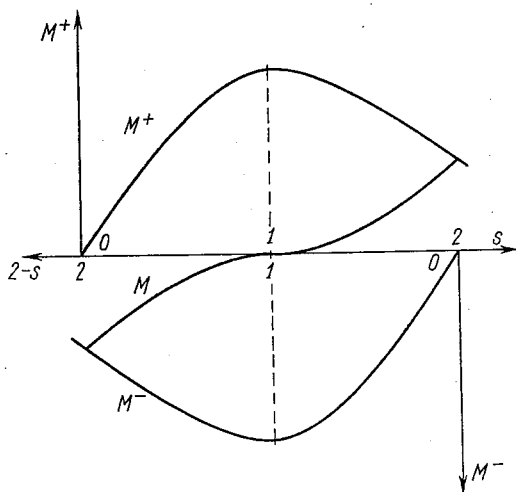


Podstawiając wartość skuteczną składowej zgodnej prądu wirnika (11) do wyrażenia (12), moment elektromagnetyczny dla pola współbieżnego będący momentem napędowym dwufazowego silnika o masywnym wirniku ferromagnetycznym w zależności od oporów schematu zastępczego ma postać:

$$M^+ = \frac{(U_{1s}^+)^2}{\pi n_1} \times$$

$$\times \frac{a_R k_z Z_{cs} \sqrt{\frac{\mu_{rs}^+}{s}}}{\left\{ R_{1s} + \left[ a_R \left( 1 + \frac{X_{1s}}{X_{\mu s}} \right) + a_x \frac{R_{1s}}{X_{\mu s}} \right] k_z Z_{cs} \sqrt{\frac{\mu_{rs}^+}{s}} \right\}^2 + \left\{ X_{1s} + \left[ a_x \left( 1 + \frac{X_{1s}}{X_{\mu s}} \right) - \right. \right.}$$

$$\left. \left. - a_R \frac{R_{1s}}{X_{\mu s}} \right] k_z Z_{cs} \sqrt{\frac{\mu_{rs}^+}{s}} \right\}^2} \quad (13)$$



Rys. 2. Charakterystyki mechaniczne dwufazowego silnika wykonawczego

Wyrażenie na moment elektromagnetyczny hamujący, pochodzący od pola przeciwbieżnego ma analogiczną budowę:

$$M^- = \frac{(U_{1s}^-)^2}{\pi n_1} \times$$

$$\times \frac{a_R k_z Z_{cs} \sqrt{\frac{\mu_{rs}^-}{2-s}}}{\left\{ R_{1s} + \left[ a_R \left( 1 + \frac{X_{1s}}{X_{\mu s}} \right) + a_x \frac{R_{1s}}{X_{\mu s}} \right] k_z Z_{cs} \sqrt{\frac{\mu_{rs}^-}{2-s}} \right\}^2 + \left\{ X_{1s} + \left[ a_x \left( 1 + \frac{X_{1s}}{X_{\mu s}} \right) - \right. \right.}$$

$$\left. \left. - a_R \frac{R_{1s}}{X_{\mu s}} \right] k_z Z_{cs} \sqrt{\frac{\mu_{rs}^-}{2-s}} \right\}^2} \quad (14)$$

Wypadkowy moment elektromagnetyczny silnika dwufazowego jest różnicą momentu napędowego określonego zależnością (13) oraz momentu hamującego określonego zależnością (14):

$$M = M^+ - M^-. \quad (15)$$

Przebieg tych momentów wyznacza charakterystykę mechaniczną silnika oraz jego poślizg krytyczny. Silnik dwufazowy spełnia warunek samohamowności, jeżeli poślizg krytyczny nie będzie mniejszy od jedności — maksimum momentu elektromagnetycznego wywołanego polem współbieżnym powinno odpowiadać takiej wartości poślizgu — rys. 2.

#### 4. SAMOHAMOWNOŚĆ PRZY ZWARTYM UZWOJENIU STEROWANIA

W przypadku zwartego uzwojenia sterowania napięcie na jego zaciskach jest równe zero, tzn.:

$$\underline{U}_{1s} = \underline{U}_{1s}^+ + \underline{U}_{1s}^- = 0$$

i stąd wartości skuteczne składowych zgodnej i przeciwnej napięcia sterowania są sobie równe:

$$U_{1s}^+ = U_{1s}^-.$$

Przy zwartym uzwojeniu sterowania składowe te nie zależą od poślizgu [2], zatem poślizg krytyczny najprościej jest wyznaczyć z równania (13) obliczając maksymalną wartość rzędnej charakterystyki mechanicznej:

$$\frac{dM^+}{ds} = 0. \quad (16)$$

Przyrównując licznik pierwszej pochodnej momentu względem poślizgu do zera, otrzymuje się równanie, z którego można wyznaczyć poślizg krytyczny:

$$\begin{aligned} s_{kr} &= \frac{(a_R^2 + a_X^2)k_z^2 Z_{cs}^2 \mu_{rs} \left[ \left( 1 + \frac{X_{1s}}{X_{\mu s}} \right)^2 + \left( \frac{R_{1s}}{X_{\mu s}} \right)^2 \right]}{R_{1s}^2 + X_{1s}^2} = \\ &= \frac{|Z_{2s}|_{s=1}^2 \left[ \left( 1 + \frac{X_{1s}}{X_{\mu s}} \right)^2 + \left( \frac{R_{1s}}{X_{\mu s}} \right)^2 \right]}{R_{1s}^2 + X_{1s}^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Jak widać, poślizg krytyczny rośnie przede wszystkim wraz ze wzrostem modułu impedancji wirnika. Ażeby silnik przy zwartym uzwojeniu sterowania był samohamowny, poślizg krytyczny  $s_{kr} \geq 1$ , więc na podstawie równania (17) moduł impedancji wirnika masywnego w stanie zwarcia powinien wynosić:

$$|Z_{2s}|_{s=1} \geq \sqrt{\frac{R_{1s}^2 + X_{1s}^2}{\left( 1 + \frac{X_{1s}}{X_{\mu s}} \right)^2 + \left( \frac{R_{1s}}{X_{\mu s}} \right)^2}} \approx \sqrt{R_{1s}^2 + X_{1s}^2} = |Z_{1s}|. \quad (18)$$

Zatem silnik jest samohamowny przy zwartym uzwojeniu sterowania, jeżeli moduł impedancji wirnika dla stanu zwarcia nie jest mniejszy od modułu impedancji stojana.

## 5. SAMOHAMOWNOŚĆ PRZY ROZWARTYM UZWOJENIU STEROWANIA

W przypadku rozwartego uzwojenia sterowania napięcie  $U_{1s}^+$  jest funkcją prędkości obrotowej silnika [2] i wyznaczenie krytycznej wartości poślizgu według równania (13) byłoby trudne. Dlatego kryterium samohamowności lepiej jest określić w inny sposób, mianowicie wykorzystując niezależność prądu sterującego od poślizgu [2]:

$$\underline{I}_{1s} = \underline{I}_{1s}^+ + \underline{I}_{1s}^- = 0.$$

Stąd wynika równość wartości skutecznych składowych zgodnej i przeciwnej:

$$I_{1s}^+ = I_{1s}^-.$$

Zatem na podstawie równania (15) otrzymuje się:

$$M = \frac{1}{\pi n_1} (I_{1s}^+)^2 (R_{2\mu s}^+ - R_{2\mu s}^-). \quad (19)$$

Wypadkowe rezystancje równoległego połączenia gałęzi wirnikowej i gałęzi poprzecznej schematu zastępczego dla pól współbieżnego i przeciwbieżnego odpowiednio wynoszą:

$$R_{2\mu s}^+ = \frac{X_{\mu s}^2 a_R k_z Z_{cs} \sqrt{\frac{\mu_{rs}^+}{s}}}{(a_R k_z Z_{cs})^2 \frac{\mu_{rs}^+}{s} + X_{\mu s}^2 + 2X_{\mu s} a_X k_z Z_{cs} \sqrt{\frac{\mu_{rs}^+}{s}} + (a_X k_z Z_{cs})^2 \frac{\mu_{rs}^+}{s}}, \quad (20)$$

$$R_{2\mu s}^- = \frac{X_{\mu s}^2 a_R k_z Z_{cs} \sqrt{\frac{\mu_{rs}^-}{2-s}}}{(a_R k_z Z_{cs})^2 \frac{\mu_{rs}^-}{2-s} + X_{\mu s}^2 + 2X_{\mu s} a_X k_z Z_{cs} \sqrt{\frac{\mu_{rs}^-}{2-s}} + (a_X k_z Z_{cs})^2 \frac{\mu_{rs}^-}{2-s}}. \quad (21)$$

Samohamowność wystąpi wówczas, gdy charakterystyka mechaniczna określona równaniem (19) przecina tylko w jednym punkcie oś odciętych. Matematycznie ujmując zagadnienie, równanie  $M = 0$  powinno mieć jeden pierwiastek rzeczywisty oraz pierwiastki zespolone, lub tylko jeden pierwiastek rzeczywisty. Zależność (19) jest równa zero, jeżeli:

$$R_{2\mu s}^+ - R_{2\mu s}^- = 0, \quad (22)$$

ponieważ prąd  $I_{1s}^+$  dla żadnej wartości poślizgu nie przyjmuje wartości zerowej [2]. Podstawiając zależności (20) i (21), w których  $\mu_{rs}^+ = \mu_{rs}^- = \mu_{rs}$ , do równania (22) można doprowadzić je do następującej postaci:

$$(\sqrt{2-s} - \sqrt{s}) \left[ \frac{(a_R^2 + a_X^2) k_z^2 Z_{cs}^2 \mu_{rs}}{\sqrt{s} \sqrt{2-s}} - X_{\mu s}^2 \right] = 0. \quad (23)$$

Równanie (23) posiada jeden pierwiastek rzeczywisty  $s_1 = 1$  oraz dwa pierwiastki określone wzorem:

$$s_{2,3} = 1 \mp \sqrt{1 - \frac{[(a_R^2 + a_X^2) k_z^2 Z_{cs}^2 \mu_{rs}]^2}{X_{\mu s}^4}}, \quad (24)$$

które aby silnik był samohamowny muszą być pierwiastkami zespolonymi; zatem:

$$\frac{\sqrt{a_R^2 + a_X^2} k_z Z_{cs} \sqrt{\mu_{rs}}}{X_{\mu s}} \geq 1.$$

Silnik jest samohamowny przy rozwartym uzwojeniu sterowania, jeżeli moduł impedancji wirnika dla stanu zwarcia nie jest mniejszy od reaktancji głównej:

$$|Z_{2s}|_{s=1} \geq X_{\mu s}. \quad (25)$$

## 6. WPŁYW WYMIARÓW GŁÓWNYCH NA SAMOHAMOWNOŚĆ

Z przeprowadzonych rozważań i kryteriów samohamowności (18) i (25) wynika, że spełnienie warunku samohamowności dla rozwartego uzwojenia sterowania, podobnie jak w silnikach klatkowych i kubkowych (zależności (1) i (2)), wymaga większej wartości modułu impedancji wirnika aniżeli przy zwarcu uzwojenia sterowania. Na przykład silnik dwufazowy SA-5/110 V o nietypowym wirniku masywnym ze stali 45 posiada następujące wartości oporów schematu zastępczego (wartości obliczone, potwierdzone pomiarami):  $R_{1s} = 57 \Omega$ ,  $X_{1s} = 110 \Omega$ ,  $X_{\mu s} = 260 \Omega$ ,  $(R_{2s})_{s=1} = 1380 \Omega$ ,  $(X_{2s})_{s=1} = 830 \Omega$ . Silnik ten jest samohamowny zarówno przy zwartym jak i rozwartym uzwojeniu sterowania, gdyż  $|Z_{2s}|_{s=1} = 1610 \Omega$ ,  $|Z_{1s}| = 124 \Omega$ . Obliczenia zostały potwierdzone pomiarami, z których również wynika, że czas wybiegu przy zwartym uzwojeniu sterowania jest krótszy niż przy rozwartym uzwojeniu sterowania.

Na impedancję jednorodnego masywnego wirnika ferromagnetycznego można wpływać jedynie poprzez zmianę wymiarów geometrycznych wirnika. Należy tak projektować wirnik masywny, tzn. tak dobierać jego wymiary, ażeby silnik spełniał warunek samohamowności (25) przy rozwartym uzwojeniu sterowania; w takim przypadku będzie on również samohamowny przy uzwojeniu sterowania zwartym przez dowolną impedancję. Z zależności (25) wynika, że:

$$\sqrt{a_R^2 + a_X^2} \frac{4m_1(z_{1s}\zeta_1)^2}{\pi D_2} k_z L_2 \sqrt{\frac{\omega_1 \mu_0}{2\gamma_2}} \sqrt{\mu_{rs}} \geq \frac{4}{\pi} \mu_0 m_1 f_1 \frac{(z_{1s}\zeta_1)^2}{p} \frac{\tau L_i}{k_n k_c \delta}, \quad (26)$$

gdzie:

- $L_i$  — długość idealna pakietu stojana,
- $\delta$  — szczelina powietrzna między stojanem a wirnikiem,
- $k_c$  — współczynnik Cartera szczeliny powietrznej,
- $k_n$  — współczynnik nasycenia obwodu magnetycznego.

W dwufazowych silnikach wykonawczych  $L_2 = L_i$ ,  $D_2 \approx D_{1w}$  (przy czym  $D_{1w}$  — średnica wewnętrzna pakietu stojana) oraz w obecnie szeroko stosowanej konstrukcji przelotowej  $\delta \approx 0,005 D_2$ . Przy takich powiązaniach wymiarów obwodu magnetycznego, największa średnica wirnika, przy której silnik jeszcze jest samohamowny, wyznaczona z nierówności (26) wynosi:

$$D_2 \leq \sqrt{a_R^2 + a_X^2} \sqrt{\frac{\mu_{rs}}{\pi f_1 \mu_0 \gamma_2}} k_z k_n k_c p^2 \cdot 10^{-2} \text{ [m]}. \quad (27)$$

Na ogół  $\sqrt{a_R^2 + a_X^2} \approx 1,64$ ,  $\mu_{rs} = 500 \dots 1100$ , konduktywność typowych stali konstrukcyjnych w temperaturze 348K  $\gamma_2 = 5 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ ,  $k_n = 1,1 \dots 1,2$ ,  $k_c = 1,1 \dots 1,2$ ; wobec



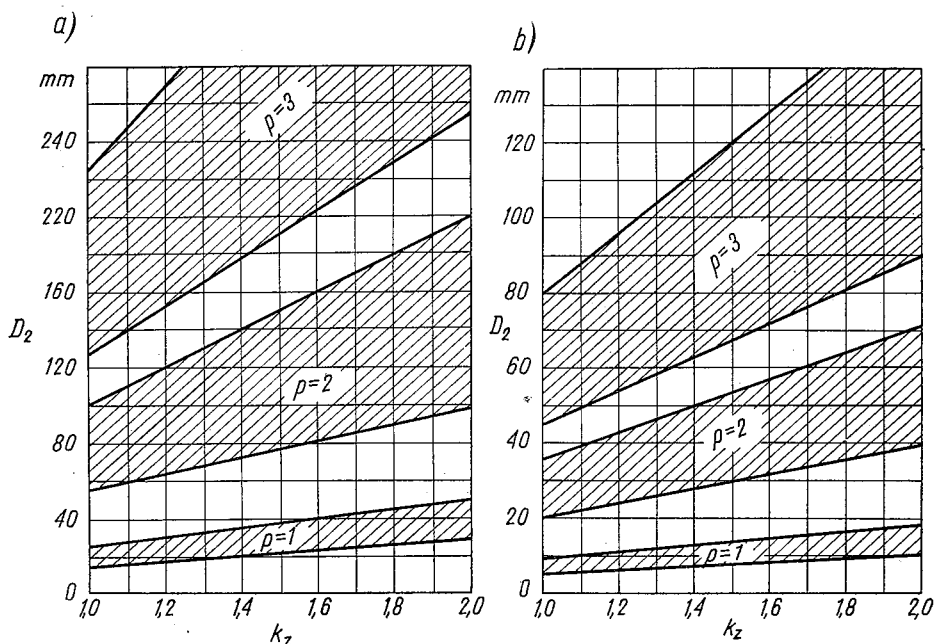
tego nierówność (27) ulega dalszemu uproszczeniu:

— dla częstotliwości 50 Hz

$$D_2 \leq (0,0141 \dots 0,0250) k_z p^2, \quad (27a)$$

— dla częstotliwości 400 Hz

$$D_2 \leq (0,0050 \dots 0,0089) k_z p^2. \quad (27b)$$



Rys. 3. Największe dopuszczalne średnice masywnych wirników stalowych zapewniające samohamowność silników przy rozwartym uzwojeniu sterowania: a) dla częstotliwości 50 Hz; b) dla częstotliwości 400 Hz

Na rys. 3 przedstawiono przedziały dopuszczalnych największych średnic masywnych wirników stalowych zapewniających samohamowność silników w zależności od współczynnika efektu krańcowego i liczby par biegunów. Widać, że średnica wirnika przy której silnik jeszcze jest samohamowny maleje wraz z liczbą par biegunów i stosunkiem podziałki biegunowej do długości wirnika. Największe ograniczenia średnicy wirnika mają miejsce w dwubiegunowych długich maszynach. Należy zatem przy doborze wymiarów głównych silnika mieć na uwadze kryterium jego samohamowności dla otwartego obwodu sterowania.

