niewłaściwych o wierzchołkach Z_N i ∞ . Poszczególne półproste należące do pęku hiperbolicznego wyznaczają kolejne położenia wektora dokładności ε . Na brzegu wykresu kołowego podana jest wartość numeryczna kąta odpowiadającego argumentowi wektora

dokładności ε . Położeniem zerowym wektora dokładności ε jest dodatnia półoś odciętych. Kierunek wirowania wektora dokładności ε wokół bieguna wykresu kołowego jest przeciwny do kierunku obrotu wskazówek zegara.



Rys. 2. Przedstawienie graficzne zależności tolerancji argumentu impedancji od wektorów dokładności i precyzji: a) wektor impedancji z wirującymi wektorami dokładności i precyzji, b) wykres kołowy tolerancji argumentu impedancji

Przedstawienie przebiegu zmian tolerancji argumentu impedancji na wykresie kołowym jest lepsze od zapisu w kartezjańskim układzie współrzędnych prostokątnych, w którym na osi odciętych odkładany jest kąt $\arg \varepsilon$, a na osi rzędnych tolerancje argumentu impedancji $\Delta\varphi$, ponieważ umożliwia uzyskanie identycznego odwzorowania położenia wektora dokładności ε z zachowaniem tej samej orientacji względem kartezjańskiego układu współrzędnych prostokątnych, jaką posiadał na płaszczyźnie liczb zespolonych Gaussa (rys. 2a).

Założmy, że dana jest impedancja nominalna $Z_N = 10 + j10$, moduł wektora dokładności $|\varepsilon| = 2$ (14,1421% $|Z_N|$) oraz moduł wektora precyzji $|\Delta Z| = \sqrt{2}$ (10% $|Z_N|$). Na wykresie kołowym (rys. 2b) przedstawiono przebieg zmian tolerancji argumentu impedancji Z_N dla trzech wariantów wektora precyzji: $\Delta Z_1 = 1 + j1$ — linia ciągła, $\Delta Z_2 = 0,5 + j1,3228$ — linia kreskowa i $\Delta Z_3 = 1,3228 + j0,5$ — linia punktowa.

Wydaje się, że po rzeczowej i szczegółowej analizie wyników przedstawionych na wykresie kołowym, możemy sądzić, że zostały zrealizowane dążenia do wiązania ze sobą teorii i praktyki:

a) Dla ściśle określonych wartości numerycznych wektora impedancji Z_N , wektora precyzji ΔZ i ustalonego modułu wektora dokładności $|\varepsilon|$, korzystnym rodzajem tolerancji jest taki rodzaj, dla którego tolerancja argumentu $\Delta\varphi$ przyjmuje wartość minimalną $\Delta\varphi_{\min}$.

b) Dla ściśle określonych wartości numerycznych wektora impedancji Z_N , wektora precyzji ΔZ i ustalonego modułu wektora dokładności $|\varepsilon|$, niekorzystnym rodzajem tolerancji jest taki rodzaj, dla którego tolerancja argumentu $\Delta\varphi$ przyjmuje wartość maksymalną $\Delta\varphi_{\max}$.

c) Dla ściśle określonych wartości numerycznych wektora impedancji Z_N i wektora precyzji ΔZ , standardowym rodzajem tolerancji jest taki rodzaj, dla którego tolerancja argumentu $\Delta\varphi$ przyjmuje wartości numeryczne z bliskiego otoczenia wartości średniej

$$\Delta\varphi_s = \frac{1}{2}(\Delta\varphi_{\max} + \Delta\varphi_{\min}),$$

przy odpowiednio dobranych znakach i wartościach numerycznych składowych wektora dokładności ε_R i ε_X , z zachowaniem warunku $|\varepsilon| = \text{const}$.

Z wykresu kołowego (rys. 2b) wynika bezpośrednio, że w układach fazoczułych winny być stosowane impedancje tolerowane troalnie [4], ponieważ zastosowanie impedancji tolerowanych troalnie zapewni mniejsze zmiany argumentu impedancji zastępczej układu w stosunku do zmian, jakie by powstały po wprowadzeniu do układu impedancji tolerowanych admensuralnie.

3. DRUGA KONCEPCJA

Przy omawianiu drugiej koncepcji będziemy posługiwali się konstrukcją geometryczną podaną na rys. 3. Na osi odciętych w punkcie R_G została przeprowadzona prosta prostopadła do osi odciętych, która przecina dwie półproste tworzące kąt $\Delta\varphi$ w punkcie oddalonych od siebie o $|\Delta Z|$, czyli równania kierunkowe (3) i (4) spełniają zależność

$$j\Phi_2 R_G - j\Phi_1 R_G = j|\Delta Z|;$$

stąd otrzymujemy odcięłą punktu Z_G

$$R_G = \frac{|\Delta Z|}{\Phi_2 - \Phi_1},$$

a po wykorzystaniu wzorów (1) i (2) widzimy, że

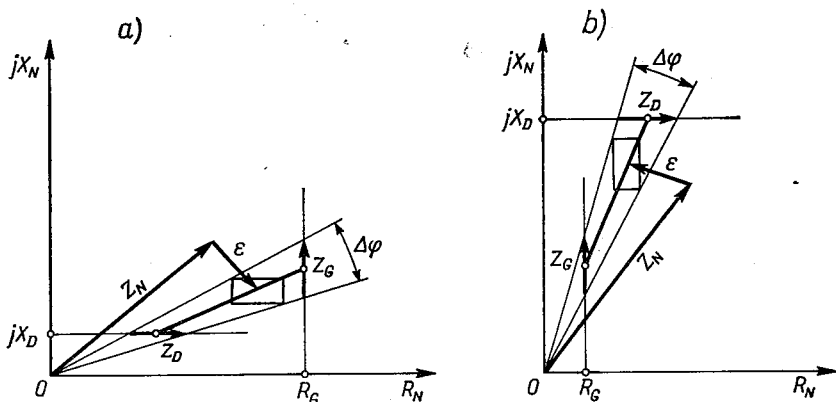
$$R_G = \frac{|\Delta Z| \left[(R_N + \varepsilon_R)^2 - \frac{1}{4}(\Delta R)^2 \right]}{(R_N + \varepsilon_R)\Delta X + (X_N + \varepsilon_X)\Delta R}. \quad (6)$$

Zauważymy, że rzędna punktu Z_G jest równa średniej arytmetycznej wartości funkcji opisujących dwie półproste (3) i (4)

$$jX_G = j \frac{1}{2}(\Phi_2 + \Phi_1) R_G;$$

dla wartości odciętej R_G określonej przez (6) i uwzględnieniu wzorów (1) i (2) otrzymujemy ostateczną postać

$$jX_G = j \frac{|\Delta Z|}{2} \cdot \frac{2(R_N + \varepsilon_R)(X_N + \varepsilon_X) + \Delta R \Delta X}{(R_N + \varepsilon_R)\Delta X + (X_N + \varepsilon_X)\Delta R}. \quad (7)$$



Rys. 3. Konstrukcja geometryczna umożliwiającą analizę położenia wektora dokładności ε i wektora precyzji ΔZ dla określonej tolerancji argumentu

Prosta równoległa do osi odciętych (rys. 3a) przecina dwie półproste tworzące kąt $\Delta\varphi$ w punktach oddalonych od siebie o $|\Delta Z|$, czyli musi być spełniona relacja dwu funkcji opisujących półproste

$$j\Phi_2 \left(R_D - \frac{1}{2} |\Delta Z| \right) = j\Phi_1 \left(R_D + \frac{1}{2} |\Delta Z| \right);$$

stąd otrzymujemy wzór na odciętą punktu Z_D

$$R_D = \frac{|\Delta Z|(\Phi_2 + \Phi_1)}{2(\Phi_2 - \Phi_1)}, \quad (8)$$

a wyrażając Φ_1 i Φ_2 przez wzory (1) i (2) dochodzimy do wzoru

$$R_D = \frac{|\Delta Z|}{2} \frac{2(R_N + \varepsilon_R)(X_N + \varepsilon_X) + \Delta R \Delta X}{(R_N + \varepsilon_R) \Delta X + (X_N + \varepsilon_X) \Delta R}. \quad (9)$$

Dla zmiennej niezależnej $R = R_D + \frac{1}{2} |\Delta Z|$ wzór (3) przyjmuje postać

$$jX_D = j\Phi_1 \left(R_D + \frac{1}{2} |\Delta Z| \right).$$

Podstawiając (8) do ostatniego wzoru napiszemy, że

$$jX_D = j \frac{|\Delta Z| \Phi_1 \Phi_2}{\Phi_2 - \Phi_1};$$

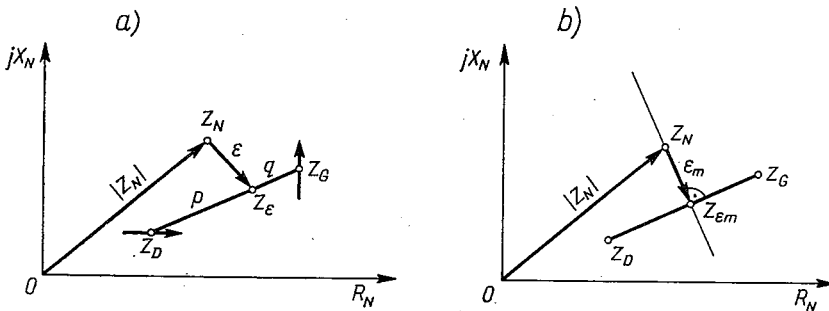
mając na uwadze zależności (1) i (2), otrzymujemy wzór na rzędną punktu Z_D

$$jX_D = j \frac{|\Delta Z| \left[(X_N + \varepsilon_X)^2 - \frac{1}{4} (\Delta X)^2 \right]}{(R_N + \varepsilon_R) \Delta X + (X_N + \varepsilon_X) \Delta R}. \quad (10)$$

Wprowadzmy równanie prostej przechodzącej przez dane dwa punkty Z_D i Z_G [3], gdzie $Z_D \neq Z_G$

$$j(X - X_D) = j \frac{X_G - X_D}{R_G - R_D} (R - R_D). \quad (11)$$

Ostatecznie skupmy uwagę na zbiorze liniowym odciętych spełniających nierówność $R_D \leq R \leq R_G$, dla $\Phi_2 \leq 1$ (rys. 2a), lub nierówność $R_G \leq R \leq R_D$, dla $\Phi_1 \geq 1$ (rys. 2b), któremu przyporządkowany jest odpowiedni zbiór wartości funkcji $jX_D \leq jX \leq jX_G$ dla $\Phi_2 \leq 1$, lub zbiór $jX_G \leq jX \leq jX_D$ dla $\Phi_1 \geq 1$. Na odcinku $Z_D Z_G$ prostej (11) będą układały się punkty końcowe wektora dokładności ε . Przy przebieganiu punktu końcowego wektora wzdłuż odcinka $Z_D Z_G$ wektor precyzji ΔZ podlega rotacji wokół własnego punktu środkowego. Rotacja odbywa się pomiędzy jednym punktem brzegowym, w którym wektor precyzji ΔZ przyjmuje położenie horyzontalne (punkt Z_D na rys. 3a, lub punkt Z_G na rys. 3b) i drugim punktem brzegowym, w którym wektor precyzji ΔZ przyjmuje położenie wertykalne (punkt Z_G na rys. 3a, lub punkt Z_D na rys. 3b). Nadto stwierdzamy, iż podczas rotacji wektora precyzji ΔZ powierzchnia prostokątnego pola rozrzutu również ulega



Rys. 4. Konstrukcja geometryczna do obliczania modułu wektora dokładności ε : a) bieżącego, b) minimalnego

zmianie i w położeniach brzegowych wektora precyzji ΔZ równa się zero. Jak widać, nawet w przypadku idealnej precyzji realizacji jednej ze składowych wektora impedancji, tzn. gdy odpowiednie składowe wektora precyzji nie są jednocześnie równe zero: $\Delta R = 0$ lub $\Delta X = 0$, należy liczyć się ze zmianą argumentu impedancji.

Oznaczmy przez Z_ε punkt końcowy wektora dokładności ε leżący na odcinku $Z_D Z_G$. Punkt Z_ε wyznacza podział wewnętrzny odcinka $Z_D Z_G$ w stosunku $\frac{p}{q} = \frac{Z_D Z_\varepsilon}{Z_\varepsilon Z_G}$ (rys. 4a), gdzie p i q są dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Wzory określające współrzędne punktu Z_ε mają postać

$$R_\varepsilon = \frac{pR_G + qR_D}{p + q},$$

$$jX_\varepsilon = j \frac{pX_G + qX_D}{p + q}.$$

Moduł wektora dokładności ε jest równy odległości pomiędzy dwoma punktami Z_N i Z_ε

$$|\varepsilon| = \sqrt{(R_N - R_\varepsilon)^2 + (X_N - X_\varepsilon)^2}. \quad (12)$$

Jest natychmiast widoczne, że moduł wektora dokładności ε przyjmuje minimalną wartość numeryczną, gdy leży na normalnej do odcinka $Z_D Z_G$ poprowadzonej z punktu Z_N (rys. 4b). Normalna wyprowadzona z punktu Z_N do odcinka $Z_D Z_G$ ma równanie

$$j(X - X_N) = -j \frac{R_G - R_D}{X_G - X_D} (R - R_N). \quad (13)$$

Dwie proste o równaniach (11) i (13) przecinają się w punkcie Z_{em} , którego współrzędne są określone wzorami

$$R_{em} = \frac{R_N(R_G - R_D)^2 + R_D(X_G - X_D)^2 + (R_G - R_D)(X_G - X_D)(X_N - X_D)}{(R_G - R_D)^2 + (X_G - X_D)^2},$$

$$jX_{em} = j \frac{(R_G - R_D)[(R_N - R_D)(X_G - X_D)^2 - (R_G - R_D)(X_G - X_D)(X_N - X_D)]}{(X_G - X_D)[(R_G - R_D)^2 + (X_G - X_D)^2]} + jX_N.$$

Istnieje taki wektor dokładności ε , dla którego składowe wektora precyzji ΔZ spełniają warunek

$$\frac{\Delta R}{\Delta X} = \frac{R_N}{X_N},$$

czyli precyzje realizacji składowych impedancji są odpowiednio proporcjonalne do modułów składowych R_N i X_N , co z punktu widzenia fizycznej realizowalności impedancji okazuje się bardzo korzystne.

4. UWAGI KOŃCOWE

Zaproponowany algorytm oceny rodzaju tolerowania prostokątnego impedancji należy traktować jako naturalne podejście do zagadnienia, chociaż to uzasadnienie nie wyklucza całkowicie możliwości rozbudowania go w przyszłości. W każdym razie ocena jest realna i dlatego można ją uznać za praktycznie realizowalną w takich sytuacjach projektowych, których wyniki zapewniają podanie optymalnych dokładności i precyzji realizacji impedancji.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. K. Borsuk, W. Szmielw, Podstawy geometrii, PWN, Warszawa 1970.
2. F. Leja, Funkcje zespolone, PWN, Warszawa 1967.
3. W. Pogorzelski, Geometria analityczna, PWN, Warszawa 1954.
4. J. J. Włodek, Rodzaje tolerowania prostokątnego impedancji dwójników, Archiwum Elektrotechniki, t. XIX, z. 1, 1970, s. 15—22.

5. J. J. Włodek, Metoda wyznaczania tolerancji pewnych impedancji dwójników, Rozprawy Elektrotechniczne, t. XVI, z. 4, 1970, s. 691—698.
6. J. J. Włodek, Obliczanie i zapisywanie pola rozrzutu impedancji tolerowanych, Archiwum Elektrotechniki, t. XX, z. 1, 1971, s. 207—216.

J. J. WŁODEK

ALGORITHM FOR EVALUATION OF KIND OF RECTANGULAR TOLERANCING OF TWOTERMINAL NETWORKS IMPEDANCE

Summary

The paper deals with the possibility of the evaluation of the kind of rectangular tolerancing of passive two-terminal networks impedance. Here this problem is solved with the aid of a detailed analysis of change of modules and arguments for the two vectors which determine the accuracy and precision of rectangular tolerancing.

J. J. WŁODEK

BEURTEILUNGSGALGORITHMUS DER TOLERANZWEISE GRADWINKLIGER ZWEIPOLIMPEDANZ

Zusammenfassung

In der Bearbeitung wird die Möglichkeit einer Beurteilung der Toleranzweise gradwinkliger passiver Zweipolimpedanz erwogen. Dieses Problem wurde mittels eingehender Analyse der Modulveränderungen sowie Zweivektorenargumente gelöst, die die Genauigkeit und Präzision der gradwinkligen Toleranz beschreiben.

Е. Ю. ВЛОДЕК

АЛГОРИТМ ОЦЕНКИ ВИДА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ДОПУСКОВ ИМПЕДАНСА ДВУХПОЛЮСНИКОВ

Резюме

В работе показана возможность оценки вида прямоугольных допусков импеданса пассивных двухполюсников. Эта проблема решена путем обстоятельного анализа изменения модулов и аргументов двух векторов, которые определяют точность и чёткость прямоугольных допусков.

Efekt termoelektryczny w układach kontaktów metal-PbTiO₃-metal

JAN HAŃDEREK (KATOWICE), JULIAN DUDEK (KATOWICE), BARBARA ESOP (KATOWICE)

*Uniwersytet Śląski, Instytut Fizyki**Otrzymano 8.2.1971*

Zbadano efekt Seebecka w symetrycznych i niesymetrycznych układach kontaktów metal—PbTiO₃—metal przy różnicy temperatur między układem i zewnętrznymi złączami przewodników odprowadzających ($\Delta_1 T$) oraz przy różnych temperaturach poszczególnych kontaktów metal—PbTiO₃ ($\Delta_2 T$). Ze znajomości sił termoelektrycznych i prądu termodyfuzyjnego wyznaczono przewodnictwo elektryczne układu w funkcji temperatury.

1. WSTĘP

a) Aktualne problemy w badaniach własności półprzewodnikowych ferroelektryków. W ostatnich latach obserwuje się duże nasilenie badań nad własnościami półprzewodnikowymi związków o własnościach ferroelektrycznych. W wielu kryształach ferroelektrycznych, szczególnie w grupie kryształów o strukturze perowskitu, obok specyficznych własności ferroelektrycznych stwierdzono występowanie własności typowych dla półprzewodników [1]. Obok zakresu wartości przewodnictwa elektrycznego i międzypasmowej energii aktywacji nośników ładunku, istnienie typowych własności półprzewodnikowych wynika z badań efektu Halla, zjawisk termoelektrycznych, zjawisk fotoelektrycznych itp.

Jest rzeczą zrozumiałą, że dane o własnościach półprzewodnikowych ferroelektryków są jeszcze skromne i brak im precyzji tak charakterystycznej dla wiedzy o niektórych klasycznych materiałach półprzewodnikowych. Szereg uzyskanych informacji przedstawia duże trudności w interpretacji, podobnie zresztą jak w przypadku o wiele prostszych związków półprzewodnikowych.

Siłą napędową burzliwego rozwoju badań nad własnościami półprzewodnikowymi ferroelektryków są liczne już zastosowania tych materiałów w technice i jeszcze większe perspektywy wzrostu liczby ich zastosowań.

Prócz tego, że materiały ferroelektryczne są związkami bardziej złożonymi od typowych półprzewodników, często występują niepokonane dotychczas trudności uzyskania ich w postaci monokryształów, bądź uzyskane monokryształy nie są dostatecznie czyste a defekty sieci nie zawsze są kontrolowane. W dostępnych metodach hodowli monokryształy zawierają zwykle materiał rozpuszczalnika i tygla a ponadto trudności w uzyskaniu precyzyjnej regulacji wartości gradientów temperatury nie pozwalają na eliminację innych defektów sieciowych.

Własności dużej liczby materiałów ferroelektrycznych zostały zbadane na materiale polikrystalicznym. Ceramiki wykazały swą użyteczność w doświadczeniach i zastosowaniach. Do danych uzyskanych dla ceramik należy podchodzić z pełnym zrozumieniem szczególnych własności próbek niemonokrystalicznych. Trudności pojawiają się dlatego, że poszczególne krystality są na ogół otoczone warstwą powierzchniową, której własności elektryczne różnią się od własności fazy objętościowej. W niektórych przypadkach, gdy mierzy się przewodnictwo próbki krystalicznej, w której ziarna łączą się na niewielkiej przestrzeni, oporność i spadek potencjału są całkowicie zlokalizowane na kontaktach ziaren i nie charakteryzują własności objętościowych krystalitów. Jednakże w wysokich temperaturach duże przewodnictwo gazu elektronowego występującego w porach między krystalitami (na skutek emisji z krystalitów tlenkowych) może zapewnić dostateczny kontakt elektryczny krystalitów. W tych warunkach przewodnictwo elektryczne obserwowane dla polikryształów może charakteryzować fazę objętościową [2]. W wysokich temperaturach głównym mechanizmem przewodnictwa cieplnego jest promieniowanie. Dzięki temu może nastąpić dostateczne zmniejszenie oporności cieplnej na złączach krystalitów tak, aby cały gradient temperatury występował wewnątrz krystalitów [3]. W tych warunkach również pomiary siły termoelektrycznej dokonane na próbkach polikrystalicznych dają wyniki charakterystyczne dla fazy objętościowej. Jednak nawet w tych przypadkach własności polikryształów nie mogą być całkowicie wyjaśnione póki nie porówna się ich z własnościami prawie doskonałych monokrystalitów.

Problemem otwartym w fizyce ferroelektryków jest sprawa wzajemnej zależności własności ferroelektrycznych i półprzewodnikowych. Trudno jest w tej chwili odpowiedzieć na pytanie, jak własności półprzewodnikowe zależą od specyficznych własności ferroelektrycznych, takich jak struktura domenowa, obecność polaryzacji spontanicznej, wyjątkowo duża wartość przenikalności elektrycznej itp.

Substancje półprzewodnikowe klasyfikuje się m. in. według występującego w nich typu wiązania chemicznego. W wielu kryształach ferroelektrycznych mamy do czynienia z wiązaniami jonowo-kowalentnymi o mniejszym lub większym udziale jednego z tych wiązań. Istotne jest pytanie, w jakim stopniu takie kryształy ferroelektryczne mogą być zaliczane do półprzewodników elektronowych. W wielu związkach szerokość wzbronionej strefy energetycznej wykazuje tendencję zwiększania się ze wzrostem udziału wiązania jonowego. Substancje, w których wiązania mają charakter najbardziej jonowy, nie są zwykle rozpatrywane jako półprzewodniki, ponieważ ich przewodność elektronowa jest znikomo niska. Takie własności wykazuje większość znanych ferroelektryków. Dlatego zalicza się je do dielektryków. Wyjątek stanowią niektóre kryształy o strukturze perowskitu i o strukturze zbliżonej do ilmenitu, gdzie występują wiązania jonowo-kowalentne o silnie zmieniającym się udziale obu typów wiązań w miarę zmiany odległości międzyatomowej. W tej właśnie grupie kryształów spotyka się własności półprzewodnikowe. W związkach tego typu możliwy jest jednak udział przewodnictwa elektronowego i jonowego. Dla stwierdzenia stopnia udziału tych mechanizmów badania przewodnictwa muszą być możliwie wszechstronne, a szczególnie korzystne jest zbadanie efektu Halla, efektu Seebecka, fotoprzewodnictwa itp. Jest to ważne również ze względu na specyficzne trudności związane z techniką pomiaru przewodnictwa ferroelektryków. Całkowity prąd płynący w obwodzie kondensatora z ferroelektrykiem składa się z prądu ładowania kondensatora, z prądu związanego z po-

jawianiem się różnych rodzajów polaryzacji indukowanej przez pole pomiarowe, z prądu związanego ze zmianami polaryzacji spontanicznej (przy zmianach temperatury — prąd piroelektryczny, w stałej temperaturze — prąd związany ze zmianą struktury domenowej) oraz z prądu związanego z przewodnictwem objętościowym. Dopiero ta ostatnia składowa, jeśli jest stała w czasie, może być miarą przewodnictwa właściwego. Złożony charakter prądu płynącego w obwodzie próbki jest nawet źródłem pewnych trudności w zakresie terminologii [4]. Niektóre problemy w tym zakresie nie zostały do tej pory rozwiązane.

Oddzielne problemy przy badaniu przewodnictwa ferroelektryków wynikają z faktu, że próbki używane do badań mogą być w różnym stopniu spolaryzowania. W przypadku monokryształów stanami, w których struktura domenowa jest jednoznacznie określona są: stan monodomenowy i stan polidomenowy ze skompensowaną strukturą domenową. Przyjmuje się, że w polikryształach wymienionym stanem monokryształu odpowiadają odpowiednio: maksymalnie spolaryzowana i niespolaryzowana ceramika [1].

Wbrew początkowym poglądom zmiany polaryzacji spontanicznej wywołuje nie tylko pole wyższe od pola koercji, ale pole o dowolnie małym natężeniu [5]. W polu stałym przepolaryzowanie ma miejsce w dowolnie małych polach, jeśli tylko działa ono dostatecznie długo [6]. W technice pomiarowej należy więc stworzyć takie warunki, by prąd związany ze zmianami polaryzacji spontanicznej znikał dostatecznie szybko (pole pomiarowe o dużym natężeniu), lub stosować tak małe pole, by prąd dP_s/dt był mały w stosunku do mierzonego prądu, związanego z przewodnictwem objętościowym.

Jak stwierdzono, na przewodnictwo ferroelektryków oprócz wymienionych czynników ma wpływ także materiał elektrod, ciśnienie (piezoeft) itp. Ogólną zasadą przy doborze techniki pomiarowej jest znajdowanie takich charakterystyk, które nie zależą od niekontrolowanych czynników. Brak uwzględnienia wszystkich istotnych czynników jest źródłem wielu nieporozumień przy porównywaniu wyników uzyskiwanych przez różnych autorów, a często uniemożliwia takie porównanie.

Najczęściej stosowanymi metodami pomiaru przewodnictwa elektrycznego ferroelektryków są: 1) metoda galwanometryczna pomiaru prądu płynącego w obwodzie próbki pod wpływem pola pomiarowego, 2) metoda pomiaru napięcia wywołanego przez prąd przewodnictwa na oporze wzorcowym, 3) metoda ładowania wzorcowej pojemności włączonej w szereg z próbką itp. Metody mostkowe są na ogół mało przydatne [1].

b) Efekt termoelektryczny w ferroelektrykach. Jeden z prostszych sposobów badania typu przewodnictwa elektrycznego polega na badaniu zjawisk termoelektrycznych. Metoda ta oparta jest na badaniu znaku siły termoelektrycznej zimniejszego złącza, który jest różny przy różnych znakach nośników większościowych prądu. W tych przypadkach kiedy badanie efektu Halla jest niemożliwe lub trudne, jak np. w ferroelektrykach, badanie termoeftu jest jedynym sposobem określenia typu przewodnictwa.

Eft Seebecka w PbTiO_3 badał Guriewicz [1]. Na podstawie znaku różniczkowej siły termoelektrycznej ustalił on, że w zakresie temperatur poniżej 400°K w PbTiO_3 występuje przewodnictwo typu n , natomiast powyżej $500\text{—}550^\circ \text{K}$ — przewodnictwo typu p . Najwięcej badań nad efektem termoelektrycznym w ferroelektrykach wykonano dla BaTiO_3 . Zależność temperaturową różniczkowej siły termoelektrycznej dla ceramik

BaTiO_3 o dużej czystości zbadał Pigoń [7]. W zakresie temperatur od $440 \div 445^\circ \text{K}$ do 1110°K znak współczynnika Seebecka (α) wskazuje na przewodnictwo typu p . Dla zakresu niższych temperatur ($T < 450^\circ \text{K}$) znak α odpowiada przewodnictwu typu n . Podobny wynik otrzymali autorzy prac [8, 9]. W wyniku porównania liczbowych wartości α powyżej i poniżej granicy temperatur, gdzie następuje zmiana typu przewodnictwa, otrzymano stosunek ruchliwości elektronów i dziur wynoszący 11:1 [10]. Dla ceramiki BaTiO_3 zbadano także zmiany temperaturowe prądu termodyfuzyjnego. Prąd termodyfuzyjny obserwowano w obwodzie zewnętrznym o oporze mniejszym od oporu wewnętrznego ceramiki przy zastosowaniu elektrod srebrnych i różnicy temperatur $10 \div 20^\circ \text{C}$ [11]. Efekt Seebecka dla BaTiO_3 z domieszkami takimi jak La, Ce, Mg badano w pracach [12, 13].

Jak wynika z badań autorów obserwacja zjawiska termoelektrycznego może być wykorzystana nie tylko do określenia typu przewodnictwa, ale także do wyznaczenia jego wartości. Opracowana metoda pomiaru przewodnictwa wydaje się mieć szereg zalet w stosunku do stosowanych tradycyjnie metod pomiarowych. Z tego powodu obok pomiaru sił termoelektrycznych dużo uwagi poświęcono badaniu prądów termodyfuzyjnych mierzonych przy różnych oporach obwodu zewnętrznego. Wyniki pokażemy na przykładzie badań przeprowadzonych przez autorów dla symetrycznych i niesymetrycznych układów metal— PbTiO_3 —metal. Wybór materiału ferroelektryka był podyktowany tym, że w PbTiO_3 w silnym stopniu współlistnieją własności ferroelektryczne i półprzewodnikowe. Spośród innych materiałów ferroelektrycznych PbTiO_3 wyróżnia się wysoką temperaturę Curie i dużą wartością polaryzacji spontanicznej [14 ÷ 17]. W wyższych temperaturach PbTiO_3 wykazuje także własności pozwalające go zakwalifikować do półprzewodników [18, 19].

Jak stwierdzono, współlistnienie własności ferroelektrycznych i półprzewodnikowych PbTiO_3 w układach metal— PbTiO_3 —metal jest źródłem nowych własności interesujących z punktu widzenia teorii i możliwości wykorzystania w technice [20].

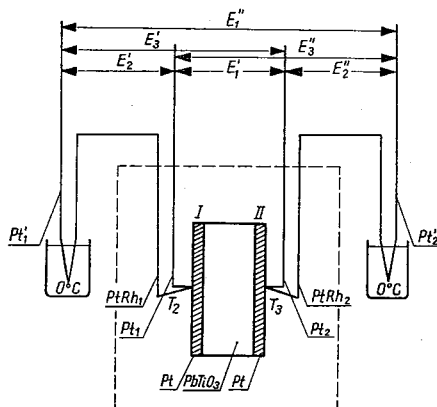
2. TECHNIKA EKSPERYMENTU

W wymienionych układach warstwę ferroelektryka stanowiły próbki ceramiczne PbTiO_3 przygotowane ze składników PbO i TiO_2 cz.d.a. poddanych normalnej obróbce mechanicznej i cieplnej. Badania rentgenowskie gotowych próbek wykazały, że posiadają one strukturę PbTiO_3 . Dodatkowe badania na mikroanalizatorze rentgenowskim wykazały równomierne rozmieszczenie jonów Pb i Ti oraz brak zanieczyszczeń w granicach 0,1%, które mogłyby się pojawić w procesie technologicznym. Po starannym wyszlifowaniu próbek (o grubości 0,2 cm) nałożono na ich powierzchnie z obu stron elektrody platynowe, używając do tego celu odpowiedniej pasty wtapianej w temperaturze około 800°C .

Badano siły termoelektryczne i prądy termodyfuzyjne pojawiające się w obwodach zawierających układ $\text{Pt—PbTiO}_3\text{—Pt}$ przy różnych różnicach temperatur między układem jako całością i zewnętrznymi kontaktami przewodników odprowadzających $\Delta_1 T$ oraz przy różnych wartościach różnicy temperatur samych złącz metal— PbTiO_3 ($\Delta_2 T$).

W różnych badanych przypadkach przynajmniej jedna z wymienionych różnic temperatur była różna od zera.

Rysunek 1 przedstawia przykład schematu obwodów zawierających jednocześnie układy kontaktów symetrycznych i niesymetrycznych. Warstwę ferroelektryka z nanie-



Rys. 1. Schemat obwodów pomiarowych

sionymi elektrodami z platyny umieszczono w specjalnym uchwycie między identycznymi złączami dwóch termopar platyna—platynorod. Drugie złącza zostały wyprowadzone na zewnątrz termostatu i umieszczone w naczyniu Devara z topniejącym lodem. W uchwycie znajdowały się dwie miniaturowe grzałki umożliwiające wytworzenie i regulację różnicy temperatur między kontaktami I i II. Wykonany układ umożliwia niezależny pomiar temperatury każdego z kontaktów metal— PbTiO_3 , a przy połączeniu w układ termopary różnicowej — kontrolę różnicy temperatur między tymi kontaktami. Ponadto obwód umożliwia badanie sił termoelektrycznych i prądów termodyfuzyjnych w dwóch typach obwodów zawierających układ $\text{Pt—PbTiO}_3\text{—Pt}$, a mianowicie:

a) układów kontaktów symetrycznych:

$$\text{Pt}_1\text{—Pt—PbTiO}_3\text{—Pt—Pt}_2 \quad (E'_1, J'_1),$$

$$\text{PtRh}_1\text{—Pt—PbTiO}_3\text{—Pt—PtRh}_2 \quad (E''_1, J''_1);$$

b) układów kontaktów niesymetrycznych:

$$\text{Pt}_2\text{—Pt—PbTiO}_3\text{—Pt—PtRh}_1 \quad (E'_3, J'_3),$$

$$\text{Pt}_1\text{—Pt—PbTiO}_3\text{—Pt—PtRh}_2 \quad (E''_3, J''_3).$$

Po wstępnym wygrzaniu układu w temperaturze wyższej od punktu Curie (mającym na celu odmłodzenie próbki ferroelektryka) stabilizowano żądane temperatury w ciągu około 30 min i mierzono wartości sił termoelektrycznych za pomocą kompensatora. Prąd termodyfuzyjny mierzono za pomocą odpowiednio czułego miernika przy różnych wartościach oporu zewnętrznego obwodu. Pomiaru wykonano w różnych temperaturach pozwoliły określić zmiany temperaturowe badanych wielkości.

3. WYNIKI DOŚWIADCZALNE

a) Siły termoelektryczne. Przy różnych wartościach różnicy temperatur złącz I i II ($\Delta_2 T$) i ustalonej temperaturze średniej układu mierzono siły termoelektryczne w obwodach zawierających układ Pt—PbTiO₃—Pt. Zgodnie ze schematem przedstawionym na rysunku 1 pomiary te można przeprowadzać dla obwodów symetrycznych (w których do układu dołączone są przewodniki tego samego rodzaju) oraz dla obwodów niesymetrycznych (w których do układu dołączone są przewodniki różnego rodzaju). Przez E'_1 i E'_2 oraz E'_3 i E'_3 oznaczono całkowite siły termoelektryczne odpowiednio układów kontaktów symetrycznych i niesymetrycznych.

W każdym z wymienionych obwodów występowały dwie różnice temperatur złącz:

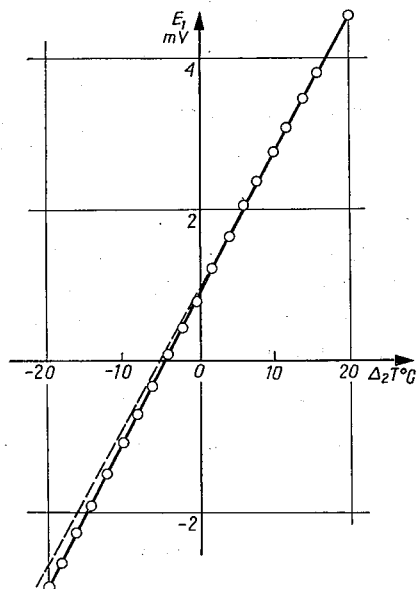
1° różnica temperatur między kontaktami I i II

$$\Delta_2 T = T_2 - T_3, \quad (1)$$

2° różnica temperatur między układem kontaktów I i II jako całością oraz zewnętrznymi złączami przewodników odprowadzających (drutów termoparowych)

$$\Delta_1 T = \frac{T_2 + T_3}{2} - T_1, \quad (2)$$

gdzie T_1 — temperatura zewnętrznego złącza.

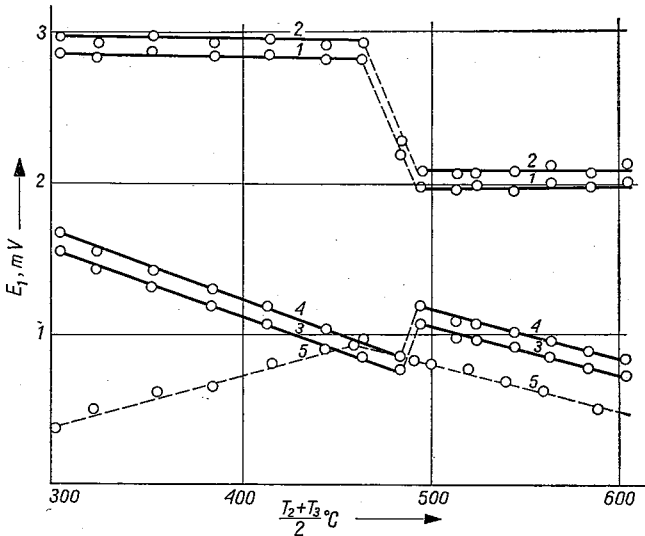


Rys. 2. Zależność siły termoelektrycznej w obwodzie PtRh₁—PT—PbTiO₃—Pt—PtRh₂ od różnicy temperatur kontaktów I i II ($\Delta_2 T$) przy średniej temperaturze układu równej 445° C

Na rysunku 2 przedstawiono przykład zależności wartości sił termoelektrycznych w obwodach symetrycznych (E'_1) od $\Delta_2 T$ przy średniej temperaturze układu równej 445° C. Podobne wyniki otrzymano w innych temperaturach w zakresie 300 ÷ 550° C. Zależność $E_1(\Delta_2 T)$ ma charakter liniowy, lecz dla różnych znaków $\Delta_2 T$ współczynniki

Seebecka (α_1) stanowiące nachylenia prostych mają różne wartości. Ponadto przy $\Delta_2 T = 0$ (lecz $\Delta_1 T \neq 0$) występują różne od zera wartości E_1^0 . Podobny efekt zaobserwowano w (BaSr)O [20a]. Występowania E_1^0 nie można wyjaśnić ewentualną niedokładnością ustalenia stanu $\Delta_2 T = 0$. Takie same wartości E_1^0 wynikają z bezpośredniego pomiaru przy $\Delta_2 T = 0$ oraz z ekstrapolacji prostych $E_1(\Delta_2 T)$. Maksymalny błąd pomiaru $\Delta_2 T$ wynosił $0,5^\circ \text{C}$. Dla wytworzenia zaś znalezionych wartości E_1^0 musiałaby występować różnica temperatur $\Delta_2 T$ rzędu kilku stopni. Nie udaje się też w ten sposób wyjaśnić różnic wartości α_1 przy $\pm \Delta_2 T$.

Dalsze potwierdzenie powyższych faktów otrzymano przy badaniu sił termoelektrycznych E'_1 i E''_1 w zależności od średniej temperatury układu $\left(T_{sr} = \frac{T_2 + T_3}{2}\right)$ przy takiej samej wartości lecz różnych znakach $\Delta_2 T = \pm 10^\circ \text{C}$. Wyniki przedstawiono na rysunku 3.



Rys. 3. Zależność sił termoelektrycznych w obwodach symetrycznych, zmierzonych przy $\Delta_2 T = \pm 10^\circ \text{C}$ i $\Delta_2 T = 0$, w zależności od średniej temperatury układu

1 i 2 — E'_1 i E''_1 przy $\Delta_2 T = +10^\circ \text{C}$

3 i 4 — (E'_1) i (E''_1) przy $\Delta_2 T = -10^\circ \text{C}$

5 — E_1^0 przy $\Delta_1 T \neq 0$ i $\Delta_2 T = 0$

Na rysunku tym przedstawiono także wartości E_1^0 zmierzone bezpośrednio przy $\Delta_2 T = 0$. Poniżej temperatury Curie nie zaobserwowano wyraźnych zmian E_1^0 z czasem. W zakresie temperatur $T > T_c$ występuje tendencja wolnego zmniejszania się E_1^0 . Przy długim czasie obserwacji otrzymuje się tu wartości malejące z temperaturą (krzywa 5). Przy krótszym czasie obserwacji wartości E_1^0 rosną z temperaturą także powyżej punktu Curie. Przy różnych znakach $\Delta_2 T$ występują nie tylko różnice wartości E'_1 i E''_1 , ale różny jest także charakter zależności temperaturowej tych sił termoelektrycznych. Na rysunku 3 widać również anomalie w obszarze przemiany fazowej, występujące w PbTiO_3 w temperaturze około 490°C .

Z rysunku 2 widać, że zależność $E_1(\Delta_2 T)$ może być zapisana wzorem:

$$E_1 = \alpha_1 \cdot \Delta_2 T \pm E_1^0. \quad (3)$$

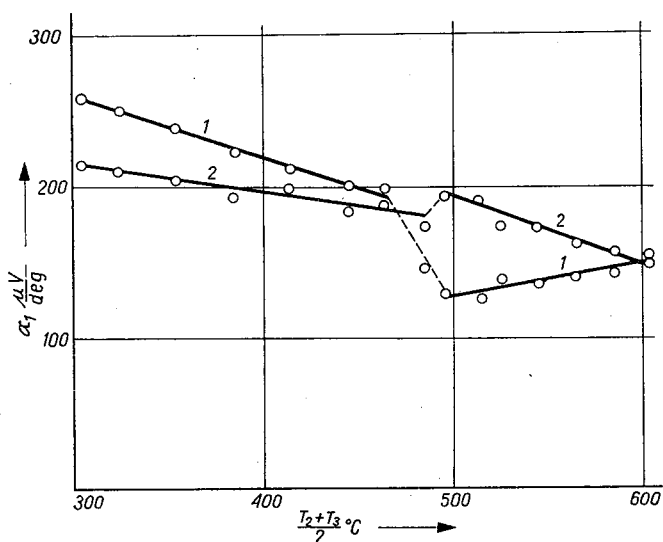
Znaki $\pm$ dotyczą odpowiednich znaków $\Delta_2 T$.

Współczynniki Seebecka dla dodatnich i ujemnych wartości $\Delta_2 T$ można wyznaczyć z wzorów:

$$\alpha_1(+\Delta_2 T) = \frac{E_1(+\Delta_2 T) - E_1^0}{\Delta_2 T}$$

$$\alpha_1(-\Delta_2 T) = \frac{E_1(-\Delta_2 T) + E_1^0}{\Delta_2 T} \quad (4)$$

Wyznaczone według wzorów (4) wartości różniczkowych sił termoelektrycznych (odpowiadających E_1') w funkcji średniej temperatury układu przedstawiono na rysunku 4. Z rysunku widać, że mimo uwzględnienia E_1^0 występują różnice wartości α_1 przy $\pm \Delta_2 T$. W zakresie temperatur wyższych od punktu Curie występują nawet różnice charakteru



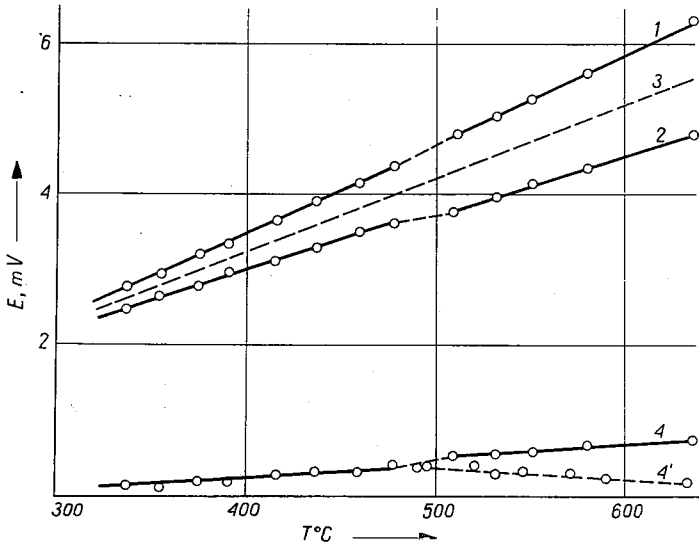
Rys. 4. Współczynniki Seebecka (odpowiadające E_1') w funkcji średniej temperatury układu przy dodatnich i ujemnych wartościach $\Delta_2 T$ (odpowiednio krzywe 1 i 2)

zależności temperaturowej tych współczynników. Dla ujemnej wartości $\Delta_2 T$ (krzywa 2) obserwuje się większy rozrzut wyników.

Na rysunku 5 przedstawiono siły termoelektryczne w obwodach niesymetrycznych (E_3' i E_3'') zmierzone przy $\Delta_2 T = 0$ lecz $\Delta_1 T \neq 0$, w zależności od temperatury ($T_2 = T_3$), która przy $T_1 = 0^\circ \text{C}$ i $\Delta_2 T = 0$ stanowi wartość $\Delta_1 T$. Na tym samym rysunku przedstawiono zmiany temperaturowe E_2 (przy $\Delta_2 T = 0$, $E_2' = E_2''$) oraz wartości E_1^0 . Wartości E_1^0 zmierzone przy względnie krótkim czasie obserwacji wykazują powyżej punktu Curie wzrost z temperaturą (krzywa 4). W każdej temperaturze podane na rysunku 5

siły termoelektryczne wykazują następujące zależności:

$$\begin{aligned} E'_3 &= E_2 + E_1^0, \\ E''_3 &= E_2 - E_1^0. \end{aligned} \quad (5)$$



Rys. 5. Zależność temperaturowa sił termoelektrycznych w obwodach niesymetrycznych i symetrycznych przy $\Delta_1 T \neq 0$ i $\Delta_2 T = 0$

1 — E'_3 , 2 — E''_3 , 3 — E_2 , 4 — E_1^0 przy krótkim czasie obserwacji, 4' — E_1^0 przy długim czasie obserwacji

Ponadto współczynniki Seebecka oznaczone analogicznie do SEM wykazują zależność:

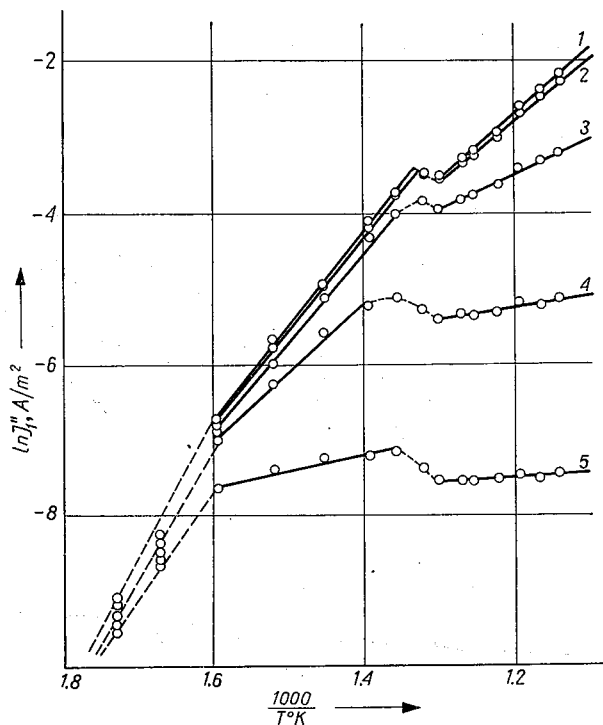
$$\alpha_3 = \alpha_2 \pm \alpha_1^0, \quad (6)$$

gdzie $\alpha_3 = \frac{E'_3}{\Delta_1 T}$ lub $\frac{E''_3}{\Delta_1 T}$, $\alpha_2 = \frac{E_2}{\Delta_1 T}$ i $\alpha_1^0 = \frac{E_1^0}{\Delta_1 T}$.

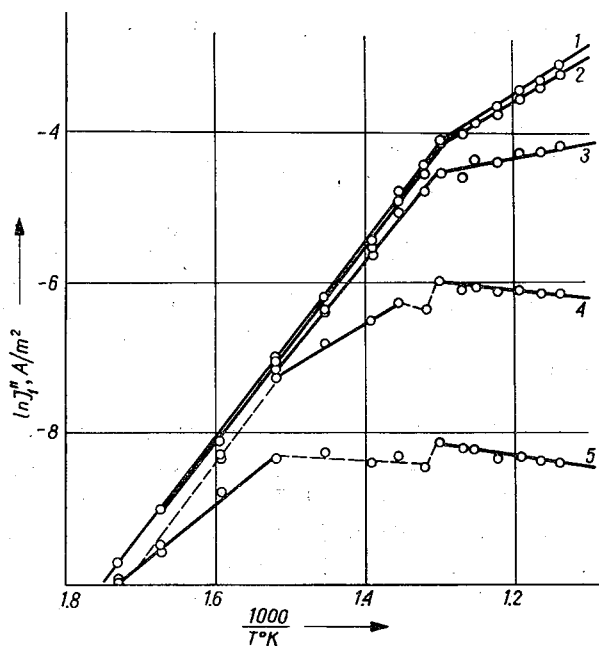
Dla E'_3 i E''_3 wartości α_3 wynoszą odpowiednio 12 i $8 \frac{\mu V}{\deg}$ przy $\alpha_2 = 10 \frac{\mu V}{\deg}$ i $\alpha_1^0 = 2 \frac{\mu V}{\deg}$.

Związki podobne do opisanych wzorami (5) i (6) wykazują siły termoelektryczne w układach niesymetrycznych zmierzone przy $\Delta_1 T \neq 0$ i $\Delta_2 T \neq 0$. Sumy występujące we wzorach (5) i (6) należy wtedy traktować algebraicznie.

b) Prądy termodyfuzyjne. W warunkach opisanych w punkcie a) zmierzono prądy termodyfuzyjne odpowiadające siłom termoelektrycznym E'_1 , E''_1 , E'_3 i E''_3 przy $\Delta_1 T \neq 0$ i $\Delta_2 T \neq 0$ oraz przy $\Delta_1 T \neq 0$ i $\Delta_2 T = 0$. Gęstości prądów mierzonych wykazały w każdym przypadku silną zależność od oporu zewnętrznego obwodu (R). Opór ten zmieniano w granicach $1 \Omega \div 10 \text{ k}\Omega$. Na rysunkach 6 i 7 przedstawiono przykłady zmian temperaturowych gęstości prądu termodyfuzyjnego w formie zależności $\ln J = f\left(\frac{1}{T_{sr}}\right)$. Są to prądy odpowiadające siłom termoelektrycznym E''_1 dla $\Delta_2 T = \pm 10^\circ \text{C}$



Rys. 6. Zależność $\ln J''_1 = f\left(\frac{1}{T}\right)$ przy $\Delta_1 T = +10^\circ \text{C}$ dla różnych oporów obwodu zewnętrznego
 1 — $R = 1 \Omega$, 2 — $R = 10 \Omega$, 3 — $R = 100 \Omega$, 4 — $R = 1 \text{ k}\Omega$, 5 — $R = 10 \text{ k}\Omega$



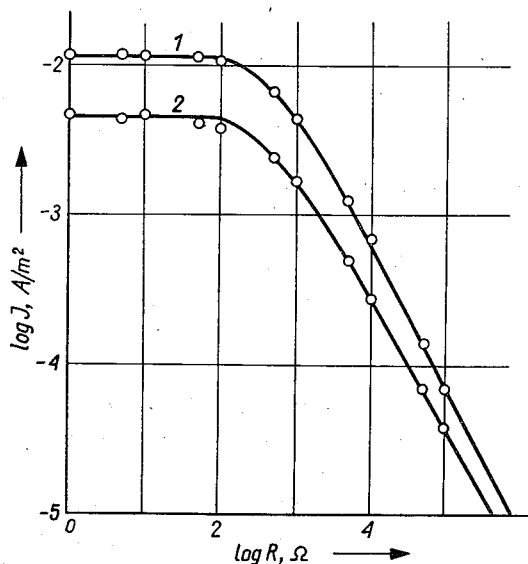
Rys. 7. Jak na rys. 6 dla $\Delta_2 T = -10^\circ \text{C}$

przedstawionym na rysunku 3. Przy każdej wartości $T_{sr} = (T_2 + T_3)/2$ i $\Delta_2 T$ mierzono prąd termodyfuzyjny przy różnych oporach R . Dane otrzymane dla różnych wartości T_{sr} pozwoliły określić zależność temperaturową prądów płynących w obwodzie zewnętrznym przy różnych R . Na wykresach $\ln J = f\left(\frac{1}{T}\right)$ występują odcinki prostej o różnym nachyleniu dla temperatur niższych i wyższych od obszaru przemiany fazowej w PbTiO_3 . Zmiany prądu termodyfuzyjnego mogą być zapisane wzorem:

$$J = J_0 e^{-\varphi/kT}, \quad (7)$$

przy czym φ oznaczające energię aktywacji nośników prądu ma różne wartości dla $T < T_c$ i $T > T_c$ oraz dla różnych R . Dla większych wartości R zależność zapisana wzorem (7) występuje tylko w wąskich zakresach temperatur, a φ wyznaczone z nachylenia prostych $\ln J = f\left(\frac{1}{T}\right)$ ma wartości malejące ze wzrostem R .

Przykłady zależności $J(R)$ zbadanej przy tej samej temperaturze średniej i gradientach temperatur $\Delta_2 T = \pm 10^\circ \text{C}$ przedstawiono na rysunku 8. Przy zmniejszaniu R prąd



Rys. 8. Zależność gęstości prądu termodyfuzyjnego od oporu zewnętrznego w obwodzie $\text{PtRh}_1\text{-Pt-PbTiO}_3\text{-Pt-PtRh}_2$ przy $\Delta_2 T = 10^\circ \text{C}$ (krzywa 1) i $\Delta_2 T = -10^\circ \text{C}$ (krzywa 2) dla średniej temperatury układu

$$\frac{T_2 + T_3}{2} = 445^\circ \text{C}$$

mierzony początkowo rośnie, natomiast przy małych wartościach R wykazuje słabą zależność od R . Dla zrozumienia zależności mierzonego prądu termodyfuzyjnego od oporu zewnętrznego obwodu przyjmijmy obwód zastępczy, w którym opór wewnętrzny układu Pt-PbTiO_3 jest włączony równolegle do źródła siły termoelektrycznej (rys. 9). W warunkach, które opiszemy bliżej w następnym punkcie następuje dyfuzja nośników wstrzykniętych do PbTiO_3 z elektrod.

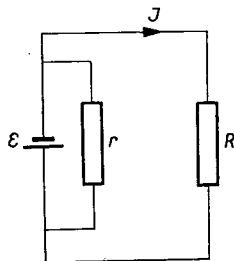
Prąd dyfuzyjny jest wyrażony wzorem:

$$J_D = \mu kT \frac{\delta n}{\delta x} = J_{D0} e^{-\varphi/kT}, \quad (8)$$

gdzie

φ — energia aktywacji nośników w przypadku dyfuzji,

μ — ruchliwość nośników.



