Z. KOSOWICZ

EINFLUSS DES LÄUFERDURCHMESSERS AUF DIE SELBSTBREMSUNGSVERHÄLTNISSE VON ASYNCHRON-UMKEHRMOTOREN

Zusammenfassung

Im Artikel wurde der Einfluss des Durchmessers eines D-Läufers, der Nutenzahl und des Querschnitts eines Läuferstabs eines Zweiphasen-Umkehrmotors mit Käfigläufer auf ihre Selbstbremsungsverhältnisse hin untersucht.

Diese Frage wurde an Hand eines Vollersatzbildes eines Zweiphasenmotors untersucht, dessen Parameter hinsichtlich ihrer Abhängigkeit von den Konstruktionsabmessungen des Pakets bestimmt wurden. Wirkwiderstände und Blindwiderstände des Ständer- und Läuferkreises wurden auf den Hauptblindwiderstand X_μ bezogen.

Es wurde ein zulässiger Produktwert der Läufernutenzahl und des Stabquerschnitts $\dot{Z}_2 s_{pr}$ bestimmt, der für die Erfüllung der Bedingung der Selbstbremsung für geschlossenen und offenen Steuerkreis erforderlich ist. Der zulässiger Wert des Produktes $\dot{Z}_2 s_{pr}$ wurde in Abhängigkeit vom Läuferdurchmesser D und der Polpaarzahl p unter Berücksichtigung technologischer Anforderungen bestimmt.

Zum Schluss wurden Innenleistungen im Kurzschlusszustand, bei $s = 1$, bei für Einsatz mit geschlossenem und offenem Steuerkreissystem projektierten Motoren verglichen. Zwecks Beibehaltung einer Durchsichtigkeit der Arbeit hat man sich auf ein Käfigmaterial (Aluminium) und eine Netzspannungsfrequenz 50 Hz beschränkt, jedoch können alle diese Abbängigkeiten auch bei anderen Käfigmaterielen und von der 50-Hz-Netzspannungsfrequenz varierenden Frequenzen ausnutzt werden.

З. КОСОВИЧ

ВЛИЯНИЕ ДИАМЕТРА КОРОТКОЗАМКНУТОГО РОТОРА ИСПОЛНИТЕЛЬНОГО ДВИГАТЕЛЯ НА КРИТЕРИЙ ОТСУТСТВИЯ САМОХОДА

Резюме

В статье рассмотрено влияние диаметра ротора D, числа пазов ротора и сечения стержней беличьей клетки двухфазного исполнительного двигателя на критерий отсутствия самохода. Эта проблема разрешена при использовании полной схемы замещения двухфазного исполнительного двигателя.

Параметры схемы замещения определены на основании размеров пакета статора и ротора. Значения этих параметров представлены в относительных единицах. За основную единицу принято реактивное сопротивление X_μ соответствующее потоку в воздушном зазоре.

Определено допустимое значение произведения чисел пазов ротора и сечения стержня $\dot{Z}_2 s_{pr}$ для получения отсутстаия самохода при разомкнутой и при короткозамкнутой обмотке управления. Рассмотрены двигатели с алюминиевой беличьей клеткой при частоте 50 гц, однако полученные зависимости могут быть использованы также при применении других материалов клетки и частот питания.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1972, 18, z. 2, ss. 403-420

621.325

Jedna z metod analitycznego ujmowania charakterystyk napięciowo-prądowych łukowych palników plazmowych prądu stałego

CZESŁAW KRÓLIKOWSKI (POZNAŃ)

Instytut Elektroenergetyki Politechniki Poznańskiej

Otrzymano 25.3.1971

W pracy przedstawiono jedną z metod analitycznego ujmowania charakterystyk napięciowo-prądowych łukowych palników plazmowych prądu stałego tak z łukiem pośrednim (wewnętrznym) jak i z łukiem bezpośrednim (zewnętrznym).

Wyniki badań wykazały, że istnieje możliwość ujmowania charakterystyk statycznych $U_l = f(i_l)$ dla palnika z łukiem pośrednim, mimo iż długość kolumny jest tu zależna od gazodynamicznych i elektrodynamicznych parametrów układu. Ustalono dla palnika z łukiem wewnętrznym nowy związek między napięciem łuku a prądem łuku wprowadzając zamiast długości łuku, nowy parametr w postaci wydatku gazu roboczego G^*. Podano także metodę wyznaczania z danych doświadczalnych stałych parametrów A, B, C, D oraz wykładnika potęgowego α. Tę samą metodę zastosowano dla ujęcia charakterystyk $U_l = f(i_l)$ dla palników z łukiem bezpośrednim wykazując, że najwłaściwszym parametrem jest długość kolumny łukowej l_l.

Podano także wzór analityczny na $U_l = f(i_l)$ wprowadzając do niego dwa parametry: G^* oraz l_l.

Wyniki badań wykazują wystarczającą zgodność między napięciem pomierzonym a obliczonym według zaproponowanych zależności.

1. WPROWADZENIE

Łukowy palnik plazmowy prądu stałego stał się w okresie ostatnich kilku lat nowym narzędziem pracy nie tylko dla placówek naukowo-badawczych ale także dla przemysłu. Dotychczasowe doświadczenia z tym pewnym ruchowo źródłem energii cieplnej o bardzo wysokiej temperaturze rzędu 10—15 tys. °K oraz dużej koncentracji mocy na jednostkę objętości strumienia plazmy wykazały, że może ono być stosowane w różnorodnych dziedzinach techniki.

Szeroki zakres stosowania łukowych palników plazmowych wymaga opracowania analitycznych metod określania optymalnych kształtów elektrod i innych elementów składowych, pozwalających na pracę palnika z maksymalną sprawnością. Istotnym staje się także ustalenie obszaru stabilnego palenia się łuku w palniku plazmowym. Do tego celu nieodzowna staje się znajomość statycznych charakterystyk napięciowo-prądowych palnika, które przy wykorzystaniu zewnętrznych charakterystyk źródeł zasilania pozwalają określić obszar jego stabilnej pracy.

Nie bez wpływu na pracę palnika pozostaje rodzaj zastosowanego gazu roboczego, którym może być argon, azot, wodór lub ich mieszaniny.

Zakres zastosowań i charakter pracy łukowego palnika plazmowego z łukiem pośrednim o mocy do 100 kW pozwala przyjąć, że zmiany energii doprowadzanej do palnika, jak również zmiany ilości i ciśnienia gazu roboczego są tak powolne, iż mamy tu do czynienia z charakterystykami roboczymi typu statycznego.

W literaturze naukowej i naukowo-technicznej można znaleźć szereg zależności empirycznych między napięciem łuku i prądem łuku, przy czym związki te dotyczą łuku palącego się między dwiema elektrodami niechłodzonymi, najczęściej w powietrzu o ciśnieniu atmosferycznym. Zakres ich stosowania jest ograniczony nawet dla łuków niestabilizowanych i to tak wartością natężenia prądu łuku, jak również długością kolumny łukowej.

Z dostępnej literatury wynika, że S. Thompson w roku 1892, jako pierwszy w historii badań łuku elektrycznego, ustalił związek między napięciem łuku, jego prądem i długością w postaci

$$U_l = m + \frac{nl}{i_l} \text{ [V]}, \tag{1}$$

gdzie:

m i n — współczynniki zmieniające się w zakresie:
$m = 35 \div 39$,
$n = 8 \div 18$,
l — długość kolumny łukowej w mm.

Zależność podana przez Thompsona opiera się na liniowym związku między mocą pobieraną przez łuk a jego długością, przy stałej wartości prądu oraz między tą mocą a prądem, przy stałej długości łuku.

Thompson nie ustalił od jakich czynników zależą wartości współczynników m i n i dlatego równanie jego należy uznać za niekompletne. Powszechnie przyjmuje się, że pierwszą zależność między napięciem łuku, prądem łuku i jego długością podała Herta Ayrton w roku 1902 w pracy pt. The Electric Arc [1]. Zależność ta ma następującą postać:

$$U_l = a + bl + \frac{c + dl}{i_l} \text{ [V]}, \tag{2}$$

gdzie:

U_l — napięcie łuku w V,
i_l — natężenie prądu łuku w A,
l — długość łuku w mm,
a, b, c, d — stałe wyznaczone doświadczalnie, zależne od rodzaju użytego węgla na elektrody.

Związek podany przez H. Ayrton okazuje się słuszny przy zmianach prądu w zakresie $3 \div 14$ A oraz długości łuku od $0 \div 7$ mm, przy czym łuk palił się w powietrzu o ściśnieniu normalnym.

Zależności nieuogólnione, o formie podobnej do podanej przez H. Ayrton, podają: Cross, Shepard, Frölich, Duncan, Rowland, Todd i inni.

Problematyką przedstawiania $U_l = f(i_l)$ zajmowało się i zajmuje wielu badaczy, a zakres niniejszej pracy nie pozwala na szerokie omówienie wyników ich badań. Ograniczono

się więc do podania poniżej tych związków, które w pewien sposób wydają się być przydatne do rozwiązania postawionego zadania.

Związek podobny w formie do podanego przez Ayrton podaje W. B. Notthingham [2], przy czym związek ten jest słuszny dla kolumny łukowej dłuższej od 15 mm

$$U_l = a+bl+\frac{c+dl}{i_l^{\alpha}} \text{ [V]}, \tag{3}$$

gdzie:

α — wykładnik potęgowy zależny od rodzaju materiału elektrod, wyznaczony doświadczalnie,

l — długość kolumny łukowej,

a — stała zależna od spadku napięcia anodowego i katodowego, wyznaczona doświadczalnie,

b, c, d — stałe wyznaczone doświadczalnie.

S. C. Osborn [3] podaje natomiast następującą zależność na napięcie łuku

$$U_l = a+\frac{c}{i_l^{\alpha}}(l+d) \text{ [V]}, \tag{4}$$

gdzie oznaczenie stałych a, c, d i α jak we wzorze (3).

Dla łuku spawalniczego wielkoprądowego, palącego się między elektrodami wolframowymi w argonie jako gazie ochronnym K. Goldmann [4] podaje następujący związek:

$$U_l = a+bi_l+\frac{c}{i_l} \text{ [V]}, \tag{5}$$

gdzie a, b, c — stałe zależne od długości kolumny łukowej.

Natomiast dla łuku ze zmienną długością W. M. Conn [5] podaje następującą zależność

$$K = c+dl \text{ [V/cm]}, \tag{6}$$

gdzie:

K — natężenie pola elektrycznego w kolumnie łukowej,

l — długość kolumny łukowej,

c — stała zależna od spadku napięcia anodowego i katodowego,

d — stała zależna od konduktancji kolumny łukowej oraz jej geometrycznych wymiarów.

Zależność zbliżoną w budowie do poprzednich związków podaje C. P. Steinmetz [6]. Zależność ta przedstawia się następująco:

$$K = a+\frac{c(l+d)}{i_l^{0,5}} \text{ [V/cm]}, \tag{7}$$

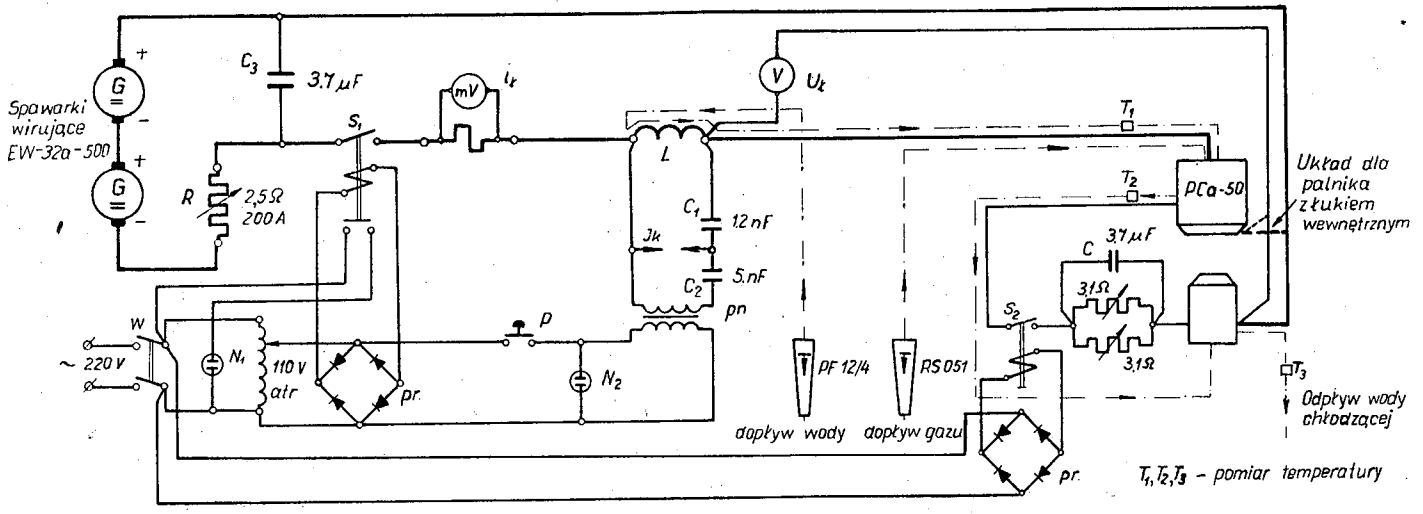
gdzie:

K — natężenie pola elektrycznego w kolumnie łukowej,

l — długość kolumny łukowej,

a, c, d — stałe wyznaczane doświadczalnie.

W. Rieder oraz H. Schneider [7] zajmowali się zależnością $U = f(i)$ z punktu widzenia możliwości wykorzystania jej do konstrukcji łączników energoelektrycznych, przy usta-



Rys. 1. Schemat ideowy układu pomiarowo-badawczego

laniu tzw. długości przerywanej. Zależność ta ma postać:

$$U_l = a + (l+\beta) K_{(i_l)} \text{ [V]}, \tag{8}$$

gdzie:

β — stała zależna od materiału elektrod,

$K_{(i_l)}$ — natężenie pola elektrycznego w kolumnie łukowej.

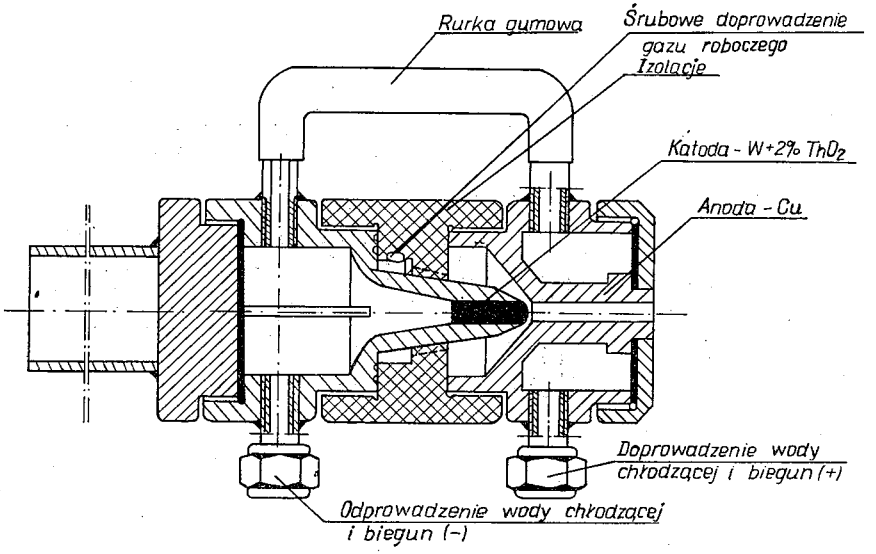
Należy jednak zaznaczyć, że długość łuku elektrycznego winna tu wynosić co najmniej 30 mm.

Z przedstawionych wzorami (1÷8) zależności wynika, że mają one bardzo zbliżoną budowę Ustalono je przy założeniu, że anodowy i katodowy spadek napięcia ma stałą wartość, niezależną od zmieniających się w układzie parametrów.

Trudność w wykorzystaniu przedstawionych związków polega na tym, że każdy z nich może mieć zastosowanie dla ściśle ustalonych warunków palenia się łuku elektrycznego, przy czym istotną rolę odgrywa albo ściśle określony zakres długości łuku, albo określony zakres natężenia prądu elektrycznego.

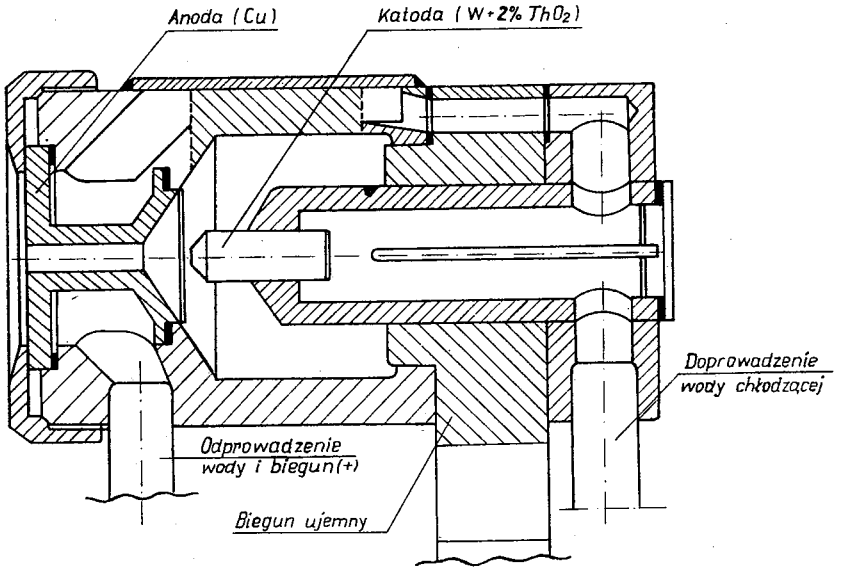
Badania nad łukowymi palnikami plazmowymi wykazują [8÷11], że jedną z właściwości palników z łukiem wewnętrznym jest to, iż długość l_l łuku elektrycznego, którą przyjmowano jako jeden z podstawowych parametrów, nie jest wielkością ściśle określoną, a zależy od gazodynamicznych i elektrodynamicznych parametrów układu.

Wobec powyższego długości nie można wykorzystać jako parametru przy ustaleniu zależności między napięciem i natężeniem prądu łuku tego typu palnika.

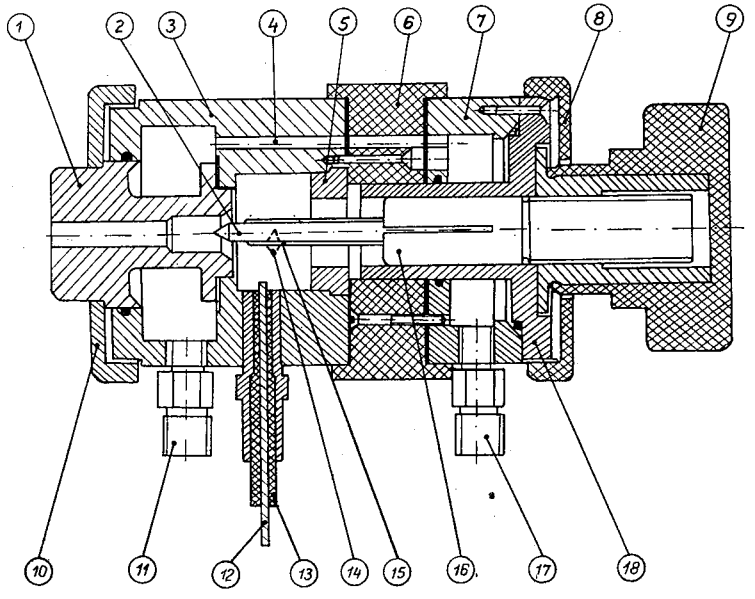


Rys. 2. Ogólny przekrój łukowego palnika plazmowego typu PPTK-1/25/50 (konstr. własnej)

Duża trudność w wykorzystaniu zależności (1÷8) dla ustalenia związku między napięciem i prądem łuku polegała także na tym, że występujące we wzorach współczynniki stałe dotyczyły natężeń prądów nie przekraczających na ogół kilkudziesięciu amperów, a łuk



Rys. 3. Ogólny przekrój łukowego palnika plazmowego typu PT-V (konstr. IMP-PAN Gdańsk)



Rys. 4. Ogólny przekrój łukowego palnika plazmowego typu HBJ-6 (prod. NRD):
1 — anoda Cu, 2 — katoda W+1,8% ThO_2, 3 — korpus anody, 4 — otwór wodny, 5 — przekładka ceramiczna, 6 — izolator 7 — korpus katody, 8 — winidurowy pierścień oporowy, 9 — pokrętło regulacyjne katody, 10 — pierścień czołowy, 11 — króciec wlotowy wody chłodzącej, 12 — przewód działka plazmowego, 13 — izolacja przewodu działka plazmowego, 14 — otwór wlotowy gazu roboczego, 15 — otulina katody, 16 — uchwyt katody, 17 — króciec wylotowy wody chłodzącej, 18 — pierścień z tuleją prowadzenia katody (miejsca zaczernione oznaczają uszczelnienie gumowe)

elektryczny niestabilizowany palił się w większości przypadków między niechłodzonymi elektrodami o skrajnie różniącym się układzie w stosunku do łukowego palnika plazmowego. Zaistniała więc potrzeba ustalenia nowego związku przy jednoczesnym wyznaczeniu odpowiednich stałych współczynników (stałych empirycznych).

Badania przeprowadzono w układzie pomiarowym przedstawionym na rysunku 1, wykorzystując do tego celu szereg palników plazmowych tak laboratoryjnych jak i w wykonaniu przemysłowym. Przebadano więc palniki konstrukcji własnej typu PLK-2/12, PLK-3/20, PPTK-1/25/50, konstrukcji IMP-PAN Gdańsk typu PT-V, konstrukcji NRD typu HBI-6 oraz konstrukcji Instytutu Spawalnictwa w Gliwicach typu PCa-50 (rys. 2÷4). Gazem roboczym był argon oraz azot czysty technicznie.

2. METODA ANALITYCZNEGO UJĘCIA CHARAKTERYSTYKI $U_l = f(i_l)$ DLA ŁUKOWEGO PALNIKA PLAZMOWEGO Z ŁUKIEM WEWNĘTRZNYM (POŚREDNIM)

W punkcie 1 niniejszej pracy wspomniano, że długość kolumny łukowej w łukowym palniku plazmowym z łukiem pośrednim jest nieokreślona. Potwierdzają to badania własne oraz innych autorów [12]. Nieokreśloność ta nie wyklucza jednak możliwości przedstawienia napięcia łuku w funkcji prądu łuku.

Ponieważ żaden z przedstawionych powyżej wzorów nie spełnia, jak wspomniano, wymogów jakie stawia łukowy palnik plazmowy z łukiem pośrednim, w pracy ustalono nową zależność na napięcie łuku w funkcji prądu łuku. Zależność ta posiada taką postać, że długość łuku elektrycznego, niemożliwa do ustalenia w palniku z łukiem wewnętrznym, została zastąpiona parametrem, który odgrywa decydującą rolę w pracy palnika, to znaczy wydatkiem gazu roboczego G^*. Wobec powyższego wzór wiążący napięcie i natężenie prądu w łukowym palniku plazmowym z łukiem wewnętrznym przyjęto w następującej postaci:

$$U_l = A + BG^* + \frac{C + DG^*}{i_l^{\alpha}} \quad [\mathrm{V}], \tag{9}$$

gdzie:

U_l — napięcie łuku w V,

i_l — natężenie prądu łuku w A,

G^* — wydatek gazu roboczego w g/s,

α — wykładnik potęgowy zależny od materiału anody wyznaczony doświadczalnie,

A, B, C, D — stałe współczynniki wyznaczone doświadczalnie.

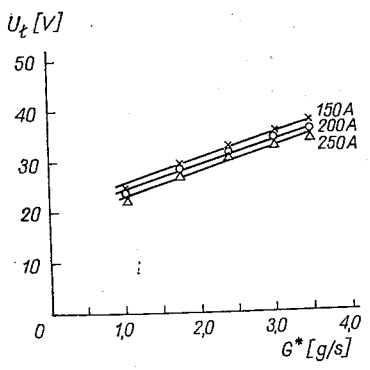
Na podstawie budowy wzoru (9) można sądzić, że między napięciem łuku oraz wydatkiem gazu roboczego G^*, przy danym stałym natężeniu prądu łuku, istnieje zależność liniowa. Zależność tę potwierdzono doświadczalnie na wybranych losowo palnikach typu PLK-3/20 oraz PPTK-1/25, rejestrując napięcie w funkcji wydatku gazu roboczego G^* przy stałym natężeniu prądu. Przykładowe wyniki tych pomiarów przedstawiono na rysunkach 5 i 6.

Wzór (9) można przedstawić w prostszej postaci, jeśli przyjąć stały wydatek gazu roboczego G^* oraz mierzyć napięcie i natężenie prądu łuku palnika. Wzór (9) przyjmie

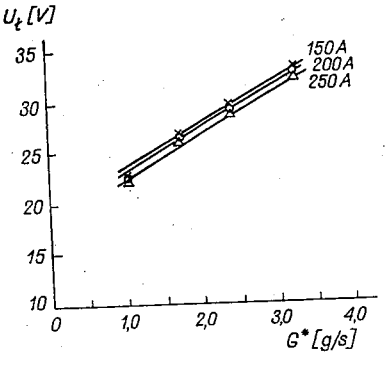
wówczas postać:

$$U_l = a + \frac{b}{i_l^{\alpha}} \text{ [V]}. \tag{10}$$

We wzorze (10) występują trzy niewiadome: a, b i α.



Rys. 5. Zależność $U_l = f(G^*)$. Palnik typu PLK-3/20, $l_a = 20$ mm, $d_a = 5$ mm, $i_l = \text{const}$ Gaz roboczy argon



Rys. 6. Zależność $U_l = f(G^*)$. Palnik typu PPTK-1/25/50. $l_a = 30$ mm, $d_a = 4$ mm, $i_l = \text{const}$. Gaz roboczy argon

Jeśli przyjąć, że natężenie prądu dąży do wartości bardzo dużej, to napięcie łuku będzie dążyć do stałej wartości a, która jest uzależniona jedynie od spadków napięcia anodowego i katodowego. Okazuje się bowiem, że przy bardzo dużym natężeniu prądu spadek napięcia na kolumnie łukowej można pominąć.

Wobec powyższego wartość liczbową stałej a można z wystarczającą dokładnością wyznaczyć z charakterystyk $U_l = f(i_l)$. Otwartym pozostaje wyznaczenie wykładnika potęgowego α oraz stałego współczynnika b. Dostępna literatura, a w szczególności [2] podaje pewne wartości wykładnika potęgowego α.

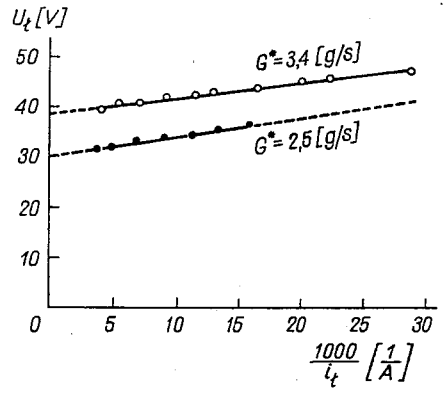
Okazuje się, co potwierdzono także własnymi badaniami, że w przypadku palnika z łukiem wewnętrznym wykładnik potęgowy zależny jest od rodzaju materiału elektrod, a w szczególności od materiału anody. Materiałem używanym na elektrody palnika może być grafit-wolfram, a szczególnie miedź-wolfram torowany (ok. 2% ThO) i dla tych materiałów przeprowadzono badania. Badania wykazały, że wykładnik potęgowy α jest funkcją liniową bezwzględnej temperatury wrzenia materiału użytego na anodę. Badając dziewięć charakterystyk palnika typu PLK-2/12 z anodą grafitową wykazano, że wartość wykładnika potęgowego $\alpha \approx 1$ [9].

Podobnie analiza dużej liczby charakterystyk dla pozostałych typów palników z anodą miedzianą wykazała, że wykładnik potęgowy mieści się w granicach 0,65÷0,69 [9]. Zależy on w pewnym stopniu od intensywności chłodzenia anody (dyszy) i przy intensywniejszym chłodzeniu wartość jego nieco rośnie. Można więc przyjąć, że średnia wartość wykładnika potęgowego dla anody miedzianej wynosi 0,67.

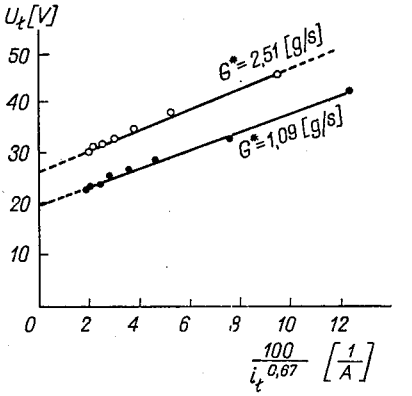
Na rys. 7 przedstawiono zależność $U_l = f\left(\frac{1}{i_l}\right)$ dla $\alpha = 1$. Z rysunku wynika, że zależność ta jest linią prostą, co potwierdza słuszność przyjęcia $\alpha = 1$ dla anody grafitowej.

Podobnie na rys. 8 przedstawiono zależność $U_l = f\left(\frac{1}{i_l^{0,67}}\right)$ otrzymując także linię prostą, potwierdzającą słuszność przyjęcia dla anody miedzianej $\alpha \approx 0{,}67$. Przyjmując więc, że wartość współczynnika α została jednoznacznie ustalona, wyznaczenie pozostałych dwóch stałych parametrów a i b dla dowolnych charakterystyk nie nastręcza już żadnych trudności.

Ponieważ w praktyce przemysłowej używane są łukowe palniki plazmowe z anodą miedzianą chłodzoną wodą, w pracy zajmiemy się przykładowo analizą charakterystyk napięciowo-prądowych tych właśnie palników.



Rys. 7. Zależność $U_l = f\left(\frac{1}{i_l}\right)$. Palnik typu PLK-2/12, $l_a = 18$ mm, $d_a = 7$ mm, $G^* = \text{const}$. Gaz roboczy argon



Rys. 8. Zależność $U_l = f\left(\frac{1}{i_l^{0,67}}\right)$. Palnik typu PLK-3/20, $l_a = 15$ mm, $d_a = 5$ mm, $G^* = \text{const}$ Gaz roboczy argon

Uprzednio wspomniano, że wartość stałego współczynnika a można wyznaczyć z wykresów $U_l = f(i_l)$, stąd też poniżej podano przykład wyznaczenia współczynnika b oraz wykładnika potęgowego α dla palnika typu PLK-3/20 stosując metodę najmniejszych kwadratów. Warunek minimum dla sumy kwadratów odchyleń wartości wyliczonych od obserwowanych prowadzi do następującego układu równań:

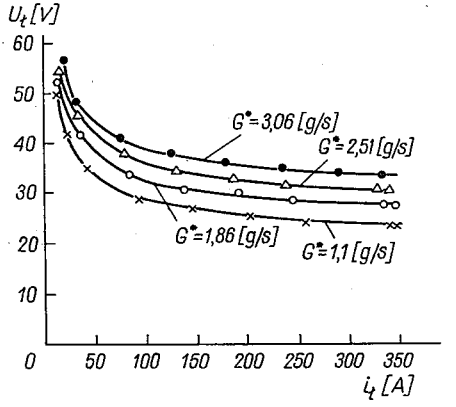
$$\begin{aligned} \log b \sum_{i=1}^{n} \log i_{li} - \alpha \sum_{i=1}^{n} (\log i_{li})^2 &= \sum_{i=1}^{n} \log i_{li} \log(U_{li} - a), \\ n \log b - \alpha \sum_{i=1}^{n} \log i_{li} &= \sum_{i=1}^{n} \log(U_{li} - a). \end{aligned} \tag{11}$$

Korzystając z układu równań (11) wyznaczono za pomocą maszyny cyfrowej typu „Odra 1013" współczynniki stałe b i α dla poszczególnych charakterystyk zdjętych doświadczalnie.

Przykładowo dla palnika PLK-3/20 o danych: $l_a = 15$ mm, $d_a = 5$ mm, równania poszczególnych charakterystyk przedstawionych na rys. 9 przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned}
&\text{— dla } G^* = 1{,}10 \text{ g/s}; \quad U_l = 20{,}0 + \frac{176{,}4}{i_l^{0{,}67}} \text{ [V]},\\
&\text{— dla } G^* = 1{,}86 \text{ g/s}; \quad U_l = 25{,}3 + \frac{196{,}1}{i_l^{0{,}67}} \text{ [V]},\\
&\text{— dla } G^* = 2{,}51 \text{ g/s}; \quad U_l = 26{,}6 + \frac{208{,}2}{i_l^{0{,}67}} \text{ [V]},\\
&\text{— dla } G^* = 3{,}06 \text{ g/s}; \quad U_l = 29{,}7 + \frac{216{,}0}{i_l^{0{,}67}} \text{ [V]}.
\end{aligned} \tag{12}$$

W celu uniezależnienia stałych wyznaczonych doświadczalnie od wydatku gazu roboczego G^* należy skorzystać z podstawowego równania (9) i wyznaczyć stałe współczynniki



Rys. 9. Zależność $U_l = f(i_l)$. Palnik PLK-3/20, $l_a = 20$ mm, $d_a = 5$ mm, $G^* = \text{const}$. Gaz roboczy argon Spawarka typu EW, 32a

A, B, C, D dla $\alpha = 0{,}67$. W tym celu dla układu równań (12) można ułożyć $\binom{4}{2} = 6$ kombinowanych równań, z których wyznacza się szukane stałe A, B, C, D.

Układy tych równań będą następującego typu:

$$\begin{aligned}
A + BG_i^* &= a_i,\\
A + BG_k^* &= a_k
\end{aligned} \tag{13}$$

oraz

$$\begin{aligned}
C + DG_i^* &= b_i,\\
C + DG_k^* &= b_k,
\end{aligned} \tag{14}$$

Wykorzystując współczynniki stałe a i b z równań (12) otrzymamy następujące średnie wartości współczynników A i B oraz C i D:

$$A = 15{,}7; \quad B = 4{,}65; \quad C = 158{,}8; \quad D = 19{,}66.$$

Wobec powyższego zależność $U_l = f(i_l)$ dla palnika PLK 3/20 ($l_a = 15$ mm, $d_a = 5$ mm) będzie:

$$U_l = 15{,}7 + 4{,}65\,G^* + \frac{158{,}8 + 19{,}66\,G^*}{i_l^{0{,}67}}. \tag{15}$$

Wyznaczone za pomocą wzoru (15) napięcie łuku różni się od napięcia pomierzonego maksymalnie o około $+4\%$.

Średnia wartość błędu mieści się w granicach $\pm 1{,}5\%$. Wyniki powyższe dotyczyły przypadku, gdy gazem roboczym był argon technicznie czysty.

Podobne badania przeprowadzono na niektórych typach palników stosując jako gaz roboczy azot technicznie czysty. Dla przykładu poniżej podano wyniki badań palnika typu PPTK-1/50, $l_a = 40$ mm, $d_a = 4$ mm przy użyciu azotu jako gazu roboczego.

Dla wyznaczonych doświadczalnie trzech charakterystyk napięciowo-prądowych przy odpowiednich wydatkach gazu roboczego G^* wzory empiryczne przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned}
&\text{dla } G^* = 1{,}52 \text{ g/s}; \quad U_l = 50{,}78 + \frac{1278}{i_l^{0{,}67}}, \\
&\text{dla } G^* = 2{,}05 \text{ g/s}; \quad U_l = 63{,}3 + \frac{1261{,}5}{i_l^{0{,}67}}, \\
&\text{dla } G^* = 2{,}85 \text{ g/s}; \quad U_l = 82{,}3 + \frac{1229}{i_l^{0{,}67}}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Korzystając z podanej powyżej metody wyznaczania stałych współczynników A, B, C, D średnie ich wartości będą:

$$A = 14{,}6; \quad B = 23{,}8; \quad C = 1337; \quad D = -36{,}7.$$

Wzór ogólny dla palnika typu PPTK-1/50, $l_a = 40$ mm, $d_a = 4$ mm przy zastosowaniu azotu jako gazu roboczego przedstawia się następująco:

$$U_l = 14{,}6 + 23{,}8\,G^* + \frac{1337 - 36{,}7\,G^*}{i_l^{0{,}67}} \text{ [V]}. \tag{17}$$

Korzystając z wzoru (17), w tablicy 1 zestawiono wyniki pomiarów i obliczeń, a na rysunku 10 przedstawiono charakterystyki napięciowo-prądowe w formie graficznej.

Z danych w tablicy 1 wynika, że maksymalny błąd względem napięcia pomierzonego nie przekracza $\pm 3{,}5\%$, co należy uznać za dokładność wystarczającą.

Tablica 1

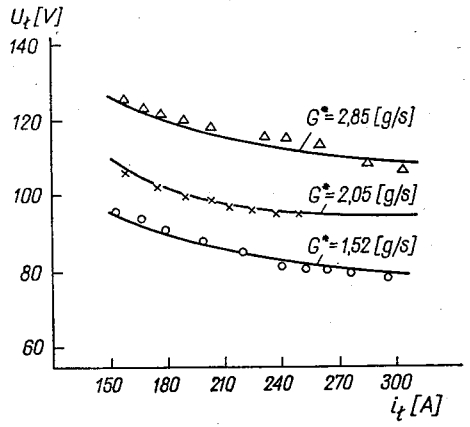
Pomierzone i obliczone według wzoru 17 napięcia łuku

Palnik PPTK-1/50, $l_a = 40$mm, $d_a = 4$mm. Gaz roboczy azot. Zasilanie 2 spawarki typu EW-32a.

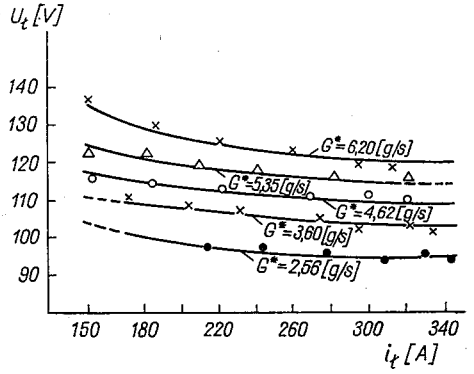
Lp.	U_{lpom}	U_{lobl}	i_{lpom}	P_z	G^*	$\Delta U_{l\%} = \frac{U_{lo} - U_{lp}}{U_{lp}} 100\%$
—	V	V	A	kW	g/s	%
1	95,0	94,4	155	14,7	1,52	−0,63
2	94,0	91,0	165	15,5		−3,19
3	91,5	90,8	176	16,1		−0,76
4	89,2	88,4	193	17,4		−0,81
5	85,3	86,5	216	18,4		+1,41
6	82,3	83,7	236	19,4		+1,7
7	81,6	82,0	252	20,6		+0,49
8	80,0	81,3	264	21,1		+1,63
9	79,3	80,4	276	21,9		+1,39
10	78,0	79,0	296	22,3	1,52	+1,28
1	104,5	107,0	159	16,6	2,05	+2,39
2	107,1	105,3	164	17,6		−1,68
3	102,0	102,8	176	18,0		+0,75
4	100,0	100,8	190	19,0		+0,8
5	99,2	99,5	200	19,9		+0,3
6	96,8	98,4	210	20,3		+1,65
7	96,4	97,3	220	21,2		+0,93
8	95,3	96,1	232	22,1		+0,84
9	95,3	95,4	240	22,8	2,05	+0,21
1	124,0	123,5	159	19,7	2,85	−0,40
2	122,0	121,8	168	20,5		−0,16
3	121,6	121,3	172	20,9		−0,25
4	120,0	119,1	188	22,6		−0,79
5	118,9	116,7	208	24,8		−1,84
6	116,9	114,6	228	26,6		−1,48
7	116,0	113,9	236	27,2		+1,82
8	114,2	112,4	254	29,0		−1,58
9	110,0	110,4	280	30,8		+0,36
10	108,0	109,3	300	32,4	2,85	+1,21

Na rysunku 11 przedstawiono graficznie charakterystyki $U_l = f(i_l)$ zdjęte doświadczalnie i obliczone ze wzoru:

$$U_l = 74{,}0 + 5{,}04\,G^* + \frac{115 + 97{,}1\,G^*}{i_l^{0{,}67}} \quad [\mathrm{V}] \tag{18}$$



Rys. 10. Zależność $U_l = f(i_l)$. Palnik PPTK-1/50, $l_a = 40$ mm, $d_a = 4$ mm, $G^* = \text{const}$. Gaz roboczy azot. Spawarki typu EW-32a



Rys. 11. Zależność $U_l = f(i_l)$. Palnik typu HBI-6, $l_a = 23{,}5$ mm, $d_a = 5$ mm, $G^* = \text{const}$. Gaz roboczy azot. Spawarki typu EW-32a

dla palnika typu HBI-6, $l_a = 23{,}5$ mm, $d_a = 5$ mm zasilanego azotem jako gazem roboczym.

Błąd maksymalny względem wielkości pomierzonej nie przekracza $\pm 3\%$.

3. METODA ANALITYCZNEGO UJĘCIA CHARAKTERYSTYKI $U_l = f(i_l)$ DLA ŁUKOWEGO PALNIKA PLAZMOWEGO Z ŁUKIEM ZEWNĘTRZNYM (BEZPOŚREDNIM)

W palniku z łukiem zewnętrznym (bezpośrednim), wykorzystywanym szczególnie do cięcia i spawania metali, długość kolumny łukowej l_l może być przyjęta za stałą. Szerokie badania jakie przeprowadzono na palniku przemysłowym typu PCa-50 miały za zadanie potwierdzenie słuszności stosowania wzoru (2) względnie (9).

Specjalnym problemem okazała się wartość wykładnika potęgowego α, który należało ponownie wyznaczyć. Opierając się na zależności:

$$U_l = a + \frac{b}{i_l^{\alpha}} \qquad \text{dla} \qquad l_l = \text{const} \tag{19}$$

i mnożąc ją obustronnie przez i otrzymamy:

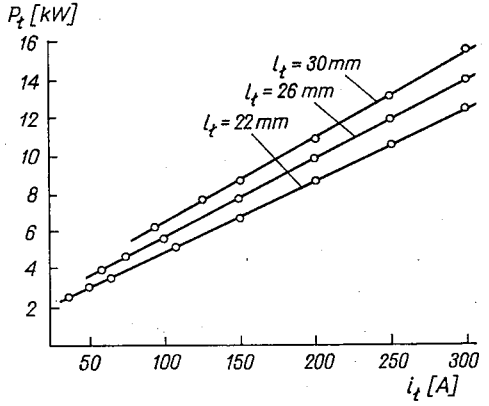
$$U_l i_l = a i_l + b i_l^{1-\alpha} = P_l \tag{20}$$

Z zależności (20) wynika, że jeśli funkcja $P_l = f(i_l)$ będzie linią prostą, wówczas wykładnik potęgowy będzie mógł być przyjmowany jako równy jedności.

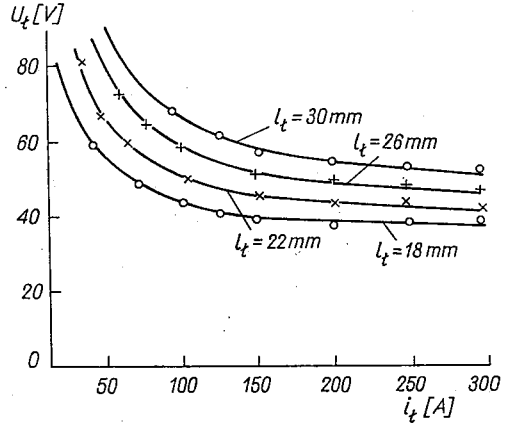
Na rysunku 12 przedstawiono zależności $P_l = f(i_l)$ dla $l_l = 22$, 26 i 30 mm, przy $G^* = \text{const}$., z której wynika, że są one liniami prostymi, wobec czego można przyjąć $\alpha = 1$. Okazuje się więc, że dla palnika z łukiem zewnętrznym, przy którym jako materiał obrabiany zastosowano miedź i stal wysokostopową wykładnik potęgowy $\alpha = 1$. Przy

takim założeniu zależność $U_l = f(i_l)$, przy l_l jako parametrze, przedstawia się w postaci:

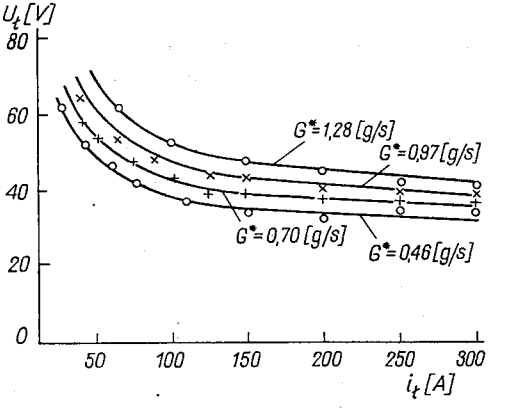
$$U_l = A + Bl_l + \frac{C + Dl_l}{i_l}. \tag{21}$$



Rys. 12. Zależność $P_l = f(i_l)$. Palnik typu PCa-50, l_l = const, G^* = 0,703 g/s = const, d_a = 5 mm, l_a = 2,5 mm. Gaz roboczy argon. Spawarka typu EW-32a



Rys. 13. Zależność $U_l = f(i_l)$. Palnik typu. PCa-50; l_l = const, G^* = 0,703 g/s; d_a = 5 mm, l_a = 2,5 mm. Gaz roboczy argon



Rys. 14. Zależność $U_l = f(i_l)$. Palnik typu PCa-50; l_l = 18 mm, G^* = const. Gaz roboczy argon

Natomiast zależność $U_l = f(i_l)$, przy G^* jako parametrze, można opisać ustaloną w punkcie 2 zależnością:

$$U_l = A + BG^* + \frac{C + DG^*}{i_l}. \tag{22}$$

Korzystając z uprzednio podanej metody wyznaczania współczynników stałych A, B, C, D przeprowadzono analizę wzorów (21) i (22) z punktu widzenia ich dokładności.

Na rysunku 13 przedstawiono przykładowo zależność $U_l = f(i_l)$ dla palnika typu PCa-50 przy l_l jako parametrze i $G^* = 0{,}70$ g/s = const, nanosząc tam wielkości pomierzone i obliczone (linia ciągła) z zależności w postaci:

$$U_l = 19{,}02 + 0{,}76\, l_l + \frac{-1079{,}51 + 117{,}76\, l_l}{i_l}. \tag{23}$$

Analizując wyniki pomierzone i obliczone stwierdzono, że różnica w stosunku do wielkości pomierzonej nie przekracza $\pm 3\%$.

Natomiast na rysunku 14 przedstawiono przykładowo zależność $U_l = f(i_l)$ dla tego samego typu palnika, przy G^* jako parametrze i $l_l = 18$ mm = const, korzystając z zależności:

$$U_l = 25{,}59 + 8{,}92\, G^* + \frac{528{,}88 + 842{,}26\, G^*}{i_l}. \tag{24}$$

Analizując wyniki stwierdzono, że różnice między wielkościami pomierzonymi i obliczonymi nie przekraczają 9%, co stanowi już błąd znaczący.

Przeprowadzając analizę dla około 32 charakterystyk stwierdzono, że większy błąd występuje przy wykorzystaniu zależności (22). Wobec powyższego dla palnika z łukiem zewnętrznym należałoby korzystać z zależności (21), w której długość łuku stanowi charakterystyczny parametr.

4. PRÓBA UJĘCIA CHARAKTERYSTYKI $U_l = f(i_l)$ PRZY G^* ORAZ l_l JAKO PARAMETRACH

Analizując wartości stałych współczynników A, B, C, D, w pracy [14] wykazano, że począwszy od wydatku gazu roboczego $G^* > 0{,}7$ g/s przedstawiają one w funkcji G^* zależność liniową. Wobec powyższego zależność $U_l = f(i_l)$ przy G^* i l_l jako parametrach można przedstawić w postaci:

$$U_l = a_0 + a_1 G^* + (b_0 + b_1 G^*) l_l + \frac{c_0 + c_1 G^* + (d_0 + d_1 G^*) l_l}{i_l}. \tag{25}$$

Współczynniki stałe $a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1, d_0, d_1$ można wyznaczyć przy wykorzystaniu metody najmniejszych kwadratów, analizując funkcje liniowe w postaci:

$$A = a_0 + a_1 G^*.$$

Przyjmując, że suma kwadratów odchyleń wyrazi się zależnością:

$$S = \sum_{i=1}^{n} [A_i - (a_1 G_i^* + a_0)]^2, \tag{26}$$

układ równań normalnych będzie (przykładowo):

$$\begin{aligned} a_1 \sum_{i=1}^{n} G_i^* + a_0 \sum_{i=1}^{n} G_i^* &= \sum_{i=1}^{n} G_i^* A_i, \\ a_1 \sum_{i=1}^{n} G_i^* + a_0\, n &= \sum_{i=1}^{n} A_i. \end{aligned} \tag{27}$$

Dla palnika typu PCa-50 przy $G^* = (0{,}70; 0{,}9; 1{,}2)$, g/s oraz $l_l = (18; 22; 26, 30)$ mm wyznaczono, korzystając z powyższej metody, następującą zależność na napięcie łuku dla $G^* > 0{,}7$ g/s:

$$U_l = 6{,}33 + 19{,}21\,G^* + (1{,}32 - 0{,}79\,G^*)l_l + \frac{3202{,}69 - 6063{,}23\,G^* + (-163{,}60 + 390{,}79\,G^*)\,l_l}{i_l}. \tag{28}$$

Zestawiając wartości napięć łuku pomierzone i obliczone z zależności (28) stwierdzono, że maksymalny błąd nie przekracza $\pm 6\%$, co można uznać za wynik zadawalający.

5. ZAKOŃCZENIE

Przedstawione w pracy rozważania dowodzą, iż zaproponowana w pracy metoda wyznaczania charakterystyk napięciowo-prądowych łukowych palników plazmowych jest poprawna i może być w pełni wykorzystana dla celów praktycznych. Dotyczy to zarówno palnika z łukiem wewnętrznym (pośrednim) jak i zewnętrznym (bezpośrednim).

Wyniki badań wykazują, że tak w przypadku zastosowania jako gazu roboczego argonu jak i azotu różnica między wielkościami pomierzonymi i obliczonymi nie przekracza z zasady $\pm 5\%$, co dla celów praktycznych można uznać za zadawalające.

Należy jednak podkreślić, że zaproponowana metoda dla palników z łukiem pośrednim (wewnętrznym) słuszna jest w tym przypadku, gdy anoda-dysza, dobrana jest tak, iż przemiana energii elektrycznej na wysokotemperaturową energię cieplną odbywa się z możliwie optymalną sprawnością [8]. Wówczas bowiem wyznaczone doświadczalnie stałe współczynniki; A, B, C, D, dla danych wymiarów anody-dyszy oraz dla danego rodzaju gazu roboczego, mogą być wykorzystane dla ogólnego przedstawienia zależności $U_l = f(i_l)$, przy wydatku gazu roboczego G^* jako parametrze.

Natężenie prądu łuku może się wówczas zmieniać w całym możliwym do osiągnięcia zakresie, tzn. od wartości dopuszczalnej dla danego źródła zasilania czy palnika, aż do prądu granicznego, poniżej którego łuk elektryczny nie będzie się już palił.

W przypadku, gdy anoda-dysza nie jest dobrana zgodnie z zasadą optymalnej sprawności energetycznej, zależności empirycznej $U_l = f(i_l)$ nie można uogólnić przy przyjęciu G^* jako parametru. Każdą oddzielną charakterystykę można jednak wówczas opisać odpowiednim wzorem empirycznym, dla danych wymiarów dyszy (l_a, d_a) oraz dla danego wydatku gazu roboczego.

W przypadku palników z łukiem bezpośrednim (zewnętrznym) empiryczną zależność $U_l = f(i_l)$ można przedstawić bez dodatkowych warunków, tym więcej, że długość kolumny łukowej jest tu określona, a anoda-dysza spełnia jedynie rolę urządzenia skupiającego strumień plazmy. Okazuje się jednak, że materiał dyszy nie ma tu wpływu na wartość wykładnika potęgowego α i że przyjmuje on wartość 1, jeśli materiał obrabiany (anoda) wykonana jest z miedzi lub stali wysokostopowej.

Wyniki badań wykazały, że w przypadku palników z łukiem zewnętrznym większą dokładność wielkości obliczonych i pomierzonych uzyskuje się przyjmując jako parametr długość kolumny łukowej l_l. Wystarczającą zgodność wyników pomiarów i obliczeń

uzyskano także przyjmując w zależności empirycznej $U_l = f(i_l)$ tak ilość gazu G^* jak i długość łuku l_l jako parametry. Wystarczające dla celów praktycznych zgodności uzyskano jednak przy warunku odpowiedniego wydatku gazu roboczego tzn. dla $G^* > 0{,}7$ g/s.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Hertha Ayrton, The Electric Arc, The Electrician Printing and Publishing Co., London 1902.
2. W. B. Nottingham, A New Equation for the Static Characteristic of the Normal Electric Arc, J.A.I.E.E. 42 (1923), No 1, str. 12—19.
3. S. C. Osborne, Die elektrischen Merkmale des Schweissbogens, Welding Journal 11 (1935) No 1, str. 11—18.
4. K. Goldman, Properties of the Argon Arc With Thoriatet Tungsten Cathode, British Welding Journal 10 (1963), No 10, str. 516—523.
5. W. M. Conn, Die Technische Physic der Lichtbogenschweissung einschlisslich der Schweissmittel, Springer-Verlag, Berlin (Göttingen) Heidelberg, J. F. Bergmann, München 1959.
6. C. P. Steinmetz, Trans. A.I.E.E., 1906, str. 802.
7. W. Rieder, H. Schneider, Ein Beitrag zur Physic des Gleichstromlichtbogens, „Elin" Zeitschrift, Nr 5 (1953), str. 174—187.
8. Cz. Królikowski, Próba analitycznego ujęcia podstawowych zjawisk występujących przy przetwarzaniu energii elektrycznej w wysokotemperaturową energię cieplną w palniku plazmowym prądu stałego, Praca doktorska, AGH Kraków, maj 1964.
9. Cz. Królikowski, Analiza statecznej pracy palnika plazmowo-łukowego prądu stałego z łukiem pośrednim (wewnętrznym) przy wykorzystaniu charakterystyk napięciowo-prądowych, Rozprawy nr 22, Wyd. Ucz. P. P., Poznań 1967.
10. Cz. Królikowski, Analityczno-eksperymentalna metoda wyznaczania podstawowych parametrów roboczych palnika plazmowego prądu stałego, Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej, Elektryka, nr 6 (34), str. 173—190.
11. Cz. Królikowski, O pewnych eksperymentalnych zależnościach w palniku łukowo-plazmowym prądu stałego, Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej, Elektryka, nr 8 (40) (1966), str. 129—144.
12. G. J. Dautow, M. F. Żukow, Niekotoryje obobszczenia issladowania elektriczeskich dug, Żurn. Prikł. Miech. i Tiechn. Fizyki, Nr 2 (1965), str. 97—105.
13. Cz. Królikowski, Cz. Seidel, Plazmotron (palnik łukowy) jako źródło gazów częściowo zjonizowanych, Rozprawy Elektrotechn., T. X, Zeszyt 1/2 (1964).
14. Analiza statecznej pracy łukowego palnika plazmowego prądu stałego z łukiem zewnętrznym (bezpośrednim), Praca dyplomowa G. Małeckiego wykonana pod kierunkiem Cz. Królikowskiego, Politechnika Poznańska, 1970.

C. KRÓLIKOWSKI

ONE OF THE METHODS OF ANALITICAL FORMULATING VOLTAGE-CURRENT CHARACTERISTICS OF D.C. PLASMA TORCHES

Summary

The method of formulating voltage-current characteristics of D.C. plasma torches with an intermediate and direct arc, is presented in the paper.

On the basis of results of investigations, a new relation between arc voltage and the current of the arc is suggested, by introducing a very essential — for the work of a torch with an internal arc — para-

meter: the quantity of working gas G^*. When analysing the work of a torch with an external arc, it is shown that the length of arc column l_l is the most correct parameter.

Relations between $U_l = f(i_l)$ are also given, introducing two parameters — the quantity of gas G^* and the length of the arc l_l.

C. KRÓLIKOWSKI

ÜBER EINE METHODE ZUR ANALYTISCHEN BESTIMMUNG DER STROM-SPANNUNGS-KENNLINIEN DES GLEICHSTROM-LICHTBOGEN-PLASMABRENNERS

Zusammenfassung

In der Arbeit wurde eine analytische Methode der Strom-Spannungs-Kennlinien des direkten und indirekten Gleichstrom-Lichtbogen-Plasmabrenners dargestellt. Auf Grund von Versuchsergebnissen wurde eine Abhängigkeit zwischen Spannung- und Strom-Lichtbogen vorgeschlagen, wobei ein für die Arbeit des Plasmabrenners sehr wesentlicher Parameter eingeführt worden ist: die Menge des Arbeitsgases G^*.

Die Untersuchungen haben bewiesen, dass für ein Plasmabrenner mit direktem Lichtbogen die Länge des Lichtbogens l_l der geeigneteste Parameter sei. Unter Einführung von zwei Parametern: Gasmenge G^* und Lichtbogenlänge l_l wurden auch die Abhängigkeiten zwischen $U_l = f(i_l)$ angegeben.

Ч. КРУЛИКОВСКИ

ОДИН ИЗ МЕТОДОВ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПОДХОДА К ВОПРОСУ ВОЛЬТАМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДУГОВЫХ ПЛАЗМОВЫХ ГОРЕЛОК ПОСТОЯННОГО ТОКА

Резюме

В настоящей работе представлен метод подхода к вопросу вольтамперных характеристик дуговых плазмовых горелок постоянного тока с посредственной и непосредственной дугой.

На основании результатов исследований предложена новая зависимость между напряжением и током дуги, с введением для горелки с внутренней дугой очень существенного параметра — количества рабочего газа.

Проводя анализ горелки с внешней дугой указано, что самым соответственным параметром является длина дуговой колонны l_l.

Приведена также зависимость $U_l = f(i_l)$, с введением двух параметров — количества газа G^* и длины дуги l_l.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1972, 18, z. 2, ss. 421-437

621.391

Zagadnienia dokładności estymatora kalmanowskiego w warunkach niepełnej znajomości modelu procesu

STANISŁAW ŁUKASIK (WARSZAWA)

Instytut Automatyki Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 8.2.1971

W pracy rozpatrzono wpływ niepełnej znajomości dyskretnego modelu procesu stochastycznego na dokładność estymacji kalmanowskiej. Rozważono zagadnienie obciążalności estymatora i wzrost uchybu średniokwadratowego oraz określono pojęcie skuteczności estymacji. Dla ilustracji przytoczono prosty przykład liczbowy.

1. WSTĘP

Metody filtracji i predykcji procesów stochastycznych w oparciu o teorię filtru Kalmana znalazły w ostatnich latach szerokie zastosowanie zarówno w teorii jak też praktyce sterowania. Zasadniczą rolę odgrywają w tym ujęciu równania filtru formującego, które określa się na podstawie statystycznego modelu procesu. Metodę wyznaczania równań estymatora za pomocą zasady maksimum przedstawiono w p. 3.

W praktyce dysponuje się zazwyczaj przybliżonym oszacowaniem modelu, istotnego znaczenia nabiera więc analiza wrażliwości estymatora. Mimo wielu publikacji dotyczących tego problemu (por. [5], [6] i inne) wydaje się on niezupełnie opracowany. W niniejszej pracy zwrócono szczególną uwagę na następujące aspekty zagadnienia:

a) niedokładne określenie równań estymatora wpływa nie tylko na wzrost średniokwadratowego uchybu estymacji, ale powoduje również jej obciążalność;

b) przy pewnym granicznym odchyleniu modelu estymator okazać się może nieskuteczny, tzn. $\mathrm{tr}\{\mathrm{cov}[e(k|n)]\} > \mathrm{tr}\{\mathrm{cov}[z(k)]\}$ (por. p. 5), gdzie: $z(k)$ — proces stochastyczny scentrowany, $e(k)$ — uchyb estymacji;

c) charakterystyka wrażliwości estymatora względem modelu procesu jest niesymetryczna, szczególnie w odniesieniu do tych elementów macierzy tranzycyjnej filtru formującego, które najbardziej wpływają na jej największą wartość własną.

Opis matematyczny i oznaczenia wielkości

W pracy zastosowano standardowy zapis wektorowo-macierzowy:

$$x, a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ — } n \text{ — wymiarowy wektor kolumnowy,}$$

A, X, R — macierze,

$I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ — macierz jednostkowa,

$\mathbf{0}$ — macierz o elementach zerowych,

X' — macierz transponowana,

$X > Y$ — oznacza, że: $x'Xx > x'Yx$ dla $x \neq 0$,

$\operatorname{tr}\{X\} = \sum_{i=1}^{i=n} x_{ii}$ — ślad macierzy,

$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \dots \frac{\partial \alpha}{\partial x_n}\right]$ — pochodna skalara α względem wektora x,

$\operatorname{cov}\{x(n)\} = E\{xx'\}$ — macierz kowariancji wektora losowego x,

$\hat{x}(k|n) = E\{x|n\}$ — estymata zmiennej $x(k)$ — warunkowa wartość oczekiwana wyznaczana na podstawie zbioru obserwacji $\mathcal{Y}_n$,

$\mathcal{Y}_n = \{y(r); \quad 0 \leqslant r \leqslant n\}$ — zbiór obserwacji procesu dyskretnego w przedziale $0 \div n$.

Statystyczną ocenę odpowiedniej wielkości przyjęto nazywać estymatą, natomiast operator wyznaczający tę ocenę estymatorem.

2. SFORMUŁOWANIE ANALITYCZNE

Rozważa się dyskretny proces stochastyczny o strukturze:

$$\varepsilon(n) = m(n) + z(n); \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{1}$$

gdzie:

$m(n)$ — wartość średnia — składowa deterministyczna,

$z(n)$ — realizacja stochastycznego procesu scentrowanego.

Liniowy model dynamiczny składowej $z(n)$ ma postać:

$$\xi(n+1) = \Phi(n+1, n)\xi(n) + v(n) \tag{2}$$

$$y(n) = z(n) + w(n); \quad z(n) = M(n)\xi(n), \tag{3}$$

gdzie:

$\xi(n)$ — wektor stanu,

$y(n)$ — wektor obserwacji o wymiarze równym lub mniejszym od wymiaru wektora stanu,

$\Phi(n+1, n)$ — macierz tranzycyjna,

$M(n)$ — macierz obserwacji,

$v(n), w(n)$ — dyskretne wektorowe procesy nieskorelowane, o własnościach

$$E\{v(n)\} = 0; \quad E\{w(n)\} = 0; \quad E\{v(n)w'(n)\} = \mathbf{0}; \tag{4}$$

$$\operatorname{cov}\{v(n)\} = E\{v(n)v'(k)\} = Q(n)\,\delta_{nk}, \tag{4a}$$

$$\operatorname{cov}\{w(n)\} = E\{w(n)w'(k)\} = R(n)\,\delta_{nk}, \tag{4b}$$

δ_{nk} — tzw. delta Kroneckera.

Zadaniem estymacji jest wyznaczenie w oparciu o zbiór obserwacji:

$$\mathcal{Y}_r \stackrel{\text{df}}{=} \{y(n); \quad 0 \leqslant n \leqslant r\},$$

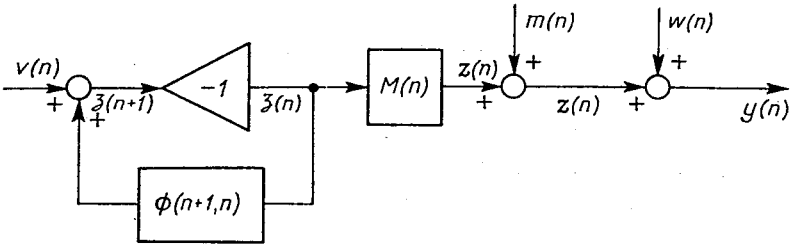
estymaty:

$$\hat{\varepsilon}(k|r) = E\{z(k)|\mathcal{Y}_r\},$$

minimalizującej funkcję straty:

$$J = \operatorname{tr}\{\operatorname{cov}[\varepsilon(k) - \hat{\varepsilon}(k|r)]\}; \quad k \geqslant r. \tag{5}$$

Przypadek $k = r$ oznacza filtrację, $k > r$ — predykcję.



Rys. 1. Model procesu $z(n)$

Parametry modelu procesu, w oparciu o które przeprowadza się syntezę filtru formującego a następnie estymatora, znane są niedokładnie.

Zapisujemy to w postaci:

$$\Phi(n+1, n) = \Phi^o(n+1, n) + \Delta\Phi(n+1, n), \tag{6}$$

$$Q(n) = Q^o(n) + \Delta Q(n), \quad R(n) = R^o(n) + \Delta R(n), \tag{6a}$$

$$m(n) = m^o(n) + \Delta m(n); \quad M(n) = M^o(n) + \Delta M(n), \ldots \tag{6b}$$

Możliwy jest również niedokładny wybór warunków brzegowych równań rekurencyjnych estymatora.

Symbol $\Delta(\cdot)$ oznacza błąd modelu, natomiast $(\cdot)^o$ wartość optymalną.

W p. 4 i 5 rozważono konsekwencje tego faktu.

3. WYPROWADZENIE RÓWNAŃ ESTYMATORA ZA POMOCĄ ZASADY MAKSIMUM

Ogólny schemat estymatora podano na rys. 2. Rozważmy zadanie estymacji składowej $\hat{z}(k|n)$. Dla jednego etapu wyprzedzenia mamy równania:

$$\hat{\xi}(n+1|n) = \Phi^*(n+1, n)\hat{\xi}(n|n-1) + K^*(n)\eta(n); \tag{7}$$

$$\eta(n) = y(n) - m(n), \tag{8}$$

$$\hat{\xi}(n+r|n) = \Phi(n+r, n+1)\hat{\xi}(n+1|n),$$

$$\hat{z}(n+s|n) = M(n+s)\hat{\xi}(n+s|n). \tag{9}$$

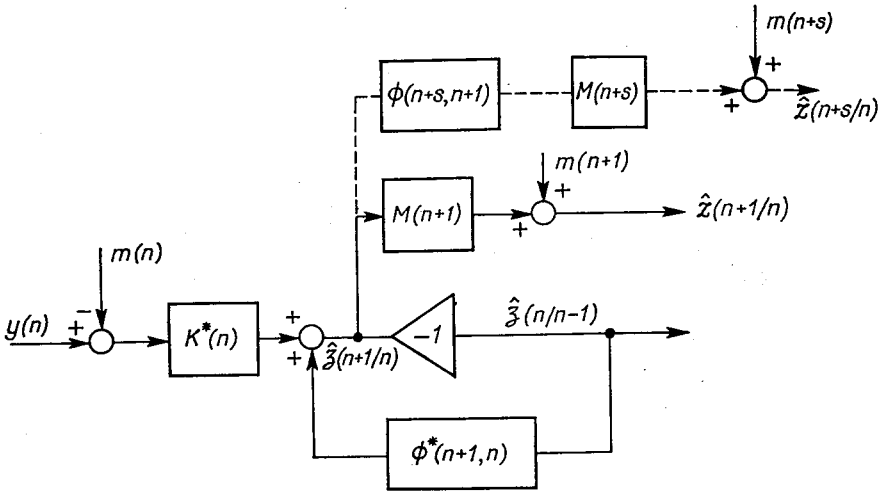
Zadanie syntezy estymatora sprowadza się do określenia macierzy

$$\Phi^*(n+1, n) \quad \text{i} \quad K^*(n); \quad n = 0, 1, 2, \ldots k,$$

tak, aby wskaźnik jakości:

$$J = \mathrm{tr}\{\mathrm{cov}[z(n+1)-\hat{z}(n+1\,|\,n)]\}$$

osiągnął wartość minimalną.



Rys. 2. Schemat estymatora

Uchyb estymacji wektora stanu:

$$\varepsilon(n+1\,|\,n) = \xi(n+1) - \hat{\xi}(n+1\,|\,n)$$

jest procesem przypadkowym, którego równanie otrzymuje się na podstawie (2) i (7):

$$\varepsilon(n+1\,|\,n) = [\Phi(n+1, n) - K^*(n)M(n)]\xi(n) - \Phi^*(n+1, n)\hat{\xi}(n\,|\,n-1)+v(n) - \\ - K^*(n)w(n). \qquad (10)$$

Z warunku nieobciążalności:

$$E\{\hat{z}(n+1\,|\,n)\} = E\{z(n+1)\}, \qquad (11)$$

po uwzględnieniu (2), (7), (10), otrzymuje się ważną zależność

$$\Phi^*(n+1, n) = \Phi(n+1, n) - K^*(n)M(n). \qquad (12)$$

Równanie uchybu prognozy (10) przyjmuje teraz postać:

$$\varepsilon(n+1\,|\,n) = -\Phi^*(n+1, n)\varepsilon(n\,|\,n-1)+v(n)-K^*(n)w(n). \qquad (13)$$

Po uwzględnieniu statystycznej niezależności procesów $v(n)$, $w(n)$ oraz $\varepsilon(n\,|\,n-1)$, uzyskuje się następujące równanie rekurencyjne macierzy kowariacji uchybu:

$$P(n+1|n) = \Phi^*(n+1, n)P(n\,|\,n-1)\Phi^{*\prime}(n+1, n)+Q(n)+K^*(n)R(n)K^{*\prime}(n). \qquad (14)$$

Traktując tę zależność jako nowe równanie stanu oraz przyjmując etap $(k+1)$ jako punkt końcowy trajektorii $P(n\,|\,n-1)$; $n = 0, 1, \ldots k+1$, sprowadza się problem do znanego w rachunku wariacyjnym zadania Mayera.