## 7. WNIOSKI

1. Silnik o masywnym wirniku ferromagnetycznym, który jest samohamowny przy rozwartym uzwojeniu sterowania, jest również samohamowny przy zwartym uzwojeniu sterowania przez impedancję o dowolnej wartości.

2. Silnik, który nie jest samohamowny przy rozwartym uzwojeniu sterowania, w pewnych przypadkach może być samohamowny przy zwartym obwodzie sterowania.

3. Przy zadanej liczbie par biegunów i długości idealnej silnika jego samohamowność jest tym lepsza, im mniejsza jest średnica masywnego wirnika ferromagnetycznego.

4. Każdy silnik indukcyjny, o jednorodnym masywnym wirniku ferromagnetycznym może być uważany za silnik wykonawczy, jeżeli tylko dla średnicy wirnika jest spełniona nierówność (27).

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Z. Bajorek, Samohamowność silników asynchronicznych dwufazowych, *Przegląd Elektrotechniczny*, nr 11, 1960, s. 461—463.
2. J. S. Czeczet, *Mikromaszyny elektryczne w automatyce*, WNT, Warszawa 1968.
3. W. J. Gibbs, Tooth Ripple Losses in Unwound Pole Shoes, *Journal of the Institution of Electrical Engineers*, vol. 94, part II, 1947, s. 2—12.
4. Z. Kosowicz, Wpływ głównych wymiarów silników dwufazowych z wirnikiem kubkowym na ich samohamowność, *Rozprawy Elektrotechniczne*, t. 16, z. 3, 1970, s. 453—480.
5. Z. Kosowicz, Wpływ średnicy wirnika na warunki samohamowności silników klatkowych wykonawczych, *Rozprawy Elektrotechniczne*, t. 18, z. 2, 1972, s. 381—401.
6. L. R. Nejman, *Powierzchnostnyj effiekt w ferromagnitnych tielach*, GEI, Leningrad-Moskwa 1949.
7. M. A. Panasienko, *Elektromagnitnyje rascziety ustrojstw s nielinijnymi raspriedielennymi paramietrami*, Energia, Moskwa 1971.
8. J. Gieras, Wyznaczenie parametrów dwufazowego silnika wykonawczego o masywnym wirniku stalowym i wirującym kołowym polu magnetycznym, *Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej „Elektryka”*, nr 14, 1973.

J. GIERAS

#### THE SELF-BREAKING PROPERTIES OF TWO-PHASE INDUCTION MOTORS WITH SOLID FERROMAGNETIC ROTOR

##### Summary

The paper gives the self-breaking conditions of two-phase control motors with smooth solid ferromagnetic rotor for open and closed control winding. The maximum values of the rotor diameter which satisfy self-breaking properties, for open control circuit have been established.

J. GIERAS

#### L'AUTOFREINAGE DES MOTEURS ASYNCHRONES BIPHASÉS À MASSIF FERROMAGNÉTIQUE ROTOR

##### Résumé

Dans l'article on a défini les critères de l'autofreinage en cas du circuit dirigeant ouvert et du court-circuit des moteurs biphasés à massif ferromagnétique rotor. On a déterminé les diamètres maximum admissibles du rotor, pour lesquels le moteur satisfait encore à la condition de l'autofreinage en cas du circuit dirigeant ouvert.

J. GIERAS

SELBSTBREMSUNGSVERHÄLTNISSE VON ZWEIFHASENMOTOREN MIT MASSIVEM  
FERROMAGNETISCHEM LÄUFER

## Zusammenfassung

Im Artikel sind die Verhältnisse der Selbstbremsung des Zweiphasenstellmotors mit massivem ferromagnetischem Läufer unter Berücksichtigung eines entweder geschlossenen oder offenen Steuerungskreises behandelt worden. Maximal zulässige Rotordurchmesser wurden angeführt, bei denen der Motor noch die Selbstbremsungsbedingungen beim offenen Steuerungskreis erfüllt.

Я. ГЕРАС

КРИТЕРИЯ ОТСУТСТВИЯ САМОХОДА ДВУХФАЗНЫХ АСИНХРОННЫХ  
ДВИГАТЕЛЕЙ С МАССИВНЫМ ФЕРРОМАГНИТНЫМ РОТОРОМ

## Резюме

В статье определены критерия отсутствия самохода двухфазных исполнительных двигателей с однородным массивным ферромагнитным ротором для короткого замыкания и для разомкнутой обмотки управления. Определены допустимые максимальные размеры диаметра ротора, при которых двигатель еще удовлетворяет условиям отсутствия самохода для разомкнутой обмотки управления.



## Teoretyczna i doświadczalna analiza harmonicznego prądu pobieranych przez wybrane układy tyrystorowe z elektroenergetycznej sieci zasilającej

ADAM HANDKE (POZNAŃ)

*Instytut Elektroenergetyki Politechniki Poznańskiej*

*Otrzymano 5.4.1973*

W artykule przedstawiono wyniki przeprowadzonej analizy harmonicznego prądu pobieranych przez wybrane układy tyrystorowe z elektroenergetycznej sieci zasilającej niskiego napięcia o napięciu znamionowym 380/220 V. Do analizy wybrano następujące układy tyrystorowe: jednofazowy półokresowy prostownik sterowany, jednofazowy pełnookresowy prostownik sterowany, jednofazowy nastawnik prądu przemiennego oraz trójfazowy nastawnik prądu przemiennego. Na poszczególnych rysunkach pokazano graficznie w postaci wykresów, uzyskanych na podstawie wzorów, przebiegi bezwzględnych wartości harmonicznego prądu oraz ich procentowe udziały w całkowitym prądzie pobieranym z elektroenergetycznej sieci zasilającej w zależności od kątów wyzwalania tyrystorów  $\alpha$ . Do analizy dlatego wybrano powyższe układy tyrystorowe, gdyż szczególnie przy obciążeniu rezystancyjnym mogą pobierać one z elektroenergetycznej sieci zasilającej prądy odkształcone o dość dużych natężeniach. Prądy te z kolei wpływają na zniekształcenie sinusoidy napięcia sieci. Układy te wykazują również pewne wspólne cechy z punktu widzenia generowania harmonicznego prądu.

### 1. WSTĘP

Dotychczas nie zwracano większej uwagi na zawartość harmonicznego w napięciu elektroenergetycznej sieci zasilającej, gdyż o minimalnej zawartości harmonicznego w jej napięciu decydowały głównie transformatory i generatory. Pojawiły się co prawda pojedyncze sygnały o błędnej pracy elektroenergetycznej sieci zasilającej w wyniku gwałtownego wzrostu zawartości harmonicznego w jej napięciu, a to głównie przez wprowadzanie do eksploatacji piecy łukowych oraz grup trójfazowych prostowników trakcyjnych. Odbiorniki te w przeciwieństwie do odbiorników regulowanych tyrystorami są odbiornikami ściśle umiejscowionymi w zakładach przemysłowych, co umożliwia zasilanie ich z wydzielonych sieci wysokonapięciowych. Natomiast układy tyrystorowe, w których zastosowano wygodną z punktu widzenia obiektu regulowanego fazowo-impulsową metodę regulacji prądu przemiennego [1], mogą znaleźć szerokie zastosowanie w odbiornikach niskonapięciowych, co w konsekwencji może wpłynąć na powszechne ich instalowanie w rozległej czteroprzewodowej sieci prądu przemiennego niskiego napięcia.

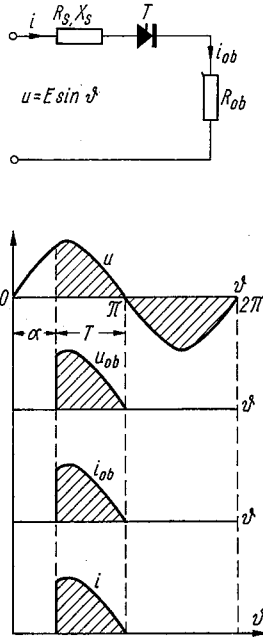
Do takich odbiorników można zaliczyć prostowniki sterowane [2], nastawniki prądu przemiennego [3], falowniki [4] itp. Nastawniki tyrystorowe mogą być stosowane do

rozmaitych celów, np. do regulacji oświetlenia żarowego sal teatralnych [5], regulacji ogrzewania pomieszczeń, w których zastosowano grzejniki oporowe itp. Zastosowanie trójfazowego prostownika sterowanego zamiast układu Leonarda umożliwia bardzo wygodną regulację silnika napędowego oraz zwiększa sprawność układu z 76% do 88% [6]. Tyrystorowe układy falownicze będą powszechnie stosowane przy wyprowadzaniu energii elektrycznej o napięciu stałym z generatorów magneto hydrodynamicznych [7]. Ta powszechna tendencja do stosowania układów tyrystorowych w odbiornikach niskonapięciowych o dość dużych mocach spowoduje wzrost poboru harmonicznych prądu z elektroenergetycznej sieci zasilającej niskiego napięcia, a tym samym wpłynie na wzrost harmonicznych w jej napięciu. Należy tutaj również nadmienić, że układy tyrystorowe są nie tylko źródłem harmonicznych prądu, lecz są również źródłem zakłóceń radioelektrycznych, czyli źródłem prądów, napięć i pól elektromagnetycznych o częstotliwościach rzędu MHz, które utrudniają lub uniemożliwiają poprawną pracę urządzeń radiowych i telewizyjnych. O powyższych problemach sygnalizowano w ostatnich latach kilkakrotnie [8], [9], [10].

Celem pracy było określenie bezwzględnych wartości harmonicznych prądu oraz ich procentowych udziałów w całkowitym prądzie pobieranym z czteroprzewodowej sieci zasilającej prądu przemiennego niskiego napięcia o napięciu znamionowym 380/220 V. Na układy tyrystorowe spojrzano zatem od strony sieci zasilającej. Do analizy wybrano te układy tyrystorowe, które w najbliższej przyszłości mogą znaleźć powszechne zastosowanie w naszym kraju, a mianowicie: jednofazowy półokresowy prostownik sterowany, jednofazowy pełnookresowy prostownik sterowany, jednofazowy nastawnik prądu przemiennego, trójfazowy nastawnik prądu przemiennego. Rozpatrzono tylko przypadki obciążenia rezystancyjnego, tzn. przypadki szczególnie niewskazane z punktu widzenia generowania harmonicznych prądu w elektroenergetycznej sieci zasilającej. Analizę przeprowadzono dla częstotliwości niższych rzędów, tj. dla częstotliwości prądów, które mają decydujący wpływ na zniekształcenie sinusoidy napięcia sieci i dlatego w dalszych rozważaniach można było posłużyć się schematami uproszczonymi nie uwzględniającymi indukcyjności rozproszenia, pojemności, układów ograniczających stromość prądową ( $di/dt$ ), stromość napięciową itp. Wyniki uzyskane w niniejszej pracy mogą posłużyć jako punkt wyjścia dla przeprowadzenia dalszych rozważań, np. nad harmonicznymi spadkami napięcia w elektroenergetycznej sieci zasilającej, zniekształceniami sinusoidy napięcia sieci itp.

## 2. JEDNOFAZOWY PÓŁOKRESOWY PROSTOWNIK STEROWANY

Na rys. 1 przedstawiono półokresowy prostownik sterowany, w którym zastosowano fazowo-impulsową metodę regulacji prądu. W rozważaniach założono, że reaktancja indukcyjna  $X_s$  układu zasilającego jest wielokrotnie mniejsza od rezystancji  $R$  całego obwodu prostowniczego, tzn.  $R_{ob} + R_s = R \gg X_s$ . Jest to przypadek prawie czystego obciążenia rezystancyjnego, gdyż np. dla odbiorników rezystancyjnych pobierających z sieci zasilającej moc w granicach od 1 kW do 2 kW przy napięciu 220 V, ich rezystancje wahają się w granicach od 49  $\Omega$  do 24  $\Omega$ . Wartości tych rezystancji są zdecydowanie większe od sumy reaktancji indukcyjnych linii niskonapięciowych, transformatorów i przetransfor-



Rys. 1. Schemat połączeń oraz przebiegi napięć i prądów dla jednofazowego półokresowego prostownika sterowanego obciążonego rezystancyjnie

powodowanych przez kwadrat przekładni transformatorów reaktancji indukcyjnej linii wysokiego napięcia. Impulsy napięciowe i prądowe, które przedstawiono na rys. 1b, kształtowane są kątem wyzwalania  $\alpha$  tyrystora  $T$ . Kąt wyzwalania  $\alpha$  można zmieniać od zera do  $180^\circ$ .

Impuls prądu pobierany z elektroenergetycznej sieci zasilającej w przedziale od  $\alpha$  do  $180^\circ$  można wyrazić funkcją

$$i = f(\vartheta) = I \sin \vartheta \quad (1)$$

gdzie:

$I$  — maksymalna wartość prądu,

$$\vartheta = \omega t = \frac{180^\circ}{\pi} \text{ — faza chwilowa funkcji,}$$

$\omega$  — pulsacja sieci,

$t$  — czas.

Powyższą funkcję prądową można przedstawić następującym trygonometrycznym szeregiem Fouriera

$$i = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} [\sqrt{b_k^2 + c_k^2} \sin(k\vartheta + \varphi_{ik})], \quad (2)$$

gdzie:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{180^{\circ}} I \sin \vartheta d\vartheta, \quad (3)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{180^{\circ}} I \sin \vartheta \cos k\vartheta d\vartheta, \quad (4)$$

$$c_k = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{180^{\circ}} I \sin \vartheta \sin k\vartheta d\vartheta, \quad (5)$$

$\varphi_{ik}$  — faza początkowa  $k$ -tej harmonicznej prądu,

$k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$

Granica  $n$  w sumie wiąże się z dokładnością przybliżenia funkcji szeregiem.