Rys. 9. Schemat obwodu zastępczego

Pod wpływem pola wywołanego spadkiem potencjału na oporze R (wywołanym przez mierzony prąd) przez opór wewnętrzny przepływa prąd przewodzenia J_E skierowany przeciwnie do prądu dyfuzyjnego. Prąd ten wyrażony jest wzorem:

$$J_E = \sigma_E = \sigma \frac{JR}{d}, \quad (9)$$

gdzie d — grubość próbki PbTiO_3 .

Prąd mierzony stanowi wynik superpozycji J_D i J_E :

$$J = J_D - J_E. \quad (10)$$

Dla $R \rightarrow 0$, $J_E \rightarrow 0$ i prąd mierzony stanowi J_D . Przy $R \rightarrow \infty$, $J_E = J_D$ i prąd wypadkowy ma wartość zero. W przypadkach pośrednich prąd mierzony wyrażony wzorem (10) ma wartość tym mniejszą, im większy jest opór R .

Zależności podobne do przedstawionych przykładowo na rys. 6÷8 wykazały także prądy termodyfuzyjne mierzone w obwodach niesymetrycznych, tzn. odpowiadające siłom termoelektrycznym E'_3 i E''_3 . Zależności przedstawione przykładowo na rysunkach 6 i 7 występują tylko w zakresie dostatecznie wysokich temperatur. W pobliżu temperatury około 350°C (dla układu $\text{Pt—PbTiO}_3\text{—Pt}$) obserwuje się najpierw odstępstwa od zależności liniowych występujących na wykresach takich jak 3—5 i 6, 7, a w temperaturach niższych od około 300°C pojawiają się trudności pomiaru sił termoelektrycznych i prądów termodyfuzyjnych związane z zanikiem kontaktu elektrycznego w poszczególnych obwodach. Odstępstwa te widoczne są na rysunkach 6 i 7 w obszarze zaznaczonym liniami przerywanymi. Układ $\text{Pt—PbTiO}_3\text{—Pt}$ zaczyna się w tych warunkach zachowywać jak izolator. Temperatura, w której to następuje zależy od użytego materiału elektrod. W przypadku użycia elektrod z metalu o mniejszej pracy wyjścia elektronów, wspomniane odstępstwa i trudności występują w zakresie $200 \div 300^\circ\text{C}$. Wielkość a nawet charakter

odstępstw od zależności liniowych obserwowanych w wymienionych zakresach temperatur zależy w silnym stopniu od historii próbki. Badane wielkości wykazują w tych warunkach silną zależność od czasu. Dla uzyskania przebiegów regularnych i powtarzalnych przyjęto technikę pomiarów polegającą na starannej stabilizacji każdej temperatury, przy czym do danej temperatury pomiarowej dochodzono od strony temperatur wyższych.

c) Przewodnictwo elektryczne. W badanym zakresie temperatur znak współczynników Seebecka dla obwodów zawierających układ Pt—PbTiO₃—Pt odpowiada przewodnictwu typu *p*. Jest to wynik zgodny z danymi uzyskanymi przez Guriewicza [1].

Zależność mierzonych prądów termodyfuzyjnych od oporu zewnętrznego *R* może być wykorzystana do wyznaczenia wartości przewodnictwa elektrycznego układu metal—PbTiO₃—metal. Z rysunku 9 i wzoru (10) wynika, że prąd mierzony może być wyrażony wzorem:

$$J = J_D \frac{r}{r+R}. \quad (11)$$

Prąd J_D stanowi maksymalną wartość prądu przy $R \rightarrow 0$. Charakter zależności $J(R)$ przedstawiony na rysunku 8 wskazuje, że z dobrym przybliżeniem za J_D możemy przyjmować wartości prądu zmierzonego przy $R = 1 \Omega$. Dalsze zmniejszanie R jest zresztą niemożliwe ze względu na skończony opór doprowadzeń i konieczność użycia miernika prądu o określonym oporze, który może być zmniejszany tylko przez bocznikowanie. Jeżeli zmierzmy wartość J_D przy możliwie najmniejszej wartości R oraz wartość J przy przynajmniej jednym większym oporze R (lecz tak dobranym by pomiar prądu był dostatecznie dokładny), to ze wzoru (11) wyznaczyć można opór wewnętrzny r . Przy uwzględnieniu geometrii układu metal—PbTiO₃—metal otrzymujemy na przewodnictwo elektryczne wzór:

$$\sigma = \frac{d}{RS} \left(\frac{J_D}{J} - 1 \right), \quad (12)$$

gdzie:

d — grubość próbki,

S — powierzchnia elektrod,

R — opór zewnętrzny, przy którym jest mierzony J .

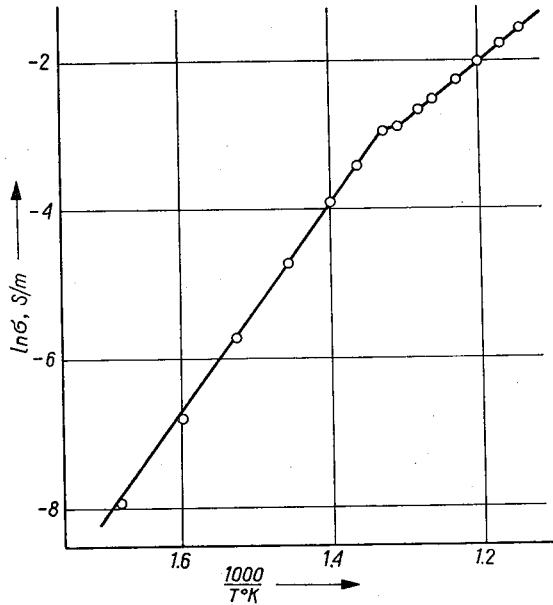
Wartości σ wyznaczono dla poszczególnych temperatur z danych takich, jak na rysunkach 6 i 7 przy przyjęciu za J_D wartości prądu zmierzonego przy $R = 1 \Omega$ i J zmierzonych dla $R = 100 \Omega$, $1 \text{ k}\Omega$, $10 \text{ k}\Omega$. Wartości σ otrzymane dla $R \geq 100 \Omega$ okazały się jednakowe w granicach błędu doświadczalnego nie przekraczającego 2%. Wyniki otrzymane dla $R = 10 \Omega$ są obciążone większym błędem, co jest spowodowane nieuwzględnieniem oporu doprowadzeń, znacznego w stosunku do tej wartości R .

Rysunek 10 przedstawia zależność $\ln \sigma = f\left(\frac{1}{T}\right)$ dla średnich wartości σ otrzymanych z J'_1 i J''_1 przy $\Delta_2 T = \pm 10^\circ \text{C}$ dla $R = 100 \Omega$, $1 \text{ k}\Omega$, $10 \text{ k}\Omega$. Zależność temperaturowa

przewodnictwa elektrycznego w układzie Pt—PbTiO₃—Pt może być zapisana wzorem:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\varphi/kT}, \quad (13)$$

przy czym dla zakresu temperatur $T < T_c$ $\varphi_1 \cong 1,2$ eV, dla zakresu $T > T_c$ $\varphi_2 \cong 0,7$ eV.



Rys. 10. Zależność $\ln \sigma = f\left(\frac{1}{T}\right)$ (σ — przewodnictwo elektryczne)

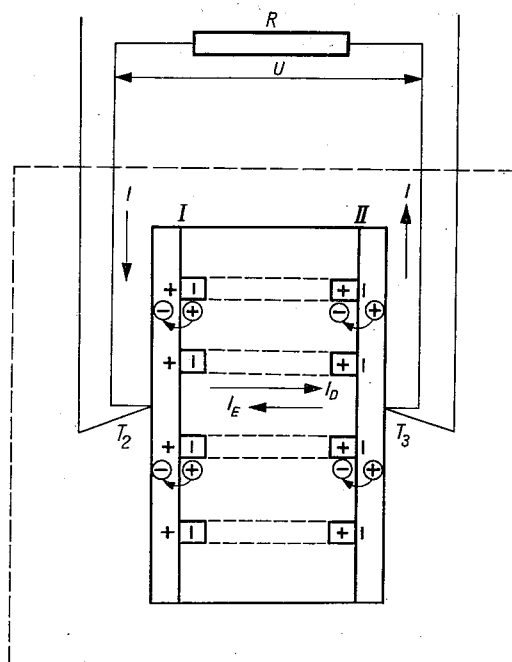
Wartości φ wyznaczone z nachylenia odcinków prostych na wykresach $\ln J = f\left(\frac{1}{T}\right)$ (takich jak na rys. 6 i 7) przy różnych wartościach R w zakresie $1 \Omega \div 100 \text{ k}\Omega$ wynoszą: dla zakresu $T < T_c$ $\varphi_1 \cong (1,2 \div 0,3)$ eV, a dla zakresu $T > T_c$ $\varphi_2 = (0,7 \div -0,1)$ eV. Największe wartości odpowiadają prądom zmierzonym przy najmniejszej wartości R .

4. DYSKUSJA WYNIKÓW

Zaobserwowana asymetria $E_1(\Delta_2 T)$ przy różnych znakach $\Delta_2 T$, a szczególnie różne od zera wartości E_1^0 (przy $\Delta_2 T = 0$ lecz $\Delta_1 T \neq 0$) muszą w obwodach symetrycznych wynikać z własności warstwy ferroelektryka. Wskazują na to anomalie występujące w otoczeniu punktu przemiany fazowej i odmienny charakter zmian temperaturowych współczynnika Seebecka w zakresie temperatur wyższych od T_c . W szczególności należy uwzględnić możliwość występowania różnej od zera polaryzacji w kierunku prostopadłym do elektrod. Najbardziej prawdopodobną przyczyną biegunowości próbek nie polaryzowanych w polu zewnętrznym jest działanie siły termoelektrycznej wywołanej różnicą temperatur między powierzchniami czynnymi m. in. przy nakładaniu na nie elektrod w temperaturze około 800°C . Wtedy wartości $\Delta_2 T$ są szczególnie duże. W fazie ferroelektrycz-

nej dowolnie małe pole może odwrócić kierunek polaryzacji spontanicznej domen, byle działało ono dostatecznie długo [6]. W fazie paraelektrycznej pole może wywołać różne odmiany długookresowej polaryzacji relaksacyjnej. Ponadto również w tej fazie może istnieć pewna szczątkowa polaryzacja spontaniczna wywołana działaniem przyelektrodowych warstw ładunku przestrzennego zwanych warstwami Känziga [21 ÷ 23]. Łatwość spolaryzowania PbTiO_3 i niektórych stałych roztworów z tym materiałem oraz wyjątkowa trwałość stanu spolaryzowania jest znana w technice i wykorzystywana w produkcji ceramicznych przetworników elektromechanicznych. Całokształt faktów doświadczalnych zmusza do traktowania użytego materiału ferroelektrycznego w dalszych rozważaniach jako ceramiki spolaryzowanej.

Przyjmijmy, że w badanym zakresie temperatur w ferroelektryku istnieją nieskompensowane ładunki polaryzacyjne o znakach przeciwnych na poszczególnych powierzchniach czynnych. Ze względu na porowatą i nierówną powierzchnię ceramiki, ładunki te mają częściowo objętościowy charakter. Obecność ładunków polaryzacyjnych i ładunków indukowanych przez nie na elektrodach wywołuje silne pola na granicach metal—ferroelektryk (rys. 11). Wywołują one procesy emisji termopolowej sterowane przez ładunki pola-



Rys. 11. Ilustracja do wyjaśnienia zależności prądu termodyfuzyjnego od oporu zewnętrznego R

ryzacyjne [24]. Ładunki polaryzacyjne stanowią jednocześnie centra wychwytu nośników wprowadzonych z elektrod. Wiązanie części ładunków swobodnych elektrod przez ładunki polaryzacyjne oraz procesy emisji termopolowej prowadzą do zróżnicowania własności elektrycznych elektrod i dołączonych do nich przewodników z tego samego metalu. Jeśli teraz potraktujemy układ złącz I i II (rys. 1) jako kontakt przewodników o tak zróżnicowanych własnościach, to przy $\Delta_1 T \neq 0$ obecność E_1^0 (przy $\Delta_2 T = 0$) można wyjaśnić

również zjawiskiem Seebecka. Należałoby jednak wyjaśnić w jaki sposób zachowują się trwale różnice własności elektrod i przewodników oraz jaki jest mechanizm kontaktu elektrycznego między nimi mimo rozdzielania ich warstwą ferroelektryka. W tym celu prześledźmy dalsze zachowanie się nośników wprowadzonych do ferroelektryka w drodze emisji termopolowej. Pułapkowane elektrony tworzą przy kontakcie II (rys. 11) stany donorowe o gęstości zależnej od temperatury i od oporu zewnętrznego zwierającego obwód. W dostatecznie wysokiej temperaturze i przy podtrzymywaniu stanu $T_2 = T_3$ ($\Delta_2 T = 0$) przez dogrzewanie kontaktu II, pułapkowane elektrony są generowane termicznie do pasma przewodnictwa. Analogicznie przy kontakcie I generowane są dziury. Wytworzone w ten sposób swobodne nośniki prądu wykazują gradient koncentracji w kierunku objętości ferroelektryka. W tych warunkach przez objętość ferroelektryka płynie prąd dyfuzyjny przenosząc nośniki w kierunku przeciwnych elektrod. Obecność ładunków polaryzacyjnych zapobiega powstawaniu w warstwach przyelektrodowych wypadkowego ładunku przestrzennego, który zmniejszałby emisję i byłby źródłem pól lokalnych hamujących proces dyfuzji. Potwierdza to stwierdzony dla ceramiki BaTiO_3 liniowy rozkład potencjału wzdłuż próbki [25] mimo wielu oczywistych dowodów potwierdzających występowanie przyelektrodowych warstw ładunkowych [21 ÷ 23]. W warunkach kompensacji nośników swobodnych przez ładunki polaryzacyjne następuje swobodna dyfuzja nośników, tak jak cząstek obojętnych. Dla obwodu zamkniętego oporem R prąd wypadkowy w ferroelektryku i w obwodzie zewnętrznym stanowi sumę algebraiczną prądu dyfuzyjnego i prądu przewodzenia (wzór 11).

W miarę wzrostu oporu R rośnie napięcie $U = JR$ i prąd przewodzenia J_E . Prąd mierzony w obwodzie zewnętrznym ma odpowiednio wartości mniejsze. Prąd przewodzenia sprzyja zatrzymywaniu w warstwach przyelektrodowych ładunków wprowadzonych z elektrod. Przy większej gęstości nośniki wypełniają coraz wyższe poziomy energetyczne dołów potencjału centrów pułpkowych. Prawdopodobnie tym można wyjaśnić zaobserwowany efekt zmniejszania energii aktywacji nośników prądu przy wzroście oporu R .

Jeśli w układach symetrycznych zostanie wytworzona dodatkowo różnica temperatur kontaktów I i II ($\Delta_2 T$), to obok E_1^0 pojawia się dodatkowa siła termoelektryczna w wewnętrznym układzie $\text{Pt—PbTiO}_3\text{—Pt}$. Wypadkowe siły termoelektryczne oznaczono w części doświadczalnej symbolami E_1' i E_1'' (rys. 2 i 3). Zmiany temperaturowe prądów mierzonych przy różnych oporach zewnętrznych ilustrują rysunki 6 i 7. Różnice sił termoelektrycznych i prądów termodyfuzyjnych przy tych samych wartościach lecz różnych znakach $\Delta_2 T$ wynikają niewątpliwie z obecności polaryzacji ferroelektryka.

Jak stwierdzono w obwodach niesymetrycznych następuje nałożenie omówionych wyżej efektów obwodów symetrycznych oraz siły termoelektrycznej E_2 obwodu, jaki stanowiłyby bezpośrednio połączone dwa przewodniki z różnych metali przy wytworzeniu między ich złączami różnicy temperatur $\Delta_1 T$. Ujmują to stwierdzone doświadczalnie zależności ujęte wzorami (6). W zależności od rodzaju użytych przewodników i doboru wartości $\Delta_2 T$ możemy otrzymać różne typy charakterystyk temperaturowych sił termoelektrycznych. Odpowiedni dobór warunków pracy pozwala przewidywać znaczną sprawność tak otrzymanych cieplnych generatorów energii elektrycznej [20].

Całość rozważań dotyczy tylko zakresu dostatecznie wysokich temperatur, gdzie możliwy jest stan równowagi dynamicznej procesów emisji termopolowej i dyfuzji. W niższych

temperaturach mała intensywność procesu generacji nośników z centrów pułapkowych i procesu dyfuzji prowadzi do całkowitej kompensacji ładunków polaryzacyjnych przez ładunki wstrzyknięte z elektrod. Szereg badań jakościowych przeprowadzonych w zakresie $200 \div 300^\circ \text{C}$ potwierdziło własności biegunowe próbki oraz gromadzenie się nośników o znaku przeciwnym do znaku ładunków polaryzacyjnych. Istotne informacje uzyskano też przez osobne badania zjawisk absorpcji dielektrycznej w PbTiO_3 .

Metoda wyznaczania przewodnictwa elektrycznego ze znajomości prądu termodyfuzyjnego przy różnych wartościach oporu zewnętrznego R wydaje się szczególnie użyteczna dla takich materiałów jak PbTiO_3 . Przewodnictwo tego materiału jest znaczne i gwałtownie rośnie ze wzrostem temperatury. Znaczne natężenie pola pomiarowego, jakie stosuje się zwykle przy innych metodach pomiaru σ , wpływa na zmiany stanu spolarzowania ferroelektryka i pośrednio na proces przewodzenia. Ponadto duży prąd przewodzenia powoduje dodatkowe ogrzewanie próbki i gradient temperatury powstały w wyniku efektu Peltiera. Stosunkowo duża wartość współczynnika Seebecka zmusza do starannej kontroli temperatur złącz. W przypadku występowania efektu Seebecka należy uwzględnić zależność mierzonego prądu termodyfuzyjnego od oporu zewnętrznego. Znaczne są także trudności oddzielenia różnych składowych prądu nie związanych z przewodnictwem objętościowym ferroelektryka [1].

Większości wymienionych wad pozbawiona jest metoda oparta na badaniu prądów termodyfuzyjnych. W tej samej temperaturze otrzymuje się te same wartości przewodnictwa z danych otrzymanych przy różnych wartościach oporu zewnętrznego. Wartości przewodnictwa elektrycznego w zakresie $T < T_c$ są zgodne w przybliżeniu z wynikami uzyskanymi w pracach [18, 19]. Inne wartości, a nawet charakter zmian temperaturowych σ , otrzymano dla zakresu temperatur $T > T_c$. Dla zakresu $T > 475^\circ \text{C}$ autorzy cytowanych prac stwierdzili jedynie odstępstwa od liniowego charakteru przebiegu zależności $\ln \sigma = f\left(\frac{1}{T}\right)$ i to w kierunku większych wartości σ od wartości wynikających z ekstrapolacji prostej otrzymanej dla $T < 475^\circ \text{C}$. Wyniki otrzymane w niniejszej pracy, przy wielokrotnym wyznaczaniu przewodnictwa z prądów odpowiadających różnym badanym siłom termoelektrycznym, wykazały liniową zależność $\ln \sigma = f\left(\frac{1}{T}\right)$ także dla temperatur wyższych od obszaru przemiany fazowej, przy czym nachylenie prostej dla zakresu $T > T_c$ było zawsze mniejsze.

Energia aktywacji nośników prądu wyznaczona ze zmian temperaturowych przewodnictwa jest znacznie mniejsza od szerokości pasma energii wzbronionej, wyznaczonej metodą optyczną, wynoszącą dla PbTiO_3 3 eV [26]. Podobne różnice obserwuje się w BaTiO_3 [27, 28]. Prawdopodobnie wynika to z udziału nośników wstrzykniętych z elektrod w drodze emisji termopólowej. Wydaje się, że w wysokich temperaturach głównie te nośniki decydują o dużym przewodnictwie elektrycznym układu metal—ferroelektryk—metal. Możliwe, że decydują one też o zmianie typu przewodnictwa w BaTiO_3 [7 ÷ 10] i w PbTiO_3 [1] występującej w zakresie temperatur, w którym w silnym stopniu zaczynają odgrywać rolę procesy termoemisji.

Metoda wyznaczania σ ze znajomości prądów termodyfuzyjnych może być stosowana tylko w zakresie wyższych temperatur. Można oczekiwać, że w przypadku materiałów

ferroelektrycznych o wysokim punkcie Curie metoda ta może służyć nie tylko do określenia wartości i typu przewodnictwa, ale i innych wielkości charakteryzujących półprzewodnikowe i dielektryczne własności materiału.

Własności ferroelektryków są szeroko wykorzystywane w technice. Takie własności jak własności piroelektryczne, piezoelektryczne, dielektryczne, nieliniowe własności optyczne itp. znalazły dziesiątki zastosowań we współczesnej technice elektronowej, łącznie z techniką laserową i techniką obwodów scalonych. Oddzielna grupa zastosowań oparta jest na wykorzystaniu własności półprzewodnikowych niektórych ferroelektryków [1]. Silną zależność temperaturową przewodnictwa elektrycznego wykorzystano w produkcji termometrów oporowych. Niektóre odstępstwa od liniowości charakterystyk prądowo-napięciowych stanowią typowe charakterystyki termistorów. Obserwowany w niektórych ferroelektrykach efekt wzrostu oporu w obszarze przemiany fazowej (np. w PbZrO_3 [29]) został wykorzystany w tzw. pozistorach używanych do autostabilizacji temperatury i kompensacji temperaturowej charakterystyk tranzystorów. Niektóre układy ferroelektryk — elektrody wykazują własności prostownicze.

Jednym z ważnych współczesnych problemów technicznych jest bezpośrednie przetwarzanie energii cieplnej na energię elektryczną. Dużą uwagę przywiązuje się tu do zjawiska termoelektrycznego. Odwrotny efekt elektrotermiczny można wykorzystać w technice chłodzenia. W tych zastosowaniach szczególnie przydatne mogą okazać się ferroelektryki [20]. Przy ich zastosowaniu można oczekiwać większej sprawności przetwarzania energii cieplnej na elektryczną, podobnie jak to ma miejsce przy przetwarzaniu elektromechanicznym.

W związku z odkryciem w ostatnich latach materiałów posiadających jednocześnie własności ferroelektryczne i ferromagnetyczne należy oczekiwać dalszego wzrostu zastosowań tych materiałów. Nie ulega wątpliwości, że w najbliższych latach ze stadium badań laboratoryjnych wyjdzie wiele nowych zastosowań ferroelektryków. Wskazuje na to lawinowy wzrost prac z zakresu fizyki ferroelektryków.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. M. Gurewicz, *Elektroprowodnost' segnetoelektrikow*, Moskwa 1969.
2. R. Forman, *Measurement and Theoretical Study of Electrical Conductivity and Hall Effect in Oxide Cathodes*, *Phys. Rev.*, **96**, 1479 (1954).
3. N. B. Hanney, *Semiconductors*, New York 1959.
4. N. W. Bogorodickij, I. D. Fridberg, K. woprosu ob elektroprowodnosti twiordych dielektrikow, *Fiz. Twerdowo Tela*, **6**, 680, 1964.
5. H. H. Wieder, *Retarded Polarization Phenomena in BaTiO_3 Crystals*, *J. Appl. Phys.*, **27**, 413 (1956), *Activation Field and Coercivity of Ferroelectric Barium Titanate*, *J. Appl. Phys.*, **28**, 367 (1957).
6. W. J. Mertz, *Switching Time in Ferroelectric BaTiO_3 and Its Dependence on Crystal Thickness*, *J. Appl. Phys.*, **27**, 938 (1956).
7. K. Pigoń, *Przewodnictwo elektryczne tytanianów ziem alkalicznych*, *Roczniki Chemii*, **28**, 611 (1954).
8. B. M. Gurewicz, I. S. Żeludiew, I. S. Rez, K. woprosu o prirode perechodnych processow prowadimosti w segnetoelektrikach, *Fizyka Twerdowo Tela*, **2**, 691, 1960.
9. G. A. Cox, R. H. Tredgold, *Hole Drift Mobility in BaTiO_3 Single Crystals*, *Physics Letters*, **11** 22 (1964).

10. K. Pigoń, H. Chojnacki, Ruchliwość nośników ładunku w BaTiO_3 , Zesz. Nauk. Polit. Wroc., **17**, 83 (1957).
11. N. S. Kostjukow, Fizyka dielektrików, Moskwa 1960.
12. O. Saburi, Properties of Semiconductive Barium Titanates, J. Phys. Soc. Japan, **14**, 1159 (1959).
13. O. Saburi, Semiconducting Bodies in the Family of Barium Titanates, J. Am. Cer. Soc., **44**, 54 (1961).
14. G. Shirane, S. Hoshino, K. Suzuki, X-Ray Study of the Phase Transition in Lead Titanate, Phys. Rev., **80**, 1105 (1950).
15. G. A. Smolenskij, Nowyje segnetoelektri, Danne A.N. SSSR, **70**, 405, 1950.
16. Ju. N. Wieniewcew, G. S. Żdanow, C. P. Solowiew, Ju. A. Zubow, Wnutilnyje pola w nekotorych segnetoelektrikach so strukturoj tipa perowskita, Kristalogr. **3**, 473 (1958).
17. Ju. N. Wieniewcew, G. S. Żdanow, S. P. Sołowiew, W. W. Iwanowa. O wnutriennych polach w segnetoelektrike PbTiO_3 , Kristallogr. **4**, 255 (1959).
18. I. N. Bieliajew, A. L. Hodakow, Dielektriceskije swojstwa monokristałow titanato swinca, ŽETF, **22**, 376 (1952).
19. E. G. Fesenko, O. P. Kramarow, A. L. Hodakow, M. L. Szołohowicz, Niekotoryje osobennosti monokristałow PbTiO_3 i monokristałow twiordych rostworow $(\text{Ba}, \text{Pb})\text{TiO}_3$, Izv. AN SSSR, **21**, 305 (1957).
20. J. Hańdereck, T. Piech, M. Smyk, J. Dudek, Patent nr 62432.
- 20a. J. R. Young, Electrical Conductivity and Thermoelectric Power of $(\text{BaSr})\text{O}$ and BaO , J. Appl. Phys. **23**, 1129 (1952).
21. W. Känzig, Space Charge Layer Near the Surface of a Ferroelectric, Phys. Rev., **98**, 549 (1955).
22. A. G. Chynoweth, Surface Space-Charge Layers in Barium Titanate, Phys. Rev., **102**, 705 (1956).
23. M. E. Drougard, R. Landauer, On the Dependence of the Switching Time of Barium Titanate Crystals on Their Thickness, J. Appl. Phys., **30**, 1663 (1959).
24. R. C. Miller, A. Savage, Motion of 180° Domain Walls in Metal Electroded Barium Titanate Crystals as a Function of Electric Field and Sample Thickness, J. Appl. Phys., **31**, 662 (1960).
25. O. Ju. Prokopalo, W. G. Soiler, Segnetoelektri, Rostow na-Donu, 1961.
26. A. F. Jacenko, Temperaturnaja zawisimost infrakrasnych spektrow pogłoszczenija BaTiO_3 , PbTiO_3 i PbZrO_3 , Izv. AN SSSR, **24**, 1308 (1960).
27. A. F. Jacenko, Infrakrasnyje spektry pogłoszczenija segnetoelektriceskich kristałow tipa perowskita, Izv. AN SSSR, **22**, 1456 (1958).
28. S. W. Bogdanow, W. A. Rassuszin, O poluprowodnikowych swojstwach, Izv. AN SSSR, **24**, 1247 (1960).
29. J. Hańdereck, Elektric Conductivity and Dielectric Absorption Phenomena in Lead Zirconate Ceramics, Phys. Stat. Sol., **21**, 323 (1967).

J. HAŃDEREK, J. DUDEK, B. ESOP

SEEBECK EFFECT IN METAL— PbTiO_3 —METAL CONTACT SYSTEMS

Summary

The Seebeck effect in the symmetric and asymmetric system of metal- PbTiO_3 -metal has been investigated in the paper by the difference of temperatures $\Delta_1 T$ between the above mentioned system and exterior joints of the conductor which is outside the thermostat. This investigation has been made for different temperatures $\Delta_2 T$ of two metal- PbTiO_3 contacts. Electrical conductivities of the system mentioned are obtained from thermoelectric forces and thermoelectric currents, and the conductivity is plotted as a function of temperature.

J. HAŃDEREK, J. DUDEK, B. ESOP

THERMOELEKTRISCHER EFFEKT IN KONTAKTSCHALTUNGEN METALL-PbTiO₃-METALL

Zusammenfassung

Es wurde der Seebeckeffekt an symmetrischen und unsymmetrischen Metall-PbTiO₃-Metall-Schaltungen bei Temperaturdifferenzen $\Delta_1 T$ zwischen dem Metall-PbTiO₃-Metall-System und den äusseren Verbindungsenden, und auch bei Temperaturdifferenzen $\Delta_2 T$ zwischen Metall-PbTiO₃ und PbTiO₃-Metall untersucht. Mit Hilfe Thermostrom und Spannungsmessungen wurde die elektrische Leitfähigkeit der untersuchten Proben in einem breiten Temperaturbereich ermittelt.

Я. ХАНЬДЕРЕК, Ю. ДУДЕК, Б. ЭЗОП

ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ В СИСТЕМЕ КОНТАКТОВ
МЕТАЛЛ — PbTiO₃-МЕТАЛЛ

Резюме

Были исследован эффект Зеебека в симметрических и несимметрических системах контактов металл—PbTiO₃—металл при разности температур между системой и внешними соединениями проводников ($\Delta_1 T$), а также при разных температурах отдельных контактов металл—PbTiO₃ ($\Delta_2 T$).

Зная термоэлектрические силы и термодиффузионные токи определена электропроводность в функции температуры.

Licznik cząsteczek z elektryczną komorą czujnikową

ZYGMUNT GROCHOWSKI (WARSZAWA)

Instytut Inżynierii Środowiska Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 16.1.1971

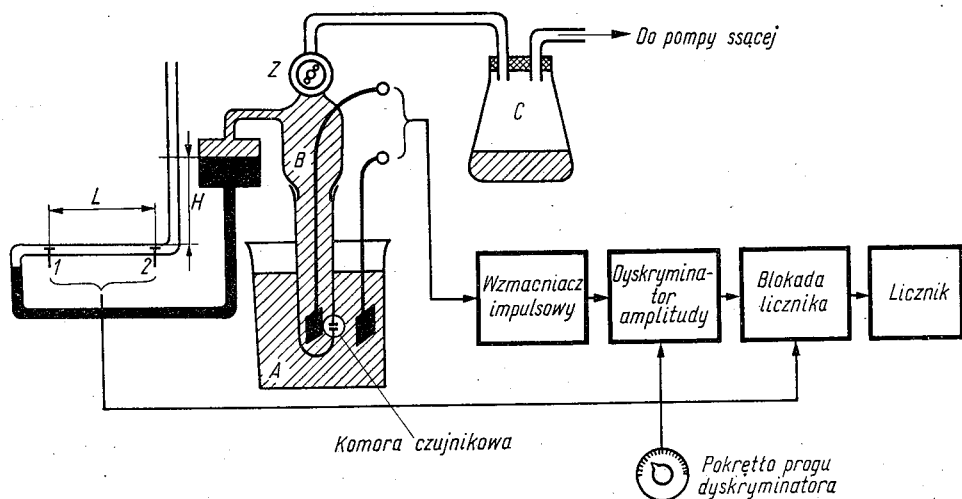
Licznik określa ilość i wielkość cząsteczek znajdujących się w elektrolicie. Elektrolit przepływa przez dyszę zaopatrzoną z obu stron w elektrody. Każdorazowe przejście cząsteczki zmienia oporność drogi między elektrodami, co powoduje impuls proporcjonalny do objętości. Impulsy te są elektronicznie zliczane i mierzone.

Dotychczas stosowane metody pomiaru cząsteczek frakcji podsitowej ($< 50 \mu\text{m}$) nie dają praktycznej możliwości automatyzacji pomiaru, wymagają wysokokwalifikowanej obsługi, a czas trwania pomiaru wynosi od kilku do kilkudziesięciu godzin. Metoda elektrycznej komory czujnikowej umożliwia znaczną automatyzację pomiaru, ogranicza czas jego trwania do kilkunastu sekund, zapewnia wysoki stopień statystycznej reprezentatywności przez znaczną liczebność próbki (10^6) oraz charakteryzuje się zadowalającą powtarzalnością pomiarów. Elektryczna komora czujnikowa pozwala określić oprócz ilości cząsteczek w próbce również objętość każdej cząsteczki, co jest wygodne przy określaniu rozkładu frakcyjnego (1% zmiany równoważnej średnicy kulistej powoduje 3% zmiany objętości).

1. OPIS DZIAŁANIA LICZNIKA

Zawiesina badanych cząsteczek w elektrolicie znajduje się w naczyniu *A* (rys. 1). Zawór *Z* jest zamknięty, a pompka ssąca wytwarza w zbiorniku *C* podciśnienie. Z chwilą otwarcia zaworu *Z* podciśnienie z *C* przenosi się do zbiornika *B* oraz manometru rtęciowego. Rtęć w otwartym ramieniu manometru opada, a równoważna objętość elektrolitu z *B* przechodzi do *C*. Po zamknięciu zaworu *Z* elektrolit w *B* znajduje się pod wpływem działania ssącego manometru — w obu jego ramionach rtęć dąży do położenia równowagi. Zasysanie odbywa się poprzez komorę czujnikową z *A*. Tak długo, dopóki rtęć nie wypełni części poziomej manometru, przepływ badanego roztworu przez komorę czujnikową odbywa się ze stałą prędkością. Istnieje bowiem wtedy stała różnica ciśnienia między *A* i *B*, odpowiadająca wysokości słupa rtęci *H*. Objętość rurki poziomej manometru między kontaktami 1-2 odpowiada objętości próbki — 1 ml.

Miedzy dwiema elektrodami, poprzez komorę czujnikową płynie stały prąd. Elektrolitem jest przeważnie 0,9% roztwór NaCl w wodzie destylowanej, o oporności właściwej



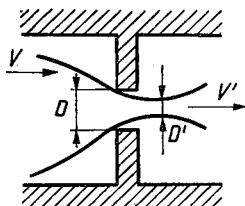
Rys. 1. Schemat działania licznika

$\sim 50 \Omega \text{cm}$. Przepływająca przez dyszę cząsteczka wypiera swą objętością równoważną ilość elektrolitu, zwiększając tym samym oporność przestrzeni komory czujnikowej. Ponieważ oporność elektrolitu w komorze czujnikowej praktycznie stanowi o oporności drogi między elektrodami, zmiana tej oporności spowoduje wzrost napięcia potrzebnego do zachowania stałego prądu (elektrody są zasilane ze źródła prądowego). Wzrost napięcia będzie proporcjonalny do objętości cząsteczki aktualnie znajdującej się w komorze. Sygnał z elektrod podawany jest na wzmacniacz impulsowy i dyskryminator amplitudy. Zliczanie impulsów o amplitudzie określonej przez poziom progu dyskryminatora, zaczyna się z chwilą zwarcia rtęci w manometrze z kontaktem 1, a kończy w chwili zwarcia z kontaktem 2. W tym czasie przez komorę czujnikową przepłynie dokładnie 1 ml badanego roztworu.

2. WARUNKI PRZEPŁYWU CIECZY PRZEZ DYSZĘ

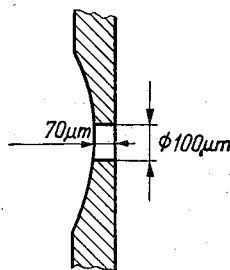
Istotnym jest, by przy ustalonej wielkości próbki, czas pomiaru był jak najmniejszy. Wymaga to dużych prędkości przelotu cieczy przez komorę czujnikową. Przepływ cieczy rzeczywistej w elementach oporowych (zweźki, dysze itp.) wymaga straty ciśnienia, co opisywane jest równaniem Bernoulliego. W omawianym przypadku przepływ przez dyszę będzie miał charakter przejściowy między laminarnym a burzliwym, gdyż wyliczona tu liczba Reynoldsa $Re \approx 500$ [1], co jest wartością niezbyt odległą od krytycznej. Prędkość cieczy w dyszy rośnie z jednoczesnym spadkiem ciśnienia statycznego, a rzeczywisty minimalny przekrój strugi D' (rys. 2), w przypadku przepływu burzliwego, jest mniejszy od przekroju dyszy D . Określane jest to nazwą kontrakcji. Z tego powodu prędkość cieczy będzie większa, niż by to wynikało z wyliczeń opartych na wymiarach geometrycznych dyszy. W rozważanym tu przypadku przepływu przy obniżonym ciśnieniu może się zdarzyć, że ze wzrostem prędkości malejące absolutne ciśnienie statyczne osiągnie wartość

graniczną równą prężności pary cieczy. Dalszemu dążeniu do obniżania ciśnienia, tj. zwiększania prędkości przepływu, przeciwstawia się parowanie elektrolitu (zjawisko kawitacji). Przyjęto maksymalnie zalecaną prędkość 10 m/s z 20% korekcją dla współczynni-



Rys. 2. Przepływ roztworu przez dyszę

ka kontrakcji. Tak więc prędkość cieczy w temperaturze pokojowej nie powinna być większa od 8 m/s. Przy wymiarach geometrycznych dyszy według rys. 3 oraz założeniu czasu pomiaru — 20 s (przepływ 1 ml), prędkość cieczy w dyszy wynosi 6,3 m/s. Daje to wystarczające zabezpieczenie przed wystąpieniem kawitacji w temperaturze 20° C.



Rys. 3. Wymiary dyszy

Jak wynika z równania Bernouliego prędkość 6,3 m/s można osiągnąć przy różnicy ciśnienia $H = 12$ cm słupa rtęci (rys. 1).

Należy zaznaczyć, że prędkość 6,3 m/s jest wartością średnią. Prędkość przepływu jest maksymalna na osi dyszy wtedy, gdy maleje do wartości zerowej przy ściankach. W przypadku przepływu laminarnego rozkład prędkości jest opisywany równaniem [1]

$$v = \frac{\Delta P}{4l\mu} (R^2 - r^2) \quad (1)$$

gdzie:

ΔP — spadek ciśnienia,

μ — współczynnik lepkości cieczy,

l — długość dyszy,

R — promień dyszy,

v — prędkość przepływu w odległości r od osi ($r \leq R$).

Charakter zmian prędkości w funkcji promienia jest więc paraboliczny. Prowadzi to do dosyć istotnych wniosków:

— maksymalna wartość prędkości na osi dyszy ($r = 0$) jest dwa razy większa niż wartość średnia,

— prawie $3/4$ cząsteczek (zakładając równomierne stężenie) będzie przechodziło przez dyszę z prędkością większą od średniej.

Powyższe rozważania nie są całkowicie ścisłe, gdyż jak zaznaczono przepływ będzie miał charakter pośredni między laminarnym a burzliwym. Nie wzięto pod uwagę przesłonięcia otaczającej wlot i wylot dyszy, równie istotnej przy pracy komory czujnikowej. Wszystko to spowoduje, że różnice między maksymalną i minimalną prędkością przelotu nie będą tak duże, jak by to wskazywało równanie (1).

3. WŁASNOŚCI DETEKCYJNE KOMORY CZUJNIKOWEJ

Empiryczna zależność między zmianą oporności komory czujnikowej a objętością cząsteczki podana przez Kubitscheka [2] ma postać następującą

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{c}{v} \left(\frac{\varrho}{\varrho - \varrho_0} - \frac{a}{A} \right)^{-1}, \quad (2)$$

gdzie:

- c — objętość cząsteczki,
- v — objętość komory czujnikowej,
- a — powierzchnia przekroju cząsteczki prostopadła do osi dyszy,
- A — powierzchnia przekroju dyszy prostopadła do osi,
- ϱ — oporność właściwa cząsteczki,
- ϱ_0 — oporność właściwa elektrolitu.

W warunkach praktycznych mierzone cząsteczki są dużo mniejsze od dyszy, jak również ich oporność jest większa od oporności elektrolitu. Dla $a \ll A$ oraz $\varrho_0 \ll \varrho$ równanie (2) przyjmie postać

$$\frac{\Delta R}{R} \simeq \frac{c}{v}.$$

Zmiana oporności, a tym samym amplituda impulsu jest proporcjonalna do objętości cząsteczki. Pomiary przeprowadzone na modelu komory czujnikowej w skali 150:1 wykazały, że wzór (2) z praktycznie dobrym przybliżeniem opisuje liniową zależność między zmianą oporności a objętością cząsteczki. A oto kilka wniosków wynikających z pomiarów na modelu komory.

a) Ze wzoru (2) wynika, że jeżeli np. średnica cząsteczki będzie stanowiła 10% średnicy dyszy, to błąd liniowości wyniesie 1%. W pomiarach stwierdzono 3% odchyłkę od liniowości dopiero przy średnicy cząsteczki stanowiącej 50% średnicy dyszy. Wniosek ten potwierdziły późniejsze pomiary cząsteczek o znanych parametrach krzywej rozkładu.

b) Stwierdzono zależność zmiany oporności od kształtu cząsteczki. Tak np. zmiany oporności odpowiadające cząsteczce kulistej oraz cząsteczce o takiej samej objętości lecz w kształcie dysku (stosunek średnic 1:4) różniły się o około 2%. Wydaje się, że różnice te mogą być większe przy cząsteczkach porowatych, o bardzo rozwiniętej powierzchni, co jest cechą charakterystyczną wszystkich pyłów dyspersyjnych. Badań tego typu nie przeprowadzono.

c) Nie stwierdzono wyraźnej zależności między zmianą oporności a różnymi drogami przelotu cząsteczki przez dyszę.

d) Komora czujnikowa zdolna jest wykrywać cząsteczki o średnicach większych od 1,5% średnicy dyszy.

Liniową zależność między objętością a odpowiedzią stwierdzono we wzorze (2) przy założeniu $\varrho_0 \ll \varrho$. Ponieważ w omawianym przypadku $\varrho_0 = 50 \Omega \text{ cm}$, to np. dla cząsteczek metali będzie odwrotnie: $\varrho_0 \gg \varrho$. Przeprowadzone pomiary rozkładu frakcyjnego wielu proszków metalicznych o znanych uprzednio parametrach nie wykazują jednak systematycznych różnic między nimi a np. rozkładami proszków ceramicznych czy komórek biologicznych. Fakt ten, potwierdzony w literaturze [3, 4, 5], jest tłumaczony znaczną opornością przejścia na styku dwóch faz: elektrolit-cząsteczka. W efekcie więc niezależnie od tego jakiego rodzaju cząsteczki są wykrywane, zachowana jest zależność $\varrho_0 \ll \varrho$. Zagadnienie to nie jest jeszcze jednoznacznie wyjaśnione i stanowi temat otwarty do dalszych badań.

W idealnym przypadku przelot cząsteczki przez dyszę powinien wywołać impuls prostokątny. Po obu stronach dyszy istnieje pewien gradient pola elektrycznego, w wyniku czego objętość komory czujnikowej jest większa niż geometryczne wymiary dyszy (Dodatek). Sama dysza również posiada własną pojemność względem elektrody obojętnej, którą dla dyszy według rys. 3 przyjęto równą 100 pF. Daje to stałą czasu $\sim 5 \mu\text{s}$. Biorąc pod uwagę rzeczywistą objętość komory czujnikowej, przy prędkości 6,3 m/s czas trwania impulsu spowodowanego przelotem cząsteczki (pomijając jej wymiary geometryczne) powinien wynosić 36 μs . Pomiary parametrów impulsu z komory czujnikowej (przelot bardzo jednorodnych erytrocytów o $d = 5,5 \mu\text{m}$ przez dyszę $\varnothing = 100 \mu\text{m}$) dały następujące wyniki średnie: czas trwania impulsu 30 μs , czas narastania i opadania 12 μs . Zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami wynika z tego, że znaczna część cząsteczek przelatuje przez komorę z prędkością większą od 6,3 m/s.

4. WZMACNIANIE SYGNAŁÓW KOMORY CZUJNIKOWEJ

Przy ustawionej pewnej wartości progu dyskryminatora, na licznik podawane są impulsy, których amplituda jest większa od wartości progu. Zależność między zmianą oporności w komorze i wartością progu można przedstawić następująco:

$$T = k \cdot i \cdot c \cdot \Delta R = k \cdot \Delta E, \quad (3)$$

gdzie:

ΔR — zmiana oporności,

c — współczynnik wzmocnienia wzmacniacza,

i — prąd komory,

k — współczynnik proporcjonalności.

Ponieważ ΔR może się zmieniać w szerokich granicach zależnie od zastosowań (zmiana wymiarów dyszy, wielkość cząsteczki itp.), aby utrzymać ΔE w ramach określonych przez

układy elektroniczne, konieczna jest elastyczność w doborze i oraz c . Czas rozdzielczy dyktowany komorą czujnikową wynosi jak wiadomo $30 \mu\text{s}$. Stała czasowa określająca górną granicę częstotliwości wzmacniacza powinna być mniejsza od $1/3$ czasu narastania impulsu na wejściu, tzn. $\tau_g \leq 4 \mu\text{s}$. Stałą czasu określającą dolną granicę częstotliwości przyjęto $\tau_d = 10 \tau_g = 40 \mu\text{s}$, co będzie świadomie prowadziło do pewnego różniczkowania sygnału wejściowego. Charakterystyka wzmacniacza impulsowego w omawianym urządzeniu jest sprawą bardzo istotną i należy tu mieć na uwadze następujące problemy.

a) Praktycznie obserwowane różnice między szerokością impulsów wynoszą jak 1:2, co również obserwuje się na czasach narastania i opadania. Zmiany te powinny wprowadzać jak najmniejsze zniekształcenia amplitudy na wyjściu wzmacniacza.

b) Wzmacniacz nie powinien powiększać czasu rozdzielczego komory czujnikowej ($30 \mu\text{s}$), gdyż spowoduje to nakładanie się na siebie całkowicie przypadkowo przychodzących impulsów (koincydencja elektroniczna).

c) Zakres mierzonych objętości, np. dyszą $\varnothing = 100 \mu\text{m}$, wynosi od $4 \mu\text{m}^3$ do $6000 \mu\text{m}^3$. Jest to równoważne stosunkowi amplitud jak 1:1500. Wzmacniacz powinien możliwie najszybciej odblokować się po przejściu największego impulsu, aby prawidłowo odtworzyć amplitudę mogącego przyjść zaraz po nim impulsu małego.

d) Zmiana linii zerowej oraz wzmocnienia w funkcji czasu i amplitudy sygnału powinna być jak najmniejsza.

e) Wzmacniacz nie powinien przenosić zakłóceń niskiej częstotliwości, których źródłem jest również komora czujnikowa.

Jak widać parametry charakterystyki wzmacniacza muszą być kompromisem spełniającym przeciwstawne sobie wymagania.

5. ZNIEKSZTAŁCENIA ANALIZY ILOŚCIOWEJ I AMPLITUDOWEJ

Oprócz parametrów wzmacniacza na zniekształcenia pomiarów mogą wpływać takie czynniki jak:

- szum elektryczny oraz zanieczyszczenia własne elektrolitu,
- określony zdolnością rozdzielczą komory efekt nakładania się na siebie impulsów (koincydencja).

Zjawisko szumu elektrycznego szeroko omawiane w literaturze, może przyczynić się do ograniczenia pomiaru bardzo małych cząsteczek. Dodatkowym źródłem zakłóceń może być parowanie elektrolitu w komorze, spowodowane zbyt dużą gęstością prądu. Eksperymentalnie stwierdzono, że przy dyszy $\varnothing = 100 \mu\text{m}$ oraz $v = 6,3 \text{ m/s}$ zjawisko to zaczyna występować przy prądach $> 2 \text{ mA}$. Jak wynika ze wzoru (3) czułość komory jest proporcjonalna do prądu. Ograniczeniem górnej wartości gęstości prądu komory jest wyżej wspomniane parowanie elektrolitu.

Wpływ zanieczyszczeń własnych elektrolitu można wyeliminować w zakresie pomiaru cząstek $> 2 \mu\text{m}$ ($5 \mu\text{m}^3$). Filtracja poniżej tego zakresu jest już znacznie utrudniona praktycznie dostępnymi środkami (filtry szklane lub papierowe). Interesującym będzie wspomnieć o zaobserwowanym zjawisku rozwoju flory bakteryjnej w czystym elektrolicie. Stwier-

dzono zwiększenie stężenia zanieczyszczeń o średnicach $> 0,7 \mu\text{m}$ prawie 6-krotne w przeciągu tygodnia.

Rozwój bakterii można jednak skutecznie zahamować dodaniem około 3% formaldehydu (CH_2O) do elektrolitu. Praktycznie biorąc zanieczyszczenia własne elektrolitu należy uwzględniać tylko przy pomiarze cząsteczek małych ($< 5 \mu\text{m}^3$) i przy małym stężeniu badanych cząsteczek ($< 1000/\text{ml}$) w tym zakresie. Uprzednio zdjęty rozkład frakcyjny zanieczyszczeń własnych pozwala na bezpośrednią korekcję wyników.

Ponieważ komora czujnikowa ma skończone wymiary, istnieje pewne prawdopodobieństwo równoczesnego pojawienia się w niej więcej niż jednej cząsteczki. Przy danej dyszy prawdopodobieństwo to rośnie ze wzrostem stężenia. Taki efekt koincydencji objawia się w dwojaki sposób.

a) Dwie lub więcej cząsteczek w komorze wywołują pojedynczy impuls, którego amplituda jest sumą amplitud składowych (nakładanie w szczycie). Tak np. dwie cząsteczki o średnicach d_1 i d_2 dadzą impuls

$$P = k(d_1^3 + d_2^3) = k \cdot d_3^3.$$

Zostanie zarejestrowana nieistniejąca cząsteczka o średnicy

$$d_3 = (d_1^3 + d_2^3)^{1/3}.$$

b) Wielokrotne cząsteczki wywołują impuls złożony, którego amplituda jest mniejsza od sumy amplitud składowych (nakładanie w ognie).

Jest sprawą kontrowersyjną który z dwóch typów koincydencji przeważa w pracy komory czujnikowej. Koincydencja cząsteczek w każdej postaci powoduje konieczność korekty wyników analizy ilościowej i amplitudowej, tym bardziej istotnej im większe będzie stężenie. W szeregu publikacji [3.4.6] rozważana jest korekcja wyników analizy ilościowej.

Proponowane równania korekcyjne wykazują dość znaczne rozbieżności. W oparciu o rozkład prawdopodobieństwa Poissona (Dodatek), proponuje się bardziej przejrzyste równanie korekcyjne

$$N_o = N_t - 1/2 \zeta N_t^2, \quad (4)$$

gdzie:

$$\zeta = \frac{V}{\psi},$$

N_o — liczba cząsteczek mierzona,

N_t — liczba cząsteczek rzeczywista,

V — objętość komory czujnikowej,

ψ — objętość próbki.

Wpływ koincydencji na analizę ilościową jest jednoznaczny — ze wzrostem stężenia liczba cząsteczek pomierzonych będzie coraz więcej różnić się od liczby rzeczywistej. Nie przekraczając stężeń uznanego dla danej dyszy za maksymalne, błąd powodowany koincydencją można praktycznie pominąć. Przy stężeniach większych wyniki należy korygować zgodnie z równaniem (4). Podobny wpływ na analizę ilościową będą miały parametry wzmacniacza wymienione w części 4, punkty b i c. Wpływ koincydencji komory oraz parametrów wzmacniacza na wyniki analizy amplitudowej jest jednak bardziej złożony.

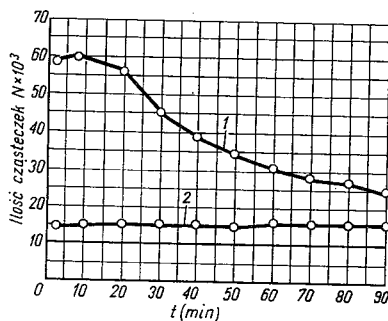
żony. Pomiary przeprowadzone omawianym licznikiem potwierdzają obserwacje wielu autorów [2, 3, 6] o ogólnej tendencji do zwiększania standardowego odchylenia, tj. krzywa rozkładu jest mniej stroma na prawo od wartości średniej, niż wynika to z pomiaru krzywej np. metodą mikroskopową. Zwiększaniu częstości cząsteczek większych towarzyszy tendencja zwiększania nachylenia krzywej na lewo od wartości średniej, co można wytłumaczyć jako wpływ parametru wzmacniacza wymienionego w części 4, punkt c. Bardziej konkretne omówienie zniekształceń analizy amplitudowej powodowanych koincydencją komory oraz charakterystyka wzmacniacza przekraczają ramy tego artykułu i będą tematem oddzielnej publikacji. Warto zaznaczyć, że w Politechnice Warszawskiej opracowano w 1969 r. układy pozwalające na praktyczną eliminację wpływu koincydencji na analizę amplitudową. Istotą metody jest wielokrotne różniczkowanie i czasowa detekcja w wypadku „nakładania się w szczycie” oraz eliminujące strobowanie przy „nakładaniu się w ogonie”.

6. ZAWIESINA CZĄSTECZEK W ELEKTROLICIE

O ile cząsteczki będące wytworem natury mają kształty raczej obłe (komórki, krwinki, pyłki roślinne itp.), to wszelkiego rodzaju pyły dyspersyjne — wynik rozdrabniania mechanicznego — posiadają bardzo rozwinięte powierzchnie. W tym celu wprowadzono pojęcie wymiaru cząsteczki zastępczej (kulki) o objętości równoważnej cząsteczce rzeczywistej. Pokrętko wartości progu dyskryminatora — T [3] (rys. 1) jest wykalibrowane w jednostkach objętości (μm^3) lub równoważnej średnicy (μm). Kalibracja odnosi się do ustalonych wymiarów dyszy, oporności elektrolitu, prądu komory oraz wzmocnienia wzmacniacza. Przesuwając próg dyskryminatora przed każdym pomiarem (wielkość skoku zależna od żądanej dokładności), otrzymuje się serię wyników stanowiących punkty histogramu rozkładu frakcyjnego cząsteczek. Najpewniejszą metodą kalibracji są pomiary cząsteczek o znanej wartości średniej i jak najmniejszym rozrzucie. Do tego celu doskonale nadają się mieszaniny kalibracyjne do mikroskopów elektronowych produkowane przez kilka firm zagranicznych. Mieszaniny te są jednak drogie i trudno u nas dostępne. Omawiane urządzenie zostało wykalibrowane na erytrocytach ludzkich (wartość średnia $90 \mu\text{m}^3$) oraz pyłku paprotnika rodzaju widłak (wartość średnia $21 \mu\text{m}^3$). Zadowalające rezultaty można również uzyskać całkując dystrybuantę otrzymaną z zawiesiny o znanej globalnej objętości cząsteczek.