Zauważmy, że równanie stanu jest liniowe względem „stanu" $P(n+1\,|\,n)$ oraz nieliniowe względem „sterowania" $K^*(n)$. Jak wykazał Halkin [7], w przypadku gdy nieliniowość

względem sterowania jest wypukła (w rozpatrywanym przypadku posiada ona charakter kwadratowy), warunek optymalności w postaci $\frac{\partial H(n)}{\partial K^*(0)} = 0$, gdzie: H — hamiltonian zadania, jest warunkiem dostatecznym i obowiązuje w sensie globalnym. Określamy hamiltonian zadania

$$H(n) = \mathrm{tr}\{P(n+1|n)\Psi'(n)\}. \tag{15}$$

Macierz zmiennych sprzężonych $\Psi(n)$ spełnia równanie:

$$\Psi(n-1) = -\frac{\partial H(n)}{\partial P(n|n-1)}; \quad \Psi(k+1) = \frac{\partial \mathrm{tr}\{P(k+1|k)\}}{\partial P(k+1|k)} = I.$$

Po uwzględnieniu (13) otrzymuje się:

$$\Psi(n-1) = \Phi^*(n+1, n)\Psi(n)\Phi'^*(n+1, n),$$

a następnie:

$$\Psi(n-1) = \Phi(k+1, n)\Phi^{*\prime}(k+1, n); \quad n = k, \quad k-1, \ldots \tag{16}$$

Warunek optymalności przyjmie postać:

$$\frac{\partial}{\partial K^*(n)}\{\mathrm{tr}\{[\Phi(n+1, n) - M(n)K^*(n)]P(n|n-1)[\Phi(k+1, n) - M(n)K^*(n)]' + Q(n) + K^*(n)R(n)K^{*\prime}(n)\} \cdot \Phi^*(k+1, n) \cdot \Phi^{*\prime}(k+1, n)\}.$$

Uwzględniając niezależność macierzy $\Phi^*(k+1, n)$ od $K^*(n)$ oraz stosując następujące reguły określania gradientu śladu macierzy:

$$\frac{\partial}{\partial X}\left\{\mathrm{tr}\{AX\}\right\} = A', \quad \frac{\partial}{\partial X}\left\{\mathrm{tr}\{AXBX'\}\right\} = A'XB + AXB,$$

po odpowiednich przekształceniach otrzymuje się:

$$K^*(n) = \Phi(n+1, n)P(n|n-1)M'(n)[M(n)P(n|n-1)M'(n) - R(n)]^{-1}, \tag{17}$$

dla $n = 0, 1, 2, \ldots k$.

Relacje (12) i (17) opisują elementy dyskretne liniowego estymatora kalmanowskiego. Aby opis ten był pełny, należy określić warunki początkowe iteracji $P(n|n-1)$ oraz $\hat{\underset{\sim}{x}}(n|n-1)$. Z warunku nieobciążalności estymacji otrzymuje się:

$$P(1|0) = \mathrm{cov}\{\underset{\sim}{x}(0)\},$$
$$\hat{\underset{\sim}{x}}(1|0) = E\{\underset{\sim}{x}(0)\}.$$

4. ZAGADNIENIA OBCIĄŻALNOŚCI ESTYMACJI

Przypominamy, że estymator nazywamy nieobciążonym, jeśli spełniony jest warunek (11), tzn.

$$E\{\hat{\underset{\sim}{e}}(k|n)\} = E\{\underset{\sim}{e}(k)\},$$

lub

$$E\{e(k|n)\} = 0; \quad n \geqslant k.$$

Wielkości:

$$b(k) = E\{e(k|n)\} = E\{\varepsilon(k)\} - E\{\hat{\varepsilon}(k|n)\},$$

oraz

$$\beta(k) = E\{\underset{\sim}{z}(k)\} - E\{\hat{\underset{\sim}{z}}(k|n)\},$$

nazywamy odpowiednio obciążeniem oceny zmiennej $z(k)$ oraz wektora stanu $\underset{\sim}{z}(k)$. Uwzględniając (6), (6a), (10), równanie rzeczywistego uchybu estymacji wektora stanu napiszemy w postaci:

$$\varepsilon_a(n+1|n) = [\Phi^o(n+1, n - K^*(n)M^o(n) - \Phi^*(n+1, n)]\underset{\sim}{z}(n) + \\ + \Phi^*(n+1, n)\varepsilon_a(n|n-1) - K^*(n)[w(n) + \Delta m(n)] + v(n), \quad (18)$$

gdzie

$$\varepsilon_a(n+1|n) = \underset{\sim}{z}(n+1) - \hat{\underset{\sim}{z}}(n+1|n).$$

Na podstawie (11) można przyjąć:

$$\Delta\Phi^*(n+1, n) = \Phi^{*o}(n+1, n) - M^o(n)\Delta K^*(n) - \Delta M(n)K^{*o}(n). \quad (19)$$

Symbole $\Delta\Phi^*(n+1, n)$ oraz $\Delta K^*(n)$ oznaczają tutaj odchylenia parametrów estymatora.

Równanie (18) przyjmie postać:

$$\varepsilon_a(n+1|n) = [\Delta\Phi(n+1, n) - K^*(n)\Delta M(n)]\underset{\sim}{z}(n) + \\ + \Phi^*(n+1, n)\varepsilon_a(n|n-1) + v(n) - K^*(n)[w(n) + \Delta m(n)]. \quad (20)$$

W ujęciu stosowanym w niniejszej pracy przyjąć należy

$$\varepsilon(1|0) = 0.$$

Obok prawidłowości równań estymatora oraz warunków początkowych iteracji, nieobciążalność estymacji uwarunkowana jest dokładnością podziału procesu na składowe $z(n)$ i $m(n)$.

Lemat 1

Jeżeli warunki początkowe iteracji (18) oraz składowa $m(n)$ określone są dokładnie, natomiast model dynamiki procesu $z(n)$ znany jest w sposób przybliżony, wówczas estymator zachowuje własność nieobciążalności.

Dowód

Na podstawie (18), (19) otrzymuje się:

$$E\{\varepsilon_a(n+1|n)\} = \{\Delta\Phi^*(n+1, n) - \Delta K^*(n)M^o(n)\}E\{\underset{\sim}{z}(n)\} + \\ + \Phi^*(n+1, n)E\{\varepsilon_a(n|n-1)\} + E\{v(n)\} + K^*(n)E\{w(n)\},$$

skąd, uwzględniając (4)÷(4b), przy założeniu $E\{\underset{\sim}{z}^o(n)\} = 0$, otrzymuje się:

$$E\{\varepsilon_a(n+1|n)\} = \Phi^*(n+1, 1)E\{\varepsilon(1|0\}; \\ E\{\varepsilon(1|0)\} = E\{\underset{\sim}{z}(1) - \hat{\underset{\sim}{z}}(1|0\}. \quad (21)$$

Ponieważ $\hat{\underset{\sim}{z}}(1|0) = 0$, stąd:

$$E\{\varepsilon(1|0)\} = 0.$$

Ostatecznie $E\{\varepsilon_a(n+1|n)\} = 0$, oraz $b(n) = M(n)\beta(n) = 0$ dla $\forall\ n$. c.n.d.

Rozpatrzmy z kolei przypadek, w którym model dynamiki określony jest dokładnie, natomiast podział procesu na składowe $m(n)$ i $z(n)$ jest nieprawidłowy. Przy warunku:

$$\Delta\Phi^*(n+1, n) = 0; \quad \Delta K^*(n) = 0,$$

znika pierwsza składowa prawej strony równania (20).

Postępując analogicznie jak przy dowodzeniu lematu 1, otrzymujemy:

$$E\{\varepsilon(n+1|n)\} = \Phi(n+1, n)\beta(1) + \sum_{i=1}^{i=n} \Phi^*(n+1, i)K^*(i)\Delta m(i).$$

W ogólnym przypadku $\Delta\Phi^*(n+1, n) \neq 0$, $\Delta K^*(n) \neq 0$, $\Delta m(n) \neq 0$, co odpowiada niedokładności modelu filtru formującego, jak również niedokładności wyboru warunku brzegowego równania macierzy kowariancji uchybu $P(n+1|n)$, mamy

$$\beta(n+1) = (n+1, 1)\beta(1) + \sum_{i=1}^{i=n} \Phi^*(n+1, i)\,[\Delta\Phi(i+1, i) - \\ - K^*(i)\Delta M(i)]\beta(i) + K^*(i)\Delta m(i). \tag{22}$$

Zauważmy, że przez odpowiednią korekcję macierzy wzmocnienia estymatora $K^*(n)$ osiągnąć można znaczne zmniejszenie wartości wyrażenia:

$$[\Delta\Phi(n+1, n) - K^*(n)\Delta M(n)]\beta(n) + K^*(n)\Delta m(n).$$

W granicznym przypadku otrzymuje się warunek tzw. estymatora skompensowanego:

$$[\Delta\Phi(n+1, n) + K^*(n)M^o(n)]\beta(n) = 0, \tag{23}$$

lub

$$\Delta\Phi(n+1, n) + [K^*(n) + \Delta K^*(n)]M^o(n) = 0.$$

Należy sobie jednak zdawać sprawę, że warunek kompensacji (23) zrealizować można jedynie metodą prób.

Obciążenie $b(n)$ w każdym przypadku określone jest zależnością:

$$b(n) = M(n)\beta(n) + \Delta m(n). \tag{24}$$

Granicznym efektem niedokładności modelu okazać się może rozbieżność estymacji z obserwacjami, którą interpretować można jako niestabilność równania uchybu (20). Koniecznym wydaje się więc sprawdzenie stabilności macierzy $\Phi(n+1, n)$ i ewentualna jej korekcja.

Zauważmy, że w estymatorze skompensowanym wyklucza to rozbieżność estymacji z obserwacjami. W ogólnym przypadku wymagana będzie dodatkowo stabilność macierzy:

$$\Delta\Phi(n+1, n) - K^*(n)M^o(n).$$

W następnym punkcie zostanie podane twierdzenie, które formułuje warunki stabilności w innej postaci.

5. PRZYROST UCHYBU ŚREDNIOKWADRATOWEGO

Oznaczmy przez $\mathscr{P}(n+1\,|\,n) = \operatorname{cov}\{e(n+1\,|\,n)\}$ macierz kowariancji uchybu estymacji obliczaną z równania (14) dla modelu przybliżonego; wtedy

$\mathscr{P}_a(n+1\,|\,n) = \operatorname{cov}\{\varepsilon(n+1)-\hat{\varepsilon}(n+1\,|\,n)\}$ — macierz kowariancji uzyskiwana w trakcie estymacji przybliżonej procesu rzeczywistego

oraz

$\mathscr{P}^o(n+1\,|\,n) = \operatorname{cov}\{\varepsilon(n+1)-\hat{\varepsilon}^o(n+1\,|\,n)\}$ — macierz kowariancji, charakteryzująca estymację w hipotetycznych warunkach dokładnej znajomości modelu procesu.

Równania uchybów estymacji w warunkach rzeczywistych mają postać:

$$\varepsilon_a(n+1\,|\,n) = \Delta\Phi(n+1,n)\,\xi(n)+\Phi(n+1,n)\,\varepsilon_a(n\,|\,n-1)- \\ -K^*(n)\,[w(n)+\Delta m(n)]+M(n)\,\xi(n)+M(n)\,\varepsilon_a(n\,|\,n-1)+v(n),$$

$$e_a(n+1\,|\,n) = M^o(n+1)\,\varepsilon_a(n+1\,|\,n)+\Delta M(n+1)\,\hat{\xi}_a(n+1\,|\,n)+\Delta m(n+1).$$

Odpowiednio macierze kowariancji uchybów wyniosą:

$$P_a(n+1|n) = Q(n)+$$

$$+\left[\begin{array}{c} \Phi^o(n+1,n) \\ \hline \Delta\Phi(n+1,n) \\ \hline K^*(n) \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c|c} P_a(n|n-1) & \pi(n|n-1)+ & M(n)P_a(n|n-1)+ \\ & +P_a(n|n-1) & +\pi(n|n-1)\Delta M'(n) \\ \hline \pi'(n|n-1)+ & D(n)+ & \Delta M(n)D'(n)+ \\ +P_a(n|n-1) & +P_a(n|n-1) & +M(n)\pi'(n) \\ \hline P_a(n|n-1)M'(n)+ & D(n)\Delta M'(n)+ & R(n)+F(n)+M(n) \\ +\Delta M(n)\pi'(n|n-1) & +\pi(n)M^T(n) & P_a(n|n-1)M'(n) \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \Phi(n+1,n) \\ \hline \Delta\Phi(n+1,n) \\ \hline K^*(n) \end{array}\right]',$$

$$\mathscr{P}_a(n+1|n) = B(n+1)+$$

$$+\left[\begin{array}{c} M^o(n+1) \\ \hline \Delta M(n+1) \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} P_a(n+1|n) & \pi(n+1|n)-P_a(n+1|n) \\ \hline \pi^T(n+1|n)-P_a(n+1|n) & S(n+1) \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} M^o(n+1) \\ \hline \Delta M^o(n+1) \end{array}\right]', \qquad (25)$$

gdzie:

$D(n) = \operatorname{cov}\{\xi(n)\}$,

$\pi(n\,|\,n-1) = E\{\xi(n)\,\varepsilon_a'(n\,|\,n-1)\}$ — macierz opisana zależnością rekurencyjną,

$$\pi(n\,|\,n-1) = \Phi(n,n-1)\pi(n-1\,|\,n-2)\Phi^{*\prime}(n\,|\,n-1)+\Phi(n,n-1)\,D(n)\cdot\Delta\Phi'(n,n-1)+ \\ +Q(n); \quad \pi(o) = 0, \qquad (26)$$

$B(n) = \left[\begin{array}{cc} \Delta m_1^2(n) & 0 \\ & \Delta m_2^2(n) \\ 0 & \ddots\ \Delta m_n^2(n) \end{array}\right]$; $\Delta m_1(n), \Delta m_2(n) \ldots$ — składowe wektora $\Delta m(n)$,

$P(n\,|\,n-1) = \operatorname{cov}\{\varepsilon(n\,|\,n-1)\}$,

$S(n+1\,|\,n) = \operatorname{cov}\{\hat{\xi}(n+1\,|\,n)\}$, przy czym:

$S(n+1\,|\,n) = \Phi^*(n+1,n)S(n\,|\,n-1)\Phi^{*\prime}(n+1,n)+K^*(n)\,[D(n)+R(n)]K^{*\prime}(n)$,

$F(n) = B(n)+\Delta M(n)D(n)\Delta M'(n)+M(n)\pi(n\,|\,n-1)\cdot M'(n)+M'(n)\pi(n\,|\,n-1)M(n)$.

W przypadku dokładnej znajomości modelu byłoby:

$$P^o(n+1|n) = \left[\begin{array}{c} \Phi^o(n+1,n) \\ \hline K^{*o}(n) \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} P^o(n|n-1) & 0 \\ \hline 0 & R(n)+M^o(n)P^o(n|n-1)M^{o\prime}(n) \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \Phi^o(n+1,n) \\ \hline K^{*o}(n) \end{array}\right]+Q(n),$$

oraz

$$\mathscr{P}^o(n+1\,|\,n) = M^o(n+1)P^o(n+1\,|\,n)M^{o\prime}(n+1).$$

Przyrost macierzy kowariancji uchybu estymacji:

$$\Delta P(n+1\,|\,n) = P_a(n+1\,|\,n) - P^o(n+1\,|\,n)$$

określony jest przez równania rekurencyjne:

$$P(n+1|n) =$$

$$= \begin{bmatrix} \Phi^o(n+1,n) \\ \Delta\Phi(n+1,n \\ K^{o*}(n) \\ \Delta K^*(n) \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c|c} \Delta P(n|n-1) & \pi'(n|n-1)+ & M(n)\times & M(n)\times \\ & +P_a(n|n-1) & \times P_a(n|n- & \times P_a(n|n- \\ & & -1)+\pi(n|n- & -1)+\pi(n|n- \\ & & -1)\Delta M^T(n) & -1)\Delta M^T(n) \\ \hline \pi'(n|n-1)+ & D(n)+ & M(n)\times & M(n)\times \\ +P_a(n|n-1) & +P_a(n|n-1) & \times P_a(n|n- & \times P_a(n|n- \\ & & -1)+\pi(n|n- & -1)+\pi(n|n- \\ & & -1)\Delta M'(n) & -1)\Delta M'(n) \\ \hline M'(n)\times & M'(n)\times & M(n)\times & 0 \\ \times P_a(n|n- & \times P_a(n|n- & \times\Delta P(n|n- & \\ -1)+\Delta M(n) & -1)+\Delta M(n) & -1)+M'(n) & \\ \times\pi'(n|n-1) & \times\pi'(n|n-1) & +F(n) & \\ \hline P_a(n|n-1)\times & M(n)\times & 0 & R(n)+F(n)+ \\ \times M'(n)+ & \times P_a(n|n- & & +M(n)\times \\ +\Delta M(n)\times & -1)+\Delta M(n) & & \times P_a(n|n- \\ \times\pi'(n|n-1) & \times\pi'(n|n-1) & & -1)M'(n) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \Phi^o(n+1,n) \\ \Delta\Phi(n+1,n) \\ \\ K^{o*}(n) \\ \\ \Delta K^*(n) \end{array}\right]. \quad (27)$$

Dla s kroków wyprzedzenia (por. dodatek A) będzie:

$$P_a(n+s|n) = \sum_{i=0}^{i=s-1} \Phi(n+s,n+1)Q(n+i-1)\Phi'(n+s,n+1)+$$
$$+\begin{bmatrix} \Phi^o(n+s,n+1) \\ \Delta\Phi(n+s,n+1) \end{bmatrix}\left[\begin{array}{c|c} P_a(n+1|n) & \pi(n+1|n) \\ \hline \pi(n+1|n) & D(n+1) \end{array}\right]\begin{bmatrix} \Phi^o(n+s,n+1) \\ \Delta\Phi(n+s,n+1) \end{bmatrix}'. \quad (28)$$

Przyrost macierzy kowariancji wyniesie odpowiednio:

$$\Delta P_a(n+s|n) = \left[\begin{array}{c} \Phi^o(n+s,n+1) \\ \hline \Delta\Phi(n+s,n+1) \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} P_a(n+1|n) & \pi(n+1|n)-P^o(n+1|n) \\ \hline \pi(n+1|n)-P^o(n+1|n) & U(n+1|n) \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \Phi(n+s,n+1) \\ \hline \Delta\Phi(n+s,n+1) \end{array}\right]', \quad (29)$$

gdzie $U(n+1\,|\,n) = D(n+1) - P^o(n+1\,|\,n) = \operatorname{cov}\{\hat{z}^o(n+1\,|\,n)\}$.
Dolna granica przyrostu kryterium odpowiada przypadkowi estymatora spełniającego warunek:

$$\Delta\Phi(n+1,n) = K^*(n)\Delta M(n). \quad (30)$$

Mamy wówczas:

$$\varepsilon(n+1|n) = \Phi^*(n+1,n)\varepsilon(n\,|\,n-1) - K^*(n)\,[w(n)+\Delta m(n)]+v(n),$$

skąd:

$$P(n+1\,|\,n) = Q(n)+\Phi^*(n+1,\,n)\,P(n\,|\,n-1)\,\Phi^{*\prime}(n+1,\,n)+K^*(n)\,[R(n)+B(n)]\,K^{*\prime}(n).$$

Podobnie otrzymuje się $\mathscr{P}(n+1\,|\,n)$.

Z kolei, oznaczając $\min\{\Delta P(n+1\,|\,n)\} = \Delta P_s(n+1\,|\,n)$, mamy:

$$\Delta P_s(n+1|n) =$$

$$= \begin{bmatrix} \Phi^o(n+1,\,n) \\ \Delta\Phi(n+1,\,n) \\ K^{*2}(n) \\ \Delta K^*(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_s(n|n-1) & \Delta P_s(n|n-1) & 0 & 0 \\ \Delta P_s(n|n-1) & \Delta P_s(n|n-1) & 0 & 0 \\ & & B(n)-M^o(n)\times & 0 \\ & & \times\Delta P_s(n|n-1)\,M^{oT}(n) & \\ 0 & 0 & 0 & R(n)+ \\ & & & +B(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^o(n+1,\,n) \\ \Delta\Phi(n+1,\,n) \\ K^{*o}(n) \\ \Delta K^*(n) \end{bmatrix}'.$$

Uwzględniając równanie:

$$e_a(n+s\,|\,n) = M^o(n+s)\cdot\varepsilon_a(n+s\,|\,n)+\Delta M(n+s)\hat{\xi}_a(n+s\,|\,n)+\Delta m(n+s),$$

łatwo uzyskać można zależności dla $\mathscr{P}_a(n+s\,|\,n)$ oraz $\Delta\mathscr{P}_a(n+s\,|\,n)$. Przyrost średniokwadratowego kryterium dokładności wyniesie:

$$\Delta J(k\,|\,n) = \operatorname{tr}\{\Delta\mathscr{P}(k\,|\,n)\},$$

$$k \geqslant n.$$

Zauważmy, że kompensacja uchybu macierzy tranzycyjnej poprzez zmianę „wzmocnienia" estymatora poprawia przede wszystkim dokładność predykcji dla bliskiego horyzontu wyprzedzenia. Dla większego wyprzedzenia efekt ten zanika, ponieważ dominuje wówczas druga składowa równania (28). Przypadek niestabilności macierzy $\Phi(n+1,\,n)$, któremu odpowiada nieograniczony przyrost błędu średniokwadratowego, wykluczamy z rozważań. Z kolei, dla przypadku stabilnego, oszacowanie górnej granicy przyrostu uchybu jest dosyć uciążliwe i mało przejrzyste do interpretacji. Warunek ograniczonego przyrostu uchybu wynika z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1

Jeśli dokładny [2], [3] oraz przybliżony model procesu:

$$\xi(n+1) = [\Phi(n+1,\,n)+\Delta\Phi(n+1,\,n)]\,\xi(n)+v(n)+\Delta m(n), \tag{31}$$

$$y(n) = [M^o(n)+\Delta M(n)]\,\xi(n)+w(n)+m(n);\ m(n) = m^o(n)+\Delta m(n), \tag{31a}$$

jest jednostajnie sterowany i obserwowalny (por. dodatek B), jeśli $P(1\,|\,o) > 0$, a ponadto przebieg $\Delta m(n)$ jest jednostajnie ograniczony, wówczas macierz kowariancji rzeczywistego uchybu estymacji $P_a(n+1\,|\,n)$ jest ograniczona dla każdego n.

Dowód

Równanie uchybu estymacji wektora stanu filtru formującego można zapisać w postaci:

$$\varepsilon_a(n+1\,|\,n) = \Phi^*(n+1,\,n)\,\varepsilon_a(n\,|\,n-1)-[\Delta\Phi(n+1,\,n)-$$

$$-K^*(n)\Delta M(n)]\,\xi(n)-K^*(n)\,[\Delta m(n)+w(n)+v(n)], \tag{32}$$

skąd wynikają zależności:

$$\varepsilon(n+1\,|\,n) = \Phi^*(n+1,\,1)\varepsilon_a(1\,|\,0) - \sum_{i=1}^{i=n} \Phi^*(n+1,\,i)\{[\Delta\Phi(i+1,\,i) - K^*(i)\Delta M(n)]\hat{x}(i) - K^*(i)[\Delta m(i) - w(i)] + v(i)\}, \tag{33}$$

$$P_a(n+1\,|\,n) = \operatorname{cov}\{\varepsilon_a(n+1\,|\,n)\} = \Phi^*(n+1,\,1)P_a(1\,|\,0)\Phi^*(n+1,\,1) + \sum_{i=1}^{i=n} \Phi^*(n+1,\,i)G(i)\Phi^{*\prime}(n+1,\,i),$$

gdzie:

$$G(i) = [\Delta\Phi(i+1,\,i) - K^*(i)\Delta M(i)]D(n)[\Delta\Phi(i+1,\,i) - K^*(i)\Delta M(i)]' + K^*(i)[B'(i) + R(i)]K^{*\prime}(i) + Q(i). \tag{35}$$

Dowodzi się (por. [8] str. 240), że przy spełnieniu podanych w twierdzeniu warunków model estymatora jest stabilny. Oznacza to, że zachodzi związek:

$$\Phi(k,j) \leqslant c_1 \cdot \exp[-c_2(k-j)], \quad (c_1, c_2 > 0). \tag{36}$$

Przy ograniczonym $P(1\,|\,0)$ warunkiem jednostajnej stabilności estymatora będzie ograniczoność macierzy $G(i)$.

Analizując poszczególne składowe prawej strony wyrażenia (35) stwierdzić można, że warunek ten jest spełniony. Oznacza to, że rozwiązanie równania kowariancji uchybu jest jednostajnie ograniczone, co zapiszemy w postaci:

$$P(k+1\,|\,0) \leqslant c_3 \cdot \sum_{i=1}^{i=k} \exp\{-c_4 \cdot (k+1,\,i)\} \quad \text{c.n.d.} \tag{37}$$

Rozważmy z kolei wpływ dokładności wyboru warunków brzegowych równań rekurencyjnych (7) i (14). Ściślej biorąc wystarczy rozpatrzyć to zagadnienie tylko w odniesieniu do równania (14), ponieważ przyjęcie dla równania (7) warunku $\hat{x}(1\,|\,0) = 0$ określa prawidłowo warunek brzegowy. W szczególnym przypadku, gdy macierz $\Phi(n+1, n)$ oraz $M(n)$ określone są dokładnie, natomiast warunek brzegowy $P(1\,|\,0)$ oraz macierze $Q(n)$ i $R(n)$ obarczone są błędem, obowiązuje następujące twierdzenie udowodnione w pracy [8] str. 248.

Twierdzenie 2

Jeśli

$$P(1\,|\,0) \leqslant P(1\,|\,0), \quad Q^o(n) \leqslant Q(n)$$

oraz

$$R^o(n) \leqslant R(n) \quad \text{dla} \quad \forall\, n,$$

wówczas

$$P_a(n+1\,|\,n) \leqslant P(n+1\,|\,n).$$

Dla przypadku niedokładnej znajomości modelu dynamiki procesu ($\Delta\Phi(n+1, n) \neq 0$, $\Delta M(n) \neq 0$) wynika z twierdzenia 1 następujący wniosek.

Jeśli dokładny (2), (3) oraz przybliżony (31), (31a) model procesu jest jednostajnie obserwowany i sterowany oraz $P(1|0) \neq P^o(1|0)$, a ponadto $P(1|0)$ posiada elementy ograniczone, wówczas $P_a(n+1|n)$ jest jednostajnie ograniczona.

Z równania (34) wynika, że przy stabilnym charakterze macierzy $\Phi(n+1, n)$ wpływ warunku brzegowego $P(1|0)$ zanika po pewnej ilości kroków iteracji. Średniokwadratowy uchyb estymacji jest w takim przypadku równy dyspersji uchybu estymacji wartości średniej procesu, podczas gdy stosowanie estymatora niedokładnego daje uchyb większy.

Rozpatrzmy warunek skuteczności dla predyktora (por. dodatek A)

$$\operatorname{tr}\left\{\begin{bmatrix}\Phi^o(n+s, n+1)\\ \Delta\Phi(n+s, n+1)\end{bmatrix}\left[\begin{array}{c|c}P_a(n+1/n) & \pi(n+1|n)-D(n+1)\\ \hline \pi(n+1|n) & D(n+1)\end{array}\right]\begin{bmatrix}\Phi^o(n+s, n+1)\\ \Delta\Phi(n+s, n+1)\end{bmatrix}' + R(n+s)\right\} \leqslant 0, \tag{38}$$

gdzie:

$$D(n+1) = \operatorname{cov}\{z(n+1)\},$$
$$\pi(n+1|n) = E\{z(n+1)e_a'(n+1|n)\}.$$

Dotyczy on nie tylko odchylenia modelu, lecz również horyzontu wyprzedzenia.

Dla określonego odchylenia modelu procesu mówić można o dopuszczalnym, ze względu na skuteczność, horyzoncie predykcji i odwrotnie, określona dokładność modelu limituje horyzont skutecznej predykcji. Wielkości te związane są równaniem:

$$\operatorname{tr}\{P_a(n+s|n)-D(n+s)-R(n+s)\} = 0, \tag{39}$$

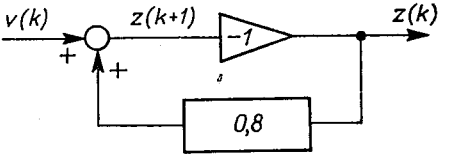
które w ogólnym przypadku jest mało przejrzyste do interpretacji. Dla procesu stacjonarnego o obserwacjach niezakłóconych mamy:

$$\begin{bmatrix}\Phi(1)^{(s-1)}\\ \Delta\Phi(s-1)\end{bmatrix}\left[\begin{array}{c|c|c}P_a(n+1|n)-D & \pi(n+1|n) & \Phi(1)^{(s-1)}\\ \hline \pi(n+1|n) & D & \Delta\Phi(s-1)\end{array}\right]' = \mathbf{0}, \tag{40}$$

gdzie

$$\Delta\Phi(s-1) = [\Phi(1)+\Delta\Phi(1)]^{(s-1)}-\Phi(1)^{(s-1)},$$

skąd uzyskuje się $(2s-1)$-go rzędu wielomian macierzy względem $\Delta\Phi(1)$. Wydaje się, że dla $s > 2$ sprawdzanie warunku, dla różnych s oraz $\Delta\Phi(1)$, jest łatwiejsze, niż rozwiązywanie równania (39).



Rys. 3. Model cyfrowy filtru formującego

Przykład

Niech dyskretny jednowymiarowy proces stochastyczny posiada funkcję korelacyjną w postaci:

$$\Gamma(n+s, n) = \exp[-0{,}22\, s].$$

Macierz tranzycyjna filtru formującego oraz kowariancja białego szumu wynoszą odpowiednio

$$\Phi(1) = \exp(-0{,}22) = 0{,}8,$$
$$Q = 1-\exp(-0{,}44) = 0{,}36.$$

Odpowiedni model układu podano na rys. 3.

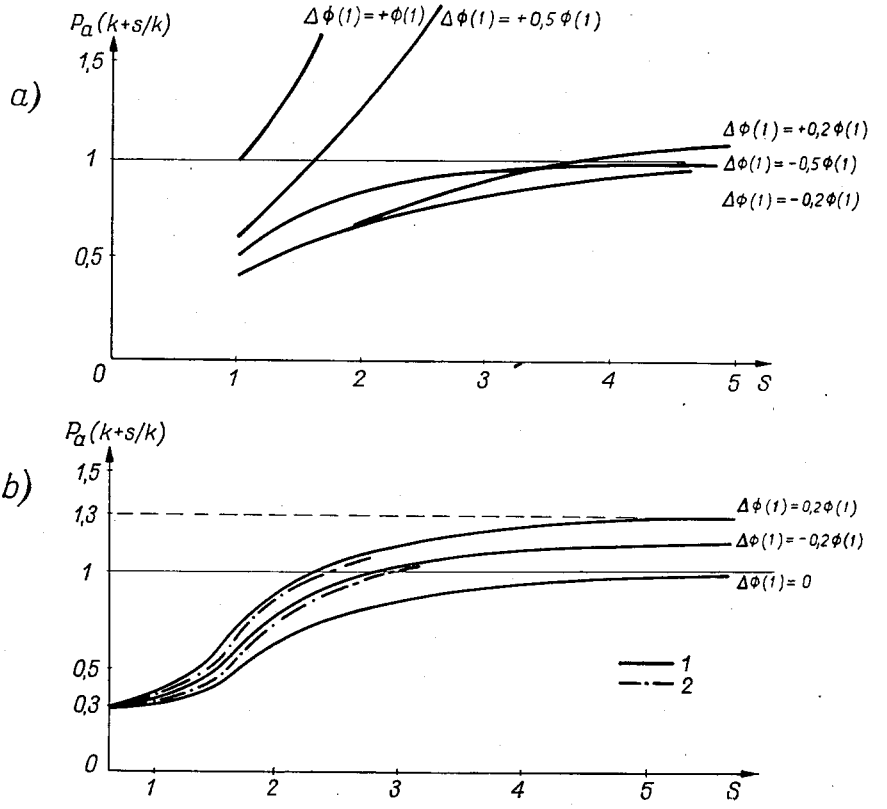
a) Przypadek obserwacji niezakłócanych

Równanie predyktora ma postać:

$$\hat{z}(n+s|n) = (0{,}8)^s z(n). \tag{41}$$

Warunek skuteczności (39) dla procesu skalarnego zastąpić można przez

$$\{[\Phi(1)+\Delta\Phi(1)]^s-(\Phi(1))^s-1\}^2 D+Q\sum_{n=0}^{n-s}\Phi^{2n}(1) \leqslant \mathbf{0}. \tag{42}$$



Rys. 4. Charakterystyki dokładności predyktora kalmanowskiego
a) obserwacje niezakłócane, b) obserwacje zakłócane, 1 — estymator nieskompensowany, 2 — estymator skompensowany

Otrzymuje się z niego dopuszczalne granice odchylenia modelu

$$\Delta\Phi(1) \leqslant \Phi(1) \quad \text{dla} \quad s = 1,$$
$$\Delta\Phi(1) \leqslant +0{,}6\,\Phi(1) \quad \text{dla} \quad s = 2.$$

Zależność średniokwadratowego uchybu predykcji w funkcji czasu wyprzedzenia dla różnych odchyleń modelu estymatora skompensowanego i nieskompensowanego przedstawiono na rys. 4.

b) Przypadek obserwacji zakłócanych

Równanie estymatora ma postać:

$$\hat{z}(n+1\,|\,n) = \Phi^*(n+1, n)\hat{z}(n\,|\,n-1)+K^*(n)y(n),$$

gdzie:

$$\Phi^*(n+1, n) = 0{,}8-K^*(n),$$

$$K^*(n) = 0{,}8\,P(n\,|\,n-1)[P(n\,|\,|\,n-1)+R(n)]^{-1}.$$

W trakcie cyfrowego modelowania zależności rekurencyjnych, przy założeniu $P(1\,|\,0) = 1$ oraz $R(n) = 0{,}3$, otrzymano:

$\Delta\Phi(1)$	$P^o(k+1\,|\,k)$	$K^*(k)$	$\Phi^*(k+1, k)$	$P_a(k\,|\,k-1)$
0	0,478	0,493	0,307	0
$+0{,}2\Phi(1)$	0,474	0,582	0,327	0,510
$-0{,}2\Phi(1)$	0,461	0,385	0,263	0,502

6. UWAGI KOŃCOWE

Uzyskane wyniki pozwalają sformułować następujące wnioski.

a. Charakterystyka dokładności estymatora kalmanowskiego jest niesymetryczna względem uchybu modelu. Wrażliwość na uchyb macierzy tranzycyjnej „destabilizujący" model jest wyraźnie silniejsza niż na uchyb przeciwny,

b. Kompensacja uchybu modelu (23) zmniejsza wrażliwość estymatora. Efekt ten jest szczególnie wyraźny dla filtracji oraz predykcji z niewielkim horyzontem wyprzedzenia (por. (29)).

c. W przypadku gdy estymator rzeczywisty okazuje się nieskuteczny, lub w skrajnym przypadku daje estymaty rozbieżne z obserwacjami, należy zwiększyć wagę ostatnich obserwacji, przez zwiększenie macierzy wzmocnienia $K^*(n)$, zmniejszając jednocześnie „pamięć" reprezentowaną przez macierz $\Phi^*(n+1, n)$.

d. Jeśli zabieg określony w punkcie „c" okaże się mało efektywny, wówczas należy jako najlepszą estymatę przyjąć wartość średnią $m(n)$.

e. Problem bieżącej estymacji składowej $m(n)$ posiada istotne znaczenie praktyczne. Wymaga on oddzielnego potraktowania. Warto wspomnieć, że zagadnienia modyfikacji struktury estymatora kalmanowskiego w celu eliminacji stałego w czasie obciążenia, rozważano m.in. w pracy [2].

Dodatek A

WYPROWADZENIE WARUNKU SKUTECZNOŚCI DLA PREDYKTORA LINIOWEGO

Przy założeniu $M(k) = I$ równanie obserwacji procesu ma postać:

$$y(n) = z(n)+w(n). \tag{A.1}$$

Ponadto słuszna jest zależność:

$$z(n+s) = \Phi(n+s, n+1)z(n+1)+\sum_{i=0}^{i=s-1}\Phi(n+s, n+1)v(n+i=1), \tag{A.2}$$

skąd wynika:

$$D(n+s) = \operatorname{cov}\{z(n+s) = \Phi(n+s, n+1)D(n+1)\Phi'(n+s, n+1)+$$
$$+\sum_{i=0}^{i=s-1}\Phi(n+s, n+1)\,Q(n+i-1)\Phi'(n+s, n+1). \tag{A.3}$$

Mamy również:

$$P_a(n+s|n) = \operatorname{cov}\{e_a(n+s|n)\} = \sum_{i=0}^{i=s-1}\Phi(n+s, n+i)Q(n+i-1),$$

$$\Phi(n+s, n+i)+\begin{bmatrix}\Phi^o(n+s, n+1)\\ \Delta\Phi(n+s, n+1)\end{bmatrix}\left[\begin{array}{c|c}P_a(n+1|n) & \pi(n+1|n)\\ \hline \pi(n+1|n) & D(n+1)\end{array}\right]\begin{bmatrix}\Phi^o(n+s, n+1)\\ \Delta\Phi(n+s, n+1)\end{bmatrix}+B(n+s), \tag{A.4}$$

gdzie $\pi(n+1|n) = E\{z(n+1)e_a'(n+1|n)\}$ wyznacza się według zależności rekurencyjnej (26).

Jeżeli jako estymatę $\hat{z}(n+s|n)$ przyjąć wartość $m(n+s)$, wówczas uchyb takiej estymacji wyniesie: $e(n+s|n) = z(n)+w(n)$. Z warunku skuteczności, który teraz przyjmie postać:

$$\operatorname{tr}\{P_a(n+s|n)\} \leqslant \operatorname{tr}\{D(n+s)+R(n+s)+B(n+s)\} \tag{A.5}$$

otrzymuje się:

$$\operatorname{tr}\left\{\begin{bmatrix}\Phi^o(n+s, n+1)\\ \Delta\Phi(n+s, n+1)\end{bmatrix}\left[\begin{array}{c|c}P_a(n+1|n) & \pi(n+1|n)-D(n+1)\\ \hline \pi(n+1|n) & D(n+1)\end{array}\right]\begin{bmatrix}\Phi^o(n+s, n+1)\\ \Delta\Phi(n+s, n+1)\end{bmatrix}'+R(n+s)\right\} \leqslant 0,$$

gdzie $R(n+s) = \operatorname{cov}\{w(n+s)\}$.

Ponieważ macierze $D(n+1)$, $P_a(n+s|n)$ oraz $R(n+s)$ są dodatnie określone, warunek (A.5) równoznaczny jest relacji:

$$P_a(n+s|n)-D(n+s)-R(n+s)-B(n+s) \leqslant 0.$$

Dodatek B

OKREŚLENIE JEDNOSTAJNEJ CAŁKOWITEJ OBSERWOWALNOŚCI I STEROWALNOŚCI UKŁADÓW

Liniowy układ dynamiczny:

$$x(n+1) = \Phi(n+1, n)x(n)+\Gamma(n)v(n), \tag{B.1}$$

$$y(n) = M(n)x(n)+w(n), \tag{B.2}$$

jest jednostajnie obserwowalny, jeśli istnieje całkowite $N > 0$ oraz $(\alpha, \beta) > 0$, takie że:

$$0 \leqslant \alpha I \leqslant W(n, n-N) \leqslant \beta I \tag{B.3}$$

dla każdego $n > N$, przy czym

$$W(n, n-N) = \sum_{i=N-n}^{i=n} \Phi'(i, n) M'(i) R^{-1}(i) M(i) \Phi(i, n). \tag{B.4}$$

Układ (B.1), (B.2) jest jednostajnie całkowicie sterowalny, jeśli istnieje całkowite $N > 0$ oraz $(\alpha, \beta) > 0$, takie że:

$$0 \leqslant \alpha I \leqslant L(n, n-N) \leqslant \beta I, \tag{B.5}$$

gdzie:

$$L(n, n-N) = \sum_{i=n-N}^{i=n-1} \Phi(n, i+1) \Gamma(i) Q(i+1) \Gamma'(i) \Phi'(n, i+1),$$
$$R(i) = \operatorname{cov}\{w(i)\}; \quad Q(i) = \operatorname{cov}\{v(i)\}. \tag{B.6}$$

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. R. Kalman, R. Bucy, New Results in the Linear Filtering and Prediction Theory, Trans. ASME, vol. 83D (March 1961), str. 95—108.
2. B. Friedland, Treatment of Bias in Recursive Filtering, IEEE Trans. on Aut. Control, Nr 4, 1969.
3. A. Klinger, Prior Information and Bias in Sequential Estimation, IEEE Trans. on Autom. Control, February 1968, str. 102.
4. H. Sorenson, Kalman Filtering Techniques, Advances in Control Systems. Vol. 3, Academic Press 1966.
5. R. Griffin, A. Sage, Large and Smal Scale Sensitivity Analysis of Optimum Estimation Algorithms, IEEE Trans. on Autom. Control, August 1968.
6. J. Huddle, D. Wisner, Degradation of Linear Filter Performance due to Modeling Error, IEEE Transaction on Autom. Control, August 1968, str. 421—423.
7. H. Halkin, A Maximum Principle of Pontriagin Type for System Described by Nonlinear Difference Equations, J. Siam on Control, vol. 4, N. 1, 1966.
8. A. H. Jaźwiński, Stochastic Processes and Filtering Theory, Ac. Press 1970.

S. ŁUKASIK

KALMAN ESTIMATION ACCURACY DUE TO MODELING ERROR

Summary

In the paper a Kalman estimation accuracy due to process modeling error is considered.

Bias of estimate and mean sqare performance degradation are analysed. A direct numerical example is given for illustration.

S. ŁUKASIK

GENAUIGKEITSPROBLEM KALMANNISCHEN ESTIMATORS BEI BESCHRÄNKTER KENNTNIS DES PROZESSMODELLS

Zusammenfassung

In der Arbeit wurde der Einfluß einer beschränkten Kenntnis des diskreten stochastischen Prozeßmodells auf die Genauigkeit Kalmannischer Estimation erörtert. Man erwog das Problem der Estimatorbelastbarkeit, sowie des Anstiegs mittelquadratischer Abweichung. Es wurde auch der Wirkungsbegriff der Estimation bezeichnet, und ergänzend ein einfaches Rechenbeispiel angeführt.

С. ЛУКАСИК

ВОПРОСЫ ТОЧНОСТИ КАЛЬМАНОВСКОЙ ОЦЕНКИ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ПРОЦЕССЕ

Р е з ю м е

Рассматривается влияние ошибки модели случайного процесса на точность фильтра и предсказателя Кальмана.

Рассмотрены вопросы несмещенности и прироста средней квадратической ошибки оценки. Приведен численный пример.

TREŚĆ

K. Przanowski: Przesył energii elektrycznej liniami o napięciu wyższym od 420 kV . . 247
W. Pajewski: Fale akustyczne w elektronice 285
S. Dymowski: Pojemności krytyczne i oporności krytyczne liniowego pasywnego czwórnika *RC* o bezzerowych transmitancjach 313
S. Dymowski: Pewne twierdzenia dotyczące liniowych pasywnych czwórników *RC* o bezzerowych transmitancjach 325
K. Zakrzewski: Obliczanie zastępczych parametrów masywnego żelaza 339
H. S. Kozłowski, J. Kosk: Wpływ kształtu i położenia osiowych kanałów wentylacyjnych na skuteczność chłodzenia maszyn elektrycznych 351
Z. Kosowicz: Wpływ średnicy wirnika na warunki samohamowności klatkowych silników wykonawczych 381
C. Królikowski: Jedna z metod analitycznego ujmowania charakterystyk napięciowo-prądowych łukowych palników plazmowych prądu stałego 403
S. Łukasik: Zagadnienia dokładności estymatora kalmanowskiego w warunkach niepełnej znajomości modelu procesu 421

CONTENTS — TABLE DES MATIÉRES — INHALT

K. Przanowski: Electrical Energy Transmission With Lines Having Voltage of over 420 kV 283
Energietransport mittels Kabeln mit Spannung über 420 kV 284
W. Pajewski: Acoustic Waves in Electronics 312
Akustische Wellen in Elektronik 312
S. Dymowski: Critical Capacities and Critical Resistances of Linear Passive *RC* Two-port Having Transmittancies Without Zeros 323
Capacités critiques et résistances critiques d'un quadripôle linéaire passif aux transmittances sans zéros 323
Kritische Kapazitäten und kritische Widerstände eines linearen, passiven *RC*-Vierpoles mit nullosen Gegenscheinleitwerten 323
S. Dymowski: Certain Theorems About Linear Passive *RC* Two-ports Having Transmittancies Without Zeros 336
Certains théorèmes concernant les quadripôles passifs *RC* aux transmittances sans zéros 336
Einige Theorem über lineare passive *RC*-Vierpole mit nullosen Gegenscheinleitwerten . . 337
K. Zakrzewski: Equivalent Parameters of Solid Iron 350
Determination des paramètres équivalents du fer massif 350
Berechnung der Ersatzschaltbildparametern des massiven Eisens 350
H. S. Kozłowski, J. Kosk: The Influence of Form and Position of Axial Ventilating Ducts on Effectiveness of Cooling of Electric Machines 378
Einfluss der Form und Lage der Axialventilationskanäle auf die Kühlungswirksamkeit elektrischer Maschinen 379
Z. Kosowicz: Influence of the Rotor Diameter of a Squirrel Cage Servomotor Upon Its Selfbreaking Properties 400
Einfluss des Läuferdurchmessers auf die Selbstbremsungsverhältnisse von Asynchron-Umkehrmotoren 401
C. Królikowski: One of the Methods of Analitical Formulating Voltage-Current Characteristics of D. C. Plasma Torches 419

Über eine Methode zur analytischen Bestimmung der Strom-Spannungs-Kennlinien des Gleichstrom-Lichtbogen-Plasmabrenners 420
S. Łukasik: Kalman Estimation Accuracy Due to Modeling Error 436
Genauigkeitsproblem Kalmannischen Estimators bei beschränkter Kenntnis des Prozessmodells 436

СОДЕРЖАНИЕ

К. Пшановски: Передача электроэнергии по линиям сверхвысоких напряжений (свыше 420 кв.) 283
В. Паевски: Акустические волны в электронике 312
С. Дымовски: Критические емкости и критические сопротивления линейного пассивного четырехполюсника *RC* в безнульными передаточными функциями . . 324
С. Дымовски: Некоторые теоремы о линейных пассивных четырехполюсниках *RC* с безнульными передаточными функциями 337
З. Закшевски: Определение параметров замещения массивного ферромагнетика 350
Х. С. Козловски, Я. Коск: Влияние формы и размещения аксиальных вентиляционных каналов на эффективность охлаждения электрических машин 379
З. Косович: Влияние диаметра короткозамкнутого ротора исполнительного двигателя на критерий отсутствия самохода 401
Ч. Круликовски: Один из методов аналитического подхода к вопросу вольтамперных характеристик дуговых плазмовых горелок постоянного тока 420
Лукасик: Вопросы точности кальмановской оценки при неполной информации о процессе 437

KOMITET ELEKTROTECHNIKI
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XVIII · ZESZYT 3

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1972

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny

PROF. DR WITOLD NOWICKI

Członkowie

PROF. TADEUSZ CHOLEWICKI, PROF. EUGENIUSZ JEZIERSKI,
PROF. DR WITOLD ROSIŃSKI, PROF. DR STANISŁAW RYŻKO

Sekretarz

JANINA MATHEISEL

ADRES REDAKCJI

Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1
Instytut Teleelektroniki, Gmach Elektroniki
pokój 343, tel. 21-007-564 oraz 25-09-10

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 640 (516+124)	Oddano do składania 29. III. 1972 r.
Ark. wyd. 12,0 ark. druk. 10,25	Podpisano do druku w lipcu 1972
Papier druk. sat. kl. III, 80 g, 70×100	Druk ukończono w lipcu 1972
Zamówienie nr 547/72	Cena zł 40.— A-103

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1972, 18, z. 3, ss. 443—457

621.372.5

Impedancje liniowych obwodów elektrycznych

MACIEJ KRAKOWSKI (ŁÓDŹ)

Instytut Podstaw Elektrotechniki Politechniki Łódzkiej

Otrzymano 27.1.1971

W pracy omówiono podstawowe właściwości impedancji liniowych dwójników elektrycznych o parametrach skupionych, niezależnych od czasu. Rozważania mają charakter ogólny i dotyczą impedancji jako funkcji zmiennej zespolonej s. Omówiono impedancję wewnętrzną i zewnętrzną, a także impedancję wzajemną. Wykazano, że impedancja jest równa różnicy potencjałów skalarnych na zaciskach dwójnika podzielonej przez prąd płynący w tym dwójniku. Omówiono funkcje energetyczne oraz ich podstawowe właściwości.

1. WSTĘP

Jednym z najbardziej podstawowych pojęć w teorii liniowych obwodów elektrycznych o stałych parametrach jest impedancja dwójnika. W niniejszej pracy wyjaśniono niektóre właściwości impedancji na podstawie teorii pola elektromagnetycznego.

Wektory charakteryzujące pole elektromagnetyczne są funkcjami czasu oraz współrzędnych punktu pola. Dowolny wektor $\mathbf{W}_t$ zależny od czasu określony jest przez trzy wielkości W_{1t}, W_{2t}, W_{3t}, przedstawiające składowe tego wektora. Przekształcenie Laplace'a wektora $\mathbf{W}_t$ oznaczymy przez $\mathbf{W}(s)$, przy czym składowe $W_1(s)$, $W_2(s)$, $W_3(s)$ tego wektora są odpowiednio transformatami funkcji W_{1t}, W_{2t}, W_{3t}.

Wektor $\mathbf{W}(s)$ można traktować jako element przestrzeni Hilberta, którego normę przedstawia wzór

$$||\mathbf{W}(s)|| = \sqrt{\mathbf{W}(s) \cdot \mathbf{W}^*(s)}, \tag{1}$$

przy czym $\mathbf{W}^*(s)$ jest wielkością zespoloną sprzężoną, natomiast za pomocą kropki oznaczono iloczyn skalarny wektorów.

W dalszych rozważaniach rozpatrzymy pole elektromagnetyczne w środowisku jednorodnym w otoczeniu przewodów wiodących prądy. Po przekształceniu równań Maxwella za pomocą transformacji Laplace'a, otrzymuje się dla zerowych warunków początkowych:

$$\mathrm{rot}\mathbf{H}(s) = (\gamma + s\varepsilon)\mathbf{E}(s), \tag{2}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E}(s) = -s\mu\mathbf{H}(s), \tag{3}$$

jeżeli spełnione są odpowiednie założenia dopuszczające zamianę kolejności różniczkowania i całkowania przy obliczaniu przekształcenia Laplace'a pochodnych cząstkowych względem współrzędnych punktu pola. Wektory $\mathbf{E}(s)$ oraz $\mathbf{H}(s)$ są transformatami natężenia pola elek-

trycznego i magnetycznego, nazywanymi później wprost natężeniem pola elektrycznego lub magnetycznego, a pozostałe oznaczenia omówione są w wykazie najważniejszych oznaczeń. Wielkość $s = \sigma + j\omega$ nazywana jest często częstotliwością zespoloną [5, 8, 11].

Przy analizie pól elektromagnetycznych sinusoidalnie zmiennych w czasie wykorzystuje się postać zespoloną wektorów. W tych warunkach równania Maxwella przedstawia się w postaci zespolonej:

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = (\gamma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E},$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H},$$

przy czym $\mathbf{E}$ oraz $\mathbf{H}$ są wektorami zespolonymi natężenia pola elektrycznego i magnetycznego. Wynika stąd, że w celu otrzymania zależności dla pól elektromagnetycznych sinusoidalnie zmiennych w czasie, należy transformaty wektorów pola zastąpić przez wektory zespolone oraz przyjąć $s = j\omega$. W Dodatku 2 wykazano, że norma wektora zespolonego jest równa jego wartości skutecznej, jeżeli moduły składowych tego wektora są wartościami skutecznymi.

Natężenie pola elektrycznego wyraża się wzorem (por. Dodatek 1)

$$\mathbf{E}(s) = \mathbf{E}_{st}(s) + \mathbf{E}_i(s), \tag{4}$$

gdzie:

$$\mathbf{E}_{st}(s) = -\mathrm{grad}\, V(s), \tag{5}$$

$$\mathbf{E}_i(s) = -s\mathbf{A}(s) \tag{6}$$

przedstawiają odpowiednio natężenie pola elektrycznego statycznego i indukowanego. Pole statyczne jest polem potencjalnym, natomiast pole indukowane jest polem wirowym i związane jest z czasowymi zmianami pola magnetycznego.

Przedmiotem dalszych rozważań będą obwody elektryczne o stałych skupionych, których parametry są wielkościami stałymi, niezależnymi od czasu. Będziemy zawsze przyjmować, że obwody zawierają przewody o małych wymiarach poprzecznych. Założymy ponadto, że rozpatrywane obwody są krótkie w porównaniu z długością fali, wskutek czego pominięte zostaną zjawiska falowe.

Wykaz najważniejszych oznaczeń

$\mathbf{A}$ — potencjał wektorowy,
$\mathbf{B}$ — indukcja magnetyczna,
$\mathbf{E}$ — natężenie pola elektrycznego,
$\mathbf{H}$ — natężenie pola magnetycznego,
I — prąd,
$\mathbf{J}$ — gęstość prądu,
$s = \sigma + j\omega$ — częstotliwość zespolona,
t — czas,
U — napięcie,
V — potencjał skalarny,
Z — impedancja,
Z_w — impedancja wewnętrzna,
Z_z — impedancja zewnętrzna,

Z_{12} — impedancja wzajemna,
γ — konduktywność,
ε — przenikalność dielektryczna,
μ — przenikalność magnetyczna,
ϱ — gęstość ładunku przestrzennego,
Φ — strumień magnetyczny,
ω — pulsacja.

2. FUNKCJE ENERGETYCZNE

Wektor Poyntinga w dowolnym punkcie pola elektromagnetycznego wyraża się wzorem

$$\mathbf{\Pi}(s) = \mathbf{E}(s)\times\mathbf{H}^*(s), \tag{7}$$

przy czym $\mathbf{H}^*(s)$ jest wielkością zespoloną sprzężoną, natomiast $\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*$ jest iloczynem wektorowym.

Rozpatrzmy dowolną powierzchnię zamkniętą S w polu elektromagnetycznym. Strumień wektora Poyntinga wypływający z obszaru v ograniczonego powierzchnią S wynosi

$$\oint_S [\mathbf{E}(s)\times\mathbf{H}^*(s)]\cdot d\mathbf{S} = \int_v \operatorname{div}[\mathbf{E}(s)\times\mathbf{H}^*(s)]\,dv, \tag{8}$$

zgodnie z twierdzeniem Gaussa-Ostrogradskiego, jeżeli wektor $d\mathbf{S}$ jest zgodny z normalną zewnętrzną do powierzchni S. Podstawiając równania (2) i (3) do wzoru

$$\operatorname{div}[\mathbf{E}(s)\times\mathbf{H}^*(s)] = \mathbf{H}^*(s)\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E}(s) - \mathbf{E}(s)\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H}^*(s),$$

otrzymujemy

$$-\operatorname{div}[\mathbf{E}(s)\times\mathbf{H}^*(s)] = \gamma\,\|\mathbf{E}(s)\|^2 + s\mu\,\|\mathbf{H}(s)\|^2 + \frac{|s|^2}{s}\varepsilon\,\|\mathbf{E}(s)\|^2. \tag{9}$$

Strumień wektora Poyntinga wpływający do obszaru v przez powierzchnię zamkniętą S wynosi

$$-\oint_S [\mathbf{E}(s)\times\mathbf{H}^*(s)]\cdot d\mathbf{S} = F_0(s) + sT_0(s) + \frac{1}{s}W_0(s), \tag{10}$$

zgodnie z równaniami (8) i (9), przy czym

$$\left.\begin{aligned} F_0(s) &= \int_v \gamma\,\|\mathbf{E}(s)\|^2\,dv, \\ T_0(s) &= \int_v \mu\,\|\mathbf{H}(s)\|^2\,dv, \\ W_0(s) &= |s|^2 \int_v \varepsilon\,\|\mathbf{E}(s)\|^2\,dv. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

W celu wyjaśnienia sensu fizycznego otrzymanych wyrażeń, rozpatrzymy pole elektromagnetyczne sinusoidalnie zmienne w czasie. Strumień mocy zespolonej wpływający do obszaru v przez powierzchnię S wynosi

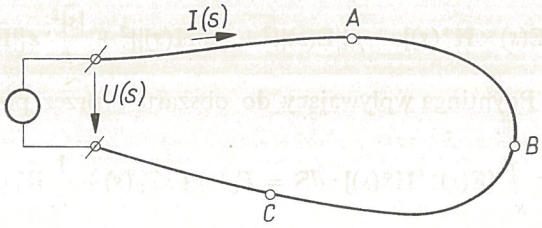
$$-\oint_S [\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*]\cdot d\mathbf{S} = \int_v \gamma\,\|\mathbf{E}\|^2\,dv + j2\omega\left(\int_v \frac{1}{2}\mu\,\|\mathbf{H}\|^2\,dv - \int_v \frac{1}{2}\varepsilon\,\|\mathbf{E}\|^2\,dv\right), \tag{12}$$

przy czym $\mathbf{E}$ oraz $\mathbf{H}$ są wektorami zespolonymi. W Dodatku 2 wykazano, że całka $\gamma||\mathbf{E}||^2 dv$ przedstawia wartość średnią za okres mocy przetwarzanej na ciepło w obszarze v, natomiast całki $\int_v \frac{1}{2}\mu||\mathbf{H}||^2 dv$ oraz $\int_v \frac{1}{2}\varepsilon||\mathbf{E}||^2 dv$ są odpowiednio wartościami średnimi za okres energii pola magnetycznego i elektrycznego w tym obszarze. W związku z tym części: rzeczywista i urojona prawej strony równania (12) przedstawiają odpowiednio moc czynną i bierną związaną z obszarem v, czyli prawa strona tego równania jest mocą zespoloną.

Równanie (12) nie posiada w ogólnym przypadku interpretacji fizycznej. Jednakże mimo braku tej interpretacji, wyrażenia (11) można nazwać funkcjami energetycznymi, podobnie jak w teorii liniowych obwodów elektrycznych, gdzie funkcje te określone są za pomocą form kwadratowych [7, 8]. Ponieważ norma elementu liniowej przestrzeni unormowanej jest zawsze liczbą nieujemną, więc na podstawie wzorów (12) wnioskujemy, że funkcje energetyczne przybierają wartości nieujemne. Taką samą właściwość posiadają funkcje energetyczne stosowane w teorii obwodów elektrycznych.

3. IMPEDANCJA WEWNĘTRZNA

Na rys. 1 przedstawiony jest odosobniony obwód zasilany napięciem $U(s)$ i wiodący prąd $I(s)$. Rozpatrzmy odcinek ABC przewodu wchodzącego w skład omawianego obwodu. Niech S oznacza powierzchnię zamkniętą utworzoną przez powierzchnię odcinka ABC przewodu oraz przez dwa przekroje poprzeczne przewodu w punktach A i C.



Rys. 1. Obwód elektryczny zasilany napięciem $U(s)$

Impedancję wewnętrzną odcinka ABC przewodu określimy za pomocą wzoru

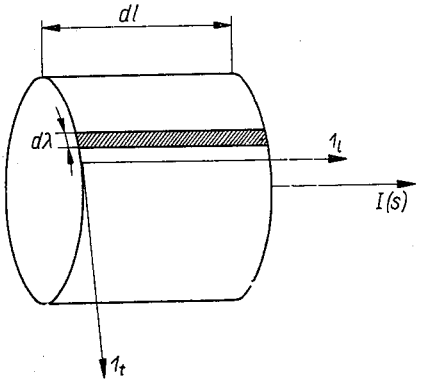
$$Z_w(s) = \frac{-\oint_S [\mathbf{E}(s)\times\mathbf{H}^*(s)]\cdot d\mathbf{S}}{|I(s)|^2}. \tag{13}$$

W liczniku tego wyrażenia występuje strumień wektora Poyntinga wnikający do wnętrza odcinka ABC przewodu.

Rozpatrzmy obecnie elementarny odcinek przewodu o długości $d\mathbf{l}$ (rys. 2). Wektor $d\mathbf{S}$ normalny do elementu dS powierzchni przewodu (zakreskowanego ukośnie na rys. 2) przedstawia wzór

$$d\mathbf{S} = d\boldsymbol{\lambda}\times d\mathbf{l},$$

przy czym $d\boldsymbol{\lambda} = 1_t d\lambda$ oraz $d\mathbf{l} = 1_l dl$, gdzie 1_t oraz 1_l są wektorami jednostkowymi; wektor 1_l jest równoległy do osi przewodu, natomiast wektor 1_t jest styczny do linii zamkniętej stanowiącej brzeg przekroju poprzecznego przewodu.



Rys. 2. Elementarny odcinek przewodu

Strumień wektora Poyntinga wnikający do wnętrza przewodu przez element dS powierzchni przewodu wyraża się wzorem

$$-[\mathbf{E}(s)\times\mathbf{H}^*(s)]\cdot d\mathbf{S} = -[\mathbf{E}(s)\times\mathbf{H}^*(s)]\cdot[d\boldsymbol{\lambda}\times d\mathbf{l}],$$

przy czym iloczyn skalarny dwóch iloczynów wektorowych z powyższej zależności przedstawia wyrażenie

$$(\mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\lambda})(\mathbf{H}^*\cdot d\mathbf{l}) - (\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l})(\mathbf{H}^*\cdot d\boldsymbol{\lambda}).$$

Biorąc pod uwagę, że natężenie pola elektrycznego na powierzchni przewodu jest równoległe do osi przewodu, mamy $\mathbf{E}(s)\cdot d\boldsymbol{\lambda} = 0$, wobec czego

$$-[\mathbf{E}(s)\times\mathbf{H}^*(s)]\cdot d\mathbf{S} = (\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l})(\mathbf{H}^*\cdot d\boldsymbol{\lambda}). \tag{14}$$

Łatwo udowodnić, że strumień wektora Poyntinga przez dowolny przekrój poprzeczny przewodu równa się zeru. Wskutek tego strumień wektora Poyntinga wnika do wnętrza przewodu tylko przez jego powierzchnię, czyli

$$-\oint_S [\mathbf{E}(s)\times\mathbf{H}^*(s)]\cdot d\mathbf{S} = \int\left[\oint \mathbf{H}^*(s)\cdot d\boldsymbol{\lambda}\right]\mathbf{E}(s)\cdot d\mathbf{l}, \tag{15}$$

zgodnie z wzorem (14), przy czym drogą całkowania całki $\oint \mathbf{H}^*(s)\cdot d\boldsymbol{\lambda}$ jest linia ograniczająca przekrój poprzeczny przewodu, drogą całkowania zaś drugiej całki jest linia znajdująca się na powierzchni przewodu.

Na podstawie II prawa Maxwella w postaci całkowej mamy

$$\oint \mathbf{H}^*(s)\cdot d\boldsymbol{\lambda} = I^*(s),$$

przy pominięciu prądów przesunięcia, wobec czego wzór (15) przybiera postać

$$-\oint_S [\mathbf{E}(s)\times\mathbf{H}^*(s)]\cdot d\mathbf{S} = I^*(s)\int \mathbf{E}(s)\cdot d\mathbf{l}. \tag{16}$$

Podstawiając wyrażenie (16) do wzoru (13), otrzymujemy

$$Z_w(s) = \frac{\int \mathbf{E}(s) \cdot d\mathbf{l}}{I(s)}, \tag{17}$$

bowiem $I^*(s)\, I(s) = |I(s)|^2$.

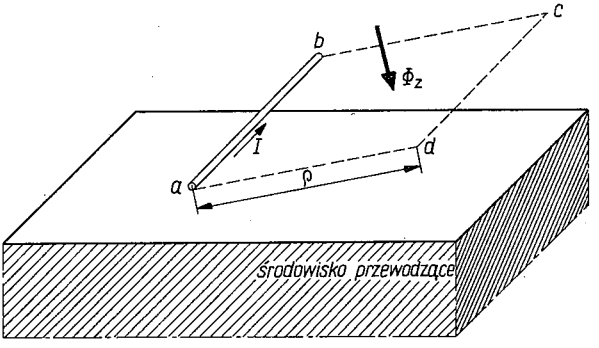
Stwierdzamy zatem, że impedancja wewnętrzna odcinka przewodu jest równa ilorazowi napięcia wzdłuż linii znajdującej się na powierzchni przewodu przez prąd $I(s)$. Wzór (17) jest uogólnieniem znanej zależności dla impedancji wewnętrznej przy prądach sinusoidalnych [3]. Na podstawie wzoru (17) określa się impedancję wewnętrzną przewodu.

4. IMPEDANCJA ZEWNĘTRZNA

Impedancję zewnętrzną przewodu określa się za pomocą wzoru

$$Z_z(s) = -\frac{\int \mathbf{E}_i(s) \cdot d\mathbf{l}}{I(s)}, \tag{18}$$

przy czym $\mathbf{E}_i(s)$ jest natężeniem indukowanego pola elektrycznego wzniecanego przez prąd $I(s)$ płynący w rozpatrywanym przewodzie, natomiast drogą całkowania jest linia znajdująca się na powierzchni przewodu. W Dodatku 3 wykazano, że całka liniowa wektora natężenia pola elektrycznego przedstawia siłę elektromotoryczną. Zgodnie z powyższym, impedancja zewnętrzna przewodu jest równa pomnożonemu przez -1 ilorazowi siły elektromotorycznej wzniecanej w przewodzie przez zewnętrzny strumień magnetyczny, do prądu płynącego w tym przewodzie.



Rys. 3. Przewód nad powierzchnią środowiska przewodzącego

W celu dokładniejszego wyjaśnienia impedancji zewnętrznej, rozpatrzymy przewód równoległy do powierzchni nieograniczonego środowiska przewodzącego, na przykład ziemi (rys. 3). Impedancję zewnętrzną przewodu można przedstawić za pomocą wzoru

$$Z_z(s) = -\frac{-s\Phi_z(s)}{I(s)}, \tag{19}$$

przy czym $-s\Phi_z(s)$ jest siłą elektromotoryczną indukowaną w przewodzie przez zewnętrzny strumień magnetyczny $\Phi_z(s)$.

Rozważmy prostokąt *abcd* nad środowiskiem przewodzącym i załóżmy, że bok *ab* tego prostokąta znajduje się na powierzchni przewodu. Biorąc pod uwagę, że strumień magnetyczny jest całką liniową wektora potencjału wektorowego, możemy zewnętrzny strumień magnetyczny przedstawić w postaci

$$\Phi_z(s) = \lim_{\varrho \to \infty} \int_{abcda} \mathbf{A}(s) \cdot d\mathbf{l},$$

skąd otrzymujemy,

$$\Phi_z(s) = \int_{ab} \mathbf{A}(s) \cdot d\mathbf{l} + \lim_{\varrho \to \infty} \int_{cd} \mathbf{A}(s) \cdot d\mathbf{l}, \tag{20}$$

bowiem wektor $\mathbf{A}(s)$ jest w rozpatrywanym przypadku równoległy do osi przewodu, wskutek czego całki wzdłuż odcinków *bc* oraz *da* równają się zeru. Można okazać[1], że drugi wyraz po prawej stronie równania (20) zanika, czyli

$$\Phi_z(s) = \int_{ab} \mathbf{A}(s) \cdot d\mathbf{l},$$

wobec czego

$$-s\Phi_z(s) = \int_{ab} \mathbf{E}_i(s) \cdot d\mathbf{l},$$

zgodnie z równaniem (6). Podstawiając otrzymane równanie do wzoru (19) znajdujemy wyrażenie (18).

Przytoczona interpretacja impedancji zewnętrznej przewodu dla pól sinusoidalnie zmiennych w czasie podana jest w pracy [4].

5. IMPEDANCJA

Różnicę potencjałów skalarnych punktów *A* i *C* przewodu z rys. 1 przedstawia wzór

$$V_A(s) - V_C(s) = \int_{ABC} \mathbf{E}_{st}(s) \cdot d\mathbf{l}, \tag{21}$$

przy czym $\mathbf{E}_{st}$ jest natężeniem pola elektrycznego statycznego.

Drogę całkowania w równaniu (21) między punktami *A* i *C* można wybrać zupełnie dowolnie, ponieważ rozpatrywana całka nie zależy od drogi całkowania. Jednakże w dalszych rozważaniach przyjmiemy, że droga całkowania *ABC* znajduje się na powierzchni przewodu.

Podstawiając $\mathbf{E}_{st} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_i$ do wzoru (21) i dzieląc stronami przez $I(s)$, otrzymujemy

$$\frac{V_A(s) - V_C(s)}{I(s)} = \frac{\int_{ABC} \mathbf{E}(s) \cdot d\mathbf{l}}{I(s)} + \frac{-\int_{ABC} \mathbf{E}_i(s) \cdot d\mathbf{l}}{I(s)}. \tag{22}$$

Składniki sumy stanowiącej prawą stronę równania (22) są odpowiednio równe impedancji wewnętrznej oraz zewnętrznej odcinka *ABC* przewodu z rys. 1, zgodnie z wzorami (17)

[1] W przypadku pól sinusoidalnie zmiennych w czasie własność ta wynika z wzorów podanych w pracy [1].

i (18). Biorąc pod uwagę, że impedancja przewodu jest sumą impedancji wewnętrznej i zewnętrznej, otrzymujemy

$$Z(s) = \frac{V_A(s) - V_C(s)}{I(s)}. \tag{23}$$

Stwierdzamy zatem, że impedancja odcinka przewodu równa się ilorazowi różnicy potencjałów skalarnych końców tego odcinka przez prąd.

Wzór (23) można przyjąć jako definicję impedancji przewodu. Należy zaznaczyć, że tego rodzaju określenie impedancji jest jednoznaczne, bowiem zarówno różnica potencjałów, jak i prąd $I(s)$ są wielkościami jednoznacznie określonymi.

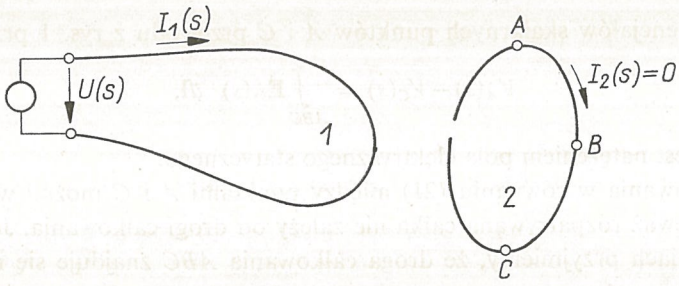
Jest rzeczą oczywistą, że impedancję oporników i cewek o zaciskach A i C można przedstawić za pomocą wzoru (23). Łatwo również sprawdzić, że wzór (23) przedstawia impedancję kondensatora o zaciskach A, C. Stwierdzamy zatem, że wzór (23) przedstawia impedancję podstawowych elementów występujących w liniowych obwodach elektrycznych.

Podobna definicja impedancji przewodu podana jest w pracy [12] dla prądu sinusoidalnego.