Po rozwiązaniu zależności od (2) do (5) otrzyma się wzory wyrażające

— prąd średni  $I_s(\alpha)$ , nazywany również prądem stałym

$$I_s(\alpha) = \frac{a_0}{2} = \frac{I}{2\pi} (1 + \cos \alpha), \quad (6)$$

— amplitudę podstawowej harmonicznej prądu  $I_1(\alpha)$ , tzn. dla  $k = 1$

$$I_1(\alpha) = \frac{I}{2\pi} \sqrt{(\cos^2 \alpha - 1)^2 + \left(\pi - \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha\right)^2}, \quad (7)$$

— amplitudy dalszych harmonicznych prądu  $I_k(\alpha)$ , tzn. dla  $k = 2, 3, 4, \dots$

$$I_k(\alpha) = \frac{I}{2\pi} \sqrt{\left[ \frac{\cos(1+k)\alpha}{1+k} + \frac{\cos(1-k)\alpha}{1-k} - \frac{\cos(1+k)\pi}{1+k} - \frac{\cos(1-k)\pi}{1-k} \right]^2 + \left[ \frac{\sin(1+k)\alpha}{1+k} - \frac{\sin(1-k)\alpha}{1-k} \right]^2}. \quad (8)$$

Z wzorów (8) wynika, że dla  $\alpha = 0$  wypadają nieparzyste harmoniczne prądu, tzn. dla  $k = 3, 5, 7, 9, \dots$

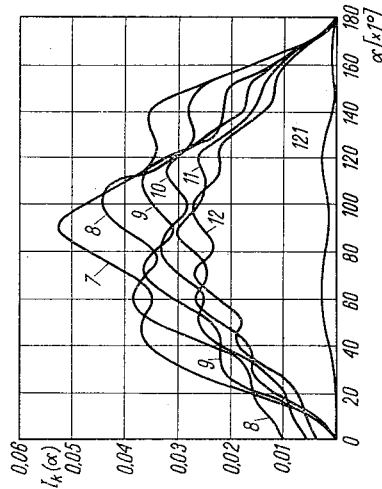
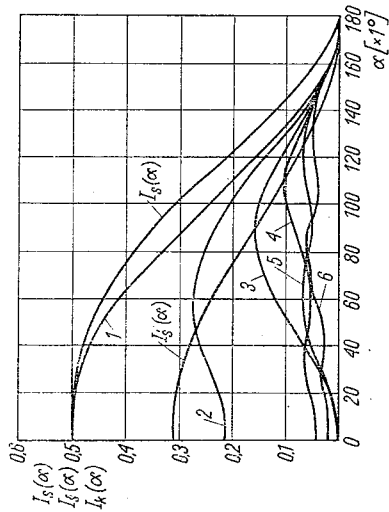
Dla celów praktycznych, oprócz znajomości bezwzględnych wartości poszczególnych amplitud, bardzo ważną jest również znajomość procentowych zawartości poszczególnych harmonicznych prądu występujących w całkowitym prądzie pobieranym z elektroenergetycznej sieci zasilającej. Chcąc obliczyć te procentowe zawartości, trzeba dodatkowo obliczyć wartość skuteczną prądu  $I_s(\alpha)$  w funkcji kąta  $\alpha$

$$I_s(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{180^{\circ}} (I \sin \vartheta)^2 d\vartheta}. \quad (9)$$

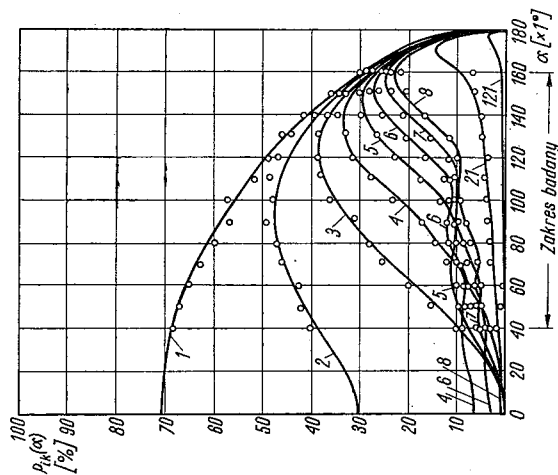
Po rozwiązaniu zależności (9) otrzymano

$$I_s(\alpha) = \frac{I}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi - \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha}. \quad (10)$$

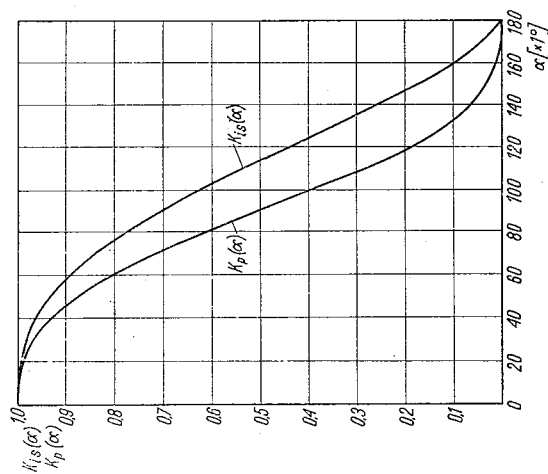




Rys. 2. Przebiegi wartości prądu średniego  $I_s(\alpha)$ , prądu skutecznego  $I_s(\alpha)$  oraz amplitud harmonicznych prądu  $I_k(\alpha)$  w zależności od kąta  $\alpha$ , dla półokresowego prostownika sterowanego 1, 2, 3, ... numery kolejnych harmonicznych



Rys. 3. Wyniki teoretycznej oraz doświadczalnej analizy harmonicznych prądu pobieranego z elektroenergetycznej sieci zasilającej przez półokresowy prostownik sterowany  
o o o o o punkty pomiarowe



Rys. 4. Przebieg wartości względnych  $K_{is}(\alpha)$  oraz  $K_p(\alpha)$  w zależności od kąta  $\alpha$

Procentowe zawartości poszczególnych harmoniczných prądu  $p_{ik}(\alpha)$  jakie występują w funkcji prądowej dla danego kąta  $\alpha$ , można zatem wyrazić za pomocą wzorów (7), (8), (10), czyli

$$\begin{aligned} p_{i1}(\alpha) &= \frac{I_1(\alpha)}{\sqrt{2} I_s(\alpha)} 100, \\ p_{ik}(\alpha) &= \frac{I_k(\alpha)}{\sqrt{2} I_s(\alpha)} 100. \end{aligned} \quad (11)$$

Funkcyjne zależności  $I_s(\alpha)$ ,  $I_1(\alpha)$ ,  $I_k(\alpha)$ ,  $p_{i1}(\alpha)$ ,  $p_{ik}(\alpha)$  wyrażone wzorami (6), (7), (8), (10), (11) stabelaryzowano przy pomocy maszyny cyfrowej ODRA 1013, a wyniki obliczeń pokazano graficznie na rys. 2 oraz rys. 3. Obliczenia wykonano przyjmując, że maksymalna wartość prądu  $I = 1$ . Obliczenia zakończono dla 121-szej harmoniczných prądu.

Na rys. 4 pokazano graficznie przebieg wartości względnych mocy czynnej odbiornika  $K_p(\alpha)$  na tle względnych wartości prądu skutecznego  $K_{is}(\alpha)$ . Wartości te wynikają z wzorów otrzymanych w wyniku teoretycznych rozważań, a mianowicie

$$\begin{aligned} K_{is}(\alpha) &= \frac{I_s(\alpha)}{I_s(\alpha = 0)} = \sqrt{\frac{\pi - \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha}{\pi}}, \\ K_p(\alpha) &= \frac{P(\alpha)}{P(\alpha = 0)} = \frac{\pi - \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha}{\pi}. \end{aligned} \quad (12)$$

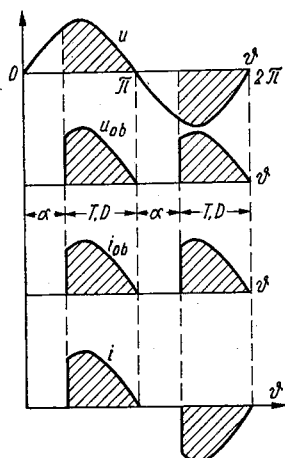
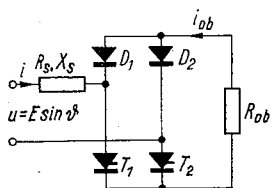
Półokresowy prostownik sterowany obciążony rezystancyjnie oprócz wartości średniej prądu pobiera z sieci zasilającej wszystkie (z wyjątkiem  $\alpha = 0$ ) harmoniczných prądu, tzn.  $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$  Dla  $\alpha = 0$  procentowa zawartość prądu średniego wynosi 63%, a procentowa zawartość składowej podstawowej przyjmuje wartość 70%, 2-giej harmoniczných 30%, 4-tej harmoniczných 6%, 6-tej harmoniczných 2,5%. Dla  $\alpha = 0$  wypadają więc tylko nieparzyste harmoniczných prądu. Najgorsza sytuacja wystąpi dla  $\alpha = 120^\circ \div 175^\circ$ , gdyż w przedziale tym procentowa zawartość prądu średniego spada do wartości 20%, a procentowe zawartości poszczególnych harmoniczných prądu przyjmują następujące wartości: 1-sza 35%, 2-ga 34%, 3-cia 33%, 4-ta 31%, 5-ta 29%, 8-ma 21%, a 121-sza jeszcze 2%.

### 3. JEDNOFAZOWY PEŁNOKRESOWY PROSTOWNIK STEROWANY ORAZ JEDNOFAZOWY NASTAWNIK PRĄDU PRZEMIENNEGO

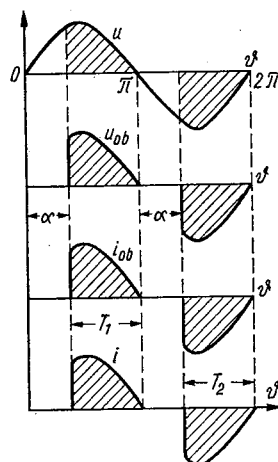
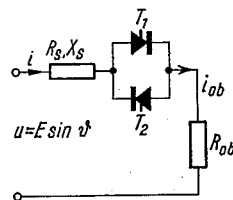
Na rys. 5 pokazano jednofazowy pełnookresowy prostownik oraz przebiegi napięć i prądów w jego obwodach, natomiast na rys. 6 pokazano jednofazowy nastawnik prądu przemiennego. Pełnookresowy prostownik sterowany pokazany na rys. 5 znalazł szerokie zastosowanie w praktyce silnoprądowej, gdyż nie wymaga stosowania transformatora pomocniczego. Nastawnik prądu przemiennego umożliwia płynną regulację mocy czynnej rzędu kilku kW, dlatego z powodzeniem można go stosować do regulacji oświetlenia sal

widowskich, regulacji ogrzewania pomieszczeń itp. Słuszną jest tutaj również względna charakterystyka mocy czynnej pokazana na rys. 4.

Impulsy prądowe pobierane z elektroenergetycznej sieci zasilającej kształtowane są kątami wyzwolenia  $\alpha$  tyrystorów  $T_1$  i  $T_2$ . W rozpatrywanym przypadku, tj. dla obciążenia



Rys. 5. Schemat połączeń oraz przebiegi napięć i prądów dla jednofazowego pełnookresowego prostownika sterowanego obciążonego rezystancyjnie



Rys. 6. Schemat połączeń oraz przebiegi napięć i prądów dla jednofazowego nastawnika prądu przemiennego

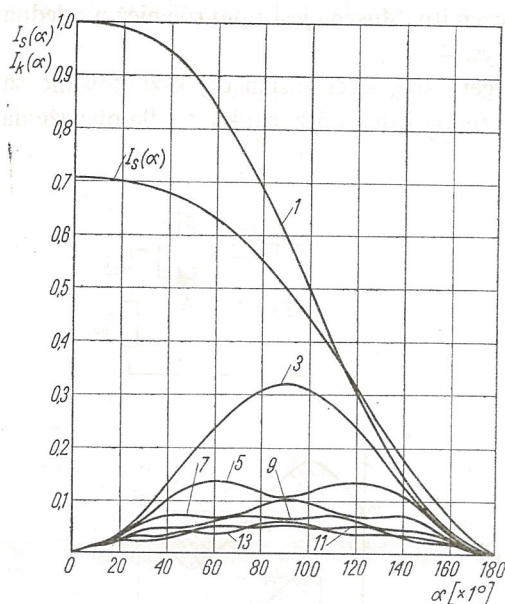
rezystancyjnego, impulsy te dla obu rozpatrywanych układów posiadają taki sam przebieg. Można je zatem w przedziałach  $\alpha \div 180^\circ$  oraz  $180^\circ + \alpha \div 360^\circ$  opisać funkcją

$$i = f(\vartheta) = I \sin \vartheta. \quad (13)$$

Założono tutaj również, że  $R = R_{ob} + R_s \gg X_s$ . Funkcja prądowa spełnia dodatkowo warunek, że  $f(\vartheta) = -f(\vartheta + 180^\circ)$ . Dla funkcji spełniającej ten warunek wartość średnia prądu oraz parzyste harmoniczne równają się zero. Po rozwinięciu funkcji  $f(\vartheta)$  w trygonometryczny szereg Fouriera otrzymano podobne wzory jak w punkcie 2, wyrażające:

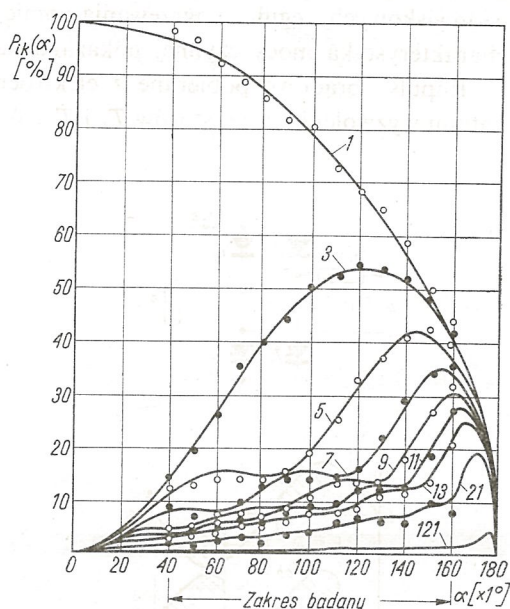
— amplitudę podstawowej harmonicznej prądu  $I_1(\alpha)$ , tzn. dla  $k = 1$

$$I_1(\alpha) = \frac{I}{\pi} \sqrt{(\cos^2 \alpha - 1)^2 + \left( \pi - \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right)^2}, \quad (14)$$



Rys. 7. Przebieg wartości prądu skutecznego  $I_s(\alpha)$  oraz amplitud harmonicznych prądu  $I_k(\alpha)$  w zależności od kąta  $\alpha$  dla pełnookresowego prostownika sterowanego

1, 3, 5, ... numery kolejnych harmonicznych



Rys. 8. Wyniki teoretycznej oraz doświadczalnej analizy harmonicznych prądu pobieranego z elektroenergetycznej sieci zasilającej przez pełnookresowy prostownik sterowany

• • • punkty pomiarowe

— amplitudę dalszych harmonicznych prądu  $I_k(\alpha)$ , tzn. dla  $k = 3, 5, 7, 9, \dots$

$$I_k(\alpha) = \frac{I}{\pi} \sqrt{\left[ \frac{\cos(1+k)\alpha}{1+k} + \frac{\cos(1-k)\alpha}{1-k} - \frac{\cos(1+k)\pi}{1+k} - \frac{\cos(1-k)\pi}{1-k} \right]^2 + \left[ \frac{\sin(1+k)\alpha}{1+k} - \frac{\sin(1-k)\alpha}{1-k} \right]^2} \quad (15)$$

W przypadku pełnegoysterowania tyrystorów  $T_1$  i  $T_2$ , tzn. dla  $\alpha = 0$ , pozostaje tylko składowa podstawowa prądu, czyli

$$f(\vartheta) = i = I \sin \vartheta. \quad (16)$$

W podobny sposób jak dla półokresowego prostownika sterowanego obliczono:

— wartość skuteczną prądu

$$I_s(\alpha) = \frac{I}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\pi - \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha}, \quad (17)$$

— procentowe zawartości poszczególnych harmonicznych prądu jakie występują w funkcji prądowej

$$p_{ik}(\alpha) = \frac{I_k(\alpha)}{\sqrt{2} I_s(\alpha)} 100. \quad (18)$$

Funkcyjne zależności  $I_s(\alpha)$ ,  $I_1(\alpha)$ ,  $I_k(\alpha)$ ,  $p_{ik}(\alpha)$  wyrażone wzorami (17), (14), (15), (18) stabelaryzowano przy pomocy maszyny cyfrowej ODRA 1013 a wyniki obliczeń pokazano

graficznie na rys. 7 i rys. 8. Obliczenia wykonano w założeniu, że dla  $\alpha = 0$  prąd  $I = 1$ . Obliczenia zakończono dla 121-szej harmonicznej prądu.

Na podstawie przeprowadzonej analizy można stwierdzić, że dla kąta  $\alpha = 0$  istnieje tylko podstawowa harmoniczna prądu, która wynosi 100%. Wraz z wzrostem kąta  $\alpha$  pojawiają się nieparzyste harmoniczne prądu pobierane z elektroenergetycznej sieci zasilającej, które przyjmują najpoważniejsze wartości dla kątów  $\alpha = 120 \div 175^\circ$ , gdyż wówczas procentowa zawartość składowej podstawowej prądu spada do 30%, a procentowe zawartości poszczególnych harmoniczných prądu wzrastają do następujących wartości: 3-cia do 54%, 5-ta do 41%, 7-ma do 35%, 9-ta do 31%, 21-sza do 19%, a 121-sza do 4%. Na podstawie dodatkowej analizy można stwierdzić, że procentowe zawartości nieparzystych harmoniczných prądu wytwarzane przez pełnookresowe prostowniki sterowane są o  $\sqrt{2}$  większe od procentowych zawartości nieparzystych harmoniczných prądu wytwarzanych w sieci zasilającej przez półokresowy prostownik sterowany obciążony rezystancją.