Warunkiem prawidłowych pomiarów jest równomierne stężenie w objętości naczynia A . Ponieważ przy pomiarze cząsteczek $> 1 \mu\text{m}$ należy się liczyć ze zjawiskiem sedymentacji grawitacyjnej, zawiesina musi być mieszana. Sprawdzianem braku sedymentacji jest brak osadu na dnie naczynia oraz niezmiennie w czasie wyniki pomiarów stężenia. Bardzo często obserwuje się jednak znaczne zmiany stężenia w czasie mimo braku osadu sedymentacyjnego i zmian intensywności mieszania. Powodem tego może być koagulacja lub dyspersja cząsteczek. Stosowany elektrolit (sól fizjologiczna) jest cieczą najbardziej odpowiednią dla wszelkiego rodzaju cząsteczek biologicznych. Ponieważ woda jako ciecz dipolowa ma dużą stałą dielektryczną, znajdujące się w niej jony NaCl istnieją w sposób trwały, nie podlegają rekombinacji, co tłumaczone jest teorią Debeya [7, 8].

Rozproszenie w cieczy dipolowej, zjonizowanej, cząsteczek spowoduje absorbowanie przez nie jonów, a tym samym uzyskanie pewnego potencjału zwanego elektrokinetycznym. Cząsteczki wykonując chaotyczne ruchy w cieczy (cieplne, sedimentacyjne lub powodowane mieszaniną) zbliżają się do siebie, a po wejściu w strefę działania sił przyciągania międzycząsteczkowego Van der Waalsa szczepiają się ze sobą. Im wyższy jest potencjał elektrokinetyczny cząsteczki, tym większą musi mieć energię ruchu, by przewyższyć działanie odpychające potencjału drugiej cząsteczki i wejść w strefę działania sił przyciągania międzycząsteczkowego. Tak więc koagulacja, tj. łączenie się cząsteczek fazy rozproszonej, jest w elektrolitach znacznie utrudniona. W wielu przypadkach jednak (np. proszki metali), wartość potencjału elektrokinetycznego jest zbyt mała by proces koagulacji nie musiał być uwzględniany w pomiarach, szczególnie przy dużych stężeniach.



Rys. 4. Zmiany stężenia cząstek żelaza w czasie

1. Liczba cząstek w 1 ml większych od 1 μm
2. Liczba cząstek w 1 ml większych od 4 μm

Na rys. 4 przedstawiono wyniki pomiarów stężenia żelaza w funkcji czasu. Obserwuje się spadek liczby cząstek małych kosztem tworzenia się dużych agregatów. Ponieważ badane cząsteczki często są już w znacznym stopniu skoagulowane przed wsypaniem ich do elektrolitu, pożądanym jest, by roztwór nie tylko ograniczał dalszą koagulację, ale powodował dyspersję już utworzonych agregatów. Dla osiągnięcia tego celu powszechnie stosowanymi metodami są: peptyzacja lub solwatacja [7, 8, 9]. Peptyzacja polega na zwiększaniu potencjału elektrokinetycznego cząstek przez dodanie do roztworu dodatkowych jonów. Solwatacja polega na dodaniu środka zwiększającego zwilżalność cząstek przez wodę.

7. STATYSTYCZNA REPREZENTATYWNOŚĆ POMIARÓW

Pracę komory czujnikowej można rozpatrywać jako bardzo dużą ilość prób — w każdej z nich, objętość komory jest napełniana, badana na zawartość cząsteczki i opróżniana. Ilość prób wynosi $1/\zeta$ [4], tzn. jest ilorazem objętości pomiarowej (1 ml) przez objętość komory. Jeżeli prawdopodobieństwo obecności cząsteczki w próbce jest małe — co ma tu miejsce — będzie pasował rozkład prawdopodobieństwa Poissona (Dodatek). W rozkładzie Poissona wartość średnia próbki jest wystarczającym estymatorem wartości średniej populacji. W wyniku pomiaru otrzymuje się prawdopodobieństwo obecności cząsteczki

w próbce pomnożone przez $1/\zeta$. Jednorazowy pomiar ilości cząsteczek w objętości 1 ml jest więc statystycznie reprezentatywny dla całej badanej populacji (cząsteczek znajdujących się w naczyniu A).

Jeżeli chodzi o analizę frakcyjną cząsteczek, to wynikiem serii pomiarów jest histogram częstości w funkcji objętości lub równoważnej średnicy. W przypadku wszelkiego rodzaju pyłów dyspersyjnych stwierdzona jest znaczna rozpiętość między skrajnymi wymiarami (100:1 i więcej). Krzywa rozkładu takich cząsteczek jest niesymetryczna i mało stroma. Dużym ułatwieniem analizy jest znalezienie funkcji pozwalającej opisać krzywą rozkładu. Również w tym przypadku rozkładem granicznym będzie rozkład normalny i funkcją transformującą dany rozkład na rozkład normalny jest funkcja logarytmiczna [10, 11, 12]. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa ma więc postać

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \ln \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right).$$

gdzie:

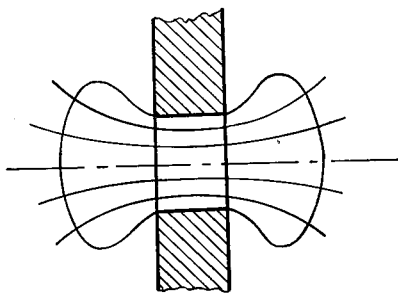
$\bar{x}$ — wartość średnia x ,

δ — standardowe odchylenie.

Sporządzając więc wykres częstości w funkcji logarytmu średnicy cząsteczki, otrzymuje się krzywą, którą można uznać za normalną i jako materiał porównawczy operować tylko dwoma najbardziej istotnymi parametrami δ i $\bar{x}$.

8. UWAGI KOŃCOWE

Omawiany tu model licznika cząsteczek zbudowano w 1970 roku. Można już obecnie podać kilka uwag dotyczących jego eksploatacji. Licznik zaopatrzony jest w trzy wymienne dysze $\varnothing_1 = 40 \mu\text{m}$, $\varnothing_2 = 95 \mu\text{m}$ oraz $\varnothing_3 = 135 \mu\text{m}$. Zakresy pomiarowe wynoszą odpowiednio: dla $\varnothing_1$ — od 0,73 do 11 μm , dla $\varnothing_2$ — od 2 do 50 μm , dla $\varnothing_3$ — od 2,5 do 64 μm . Czas jednego pomiaru około 23 sek. Urządzenie posiada dyskryminator

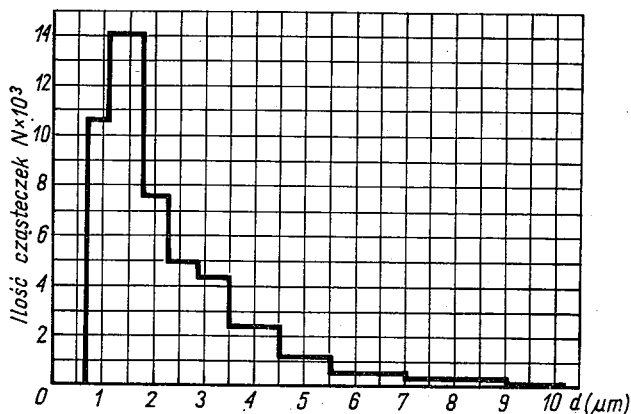


Rys. 5. Kształt komory czujnikowej określony na modelu w skali 150:1

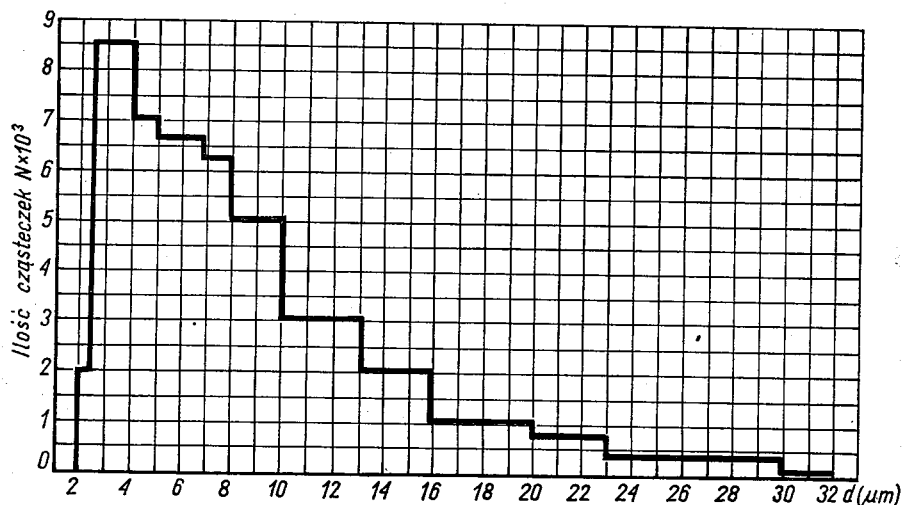
całkowy oraz różnicowy o dwóch szerokościach okna. Aby błąd powodowany efektem koincydencji nie był większy od 1%, przyjęto maksymalne stężenia cząsteczek na 1 ml: dla $\varnothing_1$ — $450 \cdot 10^3$, dla $\varnothing_2$ — $80 \cdot 10^3$, dla $\varnothing_3$ — $60 \cdot 10^3$.

Celem pełniejszego wykorzystania możliwości licznika projektuje się dobudowanie następujących urządzeń elektronicznych:

a) szybki konwerter analogowo-cyfrowy oraz urządzenie uśredniające; pozwoli to z jednego pomiaru uzyskać takie dane, jak średnią wielkość cząsteczki lub globalną objętość w próbce,



Rys. 6. Rozkład frakcyjny cząsteczek wodoru tytanu
Pomiar wykonano dyszą $\varnothing = 40 \mu\text{m}$



Rys. 7. Rozkład frakcyjny cząsteczek wolframu
Pomiar wykonano dyszą $\varnothing = 95 \mu\text{m}$

b) wielokanałowy analizator amplitudy, który pozwoli uzyskać krzywą rozkładu frakcyjnego z jednego pomiaru (eliminacja wpływu koagulacji),

c) eliminatory efektu koincydencji impulsów, które pozwolą na pracę przy większym stężeniu.

Dotychczas przeprowadzono pomiary rozkładu frakcyjnego następujących cząsteczek: krwinki ludzkie i zwierzęce, komórki biologiczne, drobiny tłuszczu w mleku, cement,

żelazo, wodorek tytanu, szkło, tlenki glinu, wolfram, molibden, piasek szklarski, krzemek cyrkonu, mangan, cyna, firmowe proszki ścierne (Homotex, Sika Skalen) itp. Bezsporne zalety omawianego typu licznika cząsteczek (duża dokładność, powtarzalność, szybkość i prostota obsługi) powodują ostatnio coraz szersze jego zastosowanie w różnych dziedzinach przemysłu, medycyny, rolnictwa, biologii itp.

DODATEK

Pomiary na modelu komory czujnikowej pozwoliły ustalić jej rzeczywistą objętość. Przy założeniu, że granice komory czujnikowej występują tam, gdzie amplituda sygnału spowodowanego obecnością cząsteczki maleje do wartości $1/e$ sygnału maksymalnego — komora czujnikowa ma kształt według rys. 5, a jej objętość jest prawie 7-krotnie większa od objętości przestrzeni dyszy. Potwierdzają to publikacje (3, 4, 6), w których opisano przykłady uzyskiwania rzeczywistej objętości komory drogą pomiaru efektu koincydencji przy różnych stężeniach cząsteczek w roztworze. Dokładniejsza analiza kształtu i objętości komory jest jak dotąd tematem otwartym.

W oparciu o wymiary dyszy według rys. 3, objętość przestrzeni dyszy

$$x = \frac{\pi D^2}{4} \cdot l = \frac{\pi}{4} (100)^2 \cdot 70 = 55 \cdot 10^4 \mu^3,$$

a objętość komory czujnikowej

$$v \cong 7 \cdot x = 7 \cdot 55 \cdot 10^4 = 385 \cdot 10^4 \mu^3.$$

Cały pomiar można potraktować jako szereg mikropróbek, każda o objętości v .

Ogólna ilość mikropróbek w pomiarze

$$N^* = \frac{\psi}{v} = \frac{10^{12}}{385 \cdot 10^4} = 260 \cdot 10^3,$$

gdzie ψ — objętość pomiarowa ($1 \text{ ml} = 10^{12} \mu^3$).

Średnia ilość cząstek w mikropróbce

$$\lambda = \frac{N_t}{N^*} = N_t \cdot \frac{v}{\psi} = \frac{10^5}{260 \cdot 10^3} = 0,385,$$

gdzie N_t — rzeczywista ilość cząstek w objętości pomiarowej (np. 10^5).

Prawdopodobieństwo znalezienia K cząstek w mikropróbce ($K = 0, 1, 2 \dots n$) dane jest rozkładem Poissona

$$p(K) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^K}{K!}.$$

Przyjmując, że cząstki wielokrotne będą rejestrowane jako cząstka pojedyncza, to

$$\frac{N_t}{N_o} = \frac{1p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots + np_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n} = \frac{\sum np_n}{\sum p_n},$$

gdzie N_o — rejestrowana ilość cząstek.

Prawdopodobieństwo, że w mikropróbce nie będzie cząstki ($K = 0$)

$$p(0) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda},$$

że będzie co najmniej jedna ($K \geq 1$)

$$p(K \geq 1) = 1 - p(0) = 1 - e^{-\lambda},$$

skąd

$$N_o = N^* \cdot p(K \geq 1) = \frac{\psi}{v} (1 - e^{-\lambda}).$$

Po rozwinięciu potęgowym i uproszczeniu, równanie korekcyjne efektu koincydencji dla analizy ilościowej będzie miało postać (równanie (4))

$$N_o = N_t - \frac{1}{2} \zeta N_t^2,$$

gdzie $\zeta = \frac{v}{\psi}$.

Pomiar dla stężenia $N_t = 10^5$ będzie miał rozkład następujący: Wynik pomiaru

$$N_o = N^* (1 - e^{-\lambda}) = 260 \cdot 10^3 (1 - e^{-0,385}) = 83200.$$

W tym

$$N^* \cdot p(1) = N^* e^{-\lambda} \frac{\lambda}{1!} = 260 \cdot 10^3 \cdot e^{-0,385} \cdot 0,385 = 68\,068 \text{ singletów}$$

$$N^* \cdot p(2) = N^* e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!} = 260 \cdot 10^3 \cdot e^{-0,385} \cdot \frac{(0,385)^2}{2!} = 13078 \text{ dubletów}$$

$$N^* \cdot p(3) = N^* e^{-\lambda} \frac{\lambda^3}{3!} = 260 \cdot 10^3 \cdot e^{-0,385} \cdot \frac{(0,385)^3}{3!} = 1677 \text{ tripletów}$$

Sumarycznie

$$\begin{aligned} 1 \cdot 68068 &= 68068 \\ 2 \cdot 13078 &= 26156 \\ 3 \cdot 1677 &= 5031 \\ \hline &99255 \end{aligned}$$

Jest to wartość dostatecznie bliska założonego stężenia 10^5 cząstek. Jak widać takie stężenie wymaga korekcji wyników zgodnie z równaniem (4).

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. M. Guillon, Teoria układów hydraulicznych, WNT 1966.
2. H. E. Kubitschek, Research 13 — 1960.
3. W. B. Mercer, Calibration of Coulter Counters for Particles $\sim 1 \mu\text{m}$ in Diameter, Rev. Sci. Instr. 11 — 1966.
4. L. Princen, F. Kwolek, Coincidence Corrections for Particle Size Determinations with the Coulter Counter, Rev. Sci. Instr. 5 — 1965.
5. R. J. Harvey, Methods in Cell Physiology, Academic Press, 1968.
6. M. Wales, J. N. Wilson, Theory of Coincidence in Coulter Particle Counters, Rev. Sci. Instr. 10 — 1961.
7. J. Juda, Pomiary zapylenia i technika odpylania, WNT 1968.
8. R. Andrzejewski, W. Gutowski, Fizyczne własności pyłów, Wyd. Śląsk, 1968.
9. Polska Norma, PN-66, Z-04008, Analiza ziarnowa pyłów o średniej zastępczej ziarn poniżej $63 \mu\text{m}$.
10. G. Herdan, Small Particle Statistics, Academic Press Inc., 1960.
11. A. Oderfeld, Podstawy prac doświadczalnych, Wyd. PW, 1968.

Z. GROCHOWSKI

PARTICLES COUNTER WITH ELECTRIC SENSING ZONE

Summary

The electric zone sensing counter determines the number and size of particles suspended in electrolyte. The suspension flows through a small aperture having an immersed electrode on either side. Each particle passage changes the resistance between electrodes and produces a voltage pulse of magnitude proportional to particle volume. These pulses are electrically scaled and counted.

Z. GROCHOWSKI

MOLEKÜLENZÄHLER MIT ELEKTRISCHER FÜHLKAMMER

Zusammenfassung

Der Zähler bestimmt Menge und Größe der sich im Elektrolyt befindenden Moleküle. Der Elektrolyt fließt durch eine an beiden Seiten mit Elektroden versehenen Düse. Jedes Durchfließen eines Moleküls ändert den Wegwiderstand zwischen den beiden Elektroden, was die Entstehung eines mit dem Volumen proportionalen Impulses verursacht. Die Impulse werden elektronisch zusammengezählt und bemessen.

З. ГРОХОВСКИ

СЧЕТЧИК ЧАСТИЦ С ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ДАТЧИКОМ

Резюме

Счетчик определяет количество и размеры частиц, находящихся в электролите. Электролит протекает через отверстие, находящееся между двумя электродами. Частица, проходя каждый раз через это отверстие, изменяет сопротивление пути между электродами, вследствие чего получается серия импульсов, пропорциональных размерам частиц. Параметры этих импульсов измеряются, а их число подсчитывается электронным счетчиком.

Licznik łańcuchowy jako generator liczb pseudolosowych

STANISŁAW BUDKOWSKI (WARSZAWA), TOMASZ KOŃCZYK (WARSZAWA)

Instytut Maszyn Matematycznych Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 4.11.1970

Po podaniu zasad projektowania liczników łańcuchowych omówiono własności generowanych przez nie sekwencji binarnych. Następnie omówiono wyniki testów statystycznych przeprowadzonych w celu zweryfikowania hipotezy o pseudolosowości i równomierności rozkładu liczb, których rozwinięciem binarnym jest stan licznika; uzyskane wyniki pozwalają stwierdzić, że nie ma podstaw do odrzucenia takiej hipotezy. Na zakończenie opisano niektóre zastosowania takich liczników, a w szczególności generator szumu pseudolosowego.

1. WSTĘP

Znanych jest wiele metod wytwarzania liczb pseudoprzypadkowych. W przypadku maszyn cyfrowych wytwarza się je zwykle korzystając ze specjalnych programów, a niekiedy korzysta się z tablicy takich liczb przechowywanej w pamięci maszyny. Oddzielną klasę generatorów liczb pseudoprzypadkowych stanowią specjalne układy elektroniczne. Mają one zastosowanie zarówno w maszynach cyfrowych jak i w analogowych, jak również w wielu innych urządzeniach, np. teletransmisyjnych. Zasada działania elektronicznych generatorów liczb pseudolosowych opierała się początkowo o zjawiska fizyczne o charakterze losowym, jak np. szumy lamp lub tranzystorów. Obecnie istnieje tendencja wykorzystywania w tym celu specjalnych układów cyfrowych, które umożliwiają kontrolę przebiegu generacji i których działanie praktycznie nie zależy od wpływu warunków zewnętrznych.

Cyfrowym układem elektronicznym, którego sekwencja stanów spełnia warunki pseudolosowości, jest rozpatrywany w tym artykule układ licznika łańcuchowego o maksymalnym okresie. Ponieważ zasady syntezy takich liczników są mało znane, podano poniżej ogólną metodę ich projektowania. Podano również wyniki testów, jakim poddano generowane przez taki licznik liczby pod kątem sprawdzenia hipotezy o ich pseudolosowości. Wyniki te uzyskano symulując działanie wybranego licznika łańcuchowego na maszynie cyfrowej UMC-10 i sprawdzając pseudolosowość i równomierność rozkładu generowanych liczb za pomocą znanych testów stosowanych zwykle do testowania generatorów liczb pseudoprzypadkowych opartych o metody programowe (softwarowe). Opisano również krótko inne własności generowanych przez licznik łańcuchowy sekwencji oraz na zakończenie omówiono zastosowanie takich generatorów a szczególnie ich zastosowanie do budowy generatorów szumów o regulowanym paśmie.

Liczniki łańcuchowe o maksymalnym okresie

Funkcjonalnie rzecz ujmując licznik łańcuchowy jest n -stopniowym rejestrem przesuwającym z dodatkowym układem sprzężenia zwrotnego realizującym funkcję

$$f(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = C_1 Q_1 \oplus C_2 Q_2 \oplus \dots \oplus C_n Q_n, \quad (1)$$

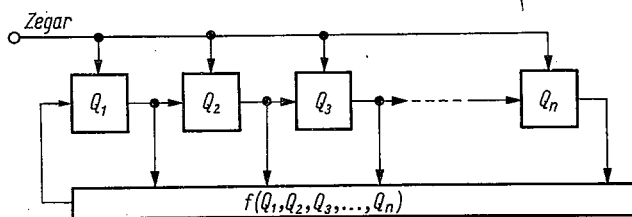
gdzie:

Q_i — stan i -tego stopnia rejestru,

C_i — współczynniki binarne,

$\oplus$ — symbol sumy modulo 2,

przy czym wyjście tego układu dołączone jest do wejścia pierwszego stopnia rejestru. Zasadę budowy licznika łańcuchowego ilustruje rys. 1. Ponieważ zasady syntezy rejestrów



Rys. 1. Schemat blokowy licznika łańcuchowego

przesuwających są ogólnie znane, zajmijmy się jedynie sposobem określenia takich funkcji $f(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$, dla których okres liczników łańcuchowych jest maksymalny. Innymi słowy podać należy, jakie współczynniki C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) równe są zero, a jakie jeden, aby okres licznika był maksymalny. Okazuje się, że przy odpowiednim doborze tych współczynników maksymalny okres takiego licznika równy być może $p = 2^n - 1$ (licznik przyjmować może wszystkie możliwe stany z wyjątkiem samych zer).

Określmy warunek konieczny i dostateczny aby okres licznika łańcuchowego był maksymalny, czyli równy $p = 2^n - 1$. Algorytm przejścia licznika od stanu w chwili t do stanu następnego (w chwili $t+1$; kolejne chwile zadane są przez kolejne okresy zegara) może być podany w postaci równania macierzowego (stosowana jest arytmetyka modulo 2)

$$Q^{t+1} = A \cdot Q^t \quad (2)$$

przy czym

$$Q^t = \begin{bmatrix} Q_1^t \\ Q_2^t \\ \vdots \\ Q_n^t \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} C_1 C_2 \dots C_{n-1} C_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

Oznaczając przez Q^0 stan początkowy licznika, kolejne jego stany po pojawieniu się kolejnych impulsów zegara będą więc następujące:

$$Q^0, A \cdot Q^0, A^2 \cdot Q^0, \dots, A^{k-1} \cdot Q^0, Q^0, \dots \quad (3)$$

Jak z powyższego widać liczba k określająca maksymalną liczbę różnych stanów licznika jest najmniejszą liczbą całkowitą, dla której

$$A^k = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (4)$$

Stąd warunkiem koniecznym i dostatecznym uzyskania maksymalnego okresu jest aby liczba $2^n - 1$ była najmniejszą wartością liczby k spełniającą zależność (4).

Tak sformułowany warunek konieczny i dostateczny trudno jest wykorzystać w celu określenia wartości współczynników C_i w funkcji zadanej zał. (1). Udowodniono [7], że warunek konieczny jest równoważny warunkowi, aby wielomian charakterystyczny $W_n(x)$ macierzy A

$$W_n(x) = x^n + C_1 x^{n-1} + \dots + C_{n-1} x + C_n \quad (5)$$

był nierozkładalny w ciele Galois o charakterystyce 2, tzn. aby nie można go było przedstawić w postaci iloczynu wielomianów nierozkładalnych rzędu niższego niż n . Warunek dostateczny natomiast równoważny jest warunkowi, aby liczba $2^n - 1$ była najmniejszą wartością liczby v , dla której wielomian $x^v - 1$ jest podzielny przez $W_n(x)$, tzn. że

$$x^v - 1 = W_n(x) \cdot W_{n-1}(x). \quad (6)$$

Znajomość wielomianów nierozkładalnych $W_n(x)$ dla różnych n spełniających warunek dostateczny (6) umożliwia w sposób bezpośredni określenie funkcji $f(Q)$ zadanej zał. (1).

Ogólna metoda wyznaczania wielomianów nierozkładalnych nie jest znana. Opiszemy jedynie jeden z algorytmów [7, 8] pozwalający na ich wyznaczenie w skończonej liczbie kroków. Załóżmy, że znane są nam wszystkie wielomiany nierozkładalne aż do rzędu $n-1$. Poniżej podano takie wielomiany aż do rzędu 5:

$$\begin{array}{rcccc} x & & x^4 + x^3 + & & 1 \\ x+1 & & x^4 + & & x+1 \\ x^2 & x+1 & x^5 + x^4 + x^3 + x^2 & & +1 \\ x_3 + x^2 + & 1 & x^5 + x^4 + x^3 + & & x+1 \\ x_3 + & x+1 & x^5 + & x^3 + x^2 + x + 1 & \\ x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 & & x^5 + & x^3 + & 1 \\ & & x^5 + & & x^2 + 1 \end{array}$$

Aby określić wielomiany nierozkładalne rzędu n należy sprawdzić, który spośród 2^{n-1} wielomianów rzędu n (wystarczy uwzględnić 2^{n-1} wielomianów spośród możliwych 2^n , gdyż połowa z nich jest zawsze rozkładalna, a mianowicie te, dla których $C_n = 0$) nie da się podzielić przez jeden spośród znanych wielomianów nierozkładalnych aż do rzędu $n-1$. Udowodniono [7, 8], że konkretne dzielenie 2^{n-1} wielomianów rzędu n wystarczy wykonać

tylko przez wielomiany od rzędu 1 do rzędu $E\left(\frac{n}{2}\right)$ (E — funkcja część całkowita), gdyż wiadomo, że jeżeli wielomian $W_n(x)$ nie jest podzielny przez żaden wielomian nierozkła-

dalny do rzędu j , to nie jest również podzielny przez żaden z wielomianów rzędu $(n-j)$. Dodatkowo proces szukania można zakończyć po znalezieniu dowolnego z wielomianów nierozkładalnych rzędu n , gdyż pozostałe można wyznaczyć określając wielomiany charakterystyczne macierzy A^m , w której współczynniki C_i są współczynnikami wyznaczonego wielomianu, a m przyjmuje wartości pierwsze względem $2^n - 1$. Mimo opisanych wyżej uproszczeń algorytm wyznaczania wielomianów nierozkładalnych wysokich stopni jest

Tablica

Wykaz numerów indeksów „ i ” współczynników $C_i = 1$ w funkcji $f(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = C_1 Q_1 \oplus C_2 Q_2 \oplus \dots \oplus C_n Q_n$ dla liczników łańcuchowych n -pozycyjnych o maksymalnym okresie

n	„ i ” dla których $C_i = 1$	Okres licznika łańcuchowego
2	1, 2	3
3	1, 3 lub 2, 3	7
4	3, 4 lub 1, 4	15
5	3, 5 lub 2, 5	31
6	3, 6	63
7	4, 7	127
8	4, 5, 6, 8	255
9	5, 9	511
10	7, 10	1023
11	9, 11	2047
12	6, 7, 9, 12	4095
13	2, 8, 12, 13	8191
14	3, 7, 13, 14	15383
15	7, 5 lub 11, 15 lub 8, 15	32767
16	1, 3, 12, 16	65535
17	12, 17 lub 14, 17	131071

bardzo pracochłonny i może być realizowany w zasadzie jedynie przy wykorzystaniu maszyny cyfrowej. Pamiętać należy przy tym, że dla każdego wyznaczonego tą metodą wielomianu sprawdzić jeszcze należy warunek dodatkowy określony zależnością (6). Odpowiedni program wyznaczenia współczynników C_i wielomianów nierozkładalnych spełniających warunek (6) wykonany został w I.M.M.P.W. Poniżej zamieszczona jest tablica podająca współczynniki C_i dla różnych n umożliwiającą określenie najprostszej postaci funkcji $f(Q)$, dla których otrzymuje się liczniki łańcuchowe o maksymalnym okresie równym $2^n - 1$.

2. WŁASNOŚCI SEKWENCJI BINARNYCH GENEROWANYCH PRZEZ LICZNIK ŁAŃCUCHOWY O MAKSYMALNYM OKRESIE

Ciąg zer i jedynek otrzymanych z wyjścia jednego stopnia licznika łańcuchowego o maksymalnym okresie nazywamy sekwencją o maksymalnej długości. Można wykazać [3], że sekwencja taka spełnia trzy warunki, zwane *cechami losowości*, co kwalifikuje ją jako sekwencję pseudolosową. Cechy te to:

1. Właściwość zrównoważenia (ang. Balance property).

W każdym okresie liczba jedynek różni się od liczby zer w sekwencji najwyżej o 1.

2. Właściwość serii (ang. Run property).

Wśród serii jedynek i zer w każdym okresie sekwencji połowa wszystkich serii ma długość 1, jedna czwarta ma długość 2, jedna ósma ma długość 3 itd., pod warunkiem, że te ułamki dają sensowną (całkowitą) liczbę serii.

3. Właściwość korelacji (ang. Corelation property).

Jeżeli sekwencja maksymalnej długości jest porównywana bit po bicie z jakimś swoim cyklicznym przesuwem, to liczby zgodności i niezgodności na poszczególnych pozycjach obu sekwencji różnią się najwyżej o 1.

Zostało dowiedzione [3], że sekwencje o maksymalnej długości posiadają właściwość zwaną DELAY-AND-ADD. Polega ona na tym, że suma modulo 2 *bit po bicie* sekwencji z jej przesuwem czasowym jest nowym przesuwem czasowym pierwotnej sekwencji. Właściwość ta jest wykorzystywana do uzyskania dowolnych opóźnień sekwencji wyjściowej, gdyż w tym celu można sumować modulo 2 sekwencję wyjściową z sekwencją pobieraną z innego stopnia licznika.

Na podstawie powyższych własności można udowodnić twierdzenie [4], że prawdopodobieństwo wystąpienia w danym momencie danej amplitudy sygnału powstałego przez sumowania wszystkich binarnych pozycji licznika łańcuchowego, ma rozkład dwuwymiarowy. Występuje tu tylko jedno odstępstwo od tego rozkładu — dla amplitudy równej 0 mamy prawdopodobieństwo 0, gdyż stan licznika, złożony z samych zer nie występuje ani razu w czasie jego poprawnej pracy. To stwierdzenie jest równoważne faktowi, że prawdopodobieństwo wystąpienia określonej liczby jedynek (lub zer), w pewnych stanach licznika, ma rozkład dwumianowy. Aby to miało miejsce, liczby, których rozwinięciem binarnym jest stan licznika muszą mieć rozkład równomierny. Hipotezę pseudolosowości generowanych liczb i równomierności ich rozkładu zweryfikowano przy pomocy 5 testów statystycznych stosowanych zwykle do badania pseudolosowości liczb, których sekwencje wytwarzane są zgodnie ze znanymi algorytmami za pomocą specjalnych programów dla maszyn cyfrowych. Do badania omawianego generatora liczb pseudolosowych dokonano symulacji jego działania (symulowano licznik łańcuchowy 15-stopniowy) na maszynie cyfrowej UMC-10.

1. Test częstotliwości

Test częstotliwości umożliwia badanie równomierności rozkładu generowanych liczb i ich losowości. Jego przebieg jest następujący. Przedział w jakim zawierają się generowane liczby dzieli się na 8 równych podprzedziałów: $x_1, x_2, \dots, x_8$ i z generatora pobiera się

kolejno 50 próbek, z których każda składa się z 512 kolejno wygenerowanych liczb. Dla każdej z próbek z osobna określa się wartości $f_i (i = 1, 2, \dots, 8)$ określających liczbę trafień generowanych liczb do i -tego podprzedziału. Następnie dla każdej z próbek określa się statystykę χ_1^2

$$\chi_1^2 = \frac{1}{64} \sum_{i=1}^8 (f_i - 64)^2, \quad (7)$$

umożliwiającą ocenę równomierności rozkładu generowanych liczb aproksymowaną przez rozkład χ^2 z siedmioma stopniami swobody (wartość χ_1^2 jest miarą rozrzutu liczby trafień do podprzedziałów; χ_1^2 równa jest zero, gdy dla każdego przedziału trafi po 64 liczby). Na podstawie tak otrzymanych wartości χ_1^2 określa się statystykę χ_F^2

$$\chi_F^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{10} (F_i - 5)^2 \quad (8)$$

aproksymowaną przez statystykę χ^2 z dziewięcioma stopniami swobody, przy czym $F_i (i = 1, 2, \dots, 10)$ jest liczbą spełnień przez statystyki χ_1^2 nierówności

$$\chi_{(i-1) \cdot 0,1}^2 \leq \chi_1^2 < \chi_{i \cdot 0,1}^2 \quad (9)$$

a $\chi_{i \cdot 0,1}^2$ jest wartością statystyki χ^2 z siedmioma stopniami swobody dla poziomu istotności $i \cdot 0,1$. Losowość generowanych liczb jest tym lepsza im mniej się różnią między sobą wartości F_i .

Test częstotliwości dał wynik pozytywny, tzn. nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o losowości i równomierności rozkładu generowanych liczb.

2. Test kontroli par

Test kontroli par umożliwia badania niezależności kolejnych liczb. Korzysta on z pewnych wyników testu częstotliwości. Również i tu dzieli się przedział, w którym zawierają się generowane liczby, na 8 podprzedziałów i bierze się pod uwagę 50 różnych próbek po 512 liczb. Dla każdej próbki określa się statystykę χ_2^2

$$\chi_2^2 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^8 (f_{ij} - 8)^2 \quad (10)$$

przy czym f_{ij} określa liczbę zdarzeń polegających na tym, że jeżeli pewna generowana liczba trafiła do podprzedziału i , to następna trafiła do podprzedziału j . Można zauważyć, że do spełnienia testu wymagane jest, aby równe było prawdopodobieństwo trafienia liczby do każdego z ośmiu podprzedziałów bez względu na to do jakiego podprzedziału trafiła liczba poprzednia. Następnie określa się dla każdej z 50 próbek statystykę $(\chi_2^2 - \chi_1^2)$ aproksymowaną przez rozkład χ^2 z 56 stopniami swobody oraz na podstawie tak uzyskanych wyników statystykę χ_s^2

$$\chi_s^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{10} (S_i - 5)^2 \quad (11)$$

aproksymowaną przez statystykę χ^2 z dziewięcioma stopniami swobody przy czym $S_i (i = 1, 2, \dots, 10)$ jest liczbą spełnień nierówności (9).

Jak można się było *a priori* spodziewać, test kontroli par dał wynik negatywny, czyli kolejne generowane liczby są od siebie zależne. Wynika to z samego algorytmu generacji liczb, gdyż jeżeli jakaś wygenerowana liczba ma wartość a , to liczba następna równa jest bądź $\frac{1}{2}a$ — gdy wynik sumowania modulo 2 w pętli sprzężenia zwrotnego równy jest zero (zero wpisane jest do pierwszego stopnia licznika po przesunięciu jego zawartości o jedną pozycję w prawo), bądź $0,5 + \frac{1}{2}a$ — gdy wynik sumowania modulo 2 równa się 1. Innymi słowami, jeżeli przedział generacji podzielony zostanie na 8 równych podprzedziałów, to następna liczba trafić może tylko do dwóch z nich.

3. Test empirycznej entropii

Test empirycznej entropii umożliwia badanie rozkładu zer i jedynek na poszczególnych pozycjach binarnych generowanej liczby. Aby rozkład prawdopodobieństwa generowanych liczb był równomierny wymagane jest, aby dla każdej pozycji prawdopodobieństwo wystąpienia na niej 0 lub 1 równe było 0,5. Założywszy, że prawdopodobieństwo to równe jest 0,5, to empiryczna entropia dla i -tej pozycji równa jest

$$H_i = -\frac{m_i}{n} \ln \frac{m_i}{n} - \left(1 - \frac{m_i}{n}\right) \ln \left(1 - \frac{m_i}{n}\right) \quad (12)$$

przy czym przez m_i oznaczono liczbę zer (lub jedynek) na i -tej pozycji w próbce n wygenerowanych liczb. Wtedy zmienna przypadkowa

$$z = 2n \left(K \ln 2 - \sum_{i=1}^K H_i \right) \quad (13)$$

posiada dla n dążącego do nieskończoności rozkład χ^2 z K stopniami swobody (K — liczba pozycji w generowanych liczbach). Jak widać z zależności (12), gdy prawdopodobieństwo wystąpienia zera (lub jeden) na i -tej pozycji dąży do 0,5, to entropia H_i dąży do $\ln 2$ i wobec tego (zal. 13) wartość zmiennej z dąży do zera.

Wynik testu empirycznej entropii wykonanego dla $n = 500, 1000, 5000$ oraz 10000 i $k = 15$ dały wynik pozytywny, nie ma więc podstaw do odrzucenia hipotezy, że prawdopodobieństwo wystąpienia zera (lub jeden) na każdej pozycji generowanych liczb równe jest 0,5.

4. Test kontroli kombinacji

Wiadomo na podstawie udowodnionego [4] twierdzenia, że amplituda sygnału powstałego przez sumowanie wszystkich pozycji licznika łańcuchowego ma rozkład dwumianowy. Można zauważyć, że jest to równoważne temu, że prawdopodobieństwo wystąpienia określonej liczby jedynek (lub zer) na wyjściach stopni licznika ma rozkład dwumia-

nowy. Aby to jednak miało miejsce, liczby, których rozwinięciem jest stan licznika, muszą mieć rozkład równomierny.

Test kontroli kombinacji umożliwia zweryfikowanie właśnie dwumianowości rozkładu liczby zer (jedynek) w rozwinięciu generowanej liczby, a więc pośrednio równomierności rozkładu generowanych liczb. Rozkład teoretyczny

$$P(v) = \binom{n}{v} p^v (1-p)^{n-v}, \quad (14)$$

który biorąc pod uwagę, że przyjąć można $p = 0,5$ (na podstawie wyników poprzedniego testu), uprościć można do postaci

$$P(v) = \binom{n}{v} (0,5)^n$$

porównywany jest z rozkładem empirycznym otrzymanym z badania próbki N -elementowej. Jako miary odchylenia użyto statystyki χ^2

$$\chi^2 = \sum_{v=0}^{15} \frac{(m_v - Np_v)^2}{Np_v}$$

z 15 stopniami swobody, przy czym przez m_v oznaczono ilość liczb zawierających v jedynek, a przez p_v teoretyczne prawdopodobieństwo wystąpienia v jedynek w liczbie.

Test kontroli kombinacji dał wynik pozytywny.

5. Test serii

Dokonano podziału elementów próbki ($n = 1000$ i $n = 10000$ liczb generowanych) na dwa rodzaje: liczby mniejsze od 0,5 oraz większe lub równe 0,5.

Serią nazywa się odcinek ciągu generowanych liczb składający się z elementów jednego rodzaju. Test ma na celu sprawdzenie czy generator nie wytwarza zbyt długich serii oraz czy istnieje wystarczająca ich różnorodność.

Otrzymane na podstawie badań wyniki (liczby serii i długość serii) porównywane są z wartościami teoretycznymi określonymi z ufnością 0,95.

Test serii dał wynik pozytywny.

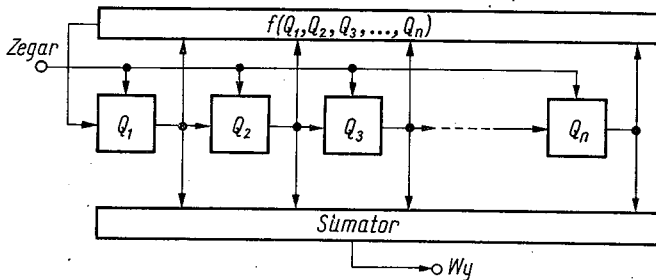
3. ZASTOSOWANIA

3.1. Generator szumu pseudolosowego

Układ generatora szumu znajduje zastosowanie wszędzie tam, gdzie chcemy zasymulować naturalne warunki pracy dla przebadania jakiegoś urządzenia pracującego w obecności zakłóceń losowych (np. przy modelowaniu procesów na maszynach analogowych). Wtedy dużą rolę odgrywa kształt oraz pasmo widma gęstości mocy. Najczęściej żądamy, aby było ono jak najbardziej zbliżone do widma Gaussa oraz żeby pasmo było regulowane.

Często też wymagane jest symulowanie szumu białego. Te warunki doskonale spełnia generator zbudowany w oparciu o licznik łańcuchowy.

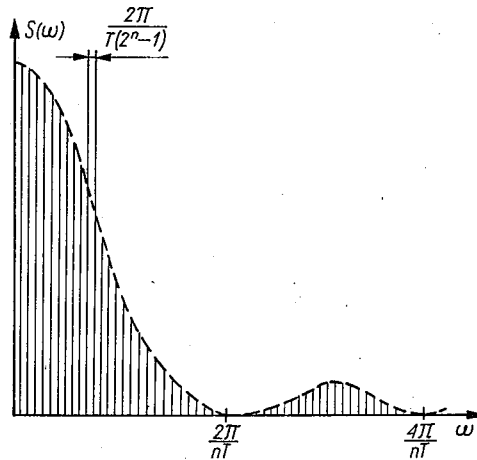
Dość dobrą aproksymację widma Gaussowskiego sygnału osiągamy przez sumowanie analogowe wyjść wszystkich stopni rejestru przesuwającego (rys. 2).



Rys. 2. Schemat blokowy generatora szumu

Widmo gęstości mocy tak otrzymanego sygnału jest pokazane na rys. 3. Jest to widmo prążkowe z prążkami dla pulsacji

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T(2^n - 1)} \quad \begin{matrix} T - \text{okres zegara} \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots \end{matrix}$$



Rys. 3. Widmo gęstości mocy sygnału na wyjściu generatora szumu z rys. 2

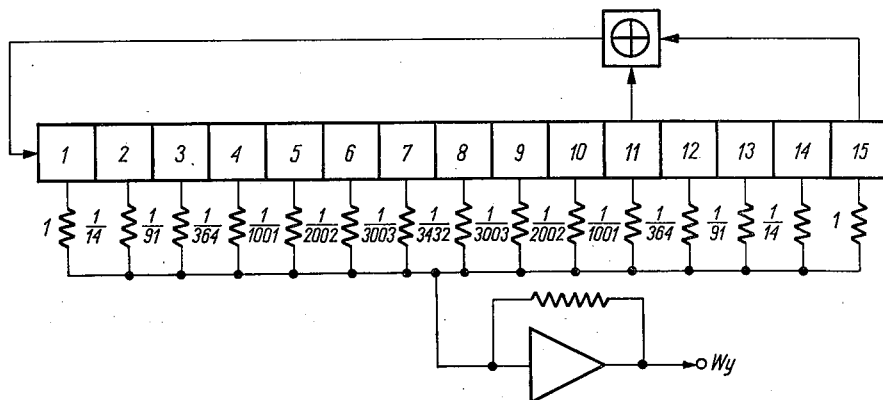
oraz z odpowiednią daną jako

$$S_{(\omega)} = n^2 T \left(\frac{\sin \frac{n\omega T}{2}}{\frac{n\omega T}{2}} \right)^2$$

Dużo lepszą aproksymację [5] uzyskujemy biorąc sumę ważoną wyjść poszczególnych stopni, przy czym poszczególne wagi wyjść dla n -stopniowego licznika są proporcjonalne do współczynników dwumianu Newtona rzędu $(n-1)$. Sumę ważoną można w sposób

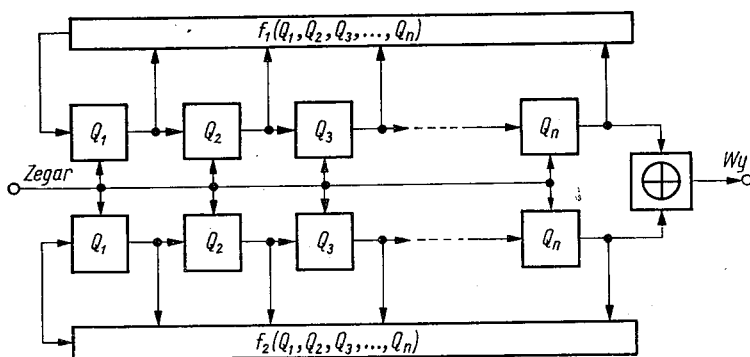
prosty uzyskać przez doprowadzenie sygnałów poszczególnych stopni licznika na wejście wzmacniacza operacyjnego poprzez oporniki o wartościach proporcjonalnych do współczynników wielomianu Newtona. Układ taki jest pokazany na rys. 4. Obwiednia widma amplitudy tak otrzymanego sygnału w granicy, dla $n \rightarrow \infty$, równa jest

$$L(\omega) = e^{-\omega^2 T^2 / 2}.$$



Rys. 4. Schemat zmodyfikowanego generatora szumu

Innym sposobem polepszenia aproksymacji widma Gaussa [2] stosowanym w układach, w których szum uzyskuje się przez filtrowanie sekwencji o maksymalnej długości, jest budowa generatorów dwurejestrowych (rys. 5). W układzie jak na rys. 5, sekwencja wyjściowa jest sumą modulo 2, bit po bicie, sekwencji o maksymalnej długości, otrzymanych



Rys. 5. Schemat dwurejestrowego generatora sekwencji binarnej

z rejestrów składowych. Okres takiej sekwencji jest niewiele mniejszy niż sekwencji o maksymalnej długości otrzymanej z licznika o liczbie stopni równej sumie długości liczników składowych.

Największymi zaletami cyfrowych generatorów szumu pseudolosowego są:

- 1) brak dryftu,
- 2) dokładnie określone metodą generacji parametry statystyczne oraz ich stałość,

3) prosta regulacja pasma widma częstotliwości (przez zmianę częstotliwości zegara sterującego licznikiem łańcuchowym),

4) stała średniokwadratowa wartość sygnału niezależna od pasma [6].

Generator jak na rys. 4 został wykonany w IMM PW i był wykorzystywany do sprawdzenia poprawności działania specjalizowanej maszyny cyfrowej typu ANOPS. Na wejście maszyny był podawany sygnał sinusoidalny wraz z szumem z generatora. ANOPS wyławiał z takiej mieszaniny czysty sygnał sinusoidalny metodą uśredniania wielokrotnie powtarzanych sygnałów.

3.2. Inne zastosowania liczników łańcuchowych

Licznik łańcuchowy może być stosowany jako generator kodu [3]. Sekwencja o maksymalnej długości może być wykorzystywana jako szyfr (nazywany szyfrem Vigenera), lub raczej jako klucz przy szyfrowaniu jakiejś binarnej informacji. Oba te procesy polegają na dodawaniu modulo 2 do informacji właściwej sekwencji o maksymalnej długości. Szyfrowanie informacji polega na dodaniu do niej modulo 2 sekwencji o maksymalnej długości, przez co informacja kodowana zmieni postać, a deszyfrowanie polega też na dodaniu modulo 2 takiej sekwencji do informacji zakodowanej przez co w wyniku otrzyma się z powrotem informację podstawową ($a \oplus a = 0$).

Dowodzono [3], że z licznika łańcuchowego n -stopniowego możemy otrzymać sekwencję o okresie od 1 do $2^n - 1$ (włącznie) oraz o określonej postaci. Liczniki łańcuchowe znajdują więc zastosowanie w synchronicznych systemach cyfrowych jako liczniki impulsów o regulowanym okresie oraz jako urządzenia *pamiętające* typu *read only*. Diagram zachowania się n -stopniowego rejestru przesuwającego ze sprzężeniem zwrotnym jest także diagramem Markowa dla kanałów binarnych ze statystyczną zależnością ograniczoną do n bitów wstecz.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. P o p k o, Synteza strukturalna liczników o krótkim czasie propagacji przeniesień, Praca dyplomowa wykonana pod opieką St. Budkowskiego w KBMM PW, 1969.
2. R. P. G i l s o n, Some Results of Amplitude Distribution Experiments of Shift Register Generated Pseudo-Random Noise, IEEE Trans. Electr. Comp., December 1966.
3. S. W. G o l o m b, Digital Communications with Space Application, Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall, 1964.
4. A. C. D a v i e s, Probability Distribution of Pseudo-Random Waveforms Obtained from M-Sequences, Electronics Letters, no. 3, 1967.
5. B. M a t h e w s, Generation of Pseudo-Random Noise Having a Gaussian Spectral Density, IEEE Trans. on Comp., April 1968.
6. Referat z brytyjskiej wystawy aparatury naukowej (1970).
7. B. E l p a s, The Teory of Autonomous Linear Sequential Circuits, IRE Trans. CT-6, 1959.
8. J. S w i f t, Construction of Galois Field of Characteristic 2 and Irreducible Polynomials, Math. of Comp. 7, 1960.
9. T. K o Ń c z y k, Elektroniczny generator liczb pseudolosowych, Praca dyplomowa wykonana pod opieką St. Budkowskiego w IMM PW, 1970.
10. A. G r z y b, Teoria liczników łańcuchowych, Praca dyplomowa wykonana w IMM PW pod opieką St. Budkowskiego.

S. BUDKOWSKI, T. KOŃCZYK

FEEDBACK SHIFT REGISTER AS GENERATOR OF PSEUDO-RANDOM NUMBERS

Summary

The principles of designing a feedback shift register are given and the properties of binary sequences generated by such a register are discussed. Next the paper deals with the results of statistical tests proving pseudorandomness and uniformity distribution of generated numbers. A few applications of feedback shift register are given, special attention being paid to the pseudo-random noise generator having a Gaussian spectral density.

S. BUDKOWSKI, T. KOŃCZYK

COMPTEUR EN ANNEAU COMME GENERATEUR DES NOMBRES ALEATOIRES

Résumé

On décrit les propriétés des sequences binaires fournies par un compteur en anneau modifié (sorties des cellules attaquant la première cellule par intermédiaire d'un circuit "OU exclusif"). On présente les résultats des tests statistiques prouvant l'uniformité de distribution des nombres binaires représentés par les états des cellules de compteur en anneau. On décrit à la fin certaines applications du dite compteur et en particulier le générateur du bruit aléatoire.

S. BUDKOWSKI, T. KOŃCZYK

KETTENZÄHLER ALS GENERATOR PSEUDOSTOCHASTISCHER ZAHLEN

Zusammenfassung

Nachdem Grundsätze für das Entwerfen von Kettenzählern angegeben worden sind, werden die Eigenschaften der durch diese generierten binären Sequenzen besprochen. Im weiteren werden Ergebnisse statistischer Tests erörtert, die zwecks Bestätigung der Hypothese betreffend pseudostochastische und gleichmäßige Verteilung von Zahlen, deren binäre Entwicklung der Zählerstand ist, durchgeführt worden sind. Auf Grund gewonnener Resultate läßt sich feststellen, daß keinerlei Grund besteht, derartige Hypothese zu verwerfen.

Zum Schluß werden einige Beispiele für die Anwendung solcher Zähler beschrieben, insbesondere der Generator pseudostochastischer Geräusche.

СТ. БУДКОВСКИ, Т. КОНЬЧИК

ЦЕПНОЙ СЧЕТЧИК КАК ГЕНЕРАТОР ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

Резюме

Приводится принцип проектирования цепных счетчиков и рассматриваются свойства двоичных последовательностей генерированных этими счетчиками.

Затем обсуждаются результаты статистических испытаний, выполненных для проверки гипотезы псевдослучайности и равномерного распределения чисел, двоичным представлением которых является состояние счетчика.

Полученные результаты позволяют утверждать, что нет основания опровергать эту гипотезу. В конце описываются некоторые случаи применения цепных счетчиков, а в частности генератор псевдослучайного шума.

Niezawodność przełączników wieloprzerwowych

JANUSZ MIGDAŁSKI (WARSZAWA)

Instytut Techniczny Wojsk Lotniczych

Otrzymano 26.1.1971

Stykowe przełączniki elektryczne, nazwane w pracy *przełącznikami przerwowymi*, należą do podstawowych a zarazem najbardziej zawodnych elementów logicznych budowanych obecnie systemów informacyjnych i układów automatyki przemysłowej.

W pracy uzasadniono celowość budowy przełączników wieloprzerwowych oraz podano metodę obliczania ich niezawodności dla praktycznie dowolnej struktury połączeń elementów przełączających. Cechą charakterystyczną omówionej metody jest to, że umożliwia ona również przeprowadzenie analizy i syntezy niezawodnościowej przełączników wieloprzerwowych zbudowanych z elementów o *uszkodzeniach stochastycznie zależnych*. Dla potrzeb oceny skuteczności budowy przełączników wieloprzerwowych w miejsce przełączników prostszych, posłużono się pojęciem *globalnej i lokalnej efektywności rozbudowy* przełącznika. W wyniku uwzględnienia w rozważaniach niezawodności połączeń elektrycznych wprowadzono pojęcie *niezawodności lokalnej* oraz *niezawodności globalnej* przełącznika, co pozwoliło na dokonanie oszacowania wielkości błędu popełnianego zwykle wskutek arbitralnego pominięcia w rozważaniach określonego rodzaju elementów.

Rozważania teoretyczne podane w pracy zilustrowano odpowiednimi przykładami.

1. WSTĘP

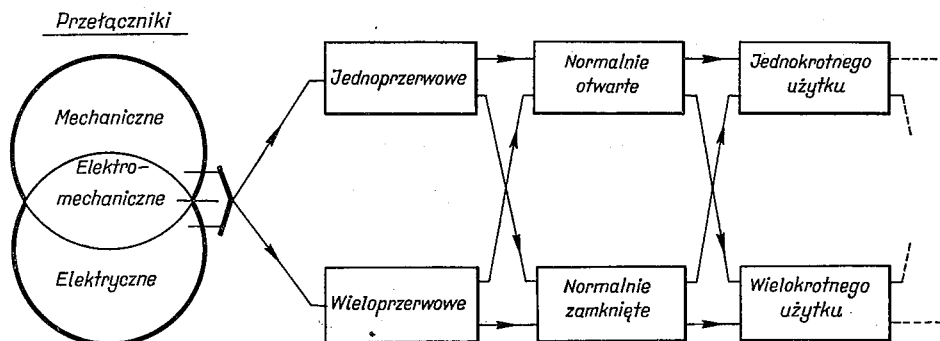
Przełączniki elektryczne, omawiane obszernie w pracach: [1, 2, 5, 11, 12, 13, 17, 21, 24, 38, 41], należą do specyficznej grupy przyrządów elektrycznych przeznaczonych do wielokrotnego przełączania, tj. cyklicznego zamykania i otwierania, obwodów elektrycznych.