6. IMPEDANCJA WZAJEMNA

W celu omówienia impedancji wzajemnej dwóch obwodów, rozpatrzymy układ z rys. 4 zawierający obwód *1* z prądem $I_1(s)$ oraz obwód otwarty *2*. Impedancję wzajemną między odcinkiem ABC obwodu *2*, a obwodem *1* określimy jako iloraz pomnożonej przez -1 siły elektromotorycznej indukowanej w tym odcinku ABC do prądu $I_1(s)$ płynącego w obwodzie *1*, czyli

$$Z_{12}(s) = -\frac{\int_{ABC} \mathbf{E}_i(s) \cdot d\mathbf{l}}{I_1(s)}. \tag{24}$$



Rys. 4. Obwody magnetycznie sprzężone

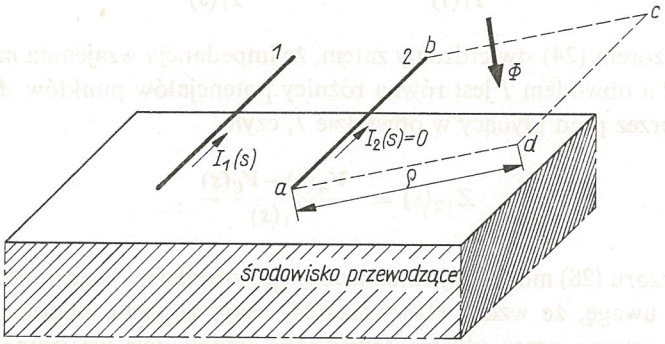
W celu dokładniejszego wyjaśnienia wzoru (24) rozpatrzymy dwa równoległe przewody umieszczone nad powierzchnią nieograniczonego środowiska przewodzącego (rys. 5). Impedancję wzajemną przewodów można przedstawić w postaci

$$Z_{12}(s) = -\frac{-s\Phi(s)}{I_1(s)}, \tag{25}$$

przy czym $-s\Phi(s)$ jest siłą elektromotoryczną indukowaną w przewodzie *2* przez strumień magnetyczny $\Phi(s)$ skojarzony z przewodem *2*.

Strumień magnetyczny $\Phi(s)$ przenika prostokąt *abcda*, którego bok znajduje się na powierzchni przewodu *2* (rys. 5), natomiast bok $ad = bc$ jest nieskończenie duży; mamy

$$\Phi(s) = \lim_{\varrho \to \infty} \oint_{abcda} \mathbf{A}(s) \cdot d\mathbf{l},$$



Rys. 5. Dwa przewody nad powierzchnią środowiska przewodzącego

czyli

$$\Phi(s) = \int_{ab} \mathbf{A}(s) \cdot d\mathbf{l} + \lim_{\varrho \to \infty} \int_{cd} \mathbf{A}(s) \cdot d\mathbf{l}, \tag{26}$$

bowiem wektor $\mathbf{A}(s)$ jest równoległy do osi przewodów. Można wykazać, że drugi wyraz po prawej stronie równania (26) zanika, więc

$$\Phi(s) = \int_{ab} \mathbf{A}(s) \cdot d\mathbf{l},$$

wskutek czego

$$-s\Phi(s) = \int_{ab} \mathbf{E}_i(s) \cdot d\mathbf{l},$$

zgodnie z równaniem (6). Po podstawieniu tego wzoru do wyrażenia (25) otrzymujemy wzór (24).

Przytoczona interpretacja impedancji wzajemnej dwóch przewodów podana jest w pracy [4] dla pól sinusoidalnie zmiennych w czasie.

Różnicę potencjałów punktów *A* oraz *C* obwodu *2* przedstawia wzór (21); podstawiając $\mathbf{E}_{st} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_i$, otrzymujemy

$$V_A(s) - V_C(s) = \int_{ABC} \mathbf{E}(s) \cdot d\mathbf{l} - \int_{ABC} \mathbf{E}_i(s) \cdot d\mathbf{l}, \tag{27}$$

przy czym droga całkowania *ABC* obu całek położona jest na powierzchni przewodu tworzącego obwód *2*. Jeżeli założymy, że ten przewód jest bardzo cienki, to można pominąć prądy wirowe indukowane w jego wnętrzu. Wówczas natężenie pola elektrycznego na

powierzchni przewodu równa się zeru, wobec czego zanika całka $\int_{ABC} \mathbf{E}(s) \cdot d\mathbf{l}$ w równaniu (27); dzieląc to równanie stronami przez $I_1(s)$, otrzymujemy

$$\frac{V_A(s)-V_C(s)}{I_1(s)} = -\frac{\int_{ABC} \mathbf{E}_i(s) \cdot d\mathbf{l}}{I_1(s)}.$$

Zgodnie z wzorem (24) stwierdzamy zatem, że impedancja wzajemna między odcinkiem *ABC* obwodu *2* a obwodem *1* jest równa różnicy potencjałów punktów *A* oraz *C* obwodu *2*, podzielonej przez prąd płynący w obwodzie *1*, czyli

$$Z_{12}(s) = \frac{V_A(s)-V_C(s)}{I_1(s)}. \qquad (28)$$

Na podstawie wzoru (28) można w jednoznaczny sposób zdefiniować impedancję wzajemną.

Biorąc pod uwagę, że wzory (18) oraz (24) mają zupełnie podobną postać, można impedancję zewnętrzną przewodu traktować jako impedancję wzajemną. Łatwo bowiem zauważyć, że impedancja zewnętrzna przewodu jest równa impedancji wzajemnej między tym przewodem a umieszczonym na jego powierzchni nieskończenie cienkim przewodem, jeśli oba przewody są od siebie odizolowane [12].

7. UWAGI KOŃCOWE

W pracy rozpatrzono impedancję podstawowych elementów liniowych. Rozważania mają charakter ogólny, bowiem omawiane impedancje są funkcjami zmiennej zespolonej *s*.

Wykazano, że impedancja dwójnika jest równa różnicy potencjałów skalarnych na zaciskach elementu podzielonej przez prąd płynący w rozpatrywanym elemencie. W ten sposób otrzymuje się jednoznaczną definicję impedancji. Wyniki otrzymane w pracy stanowią uogólnienie rezultatów otrzymanych dla prądów sinusoidalnych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. R. Carson, Wave Propagation in Overhead Wires With Ground Return, The Bell Syst. Techn. J., t. 5, 1926, str. 539.
2. T. Cholewicki, Analiza obwodów elektrycznych, WNT, Warszawa 1962.
3. P. Ł. Kałantarow, Ł. P. Nejman, Tieoreticzeskije osnowy elektrotiechniki, Gosenergoizdat, Moskwa — Leningrad 1951.
4. M. Krakowski, Active Power Loss in the Ferromagnetic Medium Due to Currents in a Multiconductor System, Arch. Elektr., t. XIX, 1970, str. 85.
5. B. P. Lathi, Signals, System and Communication, John Wiley, Nowy Jork 1965.
6. L. A. Lusternik, W. I. Sobolew, Elementy analizy funkcjonalnej, PWN, Warszawa 1959.
7. J. Osiowski, Zarys rachunku operatorowego, WNT, Warszawa 1965.
8. S. Seshu, N. Balabanian, Linear Networks Analysis, John Wiley, Nowy Jork 1959.
9. P. Szulkin, S. Pogorzelski, Podstawy teorii pola elektromagnetycznego, WNT, Warszawa 1964.

10. A. N. Tichonow, A. A. Samarski, Równania fizyki matematycznej, PWN, Warszawa 1963.
11. M. E. Van Valkenburg, Analiza układów elektrycznych, PWN, Warszawa 1961.
12. Directives concerning the protection of telecommunication lines against harmful effects from electricity lines, C.C.I.T.T. International Telecommunication Union, 1963.

Dodatek 1

POTENCJAŁ WEKTOROWY

Rozpatrzmy pole elektromagnetyczne w nieograniczonym środowisku jednorodnym. Przypuśćmy, że w obszarze v pola elektromagnetycznego płynie prąd o gęstości $\mathbf{J}_n(s)$ narzucony przez czynniki zewnętrzne (na przykład przez źródła energii). W każdym punkcie obszaru v spełnione są równania Maxwella:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}(s) = (\gamma+s\varepsilon)\mathbf{E}(s)+\mathbf{J}_n(s), \tag{29}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}(s) = -s\mathbf{B}(s). \tag{30}$$

Na zewnątrz obszaru v jest $\mathbf{J}_n(s) = 0$.

W celu określenia potencjału wektorowego $\mathbf{A}(s)$ zakładamy, że

$$\mathbf{B}(s) = \operatorname{rot}\mathbf{A}(s). \tag{31}$$

Równanie to nie daje jednoznacznego określenia potencjału wektorowego, bowiem istnieją różne wektory (np. $\mathbf{A}$ oraz $\mathbf{A}+\operatorname{grad}\varphi$), dla których otrzymuje się taką samą indukcję magnetyczną $\mathbf{B}(s)$. W celu uzyskania jednoznacznego określenia wektora $\mathbf{A}$ przyjmiemy później dodatkowy warunek.

Podstawiając wzór (31) do równania (30), znajdujemy

$$\operatorname{rot}[\mathbf{E}(s)+s\mathbf{A}(s)] = 0,$$

a następnie, biorąc pod uwagę tożsamość wektorową rot grad $V = 0$, otrzymujemy

$$\mathbf{E}(s)+s\mathbf{A}(s) = -\operatorname{grad}V(s),$$

czyli

$$\mathbf{E}(s) = -\operatorname{grad}V(s)-s\mathbf{A}(s). \tag{32}$$

Funkcja skalarna $V(s)$ jest potencjałem skalarnym pola elektromagnetycznego. Zgodnie z równaniem (32), natężenie $\mathbf{E}(s)$ pola elektrycznego można przedstawić w postaci sumy natężeń: pola statycznego i indukowanego (por. wzór 4).

Do wyrażenia

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}(s) = \mu(\gamma+s\varepsilon)\mathbf{E}(s)+\mu\mathbf{J}_n(s)$$

otrzymanego z równania (29) po pomnożeniu stronami przez μ, podstawiamy wzory (31) oraz (32); mamy

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}(s) = \mu(\gamma+s\varepsilon)[-\operatorname{grad}V(s)-s\mathbf{A}(s)]+\mu\mathbf{J}_n(s),$$

a stąd otrzymujemy

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}(s)-\nabla^2\mathbf{A}(s) = -\mu(\gamma+s\varepsilon)\operatorname{grad}V(s)-k^2\mathbf{A}(s)+\mu\mathbf{J}_n(s), \tag{33}$$

przy czym

$$k = \sqrt{s\mu(\gamma+s\varepsilon)}, \qquad \operatorname{Re}(k) > 0, \tag{34}$$

natomiast $\nabla^2\mathbf{A}$ jest laplasjanem wektora.

Jako wspomniany wyżej warunek dodatkowy przyjmujemy

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(s) = -\frac{k^2}{s}V(s), \tag{35}$$

wobec czego równanie (33) upraszcza się do postaci

$$\nabla^2\mathbf{A}(s)-k^2\mathbf{A}(s) = -\mu\mathbf{J}_n(s). \tag{36}$$

Stwierdzamy, że potencjał wektorowy spełnia w punktach obszaru v niejednorodne równanie Helmholtza. Na zewnątrz obszaru v mamy $\mathbf{J}_n(s) = 0$, wobec czego spełnione jest równanie Helmholtza

$$\nabla^2\mathbf{A}(s) - k^2\mathbf{A}(s) = 0. \tag{37}$$

Podstawiając wyrażenie (32) do równania $\operatorname{div}[\varepsilon\mathbf{E}(s)] = \varrho(s)$, otrzymujemy

$$-\operatorname{div}\operatorname{grad} V(s) - s\operatorname{div}\mathbf{A}(s) = \frac{\varrho(s)}{\varepsilon},$$

skąd po uwzględnieniu wzoru (35) mamy

$$\nabla^2 V(s) - k^2 V(s) = -\frac{\varrho(s)}{\varepsilon}. \tag{38}$$

Oznacza to, że potencjał skalarny spełnia niejednorodne równanie Helmholtza w obszarze, w którym gęstość przestrzenna ładunku jest różna od zera.

Można wykazać [10], że rozwiązanie równania Helmholtza wewnątrz i na zewnątrz obszaru v przedstawia wyrażenie

$$\mathbf{A}(s) = \frac{\mu}{4\pi}\int_v \frac{\mathbf{J}_n(s)e^{-kR}}{R}\,dv, \tag{39}$$

przy czym $\mathbf{J}_n(s)$ jest gęstością prądu narzuconego przez czynniki zewnętrzne w elementarnej objętości dv znajdującej się w odległości R od rozpatrywanego punktu pola.

Jeżeli prąd płynie w nieskończenie cienkim przewodzie o długości dl umieszczonym w nieograniczonym środowisku jednorodnym, to potencjał wektorowy przedstawia wzór

$$\mathbf{A}(s) = \frac{\mu I(s)d\mathbf{l}}{4\pi}\frac{e^{-kR}}{R}, \tag{40}$$

przy założeniu, że prąd $I(s)$ płynie w kierunku wektora $d\mathbf{l}$. Wielkość R we wzorze (40) jest odległością rozpatrywanego punktu pola od środka odcinka dl.

Potencjał skalarny można wyznaczyć na podstawie wzoru (35), a mianowicie

$$V(s) = -\frac{s}{k^2}\operatorname{div}\mathbf{A}(s). \tag{41}$$

Wobec tego natężenie pola elektrycznego można przedstawić w postaci

$$\mathbf{E}(s) = \frac{s}{k^2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}(s) - s\mathbf{A}(s). \tag{42}$$

Dodatek 2

WARTOŚĆ SKUTECZNA WEKTORA SINUSOIDALNIE ZMIENNEGO W CZASIE

Wektor $\mathbf{W}_t$ sinusoidalnie zmienny w czasie można przedstawić w postaci zespolonej za pomocą wyrażenia $\mathbf{W}e^{j\omega t}$, przy czym składowe wektora zespolonego $\mathbf{W}$ w układzie współrzędnych ortogonalnych oznaczymy przez W_1, W_2, W_3. Zakładamy, że moduły tych składowych są równe wartościom skutecznym, więc wartości chwilowe składowych rozpatrywanego wektora wynoszą

$$\begin{aligned} W_{1t} &= |W_1|\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi_1),\\ W_{2t} &= |W_2|\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi_2),\\ W_{3t} &= |W_3|\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi_3). \end{aligned} \tag{43}$$

Kwadrat wartości skutecznej wektora sinusoidalnie zmiennego oblicza się z wzoru

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{W}_t^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{W}_t \cdot \mathbf{W}_t dt = \frac{1}{T}\int_0^T (W_{1t}^2 + W_{2t}^2 + W_{3t}^2) dt, \tag{44}$$

przy czym T oznacza okres omawianych wielkości.

Podstawiając składowe (43) do wyrażenia (44), otrzymujemy po wykonaniu całkowania

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{W}_t^2 dt = |W_1|^2 + |W_2|^2 + |W_3|^2 = ||\mathbf{W}||^2, \tag{45}$$

przy czym $||\mathbf{W}||$ jest normą wektora $\mathbf{W}$ (por. p. 1). Wynika stąd

$$\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{W}_t^2 dt} = ||\mathbf{W}||, \tag{46}$$

co oznacza, że wartość skuteczna wektora sinusoidalnie zmiennego w czasie równa się jego normie.

Obecnie rozpatrzymy moc czynną oraz średnią wartość za okres energii w dowolnym obszarze v sinusoidalnie zmiennego pola elektromagnetycznego. Moc czynna związana z obszarem v wyraża się wzorem

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\int_v \gamma \mathbf{E}_t^2 dv\right] dt. \tag{47}$$

Zmieniając kolejność całkowania, otrzymujemy

$$P = \int_v \gamma \left[\frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{E}_t^2 dt\right] dv = \int_v \gamma ||\mathbf{E}||^2 dv, \tag{48}$$

zgodnie z wzorem (45) przy założeniu, że $\gamma = \text{const}$.

W podobny sposób znajduje się wzory dla średniej wartości za okres energii pola elektrycznego i magnetycznego w obszarze v:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left[\int_v \frac{1}{2}\varepsilon \mathbf{E}_t^2 dv\right] dt = \int_v \frac{1}{2}\varepsilon ||\mathbf{E}||^2 dv, \tag{49}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left[\int_v \frac{1}{2}\mu \mathbf{H}_t^2 dv\right] dt = \int_v \frac{1}{2}\mu ||\mathbf{H}||^2 dv, \tag{50}$$

przy założeniu, że $\varepsilon = \text{const}$ oraz $\mu = \text{const}$.

Dodatek 3

SIŁA ELEKTROMOTORYCZNA INDUKOWANA W PRZEWODZIE

Rozpatrzmy nieskończenie cienki przewód *ab* umieszczony w polu elektromagnetycznym wytworzonym przez prąd $I(s)$ płynący w obwodzie C (rys. 6). Przypuśćmy, że obwód C oraz przewód *ab* znajdują się w nieograniczonym środowisku jednorodnym. Udowodnimy, że siła elektromotoryczna indukowana w przewodzie *ab* wyraża się wzorem

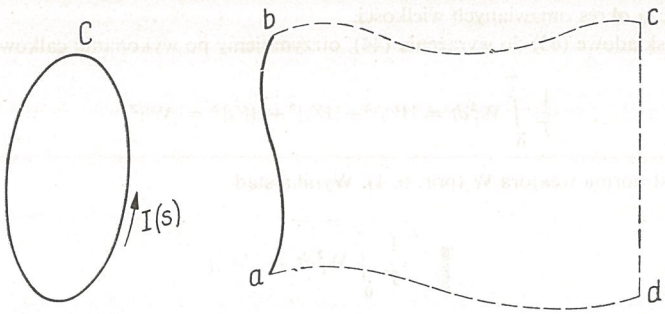
$$\varepsilon(s) = \int_{ab} \mathbf{E}_i(s) \cdot d\mathbf{l}, \tag{51}$$

przy czym $\mathbf{E}_i(s)$ jest natężeniem indukowanego pola elektrycznego.

Siłę elektromotoryczną wzniecaną w przewodzie można przedstawić za pomocą wzoru

$$\varepsilon(s) = -s\Phi(s), \tag{52}$$

gdzie $\Phi(s)$ jest strumieniem magnetycznym skojarzonym z przewodem ab.



Rys. 6. Przewód w polu elektromagnetycznym

W celu wyznaczenia strumienia magnetycznego $\Phi(s)$ rozpatrzymy powierzchnię ograniczoną linią zamkniętą $abcda$, której boki bc oraz da położone są na powierzchniach ortogonalnych do linii potencjału wektorowego $\mathbf{A}(s)$. Strumień magnetyczny przez powierzchnię równa się całce liniowej potencjału wektorowego wzdłuż linii zamkniętej stanowiącej brzeg tej powierzchni, wobec czego

$$\Phi(s) = \lim_{R_m \to \infty} \int_{abcda} \mathbf{A}(s) \cdot d\mathbf{l}, \tag{53}$$

przy czym R_m oznacza najmniejszą odległość między punktami odcinka cd oraz obwodu C. Zgodnie z przyjętym założeniem, w punktach odcinków bc oraz da wektor $\mathbf{A}(s)$ jest prostopadły, wobec czego

$$\Phi(s) = \int_{ab} \mathbf{A}(s) \cdot d\mathbf{l} + \lim_{R_m \to \infty} \int_{cd} \mathbf{A}(s) \cdot d\mathbf{l}. \tag{54}$$

Przy przyjętych założeniach potencjał wektorowy wyraża się wzorem

$$\mathbf{A}(s) = \frac{\mu I(s)}{4\pi} \int_C \frac{e^{-kR} d\mathbf{l}}{R}, \tag{55}$$

wynikającym z wyrażenia (40), przy czym R jest odległością rozpatrywanego punktu pola od elementu dl. Niech R_0 oznacza najmniejszą odległość rozpatrywanego punktu pola od obwodu C; otrzymujemy wówczas

$$||\mathbf{A}(s)|| \leqslant \frac{\mu |I(s)|}{4\pi} \int_C \frac{dl}{R} \leqslant \frac{\mu |I(s)| l_C}{4\pi R_0},$$

gdzie l_C jest długością linii zamkniętej C. Istnieje zatem taka skończona liczba dodatnia a, że

$$||\mathbf{A}(s)|| \leqslant \frac{a}{R_0}. \tag{56}$$

W punktach odcinka cd mamy

$$||\mathbf{A}(s)|| \leqslant \frac{a}{R_m}. \tag{57}$$

Wobec tego oznaczając przez l długość odcinka cd, mamy

$$\left| \int_{cd} \mathbf{A}(s) \cdot d\mathbf{l} \right| \leqslant \int_{cd} ||\mathbf{A}(s)|| \, dl \leqslant \frac{al}{R_m} \to 0,$$

gdy $R_m \to \infty$.

Zgodnie z powyższym, równanie (54) przybiera postać

$$\Phi(s) = \int_{ab} \mathbf{A}(s) \cdot d\mathbf{l},$$

wobec czego na podstawie wzoru (52) znajdujemy

$$\varepsilon(s) = -s \int_{ab} \mathbf{A}(s) \cdot d\mathbf{l},$$

a po uwzględnieniu zależności $\mathbf{E}_i(s) = -s\mathbf{A}(s)$, otrzymuje się wzór (51).

Zwróćmy jeszcze uwagę, że całka $\oint \mathbf{E}_i(s) \cdot d\mathbf{l}$ przedstawia siłę elektromotoryczną indukowaną wzdłuż linii zamkniętej, co wynika bezpośrednio z II prawa Maxwella [9].

M. KRAKOWSKI

IMPEDANCES OF LINEAR ELECTRICAL NETWORKS

Summary

The fundamental properties of the impedance of the lumped — linear time — invariant networks are discussed in the paper. The impedance is considered as a function of the variable s. The internal and external impedance as well as the mutual impedance are examined. It is shown that the impedance of an element is the ratio of the potential difference to the current.

The energy functions and their fundamental properties are considered in the paper.

M. KRAKOWSKI

DIE IMPEDANZEN DER LINEAREN ELEKTRISCHEN NETZWERKEN

Zusammenfassung

Es wurden in der Arbeit grundsätzliche Eigenschaften linearer Scheinwiderstände elektrischer Zweipole mit zeitunabhängigen Parametern besprochen. Die Erwägungen haben allgemeinen Charakter und betreffen die Impedanz als Funktion der Variable s. Man befaßte sich mit innerer und äußerer sowie gegenseitiger Impedanz. Es wurde bewiesen, daß die Impedanz der Differenz von Skalar Potenzial auf Zweipolklemmen dividiert durch den in diesem Zweipol fließenden Strom gleicht. Weiterhin wurden energetische Funktionen und deren grundsätzliche Eigenschaften erörtert.

М. КРАКОВСКИ

СОПРОТИВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Резюме

В труде рассмотрены основные свойства операторного сопротивления линейных электрических цепей с сосредоточенными параметрами независимыми от времени. Описаны внутреннее, внешнее и взаимное сопротивление. Доказано, что полное сопротивление двухполюсника равно отношению разности потенциалов к току. Рассмотрены энергетические функции, а также основные свойства этих функций.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1972, 18, z. 3, ss. 459—467

621.373

Właściwości częstotliwościowe i szumowe rzeczywistego źródła prądowego sterowanego napięciem (DVCCS)

JACEK ŻURADA (GDAŃSK)

Instytut Technologii Elektronicznej Politechniki Gdańskiej

Otrzymano 29.11.1971

W pracy scharakteryzowano częstotliwościowe własności źródła prądowego sterowanego napięciem (DVCCS). Podano model fizycznego źródła nieidealnego i jego macierz admitancyjną oraz prosty model źródła pracującego przy dużym sygnale. Analizę częstotliwościową zweryfikowano przy pomocy maszyny cyfrowej. Podano wyniki i wnioski z efektywnego obliczenia szumów źródła. Wyniki rozważań są użyteczne w analizie i syntezie układów zawierających scalone rzeczywiste źródła DVCCS.

Obok liniowych układów aktywnych przydatnych do syntezy układów scalonych, np. wzmacniaczy operacyjnych, żyratorów, nowym elementem tworzącym wraz z kondensatorem klasę generującą wszystkie układy liniowe scalone jest źródło prądowe sterowane napięciem (DVCCS). Ponieważ syntezę przy wykorzystaniu tego źródła warunkują nieodłącznie występujące na każdym z jego wejść przewodności i pojemności pasożytnicze [1], celowe jest przeprowadzenie identyfikacji parametrów źródła z punktu widzenia zacisków zewnętrznych. W konsekwencji umożliwia to stworzenie modelu źródła i opisanie go macierzą admitancyjną.

Badany niżej schemat źródła pokazany jest na rys. 1a, gdzie V_+ odpowiada napięciu na wejściu nieodwracającym fazy, V_- odpowiada napięciu na wejściu odwracającym fazę. Przedstawiony podstawowy układ źródła jest jedną z jego możliwych realizacji. Większość jednak bardziej złożonych wersji źródła zawierać będzie również różnicowy stopień wejściowy i następujący po nim układ wzmacniacza za wspólnym emiterem z dynamicznym obciążeniem kolektorem tranzystora jako stopień wyjściowy. Wprowadzony tu model źródła jest uniwersalny. Jednak opis ilościowy modelu dla poszczególnych realizacji będzie możliwy dopiero po uogólnieniu otrzymanych i przytoczonych w dalszych rozważaniach wzorów.

Na rys. 1b przedstawiony jest schemat zastępczy tranzystora „mieszane Π" przyjęty do analizy.

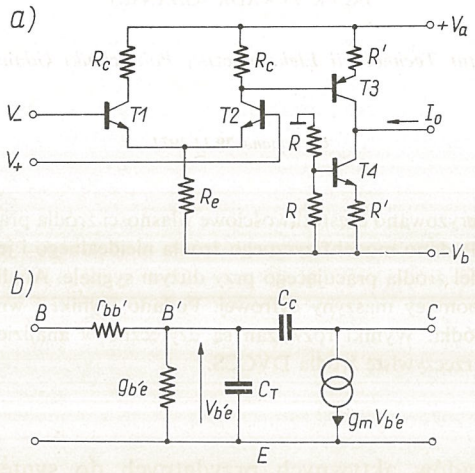
Analiza zewnętrznych parametrów rzeczywistego układu źródła prowadzi do określenia jego modelu małosygnałowego jak na rys. 2a, gdzie

$$R_1 = 2r_{b'e} = \frac{2}{g_{b'e}},$$

$$R_2 = 2r_{b'b}, \tag{1}$$

$$C_1 = \frac{1}{2}[C_T + (1 - K_{uo})C_c]$$

przy czym $K_{uo} \cong -\frac{20V_b}{R_e}R_c$.



Rys. 1. a) podstawowy schemat źródła DVCCS, b) schemat zastępczy tranzystora

Powyższe zależności są oczywiste z analizy pracy stopnia różnicowego; K_{uo} jest wzmocnieniem napięciowym pojedynczego tranzystora w tym stopniu. Pojemność wejściowa źródła C_1 jest szeregowym połączeniem dwu jednakowych pojemności C_T i millerowskiej pojemności $(1 - K_{uo})C_c$.

Podobnie łatwo otrzymujemy:

$$G_o = \frac{I_o}{V_+ - V_-} \cong 10\frac{V_b \cdot R_c}{R_e \cdot R'},$$

$$G = \frac{G_o}{1 + j\omega/\omega_o}, \tag{2}$$

$$C_2 \cong 2C_c.$$

Przewodność wzajemna źródła G posiada pulsację graniczną ω_o zdefiniowaną dalej, powyżej której przeważa jej charakter urojony.

Tranzystory w stopniu różnicowym powinny pracować przy małych prądach stałych w celu uzyskania dużej oporności wejściowej. Ponieważ zachodzi wówczas $r_{b'e} \gg r_{b'b}$, a zatem $R_1 \gg R_2$; model układu uprościć można do postaci jak na rys. 2b.

Macierz admitancyjna źródła z rys. 2b ma postać następującą:

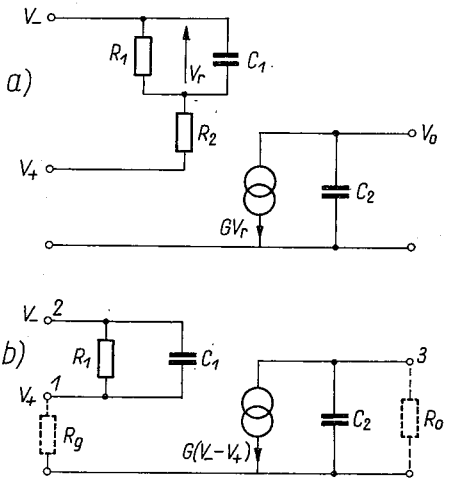
$$[Y_z] = \begin{bmatrix} G+sC_1 & -(G+sC_1) & 0 \\ -(G+sC_1) & G+sC_1 & 0 \\ -G & G & sC_2 \end{bmatrix}.$$

Uwzględniając dodatkowo występujące w praktyce oporności R_g generatora napięcia V_+ oraz obciążenia R_o zdefiniować można robocze częstotliwości graniczne (założenie $R_g = 0$ generatora napięcia V_- nie zmniejsza ogólności rozważań)

$$f_1 = \frac{1}{2\pi C_1 R_1},$$

$$f_o = \frac{1}{2\pi C_1 R_1 \| R_g} = f_1\left(1 + \frac{R_1}{R_g}\right), \tag{3}$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi C_2 R_o}.$$

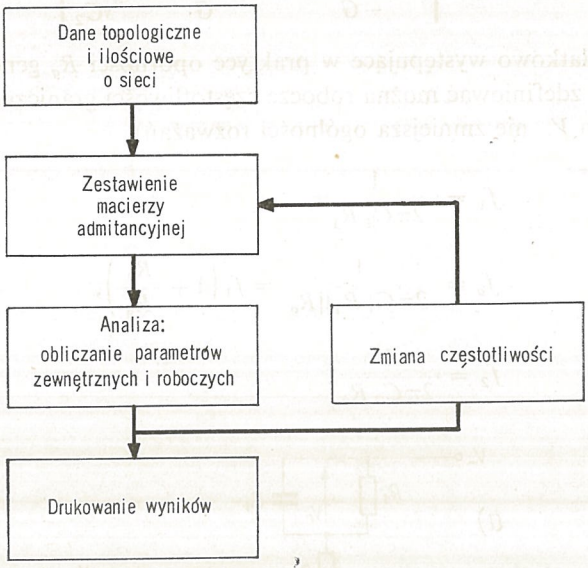


Rys. 2. a) schemat zastępczy źródła DVCCS, b) uproszczony model źródła

Częstotliwość f_1 odpowiada spadkowi modułu impedancji wejściowej między węzłem V_+ i V_- o 3 db, w szczególności napięcie sterujące V_r zostaje zwierane na dwójniku $C_1 \| R_1$ począwszy od tej częstotliwości. Tak więc częstotliwość f_1 ogranicza od góry na osi częstotliwości stosowalność źródła. Częstotliwości $f_o > f_1$ towarzyszy dodatkowo pojawienie się pasożytniczej zespolonej wartości G. Efekt ten, jak widać ze wzoru na wartość f_o w (3), jest pomijalny dla $\frac{R_1}{R_g} \gg 1$.

Wpływ równoległej do obciążenia R_o pojemności C_2 będzie istotny tylko gdy $R_o \gg R_1$. Wtedy bowiem przy spełnionym praktycznie warunku $C_2 \ll C_1$, częstotliwości f_1 i f_2 będą tego samego rzędu. Reasumując, krytyczne ograniczenia częstotliwościowe stwarzają częstotliwości f_1 lub f_2.

Elementy powyższego modelu i parametry źródła obliczone ze wzorów (1)÷(3) potwierdzone zostały drogą obliczeń na maszynie cyfrowej według schematu działań podanego na rys. 3 i algorytmów opisanych w pracy [3]. Wykorzystano technikę analizy częstotliwoś-



Rys. 3. Schemat analizy częstotliwościowej sieci liniowej

Tablica 1

Zestawienie przykładowych danych układu źródła i obliczonych elementów modelu

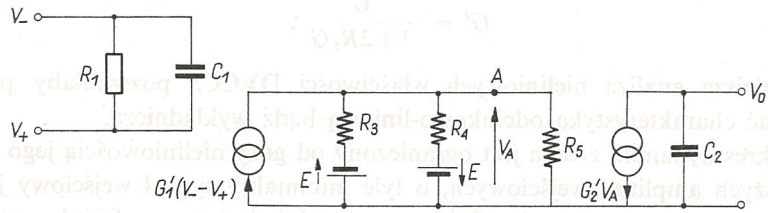
Dane układu		Obliczone elementy modelu	
R_c	3 kΩ	R_1	3,2 kΩ
R_e	3 kΩ	C_1	281 pF
R'	3 kΩ	C_2	5,04 pF
V_a	9 V	G_o	29,4 mS
V_b	−9 V	f_1	171 kHz
$r_{b'b}$	50 Ω	R_g	1 kΩ
$r_{b'e}$	1600 Ω	f_o	684 kHz
C_c	2 pF		
C_T	200 pF		
I_e	1,4 mA		

ciowej opartej na topologicznym zestawieniu macierzy admitancyjnej i wielokrotnym rozwiązaniu układu równań kolejno dla każdej analizowanej częstotliwości. Zestawienie konkretnych danych układu z rys. 1a oraz wyników obliczeń dla tego przypadku podane jest w tabl. 1.

Model i macierz admitancyjna źródła DVCCS są przydatne do przeprowadzenia obliczeń właściwości złożonego układu zawierającego omawiane źródła przy pomocy maszyny

cyfrowej. Admitancyjna macierz o kilkunastu kolumnach i wierszach może bowiem zostać zredukowana do macierzy $[Y_z]$ o wymiarach 3×3.

W przypadku pracy źródła przy dużych sygnałach model układu można w najprostszym przypadku uzupełnić kluczowanymi opornościami R_3, R_4, co pokazano na rys. 4.



Rys. 4. Model źródła w warunkach pracy z dużymi sygnałami

Mamy zatem:

$$\left.\begin{aligned} R_3 &= R_3' \\ R_4 &= R_4'' \end{aligned}\right\} \quad \text{gdy } V_A > E,$$

$$\left.\begin{aligned} R_3 &= R_3'' \\ R_4 &= R_4' \end{aligned}\right\} \quad \text{gdy } V_A < -E,$$

$$\left.\begin{aligned} R_3 &= R_3'' \\ R_4 &= R_4'' \end{aligned}\right\} \quad \text{gdy } |V_A| < E,$$

gdzie:

$$\begin{aligned} R_3' &\ll R_5 \ll R_3'', \\ R_4' &\ll R_5 \ll R_4''. \end{aligned} \tag{4}$$

Przyjęto tutaj przy dowolnym G_1' wartość G_2' wynikającą z warunku równoważności układów z rys. 3b i rys. 4 przy pracy z małymi sygnałami, tzn.

$$G_1' G_2' R_5 = G.$$

Praktycznie można obrać wartość G_1' np. równą G oraz R_4 rzędu kilku kiloomów. Wtedy

$$G_2' = \frac{1}{R_5}. \tag{5}$$

Przy podanych wyżej założeniach oporniki R_3', R_4' będą rzędu pojedynczych omów, R_3'', R_4'' rzędu megaomów i takie wartości obrać należy arbitralnie w relacji (4). Model z rys. 4 symulował będzie ograniczenie amplitudy wprowadzane nieliniowością tranzystorów w stopniu różnicowym decydującym o dynamice całego źródła.

Jeżeli określimy napięcie V_{max} jako górną granicę różnicowego napięcia wejściowego, przy którym nie występują na wyjściu zniekształcenia nieliniowe, to w punkcie A modelu napięcie to będzie miało wartość graniczną E:

$$E \stackrel{\text{def}}{=} G_1' \cdot R_5 \cdot V_{max}.$$

Powyżej wartości napięcia różnicowego $|V_{max}|$ układ będzie zachowywał się w przybliżeniu jak nasycony, przy czym model z rys. 4 aproksymuje ten efekt. Napięcie V_{max} zależy od przyjętego kryterium liniowości pracy źródła. Wiadomo [4], że zależy ono bardzo silnie

od oporników R_s w emiterach tranzystorów stopnia różnicowego, które wprowadzając ujemne sprzężenie zwrotne linearyzują przewodność wzajemną G. Zakres tego napięcia od ok. 50 mV przy $R_s = 0$ można zwiększyć do 200 ÷ 250 mV przy $R_s = 100\ \Omega$. Tej linearyzacji towarzyszy jednak zmniejszenie się wartości przewodności według wzoru

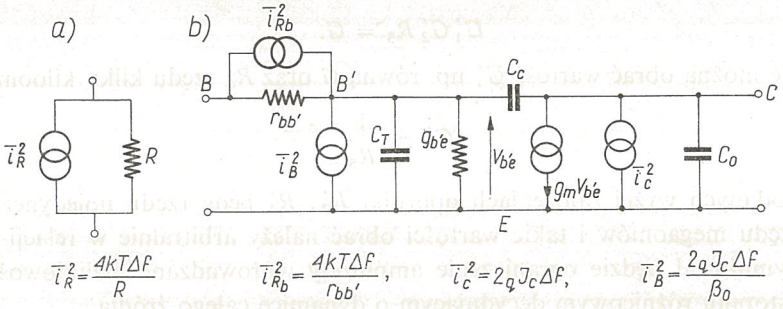
$$G' = \frac{G}{1+2R_sG}. \tag{6}$$

Dokładniejsza analiza nieliniowych właściwości DVCCS pozwoliłaby przewodność źródła opisać charakterystyką odcinkowo-liniową bądź wykładniczą.

O ile zakres dynamiki źródła jest ograniczony od góry nieliniowością jego charakterystyk dla dużych amplitud wejściowych, o tyle minimalny sygnał wejściowy jest głównie uwarunkowany poziomem szumów. Szumy te wygodnie jest sprowadzić do wejścia źródła; pozwala to również dla konkretnej oporności generatora na wejściu obliczyć współczynnik szumów F układu. W tym celu należy obliczyć lub pomierzyć niezależną od „zewnętrza" układu średniokwadratową wartość napięcia lub prądu szumu wąskopasmowego na zewnętrznych zaciskach źródła. Takie podejście okazuje się ponadto skuteczne dla zminimalizowania szumu systemu drogą transformacji układu bezstratnego wchodzącego w skład tego systemu, jak to opisano w [5].

Dokonano efektywnego sumarycznego obliczenia szumów przy pomocy maszyny cyfrowej wykorzystując własność międzywzajemności sieci dołączonej [6] i posługując się powtórnie schematem działań podanym na rys. 3. Metoda ta sprowadza się do uzupełnienia wszystkich szumiących elementów układu ich odpowiednimi prądowymi średniokwadratowymi źródłami szumu.

Każdy opornik przedstawia sobą źródło szumu termicznego $\overline{i_R^2}$, zaś szumiący tranzystor wystarczająco dokładnie opisują źródła szumu termicznego $\overline{i_{R_b}^2}$, oraz szumu śrutowego $\overline{i_b^2}$ prądu bazy i szumu śrutowego $\overline{i_c^2}$ prądu kolektora, co pokazuje rys. 5.



Rys. 5. Modele szumowe: a) opornika, b) tranzystora

Przyjęty model szumowy tranzystora nie uwzględnia szumu strukturalnego proporcjonalnego do $\frac{1}{f}$ i odgrywającego istotną rolę dla częstotliwości poniżej 1 kHz.

Układ zawierający r oporników i t tranzystorów będzie miał $r+3t$ niezależnych szumowych pobudzeń. Rozpatrywane źródło z rys. 1 opisane macierzą admitancyjną Y i posiadające 11 węzłów niezależnych będzie miało 19 wewnętrznych generatorów szumu.

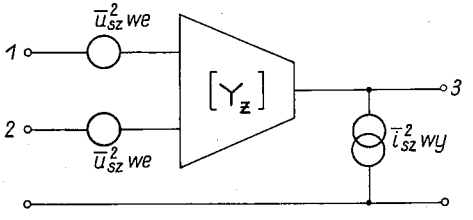
Zastosowanie klasycznych metod wymagałoby 11-krotnego rozwiązania układu odrębnie dla każdego węzła pobudzanego generatorem szumów. Z pomocą przychodzi tu koncepcja sieci dołączonej. Sieć dołączona opisana jest w stosunku do układu oryginalnego jego macierzą admitancyjną transponowaną Y^t. Sieci te posiadają właściwość międzywzajemności, tzn. sieć oryginalna i dołączona spełniają zasadę wzajemności między sobą. W tym przypadku, zamiast obliczać odpowiedzi na wyjściu na każde prądowe pobudzenie I_k^2 w k-tym węźle dla sieci oryginalnej, można jednorazowo pobudzając jednostkowym źródłem prądowym wyjście sieci dołączonej obliczyć transmitancje Z_k między wyjściem a każdym z węzłów. Ostatecznie gęstość napięcia szumów wyjściowych przypadająca na 1 Hz w otoczeniu obliczanej częstotliwości będzie w n-węzłowym układzie dana wzorem

$$V_{sz} = \left(\sum_{k=1}^{n} |Z_k|^2 I_k^2\right)^{1/2}.$$

Dodatkowym ułatwieniem przy zastosowaniu tej procedury jest możliwość powtórnego wykorzystania macierzy Y^{-1} w toku obliczenia szumów, która obliczona została uprzednio w procesie analizy częstotliwościowej. Zachodzi bowiem związek

$$(Y^t)^{-1} = (Y^{-1})^t.$$

Praktycznie czas obliczenia szumów wąskopasmowych na wejściu lub wyjściu układu jest zaledwie około 1/3 dłuższy od czasu analizy częstotliwościowej.



Rys. 6. Model szumiącego źródła DVCCS
Uwaga: Źródło szumów należy rozumieć alternatywnie: na wejściu lub wyjściu

Otrzymane wyniki pozwalają przedstawić źródło DVCCS jak na rys. 6 i wskazują na jego dobre właściwości szumowe. Dla zakresu częstotliwości $f < f_1$ otrzymano w wyniku obliczeń źródła opisanego w tabl. 1:

$$\sqrt{\overline{i_{sz,wy}^2}} = 2.45 \frac{\text{nA}}{\sqrt{\text{Hz}}},$$

$$\sqrt{\overline{u_{sz,we}^2}} = 59 \frac{\text{nV}}{\sqrt{\text{Hz}}}.$$

Powyżej częstotliwości f_1 moc szumów zmniejsza się z szybkością kilkunastu db/okt. Ostatecznie dla $R_g = 1$ kΩ otrzymano współczynnik szumów $F = 23$ db.

Szum źródła może zostać zminimalizowany przez wybór tranzystorów w stopniu różnicowym wyróżniających się jak najmniejszymi wartościami $r_{b'b}$ i $g_{b'e}$. Wymagania te idą w parze z wymaganiem możliwie dużej oporności wejściowej. Ponadto wartości szumowych

transmitancji Z dla obu węzłów wejściowych są przynajmniej o rząd wielkości większe od pozostałych, z czego wynika dominujący wpływ szumów stopnia różnicowego na współczynnik szumów całego źródła.

Powyższe rozważania dotyczą konkretnego modelu źródła DVCCS, przyjętego na wstępie. Rezultaty otrzymane dadzą się jednak łatwo uogólnić na inne realizacje tego układu. Wnioski zaś pozwalają na efektywne projektowanie liniowych scalonych układów i systemów zawierających omówione źródło sterowane przy pomocy maszyny cyfrowej. Otrzymane wyniki pozwalają uwzględnić ilościowo własności pasożytnicze źródła w procesie syntezy liniowych układów. Umożliwiają one również ocenę minimalnej dynamiki spowodowanej szumem własnym układu oraz maksymalnej dynamiki narzuconej nieliniowością tranzystorów.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. M. Białko, R. W. Newcomb, Sposoby tworzenia wszystkich układów skończonych przy użyciu scalonego źródła prądowego sterowanego napięciem (DVCCS), Arch. Elektrotechn., Z. 1, 1971.
2. D. H. Treleaven, F. N. Trofimenkoff, Modeling Operational Amplifiers for Computer-Aided Circuit Analysis, IEEE Trans. on C.T., Vol. CT-18, No. 1, Jan. 1971.
3. J. Żurada, Zastosowanie macierzy admitancyjnej nieoznaczonej do analizy układów liniowych przy pomocy maszyny cyfrowej, Przegląd Telekomunikacyjny. nr 2, 1972.
4. M. Białko, Układy mikroelektroniczne, W-wa 1969.
5. H. A. Haus, R. B. Adler, Circuit Theory of Linear Noisy Networks, Techn. Press. 1959.
6. R. Rohrer, L. Nagel, R. Meyer, L. Weber, Computationally Efficient Electronic Circuit Noise Calculations, IEEE Journ. on Sol. St. Cir., Aug. 1971.

J. ŻURADA

FREQUENCY AND NOISE PROPERTIES OF A PHYSICAL VOLTAGE CONTROLLED CURRENT SOURCE DVCCS

Summary

Frequency performance of a voltage controlled current source is given. A physical nonideal linear source model, its admittance matrix and a simple large-signal model are described. Frequency analysis has been verified by means of a computer. Some results of an efficient source noise computation are shown. Conclusions are useful for integrated circuit analysis and synthesis based on DVCCS application.

J. ŻURADA

LES PROPRIETÉS DE FRÉQUENCE ET DE BRUIT D'UNE SOURCE DU COURANT CONTROLLÉE PAR TENSION (DVCCS)

Résumé

On a caracterisé les proprietés d'une source du courant controllée par tension. Un model d'une source pratique réalisée avec sa matrice d'admittance et un simple model d'une source pour des grands signaux sont aussi donnés. L'analyse fréquencielle d'un model linéaire d'une source a été verifiée à l'aide de l'ordinateur; sont aussi montrés les résultats de l'analyse de bruit. Les conclusions sont utiles pour l'analyse et la synthèse des circuits integrés contenant des sources DVCCS.

J. ŻURADA

FREQUENZ- UND RAUSCHVERHALTEN EINER SPANNUNGSGESTEUERTEN PHYSISCHEN STROMQUELLE (DVCCS)

Zusammenfassung

Im Aufsatz wurden die Frequenzeigenschaften einer physischen spannungsgesteuerten Stromquelle besprochen. Es wurden ein praktisch anwendbares Ersatzschaltbild der Quelle, seine Leitwertmatrix und ein einfaches Grossignalersatzschaltbild angegeben.

Frequenzanalyse ist auch mit Hilfe eines Digitalrechners durchgeführt worden, wobei auch Rauschverhalten der Quelle berücksichtigt worden sind. Ergebnisse sind für Analyse und Synthese von Schaltungen nützlich, die integrierte Quellen DVCCS enthalten.

Я. ЖУРАДА

ЧАСТОТНЫЕ И ШУМОВЫЕ СВОЙСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ИСТОЧНИКА ТОКА УПРАВЛЯЕМОГО НАПРЯЖЕНИЯ (DVCCS)

Резюме

Схарактеризованы частотные свойства источника тока управляемого напряжением. Приведены модель неидеального действительного источника, матрицу ее адмитанции и простая модель источника работающего при больших значениях сигналов. Анализ проверен на ЭЦВМ.

Приведены результаты вычислений шумов источника и вытекающие из этих вычислений заключения. Результаты труда могут быть использованы при анализе и синтезе интегральных линейных схем с источниками DVCCS.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1972, 18, z. 3, ss. 469—482

612.317.3

Pomiary parametrów charakteryzujących podstawowe scalone układy logiczne

MICHAŁ BIAŁKO (GDAŃSK), LUDWIK SPIRALSKI (SOPOT),
KRZYSZTOF SKIBIŃSKI (GDAŃSK)

Instytut Technologii Elektronicznej Politechniki Gdańskiej

Otrzymano 2.6.1971

W pracy przedstawiono definicje podstawowych parametrów układów logicznych oraz sposoby ich pomiaru. Podano również schematy blokowe niektórych przyrządów stosowanych przy pomiarach właściwości scalonych układów logicznych.

1. WPROWADZENIE

W skład podstawowych układów logicznych, nazywanych popularnie „bramkami", wchodzą układy spełniające funkcje logiczne NAND oraz NOR. Każdy z tych układów może mieć szereg rozwiązań konstrukcyjnych, z których najbardziej typowymi dla półprzewodnikowych układów scalonych są:

— dla funkcji NAND:
  a) układ DTL — Diode Transistor Logic,
  b) układ TTL lub T^2L — Transistor Transistor Logic,
— dla funkcji NOR:
  a) układ DCTL — Direct Coupled Transistor Logic,
  b) układ ECL — Emiter Coupled Logic.

W układach hybrydowych cienko i grubowarstwowych stosowane są również układy logiczne RTL — Resistor Transistor Logic.

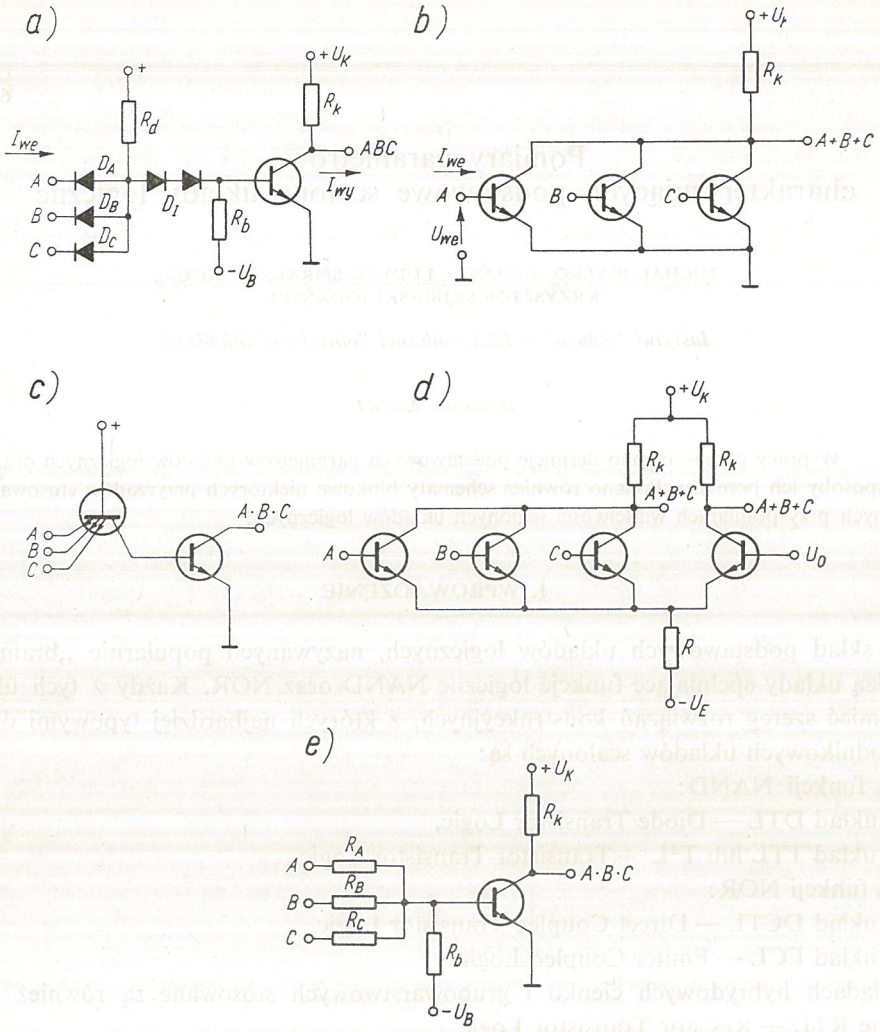
Przykłady schematów układów logicznych wymienionych typów przedstawione są na rys. 1.

Scalone układy logiczne są montowane najczęściej w obudowach plastikowych i metalowo-ceramicznych typu „dual-in-line" lub obudowach płaskich względnie w zmodyfikowanej obudowie TO-5.

Ze względu na to, że badanie elementów scalonego układu logicznego po jego wykonaniu jest praktycznie niemożliwe bez dokonania uszkodzeń, własności takiego układu powinny być określone na podstawie odpowiednich parametrów związanych z wielkościami występującymi na dostępnych zaciskach układu.

Parametry charakteryzujące podstawowe układy logiczne mogą być podzielone na dwie grupy:

a) parametry stałoprądowe (statyczne),
b) parametry impulsowe (dynamiczne).



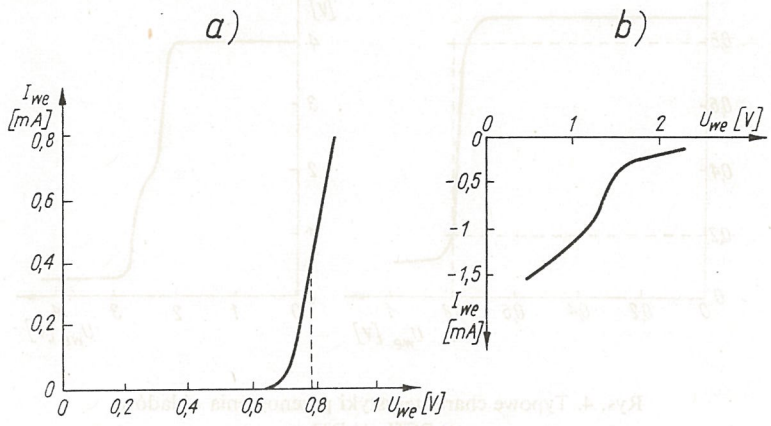
Rys. 1. Przykłady logicznych układów scalonych
a) DTL — NAND, b) DCTL — NOR, c) TTL — NAND, d) ECL — NOR, e) RTL — NAND

2. DEFINICJE PARAMETRÓW CHARAKTERYZUJĄCYCH PODSTAWOWE UKŁADY LOGICZNE

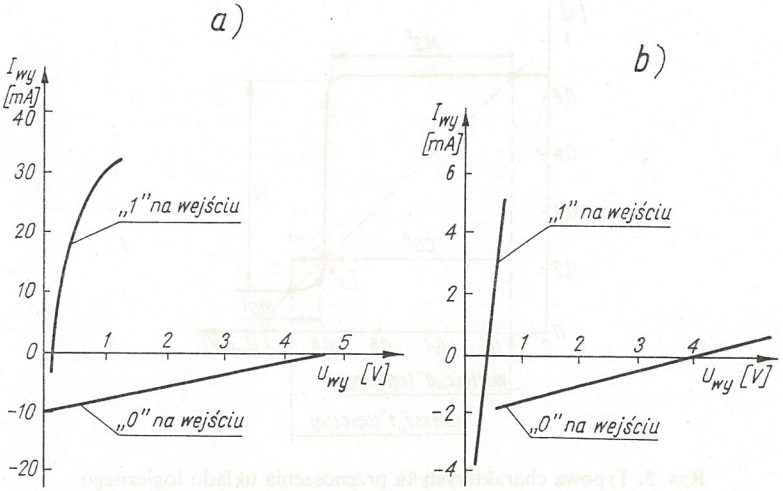
2.1. Parametry stałoprądowe (statyczne)

Parametry stałoprądowe charakteryzujące podstawowe układy logiczne określone są na podstawie charakterystyk układowych, które wyznaczone są przez pomiary napięć i prądów na zaciskach wyjściowych i wejściowych układu logicznego. Niżej podane są podstawowe charakterystyki i parametry stałoprądowe układów logicznych na przykładzie układów DCTL i DTL.

Typowe charakterystyki wejściowe układów DCTL i DTL pokazane są na rys. 2. Typowe charakterystyki wyjściowe układów DCTL i DTL pokazane są na rys. 3. Typowe charakterystyki przenoszenia będące zależnością napięcia wyjściowego od napięcia wejściowego dla układów DCTL i DTL pokazane są na rys. 4.

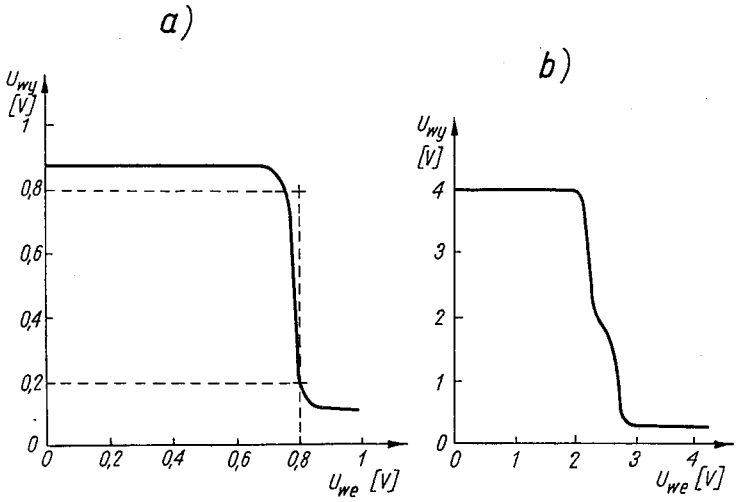


Rys. 2. Typowe charakterystyki wejściowe układów
a) DCTL, b) DTL

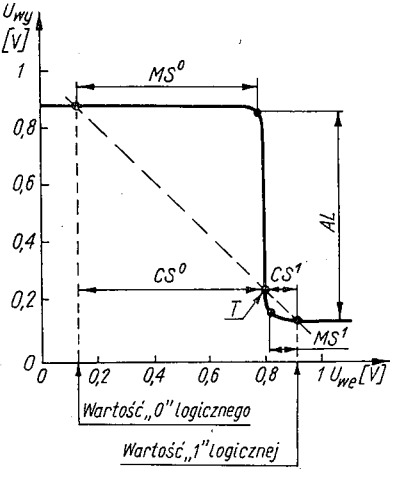


Rys. 3. Typowe charakterystyki wyjściowe układów
a) DCTL, b) DTL

Wsteczne charakterystyki przenoszenia będące zależnością napięcia wejściowego od napięcia wyjściowego nie są zazwyczaj podawane i mierzone, gdyż zależność ta jest znikoma i nie wnosi informacji o zachowaniu się układu. Spośród wymienionych charakterystyk najbardziej reprezentatywną jest charakterystyka przenoszenia $U_{wy} = f(U_{we})$, gdyż na jej podstawie łatwo można określić punkty pracy danego układu logicznego oraz wyznaczyć szereg istotnych parametrów.



Rys. 4. Typowe charakterystyki przenoszenia układów
a) DCTL, b) DTL



Rys. 5. Typowa charakterystyka przenoszenia układu logicznego

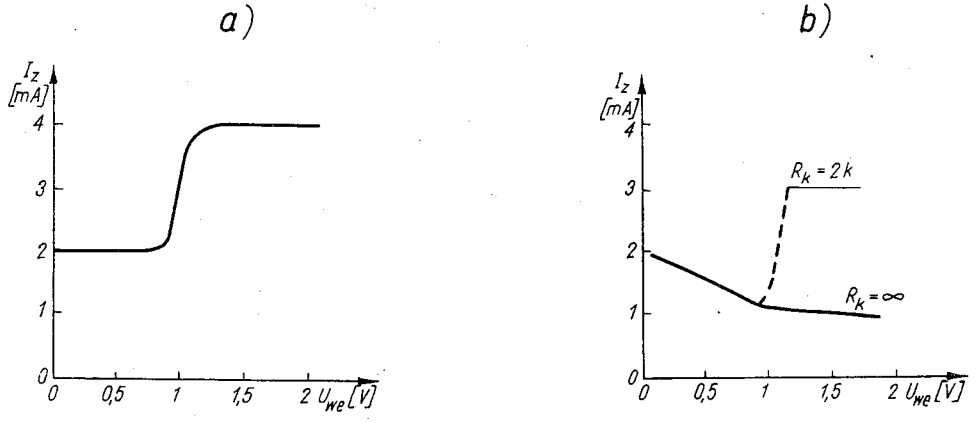
Sposób wyznaczania punktów pracy na podstawie charakterystyki przenoszenia $U_{wy} = f(U_{we})$ pokazany jest na rys. 5. Ponieważ w układzie pomiarowym układ logiczny jest obustronnie obciążony identycznymi układami, wobec tego napięcia odpowiadające jedynkom logicznym na wejściu i wyjściu mierzonego układu i napięcia odpowiadające zerom logicznym na wejściu i wyjściu muszą być identyczne. Punkty „1" i „0" na charakterystykach przenoszenia określają odpowiednio punkty pracy odpowiadające stanom „jedynki" logicznej i „zera" logicznego na wyjściu układu. Przecięcie linii łączącej punkty pracy z charakterystyką przenoszenia określa punkt progowy T układu.

Wartość różnicy napięć wejściowych odpowiadających punktowi pracy „0" i punktowi progowemu T określa czułość szumową CS^0 (zakłóceniową) dla stanu „zera" logicznego na wejściu („jedynki" logicznej na wyjściu).

Pojawienie się na wejściu układu ujemnego napięcia zakłócającego o amplitudzie większej od CS^0 spowoduje niepożądane przerzucenie stanu układu z „jedynki" logicznej na wyjściu na „zero" logiczne. Podobnie, różnica napięć wejściowych odpowiadających punktowi progowemu T i punktowi pracy „1" określa czułość szumową CS^1 dla stanu „jedynki" logicznej na wejściu („zera" logicznego na wyjściu). Różnica poziomów napięć wyjściowych odpowiadających „jedynce" logicznej i „zeru" logicznemu na wyjściu nazywana jest amplitudą logiczną A_l.

Na charakterystyce przenoszenia (rys. 5) w punktach A i B wzmocnienie układu logicznego równe jest jedności. Wartość różnicy napięć wejściowych odpowiadających punktowi pracy „0" i punktowi A określa margines szumów MS^0 dla stanu „zera" logicznego na wejściu („jedynki" logicznej na wyjściu); podobnie, różnica napięć wejściowych odpowiadających punktowi pracy „1" i punktowi B określa margines szumów MS^1 dla stanu „jedynki" logicznej na wejściu. Wielkości te zaznaczone są na rys. 5.

Istotnym parametrem układów logicznych jest obciążalność (Fan-Out), nazywana też wzmocnieniem logicznym. Wielkość ta określa liczbę identycznych układów, jakie mogą być dołączone na wyjściu rozpatrywanego układu, przy zapewnieniu jego poprawnej pracy. Obciążenie układu większą liczbą współdziałających układów niż wynosi maksymalna obciążalność nie gwarantuje poprawnej pracy. Poza wymienionymi, interesującą wielkością podawaną przez producentów scalonych układów logicznych jest stały prąd zasilania I_z pobierany przez układ ze źródła zasilania. Często podaje się też charakterystyki prądu



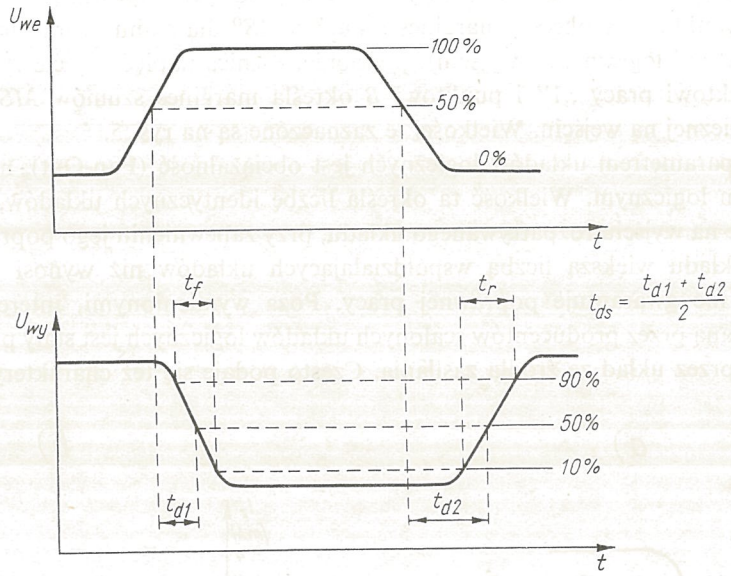
Rys. 6. Typowe charakterystyki $I_z = f(U_{we})$ dla układów
a) DCTL, b) DTL

I_z w funkcji napięcia wejściowego sterującego rozpatrywany układ logiczny. Typowe charakterystyki $I_z = f(U_{we})$ dla układów logicznych DCTL i DTL pokazane są na rys. 6.

Pomiary wymienionych wyżej parametrów i charakterystyk dokonywane są dla różnych temperatur i różnych warunków zasilania oraz obciążenia badanych układów.

2.2. Parametry impulsowe (dynamiczne)

Właściwości impulsowe (dynamiczne) określają szybkość działania układów logicznych i stany przejściowe w czasie przełączania. Wyróżnia się pięć podstawowych parametrów impulsowych związanych z charakterystyką przejściową będącą zależnością napięcia wyjściowego od czasu $U_{wy} = f(t)$. Charakterystyka przejściowa jest odpowiedzią układu na pobudzanie impulsem o zadanym kształcie. Parametrami tymi są: czas opadania impulsu wyjściowego t_f, czas narastania impulsu wyjściowego t_r, czas opóźnienia czoła impulsu wyjściowego t_{d1}, czas opóźnienia końca impulsu wyjściowego t_{d2}, średni czas opóźnienia impulsu wyjściowego t_{ds}. Charakterystyka przejściowa, na której nanoszone są wymienione czasowe parametry, pokazana jest na rys. 7.



Rys. 7. Charakterystyka przenoszenia scalonych układów logicznych

Dla układów logicznych odwracających fazę napięcia wyjściowego względem napięcia wejściowego opóźnienie czoła impulsu t_{d1} jest definiowane jako różnica pomiędzy czasem, przy którym impuls wejściowy osiągnie 50% swojej końcowej wartości i czasem, w którym impuls wyjściowy zmaleje do połowy wartości amplitudy logicznej, co pokazane jest na rys. 7. Podobnie definiowane jest opóźnienie końca impulsu t_{d2}. Średni czas opóźnienia t_d jest definiowany jako średnia arytmetyczna czasów t_{d1}, t_{d2}, tj. $t_{ds} = \frac{t_{d1} + t_{d2}}{2}$.

Czasy narastania t_r i opadania t_f są związane z czasami odpowiadającymi napięciom o 10% i 90% wartościach amplitudy impulsu wyjściowego. W przypadku pokazanym na rys. 7, odpowiadającemu układowi odwracającemu fazę, czas opadania t_f związany jest z czołem impulsu wyjściowego (przejście ze stanu „1" do stanu „0" na wyjściu), a czas narastania t_r związany jest z końcem impulsu wyjściowego (przejście ze stanu „0" do stanu „1" na wyjściu).

Poza wymienionymi parametrami dynamicznymi niektórzy producenci scalonych układów logicznych podają w katalogach charakterystyki będące zależnościami średniego czasu opóźnienia t_{ds} w funkcji pojemności obciążenia dołączonej na wyjściu badanego układu. Parametry dynamiczne mierzone są dla różnych temperatur, różnych napięć zasilających i warunków pracy. Warunki pomiarów podawane są w katalogach w formie odpowiednich wykresów.

3. RODZAJE POMIARÓW STOSOWANYCH W BADANIACH LOGICZNYCH UKŁADÓW SCALONYCH

W zależności od zastosowanych pobudzeń, badania układów scalonych można podzielić na trzy rodzaje:

1) badania przebiegami sinusoidalnymi,
2) badania statyczne (przebiegami stałoprądowymi),
3) badania dynamiczne (przebiegami impulsowymi).

Dwa pierwsze rodzaje badań stosuje się dla liniowych, zaś dwa ostatnie dla logicznych układów scalonych.

W ramach badań dynamicznych i statycznych można wyodrębnić dla logicznych układów scalonych następujące rodzaje badań:

— badania parametrów funkcjonalnych, które polegają na sprawdzeniu wartości parametrów zaciskowych (tablica 1) dla różnych stanów logicznych badanego układu,
— badanie odporności na zakłócenia polegające na określeniu wartości amplitudy (napięcia stałego) i czasu trwania impulsu zakłócającego, który jest w stanie zmienić stan układu logicznego na stan przeciwny, jaki wynika z kombinacji sygnałów logicznych zadanych na wejście układu i funkcji logicznej jaką realizuje układ logiczny,
— badanie porównawcze polegające na porównaniu parametrów badanego układu z parametrami wzorcowego układu logicznego; pomiar ten wskazuje tylko czy badany układ spełnia założone wymagania,
— badanie symptomatyczne polegające na wyborze i badaniu parametrów, na podstawie których można wnioskować o niezawodności układu, jakości wykonania i określić stanowiska pracy, na których powstają błędy technologiczno-produkcyjne.

Urządzenia pomiarowe, które pozwalałyby na badanie parametrów zarówno statycznych jak i dynamicznych powinny posiadać możliwości realizowania na wejściu układu logicznego określonych funkcji napięć i prądów, mierzenia tych funkcji na wyjściu układu oraz porównywania ich z funkcjami wejściowymi. Urządzenia automatyczne wymagają dodatkowych podzespołów pozwalających na wykonywanie pomiarów w kolejności określonej przez wprowadzony do urządzenia program badań.

4. UKŁADY DO POMIARU DYNAMICZNYCH PARAMETRÓW LOGICZNYCH UKŁADÓW SCALONYCH

Pomiar parametrów dynamicznych układów scalonych jest bardziej skomplikowany i wymaga wyższej klasy przyrządów pomiarowych niż pomiar parametrów statycznych. Występuje tu duża zależność pomiaru od warunków, w jakich pracuje badany układ lo-

Tablica 1

Podstawowe parametry charakteryzujące logiczne układy scalone

Parametry stałoprądowe	Parametry dynamiczne
Charakterystyka wejściowa $I_{we} = f(U_{we})$	Amplituda impulsów
Charakterystyka wyjściowa $I_{wy} = f(U_{wy})$ dla „1" logicznej i „0" logicznego na wejściu	Charakterystyka przejściowa: $U_{wy} = f(t)$
Charakterystyka przenoszenia $U_{wy} = f(U_{we})$	Czas narastania impulsu wyjściowego: t_r
Napięcie wejściowe dla „1" logicznej: U_{IH}	Czas opadania impulsu wyjściowego: t_f
Napięcie wejściowe dla „0" logicznego: U_{IL}	Czas opóźnienia końca impulsu wyjściowego: t_{d2}
Napięcie wyjściowe dla „1" logicznej: U_{OH}	Czas opóźnienia czoła impulsu wyjściowego: t_{d1}
Napięcie wyjściowe dla „0" logicznego: U_{OL}	Średni czas opóźnienia impulsu wyjściowego: t_{ds}
Napięcie przebicia wstecznego	Średni czas opóźnienia impulsu w funkcji pojemności obciążenia
Napięcie zasilania	Dynamiczna czułość szumowa dla „1" logicznej na wejściu: CS^1
Pobór mocy	Dynamiczna czułość szumowa dla „0" logicznego na wejściu: CS^0
Wzmocnienie logiczne (obciążalność)	
Prąd wejściowy dla „1" logicznej: I_{IH}	
Prąd wejściowy dla „0" logicznego: I_{IL}	
Prąd wyjściowy dla „1" logicznej: I_{OH}	
Prąd wyjściowy dla „0" logicznego: I_{OL}	
Prąd zasilania w funkcji napięcia wejściowego	
Statyczna czułość szumowa dla „1" logicznej na wejściu*)	
Statyczna czułość szumowa dla „0" logicznego na wejściu	
Statyczny margines szumów dla „1" logicznej na wejściu	
Statyczny margines szumów dla „0" logicznego na wejściu	
Amplituda logiczna	
Współczynnik jakości = pobór mocy × średni czas opóźnienia impulsu wyjściowego	

*) Odporność na szumy scalonego układu logicznego charakteryzuje wielkość energii przebiegu zakłócającego, która jest konieczna do zmiany stanu logicznego bramki. W badaniach dynamicznych mierzy się wielkość amplitudy i czas trwania impulsu prostokątnego: w badaniach statycznych wielkość poziomu wejściowego.