#### 4. WERYFIKACJA DOŚWIADCZALNA WYNIKÓW TEORETYCZNYCH UZYSKANYCH DLA UKŁADÓW JEDNOFAZOWYCH

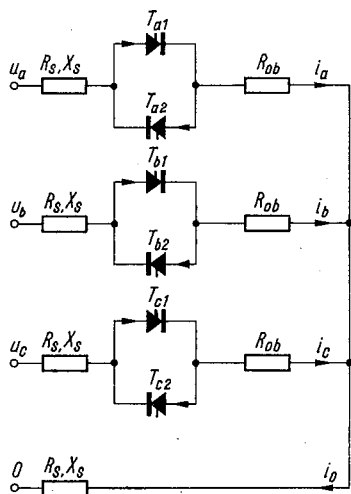
Dla zweryfikowania rozważań teoretycznych przeprowadzonych powyżej, zbudowano stanowisko doświadczalne, na którym praktycznie przebadano rozpatrywane jednofazowe układy tyrystorowe. W układach tych zastosowano tyrystory produkcji radzieckiej typu T-150 o prądzie znamionowym 150 A. Tyrystory wprowadzano w stan przewodzenia przy pomocy zbudowanego w tym celu tranzystorowego generatora impulsów wyzwalających, który umożliwiał dokonywanie zmian kątów wyzwalania tyrystorów  $\alpha$ . Jako obciążenie  $R_{ob}$  zastosowano grzejnik o mocy 1,4 kW i napięciu znamionowym 220 V. Analizę harmoniczných przeprowadzono za pomocą analizatora typu AH2 produkcji Zakładu Teletransmisji Przewodowej Politechniki Wrocławskiej. Dodatkowo stosowano miernik zawartości harmoniczných typu K-104, oscyloskop katodowy typu OK-15, przystawkę oraz aparat fotograficzny firmy EXA.

Uzyskane wyniki w pełni potwierdziły rozważania teoretyczne. Naniesiono je w postaci punktów pomiarowych na rys. 3 i rys. 8. Należy jeszcze zaznaczyć, że w przypadku nastawnika prądu przemiennego oraz prostownika pełnookresowego trzeba było zważyć na idealne przesunięcie względem siebie o  $180^\circ$  impulsów wyzwalających tyrystory, gdyż w przeciwnym przypadku funkcja prądowa nie spełniała warunku  $f(\vartheta) = -f(\vartheta + 180^\circ)$ , co oznaczało praktycznie pojawienie się dodatkowych harmoniczných prądu o numeracji parzystej.

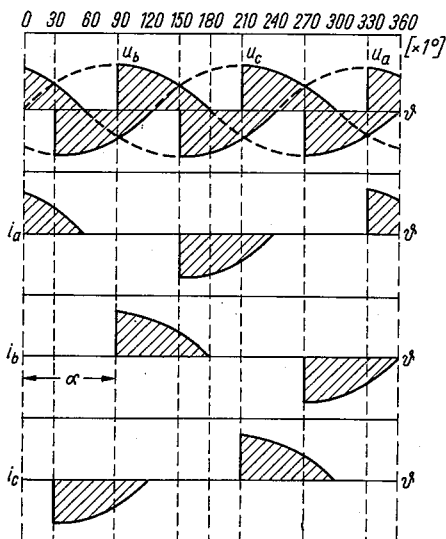
#### 5. TRÓJFAZOWY NASTAWNIK PRĄDU PRZEMIENNEGO

Do dalszej analizy wybrano trójfazowy nastawnik prądu przemiennego, gdyż z jednej strony umożliwia on płynną regulację mocy czynnych rzędu kilkudziesięciu kW, a z drugiej strony zbiór jednofazowych nastawników prądu przemiennego, które będą instalowane w rozległej sieci niskonapięciowej, można zawsze zastąpić układem trójfazowym, a w szczególności symetrycznie obciążonym układem trójfazowym. Analizie poddano trójfazowy symetryczny nastawnik prądu przemiennego, gdyż z punktu widzenia generowania har-

monicznych prądu stanowi on największe zagrożenie dla niskonapięciowej elektroenergetycznej sieci zasilającej. Schemat połączeń rozpatrywanego nastawnika trójfazowego pokazano na rys. 9. Kąty wyzwalań tyrystorów  $\alpha$  muszą spełniać ściśle określone zależności, które pokazano na rys. 10. W rozważaniach założono również, że  $R_s + R_{ob} = R \gg X_s$ .



Rys. 9. Schemat połączeń trójfazowego nastawnika prądu przemiennego



Rys. 10. Przebiegi napięć i prądów dla trójfazowego nastawnika prądu przemiennego

Prądy  $i_a$ ,  $i_b$ ,  $i_c$  płynące w poszczególnych fazach sieci zasilającej spełniają warunek  $f(\vartheta) = -f(\vartheta + 180^\circ)$ . Wykorzystując zatem wzory (14) i (15) można wyrazić je następującymi zależnościami:

$$\begin{aligned} i_a &= \sum_{k=1}^{k=n} I_k(\alpha) \sin[k(\vartheta + 120^\circ) + \varphi_{ik}], \\ i_b &= \sum_{k=1}^{k=n} I_k(\alpha) \sin(k\vartheta + \varphi_{ik}), \\ i_c &= \sum_{k=1}^{k=n} I_k(\alpha) \sin[k(\vartheta - 120^\circ) + \varphi_{ik}]. \end{aligned} \quad (19)$$

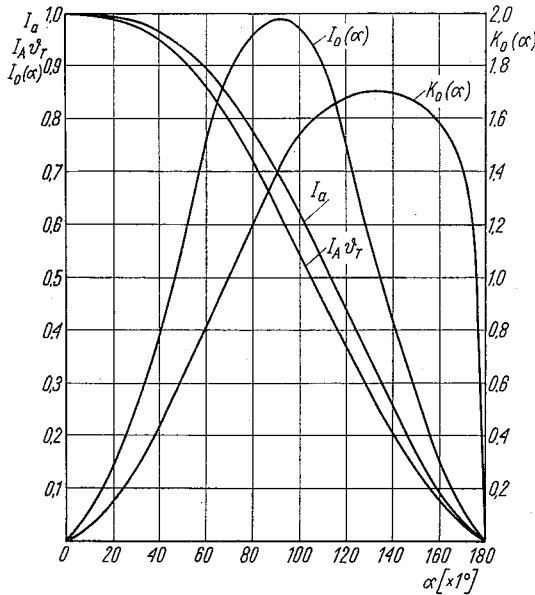
Prąd  $i_0$  płynący w przewodzie zerowym można określić na podstawie równań (19). Wyniesie on

$$i_0 = 3I_3(\alpha) \sin(3\vartheta + \varphi_{i3}) + 3I_9(\alpha) \sin(9\vartheta + \varphi_{i9}) + \dots \quad (20)$$

Prąd  $I_0(\alpha)$  płynący w przewodzie zerowym i wyrażony w wartościach maksymalnych na podstawie wzoru (15) można określić wzorem

$$I_0(\alpha) = 3 \sqrt{\sum_{k=3}^{k=n} I_k^2(\alpha)}, \quad (21)$$

gdzie  $k = 3, 9, 15, \dots$



Rys. 11. Przebieg wartości względnych prądu  $I_a$  płynącego w przewodzie niskiego napięcia, prądu  $I_A \vartheta_T$  płynącego w przewodzie wysokiego napięcia, prądu  $I_0(\alpha)$  płynącego w przewodzie zerowym oraz stosunku  $K_0(\alpha)$  w zależności od kąta  $\alpha$

Można ten prąd wyrazić również interesującym stosunkiem  $K_0(\alpha)$ , wyrażającym stosunek prądu  $I_0(\alpha)$  do prądu płynącego w przewodzie fazowym

$$K_0(\alpha) = \frac{I_0(\alpha)}{\sqrt{2} I_s(\alpha)} \quad (22)$$

gdzie  $I_s(\alpha)$  — wartość skuteczna prądu zgodnie z wzorem (17).

Wartości maksymalne prądów  $I_a$ ,  $I_b$ ,  $I_c$ , które płyną w przewodach sieci niskonapięciowej są zatem

$$I_a = I_b = I_c = \sqrt{2} I_s(\alpha) = \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} I_k^2(\alpha)}, \quad (23)$$

gdzie  $k = 1, 3, 5, 7, 9, \dots$

Sieć niskonapięciowa zasilana jest najczęściej z sieci wysokonapięciowej przez transformator w połączeniu gwiazda-trójkąt, co powoduje eliminowanie trzecich harmoniczných prądu oraz ich wielokrotności w sieci wysokonapięciowej. W tym przypadku wartości maksymalne prądów  $I_a$ ,  $I_b$ ,  $I_c$  płynących w przewodach linii wysokonapięciowej widziane od strony linii niskonapięciowej będą

$$I_a \vartheta_T = I_b \vartheta_T = I_c \vartheta_T = \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} I_k^2(\alpha)}, \quad (24)$$

gdzie:

$$k = 1, 5, 7, 11, \dots,$$

$\vartheta_T$  — przekładnia transformatora.

Zależności  $K_0(\alpha)$ ,  $I_a$ ,  $\vartheta_T I_A$  zostały obliczone, a wyniki obliczeń przedstawiono graficznie na rys. 11. Największe procentowe zawartości harmoniczných w prądzie pobieranym z sieci zasilającej występują przy kątach  $\alpha = 120 \div 175^\circ$ . Bardzo duże wartości osiąga również prąd w przewodzie zerowym. Maksimum tego prądu występuje przy kącie  $\alpha = 90^\circ$  i stanowi prawie 100% prądu pobieranego z sieci zasilającej dla kąta  $\alpha = 0^\circ$ . Jednak powagę sytuacji wyjaśnia dopiero krotność prądu w przewodzie fazowym, która dla kąta  $\alpha = 140^\circ$  osiąga swoje maksimum wynoszące 1,6849. Zresztą jak wynika z rys. 11 wartość prądu w przewodzie zerowym już dla kąta  $\alpha = 65^\circ$  zaczyna przekraczać wartość prądu w przewodzie fazowym. Jeżeli założy się dodatkowo 25% asymetrii w tradycyjnym obciążeniu nieregulowanym, to prąd w przewodzie zerowym może osiągnąć wartość dwukrotnie większą niż w przewodzie fazowym.

## 6. WNIOSKI OGÓLNE

Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić co następuje.

a) Niskonapięciowe odbiorniki regulowane tyrystorami posiadają dla praktyki przemysłowej bardzo korzystne i zachęcające do szerokiego stosowania własności regulacyjne, jednak z punktu widzenia elektroenergetycznej sieci zasilającej są układami kłopotliwymi, gdyż pobierają zbyt duże harmoniczne prądu.

b) Procentowa zawartość poszczególnych harmoniczných prądu pobieranego z elektroenergetycznej sieci zasilającej przez jednofazowe prostowniki tyrystorowe oraz jednofazowe i trójfazowe nastawniki tyrystorowe, przyjmuje największe wartości dla obciążenia rezystancyjnego i to dla kątów  $\alpha = 120 \div 175^\circ$ . Kąty te bez zastosowania dodatkowych środków zaradczych należy uznać za tzw. kąty niepożądane.

c) Powszechne stosowanie powyższych układów tyrystorowych może wpłynąć na poważny wzrost prądu w przewodzie zerowym, który może doprowadzić do przegrzania i uszkodzenia tego przewodu.

d) W wyniku stosowania dużej ilości jednofazowych półokresowych prostowników sterowanych, może dojść do pojawienia się zbyt dużej składowej stałej prądu w sieci zasilającej, co może spowodować przesunięcie się punktu pracy rdzenia transformatora zasilającego.

e) Konieczne jest dalsze udoskonalanie elektronicznych układów wyzwalających tyrystory, gdyż w wyniku niesymetrycznego ich działania pojawiają się w elektroenergetycznej sieci zasilającej dodatkowo parzyste harmoniczne prądu.

f) Wzrost harmoniczných prądu w elektroenergetycznej sieci zasilającej może doprowadzić nawet do 100% harmonicznego spadku napięcia, co w efekcie spowoduje kilkuprocentowe zniekształcenie sinusoidy napięcia sieci. Przeciążeniu prądowemu mogą wówczas ulec odbiorniki typu pojemnościowego.

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. F. E. Gentry i inni, Tyrystory, półprzewodnikowe prostowniki sterowane, WNT, Warszawa 1969.
2. Thyristoren, Impulssteuergeräte, Baugruppen, AEG, Lieferprogramm 1967/68.
3. H. Geissing, R. Wagner, Umformung elektrischer Energie mit Thyristorstromrichten, Siemens Zeitschrift, t. 42, Nr 9, 1968.



4. E. Öhlund, Thyristorwechselrichter für unterbrechungslose Stromversorgung, ASEA Zeitschrift, Nr 11, 1966.
5. A. Kolbe i inni, Lichtsteuergeräte mit Thyristoren, Siemens Zeitschrift, H. 4, 1965.
6. G. Reibring, Thyristor Static Converters in Rolling Mills, ASEA Journal, Nr 12, 1964.
7. Z. Badziński, A. Kordus, Wyprowadzanie energii o napięciu stałym z generatorów magneto hydrodynamicznych do sieci elektroenergetycznej, Przegląd Elektrotechniczny, nr 8, 1967.
8. J. M. Peter, Wpływ półprzewodników na rozwój urządzeń oraz wyposażenia elektrycznych i elektronicznych, Materiały Konferencyjne „Dni Elektryki Francuskiej w Polsce”, SEP, Warszawa 1971.
9. H. J. Sheppard, Effets des dispositifs de controle a thyristors sur les reseaux de puissance, The Electricity Council, London SW1, 1966.
10. VII Internationale Konferenz für industrielle Energiewirtschaft Kiew 1972, Informationsbulletin, Kiew 1971.
11. Analizator napięć typu HAZ 1, ZZG INCO, Wrocław 1965.
12. J. Luciński, Układy tyrystorowe, WNT, Warszawa 1972.
13. Tyrystorowe zespoły napędowe typu TUN, Katalog APATOR, Toruń 1969.

A. HANDKE

# THEORETICAL AND EXPERIMENTAL ANALYSIS OF CURRENT HARMONICS CONSUMED BY SELECTED THYRISTOR SYSTEMS FROM POWER SUPPLY NETWORKS

## Summary

Here are given the results of theoretical and experimental analysis for monophasic semi-periodical and full-periodical control rectifier and monophasic and three-phase a. c. controller. In the analysis attention is paid to resistance load. The above are shown in the form of diagrams giving absolute values of amplitudes and values of percentage participations of particular current harmonics appearing in total current consumed from the power supply network depending on thyristor release angles. There are given the so called „undesirable angles” of release of thyristors.

A. HANDKE

# THEORETISCHE UND EXPERIMENTELLE ANALYSE HARMONISCHEN, AUS EINEM ELEKTROENERGETISCHEN VERSORGUNGSNETZ DURCH GEWÄHLTE THYRISTONISCHE SYSTEME ENTNOMMENEN STROMS

## Zusammenfassung

In diesem Artikel wurden die Ergebnisse einer Analyse harmonischen, aus einem elektroenergetischen Tiefspannungsnetz mit Nennspannung von 380/220 V durch gewählte thyristonische Systeme entnommenen Stroms dargestellt. Zur Durchführung der Analyse wurden folgende thyristonische Systeme gewählt: einphasiger gesteuerter Einweggleichrichter, einphasiger und dreiphasiger Wechselstromsteller. Auf den einzelnen Abbildungen werden graphische Aufzeichnungen in Diagrammform der auf Grund der Formeln erhaltenen Verläufe von absoluten harmonischen Stromwerten sowie deren prozentueller Anteile am ganzen, aus dem elektroenergetischen Versorgungsnetz entnommenen Strom in Abhängigkeit von den Thyristorauslöserwinkeln  $\alpha$  gezeigt. Es wurden deshalb obige Thyristorensysteme gewählt, weil sie besonders bei Wirklast — aus dem elektroenergetischen Versorgungsnetz Ablenkströme von ziemlich höher Stromstärke entnehmen können. Diese Ablenkströme verursachen ihrerseits wieder eine Verformung der Sinusoide der Stromspannung. Diese Systeme zeigen auch manche gemeinsame Eigenschaften hinsichtlich der Generation von harmonischen Strömen.

А. ХАНДКЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ГАРМОНИК  
ТОКА ПИТАНИЯ НЕКОТОРЫХ ТИРИСТОРНЫХ СИСТЕМ ПИТАНИЯ  
ИЗ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СЕТИ

## Р е з ю м е

Приведены результаты теоретического и экспериментального анализа для однофазного однополупериодного и двухполупериодного управляемого выпрямителя, также для однофазного и трехфазного регулятора переменного тока. Анализ проведен для омической нагрузки. Результаты анализа поданы на рисунках в функциональной зависимости от угла зажигания тиристорov. Поданы также „нежелательные углы” зажигания тиристорov с точки зрения электроэнергетической питающей сети.