Ze względu na swoje przeznaczenie są one szeroko stosowane w układach zbierania, gromadzenia i przetwarzania danych [17, 21, 41, 46, 55] oraz w układach automatyki i telemechaniki [11, 12, 24, 27, 54, 57, 59]. W zależności od liczby stykowych elementów przełączających, użytych do budowy przełącznika, rozróżnia się przełączniki jedno-, dwu- i wieloprzerwowe.

Na rys. 1 podano klasyfikację przełączników przydatną w badaniach niezawodności.

Celowość oraz koncepcję budowy przełączników wieloprzerwowych podali w roku 1956 E. Moore i C. Shannon, w klasycznej już dzisiaj pracy „Reliable Circuits Using Less Reliable Relays” [42]. Autorzy [42] zamiast terminu „przełącznik wieloprzerwowy” używali równoważnego pojęcia „sieć przełączająca”. Wykazali oni teoretycznie, że stosując dostateczną liczbę elementów przełączających można zbudować przełącznik wieloprzerwowy,

równoważny w działaniu prostemu przełącznikowi jednoprzerwowemu, którego niezawodność załączenia bądź też niezawodność odłączenia będzie dowolnie duża, bez względu na niezawodność elementów przełączających użytych do jego budowy.



Rys. 1. Klasyfikacja przełączników przydatna w badaniach niezawodności

Chociaż od ukazania się pracy [42] minęło z górą 15 lat, problem niezawodności przełączników wieloprzewodowych, z uwagi na swoje istotne znaczenie dla praktyki inżynierskiej, jest ciągle podejmowany i rozszerzany na co wskazują prace: [1, 11, 13, 14, 17, 21, 23, 24, 27, 38, 46, 47, 49, 51, 52, 53, 55, 59, 62, 64]. W Polsce, w ciągu ostatnich dziesięciu lat, problem niezawodności przełączników i układów przełączających był wielokrotnie podejmowany, zaś osiągnięte w tym okresie wyniki podano w pracach: [3, 32, 34, 35, 37, 38, 40, 49, 51, 61, 62, 63, 64]. Pełne zestawienie opracowań w tym zakresie podano w pracy [39], natomiast ich syntetyczną charakterystykę omówiono wyczerpująco w pracy [50].

W prezentowanej pracy podano oryginalną metodę wyznaczania podstawowego wskaźnika niezawodnościowego przełączników wieloprzewodowych o uszkodzeniach stochastycznie zależnych, tzn. metodę wyznaczania prawdopodobieństwa poprawnej pracy przełączników wieloprzewodowych zbudowanych między innymi z elementów o uszkodzeniach stochastycznie zależnych. Rozważania teoretyczne podane w pracy, zilustrowano konkretnymi przykładami praktycznymi.

2. OGÓLNE SFORMUŁOWANIE ZAKRESU PRACY

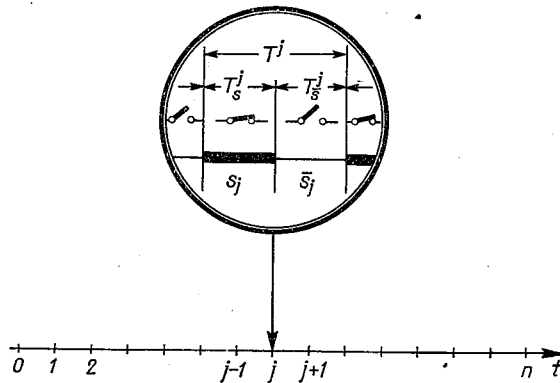
Przedmiotem pracy jest metoda wyznaczania niezawodności chwilowej przełączników wieloprzewodowych, z uwzględnieniem niezawodności ich połączeń elektrycznych [40]. Przez niezawodność $R_j^{(k)}$ chwilową przełącznika k -przerwowego rozumie się niezawodność, jaką rozważany przełącznik k -przerwowo posiada w j -tym takcie (cyklu) pracy.

Zgodnie z rys. 2, na którym pokazano poglądowo poprawne działanie przełącznika w j -tym takcie pracy, pojedynczy takt (cykl) pracy przełącznika mierzy się czasem T^j , jaki upłynął od chwili pojawienia się sygnału pobudzającego S_j do chwili pojawienia się sygnału pobudzającego S_{j+1} . Przyjmuje się, że znając niezawodności chwilowe przełącznika możemy wyznaczyć jego niezawodność dla n kolejnych taktów (cykli) pracy.

Prezentowana metoda obliczania niezawodności przełącznika wieloprzerwowego, w odróżnieniu od metod proponowanych w pracach [11, 23 oraz 52], pozwala na wyznaczenie niezawodności przełącznika o bardzo złożonej strukturze połączeń elementów przełączających, bez konieczności dokonywania uproszczeń znamiennych dla prac [11, 23] oraz [52]. W pracy wykazano, że niezawodność $R^{(k)}$ przełącznika k -przerwowego jest scharakteryzowana jednoznacznie dwoma parametrami $\langle Q_p^{(k)}, Q_z^{(k)} \rangle$, tzn. że zachodzi relacja wynikania:

$$\langle Q_p^{(k)}, Q_z^{(k)} \rangle \Rightarrow R^{(k)},$$

gdzie: $Q_p^{(k)}$ jest prawdopodobieństwem utraty własności przełączania przez przełącznik k -przerwowy na skutek wystąpienia przerwy, natomiast $Q_z^{(k)}$ jest prawdopodobieństwem utraty własności przełączania przez przełącznik k -przerwowy na skutek wystąpienia zwarcia.



Rys. 2. Ilustracja graficzna poprawnego działania przełącznika w j -tym takcie (cyklu) pracy

W odróżnieniu od dotychczasowych opracowań z tego zakresu [1, 13, 17, 23, 42, 52, 53, 62, 64], w pracy niniejszej uwzględniono w rozważaniach również niezawodność połączeń elektrycznych przełącznika, tzn. niezawodność przewodów łączących oraz niezawodność punktów lutowniczych. W wyniku takiego rozszerzenia problemu stwierdzono, że przebieg oraz wynik ostateczny analizy i syntezy niezawodnościowej przełącznika wieloprzerwowego różni się zasadniczo od wyników uzyskiwanych w przypadku idealizacji jego połączeń elektrycznych.

Ponadto stwierdzono, że do wyznaczenia niezawodności przełącznika wieloprzerwowego, z uwzględnieniem niezawodności jego połączeń elektrycznych, potrzebny jest między innymi schemat montażowy przełącznika. Wynika to stąd, że danemu schematowi ideowemu przełącznika może odpowiadać wiele różnych schematów montażowych.

3. POPRAWNE DZIAŁANIE PRZEŁĄCZNIKA

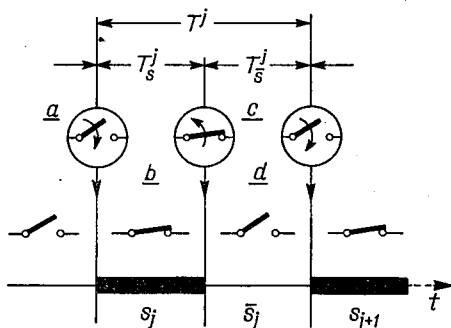
Pojęcie poprawnego działania, rozumiane jako bezbłędne (bezawaryjne) spełnianie wyznaczonych uprzednio zadań, należy do jednej z podstawowych w teorii i technice niezawodności.

W odniesieniu do przełączników elektrycznych przyjmuje się, że przełącznik działa poprawnie tak długo, jak długo zachowuje posiadaną własność przełączania. W dalszych

rozważaniach przełącznikiem będziemy nazywać przyrząd przeznaczony do cyklicznego przełączania, tzn. zamykania i otwierania, obwodu elektrycznego.

Według PN-63/T-80201 *Przełączniki. Wymagania i badania techniczne* — przełącznik jest to łącznik przeznaczony do wykonywania zmian we wzajemnych połączeniach obwodów elektrycznych.

Przełącznik zachowujący własność przełączania charakteryzuje się tym, że w każdym cyklu (tackie) pracy jego obwód jest na czas pobudzenia (sygnału pobudzającego) zamknięty, natomiast na czas zaniku pobudzenia jego obwód pozostaje otwarty. Uwzględniając stany przejściowe przełącznika [41, 49, 51] jego proces przełączania, w dowolnie wybranym j -tym tackie pracy, możemy przedstawić graficznie w sposób jak to pokazano na rys. 3.



Rys. 3. Ilustracja graficzna poprawnego działania przełącznika w j -tym tackie pracy z uwzględnieniem jego stanów przejściowych. Oznaczenia: T_s^j — czas trwania sygnału pobudzającego S_j w j -tym tackie pracy; $T_{\bar{s}}^j$ — czas zaniku sygnału pobudzającego S_j w j -tym tackie pracy; T^j — czas trwania j -tego cyklu (taktu) pracy przełącznika

Zgodnie z rys. 3 proces przełączania poprawnie działającego przełącznika składa się z następujących etapów:

- procesu zamykania otwartego uprzednio przełącznika,
- etapu, w którym przełącznik pozostaje w stanie zamkniętym przez czas T_s^j trwania sygnału pobudzającego,
- procesu otwierania przełącznika na skutek zaniku sygnału pobudzającego S_j oraz
- etapu, w którym przełącznik pozostaje w stanie otwartym przez czas $T_{\bar{s}}^j$ zaniku sygnału pobudzającego S_j , tzn. pozostaje otwarty, aż do chwili pojawienia się sygnału pobudzającego S_{j+1} .

Podany powyżej opis działania przełącznika, odniesiony do pojedynczego cyklu (taktu) pracy, będziemy nazywać chwilowym bezawaryjnym działaniem przełącznika.

4. PRZYJĘTY MODEL POWSTAWANIA USZKODZEŃ

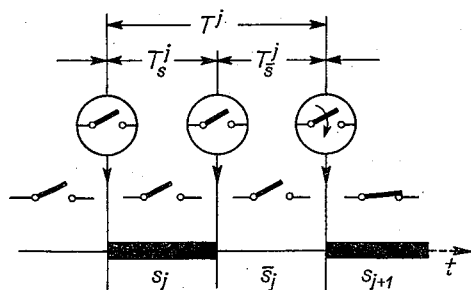
Pojęcie uszkodzenia, obok omówionego powyżej pojęcia poprawnego (bezawaryjnego) działania, jest drugim podstawowym pojęciem teorii i techniki niezawodności. Z pojęciem uszkodzenia związane jest nierozdzielnie pojęcie wadliwego działania oraz pojęcie awaryjności.

Zgodnie z tym co powiedziano w punkcie 3, przełącznik przestaje działać poprawnie z chwilą kiedy utraci posiadaną własność przełączania. W zależności od charakteru utraty własności przełączania przez przełącznik można wyróżnić:

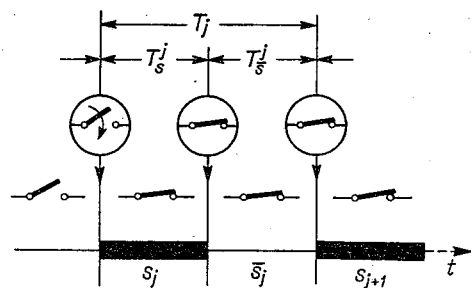
- chwilową utratę własności przełączania, kiedy przełącznik zadziała wadliwie jedynie w pojedynczym takcie (cyklu) pracy,
- czasową utratę własności przełączania, kiedy przełącznik zadziała wadliwie w kilku kolejnych taktach (cyklach) pracy oraz
- trwałą utratę własności przełączania, kiedy przełącznik traci posiadaną własność przełączania w sposób nieodwracalny.

W pracy rozważa się jedynie zagadnienie chwilowej utraty własności przełączania w odniesieniu do przełączników wieloprzerwowych wykonanych z dwóch rodzajów elementów, a mianowicie: elementów przełączających (np. zestyków magnetycznych) oraz elementów elektroprzewodzących, tzn. przewodów łączących i punktów lutowniczych. Przyjmuje się, że utrata własności przełączania przełącznika może nastąpić nie tylko z winy jego elementów przełączających, lecz również z winy jego elementów elektroprzewodzących.

Chwilowa utrata własności przełączania (lub inaczej chwilowe niezadziałanie przełącznika) powstała z winy elementów przełączających objawia się w ten sposób, że przełącznik w j -tym takcie pracy pozostaje przez czas T^j otwarty pomimo pojawienia się sygnału pobudzającego S_j , bądź też pozostaje przez czas T^j zamknięty pomimo zaniku (zdjęcia) przyłożonego uprzednio sygnału pobudzającego S_j . W pierwszym przypadku (rys. 4) przełącznik traci w j -tym takcie (cyklu) pracy posiadaną własność przełączania w wyniku



Rys. 4. Ilustracja graficzna chwilowej utraty własności przełączania przełącznika w j -tym takcie pracy, powstała w wyniku „przerwy” jego elementów przełączających



Rys. 5. Ilustracja graficzna chwilowej utraty własności przełączania przełącznika w j -tym takcie pracy, powstała w wyniku „zwarcia” jego elementów przełączających

„przerwy” jego elementów przełączających, natomiast w drugim przypadku (rys. 5) przełącznik traci w j -tym takcie pracy posiadaną własność przełączania w wyniku „zwarcia” jego elementów przełączających.

W pracy przyjmuje się, że chwilowa utrata własności przełączania przez przełącznik, powstała w wyniku „zwarcia” lub „przerwy” elementów przełączających, jest w rozważanym takcie pracy zupełna. Oznacza to, że chwilowe niezadziałanie przełącznika, powstałe w wyniku „zwarcia” lub „przerwy” elementów przełączających, rozpoczyna się w początkowej fazie przełączania i trwa przez cały takt (cykl) pracy przełącznika, tzn. trwa przez

czas T^j . Z danych literaturowych [32] wynika, że analogiczny model powstawania uszkodzeń przyjmuje się również przy projektowaniu i budowie aparatury do badania niezawodności i trwałości wszelkiego rodzaju podzespołów stykowych.

Przełącznik w j -tym takcie pracy może również utracić posiadaną własność przełączania w wyniku wystąpienia przerwy jego elementów elektroprzewodzących (przewodów łączących i punktów lutowniczych). Objawia się to w ten sposób, że przełącznik mimo poprawnego działania jego elementów przełączających wykazuje w rozważanym takcie pracy uszkodzenie w postaci "przerwy".

Z badań laboratoryjnych i eksploatacyjnych [10, 12, 40, 68] prowadzonych w różnych ośrodkach naukowo-badawczych wynika, że elementy elektroprzewodzące znacznie obniżają niezawodność przełączników elektrycznych. Analogicznie, jak dla elementów przełączających, uszkodzenia elementów elektroprzewodzących mogą mieć charakter uszkodzeń chwilowych, czasowych lub trwałych.

5. POJĘCIE NIEZAWODNOŚCI GLOBALNEJ I NIEZAWODNOŚCI LOKALNEJ PRZEŁĄCZNIKA

Układy elektryczne, nawet najprostsze, zbudowane są zazwyczaj z wielu rodzajów elementów. Wyznaczając niezawodność R układu, definiowaną najczęściej [18, 19, 20, 25, 30, 59] jako prawdopodobieństwo poprawnej pracy układu w określonych warunkach i w określonym czasie eksploatacji, chcemy niejednokrotnie wiedzieć jak dany rodzaj elementów wpływa na niezawodność całego układu. W związku z tym, w dalszych rozważaniach będziemy rozróżniać *niezawodność globalną* [36] oraz *niezawodność lokalną* [36] układu. Traktując przełącznik jako układ złożony będziemy odpowiednio rozróżniać niezawodność globalną oraz niezawodność lokalną przełącznika. Warto w tym miejscu przypomnieć, że przez układ w teorii niezawodności rozumie się każdy obiekt o wyróżnionej strukturze niezawodnościowej.

Przez *niezawodność globalną przełącznika* rozumie się w pracy niezawodność, jaką rozważany przełącznik posiada ze względu na wszystkie elementy składowe, natomiast przez *niezawodność lokalną przełącznika* rozumie się jego niezawodność obliczoną ze względu na jeden ściśle określony rodzaj elementów, np. ze względu na elementy elektroprzewodzące przełącznika. Wprowadzone powyżej pojęcia zostaną omówione obszerniej w dalszej części pracy.

6. OCENA BŁĘDU POWSTAJĄCEGO PRZY WYZNACZANIU NIEZAWODNOŚCI GLOBALNEJ PRZEŁĄCZNIKA

Zarówno z teorii, jak i z praktyki inżynierskiej wiadomo, że niezawodność globalna układu zależy od niezawodności wszystkich jego elementów. Oznacza to, że pomijanie jakiegось elementu bądź też całej grupy elementów w trakcie analizy lub syntezy niezawodnościowej układu jest niedopuszczalne. Często jednakże, ze względu na brak wiarygodnych danych o niezawodności stosowanych w układzie elementów lub też z innych względów, określony rodzaj elementów analizowanego układu zostaje całkowicie pominięty w rozważaniach. Oczywiście postępowanie takie, chociaż nieraz niezbędne w rozważa-

niach technicznych, prowadzi zwykle do błędu w ocenie rzeczywistej niezawodności globalnej układu.

W pracy dla uproszczenia rozważań zakłada się, że analizowane przełączniki wykonywane są jedynie z dwóch rodzajów elementów, a mianowicie:

a) elementów przełączających (np. zestyków magnetycznych), oraz

b) elementów elektroprowadzących (np. przewodów łączących i punktów lutowniczych).

Warto w tym miejscu podkreślić, że w dotychczasowych pracach poświęconych niezawodności przełączników i układów przełączających zwykle pomijano w rozważaniach zagadnienie niezawodności elementów elektroprowadzących, uważając je za praktycznie niezawodne. W związku z tym, otrzymywane wyniki obliczeń różnych wskaźników niezawodnościowych analizowanych układów obarczone są zazwyczaj znacznymi błędami. Do oceny wartości liczbowej błędu względnego δR_G , jaki możemy popełnić w trakcie wyznaczania niezawodności globalnej przełącznika w przypadku pomijania w rozważaniach niezawodności jego elementów elektroprowadzących, posłużymy się następującym wyrażeniem:

$$\delta R_G = \frac{R_L - R_G}{R_G}, \quad (1)$$

gdzie

$$0 \leq R_L \leq 1, \quad (2)$$

natomiast:

$$0 \leq R_G \leq R_L \leq 1. \quad (3)$$

W wyrażeniu (1) R_L jest niezawodnością lokalną przełącznika obliczoną tylko ze względu na jego elementy przełączające, natomiast R_G jest niezawodnością globalną przełącznika.

Oznaczając przez R_l niezawodność lokalną przełącznika obliczoną tylko ze względu na jego elementy elektroprowadzące oraz przyjmując, że uszkodzenia obu rodzajów elementów przełącznika są wzajemnie niezależne, co istotnie znajduje swoje potwierdzenie w praktyce, możemy napisać:

$$R_G = R_L R_l \quad (4)$$

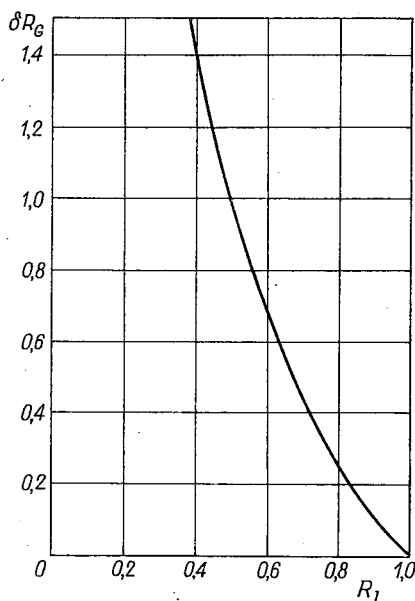
oraz

$$\delta R_G = \frac{1 - R_l}{R_l}. \quad (5)$$

Wyrażeniu (5) przyporządkowano wykres, przedstawiony na rys. 6, z którego widać, że wartość błędu względnego δR_G rośnie gwałtownie wraz ze spadkiem niezawodności R_l lokalnej przełącznika.

Ze względu na to, że $0 \leq R_l \leq 1$, błąd względny δR_G , powstający przy wyznaczaniu niezawodności R_G globalnej przełącznika w przypadku pomijania niezawodności jego elementów elektroprowadzących, może przyjmować wartości z przedziału:

$$0 \leq R_G(R_l) \leq \infty. \quad (6)$$



Rys. 6. Wykres błędu względnego δR_G według zależności (5)

Jak łatwo się przekonać błąd względny $\delta R_G(R_L)$, będący funkcją R_L , wynosi $\delta R_G(R_L) = 0$ jedynie dla $R_L = 1$. W miarę jak wartość R_L maleje, wartość błędu $\delta R_G(R_L)$ szybko wzrasta i na przykład dla $R_L = 0,5$ wynosi już 100%.

7. NIEZAWODNOŚĆ R_L LOKALNA PRZEŁĄCZNIKA

Zgodnie z opisem poprawnej pracy przełącznika podanym w punkcie 3 oraz omówionym w punkcie 4 modelem powstawania uszkodzeń, każdy z elementów przełączających przełącznika wieloprzerwowego może znaleźć się, w dowolnie wybranym takcie (cyklu) pracy, w jednym z trzech wzajemnie wykluczających się stanów:

- w stanie poprawnej pracy, kiedy w rozważanym takcie pracy zachowuje posiadaną własność przełączania,
- w stanie przerwy, kiedy w rozważanym takcie pracy traci posiadaną własność przełączania w wyniku przerwy, oraz
- w stanie zwarcia, kiedy w rozważanym takcie pracy traci posiadaną własność przełączania w wyniku zwarcia.

Oznacza to w konsekwencji, że również przełącznik wieloprzerwowy, ze względu na swoje elementy przełączające, może w dowolnie wybranym takcie pracy znaleźć się w którymś z wyżej wymienionych stanów.

W celu określenia lokalnej niezawodności R_L chwilowej przełącznika wieloprzerwowego przyjmuje się następujące oznaczenia zdarzeń i ich prawdopodobieństw:

A — niech oznacza zdarzenie, że przełącznik wieloprzerwowy zachowa¹⁾ w rozważanym takcie pracy posiadaną własność przełączania (znajdzie się w stanie poprawnej pracy), natomiast

A_i — niech oznacza zdarzenie, że i -ty element przełączający przełącznika wieloprzerwowego zachowa w rozważanym takcie pracy posiadaną własność przełączania (znajdzie się w stanie poprawnej pracy).

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A , tzn. wyrażenie:

$$0 \leq R_L = P(A) \leq 1 \quad (7)$$

będziemy nazywać *niezawodnością lokalną przełącznika wieloprzerwowego* ze względu na jego elementy przełączające. Odpowiednio prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A_i , tzn. wyrażenie:

$$0 \leq p_i = P(A_i) \leq 1 \quad (8)$$

będziemy nazywać *niezawodnością chwilową i -tego elementu przełączającego*.

Wprowadźmy dalsze oznaczenia zdarzeń i ich prawdopodobieństw, a mianowicie:

B — niech oznacza zdarzenie, że przełącznik wieloprzerwowy utraci w rozważanym takcie pracy posiadaną własność przełączania w wyniku przerwy (znajdzie się w stanie przerwy),

B_i — niech oznacza zdarzenie, że i -ty element przełączający przełącznika wieloprzerwowego utraci w rozważanym takcie pracy posiadaną własność przełączania w wyniku przerwy (znajdzie się w stanie przerwy),

C — niech oznacza zdarzenie, że przełącznik wieloprzerwowy utraci w rozważanym takcie pracy posiadaną własność przełączania w wyniku zwarcia (znajdzie się w stanie zwarcia),

C_i — niech oznacza zdarzenie, że i -ty element przełączający przełącznika wieloprzerwowego utraci w rozważanym takcie pracy posiadaną własność przełączania w wyniku zwarcia (znajdzie się w stanie zwarcia).

Fakt, że przełącznik wieloprzerwowy może w rozważanym takcie pracy utracić posiadaną własność przełączania w wyniku przerwy (zdarzenie B) bądź też w wyniku zwarcia (zdarzenie C) jego elementów przełączających będziemy zapisywać wzorem:

$$\bar{A} = B \cup C, \quad (9)$$

gdzie $\bar{A}$ (nie A) oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A .

Analogicznie fakt, że i -ty element przełączający przełącznika wieloprzerwowego może w rozważanym takcie pracy utracić posiadaną własność przełączania w wyniku przerwy (zdarzenie B_i) bądź też w wyniku zwarcia (zdarzenie C_i) będziemy zapisywać wzorem:

$$\bar{A}_i = B_i \cup C_i, \quad (10)$$

gdzie $\bar{A}_i$ (nie A_i) oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A_i .

Prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia B , tzn. wyrażenie:

$$0 \leq Q_p = P(B) \leq 1 \quad (11)$$

¹⁾ Oczywiście jedynie ze względu na swoje elementy przełączające.

będziemy nazywać prawdopodobieństwem chwilowej utraty własności przełączania przez przełącznik wieloprzerwowy na skutek przerwy jego elementów przełączających, natomiast prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia B_i , tzn. wyrażenie:

$$0 \leq q_{pi} = P(B_i) \leq 1 \quad (12)$$

będziemy nazywać prawdopodobieństwem chwilowej utraty własności przełączania przez i -ty element przełączający na skutek wystąpienia w nim przerwy.

W sposób analogiczny prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia C , tzn. wyrażenie:

$$0 \leq Q_z = P(C) \leq 1 \quad (13)$$

będziemy nazywać prawdopodobieństwem chwilowej utraty własności przełączania przez przełącznik wieloprzerwowy na skutek zwarcia jego elementów przełączających, natomiast prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia C_i , tzn. wyrażenie:

$$0 \leq q_{zi} = P(C_i) \leq 1 \quad (14)$$

będziemy nazywać prawdopodobieństwem chwilowej utraty własności przełączania przez i -ty element przełączający na skutek wystąpienia w nim zwarcia.

W przypadku kiedy nie interesuje nas przyczyna, w wyniku której nastąpi utrata własności przełączania przełącznika, obliczamy jedynie prawdopodobieństwo zdarzenia $\bar{A}$ (nie A), tzn. wyrażenie:

$$0 \leq Q = P(\bar{A}) \leq 1. \quad (15)$$

Wykorzystując zależność (9), wyrażenie (15) możemy przedstawić w postaci wyrażenia rozwiniętego:

$$Q = P(\bar{A}) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) = Q_p + Q_z, \quad (16)$$

gdzie

$$0 \leq Q = Q_p + Q_z \leq 1 \quad (17)$$

jest sumarycznym prawdopodobieństwem utraty własności przełączania przez przełącznik wieloprzerwowy. Wynika to stąd, że zdarzenia B oraz C , zgodnie z przyjętym w punkcie 4 modelem powstawania uszkodzeń, wykluczają się wzajemnie.

W odniesieniu do i -tego elementu przełączającego sumaryczne prawdopodobieństwo utraty własności przełączania możemy wyznaczyć ze wzoru:

$$q_i = P(\bar{A}_i) = P(B_i \cup C_i) = P(B_i) + P(C_i) = q_{pi} + q_{zi}, \quad (18)$$

gdzie

$$0 \leq q_i = q_{pi} + q_{zi} \leq 1. \quad (19)$$

Wykorzystując zależności (11), (13) oraz (17) niezawodność lokalną przełącznika wieloprzerwowego, ze względu na jego elementy przełączające, możemy wyznaczyć ze wzoru:

$$R_L(Q_p, Q_z) = 1 - Q = 1 - (Q_p + Q_z). \quad (20)$$

Odpowiednio niezawodność chwilową i -tego elementu przełączającego można wyrazić wzorem:

$$p_i = 1 - q_i = 1 - (q_{pi} + q_{zi}). \quad (21)$$

Z zależności (20) wynika, że niezawodność lokalną przełącznika wieloprzerwowego można scharakteryzować parametrem R_L lub też parametrami Q_p oraz Q_z . Ponieważ jednak parametr R_L nie dostarcza użytkownikowi żadnych informacji co do rodzaju uszkodzeń przełącznika, jest on mało przydatny dla celów praktyki inżynierskiej. W związku z tym, niezawodność R_L lokalną przełącznika wieloprzerwowego będziemy charakteryzować parą liczb Q_p oraz Q_z i zapisywać w postaci:

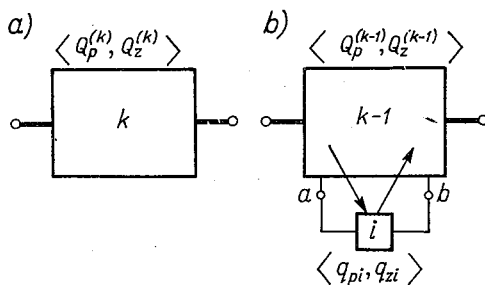
$$\langle Q_p, Q_z \rangle. \quad (22)$$

Z tych samych względów również niezawodność i -tego elementu przełączającego będziemy zapisywać w postaci:

$$\langle q_{pi}, q_{zi} \rangle. \quad (23)$$

8. METODA WYZNACZANIA NIEZAWODNOŚCI R LOKALNEJ PRZEŁĄCZNIKÓW WIELOPRZERWOWYCH

Założmy, że dany jest przełącznik k -przerwowy, jak na rys. 7, tzn. przełącznik wieloprzerwowy zbudowany z $k = 1, 2, \dots, n$ elementów przełączających, dla którego niezawodności poszczególnych elementów przełączających są znane i scharakteryzowane



Rys. 7. Umowne przedstawienie przełącznika k -przerwowego: a) bez wyodrębnionego elementu przełączającego, b) z wyodrębnieniem jego i -tego elementu przełączającego

jednoznacznie parametrami $\langle q_{pk}, q_{zk} \rangle$. Znając strukturę rozważanego przełącznika k -przerwowego należy wyznaczyć jego niezawodność $R_L^{(k)}$ lokalną, scharakteryzowaną jednoznacznie parametrami $\langle Q_p^{(k)}, Q_z^{(k)} \rangle$, tzn. należy wyznaczyć wartości liczbowe parametrów $Q_p^{(k)}$ oraz $Q_z^{(k)}$ jako funkcję wartości liczbowych przyjmowanych przez parametry q_{pk} oraz q_{zk} .

Dla rozwiązania postawionego problemu skorzystajmy z następujących tożsamości:

$$B = (B_i \cup \bar{B}_i) \cap B = (B_i \cap B) \cup (\bar{B}_i \cap B) \quad (24)$$

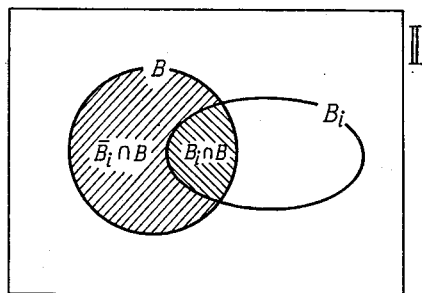
oraz

$$C = (C_i \cup \bar{C}_i) \cap C = (C_i \cap C) \cup (\bar{C}_i \cap C). \quad (25)$$

Zdarzenie $\bar{B}_i$ (nie B_i) oznacza, że i -ty element przełączający przełącznika k -przerwowego z rys. 7 nie traci w rozważanym takcie pracy posiadanej własności przełączania w wyniku przerwy i jest na czas trwania pobudzenia zamknięty.

Odpowiednio zdarzenie $\bar{C}_i$ (nie C_i) oznacza, że i -ty element przełączający przełącznika k -przerwowego z rys. 7 nie traci w rozważanym takcie pracy posiadanej własności przełączania w wyniku zwarcia i jest na czas zaniku pobudzenia otwarty.

Wyrażeniom (24) oraz (25) można nadać odpowiednią interpretację geometryczną w sposób, jak to pokazano na rys. 8.



Rys. 8. Geometryczne przedstawienie tożsamości (24). II — oznacza zdarzenie pewne

Z uwagi na to, że zdarzenia $(B_i \cap B)$ i $(\bar{B}_i \cap B)$ oraz zdarzenia $(C_i \cap C)$ i $(\bar{C}_i \cap C)$ wykluczają się wzajemnie, możemy na podstawie tożsamości (24) oraz (25) napisać następujące wzory:

$$Q_p^{(k)} = P(B) = P(B_i)P(B|B_i) + P(\bar{B}_i)P(B|\bar{B}_i) \quad (26)$$

oraz

$$Q_z^{(k)} = P(C) = P(C_i)P(C|C_i) + P(\bar{C}_i)P(C|\bar{C}_i), \quad (27)$$

gdzie

$$P(\bar{B}_i) = 1 - P(B_i) = 1 - q_{pi}, \quad (28)$$

natomiast:

$$P(\bar{C}_i) = 1 - P(C_i) = 1 - q_{zi}. \quad (29)$$

Przy wyznaczaniu prawdopodobieństw warunkowych $P(B|B_i)$ i $P(B|\bar{B}_i)$ oraz $P(C|C_i)$ i $P(C|\bar{C}_i)$ należy uprzednio przeprowadzić odpowiednie "dekompozycje" struktury przełącznika k -przerwowego w sposób, jak to pokazano poglądowo na rys. 9. Wykonane "dekompozycje" struktury przełącznika wynikają bezpośrednio z treści odpowiednich zdarzeń warunkowych.

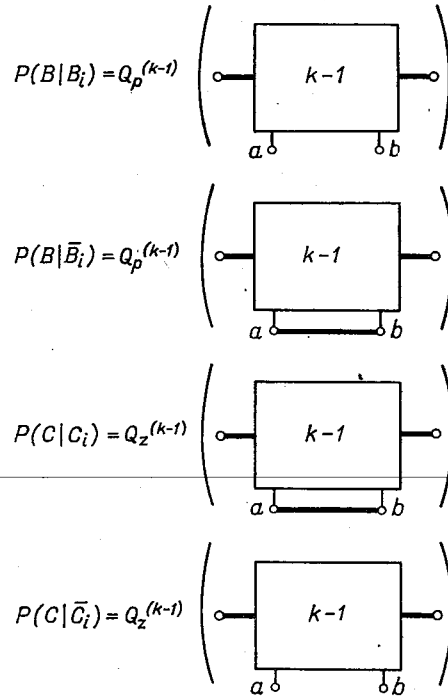
Mając obliczone wartości liczbowe prawdopodobieństw $Q_p^{(k)}$ oraz $Q_z^{(k)}$ możemy bez trudu wyznaczyć niezawodność $R_L^{(k)}$ lokalną przełącznika k -przerwowego ze wzoru:

$$R_L^{(k)}(Q_p^{(k)}, Q_z^{(k)}) = 1 - Q^{(k)} = 1 - (Q_p^{(k)} + Q_z^{(k)}), \quad (30)$$

gdzie

$$0 \leq Q^{(k)} + Q_p^{(k)} + Q_z^{(k)} \leq 1 \quad (31)$$

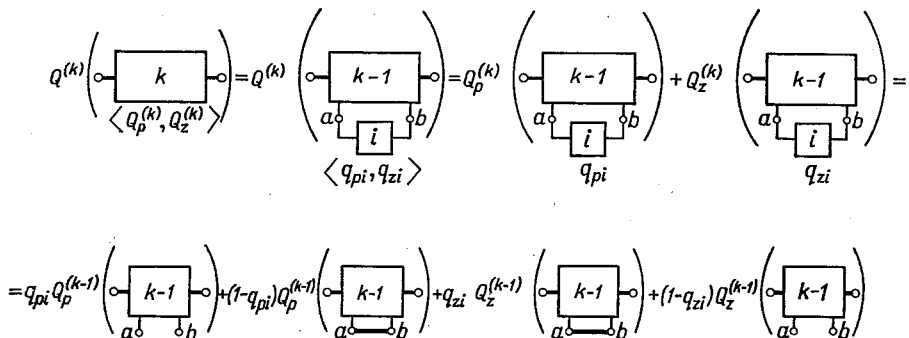
jest sumarycznym prawdopodobieństwem utraty własności przełączania przez przełącznik k -przerwowy.



Rys. 9. Sposób postępowania przy wyznaczaniu prawdopodobieństw warunkowych

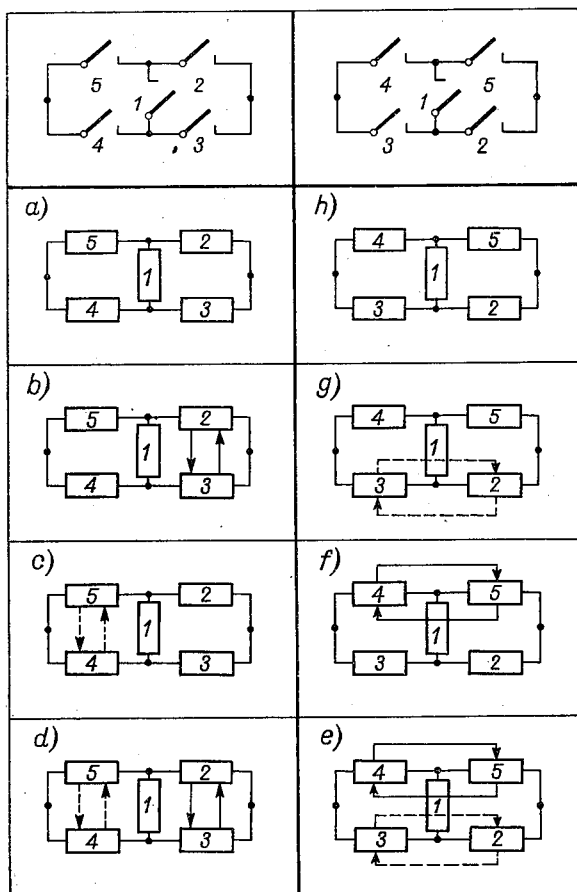
Regułę postępowania przy wyznaczaniu prawdopodobieństwa $Q^{(k)}$ oraz prawdopodobieństw $Q_p^{(k)}$ i $Q_z^{(k)}$ ilustruje w sposób poglądowy rys. 10.

Podaną powyżej metodą można wyznaczyć niezawodność $R_L^{(k)}$ lokalną dowolnie złożonego przełącznika k -przerwowego. W tym celu rozważymy odpowiedni przykład.


 Rys. 10. Sposób postępowania przy wyznaczaniu prawdopodobieństwa $Q^{(k)}$ oraz prawdopodobieństw $Q_p^{(k)}$ i $Q_z^{(k)}$ przełącznika k -przerwowego

9. PRZYKŁAD WYZNACZANIA NIEZAWODNOŚCI R_L LOKALNEJ PRZELĄCZNIKÓW WIELOPRZERWOWYCH

Praktyczną przydatność omówionej powyżej metody zaprezentujemy na przykładzie wyznaczania niezawodności lokalnej przełączników przedstawionych schematycznie na rys. 11. Cechą charakterystyczną tych przełączników jest to, że uszkodzenia ich elementów przełączających mogą być również uszkodzeniami stochastycznie zależnymi.



Rys. 11. Przykłady przełączników o uszkodzeniach stochastycznie zależnych

Ażeby móc przeprowadzić niezbędne porównania otrzymanych wyników oraz wyciągnąć odpowiednie wnioski, wszystkie przełączniki połączone jednakowo. W odpowiednich schematach połączeń rozpatrywanych przełączników wprowadzono następujące oznaczenia: strzałką z linią ciągłą zaznaczono istnienie stochastycznej zależności uszkodzeń pomiędzy elementami ze względu na "zwarcia", natomiast strzałką z linią przerywaną zaznaczono istnienie stochastycznej zależności uszkodzeń pomiędzy elementami ze względu na "przerwy". Grot strzałki wskazuje kierunek oddziaływania uszkodzonego elementu na pozostałe elementy przełącznika (układu). W ten sposób, zgodnie z rys. 11,

przełączniki a) oraz h) nie posiadają elementów o uszkodzeniach stochastycznie zależnych, przełączniki b), c), f) oraz g) zawierają tylko 40% elementów o uszkodzeniach stochastycznie zależnych, natomiast przełączniki d) i e) zbudowane są w 80% z elementów o uszkodzeniach stochastycznie zależnych.

Dla ogólności rozważań przyjmuje się początkowo, że niezawodności poszczególnych elementów przełączających są różne. Dopiero później, w celu wyciągnięcia odpowiednich wniosków i dokonania porównań przyjmuje się, że rozpatrywane przełączniki zbudowane są z elementów niezawodnościowo jednakowych, tzn. elementów, dla których spełnione są następujące warunki: $q_{pi} = q_p$, natomiast $q_{zi} = q_z$, gdzie $i = 1, 2, 3, 4, 5$. W rozważaniach zakłada się, że sposób wyznaczania prawdopodobieństw Q_p oraz Q_z dla układów szeregowo-równoległych jest znany, również dla przypadku, kiedy elementy posiadają różne niezawodności.

Po podaniu tych niezbędnych wyjaśnień oraz wprowadzeniu koniecznych oznaczeń możemy obecnie przystąpić do wyznaczania niezawodności lokalnych $R_{La}, R_{Lb}, \dots, R_{Lg}, R_{Lh}$ przełączników przedstawionych na rys. 11. W tym celu zostaną wyznaczone kolejno wartości parametrów: $\langle Q_{pa}, Q_{za} \rangle, \langle Q_{pb}, Q_{zb} \rangle, \dots, \langle Q_{pg}, Q_{zg} \rangle$ oraz $\langle Q_{ph}, Q_{zh} \rangle$, które w sposób jednoznaczny charakteryzują niezawodności lokalne rozważanych przełączników.

Niezawodność R_{La} przełącznika według rys. 11a²⁾

Stosując wzór (26) oraz przeprowadzając dekompozycję struktury przełącznika względem elementu 1 mamy:

$$Q_{pa} = Q_p \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{5} & \boxed{2} \\ \hline \boxed{4} & \boxed{3} \\ \hline \end{array} \right) = q_{p1} Q_p \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{5} & \boxed{2} \\ \hline \boxed{4} & \boxed{3} \\ \hline \end{array} \right) + (1 - q_{p1}) Q_p \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{5} & \boxed{2} \\ \hline \boxed{4} & \boxed{3} \\ \hline \end{array} \right)$$

oraz

$$Q_p \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{5} & \boxed{2} \\ \hline \boxed{4} & \boxed{3} \\ \hline \end{array} \right) = (q_{p2} + q_{p5} - q_{p2}q_{p5})(q_{p3} + q_{p4} - q_{p3}q_{p4}),$$

$$Q_p \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{5} & \boxed{2} \\ \hline \boxed{4} & \boxed{3} \\ \hline \end{array} \right) = q_{p2}q_{p3} + q_{p4}q_{p5} - q_{p2}q_{p3}q_{p4}q_{p5}.$$

W szczególnym przypadku, kiedy $q_{pi} = q_p$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), otrzymujemy:

$$Q_{pa} = Q_{pa}(q_{pi}; i = 1, 2, 3, 4, 5 | q_{pi} = q_p) = 2q_p^2 + 2q_p^3 - 5q_p^4 + 2q_p^5. \quad (32)$$

Stosując następnie wzór (27) oraz przeprowadzając dekompozycję struktury przełącznika względem elementu 1 mamy:

$$Q_{za} = Q_z \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{5} & \boxed{2} \\ \hline \boxed{4} & \boxed{3} \\ \hline \end{array} \right) = q_{z1} Q_z \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{5} & \boxed{2} \\ \hline \boxed{4} & \boxed{3} \\ \hline \end{array} \right) + (1 - q_{z1}) Q_z \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{5} & \boxed{2} \\ \hline \boxed{4} & \boxed{3} \\ \hline \end{array} \right),$$

²⁾ Patrz Dodatek.

oraz

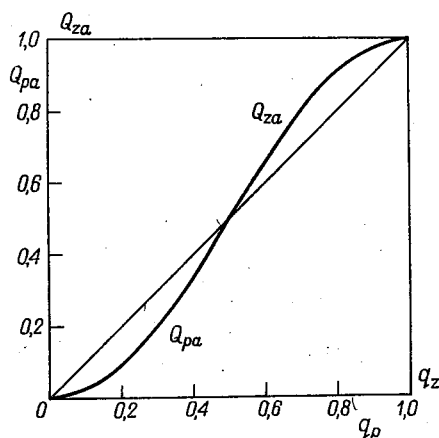
$$Q_z \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{5} & \boxed{2} \\ \hline \boxed{4} & \boxed{3} \\ \hline \end{array} \right) = (q_{z2} + q_{z3} - q_{z2}q_{z3})(q_{z4} + q_{z5} - q_{z4}q_{z5}),$$

$$Q_z \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{5} & \boxed{2} \\ \hline \boxed{4} & \boxed{3} \\ \hline \end{array} \right) = q_{z2}q_{z5} + q_{z3}q_{z4} - q_{z2}q_{z3}q_{z4}q_{z5}.$$

W szczególnym przypadku, kiedy $q_{zi} = q_z$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), otrzymujemy:

$$Q_{za} = Q_{za}(q_{zi}; i = 1, 2, 3, 4, 5 | q_{zi} = q_z) = 2q_z^2 + 2q_z^3 - 5q_z^4 + 2q_z^5. \quad (33)$$

Według zależności (32) oraz (33) wykonano wykresy, które przedstawiono na rys. 12. Otrzymane wykresy będą pomocne dla celów oceny porównawczej rozważanych przełączników.



Rys. 12. Przebiegi funkcji Q_{pa} oraz Q_{za} otrzymane odpowiednio według zależności (32) oraz (33)

Niezawodność R_{Lb} przełącznika według rys. 11b

Z uwagi na to, że rozważany przełącznik, ze względu na uszkodzenia typu "przerwa", jest równoważny przełącznikowi wykonanemu według rys. 11a, możemy bezpośrednio napisać wzór:

$$Q_{pb} = Q_{pb}(q_{pi}; i = 1, 2, 3, 4, 5 | q_{pi} = q_p) = 2q_p^2 + 2q_p^3 - 5q_p^4 + 2q_p^5. \quad (34)$$

Stosując wzór (27) oraz przeprowadzając dekompozycję struktury przełącznika względem elementu 1 mamy:

$$Q_{zb} = Q_z \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{5} & \boxed{2} \\ \hline \boxed{4} & \boxed{3} \\ \hline \end{array} \right) = q_{z1} Q_z \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{5} & \boxed{2} \\ \hline \boxed{4} & \boxed{3} \\ \hline \end{array} \right) + (1 - q_{z1}) Q_z \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{5} & \boxed{2} \\ \hline \boxed{4} & \boxed{3} \\ \hline \end{array} \right)$$

oraz

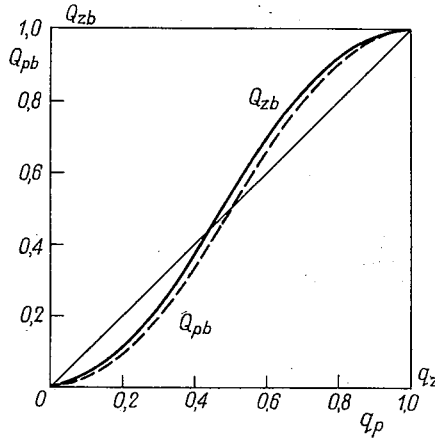
$$Q_z \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{5} & \boxed{2} \\ \hline \boxed{4} & \boxed{3} \\ \hline \end{array} \right) = q_{z2}(q_{z4}=q_{z5}-q_{z4}q_{z5}) + (1-q_{z2})q_{z3}(q_{z4}+q_{z5}-q_{z4}q_{z5}),$$

$$Q_z \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{5} & \boxed{2} \\ \hline \boxed{4} & \boxed{3} \\ \hline \end{array} \right) = q_{z2}(q_{z4}+q_{z5}-q_{z4}q_{z5}) + (1-q_{z2})q_{z3}q_{z4}.$$

W szczególnym przypadku, kiedy $q_{zi} = q_z$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), otrzymujemy:

$$Q_{zb} = Q_{zb}(q_{zi}, i = 1, 2, 3, 4, 5 | q_{zi} = q_z) = 3q_z^2 - q_z^3 - 2q_z^4 + q_z^5. \quad (35)$$

Według zależności (34) oraz (35) wykonano wykresy, które przedstawiono na rys. 13. Z otrzymanych wykresów widać, że przełącznik wykonany według rys. 11b jest niezawod-



Rys. 13. Przebiegi funkcji Q_{pb} oraz Q_{zb} otrzymane odpowiednio według zależności (34) oraz (35)

nościowo gorszy od przełącznika wykonanego według rys. 11a. Oznacza to, że użycie do budowy układu elementów o uszkodzeniach stochastycznie zależnych obniża jego niezawodność.

Niezawodność R_{Lc} przełącznika według rys. 11c

Stosując wzór (26) oraz przeprowadzając dekompozycję struktury przełącznika względem elementu 1 mamy:

$$Q_{pc} = Q_p \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{5} & \boxed{2} \\ \hline \boxed{4} & \boxed{3} \\ \hline \end{array} \right) = q_{p1} Q_p \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{5} & \boxed{2} \\ \hline \boxed{4} & \boxed{3} \\ \hline \end{array} \right) + (1-q_{p1}) Q_p \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{5} & \boxed{2} \\ \hline \boxed{4} & \boxed{3} \\ \hline \end{array} \right)$$

oraz

$$Q_p \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{5} & \boxed{2} \\ \hline \boxed{4} & \boxed{3} \\ \hline \end{array} \right) = q_{p4} + (1-q_{p4})q_{p3}(q_{p2}+q_{p5}-q_{p2}q_{p5}),$$

$$Q_p \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{5} & \boxed{2} \\ \hline \boxed{4} & \boxed{3} \\ \hline \end{array} \right) = q_{p4} + (1-q_{p4})q_{p2}q_{p3}.$$

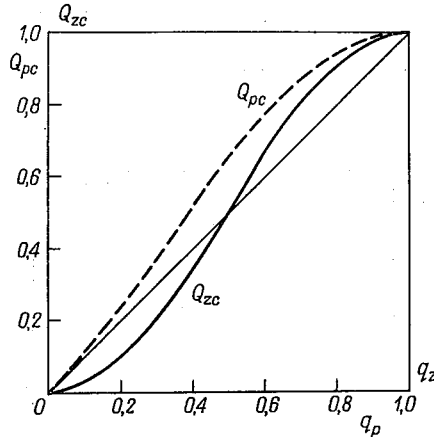
W szczególnym przypadku, kiedy $q_{pi} = q_p$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), otrzymujemy:

$$Q_{pc} = Q_{pc}(q_{pi}; i = 1, 2, 3, 4, 5 | q_{pi} = q_p) = q_p + q_p^2 - 2q_p^4 + q_p^5. \quad (36)$$

Ponieważ rozważany przełącznik jest ze względu na uszkodzenia typu „zwarcia” równoważny przełącznikowi wykonanemu według rys. 11a, możemy napisać bezpośrednio wzór:

$$Q_{zc} = Q_{zc}(q_{zi}; i = 1, 2, 3, 4, 5 | q_{zi} = q_z) = 2q_z^2 + 2q_z^3 - 5q_z^4 + 2q_z^5. \quad (37)$$

Według zależności (36) oraz (37) wykonano wykresy, które przedstawiono na rys. 14.



Rys. 14. Przebiegi funkcji Q_{pc} oraz Q_{zc} otrzymane odpowiednio według zależności (36) oraz (37)

Podobnie, jak poprzednio dla przełącznika według rys. 11b, otrzymaliśmy znaczny spadek niezawodności przełącznika w wyniku użycia do jego budowy elementów o uszkodzeniach stochastycznie zależnych. Przy czym, jak widać z wykonanych wykresów, uszkodzenia typu „przerwa” silniej wpływają na obniżenie się niezawodności przełącznika niż „zwarcia”.

Niezawodność R_{Ld} przełącznika według rys. 11a

Rozważany przełącznik, ze względu na charakter uszkodzeń jego elementów, stanowi niejako „superpozycję” przełączników omówionych poprzednio. Stąd możemy napisać bezpośrednio wzory końcowe:

$$Q_{pd} = Q_{pd}(q_{pi}; i = 1, 2, 3, 4, 5 | q_{pi} = q_p) = q_p + q_p^2 - 2q_p^4 + q_p^5 \quad (38)$$

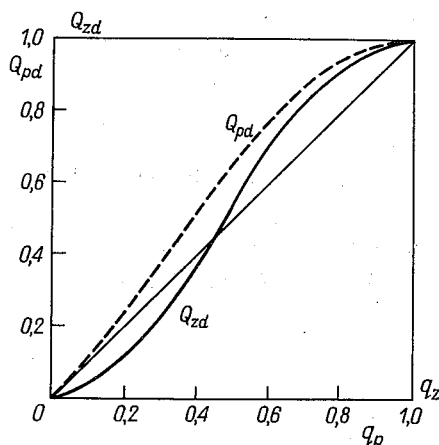
oraz

$$Q_{zd} = Q_{zd}(q_{zi}; i = 1, 2, 3, 4, 5 | q_{zi} = q_z) = 3q_z^2 - q_z^3 - 2q_z^4 + q_z^5. \quad (39)$$

Według zależności (38) oraz (39) wykonano wykresy, które przedstawiono na rys. 15. Porównując otrzymane wykresy widać, że w miarę jak liczba elementów o uszkodzeniach stochastycznie zależnych rośnie, wzrastają również odpowiednie wartości prawdopodobieństw Q_p oraz Q_z , co oznacza, że niezawodność przełącznika systematycznie maleje.

Możliwość liczbowej oceny niezawodności przełącznika o uszkodzeniach stochastycznie zależnych pozwala konstruktorowi na najwłaściwsze (optymalne) projektowanie tego

rodzaju przełączników oraz pozwala wyznaczyć spadek niezawodności tych przełączników w stosunku do ich odpowiedników, zbudowanych z elementów o uszkodzeniach stochastycznie niezależnych. Stanowi to zatem pewien krok na drodze do zniesienia istnie-



Rys. 15. Przebiegi funkcji Q_{pd} oraz Q_{zd} otrzymane odpowiednio według zależności (38) oraz (39)

jących dotychczas ograniczeń teoretycznych w dziedzinie badań niezawodnościowych rozważanej klasy układów technicznych.