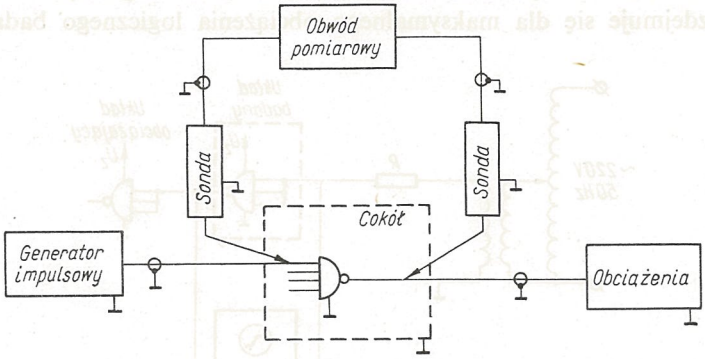
giczny. Dlatego też, często dokonuje się pomiarów tego samego parametru dla różnych, zwykle dwóch (maksymalnej i minimalnej) wartości charakteryzujących warunki pomiaru. Przykładowo, pomiaru średniego czasu opóźnienia dokonuje się dla maksymalnej i minimalnej wartości: 1) temperatury otoczenia, 2) obciążenia, 3) napięcia zasilania oraz dla kilku wybranych pojemności obciążenia.

Zasadę pomiaru parametrów dynamicznych wyjaśnia rys. 8.

Układ pomiarowy powinien być tak zaprojektowany, aby czas wzrostu i opadania impulsów pobudzających był dużo mniejszy od odpowiednich czasów badanego logicznego układu scalonego. Jako obciążenia bardzo często wykorzystuje się układ logiczny z tej samej rodziny co układ badany, lub też układ symulujący zmienną impedancję dla różnych stanów logicznych na wyjściu badanego układu. Generator impulsów powinien posiadać

regulowane: amplitudę impulsów, poziom napięcia stałego, czas wzrostu i opadania czoła impulsu przy ustalonej częstotliwości i szerokości impulsów.

W obwodzie pomiarowym zwykle używa się oscyloskopu stroboskopowego umożliwiającego obserwację bardzo szybko narastających impulsów, lub też konwertera „czas-amplituda" umożliwiającego odczyt czasów opóźnień.



Rys. 8. Układ blokowy do pomiaru parametrów dynamicznych scalonych układów logicznych

Drugi sposób jest wykorzystywany w systemach kontroli automatycznej układów scalonych. Badany logiczny układ scalony podczas pomiaru umieszcza się w cokole głowicy pomiarowej, której rozwiązanie konstrukcyjne zapewnia minimalne wartości elementów pasożytniczych, mających decydujący wpływ na dokładność pomiaru. Pojemności wprowadzone przez połączenie głowicy powinny być nie większe niż określone przez normę pomiarową, a połączenia cokołu powinny zapewniać dopasowanie elektryczne do toru pomiarowego. Przy konstrukcji należy przewidzieć możliwości adaptacji cokołu głowicy pomiarowej dla różnych obudów układów scalonych.

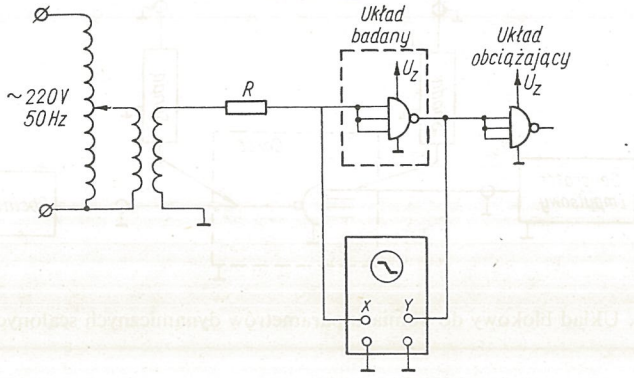
Impedancja wejściowa sond pomiarowych zależy od rodzaju badanego układu logicznego. Niektóre z nich wymagają dopasowania do impedancji 50, 60, 75 Ω, inne natomiast wysokoomowych wejść. Ważne jest, aby sondy posiadały zerowy poziom napięcia odniesienia i zerowy dryft tego poziomu. Uzyskuje się to zwykle drogą kompensacji napięć.

Cały system pomiarowy, począwszy od zacisków wyjściowych generatora impulsowego poprzez zwarte wejście z wyjściem cokołu głowicy pomiarowej aż do wejścia obwodu pomiarowego, powinien posiadać czas wzrostu impulsów krótszy niż badany logiczny układ scalony. Ponadto system pomiarowy przeznaczony do pomiarów dynamicznych powinien być tak zaprojektowany, aby nie występowały zakłócenia stanów badanej bramki powodowane przez szumy i zakłócenia systemu pomiarowego.

Trudności i problemy związane z właściwym zaprojektowaniem systemu badającego układy scalone zwielokratniają się, gdy zamiast jednego układu logicznego testuje się zespół składający się z kilku a nawet kilkudziesięciu układów scalonych. Systemy takie współpracują z reguły z maszyną matematyczną i są w stanie przeprowadzać jednoczesne, przy pomocy sprzężonych ze sobą głowic pomiarowych, badania kilku układów scalonych lub zespołów elektronicznych zbudowanych z wielu układów scalonych.

5. UKŁADY DO POMIARU STATYCZNYCH PARAMETRÓW LOGICZNYCH UKŁADÓW SCALONYCH

Na rys. 9 przedstawiono układ do określania charakterystyki przenoszenia $U_{wy} = f(U_{we})$. Pozwala on stwierdzić, czy badany układ logiczny będzie pracować prawidłowo w określonym zakresie tolerancji, tj. czy są właściwe napięcia wyjściowe dla zadanych napięć wejściowych i jak duży jest margines szumów dla dwóch stanów logicznych. Charakterystyki przenoszenia zdejmuje się dla maksymalnego obciążenia logicznego badanego układu.



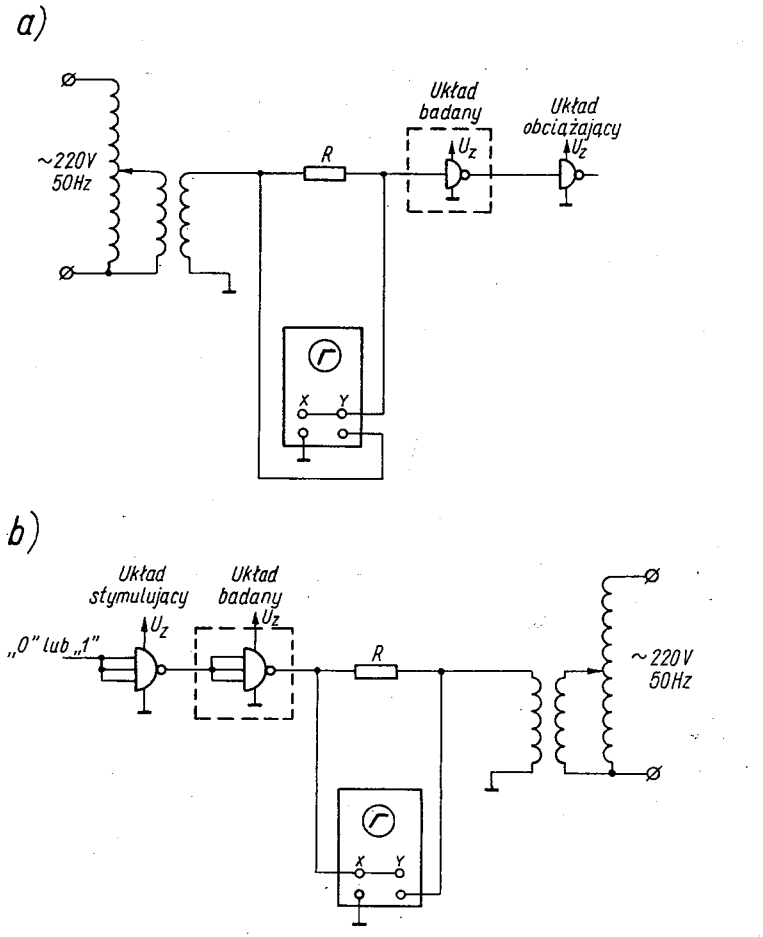
Rys. 9. Układ do zdejmowania charakterystyki przenoszenia $U_{wy} = f(U_{we})$ scalonych układów logicznych

Na rys. 10 przedstawiono układy do zdejmowania charakterystyk: wejściowej $I_{we} = f(U_{we})$ i wyjściowej $I_{wy} = f(U_{wy})$. Znajomość ich przydatna jest do określania amplitud fali odbitej (co jest niezmiernie ważne przy projektowaniu długich połączeń między bramkami) oraz prądów wejściowych i wyjściowych dla obu stanów logicznych.

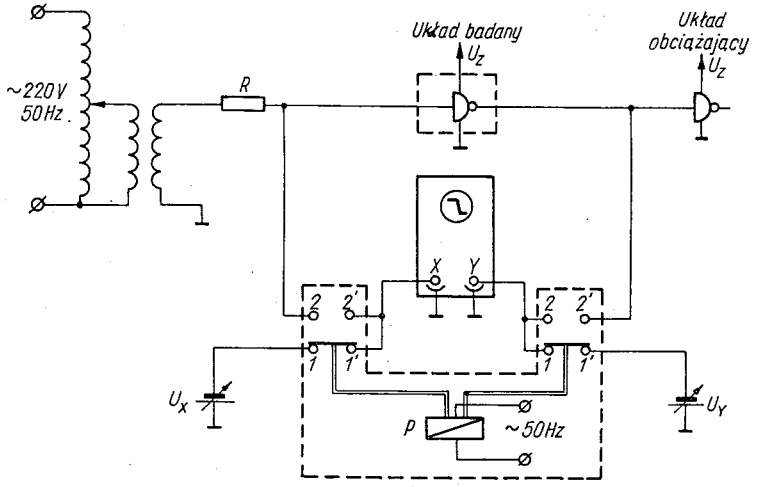
Jak pokazano na rysunkach, charakterystyki badanego układu logicznego są „rozciągane" na osi odciętych „X" oscyloskopu z częstotliwością 50 Hz. Obniżający napięcie transformator pozwala dokładnie ustalić żądane napięcie na wejściu układu logicznego, a także ochrania obwód badanego układu scalonego przed przypadkowym, nieprzewidzianym w trakcie pomiaru podwyższeniem napięcia przez autotransformator. W układzie pomiarowym może pracować dowolny oscyloskop, jednak w celu dokładniejszego odczytu przebiegu charakterystyki najwygodniej jest stosować oscyloskop ze stabilnym wzmacniaczem pionowego i poziomego odczytu.

W układzie pomiarowym pokazanym na rys. 11 przedstawiono możliwości ustalania poziomu odniesienia. Dla połowy okresu przebiegu pobudzającego styki przekaźnika P są w położeniu *1* i wówczas na wzmacniacze napięcia pionowego i poziomego odchylania podawane są stałe znane napięcia odniesienia U_x i U_y; w drugiej połowie cyklu pomiarowego styki przekaźnika P są w położeniu *2* i w tym czasie układ zachowuje się podobnie jak układ przedstawiony na rys. 9. Układ ten pozwala w prosty sposób odczytywać napięcia na charakterystyce przez porównanie punktów charakterystyki z punktem odniesienia.

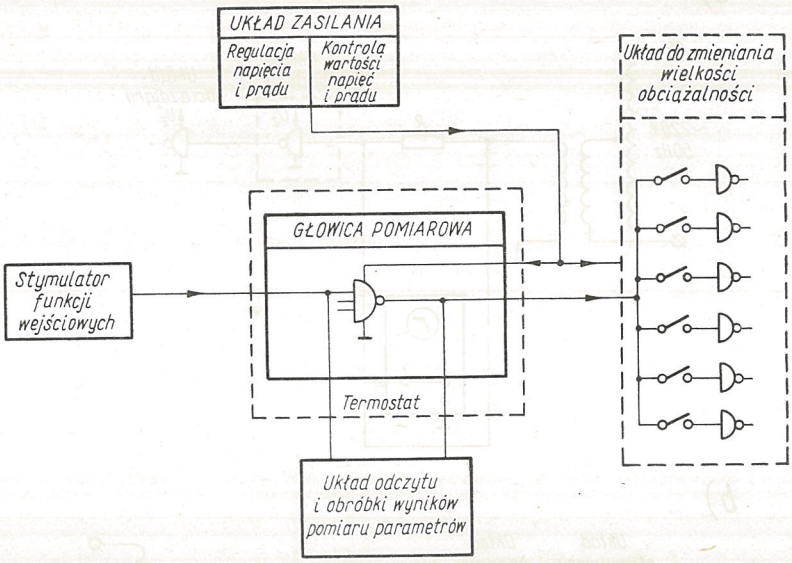
Nie wszystkie parametry można jednak odczytać z charakterystyki wejściowej, wyjściowej i przenoszenia, dlatego też dla pełnej znajomości parametrów bramki zdejmuje się ponadto następujące charakterystyki:



Rys. 10. Układ pomiarowy do zdejmowania charakterystyki scalonych układów logicznych
a) wejściowej, b) wyjściowej



Rys. 11. Zmodyfikowany układ do zdejmowania charakterystyki przenoszenia scalonych układów logicznych



Rys. 12. Układ blokowy urządzenia do pomiaru parametrów statycznych z uwzględnieniem zależności energetyczno-klimatycznych scalonych układów logicznych

Tablica 2

Funkcje programowe wykorzystywane w różnych zespołach urządzenia badającego układy scalone

Zespół stymulacji stałoprądowej	Zespół stymulacji dynamicznej	Zespół pomiarowy	Zespół przełączający
Napięcie Prąd Ograniczenia prądowe Polaryzacja Kolejność stosowania pobudzeń Czułość	Amplituda Napięcie (prąd) składowej stałej Czas wznoszenia Czas opadania Czas trwania impulsu Czas opóźnienia Częstotliwości powtarzania	a) *pomiarów stało-prądowych* — rodzaie pomiaru — czas pomiaru — zakres pomiaru — polaryzacja b) *pomiarów dynamicznych* — rodzaj pomiaru — zakres pomiaru — polaryzacja — punkty odniesienia — wybór rodzaju próbkowania — wybór sond pomiarowych c) *bloku odczytu* — granice max. min. — klasyfikacja — sposób odczytu	*Warunki programowane dla*: — układów pobudzających — układów wybierających tor pomiarowy — przełączników — sond dynamicznych — zespołów odczytu dynamicznego — zespołów odczytu statycznego — uziemienia

1) prąd zasilania w funkcji napięcia wejściowego (określenie co najmniej dwóch punktów maksymalnej i minimalnej wartości prądu zasilającego),

2) przebieg charakterystyki wejściowej, wyjściowej i przenoszenia przy ustalonych wartościach napięcia zasilania, temperatury i obciążalności (rys. 12).

Automatyczne układy pomiarowe zdejmują podane wyżej charakterystyki w wybranych punktach przy założonych wartościach pozostałych parametrów. Liczba sprawdzanych punktów pomiarowych jest bardzo duża i zależy od wnikliwości badania układu scalonego.

Układy takie zawierają cztery podstawowe zespoły funkcjonalne, które realizować muszą funkcje programowe podane w tablicy 2.

6. ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiono definicje parametrów i układy pomiarowe pozwalające na określenie podstawowych parametrów charakteryzujących logiczne układy scalone. Prace nad szczegółowymi rozwiązaniami układów pomiarowych, a w szczególności dla monolitycznych układów scalonych z rodziny TTL, są aktualnie prowadzone w Instytucie Technologii Elektronicznej Politechniki Gdańskiej. Przewiduje się opracowanie urządzeń pomiarowych do wyznaczania podstawowych parametrów stałoprądowych, szumowych, obciążalnościowych i współczynnika jakości z możliwością pomiaru w podwyższonych temperaturach.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. M. Białko, Układy mikroelektroniczne, WKiŁ, W-wa 1969.
2. D. K. Lynn i inni, Analysis and Design of Integrated Circuit, McGraw–Hill Book Co, New York 1967.
3. J. Narud, Characterising Circuits, Electronic Design, Sept. 1969.
4. J. Narud, S. S. Meyer, Characterisation of Integrated Logic Circuits, PIEE, Dec. 1964.
5. Schwarc, Integrated Circuit Technology, McGraw–Hill Book Co, New York 1967.
6. Dokład i projekty rekomiendacii, Sekcja Nr 4 KREP Nr 63-4/320/70, Moskwa, sierpień 1970.

M. BIAŁKO, L. SPIRALSKI, K. SKIBIŃSKI

MEASUREMENT OF BASIC INTEGRATED LOGIC CIRCUIT PARAMETERS

Summary

In the work definitions of basic parameters of logic circuits and ways to measure them are presented. Block-diagrams for certain measurement equipment for integrated logic circuits are given as well.

M. BIAŁKO, L. SPIRALSKI, K. SKIBIŃSKI

PARAMETERBEMESSUNGEN INTEGRIERTER LOGISCHER GRUNDSYSTEME

Zusammenfassung

Im Aufsatz wurden Definition von Grundparametern logischer Systeme sowie deren Bemessungsmethoden dargestellt. Es wurden auch Blockschemas mancher zur Bemessung von Eigenschaften integrierter logischer Systeme angewandten Geräte angeführt.

М. БЯЛКО, Л. СПИРАЛЬСКИ, К. СКИБИНЬСКИ

ИЗМЕРЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ

Р е з ю м е

В статье представлено определения фундаментальных параметров логических схем, а также способы их измерения. Приведены также блок-схемы некоторых устройств для измерения интегральных логических схем.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1972, 18, z. 3, ss. 483—494

621.372.6

Analiza możliwości realizacji cyrkulatorów n-ramiennych

MAREK KITLIŃSKI (SOPOT)

Instytut Telekomunikacji Politechniki Gdańskiej
Zakład Techniki Mikrofalowej

Otrzymano 16.9.1971

W artykule omówiono wyniki teoretycznej analizy możliwości realizacji n-ramiennych cyrkulatorów ferrytowych. Sformułowano macierz impedancji n-ramiennego rozgałęzienia symetrycznych linii paskowych z dwoma krążkami ferrytowymi umieszczonymi w miejscu rozgałęzienia oraz uzasadniono wprowadzenie żyratorowego układu zastępczego. Wykazano, że realizacja cyrkulatora z elementami o stałych skupionych w postaci rozgałęzienia symetrycznych linii paskowych jest możliwa jedynie w przypadku cyrkulatorów trójramiennych.

1. WSTĘP

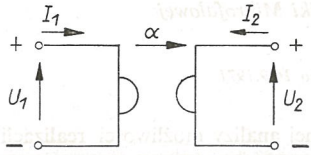
W zakresie fal metrowych możliwa jest realizacja cyrkulatorów ferrytowych jedynie na liniach paskowych. Można wśród nich wyróżnić cyrkulatory realizowane w oparciu o elementy o stałych skupionych, które znalazły szczególnie szerokie zastosowanie ze względu na małe średnice krążków ferrytowych (rzędu 20 mm), możliwość zmiany środkowej częstotliwości pracy oraz prosty sposób projektowania. Układy tego typu zostały dotychczas wykonane dla przypadku trójwrotnika. Istnieje problem realizacji cyrkulatorów o większej liczbie ramion przy wykorzystaniu tej samej technologii. Cyrkulatory wieloramienne budowane w oparciu o elementy o stałych skupionych mogą znaleźć szerokie zastosowanie we współczesnych wielokanałowych systemach radiokomunikacyjnych pracujących w paśmie VHF i UHF.

2. MACIERZ IMPEDANCJI PASYWNEGO NIEODWRACALNEGO UKŁADU N-OCZKOWEGO

Rozpatrzmy dowolny, zbudowany z elementów pasywnych, układ n-oczkowy i załóżmy, że umieszczono w nim pewną liczbę żyratorów o impedancjach α_{ik}, które włączono w ten sposób, że wrota wejściowe każdego z nich znajdują się w oczku i-tym, a wyjściowe w oczku k-tym ($i, k = 1, 2, \ldots, n$). Impedancje własne oczek oznaczonych indeksami k i i nie ulegną wtedy zmianie, gdyż elementy z_{11} i z_{22} macierzy definiującej żyrator (rys. 1) są równe zero. Wystąpi natomiast sprzężenie pomiędzy oczkiem k-tym i i-tym, co będzie równoważne z faktem, że elementy macierzy występujące na pozycji „ik" będą zawierać składnik $-\alpha_{ik}$,

a elementy występujące na pozycji „*ki*" składnik $+\alpha_{ik}$. Macierz impedancji zbudowanego w ten sposób układu będzie miała formę podaną zależnością (1):

$$[Z] = \begin{bmatrix} z_{11} & (z_{12}-\alpha_{12}) & (z_{13}-\alpha_{13}) & \dots & (z_{1n}-\alpha_{1n}) \\ (z_{12}+\alpha_{12}) & z_{22} & (z_{23}-\alpha_{23}) & \dots & (z_{2n}-\alpha_{2n}) \\ (z_{13}+\alpha_{13}) & (z_{23}+\alpha_{23}) & z_{33} & \dots & (z_{3n}-\alpha_{3n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (z_{1n}+\alpha_{1n}) & (z_{2n}+\alpha_{2n}) & (z_{3n}+\alpha_{3n}) & \dots & z_{nn} \end{bmatrix} \tag{1}$$



$$[Z] = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

Rys. 1. Definicja żyratora

Dowolny, nie leżący na głównej przekątnej element macierzy (1) jest sumą konwencjonalnej bilateralnej impedancji $z_{ik} = z_{ki}$ oraz impedancji żyratora $\alpha_{ik} = -\alpha_{ki}$. Można więc macierz (1) przedstawić w postaci sumy dwóch macierzy:

$$[Z] = \begin{bmatrix} z_{11} & \dots & z_{1n} \\ \vdots & & \\ z_{1n} & & z_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_{12} & -\alpha_{13} & \dots & -\alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & 0 & -\alpha_{23} & \dots & -\alpha_{2n} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & 0 & \dots & -\alpha_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \alpha_{3n} & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

lub krócej:

$$[Z] = [Z_R] + [Z_A] \ . \tag{2b}$$

Macierz $[Z_R]$ jest symetryczna i odpowiada jedynie odwracalnym elementom układu, a współczynniki w niej występujące mają na ogół charakter liczb zespolonych. Macierz $[Z_A] = -[Z_A]^T$ jest macierzą antysymetryczną o współczynnikach rzeczywistych i odpowiada niewzajemnym elementom układu. Realizacja macierzy $[Z_A]$ przy pomocy układu zawierającego żyratory może być przeprowadzona w różny sposób. Z kształtu macierzy $[Z_A]$ podanej zależnością (2) wynika, że liczba żyratorów potrzebna dla jej zrealizowania równa jest połowie liczby elementów nie znajdujących się na głównej przekątnej [1], tzn.:

$$L = \frac{1}{2} n(n-1). \tag{3}$$

Liczba żyratorów określona związkiem (3) nie jest wartością minimalną. Dla znalezienia L_{min} macierz $[Z_A]$ można przetransformować do postaci diagonalnej $[\bar{Z}_A]$ zgodnie z zależnością (4):

$$[\bar{Z}_A] = [D]^T \cdot [Z_A] \cdot [D], \tag{4}$$

gdzie:

$$[\overline{Z}_A] = \text{diag}\,[Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_l, 0, 0, \ldots, 0], \tag{5}$$

$$Z_j = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_j \\ -\alpha_j & 0 \end{bmatrix}; \quad j = 1, 2, \ldots l, \tag{6}$$

$[D]$ — macierz wprowadzona w procesie diagonalizacji.

Macierz $[\overline{Z}_A]$ jest macierzą skośnie symetryczną złożoną z diagonalnych bloków, które są skośnie symetrycznymi submacierzami Z_j (6). Każda macierz Z_j przedstawia żyrator o impedancji α_j — stąd $[\overline{Z}_A]$ reprezentuje l dwuwrotnikowych żyratorów oraz $n-l$ wrot zwartych. Wyznacznik macierzy $[\overline{Z}_A]$ (7) jest różny od zera dla r

$$\det[\overline{Z}_A] = \det Z_1 \cdot \det Z_2 \cdot \ldots \cdot \det Z_l \tag{7}$$

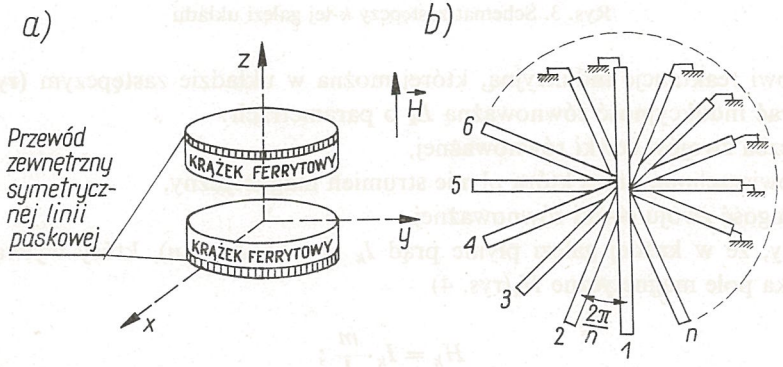
pierwszych wierszy i kolumn macierzy $[\overline{Z}_A]$, przy czym

$$r = 2l \tag{8}$$

i oznacza rząd macierzy $[\overline{Z}_A]$. Z (5) i (8) wynika, że rząd macierzy impedancji musi być parzysty i że minimalna liczba żyratorów wystarczająca dla zrealizowania macierzy $[Z_A]$ równa jest połowie rzędu tej macierzy [1].

3. MACIERZ IMPEDANCJI N-RAMIENNEGO ROZGAŁĘZIENIA PASKOWEGO UMIESZCZONEGO W OŚRODKU FERRYTOWYM

Rozpatrzmy dwa krążki ferrytowe, pomiędzy którymi umieszczono n-ramienne rozgałęzienie paskowe. Układ taki umieszczono w zewnętrznym stałym polu magnetycznym $\vec{H}$ o kierunku zgodnym z kierunkiem osi Z (prostopadle do płaszczyzny krążków ferrytowych — rys. 2). W ośrodku ferrytowym wektor indukcji magnetycznej $\vec{B}$ związany jest



Rys. 2. a) usytuowanie krążków ferrytowych w układzie współrzędnych oraz kierunek zewnętrznego stałego pola magnetycznego $\vec{H}$, b) widok z góry konstrukcji paskowej umieszczonej pomiędzy krążkami ferrytowymi (krzyżujące się przewody wewnętrzne symetrycznych linii paskowych są wzajemnie od siebie odizolowane)

z wektorem natężenia pola magnetycznego $\vec{H}$ poprzez tensor przenikalności magnetycznej (9):

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu & -j\mu_a & 0 \\ j\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Składowe μ i μ_a tensora przenikalności magnetycznej zdefiniowane są zależnościami (10):

$$\mu = 1 + \frac{p \cdot \sigma}{\sigma^2 - 1}, \quad \mu_a = \frac{p}{\sigma^2 - 1}, \tag{10}$$

gdzie:

$$p = \frac{|\gamma| \cdot M_s}{\omega \cdot \mu_0}, \quad \sigma = \frac{|\gamma| \cdot H_i}{\omega};$$

$\gamma = 2{,}21 \frac{\text{rd}}{\text{sek}} \cdot \frac{\text{A}}{\text{m}}$ — stosunek żyromagnetyczny,

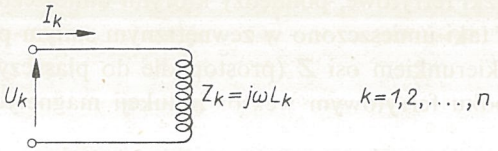
H_i — natężenie wewnętrznego stałego pola magnetycznego w materiale ferrytowym,

M_s — magnetyzacja nasycenia ferrytu,

μ_0 — przenikalność magnetyczna przestrzeni swobodnej,

ω — częstotliwość pola zmiennego.

Pomiędzy krążkami ferrytowymi znajduje się n zwartych na końcu linii paskowych przesuniętych względem siebie o kąt $\frac{2\pi}{n}$ w płaszczyźnie XY. Każda ze zwartych linii pasko-



Rys. 3. Schemat zastępczy k-tej gałęzi układu

wych stanowi reaktancję indukcyjną, której można w układzie zastępczym (rys. 3) przyporządkować indukcyjność równoważną L_k o parametrach:

m — liczba zwojów cewki równoważnej,

A — powierzchnia, przez którą płynie strumień magnetyczny,

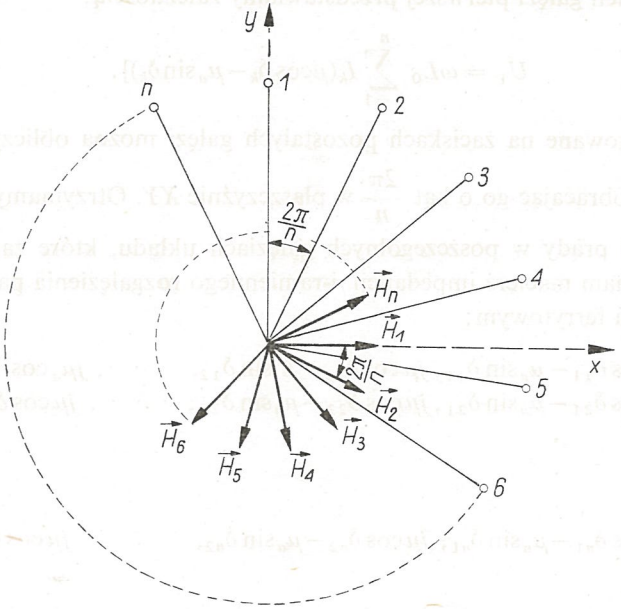
l — długość zwoju cewki równoważnej.

Załóżmy, że w każdej gałęzi płynie prąd I_k ($k = 1, 2, \ldots, n$), który wytwarza wokół przewodnika pole magnetyczne H_k(rys. 4)

$$H_k = I_k \cdot \frac{m}{l}; \tag{11}$$

wtedy na zaciskach wejściowych każdej gałęzi indukowane jest napięcie U_k:

$$U_k = j\omega m A \cdot B_k. \tag{12}$$



Rys. 4. Kierunki pól H_k wytwarzanych wokół linii paskowych (na płaszczyźnie XY)

Napięcie indukowane na zaciskach gałęzi pierwszej U_1:

$$U_1 = j\omega mAB_1 = j\omega mAB_x. \tag{13}$$

Składowa B_x wektora indukcji magnetycznej na podstawie zależności (9) wynosi:

$$B_x = \mu_0(\mu H_x - \mu_a H_y), \quad H_z \approx 0. \tag{14}$$

Składowe H_x i H_y można wyznaczyć z rys. 4:

$$H_x = \sum_{k=1}^{n} H_k \cos(k-1)\frac{2\pi}{n}, \tag{15}$$

$$H_y = \sum_{k=1}^{n} -H_k \sin(k-1)\frac{2\pi}{n}. \tag{16}$$

Stąd otrzymujemy:

$$B_x = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} H_k(\mu\cos\delta_k + j\mu_a \sin\delta_k), \tag{17}$$

gdzie:

$$\delta_k = (k-1)\frac{2\pi}{n}; \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{18}$$

Uwzględniając związki (11) i (13) oraz zakładając:

$$\frac{m^2 A}{l}\cdot\mu_0 = L_0 = \text{const}, \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{19}$$

napięcie na zaciskach gałęzi pierwszej przedstawiamy zależnością:

$$U_1 = \omega L_0 \sum_{k=1}^{n} I_k(\mu\cos\delta_k - \mu_a \sin\delta_k)]. \tag{20}$$

Napięcia indukowane na zaciskach pozostałych gałęzi można obliczyć wykorzystując symetrię układu i obracając go o kąt $\frac{2\pi}{n}$ w płaszczyźnie XY. Otrzymamy wtedy równanie wiążące napięcia i prądy w poszczególnych gałęziach układu, które zapisane w postaci macierzowej dają nam macierz impedancji n-ramiennego rozgałęzienia paskowego umieszczonego w ośrodku ferrytowym:

$$[Z] = \omega L_0 \begin{bmatrix} j\mu\cos\delta_{11} - \mu_a\sin\delta_{11}, & j\mu\cos\delta_{12} - \mu\sin\delta_{12}, & \cdots, & j\mu_a\cos\delta_{1n} - \mu_a\sin\delta_{1n} \\ j\mu\cos\delta_{21} - \mu_a\sin\delta_{21}, & j\mu\cos\delta_{22} - \mu_a\sin\delta_{22}, & \cdots, & j\mu\cos\delta_{2n} - \mu_a\sin\delta_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ j\mu\cos\delta_{n1} - \mu_a\sin\delta_{n1}, & j\mu\cos\delta_{n2} - \mu_a\sin\delta_{n2}, & & j\mu\cos\delta_{nn} - \mu_a\sin\delta_{nn} \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Dowolny element macierzy (21) ma postać:

$$z_{ik} = \omega L_0(j\mu\cos\delta_{ik} - \mu_a\sin\delta_{ik}),\ i, k = 1, 2, \ldots, n, \tag{22}$$

gdzie:

$$\delta_{ik} = \delta_k - \delta_i, \tag{23}$$

$$\delta_i = (i-1)\frac{2\pi}{n}. \quad i = 1, 2 \ldots, n \tag{24}$$

Związek (22) możemy napisać w innej formie:

$$z_{ik} = R_{ik} + jX_{ik}, \tag{25}$$

gdzie:

$$R_{ik} = -\omega L_0 \mu_a \sin\delta_{ik}, \tag{26}$$

$$X_{ik} = \omega L_0 \mu\cos\delta_{ik}.$$

Zauważmy również, że na podstawie (18) i (24):

$$\delta_{ik} = (k-i)\frac{2\pi}{n} = -(i-k)\frac{2\pi}{n},$$

czyli:

$$\delta_{ik} = -\delta_{ki}. \tag{27}$$

Dla $k = i$:

$$\delta_{ik} = 0 \Rightarrow \begin{cases} R_{ik} = 0 \\ X_{ik} = X_0 = \omega\mu L_0. \end{cases} \tag{28}$$

Uwzględniając (25), (27) i (28) macierz podaną zależnością (21) przedstawić można w postaci sumy dwóch macierzy:

$$[Z] = \begin{bmatrix} jX_0 & jX_{12} & \dots & jX_{1n} \\ -jX_{12} & jX_0 & \dots & jX_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -jX_{1n} & -jX_{2n} & \dots & jX_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ -R_{12} & 0 & \dots & R_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ -R_{1n} & -R_{2n} & \dots & 0 \end{bmatrix}, \tag{29}$$

lub krócej:

$$[Z] = [Z_R] + [Z_A]. \tag{30}$$

Macierz $[Z_A]$ jest macierzą antysymetryczną o współczynnikach rzeczywistych, macierz $[Z_R]$ jest skośnie hermitowska. Kształt tych macierzy odpowiada macierzom $[Z_A]$ i $[Z_R]$ określonym (2) przy analizie pasywnego nieodwracalnego układu n-oczkowego. Wynika stąd wniosek, że rozpatrywane n-ramienne rozgałęzienie paskowe umieszczone w ośrodku ferrytowym można traktować jako układ n-oczkowy zawierający określoną liczbę żyratorów (zależną od sposobu realizacji) oraz że uzasadnione jest wprowadzenie żyratorowego układu zastępczego.

4. DIAGONALIZACJA MACIERZY $[Z_A]$

Macierz $[Z_A]$ określoną związkiem (30) można zapisać następująco:

$$[Z_A] = \begin{bmatrix} 0 & R_1 & R_2 & \dots & R_{n-1} \\ -R_1 & 0 & R_1 & \dots & R_{n-2} \\ -R_2 & -R_1 & 0 & \dots & R_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -R_{n-1} & -R_{n-2} & -R_{n-3} & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}. \tag{31}$$

Kształt tej macierzy sugeruje, że liczba żyratorów potrzebna dla jej zrealizowania wynosi $\frac{1}{2}n(n-1)$. Dla znalezienia minimalnej liczby żyratorów wystarczającej dla zrealizowania $[Z_A]$ przeprowadzimy diagonalizację tej macierzy. W tym celu wprowadzimy oznaczenia:

$$B_1 = [R_2, R_3, \dots, R_{n-1}]_{1\times(n-2)} \tag{32}$$

$$C_1 = [R_1, R_2, \dots, R_{n-2}]_{1\times(n-2)} \tag{33}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & R_1, & \dots, & R_{n-3} \\ -R_1 & 0 & \dots, & R_{n-4} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -R_{n-3} & -R_{n-4} & \dots, & 0 \end{bmatrix}_{(n-2)\times(n-2)} \tag{34}$$

Wykorzystując powyższe oznaczenia $[Z_A]$ zapiszemy w postaci (35):

$$[Z_A] = \begin{bmatrix} 0 & R_1 & B_1 \\ -R_1 & 0 & C_1 \\ -B_1^T & -C_1^T & A_0 \end{bmatrix}_{n\times n}. \tag{35}$$

Wprowadzimy macierz D_1:

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{C_1}{R_1} \\ 0 & 1 & \frac{-B_1}{R_1} \\ 0 & 0 & E_{n-2} \end{bmatrix}_{n\times n} \tag{36}$$

i wykonamy działanie:

$$[\bar{Z}_A]_1 = D_1^T \cdot [Z_A] \cdot D_1, \tag{37}$$

uzyskując:

$$[\bar{Z}_A]_1 = \begin{bmatrix} 0 & R_1 & 0 \\ -R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{n\times n}, \tag{38}$$

gdzie:

$$A = A_0 - \frac{B_1^T \cdot C_1 - C_1^T \cdot B_1}{R_1}. \tag{39}$$

Ale:

$$B_1^T \cdot C_1 = \begin{bmatrix} R_2 \cdot R_1 \\ R_3 \cdot R_2 \\ \vdots \\ R_{n-1} \quad R_{n-2} \end{bmatrix}, \quad C_1^T \cdot B_1 = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_2 & R_3 \\ & \vdots \\ R_{n-2} & R_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{40}$$

czyli:

$$A = A_0. \tag{41}$$

Macierz $[\bar{Z}_A]_1$ ma więc kształt:

$$[\bar{Z}_A]_1 = \begin{bmatrix} 0 & R_1 & 0 & & \dots & & 0 \\ -R_1 & 0 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_1 & R_2 & \dots & R_{n-3} \\ \cdot & \cdot & -R_1 & 0 & R_1 & \dots & R_{n-4} \\ \cdot & \cdot & -R_2 & -R_1 & & & \\ \cdot & \cdot & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & -R_{n-3} & -R_{n-4} & & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{42}$$

Wykonanie działania (37) pozwoliło na uzyskanie samych zer w dwóch pierwszych wierszach i kolumnach poczynając od pozycji trzeciej. Przedstawiony wyżej proces transformacji można powtarzać, aż do uzyskania postaci:

$$[\bar{Z}_A] = \begin{bmatrix} 0 & R_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -R_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & 0 & R_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_1 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n} \quad \text{dla } n \text{ parzystych,} \tag{43}$$

lub

$$[\bar{Z}_A] = \begin{bmatrix} 0 & R_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -R_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & 0 & R_1 & \vdots \\ 0 & & \dots & & -R_1 & 0 & 0 \\ 0 & & \dots & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n} \quad \text{dla } n \text{ nieparzystych.} \tag{44}$$

Jeżeli oznaczymy:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & R_1 \\ -R_1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{45}$$

wtedy:

$$[\bar{Z}_A] = \operatorname{diag}\Big[\underbrace{G, G, \dots, G}_{\frac{n}{2}}\Big] \text{ dla } n \text{ parzystych,} \tag{46}$$

$$[\bar{Z}_A] = \operatorname{diag}\Big[\underbrace{G, G \dots, G,}_{\frac{n-1}{2}}\ 0\Big] \text{ dla } n \text{ nieparzystych.} \tag{47}$$

Ponieważ minimalna liczba żyratorów potrzebna dla realizacji zadanej macierzy impedancji równa jest połowie rzędu tej macierzy, a rzędy macierzy $[Z_A]$ i $[\bar{Z}_A]$ są sobie równe [1], więc:

$$\left.\begin{aligned} L_{min} &= \frac{n}{2} \text{ dla } n \text{ parzystych} \\ L_{min} &= \frac{n-1}{2} \text{ dla } n \text{ nieparzystych} \end{aligned}\right\}. \tag{48}$$

5. REALIZACJA N-RAMIENNEGO CYRKULATORA FERRYTOWEGO W POSTACI ROZGAŁĘZIENIA PASKOWEGO UMIESZCZONEGO W OŚRODKU FERRYTOWYM

Rozpatrzmy macierz $[Z_A]$ określoną zależnością (30) i zastanówmy się jakie warunki powinny być spełnione, aby opisywała ona idealny cyrkulator n-ramienny. Zasadą pracy cyrkulatora n-ramiennego jest jednokierunkowa transmisja sygnału z gałęzi k-tej do gałęzi $(k+1)$-ej, $(k = 1, 2, \dots, n)$. Na podstawie podanych w literaturze [4], [1] macierzy impedancji cyrkulatorów trójramiennych i czteroramiennych (rys. 5) można wnioskować, że macierz impedancji cyrkulatora n-ramiennego będzie zawierała same zera na głównej przekątnej oraz elementy różne od zera i równe sobie co do wartości bezwzględnej na pozostałych pozycjach. Aby macierz $[Z_A]$ (30) opisywała idealny cyrkulator powinien więc być spełniony warunek:

$$|R_{ik}| = \text{const} \neq 0 \text{ dla } i-k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(n+1), \tag{49}$$

czyli:

$$\left|\sin(k-i)\frac{2\pi}{n}\right| = \text{const} \neq 0 \text{ dla } i-k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(n-1). \tag{50}$$

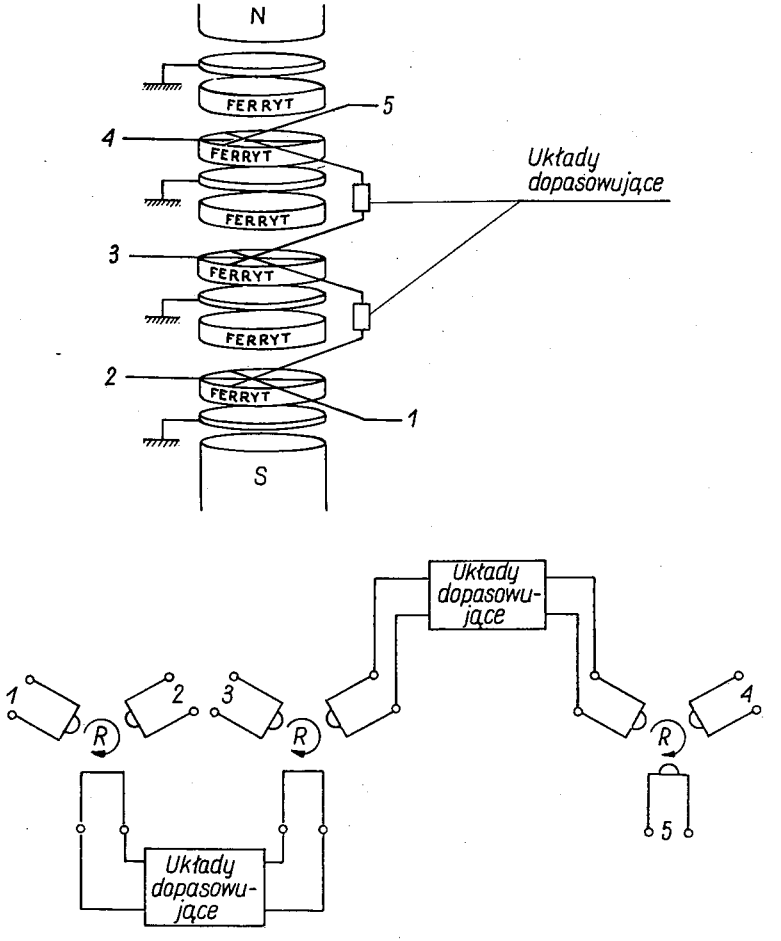
a)

$$\begin{bmatrix} 0 & R & -R \\ -R & 0 & R \\ R & -R & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 0 & R & R & R \\ -R & 0 & R & R \\ -R & -R & 0 & R \\ -R & -R & -R & 0 \end{bmatrix}$$

Rys. 5. Macierz impedancji: a) idealnego cyrkulatora trójramiennego [4], b) idealnego cyrkulatora czteroramiennego [1]



Rys. 6. Sposób realizacji cyrkulatora pięcioramiennego oraz jego żyratorowy schemat zastępczy

Warunek (50) jest spełniony tylko dla $n = 3$. Nasuwa się więc wniosek, że realizacja cyrkulatora w postaci symetrycznego rozgałęzienia paskowego umieszczonego w ośrodku ferrytowym w sposób pokazany na rys. 2 jest możliwa jedynie w przypadku trójwrotnika. Najprostszym rozwiązaniem problemu realizacji cyrkulatora wieloramiennego może być układ zbudowany w postaci kaskadowego połączenia trójwrotników; proponowany sposób

realizacji cyrkulatora pięcioramiennego oraz jego żyratorowy schemat zastępczy pokazano na rys. 6. Wadą kaskadowego połączenia cyrkulatorów trójramiennych są większe straty układu: w przypadku transmisji sygnału z ramienia pierwszego do n-tego wzrastają one $(n-2)$-krotnie, a przy przesyłaniu pomiędzy pozostałymi ramionami (z wyjątkiem $1 \rightarrow 2$) dwukrotnie w stosunku do strat obserwowanych w cyrkulatorze trójramiennym. Z drugiej strony proponowany sposób realizacji cyrkulatorów wieloramiennych wykorzystujących elementy o stałych skupionych pozwala na konstruowanie układów o dowolnej liczbie ramion i nie wymaga nowych opracowań technologicznych.

Autor pragnie podziękować Prof. drowi h. inż. K. St. Grabowskiemu za dyskusje i szereg cennych uwag podczas prowadzenia pracy.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. H. J. Carlin, A. B. Giordano, Network Theory, Prentice-Hall, INC., Englewood Cliffs, N.J. 1964.
2. H. J. Carlin, Theory and Application of Gyrator Networks, Polytechnic Institute of Brooklyn, N.J. 1954.
3. D. E. Biglin, The NRJ — A New Circuit Element, The Marconi Review, Vol. XXXIII, Nr 176, 1 kwartał 1970.
4. J. D. Bergman, C. Christensen, Equivalent Circuit for a Lumped Element Y Circulator, IEEE Trans. on MTT, Maj 1968, str. 308—310.
5. M. Krzyżagórski, J. Mazur, M. Kitliński, Elementy analizy i zasady projektowania cyrkulatorów na fale metrowe, MECS, Zakopane 1971.

M. KITLIŃSKI

THE ANALYSIS OF THE REALIZATION POSSIBILITIES OF n-PORT LUMPED ELEMENT CIRCULATOR

Summary

The paper contains the results of the theoretical analysis of the realization possibilities of an n-port lumped element circulator. The author formulates the impedance matrix of an n-port stripline junction with two ferrite discs symmetricaly placed on both sides of the internal conductor.

M. KITLIŃSKI

ANALYSE DER REALISIERUNGSMÖGLICHKEIT EINES n-ARMIGEN ZIRKULATORS

Zusammenfassung

In diesem Artikel wurden theoretische Analysenergebnisse der Realisierungsmöglichkeiten von n-armigen ferritischen Zirkulatoren besprochen. Es wurde die Impedanzmatrix einer n-armigen Abzweigung symmetrischer Streifenlinien mit zwei Ferritrollen an der Abzweigungsstelle formuliert sowie die Einführung der Vertretergiratoranordnung begründet. Man bewies, daß die Realisierung eines Zirkulators unter Ausnutzung von Elementen mit aggregierten Konstanten nur bei dreiarmigen Zirkulatoren möglich sei.

М. КИТЛИНЬСКИ

АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ *n*-ВОРОТОВЫХ ФЕРРИТНЫХ ЦИРКУЛЯТОРОВ

Р е з ю м е

В статье представлены результаты теоретического анализа возможности построения *n*-воротовых ферритных циркуляторов при использовании элементов с сосредоточенными параметрами. Определена матрица импедансов *n*-воротового полосового разветвления с двумя ферритными кружками расположенными симметрично с обеих сторон внутреннего провода.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1972, 18, z. 2, ss. 495—514

538.632

Podstawy teorii hallotronu

ANDRZEJ KOBUS (WARSZAWA)

Instytut Technologii Elektronowej, Naukowo-Produkcyjne Centrum Półprzewodników

Otrzymano 28.9.1971

W artykule przedstawiono syntezę podstawowych zagadnień teorii hallotronu. Na wstępie omówiono równania transportu dla dowolnego obszaru półprzewodnika, na który oddziaływuje pole elektryczne i magnetyczne, sformułowane na gruncie termodynamiki procesów nieodwracalnych. Wykazano rolę relacji wzajemności Onsagera i podano fizyczną interpretację współczynników termodynamicznych. Następnie rozważania przeniesiono na obszar półprzewodnika z odpowiednią liczbą elektrod — stanowiący hallotron. Pokazano wpływ warunków brzegowych i zasady określania rozkładu prądu i pola elektrycznego w płytce hallotronowej. Na zakończenie przedstawiono szczególne cechy macierzy impedancyjnej hallotronu wynikające z zasady Onsagera.

1. WSTĘP

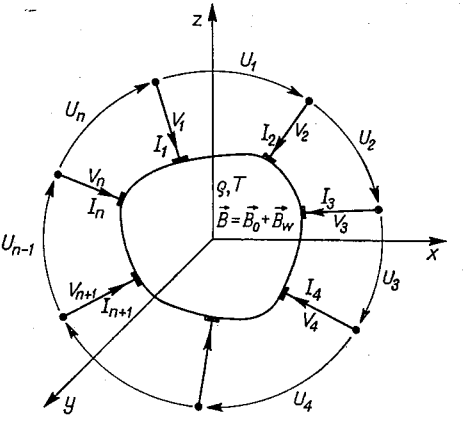
Element wykorzystujący zjawisko Halla w półprzewodniku — hallotron — stał się jednym z wielu elektronicznych przyrządów półprzewodnikowych szeroko stosowanych w technice [np. 1]. Jednak całokształt zagadnień związanych z projektowaniem, konstrukcją, technologią i zastosowaniem hallotronów, jak w przypadku wielu innych przyrządów półprzewodnikowych, leży na pograniczu wielu różnych dziedzin nauki i techniki jak: termodynamika, matematyka, fizyka i elektronika półprzewodników oraz elektrotechnika z teorią układów. Celem niniejszego artykułu jest próba syntezy i usystematyzowania różnorodnych spojrzeń na hallotron: jako element obwodu elektrycznego, jako obiekt fizyki ciała stałego (a półprzewodnika w szczególności), jako obszar przewodnika, w którym przepływ prądu rządzony jest określonymi prawami elektrodynamiki, wreszcie jako konkretny przyrząd półprzewodnikowy.

2. HALLOTRON JAKO UKŁAD WIELOBIEGUNOWY

W najbardziej ogólnym przypadku hallotron można rozpatrywać jako dowolną bryłę przestrzenną pokazaną na rys. 2.1, w której każdemu punktowi można przypisać pewną wartość rezystywności ϱ, zależną od położenia x, y, z, temperatury T, pola magnetycznego B i czasu t oraz pewną temperaturę T, zależną od położenia x, y, z i czasu t.

Do bryły dołączone jest n elektrod, na których występują potencjały $V_1, V_2 \ldots V_n$. Przyjmuje się oznaczenia $U_1 = V_1 - V_2$, $U_2 = V_1 - V_3$, ... $U_n = V_n - V_1$. Zwierając kolejno zaciski elektrod 1 ... n otrzymuje się n oczek i n węzłów, dla których muszą być spełnione równania Kirchhoffa

$$\sum_{k=1}^{n} U_k = 0; \qquad \sum_{s=1}^{n} I_s = 0. \tag{2.1}$$



Rys. 2.1. Hallotron jako układ wielobiegunowy

Na bryłę działa pole magnetyczne o indukcji

$$\vec{B} = \vec{B}_o + \vec{B}_w, \tag{2.2}$$

której wartość jest również funkcją położenia x, y, z i czasu t, przy czym $\vec{B}_o$ jest indukcją zewnętrznego pola magnetycznego, a $\vec{B}_w$ — indukcją pola magnetycznego pochodzącego od prądów $I_1 \ldots I_n$.

Przedstawiony na rys. 2.1 obszar półprzewodnika z n elektrodami można rozpatrywać jako nieautonomiczny układ wielobiegunowy, który może być łączony z innymi obwodami zewnętrznymi za pomocą własnych zacisków. Taki element wielobiegunowy nie zawiera niezależnych źródeł i w przypadku, gdy jest odłączony od innych obwodów, na jego zaciskach nie występują ani napięcia, ani prądy: $V_1 \ldots V_n = 0$, $I_1 \ldots I_n = 0$. Wyżej wymieniony warunek jest spełniony w półprzewodnikach w przypadku, gdy nie występują w nich zjawiska typu fotowoltaicznego i pomija się indukowane siły elektromotoryczne. Przyjmując wyżej wymienione oznaczenia można napisać n równań takiego obwodu [np. 2] zapisanych w postaci wskaźnikowej

$$U_i = \sum_{k=1}^{n} Z_{ik} I_k. \tag{2.3}$$

Współczynniki Z_{ik} są impedancjami układu

$$Z_{KS} = \left(\frac{U_k}{I_s}\right)_{ii=o}, \qquad i \neq s, \tag{2.4}$$

tzn. impedancja Z_{ks} równa jest liczbowo U_k wtedy, gdy w s-tym oczku elementu wielobiegunowego płynie jednostkowy prąd, a wszystkie pozostałe oczka są przerwane.

W zasadzie wyrażenia (2.3) i (2.4) opisują tylko właściwości pewnej grupy obwodów elektrycznych spełniających określone warunki, jak np.: liniowa zależność od prądów, niezależność parametrów Z_{ik} od prądów, stan ustalony; dopuszcza się jednak zależność parametrów Z_{ik} od innych czynników, jak B i T (co zostanie wykazane dalej). Należy zdawać sobie sprawę z faktu, że opis hallotronu rzeczywistego przedstawiony zależnościami (2.3) i (2.4) nie będzie obejmował wszystkich zjawisk w nim zachodzących, gdyż nie wszystkie z wyżej wymienionych warunków będą zawsze spełnione. Jednak w większości przypadków zastosowanie takiego przybliżenia pozwala na wyciągnięcie wielu ważnych wniosków o właściwościach hallotronów.

W ogólnym przypadku znajomość dowolnego układu wielobiegunowego polega na określeniu wszystkich składowych macierzy impedancyjnej. Istnieją dwa sposoby określania omawianych składowych. Pierwszy z nich — to metoda doświadczalna polegająca na pomiarze składowych Z_{ks} na praktycznie zrealizowanym modelu entnika korzystając z wzoru (2.4). Druga metoda polega na analitycznym określeniu impedancji z matematycznie wyznaczonego rozkładu pola elektrycznego i prądu w badanym obszarze półprzewodnika. Pierwsza metoda jest bardzo przydatna w przypadkach badania istniejących przyrządów półprzewodnikowych, lub gdy stosunkowo łatwo przewidzieć optymalną konfigurację geometryczną próbki. W przypadkach, gdy optymalizacja dotyczy bardziej skomplikowanych układów, gdzie rezultat jest trudny do przewidzenia a postępowanie optymalizacyjne prowadziłoby do wielkiej ilości doświadczeń, korzystniejsza jest metoda analityczna, która po zastosowaniu odpowiedniej metody matematycznej pozwala na otrzymanie poszukiwanego optymalnego wyniku.

3. PRĄD I POLE ELEKTRYCZNE W PÓŁPRZEWODNIKU Z POLEM MAGNETYCZNYM

Przepływ prądu elektrycznego wewnątrz bryły półprzewodnika omawianej w poprzednim rozdziale opisują równania transportu, które można wyprowadzić na gruncie termodynamiki procesów nieodwracalnych. W równaniach tych w ogólnym przypadku rozpatruje się pole elektryczne $\vec{E}$ oraz strumień ciepła $\vec{q}$ będące kombinacjami liniowymi gęstości prądu elektrycznego $\vec{J}$ i gradientu temperatury grad T, przy czym współczynniki przy zmiennych niezależnych są tensorami zależnymi od pola magnetycznego $\vec{B}$ [3, 4]

$$\begin{aligned} \vec{E}^* &= \hat{\varrho}(\vec{B})\vec{J}+\hat{\varphi}(\vec{B})\operatorname{grad} T, \\ \vec{q} &= \hat{\pi}(\vec{B})\vec{J}-\hat{\varkappa}(\vec{B})\operatorname{grad} T, \end{aligned} \tag{3.1}$$

przy czym

$$\vec{E}^* = \vec{E}+\frac{1}{e}\operatorname{grad}\xi = \frac{1}{e}\operatorname{grad}(-eV+\xi), \tag{3.2}$$

gdzie:

e — ładunek elementarny,

ξ — potencjał chemiczny,

V — potencjał elektrostatyczny,

$\hat{\varrho}$ — tensor rezystywności,

$\hat{\varrho}$ — tensor różnicowej siły termoelektrycznej,
$\hat{\pi}$ — tensor współczynnika Peltier,
$\hat{\varkappa}$ — tensor przewodności cieplnej.

Równania transportu (3.1) opisują lokalne właściwości półprzewodnika w punkcie o współrzędnych x, y, z. Z zależności (3.2) wynika, że wypadkowe pole elektryczne istniejące w półprzewodniku składa się z dwóch członów: pola $\vec{E} = -\operatorname{grad} V$ będącego wynikiem przyłożenia odpowiednich sił elektromotorycznych wywołujących na zaciskach układu przedstawionego na rys. 2.1 napięcie $U_1, U_2, \ldots U_n$ oraz pola wewnętrznego $\frac{1}{e}\operatorname{grad}\xi$ wywołanego niejednorodnością materiału.

Tensory $\hat{\varrho}$, $\hat{\varphi}$, $\hat{\pi}$, $\hat{\varkappa}$ spełniają ponadto relacje wzajemności Onsagera [3, 4], zgodnie z którymi słuszne są następujące zależności

$$\begin{aligned} \hat{\varrho}(\vec{B}) &= \hat{\varrho}(-\vec{B}), \\ \hat{\varkappa}(\vec{B}) &= \hat{\varkappa}(-\vec{B}), \\ \hat{\pi}(\vec{B}) &= -T\hat{\varphi}(-\vec{B}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Jeżeli założymy brak gradientów temperatury ($\operatorname{grad} T = 0$) i zawęzimy nasze rozważania do zjawisk galwanomagnetycznych, a więc zjawisk występujących przy jednoczesnym oddziaływaniu pól: elektrycznego i magnetycznego na próbkę półprzewodnikową rozpatrywać będziemy tylko część równań (3.1) w postaci

$$\vec{E}^* = \hat{\varrho}\vec{J}. \tag{3.4}$$

Tensor $\hat{\varrho}$ można rozłożyć na szereg potęgowy względem składowych wektora $\vec{B}$ i w dalszych rozważaniach ograniczymy się tylko do rozpatrywania kwadratowego przybliżenia zależności (3.4) względem $\vec{B}$. Jednak w przypadku dowolnego układu krystalograficznego prowadziłoby to do konieczności określenia kilkudziesięciu składników tensora $\hat{\varrho}$. Wobec tego ograniczymy się do kryształów izotropowych, którą to cechą charakteryzuje się większość interesujących nas materiałów półprzewodnikowych, krystalizujących w układzie regularnym. Jeżeli ponadto zajmiemy się ośrodkiem jednorodnym, tzn. takim, w którym $\operatorname{grad}\xi = 0$, a więc $\vec{E}^* = \vec{E}$, pole elektryczne w próbce w takim przypadku będzie pochodziło wyłącznie od zewnętrznych źródeł zasilania.

Przy uwzględnieniu wyżej wymienionych założeń upraszczających oraz relacji Onsagera zależność (3.4) dla kryształu izotropowego przyjmuje następującą postać [4, 5]:

$$\vec{E} = \varrho_o[\vec{J} + a_o(\vec{J}\times\vec{B}) + b_o B^2\vec{J} + c_o\vec{B}(\vec{J}\cdot\vec{B})], \tag{3.5}$$

gdzie: a_o, b_o, c_o — skalarne współczynniki proporcjonalności.

Analizując wnioski ze statystycznej teorii przewodnictwa w półprzewodnikach można wykazać, że współczynniki: a_o, b_o i c_o mają swoją interpretację fizyczną; i tak np.

$$a_o = -\mu_H, \quad b_o = \xi\mu_H^2, \quad c_o = \mu_H,$$

gdzie:

μ_H — ambipolarna ruchliwość holowska,
ξ — współczynnik zależny od dominującego mechanizmu rozpraszania nośników.

Wprowadzono jeszcze następujące oznaczenia:

$$\vec{B} = \vec{b}|\vec{B}|, \quad \operatorname{tg}\Theta_H = \mu_H|\vec{B}|, \quad \mu_H = \frac{R_H}{\varrho_o}, \tag{3.6}$$

gdzie Θ_H — kąt Halla tworzony przez kierunki wektorów $\vec{J}$ i $\vec{E}$ w półprzewodniku.

Dla małych kątów Θ_H przyjmuje się

$$\Theta_H = \mu_H|\vec{B}|. \tag{3.7}$$

Uwzględniając powyższe oznaczenia dla półprzewodnika izotropowego przy założeniu, że $\vec{B} \perp \vec{E}$ wyrażenie (3.5) przyjmuje postać

$$\vec{E} = \varrho_o[\vec{J}(1+\xi\mu_H^2B^2) - \Theta_H(\vec{J}\times\vec{b})]. \tag{3.8}$$

Z równania (3.8) wynika zapis tensora rezystancji, którego pierwszy człon opisuje zjawisko magnetorezystancji w przybliżeniu kwadratowym, a drugi — zjawisko Halla:

$$\hat{\varrho} = \varrho_o \begin{vmatrix} 1+\xi\mu_H^2B^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\xi\mu_H^2B^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\xi\mu_H^2B^2 \end{vmatrix} - \varrho_o\Theta_H \begin{vmatrix} 0 & b_z & -b_y \\ -b_z & 0 & b_x \\ b_y & -b_x & 0 \end{vmatrix}. \tag{3.9}$$

W przypadku słabych pól magnetycznych ($\mu_H^2 B^2 \ll 1$) równanie (3.8) przyjmuje postać:

$$\vec{E} = \vec{\varrho}_o(\vec{J} - \Theta_H\vec{J}\times\vec{b}) \tag{3.10}$$

W niektórych przypadkach wygodniej posługiwać się zależnością $\vec{J} = f(\vec{E})$

$$\vec{J} = \sigma_o(\vec{E} + \Theta_H\vec{E}\times\vec{b}), \tag{3.11}$$

słuszną dla słabych pól magnetycznych w przybliżeniu liniowym.

Pomimo występującego pewnego podobieństwa pomiędzy tensorowymi zależnościami (2.3) i (3.9) należy podkreślić ich istotną różnicę: zależność (3.9) opisuje lokalny związek pomiędzy natężeniem pola elektrycznego i gęstością prądu we wnętrzu bryły półprzewodnikowej pokazanej na rys. 2.1; natomiast zależność (2.3) opisuje właściwości bryły półprzewodnikowej jako całości w postaci zależności napięć i prądów występujących na jej elektrodach. Dokładne sformułowanie wyrażeń (2.3) i (3.4) w przypadku ogólnym nastręcza bardzo duże trudności i z punktu widzenia zastosowań technicznych nie jest przydatne. Dlatego też najczęściej omawiane zależności podaje się dla konkretnych i stosunkowo prostych warunków brzegowych (o których będzie mowa w dalszych rozdziałach) przy uwzględnieniu szeregu dalszych założeń upraszczających.

4. RÓWNANIE ROZKŁADU PRĄDU I POLA ELEKTRYCZNEGO W PRÓBCE PÓŁPRZEWODNIKOWEJ. RÓWNANIE LAPLACE'A. WARUNKI BRZEGOWE

Podstawą określenia rozkładu prądu i pola elektrycznego w obszarze półprzewodnika, na który działa pole magnetyczne są równania Maxwella zawierające wyrażenie na gęstość prądu. W odniesieniu do przypadku stacjonarnego, przy braku ładunków przestrzennych przyjmują one postać ciągłości prądu

$$\operatorname{div}\vec{J} = 0 \tag{4.1}$$

oraz bezwirowości pola elektrycznego

$$\mathrm{rot}\vec{E} = 0. \tag{4.2}$$

Z zależności (4.2) wynika również potencjalność pola elektrycznego, a więc słuszne jest wyrażenie

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}V. \tag{4.3}$$

Korzystając również z wyrażenia na prąd (3.11) zapisujemy je w postaci skróconej

$$\vec{J} = \hat{\sigma}\vec{E}. \tag{4.4}$$

Przy założeniu stałości i jednorodności pola magnetycznego ($\vec{B}$ = const) oraz σ = = const z równań (4.4) i (4.1) otrzymuje się zależność

$$\mathrm{div}\vec{E} = 0. \tag{4.5}$$

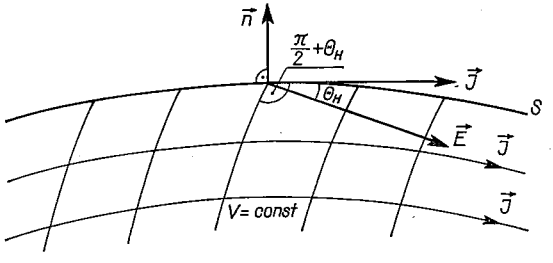
Z kolei podstawiając (4.3) do (4.5) otrzymuje się równanie Laplace'a

$$\Delta V = 0. \tag{4.6}$$

A więc rozkładem pola elektrycznego w półprzewodniku, na który działa pole magnetyczne, rządzi to samo równanie, co i przy braku pola magnetycznego. Istotna różnica wystąpi w jednym z warunków brzegowych, w których sformułowanie będzie podane poniżej.

1. *Warunek styczności prądu do powierzchni próbki bez elektrody.* Składowa prądu normalna do powierzchni S półprzewodnika (patrz rys. 4.1) nie przykrytej elektrodą równa się zeru

$$\vec{J}\vec{n} = 0. \tag{4.7}$$



Rys. 4.1. Rozkład prądu i pola elektrycznego przy krawędzi próbki bez elektrody metalowej

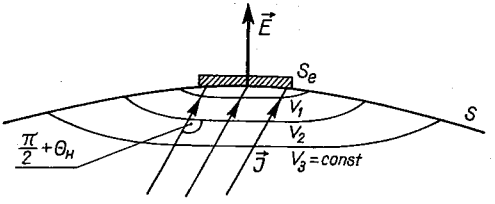
Wynika stąd, że prąd płynie równolegle do takiej powierzchni. Ze względu na to, że wyrażenie na prąd (3.11) jest odmienne niż dla półprzewodnika bez pola magnetycznego, wektor pola elektrycznego $\vec{E}$ będzie tworzył kąt Θ_H z wektorem prądu J, linie ekwipotencjalne będą tworzyły z liniami prądu kąt $\Theta_H + \frac{\pi}{2}$. Omówiony warunek brzegowy stanowi wyżej wzmiankowaną istotną różnicę w porównaniu z warunkami brzegowymi dla przypadku braku pola magnetycznego; będzie on stanowił o pewnych istotnych zjawiskach występujących w rzeczywistej płytce hallotronowej.

2. *Warunek brzegowy dla powierzchni półprzewodnika przykrytej elektrodą metalową.* Gdy na części powierzchni półprzewodnika znajduje się elektroda o powierzchni S_e, na jej powierzchni potencjał jest jednakowy: $V = \text{const}$. Warunek ten można zapisać w postaci iloczynu wektorowego:

$$\vec{E} \times \vec{n} = 0, \tag{4.8}$$

co oznacza, że $\vec{E} \| \vec{n}$.

A więc w otoczeniu elektrody rozkład potencjału jest wymuszony przez powierzchnię ekwipotencjalną elektrody. Aby był spełniony warunek ortogonalności linii pola elektrycznego względem linii ekwipotencjalnych, pole $\vec{E}$ jest prostopadłe do powierzchni elektrody, a jeżeli przez elektrodę będzie wypływał prąd $\vec{J}$, jego kierunek będzie odchylony od kierunku $\vec{E}$ o kąt Θ_H, jak na rys. 4.2.



Rys. 4.2. Rozkład prądu i pola elektrycznego w otoczeniu krawędzi próbki pokrytej elektrodą metalową

3. *Warunek ciągłości prądu wypływającego przez elektrodę.* Prąd wypływający przez elektrodę będzie spełniał równanie ciągłości

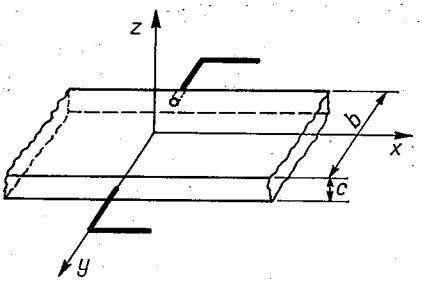
$$\int_{S_e} \vec{J} d\vec{s} = I, \tag{4.9}$$

tzn., że całka po powierzchni elektrody z gęstości prądu $\vec{J}$ będzie równa prądowi całkowitemu przepływającemu przez elektrodę.

5. PROSTOPADŁOŚCIENNA PŁYTKA HALLOTRONOWA NIESKOŃCZENIE DŁUGA I BARDZO KRÓTKA. DYSK CORBINO

Najprostszymi konfiguracjami geometrycznymi, dla których łatwo wyznaczyć w sposób dokładny zależności opisujące zjawiska galwanomagnetyczne, to — prostopadłościenna płytka nieskończenie długa z punktowymi elektrodami umieszczonymi, jak na rys. 5.1 oraz dysk Corbino lub płytka bardzo krótka. Prostota wyznaczania dokładnych wyrażeń opisujących zjawiska galwanomagnetyczne w wyżej wymienionych konfiguracjach wynika z faktu, że decydującą rolę odgrywa tu tylko jeden z dwóch podstawowych warunków brzegowych (4.7) i (4.8).