## TREŚĆ

|                                                                                                                                                                       |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| M. Tadeusiewicz: Obliczanie obwodów elektrycznych zawierających oporniki nieliniowe . . .                                                                             | 255 |
| H. Mroczek: Analiza warunków pracy tranzystorowego układu opóźniającego o dużych czasach opóźnienia . . . . .                                                         | 267 |
| F. Kamiński: Zarys teorii syntezy filtrów elektromechanicznych i mikrofalowych o strukturze regularnej . . . . .                                                      | 295 |
| A. Kusy: Pomiar właściwości szumowych warstw rezystywnych Pd/PdO/Ag za pomocą miernika typu Quan Tech . . . . .                                                       | 313 |
| M. Osiński: Elektromagnetyczna teoria promieniowania laserów złączowych . . . . .                                                                                     | 331 |
| A. Albicki: Minimalizacja liczby stanów automatów skończonych . . . . .                                                                                               | 359 |
| A. Lizoń: Ocena wpływu sygnału zakłócającego na pomiar prędkości metodą dopplerowską . .                                                                              | 389 |
| J. Gieras: Samohamowność dwufazowych silników indukcyjnych o masowym wirniku ferromagnetycznym . . . . .                                                              | 397 |
| A. Handke: Teoretyczna oraz doświadczalna analiza harmonicznych prądu pobieranych przez wybrane układy tyrystorowe z elektroenergetycznej sieci zasilającej . . . . . | 409 |

## CONTENTS — TABLE DES MATIÈRES — INHALT

|                                                                                                                                                                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| M. Tadeusiewicz: Calculation of Electrical Networks Which Include Non-Linear Resistors<br>Berechnung von elektrischen Kreisen mit nichtlinearen Widerständen. . . . .                                       | 265 |
| H. Mroczek: The Analysis of Long Time Delay Transistor Circuit . . . . .                                                                                                                                    | 293 |
| Analyse de conditions de travail d'un système transistorisé de décalage à long temps du retard<br>Analyse von Dimensionierungsbedingungen einer Transistorschaltung bei langen Verzögerungszeiten . . . . . | 293 |
| F. Kamiński: Outline of the Theory of the Regular-Structure Mechanical and Microwave Filter Synthesis . . . . .                                                                                             | 310 |
| Le précis de la théorie de la synthèse de filtres électromécaniques et à hyperfréquence à structure régulière . . . . .                                                                                     | 311 |
| Entwurf einer Synthesentheorie mechanischer und Mikrowellenfilter mit regulärer Struktur . .                                                                                                                | 311 |
| A. Kusy: Measurement of Noise Properties of Pd/PdO/Ag Films by Quan Tech Type Meter . .                                                                                                                     | 328 |
| Bemessung von Rauscheigenschaften der Pd/PdO/Ag-Widerstandsschichten mittels Messgerät Typ Quan Tech . . . . .                                                                                              | 328 |
| M. Osiński: Electromagnetic Theory of Injection Laser Radiation . . . . .                                                                                                                                   | 357 |
| Théorie électromagnétique de la radiation du laser semiconducteur . . . . .                                                                                                                                 | 358 |
| Elektromagnetische Theorie der Injektionslaserstrahlungen . . . . .                                                                                                                                         | 358 |
| A. Albicki: State Minimization of Automata . . . . .                                                                                                                                                        | 387 |
| La minimalisation de la quantité des états de l'automate . . . . .                                                                                                                                          | 387 |
| Reduktion der Zahl innerer Automatenzustände . . . . .                                                                                                                                                      | 387 |
| A. Lizoń: Analysis of Disturbing Signal Influence upon the Velocity Measurement with Doppler Method . . . . .                                                                                               | 395 |
| Beurteilung des störenden Signaleinflusses auf die Geschwindigkeitsmessungen mittels Doppler-Methode . . . . .                                                                                              | 396 |
| J. Gieras: The Selfbreaking Properties of Two-Phase Induction Motors with Solid Ferromagnetic Rotor . . . . .                                                                                               | 406 |
| L'autofreinage des moteurs asynchrones biphasés à massif ferromagnétique rotor . . . . .                                                                                                                    | 406 |
| Selbstbremsungsverhältnisse von Zweiphasenmotoren mit massivem ferromagnetischem Läufer .                                                                                                                   | 407 |

|                                                                                                                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| A. H a n d k e: Theoretical and Experimental Analysis of Current Harmonics Consumed by Selected Thyristor Systems from Power Supply Networks . . . . .                  | 421 |
| Theoretische und experimentelle Analyse harmonischen, aus einem elektroenergetischen Versorgungsnetz durch gewählte thyristonische Systeme entnommenen Stroms . . . . . | 421 |

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| М. Та де у с е в и ч: Расчет электрических цепей с нелинейными резисторами . . . . .                                                                        | 266 |
| Г. М р о ч е к: Анализ условий работы транзисторной схемы замедления реализующей большие выдержки времени . . . . .                                         | 294 |
| Ф. Ка м и н ь с к и: Очерк теории синтеза электромеханических и микроволновых фильтров с регулярной структурой . . . . .                                    | 311 |
| А. Ку с ы: Измерение шумовых свойств резистивных пленок Pd/PdO/Ag прибором типа Quan Tech . . . . .                                                         | 329 |
| М. О с и н ь с к и: Электромагнитная теория излучения инжекционного лазера . . . . .                                                                        | 358 |
| А. А ль б и ц к и: Минимализация числа внутренних состояний автоматов . . . . .                                                                             | 387 |
| А. Л и з о н ь: Оценка влияния сигнала помех на измерение скорости движения при использовании эффекта Доплера . . . . .                                     | 396 |
| Я. Г е р а с: Критерия отсутствия самохода двухфазных асинхронных двигателей с массивным ферромагнитным ротором . . . . .                                   | 407 |
| А. Х а н д к е: Теоретический и экспериментальный анализ гармоник тока питания некоторых тиристорных систем питания из электроэнергетической сети . . . . . | 422 |

POLSKA AKADEMIA NAUK  
KOMITET ELEKTRONIKI

# ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XX · ZESZYT 3

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE  
WARSZAWA 1974

## KOMITET REDAKCYJNY

*Redaktor Naczelny*

PROF. DR WITOLD NOWICKI

*Członkowie*

PROF. TADEUSZ CHOLEWICKI, PROF. EUGENIUSZ JEZERSKI,  
PROF. DR WITOLD ROSIŃSKI, PROF. DR STANISŁAW RYŻKO

*Sekretarz*

JANINA MATHEISEL

### ADRES REDAKCJI

00-661 Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1  
Instytut Teleelektroniki, Gmach Elektroniki  
pokój 343, tel, 21-007-564 oraz 25-09-10

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE  
Warszawa, Miodowa 10

|                                         |                                      |
|-----------------------------------------|--------------------------------------|
| Nakład 700 (580 + 120)                  | Oddano do składania 4.III.1974r.     |
| Ark. wyd. 13,75 ark. druk. 11,25        | Podpisano do druku w czerwcu 1974 r. |
| Papier druk. m/gł kl. III, 80 g, 70×100 | Druk ukończono w lipcu 1974 r.       |
| Zamówienie nr 413/74 W—99               | Cena zł 40.—                         |

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

## Realizacja transmitancji drugiego stopnia przez zastosowanie integratorów napięciowych

ADAM SKIBA (GDAŃSK)

*Instytut Technologii Elektronicznej Politechniki Gdańskiej*

*Otrzymano 21.5.1973*

W artykule rozpatrzono możliwość realizacji transmitancji napięciowej drugiego stopnia dowolnego typu (tzn. dolnoprzepustowej, górnoprzepustowej, środkowoprzepustowej), posiadającej parę zespolonych sprzężonych zer o teoretycznie dowolnej lecz skończonej dobroci. Przyjmując za układy wyjściowe sieci złożone z dwóch integratorów nie odwracających fazy (dodatnich) [1], lub też z integratora nie odwracającego i odwracającego fazę (ujemnego) stwierdzono, że możliwe jest uzyskanie przy ich pomocy dowolnej transmitancji drugiego stopnia, jeśli oba wzmacniacze sterowane są równocześnie.

Metodę syntezy zilustrowano przykładowo za pomocą realizacji jednej z transmitancji filtru dla telegrafii 50-bodowej na częstotliwość 3180 Hz. Osiągnięte wyniki potwierdzają celowość stosowania opisywanych sieci do realizacji funkcji drugiego stopnia o dobroci biegunów od kilkudziesięciu do stu.

Ponadto w pracy podano szereg wskazówek praktycznych przydatnych do projektowania tego typu układów.

### 1. WSTĘP

Przy realizacji urządzeń elektronicznych wynika często konieczność opracowania układów filtrujących. Układy takie dotychczas z reguły wykonywane jako filtry biernie  $LC$  ostatnio coraz częściej realizuje się w postaci  $RC$  zawierających elementy aktywne.

Transmitancje tych układów, definiowane jako stosunek sygnału (napięcia lub prądu) wyjściowego do wejściowego można przedstawić w postaci iloczynu funkcji drugiego stopnia i ewentualnie pierwszego. W realizacji układowej odpowiada to utworzeniu łańcucha ogniów  $RC$  z elementami czynnymi, z których każde odtwarza jedną z funkcji kwadratowych. W przypadku realizacji funkcji o dużej dobroci biegunów (filtry o dużej selektywności) jako elementy czynne stosować należy wzmacniacze operacyjne [2, rozdz. 8].

Oczywiście względy ekonomiczne (mimo malejących cen wzmacniaczy operacyjnych) nakazują, aby ich liczba była w układzie jak najmniejsza. Z punktu widzenia niezawodności, a także stabilności układu szczególnie przy dużym gradiencie temperatury otoczenia niepożądane jest, aby występowało w nim dużo elementów pasywnych. Warunkiem tej sta-

bilności jest bowiem zachowanie równych co do wartości, a przeciwnych co do znaku współczynników temperaturowych wszystkich oporników i kondensatorów występujących w układzie [2].

Znany układ Kêrvina, Huelsmana, Newcomba [1] składający się ze wzmacniacza różnicowego, dwóch integratorów ujemnych i sumatora jest układem mocno rozbudowanym i stosowanie jego już przy tych dobrociach byłoby niecelowe ze względów ekonomicznych. Warunkiem poprawnej pracy powyższego układu jest wysoka jakość wzmacniaczy operacyjnych, gdyż w realizacjach praktycznych układ ten ma tendencje do wzbudzenia. Ze względów wyżej wymienionych, a także z uwagi na trudności w strojeniu niewygodne są wszystkie rozwiązania, w których do uzyskania zer transmisyjnych stosuje się mostek  $RC$ .

W artykule przebadano możliwość realizacji transmitancji drugiego stopnia za pomocą powszechnie znanych integratorów napięciowych dodatnich lub ujemnych. Szczególnie przydatny w praktyce okazał się układ złożony z łańcuchowego połączenia stopni, które w konwencjonalnym połączeniu były integratorami dodatnimi i ujemnymi. Pozwala on realizować funkcję górnoprzepustową oraz funkcję z zerami usytuowanymi dowolnie względem biegunów. Dobroć tych zer jest dowolna lecz skończona i zdeterminowana jedynie rozrzutem elementów. Opisany niżej układ posiada następujące zalety:

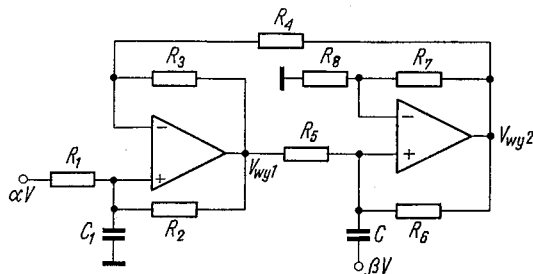
- a) mała czułość — przy rozrzucie elementów rzędu dobroci bieguna, czułości współczynników funkcji na elementy pasywne są bliskie jedności,
- b) łatwość strojenia — zmiany jednego wybranego elementu powodują zmiany jednego współczynnika funkcji bez wpływu na pozostałe,
- c) stosunkowo niewielka ilość elementów: 2 kondensatory i 8 oporników — co ułatwia jego techniczne wykonanie i gwarantuje dużą stabilność przy zmianach temperatury.

## 2. REALIZACJA TRANSMITANCJI DRUGIEGO STOPNIA NA DWÓCH INTEGRATORACH DODATNICH

Rozpatrzmy układ przedstawiony na rys. 1.

Transmitancja napięciowa pierwszego stopnia tego układu ( $G_5 = 0$  opornik  $R_4$  uziemiony) jest równa:

$$T_I = \frac{G_1(G_3 + G_4)}{sC_1G_3 + G_1G_3 - G_2G_4}, \quad (2.1)$$



Rys. 1. Ogniwo filtru na dwóch integratorach dodatnich



czyli w przypadku równowagi mostka oporowego stopień ten jest układem całkującym nie odwracającym fazy. Odpowiednia transmitancja drugiego stopnia tego układu ( $G_4 = 0$ , opornik  $R_5$  uziemiony) jest równa:

$$T_{II} = \frac{(G_7 + G_8)sC}{sCG_7 + G_5G_7 - G_6G_8}, \quad (2.2)$$

a zatem w przypadku równowagi mostka stopień ten jest wzmacniaczem napięciowym o wzmacnieniu  $\left(1 + \frac{G_8}{G_7}\right)$ .

Współczynniki  $\alpha \leq 1$  i  $\beta \leq 1$  oznaczają, że napięcie wejściowe  $V$  może być redukowane przez dzielniki napięciowe do wartości  $\alpha V$ , lub  $\beta V$ .

Transmitancje napięciowe całego układu wynoszą odpowiednio:

$$T_1 = \frac{V_{wy1}}{V} = \frac{\beta G_4}{G_3} \left(1 + \frac{G_8}{G_7}\right) \frac{s^2 + s \left( \frac{G_1 + G_2}{C} - \frac{G_3 + G_4}{G_7 + G_8} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{G_1 G_7}{G_4 C} \right)}{s^2 + s \left[ \frac{G_5 - G_6}{C_1} + \frac{G_1 G_3 - G_2 G_4}{G_3 C} + \frac{G_4 G_5 (G_7 + G_8)}{G_3 G_7 C_1} \right] + \frac{\alpha G_1 G_7 (G_6 - G_5) (G_3 + G_4)}{\beta G_4 C_1 C (G_7 + G_8)} + \frac{(G_1 + G_2) (G_7 + G_8) G_4 G_5}{G_3 G_7 C_1 C} + \frac{(G_5 - G_6) (G_1 G_3 - G_2 G_4)}{G_3 C_1 C}} \quad (2.3)$$

$$T_2 = \frac{V_{wy2}}{V} = \beta \left(1 + \frac{G_8}{G_7}\right) \frac{s^2 + s \frac{G_1 G_3 - G_2 G_4}{G_3 C} + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{G_1 G_5 (G_3 + G_4)}{G_3 C_1 C}}{s^2 + s \left[ \frac{G_5 - G_6}{C_1} + \frac{G_1 G_3 - G_2 G_4}{G_3 C} + \frac{G_4 G_5 (G_7 + G_8)}{G_3 G_7 C_1} \right] + \frac{(G_5 - G_6) (G_1 G_3 - G_2 G_4)}{G_3 C_1 C} + \frac{(G_1 + G_2) (G_7 + G_8) G_4 G_5}{G_3 G_7 C_1 C}} \quad (2.4)$$

Jak widać ze wzoru (2.4) układ ten daje możliwość realizacji funkcji posiadającej parę zer leżących na osi  $j\omega$ , których położenie można regulować za pomocą dzielnika napięciowego (współczynnik  $\alpha$ ).

Jeżeli założymy  $G_1 G_3 = G_2 G_4$  i  $\beta = 1$ , to funkcja  $T_2$  przyjmie postać:

$$T_2 = \left(1 + \frac{G_8}{G_7}\right) \frac{s^2 + \frac{\alpha G_1 G_5 (G_3 + G_4)}{G_3 C_1 C}}{s^2 + s \left[ \frac{G_5 - G_6}{C_1} + \frac{G_4 G_5 (G_7 + G_8)}{G_3 G_7 C_1} \right] + \frac{(G_1 + G_2) (G_7 + G_8) G_4 G_5}{G_3 G_7 C_1 C}} \quad (2.5)$$

Poważną wadą przedstawionego układu jest trudność jego zestrojenia. Zmiany położenia biegunów i ich dobroci można uzyskać tylko w sposób równoczesny, tzn. przez jednoczesną zmianę admitancji  $G_5$  i  $G_6$ , co w praktyce jest dosyć uciążliwe. Ponadto zmiany położenia zer transmitancji wpływają na zmianę poziomu stałego napięcia wyjściowego, co stanowi kolejny mankament.

Łatwo zauważyć, że po uziemieniu opornika  $R_1$  i przy sterowaniu wyłącznie stopnia drugiego ( $\alpha = 0$ ) układ staje się filtrem górnoprzepustowym, a po uziemieniu kondensa-

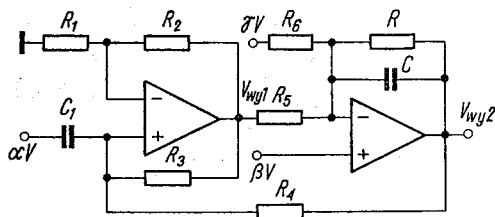
tora w stopniu drugim i sterowaniu stopnia pierwszego — filtrem dolnoprzepustowym (jak przedstawiono w [1]). Ze względu na wymienione wady realizacja transmitancji stopnia drugiego w oparciu o dwa integratory dodatnie jest w praktyce bardzo trudna.