Postępując analogicznie, jak dla przełączników wykonanych według rys. 11a, b, c, d, możemy wyznaczyć wartości parametrów $\langle Q_{ph}, Q_{zh} \rangle$, $\langle Q_{pg}, Q_{zg} \rangle$, $\langle Q_{pf}, Q_{zf} \rangle$, oraz $\langle Q_{pe}, Q_{ze} \rangle$ pozostałych przełączników. Jednakże, jeżeli zauważymy, że przełączniki przedstawione na rys. 11h, g, f, e są przełącznikami *strukturalnie dualnymi* względem przełączników 11a, b, c, d, wówczas ich niezawodności lokalne będziemy mogli napisać bezpośrednio z wyrażen (32) ÷ (39), przez zamianę w nich indeksu p na indeks z oraz odpowiednio indeksu z na indeks p .

10. POJĘCIE GLOBALNEJ I LOKALNEJ EFEKTYWNOŚCI ROZBUDOWY PRZEŁĄCZNIKA

Rozbudowę przełącznika jedno- lub wieloprzerwowego wykonuje się w celu zwiększenia jego niezawodności R_G globalnej. Stosownie do wprowadzonych uprzednio pojęć będziemy rozróżniać *rozbudowę lokalną* oraz *rozbudowę globalną* przełącznika. Przez rozbudowę lokalną przełącznika rozumie się w niniejszej pracy rozbudowę, w wyniku której powiększona zostaje liczba elementów tylko jednego rodzaju, np. elementów elektroprowadzących. W przypadku przeciwnym przyjmuje się, że przeprowadzona rozbudowa przełącznika ma charakter rozbudowy globalnej. W praktyce rozbudowa dowolnego układu ma najczęściej charakter rozbudowy globalnej, bowiem przyłączenie do układu określonej liczby elementów jednego rodzaju staje się technicznie wykonalne dopiero wówczas, kiedy zainstalowane zostaną równocześnie inne rodzaje elementów, tzw. „elementy towarzyszące”.

Z rozbudową przełącznika związane jest pojęcie globalnej i lokalnej efektywności jego rozbudowy.

Jako miarę globalnej efektywności rozbudowy [35, 36, 40] przełącznika przyjmuje się następujące wyrażenie:

$$\gamma_G = \frac{R_G^{(k+d)}}{R_G^{(k)}}, \quad (40)$$

w którym: $R_G^{(k)}$ jest niezawodnością globalną przełącznika k -przerwowego, obliczoną przed jego rozbudową, natomiast $R_G^{(k+d)}$ jest niezawodnością globalną przełącznika $(k+d)$ -przerwowego, obliczoną po jego rozbudowie.

Z uwagi na to, że zarówno $R_G^{(k)}$ jak również $R_G^{(k+d)}$ mogą przyjmować wartości z przedziału $[0, 1]$, wartość funkcji γ_G może zmieniać się w granicach:

$$0 \leq \gamma_G \leq \infty. \quad (41)$$

Oczywiście rozbudowa przełącznika k -przerwowego jest sensowna jedynie wówczas, kiedy $R_G^{(k+d)} > R_G^{(k)}$, tzn. wówczas kiedy:

$$\gamma_G > 1. \quad (42)$$

Dla przyjętego w pracy modelu powstawania uszkodzeń wyrażenie (40) można przedstawić w postaci:

$$\gamma_G = \frac{R_G^{(k+d)}}{R_G^{(k)}} = \frac{R_L^{(k+d)}}{R_L^{(k)}} \cdot \frac{R_l^{(k+d)}}{R_l^{(k)}} = \gamma_L \gamma_l, \quad (43)$$

gdzie:

$$\gamma_L = \frac{R_L^{(k+d)}}{R_L^{(k)}}; \quad (0 \leq \gamma_L \leq \infty) \quad (44)$$

jest miarą lokalnej efektywności rozbudowy przełącznika k -przerwowego ze względu na jego elementy przełączające, natomiast:

$$\gamma_l = \frac{R_l^{(k+d)}}{R_l^{(k)}}; \quad (0 \leq \gamma_l \leq \infty) \quad (45)$$

jest miarą lokalnej efektywności rozbudowy przełącznika k -przerwowego ze względu na jego elementy elektroprowadzące.

Z analizy wzoru (43) wynika, że rozbudowa globalna przełącznika może być sensowna nawet wówczas, kiedy prowadzi do zmniejszenia jego niezawodności lokalnej $R_L^{(k)}$ lub $R_l^{(k)}$. Ma to miejsce jedynie w dwóch przypadkach, a mianowicie: a) kiedy $\gamma_l < 1$, natomiast:

$$\gamma_G = \gamma_G(\gamma_L, \gamma_l; \gamma_l < 1) = \gamma_L \gamma_l > 1, \quad (46)$$

oraz b) kiedy $\gamma_L < 1$, natomiast:

$$\gamma_G = \gamma_G(\gamma_L, \gamma_l; \gamma_L < 1) = \gamma_L \gamma_l > 1. \quad (47)$$

W szczególnym przypadku, kiedy:

$$\gamma_G = 1, \quad (48)$$

rozbudowa przełącznika może mieć sens jedynie wówczas, kiedy użytkownikowi przełącznika zależy wyłącznie na zmianie jego niezawodności lokalnych. Odnosi się to wyłącznie do przypadku, kiedy nie można zwiększyć niezawodności globalnej przełącznika.

11. UWAGI O SYNTEZIE NIEZAWODNOŚCIOWEJ PRZEŁĄCZNIKÓW WIELOPRZERWOWYCH

Syntezą niezawodnościową układu będziemy nazywać proces polegający na tworzeniu (projektowaniu) układu o z góry zadanej (wymaganej) niezawodności.

Ze względów czysto praktycznych, syntezę niezawodnościową przełącznika należy rozpocząć od przełącznika najprostszego, tzn. przełącznika jednoprzerwowego. Jeżeli w wyniku obliczeń analitycznych okaże się, że niezawodność $R_G^{(1)}$ globalna przełącznika jednoprzerwowego jest niższa od niezawodności R_W wymaganej:

$$R_G^{(1)} < R_W, \quad (49)$$

wówczas zmuszeni jesteśmy rozważyć możliwość budowy przełącznika dwuprzerwowego. Dysponując dwoma jednakowymi, pod względem niezawodności, elementami przełączającymi możemy, w zależności od sposobu ich połączenia, zbudować dwa niezawodnościowo różne przełączniki dwuprzerwowe, a mianowicie: a) przełącznik (dwuprzerwowy) szeregowy, oraz b) przełącznik (dwuprzerwowy) równoległy. Wyniki analizy i syntezy niezawodnościowej tego rodzaju przełączników podano w pracy [40].

W przypadku kiedy osiągnięty wzrost niezawodności globalnej obu przełączników okaże się niewystarczający, co można zapisać w postaci:

$$\max\{R_{Gs}^{(2)}, R_{Gr}^{(2)}\} < R_W, \quad (50)$$

gdzie: $R_{Gs}^{(2)}$ jest niezawodnością globalną przełącznika szeregowego, natomiast $R_{Gr}^{(2)}$ jest niezawodnością globalną przełącznika równoległego, wówczas należy rozważyć możliwość budowy przełącznika trój- i wieloprzerwowego.

Omówiony proces rozbudowy przełącznika można teoretycznie kontynuować tak długo, aż spełniony zostanie warunek:

$$R_G^{(k=x)} \geq R_W, \quad (51)$$

gdzie $R_G^{(k=x)}$ jest niezawodnością globalną (wymaganą) przełącznika ($k = x$)-przerwowego.

Dla podkreślenia faktu, że liczba $k = 1, 2, \dots, n$ elementów przełączających potrzebnych do zapewnienia wymaganej niezawodności R_W globalnej przełącznika jest „a priori” nieznana, we wzorze (51) podano zapis ($k = x$). Spełnienie warunku (51) kończy formalnie proces syntezy niezawodnościowej przełącznika wieloprzerwowego. Z uwagi na ogromną pracochłonność obliczeń rachunkowych, proces syntezy niezawodnościowej przełącznika wieloprzerwowego powinien być wykonywany z pomocą elektronicznych maszyn matematycznych.

12. ZAKOŃCZENIE

Wnioski ogólne

Możliwość obliczania niezawodności przełączników wieloprzerwowych o dowolnej strukturze połączeń elementów przełączających stanowi punkt wyjścia dla wyznaczania innych istotnych parametrów (wskaźników) niezawodnościowych rozważanych przełączników, takich jak: intensywność uszkodzeń [2, 11, 16, 18, 54, 59], trwałość [2, 11, 12, 16, 32, 60], czas do pierwszego uszkodzenia [2, 16, 18], itp.

Na przykładzie niniejszej pracy wykazano, że po to, ażeby można było wykonać poprawnie proces analizy i/lub syntezy niezawodnościowej nawet najprostszego obiektu technicznego, należy uprzednio posiadać pewien niezbędny (minimalny) zasób informacji o obiekcie i jego elementach składowych. Wprowadzone w pracy pojęcie niezawodności lokalnej (przełącznika), które może być transponowane na bardziej złożone obiekty, jest zdaniem autora pożyteczne dla celów ustalania ewentualnej odpowiedzialności wytwórców (i kooperantów) za poziom jakości i niezawodności wyrobów rynkowych.

Według dość rozpowszechnionej opinii przyjmuje się, że każda rozbudowa obiektu prowadzi automatycznie do zwiększenia jego niezawodności globalnej. Jest to pogląd niesłuszny, bowiem w wielu przypadkach zamiast poprawy otrzymuje się spadek niezawodności globalnej obiektu. Mając powyższe na uwadze wprowadzono w pracy pojęcie globalnej i lokalnej efektywności rozbudowy przełącznika.

W pracy niniejszej, stanowiącej tylko niewielki fragment obszernego zagadnienia niezawodności układów i systemów przełączających [46, 48], nie poruszono ze zrozumiałych względów takich problemów jak: problem fizycznego zużycia przełącznika i jego elementów oraz towarzyszące temu zużyciu zjawiska fizyko-chemiczne [12, 59], problem dynamiki pracy przełącznika wieloprzerwowego z uwzględnieniem jego stanów przejściowych [41, 49, 51, 55, 58], problem stosowania maszyn cyfrowych do optymalizacji niezawodnościowej [9, 22, 29, 66] przełączników, problem badań i aparatury badawczej [32] itp.

W trakcie wykonywania niniejszej pracy zebrano szereg wniosków szczegółowych, które mogą okazać się interesujące.

Wnioski szczegółowe

1. Realne przełączniki elektryczne zbudowane są nie tylko z elementów przełączających, lecz również z elementów elektroprowadzących, takich jak przewody łączące i punkty lutownicze, które posiadają skończoną niezawodność. Oznacza to, że wyznaczanie niezawodności przełącznika, przeprowadzone z pominięciem niezawodności jego elementów elektroprowadzących, może w wielu przypadkach w sposób istotny zniekształcić końcowy wynik obliczeń. W konsekwencji postępowanie takie prowadzi najczęściej do zbyt optymistycznej oceny niezawodności globalnej przełącznika.

2. Niezawodność elementów przełączających — w odróżnieniu na przykład od elementów elektroprowadzących i elektroizolacyjnych, które odznaczają się tylko jednym rodzajem uszkodzeń — jest scharakteryzowana jednoznacznie dwoma parametrami $\langle q_p, q_z \rangle$.

3. Znajomość parametrów $\langle q_p, q_z \rangle$ jest niezbędna dla przeprowadzenia jakiegokolwiek analizy i/lub syntezy niezawodnościowej przełącznika wieloprzerwowego.

4. Niezawodność globalną przełącznika możemy zwiększyć przez jego rozbudowę, która może być rozbudową lokalną — jeżeli dotyczy wyłącznie jednego rodzaju elementów (np. elementów elektroprowadzących), lub też może być rozbudową globalną — jeżeli dotyczy więcej niż jednego rodzaju elementów.

5. Z uwagi na fakt, że nie każda rozbudowa przełącznika prowadzi automatycznie do wzrostu jego niezawodności globalnej, należy uprzednio drogą analityczną sprawdzić celowość i efektywność takiej rozbudowy.

6. Do wyznaczenia globalnej niezawodności przełącznika wieloprzerwowego z uwzględnieniem niezawodności jego połączeń elektrycznych potrzebny jest schemat montażowy przełącznika, będący podstawowym źródłem informacji o jego połączeniach elektrycznych.

7. Najprostszymi przełącznikami wieloprzerwowymi, stosowanymi często w praktyce, są przełączniki jedno- i dwuprzerwowe. Należy jednakże podkreślić, że w wielu przypadkach przełączniki dwuprzerwowe są stosowane niewłaściwie, bowiem zamiast poprawiać niezawodność układu powodują jej obniżenie.

8. W przypadkach kiedy wymagana jest bardzo duża niezawodność przełączania, należy rozważyć możliwość budowy przełącznika wieloprzerwowego. Z uwagi jednakże na znaczną pracochłonność obliczeń rachunkowych związanych z analizą i syntezą niezawodnościową takiego przełącznika należy przewidzieć użycie elektronicznych maszyn cyfrowych.

9. Niezawodność przełącznika wieloprzerwowego zbudowanego z elementów o uszkodzeniach stochastycznie zależnych jest zawsze mniejsza od niezawodności takiego samego przełącznika zbudowanego z elementów o uszkodzeniach stochastycznie niezależnych.

DODATEK

Tablice do wyznaczania prawdopodobieństw Q_p oraz Q_z przełącznika według rys. 11a dla wartości wynoszących odpowiednio:

$$0. \quad q_p = (0,11-1,00) \cdot 10^0; \quad q_z = (0,11-1,00) \cdot 10^0$$

$$1. \quad q_p = (0,11-1,00) \cdot 10^{-1}; \quad q_z = (0,11-1,00) \cdot 10^{-1}$$

$$2. \quad q_p = (0,11-1,00) \cdot 10^{-2}; \quad q_z = (0,11-1,00) \cdot 10^{-2}$$

$$3. \quad q_p = (0,11-1,00) \cdot 10^{-3}; \quad q_z = (0,11-1,00) \cdot 10^{-3}$$

$$4. \quad q_p = (0,11-1,00) \cdot 10^{-4}; \quad q_z = (0,11-1,00) \cdot 10^{-4}$$

$$5. \quad q_p = (0,11-1,00) \cdot 10^{-5}; \quad q_z = (0,11-1,00) \cdot 10^{-5}$$

$$6. \quad q_p = (0,11-1,00) \cdot 10^{-6}; \quad q_z = (0,11-1,00) \cdot 10^{-6}$$

$$7. \quad q_p = (0,11-1,00) \cdot 10^{-7}; \quad q_z = (0,11-1,00) \cdot 10^{-7}$$

$$8. \quad q_p = (0,11-1,00) \cdot 10^{-8}; \quad q_z = (0,11-1,00) \cdot 10^{-8}$$

$$9. \quad q_p = (0,11-1,00) \cdot 10^{-9}; \quad q_z = (0,11-1,00) \cdot 10^{-9}$$

Podane tablice zaczerpnięto z opracowania: J. Jazwiński, J. Migdalski, W. Wieremiejczyk, Tablice do oceny niezawodności strukturalnej obiektów złożonych, Wyd. ITWL, Warszawa 1971.

$\times 10^0$ $\times 10^0$

q_p, q_z	Q_p	Q_z
1.00	1.000000000	1.000000000
.99	.999798050	.999798050
.98	.999184794	.999184794
.97	.998150001	.998150001
.96	.996684595	.996684595
.95	.994780625	.994780625
.94	.992431245	.992431245
.93	.989630689	.989630689
.92	.986374246	.986374246
.91	.982658240	.982658240
.90	.978480000	.978480000
.89	.973837840	.973837840
.88	.968731034	.968731034
.87	.963159791	.963159791
.86	.957125235	.957125235
.85	.950629375	.950629375
.84	.943675085	.943675085
.83	.936266079	.936266079
.82	.928406886	.928406886
.81	.920102830	.920102830
.80	.911360000	.911360000
.79	.902185230	.902185230
.78	.892586074	.892586074
.77	.882570781	.882570781
.76	.872148275	.872148275
.75	.861328125	.861328125
.74	.850120525	.850120525
.73	.838536269	.838536269
.72	.826586726	.826586726
.71	.814283820	.814283820
.70	.801640000	.801640000
.69	.788668220	.788668220
.68	.775381914	.775381914
.67	.761794971	.761794971
.66	.747921715	.747921715
.65	.733776875	.733776875
.64	.719375565	.719375565
.63	.704733259	.704733259
.62	.689865766	.689865766
.61	.674789210	.674789210
.60	.659520000	.659520000
.59	.644074810	.644074810
.58	.628470554	.628470554
.57	.612724362	.612724362
.56	.596853555	.596853555

q_p, q_z	Q_p	Q_z
.55	.5808756250	.5808756250
.54	.5648082048	.5648082048
.53	.5486690486	.5486690486
.52	.5324760064	.5324760064
.51	.5162470002	.5162470002
.50	.5000000000	.5000000000
.49	.4837529998	.4837529998
.48	.4675239936	.4675239936
.47	.4513309514	.4513309514
.46	.4351917952	.4351917952
.45	.4191243750	.4191243750
.44	.4031464448	.4031464448
.43	.3872756386	.3872756386
.42	.3715294464	.3715294464
.41	.3559251902	.3559251902
.40	.3404800000	.3404800000
.39	.3252107898	.3252107898
.38	.3101342336	.3101342336
.37	.2952667414	.2952667414
.36	.2806244352	.2806244352
.35	.2662231250	.2662231250
.34	.2520782848	.2520782848
.33	.2382050286	.2382050286
.32	.2246180864	.2246180864
.31	.2113317802	.2113317802
.30	.1983600000	.1983600000
.29	.1857161798	.1857161798
.28	.1734132736	.1734132736
.27	.1614637314	.1614637314
.26	.1498794752	.1498794752
.25	.1386718750	.1386718750
.24	.1278517248	.1278517248
.23	.1174292186	.1174292186
.22	.1074139264	.1074139264
.21	.0978147702	.0978147702
.20	.0886400000	.0886400000
.19	.0798971698	.0798971698
.18	.0715931136	.0715931136
.17	.0637339214	.0637339214
.16	.0563249152	.0563249152
.15	.0493706250	.0493706250
.14	.0428747648	.0428747648
.13	.0368402086	.0368402086
.12	.0312689664	.0312689664
.11	.0261621602	.0261621602

$\times 10^{-1}$ $\times 10^{-1}$

q_p, q_z	Q_p	Q_z	q_p, q_z	Q_p	Q_z
1.00	.215200000	.215200000	.55	.0633800344	.0633800344
.99	.210813198	.210813198	.54	.0610533105	.0610533105
.98	.206472783	.206472783	.53	.0587713799	.0587713799
.97	.202178743	.202178743	.52	.0565341833	.0565341833
.96	.197931062	.197931062	.51	.0543416605	.0543416605
.95	.193729725	.193729725	.50	.0521937500	.0521937500
.94	.189574716	.189574716	.49	.0500903895	.0500903895
.93	.185466018	.185466018	.48	.0480315153	.0480315153
.92	.181403611	.181403611	.47	.0460170628	.0460170628
.91	.177387478	.177387478	.46	.0440469665	.0440469665
.90	.173417598	.173417598	.45	.0421211593	.0421211593
.89	.169493949	.169493949	.44	.0402395735	.0402395735
.88	.165616510	.165616510	.43	.0384021401	.0384021401
.87	.161785256	.161785256	.42	.0366087890	.0366087890
.86	.158000165	.158000165	.41	.0348594491	.0348594491
.85	.154261210	.154261210	.40	.0331540480	.0331540480
.84	.150568366	.150568366	.39	.0314925124	.0314925124
.83	.146921605	.146921605	.38	.0298747679	.0298747679
.82	.143320899	.143320899	.37	.0283007388	.0283007388
.81	.139766220	.139766220	.36	.0267703485	.0267703485
.80	.136257536	.136257536	.35	.0252835192	.0252835192
.79	.132794817	.132794817	.34	.0238401719	.0238401719
.78	.129378031	.129378031	.33	.0224402267	.0224402267
.77	.126007144	.126007144	.32	.0210836023	.0210836023
.76	.122682122	.122682122	.31	.0197702165	.0197702165
.75	.119402930	.119402930	.30	.0184999860	.0184999860
.74	.116169531	.116169531	.29	.0172728262	.0172728262
.73	.112981889	.112981889	.28	.0160886514	.0160886514
.72	.109839966	.109839966	.27	.0149473749	.0149473749
.71	.106743721	.106743721	.26	.0138489088	.0138489088
.70	.103693114	.103693114	.25	.0127931641	.0127931641
.69	.100688105	.100688105	.24	.0117800505	.0117800505
.68	.097728650	.097728650	.23	.0108094767	.0108094767
.67	.094814706	.094814706	.22	.0098813503	.0098813503
.66	.091946230	.091946230	.21	.0089955776	.0089955776
.65	.089123175	.089123175	.20	.0081520640	.0081520640
.64	.086345494	.086345494	.19	.0073507135	.0073507135
.63	.083613141	.083613141	.18	.0065914290	.0065914290
.62	.080926066	.080926066	.17	.0058741123	.0058741123
.61	.078284220	.078284220	.16	.0051986642	.0051986642
.60	.075687552	.075687552	.15	.0045649839	.0045649839
.59	.073136010	.073136010	.14	.0039729700	.0039729700
.58	.070629542	.070629542	.13	.0034225194	.0034225194
.57	.068168094	.068168094	.12	.0029135282	.0029135282
.56	.065751610	.065751610	.11	.0024458912	.0024458912

$\times 10^{-2}$ $\times 10^{-2}$

q_p, q_z	Q_p	Q_z	q_p, q_z	Q_p	Q_z
1.00	.020195020	.020195020	.55	.0060828185	.0060828185
.99	.019791276	.019791276	.54	.0058630686	.0058630686
.98	.019391645	.019391645	.53	.0056473817	.0056473817
.97	.018996125	.018996125	.52	.0054357568	.0054357568
.96	.018604717	.018604717	.51	.0052281926	.0052281926
.95	.018217418	.018217418	.50	.0050246881	.0050246881
.94	.017834228	.017834228	.49	.0048252421	.0048252421
.93	.017455145	.017455145	.48	.0046298535	.0046298535
.92	.017080169	.017080169	.47	.0044385211	.0044385211
.91	.016709298	.016709298	.46	.0042512437	.0042512437
.90	.016342531	.016342531	.45	.0040680203	.0040680203
.89	.015979868	.015979868	.44	.0038888497	.0038888497
.88	.015621306	.015621306	.43	.0037137308	.0037137308
.87	.015266846	.015266846	.42	.0035426623	.0035426623
.86	.014916486	.014916486	.41	.0033756431	.0033756431
.85	.014570224	.014570224	.40	.0032126722	.0032126722
.84	.014228060	.014228060	.39	.0030537483	.0030537483
.83	.013889992	.013889992	.38	.0028988703	.0028988703
.82	.013556020	.013556020	.37	.0027480370	.0027480370
.81	.013226143	.013226143	.36	.0026012473	.0026012473
.80	.012900359	.012900359	.35	.0024585001	.0024585001
.79	.012578666	.012578666	.34	.0023197941	.0023197941
.78	.012261065	.012261065	.33	.0021851282	.0021851282
.77	.011947554	.011947554	.32	.0020545012	.0020545012
.76	.011638132	.011638132	.31	.0019279121	.0019279121
.75	.011332798	.011332798	.30	.0018053595	.0018053595
.74	.011031550	.011031550	.29	.0016868425	.0016868425
.73	.010734388	.010734388	.28	.0015723597	.0015723597
.72	.010441310	.010441310	.27	.0014619101	.0014619101
.71	.010152315	.010152315	.26	.0013554924	.0013554924
.70	.009867403	.009867403	.25	.0012531055	.0012531055
.69	.009586572	.009586572	.24	.0011547482	.0011547482
.68	.009309820	.009309820	.23	.0010604194	.0010604194
.67	.009037148	.009037148	.22	.0009701179	.0009701179
.66	.008768553	.008768553	.21	.0008838425	.0008838425
.65	.008504035	.008504035	.20	.0008015920	.0008015920
.64	.008243592	.008243592	.19	.0007233653	.0007233653
.63	.007987224	.007987224	.18	.0006491612	.0006491612
.62	.007734929	.007734929	.17	.0005789784	.0005789784
.61	.007486706	.007486706	.16	.0005128159	.0005128159
.60	.007242554	.007242554	.15	.0004506725	.0004506725
.59	.007002471	.007002471	.14	.0003925469	.0003925469
.58	.006766458	.006766458	.13	.0003384380	.0003384380
.57	.006534512	.006534512	.12	.0002883446	.0002883446
.56	.006306633	.006306633	.11	.0002422655	.0002422655

$\times 10^{-3}$

q_p, q_z	Q_p	Q_z
1.00	.002001995	.002001995
.99	.001962136	.001962136
.98	.001922678	.001922678
.97	.001883621	.001883621
.96	.001844965	.001844965
.95	.001806711	.001806711
.94	.001768857	.001768857
.93	.001731405	.001731405
.92	.001694354	.001694354
.91	.001657704	.001657704
.90	.001621455	.001621455
.89	.001585607	.001585607
.88	.001550160	.001550160
.87	.001515114	.001515114
.86	.001480469	.001480469
.85	.001446226	.001446226
.84	.001412383	.001412383
.83	.001378941	.001378941
.82	.001345900	.001345900
.81	.001313261	.001313261
.80	.001281022	.001281022
.79	.001249184	.001249184
.78	.001217747	.001217747
.77	.001186711	.001186711
.76	.001156076	.001156076
.75	.001125842	.001125842
.74	.001096009	.001096009
.73	.001066577	.001066577
.72	.001037545	.001037545
.71	.001008915	.001008915
.70	.000980685	.000980685
.69	.000952856	.000952856
.68	.000925428	.000925428
.67	.000898401	.000898401
.66	.000871774	.000871774
.65	.000845548	.000845548
.64	.000819723	.000819723
.63	.000794299	.000794299
.62	.000769276	.000769276
.61	.000744653	.000744653
.60	.000720431	.000720431
.59	.000696610	.000696610
.58	.000673190	.000673190
.57	.000650170	.000650170
.56	.000627551	.000627551

 $\times 10^{-3}$

q_p, q_z	Q_p	Q_z
.55	.0006053323	.0006053323
.54	.0005835145	.0005835145
.53	.0005620974	.0005620974
.52	.0005410809	.0005410809
.51	.0005204650	.0005204650
.50	.0005002497	.0005002497
.49	.0004804350	.0004804350
.48	.0004610209	.0004610209
.47	.0004420074	.0004420074
.46	.0004233944	.0004233944
.45	.0004051820	.0004051820
.44	.0003873702	.0003873702
.43	.0003699588	.0003699588
.42	.0003529480	.0003529480
.41	.0003363377	.0003363377
.40	.0003201279	.0003201279
.39	.0003043185	.0003043185
.38	.0002889096	.0002889096
.37	.0002739012	.0002739012
.36	.0002592932	.0002592932
.35	.0002450857	.0002450857
.34	.0002312785	.0002312785
.33	.0002178718	.0002178718
.32	.0002048655	.0002048655
.31	.0001922595	.0001922595
.30	.0001800540	.0001800540
.29	.0001682487	.0001682487
.28	.0001568439	.0001568439
.27	.0001458393	.0001458393
.26	.0001352351	.0001352351
.25	.0001250312	.0001250312
.24	.0001152276	.0001152276
.23	.0001058243	.0001058243
.22	.0000968213	.0000968213
.21	.0000882185	.0000882185
.20	.0000800160	.0000800160
.19	.0000722137	.0000722137
.18	.0000648117	.0000648117
.17	.0000578098	.0000578098
.16	.0000512082	.0000512082
.15	.0000450067	.0000450067
.14	.0000392055	.0000392055
.13	.0000338044	.0000338044
.12	.0000288035	.0000288035
.11	.0000242027	.0000242027

x 10⁻⁴

x 10⁻⁴

q_p, q_z	Q_p	Q_z
1.00	.000200020	.000200020
.99	.000196039	.000196039
.98	.000192099	.000192099
.97	.000188198	.000188198
.96	.000184338	.000184338
.95	.000180517	.000180517
.94	.000176737	.000176737
.93	.000172996	.000172996
.92	.000169296	.000169296
.91	.000165635	.000165635
.90	.000162015	.000162015
.89	.000158434	.000158434
.88	.000154894	.000154894
.87	.000151393	.000151393
.86	.000147933	.000147933
.85	.000144512	.000144512
.84	.000141132	.000141132
.83	.000137791	.000137791
.82	.000134491	.000134491
.81	.000131231	.000131231
.80	.000128010	.000128010
.79	.000124830	.000124830
.78	.000121689	.000121689
.77	.000118589	.000118589
.76	.000115529	.000115529
.75	.000112508	.000112508
.74	.000109528	.000109528
.73	.000106588	.000106588
.72	.000103687	.000103687
.71	.000100827	.000100827
.70	.000098007	.000098007
.69	.000095227	.000095227
.68	.000092486	.000092486
.67	.000089786	.000089786
.66	.000087126	.000087126
.65	.000084505	.000084505
.64	.000081925	.000081925
.63	.000079385	.000079385
.62	.000076885	.000076885
.61	.000074425	.000074425
.60	.000072004	.000072004
.59	.000069624	.000069624
.58	.000067284	.000067284
.57	.000064984	.000064984
.56	.000062724	.000062724

q_p, q_z	Q_p	Q_z
.55	.0000605033	.0000605033
.54	.0000583231	.0000583231
.53	.0000561830	.0000561830
.52	.0000540828	.0000540828
.51	.0000520227	.0000520227
.50	.0000500025	.0000500025
.49	.0000480224	.0000480224
.48	.0000460822	.0000460822
.47	.0000441821	.0000441821
.46	.0000423219	.0000423219
.45	.0000405018	.0000405018
.44	.0000387217	.0000387217
.43	.0000369816	.0000369816
.42	.0000352815	.0000352815
.41	.0000336214	.0000336214
.40	.0000320013	.0000320013
.39	.0000304212	.0000304212
.38	.0000288811	.0000288811
.37	.0000273810	.0000273810
.36	.0000259209	.0000259209
.35	.0000245009	.0000245009
.34	.0000231208	.0000231208
.33	.0000217807	.0000217807
.32	.0000204807	.0000204807
.31	.0000192206	.0000192206
.30	.0000180005	.0000180005
.29	.0000168205	.0000168205
.28	.0000156804	.0000156804
.27	.0000145804	.0000145804
.26	.0000135204	.0000135204
.25	.0000125003	.0000125003
.24	.0000115203	.0000115203
.23	.0000105802	.0000105802
.22	.0000096802	.0000096802
.21	.0000088202	.0000088202
.20	.0000080002	.0000080002
.19	.0000072201	.0000072201
.18	.0000064801	.0000064801
.17	.0000057801	.0000057801
.16	.0000051201	.0000051201
.15	.0000045001	.0000045001
.14	.0000039201	.0000039201
.13	.0000033800	.0000033800
.12	.0000028800	.0000028800
.11	.0000024200	.0000024200

$\times 10^{-5}$

q_p, q_z	Q_p	Q_z	q_p, q_z	Q_p	Q_z
1.00	.000002000	.000002000	.55	.0000006050	.0000006050
.99	.000001960	.000001960	.54	.0000005832	.0000005832
.98	.000001921	.000001921	.53	.0000005618	.0000005618
.97	.000001882	.000001882	.52	.0000005408	.0000005408
.96	.000001843	.000001843	.51	.0000005202	.0000005202
.95	.000001805	.000001805	.50	.0000005000	.0000005000
.94	.000001767	.000001767	.49	.0000004802	.0000004802
.93	.000001730	.000001730	.48	.0000004608	.0000004608
.92	.000001693	.000001693	.47	.0000004418	.0000004418
.91	.000001656	.000001656	.46	.0000004232	.0000004232
.90	.000001620	.000001620	.45	.0000004050	.0000004050
.89	.000001584	.000001584	.44	.0000003872	.0000003872
.88	.000001549	.000001549	.43	.0000003698	.0000003698
.87	.000001514	.000001514	.42	.0000003528	.0000003528
.86	.000001479	.000001479	.41	.0000003362	.0000003362
.85	.000001445	.000001445	.40	.0000003200	.0000003200
.84	.000001411	.000001411	.39	.0000003042	.0000003042
.83	.000001378	.000001378	.38	.0000002888	.0000002888
.82	.000001345	.000001345	.37	.0000002738	.0000002738
.81	.000001312	.000001312	.36	.0000002592	.0000002592
.80	.000001280	.000001280	.35	.0000002450	.0000002450
.79	.000001248	.000001248	.34	.0000002312	.0000002312
.78	.000001217	.000001217	.33	.0000002178	.0000002178
.77	.000001186	.000001186	.32	.0000002048	.0000002048
.76	.000001155	.000001155	.31	.0000001922	.0000001922
.75	.000001125	.000001125	.30	.0000001800	.0000001800
.74	.000001095	.000001095	.29	.0000001682	.0000001682
.73	.000001066	.000001066	.28	.0000001568	.0000001568
.72	.000001037	.000001037	.27	.0000001458	.0000001458
.71	.000001008	.000001008	.26	.0000001352	.0000001352
.70	.000000980	.000000980	.25	.0000001250	.0000001250
.69	.000000952	.000000952	.24	.0000001152	.0000001152
.68	.000000925	.000000925	.23	.0000001058	.0000001058
.67	.000000898	.000000898	.22	.0000000968	.0000000968
.66	.000000871	.000000871	.21	.0000000882	.0000000882
.65	.000000845	.000000845	.20	.0000000800	.0000000800
.64	.000000819	.000000819	.19	.0000000722	.0000000722
.63	.000000794	.000000794	.18	.0000000648	.0000000648
.62	.000000769	.000000769	.17	.0000000578	.0000000578
.61	.000000744	.000000744	.16	.0000000512	.0000000512
.60	.000000720	.000000720	.15	.0000000450	.0000000450
.59	.000000696	.000000696	.14	.0000000392	.0000000392
.58	.000000673	.000000673	.13	.0000000338	.0000000338
.57	.000000650	.000000650	.12	.0000000288	.0000000288
.56	.000000627	.000000627	.11	.0000000242	.0000000242

$\times 10^{-7}$

$\times 10^{-7}$

q_p, q_z	Q_p	Q_z
1.00	.000000200	.000000200
.99	.000000196	.000000196
.98	.000000192	.000000192
.97	.000000188	.000000188
.96	.000000184	.000000184
.95	.000000180	.000000180
.94	.000000177	.000000177
.93	.000000173	.000000173
.92	.000000169	.000000169
.91	.000000166	.000000166
.90	.000000162	.000000162
.89	.000000158	.000000158
.88	.000000155	.000000155
.87	.000000151	.000000151
.86	.000000148	.000000148
.85	.000000145	.000000145
.84	.000000141	.000000141
.83	.000000138	.000000138
.82	.000000134	.000000134
.81	.000000131	.000000131
.80	.000000128	.000000128
.79	.000000125	.000000125
.78	.000000122	.000000122
.77	.000000119	.000000119
.76	.000000116	.000000116
.75	.000000112	.000000112
.74	.000000110	.000000110
.73	.000000107	.000000107
.72	.000000104	.000000104
.71	.000000101	.000000101
.70	.000000098	.000000098
.69	.000000095	.000000095
.68	.000000092	.000000092
.67	.000000090	.000000090
.66	.000000087	.000000087
.65	.000000085	.000000085
.64	.000000082	.000000082
.63	.000000079	.000000079
.62	.000000077	.000000077
.61	.000000074	.000000074
.60	.000000072	.000000072
.59	.000000070	.000000070
.58	.000000067	.000000067
.57	.000000065	.000000065
.56	.000000063	.000000063

q_p, q_z	Q_p	Q_z
.55	.0000000605	.0000000605
.54	.0000000583	.0000000583
.53	.0000000562	.0000000562
.52	.0000000541	.0000000541
.51	.0000000520	.0000000520
.50	.0000000500	.0000000500
.49	.0000000480	.0000000480
.48	.0000000461	.0000000461
.47	.0000000442	.0000000442
.46	.0000000423	.0000000423
.45	.0000000405	.0000000405
.44	.0000000387	.0000000387
.43	.0000000370	.0000000370
.42	.0000000353	.0000000353
.41	.0000000336	.0000000336
.40	.0000000320	.0000000320
.39	.0000000304	.0000000304
.38	.0000000289	.0000000289
.37	.0000000274	.0000000274
.36	.0000000259	.0000000259
.35	.0000000245	.0000000245
.34	.0000000231	.0000000231
.33	.0000000218	.0000000218
.32	.0000000205	.0000000205
.31	.0000000192	.0000000192
.30	.0000000180	.0000000180
.29	.0000000168	.0000000168
.28	.0000000157	.0000000157
.27	.0000000146	.0000000146
.26	.0000000135	.0000000135
.25	.0000000125	.0000000125
.24	.0000000115	.0000000115
.23	.0000000106	.0000000106
.22	.0000000097	.0000000097
.21	.0000000088	.0000000088
.20	.0000000080	.0000000080
.19	.0000000072	.0000000072
.18	.0000000065	.0000000065
.17	.0000000058	.0000000058
.16	.0000000051	.0000000051
.15	.0000000045	.0000000045
.14	.0000000039	.0000000039
.13	.0000000034	.0000000034
.12	.0000000029	.0000000029
.11	.0000000024	.0000000024

q_p, q_z	Q_p	Q_z	q_p, q_z	Q_p	Q_z
1.00	.000000020	.000000020	.55	.000000060	.000000060
.99	.000000020	.000000020	.54	.000000058	.000000058
.98	.000000019	.000000019	.53	.000000056	.000000056
.97	.000000019	.000000019	.52	.000000054	.000000054
.96	.000000018	.000000018	.51	.000000052	.000000052
.95	.000000018	.000000018	.50	.000000050	.000000050
.94	.000000018	.000000018	.49	.000000048	.000000048
.93	.000000017	.000000017	.48	.000000046	.000000046
.92	.000000017	.000000017	.47	.000000044	.000000044
.91	.000000017	.000000017	.46	.000000042	.000000042
.90	.000000016	.000000016	.45	.000000040	.000000040
.89	.000000016	.000000016	.44	.000000039	.000000039
.88	.000000015	.000000015	.43	.000000037	.000000037
.87	.000000015	.000000015	.42	.000000035	.000000035
.86	.000000015	.000000015	.41	.000000034	.000000034
.85	.000000014	.000000014	.40	.000000032	.000000032
.84	.000000014	.000000014	.39	.000000030	.000000030
.83	.000000014	.000000014	.38	.000000029	.000000029
.82	.000000013	.000000013	.37	.000000027	.000000027
.81	.000000013	.000000013	.36	.000000026	.000000026
.80	.000000013	.000000013	.35	.000000024	.000000024
.79	.000000012	.000000012	.34	.000000023	.000000023
.78	.000000012	.000000012	.33	.000000022	.000000022
.77	.000000012	.000000012	.32	.000000020	.000000020
.76	.000000012	.000000012	.31	.000000019	.000000019
.75	.000000011	.000000011	.30	.000000018	.000000018
.74	.000000011	.000000011	.29	.000000017	.000000017
.73	.000000011	.000000011	.28	.000000016	.000000016
.72	.000000010	.000000010	.27	.000000015	.000000015
.71	.000000010	.000000010	.26	.000000014	.000000014
.70	.000000010	.000000010	.25	.000000013	.000000013
.69	.000000010	.000000010	.24	.000000012	.000000012
.68	.000000009	.000000009	.23	.000000011	.000000011
.67	.000000009	.000000009	.22	.000000010	.000000010
.66	.000000009	.000000009	.21	.000000009	.000000009
.65	.000000008	.000000008	.20	.000000008	.000000008
.64	.000000008	.000000008	.19	.000000007	.000000007
.63	.000000008	.000000008	.18	.000000006	.000000006
.62	.000000008	.000000008	.17	.000000006	.000000006
.61	.000000007	.000000007	.16	.000000005	.000000005
.60	.000000007	.000000007	.15	.000000004	.000000004
.59	.000000007	.000000007	.14	.000000004	.000000004
.58	.000000007	.000000007	.13	.000000003	.000000003
.57	.000000006	.000000006	.12	.000000003	.000000003
.56	.000000006	.000000006	.11	.000000002	.000000002

$\times 10^{-9}$ $\times 10^{-9}$

q_p, q_z	Q_p	Q_z
1.00	.000000002	.000000002
.99	.000000002	.000000002
.98	.000000002	.000000002
.97	.000000002	.000000002
.96	.000000002	.000000002
.95	.000000002	.000000002
.94	.000000002	.000000002
.93	.000000002	.000000002
.92	.000000002	.000000002
.91	.000000002	.000000002
.90	.000000002	.000000002
.89	.000000002	.000000002
.88	.000000002	.000000002
.87	.000000002	.000000002
.86	.000000001	.000000001
.85	.000000001	.000000001
.84	.000000001	.000000001
.83	.000000001	.000000001
.82	.000000001	.000000001
.81	.000000001	.000000001
.80	.000000001	.000000001
.79	.000000001	.000000001
.78	.000000001	.000000001
.77	.000000001	.000000001
.76	.000000001	.000000001
.75	.000000001	.000000001
.74	.000000001	.000000001
.73	.000000001	.000000001
.72	.000000001	.000000001
.71	.000000001	.000000001
.70	.000000001	.000000001
.69	.000000001	.000000001
.68	.000000001	.000000001
.67	.000000001	.000000001
.66	.000000001	.000000001
.65	.000000001	.000000001
.64	.000000001	.000000001
.63	.000000001	.000000001
.62	.000000001	.000000001
.61	.000000001	.000000001
.60	.000000001	.000000001
.59	.000000001	.000000001
.58	.000000001	.000000001
.57	.000000001	.000000001
.56	.000000001	.000000001

q_p, q_z	Q_p	Q_z
.55	.000000006	.000000006
.54	.000000006	.000000006
.53	.000000006	.000000006
.52	.000000005	.000000005
.51	.000000005	.000000005
.50	.000000005	.000000005
.49	.000000005	.000000005
.48	.000000005	.000000005
.47	.000000004	.000000004
.46	.000000004	.000000004
.45	.000000004	.000000004
.44	.000000004	.000000004
.43	.000000004	.000000004
.42	.000000004	.000000004
.41	.000000003	.000000003
.40	.000000003	.000000003
.39	.000000003	.000000003
.38	.000000003	.000000003
.37	.000000003	.000000003
.36	.000000003	.000000003
.35	.000000002	.000000002
.34	.000000002	.000000002
.33	.000000002	.000000002
.32	.000000002	.000000002
.31	.000000002	.000000002
.30	.000000002	.000000002
.29	.000000002	.000000002
.28	.000000002	.000000002
.27	.000000001	.000000001
.26	.000000001	.000000001
.25	.000000001	.000000001
.24	.000000001	.000000001
.23	.000000001	.000000001
.22	.000000001	.000000001
.21	.000000001	.000000001
.20	.000000001	.000000001
.19	.000000001	.000000001
.18	.000000001	.000000001
.17	.000000001	.000000001
.16	.000000001	.000000001
.15	.000000000	.000000000
.14	.000000000	.000000000
.13	.000000000	.000000000
.12	.000000000	.000000000
.11	.000000000	.000000000

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. R. E. Barlow, L. C. Hunter, F. Proschan, Optimum Redundancy When Components are Subject to Two Kinds of Failure, Boeing Scientific Research Laboratories, 1963.
2. R. E. Barlow, F. Proschan, Mathematical Theory of Reliability, John Wiley, Inc., New York 1965.
3. J. Bańkowski, Analiza niezawodności sieci przełączających. Archiwum Elektrotechniki, z. 3, 1966.
4. S. Bellert, H. Woźniacki, Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1968.
5. Z. W. Birnbaum, J. D. Esary, S. C. Saunders, Multi-Component Systems and Structures and Their Reliability, Technometrics, vol. 3, Nr 1, 1961.
6. W. Bojarski, Analiza niezawodności najprostszego układu równoległego, Przegląd Elektrotechniczny, nr 10, 1963.
7. W. Bojarski, Kilka uwag o analizie niezawodności układów złożonych, Przegląd Elektrotechniczny, nr 11, 1964.
8. W. Bojarski, Niezawodność układu wymagającego równoczesnej pracy wszystkich urządzeń składowych, Przegląd Elektrotechniczny, nr 9, 1963.
9. J. Bromirski, A. Sieliński, Kryteria i algorytmy optymalizacji wtórnej podstawowych układów logicznych, Przegląd Elektrotechniczny, nr 5, 1967.
10. W. M. Dołkartiinni, Metod montaža nakrutkoi, Izd. Eniergija, Moskwa 1967.
11. G. W. Drużynin, Nadiożnost' ustrojstw awtomatiki, Izd. Eniergija, Moskwa 1967.
12. Elektriczieskije kontakty, Trudy sowieszczanija, pod red. B. S. Sotskowa, J. E. Dekabrun i J. P. Miłaszenko, Izd. Eniergija, Moskwa 1967.
13. W. L. Fabrikant, O postrojenii nadiożnych schiem iz nienadiożnych riele, Elektriczestwo, Nr 7, 1967.
14. W. L. Fabrikant, O primienienii teorii nadiożnosti k ocenke ustrojstw rielieinoi zaszczyty, Elektriczestwo, Nr 9, 1967.
15. Sz. Firkowicz, J. Migdalski, Przekaznik elektromechaniczny o zmiennej strukturze obwodu sterującego, Przegląd Elektrotechniczny, nr 5, 1967.
16. J. B. Gercbach, Ch. B. Kordoński, Modele niezawodnościowe obiektów technicznych, WNT, Warszawa 1968.
17. W. M. Głuszkow, Sintiez cifrowych awtomatów, Izd. Fizmatgiz, Moskwa 1962.
18. B. W. Gniedenko, J. K. Bielajew, A. D. Sołowiew, Metody matematyczne w teorii niezawodności. WNT, Warszawa 1968.
19. K. Grzesiak, O niektórych zasadach oceny niezawodności elementów i urządzeń elektronicznych, Praca doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 1960.
20. K. Grzesiak, Podstawowe zagadnienia teorii niezawodności urządzeń elektronicznych, Prace Przemysłowego Instytutu Telekomunikacji, nr 30, 1960.
21. M. A. Harrison. Introduction to Switching and Automata Theory, Mc. Graw-Hill, N.Y. 1965.
22. K. A. Iyudu, Optymalizacja ustrojstw awtomatiki po kriteriju nadiożnosti. Izd. Eniergija, Moskwa—Leningrad 1966.
23. D. C. James, A. H. Kent, Jr. J. A. Holloway, Redundancy and the Detection of First Failures, IRE Transactions on RQC, Volume RQC-11, nr 3, 1962.
24. A. D. Jepifanow, Nadiożnost' awtomaticheskich sistem, Izd. Maszynostrojenije, Moskwa 1964.
25. A. Kiliński, O niezawodności sprzętu elektronicznego, Przegląd Telekomunikacyjny, nr 10, 1960.
26. A. Kiliński, Zagadnienie niezawodności sprzętu elektronicznego, Prace PIT, nr 20, 1957.
27. A. J. Koroliew, Nadiożnost' żeleznodorożnoj awtomatiki i tielemiechaniki, Izd. Transport, Moskwa 1967.
28. B. Korzan, Problem oceny jakości systemów złożonych z elementów o losowych wartościach parametrów, Praca doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 1965.

29. B. P. Kredencer, M. M. Łastowczenko, S. A. Sienieckij, N. A. Sziszonok, *Rieszenije zadacz nadiożnosti i eksploatacji na uniwersalnych ECWM*, Izd. Sowietskoje radio, Moskwa 1967.
30. Z. Kościuczyk, Definicja i podstawowe własności niezawodności pewnych klas układów cybernetycznych, *Zesz. Nauk. Uniw. Łódzkiego, Nauki Mat.-Przyr. Seria II*, z. 26, 1967.
31. R. Kulesza, Niektóre problemy syntezy systemów z punktu widzenia losowych zmian własności elementów, *Praca doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 1965*.
32. S. Liszka, R. Sobol, Aparatura do badania trwałości i niezawodności podstawowych podzespołów telekomutacyjnych, *Prace Instytutu Teleradiotechnicznego*, z. 3, 1964.
33. T. P. Marianowicz, Niektóre woprosy nadiożnosti riezierwirowannych sistiem, *Ukrainskij Matematyczeskij Żurnał*, t. XV, nr 2, 1963.
34. J. Mieścicki, O pewnych zagadnieniach niezawodności kombinacyjnych sieci logicznych, *Praca doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 1966*.
35. J. Migdałski, Niektóre problemy niezawodności przekaźnika elektromechanicznego z zestykami hermetycznymi, *Przegląd Elektroniki*, nr 12, 1969.
36. J. Migdałski, Niektóre zagadnienia analizy i syntezy niezawodnościowej układów elektrycznych, *Rozprawy Elektrotechniczne*, z. 4, 1969.
37. J. Migdałski, Nadiożnost' mnogielementnowo pierekluczatiela so složnoi strukturoi, "Awto-metria" A.N. SSSR. Sib. Otd., nr 5, 1970.
38. J. Migdałski, Synteza niezawodnościowa układu zawierającego elementy przełączające — przełączniki, *Rozprawy Elektrotechniczne*, z. 1, 1969.
39. J. Migdałski, Teoria niezawodności i jej zastosowania, *Bibliografia piśmiennictwa polskiego za lata 1957—1966*, *Prace Instytutu Automatyki PAN*, z. 65, 1967.
40. J. Migdałski, Wpływ elementów elektroprowadzących na niezawodność układów technicznych, *Przegląd Elektrotechniczny*, nr 2, z 1969.
41. G. C. Moisił, Zastosowanie Algebr Łukasiewicza do badań teorii układów przekaźnikowo-stykowych, *Wyd. PAN — Ośrodek szkolenia i doskonalenia kadr naukowych, Warszawa 1966*.
42. E. F. Moore, C. E. Shannon, Reliable Circuits Using Less Reliable Relays, *J. Frank. Inst.* 262, Nr 3, Nr 4, 1956.
43. F. Moskowitz, The Analysis of Redundancy Networks, *AIEE Transactions*, Part 1, v. 77, Communication and Electronics, 1958.
44. F. Moskowitz, The Statistical Analysis of Redundant Systems, *IRE National Convention Record*, Nr 8, 1960.
45. M. Muszyński, O pewnych zagadnieniach niezawodności elementów opóźniających, *Praca doktorska, Warszawa 1966*.
46. Nadiożnost' i efektiwnost' diskretnych sistiem, *Izd. Zinatnje, Ryga 1968*.
47. W. J. Niecziporenko, Strukturnyi analiz i metody postrojenija nadiożnych sistiem, *Izd Sowietskoje Radio, Moskwa 1968*.
48. O nadiożnosti složnych techniczeskich sistiem, *Zbornik trudow, Izd. Sowietskoje Radio, Moskwa 1966*.
49. A. Pach, Analiza zawodności strukturalnej stykowych układów przełączających, *Praca doktorska, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków 1964*.
50. A. Pach, Etapy rozwoju teorii układów przekaźnikowych, *Zesz. Nauk. AGH*, nr 112, Automatyka, z. 1, 1966.
51. A. Pach, Możliwości zastosowania logiki trójwartościowej oraz teorii ciał skończonych Galois do opisu rzeczywistej pracy przekaźnika, *Zesz. Nauk. AGH*, nr 112, Automatyka, z. 1, 1966.
52. W. G. Parszin, K woprosu opriedielenija nadiożnosti kontaktnych izbytocznych sistiem klasa "H", *Izw. Sibirskowo Otdielenija AN. ZSRR*, nr 2, 1965, Nowosybirsk.
53. W. G. Parszin, K woprosu powyszenija nadiożnosti kommutirujuszczewo ustroistwa, *Automatyczeskij kontrol i metody elektriczeskich izmierenii*, *Trudy VI konfierencji*, *Izd. Nauka, Nowosybirsk 1966*.

54. A. Ł. Rajkin, *Elementy teorii nadiożności dla projektowania technicznych systemów*, Wyd. Sowieckie Radio, Moskwa 1967.
55. *Redundancy Techniques for Computing Systems*, Edited by R. H. Wilcox and W. C. Mann, Spartan Books, N.Y., 1962.
56. A. Sielicki, O wykorzystaniu kryterium równych marginesów dla optymalizacji projektowania podstawowych układów logicznych, *Zesz. Nauk. Pol. Wrocł., Automatyka*, nr 1, 1963.
57. T. Skośkiewicz, A. Jastrzębski, Zestyki hermetyczne i przekaźniki z zestykami hermetycznymi, *Postępy Telekomunikacji*, nr 5, 1964.
58. E. Sokolnicki, Przekaźnik z magnetycznym zestykiem hermetycznym, *Zeszyły Naukowe Politechniki Wrocławskiej*, nr 72, *Łączność, Miernictwo V*.
59. B. S. Sotskow, *Osnovy teorii i rasczota nadiożnosti*, Konspekt lekcji, Moskwa 1966.
60. B. Walentyłowicz, Model decyzji wyboru urządzenia technicznego, *Przegląd Elektrotechniczny*, nr 6, 1964.
61. K. Ważyńska-Fiołk, Niektóre zagadnienia niezawodności układów zabezpieczenia ruchu pociągów, *Praca doktorska, Politechnika Warszawska*, Warszawa 1965.
62. K. Ważyńska-Fiołk, Określenie niezawodności złożonych układów przekaźnikowych, *Przegląd Telekomunikacyjny*, nr 3, 1968.
63. K. Ważyńska-Fiołk, Rodzaje uszkodzeń elementów i układów przekaźnikowych, *Zesz. Nauk. Pol. Warszawskiej, Budownictwo*, nr 25, 1965.
64. K. Ważyńska-Fiołk, Zagadnienia niezawodności układów przekaźnikowych, *Przegląd Telekomunikacyjny*, nr 12, 1966.
65. G. D. Weinstock, Topological Analysis of Non Series — Parallel Redundant Networks, *IEEE Internat. Convent. Rec.* 11, Nr 6, 1963.
66. L. N. Wołgin, *Problema optimalnosti w teoreticzeskoj kibernetike*, Wyd. Sowieckie Radio, Moskwa 1968.
67. *Woprosy toczności i nadiożności w maszynostrojenii*, Zb. pod red. N. G. Brujewicza, Wyd. AN SSSR, 1962.
68. A. W. Zaiczikow, *Powyszenie dołgowieczności pajanych sojedinienii dietalei lokomotiwow*, Wyd. Transport, Moskwa 1967.
69. A. F. Zubowa, *Ob odnom mietodie rasczota nadiożnosti niezawierajemych systemow, Awtomatika i Tieliemchanika*, nr 4, 1965.

J. MIGDALSKI

RELIABILITY OF MULTICOMPONENT COMPLEX SWITCHING SYSTEMS

Summary

A switching system can consist of simple, single component switches or multicomponent ones. When the system made up of simple switches is not able to ensure a sufficiently high level of reliability, then one must consider the possibility of constructing a more complex equivalent circuit.