Na wstępie rozpatrzymy przypadek płytki nieskończenie długiej. Prąd $\vec{J} = \vec{J}i$ płynie wzdłuż osi x, a pole magnetyczne o indukcji $\vec{B} = B_z\vec{k}$ skierowane jest wzdłuż osi z ($B_x = B_y = 0$). Zazwyczaj problem sprowadza się do przypadku dwuwymiarowego przy



Rys. 5.1. Schemat płytki nieskończenie długiej o punktowych elektrodach napięciowych

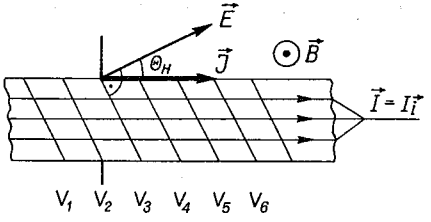
założeniu, że $b \gg c$ i $J_z = 0$. Dla takiego przypadku tensor (3.9) przyjmuje następującą postać [według 4]

$$\hat{\varrho} = \begin{vmatrix} 1+\xi\mu_H^2 B^2 & -\varrho_o \Theta_H \\ \varrho_o \Theta_H & 1+\xi\mu_H^2 B^2 \end{vmatrix}. \tag{5.1}$$

Wtedy równania na pole elektryczne dla płytki półprzewodnikowej pokazanej na rys. 5.1 i wyżej sformułowanych założeń będą następujące:

$$\begin{aligned} E_x &= \varrho_o(1+\xi\mu_H^2 B^2) J_x, \\ E_y &= \varrho_o \Theta_H J_x. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Dla przypadku płytki przedstawionej na rys. 5.1 warunki brzegowe służące do rozwiązania problemu rozkładu prądu i pola elektrycznego są bardzo proste, gdyż obowiązuje tylko warunek opisany wzorem (4.7). Wobec braku elektrod o skończonych rozmiarach występuje jedynie równomierny obrót linii ekwipotencjalnych o kąt równy kątowi Halla Θ_H, jak na rys. 5.2. Prąd $\vec{J}$ zgodnie z tym warunkiem brzegowym płynie równolegle do krawędzi płytki. Natomiast pole elektryczne E jest obrócone o kąt Θ_H.



Rys. 5.2. Rozkład prądu i pola elektrycznego w prostopadłościennej płytce nieskończenie długiej

Nieskończenie długa płytka jest również modelem, w którym występuje tzw. magnetooporność fizyczna opisywana przez zależność podaną w równaniach (5.2). Gdy z punktowych elektrod nie pobiera się prądu ($I_y = 0$), otrzymuje się następujące wyrażenie:

$$\frac{E_x}{J_x} = \varrho_B = \varrho_o(1+\xi\mu_H^2 B^2). \tag{5.3}$$

Współczynnik ξ jest zależny od mechanizmu rozpraszania nośników i zazwyczaj jest liczbą ułamkową mniejszą od 1, a w wielu przypadkach bliską zera. Dlatego też w zakresie

słabych pól magnetycznych ($\mu_H B \ll 1$) w rozważaniach praktycznych najczęściej pomija się udział magnetooporności fizycznej, gdyż stosunek $\frac{\varrho_B}{\varrho_o}$ niewiele różni się od 1.

Z zależności (5.2) uwzględniając, że $\varrho_o \Theta_H b_z = R_H B_z$ otrzymujemy wzór:

$$E_y = R_H J_x B_z \tag{5.4}$$

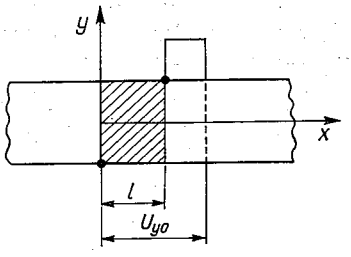
określający pole elektryczne zjawiska Halla w płytce o rozpatrywanej konfiguracji. Uwzględniając rozmiary płytki — ze wzoru (5.4) można wyznaczyć znane wyrażenie opisujące napięcie Halla

$$U_{yH} = \frac{R_H}{c} I_x B_z . \tag{5.5}$$

Z zależności tej wynika bardzo ważna zaleta przyrządów półprzewodnikowych działających na zasadzie poprzecznego zjawiska Halla — ich liniowość względem sygnałów zewnętrznych: prądu sterującego I_x i indukcji magnetycznej B_z.

W praktyce właściwości płytki nieskończenie długiej można przypisać płytce prostopadłościennej, gdy spełniony jest warunek, że $a \gg b$, przy czym stosunek $\frac{a}{b} > 4$ pozwala na posługiwanie się wzorem (5.5), a błąd tego przybliżenia jest mniejszy od 1%.

Rozpatrzymy jeszcze szczególny przypadek rozmieszczenia punktowych elektrod napięciowych na prostopadłościennej płytce nieskończenie długiej, jak pokazano na rys. 5.3.



Rys. 5.3. Schemat płytki nieskończenie długiej z uwzględnieniem asymetrii geometrycznej

Należy podkreślić, że przypadek ten należy traktować jako szczególny z punktu widzenia rozważań teoretycznych, natomiast w rzeczywistych hallotronach przypadek umieszczenia elektrod napięciowych na różnych powierzchniach ekwipotencjalnych jest typowy. W przypadku gdy $B = 0$ pomiędzy elektrodami napięciowymi powstanie napięcie równe:

$$U_{yo} = \varrho_o \frac{1}{bc} I_x , \tag{5.6}$$

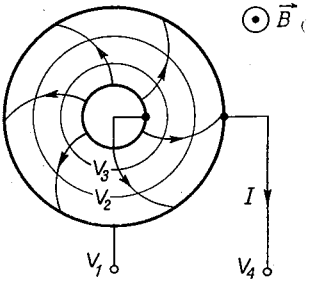
przy czym rezystywność części płytki zawartej pomiędzy powierzchniami ekwipotencjalnymi, na których znajdują się elektrody

$$r_o = \frac{l}{cb} \tag{5.6a}$$

jest nazywana współczynnikiem asymetrii. Wobec tego, w przypadku gdy $B = 0$, na elektrodach napięciowych powstanie suma napięć opisanych zależnościami (5.5) i (5.6)

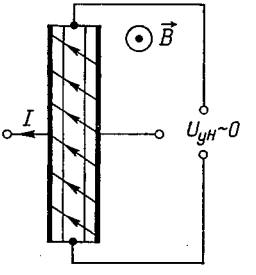
$$U_y = U_{yo} + U_{yH} = r_o I_x + \frac{R_H}{c} I_x B_z. \tag{5.7}$$

Drugim granicznym przypadkiem próbki, w której łatwo określić rozkład pola i prądu jest tzw. dysk Corbino przedstawiony na rys. 5.4. Jest to okrągła płytka z otworem w środku, przy czym obie jego krawędzie: zewnętrzna i wewnętrzna są elektrodami, na których



Rys. 5.4. Schemat dysku Corbino

panują stałe potencjały, równe odpowiednio V_1 i V_4. Rozkład potencjału jest wymuszony przez elektrody zgodnie z 2 warunkiem brzegowym $\vec{E} \times \vec{n} = 0$ i jest jednakowy w obecności pola magnetycznego i bez niego. Wobec tego składowa holowska pola elektrycznego w ogóle nie występuje, natomiast kierunek linii prądu zależy od pola magnetycznego odchylając się od stałego promieniowego kierunku pola elektrycznego o kąt $\Theta_H = \operatorname{arctg}(\mu_H B)$. Prowadzi to do znacznego wydłużenia linii prądu, a więc i torów nośników prądu i powoduje powstawanie tzw. geometrycznej magnetooporności. Zjawisko to wywołuje największy możliwy przyrost rezystancji w jednorodnej płytce półprzewodnikowej.



Rys. 5.5. Schemat prostopadłościennej płytki o $\frac{a}{b} \to 0$

Płytka w kształcie dysku Corbino charakteryzuje się rezystancją opisaną następującą zależnością

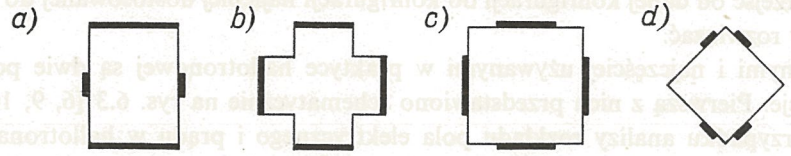
$$R_B = R_o \frac{\varrho_B}{\varrho_o} (1 + \operatorname{tg}^2 \Theta_H), \tag{5.8}$$

gdzie R_o — rezystancja próbki dla $B = 0$.

Jak podano powyżej, napięcie Halla nie występuje. Zanikanie pola holowskiego w płytce, której właściwości są narzucone przez istnienie elektrod o dużych rozmiarach w porównaniu z rozmiarami obwodu płytki, łatwiej będzie rozważyć na przykładzie prostopadłościennej płytki o małym stosunku $\frac{a}{b}$ z punktowymi elektrodami napięciowymi, jak na rys. 5.5. I w tym przypadku o rozkładzie pola elektrycznego decyduje warunek brzegowy wynikający z wpływu elektrod prądowych. Wynikiem tego faktu jest brak poprzecznej składowej pola elektrycznego (składowej holowskiej). Wobec tego, że linie pola $\vec{E}$ muszą być prostopadłe do powierzchni elektrod prądowych $\vec{E} \times \vec{n} = 0$, prąd płynący w płytce będzie odchylony od kierunku wektora $\vec{E}$ o kąt Θ_H i spowoduje wystąpienie magnetooporności geometrycznej. Rezystancja próbki o bardzo małej wartości $\frac{a}{b}$ będzie wyrażona zależnością (5.8).

6. PRZEKSZTAŁCENIA KONFOREMNE I ICH ZASTOSOWANIE DO ANALIZY POSZCZEGÓLNYCH KONFIGURACJI HALLOTRONOWYCH

Właściwości praktycznych konfiguracji płytki hallotronowej odbiegają od właściwości wyidealizowanych przypadków opisanych w rozdz. 5 i będą prowadziły do znacznie bardziej skomplikowanych rozkładów prądu i pola elektrycznego, niż przedstawiono to na rys. 5.2.

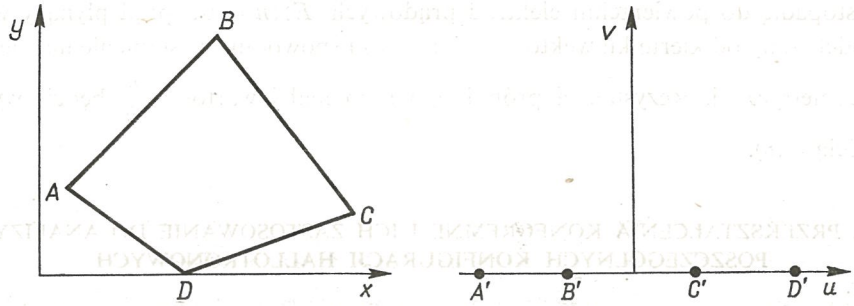


Rys. 6.1. Przykłady płytek hallotronowych

Różnice te będą wynikiem kilku czynników. W przypadku płytek prostopadłościennych będzie to wpływ skończonej długości płytki i istnienia elektrod prądowych oraz wpływ niezerowych rozmiarów elektrod napięciowych, które w praktycznej realizacji hallotronu nie mogą być elektrodami punktowymi. Sprowadza się to do konieczności uwzględniania wszystkich warunków brzegowych opisanych zależnościami (4.7) ÷ (4.9), które w praktycznie ważnych przypadkach przedstawiają sobą bardzo trudny problem matematyczny. W szeregu przypadków występuje konieczność dysponowania płytkami o odmiennym kształcie i konfiguracji elektrod (których kilka przykładów pokazano na rys. 6.1). Dla dokładnego poznania ich właściwości znajomość rozkładu pola elektrycznego spełniającego równanie Laplace'a jest rzeczą niezbędną. Do tego celu stosuje się metodę odwzorowań konforemnych, której pionierem w zastosowaniu do przyrządów galwanomagnetycznych był Wick [6], a następnie rozwijali ją Lippmann i Kuhrt [7, 8] oraz Haeusler [10]. Wykorzystuje się tu fakt, że równanie Laplace'a jest niezmiennicze względem transformacji konforemnych.

W ogólnym przypadku hallotronu odwzorowanie konforemne służy do znalezienia funkcji transformującej skomplikowany układ linii prądów i pola elektrycznego do odpo-

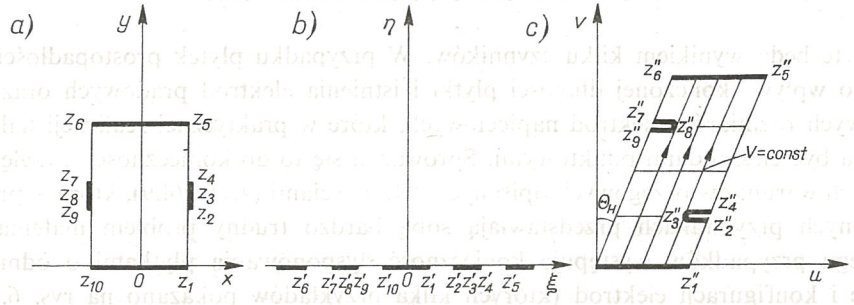
wiedniego układu geometrycznego, w którym rozkład prądu i pola elektrycznego jest stosunkowo prosty. A więc podstawą transformacji jest znalezienie właściwej funkcji transformującej. W ogólnym przypadku znalezienie takiej funkcji może być bardzo skomplikowane. Dlatego w praktycznych przypadkach najczęściej stosuje się metodę pozwalającą na stosunkowo łatwe wyznaczenie poszukiwanej funkcji, zwaną transformacją Christoffela-Schwarza. Transformacja ta przenosi rozkład pola elektrycznego w dowolnym wieloboku zamkniętym na płaszczyznę, jak na rys. 6.2. Natomiast transformacja odwrotna pozwala



Rys. 6.2. Zasada odwzorowania konforemnego

przejść od płaszczyzny do innego wieloboku. W rezultacie taka podwójna transformacja pozwala przejść od danej konfiguracji do konfiguracji najlepiej dostosowanej do problemu, jaki należy rozwiązać.

Dogodnymi i najczęściej używanymi w praktyce hallotronowej są dwie podstawowe konfiguracje. Pierwszą z nich przedstawiono schematycznie na rys. 6.3 [6, 9, 10]. Stosuje się ją w przypadku analizy rozkładu pola elektrycznego i prądu w hallotronach cztero-

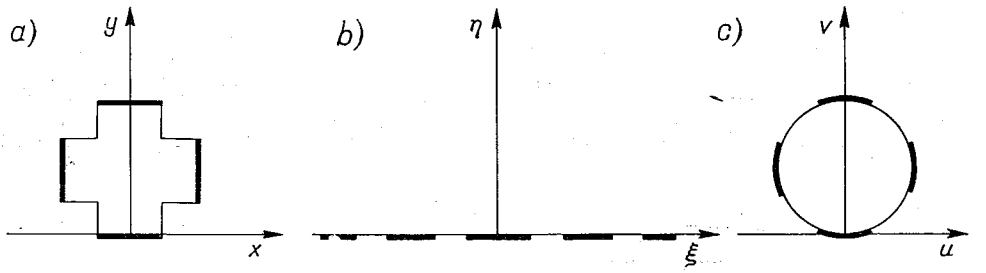


Rys. 6.3. Konfiguracje geometryczne używane przy transformacji dowolnego hallotronu

elektrodowych o dowolnym kształcie płytki półprzewodnikowej i elektrod. W takim przypadku stosuje się dwie kolejne wyżej wspomniane transformacje Christoffela-Schwarza. Drugi etap transformacji prowadzi do odwzorowania rozkładu pola i prądu elektrycznego na równoległościan pochylony o kąt Halla $\operatorname{tg}\Theta_H = \mu_H B$. Jedna para elektrod znajduje się na dwóch równoległych krawędziach równoległościanu. Druga para elektrod tworzy „wcięcia" do wnętrza płytki, a ich położenie wynika z procedury transformacji. Jak widać

z rys. 6.3c, w układzie takim rozkład prądu i pola elektrycznego przedstawiony jest przy pomocy linii prostych, a więc i określenie odpowiednich impedancji jest proste. Należy jednak podkreślić, że jedna procedura transformacji słuszna jest dla jednej wartości kąta Halla Θ_H, tak więc wyznaczenie parametrów jednej konfiguracji hallotronu wymaga tylu operacji obliczeniowych, przy ilu wartościach indukcji magnetycznej chcemy je znać.

Drugą konfigurację stosuje się w przypadku rozpatrywania diagonalnej symetrii płytki i elektrod (tzn. gdy rozmiary elektrod i odległości międzyelektrodowe są jednakowe). Procedura obliczeniowa może być uproszczona dzięki zastosowaniu kolejnych dwóch nieco łatwiejszych do obliczenia transformacji z tym, że konfiguracją końcową jest wtedy hallotron kołowy przedstawiony na rys. 6.4.



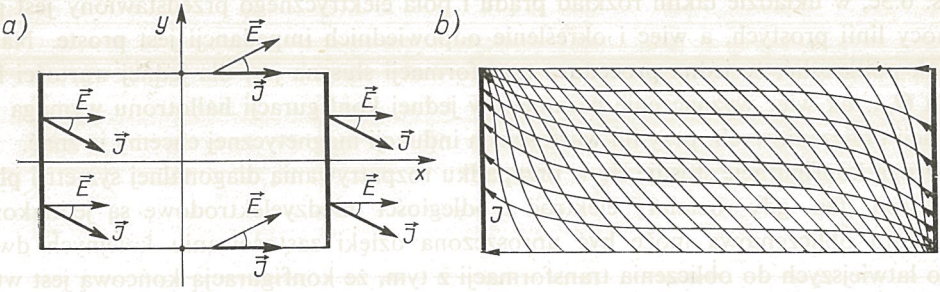
Rys. 6.4. Konfiguracje geometryczne używane przy transformacji hallotronu o symetrii diagonalnej

Wick [6] udowodnił, że hallotron może zostać przetransformowany do jednej z powyższych konfiguracji geometrycznych, gdy:

1. hallotron jest płytką półprzewodnikową o stałej grubości c (gdyż przekształcenia konforemne stosują się tylko do przypadków dwuwymiarowych) i stałej rezystywności ϱ,
2. rezystywność ϱ i współczynnik Halla R_H są izotropowe,
3. płytka jest obszarem jednospójnym, tzn. nie ma dziur wewnątrz, a elektrody leżą na obwodzie płytki.

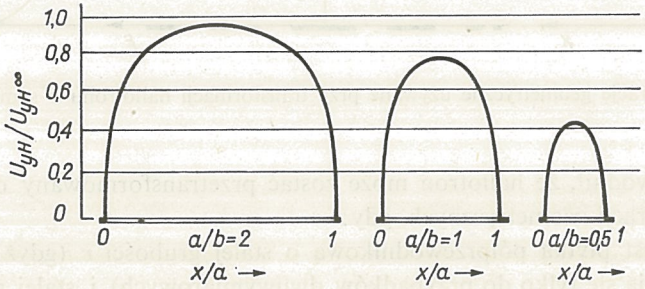
7. PRZYKŁADY KONFIGURACJI HALLOTRONÓW CZTEROELEKTRODOWYCH

Rozpatrując prostopadłościenną płytkę półprzewodnikową o skończonej długości należy uwzględniać warunek brzegowy wynikający z istnienia elektrod. Wobec tego w otoczeniu elektrod prądowych należy się spodziewać rozkładu prądu i pola elektrycznego analogicznego do rozkładu w bardzo krótkiej płytce hallotronowej (patrz rys. 5.5), podczas gdy w pobliżu środka płytki rozkład linii $\vec{J}$ i $\vec{E}$ będzie raczej analogiczny do rozkładu w płytce nieskończenie długiej. Spodziewane rozkłady $\vec{J}$ i $\vec{E}$ w takiej płytce przedstawiono na rys. 7.1. A więc w bezpośrednim sąsiedztwie elektrod prądowych kierunek wektora $\vec{E}$ będzie równoległy do bocznej krawędzi płytki (bezelektrodowej), a wektor $\vec{J}$ będzie odchylony o kąt Halla Θ_H (decyduje 2 warunek brzegowy), natomiast w środku płytki wektor $\vec{J}$ będzie równoległy do krawędzi płytki, a wektor $\vec{E}$ będzie odchylony o kąt Θ_H (decyduje 1 warunek brzegowy). Fakt ten jest równoważny zmniejszeniu efektywnej wartości składowej E_y,



Rys. 7.1. Rozkład prądu i pola elektrycznego w płytce prostokątnej z uwzględnieniem warunku brzegowego dotyczącego elektrod prądowych

a zatem i napięcia Halla mierzonego na punktowych elektrodach holowskich, co ilustruje rys. 7.2 [11]. Do wyrażenia na napięcie Halla (5.5) należy więc wprowadzić pewną funkcję poprawkową g_1, która jest zależna od stosunku długości do szerokości płytki $\frac{a}{b}$ i kąta

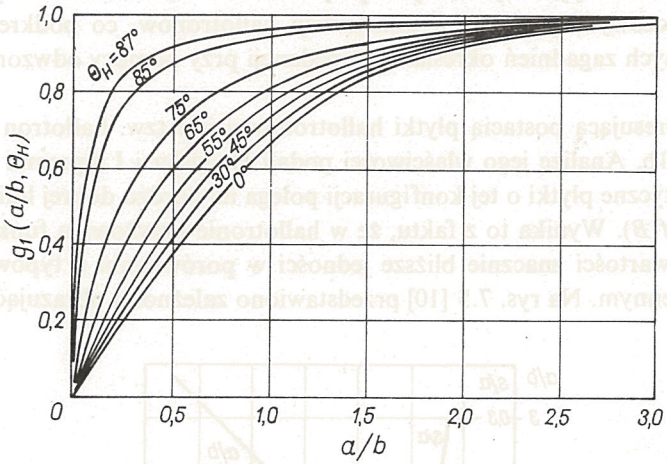


Rys. 7.2. Rozkład napięcia Halla wzdłuż osi x dla różnych stosunków $\frac{a}{b}$ przy $\Theta_H = \frac{\pi}{3}$ [9]

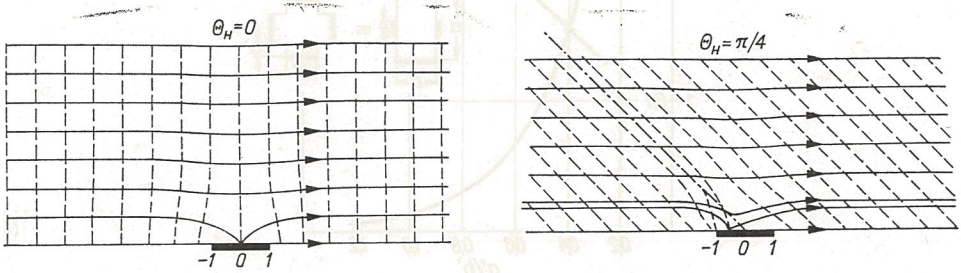
Halla Θ_H, a uwzględniającą wyżej opisane zjawiska. Funkcję tę wyznaczyli m.in. Lippmann i Kuhrt [8] stosując metodę odwzorowań konforemnych; jest ona przedstawiona na rys. 7.3.

Podobnie będą wpływać na rozkład pola elektrycznego niepunktowe elektrody holowskie zaburzające rozkład pola elektrycznego i prądu w otoczeniu elektrod. Na rys. 7.4 przedstawiono rozkład linii $\vec{J}$ i $\vec{E}$ w otoczeniu elektrody napięciowej o skończonej długości dla dwóch wartości kąta Halla: $\operatorname{tg}\Theta_H = 0$ i $\frac{\pi}{4}$ [9]. Prowadzi to do uzupełnienia wyrażenia na napięcie Halla (5.5) następną funkcją poprawkową, która zależy od rozmiarów płytki i elektrod oraz kąta $\Theta_H - g_2\left(\frac{s}{b}, \Theta_H\right)$. Uwzględniając obydwie funkcje poprawkowe można określić jedną będącą iloczynem dwóch poprzednich

$$G_H = g_1 g_2 . \tag{7.1}$$



Rys. 7.3. Zależność poprawkowego współczynnika geometrycznego g_1 od stosunku $\frac{a}{b}$ oraz kąta Halla [11]



Rys. 7.4. Rozkład prądu i pola elektrycznego w otoczeniu elektrody napięciowej hallotronu: a) przy $\Theta_H = 0$. b) przy $\Theta_H = \frac{\pi}{4}$ [9]

Haeusler [10] podaje następujący wzór opisujący współczynnik G_H

$$G_H = \left[1 - \exp\left(\frac{-\pi}{2}\frac{a}{b}\right)\frac{\Theta_H}{\operatorname{tg}\Theta_H}\right]\left[1 - \frac{2}{\pi}\frac{s}{b}\frac{\Theta_H}{\operatorname{tg}\Theta_H}\right], \tag{7.2}$$

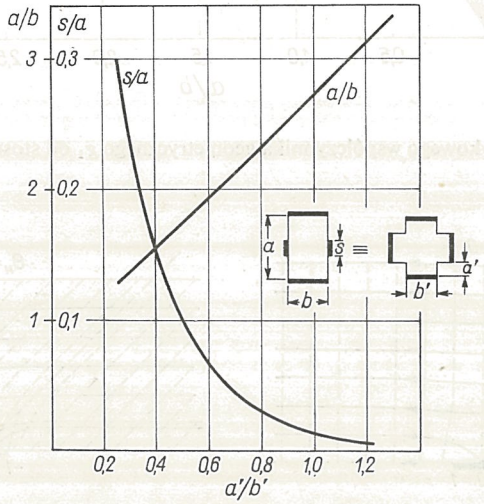
przy czym jego dokładność jest lepsza od 4% dla $\frac{a}{b} \geqslant 1{,}5$ i $\frac{s}{b} \leqslant 0{,}18$. Wobec tego wzór (5.5) przyjmie następującą postać

$$U_{yH} = \frac{G_H R_H}{c} I_x B_z. \tag{7.3}$$

Z analizy wzoru (7.3) z uwzględnieniem współczynnika G_H wynika bardzo ważna, niekorzystna właściwość hallotronów — pewna nieliniowość napięcia Halla względem indukcji magnetycznej. Jest to pewne ograniczenie podstawowej zalety hallotronu wymienianej

na wstępie — a słusznej jak się okazuje w przybliżeniu — ich liniowości. Zjawisko to stanowi jeden z kluczowych problemów konstrukcji hallotronów, co podkreśla jeszcze wagę wyżej omówionych zagadnień określania impedancji przy pomocy odwzorowań konforemnych.

Bardzo interesującą postacią płytki hallotronowej jest tzw. hallotron krzyżowy pokazany na rys. 6.1b. Analizę jego właściwości podali Haeusler i Lippmann [10]. Największe znaczenie praktyczne płytki o tej konfiguracji polega na bardzo dobrej liniowości charakterystyki $U_{yH} = f(B)$. Wynika to z faktu, że w hallotronie krzyżowym funkcja poprawkowa G_H przyjmuje wartości znacznie bliższe jedności w porównaniu z typowym hallotronem prostopadłościennym. Na rys. 7.5 [10] przedstawiono zależności obrazujące równoważność



Rys. 7.5. Równoważność funkcji poprawkowych G_H dla hallotronu prostokątnego i krzyżowego [10]

rozmiarów hallotronu krzyżowego z rozmiarami płytki prostopadłościennej i elektrod z punktu widzenia wartości współczynnika G_H. Z rysunku tego wynika, że hallotron krzyżowy o stosunku rozmiarów $\frac{a'}{b'} > 1$ (bardzo łatwo jest zrealizować w praktyce takie rozmiary hallotronu) odpowiada hallotronowi prostokątnemu o rozmiarach $\frac{a}{b} > 3$ i rozmiarach elektrod napięciowych $\frac{s}{a} \to 0$; jest on więc dobrym przybliżeniem hallotronu o nieskończonej długości i punktowych elektrodach, dla którego wartość współczynnika G_H w całym zakresie indukcji równa jest 1. W praktyce osiągnięta nieliniowość hallotronów krzyżowych wynosiła ok. 1‰ dla hallotronów z InAs i ok. 0,3‰ dla hallotronów z InAsP w zakresie indukcji $B = 0-1$ T [10]. Wartości te są o rząd wielkości lepsze w porównaniu z praktycznie wykonywanymi hallotronami prostokątnymi.

Powyżej omówiono kilka konfiguracji czteroelektrodowych przyrządów galwanomagnetycznych używanych w praktyce, bądź służących do teoretycznej analizy ich właści-

wości. Jednak należy podkreślić, że przedstawione konfiguracje nie wyczerpują znacznego bogactwa praktycznie stosowanych lub teoretycznie przewidzianych postaci geometrycznych hallotronów.

8. HALLOTRON JAKO CZWÓRNIK

Omówimy teraz pewne szczególne cechy macierzy impedancyjnej hallotronu czteroelektrodowego. W takim przypadku macierz (3.3) ograniczy się do dwóch kolumn i dwóch wierszy przyjmując postać ogólną:

$$\begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_{11}(\vec{B}) & Z_{12}(\vec{B}) \\ Z_{21}(\vec{B}) & Z_{22}(\vec{B}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix}. \tag{8.1}$$

Składowe macierzy są funkcjami indukcji $\vec{B}$, a pomiędzy nimi zachodzą ważne zależności wynikające z zasady Onsagera [3] dotyczące symetrii i antysymetrii składowych macierzy. Jednak wnioski z tej zasady zawężają ogólną postać macierzy (8.1) do macierzy rezystancyjnej, gdyż zjawiska zachodzące w płytce hallotronowej przy wielkich częstotliwościach nie podlegają zasadzie Onsagera. Wobec tego macierz (8.1) należy zapisać w postaci rezystancyjnej (8.1a)

$$|R| = \begin{vmatrix} R_{11}(\vec{B}) & R_{12}(\vec{B}) \\ R_{21}(\vec{B}) & R_{22}(\vec{B}) \end{vmatrix}. \tag{8.1a}$$

Należy podkreślić, że rozpatrując ogólny przypadek hallotronu rzeczywistego wiele zjawisk pasożytniczych występujących w płytce hallotronowej również nie podlega omawianej zasadzie. Wobec tego należy sobie zdawać sprawę z faktu, że opis hallotronu przy pomocy macierzy (8.1a) określa tylko pewne ogólne jego właściwości. W niektórych szczególnych przypadkach, gdy poziom zjawisk zakłócających (szczególnie nie podlegających zasadzie Onsagera) jest znaczny, wnioski z analizy macierzy (8.1a) mogą okazać się fałszywe.

Poniżej przedstawimy przybliżone sformułowanie składowych macierzy rezystancyjnej dla hallotronu czteroelektrodowego. Można wykazać, że dla przypadku stacjonarnego będą obowiązywały następujące zależności wynikające z zasady Onsagera [12]

$$\begin{aligned} R_{11}(\vec{B}) &= R_{11}(-\vec{B}), \\ R_{12}(\vec{B}) &= R_{21}(-\vec{B}), \\ R_{21}(\vec{B}) &= R_{12}(-\vec{B}), \\ R_{22}(\vec{B}) &= R_{22}(-\vec{B}). \end{aligned} \tag{8.2}$$

Rezystancje powyższe można określić w sposób ogólny dla kwadratowego przybliżenia względem $\vec{B}$. Rozkładając poszczególne składowe na szereg Taylora i uwzględniając zależności (8.2) otrzymuje się następujące wyrażenia [12]

$$\begin{aligned} R_{11}(\vec{B}) &= R_{11}(0)+b_{11}B^2, \\ R_{12}(\vec{B}) &= R_{12}(0)+a_{12}B+b_{12}B^2, \\ R_{21}(\vec{B}) &= R_{12}(0)-a_{12}B+b_{12}B^2, \\ R_{22}(\vec{B}) &= R_{22}(0)+b_{22}B^2. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Porównując przedstawione rezultaty z wynikami podanymi w poprzednich rozdziałach zauważymy, że człony $R_{11}(0)$ i $R_{22}(0)$ opisują rezystywność hallotronów bez pola magnetycznego, składniki $b_{11}B^2$ i $b_{22}B^2$ — opisują zjawisko magnetorezystancji, składniki $R_{12}(0)$ — napięcie asymetrii, składniki $a_{12}B$ — poprzeczne zjawisko Halla, a $b_{12}B^2$ — planarne zjawisko Halla. Jeżeli rozpatrywać będziemy przypadek, gdy $\vec{B} \perp \vec{E}, \vec{J}$, dla którego planarne zjawisko Halla znika, otrzymamy następującą macierz impedancyjną opisującą hallotron czteroelektrodowy

$$\begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_{11}(0)+b_{11}B^2 & R_{12}(0)+a_{12}B \\ R_{12}(0)+a_{12}B & R_{22}(0)+b_{22}B^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix}. \tag{8.4}$$

Poszczególne składowe można wyznaczyć doświadczalnie na gotowych hallotronach spełniając warunki wynikające z poprzednio podanej zależności (2.4), lub też można określić je analitycznie stosując procedurę opisaną w rozdziałach 4÷7. W ten sposób wyznaczone składowe macierzy impedancyjnej mogą posłużyć do określenia dalszych parametrów charakteryzujących hallotron jako czwórnik.

W zakończeniu autor pragnie serdecznie podziękować Panu drowi hab. S. Sikorskiemu za liczne dyskusje i udostępnienie nie opublikowanych prac, które przyczyniły się do sformułowania założeń niniejszego artykułu. Pani dr J. Marciak-Kozłowskiej dziękuję za dyskusje dotyczące termodynamicznego ujęcia równań transportu w półprzewodnikach oraz odwzorowań konforemnych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. Kobus, J. Tuszyński, Hallotrony i gaussotrony, WNT, Warszawa 1966.
2. W. P. Sigorskij, Analiza układów elektronicznych, WNT, Warszawa 1965.
3. S. R. de Groot, P. Mazur, Non-equilibrium Thermodynamics, North Holland Publ. Co., Amsterdam 1962.
4. A. C. Beer, Galvanomagnetic Effects in Semiconductors, Academic Press, New York 1963.
5. E. H. Putley, The Hall Effect and Related Phenomena, Butterwoth, London 1960.
6. R. F. Wick, Solution of the Field Problem of the Germanium Gyrator, J. Appl. Phys., 25, 6, 1954, 741.
7. H. J. Lippmann, F. Kuhrt, Der Geometrieeinfluss auf den transversalen magnetischen Widerstandseffekt bei rechteckformigen Halbleiterplatten. Zs. Naturf., 13a, 1958, 462.
8. H. J. Lippmann, F. Kuhrt, Der Geometrieeinfluss auf den Halleffekt bei rechteckigen Halbleiterplatten, Zs. Naturf., 13a, 1958, 474.
9. J. Haeusler, Die Untersuchung von Potentialproblem bei tensorieller Leitfähigkeit der Halbleiter und Plasmen in transversalen Magnetfeld, Dissertation, TH Stuttgart 1967.
10. J. Haeusler, H. J. Lippmann, Hallgeneratoren mit kleinem Linearisierungsfehler, Solid Sta Electronics, 11, 1968, 173.
11. F. Kuhrt, H. J. Lippmann, Hallgeneratoren. Eigenschaften und Anwendungen, Springer Verlag, 1968.
12. S. Sikorski, dane nie opublikowane, 1970.

A. KOBUS

FOUNDATIONS OF THE HALL GENERATOR THEORY

Summary

In the paper the synthesis of the basic problems concerning the Hall generator theory is considered. At first the transport equations for an arbitrary region of the semiconductor, which is influenced by the electric and magnetic fields, formulated on the basis of the thermodynamics of irreversible processes are discussed. The role of the Onsager reciprocity relation is considered and the physical interpretation of thermodynamical coefficients is shown. Then, the considerations are transferred into the concrete region of the semiconductor with a number of electrodes — i.e. a Hall generator.

The effect of boundary conditions and the principles of the determination of the current and electric field distribution in the Hall plate is shown. Finally, particular features of the impedance matrix of the Hall generator, arising from the Onsager reciprocity relation were shown.

A. KOBUS

LES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE D'UN GÉNÉRATEUR À EFFET HALL

Résumé

L'auteur présente un essai de synthèse de la théorie d'un générateur à effet Hall. D'abord on a discuté les équations de transport — formulées sur la base de la thermodynamique des processus irréversibles — pour une région arbitraire d'un semi-conducteur placé dans le champ magnétique et éléctrique. On a présenté le rôle de la relation d'Onsager ainsi que l'interprétation physique des coéfficients thermodynamiques. Ensuite l'auteur étudie les problèmes d'un semi-conducteur pourvu d'électrodes, constituant le générateur à effet Hall. On a presenté l'influence des conditions limites et les principes de la détermination de la densité de courant et de l'intensité de champ éléctrique dans une plaquette Hall. Enfin on a défini l'interdépendance des paramètres de la matrice d'impédance d'un générateur Hall résultant de la relation Onsager.

A. KOBUS

THEORETISCHE GRUNDLAGEN DES HALL-GENERATORS

Zusammenfassung

Im Artikel wurde eine Sythese von Grundproblemen der Hall-Generator-Theorie gebracht. Eingangs wurden Transportgleichungen für beliebigen Bereich von Halbleitern erwogen, die durch ein auf Grund Thermodynamik irreversibler Prozesse gebildetes, elektrisches und magnetisches Feld beeinflußt werden. Es wurde die Rolle der Onsagerschen Gegenseitigkeitsrelation besprochen, und die physische Interpretation der thermodynamischen Koeffiziente gebracht. Im weiteren hat man sich mit dem Bereich der den Hall-Generator bindenden Halbleiter mit entsprechender Elektrodenzahl befaßt. Man zeigte den Einfluß der Randprobleme und Grundsätze für die Bestimmung der Stromverteilung und des elektrischen Feldes in Hallplättchen. Abschließend wurden besondere aus dem Onsager-Grundsatz hervorgehenden Eigenschaften der Impedanzmatrix des Hall-Generators vorgeführt.

А. КОБУС

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДАТЧИКОВ ХОЛЛА

Р е з ю м е

В статье представлен синтез основных проблем теории датчиков Холла. С начала обсуждены уравнения транспорта для произвольной области полупроводника, на которую влияют электрическое и магнитное поля, составленные на основании термодинамики необратимых процессов. Показана роль релации взаимодействия Онсагера и подана физическая интерпретация термодинамических коэффициентов. Далее рассуждения проведены для области полупроводника содержащие соответствующее количество электродов, являющийся датчиком Холла. Показано влияние краевых условий и представлены принципы определения распределения тока и электрического поля в пластинке Холла. В заключение представлены особые признаки матрицы импедансов датчика Холла вытекающие из релации Онсагера.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1972, 18, z. 3, ss. 515—550

621.374

Standardowe sygnały impulsowe wielkiej częstotliwości

ADAM SMOLIŃSKI (WARSZAWA)

Instytut Podstaw Elektroniki Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 10.11.1971

Praca niniejsza jest próbą zebrania informacji o właściwościach sygnałów impulsowych wielkiej częstotliwości o modulacji amplitudowej.

Na początku wprowadzono impulsy standardowe o skończonym czasie trwania. Ponadto opisano typowe impulsy standardowe o nieskończonym czasie trwania, lecz o skończonej energii.

Dalej podano widma częstotliwościowe rozważanych impulsów standardowych. Wykazano, że w szeregu przypadkach twierdzenie o modulacji (przesunięciu częstotliwościowym) może być tutaj wielce pomocne.

Zdefiniowano sygnał analityczny i omówiono jego właściwości zarówno dla przebiegów ograniczonych i nieograniczonych częstotliwościowo. Pozwoliło to na wprowadzenie definicji obwiedni jako modułu sygnału analitycznego. Omówiono wady tej definicji dla przebiegów impulsowych wielkiej częstotliwości oraz sposób zaradzenia im odpowiadający w zasadzie definicji obwiedni geometrycznej rodziny impulsów zbudowanych na tle badanego impulsu. Podano również definicję parametrycznej obwiedni szczytowej prowadzącej do prostych programów obliczeniowych dla maszyn cyfrowych.

W ostatniej części badano powtarzające się impulsy wielkiej częstotliwości.

1. WSTĘP

Przekazywanie informacji na dalekie odległości nie może się odbywać bez udziału fali nośnej wielkiej częstotliwości. Na falę nośną o częstotliwości rozchodzącej się dobrze w przestrzeni między anteną nadawczą i odbiorczą nanosi się informacje w postaci modulacji. Modulacja ta może mieć różną postać, np. sinusoidalną lub impulsową. Ponieważ elementarną informację określa jeden impuls małej częstotliwości, więc z punktu widzenia przesyłania informacji na dalekie odległości elementarną jednostką sygnału jest jeden impuls wielkiej częstotliwości. Impuls taki może przybierać różną postać od tak zwanej żmijki impulsu gasnącego, stosowanego w zaraniu radiotechniki, do impulsów prostokątnych i dzwonowych, stosowanych obecnie w analizie układów elektronicznych.

Dla umożliwienia selektywnego odbioru sygnału stosuje się modulowany przebieg wielkiej częstotliwości w postaci sinusoidalnej fali nośnej jednej częstotliwości. Naniesiona na tę falę nośną modulacja może mieć postać amplitudową lub kątową, jak to wykazuje typowa zależność czasowa rozważanego zjawiska

$$f(t) = M(t) \cdot \sin \Phi(t). \tag{1.1}$$

W pracy tej ograniczymy się do modulacji amplitudowej, zatem wyrażenie (1.1) przybiera postać

$$f(t) = M(t) \cdot \sin(\omega_s t + \psi), \tag{1.2}$$

gdzie $M(t)$ jest funkcją modulującą, a ψ kątem fazowym przebiegu sygnału wielkiej częstotliwości. Istniejące wymagania techniczne narzucają warunek na funkcję modulującą $M(t)$, aby była rzeczywista i ograniczona ($M(t) \geqslant 0$).

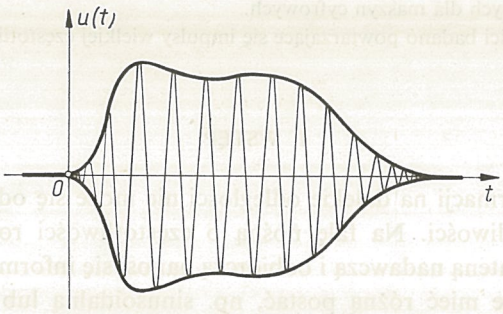
2. IMPULSY WIELKIEJ CZĘSTOTLIWOŚCI

2.1. Ogólne właściwości

Impulsy wielkiej częstotliwości występujące w urządzeniach elektronicznych mogą mieć różne postacie. Ich wspólną cechą jest fakt, że funkcja $M(t)$ jest nieperiodyczna; będziemy ją oznaczać przez $M_i(t)$.

Do badania układów elektronicznych zwykle stosuje się impulsy standardowe, które łatwo jest określić analitycznie i które pozwalają na ujawnianie ważnych właściwości układów. Impulsy standardowe wielkiej częstotliwości mają funkcję modulującą $M_i(t)$ nieperiodyczną i nierówną zeru w skończonym przedziale, np. $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T_i$ i równą zeru zewnątrz tego przedziału. Funkcje modulujące są oparte na skoku jednostkowym rozpoczynającym i kończącym impuls wielkiej częstotliwości.

Funkcja fali nośnej (1.2) wykazuje wewnątrz tego przedziału szereg maksimów i minimów (rys. 1).



Rys. 1. Impuls wielkiej częstotliwości

Oznaczamy okres fali nośnej jako

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \tag{2.1}$$

i wprowadzamy współczynnik wypełnienia funkcji modulującej $M_i(t)$ jako

$$n = \frac{2T_i}{T} = \frac{\omega T_i}{\pi} = 2fT_i. \tag{2.2}$$

Potraktujmy funkcję modulującą $M_i(t)$ jako pierwszą połowę okresu okresowej funkcji $M_p(t)$ o okresie równym $2T_i$. Jej pulsacja równa się

$$\delta = \frac{\pi}{T_i}. \tag{2.3}$$

Zatem można napisać, że współczynnik wypełnienia funkcji modulującej

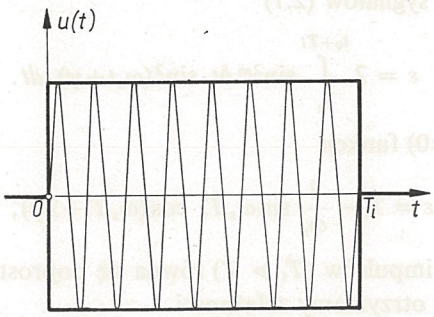
$$n = \frac{\omega}{\delta}. \tag{2.4}$$

Współczynnik ten jest większy od kilku dla interesujących w praktyce przypadków.

2.2. Impulsy standartowe o skończonym czasie trwania

Podobnie jak przy badaniu wzmacniaczy dolnoprzepustowych [1], celowym jest wybranie określonego sygnału standartowego wielkiej częstotliwości, np. w postaci prostokątnego impulsu wielkiej częstotliwości (rys. 2). Można go opisać w postaci czasowej jako

$$f_i(t) = [\mathbf{1}(t-t_0) - \mathbf{1}(t-t_0-T_i)]\sin(\omega_s t+\psi). \tag{2.5}$$



Rys. 2. Impuls wielkiej częstotliwości o obwiedni prostokątnej

Należy podkreślić, że funkcja ta, zależna od dwóch parametrów: kąta fazowego ψ fali nośnej oraz czasu trwania impulsu T_i, może być zapisana również w postaci [1)]

$$f_i(t) = \begin{cases} \sin(\omega_s t+\psi) & \text{dla } t_0 \leqslant t \leqslant t_0+T_i \\ 0 & \text{dla } t < t_0 \text{ i } t > t_0+T_i. \end{cases} \tag{2.6}$$

[1)] Należy tutaj dodać, że często wygodniej jest prowadzić rachunki na innej postaci sygnału, symetrycznej względem środka impulsu

$$f_i(t) = \begin{cases} \cos\omega_s t & \text{dla } -\frac{1}{2}T_i \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}T_i \\ 0 & \text{dla } t < -\frac{1}{2}T_i \text{ i } t > \frac{1}{2}T_i \end{cases} \tag{2.6a}$$

Jest ona funkcją rzędu zero klasy funkcji potęgowo sinusoidalnych (gdzie m nazywamy rzędem funkcji)

$$f_i(t) = \begin{cases} \sin^m \delta t \cdot \sin(\omega_s t + \psi) & \text{dla } t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T_i \\ 0 & \text{dla } t < t_0 \text{ i } t > t_0 + T_i, \end{cases} \tag{2.7}$$

związanych warunkiem $\delta t_0 = 2\pi k'$, gdzie k' jest liczbą całkowitą.

Opisana w ten sposób klasa funkcji impulsowych jest wielce użyteczna, gdyż — jak to będzie później pokazane — ma widmo częstotliwościowe składające się z elementarnych widm funkcji zerowego rzędu (2.6) [2].

Postacie kilku funkcji pierwszych rzędów są podane w tablicy 1.

Podstawowym parametrem sygnału impulsowego jest całka z jego kwadratu nazywana często „energią" sygnału [3]

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt, \tag{2.8}$$

gdzie oznaczono

$$f(t) = M(t)\sqrt{2}\,\sin(\omega_s t + \psi). \tag{2.9}$$

Tak sformułowana „energia" ma naturalnie wymiar czasu. Jeśli sygnał ma postać napięciową lub prądową, to ta całka wyraża energię dostarczoną przez ten sygnał do jednostkowej oporności.

Dla wymienionej klasy sygnałów (2.7)

$$\varepsilon = 2 \int_{t_0}^{t_0+T_i} \sin^{2m} \delta t \cdot \sin^2(\omega_s t + \psi) \cdot dt. \tag{2.10}$$

Dla zerowego rzędu ($m = 0$) funkcji

$$\varepsilon = T_i - \frac{1}{\omega_s} \sin \omega_s T_i \cdot \cos(\omega_s T_i + 2\psi), \tag{2.11}$$

a dla dostatecznie długich impulsów ($T_i \gg T$) równa się poprostu T_i.

W ogólnym przypadku otrzymamy zależności

$$\varepsilon = \binom{2m}{m} 2^{-2m} T_i \tag{2.12}$$

naturalnie dla dostatecznie dużego wypełnienia impulsu ($\omega_s \gg \delta$). Współczynnik we wzorze (2.12) wynosi więc 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{35}{128}$ ... odpowiednio dla $m = 0, 1, 2, 3, 4$ ...

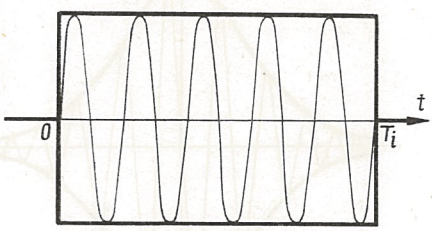
2.3. Impulsy standardowe o nieskończonym czasie trwania

W szeregu rozważań teoretycznych wygodniej jest wprowadzić impulsy wielkiej częstotliwości o teoretycznie nieskończonym czasie trwania lecz o skończonej energii [3]. Do takich sygnałów należy sygnał sinusoidalny zanikający wykładniczo (rys. 3) [4] [5] [6]

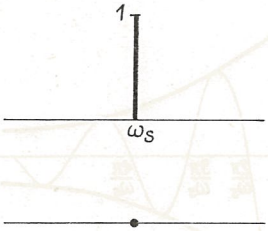
$$f_i(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} \sin(\omega_s t + \psi) & \text{dla } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

Impulsy wielkiej częstotliwości modulowane sinusoidą rzędu $m = 0, 1, 2$ i 3 (na lewo) oraz odpowiadające im widma częstotliwościowe (na prawo)

a)

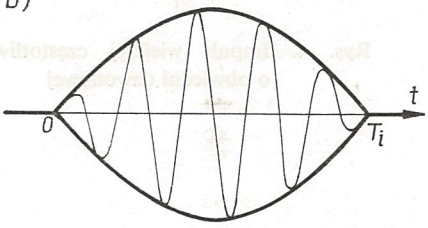


$m=0$

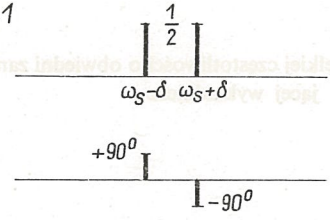


$f_S^*(t) = \sin \omega_S t$

b)

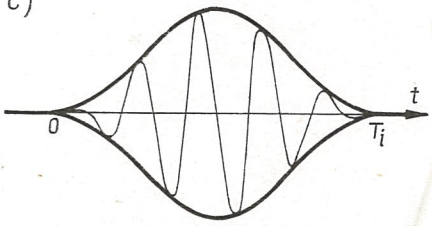


$m=1$

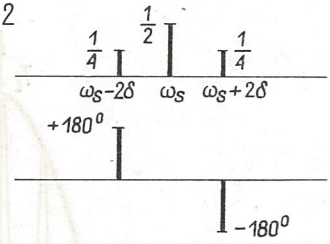


$2f_S^*(t) = \sin[(\omega_S-\delta)t+90^0]+\sin[(\omega_S+\delta)t-90^0]$

c)

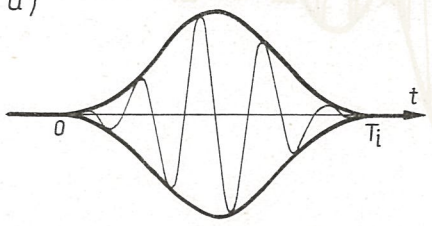


$m=2$

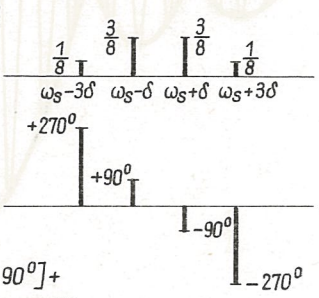


$4f_S^*(t) = 2\sin \omega_S t +$
$+\sin[(\omega_S-2\delta)t+180^0]+\sin[(\omega_S+2\delta)t-180^0]$

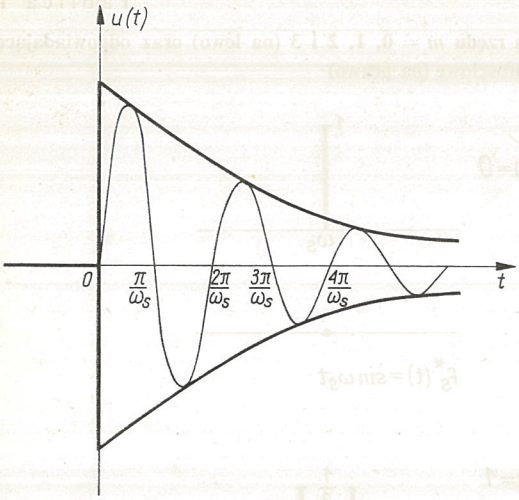
d)



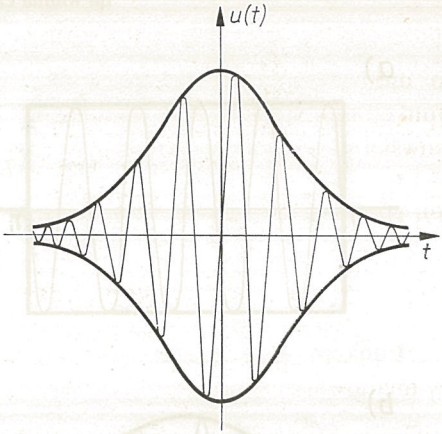
$m=3$



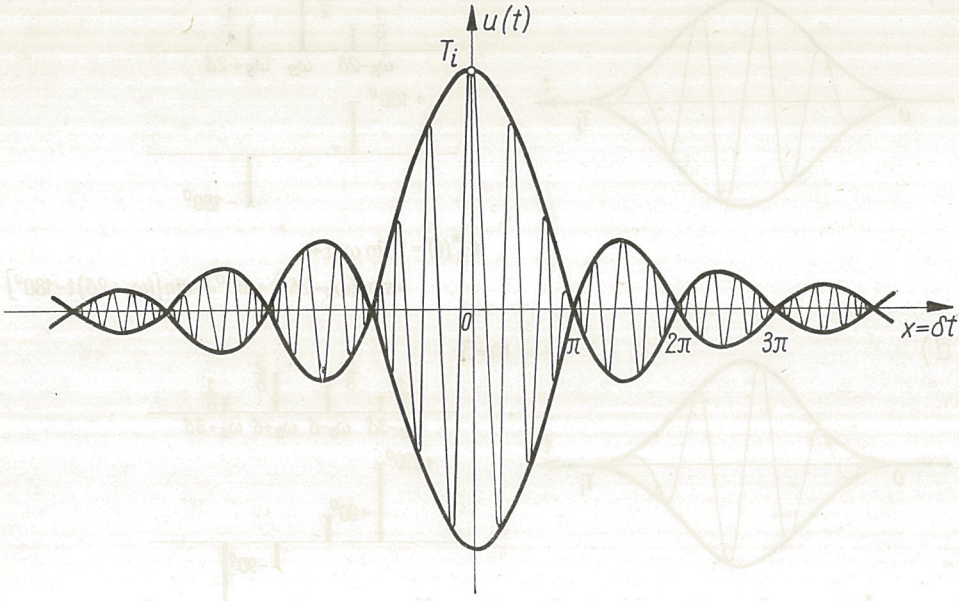
$8f_S^*(t) = 3\sin[(\omega_S-\delta)t+90^0]+3\sin[(\omega_S+\delta)t-90^0]+$
$+\sin[(\omega_S-3\delta)t+270^0]+\sin[(\omega_S+3\delta)t-270^0]$



Rys. 3. Impuls wielkiej częstotliwości o obwiedni zanikającej wykładniczo



Rys. 4. Impuls wielkiej częstotliwości o obwiedni dzwonowej



Rys. 5. Impuls wielkiej częstotliwości o obwiedni $\frac{\sin \delta t}{\delta t}$

Jako jego umowny czas trwania przyjmujemy $T_i \approx 2{,}3/\alpha$ (co odpowiada spadkowi do 0,1 wartości maksymalnej funkcji modulującej $M_i(t)$) oraz sygnał dzwonowy (rys. 4)

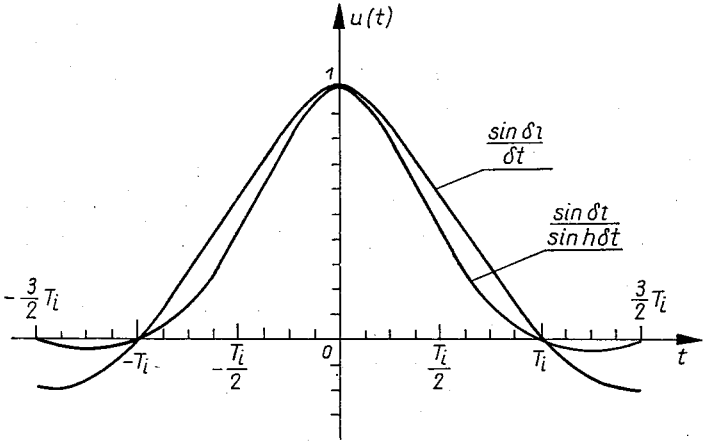
$$f_i(t) = e^{-b^2t^2}\sin(\omega_s t+\psi) \quad \text{dla} \quad -\infty < t < +\infty, \tag{2.14}$$

o umownym czasie trwania $T_i \approx 3{,}0/b$ (między punktami 0, 1 wartości maksymalnej funkcji modulującej M_i). Sygnał taki nazywa się w fizyce gaussowskim pakietem lub gaussowską paczką fal [7] [8].

Istnieje jeszcze inna definicja pakietu falowego stosowana m.in. w fizyce kwantowej [9] [10]

$$f_i(t) = \frac{\sin\delta t}{\delta t}\sin(\omega_s t+\psi) \quad \text{dla} \quad -\infty < t < +\infty. \tag{2.15}$$

Funkcja ta jest przedstawiona na rys. 5. Pewną jej odmianą jest funkcja zawierająca w mianowniku sinh δt zamiast δt (rys. 6) [11].



Rys. 6. Porównanie impulsów w.cz. o obwiedniach $\frac{\sin\delta t}{\delta t}$ i $\frac{\sin\delta t}{\sinh\delta t}$

Całkowita „energia" impulsu sinusoidy zanikającej wykładniczo przy dostatecznie małym tłumieniu sygnału ($\omega_s \gg \alpha$) równa się w przybliżeniu 0,22 T_i, podczas gdy dla sygnału dzwonowego dostatecznie wypełnionego ($\omega_s \gg b$) ok. 0,21 T_i.

Należy również dodać, że „energia" dla sygnału wyrażonego wzorem (2.15) wynosi 0,25 T_i dla pełnego impulsu i 0,225 T_i dla zawartego w czasie $2T_i$ (rys. 5).

2.4. Ogólniejsza postać impulsu wielkiej częstotliwości

W szeregu rozważań przyjmuje się, że sygnał standartowy ma postacie wyżej podanych przebiegów modulujących prostokątnych, sinusoidalnych, wykładniczych czy też dzwonowych. Zazwyczaj przyjmuje się wypełnienie sygnału jedną częstotliwością wielką, chociaż

w niektórych przypadkach można zastosować funkcję wieloczęstotliwościową, co znajduje zastosowanie w rozważaniach obejmujących sygnał wraz z zakłóceniami i szumami.

Sygnały impulsowe po przejściu przez układ elektroniczny zmieniają swą postać i w zasadzie można je opisać skomplikowanymi funkcjami wykładniczo-sinusoidalnymi o współczynnikach zależnych od kąta fazowego sygnału ψ.

3. WIDMO CZĘSTOTLIWOŚCIOWE IMPULSU WIELKIEJ CZĘSTOTLIWOŚCI

3.1. Własności podstawowe

Impulsy wielkiej częstotliwości, opisane uprzednio w skali czasowej, można również przedstawić w postaci widma częstotliwościowego. Widmo $F(\omega)$ przebiegu elektrycznego definiuje się jako transformatę Fouriera funkcji czasowej w postaci

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt. \tag{3.1}$$

Ponieważ z założenia $f(t)$ jest funkcją rzeczywistą, więc składowa rzeczywista widma $F(\omega)$ musi być parzysta, a składowa urojona nieparzysta. Ponadto — biorąc pod uwagę, że impuls nie istnieje dla czasów ujemnych — można stwierdzić, że składowa urojona widma jest transformatą Hilberta (4.2) jego składowej rzeczywistej [12]. Zależności te pozwalają nie tylko na określenie ogólnych właściwości widma częstotliwościowego, lecz również na wyznaczenie charakterystyki fazowej widma przy znajomości jego charakterystyki amplitudowej, i odwrotnie.

Charakterystykę widmową wyznaczyć można również z przekształcenia Laplace'a $F(s)$ zakładając, że część rzeczywista zmiennej zespolonej s równa się zeru ($s = j\omega$)

$$F(\omega) = F(s)_{s=j\omega} = \mathscr{L}f(t)|_{s=j\omega}. \tag{3.2}$$

Charakterystykę amplitudową widma oblicza się jako $|F(\omega)|$, podczas gdy charakterystyka fazowa widma równa się $\arg F(\omega)$. Obliczanie modułu funkcji gęstości mocy $|F(\omega)|$, interesującego z punktu widzenia pomiarowego, jest zabiegiem dosyć żmudnym. Może tu być pomocne twierdzenie o modulacji (przesunięciu częstotliwościowym) pozwalające na przesunięcie widma przebiegu modulującego — zazwyczaj znanego z teorii sygnałów „małej częstotliwości" — w zakres dokoła częstotliwości wielkiej sygnału [12].

Twierdzenie o przesunięciu [13]

$$f(t) = M(t)\cdot e^{j\omega_s t} \leftrightarrow F(\omega-\omega_s) \equiv G(\omega), \tag{3.3}$$

dla

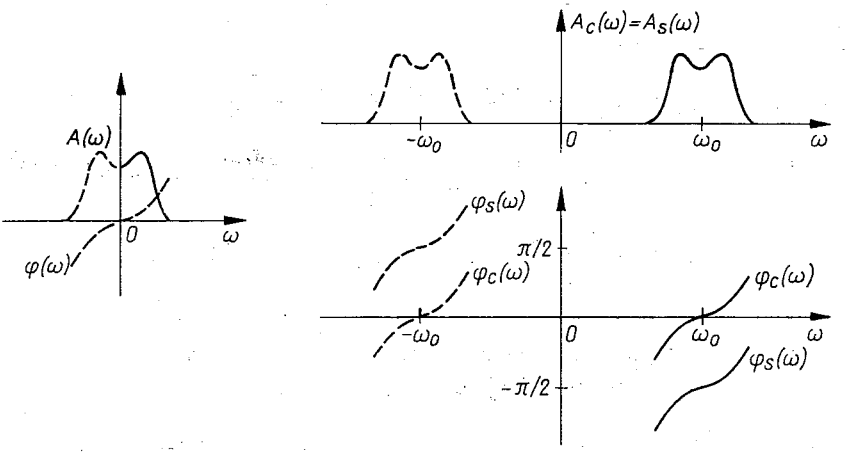
$$M(t) \leftrightarrow F(\omega) = A(\omega)\cdot e^{j\varphi(\omega)}, \tag{3.4}$$

prowadzi do prostych zależności:

$$M(t)\cos\omega_s t \leftrightarrow \frac{1}{2}F(\omega-\omega_s)+\frac{1}{2}F(\omega+\omega_s) = A_c(\omega)\cdot e^{j\varphi_c(\omega)} \tag{3.5}$$

$$M(t)\sin\omega_s t \leftrightarrow \frac{1}{2j}F(\omega-\omega_s)-\frac{1}{2j}F(\omega+\omega_s) = A_s(\omega)\cdot e^{j\varphi_s(\omega)} \tag{3.6}$$

zilustrowanych na rys. 7. Podane tutaj zależności pozwalają na stwierdzenie, że mnożenie funkcji modulującej przez przebieg (ko) sinusoidalny prowadzi do przesunięcia widma częstotliwościowego funkcji modulującej w stronę dodatnich i ujemnych częstotliwości i scentralizowanie go dokoła częstotliwości $\pm\omega_s$. Należy jednak dodać, że przesunięcie to odbywa się ze zmianą kształtu widma, jak to wynika z prostego przykładu.



Rys. 7. Ilustracja twierdzenia o modulacji (przesunięciu częstotliwościowym)

Załóżmy, że funkcja modulująca ma przebieg prostokątny i dla uproszczenia zapisu matematycznego podamy ją jako

$$M(t) = \mathbf{1}\left(t+\frac{1}{2}T_i\right)-\mathbf{1}\left(t-\frac{1}{2}T_i\right). \tag{3.7}$$

Jej funkcja widmowa [13]

$$F(\omega) = \frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega T_i}{2}. \tag{3.8}$$

Zatem

$$M(t)\cos\omega_s t \leftrightarrow \frac{1}{\omega-\omega_s}\sin\frac{(\omega-\omega_s)T_i}{2}+\frac{1}{\omega+\omega_s}\sin\frac{(\omega+\omega_s)T_i}{2} \equiv G(\omega) \tag{3.9}$$

Dla $\omega_s T_i = n\pi$, gdzie n jest znanym z równania (2.2) współczynnikiem wypełnienia, otrzymujemy

$$G(\omega) = \frac{2}{\omega^2-\omega_s^2}\left[\omega\sin\left(\frac{\omega}{\omega_s}\cdot\frac{n\pi}{2}\right)\cos\frac{n\pi}{2}-\omega_s\cos\left(\frac{\omega}{\omega_s}\cdot\frac{n\pi}{2}\right)\sin\frac{n\pi}{2}\right]. \tag{3.10}$$

Jeśli funkcja modulująca ma postać prostokątną przesuniętą w czasie

$$M(t) = \mathbf{1}(t-t_0)-\mathbf{1}(t-t_0-T_i), \tag{3.11}$$

to na mocy twierdzenia o przesunięciu czasowym [13] wynoszącym $t_0+\frac{1}{2}T_i$

$$F(\omega) = \frac{2}{\pi}\sin\frac{\omega T_i}{2}\cdot e^{-j\left(t+\frac{1}{2}T_i\right)\omega}. \tag{3.12}$$

Kąt fazowy funkcji widmowej przybiera wartości

$$\varphi(\omega) = -\omega\left(t_0 + \frac{1}{2}T_i\right). \tag{3.13}$$

Zatem dla sygnału wielkiej częstotliwości o postaci

$$M(t) = [\mathbf{1}(t-t_0) - \mathbf{1}(t-t_0-T_i)]\sin(\omega_s t + \psi) \tag{3.14}$$

otrzymujemy funkcję widmową

$$G(\omega) = \frac{1}{\omega-\omega_s}\sin\frac{(\omega-\omega_s)T_i}{2}e^{-j\left[(\omega-\omega_s)\left(t_0+\frac{1}{2}T_i\right)-\psi+\frac{1}{2}\pi\right]} + \\ + \frac{1}{\omega+\omega_s}\sin\frac{(\omega+\omega_s)T_i}{2}e^{-j\left[(\omega+\omega_s)\left(t_0+\frac{1}{2}T_i\right)+\psi-\frac{1}{2}\pi\right]} \tag{3.15}$$

wykazującą zera dla $(\omega-\omega_s)T_i = 2k'\pi$, gdzie k' jest liczbą całkowitą.

3.2. Widmo częstotliwościowe impulsu prostokątnego wielkiej częstotliwości

Tytułem przykładu wyznaczone zostanie widmo częstotliwościowe impulsu prostokątnego wielkiej częstotliwości opisanego wzorem (2.5) i w założeniu, że $t_0 = 0$. Widmo to można obliczyć z równania (3.15) lub też według zależności (3.2) [2]. W tym ostatnim przypadku otrzymujemy

$$G(\omega) = \frac{j\omega\sin\psi + \omega_s\cos\psi}{\omega_s^2-\omega^2} + e^{-j\omega T_i}\frac{j\omega\sin(\omega_s T_i+\psi)+\omega_s\cos(\omega_s T_i+\psi)}{\omega_s^2-\omega^2}. \tag{3.16}$$

Jego znormalizowany moduł równa się

$$\omega_s\left|G\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)\right| = \frac{\sqrt{(A\cos\psi+B\cos\psi)^2+(C\cos\psi+D\sin\psi)^2}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2}, \tag{3.17}$$

a jego faza

$$\Phi\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right) = \operatorname{arctg}\frac{C+D\operatorname{tg}\psi}{A+B\operatorname{tg}\psi}. \tag{3.18}$$

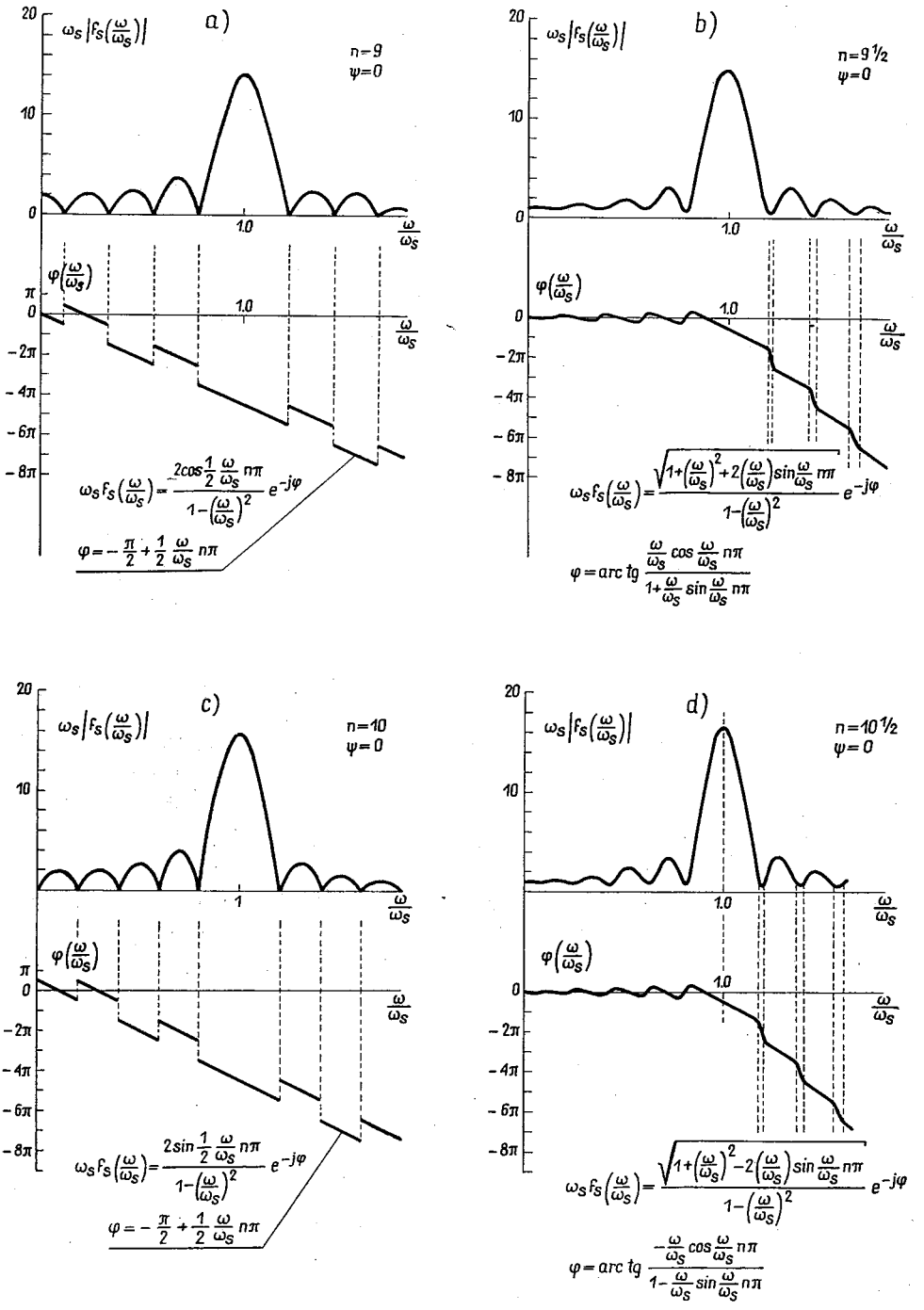
W tych wzorach oznaczają

$$A = 1-\frac{\omega}{\omega_s}\sin n\pi\cdot\sin\frac{\omega}{\omega_s}n\pi - \cos n\pi\cdot\cos\frac{\omega}{\omega_s}n\pi, \tag{3.19}$$

$$B = \sin n\pi\cdot\cos\frac{\omega}{\omega_s}n\pi - \frac{\omega}{\omega_s}\cos n\pi\cdot\sin\frac{\omega}{\omega_s}n\pi, \tag{3.20}$$

$$C = \cos n\pi\cdot\sin\frac{\omega}{\omega_s}n\pi - \frac{\omega}{\omega_s}\sin n\pi\cdot\cos\frac{\omega}{\omega_s}n\pi, \tag{3.21}$$

$$D = \frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega}{\omega_s}\cos n\pi\cdot\cos\frac{\omega}{\omega_s}n\pi - \sin n\pi\cdot\sin\frac{\omega}{\omega_s}n\pi. \tag{3.22}$$



Rys. 8. Gęstość widmowa sygnału wielkiej częstotliwości o modulacji prostokątnej dla różnych wartości współczynnika wypełnienia n

Dla $\omega = \omega_s$ otrzymujemy moduł w postaci uproszczonej

$$\omega_s|G(1)| = \frac{1}{2}\sqrt{n^2\pi^2 + \sin^2 n\pi - 2n\pi \sin n\pi \cdot \cos(n\pi + 2\psi)} \tag{3.23}$$

i fazę

$$\Phi(1) = -\operatorname{arctg} \frac{\left(n\pi - \frac{1}{2}\sin 2n\pi\right) + \sin^2 n\pi \cdot \operatorname{tg}\psi}{\sin^2 n\pi + \left(n\pi - \frac{1}{2}\right)}. \tag{3.24}$$

Dla impulsu silnie wypełnionego $n\pi \gg 1$; zatem moduł upraszcza się dalej do postaci

$$\omega_s|G(1)| \approx \frac{1}{2} n\pi \tag{3.25}$$

i faza

$$\Phi(1) \approx \psi + \left(2k' - \frac{1}{2}\right)\pi, \tag{3.26}$$

gdzie k' jest liczbą całkowitą; zatem w tych warunkach faza jest liniową funkcją kąta fazowego ψ.