### 3. REALIZACJA TRANSMITANCJI DRUGIEGO STOPNIA NA INTEGRATORZE DODATNIM I UJEMNYM

Rozpatrzmy układ przedstawiony na rys. 2. Stopień drugi tego układu ( $G_4 = 0$ ,  $R_5$  — uziemiony) charakteryzuje się następującą transmitancją:

$$T_{II} = \frac{G_4}{G+sC}; \quad (3.1)$$

stąd wynika, że układ ten jest układem całkującym, nie odwracającym fazy. Transmitancja stopnia pierwszego jest analogiczna do funkcji określonej wzorem (2.2).



Rys. 2. Uniwersalne ogniwo filtru na integratorze dodatnim i ujemnym

Jak widać, użyte w podtytułach określenia „integrator dodatni lub ujemny” są w tym przypadku nieprecyzyjne. Stopień pierwszy jest bowiem układem całkującym nie odwracającym fazy tylko dla stopnia drugiego, a drugi — układem całkującym odwracającym fazę tylko dla stopnia pierwszego (czyli odpowiednio integratorem dodatnim i ujemnym), a nie dla napięć sterujących.

Transmitancje napięciowe obu tych układów opisane są zależnościami:

$$T_1 = \frac{V_{wy1}}{V} = \alpha \left( 1 + \frac{G_1}{G_2} \right) \frac{s^2 + s \left[ \frac{G}{C} + \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{G_4}{C_1} \right] + \frac{\beta(G+G_5+G_6)G_4}{\alpha G_1 C} - \frac{\gamma \cdot G_4 G_6}{\alpha C_1 C}}{s^2 + s \left[ \frac{G}{C} + \frac{G_2 G_4 - G_1 G_3}{G_2 C_1} \right] + \frac{G(G_2 G_4 - G_1 G_3)}{G_2 C_1 C} + \frac{G_4 G_5 (G_1 + G_2)}{G_2 C_1 C}}, \quad (3.2)$$

$$T_2 = \frac{V_{wy2}}{V} = \frac{s^2 + s \left[ \frac{G+G_5+G_6-G_6 \cdot \gamma/\beta}{C} + \frac{G_2 G_4 - G_1 G_3}{G_2 C_1} - \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{G_5 (G_1 + G_2)}{G_2 C} \right] + \dots}{s^2 + s \left[ \frac{G}{C} + \frac{G_2 G_4 - G_1 G_3}{G_2 C_1} \right] + \frac{G(G_2 G_4 - G_1 G_3)}{G_2 C_1 C} + \frac{G_4 G_5 (G_1 + G_2)}{G_2 C_1 C} + \frac{(G_2 G_4 - G_1 G_3)(G+G_5+G_6-G_6 \cdot \gamma/\beta)}{G_2 C_1 C}}. \quad (3.3)$$

Zakładając  $G = 0$  i  $\gamma = 0$ , zależności te można odpowiednio przedstawić w postaci:

$$T_{1a} = \alpha \left( 1 + \frac{G_1}{G_2} \right) \frac{s^2 + s \frac{\beta}{\alpha} \frac{G_4}{C_1} + \frac{\beta G_4 (G_5 + G_6)}{\alpha G_1 C}}{s^2 + s \frac{G_2 G_4 - G_1 G_3}{G_2 C_1} + \frac{G_4 G_5 (G_1 + G_2)}{G_2 C_1 C}}, \quad (3.4)$$

$$T_{2a} = \beta \frac{s^2 + s \left[ \frac{G_5 + G_6}{C} + \frac{G_2 G_4 - G_1 G_3}{G_2 C_1} - \frac{\alpha}{\beta} \frac{G_5 (G_1 + G_2)}{G_2 C} \right] + \frac{(G_2 G_4 - G_1 G_3) (G_5 + G_6)}{G_2 C_1 C}}{s^2 + s \frac{G_2 G_4 - G_1 G_3}{G_2 C_1} + \frac{G_4 G_5 (G_1 + G_2)}{G_2 C_1 C}}. \quad (3.5)$$

Dzięki takiemu założeniu, częstotliwości biegunów funkcji są niezależnione od stanu zrównoważenia mostka. Transmitancja układu otrzymana na wyjściu drugim, jak to wynika ze wzoru (2.5), pozwala uzyskać zera na osi  $j\omega$ . Aby to otrzymać wystarczy dobrać dzielniki napięciowe tak, aby:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{G_2 (G_5 + G_6)}{G_5 (G_1 + G_2)} + \frac{G_2 C (G_2 G_4 - G_1 G_3)}{G_5 C_1 (G_1 + G_2)}. \quad (3.6)$$

Transmitancja układu na wyjściu pierwszym może posiadać parę zespolonych sprzężonych zer jedynie w lewej półpłaszczyźnie, a ich odległość od osi  $j\omega$  określona jest przez stałą czasową  $R_4 C_1$  oraz dzielniki  $\alpha$  i  $\beta$ .

Przedstawmy funkcje  $T_{1a}$  i  $T_{2a}$  w postaci:

$$T_{1a} = K \frac{s^2 + a_1 s + a_2}{s^2 + b_1 s + b_2}, \quad (3.7)$$

$$T_{2a} = \frac{s^2 + a_3 s + a_4}{s^2 + b_1 s + b_2}.$$

Czułości współczynników obu tych funkcji na zmiany elementów układu określone są następującymi zależnościami [1]:

$$\begin{aligned} S_{\beta}^{a_1} &= -S_{\alpha, R_4, C_1}^{a_1} = 1, \\ S_{\beta}^{a_2} &= -S_{\alpha, R_4, C, C_1}^{a_2} = 1, \quad S_{R_5}^{a_2} = -\frac{R_6}{R_5 + R_6}, \quad S_{R_6}^{a_2} = -\frac{R_5}{R_5 + R_6}, \\ S_{\beta}^{a_3} &= -S_{\alpha}^{a_3} = \frac{\alpha}{\beta a_3 l_2} \cdot \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right), \quad S_{C_1}^{a_3} = \frac{1}{a_3 l_1} \left( \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} - 1 \right), \\ S_C^{a_3} &= \frac{\alpha}{\beta a_3 l_2} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) - \frac{1}{a_3 l_2} \left( 1 + \frac{R_5}{R_6} \right), \quad S_{R_1}^{a_3} = -\frac{R_2 R_4}{R_1 R_3 a_3 l_1} + \frac{\alpha R_2}{\beta R_1 a_3 l_2}, \\ S_{R_2}^{a_3} &= \frac{\alpha R_2}{\beta R_1 a_3 l_2} - \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3 a_3 l_1}, \quad S_{R_3}^{a_3} = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3 a_3 l_1}, \quad S_{R_4}^{a_3} = -\frac{R_5}{a_3 R_2 l_1}, \\ S_{R_5}^{a_3} &= \frac{\alpha}{\beta a_3 l_2} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) - \frac{1}{a_3 l_2}, \quad S_{R_6}^{a_3} = -\frac{R_5}{R_6 a_3 l_2}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$S_{R_4}^{a_4} = \frac{1}{a_4 l_1 l_2} \left( 1 + \frac{R_5}{R_6} \right), \quad S_{R_5}^{a_4} = \frac{1}{a_4 l_1 l_2} \left( \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} - 1 \right),$$

$$S_{R_6}^{a_4} = \frac{R_5}{a_4 R_6 l_1 l_2} \left( \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} - 1 \right),$$

$$S_{C_4}^{b_1} = -1, \quad S_{R_4}^{b_1} = \frac{1}{b_1 l_1}, \quad S_{R_1, R_3}^{b_1} = -S_{R_2}^{b_1} = \frac{1}{b_1 l_1} - 1,$$

$$S_{R_4, R_5, C_1}^{b_2} = -1, \quad S_{R_1}^{b_2} = -S_{R_2}^{b_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

gdzie:

$$l_1 = R_4 C_1,$$

$$l_2 = R_5 C.$$

Łatwo zauważyć, że czułości  $S_{R_2, C_1}^{a_3} \rightarrow \infty$  przy  $a_3 \rightarrow 0$ , a zatem strojenie zer funkcji  $T_{1a}$  jest bardzo uciążliwe. Ponadto widać, że:

a) strojenie dobroci biegunów powoduje zmiany dobroci i częstotliwości zer,

b) strojenie dobroci zer powoduje zmianę ich częstotliwości. Z powyższych powodów realizacja transmitancji napięciowej posiadającej zera przy wykorzystaniu wyjścia drugiego jest praktycznie niemożliwa.

Rozpatrzmy teraz wyjście pierwsze. Ze wzoru (3.8) wynika, że czułości współczynników  $a_1$  i  $a_2$  funkcji  $T_{1a}$  na każdy z elementów pasywnych sieci są nie większe od jedności. Ze względów czułościowych daje więc ono możliwość uzyskania stabilnej transmitancji.

W celu określenia zależności między położeniem zer transmitancji a rozrzutem elementów przedstawmy współczynnik funkcji  $T_{1a}$  w postaci:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\beta}{l_1}, & b_1 &= \frac{1}{l_1} \left( 1 - \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} \right), \\ a_2 &= \frac{\beta}{l_1 l_2} \left( 1 + \frac{R_5}{R_6} \right), & b_2 &= \frac{1}{l_1 l_2} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Oznaczmy ponadto:

$$\frac{a_1}{b_1} = m, \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{f_z^2}{f_b^2} = k^2, \quad (3.10)$$

gdzie:

$f_z$  — częstotliwość zera transmitancji,

$f_b$  — częstotliwość bieguna transmitancji.

Oczywiście ze względu na to, że zwykle pożądana jest większa dobroć zer niż biegunów  $m$  winno być mniejsze od jedności.

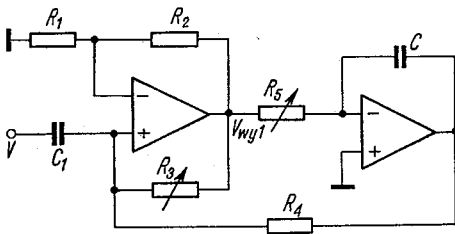
Z powyższych wzorów wynikają wartości dzielnika napięciowego i stosunku rezystancji  $R_5/R_6$ . Z analizy wzorów (3.8) i (3.11) otrzymuje się następujące wnioski przydatne przy projektowaniu układu:

1) aby czułości transmitancji na zmiany elementów mostka integratora były takie same, wartości oporności winny być identyczne, tzn.  $R_1 = R_2 = R_4$ ,

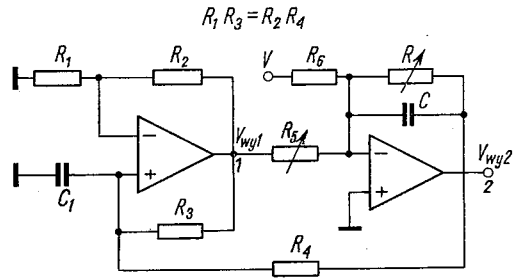
2) aby czułości funkcji na zmiany elementów mostka były jak najmniejsze, stała czasowa  $t_1$ , powinna być jak największa, a rozstrojenie mostka jak najmniejsze (czułości na zmiany pozostałych elementów układu nie zależą od stałej czasowej),

3) stałą czasową  $t_2$  (przy dużych dobrociach biegunów  $t_2 \cong 2/t_1$ ) należy dobrać na tyle małą, aby mniejsza z pojemności  $C$  i najmniejsza z występujących w układzie oporników  $R_6$  miały praktycznie realizowane wartości.

Tak więc otrzymanie układu o charakterystykach małowzrostłych na zmiany elementów sprowadza się do technicznych możliwości realizacji elementów o dużym rozrzucie. W praktyce bez trudu można realizować transmitancję o dobroci  $Q = 100$ .



Rys. 3. Filtr górnoprzepustowy na integratorze dodatnim i ujemnym



Rys. 4. Filtr dolnoprzepustowy (1) i środkowoprzepustowy (2) na integratorze dodatnim i ujemnym

Zauważmy, że funkcja  $T_{1a}$  może być transmitancją filtra górnoprzepustowego, jeżeli  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0$  i  $\alpha = 1$  (ponieważ oporność  $R_6$  nie wpływa na charakterystykę układu można też założyć  $G_6 = 0$ ). Odpowiedni układ filtra górnoprzepustowego pokazano na rys. 3.

W przypadku, gdy  $\beta = 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = 1$ , mostek  $R_1, R_2, R_3, R_4$  jest w równowadze oraz gdy  $G \neq 0$  otrzymujemy układ pokazany na rys. 4[1], w którym filtr dolnoprzepustowy uzyskuje się na wyjściu pierwszym, a środkowoprzepustowy na wyjściu drugim.

#### 4. PRZYKŁAD

Należy zrealizować transmitancję napięciową  $T(s)$  będącą jedną z funkcji aproksymujących charakterystykę filtra nadawczego dla telegrafii 50-bodowej dla kanału 23 ( $f_0 = 3180$  Hz)

$$T(s) = \frac{s^2 + 0,9315}{s^2 + 0,0173s + 1,0329}.$$

Przyjmujemy do realizacji:  $T'(s) = \frac{s^2 + 0,007s + 0,9315}{s^2 + 0,0173s + 1,0329}$ , a więc  $Q_b = 59,7$

i  $Q_z = 133$ .

Ze wzoru (3.4) wynikają następujące związki:

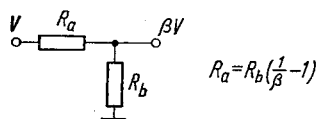
$$\frac{\beta}{\alpha R_4 C_1} = 0,007, \quad \frac{\beta}{\alpha R_4 R_5 C_1 C} \left(1 + \frac{R_5}{R_6}\right) = 0,9315,$$

$$\frac{1}{R_4 C_1} \left(1 - \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3}\right) = 0,0173, \quad \frac{1}{R_4 R_5 C_1 C} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = 1,0329.$$

Zakładając  $\alpha = 1$ ,  $C = 1$ ,  $R_1 = R_2 = R_4 = 10$ , obliczamy:

$$R_3 = 12,092 \quad \beta = 0,07.$$

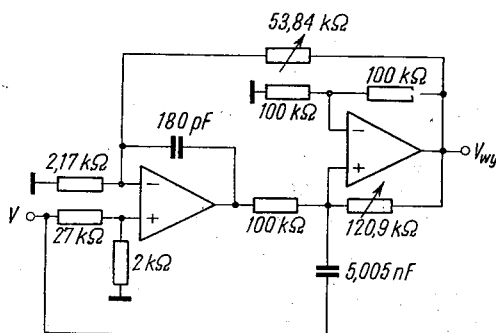
Przyjmujemy  $R_0 = 10 \text{ k}\Omega$ , czyli  $C_0 = 1/\omega_0 R_0 = 5,005 \text{ nF}$ . Jeżeli np.  $C_1 = 180 \text{ pF}$ , czyli  $C_1 = 0,03569 C_0$ , to  $R_5 = 5,384$  i  $R_6 = 0,217$ . Dzielnik oporowy (rys. 5) dobieramy



Rys. 5. Dzielnik napięciowy

tak, aby wzmacniacz operacyjny w pierwszym stopniu pracował w stanie zrównoważenia dla prądu stałego.

Ostateczny schemat układu pokazano na rys. 6. Czułość współczynników transmitancji na zmiany poszczególnych elementów układu przedstawione są w następującej tablicy:



Rys. 6. Schemat ogniwa filtru dla telegrafii 50-bodowej ( $f_0 = 3180 \text{ Hz}$ )

|                                                    | $R_a$ | $R_b$ | $C$  | $C_1$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_4$ | $R_5$ | $R_6$ |
|----------------------------------------------------|-------|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $S^{a_1}$                                          | -0,93 | +0,93 | 0    | -1,0  | 0     | 0     | 0     | -1,0  | -0    | 0     |
| $S^{fz}$                                           | -0,46 | +0,46 | -0,5 | -0,5  | 0     | 0     | 0     | -0,5  | -0,03 | -0,47 |
| $S^{b_1}$                                          | 0     | 0     | 0    | -1,0  | +4,78 | -4,78 | +4,78 | -5,78 | 0     | 0     |
| $S^{fb}$                                           | 0     | 0     | -0,5 | 0,5-  | -0,25 | +0,25 | 0     | -0,5  | -0,5  | 0     |
| $S^{fz} = 0,5 S^{a_2}, \quad S^{fb} = 0,5 S^{b_2}$ |       |       |      |       |       |       |       |       |       |       |

Jak widać z podanych wyników układ jest stosunkowo mało czuły, każdy ze współczynników jego transmitancji może być zmieniony praktycznie niezależnie od pozostałych, co ułatwia jego zestrojenie. Rozrzut elementów jest rzędu dobroci bieguna i zapewnia dobroć zera dwukrotnie większą niż bieguna.