Failureless normally open single or multicomponent switch will be closed if and only if the energizing signal is on. Let such an event, designed by A , have probability $P(A) = p$; then we say that the reliability of the switching system, in a single cycle of operation, is p . If it happens that in spite of the presence of a proper control signal, the switch remains open during an entire cycle of operation, then we say that an event A_p takes place. If the switch is closed during absence of the control signal then we have an event A_z .

In the first case, the switch loses its ability to switch being always open, in the second case — being short circuited. If the loss of the switching properties is irreversible in the considered cycle of operation, then equations (16) ÷ (21) hold.

According to Eq. (21) reliability p of a single component switch is univocally characterized by the pair of parameters $\langle q_p, q_z \rangle$.

Since a multicomponent switch can be constructed in many different ways, its reliability depends not only on the reliability of the components but it also depends on the structure of the circuit. It means that the switching systems designer has to know how to determine the reliability of a switch of arbitrary structure.

The reliability of multielement switch of arbitrary structure can be calculated using formulas (26)÷(31) which are derived on the basis of algebra of events and theory of probability. The presented theory is applicable to complex switches with stochastically dependent failures. Simplifications which are assumed in other works e.g. [1, 2, 23, 52] are not needed here. The described method of determining reliability of switches is based on decomposition of their structure and has a simple graphic interpretation which is shown in Fig. 9 and 10.

To illustrate the presented method, reliability for several 5-component bridge switching circuits is calculated assuming that the failures of components are stochastically dependent.

Moreover tables are given for determining parameters Q_p and Q_z of the above mentioned circuits.

Я. МИГДАЛЬСКИ

НАДЕЖНОСТЬ МНОГОЭЛЕМЕНТНЫХ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЕЙ

Резюме

Переключатели, работа которых состоит в замыкании и размыкании цепи, обладают сравнительно невысокой надежностью, но широко применяются в различных технических системах.

В работе рассматривается надежность многоэлементных переключателей (НМП), с произвольной структурой, обладающих стохастической зависимостью отказов элементов. Допускается при этом отказы типа обрыв и короткое замыкание.

Даны формулы для вычисления надежности МП через вычисление вероятности обрыва Q_p и вероятности короткого замыкания Q_z . Доказано, что надежность произвольного переключателя однозначно определяется парой чисел Q_p, Q_z .

Введено термины: надежности локальной, надежности глобальной переключателя и соответственно эффективности локальной и глобальной для сравнительной оценки переключателей.

Работа содержит примеры расчета надежности нескольких переключателей и таблицы для непосредственного вычисления Q_p и Q_z переключателя с мостиковой структурой.

Teoria selsyna różnicowego i analiza błędów wynikających z niedokładności obróbki

TADEUSZ MISSAŁA (WARSZAWA)

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów

Otrzymano 22.9.1970

W pracy [1] podano równania uogólnionego selsyna oraz wynikające z nich wnioski dla selsyna transformatorowego. Niniejsza praca omawia ten sam zakres zagadnień, to jest równania ogólne oraz analizę wpływu błędów obróbki w odniesieniu do selsyna różnicowego. W pracy przyjęto metodę analogiczną jak stosowana w [1], a mianowicie:

- opracowanie zarysu teorii selsyna różnicowego, jako szczególnego przypadku selsyna uogólnionego, w którym obwód magnetyczny jest rozpatrywany jako obwód o stałych rozłożonych,
- rozpatrzenie przypadku selsyna różnicowego idealnego i symetrycznego, co pozwoli na porównanie nowo opracowanej teorii ze sprawdzoną już teorią, podaną w [5],
- rozpatrzenie wpływu niedokładności obróbki mechanicznej: mimośrodowości, bicia i eliptyczności stojana oraz wirnika.

Wszystkie podstawowe rozważania będą prowadzone w ścisłym powiązaniu z [1]; dla pełnego śledzenia tekstu niniejszej pracy konieczne jest czytanie jej w powiązaniu z [1].

Spis oznaczeń

- A — parametr dla obliczeń mimośrodowości (wzór 2.20)
- A_e — parametr dla obliczeń eliptyczności (wzór 3.6)
- A_1, A_2 — parametry obliczeniowe dla momentu (wzory 1.34a i 1.34b)
- A_{egr} — graniczna wartość parametru A_e dla obliczeń eliptyczności (wzór 3.24)
- A_{gr} — graniczna wartość parametru A dla obliczeń mimośrodowości (wzór 2.31)
- a — parametr obliczeniowy (wzór 2.49 z [1])
- B — parametr obliczeniowy (wzór 2.20)
- B_1 — parametr obliczeniowy (wzór 3.7)
- b — parametr obliczeniowy (wzór 1.62)
- $D^{(1)}, D_1^{(1)}, D_2^{(1)}$ — $D^{(2)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}$ — wyznaczniki używane przy rozwiązywaniu równań
- E_j — amplituda SEM nadajnika, zasilającej j -te uzwojenie stojana selsyna różnicowego
- E_k — amplituda SEM odbiornika, zasilającej k -te uzwojenie wirnika selsyna różnicowego
- G_o — permeancja szczeliny powietrznej, odniesiona do jednostki długości obwodu wewnętrznego wytoczenia stojana (wzór 1.6 z [1])

- $\underline{H}_1, \underline{H}_2, \underline{H}_3$ — reluktancje (wzory 1.39)
 i'_i — oznaczenie prądu jako współrzędnej uogólnionej bieżącej
 i_{1j}, I_{1j} — prąd w j -tym uzwojeniu stojana
 i_{2k}, I_{2k} — prąd w k -tym uzwojeniu wirnika
 $\underline{I}_a, \underline{I}_b, \underline{I}_1$ — prądy zastępcze w stojanie (wzory 2.33 i 2.46 z [1])
 $\underline{I}_{a2}, \underline{I}_{b2}, \underline{I}_2$ — prądy zastępcze w wirniku (wzory 1.41 i 1.57)
 $\underline{I}_{1f}, \underline{I}_{2f}$ — prądy w uzwojeniach stojana i wirnika, przy całkowitej symetrii
 j — jednostka urojona
 J_1, J_2, J_3 — współczynniki obliczeniowe (wzory 1.33a, 1.33b, 1.33c)
 K, K_1, K_2 — współczynniki obliczeniowe (wzory 2.26, 3.15, 3.16)
 L_{r2k} — indukcyjność rozproszenia obwodu k -tego uzwojenia wirnika
 l — długość pakietu stojana
 M — moment obrotowy selsyna różnicowego
 M_d — moment obrotowy selsyna różnicowego, wynikający z asymetrii uzwojeń
 m — liczba uzwojeń stojana
 N_1, N_2, N_3 — współczynniki obliczeniowe (wzory 1,32)
 n — liczba uzwojeń wirnika
 p — liczba par biegunów selsyna
 q — współczynnik mimośrodowości (wzór 2.2a)
 q_{gr} — graniczna wartość współczynnika mimośrodowości q dla przypadku mimośrodowości i bicia (wzór 2.30)
 q_e — współczynnik eliptyczności (wzór 3.2)
 q_{egr} — graniczna wartość współczynnika eliptyczności dla przypadku jednoczesnej eliptyczności stojana i wirnika (wzór 3.22)
 $R_{\mu 0}$ — reluktancja obwodu magnetycznego liczona na jednostkę długości jego obwodu (wzór 1.7 z [1])
 R_{μ} — reluktancja zastępcza (wzór 2,34 z [1])
 r_{2k} — rezystancja obwodu k -tego uzwojenia wirnika
 t — czas
 U_{zj} — napięcie zastępcze w obwodzie j -tego uzwojenia stojana (wzory 2.17 z [1])
 U_{yk} — napięcie zastępcze w obwodzie k -tego uzwojenia wirnika (wzory 1,14a lub 1.15)
 $W_{1j}(x)$ — funkcja rozkładu przestrzennego j -tego uzwojenia stojana
 $W_{2k}(x)$ — funkcja rozkładu przestrzennego k -tego uzwojenia wirnika
 W_m — energia pola magnetycznego selsyna różnicowego
 x — współrzędna liniowa, bieżąca, liczona wzdłuż obwodu wewnętrznego wykroju stojana
 $\underline{Y}_1$ — admitancja obwodów stojana (wzór 2.49 z [1])
 $\underline{Y}_{2R}$ — admitancja obwodów wirnika (wzór 1.53)
 $\underline{Z}_{1j}$ — impedancja obwodu j -tego uzwojenia stojana
 $\underline{Z}_{2k}$ — impedancja obwodu k -tego uzwojenia wirnika
 $\underline{Z}_z$ — impedancja zastępcza obwodów stojana
 $\underline{Z}_y$ — impedancja zastępcza obwodów wirnika

- z_{1j} — liczba zwojów j -tego uzwojenia stojana
 z_{2k} — liczba zwojów k -tego uzwojenia wirnika
 α — kąt obrotu osi magnetycznej pierwszego ($k = 1$) uzwojenia wirnika w stosunku do osi magnetycznej pierwszego ($j = 1$) uzwojenia stojana ($\alpha = p\alpha_m$)
 α_m — kąt obrotu wirnika z położenia zerowego
 β_{1j} — kąt określający położenie osi magnetycznej j -tego uzwojenia stojana w stosunku do osi magnetycznej uzwojenia pierwszego ($j = 1$), przyjętej jako oś podłużna maszyny
 β_{2k} — kąt określający położenie osi magnetycznej k -tego uzwojenia wirnika w stosunku do osi magnetycznej pierwszego uzwojenia stojana
 β_{Nj} — kąt określający położenie osi magnetycznej j -tego uzwojenia selsyna nadawczego w stosunku do osi magnetycznej pierwszego ($j = 1$) uzwojenia selsyna nadawczego
 β_{Ok} — kąt określający położenie osi magnetycznej k -tego uzwojenia selsyna odbiorczego w stosunku do osi magnetycznej pierwszego ($k = 1$) uzwojenia selsyna odbiorczego
 γ_{2k} — kąt określający położenie osi magnetycznej k -tego uzwojenia wirnika w stosunku do osi magnetycznej pierwszego ($k = 1$) uzwojenia wirnika
 $\delta(x)$ — długość szczeliny powietrznej nierównomiernej w danym punkcie o współrzędnej x
 δ_o — długość równomiernej szczeliny powietrznej
 δ — kąt niezgodności łączy
 δM_2 — wartość względna amplitudy momentu pasożytniczego drugiej harmonicznej w przypadku mimośrodowości i bicia
 δM_{2e} — wartość względna amplitudy momentu pasożytniczego drugiej harmonicznej w przypadku eliptyczności
 δM_{1e} — wartość względna amplitudy momentu pasożytniczego pierwszej harmonicznej w przypadku eliptyczności
 ΔM — wartość bezwzględna momentów pasożytniczych
 Δh — odległość osi mimośrodowych powierzchni stojana i wirnika
 Δr — połowa różnicy pól eliptyczności przekroju zdeformowanego
 η — kąt przesunięcia pomiędzy osią pierwszego uzwojenia stojana ($j = 1$) a geometryczną osią symetrii selsyna
 ϑ — kąt określający położenie osi magnetycznej wirnika selsyna nadawczego w stosunku do osi magnetycznej pierwszego uzwojenia stojana
 θ_{1j} — przepływ j -tego uzwojenia stojana
 θ_{2k} — przepływ k -tego uzwojenia wirnika
 θ_x, θ_y — składowe wypadkowego przepływu wirnika (wzory 1.40)
 μ_{1z} — przenikalność magnetyczna żelaza stojana
 μ_{2z} — przenikalność magnetyczna żelaza wirnika
 ϱ — kąt określający położenie osi magnetycznej wirnika selsyna odbiorczego w stosunku do osi magnetycznej pierwszego uzwojenia tego selsyna
 τ — podziałka biegunowa selsyna różnicowego

- ϕ — wypadkowy strumień magnetyczny
 $\phi_1, \phi_2, \phi_{1r}, \phi_{2r}$ — składowe wypadkowego strumienia magnetycznego ($r = 0, 1, 2 \dots$)
 Ψ_{1j} — strumień główny skojarzony z j -tym uzwojeniem stojana
 Ψ_{2k} — strumień główny skojarzony z k -tym uzwojeniem wirnika
 Ψ'_r, Ψ'_j, Ψ_j — strumienie skojarzone jako zmienne uogólnione

1. SELSYN RÓŻNICOWY IDEALNY

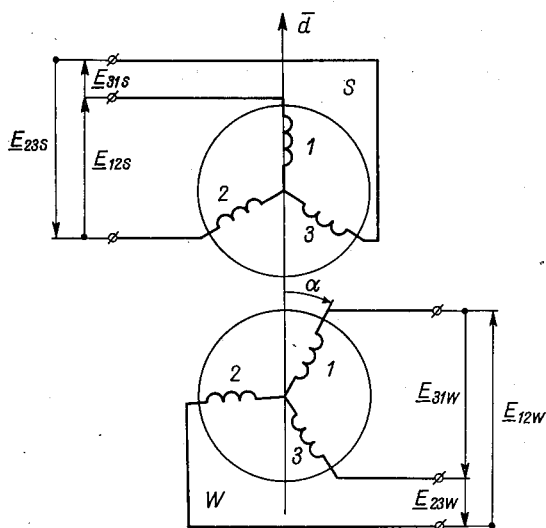
1.1. Równania selsyna różnicowego idealnego

Dla przypadku selsyna różnicowego, którego schemat pokazano na rys. 1, ważne są następujące zależności:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_p = 0 \text{ (nie ma wirnika kubkowego),} \\ m = 3 \text{ (stojan ma 3 uzwojenia),} \\ n = 3 \text{ (wirnik ma 3 uzwojenia),} \\ \beta_{11} = 0; \quad \beta_{12} = \frac{2\pi}{3}; \quad \beta_{13} = \frac{4\pi}{3}; \\ \beta_{21} = \alpha; \quad \beta_{22} = \frac{2\pi}{3} + \alpha; \quad \beta_{23} = \frac{4\pi}{3} + \alpha; \\ \gamma_{21} = 0; \quad \gamma_{22} = \frac{2\pi}{3}; \quad \gamma_{33} = \frac{4\pi}{3}. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Idealny selsyn różnicowy jest ponadto scharakteryzowany przez następujące założenia:

$$\mu_{12} = \mu_{22} = \mu = \text{const}; \quad \delta(x) = \delta_o = \text{const}. \quad (1.2)$$



Rys. 1. Schemat selsyna różnicowego

1, 2, 3, — uzwojenia fazowe, S — stojan, W — wirnik

Tym samym pozostają w mocy zależności (2.2) i (2.3) z [1], dotyczące permeancji i reluktancji obwodu magnetycznego.

W założeniu, że rozważa się normalnie spotykane wykonania selsyna różnicowego, dla przepływów i geometrycznego rozłożenia uzwojeń, można przyjąć następujące zależności:

— dla stojana według wzorów (2.4) i (2.4a) z [1],

— dla wirnika:

$$\theta_{2k} = i_{2k} W_{2k}(x) = \frac{1}{p} i_{2k} z_{2k} \cos\left(\frac{\pi}{\tau} x - \beta_2\right), \quad k = 1, 2, 3, \quad (1.3)$$

$$W_{k2}(x) = \frac{z_{2k}}{p} \cos\left(\frac{\pi}{\tau} x - \beta_{2k}\right), \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.3a)$$

Zależność (1.3) jest przybliżona i podaje pierwszą harmoniczną przestrzenną przepływu schodkowego.

Zakłada się, że siły elektromotoryczne indukowane w poszczególnych uzwojeniach selsynów, współpracujących z rozpatrywanym selsynem różnicowym, mają sinusoidalny przebieg w czasie i są kosinusoidalnymi funkcjami kątów, określających położenia ich wirników względem osi magnetycznych pierwszych uzwojeń stojana. Zgodnie z [2] i [3] jest więc:

— dla napięć zasilających uzwojenia stojana selsyna różnicowego:

$$e = E_j \sin \omega t \cos(\vartheta - \beta_{Nj}) = \underline{E}_j \cos(\vartheta - \beta_{Nj}), \quad (1.4)$$

— dla napięć zasilających uzwojenia wirnika selsyna różnicowego:

$$e_k = E_k \sin \omega t \cos(\varrho - \beta_{Ok}) = \underline{E}_k \cos(\varrho - \beta_{Ok}). \quad (1.5)$$

Siły elektromotoryczne skojarzone będą odpowiednio:

$$\begin{aligned} e_{j,j+1} &= e_j - e_{j+1}, \\ e_{k,k+1} &= e_k - e_{k+1}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Obwód elektryczny stojana selsyna różnicowego będzie opisany równaniem (1.14) z [1], zaś obwód elektryczny wirnika równaniem następującym:

$$u_{k,k+1} = r_{2k} i_{2k} + L_{r2k} \frac{di_{2k}}{dt} + \frac{d\Psi_{2k}}{dt} - r_{2,k+1} i_{2,k+1} - L_{r2,k+1} \frac{di_{2,k+1}}{dt} - \frac{d\Psi_{2,k+1}}{dt}, \quad (1.7)$$

$$k = 1, \dots, n; n+1 \triangleq 1.$$

Obwód magnetyczny rozpatrywanego selsyna będzie opisany równaniem (1.9) z [1].

Po podstawieniu (1.1) do (1.6) oraz (2.4), (2.4a) z [1] do równań (1.9) i (1.14) z [1] oraz (1.7) otrzymuje się:

— dla obwodu magnetycznego:

$$-\frac{1}{G_o} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + R_{\mu o} \phi = \frac{d}{dx} \left[\sum_{j=1}^3 I_{1j} z_{1j} \cos\left(\frac{\pi}{\tau} x - \beta_{1j}\right) - \sum_{k=2}^3 I_{2k} z_{2k} \cos\left(\frac{\pi}{\tau} x - \beta_{2k}\right) \right], \quad (1.8)$$

— dla obwodów elektrycznych stojana równania (2.8) i (2.8a) z [1],

— dla obwodów elektrycznych wirnika:

$$\underline{E}_k \cos(\varrho - \beta_{0k}) - \underline{E}_{k+1} \cos(\varrho - \beta_{0,k+1}) = \underline{Z}_{2k} \underline{I}_{2k} - \underline{Z}_{2,k+1} \underline{I}_{2,k+1} + j\omega \underline{\Psi}_{2k} - j\omega \underline{\Psi}_{2,k+1},$$

$$k = 1, 2, 3; k+1 \cong k; \quad (1.9)$$

$$\underline{Z}_{2k} = (r_{02k} + r_{L2k} + r_{R2k}) + j\omega(L_{r02k} + L_{L2k} + L_{R2k}) = r_{2k} + jx_{2k}. \quad (1.9a)$$

Równanie (1.8) różniczkowe względem $\underline{\phi}$, będzie miało rozwiązanie ([1] wzór 2.11):

$$\underline{\phi}_{og} = \sum_1^3 \underline{G}_i e^{\lambda_i x} + \underline{\phi}, \quad (1.10)$$

przy czym jego rozwiązanie szczególne $\underline{\phi}$ będzie miało postać:

$$\underline{\phi} = \underline{\phi}_1 \sin \frac{\pi}{\tau} x + \underline{\phi}_2 \cos \frac{\pi}{\tau} x. \quad (1.11)$$

Współczynniki $\underline{\phi}_1$ i $\underline{\phi}_2$, niezależne od zmiennej przestrzennej x , zostaną wyznaczone przez podstawienie do (1.8). Występujący w tym równaniu całkowity przepływ uzwojeń stojana

$$\frac{1}{p} \sum_{j=1}^3 \underline{I}_{1j} z_{1j} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\tau} x - \beta_{1j}\right) = \sum_{j=1}^3 \underline{\theta}_{1j}$$

został obliczony w [1], wzory (2.23) i (2.23a), zaś prądy uzwojeń stojana są wyliczone tamże (wzory 2.22 i 2.22a).

Analogicznie zostaną poniżej wyliczone prądy w uzwojeniach wirnika oraz całkowity przepływ uzwojeń wirnika. Podstawiając (1.11) oraz (1.3) do (1.19) z [1] otrzymuje się:

$$\underline{\Psi}_{2k} = \frac{\pi}{p} z_{2k} (\underline{\phi}_1 \cos \beta_{2k} - \underline{\phi}_2 \sin \beta_{2k}). \quad (1.12)$$

W wyniku wprowadzenia (1.12) do (1.9) otrzymuje się układ równań:

$$\begin{aligned} \underline{E}_k \cos(\varrho - \beta_{0k}) - \underline{E}_{k+1} \cos(\varrho - \beta_{0,k+1}) &= \underline{Z}_{2k} \underline{I}_{2k} - \underline{Z}_{2,k+1} \underline{I}_{2,k+1} + \\ &+ j\omega \frac{\pi}{p} z_{2k} (\underline{\phi}_1 \cos \beta_{2k} - \underline{\phi}_2 \sin \beta_{2k}) - j\omega \frac{\pi}{p} z_{2,k+1} (\underline{\phi}_1 \cos \beta_{2,k+1} - \underline{\phi}_2 \sin \beta_{2,k+1}); \\ k &= 1, 2 \dots n; \quad n+1 \triangleq 1. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Do powyższych równań jest wygodnie wprowadzić następujące oznaczenia (wypisując wyrażenie dla $k = 1, 2, 3$ przy $\beta_{01} = 0, \beta_{02} = \frac{2\pi}{3}; \beta_{03} = \frac{4\pi}{3}; \beta_{2k}$, według 1.1, oraz $z_{21} = z_{22} = z_{23} = z_2$):

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{U}_{y1} &= \underline{E}_1 \cos \varrho - j\omega \underline{\Psi}_{21}, \\ \underline{U}_{y2} &= \underline{E}_2 \cos\left(\varrho - \frac{2\pi}{3}\right) - j\omega \underline{\Psi}_{22}, \\ \underline{U}_{y3} &= \underline{E}_3 \cos\left(\varrho - \frac{4\pi}{3}\right) - j\omega \underline{\Psi}_{23}. \end{aligned} \right. \quad (1.14)$$

Oznaczenia te, po wprowadzeniu (1.12) przyjmują postać

$$\begin{cases} \underline{U}_{y1} = \underline{E}_1 \cos \varrho - j\omega \frac{\pi}{p} z_2 (\underline{\phi}_1 \cos \alpha - \underline{\phi}_2 \sin \alpha), \\ \underline{U}_{y2} = \underline{E}_2 \cos \left(\varrho - \frac{2\pi}{3} \right) - j\omega \frac{\pi}{p} z_2 \left[\underline{\phi}_1 \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) - \underline{\phi}_2 \sin \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) \right], \\ \underline{U}_{y3} = \underline{E}_3 \cos \left(\varrho - \frac{4\pi}{3} \right) - j\omega \frac{\pi}{p} z_2 \left[\underline{\phi}_1 \cos \left(\frac{4\pi}{3} + \alpha \right) - \underline{\phi}_2 \sin \left(\frac{4\pi}{3} + \alpha \right) \right]. \end{cases} \quad (1.14a)$$

Po przekształceniach i wprowadzeniu wartości liczbowych dla wartości funkcji trygonometrycznych, otrzymuje się:

$$\begin{cases} \underline{U}_{y1} = \underline{E}_1 \cos \varrho - j\omega \frac{\pi}{p} z_2 (\underline{\phi}_1 \cos \alpha - \underline{\phi}_2 \sin \alpha), \\ \underline{U}_{y2} = \underline{E}_2 \cos \left(\varrho - \frac{2\pi}{3} \right) - j\omega \frac{\pi}{p} z_2 \left[- \left(\frac{1}{2} \underline{\phi}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_2 \right) \cos \alpha - \right. \\ \left. - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_1 - \frac{1}{2} \underline{\phi}_2 \right) \sin \alpha \right], \\ \underline{U}_{y3} = \underline{E}_3 \cos \left(\varrho - \frac{4\pi}{3} \right) - j\omega \frac{\pi}{p} z_2 \left[\left(-\frac{1}{2} \underline{\phi}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_2 \right) \cos \alpha + \right. \\ \left. + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_1 + \frac{1}{2} \underline{\phi}_2 \right) \sin \alpha \right]. \end{cases} \quad (1.15)$$

Jak wynika z (1.15) jest spełniony warunek

$$\underline{U}_{1y} + \underline{U}_{2y} + \underline{U}_{3y} = 0. \quad (1.16)$$

Po uwzględnieniu oznaczeń (1.15), wybraniu z układu równań (1.13) dwóch równań, np. dla $k = 1$ i 2 , oraz dołączeniu równania wynikającego z I prawa Kirchhoffa:

$$\underline{I}_{21} + \underline{I}_{22} + \underline{I}_{23} = 0, \quad (1.17)$$

otrzymuje się następujący układ równań (zapis macierzowy):

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{21}; & -\underline{Z}_{22}; & 0 \\ 0; & \underline{Z}_{22}; & -\underline{Z}_{23} \\ 1; & 1; & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{21} \\ \underline{I}_{22} \\ \underline{I}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{y1} - \underline{U}_{y2} \\ \underline{U}_{y2} - \underline{U}_{y3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.18)$$

który można zapisać w postaci operacji

$$\underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 = \underline{U}, \quad (1.18a)$$

gdzie:

$$\underline{Z}_2 = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{21}; & -\underline{Z}_{22}; & 0 \\ 0; & \underline{Z}_{22}; & -\underline{Z}_{23} \\ 1; & 1; & 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{I}_2 = \begin{bmatrix} \underline{I}_{21} \\ \underline{I}_{22} \\ \underline{I}_{23} \end{bmatrix}; \quad \underline{U}_y = \begin{bmatrix} \underline{U}_{y1} - \underline{U}_{y2} \\ \underline{U}_{y2} - \underline{U}_{y3} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.18b)$$

Macierz $\underline{Z}_2$ jest nieosobliwa, gdyż

$$\det \underline{Z}_2 = \underline{Z}_{21} \underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{22} \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{23} \underline{Z}_{21} \neq 0. \quad (1.19)$$

Wobec tego rozwiązaniem równania (1.18a) jest

$$\underline{I}_2 = \underline{Z}_2^{-1} \underline{U}_y. \quad (1.20)$$

W rozwiniętej postaci rozwiązanie to będzie miało postać:

$$\begin{bmatrix} I_{21} \\ I_{22} \\ I_{23} \end{bmatrix} = \frac{1}{\underline{Z}_{21}\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{22}\underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{23}\underline{Z}_{21}} \begin{bmatrix} \underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{23} & \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{22}\underline{Z}_{23} \\ -\underline{Z}_{23} & \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{23}\underline{Z}_{21} \\ -\underline{Z}_{22} & -\underline{Z}_{21} - \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{21}\underline{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_{y1} - \underline{U}_{y2} \\ \underline{U}_{y2} - \underline{U}_{y3} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.21)$$

Wyrażenia dla prądów w postaci rozwiniętej będą więc:

$$\begin{cases} I_{21} = \frac{(\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{23})\underline{U}_{y1} - \underline{Z}_{23}\underline{U}_{y2} - \underline{Z}_{22}\underline{U}_{y3}}{\underline{Z}_{21}\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{22}\underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{23}\underline{Z}_{21}}, \\ I_{22} = \frac{-\underline{Z}_{23}\underline{U}_{y1} + (\underline{Z}_{21} + \underline{Z}_{23})\underline{U}_{y2} - \underline{Z}_{21}\underline{U}_{y3}}{\underline{Z}_{21}\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{23}\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{23}\underline{Z}_{21}}, \\ I_{23} = \frac{-\underline{Z}_{22}\underline{U}_{y1} - \underline{Z}_{21}\underline{U}_{y2} + (\underline{Z}_{21} + \underline{Z}_{22})\underline{U}_{y3}}{\underline{Z}_{21}\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{22}\underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{23}\underline{Z}_{21}}. \end{cases} \quad (1.22)$$

Otrzymane wyrażenia pozwalają na określenie całkowitego przepływu wirnika; po podstawieniu ich do (1.3) i zsumowaniu otrzymuje się:

$$\sum_{k=1}^3 \theta_{2k} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^3 I_{2k} z_2 \cos\left(\frac{\pi}{\tau} x - \beta_{2k}\right), \quad (1.23)$$

a następnie:

$$\sum_{k=1}^3 \theta_{2k} = \frac{z_2}{p} \left[\left(I_{21} - \frac{1}{2} I_{22} - \frac{1}{2} I_{23} \right) \cos\left(\frac{\pi}{\tau} x - \alpha\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} (I_{22} - I_{23}) \sin\left(\frac{\pi}{\tau} x - \alpha\right) \right], \quad (1.24)$$

co po rozwinięciu daje:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \theta_{2k} = \frac{z_2}{p \underline{Z}_y^2} & \left\{ \frac{3}{2} [\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{23}] \underline{U}_{y1} - \underline{Z}_{23} \underline{U}_{y2} - \underline{Z}_{22} \underline{U}_{y3} \right\} \cos\left(\frac{\pi}{\tau} x - \alpha\right) + \\ & + \frac{\sqrt{3}}{2} [(\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{23}) \underline{U}_{y1} + (2\underline{Z}_{21} + \underline{Z}_{23}) \underline{U}_{y2} - (2\underline{Z}_{21} + \underline{Z}_{22}) \underline{U}_{y3}] \sin\left(\frac{\pi}{\tau} x - \alpha\right), \end{aligned} \quad (1.25)$$

gdzie:

$$\underline{Z}_y^2 = \det \underline{Z}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{22}\underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{23}\underline{Z}_{21}. \quad (1.26)$$

Równania (1.21), (1.22), (1.24), (1.25), (1.15) łącznie z równaniami (2.17), (2.22), (2.22a), (2.23) i (2.23a) z [1] określają jednoznacznie stan selsyna różnicowego.

1.2. Moment obrotowy selsyna różnicowego idealnego

1.2.1. Przypadek ogólny

Jeżeli jako niezależne zmienne stanu, charakteryzujące selsyn różnicowy, przyjąć strumienie skojarzone i zmienne mechaniczne, moment obrotowy najwygodniej jest obliczyć z energii pola magnetycznego. Tę ostatnią oblicza się według znanego wzoru [4]:

$$W_m = \int_0^{\Psi_r} \sum_{r=1}^n i'_i(\Psi'_r, x'_j) d\Psi'_j, \quad \begin{matrix} r = 1 \dots n, \\ j = 1 \dots m, \end{matrix} \quad (1.27)$$

gdzie:

n — liczba wejść elektrycznych,

m — liczba wejść mechanicznych.

Rozpatrywany przypadek jest opisany:

- sześciu strumieniami skojarzonymi $\Psi_{11}, \Psi_{12}, \Psi_{13}, \Psi_{21}, \Psi_{22}, \Psi_{23}$, jako zmiennymi niezależnymi i taką samą liczbą prądów, jako zmiennymi zależnymi,
- jedną zmienną mechaniczną $x_1 = \alpha$, tj. kątem określającym położenie wirnika selsyna różnicowego.

Moment obrotowy rozwijany przez selsyn będzie:

$$M = - \frac{dW_m}{d\alpha}. \quad (1.28)$$

Jak widać ze wzorów (2.13) i (2.22a) z [1] oraz (1.12) i (1.22) z niniejszego opracowania, zależność funkcjonalna pomiędzy strumieniami skojarzonymi, prądami i zmienną mechaniczną α jest taka, że wyrażenie (1.27) można przedstawić w postaci sumy całek:

$$W_m = \int_0^{\Psi_{1j}} \sum_{j=1}^3 i'_{1j}(\Psi'_{1j}) d\Psi'_{1j} + \int_0^{\Psi_{2k}} \sum_{k=1}^3 i'_{2k}(\Psi'_{2k}, \alpha) d\Psi'_{2k}. \quad (1.29)$$

Na podstawie (1.28) i (1.29) otrzymuje się:

$$M = - \frac{d}{d\alpha} \left[\int_0^{\Psi_{2k}} \sum_{k=1}^3 i'_{2k}(\Psi'_{2k}, \alpha) d\Psi'_{2k} \right]. \quad (1.30)$$

Na podstawie (1.22) i (1.14) otrzymuje się:

$$\begin{cases} I_{21} = \frac{1}{Z_y^2} [N_1 + j\omega Z_{22}(\Psi_{23} - \Psi_{21}) + j\omega Z_{23}(\Psi_{22} - \Psi_{21})], \\ I_{22} = \frac{1}{Z_y^2} [N_2 + j\omega Z_{23}(\Psi_{21} - \Psi_{22}) + j\omega Z_{21}(\Psi_{23} - \Psi_{22})], \\ I_{23} = \frac{1}{Z_y^2} [N_3 + j\omega Z_{21}(\Psi_{22} - \Psi_{23}) + j\omega Z_{22}(\Psi_{21} - \Psi_{23})], \end{cases} \quad (1.31)$$

gdzie:

$$\begin{cases} \underline{N}_1 = (\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{23}) \underline{E}_1 \cos \varrho - \underline{Z}_{23} \underline{E}_2 \cos \left(\varrho - \frac{2\pi}{3} \right) - \underline{Z}_{22} \underline{E}_3 \cos \left(\varrho - \frac{4\pi}{3} \right), \\ \underline{N}_2 = (\underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{21}) \underline{E}_2 \cos \left(\varrho - \frac{2\pi}{3} \right) - \underline{Z}_{23} \underline{E}_1 \cos \varrho - \underline{Z}_{21} \underline{E}_3 \cos \left(\varrho - \frac{4\pi}{3} \right), \\ \underline{N}_3 = (\underline{Z}_{21} + \underline{Z}_{22}) \underline{E}_3 \cos \left(\varrho - \frac{4\pi}{3} \right) - \underline{Z}_{21} \underline{E}_2 \cos \left(\varrho - \frac{2\pi}{3} \right) - \underline{Z}_{22} \underline{E}_1 \cos \varrho. \end{cases} \quad (1.32)$$

Ponieważ rozpatruje się stan maszyny ustalony w czasie, a wszystkie wartości chwilowe są zależne jedynie od zmiennych przestrzennych, wyrażenia (1.31) mogą być podstawione do (1.30). Po wykonaniu rachunków wynikających z tego podstawienia, otrzymuje się:

$$M = -\frac{d}{d\alpha} \{ \underline{J}_1 + \underline{J}_2 + \underline{J}_3 \}, \quad (1.33)$$

gdzie:

$$\underline{J}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_y^2} \left[\underline{N}_1 \underline{\Psi}_{21} + j\omega \underline{Z}_{22} \left(\underline{\Psi}_{23} \underline{\Psi}_{21} - \frac{1}{2} \underline{\Psi}_{21}^2 \right) + j\omega \underline{Z}_{23} \left(\underline{\Psi}_{22} \underline{\Psi}_{21} - \frac{1}{2} \underline{\Psi}_{21}^2 \right) \right], \quad (1.33a)$$

$$\underline{J}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_y^2} \left[\underline{N}_2 \underline{\Psi}_{22} + j\omega \underline{Z}_{23} \left(\underline{\Psi}_{21} \underline{\Psi}_{22} - \frac{1}{2} \underline{\Psi}_{22}^2 \right) + j\omega \underline{Z}_{21} \left(\underline{\Psi}_{23} \underline{\Psi}_{22} - \frac{1}{2} \underline{\Psi}_{22}^2 \right) \right], \quad (1.33b)$$

$$\underline{J}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_y^2} \left[\underline{N}_3 \underline{\Psi}_{23} + j\omega \underline{Z}_{21} \left(\underline{\Psi}_{22} \underline{\Psi}_{23} - \frac{1}{2} \underline{\Psi}_{23}^2 \right) + j\omega \underline{Z}_{22} \left(\underline{\Psi}_{21} \underline{\Psi}_{23} - \frac{1}{2} \underline{\Psi}_{23}^2 \right) \right]. \quad (1.33c)$$

Po wykonaniu rachunków dochodzi się do wzoru:

$$M = \frac{\sqrt{3}}{\underline{Z}_y^2} \frac{\pi}{p} z_2 (\underline{A}_1 \phi_1 - \underline{A}_2 \phi_2) + \underline{M}_d, \quad (1.34)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \underline{A}_1 &= \underline{Z}_{21} \cos \alpha \left[\underline{E}_2 \cos \left(\varrho - \frac{2\pi}{3} \right) - \underline{E}_3 \cos \left(\varrho - \frac{4\pi}{3} \right) \right] + \underline{Z}_{22} \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) \times \\ &\times \left[\underline{E}_3 \cos \left(\varrho - \frac{4\pi}{3} \right) - \underline{E}_1 \cos \varrho \right] + \underline{Z}_{23} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \left[\underline{E}_2 \cos \left(\varrho - \frac{2\pi}{3} \right) - \underline{E}_1 \cos \varrho \right], \end{aligned} \quad (1.34a)$$

$$\begin{aligned} \underline{A}_2 &= \underline{Z}_{21} \sin \alpha \left[\underline{E}_2 \cos \left(\varrho - \frac{2\pi}{3} \right) - \underline{E}_3 \cos \left(\varrho - \frac{4\pi}{3} \right) \right] + \underline{Z}_{22} \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) \times \\ &\times \left[\underline{E}_3 \cos \left(\varrho - \frac{4\pi}{3} \right) - \underline{E}_1 \cos \varrho \right] + \underline{Z}_{23} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \left[\underline{E}_2 \cos \left(\varrho - \frac{2\pi}{3} \right) - \underline{E}_1 \cos \varrho \right], \end{aligned} \quad (1.34b)$$

$$\begin{aligned} \underline{M}_d = j \frac{5\omega}{\underline{Z}_y} \frac{\pi^2}{p^2} z_2^2 \left\{ \frac{1}{2} (\phi_1^2 - \phi_2^2) \left[\underline{Z}_{21} \sin 2\alpha + \underline{Z}_{22} \sin 2 \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) + \underline{Z}_{23} \sin 2 \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \right] + \right. \\ \left. + \phi_1 \phi_2 \left[\underline{Z}_{21} \cos 2\alpha + \underline{Z}_{22} \cos 2 \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) + \underline{Z}_{23} \cos 2 \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \right] \right\}. \quad (1.34c) \end{aligned}$$

Jak widać z podanych powyżej wzorów, pierwszy człon wyrażenia (1.34) określa moment obrotowy wynikający z faktu zasilania wirnika, zaś drugi człon, oznaczony przez $\underline{M}_d$, określa składową momentu wynikającą wyłącznie z asymetrii uzwojeń wirnika.

We wzorach (1.34) występują składowe głównego strumienia magnetycznego selsyna różnicowego, oznaczone przez ϕ_1 i ϕ_2 . Składowe te należy wyznaczyć z równania (1.8) przez podstawienie doń rozwiązania szczególnego (1.11) oraz wyrażeń określających przepływ wirnika (1.25) i stojana (2.23a) z [1]. W wyniku tych podstawień otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_0} \cdot \frac{\pi^2}{\tau^2} \left(\phi_1 \sin \frac{\pi}{\tau} x + \phi_2 \cos \frac{\pi}{\tau} x \right) + R_{\mu 0} \left(\phi_1 \sin \frac{\pi}{\tau} x + \phi_2 \cos \frac{\pi}{\tau} x \right) = \\ = \frac{z_1}{p \underline{Z}_y^2} \cdot \frac{d}{dx} \left\{ \frac{3}{2} [(\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13}) \underline{U}_{x1} - \underline{Z}_{13} \underline{U}_{x2} - \underline{Z}_{12} \underline{U}_{x3}] \cos \frac{\pi}{\tau} x + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{3}}{2} [(\underline{Z}_{12} - \underline{Z}_{13}) \underline{U}_{x1} + (2\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{13}) \underline{U}_{x2} - (2\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{12}) \underline{U}_{x3}] \sin \frac{\pi}{\tau} x \right\} + \\ - \frac{z_2}{p \underline{Z}_y^2} \cdot \frac{d}{dx} \left\{ \frac{3}{2} [(\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{23}) \underline{U}_{y1} - \underline{Z}_{23} \underline{U}_{y2} - \underline{Z}_{22} \underline{U}_{y3}] \cos \left(\frac{\pi}{\tau} x - \alpha \right) + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{3}}{2} [(\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{23}) \underline{U}_{y1} + (2\underline{Z}_{21} + \underline{Z}_{23}) \underline{U}_{y2} - (2\underline{Z}_{21} + \underline{Z}_{22}) \underline{U}_{y3}] \sin \left(\frac{\pi}{\tau} x - \alpha \right) \right\}. \quad (1.35) \end{aligned}$$

Po wykonaniu różniczkowania i przyrównaniu współczynników przy odpowiednich funkcjach trygonometrycznych kąta $\frac{\pi}{\tau} x$, otrzymuje się układ równań:

$$\begin{cases} \underline{H}_2 \phi_1 + (R_\mu - \underline{H}_3) \phi_2 = \frac{\pi}{p\tau} \theta_x, \\ (R_\mu - \underline{H}_1) \phi_1 + \underline{H}_2 \phi_2 = -\frac{\pi}{p\tau} \theta_y, \end{cases} \quad (1.36)$$

który można zapisać jako operację

$$\underline{H} \Phi = \frac{\pi}{p\tau} \underline{\theta}, \quad (1.37)$$

przy czym:

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} \underline{H}_2 & R_\mu - \underline{H}_3 \\ R_\mu - \underline{H}_1 & \underline{H}_2 \end{bmatrix}; \quad \Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}; \quad \underline{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_x \\ -\theta_y \end{bmatrix}. \quad (1.38)$$

We wzorach tych przyjęto następujące oznaczenia:

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{H}_2 &= ja \left\{ \frac{z_1^2}{\underline{Z}_x^2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} (\underline{Z}_{12} - \underline{Z}_{13}) + \frac{z_2^2}{\underline{Z}_y^2} \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} (\underline{Z}_{23} - \underline{Z}_{22}) \cos 2\alpha + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3}{2} (2\underline{Z}_{21} - \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{23}) \sin 2\alpha \right] \right\}, \\ \underline{H}_3 &= ja \left\{ \frac{z_1^2}{\underline{Z}_x^2} \cdot \frac{3}{2} (4\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13}) - \frac{z_2^2}{\underline{Z}_y^2} \left[3(\underline{Z}_{21} + \underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{23}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3}{2} (2\underline{Z}_{21} - \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{23}) \cos 2\alpha - \frac{3\sqrt{3}}{2} (\underline{Z}_{23} - \underline{Z}_{22}) \sin 2\alpha \right] \right\}, \\ \underline{H}_1 &= ja \left\{ \frac{z_1^2}{\underline{Z}_x^2} \cdot \frac{9}{2} (\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13}) - \frac{z_2^2}{\underline{Z}_y^2} \left[3(\underline{Z}_{21} + \underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{23}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{3}{2} (2\underline{Z}_{21} - \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{23}) \cos 2\alpha + \frac{3\sqrt{2}}{2} (\underline{Z}_{23} - \underline{Z}_{22}) \sin 2\alpha \right] \right\}, \end{aligned} \right. \quad (1.39)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \theta_x &= z_1 \underline{I}_a - z_2 (\underline{I}_{a2} \cos \alpha + \underline{I}_{b2} \sin \alpha), \\ \theta_y &= z_1 \underline{I}_b - z_2 (\underline{I}_{b2} \cos \alpha - \underline{I}_{a2} \sin \alpha), \end{aligned} \right. \quad (1.40)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{I}_{a2} &= \frac{\sqrt{3}}{2\underline{Z}_y^2} \left[(\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{23}) \underline{E}_1 \cos \varrho + (2\underline{Z}_{21} + \underline{Z}_{23}) \underline{E}_2 \cos \left(\varrho - \frac{2\pi}{3} \right) - \right. \\ &\quad \left. - (2\underline{Z}_{21} + \underline{Z}_{22}) \underline{E}_3 \cos \left(\varrho - \frac{4\pi}{3} \right) \right], \\ \underline{I}_{b2} &= \frac{3}{2\underline{Z}_y^2} \left[(\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{23}) \underline{E}_1 \cos \varrho - \underline{Z}_{23} \underline{E}_2 \cos \left(\varrho - \frac{2\pi}{3} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \underline{Z}_{22} \underline{E}_3 \cos \left(\varrho - \frac{4\pi}{3} \right) \right], \end{aligned} \right. \quad (1.41)$$

a ponadto wykorzystano oznaczenie (1.26) oraz oznaczenia: (2.25), (2.33), (2.34), (2.49) z [1].

Rozwiązaniem równania (1.37) (macierz $\underline{H}$ jest nieosobliwa), jest:

$$\underline{\Phi} = \frac{\pi}{p\tau} \underline{H}^{-1} \underline{\theta}. \quad (1.42)$$

Rozwiązanie to ma następującą postać rozwiniętą:

$$\left\{ \begin{aligned} \phi_1 &= \frac{\pi}{p\tau} \cdot \frac{\theta_x \underline{H}_2 + \theta_y (\underline{R}_\mu - \underline{H}_3)}{\det \underline{H}}, \\ \phi_2 &= \frac{\pi}{p\tau} \cdot \frac{-\theta_y \underline{H}_2 - \theta_x (\underline{R}_\mu - \underline{H}_1)}{\det \underline{H}}, \\ \det \underline{H} &= \underline{H}_2^2 - (\underline{R}_\mu - \underline{H}_1)(\underline{R}_\mu - \underline{H}_3) \neq 0. \end{aligned} \right. \quad (1.43)$$

Po podstawieniu (1.43) do (1.34) otrzymuje się wyrażenie dla momentu obrotowego selsyna różnicowego w przypadku ogólnym. Jest ono na tyle skomplikowane i nieprzejrzyste, że nie nadaje się do bezpośredniej dyskusji.

Z postaci wyrażen dla współczynników $\underline{H}$, można jedynie wysnuć wniosek, że o ile w wyrażeniu $\det \underline{H}$ funkcje trygonometryczne podwójnego kąta α zostaną zredukowane, to w liczniku wyrażen dla $\underline{\phi}_1$ i $\underline{\phi}_2$ pozostaną, a tym samym wejdą do wyrażenia na moment obrotowy. Tak więc w przypadku asymetrii uzwojeń, w krzywej momentu wystąpi druga harmoniczna względem kąta wychylenia wirnika.

Na marginesie warto zaznaczyć, że wyrażenia określające przepływ uzwojenia wirnika oraz jego pochodną względem zmiennej przestrzennej x , przyjmują dla kąta $\alpha = 0$ postać identyczną z postacią odpowiednich wyrażen dla przepływu stojana. Stanowi to sprawdzenie prawidłowości i spójności teorii wyłożonej w [1] i w niniejszej pracy.

1.2.2. Przypadek uproszczony: zasilanie i uzwojenia są symetryczne

Przypadek ten jest opisany zależnościami (2.38) i (2.39) z [1], tj.

$$\begin{cases} \underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{13} = \underline{Z}_1, \\ \underline{E}_1 = \underline{E}_2 = \underline{E}_3 = \underline{E}, \\ \text{oraz} \\ \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{22} = \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_2. \end{cases} \quad (1.44)$$

Wprowadzając konsekwentnie powyższe zależności otrzymuje się:

— ze wzoru (1.14a) dla napięć:

$$\begin{cases} \underline{U}_{y1} = \underline{E} \cos \varrho - j\omega \frac{\pi}{p} z_2 (\underline{\phi}_1 \cos \alpha - \underline{\phi}_2 \sin \alpha), \\ \underline{U}_{y2} = \underline{E} \cos \left(\varrho - \frac{2\pi}{3} \right) - j\omega \frac{\pi}{p} z_2 \left[\underline{\phi}_1 \cos \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) - \underline{\phi}_2 \sin \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) \right], \\ \underline{U}_{y3} = \underline{E} \cos \left(\varrho - \frac{4\pi}{3} \right) - j\omega \frac{\pi}{p} z_2 \left[\underline{\phi}_1 \cos \left(\frac{4\pi}{3} + \alpha \right) - \underline{\phi}_2 \sin \left(\frac{4\pi}{3} + \alpha \right) \right]; \end{cases} \quad (1.45)$$

— ze wzoru (1.15) dla napięć:

$$\begin{cases} \underline{U}_{y1} = \underline{E} \cos \varrho - j\omega \frac{\pi}{p} z_2 (\underline{\phi}_1 \cos \alpha - \underline{\phi}_2 \sin \alpha), \\ \underline{U}_{y2} = \underline{E} \cos \left(\varrho - \frac{2\pi}{3} \right) - j\omega \frac{\pi}{p} z_2 \left[- \left(\frac{1}{2} \underline{\phi}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_2 \right) \cos \alpha - \right. \\ \left. - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_1 - \frac{1}{2} \underline{\phi}_2 \right) \sin \alpha \right], \\ \underline{U}_{y3} = \underline{E} \cos \left(\varrho - \frac{4\pi}{3} \right) - j\omega \frac{\pi}{p} z_2 \left[\left(-\frac{1}{2} \underline{\phi}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_2 \right) \cos \alpha + \right. \\ \left. + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_1 + \frac{1}{2} \underline{\phi}_2 \right) \sin \alpha \right]; \end{cases} \quad (1.45a)$$

— ze wzoru (1.22) dla prądów:

$$\left\{ \begin{aligned} I_{21} &= \frac{U_{y1}}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{E} \cos \varrho - j\omega \frac{\pi}{p} z_2 (\underline{\phi}_1 \cos \alpha - \underline{\phi}_2 \sin \alpha)}{\underline{Z}_2}, \\ I_{22} &= \frac{U_{y2}}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{E} \cos \left(\varrho - \frac{2\pi}{3} \right) - j\omega \frac{\pi}{p} z_2 \left[- \left(\frac{1}{2} \underline{\phi}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_2 \right) \cos \alpha + \right.}{\underline{Z}_2} \\ &\quad \left. - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_1 - \frac{1}{2} \underline{\phi}_2 \right) \sin \alpha \right]}{\underline{Z}_2}, \\ I_{23} &= \frac{U_{y3}}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{E} \cos \left(\varrho - \frac{4\pi}{3} \right) - j\omega \frac{\pi}{p} z_2 \left[\left(-\frac{1}{2} \underline{\phi}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_2 \right) \cos \alpha + \right.}{\underline{Z}_2} \\ &\quad \left. + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_1 + \frac{1}{2} \underline{\phi}_2 \right) \sin \alpha \right]}{\underline{Z}_2}; \end{aligned} \right. \quad (1.46)$$

— ze wzoru (1.24) dla przepływu uzwojenia wirnika:

$$\sum_{k=1}^3 \theta_{2k} = \frac{z_2}{p} \left[\frac{3}{2} I_{21} \cos \left(\frac{\pi}{\tau} x - \alpha \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} (I_{22} - I_{23}) \sin \left(\frac{\pi}{\tau} x - \alpha \right) \right] \quad (1.47)$$

— ze wzoru (1.26):

$$\underline{Z}_y^2 = 3 \underline{Z}_2^2; \quad (1.48)$$

— ze wzoru (1.34a):

$$\underline{A}_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \underline{E} \underline{Z}_2 \sin(\varrho + \alpha); \quad (1.49)$$

— ze wzoru (1.34b):

$$\underline{A}_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \underline{E} \underline{Z}_2 \cos(\varrho + \alpha); \quad (1.50)$$

— ze wzoru (1.34c):

$$\underline{M}_d = 0; \quad (1.51)$$

— ze wzoru (1.39):

$$\underline{H}_1 = j3a(\underline{Y}_1 - \underline{Y}_{2R}); \quad (1.52)$$

gdzie:

$$\underline{Y}_{2R} = \frac{z_2^2}{\underline{Z}_2}; \quad (1.53)$$

zaś $\underline{Y}_1$ według (2.49) z [1]

$$\underline{H}_2 = 0, \quad (1.54)$$

$$\underline{H}_3 = \underline{H}_1; \quad (1.55)$$

— ze wzorów (1.41):

$$\begin{aligned} \underline{I}_{a2} &= \underline{I}_2 \sin \varrho, \\ \underline{I}_{b2} &= \underline{I}_2 \cos \varrho, \end{aligned} \quad (1.56)$$

gdzie:

$$\underline{I}_2 = \frac{3}{2} \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_2}; \quad (1.57)$$

— ze wzorów (1.40):

$$\begin{cases} \underline{\theta}_x = z_1 \underline{I}_1 \sin \vartheta - z_2 \underline{I}_2 \sin(\varrho + \alpha), \\ \underline{\theta}_y = z_1 \underline{I}_1 \cos \vartheta + z_2 \underline{I}_2 \cos(\varrho + \alpha); \end{cases} \quad (1.58)$$

— ze wzorów (1.43):

$$\det \underline{H} = -(R_\mu - \underline{H}_1)^2 = -[R_\mu - 3ja(\underline{Y}_1 - \underline{Y}_{2R})]^2, \quad (1.59)$$

$$\begin{cases} \underline{\phi}_1 = -\frac{\pi}{p\tau} \cdot \frac{z_1 \underline{I}_1 \cos \vartheta + z_2 \underline{I}_2 \cos(\varrho + \alpha)}{R_\mu - j3a(\underline{Y}_1 - \underline{Y}_{2R})}, \\ \underline{\phi}_2 = \frac{\pi}{p\tau} \cdot \frac{z_1 \underline{I}_1 \sin \vartheta - z_2 \underline{I}_2 \sin(\varrho + \alpha)}{R_\mu - j3a(\underline{Y}_1 - \underline{Y}_{2R})}. \end{cases} \quad (1.60)$$

W rozumowaniu powyższym wykorzystano wzory (2.40) do (2.46) z [1].

Po podstawieniu do wzoru (1.34) otrzymuje się następujące poszukiwane wyrażenie dla momentu obrotowego selsyna różnicowego:

$$M = \frac{bz_1 \underline{I}_1 z_2 \underline{I}_2}{R_\mu - j3a(\underline{Y}_1 - \underline{Y}_{2R})} \sin(\vartheta - \varrho - \alpha), \quad (1.61)$$

gdzie

$$b = \frac{\pi^2}{p^2 \tau}. \quad (1.62)$$

Wzór powyższy jest zgodny ze wzorem dla momentu, znanym z klasycznej teorii selsynów różnicowych, np. [5].

1.3. Wnioski

Rozważania przedstawione w rozdziale 1 upoważniają do sformułowania następujących wniosków:

1° Ogólna teoria, opracowana w [1] i dostosowana do selsynów różnicowych w p. 1.1 niniejszej pracy po wprowadzeniu założeń upraszczających (1.1), (1.2) i (1.44), leżących u podstaw klasycznej teorii selsynów [2], [3], [5], daje wynik (1.61) zgodny z teorią klasyczną. Stanowi to dowód, że opracowana teoria jest prawidłowa.

2° Ze wzorów (1.34) i (1.43) wynika, że przy niesymetrycznych uzwojeniach wirnika i stojana, w krzywej momentu wystąpią parzyste harmoniczne oraz składowa reakcyjna, zależna od strumienia skojarzonego z uzwojeniami wirnika, a niezależna bezpośrednio od przepływu uzwojeń stojana.