Dla ilustracji powyższych zależności przedstawiono na rys. 8 dla dodatnich częstotliwości przebiegi modułu i fazy widma częstotliwościowego impulsu prostokątnego wielkiej częstotliwości dla różnych współczynników wypełnienia $\left(n = 9,\ 9\frac{1}{2},\ 10 \text{ i } 10\frac{1}{2}\right)$ i kąta fazowego sygnału $\psi = 0$. Z wykresów tych wynika, że jedynie dla całkowitych wartości współczynnika wypełniania moduły funkcji widmowej impulsów prostokątnych wielkiej częstotliwości przybierają postacie analogiczne do modułów funkcji widmowej obwiedni impulsów prostokątnych. Wynika to z wzajemnego wpływu na siebie funkcji $\frac{1}{2}F(\omega - \omega_s)$ i $\frac{1}{2}F(\omega + \omega_s)$ występujących przy dodatnich i ujemnych wartościach częstotliwości. Wpływ ten nazywany jest również „korekcją fazową" [14]; maleje on ze wzrostem współczynnika wypełnienia.

Należy dodać, że podobne do podanych na rys. 8b i c wykresy odwzorowania spotyka się w literaturze [15].

3.3. Widmo częstotliwościowe impulsu sinusoidalnego wielkiej częstotliwości

Drugim przykładem może być wyznaczenie widma częstotliwościowego impulsu sinusoidalnego pierwszego rzędu wielkiej częstotliwości opisanego wzorem (2.7) dla $m = 1$ [16]. Punktem wyjścia będzie tutaj przekształcenie Laplace'a funkcji sygnałowej zgodnie z równaniem

$$\mathcal{L}[\sin \delta t \sin(\omega_s t + \psi)] = \frac{\delta[(s^2 - \omega_s^2 + \delta^2)\sin\psi + 2s\omega_s \cos\psi]}{[s^2 + (\omega_s - \delta)^2]\,[s^2 + (\omega_s + \delta)^2]}. \tag{3.27}$$

Funkcja gęstości widma częstotliwościowego omawianego sygnału równa się zatem

$$G(\omega) = \frac{\delta}{M}\{(-\omega^2-\omega_s^2+\delta^2)\sin\psi+j2\omega\omega_s\cos\psi+$$
$$-e^{-j\omega T_i}[(-\omega^2-\omega_s^2+\delta^2)\sin(\omega_s T_i+\psi)+j\omega\omega_s\cos(\omega_s T_i+\psi)]\}, \tag{3.28}$$

gdzie

$$M = [(\omega_s-\delta)^2-\omega^2]\,[\omega_s+\delta)^2-\omega^2]. \tag{3.29}$$

Znormalizowana postać modułu funkcji widmowej

$$\omega_s n\left|G\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)\right|N = \sqrt{(-A\cos\psi+B\sin\psi)^2+(C\cos\psi+D\sin\psi)^2}, \tag{3.30}$$

gdzie

$$N = \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^2-\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2\right]\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2\right]. \tag{3.31}$$

Faza funkcji widmowej

$$\Phi\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right) = \frac{C\cos\psi+D\sin\psi}{-A\cos\psi+B\sin\psi}. \tag{3.32}$$

W powyższych równaniach wyrażają

$$A = \left[-\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2-1+\frac{1}{n^2}\right]\sin n\pi\cdot\cos\frac{\omega}{\omega_s}n\pi+2\frac{\omega}{\omega_s}\cos n\pi\cdot\sin\frac{\omega}{\omega_s}n\pi, \tag{3.33}$$

$$B = \left[-\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2-1+\frac{1}{n^2}\right]\left(1-\cos n\pi\cdot\cos\frac{\omega}{\omega_s}n\pi\right)+2\frac{\omega}{\omega_s}\sin n\pi\cdot\sin\frac{\omega}{\omega_s}n\pi, \tag{3.34}$$

$$C = 2\frac{\omega}{\omega_s}\left(1-\cos n\pi\cdot\cos\frac{\omega}{\omega_s}n\pi\right)+\left[-\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2-1+\frac{1}{n^2}\right]\sin n\pi\cdot\sin\frac{\omega}{\omega_s}n\pi, \tag{3.35}$$

$$D = 2\frac{\omega}{\omega_s}\sin n\pi\cdot\cos\frac{\omega}{\omega_s}n\pi+\left[-\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2-1+\frac{1}{n^2}\right]\cos n\pi\cdot\sin\frac{\omega}{\omega_s}n\pi. \tag{3.36}$$

W szczególnych przypadkach

$$\left|G\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| = \left|G\left(1+\frac{1}{n}\right)\right| \to \infty, \tag{3.37}$$

$$\omega_s n|G(1)|N = \frac{|\sin n\pi|}{n^2}, \tag{3.38}$$

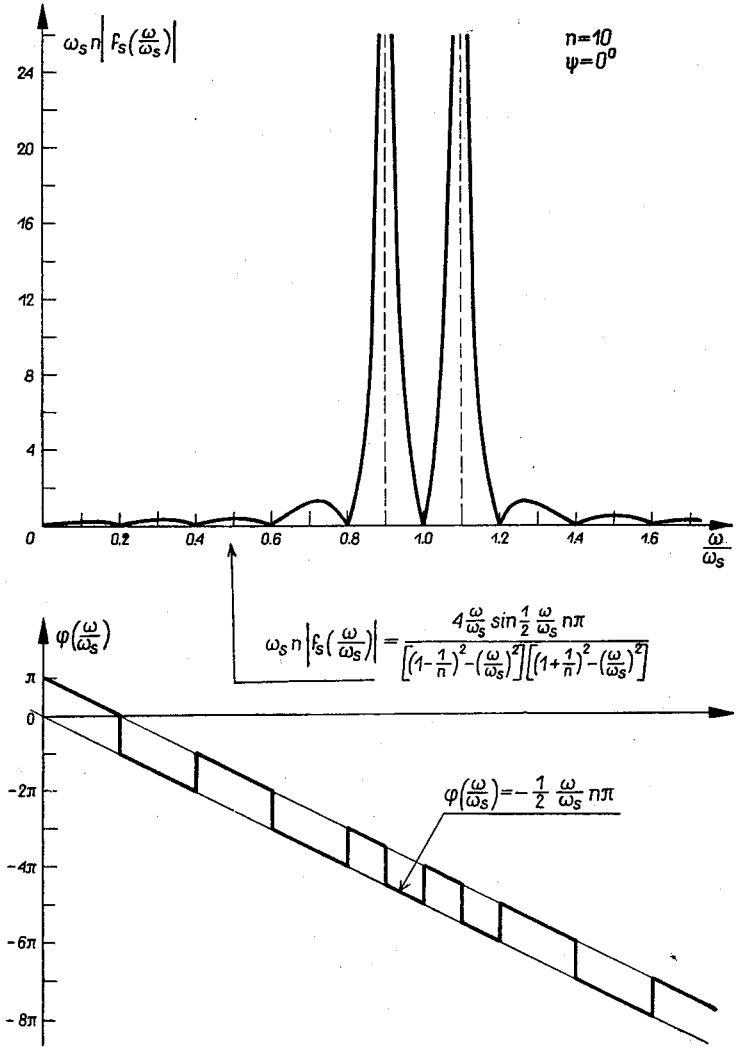
$$\Phi(1) = -[\pi(k'+1)+\psi], \tag{3.39}$$

gdzie k' jest liczbą całkowitą.

Dalej można napisać, że dla $\psi = 0$ oraz n równemu parzystej liczbie całkowitej

$$\omega_s n \left| G\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)\right| N = 4\frac{\omega}{\omega_s}\sin\frac{1}{2}\frac{\omega}{\omega_s}n\pi, \tag{3.40}$$

$$\Phi\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\omega}{\omega_s}n\pi + k'\pi. \tag{3.41}$$



Rys. 9. Gęstość widmowa sygnału wielkiej częstotliwości o prostej modulacji sinusoidalnej dla współczynnika wypełnienia $n = 10$

Z drugiej strony dla $\psi = 0$ oraz n równemu nieparzystej liczbie całkowitej

$$\omega_s n\left|G\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)\right|N = 4\frac{\omega}{\omega_s}\cos\frac{1}{2}\frac{\omega}{\omega_s}n\pi, \tag{3.42}$$

$$\Phi\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\frac{\omega}{\omega_s}n\pi + k'\pi. \tag{3.43}$$

Natomiast dla $\psi = 0$ oraz dla

$$n = \frac{1}{2} + \begin{Bmatrix}\text{nieparzysta}\\ \text{parzysta}\end{Bmatrix} \text{ liczba całkowita}$$

otrzymujemy moduł

$$\omega_s n\left|G\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)\right|N =$$

$$= \sqrt{\left[\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2 + 1 - \frac{1}{n^2}\right]^2 + 4\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2 \mp \frac{\omega}{\omega_s}\left[\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2 + 1 - \frac{1}{n^2}\right]\sin\frac{\omega}{\omega_s}n\pi} \tag{3.44}$$

oraz fazę

$$\Phi\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right) = \operatorname{arctg}\frac{2\frac{\omega}{\omega_s} \pm \left[\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2 + 1 - \frac{1}{n^2}\right]\sin\frac{\omega}{\omega_s}n\pi}{\pm\left[\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2 + 1 - \frac{1}{n^2}\right]\cos\frac{\omega}{\omega_s}n\pi}. \tag{3.45}$$

Na koniec można napisać, że

$$\omega_s n|G(1)|N = \frac{1}{n^2} \tag{3.46}$$

Dla ilustracji powyższych zależności na rys. 9 podane są dla dodatnich częstotliwości przebiegi modułu i fazy funkcji widmowej dla $n = 10$ oraz $\psi = 0$. Funkcja modułowa wykazuje charakterystyczne nieskończone wartości dla częstotliwości $\omega_s \pm \delta$.

3.4. Widmo częstotliwościowe impulsu sinusoidalnego zanikającego wykładniczo

W rozdziale 2.3 rozpatrywaliśmy impulsy standartowe o nieskończonym czasie trwania lecz o skończonej energii. Jako jeden z pierwszych wymieniliśmy tam sygnał sinusoidalny zanikający wykładniczo opisany wzorem (2.13) i rysunkiem 3. Funkcja modulująca sygnał wielkiej częstotliwości równa się w tym przypadku

$$M(t) = \mathbf{1}(t)e^{-\alpha t}; \quad \alpha > 0. \tag{3.47}$$

Jej funkcja widmowa [13]

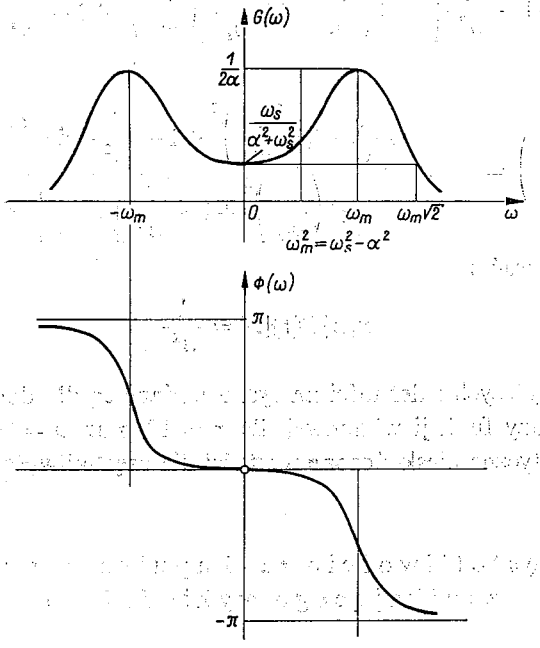
$$F(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}e^{-j\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\alpha}}. \tag{3.48}$$

Ponieważ na podstawie twierdzenia o przesunięciu częstotliwościowym

$$f(t) = M(t)\sin(\omega_s t+\psi) \leftrightarrow \frac{1}{2}F(\omega-\omega_s)\,e^{-j\left(\psi-\frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{2}F(\omega+\omega_s)\,e^{-j\left(\psi-\frac{\pi}{2}\right)}, \tag{3.49}$$

więc funkcja widmowa sygnału wielkiej częstotliwości (2.13) równa się

$$G(\omega) = \frac{1}{2}\,\frac{\exp j\left(-\operatorname{arctg}\dfrac{\omega-\omega_s}{2}+\psi-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\alpha^2+(\omega-\omega_s)^2}} + \frac{1}{2}\,\frac{\exp j\left(-\operatorname{arctg}\dfrac{\omega+\omega_s}{2}-\psi+\dfrac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\alpha^2+(\omega+\omega_s)^2}}. \tag{3.50}$$



Rys. 10. Widmo częstotliwościowe impulsu sinusoidalnego zanikającego wykładniczo

Dla przebiegów szybko tłumionych wpływ dodatnich częstotliwości na ujemne (i odwrotnie) jest duży. Jako przykład może służyć rys. 10, na którym podane jest widmo częstotliwościowe dla $\psi = 0$. W tym przypadku wyrażenie na widmo częstotliwościowe przybiera prostą postać

$$G(\omega) = \frac{\omega_s}{(\alpha+j\omega)^2+\omega_s^2}. \tag{3.51}$$

Dla przebiegów wolno tłumionych maksima funkcji widmowej są rozstawione znacznie szerzej niż to podano na rys. 10 i mają większe wartości. Są to typowe krzywe rezonansowe pojedyńczych obwodów.

3.5. Widmo częstotliwościowe impulsu dzwonowego wielkiej częstotliwości

Impuls dzwonowy wielkiej częstotliwości opisano wzorem (2.14) i rysunkiem 4. Funkcja modulująca sygnał wielkiej częstotliwości ma więc postać

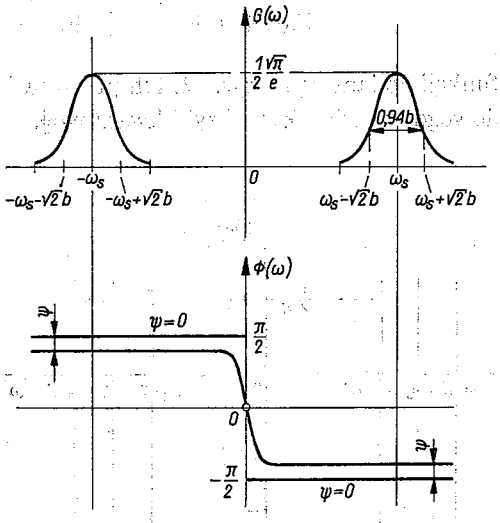
$$M(t) = e^{-b^2t^2}. \tag{3.52}$$

Funkcja widmowa [13]

$$F(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{b} e^{-\frac{\omega^2}{4b^2}}. \tag{3.53}$$

Na podstawie twierdzenia o przesunięciu częstotliwościowym (3.49) wyznaczamy funkcję widmową sygnału wielkiej częstotliwości (2.14) w postaci

$$G(\omega) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{b}\left[e^{-\left(\frac{\omega-\omega_s}{2b}\right)^2 + j\left(\psi-\frac{\pi}{2}\right)} + e^{-\left(\frac{\omega+\omega_s}{2b}\right)^2 - \left(\psi-\frac{\pi}{2}\right)}\right]. \tag{3.54}$$



Rys. 11. Widmo częstotliwościowe impulsu dzwonowego wielkiej częstotliwości

Ze względu na dużą szybkość opadania funkcji dzwonowej wpływ ujemnych częstotliwości na dodatnie, i odwrotnie, jest niewielki. Moduły funkcji widmowej niewiele się różnią od funkcji dzwonowej. Natomiast faza funkcji widmowej $\Phi(\omega)$ jest stała ze skokiem

przy zerowej częstotliwości dla $\psi = 0$ względnie z łagodnym przejściem dla $\psi \neq 0$, jak to wynika z równania

$$\operatorname{tg}\Phi(\omega) = -\operatorname{ctg}\psi \cdot \operatorname{tgh}\frac{\omega\omega_s}{2b^2}. \tag{3.55}$$

Przebieg modułu i fazy funkcji widmowej jest zilustrowany na rys. 11.

3.6. Widmo częstotliwościowe pakietu falowego

Pakiet falowy opisany wzorem (2.15) i zilustrowany na rys. 5 ma funkcję modulującą sygnał wielkiej częstotliwości postaci

$$M(t) = \frac{\sin \delta t}{\delta t}. \tag{3.56}$$

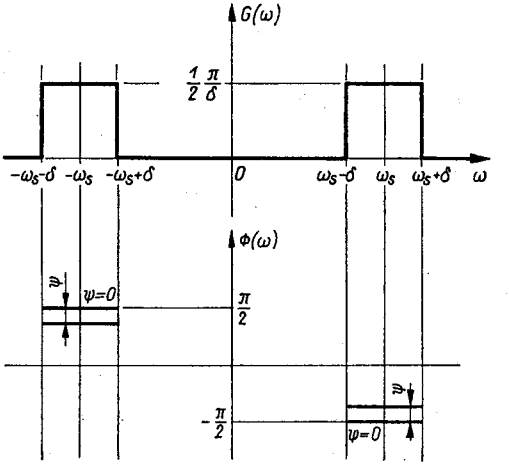
Jej funkcja widmowa [43] ma kształt prostokąta

$$F(\omega) = \frac{\pi}{\delta}[\mathbf{1}(\omega+\delta) - \mathbf{1}(\omega-\delta)]. \tag{3.57}$$

Na podstawie twierdzenia o przesunięciu częstotliwościowym (3.49) wyznaczamy funkcję widmową sygnału wielkiej częstotliwości (2.15) jako

$$G(\omega) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\delta}\Big\{[\mathbf{1}(\omega-\omega_s+\delta) - \mathbf{1}(\omega-\omega_s-\delta)]e^{j\left(\psi-\frac{\pi}{2}\right)} + \\ + [\mathbf{1}(\omega+\omega_s+\delta) - \mathbf{1}(\omega+\omega_s-\delta)]e^{-j\left(\psi-\frac{\pi}{2}\right)}\Big\}. \tag{3.58}$$

Moduł i kąt fazowy tej funkcji podane są na rys. 12. Ich prostota jest powodem szerokiego zastosowania pakietu falowego w rachunkach fizyki kwantowej.



Rys. 12. Widmo częstotliwościowe pakietu falowego

4. SYGNAŁ ANALITYCZNY

4.1. Definicja sygnału analitycznego i jego podstawowe właściwości

Z dotychczasowych rozważań wynika, że impulsy wielkiej częstotliwości można opisać funkcjami sinusoidalnymi o zależnej od czasu amplitudzie. Są to funkcje rzeczywiste i dlatego nie zawsze dogodne do rachunków. W pewnych zastosowaniach wygodnie jest stosować tak zwany sygnał analityczny lub zespolony (preenvelope) [17], [18], [19], [20], [21]

$$w(t) = f(t) + j \cdot g(t), \tag{4.1}$$

gdzie funkcja $g(t)$ jest przekształceniem Hilberta funkcji $f(t)$ [22]

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\tau)}{t-\tau} d\tau. \tag{4.2}$$

Przekształcenie Hilberta funkcji $\cos(\omega_s t + \psi)$ jest równe $\sin(\omega_s t + \psi)$, a funkcji $\sin(\omega_s t + \psi)$ równa się $-\cos(\omega_s t + \psi)$. Dodatkowe przekształcenia można znaleźć w literaturze [23], [24].

Szereg ciekawych właściwości sygnału analitycznego można wyrazić za pomocą funkcji gęstości widmowych.

Jeśli jest dana funkcja widmowa $G(\omega)$ przebiegu $f(t)$, to sygnał analityczny można wyznaczyć bezpośrednio bez uprzedniego obliczania funkcji $g(t)$. Można wykazać, że przekształcenie Fouriera sygnału analitycznego [20]

$$W(\omega) = \begin{cases} 2G(\omega) & \text{dla } \omega > 0 \\ 0 & \text{dla } \omega < 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

Przekształcenie odwrotne Fouriera daje poszukiwany sygnał analityczny

$$w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \tag{4.4}$$

Zależności te są wielce użyteczne przy przeprowadzeniu ogólnych rozważań, natomiast dla obliczenia konkretnego sygnału analitycznego wygodniej jest obliczać funkcję $g(t)$ przekształcenia Hilberta (4.2) i na tej podstawie formować wyrażenie na sygnał analityczny.

Wyznaczanie przekształceń Hilberta funkcji ciągłych nie napotyka na poważniejsze trudności, natomiast obliczanie ich dla funkcji „uciętych", do których należy przede wszystkim impuls prostokątny wielkiej częstotliwości są wielce utrudnione.

4.2. Przebiegi ograniczone częstotliwościowo

Jak już wspomniano, stosunkowo łatwo jest wyznaczyć sygnał analityczny $w(t)$ przebiegu $f(t)$, którego transformata Fouriera jest częstotliwościowo ograniczona w taki sposób, że widmo częstotliwościowe jest zawarte w paśmie B dookoła jakiejś częstotliwości fali nośnej $\pm f_s$. Takie przebiegi nazywamy pasmowymi sygnałami środkowo-przepustowymi. W szczególnym przypadku, gdy $f_s \gg B$ otrzymamy sygnał wąskopasmowy.

Rozważmy przebieg wielkiej częstotliwości $f(t) = M(t)\sin(\omega_s t+\psi)$, którego funkcja modulująca $M(t)$ jest wolnozmienną w porównaniu do $\sin\omega_s t$. Oznacza to, że widmo częstotliwościowe grupuje się w pobliżu częstotliwości fali nośnej i ma skończoną szerokość $B < |f_s|$. Wówczas można udowodnić [19], że transformata Hilberta funkcji

$$g(t) = -M(t)\cos(\omega_s t+\psi), \tag{4.5}$$

co pozwala na wyznaczenie sygnału analitycznego w postaci

$$w(t) = -jM(t)\cdot e^{j(\omega_s t+\psi)}. \tag{4.6}$$

Do zdefiniowanych w sposób powyższy przebiegów wielkiej częstotliwości można zaliczyć funkcję

$$f(t) = \frac{\sin \delta t}{\delta t}\sin(\omega_s t+\psi),$$

gdyż jej widmo częstotliwościowe zawarte jest w skończonych granicach dookoła fali nośnej f_s (rys. 12).

4.3. Przebiegi nieograniczone częstotliwościowo

Sygnały impulsowe wielkiej częstotliwości nie spełniają warunku ograniczenia częstotliwościowego funkcji $M(t)$. Najprostszy przykład takiej funkcji stanowi skok jednostkowy. Wówczas funkcję sygnałową wygodnie jest napisać w postaci:

$$f(t) = \mathbf{1}(t)\cos(\omega_s t+\psi). \tag{4.7}$$

Jej przekształcenie Hilberta (4.2) można wyrazić w postaci [25]

$$g(t) = \frac{1}{\pi}\left\{\mathrm{Ci}(\omega_s t)\cos(\omega_s t+\psi)+\left[\frac{\pi}{2}+\mathrm{Si}(\omega_s t)\right]\sin(\omega_s t+\psi)\right\}, \tag{4.8}$$

gdzie $\mathrm{Si}(\omega_s t)$ i $\mathrm{Ci}(\omega_s t)$ są sinusem i cosinusem całkowym.

Przebieg czasowy tego przekształcenia zależy od kąta fazowego sygnału ψ. Ponadto należy stwierdzić, że funkcja $g(t)$ nie jest przyczynowa, gdyż istnieje dla ujemnych wartości czasu, gdy jeszcze nie zjawił się sygnał $f(t)$.

Charakterystyczną cechą omawianej funkcji $g(t)$ jest jej nieskończona wartość dla $t = 0$ (z wyjątkiem przypadków, gdy sygnał wielkiej częstotliwości zaczyna się od zera: $\psi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$).

Przebiegi czasowe funkcji $g(t)$ podane są na rys. 13.

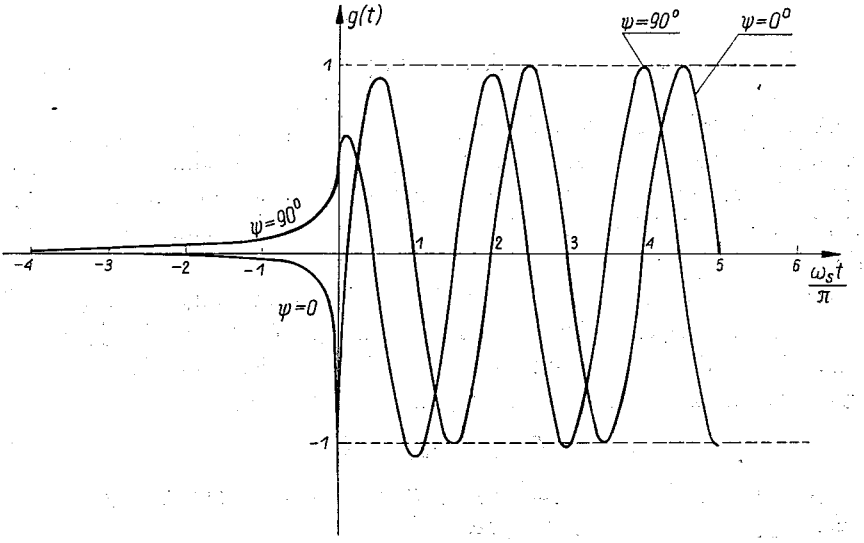
Jako drugi przykład można przyjąć prostokątny impuls wielkiej częstotliwości podany dla uproszczenia opisu jako

$$f(t) = [\mathbf{1}(\omega_s t+2\pi n)-\mathbf{1}(\omega_s t-2\pi n)]\cos\omega_s t \tag{4.9}$$

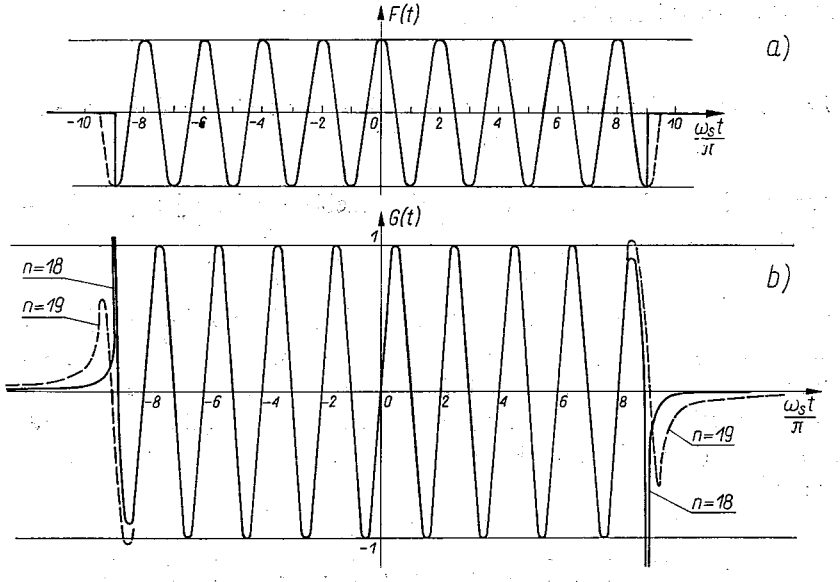
i przedstawiony na rys. 14a.

Przekształcenie Hilberta takiego sygnału wynosi [25]

$$g(t) = \frac{1}{\pi}[\mathrm{Ci}(\omega_s t + 2\pi n) - \mathrm{Ci}(2\pi n - \omega_s t)]\cos\omega_s t + \\ + \frac{1}{\pi}[\mathrm{Si}(\omega_s t + 2\pi n) + \mathrm{Si}(2\pi n - \omega_s t)]\sin\omega_s t. \qquad (4.10)$$



Rys. 13. Przekształcenie Hilberta funkcji $f(t) = \mathbf{1}(t)\cos(\omega_s t + \psi)$



Rys. 14. a) Prostokątne impulsy wielkiej częstotliwości ($n = 18$ i $n = 19$), b) Przekształcenie Hilberta

Również i ta funkcja nie jest przyczynowa; przybiera ona na początku i końcu sygnału wartości nieskończenie wielkie z wyjątkiem przypadków, gdy sygnał wielkiej częstotliwości zaczyna się i kończy na zerowej wartości (n — nieparzyste). Przebiegi czasowe funkcji $g(t)$ dla $n = 18$ i $n = 19$ podane są na rys. 14b.

5. OBWIEDNIA IMPULSU WIELKIEJ CZĘSTOTLIWOŚCI

5.1. Wstęp

Z punktu widzenia odbioru informacji interesuje nas obwiednia sygnału zawierająca tę informację. W układach elektronicznych uzyskuje się obwiednię po detekcji. W przypadku liniowej detekcji przebieg wyprostowany odtwarza wiernie obwiednię sygnału [21]. Zagadnienie obwiedni, jej definicji i sposobów wyznaczania stanowią rozważania tego rozdziału.

Na początku naszych rozważań stwierdzimy, że jako obwiednię impulsu wielkiej częstotliwości uważa się zazwyczaj górną $O_g(t)$ lub dolną $O_d(t)$ krzywą obejmującą ten przebieg. Obwiednia górna i dolna mogą w zasadzie różnić się od siebie kształtem, choć zazwyczaj mamy do czynienia z symetrią impulsu wyrażoną równaniem

$$O_g(t) = O_d(t) = 0. \tag{5.1}$$

Wówczas pod nazwą obwiedni będziemy rozumieli obwiednię górną $O_g(t)$ i dla uproszczenia będziemy ją oznaczać po prostu przez $O(t)$.

W rozważaniach naszych będziemy odróżniać obwiednię $O(t)$ danego przebiegu $f(t) = M(t)\sin(\omega_s t+\varphi)$ przy $\psi = \text{const}$ od obwiedni $O_r(t)$ rodziny przebiegów impulsowych, zależnych od dodatkowego parametru np. kąta fazowego ϱ sygnału w postaci $f(t, \varrho) = M(t, \varrho)\sin(\omega_s t+\psi+\varrho)$ przy ϱ zmiennym w zakresie 2π.

5.2. Obwiednia Hilbertowska przebiegów wielkiej częstotliwości

Na tym miejscu zajmiemy się obwiednią przebiegu wielkiej częstotliwości opisanego równaniem:

$$f(t) = M(t)\sin(\omega_s t+\psi),$$

przy $\psi = \text{const}$. Taki przebieg ma szereg ekstremów, które powinna obejmować obwiednia $O(t)$. Jeśli współczynnik wypełnienia impulsu n jest mały, to obwiednia będzie miała tylko kilka punktów wspólnych z chwilową funkcją $f(t)$ sygnału. Przez te kilka punktów można przeprowadzić nieskończenie wiele krzywych obejmujących przebieg wielkiej częstotliwości.

Jako obwiednię przebiegu wielkiej częstotliwości $f(t)$ spróbujmy przyjąć moduł sygnału analitycznego

$$O(t) = |w(t)| \tag{5.2}$$

określonego wzorem (4.1) [18], [19], [20]. Definicję tę zastosujemy zarówno dla przebiegów ciągłych jak i impulsowych.

Ponieważ podana wyżej definicja obwiedni opiera się pośrednio na przekształceniu Hilberta, więc można nazwać ją obwiednią Hilbertowską. Tak zdefiniowana obwiednia charakteryzuje się tym, że w punktach wspólnych z przebiegiem wielkiej częstotliwości występuje również równość pochodnych [20].

W przypadku przebiegów ciągłych $f(t)$ opisanych w p. 4.2 nie napotykamy większych trudności w wyznaczeniu modułu sygnału analitycznego. Z równania (4.6) wynika, że

$$O(t) = M(t) \tag{5.3}$$

Obwiednia przebiegu ciągłego równa się funkcji modulującej.

Jeśli przebieg ciągły można przedstawić w postaci wielomianu trygonometrycznego, ograniczonego częstotliwościowo w pobliżu f_s

$$f(t) = \sum_{0}^{n} M_k(t)\sin(\omega_{sk}t+\psi_k) = M(t)\sin[\omega_s t+\varphi(t)], \tag{5.4}$$

to również i tutaj będzie spełniona wyżej wyprowadzona zależność (5.2).

Obwiednię można w tym wypadku opisać wyrażeniem

$$O^2(t) = \sum_{0}^{n} M_k^2(t)+2\sum_{1}^{n-1} M_k(t)\cdot M_{k+1}(t)\cos[(\omega_{sk}-\omega_{s(k+1)})t+\psi_s-\psi_{k+1}]. \tag{5.5}$$

Jak widać z powyższych rozważań wyznaczenie obwiedni Hilbertowskiej przebiegów ciągłych nie napotyka na większe trudności.

5.3. Obwiednia impulsów standardowych wielkiej częstotliwości

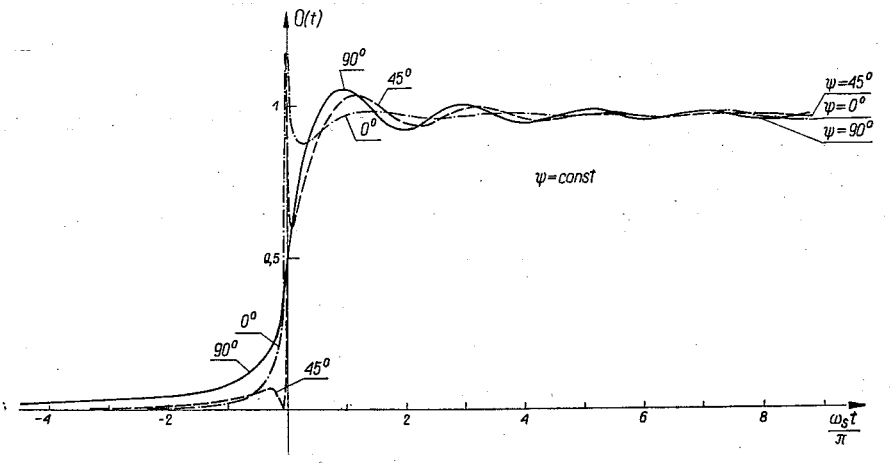
Dowiedliśmy już, że impulsy standartowe wielkiej częstotliwości charakteryzują się widmem częstotliwościowym nieograniczonym. Zatem funkcja $g(t)$, stanowiąca przekształcenie Hilberta sygnału wielkiej częstotliwości $f(t)$, przybiera w zasadzie nieskończone wartości w punktach powstawania i zaniku impulsu. Takie same wartości przybiera w tych miejscach również i sygnał analityczny, jak również i obwiednia zdefiniowana jako jego moduł.

Tytułem przykładu można podać przebieg obwiedni $O(t)$ dla impulsu wielkiej częstotliwości modulowanego skokiem jednostkowym dla różnych wartości kąta fazowego ψ (rys. 15) oraz dla prostokątnego impulsu wielkiej częstotliwości dla typowych wartości współczynnika wypełnienia n (rys. 16a i b) [25]. Z przykładów tych wynika, że kształt obwiedni zależy od kąta fazowego sygnału na jego początku i końcu. Tego typu obwiednię można więc nazwać obwiednią fazową: $O(t, \psi)$ lub $O(t, n)$.

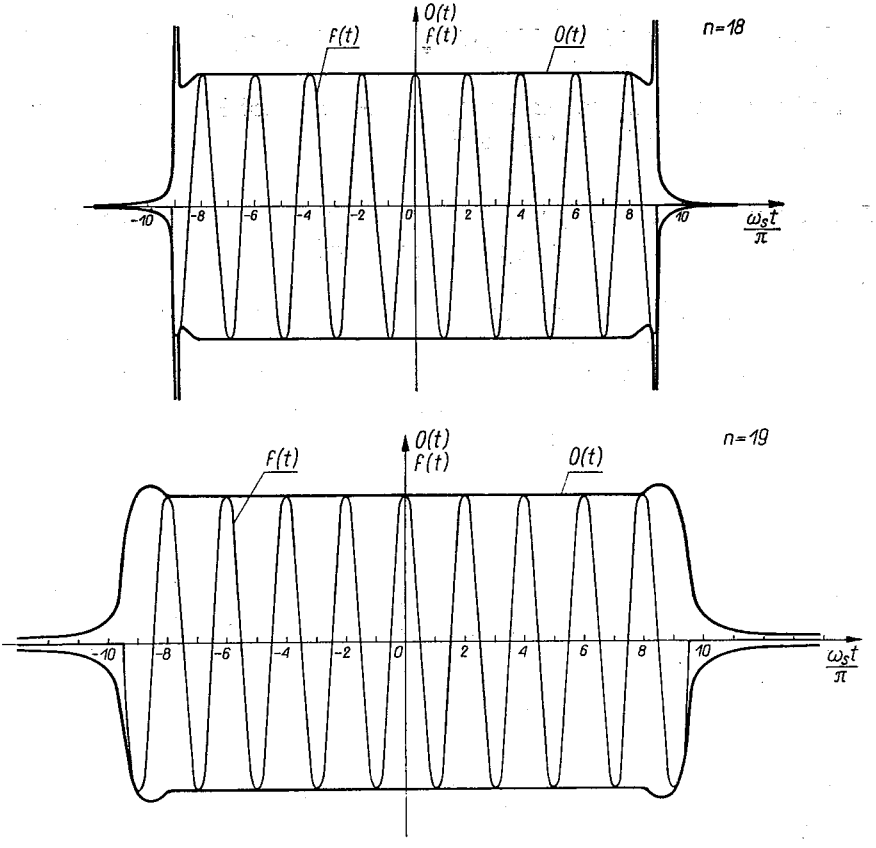
Skomplikowana postać wyrażenia na obwiednię Hilbertowską dla funkcji impulsowych nie zachęca do stosowania tej definicji obwiedni dla sygnałów impulsowych wielkiej częstotliwości.

Należy tutaj podkreślić, że tak zdefiniowana obwiednia nie opisuje lokalnych właściwości funkcji $f(t)$ na początku i na końcu sygnału.

Oprócz obwiedni fazowej $O(t, \psi)$ można wprowadzić pojęcie obwiedni szczytowej $O_{sz}(t)$, przez którą będziemy rozumieć obwiednię obwiedni fazowych.



Rys. 15. Obwiednia Hilbertowska impulsu wielkiej częstotliwości modulowanego skokiem jednostkowym dla równych wartości kąta fazowego sygnału



Rys. 16. Obwiednia Hilbertowska impulsu prostokątnego wielkiej częstotliwości dla dwóch różnych współczynników wypełnienia *n*

Stosując definicję obwiedni jako modułu funkcji analitycznej sygnału, obwiednię szczytową definiujemy jako

$$O_{sz}(t) = |O(t, \psi)+jH[O(t, \psi)]|, \tag{5.6}$$

gdzie H oznacza przekształcenie Hilberta zdefiniowane wzorem (4.2).

Wyznaczanie obwiedni szczytowej według (5.6) jest trudną operacją obliczeniową nawet dla najprostszych funkcji modulujących, jak np. skok jednostkowy.

W literaturze można znaleźć definicję obwiedni średniej wyrażonej jako [26]

$$O^2_{śr}(t) = \frac{1}{2}\left[O^2(t, \psi)+O^2\left(t, \psi+\frac{\pi}{2}\right)\right]. \tag{5.7}$$

Obwiednia średnia nie zależy od kąta fazowego ψ, ma ona jednak wadę nieobejmowania wszystkich przebiegów, co nie pozwala na wyznaczenie podstawowych parametrów impulsu wielkiej częstotliwości, jak np. największego przepięcia itp., co jest zaletą obwiedni szczytowej.

5.4. Modyfikacja definicji obwiedni przebiegów impulsowych

Jak widać z rozważań powyżej podanych i zilustrowanych wykresami na rys. 15 i 16, obwiednia zdefiniowana jako moduł sygnału analitycznego nie opisuje lokalnych właściwości funkcji $f(t)$. Jest to sprzeczne z naszą intuicją tym bardziej, że w praktyce prowadzimy pomiary na pewnym skończonym odcinku czasu.

Pewnym wyjściem z tych trudności mogłoby być zastosowanie innego przepisu wyznaczenia funkcji $g(t)$ i $w(t)$, niż podanego wzorami (4.2) i (5.1). Przepis ten pozwala na wyznaczenie obwiedni zgodnej z naszą intuicją.

Przepis ten polegałby na tym, że dla

$$f(t) = M(t)\cos(\omega_s t+\psi)$$

lub ogólniej

$$f(t) = \sum M_k(t)\cos(\omega_{sk} t+\psi_k),$$

gdzie $M_k(t)$ jest funkcją nieograniczoną częstotliwościowo, jako funkcję „analityczną" przyjmowałoby się

$$w(t) = \sum_0^n M_k(t)\cdot e^{j(\omega_s t+\psi_k)}. \tag{5.8}$$

Wówczas obwiednia

$$O(t) = \left|\sum_0^n M_k(t)\right| \tag{5.9}$$

nie zależałaby od fazy ψ i dla przypadku jednej częstotliwości sygnału

$$O(t) = M(t),$$

czyli równałaby się funkcji modulującej, jak dla przebiegów ograniczonych częstotliwościowo. W szczególnym przypadku $M(t) = \mathbf{1}(t)$ obwiednia impulsu wielkiej częstotliwości przybrałaby również postać skoku jednostkowego.

5.5. Obwiednia geometryczna

Dotychczas rozważaliśmy obwiednię jednego przebiegu $f(t)$ zdefiniowaną jako moduł sygnału analitycznego $w(t)$. Definicja ta sprawia sporo kłopotu przy badaniu impulsów wielkiej częstotliwości. Dlatego spróbujemy wykorzystać możliwość zdefiniowania obwiedni na drodze geometrycznej.

Ponieważ obwiednia w sensie geometrii różniczkowej [27] związana jest z pojęciem rodziny krzywych, a nie jednej krzywej, więc w badanym przebiegu

$$f(t) = M(t)\sin[\omega_s t + \varphi(t)] \tag{5.10}$$

wprowadzimy pewien parametr, np ϱ:

$$f(t, \varrho) = M(t)\sin[\omega_s t + \psi(t) + \varrho]. \tag{5.11}$$

Ponieważ

$$f(t, \varrho) = f(t)\cos\varrho + g(t)\sin\varrho, \tag{5.12}$$

gdzie oznaczyliśmy przez

$$g(t) = M(t)\cos[\omega_s t + \varphi(t)], \tag{5.13}$$

funkcję ortogonalną do $f(t)$, nazywamy dalej funkcją sprzężoną z $f(t)$. Równanie obwiedni geometrycznej $O_{ge}(t)$ znajdujemy zakładając, że z jednej strony $f(t, \varrho)$ rodziny krzywych równa się obwiedni $O_{ge}(t)$ oraz że pochodna tej funkcji względem parametru też jest równa zeru. Otrzymujemy zespół równań

$$f(t)\cos\varrho + g(t)\sin\varrho = O_{ge}(t),$$
$$-f(t)\sin\varrho + g(t)\cos\varrho = 0.$$

Wyrugowanie parametru ϱ prowadzi do równania obwiedni geometrycznej:

$$O_{ge}(t) = \pm\sqrt{f^2(t) + g^2(t)}. \tag{5.14}$$

Otrzymane w ten sposób równanie opisuje jedną (z dokładnością do znaku pierwiastka) krzywą, która — jak wiemy z geometrii różniczkowej — jest styczna do wszystkich przebiegów wielkiej częstotliwości (występujących w miarę zmiany parametru ϱ) i nazywa się obwiednią rodziny $f(t, \varrho)$.

Obwiednia równa się zatem modułowi sygnału analitycznego utworzonego z badanej funkcji $f(t)$ i ortogonalnej do niej funkcji $g(t)$.

Podstawiając do równania (5.14) wartości obu funkcji $f(t)$ i $g(t)$ z równań (5.10) i (5.13) otrzymujemy

$$O_{ge}(t) = M(t). \tag{5.15}$$

Obwiednia geometryczna rodziny krzywych $f(t, \varrho)$, utworzonych z badanego sygnału $f(t)$ równa się zmodyfikowanej obwiedni Hilbertowskiej.

Należy tutaj podkreślić, że ściślejsze odtworzenie obwiedni metodą geometryczną wynika z tworzenia obwiedni rodziny krzywych, a nie jednej krzywej.

5.6. Parametryczna obwiednia szczytowa

Z powyższych rozważań wynika, że wyznaczanie obwiedni Hilbertowskiej lub zdefiniowanej jest zazwyczaj żmudną procedurą i dlatego trwają poszukiwania za inną definicją, prowadzącą do zbliżonych wyników. Jako jedną z propozycji można wymienić definicję parametrycznej obwiedni szczytowej, w której jako punkty wspólne obwiedni z przebiegiem sygnału przyjmuje się ekstremalne wartości sygnału [28], [29]. Dla danej wartości kąta fazowego sygnału ψ istnieje zbiór takich punktów nad osią odciętych i odpowiadający mu zbiór punktów pod osią. Te zbiory punktów można nazwać szczytowymi obwiedniami fazowymi (górną i dolną).

W celu zdefiniowania tej wielkości rozpatrzmy zbiór chwil t_k, w których przebiegi sygnału wielkiej częstotliwości $f(t, \psi)$ przyjmują wartości maksymalne. Są to pierwiastki równania

$$\frac{d}{dt} f(t_k, \psi) = 0, \tag{5.16}$$

przy warunku ubocznym $f(t_k, \psi) > 0$.

Utwórzmy zbiór punktów $F(\psi)$, składający się z wierzchołków impulsu:

$$F(\psi) = \{\langle x, y\rangle; \quad x = t_k; \quad y = f(t_k, \psi)\}. \tag{5.17}$$

Dalej utwórzmy rodzinę zbiorów $F(\psi)$, powstającą, gdy ψ przebiega przedział $\langle 0,2\pi\rangle$, to znaczy niech

$$F = \{F(\psi); \quad \psi \in \langle 0,2\pi\rangle\}. \tag{5.18}$$

Każde t_k zależy od ψ.

Gdy kąt ψ przebiega przedział $\langle 0,2\pi\rangle$, to poszczególne wartości czasu t_k przebiegają pewne przedziały osi czasu t, stykające się ze sobą. Z tego wynika, że F jest funkcją zdefiniowaną w całym przedziale osi czasu, w którym $f(t, \psi)$ jest różne od zera. Wobec tego dla każdej wartości czasu t funkcja $F(t)$ przedstawia szczytową obwiednię parametryczną

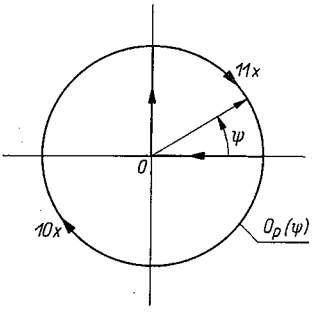
$$O_p(t) = F(t) \tag{5.19}$$

jako zależność czasową.

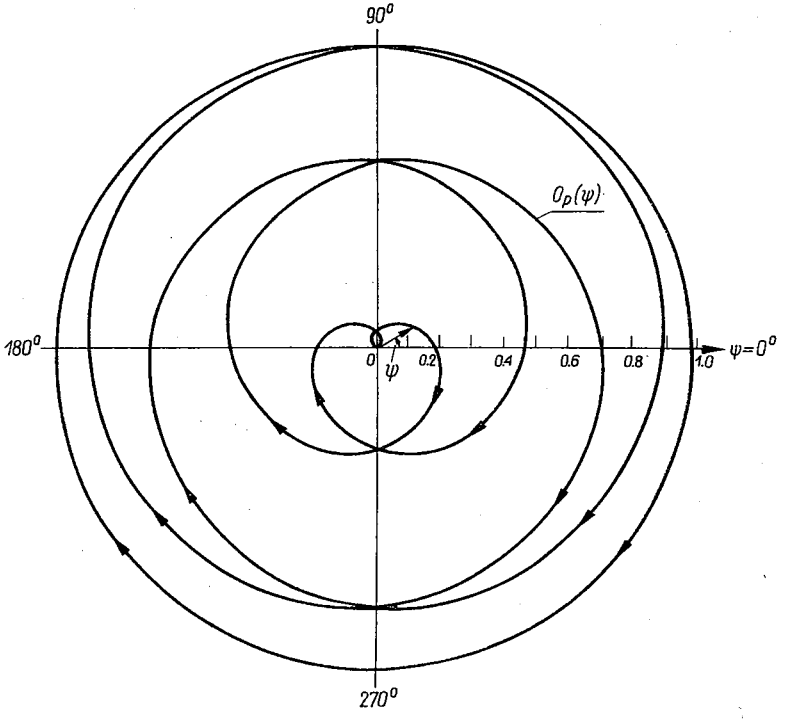
Szczytową obwiednię parametryczną można również przedstawić w postaci zależności od kąta fazowego sygnału:

$$O_p(\psi) = F(\psi). \tag{5.20}$$

Do podobnych rezultatów możemy dojść również na innej drodze, a mianowicie rozpatrując przebieg sygnału wielkiej częstotliwości $f(t)$ przy $\psi = \text{const}$. Taki przebieg charakteryzuje się określonym współczynnikiem wypełnienia n i odpowiadającą mu liczbą maksimów.



Rys. 17. Parametryczna obwiednia szczytowa impulsu prostokątnego wielkiej częstotliwości $O_p(\psi)$ dla współczynnika wypełnienia $n = 10{,}5$



Rys. 18. Parametryczna obwiednia szczytowa impulsu sinusoidalnego wielkiej częstotliwości $O_p(\psi)$ dla współczynnika wypełnienia $n = 10$

W miarę wypełniania się sygnału (n rosnące) liczba tych punktów rośnie i dla $n \to \infty$ zbiór rozważanych punktów staje się ciągły i tworzy obwiednię graniczną, niezależną od kata fazowego.

Tytułem przykładu można dodać, że szczytowa obwiednia parametryczna prostokątnego impulsu wielkiej częstotliwości równa się funkcji modulującej:

$$O_p(t) = M(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - T_i) \tag{5.21}$$

Na rys. 17 podano jej zależność fazową $O_p(\psi)$ [2].

W podobny sposób można zilustrować szczytową obwiednię parametryczną sinusoidalnego impulsu wielkiej częstotliwości

$$O_p(t) = M(t) = [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - T_i)] \sin \pi \frac{t}{T_i}. \tag{5.22}$$

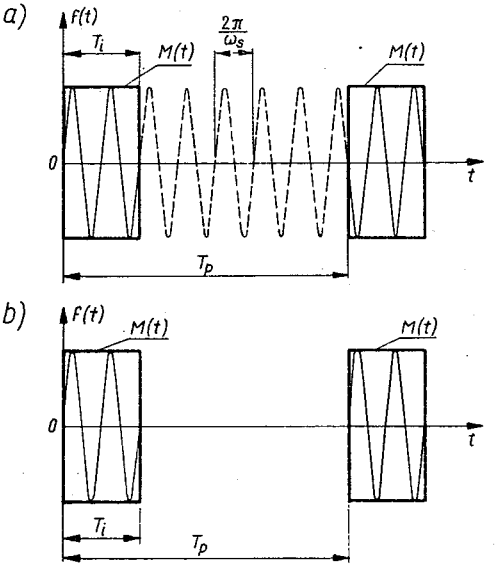
Na rys. 18 podana jest zależność fazowa $O_p(\psi)$ [16].

Szczytowe obwiednie parametryczne odpowiedzi układów liniowych na różnego typu impulsy wielkiej częstotliwości można znaleźć w literaturze. Odpowiedź jednostopniowego wzmacniacza rezonansowego o małej dobroci na prostokątny impuls wielkiej częstotliwości prowadzi do szczytowej obwiedni parametrycznej, podanej np. w [30].

6. IMPULSY POWTARZANE

6.1. Wstęp

Pojedyńcze impulsy stosunkowo rzadko występują w urządzeniach elektronicznych. Poważną trudność stanowi ich pomiar i zobrazowanie, i dlatego chętnie stosuje się technikę wielokrotnego powtarzania impulsu z taką częstotliwością, aby kolejne impulsy nie wpły-



Rys. 19. Impulsy wielkiej częstotliwości
a) koherentne fazowo z ciągłą falą nośną
b) koherentne fazowo z obwiednią impulsu

wały na siebie [31] [14] [32]. Rozróżniamy trzy przypadki powtarzania impulsów, z których dwa pierwsze pokazano na rys. 19.

W pierwszym przypadku (rys. 19a) wycina się co pewien czas impulsy z ciągłej fali nośnej; można więc mówić o koherencji fazowej impulsów wielkiej częstotliwości z ciągłą

falą nośną. W drugim przypadku, opisanym w dolnej części rys. 19, impulsy wielkiej częstotliwości są koherentne fazowo z obwiednią impulsów. Na koniec w trzecim przypadku impulsy wielkiej częstotliwości mogą mieć dowolną fazę.

W pierwszym przypadku faza impulsu wielkiej częstotliwości w zasadzie nie jest stała. Kąt fazowy sygnału k-tego impulsu

$$\varphi_k = 2\pi(k-1)\frac{T_p}{T_s} \tag{6.1}$$

(gdzie T_p jest okresem powtarzania impulsów, a T_s okresem fali nośnej) przybiera kolejno różne wartości. (Jedynie dla przypadku, gdy $\frac{T_p}{T_s}$ równa się liczbie całkowitej faza impulsu wielkiej częstotliwości równa się liczbie całkowitych π).

Kolejne obwiednie standartowych impulsów dla tego jak i następnych przypadków są jednakowe. Ponieważ w omawianym przypadku kąty fazowe powtarzanych impulsów wielkiej częstotliwości w zasadzie są różne, więc ich odpowiedzi układów liniowych będą miały wówczas różne obwiednie.

6.2. Widmo częstotliwościowe impulsów koherentnych fazowo z ciągłą falą nośną

W rozważanym przypadku impulsy wielkiej częstotliwości stanowią wycinki sinusoidy ciągłej fali nośnej (rys. 19a) powtarzane z okresem T_p. Funkcja modulująca $M(t)$ z równania (1.2) przybiera tutaj postać

$$M(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} M_i(t-kT_p), \tag{6.2}$$

gdzie k są kolejnymi liczbami całkowitymi [31].

Na mocy twierdzenia o przesunięciu czasowym widmo częstotliwościowe impulsów powtarzanych

$$M_p(\omega) = M_i(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kT_p}, \tag{6.3}$$

gdzie $M_i(\omega)$ jest widmem częstotliwościowym funkcji modulującej poszczególnego impulsu.

Skorzystamy teraz ze znanej z rozważań nad szeregiem Fouriera zależności

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\pi x/X} = X \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x-mX) \tag{6.4}$$

przedstawiającej widmo prążkowe. Dla $X = 2\pi/T_p$ i $x = \omega$ otrzymujemy

$$M_p(\omega) = M_i(\omega)\frac{2\pi}{T_p}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi m}{T_p}\right) = \frac{2\pi}{T_p}\sum_{m=-\infty}^{\infty} M_i\left(\frac{2\pi m}{T_p}\right)\cdot\delta\left(\omega-\frac{2\pi m}{T_p}\right) \tag{6.5}$$

Ostatnią zależność otrzymuje się biorąc pod uwagę fakt, że interesują nas wartości $M_i(\omega)$ tylko dla określonych częstotliwości (prążków). Wynika to stąd, że funkcja widmowa składa się z szeregu składowych równomiernie rozłożonych w odstępach odpowiadających częstotliwości powtarzania $f = \frac{1}{T_p}$.

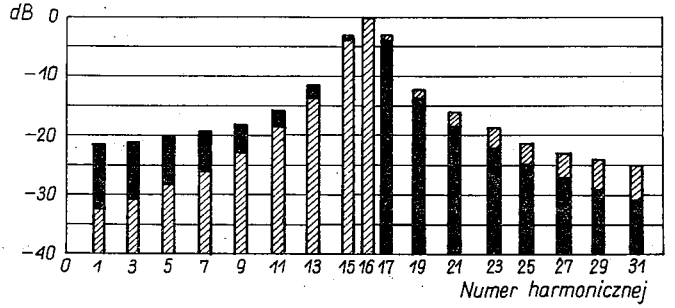
Odwrotna transformata Fouriera $M(\omega)$ równa się

$$M_p(t) = \frac{1}{T_p} \sum_{m=-\infty}^{\infty} M_i\left(\frac{2\pi m}{T_p}\right) e^{j\left(\frac{2\pi m}{T_p}\right)t}. \tag{6.6}$$

Funkcja modulująca jest szeregiem o sinusoidalnych składowych. Zatem równanie impulsów wielkiej częstotliwości — według (1.2) — ma postać

$$f(t) = \mathcal{I}m\left\{\frac{1}{T_p} \sum_{m=-\infty}^{\infty} M_i\left(\frac{2\pi m}{T_p}\right) e^{j\left(\omega_s + \frac{2\pi m}{T_p}\right)t + j\psi}\right\}. \tag{6.7}$$

Prążki widma częstotliwościowego są symetrycznie rozmieszczone względem częstotliwości sygnału.



Rys. 20. Widmo częstotliwościowe impulsów powtarzanych ($n = 8$ i $T_p = 16\ T_s$); czarne słupki — $\psi = 0$ i kreskowane słupki $\psi = \frac{\pi}{2}$

Na rys. 20 podano dla przykładu amplitudy 31 harmonicznych widma częstotliwości prostokątnych impulsów powtarzanych przy współczynniku wypełnienia impulsów $n = 8$ i okresie powtarzania $T_p = 16T_s$ [14].

6.3. Widmo częstotliwościowe impulsów koherentnych fazowo z obwiednią impulsu

Załóżmy, że jednorazowy impuls wielkiej częstotliwości $f(t)$ jest powtarzany z okresem T_p. Wówczas jego równanie można napisać w postaci [31]

$$f_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_i(t - kT_p), \tag{6.8}$$

gdzie k jest kolejną liczbą całkowitą.

Stosując twierdzenie o przesunięciu czasowym oraz równanie (6.4) otrzymujemy widmo częstotliwościowe impulsów powtarzanych w postaci prążkowej

$$F_p(\omega) = \frac{2\pi}{T_p} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_i\left(\frac{2\pi m}{T_p}\right) \cdot \delta\left(\omega - \frac{2\pi m}{T_p}\right), \tag{6.9}$$

gdzie $F_i(\omega)$ jest transformatą Fouriera pojedyńczego impulsu.

Odwrotna transformata Fouriera $F_p(\omega)$ równa się

$$\hat{f}_p(t) = \frac{1}{T_p} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_i\left(\frac{2\pi m}{T_p}\right) e^{j\left(\frac{2\pi m}{T_p}\right)t}. \tag{6.10}$$

Jej część urojona opisuje przebieg impulsów powtarzanych jako

$$f_p(t) = \mathcal{I}m\left\{\frac{1}{T_p} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_i\left(\frac{2\pi m}{T_p}\right) e^{j\left(\frac{2\pi m}{T_p}\right)t}\right\}. \tag{6.11}$$

Widmo częstotliwościowe jest w obu rozważanych przypadkach prążkowane o jednakowej obwiedni amplitudowej. Rozłożenie prążków w skali częstotliwości jest jednak różne, gdyż w ostatnim przypadku prążki występują przy wielokrotnościach częstotliwości powtarzania, a więc symetrycznie w stosunku do zerowej częstotliwości.

6.4. Widmo częstotliwościowe impulsów niekoherentnych fazowo

Z rozważań powyższych wynika, że rozważane dotychczas dwa przypadki różnią się fazą sygnału. W pierwszym przypadku faza nie jest stała lecz zmienna od impulsu do impulsu według wzoru (6.1), co wywołuje grupowanie się prążków symetrycznie dokoła częstotliwości fali nośnej. W drugim przypadku faza jest jednakowa, co wywołuje grupowanie się prążków symetrycznie dokoła częstotliwości zerowej. W przypadku trzecim — dowolnej fazy — prążki widma częstotliwościowego nie mają stałej lokalizacji.

7. ZAKOŃCZENIE

W pracy tej dokonano próby zebrania informacji o właściwościach standartowych sygnałów impulsowych wielkiej częstotliwości o modulacji amplitudy. Szczególną uwagę zwrócono na wyznaczanie ich obwiedni i porównanie różnych sposobów jej definiowania.

Na zakończenie autor poczuwa się do miłego obowiązku podziękowania mgrowi inż. M. Bukowskiemu i mgrowi J. Marońskiemu za wykonanie obliczeń do tej pracy. Ponadto autor chciałby również gorąco podziękować prof. drowi Czesławowi Rajskiemu za szereg dyskusji nad tą tematyką.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. Smoliński, Wzmacniacze szerokopasmowe i impulsowe, WNT, 1964.
2. A. Smoliński, On Certain Class of High Frequency Pulse Signals, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. sci. techn. 1969, nr 4, str. 35 — [379].
3. S. Mason i H. Zimmermann, Electronic Circuits, Signals and Systems, J. Wiley, N.Y., 1960, str. 181.
4. R. Leites, Processy ustanowlenia w mnogokaskadnom resonansnom usilitieli, Radiotiechnika, 1947, nr 3, str. 32.
5. E. Kowalczyk, Wykorzystywanie nośników o postaci sinusoidy tłumionej w systemach teletransmisyjnych, ZN PW „Elektryka", 1964, nr 33, str. 15.
6. E. Kowalczyk, Niektóre problemy wykorzystania funkcji ortogonalnych w technice telekomunikacyjnej, Rozprawy Elektrotechniczne, 1966, nr 3, str. 469.
7. H. Margenau i G. Murphy, Matematyka w fizyce i chemii, PWN, 1956, str. 409.
8. S. Lipson i H. Lipson, Optical Physics, Cambrige Univ. Press, 1969, str. 235.
9. A. Kompaniejec, Fizyka teoretyczna, Warszawa, PWN, 1961, str. 173.
10. A. Dawydow, Mechanika kwantowa, Warszawa, PWN, 1967, str. 17.
11. R. Lerner, Representation of Signal, w książce „Lectures on communication system theory" wydanej przez E. Baghdady, McGraw Hill, N. Y., 1961.
12. R. Bracewell, Przekształcenie Fouriera i jego zastosowania, WNT, Warszawa, 1968, str. 196.
13. A. Papoulis, The Fourier Integral and its Applications, McGraw Hill, N.Y. 1962, str. 14, 15, 20, 23 i 25.
14. J. Skilling, Testing with Tone-burst Signals, Electronic Enginner, 1966, December.
15. M. Engelson, Interpreting Pulsed of Spectra, Microwaves, nr 3, str. 52.
16. A. Smoliński, Sinusoidal Modulated High Frequency Pulse Signal, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 1969, nr 11—12, str. 99 — [995].
17. J. Ville, Théorie et applications de la notion du signal analytique, Cables et Transmission, 1948, nr 1, str. 61.
18. J. Dudundji, Envelopes and Preenvelopes of Real Waveforms, IRE Trans. on Information Theory, 1958, nr 1, str. 53.
19. D. Sakrison, Communication Theory: Transmission of Waveforms and Digital Information, J. Wiley, N.Y. 1968, str. 133.
20. L. Filipow i A. Zinowiew, Metody analitycznego przedstawiania sygnałów w elektronice, WNT, Warszawa, 1969, str. 60, 72, 74.
21. H. Rowe, Signals and Noise in Communication Systems, Van Nostrand Co., N.Y. 1965, str. 13, 60.
22. J. Osiowski, Zarys rachunku operatorowego, Warszawa, WNT, 1965, str. 502.
23. W. Ditkin i A. Prudnikow, Przekształcenia całkowe i rachunek operatorowy, PWN, Warszawa, 1964, str. 324.
24. A. Trachtman i W. Trachtman, Tablica preobrazowania Gilberta, Radiotiechnika, 1970, nr 3, str. 85.
25. A. Smoliński, On the Hilbert Envelope of a High Frequency Pulse, Bull. Acad. Polon. Sci.. Sér. sei. techn. 1971, nr 6, str. 41 — [473].
26. V. Čižek, Uebertragung amplitudenmodulierter Signale durch lineares System, Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Ilmenau, 1964, nr 1, str. 57.
27. W. Pogorzelski, Analiza matematyczna, Tom II, Warszawa, Czytelnik, 1947, str. 290.
28. A. Smoliński, Low-Qfactor Single-stage Amplifier Detuned from the Resonant Frequency, Electronics Letters, 1967, nr 2, str. 49.
29. A. Smoliński, High Frequency Rectangular Modulated Pulse Response of a Low-Qfactor Amplifier with the Symmetrical Resonance Curve, II Parametric Envelope and Overshoot Probability, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 1967, nr 5, str. 55 — [443].
30. A. Smoliński, Impulsowy wzmacniacz o jednym obwodzie rezonansowym małej dobroci, Rozprawy Elektrotechniczne, 1968, nr 1, str. 95.

31. R. Berkowitz, Modern Radar, J. Wiley, N. Y., 1965, str. 42 i 44.
32. W. Händler i J. Peters, Zur Messung und Berechnung von trägerfrequenten Einschwingvorgängen, Archiv für elektrische Uebertragung, 1954, nr 7, str. 301.

A. SMOLIŃSKI

STANDARD HIGH FREQUENCY PULSE SIGNALS

Summary

The present paper is an attempt to present systematically information on the properties of high frequency pulse signals with amplitude modulation.

A high frequency signal described by formula (1.2) is a function of the phase angle ψ of a high frequency transient. A considerable part of the paper deals with the influence of the ψ angle on the signal properties. Moreover, its filling factor (2.4) is considered to be an important parameter of the pulse signal.

The second chapter introduces standard pulses of finite duration: the rectangular high frequency pulse described in formula (2.5) and illustrated in Fig. 2 is typical. This pulse is a zero order of the involutional-sinusoidal function class (2.7). Additionally, typical standard pulses of infinite duration but finite energy have been described. To this class belong the exponentially disappearing sinusoidal signal (2.13), the gaussian signal (2.14) and the wave packet (2.15).

Pulse signals at the output of electronic systems change their form and can in principle be described by involved exponential-sinusoidal functions with coefficients dependent on the phase signal of the angle.

The third part gives the frequency spectra of the standard pulses under consideration. It has been shown that in a number of cases the frequency shifting theorem may be greatly helpful. However, the influence of functions on negative frequencies may seriously distort the results obtained when the theorem is applied too superficially; this influence is sometimes referred to as „phase correction".

Particularly great care has been paid to the examination of the first order high frequency signal. The frequency spectra of the sinusoidal exponentially disappearing, gaussian and wave packet signals have also been discussed.

The fourth part defines the analytical signal and discusses its basic properties both for frequency limited and unlimited signals.

The fifth part deals with the problem of defining the envelope of high frequency signals. The definition of the envelope is given first in the form of an analytic signal modulus both for continuous and pulse signals. In the latter case it has been found that the envelope under consideration, here referred to as the Hilbert envelope, is a function of the signal phase angle at its beginning and end. Such an envelope is called the phase envelope. The envelope of phase envelopes, here referred to as the peak envelope, is an envelope independent of the signal phase angle.

Since the Hilbert phase envelope of pulse signals does not describe the local peculiarities of the signal properly, an additional rule has been introduced leading to results that are in accord with our intuition, to results equivalent to the well-known geometric envelope of the curve family.

The author of the present paper introduced at one time the concept of the parametric peak envelope [28] as the geometric locus of the extrema points of the signal (5.19). This definition leads to simpler computer programmes and for the basic parameters of the pulse, such as its overvoltages, yields results identical to the definition based on differential geometry.

The last part examines recurrent high frequency pulses. Frequency spectra have been determined for three cases:

a) phase coherent pulses with a continuous carrier wave,
b) phase coherent pulses with pulse envelope,
c) phase incoherent pulses.

A. SMOLIŃSKI

STANDARDIMPULSSIGNALE MIT HOHEN FREQUENZEN

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit ist eine Probe, Informationen über die Eigenschaften von Impulssignalen mit hohen Frequenzen zusammenzubringen.

Anfangs wurden Standardimpulse mit beschränkter Arbeitsdauer eingeführt. Außerdem wurden typische Standardimpulse mit unbeschränkter Zeitdauer, jedoch beschränkter Energie beschrieben.

Im Weiteren wurde das Frequenzspektrum erwogener Standardimpulse angeführt, und gezeigt, daß in einer Reihe von Fällen das Modulationstheorem (Frequenzverschiebung) hier große Dienste leisten kann.

Es wurde das analitische Signal definiert, und seine Eigenschaften sowohl für beschränkte, als auch unbeschränkte Frequenzen besprochen. Dies ermöglichte die Einführung der Definition einer Hüllkurve als Modul für ein analytisches Signal. Mängel dieser Definition beim Verlauf von Impulsen mit hohen Frequenzen wurden erwogen sowie die Methode ihrer Behebung, was im Grunde der Definition einer Hüllkurve geometrischer Impulsfamilie entspricht, die auf Basis des untersuchten Impulses aufgebaut wird. Es wurde auch die Definition parametrischer Gipfelhüllkurve gennant, die zu einfachen Berechnungsprogrammen für elektronische Rechenmaschinen führt.