Uzyskane wyniki potwierdzają celowość stosowania takich sieci przy realizacji transmitancji o dobroci rzędu stu.

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. L. Huel s m a n, Active Filters: Lumped, Distributed, Integrated, Digital and Parametric, McGraw-Hill Book Co., New York 1970.
2. Burr - B r o w n, Operational Amplifiers Design and Applications, McGraw-Hill Book Co., New York 1971.

A. SKIBA

## REALISATION OF THE SECOND ORDER VOLTAGE TRANSFER FUNCTION USING VOLTAGE INTEGRATORS

## S u m m a r y

In this paper the possibility of realization of the second order voltage transfer function of arbitrary type: low-pass, high-pass, bandpass and containing one pair of transmission zeroes with finite  $Q$  value has been considered. Assuming the structures consisting of positive and negative integrators given in [1] the possibility of achieving any second order transfer function by means of those has been ascertained. It acts when both operational amplifiers are controlled simultaneously.

In the paper some guidelines useful for design practice are given. The method has been illustrated with an example of realization of the transfer function for telegraphy system. The obtained results confirm suitability of the use of described networks for realization of second order transfer functions with poles  $Q$  value up to a hundred.

A. SKIBA

## REALISATION DE FONCTION DE TRANSFERT DEUXIÈME DÉGRÉ PAR L'USAGE D'INTÉGRATEUR DE TENSION

## R è s u m é

On analyse les possibilités de réalisation des transmittances à tension 2<sup>ème</sup> degré de type: passe-bas, passe-haut, passe-bande et aussi possédant une paire de zéros complex conjugués ayant facteur de surtension fini. En s'appuyant sur les circuits caractérisés à [1] construits à l'aide de 2 intégrateurs positifs ou de 1 intégrateur positif et 1 intégrateur négatif on a dérivé la méthode de création de la transmittance quelconque si les deux op-amp sont contrôlés simultanément.

On a donné des indications pratiques pour les projets des circuits de ce type.

La méthode a été illustrée par l'exemple de filtre télégraphique pour le fréquence 3180 Hz. Les résultats obtenus confirment l'usage des circuits décrits pour la réalisation des facteurs de surtension située parmi 10 et 100.

A. SKIBA

## REALISIERUNG EINER ÜBERGANGSFUNKTION ZWEITEN GRADES MITTELS ANWENDUNG VON SPANNUNGSINTEGRATOREN

## Z u s a m m e n f a s s u n g

In diesem Artikel wird die Möglichkeit der Realisierung von Übergangsfunktionen zweiten Grades, Typ Tief-, Hoch- oder Bandpaß besprochen. Auf Grund der in [1] gegebenen Integratorennetze sind die Möglichkeiten der Realisierung von Übergangsfunktionen zweiten Grades bei gleichzeitiger Steuerung beider Operationsverstärker dargestellt worden. An Hand eines Beispiels eines 50 bd-Telegraphennetzes wurden die Dimensionierungsgrundlagen für den Entwurf einer solchen Spannungsübergangsfunktion mit Gütegrad bis hundert gegeben.

А. СКИБА

РЕАЛИЗАЦИЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ  
ПРИМЕНЕНИИ ИНТЕГРАТОРОВ НАПРЯЖЕНИЯ

## Р е з ю м е

В статье рассмотрена возможность реализации передаточной функции по напряжению второго порядка произвольного типа: нижних и верхних частот, полосовых, а также имеющих пару сопряженных, комплексных нулей с теоретически произвольной но конечной добротностью. Исходя из приведенных в [1] схем, состоящих из двух интеграторов не изменяющих фазы (положительных) или интегратора не изменяющего и изменяющего его фазу (отрицательного), констатирована возможность получения при их помощи произвольной функции передачи второго порядка при условии одновременного управления обеими операционными усилителями.

В труде приведен ряд практических указаний для проектирования схем этого типа. Метод синтеза иллюстрирован примером реализации одной из передаточных функций фильтра для телеграфии 50 бодов на частоте 3180 Гц. Полученные результаты подтверждают целесообразность применения описываемых схем для реализации функции второго порядка с добротностью полюсов от нескольких десятков до ста.



## Variational Properties of the Integral Power in DC Nonlinear Networks

MAŁGORZATA MAREK-SADOWSKA (WARSZAWA)

*Instytut Technologii Elektronowej Politechniki Warszawskiej*

*Otrzymano 26.6.1973*

For general nonlinear networks not all solutions of *KVL* or *KCL* can be observed as there exist operating points which are unstable. But when we are solving the set of *KVL* (*KCL*) equations we are never sure that we will get an observable operating point. Usually when we know the parasitics that exist in the network, we know the properties of the observable operating points. The theorems presented here show the way of finding the desired operating points. All the results presented here are very convenient in building numerical algorithms.

### 1. INTRODUCTION

In this paper there are considered some properties of operating points of *DC* nonlinear networks. Three theorems about the relationship between the  $\Phi$  — function [1] for the discussed networks and certain kinds of its operating points are presented.

The main objective in this paper is to unify and generalize some of results reported in [1] through the introduction of precisely defined kinds of operating points. The terminology stable and unstable operating points is not used because in the author's opinion it is impossible to discuss the stability of operating points in a general nonlinear network without some knowledge of parasitics.

The theorems mentioned here show how to build numerical algorithms of finding desired operating points for quite a big class of nonlinear networks.

### 2. NOTATION AND TERMINOLOGY

We use the following notation throughout the paper:

$m$  — denotes the number of all nodes,

$n$  — denotes the number of all these nodes the voltages of which with regard to the reference node are to be found,

$p$  — denotes all these loop currents which are to be found,

$k$  — denotes the number of all branches.

All identifiers with two low indices denote that this denotation is concerned with element, which connects nodes having these numbers that are shown by the indices. One low index denotes the loop number and the top indices show the branch number. One low index in brackets denotes the node number.

According to this notation every tree contains  $(m-1)$  branches and every maximal set of independent loops contains  $(k-m+1)$  loops.

Let  $x^* = (x_{(1)}^*, x_{(2)}^*, \dots, x_{(n)}^*)$  denote the node voltages of the operating point.

### Definition 1

When the sum of static conductivities of all elements connected with  $j$ -th node is positive in the operating point  $x^*$  then  $x^*$  is said to be voltage-proper (improper) with regard to  $x_{(j)}^*$  if and only if the sum of dynamic conductivities of all elements connected with  $j$ -th node in this point is positive (negative).

When the sum of static conductivities of all elements connected with  $j$ -th node is negative in the operating point  $x^*$  then  $x^*$  is said to be voltage proper (improper) with regard to  $x_{(j)}^*$  if and only if the sum of dynamic conductivities of all elements connected with  $j$ -th node in this point is negative (positive).

If the  $j$ -th node is connected with an ideal voltage source then all elements connected with both nodes of this source must be taken into consideration.

### Definition 2

The operating point is said to be voltage-proper (improper) if  $1 \leq j \leq n$  it is voltage-proper (improper) with regard to  $x_{(j)}^*$ . When the operating point is neither voltage-proper nor voltage-improper then it is said to be mixed in the voltage sense.

Let  $y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_p^*)$  denote the loop currents of the operating point.

### Definition 3

When the sum of resistances of all of elements in  $j$ -th loop is positive in the operating point  $y^*$  then  $y^*$  is said to be current-proper (improper) with regard to  $y_j^*$  if and only if the sum of dynamic resistances of all elements in  $j$ -th loop in this point is positive (negative).

When the sum of static resistances of all elements in  $j$ -th loop is negative in the operating point  $y^*$  then  $y^*$  is said to be current proper (improper) with regard to  $y_j^*$  if and only if the sum of dynamic resistances of all elements in  $j$ -th loop in this point is negative (positive).

### Definition 4

The operating point is said to be current-proper (improper) if  $1 \leq j \leq p$  it is current-proper (improper) with regard to  $y_j^*$ . When the operating point is neither current-proper nor current-improper then it is said to be mixed in the current sense.

## 3. THEOREMS

## Theorem I

Consider a network  $\pi$  of nonlinear resistors and ideal voltage sources. The characteristics of resistors are defined by the family of functions  $\{g_{ls}\}$ , such that  $g_{ls}(v_{(l)} - v_{(s)})$  is the current flowing through resistor joining node  $l$  to node  $s$ ; here  $v_{(l)}$  and  $v_{(s)}$  are the node-to-datum voltages of nodes  $l$  and  $s$ . The family  $\{g_{ls}\}$  satisfies the following requirements:

- a)  $\widehat{l, s} g_{ls}$  is a function mapping  $R^1$  into  $R^1$ ,
- b)  $\widehat{l, s} g_{ls} \in C^1$ ,
- c)  $\widehat{l, s} g_{ls}(x) = 0 \equiv x = 0$ ,
- d)  $x \in R^1, \widehat{l, s} \text{sign}(g_{ls}(x) \cdot x) \geq 0$ ,
- e)  $\widehat{l, s} g_{ls}(x) = -g_{sl}(x)$ .

An operating point  $v^* = (v_{(1)}^*, v_{(2)}^*, \dots, v_{(n)}^*)$  is voltage-proper if and only if the function  $\Phi$  [1]

$$\Phi(v_{(1)}, \dots, v_{(n)}) \triangleq \sum_{\substack{\text{for all resistive} \\ \text{branches}}} \int_0^{v_{(i)} - v_{(j)}} g_{ij}(v) dv \quad (1)$$

achieves in this point a local minimum. Other stationary points of this function are not proper in the voltage sense.

*Proof — Part I*

Let us assume for a moment that functions of the family  $\{g_{ls}\}$  are monotone. From this assumption and from c) and d) we get functions  $\{g_{ls}\}$  are monotonically increasing. But such a network possesses one and only one operating point which is a voltage proper one. On the other hand from definition 1 [see 1] all operating points of the network are stationary points of the function  $\Phi$ , so we have to prove only that, in this case, a stationary point is a minimum.

System (2) is a set of *KCL* equations written for the considered network

$$\widehat{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{j-1} g_{ij}(v_{(j)} - v_{(i)}) + \sum_{i=j+1}^m g_{ij}(v_{(j)} - v_{(i)}) = 0. \quad (2)$$

Let  $v^*$  be a solution of system (2).

We take into consideration the  $i$ -th node. Into this node  $t$  currents flow from  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$  nodes and flow out  $q$  currents to  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$  nodes. We chose the very one branch, or which the absolute value of the voltage differences on its nodes is not less than for any other one from branches joining  $\{\alpha_j\}$  nodes to  $i$ -th node. Let it be the branch  $\alpha_r - i$  and let the same property among the branches  $\{\beta_i - i\}$  has the branch  $\beta_u - i$ .

We write the following function

$$\varphi(v_{(i)}) = \sum_{j=1}^t \int_0^{v_{(\alpha_j)}^* - v_{(i)}} g_{\alpha_j i}(v) dv + \sum_{j=1}^q \int_0^{v_{(i)} - v_{(\beta_j)}^*} g_{i \beta_j}(v) dv. \quad (3)$$

It is easy to observe that:

$$\Phi(v_{(1)}^*, v_{(2)}^*, \dots, v_{(i)}, \dots, v_{(n)}^*) = \varphi(v_{(i)}) + A \quad (4)$$

where  $A$  is not a function of  $v_{(i)}$ .

Let  $a = v_{(\alpha_r)}^* - v_{(i)}^*$ . We define a set of functions  $\{G_{\alpha_j i}\}$ :

$$G_{\alpha_j i}(v) = \begin{cases} 0 & \text{for } v \in (-\infty, a - v_{(\alpha_j)}^* + v_{(i)}^*) \\ g_{\alpha_j i}(v - a + v_{(\alpha_j)}^* - v_{(i)}^*) & \text{for } v \in (a - v_{(\alpha_j)}^* + v_{(i)}^*, \infty). \end{cases} \quad (5)$$

Between  $\{G_{\alpha_j i}(v)\}$  and  $\{g_{\alpha_j i}(v)\}$  there is a relation:

$$\int_0^{v_{(\alpha_j)}^* - v_{(i)}^*} g_{\alpha_j i}(v) dv = \int_0^a G_{\alpha_j i}(v) dv. \quad (6)$$

In a similar way we define  $\{G_{i \beta_j}\}$ :

$$G_{i \beta_j}(v) = \begin{cases} 0 & \text{for } v \in (-\infty, b - v_{(\beta_j)}^* + v_{(i)}^*) \\ g_{i \beta_j}(v - b + v_{(\beta_j)}^* - v_{(i)}^*) & \text{for } v \in (b - v_{(\beta_j)}^* + v_{(i)}^*, \infty) \end{cases} \quad (7)$$

where  $b = v_{(i)}^* - v_{(\beta_u)}^*$ .

Between  $\{G_{i \beta_j}(v)\}$  and  $\{g_{i \beta_j}(v)\}$  there is a relation:

$$\sum_{j=1}^q \int_0^{v_{(i)}^* - v_{(\beta_j)}^*} g_{i \beta_j}(v) dv = \sum_{j=1}^q \int_0^b G_{i \beta_j}(v) dv. \quad (8)$$

On the other hand the following relations are valid:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^t \int_0^a G_{\alpha_j i}(v) dv &= \int_0^a \sum_{j=1}^t g_{\alpha_j i}(v) dv, \\ \sum_{j=1}^q \int_0^b G_{i \beta_j}(v) dv &= \int_0^b \sum_{j=1}^q g_{i \beta_j}(v) dv. \end{aligned} \quad (9)$$

We define two substitutional elements:  $P$  and  $Q$ . Their characteristics are given by

$$\begin{aligned} G^P(v) &= \sum_{j=1}^t G_{\alpha_j i}(v), \\ G^Q(v) &= \sum_{j=1}^q G_{i \beta_j}(v). \end{aligned} \quad (10)$$

We write a new function  $\varphi^*(v_{(i)})$ :

$$\varphi^*(v_{(i)}) = \int_0^{v_{(\alpha_r)}^* - v_{(i)}} G^P(v) dv + \int_0^{v_{(i)} - v_{(\beta_n)}^*} G^Q(v) dv. \quad (11)$$

From the definitions of  $\{G_{ij}\}$  functions it immediately

follows that  $v_{(i)} \in (-\infty, \infty)$   $\varphi^*(v_{(i)}) = \varphi(v_{(i)})$ .

Functions  $G^p(v)$  and  $G^q(v)$  as sums of monotone increasing functions are monotone increasing too. The  $P$  and  $Q$  elements can be treated as two elements connected in series, so

$$G^p(v_{(i)}^*) = G^q(v_{(i)}^*).$$

A graphical interpretation of  $\int_0^a G^p(v) dv$  and  $\int_0^b G^q(v) dv$  are areas of curvilinear triangles  $A, v_{(\alpha_r)}^*, v_{(i)}^*$  and  $A, v_{(\beta_u)}^*, v_{(i)}^*$  respectively. The curve  $v_{(\beta_u)}^* A$  is the characteristic of element  $Q$  and the curve  $v_{(\alpha_r)}^* A$  is a mirror reflection of characteristic of element  $P$  with regard to the perpendicular line to  $v$ -axis in point  $v$ .