3° Przez pominięcie założenia upraszczającego (1.2) i wprowadzenie zależności analitycznej dla $\delta(x)$, można obliczyć zależność pomiędzy błędami obróbki mechanicznej i montażu, wywołującymi nierównomierność szczeliny powietrznej, a spowodowaną przez nie pasożytniczą składową momentu obrotowego.

4° Przez pominięcie założenia upraszczającego (1.2) i wprowadzenie zależności analitycznej dla $R_{\mu o}(x, \phi)$, można obliczyć zależność pomiędzy anizotropią części ferromagnetycznej obwodu magnetycznego (niejednakowe szerokości zębów, niejednorodność materiału) a spowodowaną przez nie pasożytniczą składową momentu obrotowego.

5° Przez pominięcie założenia (1.44) i wprowadzenie odpowiednich zależności dla impedancji uzwojeń, można obliczyć zależność pomiędzy asymetrią uzwojeń a wywołaną przez nią pasożytniczą składową momentu obrotowego.

6° Przez pominięcie założeń (2.4) z [1] i (1.3) oraz wprowadzenie dokładniejszego opisu fali przepływu (kilka wyrazów rozwinięcia na szereg trygonometryczny), można określić zależność momentu obrotowego od wyższych harmonicznych przepływu schodkowego stojana i wirnika.

7° Przez pominięcie założenia (1.44) i wprowadzenie odpowiednich zależności analitycznych dla SEM selsynów współpracujących z selsynem różnicowym, można obliczyć zależność pomiędzy asymetrią SEM, a spowodowaną przez nie pasożytniczą składową momentu obrotowego.

8° Przez pominięcie założeń (2.6) z [1] i (1.4) i zastąpienie tych wyrażeń zależnością analityczną uwzględniającą wyższe harmoniczne czasowe i przestrzenne występujące w falach napięć, można obliczyć zależność pomiędzy tymi harmonicznymi a spowodowaną przez nie pasożytniczą składową momentu.

Reasumując można stwierdzić, że przedstawiona teoria selsyna różnicowego jest mocnym narzędziem dla analizy momentów pasożytniczych w nim występujących. Rozdziały 2 i 3 stanowią przykłady zastosowania tej teorii do rozwiązania zagadnienia, podanego we wniosku 3°.

2. WPLYW MIMOŚRODOWOŚCI I BICIA PROMIENIOWEGO NA MOMENT OBROTOWY SELSYNA RÓŻNICOWEGO

Przedmiotem analizy w niniejszym rozdziale będzie wpływ błędu obróbki lub montażu, polegający na mimośrodowym ustawieniu osi zewnętrznej powierzchni wirnika i wewnętrznej powierzchni stojana, oraz na istnieniu "bicia" powierzchni zewnętrznej wirnika względem jego osi obrotu, tj. przesunięcia osi geometrycznej powierzchni zewnętrznej wirnika względem jego osi obrotu.

2.1. Zależności ogólne

Jeżeli uwzględnić występującą w rozważanym przypadku nierównomierność szczeliny powietrznej, to wówczas zależność (1.2) nie jest prawdziwa. W związku z tym nie można posługiwać się również równaniem (1.8). Zagadnienie zostanie rozwiązane podobnie jak w rozdziale 3 [1], w oparciu o wyprowadzone tam zależności analityczne dla szczeliny po-

wietrznej (wzór (3.4) z [1]), jednostkowej permeancji szczeliny powietrznej $G_o(x)$ (wzór (3.5) z [1]) oraz dla jednostkowej reluktancji obwodu magnetycznego $R_\mu(x)$ (wzór (3.6) z [1]).

Przypomnieć należy, że przy wymienionych założeniach pozostaje w mocy wzór (1.8) z [1], gdyż pole magnetyczne w szczelinie jest nadal funkcją jedynie zmiennej przestrzennej x . Równanie (1.8) z [1] można zapisać w postaci dogodniejszej dla dalszych rachunków, z jednoczesnym uwzględnieniem faktu, że przepływ uzwojenia wirnika jest sumą przepływów trzech uzwojeń fazowych, a mianowicie:

$$\frac{1}{G_o(x)} \cdot \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{1}{\delta(x) G_o(x)} \cdot \frac{d\delta(x)}{dx} \cdot \frac{d\phi}{dx} - R_{\mu o} \phi = -\frac{d}{dx} \left[\sum_{j=1}^3 \theta_{1j} - \sum_{k=1}^3 \theta_{2k} \right]. \quad (2.1)$$

W równaniu (2.1) uwzględniono następujące fakty:

- przy sinusoidalnym wymuszeniu, przepływy i strumień magnetyczny są sinusoidalnymi funkcjami czasu i zmiennej liniowej,
 - rozpatrywany jest selsyn różnicowy, a więc obowiązują zależności (1.1)
- Po podstawieniu (3.4) i (3.5) z [1] do (2.1) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \left[1 - q \cos \left(\eta - \frac{\pi}{\tau} x \right) \right] \frac{d^2 \phi}{dx^2} - q \frac{\pi}{\tau} \sin \left(\eta - \frac{\pi}{\tau} x \right) \frac{d\phi}{dx} - G_o R_{\mu o} \phi = \\ = -G_o \frac{d}{dx} \left[\sum_{j=1}^3 \theta_{1j} - \sum_{k=1}^3 \theta_{2k} \right], \end{aligned} \quad (2.2)$$

gdzie współczynnik określający mimośrodowość

$$q = \frac{\Delta h}{\delta_o} < 1. \quad (2.2a)$$

Otrzymane równanie różniczkowe zostanie rozwiązane, podobnie jak w r. 3 [1], dla przypadku symetrycznego zasilania i symetrycznych uzwojeń. Dla rozwiązania go przyjęto metodę współczynników nieoznaczonych; rozwiązanie szczególne równania (2.2), określające stan ustalony będzie miało postać (3.9) z [1], a mianowicie:

$$\begin{aligned} \phi = \phi_{10} \sin \frac{\pi}{\tau} x + \phi_{20} \cos \frac{\pi}{\tau} x + \phi_{11} \sin \frac{\pi}{\tau} x + \phi_{21} \cos \frac{\pi}{\tau} x + \\ + \sum_{r=2}^{\infty} \left(\phi_{1r} \sin r \frac{\pi}{\tau} x + \phi_{2r} \cos r \frac{\pi}{\tau} x \right) = \phi_o + \Delta \phi + \Delta_r \phi, \end{aligned} \quad (2.3)$$

gdzie:

- ϕ_o — strumień magnetyczny odpowiadający przypadkowi szczeliny równomiernej, zaś ϕ_{10} i ϕ_{20} — jego składowe,
- $\Delta \phi$ — pierwsza harmoniczna przyrostu strumienia magnetycznego wynikającego z nierównomierności szczeliny powietrznej, zaś ϕ_{11} i ϕ_{21} — jej składowe,
- $\Delta_r \phi$ — suma strumieni wyższych harmonicznych wchodzących w skład przyrostu strumienia magnetycznego.

Wielkości charakteryzujące obwody elektryczne stojana są dane wzorami z [1] rozdział 3, a mianowicie:

- strumień skojarzony z uzwojeniem stojana, wzorem (3.10),
- napięcia na fazach stojana wzorami (3.14),
- prądy w fazach stojana wzorami (3.15),
- przepływ uzwojenia stojana wzorami (3.16).

Wielkości charakteryzujące obwody elektryczne wirnika otrzymuje się przez podstawienie (2.3) do odpowiednich wzorów z rozdziału 1 niniejszej pracy. W wyniku wykonania obliczeń otrzymuje się:

- dla strumienia skojarzonego z uzwojeniami wirnika, po podstawieniu (2.3) i (1.3) do (1.19) z [1]:

$$\underline{\Psi}_{2k} = z_{2k} \frac{\pi}{p} [(\underline{\phi}_{10} \cos \beta_{2k} - \underline{\phi}_{20} \sin \beta_{2k}) + (\underline{\phi}_{11} \cos \beta_{2k} - \underline{\phi}_{21} \sin \beta_{2k})], \quad (2.4)$$

lub

$$\underline{\Psi}_{2k} = \underline{\Psi}_{2k0} + \Delta \underline{\Psi}_{2k}, \quad (2.4a)$$

gdzie:

- $\underline{\Psi}_{2k0}$ — strumień skojarzony w przypadku szczeliny równomiernej (1.12),
- $\Delta \underline{\Psi}_{2k}$ — przyrost strumienia skojarzonego wynikający z nierównomierności szczeliny powietrznej, przy czym:

$$\Delta \underline{\Psi}_{2k} = z_{2k} \frac{\pi}{p} (\underline{\phi}_{11} \cos \beta_{2k} - \underline{\phi}_{21} \sin \beta_{2k}); \quad (2.4b)$$

- dla sił elektromotorycznych w fazach wirnika, po podstawieniu (2.4) do (1.13):

$$\begin{aligned} \underline{E}_k \cos(\varrho - \beta_{0k}) - \underline{E}_{k+1} \cos(\varrho - \beta_{0,k+1}) &= \underline{Z}_{2k} \underline{I}_{2k} - \underline{Z}_{2,k+1} \underline{I}_{2,k+1} + \\ &+ j\omega \frac{\pi}{p} z_{2k} [(\underline{\phi}_{10} \cos \beta_{2k} - \underline{\phi}_{20} \sin \beta_{2k}) + (\underline{\phi}_{11} \cos \beta_{2k} - \underline{\phi}_{21} \sin \beta_{2k})] + \\ &- j\omega \frac{\pi}{p} z_{2,k+1} [(\underline{\phi}_{10} \cos \beta_{2,k+1} - \underline{\phi}_{20} \sin \beta_{2,k+1}) + (\underline{\phi}_{11} \cos \beta_{2,k+1} - \underline{\phi}_{21} \sin \beta_{2,k+1})], \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$k = 1, 2; \dots, n, \quad n+1 \triangleq 1;$$

- dla napięć na fazach wirnika po podstawieniu (2.4) do (1.14) i uwzględnieniu założeń tamże poczynionych:

$$\begin{cases} \underline{U}_{y1} = \underline{U}_{y10} - \Delta \underline{U}_{y1}, \\ \underline{U}_{y2} = \underline{U}_{y20} - \Delta \underline{U}_{y2}, \\ \underline{U}_{y3} = \underline{U}_{y30} - \Delta \underline{U}_{y3}, \end{cases} \quad (2.6)$$

gdzie:

$\underline{U}_{y10}$, $\underline{U}_{y20}$, $\underline{U}_{y30}$ są napięciami odpowiadającymi szczelinie równomiernej, otrzymanymi ze wzorów (1.45a) przez zastąpienie strumieni $\underline{\phi}_1$ i $\underline{\phi}_2$ strumieniami $\underline{\phi}_{10}$ i $\underline{\phi}_{20}$, a mianowicie:

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{U}_{y10} &= \underline{E} \cos \varrho - j\omega \frac{\pi}{p} z_2 (\underline{\phi}_{10} \cos \alpha - \underline{\phi}_{20} \sin \alpha), \\ \underline{U}_{y20} &= \underline{E} \cos \left(\varrho - \frac{2\pi}{3} \right) - j\omega \frac{\pi}{p} z_2 \left[- \left(\frac{1}{2} \underline{\phi}_{10} + \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_{20} \right) \cos \alpha - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_{10} - \frac{1}{2} \underline{\phi}_{20} \right) \sin \alpha \right], \\ \underline{U}_{y30} &= \underline{E} \cos \left(\varrho - \frac{4\pi}{3} \right) - j\omega \frac{\pi}{p} z_2 \left[\left(-\frac{1}{2} \underline{\phi}_{10} + \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_{20} \right) \cos \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_{10} - \frac{1}{2} \underline{\phi}_{20} \right) \sin \alpha \right], \end{aligned} \right. \quad (2.6a)$$

oraz

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta \underline{U}_{y1} &= j\omega \frac{\pi}{p} z_2 (\underline{\phi}_{11} \cos \alpha - \underline{\phi}_{21} \sin \alpha), \\ \Delta \underline{U}_{y2} &= j\omega \frac{\pi}{p} z_2 \left[- \left(\frac{1}{2} \underline{\phi}_{11} + \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_{21} \right) \cos \alpha - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_{11} - \frac{1}{2} \underline{\phi}_{21} \right) \sin \alpha \right], \\ \Delta \underline{U}_{y3} &= j\omega \frac{\pi}{p} z_2 \left[\left(-\frac{1}{2} \underline{\phi}_{11} + \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_{21} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_{11} + \frac{1}{2} \underline{\phi}_{21} \right) \sin \alpha \right]; \end{aligned} \right. \quad (2.6b)$$

jak widać z powyższych wzorów jest spełniona zależność:

$$\underline{U}_{y1} + \underline{U}_{y2} + \underline{U}_{y3} = 0; \quad (2.6c)$$

— dla prądów w fazach wirnika, po podstawieniu (2.4) do (1.22) otrzymuje się:

$$\underline{I}_{21} = \underline{I}_{210} - \Delta \underline{I}_{21}, \quad \underline{I}_{22} = \underline{I}_{220} - \Delta \underline{I}_{22}, \quad \underline{I}_{23} = \underline{I}_{230} - \Delta \underline{I}_{23}, \quad (2.7)$$

gdzie $\underline{I}_{210}$, $\underline{I}_{220}$, $\underline{I}_{230}$ są prądami odpowiadającymi szczelinie równomiernej i otrzymuje się je ze wzorów (1.46) przez podstawienie odpowiednich wartości (2.6a), co daje:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{210} &= \frac{\underline{U}_{y10}}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{E} \cos \varrho - j\omega \frac{\pi}{p} z_2 (\underline{\phi}_1 \cos \alpha - \underline{\phi}_2 \sin \alpha)}{\underline{Z}_2}, \\ \underline{I}_{220} &= \frac{\underline{U}_{y20}}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{E} \cos \left(\varrho - \frac{2\pi}{3} \right) - j\omega \frac{\pi}{p} z_2 \left[- \left(\frac{1}{2} \underline{\phi}_{10} + \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_{20} \right) \cos \alpha + \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_{10} - \frac{1}{2} \underline{\phi}_{20} \right) \sin \alpha \right]}{\underline{Z}_2}, \\ \underline{I}_{230} &= \frac{\underline{U}_{y30}}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{E} \cos \left(\varrho - \frac{4\pi}{3} \right) - j\omega \frac{\pi}{p} z_2 \left[\left(-\frac{1}{2} \underline{\phi}_{10} + \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_{20} \right) \cos \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \underline{\phi}_{10} + \frac{1}{2} \underline{\phi}_{20} \right) \sin \alpha \right]}{\underline{Z}_2}, \end{aligned} \quad (2.7a)$$

oraz

$$\begin{aligned}\Delta I_{21} &= j\omega \frac{\pi}{p} \frac{z_2}{Z_2} (\phi_{11} \cos \alpha - \phi_{21} \sin \alpha), \\ \Delta I_{22} &= j\omega \frac{\pi}{p} \frac{z_2}{Z_2} \left[-\left(\frac{1}{2} \phi_{11} + \frac{\sqrt{3}}{2} \phi_{21} \right) \cos \alpha - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \phi_{11} - \frac{1}{2} \phi_{21} \right) \sin \alpha \right], \\ \Delta I_{23} &= j\omega \frac{\pi}{p} \frac{z_2}{Z_2} \left[\left(-\frac{1}{2} \phi_{11} + \frac{\sqrt{3}}{2} \phi_{21} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \phi_{11} + \frac{1}{2} \phi_{21} \right) \sin \alpha \right];\end{aligned}\quad (2.7b)$$

— dla przepływu uzwojenia wirnika, po podstawieniu (2.7) do (1.47) otrzymuje się:

$$\sum_{k=1}^3 \theta_{2k} = \sum_{k=1}^3 \theta_{2ko} - \Delta \theta_2, \quad (2.8)$$

gdzie $\sum_{k=1}^3 \theta_{2ko}$ jest przepływem uzwojenia wirnika dla przypadku szczeliny równomiernej, danym wzorem (1.47):

$$\sum_{k=1}^3 \theta_{2ko} = \frac{z_2}{p} \left[\frac{3}{2} I_{210} \cos \left(\frac{\pi}{\tau} x - \alpha \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} (I_{220} - I_{230}) \sin \left(\frac{\pi}{\tau} x - \alpha \right) \right], \quad (2.8a)$$

zaś $\Delta \theta_2$ jest przyrostem przepływu uzwojenia wirnika, wynikającym z nierównomiernej szczeliny powietrznej, równym:

$$\Delta \theta_2 = \frac{z_2}{p} \left[\frac{3}{2} \Delta I_{21} \cos \left(\frac{\pi}{\tau} x - \alpha \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} (\Delta I_{22} - \Delta I_{23}) \sin \left(\frac{\pi}{\tau} x - \alpha \right) \right]. \quad (2.8b)$$

W postaci rozwiniętej, po wprowadzeniu (2.7b), przyrost przepływu będzie (Y_{2R} według (1.53)):

$$\begin{aligned}\Delta \theta_2 &= j \frac{3}{2} \omega \frac{\pi}{p^2} Y_{2R} \left[(\phi_{11} \cos \alpha - \phi_{21} \sin \alpha) \cos \left(\frac{\pi}{\tau} x - \alpha \right) + \right. \\ &\quad \left. + (\phi_{21} \cos \alpha + \phi_{11} \sin \alpha) \sin \left(\frac{\pi}{\tau} x - \alpha \right) \right].\end{aligned}\quad (2.8c)$$

Wyrażenie dla momentu obrotowego otrzymuje się ze wzoru (1.34) przez podstawienie:

$$\begin{aligned}\phi_1 &\triangleq \phi_{10} + \phi_{11}, \\ \phi_2 &\triangleq \phi_{20} + \phi_{21}.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Podstawienie to wynika bezpośrednio z porównania wzorów (1.12) i (2.4) dla strumieni skojarzonych z uzwojeniem wirnika w przypadku równomiernej i nierównomiernej szczeliny powietrznej.

Jako wynik wskazanych powyżej obliczeń z jednoczesnym uwzględnieniem zależności (1.48), (1.49), (1.50) oraz (1.51) (gdyż rozpatrywany jest przypadek symetrycznego zasilania i symetrycznych uzwojeń) otrzymuje się:

$$M = M_o + \Delta M, \quad (2.10)$$

gdzie M_o — moment obrotowy selsyna transformatorowego dla przypadku szczeliny równomiernej dany wzorem (1.61)

$$M_o = \frac{bz_1 I_1 z_2 I_2}{R_\mu - j3a(Y_1 - Y_{2R})} \sin(\vartheta - \varrho - \alpha), \quad (2.11)$$

lub w postaci związanej ze wzorem (1.34)

$$M_o = \frac{\sqrt{3}}{3Z_2^2} \frac{\pi}{p} z_2 (A_1 \phi_{10} - A_2 \phi_{20}), \quad (2.11a)$$

zaś ΔM jest szukanym przyrostem momentu (błędem selsyna), wynikającym z nierównomierności szczeliny powietrznej, równym

$$\Delta M = \frac{\sqrt{3}}{3Z_2^2} \frac{\pi}{p} z_2 (A_1 \phi_{11} - A_2 \phi_{21}). \quad (2.12)$$

Wzór ten po wprowadzeniu wyrażeń (1.49), (1.50) i (1.57) przyjmuje postać:

$$\Delta M = \frac{\pi}{p} I_2 z_2 [\phi_{11} \sin(\varrho + \alpha) + \phi_{21} \cos(\varrho + \alpha)]. \quad (2.12a)$$

Celem znalezienia składowych strumienia magnetycznego należy rozwiązać równanie (2.2) przy wprowadzeniu dotychczasowych ustaleń i wykorzystaniu wyrażeń (1.11) oraz (2.3). Dla uproszczenia zapisu zostanie wykorzystane wprowadzone oznaczenie:

$$\underline{\phi} = \underline{\phi}_o + \Delta \underline{\phi} + \Delta_r \underline{\phi}, \quad (2.13)$$

gdzie:

$$\underline{\phi}_o = \underline{\phi}_{10} \sin \frac{\pi}{\tau} x + \underline{\phi}_{20} \cos \frac{\pi}{\tau} x, \quad (2.13a)$$

$$\Delta \underline{\phi} = \underline{\phi}_{11} \sin \frac{\pi}{\tau} x + \underline{\phi}_{21} \cos \frac{\pi}{\tau} x, \quad (2.13b)$$

$$\Delta_r \underline{\phi} = \sum_{r=2}^{\infty} \left(\underline{\phi}_{1r} \sin r \frac{\pi}{\tau} x + \underline{\phi}_{2r} \cos r \frac{\pi}{\tau} x \right). \quad (2.13c)$$

Po podstawieniu (2.13) do (2.2) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} & \left[1 - q \cos \left(\eta - \frac{\pi}{\tau} x \right) \right] \left[\frac{d^2 \underline{\phi}_o}{dx^2} + \frac{d^2 \Delta \underline{\phi}}{dx^2} + \frac{d^2 \Delta_r \underline{\phi}}{dx^2} \right] + \\ & - q \frac{\pi}{\tau} \sin \left(\eta - \frac{\pi}{\tau} x \right) \left[\frac{d \underline{\phi}_o}{dx} + \frac{d \Delta \underline{\phi}}{dx} + \frac{d \Delta_r \underline{\phi}}{dx} \right] - G_o R_{\mu o} [\underline{\phi}_o + \Delta \underline{\phi} + \Delta_r \underline{\phi}] = \\ & = -G_o \frac{d}{dx} \left[\sum_{j=1}^3 \underline{\theta}_{1jo} - \Delta \theta_1 - \sum_{k=1}^3 \underline{\theta}_{2ko} + \Delta \theta_2 \right]. \quad (2.14) \end{aligned}$$

Z równania tego wynikają dwa następujące równania różniczkowe:

$$\frac{d^2 \underline{\phi}_o}{dx^2} - G_o R_{\mu o} \underline{\phi}_o = -G_o \frac{d}{dx} \left(\sum_{j=1}^3 \underline{\theta}_{1jo} - \sum_{k=1}^3 \underline{\theta}_{2ko} \right), \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} & \left[1 - q \cos \left(\eta - \frac{\pi}{\tau} x \right) \right] \left(\frac{d^2 \Delta \underline{\phi}}{dx^2} + \frac{d^2 \Delta_r \underline{\phi}}{dx^2} \right) - q \frac{\pi}{\tau} \sin \left(\eta - \frac{\pi}{\tau} x \right) \left(\frac{d \Delta \underline{\phi}}{dx} + \frac{d \Delta_r \underline{\phi}}{dx} \right) + \\ & - G_o R_{\mu o} (\Delta \underline{\phi} + \Delta_r \underline{\phi}) = G_o \frac{d}{dx} (\Delta \underline{\theta}_1 - \Delta \underline{\theta}_2) + q \left[\cos \left(\eta - \frac{\pi}{\tau} x \right) \frac{d^2 \underline{\phi}_o}{dx^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\pi}{\tau} \sin \left(\eta - \frac{\pi}{\tau} x \right) \frac{d \underline{\phi}_o}{dx} \right]. \quad (2.16) \end{aligned}$$

Równanie (2.15) jest równaniem (1.8), w którym wykonano podstawienia (1.23) i (1.44) oraz (1.23) z [1]. Jego rozwiązanie jest dane wzorami (1.60), w których jedynie $\underline{\phi}_1$ należy zastąpić przez $\underline{\phi}_{10}$, a $\underline{\phi}_2$ przez $\underline{\phi}_{20}$. Tak więc:

$$\begin{cases} \underline{\phi}_{10} = -\frac{\pi}{p\tau} \frac{z_1 I_1 \cos \vartheta + z_2 I_2 \cos(\vartheta + \alpha)}{R_\mu - j3a(Y_1 - Y_{2R})}, \\ \underline{\phi}_{20} = \frac{\pi}{p\tau} \frac{z_1 I_1 \sin \vartheta - z_2 I_2 \sin(\vartheta + \alpha)}{R_\mu - j3a(Y_1 - Y_{2R})}. \end{cases} \quad (2.17)$$

Rozwiązanie równania (2.16) względem $\underline{\phi}_{11}$, $\underline{\phi}_{12}$, $\underline{\phi}_{1r}$ i $\underline{\phi}_{2r}$ ($r = 1, 2 \dots n$) pozwoli określić przyrost strumienia magnetycznego wynikający z nierównomierności szczeliny powietrznej, a następnie również przyrost momentu selsyna różnicowego. Przez wykorzystanie zależności pomocniczych (3.25) i (3.26) z [1] oraz wprowadzenie wyrażeń (3.16c) z [1] (2.8c), (2.13b) i (2.13c) oraz ograniczeniu się do $r = 2$, równaniu (2.16) można nadać następującą postać dogodną dla dalszych obliczeń:

$$\begin{aligned} & A \left[(\underline{\phi}_{11} \cos \eta + \underline{\phi}_{21} \sin \eta) \sin 2 \frac{\pi}{\tau} x + (\underline{\phi}_{21} \cos \eta - \underline{\phi}_{11} \sin \eta) \cos 2 \frac{\pi}{\tau} x \right] + \\ & - \left(G_o R_\mu + 3 \frac{\pi^2}{\tau^2} \right) \left(\underline{\phi}_{12} \sin 2 \frac{\pi}{\tau} x + \underline{\phi}_{22} \cos 2 \frac{\pi}{\tau} x \right) + A \left[\underline{\phi}_{12} \sin \left(\eta + \frac{\pi}{\tau} x \right) + \right. \\ & \left. - 3 \underline{\phi}_{13} \sin \left(\eta - 3 \frac{\pi}{\tau} x \right) + \underline{\phi}_{22} \cos \left(\eta + \frac{\pi}{\tau} x \right) + \underline{\phi}_{23} \cos \left(\eta - 3 \frac{\pi}{\tau} x \right) \right] = \\ & = -A \left[(\underline{\phi}_{10} \cos \eta + \underline{\phi}_{20} \sin \eta) \sin 2 \frac{\pi}{\tau} x + (\underline{\phi}_{20} \cos \eta - \underline{\phi}_{10} \sin \eta) \cos 2 \frac{\pi}{\tau} x \right] + \\ & + G_o (R_\mu - j3aY_1 + j3aY_{2R}) \left(\underline{\phi}_{11} \sin \frac{\pi}{\tau} x + \underline{\phi}_{21} \cos \frac{\pi}{\tau} x \right). \quad (2.18) \end{aligned}$$

Po pominięciu wyrazów zawierających trzecią harmoniczną przestrzenną (w prawej stronie równania brak takich wyrazów) oraz wprowadzeniu oznaczenia (1.52) i przek-

sztalcenia (3.28) z [1], przez przyrównanie współczynników przy odpowiednich funkcjach trygonometrycznych kątów $\frac{\pi}{\tau}x$ i $2\frac{\pi}{\tau}x$ otrzymuje się następujący układ równań:

$$\begin{cases} -G_o(R_\mu - \underline{H}_1)\underline{\phi}_{11} + A \cos \eta \underline{\phi}_{12} - A \sin \eta \underline{\phi}_{22} = 0, \\ -G_o(R_\mu - \underline{H}_1)\underline{\phi}_{21} + A \sin \eta \underline{\phi}_{12} + A \cos \eta \underline{\phi}_{22} = 0, \\ A \cos \eta \underline{\phi}_{11} + A \sin \eta \underline{\phi}_{21} - B \underline{\phi}_{12} = -A(\underline{\phi}_{10} \cos \eta + \underline{\phi}_{20} \sin \eta), \\ -A \sin \eta \underline{\phi}_{11} + A \cos \eta \underline{\phi}_{21} - B \underline{\phi}_{22} = -A(\underline{\phi}_{20} \cos \eta - \underline{\phi}_{10} \sin \eta). \end{cases} \quad (2.19)$$

W równaniach (2.19) wprowadzono dodatkowe oznaczenia:

$$\begin{cases} A = q \frac{\pi^2}{\tau^2}, \\ B = G_o R_\mu + 3 \frac{\pi^2}{\tau^2} = G_o R_{\mu o} + 4 \frac{\pi^2}{\tau^2}. \end{cases} \quad (2.20)$$

Rozwiązanie układu równań (3.29) względem niewiadomych $\underline{\phi}_{11}$ i $\underline{\phi}_{21}$, gdyż tylko one występują we wzorze na przyrost momentu (2.12), daje następujące wyniki:

$$\underline{\phi}_{11} = \frac{D_1^{(1)}}{D^{(1)}}, \quad \underline{\phi}_{21} = \frac{D_2^{(2)}}{D^{(1)}}, \quad (2.21)$$

gdzie:

$$\begin{cases} D_1^{(1)} = [-A^4 + A^2 B G_o (R_\mu - \underline{H}_1)] \underline{\phi}_{10}, \end{cases} \quad (2.22)$$

$$\begin{cases} D_2^{(1)} = [-A^4 + A^2 B G_o (R_\mu - \underline{H}_1)] \underline{\phi}_{20}, \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\begin{cases} D^{(1)} = A^4 - 2A^2 B G_o (R_\mu - \underline{H}_1) + B^2 G_o^2 (R_\mu - \underline{H}_1)^2; \end{cases} \quad (2.24)$$

$\underline{H}_1$ jest dane wzorem (1.52) zaś R_μ i G_o są określone w [1].

2.2. Moment pasożytniczy przy $q = \text{const}$ (mimośrodowość)

2.2.1. Zależności ogólne

Wyrażenie dla momentu pasożytniczego ΔM otrzymuje się ze wzoru (2.12a) przez podstawienie wyrażeń (2.21) oraz (2.22) do (2.24). Proste rachunki prowadzą do następującego wyniku:

$$\Delta M = K \frac{bz_1 I_1 z_2 I_2}{R_\mu - \underline{H}_1} \sin(\vartheta - \varrho - \alpha) - K \frac{bz_2^2 I_2^2}{R_\mu - \underline{H}_1} \sin 2(\varrho + \alpha), \quad (2.25)$$

lub

$$\Delta M = K M_o - M_2, \quad (2.25a)$$

gdzie:

$$K = \frac{-A^4 + A^2 B G_o (R_\mu - \underline{H}_1)}{A^4 - 2A^2 B G_o (R_\mu - \underline{H}_1) + B^2 G_o^2 (R_\mu - \underline{H}_1)^2} \quad (2.26)$$

oraz

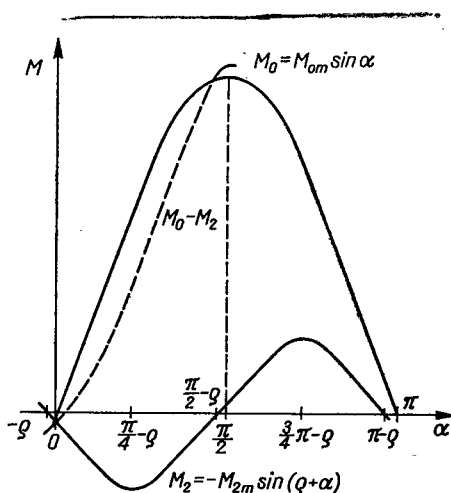
$$M_2 = K \frac{b z_2^2 I_2^2}{R_\mu - H_1} \sin 2(\varrho + \alpha). \quad (2.27)$$

Moment M_2 zależny od drugiej harmonicznej kąta α , jest właściwym momentem pasożytniczym.

Błąd selsyna różnicowego określono jako iloraz amplitudy momentu pasożytniczego 2-giej harmonicznej M_2 przez amplitudę momentu synchronizującego M_o , co daje:

$$\delta M_2 = |K| \frac{z_2 I_2}{z_1 I_1}. \quad (2.28)$$

Błąd selsyna jest więc równy iloczynowi współczynnika K przez iloraz przepływów wirnika i stojana. Przykładowy przebieg momentów synchronizującego M_o i pasożytni-



Rys. 2. Moment synchronizujący M_o i moment pasożytniczy M_2 dla przypadku mimośrodowości

Założenia: $\vartheta = \varrho = \frac{\pi}{36}$; $\delta = \alpha$

czego M_2 dla $\varrho = \vartheta = 5^\circ$, a więc $\delta = \alpha$, podano na rys. 2. Jak łatwo zauważyć występuje silne zniekształcenie krzywej momentu w okolicy punktu $\alpha = 0$ (a więc i $\delta = 0$), co ma bardzo zły wpływ na pracę selsyna różnicowego i powoduje pogorszenie jego klasy dokładności.

2.2.2. Algorytm obliczeń

Dane:

- podziałka biegunowa τ ,
- długość pakietu l ,
- wysokość jarzma stojana h_{z1} i wirnika h_{z2} ,
- częstotliwość zasilania f ,
- liczba zwojów pierwotnych z_1 ,

- impedancja obwodu jednej fazy uzwojenia stojana $\underline{Z}_1$,
- liczba zwojów wtórnych z_2 ,
- impedancja obwodu jednej fazy uzwojenia wirnika $\underline{Z}_2$,
- długość szczeliny powietrznej δ_o ,
- liczba par biegunów p ,
- przenikalność magnetyczna względna żelaza μ'_z ,
- mimośrodowość szczeliny Δh ,
- prąd pierwotny I_{1f} ,
- prąd wtórny I_{2f} .

Kolejność obliczeń:

$$\text{wzór (3.3) z [1]} \quad q = \frac{\Delta h}{\delta_o},$$

$$\text{wzór (2.20)} \quad A = q \frac{\pi^2}{\tau^2}; A^2; A^4,$$

$$\text{wzór (1.6) z [1]} \quad G_o = \mu_o \frac{l}{\delta_o},$$

$$\text{wzór (1.7) z [1]} \quad R_{\mu o} \cong \frac{2}{\mu_o \mu'_z h_z l}; \quad R_\mu = R_{\mu o} + \frac{\pi^2}{\tau^2} \cdot \frac{1}{G_o},$$

$$\text{wzór (2.20)} \quad B = G_o R_{\mu o} + 4 \frac{\pi^2}{\tau^2},$$

$$\text{wzór (2.49) z [1]} \quad a = \pi f \frac{\pi^2}{p^2 \tau}; \quad \underline{Y}_1 = \frac{z_1^2}{\underline{Z}_1},$$

$$\text{wzór (1.53)} \quad \underline{Y}_{2R} = \frac{z_2^2}{\underline{Z}_2},$$

$$\text{wzór (1.52)} \quad \underline{H}_1 = j3a(\underline{Y}_1 - \underline{Y}_{2R}),$$

$$\text{wzór (2.26)} \quad R_\mu \rightarrow \underline{H}_1; \quad (R_\mu - \underline{H}_1)^2,$$

$$A^2 B G_o (R_\mu - \underline{H}_1),$$

$$L = -A^4 + A^2 B G_o (R_\mu - \underline{H}_1); |L|,$$

$$B^2 G_o^2 (R_\mu - \underline{H}_1)^2,$$

$$M = A^4 - 2A^2 B G_o (R_\mu - \underline{H}_1) + B^2 G_o^2 (R_\mu - \underline{H}_1)^2; |M|,$$

$$|K| = \frac{|L|}{|M|},$$

$$\text{wzór (1.57)} \quad z_2 \underline{I}_2 = \frac{3}{2} z_2 \underline{I}_{2f}; \quad z_1 \underline{I}_1 = \frac{3}{2} z_1 \underline{I}_{1f},$$

$$\text{wzór (2.28)} \quad \delta M_2 = |K| \frac{z_2 \underline{I}_2}{z_1 \underline{I}_1}.$$

2.2.3. Przykład liczbowy

Dane: (jednostki SI) — dotyczą selsyna SR-6, serii WAT [6]

$$\begin{array}{ll} \tau = 4,5 \cdot 10^{-2} & l = 3,1 \cdot 10^{-2} \\ h_2 = 0,35 \cdot 10^{-2} & \delta_o = 2 \cdot 10^{-4} \\ f = 50 & p = 1 \\ z_1 = 276 & \underline{Z}_1 = 45 + j400 \\ z_2 = 260 & \underline{Z}_2 = 42 + j200 \\ \mu'_2 = 6 \cdot 10^3 & \Delta h = 2 \cdot 10^{-5} \\ I_{1f} = 0,12 & I_{2f} = 0,18 \end{array}$$

Obliczenia:

$$q = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-4}} = 10^{-1},$$

$$A = 10^{-1} \frac{\pi^2}{4,5^2} 10^4 = 0,487 \cdot 10^3,$$

$$A^2 = 0,237 \cdot 10^6; \quad A^4 = 5,6 \cdot 10^{10},$$

$$G_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{3,1 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-4}} = 1,95 \cdot 10^{-4},$$

$$R_{\mu 0} = \frac{2}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6 \cdot 10^3 \cdot 0,35 \cdot 10^{-2} \cdot 3,1 \cdot 10^{-2}} = 2,44 \cdot 10^6,$$

$$B = 1,95 \cdot 10^{-4} \cdot 2,44 \cdot 10^6 + 4 \cdot 0,487 \cdot 10^4 = 2 \cdot 10^4,$$

$$a = \pi \cdot 50 \frac{\pi^2}{4,5} 10^2 = 3,45 \cdot 10^4,$$

$$\underline{Y}_1 = \frac{276^2}{45 + j400} 21 - j188,$$

$$\underline{Y}_{2R} = \frac{230^2}{42 + j200} = 52,5 - j250,$$

$$R_\mu = 2,44 \cdot 10^6 + \frac{10^4}{4} 0,487 \cdot 10^4 = 14,7 \cdot 10^6,$$

$$\underline{H}_1 = j3 \cdot 3,45 \cdot 10^4 (21 - j188 - 52,5 + j250) = (-6,40 - j3,26) 10^6,$$

$$R_\mu - \underline{H}_1 = 14,7 \cdot 10^6 + (6,4 + j3,26) 10^6 = (21,1 + j3,26) 10^6,$$

$$A^2 BG_o (R_\mu - \underline{H}_1) = 0,237 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 1,95 \cdot 10^{-4} (21,1 + j3,26) 10^6 = (19,5 + j3) \cdot 10^{12},$$

$$L = -A^4 + A^2 BG_o (R_\mu - \underline{H}_1) = -5,6 \cdot 10^{10} + 19,5 \cdot 10^{12} + j3 \cdot 10^{12} \cong (19,5 + j3) 10^{12},$$

$$|L| = 19,7 \cdot 10^{12},$$

$$B^2 G_o^2 (R_\mu - \underline{H}_1)^2 = 4 \cdot 10^8 \cdot 1,95^2 \cdot 10^{-8} (21,1 + j3,26)^2 10^{12} = (66 + j20,8) \cdot 10^{14},$$

$$M = A^4 - 2A^2 BG_o (R_\mu - \underline{H}_1) + B^2 G_o^2 (R_\mu - \underline{H}_1)^2 = -5,6 \cdot 10^{10} + (39 + j6) \cdot 10^{12} + (66 + j20,8) \cdot 10^{14} \cong (66 + j21) \cdot 10^{14},$$

$$|M| = 67 \cdot 10^{14},$$

$$|K| = \frac{|L|}{|M|} = \frac{19,7 \cdot 10^{12}}{67 \cdot 10^{14}} = 0,295 \cdot 10^{-2},$$

$$z_2 I_2 = 260 \frac{3}{2} \cdot 0,18 = 702,$$

$$z_1 I_1 = 276 \cdot \frac{3}{2} \cdot 0,12 = 496,$$

$$\delta M_2 = |K| \frac{z_2 I_2}{z_1 I_1} = 0,295 \frac{702}{496} 10^{-2} = 0,417 \cdot 10^{-2}.$$

2.3. Moment pasożytniczy w przypadku mimośrodowości i bicia ($q \neq \text{const}$)

Zależność analityczna dla szczeliny w omawianym przypadku została dokładnie omówiona w [7] i odpowiednie wzory podano w tablicy 1 wiersz 2 w [1]. Odchyłkę szczeliny Δh można oszacować

$$\Delta h \leq a_1 + b_1, \quad (2.29)$$

gdzie:

a_1 — wartość bicia,

b_1 — wartość mimośrodowości.

Wówczas otrzymuje się:

$$q_{gr} = \frac{a_1 + b_1}{\delta_o}. \quad (2.30)$$

Wstawiając q_{gr} do wzorów (2.20) i (2.26) otrzymuje się wartość momentu pasożytniczego, przy czym:

$$A_{gr} = q_{gr} \frac{\pi^2}{\tau^2}. \quad (2.31)$$

3. WPŁYW ELIPTYCZNOŚCI PAKIETÓW STOJANA I WIRNIKA NA MOMENT OBROTOWY SELSYNA RÓŻNICOWEGO

3.1. Zależności ogólne

Przedmiotem analizy w niniejszym rozdziale będzie wpływ błędu obróbki, polegającego na eliptyczności zewnętrznej powierzchni wirnika i wewnętrznej powierzchni stojana. Analiza zostanie przeprowadzona analogicznie jak w rozdziale 4 [1], z wykorzystaniem podanych tam rysunków 4.1 i 4.2 oraz wyprowadzonych zależności dla długości szczeliny powietrznej $\delta(x)$ (wzór 4.4), jednostkowej permeancji szczeliny powietrznej $G_o(x)$ (wzór 4.5) oraz dla jednostkowej reluktancji obwodu magnetycznego $R_\mu(x)$ (wzór 4.6). Przypomnieć należy, że przy wymienionych założeniach pozostaje w mocy wzór (1.8) z [1], a tym

samym i wzór (2.1) z niniejszej pracy, gdyż pole magnetyczne w szczelinie jest nadal funkcją jedynie zmiennej x .

Postawione w tytule zadanie zostanie rozwiązane według takiego samego planu, jak zagadnienie rozpatrywane w rozdziale 2 pracy, a mianowicie:

- rozwiązanie równań (2.1) przy założeniach danych wzorami (4.4), (4.5) i (4.6) z [1] i znalezieniu składowych przyrostu strumienia magnetycznego dla przypadku eliptyczności jednej z powierzchni,
- znalezienie ze wzoru (2.12a) momentu pasożytniczego odpowiadającego eliptyczności jednej powierzchni,
- oszacowanie maksymalnej wartości momentu pasożytniczego w przypadku eliptyczności obu rozpatrywanych powierzchni.

Po podstawieniu (4.4) i (4.5) z [1] do (2.1) otrzymuje się następujące równanie:

$$\left(1 + q_e \cos 2 \frac{\pi}{\tau} x\right) \frac{d^2 \phi}{dx^2} - 2q_e \frac{\pi}{\tau} \sin 2 \frac{\pi}{\tau} x \frac{d\phi}{dx} - G_o R_{\mu o} \phi = -G_o \frac{d}{dx} \left[\sum_{j=1}^3 \theta_{1j} - \sum_{k=1}^3 \theta_{2k} \right], \quad (3.1)$$

gdzie współczynnik określający eliptyczność:

$$q_e = \frac{\Delta r}{\delta_o} < 1. \quad (3.2)$$

Równanie różniczkowe (3.1) zostanie rozwiązane dla przypadku symetrycznego zasilania i symetrycznych uzwojeń. Podobnie jak dla rozwiązania równania (2.2) przyjęto metodę współczynników nieoznaczonych, zakładając rozwiązanie dla stanu ustalonego w postaci (2.3). W związku z tym zachowuje ważność rozumowanie podane w rozdziale 2 od wzoru (2.3) do (2.13), łącznie z wyprowadzonymi wzorami. Po podstąpieniu (2.13), (2.8) oraz (3.16) z [1] do (3.1) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} & \left(1 + q_e \cos 2 \frac{\pi}{\tau} x\right) \left(\frac{d^2 \phi_o}{dx^2} + \frac{d^2 \Delta \phi}{dx^2} + \frac{d^2 \Delta_r \phi}{dx^2} \right) + \\ & - 2q_e \frac{\pi}{\tau} \sin 2 \frac{\pi}{\tau} x \left(\frac{d\phi_o}{dx} + \frac{d\Delta \phi}{dx} + \frac{d\Delta_r \phi}{dx} \right) - G_o R_{\mu o} (\phi_o + \Delta \phi + \Delta_r \phi) = \\ & = -G_o \frac{d}{dx} \left[\sum_{j=1}^3 \theta_{1j o} - \Delta \theta_1 - \sum_{k=1}^3 \theta_{2k o} + \Delta \theta_2 \right]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Z równania tego wynikają dwa równania różniczkowe, z których jedno jest równaniem (2.15), a mianowicie:

$$\frac{d^2 \phi_o}{dx^2} - G_o R_{\mu o} \phi_o = -G_o \frac{d}{dx} \left[\sum_{j=1}^3 \theta_{1j o} - \sum_{k=1}^3 \theta_{2k o} \right], \quad (2.15)$$

zaś drugie ma postać:

$$\begin{aligned} & \left(1 + q_e \cdot \cos 2 \frac{\pi}{\tau} x\right) \left(\frac{d^2 \Delta \phi}{dx^2} + \frac{d^2 \Delta r \phi}{dx^2}\right) - 2q_e \frac{\pi}{\tau} \sin 2 \frac{\pi}{\tau} x \left(\frac{d \Delta \phi}{dx} + \frac{d \Delta r \phi}{dx}\right) - \\ & - G_o R_{\mu o} (\Delta \phi + \Delta r \phi) = G_o \frac{d}{dx} (\Delta \theta_1 - \Delta \theta_2) - q_e \left(\cos 2 \frac{\pi}{\tau} x \cdot \frac{d^2 \phi_o}{dx^2} - \right. \\ & \left. - 2 \frac{\pi}{\tau} \sin 2 \frac{\pi}{\tau} x \cdot \frac{d \phi_o}{dx} \right). \quad (3.4) \end{aligned}$$

Rozwiązanie równania (2.15) jest dane wzorem (2.17). Rozwiązanie równania (3.4) otrzymuje się przez podstawienie doń wyrażeń (2.13b), (2.13c), (2.8c) oraz (3.16c) z [1] i uwzględnienie zależności (3.25) oraz (4.10) z [1]. Po wykonaniu omówionych rachunków otrzymuje się:

$$\begin{aligned} & -A_e \left(\frac{1}{2} \phi_{11} \sin \frac{\pi}{\tau} x - \frac{1}{2} \phi_{21} \cos \frac{\pi}{\tau} x + \frac{3}{2} \phi_{11} \sin 3 \frac{\pi}{\tau} x + \frac{3}{2} \phi_{21} \cos 3 \frac{\pi}{\tau} x \right) + \\ & - \frac{1}{2} A_e \sum_{r=2}^{\infty} r^2 \left\{ \phi_{1r} \left[\sin(r-2) \frac{\pi}{\tau} x + \sin(r+2) \frac{\pi}{\tau} x \right] + \phi_{2r} \left[\cos(r-2) \frac{\pi}{\tau} x + \right. \right. \\ & \left. \left. + \cos(r+2) \frac{\pi}{\tau} x \right] \right\} - \frac{1}{2} A_e \sum_{r=2}^{\infty} r \left\{ \phi_{1r} \left[-\sin(r-2) \frac{\pi}{\tau} x + \sin(r+2) \frac{\pi}{\tau} x \right] - \right. \\ & \left. - \phi_{2r} \left[\cos(r-2) \frac{\pi}{\tau} x - \cos(r+2) \frac{\pi}{\tau} x \right] \right\} - \frac{\pi^2}{\tau^2} \sum_{r=1}^{\infty} r^2 \left(\phi_{1r} \sin r \frac{\pi}{\tau} x + \phi_{2r} \cos r \frac{\pi}{\tau} x \right) - \\ & - G_o R_{\mu o} \sum_{r=2}^{\infty} \left(\phi_{1r} \sin r \frac{\pi}{\tau} x + \phi_{2r} \cos r \frac{\pi}{\tau} x \right) = G_o (R_{\mu} - H_1) \left(\phi_{11} \sin \frac{\pi}{\tau} x + \phi_{21} \cos \frac{\pi}{\tau} x \right) + \\ & + A_e \left(\frac{1}{2} \phi_{10} \sin \frac{\pi}{\tau} x - \frac{1}{2} \phi_{20} \cos \frac{\pi}{\tau} x + \frac{3}{2} \phi_{10} \sin 3 \frac{\pi}{\tau} x + \frac{3}{2} \phi_{20} \cos 3 \frac{\pi}{\tau} x \right), \quad (3.5) \end{aligned}$$

gdzie:

H_1 — według wzoru (1.52) oraz

$$A_e = q_e \frac{\pi^2}{\tau^2}. \quad (3.6)$$

Ponieważ prawa strona równania zawiera tylko pierwsze i trzecie harmoniczne przestrzenne, w rozwinięciach szeregów należy ograniczyć się do $r = 3$. Pomijając jednocześnie współczynniki przy piątej harmonicznej oraz wprowadzając dodatkowo oznaczenie:

$$B_1 = G_o R_{\mu o} + 9 \frac{\pi^2}{\tau^2}, \quad (3.7)$$

po wykonaniu prostych rachunków, z równania (3.5) otrzymuje się następujące równanie:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}A_e\left(\phi_{11}\sin\frac{\pi}{\tau}x-\phi_{21}\cos\frac{\pi}{\tau}x+3\phi_{11}\sin3\frac{\pi}{\tau}x+3\phi_{21}\cos3\frac{\pi}{\tau}x\right)+ \\
 & -3A_e\left(\phi_{13}\sin\frac{\pi}{\tau}x+\phi_{23}\cos\frac{\pi}{\tau}x\right)-B_1\left(\phi_{13}\sin3\frac{\pi}{\tau}x+\phi_{23}\cos3\frac{\pi}{\tau}x\right)- \\
 & -G_o(R_\mu-\underline{H}_1)\left(\phi_{11}\sin\frac{\pi}{\tau}x+\phi_{21}\cos\frac{\pi}{\tau}x\right)=\frac{1}{2}A_e\left(\phi_{10}\sin\frac{\pi}{\tau}x- \right. \\
 & \left. -\phi_{20}\cos\frac{\pi}{\tau}x+3\phi_{10}\sin3\frac{\pi}{\tau}x+3\phi_{20}\cos3\frac{\pi}{\tau}x\right). \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

Przez przyrównanie współczynników przy odpowiednich funkcjach trygonometrycznych tych samych kątów otrzymuje się następujący układ równań:

$$\begin{aligned}
 -\left[\frac{1}{2}A_e+G_o(R_\mu-\underline{H}_1)\right]\phi_{11} & \quad -3A_e\phi_{13} & = \frac{1}{2}A_e\phi_{10} \\
 \left[\frac{1}{2}A_e-G_o(R_\mu-\underline{H}_1)\right]\phi_{21} & \quad -3A_e\phi_{23} & = -\frac{1}{2}A_e\phi_{20} \\
 -\frac{3}{2}A_e\phi_{11} & \quad -B_1\phi_{13} & = \frac{3}{2}A_e\phi_{10} \\
 -\frac{3}{2}A_e\phi_{21} & \quad -B_1\phi_{23} & = \frac{3}{2}A_e\phi_{20}.
 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Rozwiązanie powyższego układu równań względem niewiadomych ϕ_{11} i ϕ_{21} , gdyż tylko one występują w wyrażeniu dla momentu pasożytniczego (2.12a), daje następujące wyniki:

$$\phi_{11} = \frac{D_1^{(2)}}{D^{(2)}}; \quad \phi_{21} = \frac{D_2^{(2)}}{D^{(2)}}, \quad (3.10)$$

gdzie:

$$D_1^{(2)} = \phi_{10} \left\{ -\frac{81}{4}A_e^4 + A_e^2 \left[\frac{9}{2}B_1G_o(R_\mu-\underline{H}_1) + \frac{1}{4}B_1^2 \right] - \frac{1}{2}A_eB_1^2G_o(R_\mu-\underline{H}_1) \right\}, \quad (3.11)$$

$$D_2^{(2)} = \phi_{20} \left\{ -\frac{81}{4}A_e^4 + A_e^2 \left[\frac{9}{2}B_1G_o(R_\mu-\underline{H}_1) + \frac{1}{4}B_1^2 \right] + \frac{1}{2}A_eB_1^2G_o(R_\mu-\underline{H}_1) \right\}, \quad (3.12)$$

$$D^{(2)} = \frac{81}{4}A_e^4 - A_e^2 \left[9B_1G_o(R_\mu-\underline{H}_1) + \frac{1}{4}B_1^2 \right] + B_1^2G_o^2(R_\mu-\underline{H}_1)^2, \quad (3.13)$$

a pozostałe oznaczenia określono powyżej.

3.2. Momenty pasożytnicze przy eliptyczności jednej powierzchni

3.2.1. Zależności ogólne

Jeżeli do wzoru (2.12a) podstawić wyrażenia (3.10) — (3.13), to otrzymuje się wzór dla określenia momentu pasożytniczego ΔM . Proste rachunki prowadzą do następującego wyniku:

$$\Delta M = K_1 \frac{bz_1 I_1 z_2 I_2}{(R_\mu - \underline{H}_1)} \sin(\vartheta - \varrho - \alpha) - K_1 \frac{bz_2^2 I_2^2}{(R_\mu - \underline{H}_1)} \sin 2(\varrho + \alpha) + \\ + K_2 \frac{bz_1 I_1 z_2 I_2}{(R_\mu - \underline{H}_1)} \sin(\vartheta + \varrho + \alpha), \quad (3.14)$$

lub

$$\Delta M = K_1 M_o - M_{2e} + M_{1e}, \quad (3.14a)$$

gdzie:

$$K_1 = \frac{-\frac{81}{4} A_e^4 + A_e^2 \left[\frac{9}{2} B_1 G_o (R_\mu - \underline{H}_1) + \frac{1}{4} B_1^2 \right]}{\frac{81}{4} A_e^4 - A_e^2 \left[9 B_1 G_o (R_\mu - \underline{H}_1) + \frac{1}{4} B_1^2 \right] + B_1^2 G_o^2 (R_\mu - \underline{H}_1)^2}, \quad (3.15)$$

$$K_2 = \frac{\frac{1}{2} A_e B_1^2 G_o (R_\mu - \underline{H}_1)}{\frac{81}{4} A_e^4 - A_e^2 \left[9 B_1 G_o (R_\mu - \underline{H}_1) + \frac{1}{4} B_1^2 \right] + B_1^2 G_o^2 (R_\mu - \underline{H}_1)^2} \quad (3.16)$$

oraz

$$M_{2e} = K_1 \frac{bz_2^2 I_2^2}{(R_\mu - \underline{H}_1)} \sin 2(\varrho + \alpha), \quad (3.17)$$

$$M_{1e} = K_2 \frac{bz_1 I_1 z_2 I_2}{(R_\mu - \underline{H}_1)} \sin(\vartheta + \varrho + \alpha). \quad (3.18)$$

Momenty: M_{2e} zależny od drugiej harmonicznej kąta α i M_{1e} przesunięty w przestrzeni względem momentu M_o o kąt $2(\varrho + \alpha)$ stanowią szukane momenty pasożytnicze.