Im letzten Abschnitt wurden sich wiederholende Impulse mit hohen Frequenzen untersucht.

А. СМОЛИНЬСКИ

СТАНДАРТНЫЕ ИМПУЛЬСНЫЕ СИГНАЛЫ В.Ч.

Резюме

Труд является попытком собрания информаций о свойствах импульсных сигналов в.ч. с амплитудной модуляцией.

Сигнал в.ч. определенный формулой (1.2) является функцией фазового угла ψ пробега в.ч. Значительная часть труда посвящена рассмотрению влияния угла ψ на свойства сигнала. Кроме того важным параметром импульсного сигнала является его коэффициент заполнения (2.4).

Во второй главе введены стандартные импульсные сигналы ограниченные во времени; среди них находится прежде всего прямоугольный импульс в.ч. описанный формулой (2.5) иллюстрированный рис. 2. Этот импульс является импульсом нулевого порядка класса степенно-синусных функций (2.7). Кроме того описаны типовые стандартные импульсы бесконечные во времени, но ограниченной энергии. Можно к ним причислить синусный сигнал затухающий экспоненционально (2.13), сигнал Гауса (2.14) и волновой пакет (2.15).

Импульсные сигналы на выходе электронных схем имеют изменяющуюся форму, которую можно принципиально описывать сложными степенно синусными функциями с коэффициентами зависящими от фазового угла сигнала.

В третией главе приведены частотные спектры рассматриваемых стандартных импульсов. Доказано, что в ряде случаев теорема о модуляции (частотном перемещении) может оказаться очень пригодной. Однако влияние функции для отрицательных частот может значительно сдеформировать результаты полученные при непродуманном применении этой теоремы; это влияние называется иногда „фазовой коррекцией".

В частности подробно исследованы частотные спектры синусного импульса в.ч. нулевого и первого порядка и обсуждены частотные спектры импульсов синусного с экспоненциальным затуханием, сигнала Гауса и волнового пакета.

В четвертой главе приведено определение аналитического сигнала и обсуждены его основные свойства для ограниченных и бесконечных частотно пробегов.

Пятая глава посвящена определению огибающих пробегов в.ч. Сначала приведено определение этой огибающей в форме модуля аналитического сигнала для непрерывных и импульсных сигналов. В последнем случае констатировано, что огибающая, называемая тут Жильбертовской, является функцией фазового угла сигнала на его начале и конце. Такую огибающую называем фазовой огибающей. Огибающая независимая от фазового угла сигнала является огибающей фазовых огибающих; такую огибающую называем максимальной огибающей.

Поскольку Жильбертовская фазовая огибающая импульсных пробегов не описывает правильно местных свойств сигнала, введена добавочная рекомендация, ведущая к получению результатов интуиционно правильных и соответствующих хорошо известной геометрической огибающей семейства кривых.

Автор труда ввел в свое время понятие параметрической максимальной огибающей [28] являющейся геометрическим местом экстремальных точек сигнала (5.19). Определение этого понятия ведет к простой расчетной программе для ЭЦВМ и в результате приводит к получению результатов для значений основных параметров импульса — как перенапряжения — тождественных с определенными на базе дифференциальной геометрии.

В последней главе исследовались повторяющиеся импульсы в.ч. Определены частотные спектры для трех случаев:

а) импульсов фазово-когерентных с непрерывной несущей волной

б) фазово-когерентных с огибающей импульса

в) фазово-некогерентных.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1972, 18, z. 3, ss. 551—566

621.365

Metoda wyznaczania obszaru stabilnej pracy łukowych palników plazmowych z łukiem pośrednim i bezpośrednim

CZESŁAW KRÓLIKOWSKI (POZNAŃ)

Instytut Elektroenergetyki Politechniki Poznańskiej

Otrzymano 10.4.1971

W pracy przedstawiono metodę ustalania warunków stabilnej pracy łukowych palników plazmowych. Dokonano analizy tych warunków stwierdzając, że w rzeczywistych układach zasilania palników pojemność może być pominięta. Wówczas też o stabilnej pracy palnika decyduje warunek (14) w postaci $r+(R-\xi) > 0$, gdyż L jest zawsze większe od zera.

W dalszej części pracy podano zależność na obliczanie prądu i napięcia granicznego, po zbliżeniu się do których łuk elektryczny staje się niestabilny. Rozważania przeprowadzono dla różnych charakterystyk zewnętrznych źródeł zasilania. Dokonano także analizy wpływu pojemności układu zasilania na stabilną pracę palnika stwierdzając, że ze wzrostem pojemności układ staje się niestabilny nawet przy dużych wartościach prądu łuku.

Podano metodę wyznaczania obszaru stabilnej pracy palników tak z łukiem pośrednim jak i bezpośrednim. Wyniki obliczeń prądów i napięć granicznych wykazują dobrą zgodność z wynikami pomiarów.

1. WPROWADZENIE

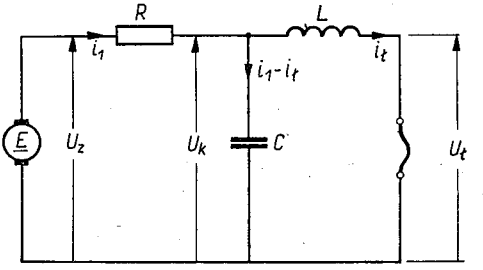
Prowadzenie poprawnej eksploatacji łukowych palników plazmowych wymaga znajomości metod wyznaczania obszaru ich stabilnej pracy. Chodzi więc o wyznaczenie takiego obszaru, w którym palnik będzie pracował bez zakłóceń, przy jednoczesnej możliwości zmian w szerokim zakresie tak energii doprowadzanej do palnika, jak również ilości gazu roboczego stabilizującego kolumnę łukową. Analiza stabilnej pracy palnika może być wykonana przy założeniu, że stopień zużywania się elektrod — a przede wszystkim elektrody-dyszy — nie wpływa na tę stabilność. Układ elektrod w łukowym palniku plazmowym tak z łukiem pośrednim (wewnętrznym) jak i bezpośrednim (zewnętrznym), kształt palącego się między nimi łuku elektrycznego oraz warunki pracy pozwalają twierdzić, że jest to łuk stabilizowany, to znaczy palący się możliwie w jednostajnych i niezmiennych warunkach zewnętrznych.

Warunkiem podstawowym do rozwiązania zagadnienia jest znajomość charakterystyk napięciowo-prądowych palnika, jak również charakterystyki zewnętrznej źródła zasilania.

2. USTALENIE WARUNKÓW STABILNEJ PRACY ŁUKOWEGO PALNIKA PLAZMOWEGO

Biorąc za podstawę układy zasilania stosowanych powszechnie palników, przedstawiono na rysunku 1 schemat ideowy, który może być uważany za schemat reprezentatywny [1].

Charakterystykę napięciowo-prądową obwodu zewnętrznego można wyznaczyć wykorzystując schemat z rys. 1.



Rys. 1. Schemat ideowy układu zasilania łukowego palnika plazmowego.

W ten sposób otrzymamy

$$U_z - i_1 R - L\frac{di_l}{dt} - U_l = 0, \tag{1}$$

$$U_k - L\frac{di_l}{dt} - U_l = 0. \tag{2}$$

Korzystając z zależności

$$CdU_k = (i_1 - i_l)dt \tag{3}$$

oraz różniczkując równanie (2), prąd i_1 będzie

$$i_1 = C\left(\frac{dU_l}{dt} + L\frac{di_l^2}{dt}\right) + i_l. \tag{4}$$

Wstawiając prąd i_1 do równania (1) otrzymamy zależność opisującą obwód z łukiem elektrycznym w postaci

$$RLC\frac{di_l^2}{dt^2} + L\frac{di_l}{dt} + Ri_l = U_z - U_l - CR\frac{dU_l}{dt}. \tag{5}$$

Wykorzystując metodę małych zakłóceń, otrzymamy wyrażenie opisujące zakłóceniową charakterystykę napięciowo-prądową obwodu zewnętrznego w postaci [1]

$$RLC\frac{di^2}{dt^2} + L\frac{di}{dt} + Ri = \frac{U_{zo}}{i_{lo}}\varepsilon - CR\frac{U_{lo}}{i_{lo}}\frac{du}{dt} - \frac{U_{lo}}{i_{lo}}u, \tag{6}$$

gdzie:

$i \ll 1$ — małe zakłócenie prądu,

$\varepsilon \ll 1$ — małe zakłócenie napięcia zasilającego U_z,

$u \ll 1$ — małe zakłócenie napięcia łuku U_l,

i_{lo} — prąd i_l w stanie ustalonym,

U_{zo} — napięcie U_z w stanie ustalonym.

Przyjmując, że napięcie źródła zasilającego w stanie ustalonym wyrazi się zależnością

$$U_z = i_{lo}R + U_l, \tag{7}$$

otrzymamy po odpowiednich przekształceniach następujące równanie równiczkowe obwodu z rysunku 1:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{L+CRr-Cr\xi}{CL(R-\xi)}\frac{di}{dt} + \frac{R+r-\xi}{CL(R-\xi)}i = 0, \tag{8}$$

gdzie:

$$r = \left(\frac{\partial U_l}{\partial i_l}\right)_o; \qquad \xi = \left(\frac{\partial U_z}{\partial i_1}\right)_o.$$

Stosując do badań stabilności kryterium Hurwitza otrzymamy, po wykorzystaniu równania różniczkowego (8), równanie charakterystyczne w postaci:

$$G_2p^2 + G_1p + G_o \triangleq i\cdot p^2 + \frac{L+CRr-Cr\xi}{CL(R-\xi)}p + \frac{R+r-\xi}{CL(R-\xi)} = 0. \tag{9}$$

Następujące nierówności, przy $G_2 = 1 > 0$, ustalają warunki stabilności układu

$$G_o = \frac{R+r-\xi}{CL(R-\xi)} > 0, \tag{10}$$

$$G_1 = \frac{L+CRr-Cr\xi}{CL(R-\xi)} > 0. \tag{11}$$

Ponieważ indukcyjność L oraz pojemność C mają zawsze wartości dodatnie otrzymamy:

$$\frac{r}{(R-\xi)} + 1 > 0, \tag{12}$$

$$\frac{L}{(R-\xi)} + Cr > 0. \tag{13}$$

Dla doprowadzenia nierówności (12) i (13) do prostszej postaci koniecznym jest, aby różnica $(R-\xi)$ była większa od zera.

Stosowane do zasilania palników źródła zasilania mają charakterystyki zewnętrzne opadające $\left(\xi = \frac{dU_z}{di_1} < 0\right)$, stąd też różnica $(R-\xi)$ spełnia wspomniany wymóg.

Wobec powyższego ostateczne — wystarczające — warunki stabilnej pracy obwodu z łukowym palnikiem plazmowym można zapisać w postaci

$$r + (R-\xi) > 0, \tag{14}$$

$$L + (R-\xi)Cr > 0. \tag{15}$$

Z przedstawionych wyżej warunków wynika, że przy określonej pojemności układu C oraz indukcyjności L, łuk elektryczny w palniku będzie się palił stabilnie, jeśli rezystancja obwodu zewnętrznego R oraz charakterystyka źródła zasilającego ξ spełnią określone warunki.

Jeśli przyjąć, że różnica $(R-\xi)$ jest większa od zera także dla wznoszącej się zewnętrznej charakterystyki źródła, to znaczy $\frac{dU_z}{di_1} > 0$, wówczas rezystancja obwodu R winna spełniać następujący warunek: $R > |\xi|$.

3. ANALIZA WARUNKÓW STABILNEJ PRACY PALNIKA

Rzeczywiste układy zasilania łukowych palników plazmowych charakteryzują się tym, że ich pojemność C może być w zasadzie pominięta [1]. W tym przypadku warunki (14) i (15) będą

$$\begin{aligned} r+(R-\xi) &> 0, \\ L &> 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Ponieważ indukcyjność L jest zawsze większa od zera, rozważania można ograniczyć do spełnienia warunku (14).

Gdyby przyjąć, że indukcyjność obwodu $L = 0$, to wówczas będzie

oraz

$$\begin{aligned} r+(R-\xi) &> 0 \\ (R-\xi)Cr &> 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Ponieważ $r < 0$, $C > 0$, natomiast różnica $(R-\xi)$ jest większa od zera, wobec tego układ będzie zachowywał się niestabilnie.

Wynika stąd, że niezależnie od wartości pojemności i pomijalnie małej indukcyjności układu, warunki stabilnej pracy nie będą spełnione.

4. USTALENIE PRĄDU I NAPIĘCIA GRANICZNEGO

Doświadczalnie wykazano, że istnieje pewna minimalna wartość prądu zwana graniczną i związana z nią odpowiednia wartość napięcia łuku, po zbliżeniu się do której układ staje się niestabilny. Przekroczenie granicznej wartości prądu i_{gr} powoduje przerwanie prądu obwodu i zgaszenie łuku elektrycznego.

Ustalenia związku na graniczną wartość prądu i napięcia dokonamy przy założeniu, że warunkiem koniecznym i wystarczającym jest warunek (14). Rozważania przeprowadzimy dla różnych (typowych) charakterystyk zewnętrznych źródeł, zasilających układy z łukowymi palnikami plazmowymi.

4.1. Prąd i napięcie graniczne przy wykorzystaniu spawarek wirujących typu EW oraz spawarek prostownikowych typu ST jako źródeł zasilania

Wykorzystując metodę najmniejszych kwadratów (przybliżenie Czebyszewa) charakterystykę zewnętrzną spawarek wirujących typu EW oraz spawarek prostownikowych typu ST można przedstawić zależnością

$$U_z = a_0+a_1 i+a_2 i^2. \tag{18}$$

Przyjmując, że palący się w palniku łuk elektryczny pali się stabilnie, to przy współpracy obwodu zewnętrznego z odbiornikiem w postaci łuku elektrycznego winna być spełniona zależność

$$U_n = Ri_l + U_l = U_z, \tag{19}$$

gdzie

U_n jest wymaganym napięciem źródła zasilającego dla stabilnej pracy palnika.

W ogólnym przypadku równanie (19) może posiadać dwa rozwiązania (dla $i_l > 0$), z których jedno stanowi punkt stabilnego palenia się łuku, a drugie punkt pracy niestabilnej [3]. W przypadku, gdy oba rozwiązania przyjmą tę samą wartość otrzymamy granicę, oddzielającą obszar stabilnej pracy palnika (łuku) od obszaru pracy niestabilnej [3]. W celu otrzymania podwójnego pierwiastka, warunek stabilnej pracy palnika winien przyjąć postać

$$r + R = \xi. \tag{20}$$

Przyjmując zgodnie z [2], że napięcie łuku wyrazi się zależnością

$$U_l = A + BG^* + \frac{E + DG^*}{i_l^\alpha} \tag{21}$$

oraz korzystając z zależności (18) otrzymamy

$$U_n = Ri_l + U_l = Ri_l + A + BG^* + \frac{E + DG^*}{i_l^\alpha} = a_o + a_1 i_l + a_2 i_l^2. \tag{22}$$

Różniczkując równanie (22) względem i_l oraz dokonując odpowiednich przekształceń otrzymamy

$$i_l^{(\alpha+2)} + \frac{(A + BG^* - a_o)}{a_2} i_l^\alpha + \frac{(E + DG^*)(\alpha + 1)}{a_2} = 0. \tag{23}$$

Podstawiając

$$\frac{(A + BG^* - a_o)}{a_2} = p, \tag{24a}$$

$$\frac{(E + DG^*)(\alpha + 1)}{a_2} = q, \tag{24b}$$

otrzymamy ostatecznie

$$i_l^{\alpha+2} + pi_l^\alpha + q = 0. \tag{25}$$

Rozwiązanie równania (25) można ułatwić wykorzystując wyznaczone w [1] i [2] wartości wykładnika potęgowego α. W przypadku gdy $\alpha = 1$ otrzymamy

$$i_l^3 + pi_l + q = 0. \tag{25a}$$

Wykorzystując do rozwiązania metodę Cardana należy zanalizować wyrażenie $\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)$, od którego zależą pierwiastki równania (25).

Przyjmując do analizy opadające charakterystyki źródeł zasilania stwierdzamy, że $a_2 < 0$; $(A + BG^*) < a_o$ (gdzie a_o napięcie biegu jałowego źródła),

stąd $p > 0$ oraz $p^3 > 0$;

$(E + DG^*) > 0$; $a_2 < 0$,

stąd $q < 0$; $q^2 > 0$.

Wynika stąd, że równanie (25a) ma jeden pierwiastek rzeczywisty, który wyraża się zależnością

$$i_{l,gr} = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{26}$$

Napięcie graniczne będzie

$$U_{l,gr} = A + BG^* + \frac{E + DG^*}{i_{l,gr}}. \tag{27}$$

W przypadku, gdy $\alpha = 0{,}67$, co ma miejsce w palnikach z łukiem wewnętrznym z anodą miedzianą chłodzoną wodą, równanie (25) będzie miało postać:

$$i_l^{2,67} + p i_l^{0,67} + q = 0. \tag{28}$$

Z równania (28) można wyznaczyć wartość prądu granicznego wykorzystując metodę Newtona oraz maszynę cyfrową (np. typu „Odra").

4.2. Prąd oraz napięcie graniczne przy wykorzystaniu spawarek z charakterystyką zewnętrzną prostoliniową opadającą jako źródeł zasilania

Charakterystykę zewnętrzną spawarki wirującej, np. typu „Triodyn" produkcji czechosłowackiej, można wyrazić zależnością [1]

$$U_z = a_o + a_1 i. \tag{29}$$

Postępując w sposób podobny jak w punkcie 4.1 otrzymamy

$$U_n = R i_l + U_l = R i_l + A + BG^* + \frac{E + DG^*}{i_l^{\alpha}} = a_o + a_1 i_l. \tag{30}$$

Różniczkując U_n oraz U_z względem i_l będzie

$$-\alpha \frac{E + DG^*}{i_l^{\alpha+1}} + R = a_1. \tag{31}$$

Po przekształceniach (30) i (31) otrzymamy równanie na prąd graniczny w postaci

$$i_{l,gr} = \sqrt[\alpha]{\frac{(\alpha+1)(E + DG^*)}{a_o - (A + BG^*)}}. \tag{32}$$

Napięcie graniczne natomiast będzie

$$U_{l,gr} = \frac{(A + BG^*)\alpha + a_o}{(\alpha+1)}. \tag{33}$$

4.3. Prąd i napięcie graniczne przy wykorzystaniu źródeł zasilania, których charakterystyka zewnętrzna jest niezależna od prądu

W przypadku, gdy charakterystyka zewnętrzna źródła zasilania jest niezależna od prądu otrzymamy

$$\xi = \frac{\partial U_z}{\partial i_l} = 0. \tag{34}$$

Przyjmując nadal, że pojemność układu można pominąć, z warunków (14) i (15) będzie

$$r+R > 0; \quad L > 0. \tag{35}$$

Korzystając z zależności podanych w rozdziale 4.1 będzie

$$r+R = 0; \quad R = -r, \tag{36}$$

$$\frac{\partial U_l}{\partial i_l} = r = -\alpha \frac{E+DG^*}{i_l^{\alpha+1}}. \tag{37}$$

Stabilna praca palnika będzie wówczas, gdy

$$U_n = Ri_l + U_l = U_z,$$

$$U_n = U_z = Ri_l + A + BG^* + \frac{E+DG^*}{i_l^{\alpha}}. \tag{38}$$

Wykorzystując zależność (37)

$$R - \alpha \frac{E+DG^*}{i_l^{\alpha+1}} = 0$$

oraz przekształcając (37) i (38), prąd graniczny będzie

$$i_{l,gr} = \sqrt[\alpha]{\frac{(\alpha+1)(E+DG^*)}{U_z-(A+BG^*)}}. \tag{39}$$

Wykorzystując źródła zasilania z charakterystyką zewnętrzną niezależną od prądu, w równaniu (39) wyrażenie $(E+DG^*)$ winno być większe od zera a U_z winno być większe od $(A+BG^*)$.

5. WPŁYW POJEMNOŚCI OBWODU NA PRĄD GRANICZNY PALNIKA

W przypadku, gdy pojemności układu nie można zaniedbać, zależności (14) i (15), w celu otrzymania podwójnego i co do wartości równego pierwiastka, muszą spełniać równości

$$\begin{aligned} R+r-\xi &= 0, \\ L+(R-\xi)Cr &= 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Podstawiając $R = \xi - r$ otrzymamy następujący warunek stabilnej pracy układu z łukiem elektrycznym

$$r^2 \frac{C}{L} = 1. \tag{41}$$

Dla otrzymania wyrażenia na prąd graniczny musi zachodzić następujący związek

$$U_n = U_z = Ri_l + U_l = Ri_l + A + BG^* + \frac{E + DG^*}{i_l^\alpha}.$$

Wykorzystując rezystancję różniczkową łuku będzie

$$r = \frac{dU_l}{di_l} = -\alpha \frac{E + DG^*}{i_l^{\alpha+1}}.$$

Korzystając z zależności (41) otrzymamy

$$\frac{C}{L}\left(\alpha^2 \frac{(E + DG^*)^2}{i_l^{2\alpha+2}}\right) = 1. \tag{42}$$

Wprowadzając zależność na napięcie źródła zasilania otrzymamy

$$U_z i_l^\alpha = Ri_l^{\alpha+1} + (A + BG^*) i_l^\alpha + (E + DG^*).$$

Stąd

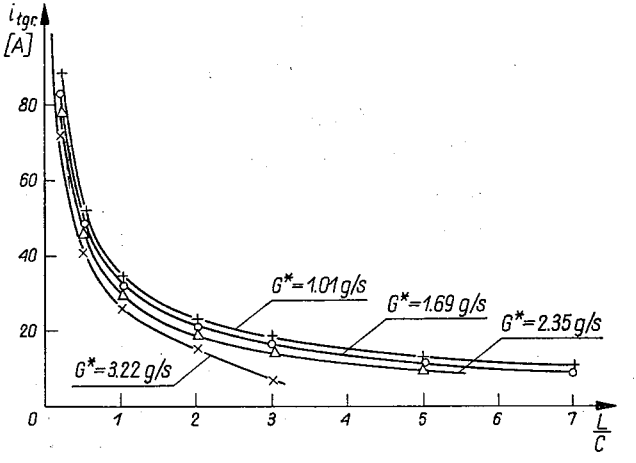
$$(E + DG^*) = U_z i_l^\alpha - (A + BG^*) i_l^\alpha - Ri_l^{\alpha+1}. \tag{43}$$

Wprowadzając zależność (43) do wzoru (42) będzie

$$i_l^{\alpha+1} = \sqrt{\frac{C}{L}}\alpha[U_z i_l^\alpha - Ri_l^{\alpha+1} - (A + BG^*) i_l^\alpha]. \tag{44}$$

Przyjmując, że źródła zasilania mają typowe charakterystyki w postaci

$$U_z = a_o + a_1 i_l + a_2 i_l^2,$$

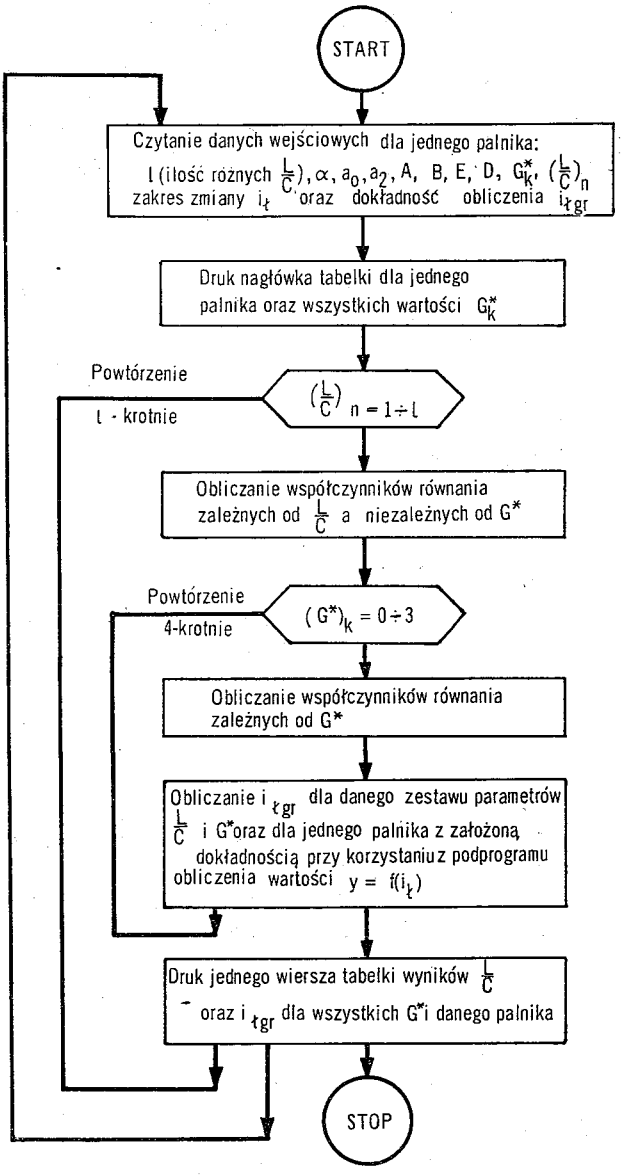


Rys. 2. Zależność $i_{l,gr} = f\left(\frac{L}{C}\right)$, palnik typu PPTK-1/25/50, $l_a = 30$ mm, $d_a = 4$ mm, gaz roboczy — argon

a poza tym

$$\xi = \frac{dU_z}{di_l} = a_1 + 2a_2 i_l,$$

$$r = -\alpha \frac{E + DG^*}{i_l^{\alpha+1}},$$



Rys. 3. Schemat blokowy programu dla obliczeń przebiegu $i_{t,gr} = f\left(\frac{L}{C}\right)$ na maszynie cyfrowej „Odra 1013"

otrzymamy

$$R = a_1 + 2a_2 i_l + \alpha \frac{E + DG^*}{i_l^{\alpha+1}}.$$

Wprowadzając R oraz U_z do zależności (44) po przekształceniach otrzymamy:

$$i_l^{\alpha+2} + \frac{1}{a_2 \alpha} \sqrt{\frac{L}{C}} i_l^{\alpha+1} + \frac{(A + BG^*) - a_o}{a_2} i_l^{\alpha} + \frac{(E + DG^*)\alpha}{a_2} = 0. \tag{45}$$

W celu otrzymania zależności między prądem łuku, przy którym łuk będzie na granicy stabilności, a indukcyjnością i pojemnością obwodu, równanie (45) rozwiązano przy pomocy maszyny cyfrowej typu „Odra 1013" dla trzech typów palników przy $G^* = \text{const}$.

Na rysunku 2 przedstawiono przykładowo zależność $i_{l,gr} = f\left(\frac{L}{C}\right)$ dla palnika typu PPTK — 1/25/50, przy długości dyszy $l_a = 30$ mm i średnicy dyszy $d_a = 4$ mm, wykorzystując schemat blokowy programu na maszynę cyfrową przedstawiony na rysunku 3 oraz dane zestawione w tablicy 1. Gazem roboczym był argon.

Tablica 1

Wartości prądów granicznych przy zmiennym stosunku $\frac{L}{C}$ obwodu zasilania. Palnik typu PPTK-1/25/50, $l_a = 30$ mm, $d_a = 4$ mm, gaz roboczy argon

$\frac{L}{C}$ \ $G^*(g/s)$	1,01	1,69	2,35	3,22
0,2	89,2	83,5	78,5	72,2
0,5	51,5	48,5	45,5	40,5
1	34,5	32,5	29,5	26,0
2	23,0	21,2	18,8	15,5
3	18,5	16,5	14,0	6,5
5	13,0	11,5	9,2	—
7	10,5	8,5	—	—
10	8,2	5,5	—	—

Do obliczeń wykorzystano zależność na napięcie łuku oraz napięcie źródła zasilania (spawarka typu EW-32a) w postaci

$$U_l = 15{,}82 + 3{,}14G^* + \frac{98{,}36 + 26{,}5G^*}{i_l^{0{,}67}}, \tag{46}$$

$$U_z = 78 + 0{,}058 i_l - 0{,}00058 i_l^2. \tag{47}$$

Analizując wyniki obliczeń stwierdzamy, że wzrost pojemności układu, przy danej indukcyjności, wpływa ujemnie na stabilność łuku. Łuk gaśnie przy większej wartości prądu obwodu. Potwierdzono to także w pracy [1] mimo zastosowania tam ograniczenia w postaci $L > |(R - \xi)Cr|$ mającego na celu uproszczenie obliczeń.

6. OBSZAR STABILNEJ PRACY PALNIKA TYPU PPTK-1/25/50 Z ŁUKIEM WEWNĘTRZNYM (POŚREDNIM)

Korzystając z badań, których wyniki przedstawiono w [2] można przyjąć, że wykładnik potęgowy dla palnika tego typu wynosi $\alpha = 0{,}67$.

Napięcie łuku można wówczas przedstawić w postaci

$$U_l = A + BG^* + \frac{E + DG^*}{i_l^{0,67}}. \tag{48}$$

Jako źródła zasilania użyto spawarki wirujące typu EW-32[a] pracujące na zakresie II. przy prądzie maksymalnym obciążenia $I_{m,obc} = 350$ A. Charakterystykę zewnętrzną tych źródeł można przedstawić zależnością (18).

Korzystając z rozważań przedstawionych uprzednio, zależność na prąd graniczny można natomiast wyrazić zależnością (28). Przyjmując, że napięcie łuku dla palnika typu PPTK-1/25/50, o danych $l_a = 20$ mm, $d_a = 4$ mm, wyrazi się zależnością [1]

$$U_l = 13{,}33 + 5{,}29G^* + \frac{124{,}33 + 19{,}29G^*}{i_l^{0,67}}, \tag{49}$$

natomiast charakterystyka zewnętrzna użytego źródła zasilania będzie

$$U_z = 78 + 0{,}058i_l - 0{,}00058i_l^2, \tag{50}$$

równanie (28) rozwiązano przy wykorzystaniu maszyny cyfrowej typu „Odra 1013".

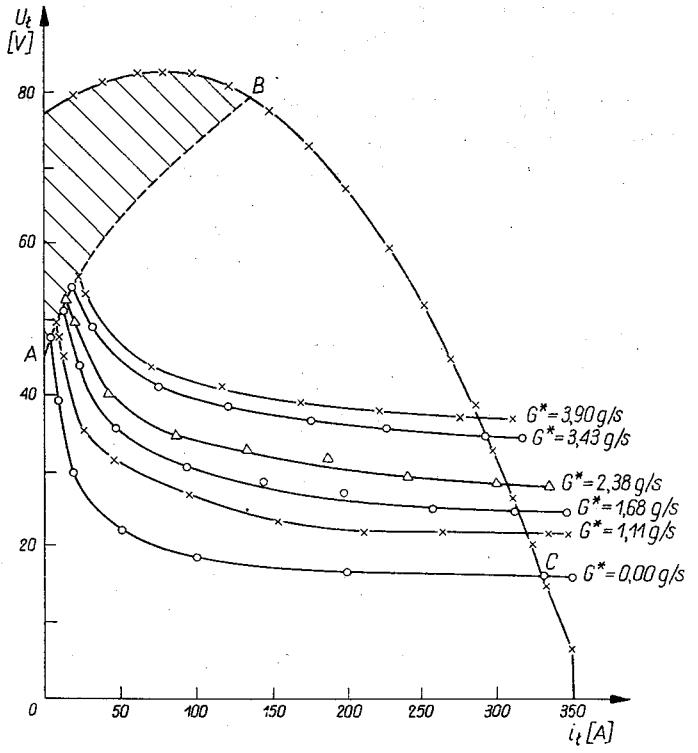
Tablica 2

Wartości pomierzone i obliczone prądów i napięć granicznych. Palnik typu PPTK-1/25/50, gaz roboczy argon

Lp.	G^*	l_a	$i_{l,gr,o}$	$i_{l,gr,p}$	i_l%	$U_{l,gr,o}$	$U_{l,gr,p}$	U_l%
—	g/s	mm	A	A	%	V	V	%
1	1,11	20	8,3	9,0	−7,8	54,5	50,5	+8,0
2	1,68		10,0	11,0	−9,1	55,6	51,5	+7,9
3	2,38		12,6	12,0	+5,0	56,9	53,5	+6,4
4	3,43		17,5	19,0	−7,9	59,2	55,0	+7,6
5	3,90	20	20,3	21,5	−5,6	60,1	56,0	+7,3

W tablicy 2 zestawiono przykładowe wyniki obliczeń i pomiarów prądów i napięć granicznych uzyskane na badanym palniku typu PPTK-1/25/50.

Porównując wielkości obliczone z pomierzonymi stwierdzić należy, że różnice między nimi nie przekraczają $\pm 10\%$. Jest to różnica dość znaczna, niemniej dla celów praktycznych dokładność ta jest w zupełności wystarczająca. Dokładność ta wiąże się m.in. z tym, iż wskazania woltomierza cyfrowego, używanego do pomiarów, przy niestabilnie zachowującym się napięciu (występują wyraźne wahania napięcia) są obarczone dużym błędem.



Rys. 4. Obszar stabilnej pracy palnika typu PPTK-1/25/50 z łukiem wewnętrznym. Gaz roboczy — argon. Zasilanie — spawarka wirująca typu EW-32[a]

Obszar stabilnej pracy palnika z łukiem wewnętrznym typu PPTK-1/25/50 przedstawiono na rysunku 4. Z rysunku wynika, że obszar stabilnej pracy ograniczony jest:

— krzywą AB — przechodzącą przez punkty rozdzielające obszar na część stabilnego i niestabilnego (zakreskowanie) palenia się łuku,

— krzywą BC — stanowiącą część charakterystyki zewnętrznej źródła zasilania, połączoną z dopuszczalnym obciążeniem spawarki,

— krzywą CA — będącą charakterystyką statyczną wyładowania łukowego dla $G^* = 0$ (g/s).

7. OBSZAR STABILNEJ PRACY PALNIKA TYPU PCa-50 Z ŁUKIEM ZEWNĘTRZNYM (BEZPOŚREDNIM)

W pracy [2] wykazano, że w przypadku palnika z łukiem zewnętrznym (bezpośrednim) największą dokładność między wielkościami pomierzonymi i obliczonymi uzyskuje się przy wykorzystaniu długości łuku l_t jako parametru. Wykazano także, że wykładnik potęgowy może być z wystarczającą dokładnością przyjmowany jako równy $\alpha = 1$. Napięcie łuku w funkcji prądu łuku może być wówczas opisane następującym wzorem empirycznym [2]:

$$U_t = A + Bl_t + \frac{E + Dl_t}{i_t} \tag{51}$$

Źródłem zasilania były spawarki wirujące typu EW-32ª-500 połączone szeregowo z charakterystyką zewnętrzną wyrażoną wzorem (18).

Korzystając z metody przedstawionej w punkcie 4.1 niniejszej pracy oraz przyjmując, że pojemność układu zasilania palnika może być pominięta, prąd graniczny będzie

$$i_l^3 + \frac{A+Bl_l-a_o}{a_2} i_l + \frac{2(E+Dl_l)}{a_2} = 0. \tag{52}$$

Podstawiając

$$\frac{A+Bl_l-a_o}{a_2} = p \quad \text{oraz} \quad \frac{2(E+Dl_l)}{a_2} = q,$$

otrzymamy ostatecznie

$$i_l^3 + pi_l + q = 0. \tag{53}$$

Napięcie graniczne wyznaczymy natomiast z zależności

$$U_{l,gr} = A + Bl_l + \frac{E+Dl_l}{i_{l,gr}}. \tag{54}$$

Poniżej przedstawiono wyniki obliczeń i pomiarów dla palnika typu PCa-50 o danych: katoda — wolfram torowany, anoda — miedź, średnica dyszy $d_a = 5$ mm, długość dyszy $l_a = 2{,}5$ mm, katoda odsunięta od dyszy o 2 mm, gaz roboczy — argon, źródło zasilania — dwie spawarki wirujące typu EW-32ª-500 połączone szeregowo.

Badania przeprowadzono w układzie przedstawionym w [2]. Napięcie łuku przy $G^* = 0{,}70$ g/s = const będzie

$$U_l = 19{,}02 + 0{,}78l_l + \frac{-1079{,}51+117{,}76l_l}{i_l}. \tag{55}$$

Charakterystykę zewnętrzną dwóch spawarek (II zakres — 350 A) można opisać zależnością

$$U_z = 156 + 0{,}116i_l - 0{,}00116i_l^2. \tag{56}$$

Tablica 3

Wartości pomierzone i obliczone prądu i napięcia granicznego. Palnik PCa-50. Gaz roboczy — argon

Lp.	G^*	l_l	$i_{l,gr,o}$	$i_{l,gr,p}$	$i_l\%$	$U_{l,gr,o}$	$U_{l,gr,p}$	$U_l\%$
—	g/s	mm	A	A	%	V	V	%
1	0,70	18	18,2	19,0	−4,0	88,8	89,4	−0,7
2		22	25,0	24,0	+4,2	95,0	93,7	+1,4
3		26	33,5	35,0	−4,3	97,8	95,8	+2,1
4	0,70	30	42,2	44,0	−4,1	98,9	97,6	+1,4

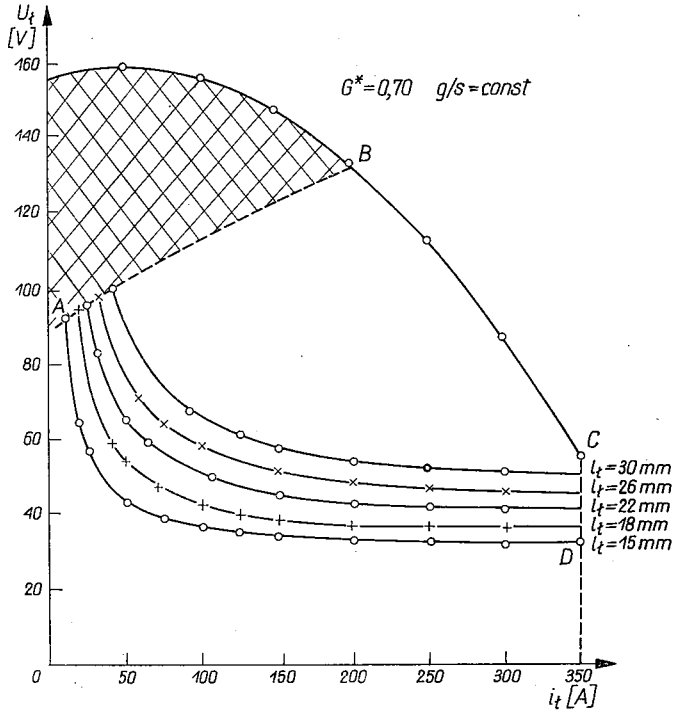
Wykorzystując wspomnianą metodę Cardana do rozwiązania równania (53) oraz wyniki pomiarów, w tablicy 3 zestawiono wielkości obliczone i pomierzone.

Porównując wielkości obliczone z pomierzonymi stwierdzamy, że różnice tak prądu jak i napięcia granicznego są nieduże i nie przekraczają ±5%.

Na rysunku 5 przedstawiono obszar stabilnej pracy palnika plazmowo-łukowego typu PCa-50 z łukiem zewnętrznym. Obszar stabilnej pracy tego palnika jest ograniczony:

— krzywą AB — przechodzącą przez punkty rozdzielające obszar na część stabilnego i niestabilnego (zakreskowane) palenia się łuku,

— krzywą BC — stanowiącą charakterystykę zewnętrzną źródła zasilania (dwie spawarki wirujące EW-32[a] — w połączeniu szeregowym),



Rys. 5. Obszar stabilnej pracy palnika typu PCa-50 z łukiem zewnętrznym. Gaz roboczy — argon. Zasilanie — 2 spawarki typu EW-32[a] w połączeniu szeregowym

— prostą CD — odpowiadającą dopuszczalnemu obciążeniu spawarki (350 A — zakres II),

— krzywą DA — będącą charakterystyką statyczną wyładowania łukowego dla minimalnej długości kolumny łukowej l_t = 15 mm.

8. ZAKOŃCZENIE

Zaproponowana w pracy metoda ustalenia obszaru stabilnej pracy łukowych palników plazmowych tak z łukiem pośrednim jak i bezpośrednim stanowi cenną pomoc nie tylko dla eksploatatorów palników plazmowo-łukowych, ale także i dla projektantów.

Przeprowadzona analiza wykazała, że rozmiary obszaru stabilnej pracy obu typów palników zależą od wartości napięcia biegu jałowego źródła (a_o), od jego charakterystyki zewnętrznej U_z oraz od obciążalności dopuszczalnej $I_{m,obc}$. Na rozmiary tego obszaru ma także poważny wpływ pojemność układu zasilania palników. Wzrost pojemności przesuwa prąd graniczny do coraz to większych wartości, co może w poważnym stopniu ograniczyć obszar stabilnej pracy palników.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Cz. Królikowski, Analiza statecznej pracy palnika plazmowo-łukowego prądu stałego z łukiem pośrednim (wewnętrznym) przy wykorzystaniu charakterystyk napięciowo-prądowych, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Rozprawy nr 22, 1967.
2. Cz. Królikowski, Jedna z metod analitycznego ujmowania charakterystyk napięciowo-prądowych łukowych palników plazmowych prądu stałego, Rozprawy Elektrotechniczne, z. 2, 1972.
3. Cz. Królikowski, R. Niewiedział, Ustalenie granic i warunków statecznego palenia się łuku elektrycznego w palniku plazmowo-łukowym prądu stałego, Zeszyty Naukowe P.P. Elektryka, nr 6 (34), 1965.

C. KRÓLIKOWSKI

METHOD OF DETERMINING THE STABLE WORK AREA OF DIRECT AND INDIRECT ARC PLASMA TORCHES

Summary

The method of establishing the conditions of stable work of arc-plasma torches is presented. The analysis of these conditions is made. Relations for the calculation of current and limiting voltage for different characteristics of external sources of energizing, are given.

The method of determining the stable work area of torches is given.

The results of calculations and measurements of currents and limiting voltages show a great uniformity.

C. KRÓLIKOWSKI

METHODE DER BESTIMMUNG EINES STABILEN ARBEITSBEREICHES DIREKTER UND INDIREKTER LICHTBOGEN-PLASMABRENNER

Zusammenfassung

In der Arbeit wurde eine Bestimmungsmethode für stabile Arbeit von Lichtbogen-Plasmabrennern dargestellt.

Es wurde eine Analyse der Bedingungen durchgeführt. Abhängigkeiten zur Berechnung des Grenzstromes und der Grenzspannung wurden für verschiedene äußere Kennlinien der Energiequellen angeführt.

Es wurde eine Bestimmungsmethode des stabilen Arbeitsbereiches der Brenner angegeben.

Im allgemeinen kann festgestellt werden, daß die Versuchsergebnisse mit den theoretischen Erwägungen übereinstimmen.

Ч. КРУЛИКОВСКИ

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЛАСТИ СТАБИЛЬНОЙ РАБОТЫ ДУГОВЫХ ПЛАЗМОВЫХ ГОРЕЛОК С ПОСРЕДСТВЕННОЙ И НЕПОСРЕДСТВЕННОЙ ДУГОЙ

Р е з ю м е

В настоящей статье представлен метод определения условий стабильной работы дуговых плазмовых горелок. Проведен анализ этих условий. Указаны зависимости для расчета тока и предельного напряжения для разных внешних характеристик источников питания.

Указан метод определения области стабильной работы горелок. Наблюдается большое сходство результатов расчетов и измерений токов и предельных напряжений.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1972, 18, z. 3, ss. 567—574

621.316.17

Oddziaływanie indukcyjne prądu zwarcia z ziemią w napowietrznej linii energoelektrycznej na szyny jednotorowej linii kolejowej

FRANCISZEK STANISŁAW LACHOWICZ (ŁÓDŹ)

Instytut Podstaw Elektrotechniki Politechniki Łódzkiej

Otrzymano 20.5.1971

W pracy rozpatruje się oddziaływanie indukcyjne na szyny jednotorowej linii kolejowej prądu zwarciowego z ziemią w napowietrznej linii energoelektrycznej usytuowanej równolegle do toru. Podano sposób obliczania prądu $I(x)$ w szynach oraz napięcia $V_b(x)$ na warstwie oddzielającej szyny od ziemi. Zbadano wpływ odległości linii energoelektrycznej od toru.

1. WSTĘP

W pobliżu linii kolejowych występują często energoelektryczne linie napowietrzne pracujące z uziemionym punktem zerowym. Jeżeli w linii powstanie zwarcie z ziemią, to występuje oddziaływanie galwaniczne i indukcyjne prądu zwarciowego na szyny linii kolejowej, wskutek czego w szynach płynie prąd. Jak wiadomo, szyny kolejowe wykonane są z materiału ferromagnetycznego, wobec czego rozpatrywany układ jest nieliniowy. W rozważaniach stosuje się metodę linearyzacji jednoodcinkowej charakterystyk elementów nieliniowych, w związku z czym omawiany układ można traktować jako liniowy i rozpatrywać osobno oddziaływanie galwaniczne i osobno oddziaływanie indukcyjne.

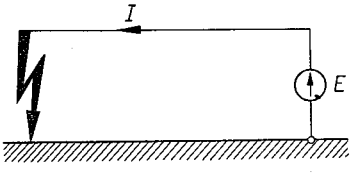
W pracy wyznacza się prąd w szynach jednotorowej linii kolejowej oraz napięcie na warstwie oddzielającej szyny od ziemi, występujące wskutek oddziaływania indukcyjnego prądu zwarciowego z ziemią w napowietrznej linii energoelektrycznej usytuowanej równolegle do toru. Przyjmuje się przy tym założenia upraszczające stosowane często w pracach dotyczących obwodów, w których w charakterze przewodu wykorzystana jest ziemia. Zakłada się więc, że prądy przesunięcia w ziemi i w powietrzu są pomijalnie małe oraz że powierzchnia ziemi jest płaszczyzną i grunt jest jednorodny. Ponadto należy nadmienić, że rozpatruje się tylko składową okresową prądu zwarciowego, w związku z czym przyjmuje się, że prądy, napięcia oraz wielkości charakteryzujące pole elektromagnetyczne zmieniają się w czasie jak $e^{j\omega t}$. W rozważaniach szyny jednotorowej linii kolejowej zastępuje się (por. [3]) jednym przewodem zastępczym o poprzecznym przekroju kołowym.

Wykaz najważniejszych oznaczeń

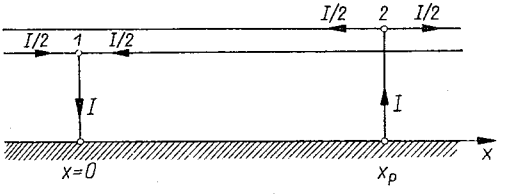
a — rozstaw szyn toru kolejowego,
G — upływność na jednostkę długości szyn względem tzw. ziemi bliskiej, czyli konduktancja na jednostkę długości szyn warstwy oddzielającej szyny od ziemi,
I — prąd zwarcia z ziemią w linii energoelektrycznej,
$I(x)$ — prąd w punkcie x szyn,
K — natężenie pola elektrycznego,
$V_b(x)$ — potencjał względem tzw. ziemi bliskiej w punkcie x szyn,
Y_p — admitancja przejściowa szyny na jednostkę długości względem tzw. ziemi bliskiej,
Z_w — impedancja wewnętrzna szyny na jednostkę długości,
Z_{11} — impedancja własna obwodu ziemnopowrotnego na jednostkę długości,
Z_{12} — impedancja wzajemna dwóch obwodów ziemnopowrotnych na jednostkę długości,
Γ — stała przenoszenia,
γ — konduktywność gruntu,
μ — przenikalność magnetyczna szyny,
μ_0 — przenikalność magnetyczna próżni,
ω — pulsacja prądu zwarciowego.

2. ROZWAŻANIA OGÓLNE

Obwód prądu zwarciowego z ziemią w napowietrznej linii energoelektrycznej pracującej z uziemionym punktem zerowym jest schematycznie przedstawiony na rys. 1. W rozważaniach przyjmuje się, że obwód z rys. 1 powstaje w wyniku nałożenia się dwóch obwodów elementarnych zgodnie z rys. 2.



Rys. 1. Obwód zwarciowy



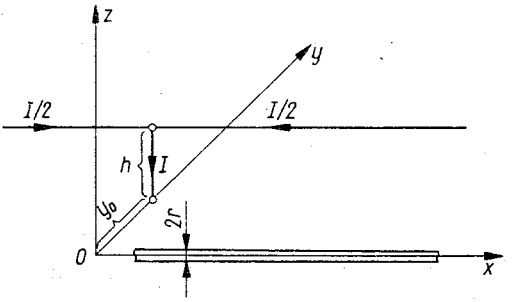
Rys. 2. Schemat zastępczy obwodu zwarciowego

Rozpatrzmy elementarny obwód linii energoelektrycznej usytuowanej równolegle do znajdującej się w pobliżu jednotorowej linii kolejowej (rys. 3). Traktując obwód elementarny jako zbiór dipoli prądowych rozłożonych wzdłuż przewodu, można wyznaczyć natężenie pola elektrycznego wywołanego przez prąd zwarciowy. Niech $K_x(x)$ oznacza składową wzdłuż osi Ox (rys. 3) natężenia rozpatrywanego pola elektrycznego na powierzchni ziemi. Natężenie $K_x(x)$ można przedstawić w postaci sumy dwóch składników, a mianowicie

$$K_x(x) = K_g(x)+K_i(x), \tag{1}$$

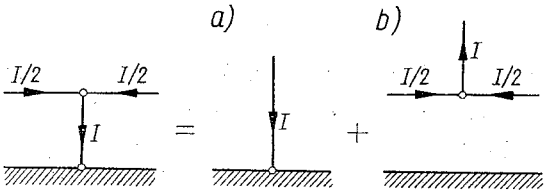
z których pierwszy $K_g(x)$ związany jest z oddziaływaniem galwanicznym prądu zwarciowego z ziemią w linii energoelektrycznej na szyny linii kolejowej, co jest rozpatrywane w [3],

drugi zaś składnik $K_i(x)$ związany jest z oddziaływaniem indukcyjnym; oddziaływanie indukcyjne w przypadku, gdy na powierzchni ziemi znajduje się pojedynczy przewód jest omawiane w [4]. W związku z przyjętym założeniem o linearyzacji charakterystyki elementu

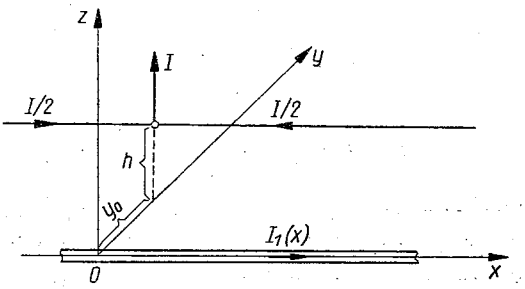


Rys. 3. Obwód zwarciowy elementarny

ferromagnetycznego występującego w omawianym układzie, można obydwa powyższe oddziaływania rozpatrywać oddzielnie i traktować, że stan wypadkowy jest wynikiem nałożenia się wpływu galwanicznego i indukcyjnego, co schematycznie jest przedstawione na rys. 4.



Rys. 4. Wpływ galwaniczny i indukcyjny



Rys. 5. Oddziaływanie indukcyjne

W dalszych rozważaniach rozpatruje się oddziaływanie indukcyjne prądu zwarciowego z ziemią w energoelektrycznej linii napowietrznej na szyny jednotorowej linii kolejowej na podstawie układu z rys. 5. Szyny jednotorowej linii kolejowej zastępuje się przy tym jednym przewodem zastępczym o promieniu poprzecznego przekroju $r_z = \sqrt{ra}$, gdzie $r = \frac{u}{2\pi}$, przy czym u jest obwodem poprzecznego przekroju szyny, a jest rozstawem szyn.

Przewód zastępczy jest umieszczony przy powierzchni ziemi w ten sposób, że średnica jego poprzecznego przekroju pokrywa się z powierzchnią ziemi. Można wykazać, że prąd $I_1(x)$ występujący w przewodzie zastępczym, wskutek oddziaływania indukcyjnego obwodu elementarnego (rys. 5) spełnia następujące równanie różniczkowe

$$\frac{d^2I_1(x)}{dx^2} - Y_0 Z_0 I_1(x) = -Y_0 K_i(x), \tag{2}$$

w którym Z_0 i Y_0 wynoszą

$$Z_0 = \frac{1}{2} Z_w + p_z(\Gamma, r), \qquad Y_0 = \left[\frac{1}{2} Y_p^{-1} + q_z(\Gamma, r)\right]^{-1},$$

przy czym Z_w jest impedancją wewnętrzną szyny na jednostkę długości, Y_p — admitancją przejściową szyny na jednostkę długości względem tzw. ziemi bliskiej, funkcje $p_z(\Gamma, r)$ i $q_z(\Gamma, r)$ wyrażają się zaś wzorami:

$$p_z(\Gamma, r) = \frac{1}{2} \frac{j\omega\mu_0}{\pi r k^2} \left[\Gamma K_1(\Gamma r) - \sqrt{\Gamma^2 + k^2}\, K_1\left(r\sqrt{\Gamma^2 + k^2}\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{j\omega\mu_0}{\pi a k^2} \left[\Gamma K_1(\Gamma a) - \sqrt{\Gamma^2 + k^2}\, K_1\left(a\sqrt{\Gamma^2 + k^2}\right)\right],$$

$$q_z(\Gamma, r) = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi\gamma} \left[K_0(\Gamma r) + K_0(\Gamma a)\right],$$

przy czym $K_0(z)$ i $K_1(z)$ są zmodyfikowanymi funkcjami Bessela drugiego rodzaju zerowego i pierwszego rzędu, a ponadto $k^2 = j\omega\mu_0\gamma$. Wielkość Γ nazywana stałą przenoszenia jest rozwiązaniem równania przestępnego $\Gamma^2 = Z_0 Y_0$, por. [3].

Równanie (2) można rozwiązać stosując przekształcenie Fouriera; w wyniku otrzymuje się ogólne rozwiązanie w postaci

$$I_1(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Y_0}{Z_0}} \int_{-\infty}^{+\infty} K_i(\tau) e^{-\Gamma|x-\tau|} d\tau. \tag{3}$$

3. ROZWIĄZANIE PRZYBLIŻONE

Rozwiązanie przybliżone równania (2) wyznacza się przyjmując założenie upraszczające, a mianowicie, że $K_i(x) = \text{const}$. Założenie to jest dopuszczalne, gdyż w rozważanym układzie linia energoelektryczna jest równoległa do toru. W tym przypadku wzór na prąd $I_1(x)$, dla $x \geqslant 0$, można napisać w postaci

$$I_1(x) = A + Be^{-\Gamma x}.$$

Stała A równa się prądowi $I_1(\infty)$ płynącemu w szynie w dostatecznie dużej odległości od punktu $x = 0$. Stałą B zaś wyznacza się z warunku, że w punkcie $x = 0$ jest $I_1(0) = 0$. Stąd $I_1(x)$ wyraża się wzorem

$$I_1(x) = \pm I_1(\infty)(1 - e^{-\Gamma|x|}), \tag{4}$$

przy czym znak (+) odpowiada $x > 0$, znak (−) zaś $x < 0$.

W celu wyznaczenia wielkości $I_1(\infty)$ przyjmujemy, że przewód umieszczony w powietrzu w odległości h od powierzchni ziemi (rys. 5) jest częścią obwodu ziemnopowrotnego oraz że przewód zastępczy znajdujący się na powierzchni ziemi i oddzielony od ziemi warstwą niedoskonałej izolacji stanowi wraz z ziemią obwód ziemnopowrotny. Impedancja własna na jednostkę długości obwodu ziemnopowrotnego utworzonego przez przewód zastępczy wyraża się, dla częstotliwości technicznej (por. [2]), następującym wzorem przybliżonym

$$Z_{11} = \frac{1}{2}Z_w + \frac{\omega\mu_0}{8} + j\frac{\omega\mu_0}{2\pi}\ln\frac{1{,}85}{r_z|k|}, \tag{5}$$

przy czym

$$|k| = \sqrt{\omega\mu_0\gamma}$$

oraz

$$Z_w = \frac{0{,}28}{u}\sqrt{\mu_r\varrho f}(1+j0{,}6)\,10^{-3},$$

gdzie Z_w wyrażone jest w $\frac{\Omega}{\text{km}}$, u jest obwodem poprzecznego przekroju szyny w cm, μ_r — względną przenikalnością magnetyczną szyny, ϱ — rezystywnością szyny w $\frac{\Omega\,\text{mm}^2}{\text{m}}$, f — częstotliwością prądu w szynach w Hz.

Impedancja wzajemna rozpatrywanych dwóch równoległych obwodów ziemnopowrotnych na jednostkę długości (por. [1]) wynosi

$$Z_{12} = \frac{\omega\mu_0}{8} + j\frac{\omega\mu_0}{2\pi}\ln\frac{1{,}85}{|k|\sqrt{h^2+y_0^2}}. \tag{6}$$

W dostatecznie dużej odległości od punktu $x = 0$ w obwodzie ziemnopowrotnym zawierającym przewód zastępczy spełnione jest następujące równanie

$$Z_{11}I_1(\infty) - Z_{12}\frac{I}{2} = 0.$$

Stąd otrzymuje się

$$I_1(\infty) = \frac{Z_{12}}{Z_{11}}\frac{I}{2}. \tag{7}$$

Prąd $I(x)$ występujący w przewodzie zastępczym wskutek oddziaływania indukcyjnego prądu zwarciowego jest sumą prądów $I_1(x)$ i $I_2(x)$, czyli $I(x) = I_1(x) + I_2(x)$. Prąd $I_2(x)$ jest wywołany w przewodzie zastępczym przez oddziaływanie indukcyjne drugiego obwodu elementarnego, jak na rys. 2. Można wykazać, że prąd $I_2(x)$ wyraża się wzorem

$$I_2(x) = \pm I_1(\infty)(1 - e^{-\Gamma|x-x_p|}), \tag{8}$$

przy czym znak (+) odpowiada $x < x_p$, znak (−) zaś $x > x_p$.

Uwzględniając wzory (4) i (8) można wyznaczyć prąd $I(x)$ w szynach. W punktach x szyn, gdzie $0 \leqslant x \leqslant x_p - \frac{5}{|\Gamma|}$ można przy obliczaniu prądu w szynach posługiwać się wzorem

$$I(x) = I_1(\infty)(2 - e^{-\Gamma x}). \tag{9}$$

Potencjał szyn względem tzw. ziemi bliskiej, czyli napięcie na konduktancji G torowiska, wyznacza się z zależności

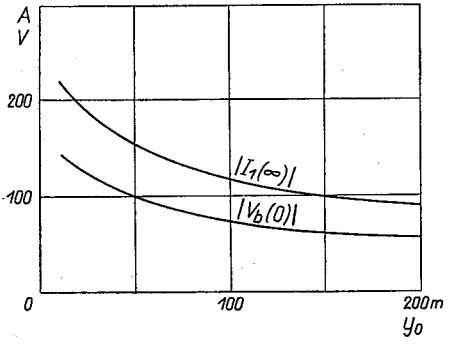
$$V_b(x) = -G^{-1}\frac{dI(x)}{dx}. \tag{10}$$

W punktach x szyn, gdzie $0 \leqslant x \leqslant x_p - \frac{5}{|\Gamma|}$ otrzymuje się zgodnie z wzorem (10) i przy uwzględnieniu zależności (9) wyrażenie przybliżone na napięcie $V_b(x)$, a mianowicie

$$V_b(x) = -\frac{I_1(\infty)\Gamma}{G} e^{-\Gamma x}. \tag{11}$$

Przy obliczaniu prądu $I(x)$ w szynach i napięcia $V_b(x)$ na warstwie oddzielającej szyny od ziemi, najpierw wyznacza się wartość stałej przenoszenia Γ. W celu wyznaczenia Γ możemy posługiwać się wykresami podanymi w [3].

Z rezultatów obliczeń prądu $I(x)$ i napięcia $V_b(x)$ przy stałych wartościach prądu zwarciowego, częstotliwości i przenikalności magnetycznej szyn wynika, że prąd $I(x)$ oraz napięcie $V_b(x)$ zwiększają się przy zwiększaniu się rezystywności gruntu oraz zmniejszają się przy zwiększaniu się odległości y_0 linii energoelektrycznej od toru. Ponadto napięcie



Rys. 6. Wpływ odległości linii energoelektrycznej od toru

$V_b(x)$ zwiększa się przy zmniejszaniu się upływności G warstwy oddzielającej szyny od ziemi.

Tytułem przykładu wyznaczono wartości skuteczne prądu $I_1(\infty)$ i napięcia $V_b(0)$ przy różnych odległościach linii energoelektrycznej od toru, przy czym przyjęto: $I = 10^3$ A,

$\gamma = 10^{-2}\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$, $G = 10^{-3}\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$, $\Gamma = 6{,}5\cdot 10^{-4}e^{j0{,}687}\frac{1}{\mathrm{m}}$, $\omega = 314\frac{1}{\mathrm{s}}$, $\mu_r = 100$, $\varrho = 0{,}2\frac{\Omega\,\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$, $h = 10$ m, $u = 62$ cm.

Wyniki obliczeń przedstawiono w sposób graficzny na rys. 6. Z rys. 6 wynika, że wpływ indukcyjny prądu zwarciowego w linii energoelektrycznej na szyny jednotorowej linii kolejowej może być znaczny nawet przy dużych odległościach linii od toru.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. M. Krakowski, Impedancja wzajemna prostoliniowych obwodów ziemnopowrotnych, Zeszyty Naukowe P.Ł. Elektryka, z. 16, 1965.
2. M. Krakowski, Impedancje równoległych obwodów ziemnopowrotnych zawierających przewody podziemne, Archiwum Elektrotechniki, z. 4, t. XVII, 1968.
3. F. Lachowicz, Oddziaływanie galwaniczne uziomu wiodącego prąd sinusoidalny na szyny jednotorowej linii kolejowej, Archiwum Elektrotechniki, z. 1, t. XX, 1971.
4. E. D. Sunde, Earth Conduction Effects in Transmission Systems, D. Van Nostrand, Inc., New York 1949 r.

F. S. LACHOWICZ

INDUCTIVE INFLUENCE IN RAILS OF A SINGLE TRACK FROM SHORT-CIRCUIT CURRENT IN AN OVERHEAD POWER LINE

Summary

The inductive influence in rails of a single track from short-circuit current which flows in an overhead power line is considered in the paper on the assumption that the rails are parallel to the power line. The formulae for the current along the rails as well as the voltage between a rail and a point in the earth next to the rails are derived. The effect of variation in distance from the track to the power line is considered.

F. S. LACHOWICZ

INDUKTIONSBEEINFLUSSUNG AUF EINSPURIGE EISENBAHNGLEISE DES STROMKURZSCHLUSSES MIT BODEN IN ENERGOELEKTRISCHER FREILUFTLEITUNG

Zusammenfassung

In der Bearbeitung wird der Induktionseinfluß auf Gleise einspuriger Eisenbahnlinie des Kurzschlußstroms mit Boden bei paralell verlaufender energoelektrischer Freiluftleitung erörtert. Es wurde eine Berechnungsmethode des Stroms $I(x)$ in den Gleisen, sowie der Spannung $V_b(x)$ auf der die Gleise vom Boden trennenden Schichte angeführt. Man überprüfte den Einfluß der Entfernung der energoelektrischen Leitung von den Gleisen.

Ф. С. ЛЯХОВИЧ

ИНДУКЦИОННОЕ ВЛИЯНИЕ ТОКА КОРОТКОГО ЗАМЫКАНИЯ НА ЗЕМЛЮ В ВОЗДУШНОЙ ЛИНИИ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ, НА РЕЛЬСЫ ОДНОПУТНОЙ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЙ ЛИНИИ

Р е з ю м е

В статье рассматривается индукционное влияние тока короткого замыкания на землю в воздушной линии электропередачи, на рельсы однопутной железнодорожной линии при параллельном расположении рельс и линии электропередачи. Выведены формулы для тока $I(x)$ в рельсах и напряжения $V_b(x)$ на слое отделяющем рельсы от земли, причем рассмотрено влияние расстояния между линией электропередачи и рельсами.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1972, 18 z. 3, ss. 575—601

621.314.2

Metody analizy ekranowania magnetycznego kadzi transformatorów

KAZIMIERZ ZAKRZEWSKI (ŁÓDŹ), JANUSZ TUROWSKI (ŁÓDŹ)

Instytut Transformatorów, Maszyn i Aparatów Elektrycznych Politechniki Łódzkiej

Otrzymano 12.7.1971

Ekrany magnetyczne wykonuje się z blach transformatorowych, które mogą być układane w postaci pakietów pasków ustawionych pionowo lub poziomo, prostopadle do wewnętrznej powierzchni kadzi, bądź też w postaci arkuszy blach przylegających do powierzchni kadzi.

W pracy przedstawiono metody analizy podstawowego układu dwóch przewodów równoległych, wiodących prąd, umieszczonych w sąsiedztwie zaekranowanej ściany stalowej, traktując ją jako zasadniczy element uzwojenia transformatora.

Pole elektromagnetyczne w środowisku uwarstwionym, dla jednego z trzech możliwych sposobów ekranowania, opisano w postaci potencjałów wektorowych, wskazując na trudności w praktycznym zastosowaniu tej metody.

Dzięki zastosowaniu przybliżonej metody „odbić zwierciadlanych" uzyskano przejrzyste zależności, nadające się do wykorzystania w praktyce inżynierskiej.

Z przedstawionych zależności wynika, że zasadniczy wpływ na skuteczność ekranowania kadzi wywiera wzajemny stosunek przenikalności ekranu i kadzi μ_e/μ_k. Przenikalności ekranu i kadzi należy przy tym rozumieć jako tzw. „kwazi-przenikalności" badanej części stalowej, które ze względu na pogorszenie własności magnetycznych wskutek reakcji prądów wirowych są inne, niż przy prądzie stałym. Pod tym kątem widzenia omówiono wpływ konfiguracji ekranów magnetycznych na skuteczność ekranowania.

1. WSTĘP

Ekrany magnetyczne wykonuje się z blach transformatorowych, które mogą być układane na powierzchni wewnętrznej kadzi następująco:

— arkusze blachy układane równolegle do powierzchni kadzi,
— pakiety pasków blachy transformatorowej ustawionych pionowo, prostopadle do powierzchni kadzi,
— pakiety pasków blachy transformatorowej ułożonych poziomo, prostopadle do powierzchni kadzi.

W pierwszym przypadku strumień rozproszenia wnika prostopadle do płaszczyzny blach wywołując w nich prądy wirowe. W dwóch pozostałych przypadkach strumień wnika wprawdzie prostopadle do krawędzi pasków blach, ale rozchodzić się może zarówno wzdłuż pasków, jak i prostopadle do ich płaszczyzny, ponieważ zamyka się on nie tylko od góry do dołu (pionowo), ale także wzdłuż obwodu kadzi (tworząc węzły trójfazowe).

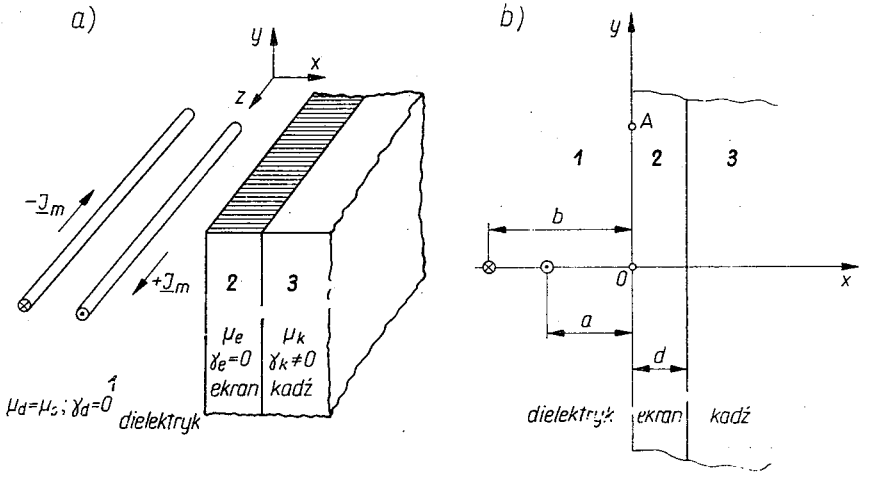
W związku z powyższym zachodzi konieczność zbadania, którą z konfiguracji ekranu spakietowanego można uważać za najkorzystniejszą. Badanie to można oprzeć na jednej z niżej zaproponowanych metod.

W pracy przeprowadzono analizę podstawowego układu dwóch równoległych przewodów wiodących prąd, umieszczonych w sąsiedztwie zaekranowanej ściany stalowej. Układ dwóch przewodów można traktować jako zasadniczy element uzwojenia transformatora.

2. ANALIZA EKRANOWANIA W OPARCIU O TEORIĘ POTENCJAŁU WEKTOROWEGO

2.1. Założenia

Przyjmujemy, że w środowisku dielektrycznym znajduje się układ dwóch równoległych przewodów, wiodących sinusoidalne prądy elektryczne o amplitudach $+\underline{I}_m$ oraz $-\underline{I}_m$ (rys. 1). Zakładamy, że długość przewodów w kierunku osi z jest nieskończona. Środowisko drugie stanowi ekran magnetyczny wykonany z blach usytuowanych prostopadle do powierzchni kadzi. Kadź masywna[1)] stanowi trzecie środowisko, które, w przeciwieństwie



Rys. 1. Schemat konfiguracji przestrzennej (a) i przekrój układu (b) z ekranem magnetycznym

do ekranu o skończonej grubości d, rozciąga się wzdłuż osi x do nieskończoności. Zarówno kadź jak i ekran mają w kierunku osi y i z wymiary nieskończone.

Powyższe założenia powodują, że w przekroju poprzecznym jak na rys. 1b można traktować rozpatrywane pole jako tzw. pole płaskorównoległe.

[1)] Fala elektromagnetyczna płaska przy częstotliwości technicznej 50 Hz zanika w żelazie całkowicie na głębokościach 5÷10 mm. Grubości ścianek kadzi w transformatorach wielkich mocy są tego samego rzędu i dlatego obszar kadzi można traktować jak masywne żelazo. Upoważnia to do przyjęcia, że wymiary kadzi w kierunku osi x rozciągają się do nieskończoności. Obszar kadzi stanowi więc półprzestrzeń ograniczoną płaszczyzną yz.

Przyjmiemy ponadto, że przewodność elektryczna (konduktancja) zblachowanego ekranu w kierunku osi z równa się $\gamma_e = 0$ oraz konduktancja dielektryka $\gamma_d = 0$. Konduktancja materiału kadzi wynosi γ_k. Zakładamy, że przenikalność magnetyczna poszczególnych środowisk jest niezależna od natężenia pola magnetycznego i wynosi:

dla dielektryka $\mu_o = \text{const}$,

dla ekranu $\mu_e = \text{const}$,

dla materiału kadzi $\mu_k = \text{const}$.