Błąd selsyna różnicowego określono jako iloraz amplitudy każdego z momentów pasożytniczych przez amplitudę momentu synchronizującego M_o . Istnieją więc dwie składowe błędy, a mianowicie:

— składowa odpowiadająca drugiej harmonicznej kąta α

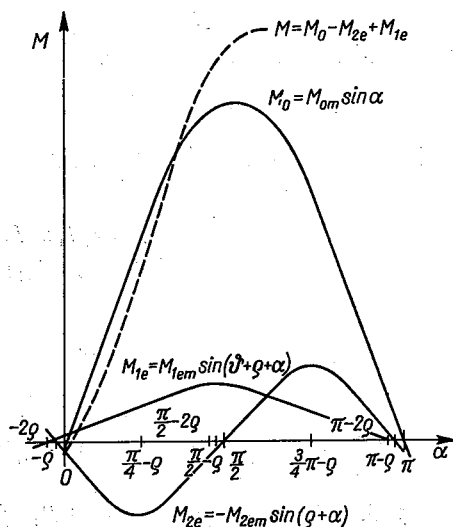
$$\delta M_{2e} = |K_1| \frac{z_2 I_2}{z_1 I_1}, \quad (3.19)$$

— składowa odpowiadająca pierwszej harmonicznej kąta α a stanowiąca moment przesunięty w fazie o kąt $2(\varrho + \alpha)$ względem momentu synchronizującego

$$\delta M_{1e} = |K_2|. \quad (3.20)$$

Składowe te muszą być oczywiście obliczone oddzielnie i oddzielnie też należy analizować wpływ każdej z nich.

Przykładowy przebieg momentu synchronizującego M_o oraz momentów pasożytniczych M_{2e} i M_{1e} w funkcji kąta α podano na rys. 3. Wykresy te zostały sporządzone w za-



Rys. 3. Moment synchronizujący M_o i momenty pasożytnicze M_{2e} i M_{1e} dla przypadku eliptyczności

$$\text{Założenia: } \vartheta = q = \frac{\pi}{36}; \quad \delta = \alpha$$

łożeniu $\vartheta = q = \frac{\pi}{36}$, a więc $\delta = \alpha$. Z wykresów widać, że momenty pasożytnicze powodują odkształcenie krzywej momentu w pobliżu punktu $\alpha = 0$, co jest równoznaczne z pogorszeniem klasy selsyna.

3.2.2. Algorytm obliczeń

Dane:

- podziałka biegunowa τ ,
- długość pakietu l ,
- wysokość jarzma stojana h_{21} i wirnika h_{22} ,
- częstotliwość zasilania f ,
- liczba zwojów pierwotnych z_1 ,
- impedancja jednej fazy uzwojenia stojana $\underline{Z}_1$,
- liczba zwojów wtórnych z_2 ,
- impedancja obwodu jednej fazy uzwojenia wirnika $\underline{Z}_2$,
- długość szczeliny powietrznej δ_o ,
- liczba par biegunów p ,
- przenikalność względna żelaza μ'_z ,

- połowa różnicy pólów elipsy przekroju zdeformowanego Δr ,
- prąd pierwotny I_{1f} ,
- prąd wtórny I_{2f} .

Kolejność obliczeń:

$$\text{wzór (3.2)} \quad q_e = \frac{\Delta r}{\delta_o}$$

$$\text{wzór (3.6)} \quad A_e = q_e \frac{\pi^2}{\tau^2}; \quad A^2; \quad A^4$$

$$\text{wzór (1.6) z [1]} \quad G_o = \mu_o \frac{l}{\delta_o}$$

$$\text{wzór (1.7) z [1]} \quad R_{\mu o} \cong \frac{2}{\mu_o \mu'_z h_z l}; \quad R_\mu = R_{\mu o} + \frac{1}{G_o} \frac{\pi^2}{\tau^2}$$

$$\text{wzór (3.7)} \quad B_1 = G_o R_{\mu o} + 9 \frac{\pi^2}{\tau^2}$$

$$\text{wzór (2.49) z [1]} \quad a = \pi f \frac{\pi^2}{p^2 \tau}; \quad \underline{Y}_1 = \frac{z_1^2}{\underline{Z}_1}$$

$$\text{wzór (1.53)} \quad \underline{Y}_{2R} = \frac{z_2^2}{\underline{Z}_2}$$

$$\text{wzór (1.52)} \quad \underline{H}_1 = j3a(\underline{Y}_1 - \underline{Y}_{2R})$$

$$\text{wzór (2.26)} \quad R_\mu - \underline{H}_1; \quad (R_\mu - \underline{H}_1)^2$$

$$\frac{81}{4} A_e^4$$

$$\frac{9}{2} B_1 G_o (R_\mu - \underline{H}_1)$$

$$\frac{1}{4} B_1^2$$

$$L_1 = -\frac{81}{4} A_e^4 + A_e^2 \left[\frac{9}{2} B_1 G_o (R_\mu - \underline{H}_1) + \frac{1}{4} B_1^2 \right]$$

$$|L_1|$$

$$L_2 = \frac{1}{2} A_e B_1^2 G_o (R_\mu - \underline{H}_1); \quad |L_2|$$

$$B_1^2 G_o^2 (R_\mu - \underline{H}_1)^2$$

$$M = \frac{81}{4} A_e^4 - A_e^2 \left[9 B_1 G_o (R_\mu - \underline{H}_1) + \frac{1}{4} B_1^2 \right] + B_1^2 G_o^2 (R_\mu - \underline{H}_1)^2$$

$$|M|$$

$$|K_1| = \frac{|L_1|}{|M|}; \quad |K_2| = \frac{|L_2|}{|M|}$$

$$\text{wzór (1.57)} \quad z_2 \underline{I}_2 = \frac{3}{2} z_2 I_{2f}; \quad z_1 I_1 = \frac{3}{2} z_1 I_{1f}$$

$$\text{wzór (3.19)} \quad \delta M_{2e} = |K_1| \frac{z_2 \underline{I}_2}{z_1 I_1}$$

$$\text{wzór (3.20)} \quad \delta M_{1e} = |K_2|.$$

3.2.3. Przykład liczbowy

D a n e: (jednostki SI) — dotyczą selsyna SR-6, serii WAT [6]

$$\begin{array}{ll} \tau = 4,5 \cdot 10^{-2} & 1 = 3,1 \cdot 10^{-2} \\ h_z = 0,35 \cdot 10^{-2} & \delta_o = 2 \cdot 10^{-4} \\ f = 50 & p = 1 \\ z_1 = 276 & \underline{Z}_1 = 45 + j400 \\ z_2 = 260 & \underline{Z}_2 = 42 + j200 \\ \mu'_z = 6 \cdot 10^3 & \Delta r = 2 \cdot 10^{-5} \\ I_{1f} = 0,12 & I_{2f} = 0,18 \end{array}$$

Obliczenia:

$$q_e = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-4}} = 10^{-1}$$

$$A_e = 10^{-1} \frac{\pi^2}{4,5^2} 10^4 = 0,487 \cdot 10^3$$

$$A_e^2 = 0,237 \cdot 10^6; \quad A_e^4 = 5,6 \cdot 10^{10}$$

$$G_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{3,1 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-4}} = 1,95 \cdot 10^{-4}$$

$$R_{\mu o} = \frac{2}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6 \cdot 10^3 \cdot 0,35 \cdot 10^{-2} \cdot 3,1 \cdot 10^{-2}} = 2,44 \cdot 10^6$$

$$R_\mu = 2,44 \cdot 10^6 + \frac{10^4}{4} 0,487 \cdot 10^4 = 14,7 \cdot 10^6$$

$$B_1 = 1,95 \cdot 10^{-4} \cdot 2,44 \cdot 10^6 + 9 \cdot 0,487 \cdot 10^4 = 4,43 \cdot 10^4$$

$$a = \pi \cdot 50 \cdot \frac{\pi^2}{4,5} \cdot 10^2 = 3,45 \cdot 10^4$$

$$\underline{Y}_1 = \frac{276^2}{45 + j400} = 21 - j188$$

$$\underline{Y}_{2R} = \frac{230^2}{42 + j200} = 52,5 - j250$$

$$\underline{H}_1 = j3 \cdot 3,45 \cdot 10^4 (21 - j188 - 52,5 + j250) = (-6,40 - j3,26) 10^6$$

$$R_\mu - \underline{H}_1 = 14,7 \cdot 10^6 + (6,4 + j3,26) 10^6 = (21,1 + j3,26) 10^6$$

$$(R_\mu - \underline{H}_1)^2 = (4,35 + j1,38) 10^{14}$$

$$\frac{81}{4} A_e^4 = 1,13 \cdot 10^{12}$$

$$\frac{9}{2} B_1 G_o (R_\mu - \underline{H}_1) = \frac{9}{2} \cdot 4,43 \cdot 10^4 \cdot 1,95 \cdot 10^{-4} (21,1 + j3,26) 10^6 = (8,2 + j1,27) 10^8$$

$$\frac{1}{4} B_1^2 = \frac{1}{4} \cdot 4,43^2 \cdot 10^8 = 4,9 \cdot 10^8$$

$$L_1 = -1,13 \cdot 10^{12} + 0,237 \cdot 10^6 (13,1 + j1,27) 10^8 = (3,1 + j0,3) \cdot 10^{14}$$

$$|L_1| \cong 3,1 \cdot 10^{14}$$

$$L_2 = \frac{1}{2} 0,487 \cdot 10^3 \cdot 4,43^2 \cdot 10^8 \cdot 1,95 \cdot 10^{-4} (21,1 + j3,26) 10^6 = (19,65 + j3,04) 10^{14}$$

$$|L_2| \cong 21,8 \cdot 10^{14}$$

$$B_1^2 G_o^2 (R_\mu - \underline{H}_1)^2 = 4,43^2 \cdot 10^8 \cdot 1,95^2 \cdot 10^{-8} (4,35 + j1,38) 10^{14} = (3,24 + j1,03) \cdot 10^{16}$$

$$M = 1,13 \cdot 10^{12} - 0,237 \cdot 10^6 (21,1 + j2,54) 10^8 + (3,24 + j1,03) 10^{16} = (3,19 + j1,02) 10^{16}$$

$$|M| = 3,35 \cdot 10^{16}$$

$$|K_1| = \frac{3,1 \cdot 10^{14}}{3,35 \cdot 10^{16}} = 0,925 \cdot 10^{-2}$$

$$|K_2| = \frac{21,8 \cdot 10^{14}}{3,35 \cdot 10^{16}} = 6,5 \cdot 10^{-2}$$

$$z_2 I_2 = \frac{3}{2} 260 \cdot 0,18 = 702$$

$$z_1 I_1 = \frac{3}{2} \cdot 276 \cdot 0,12 = 496$$

$$\delta M_{2e} = 0,925 \cdot 10^{-2} \frac{702}{496} = 1,141 \cdot 10^{-2}$$

$$\delta M_{1e} = 6,5 \cdot 10^{-2}$$

3.3. Momenty pasżytnicze przy eliptyczności obu powierzchni

Przypadek ten przedstawiony na rys. 4.3 z [1] jest w ogólnym przypadku dość skomplikowany. Dla celów praktyki wystarczy rozpatrzenie przypadku granicznego, gdy występuje największa asymetria obwodu magnetycznego. Przypadek taki odpowiada nakładaniu się kierunków osi małej przekroju wewnętrznego walca eliptycznego i osi dużej przekroju zewnętrznego walca eliptycznego.

Jeżeli $2\Delta r_1$ jest różnicą pól osi walca zewnętrznego, zaś $2\Delta r_2$ — różnicą pól osi walca wewnętrznego, to szczelina powietrzna będzie

$$\delta(x) = \delta_o + (\Delta r_1 + \Delta r_2) \cos 2 \frac{\pi}{\tau} x. \quad (3.21)$$

Po wprowadzeniu granicznej wartości współczynnika eliptyczności

$$q_{egr} = \frac{\Delta r_1 + \Delta r_2}{\delta_o} \quad (3.22)$$

otrzymuje się:

$$\delta(x) = \delta_o \left(1 + q_{egr} \cos 2 \frac{\pi}{\tau} x \right). \quad (3.23)$$

Dla otrzymania poszukiwanych wartości momentów pasożytniczych należy obliczyć:

$$A_{egr} = q_{egr} \cdot \frac{\pi^2}{\tau^2} \quad (3.24)$$

oraz wstawić do wzorów (3.19) i (3.20) wyrażenie (3.24) zamiast zmiennej A_e .

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. T. Missala, Uogólniona teoria selsyna, teoria selsyna transformatorowego i analiza jego błędów wynikających z niedokładności obróbki, Rozprawy Elektrotechniczne, 1971, z. 1.
2. J. Owczarek, Zarys współczesnej teorii selsynów nadawczo-odbiorczych, Rozprawy Elektrotechniczne, 1964, z. 4.
3. J. Owczarek, Zarys współczesnej teorii selsynów transformatorowych, Rozprawy Elektrotechniczne, 1966, z. 1.
4. D. C. White and H. H. Woodson, Electromechanical Energy Conversion, J. Wiley, 1959.
5. S. L. Popkov, Osnovy slediaszczego elektroprivoda, Oborongiz., 1955.
6. T. Missala, J. Owczarek, Nowoczesna polska seria selsynów, Przegląd Elektrotechniczny, z. 10, s. 463, 1968.
7. Ju. M. Pulier, Indukcionnyje elektromechaniceskije elementy wyczislitelnyh i distancjonno slediaszczich sistem, Izd. Maszynostrojenie, Moskwa 1964.

T. MISSALA

A NEW THEORY OF DIFFERENTIAL SELSYN AND AN ANALYSIS OF INACCURACIES CAUSED BY IMPROPER MECHANICAL WORKS

Summary

Using the generalized selsyn theory, given by the author in the monograph [1], the generalized theory of differential selsyn is developed in this paper. The case of ideal differential selsyn is discussed and the general formula, describing its synchronizing torque, is derived. The analysis of the symmetric windings case is also considered, as well as the analysis of inaccuracies caused by eccentricity and ellipticity of stator and rotor outlines. The formulas for calculations of parasitic torques are derived and algorithms for calculations and numerical examples are developed.

T. MISSALA

LA THÉORIE DE SELSYN DIFFÉRENTIEL ET L'ANALYSE DES FAUTES RESULTANT DE L'INEXACTITUDE DU TRAITEMENT

Resumé

S'appuyant sur sa publication [1] concernant la théorie de selsyn, l'auteur présente le cas du selsyn différentiel. On étudie le cas du selsyn différentiel idéal et on envisage sur ce fond la formule de moment

synchronique. On étudie le cas des fillements symétriques et ensuite on détermine l'influence de l'inexactitude du traitement: l'excentricité et l'ellipticité des contours. On établit des formules pour des moments parasites et on présente les algorithmes des calculs, ainsi que des exemples numériques.

T. MISSALA

THEORIE DES DIFFERENZ-SELSEYNS UND ANALYSE DER DURCH BEARBEITUNGSUNGENAUIGKEITEN VERURSACHTEN FEHLER

Zusammenfassung

Auf Grund der durch den Autor verallgemeinerten und in [1] angegebenen Selsyntheorie wurde die verallgemeinerte Theorie des Differenzselsyns bearbeitet. Der ideale Selsyn wurde erwogen und die allgemeine Formel für den synchronisierenden Moment abgeleitet. Der Fall von symmetrischen Wicklungen und der Einfluß von Bearbeitungsungenauigkeiten, wie Exzentrizität und Elliptizität des Stators und Rotors wurden untersucht. Allgemeine Formel für Parasit-Momente wurden abgeleitet, sowie Berechnungs-Algorithmen und -Beispiele angegeben.

Т. МИССАЛЯ

ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СЕЛЬСИНА И АНАЛИЗ ОШИБОК, ВЫТЕКАЮЩИХ ИЗ НЕТОЧНОСТИ ОБРАБОТКИ

Резюме

На основе обобщенной теории сельсинов, представленной автором в [1], разработана обобщенная теория дифференциального сельсина.

Рассмотрен пример идеального дифференциального сельсина и выведено общее уравнение его синхронизирующего момента.

Рассмотрен пример симметричных обмоток, а затем влияние неточности обработки: эксцентриситета, эллиптичности, контуров статора и ротора.

Выведено уравнение паразитных моментов, представлены алгоритмы расчетов, а также численные примеры.

Metoda obliczania ustalonych prądów zwarciovych przy zwarciach wewnętrznych w uzwojeniu stojana maszyny synchronicznej z wirnikiem cylindrycznym

KRYSTYNA JACHOWICZ-KOCIOŁEK (ŁÓDŹ)

Instytut Transformatorów, Maszyn i Aparatów Elektrycznych Politechniki Łódzkiej

Otrzymano 4.11.1970

W artykule podano metodę obliczania ustalonych prądów przy zwarciach wewnętrznych w uzwojeniu stojana maszyny synchronicznej z wirnikiem cylindrycznym. Metoda oparta jest na teorii form liniowych niesymetrycznych maszyn elektrycznych. W oparciu o przyjęty w pracy schemat ogólny i równania wyjściowe, można obliczać przy użyciu maszyny cyfrowej wartości prądów dla dowolnego położenia miejsca zwarcia, w przypadku zwarć dwufazowych oraz jedno- i dwufazowych z punktem zerowym. Dla zilustrowania metody przeprowadzono obliczenia prądów zwarciovych w turbogeneratorze o mocy 200 MW.

1. WSTĘP

Analiza zwarć symetrycznych i niesymetrycznych na zaciskach maszyny synchronicznej może być oparta na metodzie składowych symetrycznych 3-fazowych, składowych $\alpha, \beta, 0$ lub składowych wirujących d, q, o ([1], [2], [7]).

Wspólną cechą wymienionych przekształceń jest to, że zalety wynikające z ich stosowania ujawniają się jedynie wówczas, gdy układ analizowany jest wewnętrznie symetryczny (w omawianym przypadku oznacza to trójfazowe, symetryczne uzwojenie stojana). Gdy warunek symetrii oporności poszczególnych uzwojeń fazowych nie jest spełniony, nie uzyska się diagonalizacji macierzy impedancji zarówno dla składowych symetrycznych trójfazowych, jak i dla składowych $\alpha, \beta, 0$. Nowe układy równań będą więc tak samo rozbudowane jak w przypadku operowania wielkościami naturalnymi $I_{A,B,C}$, $U_{A,B,C}$, $Z_{A,B,C}$. Z kolei przekształcenie d, q, o nie doprowadzi przy niesymetrii uzwojeń do układu równań różniczkowych o współczynnikach stałych. Parametry L_d i L_q będą funkcją czasu, co podważa celowość stosowania tej metody.

Podstawową cechą zwarć wewnętrznych jest niesymetryczna konfiguracja uzwojeń i odkształcone pole magnetyczne. Z tego względu analiza zwarć wewnętrznych wymaga innych metod obliczeniowych.

Autorzy radzieccy [3], [5], [8] stosują metodę składowych symetrycznych 3-fazowych oraz składowych wirujących d, q, o do analizy zwarć wewnętrznych, zakładając, że w przypadku zwarć 2- i 3-fazowych, zwierana jest jednakowa liczba zwojów w poszczególnych

uzwojeniach fazowych. Autor amerykański Kinitsky [6] stosuje metodę składowych symetrycznych 3-fazowych dla obliczania prądów zwarciovych przy dowolnych rodzajach zwarć, pomijając impedancje wzajemne między układami kolejności zgodnej, przeciwnej i zerowej ($Z_{12} = Z_{10} = Z_{20} = 0$).

W artykule przedstawiono metodę obliczania ustalonych prądów zwarciovych przy zwarciach wewnętrznych w uzwojeniu stojana maszyny synchronicznej, opartą na teorii form liniowych i kwadratowych niesymetrycznych maszyn elektrycznych [9].

2. PODSTAWY TEORII FORM LINIOWYCH NIESYMETRYCZNYCH MASZYN ELEKTRYCZNYCH

Przedstawione poniżej rozważania oparte są na pracach [9], [10] i dotyczą maszyn o dowolnie asymetrycznym uzwojeniu stojana, przy zachowaniu symetrii elektrycznej i magnetycznej wirnika. Teoria form liniowych zakłada liniowość związków między indukcją w szczelinie a funkcją przepływu. Odształcone pole magnetyczne w maszynie jest zastąpione, zgodnie z rozkładem Fouriera, ciągiem pól harmonicznych, przy czym rząd pola harmonicznego odniesiony jest do obwodu geometrycznego stojana (kął pełny pierwszej harmonicznej odpowiada długości obwodu stojana).

Dla stanu ustalonego i przy założeniu, że kształt krzywej napięcia zasilającego lub wzniesanej siły elektromotorycznej jest sinusoidalny, uzyskuje się następujące związki między wartością napięcia na dowolnej gałęzi uzwojenia a wartością prądu w tejże gałęzi:

$$[U_s] = [E_s] - \left\{ [C][Z_r][C]_t + \frac{1}{m_1} [C][V][Z^*][V^*]_t [C]_t \right\} [I_s] \dots, \quad (1)$$

gdzie:

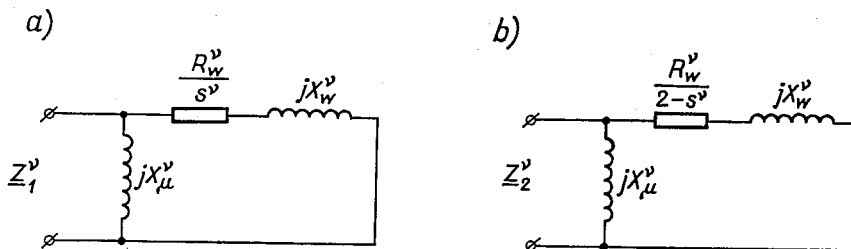
- $[U_s]$ — macierz kolumnowa napięć na s uzwojeniach stojana,
- $[E_s]$ — macierz kolumnowa SEM-ych indukowanych w s uzwojeniach stojana,
- $[C]$ — macierz o n kolumnach i s wierszach, przekształcająca układ n -uzwojeniowy na układ s -uzwojeniowy,
- $[C]_t$ — transponowana macierz $[C]$,
- $[Z_r]$ — macierz diagonalna impedancji rozproszenia n uzwojeń stojana,
- $[V], [V^*]_t$ — operatory stworzone w sensie Hermite'a, przekształcające parametry uzwojeń wirnika na dowolną konfigurację niesymetryczną n uzwojeń stojana,
- $[Z^*]$ — macierz diagonalna impedancji dla składowej zgodnej i przeciwnej harmonicznych,
- $[I_s]$ — macierz kolumnowa prądów płynących w s uzwojeniach,
- m_1 — liczba faz uzwojenia stojana.

Wielkości zespolone zaznaczone są przez podkreślenie.

Wirnikowi przypisany jest nieskończony ciąg impedancji odpowiednio do rozważanego ciągu pól harmonicznych w szczelinie. Impedancje dla składowej zgodnej z przeciwnej dowolnej ν -tej harmonicznej określa się ze schematów przedstawionych na rys. 1.

Operator $[V]$ tworzą pary wzajemnie sprzężonych kolumn, przy czym każdej harmonicznej pola odpowiada jedna para kolumn. Liczba wierszy odpowiada liczbie elementarnych uzwojeń stojana (n):

$$[V] = \begin{bmatrix} \zeta_1^1 e^{-j\alpha_1^1} & \zeta_1^1 e^{+j\alpha_1^1} & \dots & \zeta_1^v e^{-j\alpha_1^v} & \zeta_1^v e^{+j\alpha_1^v} \\ \zeta_2^1 e^{-j\alpha_2^1} & \zeta_2^1 e^{+j\alpha_2^1} & \dots & \zeta_2^v e^{-j\alpha_2^v} & \zeta_2^v e^{+j\alpha_2^v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \zeta_n^1 e^{-j\alpha_n^1} & \zeta_n^1 e^{+j\alpha_n^1} & \dots & \zeta_n^v e^{-j\alpha_n^v} & \zeta_n^v e^{+j\alpha_n^v} \end{bmatrix} \quad (2)$$



Rys. 1. Schematy zastępcze dla określenia impedancji: a) dla składowej zgodnej, b) dla składowej przeciwnej v -tej harmonicznej

Oznaczenia: s^v — poślizg dla v -tej harmonicznej, R_w^v , X_w^v — rezystancja i reaktancja rozproszenia uzwojenia wirnika dla v -tej harmonicznej, sprowadzona na stronę stojana i odniesiona do jednego z n uzwojeń stojana; X_μ^v — reaktancja magnesowania dla v -tej harmonicznej, odniesiona do jednego z n uzwojeń stojana

Indeksy górne oznaczają rząd harmonicznej, indeksy dolne — numer kolejny uzwojenia:

$$\zeta_k^v = \frac{z_k \xi_k^v}{z_1 \xi_1^v} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

gdzie:

ζ_k^v — przekładnia dla k -tego uzwojenia i v -tej harmonicznej,

z_k , ξ_k^v — liczba zwojów i współczynnik k -tego uzwojenia dla v -tej harmonicznej,

z_1 , ξ_1^v — liczba zwojów i współczynnik uzwojenia dla v -tej harmonicznej cewki odniesienia,

$$\alpha_k^v = v\alpha_k^1, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

gdzie: α_k^1 — kąt geometryczny określający położenie amplitudy pola pierwszej harmonicznej, wytworzonego przez k -te uzwojenie.

Postać form liniowych (1) jest szczególnie dogodna do analizy zwarć wewnętrznych.

Przyjmując, że każda cewka stojana stanowi odrębne uzwojenie, można przy pomocy odpowiednio napisanych macierzy $[C]$, tworzyć dowolne kombinacje połączeń w zależności od położenia miejsca zwarcia. Macierz węzłów $[C]$ składa się z elementów: 0, 1, -1. Element 0 wyraża, że określone uzwojenie elementarne w danej gałęzi nie występuje, element 1 odpowiada połączeniu zgodnemu, a element -1 połączeniu przeciwnemu uzwojenia elementarnego w gałęzi.

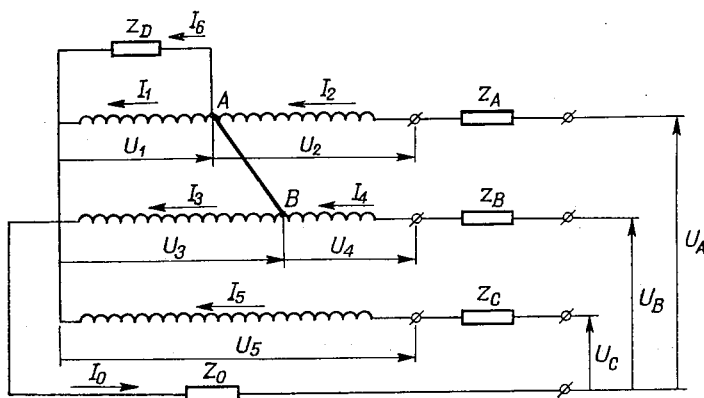
3. METODA OBLICZANIA PRĄDÓW ZWARCIOWYCH

3.1. Schemat ogólny, równania wyjściowe

Przedstawiona metoda pozwala obliczać wartości pierwszej harmonicznej ustalonego prądu zwarcia w przypadku zwarć wewnętrznych w uzwojeniu stojana maszyny synchronicznej, w oparciu o następujące założenia upraszczające:

- 1) związki między indukcją w szczelinie a funkcją przepływu mają charakter liniowy,
- 2) siła elektromotoryczna indukowana w uzwojeniu stojana ma kształt sinusoidalny,
- 3) wirnik maszyny jest symetryczny pod względem elektrycznym i magnetycznym.

Jako podstawę do obliczeń przyjęto schemat ogólny prądnicy połączonej z siecią energetyczną (rys. 2), który obejmie większość występujących przypadków zwarć — zwarcia 2-fazowe oraz 1- i 2-fazowe do punktu zerowego dowolnych liczb zwojów.



Rys. 2. Schemat przyjęty dla obliczenia prądów przy zwarciach wewnętrznych

W oparciu o prawa Kirchhoffa można napisać 7 równań dla obwodów i węzłów występujących w przyjętym schemacie zastępczym oraz 5 równań dla pięciu uzwojeń powstałych w wyniku połączenia punktów A i B, zgodnie z równaniem macierzowym (1):

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 - \underline{Z}_A \underline{I}_2 - \underline{U}_A - \underline{Z}_0 \underline{I}_0 = 0, \quad (5)$$

$$\underline{U}_2 - \underline{Z}_A \underline{I}_2 - \underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{Z}_B \underline{I}_4 - \underline{U}_4 = 0, \quad (6)$$

$$\underline{U}_1 - \underline{U}_3 = 0, \quad (7)$$

$$\underline{U}_5 - \underline{Z}_C \underline{I}_5 - \underline{U}_C - \underline{Z}_0 \underline{I}_0 = 0, \quad (8)$$

$$\underline{U}_1 + \underline{Z}_D \underline{I}_6 = 0, \quad (9)$$

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_3 + \underline{I}_6 = \underline{I}_2 + \underline{I}_4, \quad (10)$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_2 + \underline{I}_4 + \underline{I}_5, \quad (11)$$

$$[\underline{U}_s] = [\underline{E}_s] - [\underline{Z}^*][\underline{I}_s] \quad \text{dla} \quad s = 1, 2, \text{ do } 5. \quad (12)$$

gdzie:

$$[\underline{Z}^*] = [\underline{C}][\underline{Z}_r][\underline{C}]_t + \frac{1}{m_1} [\underline{C}][\underline{V}][\underline{Z}^*][\underline{V}]_t [\underline{C}]_t. \quad (13)$$

Oznaczenia jak we wzorze (1).

Elementy macierzy $[Z^*]$ oznaczono $\underline{Z}_{ij}^*$, gdzie i — numer wiersza, j — numer kolumny.

Podstawienie zależności (10), (11), (12) do równań (5) ÷ (9), sprowadza układ dwunastu równań do równania macierzowego z 5 niewiadomymi następującej postaci:

$$\begin{bmatrix} \underline{E}_1 + \underline{E}_2 - \underline{U}_A \\ \underline{E}_4 - \underline{E}_2 + \underline{U}_A - \underline{U}_B \\ \underline{E}_1 - \underline{E}_3 \\ \underline{E}_5 - \underline{U}_C \\ \underline{E}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{13} & \underline{Z}_{14} & \underline{Z}_{15} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{23} & \underline{Z}_{24} & \underline{Z}_{25} \\ \underline{Z}_{31} & \underline{Z}_{32} & \underline{Z}_{33} & \underline{Z}_{34} & \underline{Z}_{35} \\ \underline{Z}_{41} & \underline{Z}_{42} & \underline{Z}_{43} & \underline{Z}_{44} & \underline{Z}_{45} \\ \underline{Z}_{51} & \underline{Z}_{52} & \underline{Z}_{53} & \underline{Z}_{54} & \underline{Z}_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \\ \underline{I}_5 \end{bmatrix} \quad (14)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11} &= \underline{Z}_{11}^* + \underline{Z}_{21}^* & \underline{Z}_{21} &= \underline{Z}_{41}^* - \underline{Z}_{21}^* \\ \underline{Z}_{12} &= \underline{Z}_{12}^* + \underline{Z}_{22}^* + \underline{Z}_A + \underline{Z}_0 & \underline{Z}_{22} &= \underline{Z}_{42}^* - \underline{Z}_{22}^* \\ \underline{Z}_{13} &= \underline{Z}_{13}^* + \underline{Z}_{23}^* & \underline{Z}_{23} &= \underline{Z}_{43}^* - \underline{Z}_{23}^* \\ \underline{Z}_{14} &= \underline{Z}_{14}^* + \underline{Z}_{24}^* + \underline{Z}_0 & \underline{Z}_{24} &= \underline{Z}_{44}^* - \underline{Z}_{24}^* + \underline{Z}_B \\ \underline{Z}_{15} &= \underline{Z}_{15}^* + \underline{Z}_{25}^* + \underline{Z}_0 & \underline{Z}_{25} &= \underline{Z}_{45}^* - \underline{Z}_{25}^* \\ \underline{Z}_{31} &= \underline{Z}_{11}^* - \underline{Z}_{31}^* & \underline{Z}_{41} &= \underline{Z}_{51}^* \\ \underline{Z}_{32} &= \underline{Z}_{12}^* - \underline{Z}_{32}^* & \underline{Z}_{42} &= \underline{Z}_{52}^* + \underline{Z}_0 \\ \underline{Z}_{33} &= \underline{Z}_{13}^* - \underline{Z}_{33}^* & \underline{Z}_{43} &= \underline{Z}_{53}^* \\ \underline{Z}_{34} &= \underline{Z}_{14}^* - \underline{Z}_{34}^* & \underline{Z}_{44} &= \underline{Z}_{54}^* + \underline{Z}_0 \\ \underline{Z}_{35} &= \underline{Z}_{15}^* - \underline{Z}_{35}^* & \underline{Z}_{45} &= \underline{Z}_{55}^* + \underline{Z}_C + \underline{Z}_0 \\ \underline{Z}_{51} &= \underline{Z}_{11}^* + \underline{Z}_D \\ \underline{Z}_{52} &= \underline{Z}_{12}^* - \underline{Z}_D \\ \underline{Z}_{53} &= \underline{Z}_{13}^* + \underline{Z}_D \\ \underline{Z}_{54} &= \underline{Z}_{14}^* - \underline{Z}_D \\ \underline{Z}_{55} &= \underline{Z}_{15}^* \end{aligned}$$

Równanie macierzowe (14) można zapisać w postaci uproszczonej:

$$[U] = [Z][I], \quad (15)$$

gdzie:

$[U]$ — macierz znanych napięć zewnętrznych i sił elektromotorycznych indukowanych w uzwojeniach stojana,

$[Z]$ — macierz znanych impedancji maszyny oraz impedancji zewnętrznych,

$[I]$ — poszukiwana macierz prądów w uzwojeniach.

Macierz $[Z]$ jest macierzą kwadratową, nieosobliwą, zatem istnieje przekształcenie odwrotne

$$[I] = [Z]^{-1}[U], \quad (16)$$

$$[Z]^{-1} = \frac{[Z]_b}{\det[Z]}, \quad (17)$$

gdzie:

$[Z]^{-1}$ — macierz odwrotna do macierzy $[Z]$,

$[Z]_b$ — macierz dołączona do macierzy $[Z]$,

$\det[Z]$ — wyznacznik macierzy $[Z]$.

3.2. Obliczanie prądów zwarcia dla różnych rodzajów zwarć

Zależność (16) pozwala obliczyć prądy zwarcia w przypadku zwarcia dwufazowego z punktem zerowym w maszynie współpracującej z siecią 4-przewodową.

Przy obliczaniu prądów zwarcia dwufazowego z punktem zerowym w maszynie współpracującej z siecią 3-przewodową, należy założyć, że impedancja $Z_0 \rightarrow \infty$ (rys. 2) i zastosować regułę de L'Hospitala w odniesieniu do wyrażenia $\frac{[Z]_D}{\det[Z]}$ — wzór (18)

$$[I] = \left\{ \lim_{Z_0 \rightarrow \infty} \frac{[Z]_D}{\det[Z]} \right\} [U]. \quad (18)$$

Warunkom bezpośredniej pracy maszyny na sieć sztywną odpowiada założenie $Z_A = Z_B = Z_C = 0$. Jeśli założyć, że impedancje $Z_A, Z_B, Z_C \rightarrow \infty$, wówczas otrzymamy wartości prądów przy zwarcu dwufazowym z punktem zerowym w maszynie nie przyłączonej do systemu:

$$[I] = \left\{ \lim_{Z_A, Z_B, Z_C \rightarrow \infty} \frac{[Z]_D}{\det[Z]} \right\} [U]. \quad (19)$$

Zmieniając położenie punktów A i B (rys. 2) otrzymuje się zwarcie jednakowych lub dowolnie różniących się liczb zwojów. Każdemu położeniu punktów A i B odpowiada inna macierz więzów $[C]$. Zwarcu dwufazowemu odpowiada założenie, że impedancja $Z_D \rightarrow \infty$ (rys. 2).

Wartości prądów przy zwarcu dwufazowym w maszynie współpracującej z siecią 4-przewodową oblicza się ze wzoru (20), z siecią 3-przewodową — ze wzoru (21), w maszynie samotnej — ze wzoru (22):

$$[I] = \left\{ \lim_{Z_D \rightarrow \infty} \frac{[Z]_D}{\det[Z]} \right\} [U], \quad (20)$$

$$[I] = \left\{ \lim_{Z_D, Z_0 \rightarrow \infty} \frac{[Z]_D}{\det[Z]} \right\} [U], \quad (21)$$

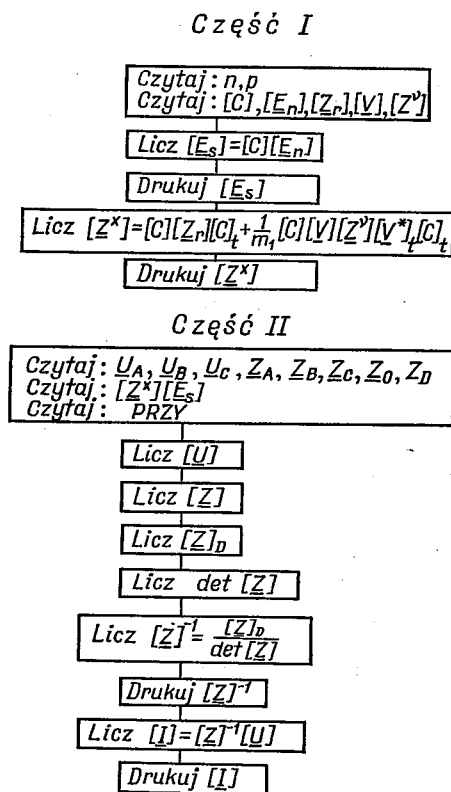
$$[I] = \left\{ \lim_{\substack{Z_D \rightarrow \infty \\ Z_A, Z_B, Z_C \rightarrow \infty}} \frac{[Z]_D}{\det[Z]} \right\} [U]. \quad (22)$$

Pełne wyrażenia dla występujących we wzorach (18)÷(22) macierzy dołączonych $[Z]_D$ oraz wyznaczników $\det[Z]$, zróżniczkowanych względem odpowiednich wielkości, podane są w [4].

Jak wynika ze schematu ogólnego (rys. 2), zwarcie jednofazowe do punktu zerowego jest szczególnym przypadkiem zwarcia dwufazowego. Jeśli założyć, że np. punkt B pokrywa się z punktem zerowym uzwojeń, a punkt A przesuwają się od zacisku wejściowego do punktu zerowego, otrzymamy zwarcie jednofazowe z punktem zerowym dowolnej liczby zwojów. Z tego względu wartości prądów przy zwarcu jednofazowym do punktu zerowego można obliczać ze wzorów (20), (21) i (22), pisząc odpowiednie macierze $[C]$.

3.3. Obliczanie prądów zwarcia przy pomocy maszyny cyfrowej

Na podstawie zależności wyprowadzonych w punkcie 3.1 oraz 3.2, został opracowany program na maszynie cyfrową ZAM-2 β przez pracownika Katedry Mechaniki Technicznej Politechniki Łódzkiej, dra inż. J. Lipińskiego.



Rys. 3. Schemat blokowy programu do obliczania prądów zwarcia w maszynie synchronicznej

W celu wykonania obliczeń, należy wprowadzić do programu następujące informacje:

- n — liczba uzwojeń elementarnych stojana (liczba wszystkich cewek w stojanie),
- p — liczba wynikająca z liczby uwzględnionych harmoniczných pola,
 $p = 2k$ — gdzie k jest liczbą uwzględnionych harmoniczných,
- $[C]$ — macierz o n kolumnach i 5 wierszach, przekształcająca układ n cewek stojana na układ 5 dowolnie niesymetrycznych uzwojeń stojana,
- $[E_n]$ — macierz kolumnowa o n wierszach SEM-ych indukowanych w n cewkach stojana,
- $[Z_r]$ — macierz diagonalna n -tego stopnia impedancji rozproszenia stojana,
- $[V]$ — macierz o p kolumnach i n wierszach, przekształcająca parametry uzwojeń wirnika na dowolną konfigurację uzwojeń stojana,

$[\underline{Z}^*]$ — macierz diagonalna p -tego stopnia impedancji dla składowej zgodnej i przeciwnej harmoniczych,

$\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$ — napięcia zewnętrzne,

$\underline{Z}_A, \underline{Z}_B, \underline{Z}_C$ — impedancje zewnętrzne,

$\underline{Z}_0$ — impedancja przewodu zerowego,

$\underline{Z}_D$ — impedancja zwarcia do punktu zerowego.

W zrealizowanym programie przewidziano $n_{\max} = 70$, $p_{\max} = 14$. Poszczególne rodzaje zwarć zostały w programie oznaczone symbolami PRZY 1, PRZY 2 itd.

Na rysunku 3 przedstawiony jest schemat blokowy programu. Jako wynik obliczeń otrzymuje się wartości zespolone i skuteczne ustalonych prądów zwarciovych. Oprócz szukanej macierzy prądów $[\underline{I}]$, w programie przewidziano drukowanie pośrednich wyników obliczeń, a mianowicie macierzy $[\underline{E}_s]$, $[\underline{Z}^*]$ i $[\underline{Z}]^{-1}$.

4. PRZYKŁAD OBLICZENIA PRĄDÓW ZWARCIA W TURBOGENERATORZE

4.1. Dane znamionowe i konstrukcyjne turbogeneratora

Typ — TWW 200 — 2

Moc — $P_n = 200$ MW

Współczynnik mocy — $\cos \varphi = 0,85$

Napięcie stojana — $U_n = 15,75$ kV

Prąd stojana — $I_n = 8625$ A

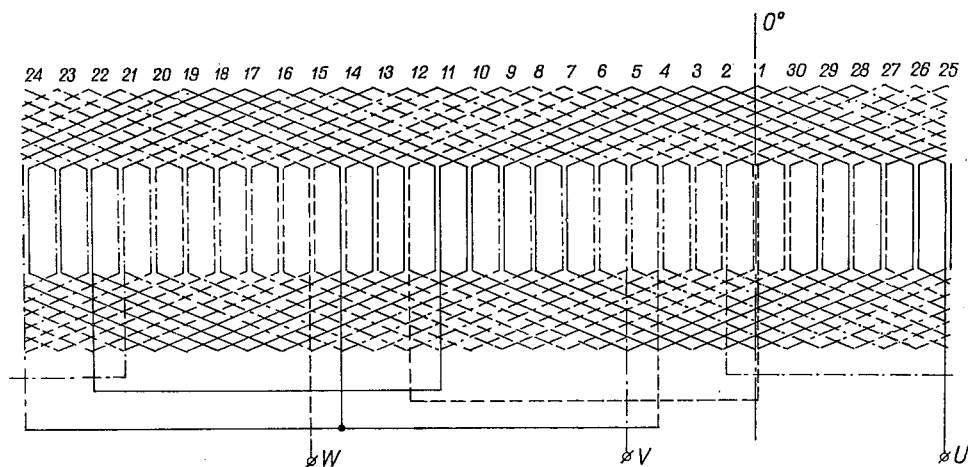
Prędkość obrotowa — $n = 3000$ obr/min

Reaktancje (w jednostkach względnych):

$$X_d = 1,86 \quad X_r = 0,15$$

$$X'_d = 0,26 \quad X_2 = 0,244$$

$$X''_d = 0,20 \quad X_0 = 0,087$$



Rys. 4. Schemat uzwojenia turbogeneratora: $m = 3$, $2p = 2$, $q = 5$, $Z = 30$

Uzwojenie stojana dwuwarstwowe, liczba żłobków $Z = 30$, cewki jednozwojne, o jednakowej rozpiętości $\frac{s}{\tau} = 0,8$. Współczynnik grupowy uzwojenia ($q = 5$) dla pierwszej harmonicznej wynosi $\xi_q^1 = 0,957$. Liczba zwojów szeregowych na fazę $z = 10$. Schemat uzwojenia przedstawiony jest na rysunku 4.

4.2. Dane wejściowe do programu dla obliczenia prądów zwarciovych w turbogeneratorze

Obliczenia przeprowadzono w jednostkach względnych. Założono, że przed wystąpieniem zwarcia maszyna była wzbudzona do napięcia znamionowego i biegła jałowo.

Wartość skuteczna siły elektromotorycznej indukowanej w dowolnej k -tej cewce stojana wynosi:

$$E_k = \frac{U_{fn}}{z \xi_q^1} \cdot z' = \frac{1}{10 \cdot 0,957} \cdot 1 = 0,1045. \quad (23)$$

Kąt między sąsiednimi żłobkami wynosi:

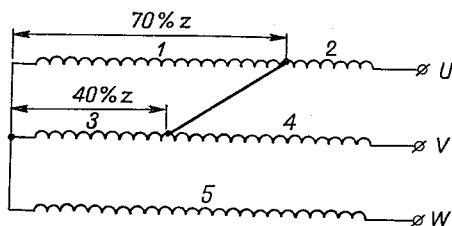
$$\frac{360^\circ}{Z} = \frac{360^\circ}{30} = 12^\circ. \quad (24)$$

Jeśli przyjąć, że osią odniesienia jest oś cewki nr 1, tzn. $\alpha_1^1 = 0^\circ$, to wszystkie następne cewki będą przesunięte względem siebie o 12° . Macierz sił elektromotorycznych $[E_n]$, indukowanych w n cewkach stojana, przedstawia się następująco:

$$[E]_n = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1045 \\ 0,1045 e^{-j12^\circ} \\ \vdots \\ 0,1045 e^{-j348^\circ} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Macierz sił elektromotorycznych $[E_s]$, indukowanych w s uzwojeniach stojana, zgodnie z zasadą przekształcania układu n -uzwojeniowego na s -uzwojeniowy, wyraża się wzorem:

$$[E_s] = [C][E_n]. \quad (26)$$



Rys. 5. Zwarcie dwufazowe różnych liczb zwojów

Każdemu położeniu miejsca zwarcia odpowiada inna macierz węzłów $[C]$. Dla przykładu przedstawiono macierz $[C]$ odpowiadającą położeniu miejsca zwarcia jak na rys. 5 (zwarcie dwufazowe faz U i V , w fazie U zwartych jest 7 cewek, a w fazie V — 4 cewki).

Uzwojenie fazowe składa się z 10 cewek, po pięć pod każdym biegunem. Cewki numerowane są kolejno wzdłuż obwodu twornika, poczynając od zacisku wejściowego fazy U (rys. 4):

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Reaktancja rozproszenia dowolnej k -tej cewki stojana wynosi:

$$X_{rk} = \frac{X_r}{2pq} = \frac{0,15}{2 \cdot 5} = 0,015, \quad (28)$$

gdzie:

X_r — reaktancja rozproszenia uzwojenia fazowego,

$2pq$ — liczba cewek na fazę w uzwojeniu dwuwarstwowym.

Ponieważ wartość rezystancji uzwojenia stojana jest stosunkowo mała ($R < 1,2\% X_r$), można przyjąć, że impedancja rozproszenia cewki wynosi:

$$\underline{Z}_{rk} = jX_{rk} = j0,015. \quad (29)$$

Macierz impedancji rozproszenia $[\underline{Z}_r]$:

$$[\underline{Z}_r] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{r1} & & & \\ & \underline{Z}_{r2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{Z}_{r30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j0,015 & & & \\ & j0,015 & & \\ & & \ddots & \\ & & & j0,015 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Wszystkie cewki stojana są jednakowe, w wyniku czego przekładnia ζ_k^* występująca w elementach macierzy $[\underline{V}]$ będzie równa 1 (przy założeniu, że cewką odniesienia jest jedna z cewek stojana, np. nr 1). Wartość kąta α_k^1 można obliczyć z zależności:

$$\alpha_k^1 = (k-1) \cdot 12^\circ, \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, 30. \quad (31)$$

Macierz $[\underline{V}]$ przekształcająca parametry uzwojeń wirnika na dowolną konfigurację uzwojeń stojana, jeśli uwzględnić tylko pierwszą harmoniczną pola, przedstawia się następująco:

$$[\underline{V}] = \begin{bmatrix} \zeta_1^1 e^{-j\alpha_1^1} & \zeta_1^1 e^{+j\alpha_1^1} \\ \zeta_2^1 e^{-j\alpha_2^1} & \zeta_2^1 e^{+j\alpha_2^1} \\ \vdots & \vdots \\ \zeta_{30}^1 e^{-j\alpha_{30}^1} & \zeta_{30}^1 e^{+j\alpha_{30}^1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-j12^\circ} & e^{+j12^\circ} \\ \vdots & \vdots \\ e^{-j348^\circ} & e^{+j348^\circ} \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Reaktancja oddziaływania twornika w osi podłużnej dla pierwszej harmonicznej pola, odniesiona do jednej cewki stojana, wynosi:

$$X_{td}^1 = X_{td(\text{fazy})}^1 \cdot \left(\frac{z'}{z_{\zeta_q^1}^1} \right)^2 = 1,71 \cdot \left(\frac{1}{10 \cdot 0,957} \right)^2 = 0,0186. \quad (33)$$

Reaktancja dla składowej przeciwnej pierwszej harmonicznej pola, odniesiona do jednej cewki stojana:

$$X_2^1 = X_{2(\text{fazy})}^1 \cdot \left(\frac{z'}{z_{\xi_q}^1} \right)^2 = 0,094 \left(\frac{1}{10 \cdot 0,957} \right)^2 = 0,0010. \quad (34)$$

Jako $X_{2(\text{fazy})}^1$ przyjęto reaktancję dla składowej przeciwnej zmniejszoną o reaktancję rozproszenia (rys. 1).

Impedancje dla składowej zgodnej i przeciwnej pierwszej harmonicznej pola, przy pominięciu rezystancji wirnika:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1^1 &= jX_{1d}^1 = j0,0186, \\ \underline{Z}_2^1 &= jX_2^1 = j0,0010. \end{aligned} \quad (35)$$

Macierz $[\underline{Z}^v]$, jeśli uwzględnić tylko pierwszą harmoniczną pola:

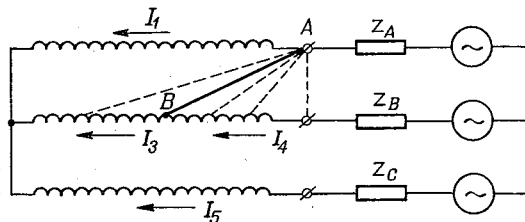
$$[\underline{Z}^v] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1^1 & \\ & \underline{Z}_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j0,0186 & \\ & j0,0010 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Pozostałe dane wejściowe do programu nie wymagają bliższych wyjaśnień.

4.3. Wyniki obliczeń prądów zwarcia w turbogeneratorze

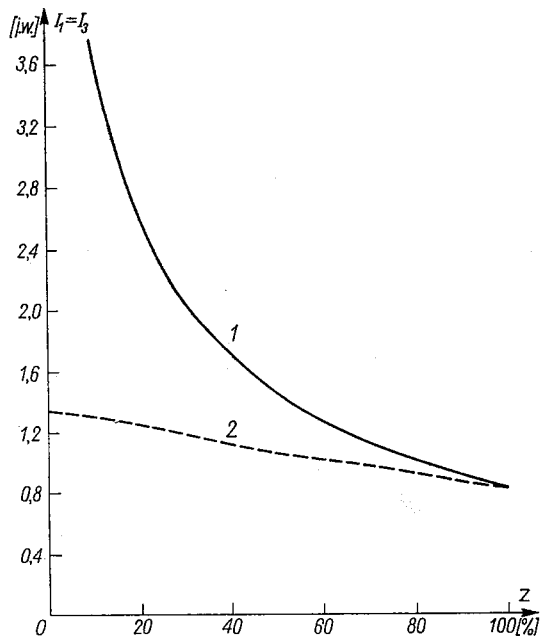
W artykule przedstawiono dla przykładu wyniki obliczeń prądów zwarcia w postaci wykresów, dla następujących rodzajów zwarc:

- 1) zwarcie dwufazowe jednakowych i różnych liczb zwojów w maszynie samotnej (rys. 7),
- 2) zwarcie dwufazowe jednakowych liczb zwojów w maszynie współpracującej z siecią 3-przewodową (rys. 8),
- 3) zwarcie dwufazowe różnych liczb zwojów w maszynie współpracującej z siecią 3-przewodową (rys. 9),
- 4) zwarcie jednofazowe z punktem zerowym w maszynie samotnej i współpracującej z siecią (rys. 10).

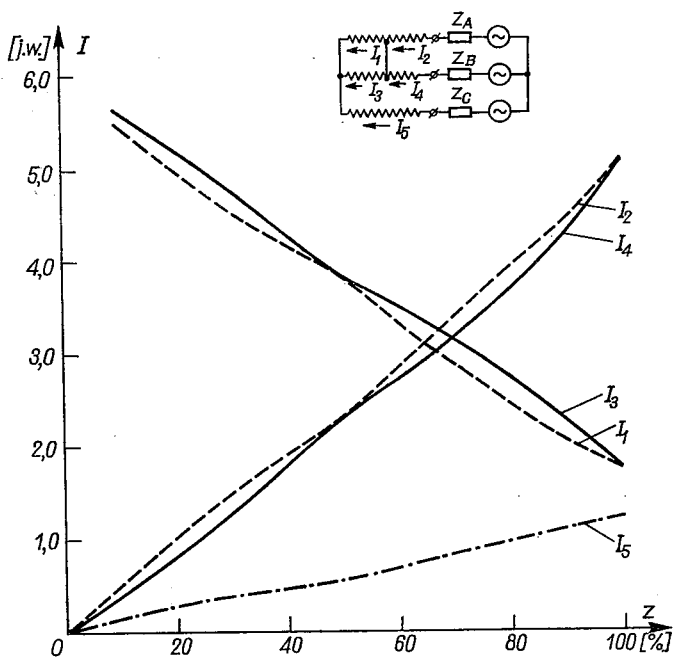


Rys. 6. Zwarcie dwufazowe różnych liczb zwojów w turbogeneratorze współpracującym z siecią 3-przewodową

W każdym z czterech wymienionych przypadków obliczenia zostały wykonane dla 10 położenia miejsca zwarcia, poczynając od zwarcia na zaciskach (100% z). Przy zwarcu różnych liczb zwojów punkt A (rys. 6) pokrywał się z zaciskiem wejściowym i pozostawał nieruchomy, natomiast punkt B zmieniał położenie od zacisku wejściowego do punktu zerowego uzwojeń, co cewkę.



Rys. 7. Prądy przy zwarcu dwufazowym jednakowych (krzywa 1) i różnych (krzywa 2) liczb zwojów w maszynie samotnej



Rys. 8. Prądy przy zwarcu dwufazowym jednakowych liczb zwojów w maszynie współpracującej z siecią