W wytworzonym polu płaskorównoległym potencjał wektorowy ma tylko jedną składową wzdłuż osi z, dlatego też w dalszych rozważaniach będziemy pomijać indeks z i stosować zapis skalarny. Rozważania przeprowadzone zostaną początkowo dla jednego przewodu, np. umieszczonego w odległości a od ekranu. Uzyskane wyniki będą mogły być wykorzystane dla przewodu umieszczonego w odległości b od powierzchni ekranu.

2.2. Potencjały wektorowe wytworzone przez pojedynczy przewód w układzie zaekranowanym

Potencjały wektorowe w poszczególnych środowiskach spełniają następujące zależności:

dla dielektryka

$$\frac{\partial^2 A_d}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_d}{\partial y^2} = 0, \tag{2.1}$$

dla ekranu

$$\frac{\partial^2 A_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_e}{\partial y^2} = 0, \tag{2.2}$$

w obszarze kadzi

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_k}{\partial y^2} = \alpha^2 A_k, \tag{2.3}$$

gdzie: A_d, A_e, A_k — potencjały wektorowe od jednego przewodu w dielektryku, ekranie i kadzi,

oraz

$$\alpha = \sqrt{j\omega\mu_k\gamma_k} = (1+j)k; \qquad k = \sqrt{\frac{\omega\mu_k\gamma_k}{2}}. \tag{2.4}$$

Przyjmiemy, że potencjał A_d w dielektryku składa się z dwóch zasadniczych części, tzn.

$$A_d = A'_d + A^0_d, \tag{2.5}$$

przy czym założymy, że potencjał A^0_d jest wytworzony przez prąd $\underline{I}_m$ i jego pełne dodatnie odbicie zwierciadlane w idealnym nieprzewodzącym ferromagnetyku ($\mu = \infty$); natomiast składnik A'_d jest wynikiem zakłócającego oddziaływania reakcji prądów wirowych i nasycenia stali na pole elektromagnetyczne w dielektryku.

Potencjał wektorowy pojedynczego przewodu prostoliniowego i nieskończenie cienkiego określamy wychodząc ze znanego wzoru

$$A = \frac{\mu}{4\pi}\oint_l \frac{idl}{r} = \frac{\mu_i}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}} = -\frac{\mu_i}{2\pi}\ln\sqrt{(x+a)^2+y^2}.$$

Skąd maksymalna wartość zespolonego potencjału wektorowego A_d^0 obu przewodów o tym samym zwrocie prądu przybiera postać

$$A_d^0 = -\frac{I_m\mu_0}{4\pi}\ln\big([(x+a)^2+y^2][(x+a)^2+y^2]\big). \tag{2.6}$$

Wyrażenie (2.6) spełnia równanie Laplace'a (2.1).

Ze względu na symetrię układu względem osi x pole zakłócające A_d' musi być funkcją parzystą względem osi y, wobec czego dla dowolnej n-tej harmonicznej rozkładu przestrzennego potencjału wektorowego przewidujemy rozwiązanie w postaci funkcji

$$A_{dn}' = f_n(x)\cos\lambda_n y \qquad (n = 0, 1, 2, 3 \ldots \infty). \tag{2.7}$$

Podstawiając (2.7) do (2.1) otrzymujemy

$$f_n''(x) - \lambda_n^2 f_n(x) = 0. \tag{2.8}$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$f_n(x) = C_n e^{\lambda_n x} + D_n e^{-\lambda_n x}. \tag{2.9}$$

Można zatem napisać

$$A_{dn}' = (C_n e^{\lambda_n x} + D_n e^{-\lambda_n x})\cos\lambda_n y. \tag{2.10}$$

Rozwiązanie ogólne równania (2.1) dla potencjału wektorowego A_d' jest sumą rozwiązań szczególnych (2.10) dla poszczególnych harmonicznych

$$A_d' = \sum_{n=0}^{\infty} A_{dn}'. \tag{2.11}$$

Ponieważ stała λ może mieć wartość dowolną, bardziej ogólne rozwiązanie dla układów liniowych otrzymamy uwzględniając pełne widmo rozkładu okresowego w postaci całki

$$A_d' = \int_0^{\infty} [C(\lambda)e^{\lambda x} + D(\lambda)e^{-\lambda x}]\cos\lambda y\, d\lambda. \tag{2.12}$$

W obszarze dielektryka współrzędna x zawiera się w przedziale $-\infty < x \leqslant 0$. Ponieważ przy $x \to -\infty$ wartość potencjału wektorowego A_d' nie może wzrastać do nieskończoności, wobec tego należy przyjąć, że $D(\lambda) = 0$. Można zatem napisać

$$A_d' = \int_0^{\infty} C(\lambda)e^{\lambda x}\cos\lambda y\, d\lambda. \tag{2.13}$$

Ostatecznie potencjał wektorowy w dielektryku wynosi

$$A_d = -\frac{I_m\mu_0}{4\pi}\ln\big([(x+a)^2+y^2][(x-a)^2+y^2]\big) + \int_0^{\infty} C(\lambda)e^{\lambda x}\cos\lambda y\, d\lambda. \tag{2.14}$$

Postępując podobnie można dla nieprzewodzącego elektrycznie ekranu napisać następujące wyrażenie na potencjał wektorowy

$$A_e = \int_0^\infty [E(\lambda)e^{\lambda x} + F(\lambda)e^{-\lambda x}]\cos\lambda y\, d\lambda. \tag{2.15}$$

W obszarze kadzi rozwiązaniem równania jest następujące wyrażenie

$$A_k = \int_0^\infty G(\lambda)e^{-\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}\,x}\cos\lambda y\, d\lambda. \tag{2.16}$$

Do obliczenia składowych natężenia pola magnetycznego H_x i H_y posłużymy się następującymi zależnościami ogólnymi:

$$H_x = \frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial y}, \tag{2.17}$$

$$H_y = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial x}. \tag{2.18}$$

W dielektryku otrzymujemy

$$H_{dx} = -\frac{I_m}{2\pi}\left[\frac{y}{(x+a)^2+y^2} + \frac{y}{(x-a)^2+y^2}\right] - \frac{1}{\mu_0}\int_0^\infty \lambda C(\lambda)e^{\lambda x}\sin\lambda y\, d\lambda, \tag{2.19}$$

$$H_{dy} = \frac{I_m}{2\pi}\left[\frac{x+a}{(x+a)^2+y^2} + \frac{x-a}{(x-a)^2+y^2}\right] - \frac{1}{\mu_0}\int_0^\infty \lambda C(\lambda)e^{\lambda x}\cos\lambda y\, d\lambda. \tag{2.20}$$

W środowisku ekranu

$$H_{ex} = -\frac{1}{\mu_e}\int_0^\infty \lambda[E(\lambda)e^{\lambda x} + F(\lambda)e^{-\lambda x}]\sin\lambda y\, d\lambda, \tag{2.21}$$

$$H_{ey} = -\frac{1}{\mu_e}\int_0^\infty \lambda[E(\lambda)e^{\lambda x} - F(\lambda)e^{-\lambda x}]\cos\lambda y\, d\lambda. \tag{2.22}$$

Dla obszaru kadzi możemy napisać

$$H_{kx} = -\frac{1}{\mu_k}\int_0^\infty \lambda G(\lambda)e^{-\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}\,x}\sin\lambda y\, d\lambda, \tag{2.23}$$

$$H_{ky} = \frac{1}{\mu_k}\int_0^\infty \sqrt{\lambda^2+\alpha^2}\, G(\lambda)e^{-\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}\,x}\cos\lambda y\, d\lambda. \tag{2.24}$$

Funkcje podcałkowe $C(\lambda)$, $E(\lambda)$, $F(\lambda)$, $G(\lambda)$, wyznaczymy wykorzystując warunki graniczne obowiązujące na granicy poszczególnych środowisk.

Dla współrzędnej $x = 0$ obowiązują następujące warunki graniczne

$$\mu_0 H_{dx} = \mu_e H_{ex}, \tag{2.25}$$

$$H_{dy} = H_{ey}. \tag{2.26}$$

Wykorzystując zależności (2.19÷2.22) otrzymujemy

$$-\frac{I_m}{\pi}\frac{y}{a^2+y^2} - \int_0^\infty \lambda C(\lambda)\sin\lambda y d\lambda = -\int_0^\infty \lambda[E(\lambda)+F(\lambda)]\sin\lambda y d\lambda, \tag{2.27}$$

$$-\frac{1}{\mu_0}\int_0^\infty \lambda C(\lambda)\cos\lambda y d\lambda = -\frac{1}{\mu_e}\int_0^\infty \lambda[E(\lambda)-F(\lambda)]\cos\lambda y d\lambda. \tag{2.28}$$

Wprowadzając do równania (2.27) zależność [2]:

$$\frac{y}{a^2+y^2} = \int_0^\infty e^{-a\lambda}\sin\lambda y d\lambda, \tag{2.29}$$

otrzymuje się

$$-\frac{I_m\mu_0}{\pi}\int_0^\infty e^{-a\lambda}\sin\lambda y d\lambda - \int_0^\infty \lambda C(\lambda)\sin\lambda y d\lambda = -\int_0^\infty \lambda[E(\lambda)+F(\lambda)]\sin\lambda y d\lambda; \tag{2.30}$$

stąd

$$C(\lambda) = E(\lambda)+F(\lambda) - \frac{I_m}{\pi}\frac{e^{-a\lambda}}{\lambda}\mu_0. \tag{2.31}$$

Z równania (2.28) uzyskuje się

$$C(\lambda) = \frac{\mu_0}{\mu_e}[E(\lambda)-F(\lambda)]. \tag{2.32}$$

Na granicy ekranu i kadzi, tzn. dla $x = d$, obowiązują następujące warunki graniczne

$$\mu_e H_{ex} = \mu_k H_{kx}, \tag{2.33}$$

$$H_{ey} = H_{ky}. \tag{2.34}$$

W oparciu o zależności (2.21÷2.24) otrzymuje się

$$-\int_0^\infty \lambda[E(\lambda)e^{\lambda d}+F(\lambda)e^{-\lambda d}]\sin\lambda y d\lambda = -\int_0^\infty \lambda G(\lambda)e^{-\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}d}\sin\lambda y d\lambda \tag{2.35}$$

oraz

$$-\frac{1}{\mu_e}\int_0^\infty \lambda[E(\lambda)e^{\lambda d}-F(\lambda)e^{-\lambda d}]\cos\lambda y d\lambda = \frac{1}{\mu_k}\int_0^\infty \sqrt{\lambda^2+\alpha^2}\,G(\lambda)e^{-\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}d}\cos\lambda y d\lambda. \tag{2.36}$$

Na podstawie (2.35) mamy

$$G(\lambda)e^{-\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}\,d} = E(\lambda)e^{\lambda d}+F(\lambda)e^{-\lambda d}. \tag{2.37}$$

W oparciu o zależność (2.36) otrzymujemy

$$G(\lambda)e^{-\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}\,d} = -\frac{\mu_k}{\mu_e}\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}}[E(\lambda)e^{\lambda d}-F(\lambda)e^{-\lambda d}]. \tag{2.38}$$

Wprowadzając oznaczenia

$$r = \frac{\mu_k\lambda-\mu_e\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}}{\mu_k\lambda+\mu_e\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}}, \tag{2.39}$$

$$n = \frac{\mu_0+\mu_e}{\mu_e-\mu_0} \tag{2.40}$$

i rozwiązując układ równań (2.31, 2.32, 2.37, 2.38) otrzymuje się

$$C(\lambda) = \frac{I_m}{2\pi}\mu_e\frac{(n-1)(1+re^{-2d\lambda})}{(n+re^{-2d\lambda})}\frac{e^{-a\lambda}}{\lambda}-\frac{I_m}{\pi}\frac{e^{-a\lambda}}{\lambda}\mu_0, \tag{2.41}$$

$$E(\lambda) = \frac{I_m}{2\pi}\mu_e\frac{r(n-1)}{(n+re^{-2d\lambda})}\frac{e^{-(a+2d)\lambda}}{\lambda}, \tag{2.42}$$

$$F(\lambda) = \frac{I_m}{2\pi}\mu_e\frac{n-1}{(n+re^{-2d\lambda})}\frac{e^{-a\lambda}}{\lambda}, \tag{2.43}$$

$$G(\lambda) = \frac{I_m}{2\pi}\mu_e\frac{(n-1)(r+1)}{(n+re^{-2d\lambda})}\frac{e^{-(a+d)\lambda+\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}\,d}}{\lambda}. \tag{2.44}$$

Wykorzystując zależność (2.14) i (2.41) obliczymy potencjał wektorowy w środowisku dielektrycznym

$$A_d = -\frac{I_m\cdot\mu_0}{4\pi}\ln[(x+a)^2+y^2][(x-a)^2+y^2]+$$

$$+\frac{I_m}{2\pi}\mu_e(n-1)\int_0^\infty\frac{e^{-(a-x)\lambda}}{(n+re^{-2d\lambda})\lambda}(1+re^{-2d\lambda})\cos\lambda y\,d\lambda+$$

$$-\frac{I_m\cdot\mu_0}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-(a-x)\lambda}}{\lambda}\cos\lambda y\,d\lambda. \tag{2.45}$$

Wykorzystując tożsamość [2]:

$$\int_0^\infty\frac{e^{-(a-x)\lambda}}{\lambda}\cos\lambda y\,d\lambda = -\ln\sqrt{(x-a)^2+y^2}, \tag{2.46}$$

otrzymujemy ostatecznie

$$A_d = -\frac{I_m \cdot \mu_0}{4\pi} \ln \frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} + \\ + \frac{I_m}{2\pi} \mu_e (n-1) \int_0^\infty \frac{e^{-(a-x)\lambda}}{\lambda} \frac{(1+re^{-2d\lambda})}{(n+re^{-2d\lambda})} \cos\lambda y \, d\lambda. \tag{2.47}$$

W celu sprawdzenia słuszności wyrażenia (2.47) założymy, że środowisko ekranu rozciąga się w kierunku osi x do nieskończoności, tzn. $d \to \infty$

$$A_d = -\frac{I_m}{4\pi} \mu_0 \ln \frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} + \frac{I_m}{2\pi} \mu_e (n-1) \int_0^\infty \frac{e^{-(a-x)\lambda}}{n\lambda} \cos\lambda y \, d\lambda. \tag{2.48}$$

Uwzględniając, że według (2.40)

$$\frac{n-1}{n} = \frac{2\mu_0}{\mu_0+\mu_e}, \tag{2.49}$$

możemy napisać

$$A_d = -\frac{I_m}{4\pi} \mu_0 \ln \frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} + \frac{I_m}{\pi} \frac{\mu_0 \mu_e}{\mu_0+\mu_e} \int_0^\infty \frac{e^{-(a-x)\lambda}}{\lambda} \cos\lambda y \, d\lambda, \tag{2.50}$$

$$A_d = -\frac{I_m}{4\pi} \mu_0 \ln \frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} - \frac{I_m}{2\pi} \frac{\mu_0 \mu_e}{\mu_0+\mu_e} \ln[(x-a)^2+y^2], \tag{2.51}$$

$$A_d = -\frac{I_m}{2\pi} \mu_0 [\ln \sqrt{(x+a)^2+y^2}] + \frac{\mu_e-\mu_0}{\mu_0+\mu_e} \ln \sqrt{(x-a)^2+y^2}. \tag{2.52}$$

Wynik ten jest identyczny z wyrażeniem na potencjał wektorowy od pojedynczego przewodu zawieszonego nad półprzestrzenią ferromagnetyczną, w której nie ma prądów wirowych podobnie jak w przypadku zblachowanego ekranu (patrz wzór 3.100 [2]).

Określimy z kolei potencjał wektorowy w środowisku ekranu magnetycznego wykorzystując zależności (2.15, 2.42, 2.43):

$$A_e = \frac{I_m}{2\pi} \mu_e \int_0^\infty \frac{e^{-(a-2d)\lambda}}{\lambda} \frac{r(n-1)}{(n+re^{-2d\lambda})} e^{\lambda x} \cos\lambda y \, d\lambda + \\ + \frac{I_m}{2\pi} \mu_e \int_0^\infty \frac{e^{-a\lambda}}{\lambda} \frac{(n-1)}{(n+re^{-2d\lambda})} e^{-\lambda x} \cos\lambda y \, d\lambda; \tag{2.53}$$

$$A_e = \frac{I_m}{2\pi} \mu_e (n-1) \left[\int_0^\infty \frac{re^{-(a-x+2d)\lambda}}{\lambda(n+re^{-2d\lambda})} \cos\lambda y \, d\lambda + \int_0^\infty \frac{e^{-(a+x)\lambda}}{\lambda(n+re^{-2d\lambda})} \cos\lambda y \, d\lambda \right]. \tag{2.54}$$

Wyrażenie (2.54) sprawdzimy również w przypadku granicznym, gdy środowisko ekranu rozciąga się w kierunku osi x do nieskończoności, tzn. $d \to \infty$. Wyrażenie (2.54) upraszcza się do postaci

$$A_e = \frac{\underline{I}_m}{2\pi}\mu_e\frac{n-1}{n}\int_0^\infty \frac{e^{-(a+x)\lambda}}{\lambda}\cos\lambda y\,d\lambda = -\frac{\underline{I}_m}{2\pi}\mu_e\frac{2\mu_0}{\mu_0+\mu_e}\ln\sqrt{(a+x)^2+y^2}. \quad (2.55)$$

Zależność (2.55) jest identyczna z wyrażeniem na potencjał wektorowy w pozbawionej prądów wirowych półprzestrzeni ferromagnetycznej wytworzony przez pojedynczy przewód zawieszony nad tą półprzestrzenią (patrz wzór 3.101 [2]).

Potencjał wektorowy w środowisku kadzi z uwzględnieniem (2.16) i (2.44) wynosi

$$A_k = \frac{\underline{I}_m}{2\pi}\mu_e(n-1)\int_0^\infty \frac{r+1}{n+re^{-2d\lambda}}\,\frac{e^{-(a+d)\lambda+\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}\,d}}{\lambda}\,e^{-\sqrt{\lambda^2-\alpha^2}\,x}\cos\lambda y\,d\lambda, \quad (2.56)$$

$$A_k = \frac{\underline{I}_m}{2\pi}\mu_e(n-1)\int_0^\infty \frac{r+1}{n+re^{-2d\lambda}}\,\frac{e^{-(a+d)\lambda+(d-x)\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}}}{\lambda}\cos\lambda y\,d\lambda. \quad (2.57)$$

2.3. Potencjały wektorowe wytworzone przez układ dwóch przewodów

Wyrażenia na potencjały wektorowe pochodzące od przewodu wiodącego prąd $-\underline{I}_m$ w odległości b od ściany ekranu uzyskuje się podstawiając do związków (2.47), (2.54), (2.57) zamiast $\underline{I}_m$ wartość $-\underline{I}_m$ oraz zamiast a wartość b. Potencjał wektorowy układu dwóch przewodów ze względu na przyjętą liniowość trzech rozpatrywanych środowisk jest superpozycją potencjałów od poszczególnych przewodów.

Ostatecznie otrzymujemy:

dla obszaru dielektryka

$$A_d^* = -\frac{\underline{I}_m\mu_0}{4\pi}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x+b)^2+y^2}\cdot\frac{(x-b)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} +$$

$$+\frac{\underline{I}_m}{2\pi}\mu_e(n-1)\int_0^\infty \frac{(e^{-(a-x)\lambda}-e^{-(b-x)\lambda})}{\lambda}\,\frac{(1+re^{-2d\lambda})}{(n+re^{-2d\lambda})}\cos\lambda y\,d\lambda, \quad (2.58)$$

w środowisku ekranu

$$A_e^* = \frac{\underline{I}_m}{2\pi}\mu_e(n-1)\left[\int_0^\infty \frac{r}{(n+re^{-2d\lambda})\lambda}\,\frac{e^{-(a-x+2d)\lambda}-e^{-(b-x+2d)\lambda}}{\lambda}\cos\lambda y\,d\lambda +\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty \frac{e^{-(a+x)\lambda}-e^{-(b+x)\lambda}}{\lambda(n+re^{-2d\lambda})}\cos\lambda y\,d\lambda\right], \quad (2.59)$$

dla kadzi

$$A_k^* = \frac{I_m}{2\pi}\mu_e(n-1)\int_0^\infty \frac{(r+1)}{(n+re^{-2d\lambda})}\cdot\frac{e^{-(a+d)\lambda+(d-x)\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}}-e^{-(b+d)\lambda+(d-x)\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}}}{\lambda}\cos\lambda y\,d\lambda. \tag{2.60}$$

Wyrażenia (2.58÷2.60), opisujące potencjały wektorowe pochodzące od układu dwóch przewodów, stanowią zależności wyjściowe do określenia pozostałych wielkości pola elektromagnetycznego w badanym środowisku uwarstwionym według wzorów (2.17) i (2.18). Obecna postać wzorów na potencjał wektorowy, aczkolwiek bardzo ogólna, stwarza znaczne trudności przy bezpośrednim wykorzystaniu w praktyce inżynierskiej. Pokonanie tych trudności możliwe jest za pomocą metod numerycznych i elektronicznej techniki obliczeniowej, bądź też z wykorzystaniem przydatnej do całkowania aproksymacji funkcji podcałkowej.

Postępując podobnie można rozpatrywać ekranowanie magnetyczne pakietami pasków blachy transformatorowej ułożonych poziomo, prostopadle do powierzchni kadzi, oraz arkuszami blachy układanymi równolegle do powierzchni kadzi.

W wielu praktycznych przypadkach zadowalające rozwiązania można uzyskać w sposób przyspieszony za pomocą uproszczonej metody odbić zwierciadlanych, przedstawionej w następnym rozdziale.

3. ANALIZA EKRANOWANIA W OPARCIU O METODĘ WIELOKROTNYCH ODBIĆ ZWIERCIADLANYCH

3.1. Metoda odbić zwierciadlanych

Zagadnienie ekranowania daje się przedstawić znacznie prościej jeśli zastosujemy metodę odbić zwierciadlanych dla środowiska uwarstwionego.

Na rys. 2 przedstawiono pojedynczy przewód wiodący prąd i i jego pierwsze zwierciadlane odbicie w ścianie *1* na granicy dielektryk-ekran.

Współczynnik M jest równy [3]:

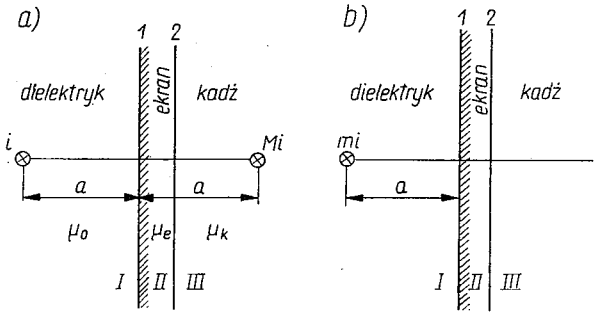
$$M = \frac{\mu_e-\mu_0}{\mu_e+\mu_0} \tag{3.1}$$

Z drugą ścianką (rys. 2b) graniczy bezpośrednio pole fikcyjnego prądu w ekranie *mi*, przy czym [3]:

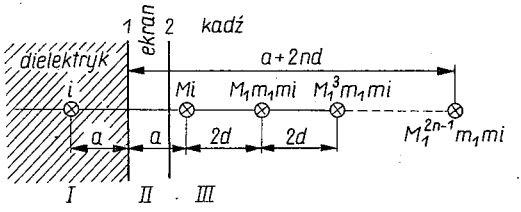
$$m = \frac{2\mu_0}{\mu_e+\mu_0}. \tag{3.2}$$

W ściance tej odbije się tylko prąd *mi* dając w ekranie pole stanowiące superpozycję pól prądów *mi* oraz $M_1 mi$ (rys. 4), przy czym

$$M_1 = \frac{\mu_k-\mu_e}{\mu_k+\mu_e}. \tag{3.3}$$



Rys. 2. Pierwsze odbicie zwierciadlane prądu rzeczywistego i w ścianie ferromagnetycznej 1, a) — układ prądów wytwarzających pole w dielektryku (I), b) — prąd wytwarzający pole w ferromagnetyku (II)

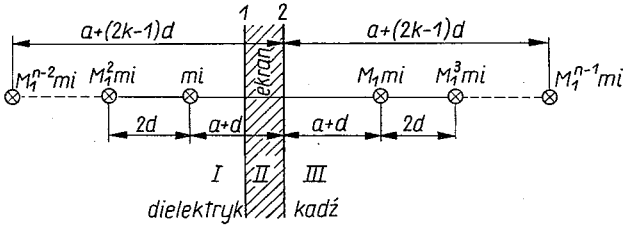


Rys. 3. Układ prądu rzeczywistego i prądów odbitych do obliczania pola w obszarze powietrznym I

W obszarze kadzi istnieje pole dopełniającego prądu $m_1 mi$ (rys. 5), gdzie

$$m_1 = \frac{2\mu_e}{\mu_k + \mu_e}. \tag{3.4}$$

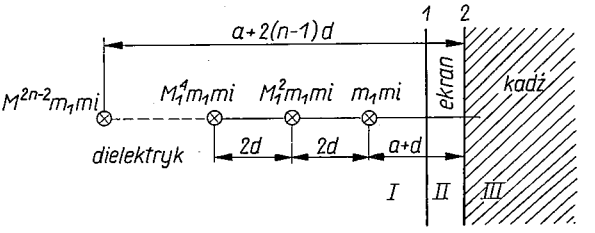
Pole w ekranie wytworzone jest obecnie przez prądy mi oraz $M_1 mi$. Prąd $M_1 mi$ ulega odbiciu w powierzchni *1* dając pole w ekranie, wytworzone przez układ prądów umyślonych mi, $M_1 mi$, $M_1^2 mi$ oraz pole w lewym obszarze (dielektryk) uzyskane w wyniku pierwszego odbicia i, Mi oraz nowego prądu $M_1\ m_1 mi$.



Rys. 4. Układ prądu rzeczywistego i prądów odbitych do obliczania pola w obszarze ekranu II (n — liczba parzysta)

Postępując wielokrotnie możemy stwierdzić, że w obszarze dielektryka pole wytwarzane jest szeregiem nieparzystych odbić prądów (rys. 3) i, Mi, $M_1 m_1 mi$, $M_1^3 m_1 mi$, ..., $M_1^{2n-1}\ m_1 mi$ odległych od lewej powierzchni o odcinki $-a$, $+a$, $a+2d$, $a+4d$, ..., $a+2nd$, gdzie $n = 1, 2, 3, 4$ (patrz rys. 3).

Wewnątrz ekranu pole jest wytworzone przez szereg prądów mi, $M_1 mi$, $M_1^2 mi$, $M_1^3 mi$, $M_1^4\ mi$, $M_1^{n-1} mi$, gdzie $n = 1, 2, 3 \ldots$, rozmieszczonych w odległościach od prawej ścianki odpowiednio o odcinki $-(a+d)$, $+(a+d)$, $-(a+3d)$, $+(a+3d)$, $-(a+5d)$, $+(a+5d)$, $-a+(2k-1)d$, $a+(2k-1)d$, gdzie $k = 1, 2, 3, 4 \ldots$ (rys. 4). W obszarze kadzi pole wytworzone jest przez szereg parzystych odbić prądów $m_1 mi$, $M_1^2 m_1 mi$, $M_1^4\ m_1 mi$, ..., $M_1^{2n-2} m_1 mi$, odległych od krawędzi *2* o odcinki $a+d$, $a+3d$, $a+5d$, ..., $a+(2n-1)d$, przy



Rys. 5. Układ prądu rzeczywistego i prądów odbitych do obliczania pola w obszarze kadzi III

czym $n = 1, 2, 3, 4$ (rys. 5). Uwzględnienie odpowiedniej liczby wyrazów szeregu wynika z wymaganej dokładności obliczeń.

Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla drugiego przewodu wiodącego prąd $-i$ i umieszczonego w odległości b od ekranu.

3.2. Obliczenie strumienia magnetycznego wchodzącego do układu ekran-kadź poprzez ściankę *1*

Strumień magnetyczny całkowity wchodzący od strony dielektryka do układu ekranowanego poprzez ściankę *1*, na jednostkę długości wzdłuż przewodu i na całej wysokości y od 0 do $+\infty$ będzie równy strumieniowi wychodzącemu z układu przez symetryczną powierzchnię dolną. Wynika to z konfiguracji geometrycznej układu. Strumień ten jest równy całce składowej normalnej indukcji B na powierzchni *1* w zakresie od 0 do $+\infty$. Strumień na wysokości y w układzie zaekranowanym będzie podobną całką obliczoną od y do $+\infty$.

Dla układu prądów i oraz jego odbić składowa normalna indukcji w punkcie A (rys. 16) od strony obszaru dielektryka, odległym od początku układu oy wynosi, zgodnie z rys. 3:

$$B'_{nd}(y) = \frac{i\mu_0}{2\pi}\left[\frac{y}{a^2+y^2} + M\frac{y}{a^2+y^2} + M_1 m_1 m\frac{y}{(a+2d)^2+y^2} + \right.$$

$$\left. + M_1^3 m_1 m\frac{y}{(a+4d)^2+y^2} + \ldots + M_1^{2n-1} m_1 m\frac{y}{(a+2nd)^2+y^2}\right], \qquad (3.5)$$

przy czym $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$

Dla układu prądów — i oraz jego odbić składowa normalna indukcji jest równa

$$B''_{nd}(y) = -\frac{i\mu_0}{2\pi}\left[\frac{y}{b^2+y^2} + M\frac{y}{b^2+y^2} + M_1 m_1 m\frac{y}{(b+2d)^2+y^2} + \right.$$
$$\left. + M_1^3 m_1 m\frac{y}{(b+4d)^2+y^2} + \ldots + M_1^{2n-1} m_1 m\frac{y}{(b+2nd)^2+y^2}\right], \tag{3.6}$$

gdzie $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$

Wypadkowa składowa normalna indukcji magnetycznej wynosi

$$B_{nd}(y) = \frac{i\mu_0}{2\pi}\left[\left(\frac{y}{a^2+y^2} - \frac{y}{b^2+y^2}\right) + M\left(\frac{y}{a^2+y^2} - \frac{y}{b^2+y^2}\right)\right] +$$
$$+ M_1 m_1 m\left[\frac{y}{(a+2d)^2+y^2} - \frac{y}{(b+2d)^2+y^2}\right] + \ldots +$$
$$+ M_1^{2n-1} m_1 m\left[\frac{y}{(a+2nd)^2+y^2} - \frac{y}{(b+2nd)^2+y^2}\right]. \tag{3.7}$$

Strumień magnetyczny wchodzący do układu na wysokości y równa się

$$\Phi_u(y) = \int_y^\infty B_{nd}(y)dy = \frac{i\mu_0}{4\pi}\left[\ln\frac{b^2+y^2}{a^2+y^2} + M\ln\frac{b^2+y^2}{a^2+y^2} + \right.$$
$$+ M_1 m_1 m\ln\frac{(b+2d)^2+y^2}{(a+2d)^2+y^2} + M_1^3 m_1 m\ln\frac{(b+4d)^2+y^2}{(a+4d)^2+y^2} + \ldots +$$
$$\left. + M_1^{2n-1} m_1 m\ln\frac{(a+2nd)^2+y^2}{(b+2nd)^2+y^2}\right]. \tag{3.8}$$

Jeżeli przyjąć, że przenikalność magnetyczna ekranu $\mu \gg \mu_0$, to $M \approx 1$ oraz $m \approx 0$. Wtedy strumień wchodzący do układu wynosi

$$\Phi_u(y) \approx \frac{i\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b^2+y^2}{a^2+y^2}. \tag{3.9}$$

Strumień całkowity wchodzący do układu otrzymuje się przez podstawienie do wzoru (3.8) wartości $y = 0$. Strumień całkowity równa się

$$\Phi_{uc}(0) = \frac{i\mu_0}{4\pi}\left[(1+M)\ln\frac{b^2}{a^2} + M_1 m_1 m\ln\frac{(b+2d)^2}{(a+2d)^2} + \right.$$
$$\left. + M_1^3 m_1 m\ln\frac{(b+4d)^2}{(a+4d)^2} + \ldots + M_1^{2n-1} m_1 m\ln\frac{(b+2nd)^2}{(a+2nd)^2}\right]. \tag{3.10}$$

W przypadku, kiedy przenikalność magnetyczna ekranu jest znacznie większa od przenikalności dielektryka ($\mu_e \gg \mu_0$) strumień całkowity wynosi

$$\Phi_{uc}(0) \approx \frac{i\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b^2}{a^2}. \tag{3.11}$$

3.3. Strumień magnetyczny w kadzi

Strumień magnetyczny wchodzący do układu ekran-kadź rozdziela się na dwie części, z których jedna występuje w ekranie a druga w kadzi. Aby uzyskać strumień magnetyczny wnikający do kadzi od strony ekranu na wysokości y należy dokonać całkowania składowej normalnej indukcji na ściance *2* w zakresie od y do ∞ od strony obszaru ekranu. W ten sposób uzyskuje się strumień wnikający poprzez ściankę *2* do obszaru kadzi.

Dla prądu odbitego *mi* oraz jego dalszych odbić wg rys. 4 możemy napisać następujące wyrażenie:

$$B'_{nk}(y) = \frac{\mu_e mi}{2\pi}\left[\frac{y}{(a+d)^2+y^2} + M_1\frac{y}{(a+d)^2+y^2} + \right.$$
$$+ M_1\frac{y}{(a+3d)^2+y^2} + M_1^3\frac{y}{(a+3d)^2+y^2} + \ldots +$$
$$\left. + M_1^{n-1}\frac{y}{[a+(2k-1)d]^2+y^2} + M_1^n\frac{y}{[a+(2k-1)d]^2+y^2}\right], \qquad (3.12)$$

gdzie:

$n = 1, 2, 3 \ldots,$

$k = 1, 2, 3 \ldots.$

Dla prądu *-mi* oraz jego odbić składowa normalna indukcji jest równa

$$B''_{nk}(y) = -\frac{\mu_e mi}{2\pi}\left[\frac{y}{(b+d)^2+y^2} + M_1\frac{y}{(b+d)^2+y^2} + \right.$$
$$+ M_1^2\frac{y}{(b+3d)^2+y^2} + M_1^3\frac{y}{(b+3d)^2+y^2} + \ldots +$$
$$\left. + M_1^{n-1}\frac{y}{[a+(2k-1)d]^2+y^2} + M_1^n\frac{y}{[a+(2k-1)d]^2+y^2}\right]. \qquad (3.13)$$

Wypadkowa indukcja magnetyczna wynosi

$$B_{nk}(y) = \frac{\mu_e mi}{2\pi}\left\{\left[\frac{y}{(a+d)^2+y^2} - \frac{y}{(b+d)^2+y^2}\right] + \right.$$
$$+ M_1\left[\frac{y}{(a+d)^2+y^2} - \frac{y}{(b+d)^2+y^2}\right] + M_1^2\left[\frac{y}{(a+3d)^2+y^2} + \right.$$
$$\left. - \frac{y}{(b+3d)^2+y^2}\right] + M_1^3\left[\frac{y}{(a+3d)^2+y^2} - \frac{y}{(b+3d)^2+y^2}\right] +$$
$$+ \ldots + M_1^{n-1}\left[\frac{y}{[a+(2k-1)d]^2+y^2} - \frac{y}{[b+(2k-1)d]^2+y^2}\right] +$$
$$\left. + M_1^n\left[\frac{y}{[a+(2k-1)d]^2+y^2} - \frac{y}{[b+(2k-1)d]^2+y^2}\right]\right\}. \qquad (3.14)$$

Strumień magnetyczny wchodzący do kadzi na wysokości y równa się

$$\Phi_k(y) = \int_0^\infty B_{nk}(y)dy = \frac{\mu_e mi}{4\pi}\left[\ln\frac{(b+d)^2+y^2}{(a+d)^2+y^2} + M_1\ln\frac{(b+d)^2+y^2}{(a+d)^2+y^2} + \right.$$

$$+ M_1^2\ln\frac{(b+3d)^2+y^2}{(a+3d)^2+y^2} + M_1^3\ln\frac{(b+3d)^2+y^2}{(a+3d)^2+y^2} + \ldots +$$

$$\left. + M_1^{n-1}\ln\frac{[b+(2k-1)d]^2+y^2}{[a+(2k-1)d]^2+y^2} + M_1^n\ln\frac{[b+(2k-1)d]^2+y^2}{[a+(2k-1)d]^2+y^2}\right]. \tag{3.15}$$

Ostatecznie

$$\Phi_k(y) = \frac{i\mu_0}{2\pi}\frac{\mu_e}{\mu_e+\mu_0}(1+M_1)\left[\ln\frac{(b+d)^2+y^2}{(a+d)^2+y^2} + M_1^2\ln\frac{(b+3d)^2+y^2}{(a+3d)^2+y^2} + \right.$$

$$\left. + \ldots + M_1^{n-1}\ln\frac{[b+(2k-1)d]^2+y^2}{[a+(2k-1)d]^2+y^2}\right]. \tag{3.16}$$

Strumień całkowity wnikający do kadzi (dla $y = 0$) jest równy

$$\Phi_k(0) = \frac{i\mu_0}{2\pi}\frac{\mu_e}{\mu_e+\mu_0}(1+M_1)\left[\ln\frac{(b+d)^2}{(a+d)^2} + M_1^2\ln\frac{(b+3d)^2}{(a+3d)^2} + \right.$$

$$\left. + \ldots + M_1^{n-1}\ln\frac{[b+(2k-1)d]^2}{[a+(2k-1)d]^2}\right]. \tag{3.17}$$

Miarą zaekranowania magnetycznego może być współczynnik p_Φ równy

$$p_\Phi = \frac{\Phi_k(0)}{\Phi_{uc}(0)}, \tag{3.18}$$

przy czym $\Phi_k(0)$ dane jest wzorem (3.17), natomiast $\Phi_{uc}(0)$ oblicza się według zależności (3.10).

3.4. Przypadki szczególne

a) Jeżeli ekran nie istnieje, tzn. jego grubość $d = 0$, należy przyjąć, że miejsce ekranu zostało zajęte przez kadź i wtedy $\mu_e = \mu_k$.

Odpowiednie współczynniki odbicia wynoszą:

$$M = \frac{\mu_e-\mu_0}{\mu_e+\mu_0} = \frac{\mu_k-\mu_0}{\mu_k+\mu_0}, \tag{3.19}$$

$$m = \frac{2\mu_0}{\mu_e+\mu_0} = \frac{2\mu_0}{\mu_k+\mu_0}, \tag{3.20}$$

$$M_1 = \frac{\mu_k-\mu_e}{\mu_k+\mu_e} = \frac{\mu_k-\mu_k}{\mu_k+\mu_k} = 0, \tag{3.21}$$

$$m_1 = \frac{2\mu_e}{\mu_k+\mu_e} = \frac{2\mu_k}{\mu_k+\mu_k} = 1. \tag{3.22}$$

Strumień całkowity wchodzący do układu, obliczany według (3.10), wynosi

$$\Phi_{uc}(0) = \frac{i\mu_0}{4\pi}(1+M)\ln\frac{b^2}{a^2} = \frac{i\mu_0}{2\pi}\frac{\mu_k}{\mu_k+\mu_0}\ln\frac{b^2}{a^2}. \tag{3.23}$$

Strumień w kadzi według (3.17)

$$\Phi_k(0) = \frac{i\mu_0}{2\pi}\frac{\mu_e}{\mu_e+\mu_0}\ln\frac{b^2}{a^2} = \frac{i\mu_0}{2\pi}\frac{\mu_k}{\mu_k+\mu_0}\ln\frac{b^2}{a^2}. \tag{3.24}$$

Jak należało przypuszczać, te dwa strumienie są jednakowe i współczynnik zaekranowania

$$p_\Phi = 1. \tag{3.25}$$

b) Jeżeli ekran ma grubość nieskończenie dużą, tzn. $d \to \infty$, wtedy ekran przyjmuje rolę kadzi w przewodzeniu strumienia i $\mu_k = \mu_e$.

Odpowiednie współczynniki odbicia wynoszą:

$$M = \frac{\mu_e-\mu_0}{\mu_e+\mu_0}, \tag{3.26}$$

$$m = \frac{2\mu_0}{\mu_e+\mu_0}, \tag{3.27}$$

$$M_1 = \frac{\mu_k-\mu_e}{\mu_k+\mu_e} = \frac{\mu_e-\mu_e}{\mu_e+\mu_e} = 0, \tag{3.28}$$

$$m_1 = \frac{2\mu_e}{\mu_k+\mu_e} = \frac{2\mu_e}{\mu_e+\mu_e} = 1. \tag{3.29}$$

Strumień wchodzący do układu według (3.10)

$$\Phi_{uc}(0) = \frac{i\mu_0}{4\pi}(1+M)\ln\frac{b^2}{a^2} = \frac{i\mu_0}{2\pi}\frac{\mu_e}{\mu_e+\mu_0}\ln\frac{b^2}{a^2}. \tag{3.30}$$

Strumień w kadzi

$$\Phi_k(0) = \frac{i\mu_0}{2\pi}\frac{\mu_e}{\mu_e+\mu_0}\ln\frac{(b+d)^2}{(a+d)^2}\bigg|_{d\to\infty} = 0. \tag{3.31}$$

W tym przypadku, jako należało oczekiwać, współczynnik zaekranowania

$$p_\Phi = 0. \tag{3.32}$$

Można w dalszym ciągu porównać wartości strumienia całkowitego wchodzącego do układu przy skrajnych grubościach ekranu, tzn. $d = 0$ i $d \to \infty$, wykorzystując wzory (3.23) i (3.30).

Wprowadzimy stosunek φ wyrażający następującą zależność

$$\varphi = \frac{\Phi_{uc}(0)}{\Phi_{uc}(0)}\Big|_{\substack{d\to\infty \\ d=0}} = \frac{\mu_e(\mu_k+\mu_0)}{\mu_k(\mu_e+\mu_0)}. \tag{3.33}$$

Jeżeli założymy, że $\mu_e \gg \mu_0$, oraz $\mu_k = \mu_0$ to

$$\varphi = 1. \tag{3.34}$$

Wynika stąd, że przy odpowiednio dużych wartościach przenikalności ekranu μ_e i kadzi μ_k względem przenikalności dielektryka, wartość całkowitego strumienia wytwarzanego przez układ przewodów nie ulega zmianie mimo, że pomiędzy μ_k i μ_e mogą występować znaczne różnice. Wtedy wytwarzany strumień jest równy

$$\underset{d\to\infty}{\Phi_{uc}(0)} = \underset{d=0}{\Phi_{uc}(0)} = \frac{i\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b^2}{a^2}. \tag{3.35}$$

Jest to wniosek wyjątkowo ważny z punktu widzenia badania rozkładu pola rozproszenia w strefie uzwojeń transformatora.

3.5. Współczynnik zaekranowania strumienia

Współczynnik zaekranowania strumienia zdefiniowany wzorem (3.18) po uwzględnieniu zależności (3.10) i (3.17) można zapisać w następującej postaci:

$$p_\Phi = \frac{4\mu_e\mu_k}{(\mu_e+\mu_0)(\mu_k+\mu_e)}\beta, \tag{3.36}$$

gdzie

$$\beta = \frac{\ln\frac{(b+d)^2}{(a+d)^2} + M_1^2 \ln\frac{(b+3d)^2}{(a+3d)^2} + \ldots + M_1^{n-1}\ln\frac{[b+(n-1)d]^2}{[a+(n-1)d]^2}}{\ln\frac{b^2}{a^2} + M\ln\frac{b^2}{a^2} + M_1 m_1 m \ln\frac{(b+2d)^2}{(a+2d)^2} + \ldots + M_1^{n-2} m_1 m \ln\frac{[b+(n-1)d]^2}{[a+(n-1)d]^2}}. \tag{3.37}$$

Jeżeli założymy, że $\mu_e \gg \mu_0$, to współczynnik zaekranowania równa się

$$p_\Phi = \frac{4\mu_k}{\mu_k+\mu_e}\cdot\beta', \tag{3.38}$$

przy czym

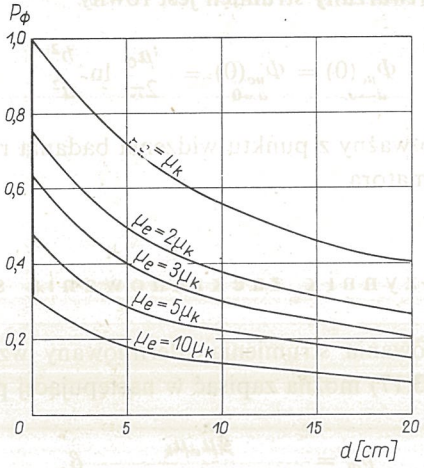
$$\beta' = \frac{\ln\frac{(b+d)^2}{(a+d)^2} + M_1^2 \ln\frac{(b+3d)^2}{(a+3d)^2} + \ldots + M_1^{n-1}\ln\frac{[b+(n-1)d]^2}{[a+(n-1)d]^2}}{2\ln\frac{b^2}{a^2}}. \tag{3.39}$$

W szczególnym przypadku, gdy $\mu_e = \mu_k$ otrzymuje się

$$p_\Phi = \frac{\ln\left(\frac{b+d}{a+d}\right)^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)^2}. \tag{3.40}$$

Przebieg współczynnika p_Φ w zależności od d dla układu dwóch przewodów oddalonych od ekranu o odcinki $a = 10$ cm i $b = 15$ cm przedstawiono na rys. 6. Do obliczeń przyjęto nieco uproszczoną postać wyrażenia (3.38), a mianowicie

$$p_\Phi = \frac{4\mu_k}{\mu_k + \mu_e} \cdot \beta'', \tag{3.41}$$



Rys. 6. Współczynnik zaekranowania strumienia p_Φ

gdzie

$$\beta'' = \frac{\ln\dfrac{(b+d)^2}{(a+d)^2} + M_1^2 \ln\dfrac{(b+3d)^2}{(a+3d)^2}}{2\ln\dfrac{b^2}{a^2}}. \tag{3.42}$$

Z przebiegu krzywych p_Φ przedstawionych na rys. 6 wynika, że zasadniczy wpływ na skuteczność ekranowania wywiera powiększenie stosunku przenikalności magnetycznej ekranu do przenikalności materiału kadzi (μ_e/μ_k), a nie zwiększenie grubości ekranu. Wpływ nasycenia ekranu na współczynnik p_Φ omówiono w pracy [4].

3.6. Straty w kadzi

W kadzi masywnej ze względu na oddziaływanie prądów wirowych następuje silne wypieranie strumienia. Można przyjąć, że w przekroju poprzecznym układu zaekranowanego (rys. 1) na odcinku dy do żelaza kadzi wnika płaska fala elektromagnetyczna. Składowa styczna natężenia pola magnetycznego i strumień na wysokości y od początku układu współrzędnych związane są ze sobą zależnością

$$\underline{H}_{km}(y) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{\omega\mu_k\gamma}{2}}}{\mu_k} \underline{\Phi}_{km}(y) \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}. \tag{3.43}$$

Zależność pomiędzy wartościami maksymalnymi natężenia pola i strumienia magnetycznego jest następująca

$$H_{km}(y) = \sqrt{\frac{\omega\gamma}{\mu_k}}\,\Phi_{km}(y). \tag{3.44}$$

Straty w kadzi w elemencie o wysokości dy i długości jednostkowej wzdłuż osi z wynoszą

$$dP = \sqrt{\frac{\omega\mu_k}{2\gamma_k}}\,\frac{H_{km}^2}{2}. \tag{3.45}$$

Po uwzględnieniu (3.44) możemy napisać

$$dP = \omega\sqrt{\frac{\omega\gamma_k}{2\mu_k}}\,\frac{\Phi_{km}^2(y)}{2}. \tag{3.46}$$

Straty całkowite w kadzi zaekranowanej przypadające na jednostkę długości wzdłuż osi z wynoszą

$$P_{ke} = \frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{\omega\gamma_k}{2\mu_k}}\int_0^\infty \Phi_{km}^2(y)\,dy \tag{3.47}$$

Analogiczne straty w kadzi nieekranowanej

$$P_k = \frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{\omega\gamma_k}{2\mu_k}}\int_0^\infty \Phi_{um}^2(y)\,dy. \tag{3.48}$$

Stosunek strat w kadzi ekranowanej do strat bez zaekranowania nazwiemy współczynnikiem p_m

$$p_m = \frac{P_{ke}}{P_k} = \frac{\int_0^\infty \Phi_{km}^2(y)\,dy}{\int_0^\infty \Phi_{um}^2(y)\,dy}. \tag{3.49}$$

W celu zilustrowania przebiegu współczynnika p_m zdefiniowanego wzorem (3.49) wykorzystamy zależności (3.9) oraz (3.16) w której uwzględnimy tylko dwa pierwsze składniki

$$\Phi_{um}(y) = \frac{\mu_0 I_m}{2\pi}\ln\frac{b^2+y^2}{a^2+y^2}, \tag{3.50}$$

$$\Phi_{km}(y) \approx \frac{\mu_0 I_m}{2\pi}\,\frac{2\mu_k}{\mu_k+\mu_e}\ln\frac{(b+d)^2+y^2}{(a+d)^2+y^2}. \tag{3.51}$$

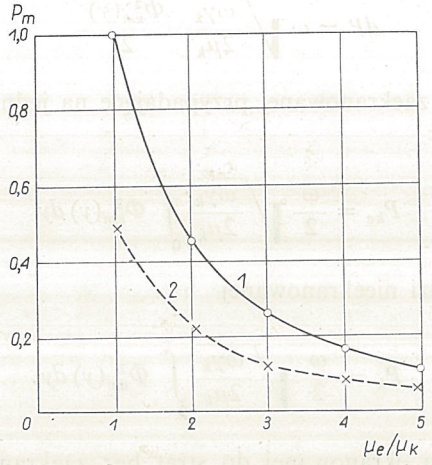
Współczynnik p_m można zapisać następująco

$$p_m = \left(\frac{2\mu_k}{\mu_k+\mu_e}\right)^2 \cdot s, \tag{3.52}$$

gdzie

$$s = \frac{\int_0^\infty \ln^2 \frac{(b+d)^2+y^2}{(a+d)^2+y^2}\,dy}{\int_0^\infty \ln^2 \frac{b^2+y^2}{a^2+y^2}\,dy}. \tag{3.53}$$

Jeżeli przyjąć, że w wyrażeniu (3.53) szerokość ekranu d jest pomijalnie mała w porównaniu z odległościami a i b, tzn. $a \gg d$ oraz $b \gg d$, to $s \approx 1$. Wobec powyższego stosunek strat p_m określony wzorem (3.52) zależy przede wszystkim od wzajemnego stosunku przenikalności magnetycznych ekranu i kadzi.



Rys. 7. Współczynnik zaekranowania strat mocy p_m
1 — dla ekranu nieskończenie cienkiego ($s = 1$), 2 — dla ekranu o grubości $d = 5$ cm ($s = 0{,}47$)

Na rys. 7 przedstawiono przykładowe przebiegi współczynnika zaekranowania strat w funkcji stosunku μ_e/μ_k dla przypadku, w którym $s = 1$ oraz dla przypadku $s = 0{,}47$ ($a = 10$ cm, $b = 15$ cm, $d = 5$ cm).

4. WPŁYW KONFIGURACJI EKRANÓW MAGNETYCZNYCH NA SKUTECZNOŚĆ EKRANOWANIA KADZI

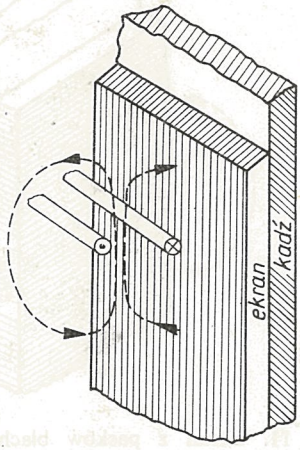
Jak wynika ze wzorów (3.36) i (3.52) skuteczność ekranowania magnetycznego kadzi zależy głównie od stosunku przenikalności materiału kadzi μ_k i ekranu μ_e. Przenikalności te należy jednak rozumieć nie jak zwykłe przenikalności występujące przy polu stałym, lecz jako pewne równoważne tzw. „kwazi-przenikalności" („niby przenikalności") μ_q, które uwzględniają pogorszenie własności magnetycznych badanej części stalowej wskutek reakcji prądów wirowych wzniecanych przez przemienne pole magnetyczne [2].

Wartość przenikalności μ_q zależy głównie od struktury geometrycznej powierzchni stalowych, od sposobu wzbudzenia oraz od parametrów fizycznych układu f, μ, γ.

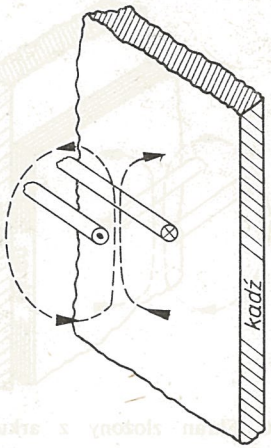
Rozpatrzymy kolejno różne przypadki ekranowania.

4.1. Ekran z pasków osiowych

W przypadku, gdy blachy ekranu w formie pasków ułożone są wzdłuż linii sił pola magnetycznego (rys. 8), w płaszczyźnie blach ekranów nie indukują się żadne prądy wirowe i taki ekran można uznać za idealny [8]. „Niby-przenikalność" takiego ekranu jest praktycznie równa rzeczywistej przenikalności użytej blachy elektrotechnicznej, tz . $\mu_{qe} = \mu_{er} = 2000 \div 5000$.



Rys. 8. Ekran z pasków blachy ułożonych pionowo



Rys. 9 Ściana kadzi bez ekranu.

4.2. Kadź bez ekranu

W przypadku masywnej ściany stalowej ze stali konstrukcyjnej (rys. 9) wpływ reakcji prądów wirowych objawia się tym, że ściana stalowa zachowuje się tak, jak gdyby jej przenikalność była dużo mniejsza od rzeczywistej przenikalności. Doświadczenia wskazują [3], że w praktyce, przy 50 Hz, współczynnik odbicia zwierciadlanego w postaci

$$\eta = \frac{1 + \dfrac{I_r}{I}}{2} = \frac{1 + \mu_q}{2} \tag{4.1}$$

równa się $\eta = 0{,}6 \div 0{,}8$ w zależności od nasycenia i geometrii układu, przy czym $I_r = M_q I$ oznacza równoważny prąd odbity. Wiedząc, że

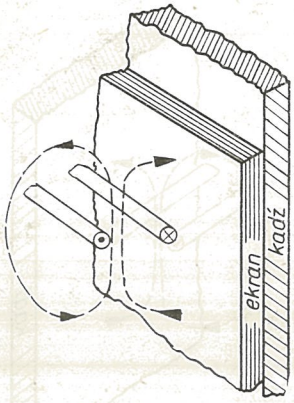
$$M_q = \frac{\mu_{qr} - 1}{\mu_{qr} + 1} = 2\eta - 1 \cong 0{,}6 \div 0{,}2, \tag{4.2}$$

obliczymy „kwazi-przenikalność", która wynosi

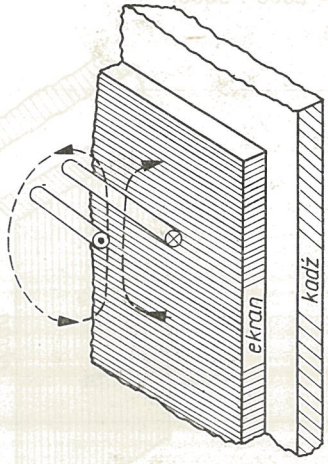
$$\mu_{qr} = \frac{1 + M_q}{1 - M_q} = 1{,}5 \div 4{,}0. \tag{4.3}$$

4.3. Ekran złożony z arkuszy blach

W przypadku ekranów magnetycznych wykonanych z arkuszy blachy przylegających swą płaszczyzną do powierzchni kadzi (rys. 10), prądy wirowe indukowane w płaszczyźnie blach przeciwstawiają się wnikaniu składowej normalnej pola, a nie przeszkadzają w przepływie składowej stycznej.



Rys. 10. Ekran złożony z arkuszy blach



Rys. 11. Ekran z pasków blachy ułożonych poziomo

Jak wykazały wstępne badania [4], działanie takie objawia się na zewnątrz tak, jak gdyby przenikalność materiału ekranu zmalała 3 do 4 razy, tzn.

$$\mu_{ge} = \frac{\mu_{er}}{3 \div 4} = \frac{2000 \div 5000}{3 \div 4},$$

a więc jest rzędu $\mu_{er} = 1000$.

4.4. Ekran z pasków ułożonych w kierunku obwodowym

W przypadku gdy blachy ekranu ułożone są w poprzek linii sił pola magnetycznego (rys. 11), prądy wirowe indukowane w płaszczyźnie pasków blach nie przeszkadzają wnikaniu do ekranu składowej normalnej pola, natomiast składowa styczna (osiowa) pola napotyka na duży opór magnetyczny spowodowany reakcją prądów wirowych i izolacją międzyblachową.

W pierwszym przybliżeniu można przyjąć, że strumień rozproszenia wnikający do ekranu jest bez większych przeszkód doprowadzany do powierzchni kadzi i tylko częściowo jest bocznikowany przez ekran. Ekran w polu przenikającego go strumienia osiowego zachowuje się jak masywny blok stalowy o zmniejszonej jedynie przewodności elektrycznej γ [3]. Tak więc układ taki ma straty praktycznie takie same jak kadź ekranowana, lub nieznacznie mniejsze.

W realnym transformatorze trójfazowym strumień rozproszenia w kadzi, w zależności od miejsca na powierzchni kadzi, może mieć zarówno kierunek przeważająco osiowy (rys. 8) — w częściach zaokrąglonych kadzi, jak i obwodowo-osiowy (wzdłuż obwodu kadzi) — w częściach prostoliniowych kadzi. Jak wynika z p. 4.4, ułożenie pasków blach w poprzek przebiegu strumienia, jak na rys. 11, jest wyjątkowo niekorzystne, ekrany takie należy stosować bardzo ostrożnie i tylko w miejscach gdzie linie sił pola magnetycznego będą przebiegały wzdłuż blach. W przeciwnym przypadku należy stosować raczej ekrany wykonane z arkuszy blach ułożonych na płask, które są wprawdzie nieco mniej skuteczne niż ekran idealny (rys. 8), ale nie zawierają wad ekranu przedstawionego na rys. 11.

Analiza wpływu szerokości arkuszy blach na skuteczność ich ekranującego działania będzie przedmiotem dalszych badań autorów.

5. ZAKOŃCZENIE

Ekranowanie magnetyczne masywnych ścian stalowych jest stosowane ostatnio coraz częściej i to nie tylko w transformatorach, ale również w turbogeneratorach i innych urządzeniach wielkich mocy. W zakresie tym, w przeciwieństwie do rozbudowanej już teorii ekranowania elektromagnetycznego, brak było właściwie jakichkolwiek głębszych opracowań i metod analizy teoretycznej.

W pracy zaproponowano dwie metody badania, z których pierwsza (metoda potencjału wektorowego) jest ścisła matematycznie, lecz przedstawia znaczne trudności obliczeniowe, zwłaszcza w przypadku złożonej konfiguracji geometrycznej układu i uwzględnienia nasycenia stali.

Metoda druga (odbić zwierciadlanych), przy $M = 1$ lub $M = -1$, nie ustępuje pod względem ścisłości metodzie pierwszej. W przypadkach pośrednich ma ona charakter przybliżony, prowadzi jednak do wzorów o prostszej budowie, umożliwiającej stosowanie poprawek empirycznych w postaci równoważnych współczynników odbicia zwierciadlanego i tzw. „kwazi-przenikalności".

Wybór jednej z metod zaproponowanych w pracy zależy od charakteru i złożoności zagadnienia oraz wymaganej dokładności, która w wielu przypadkach technicznych nie musi być wysoka.

Mimo względnej prostoty analizowanego układu dwóch przewodów, można go rozpatrywać jako element bardziej złożonych układów geometrycznych, dla których przedstawione w pracy wnioski są również słuszne.

Uzupełnieniem tej pracy w zakresie uwzględnienia nasycenia stali ekranów, sposobu wymuszenia pola oraz innych zagadnień praktycznych są publikacje [3] i [4].

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. Timotin, A. Tugulea, C. Fluerasu, Quasi-stationary Electromagnetic Field of Straight Conductors Through Which A. C. Flows in the Presence of Plane Shield of Finite Thickness, Revue Roumaine des Sciences Techniques, Serie Électrotéchnique et Énergetique, tom 11, 1966.
2. Milos Štafl, Electrodynamics of Electrical Machines, Academia — Praha, 1967.

3. J. Turowski, Elektrodynamika techniczna, WNT, Warszawa, 1968.
4. J. Turowski, — K'rasczotu magnitnych ekranow moszczych transformatorów, „Elektriczestwo", Nr 1, 1971.
5. K. Zakrzewski, Analiza pola elektromagnetycznego w masywnym żelazie metodą numeryczną, Archiwum Elektrotechniki, t. XVIII, z. 3, 1969.

K. ZAKRZEWSKI, J. TUROWSKI

METHOD OF ANALYSIS OF TRANSFORMER TANK SHIELDINGS

Summary

Magnetic shields (shunts) of walls of large transformers are made of packets of thin transformer steel, which can be assembled in three various ways:
— the large iron sheets are located parallel to the internal surface of the tank wall (Fig. 10),
— the packets of stripes made of transformer steel are located in horizontal direction, perpendicular to the surface of tank wall (Fig. 11),
— the packets of stripes made of transformer steel are located in vertical direction (Fig. 1), perpendicular to the surface of the tank wall.
In connection with this, the question arises what kind of shieldings configurations is the most advantageous.

In the work the analysis of two principal systems is presented, of two straight parallel conductors, carrying alternating current and situated nearby of the shielded steel wall. Such a system of two conductors may be considered as a basic element of transformer winding.

For one of the three above principal ways of magnetic shieldings, i.e. for the case when packets of transformer steel stripes are located vertical and perpendicular to the tank wall surface (Fig. 1), the magnetic vector potential has been derived, which satisfies the equations: (2.1) — for the dielectric area, (2.2) — for inside of shields and (2.3) — for inside of solid iron of the steel wall: and where A_d, A_e, A_k — are vector potentials of the single conductor in the respective areas of laminated ferromagnetic medium and α — coefficient expressed by equation (2.4).

Vector potentials of the system of two parallel conductors, in assumption of linear media, are the superposition of the vector potentials produced by the particular conductors and are expressed by equations: (2.58) — for dielectric area, (2.59) — for inside of shield and (2.60) — for inside of solid ferromagnetic medium (tank wall), where a, b — distances of the conductors from shield surface, d — thickness of shield (see Fig. 1); μ_0, μ_e, μ_k — magnetic permeabilities of dielectric, shield and tank wall medium; r — coefficient expressed by eqn. (2.39) and n — by eqn. (2.40).

The equations (2.58) to (2.60), describing vector magnetic potentials, are the initial formulae for the determination of all others electromagnetic quantities in the laminated ferromagnetic medium, with the help of equations (2.17) and (2.18).

The form of formulae (2.58) to (2.60) has a considerably exact and general expression, however they are too complicated to be employed in many practical engineering calculations.

In many particular cases, satisfactory results may be obtained in a simplified way, with the help of theory of mirror images. This method is applied in chapter 3.

The idea of the theory of images is presented in Figures 2, 3, 4 and 5. In this method the coefficients of images of real currents in the walls, being the plane borders of particular areas, were introduced, where M and m — for border dielectric-shield, M_1 and m_1 — for border shield-tank wall.

The mirror image coefficients are expressed by equations: (3.1) — for M, (3.2) — for m, (3.3) — for M_1 and (3.4) — for m_1.

On the basis of analysis of configurations of magnetic field produced by superposition of field of real currents i and $-i$, as well as their images, the total magnetic flux $\Phi_{uc}(0)$, entering the shielded system, has been determined by the formula (3.10). The formula (3.17) represents the magnetic flux $\Phi_k(0)$ entering to the tank wall, where $n = 1, 2, 3, \ldots$ and $k = 1, 2, 3, \ldots$ numbers of succesive mirror images.

Shielding effect for magnetic flux may be expressed by coefficient p_Φ eqn. (3.18) and (3.38), and coefficient β' — by eqn. (3.39).

In a similar way the shielding effect for the power losses in tank wall may be expressed by coefficient p_m (3.49), where P_{ke} — power losses in a shielded tank wall and P_k — power losses in a nonshielded one.

After several mathematic transformations the coefficient p_m assumes the form (3.52), where coefficient s (3.53) — takes into account the changes of power losses by variation of geometric configurations of system.

It follows from the equations (3.38) to (3.52), that the main influence on the shielding effect has the mutual relation between the magnetic permeabilities of the ferromagnetic materials of shield and tank μ_e/μ_k.

The influence of the thickness of shield has the much less influence than the permeability (see Fig. 6).

The permeability of the shield and tank should be understood as what is called „quasipermeability" (or effective permeability), which takes into account the deterioration of the magnetic characteristics of solid steel as a result of the eddy-currents field reaction [2].

In Chapter 4 the influence of the configuration of magnetic shields on shielding effect was discussed, mainly from the point of view of evaluation of „quasipermeabilities" at the various shields configurations.

As it is shown in the work, making use of the simplified theory of images makes it possible to obtain clear equations, easier to use in engineering applications.

K. ZAKRZEWSKI, J. TUROWSKI

LES MÉTHODES D'ANALYSE DU BLINDAGE MAGNÉTIQUE DE LA CUVE DES TRANSFORMATEURS

Résumé

L'article présente les méthodes du blindage magnétique de la cuve des transformateurs à l'aide des tôles ferromagnétiques.

On a décrit les deux procédés mathématiques utilisés pour l'analyse du système fondamental des conducteurs blindés (deux conducteurs infinis et parallèles):

— la méthode du potentiel vecteur d'un champ magnétique,

— la méthode des images symétriques du courant.

On a constaté que l'effectivité du blindage dépend de la relation μ_e/μ_k (où μ_e et μ_k représentent la quasi-perméabilité d'ecran et celle de la cuve). On a discuté cette effectivité en fonction des trois systèmes du blindage magnétique.

K. ZAKRZEWSKI, J. TUROWSKI

ZUR ANALYSE DER MAGNETISCHEN ABSCHIRMUNG DES TRANSFORMATORENKESSELS

Zusammenfassung

Magnetische Abschirme des Transformatorenkessels werden aus dem ferromagnetischen Blech gebaut. Es besteht die Möglichkeit, diese Schirme auf drei verschiedene Arten zurechtlegen, d.h. die Blechpaketen werden entweder vertikal oder horizontal, aber immer senkrecht hinsichtlich der inneren Oberfläche des Kessels angeschichten, oder — wie Blechtafeln — parallel zu dieser Oberfläche angeordnet.

Es ist eine Analyse des grundsätzlichen Systems von zwei paralellen Leitungen in der Nähe der verabschirmenden Eisenwand vorgeschlagen worden. Im Teil 2 wird das elektromagnetische Feld in drei Vektorpotentialfunktionen (für Dielektrik, Schirm und Eisenwand) beschrieben. Eine andere Methode mittels vielmaliger Spiegelabbildungen (Teil 3) führt zu den angeführten Resultaten. Die Wirksamkeit der magne-

tischen Abschirmung ist hauptsächlich Funktion des Verhältnisses der Quasi-permeabilität des Schirmes μ_e und des Kessels μ_k.

In der Arbeit ist auch eine Diskussion über verschiedene Möglichkeiten der Abschirmung angeführt worden.

К. ЗАКЖЕВСКИ, Я. ТУРОВСКИ

МЕТОДЫ АНАЛИЗА МАГНИТНОГО ЭКРАНИРОВАНИЯ БАКОВ ТРАНСФОРМАТОРОВ

Р е з ю м е

Магнитные экраны выполняются из листовой трансформаторной стали, которую можно располагать на поверхности бака следующими тремя способами:

— большие листы расположенные параллельно внутренней поверхности стенки бака (Рис. 10),
— пакеты узких полос из трансформаторной стали расположенные горизонтально, перпендикулярно к поверхности стенок бака (Рис. 11),
— пакеты узких полос трансформаторной стали расположенные вертикально (Рис. 1 и 8), перпендикулярно к поверхности стенки бака.

В связи с этим появляется необходимость исследования, которую из конфигураций шихтованного экрана можно считать наиболее целесообразной.

В работе обсуждается анализ основной системы двух параллельных прямолинейных проводников с током, расположенных вблизи экранированной стальной стенки. Систему таких проводников можно рассматривать как основной элемент обмотки трансформатора.

Для одного из трех основных способов магнитного экранирования, а именно — для случая когда пакеты полос трансформаторной стали расположены вертикально, перпендикулярно к поверхности стенки (Рис. 1) проводится расчет векторных потенциалов, которые должны удовлетворять следующие уравнения: (2.1) — в области диэлектрика, (2.2) — внутри экрана и (2.3) — в области занимаемой массивной стальной стенкой бака. Причем A_d, A_e, A_k — соответственно, векторные магнитные потенциалы образованные одиночным проводником в отдельных областях трехслойной среды, а коэффициент α — определен формулой (2.4).

Векторные потенциалы системы двух проводников, при допущении линейности рассматриваемых сред, является результатом наложения векторных потенциалов наводимых отдельными проводниками и выражаются уравнениями:
(2.58) — для диэлектрика, (2.59) — для внутренней области экрана и (2.60) — для стенки бака. Причем a, b — расстояния проводников от стенки экрана; d — толщина экрана (согласно рис. 1), μ_0, μ_e, μ_k — магнитные проницаемости диэлектрика, экрана и стенки бака; r — коэффициент определенный формулой (2.39), а n — формулой (2.40).

Уравнения (2.58) до (2.60) описывающие векторные потенциалы, являются исходными зависимостями для определения остальных величин электромагнитного поля в исследуемой трехслойной среде, согласно формулам (2.17) и (2.18) приведенным в работе.

Хотя вид формул на векторный потенциал имеет общее значение, их употребление в инженерных расчетах довольно затруднительно.

Во многих практических задачах удовлетворительное решение можно получить ускоренным путем, используя упрощенный метод зеркальных отображений, который обсуждается в параграфе 3.

В этом методе, принцип которого объясняют рисунки 2, 3, 4 и 5, вводятся коэффициенты зеркальных отображений токов в стенках, являющихся границами раздела областей диэлектрик-экран (коэффициенты M, m), а также экран-бак (коэффициенты M_1, m_1).

Коэффициенты зеркальных отображений определяются уравнениями: (3.1) — для M, (3.2) — для m, (3.3) — для M_1 и (3.4) — для m_1.

На основании распределения магнитного поля являющегося результатом наложения действительных токов i и $-i$, а также зеркальных отображений этих токов, определен общий магнитный поток $\Phi_{uc}(0)$ проникающий в заэкранированную систему, выражающейся формулой (3.10), а также