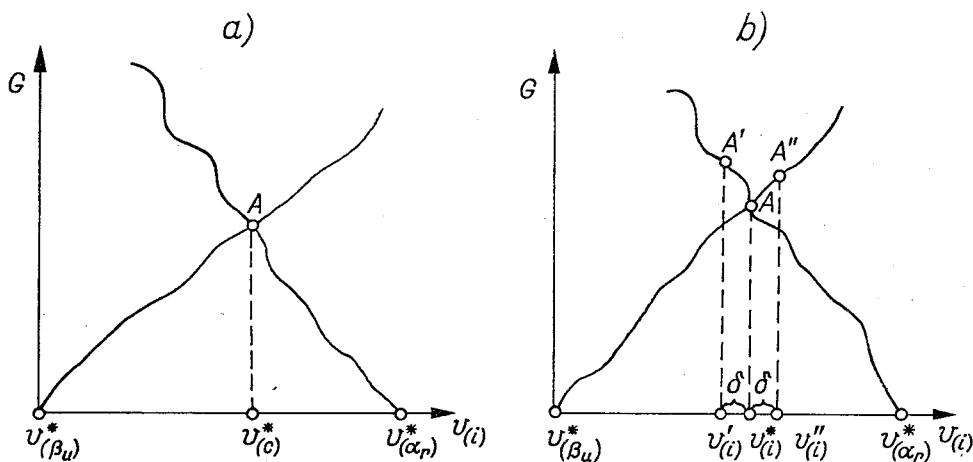


Fig. 1. a) The  $P, Q$  characteristics and the  $v_{(i)}^*$  point, b) The points  $v_{(i)}', v_{(i)}^*$  and  $v_{(i)}''$

We can easily prove that

$$\delta < \min(a, b) \quad \Phi(v_{(1)}^*, \dots, v_{(n)}^*) - \Phi(v_{(1)}^*, \dots, v_{(i)}^* - \delta, \dots, v_{(n)}^*) \leq 0. \quad (12)$$

For this purpose we observe that

$$\Phi(v_{(1)}^*, \dots, v_{(i)}^* - \delta, \dots, v_{(n)}^*) - \Phi(v_{(1)}^*, \dots, v_{(n)}^*) = \varphi(v_{(i)}^* - \delta) - \varphi(v_{(i)}^*) \quad (13)$$

but

$$\varphi(v_{(i)}^* - \delta) - \varphi(v_{(i)}^*) = \int_{v_{(i)}^*}^{v_{(i)}^* + \delta} G^p(v) dv - \int_{v_{(i)}^* - \delta}^{v_{(i)}^*} G^q(v) dv \quad (14)$$

and

$$\begin{aligned} \int_{v_{(i)}^*}^{v_{(i)}^* + \delta} G^p(v) dv &\geq \delta \cdot G^p(v_{(i)}^*) = \delta \cdot G^q(v_{(i)}^*), \\ \int_{v_{(i)}^* - \delta}^{v_{(i)}^*} G^q(v) dv &\leq \delta \cdot G^q(v_{(i)}^*) = \delta \cdot G^p(v_{(i)}^*). \end{aligned} \quad (15)$$

From (15) it follows that

$$\int_{v_{(i)}^*}^{v_{(i)}^* + \delta} G^p(v) dv - \int_{v_{(i)}^* - \delta}^{v_{(i)}^*} G^q(v) dv \geq \delta \cdot G^p(v_{(i)}^*) - \delta \cdot G^q(v_{(i)}^*) = 0. \quad (16)$$

In virtue of (13) and (14) the last result proves the (12) inequality.

In the same way it can be proved that

$$\varphi(v_{(i)}^* + \delta) - \varphi(v_{(i)}^*) \geq 0. \quad (17)$$

From relations (12) ÷ (17) and from the same argumentation for all nodes of  $\pi$  network we have the following sequence of inequalities:

$$\begin{aligned} \Phi(v_{(1)}^* \pm \delta_{(1)}, \dots, v_{(n)}^*) &\geq \Phi(v_{(1)}^*, \dots, v_{(n)}^*), \\ \Phi(v_{(1)}^* \pm \delta_{(1)}, v_{(2)}^* \pm \delta, \dots, v_{(n)}^*) &\geq \Phi(v_{(1)}^* \pm \delta_{(1)}, v_{(2)}^*, \dots, v_{(n)}^*), \\ &\vdots \\ \Phi(v_{(1)}^* \pm \delta_{(1)}, \dots, v_{(n)}^* \pm \delta_{(n)}) &\geq \Phi(v_{(1)}^* \pm \delta_{(1)}, \dots, v_{(n)}^*). \end{aligned} \quad (18)$$

From (18) and transitivity of relation  $\geq$  we get that

$$\Phi(v_{(1)}^* \pm \delta_{(1)}, \dots, v_{(n)}^* \pm \delta_{(n)}) \geq \Phi(v_{(1)}^*, \dots, v_{(n)}^*) \quad (19)$$

where  $\hat{\delta}_{(i)}$  is an arbitrary small value.

On the other hand, (19) is a definition of minimum in the point  $v^*$  hence part I is proved.

### Proof — Part II

We consider now the network  $\pi$  without the assumption that functions of the family  $\{g_{is}\}$  are monotone. In this case, it can happen, that for same nodes  $i$  the plots of respective substitutional characteristics possess more than one intersection. Both situations are shown in Fig. 2a and 2b respectively. Points  $A$ ,  $C$  and  $D$  correspond to stable and point  $B$  to unstable operating points respectively [see 2].

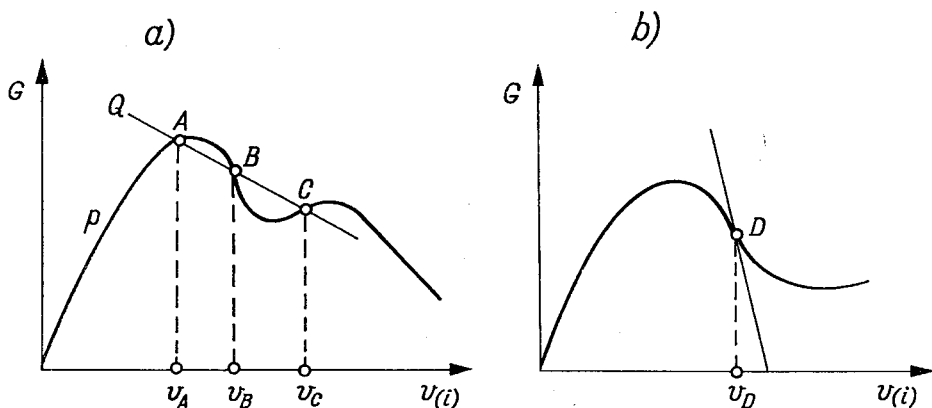


Fig. 2. a) The points  $v_A$ ,  $v_B$  and  $v_C$ , b) The point  $v_D$

Let  $\hat{\Phi}(v_{(i)}) \triangleq \Phi(v_{(1)}^*, v_{(2)}^*, \dots, v_{(i)}, \dots, v_{(n)}^*)$ . The proof for the requirement that function  $\hat{\Phi}(v_{(i)})$  achieves minimum in points  $v_{(i)} = v_A$  or  $v_{(i)} = v_C$  is the same as in part I, as in former proof we used only information, that characteristics of  $P$  and  $Q$  elements in small surrounding of operating point are monotone increasing. The proof that point  $v_D$  has the same property as points  $v_A$  and  $v_C$  follows immediately from that the sum of dynamic conductivities is positive and from that we in fact do not count a sum of respective integrals but their difference, because one of them has the lower border greater than the upper.

The proof that  $\hat{i}$  the function  $\hat{\Phi}(v_{(i)})$  achieves in point  $v_{(i)} = v_B$  maximum is as follows:

$$\Phi(v_{(1)}^*, \dots, v_{(i)}^*, \dots, v_{(n)}^*) - \Phi(v_{(1)}^*, \dots, v_{(i)}^* - \delta, \dots, v_{(n)}^*) = \varphi(v_{(i)}^*) - \varphi(v_{(i)}^* - \delta), \quad (20)$$

$$\varphi(v_{(i)}^*) - \varphi(v_{(i)}^* - \delta) = \int_{v_{(i)}^* - \delta}^{v_{(i)}^*} G^p(v) dv - \int_{v_{(i)}^*}^{v_{(i)}^* + \delta} G^q(v) dv. \quad (21)$$

But  $\delta \leq \varepsilon$  that (22) and (23) are valid:

$$v \in [v_{(i)}^* - \delta, v_{(i)}^*] \quad G^p(v) \geq G^p(v_{(i)}^*) = G^q(v_{(i)}^*), \quad (22)$$

$$v \in [v_{(i)}^*, v_{(i)}^* + \delta] \quad G^q(v) \leq G^q(v_{(i)}^*) = G^p(v_{(i)}^*), \quad (23)$$

$$\int_{v_{(i)}^* - \delta}^{v_{(i)}^*} G^p(v) dv \geq \delta \cdot G^p(v_{(i)}^*), \quad (24)$$

$$\int_{v_{(i)}^*}^{v_{(i)}^* + \delta} G^q(v) dv \leq \delta \cdot G^p(v_{(i)}^*); \quad (25)$$

from (22) ÷ (25) it follows that

$$\varphi(v_{(i)}^*) - \varphi(v_{(i)}^* - \delta) \geq 0 \quad (26)$$

in some surrounding of the point  $v_{(i)}^* = v_B$ .

In the same way it can be proved that

$$\varphi(v_{(i)}^*) - \varphi(v_{(i)}^* + \delta) \geq 0 \quad (27)$$

for  $v_{(i)}^* = v_B$  in some surrounding of the point  $v_{(i)}^* = v_B$ .

From the above considerations it follows that if  $v^*$  is a solution of (2) and is voltage-proper then  $\Phi$  achieves minimum at this point. When  $v^*$  is a solution of (2), but is not voltage-proper, then this point is a stationary one for the function  $\Phi$  but not minimum.

The proof in the opposite direction, (i. e., if  $\Phi$  achieves in the point  $v^*$  its minimum then this point is a solution of (2) and is voltage-proper and when  $v^*$  is only a stationary point, but not minimum,  $v^*$  is not a voltage-proper) is as follows.

From the definition of the function  $\Phi$  we know that all stationary points of  $\Phi$  solve (2).

Let us suppose that in  $v^*$   $\Phi$  achieves minimum, but  $v^*$  is voltage-improper or mixed in voltage sense. Then there exists at least one  $i$  such that in some surrounding of  $v_{(i)}^*$  the

sum of dynamic conductivities is negative. But from the above reasoning, it follows that  $\hat{\Phi}(v_{(i)})$  achieves in  $v_{(i)}^*$  maximum, what contradicts that  $v^*$  is minimum of  $\Phi$ .

Let us suppose now, that  $v^*$  is a stationary point — not minimum and  $v^*$  is voltage-proper. There is only one possible situation i. e.  $v_{(i)}^*$  is maximum of  $\hat{\Phi}(v_{(i)})$ , but as relations (22) ÷ (26) can be written in a reverse direction, we get that  $v^*$  is not voltage-proper with regard to  $v_{(i)}^*$ ;  $v_{(i)}^*$  can not be the point of inflection of  $\hat{\Phi}(v_{(i)})$  from the assumptions about  $\{g_{ij}\}$  functions and the definition of  $\Phi$ .

Hence theorem I is proved.

## Theorem II

Consider network  $\pi'$  of nonlinear resistors and ideal current sources. The characteristics of resistors are defined by the family of functions  $\{r_{ls}\}$ , such that  $v_{(l)} - v_{(s)} = r_{ls}(i^{ls})$  where  $i^{ls}$  is the current flowing through resistor joining node  $l$  to node  $s$ .

The family  $r_{ls}$  satisfies the following requirements:

a')  $\hat{s, l} \{r_{ls}\}$  is a function mapping  $R^1$  into  $R^1$ ,

b')  $\hat{s, l} r_{sl} \in C^1$ ,

c')  $\hat{s, l} r_{sl}(x) = 0 \equiv x_l = 0$ ,

d')  $\hat{s, l} r_{sl}(x) = -r_{ls}(x)$ ,

e')  $\hat{s, l} \hat{x} \text{sign}(r_{sl}(x) \cdot x) \geq 0$ .

We chose the tree of this network in such a way that all sources are in a co-tree. It is known that the set of loop-currents makes base for all branche-currents, i. e. each branch current can be represented as a linear combination of loop currents.

Let us define function  $\Phi'$  for network  $\pi'$

$$\Phi'(i, \dots, i_{k-m+1}) = \sum_{l=1}^k \int_0^{\sum_{j=1}^{k-m+1} i_j \delta_j^{(k)}} r^{(k)}(i) di \quad (28)$$

where  $\{i_j\}$  denotes a set of loop-currents for this chosen tree and

$$\delta_j^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{when the } k\text{-th branch is not in the } j\text{-th loop,} \\ \pm 1 & \text{when the } k\text{-th branch is in the } j\text{-th loop and has the same or reverse orientation, respectively;} \end{cases}$$

$$\overline{1 \leq j \leq k-m+1} \frac{\partial \Phi'}{\partial i_j} = \sum_{k=1}^m \delta_j^{(k)} r^{(k)} \left( \sum_{j=1}^{k-m+1} \delta_j^{(k)} i_j \right). \quad (29)$$

The right side of (29) is a KVL written for  $\pi'$ . Let  $i^* = (i_1^*, \dots, i_{k-m+1}^*)$  solve (29).

The operating point  $i^*$  is a current-proper if and only if the function  $\Phi'$  achieves in this point a local minimum. Other stationary points of this network are not proper in the current sense.

The proof of this theorem is similar to proof of theorem I and will not be given here.



Let us consider the last network  $\pi^*$  of resistors and ideal voltage sources.  $\pi^*$  is different from  $\pi$  because part of resistors in  $\pi^*$  is described by family  $\{r_{1s}\}$  and the rest by family  $\{g_{1s}\}$ . Among the functions from both families, there are such ones that are not reversible. Functions  $\{r_{1s}\}$  and  $\{g_{1s}\}$  satisfy requirements a')  $\div$  e') and a)  $\div$  e) respectively.

Let  $P$  be an element described by  $v^{(p)} = r^{(p)}(i)$  and which does not possess a reverse characteristic. Let  $M$  be greater than  $\sup_i \left| \frac{dr^{(p)}(i)}{di} \right|$  for such  $i$ , that  $\frac{dr^{(p)}(i)}{di} < 0$ . We connect two elements in series with  $P$ : the first one of resistance  $+M$ , the second of  $-M$ . This situation is shown in Fig. 3.

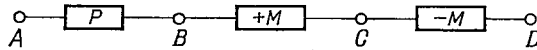


Fig. 3. The equivalence branch of the element  $P$

Characteristic for element joining node  $A$  to  $D$  is the same as  $P$ 's. Element  $AD$  can be treated as connected in series of two elements:  $AC$  and  $CD$ .  $AC$ 's characteristic is described by the equation:  $v^{AC} = r^{AC}(i) + Mi$  and from the assumption about  $M$  it follows that  $AC$  has a strictly monotone increasing characteristic which can be reversed and written as  $i^{AC} = g^{AC}(v)$ ,  $CD$ 's characteristic is  $v = -Mi$  and can be reversed without difficulties:  $i^{CD} = -\frac{1}{M} \cdot v$ . We must observe that, however, we have found the representation of  $P$  as connection in series of two elements with characteristics given by functions  $g^{AC}$  and  $g^{CD}$ , but the automatical use of results of theorem I is impossible as  $g^{CD}$  does not satisfy condition d').

We see that for network  $\pi^*$  we can build a new network  $\pi''$  of elements described by family  $\{g_{1s}\}$  satisfying a)  $\div$  e), and negative resistances.  $\pi^*$  and  $\pi''$  have the property that currents flowing through corresponding branches and voltages of corresponding nodes are the same. Network  $\pi''$  has more nodes and branches than  $\pi^*$  because each  $P$  as discussed here gives extra one node  $C$  and one branch  $CD$ .

Fig. 4 illustrates the way of finding the voltage of  $C$  points from the Fig. 3 when voltages of  $A$  and  $D$  and characteristics of  $AC$  and  $CD$  are given. The current flowing into

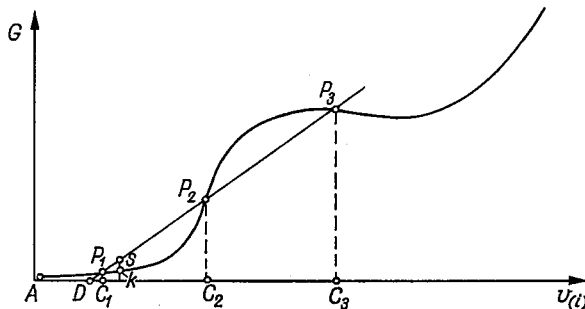


Fig. 4. The points  $P_1, P_2, P_3$

$C$ -node from branch  $AC$  is  $g_{CA}(v_C - v_A)$  and the current flowing into  $C$  from  $CD$  is  $-M \cdot (v_C - v_D)$ :

$$\Phi = \varphi(v_C) + A \quad (30)$$

where  $A$  is not a function of  $v_C$  and

$$\varphi(v_C) = \int_0^{v_C - v_A} g_{CA}(v) dv + \int_0^{v_C - v_D} -M dv. \quad (31)$$

The graphical interpretation of  $\varphi(v_C)$  is the difference of areas of two curvilinear triangles:  $APC$  and  $DPC$ .

It can be easily proved that  $\varphi(v_{CA} \pm \delta) \leq \varphi(v_C)$  for  $C_1$  and  $C_3$  and  $\varphi(v_{C_2} \pm \delta) \geq \varphi(v_{C_2})$ . We sum up our conclusions and formulate the last theorem.

### Theorem III

Consider a network  $\pi''$  of positive nonlinear resistors described by family  $\{g_{st}\}$ , linear negative resistors and ideal voltage sources. An operating point  $v^* = (v_{(1)}^*, \dots, v_{(n)}^*)$  is voltage-proper if and only if it is a saddle point of  $\Phi$ , where maximum is counted over all these  $v_{(i)}$  that  $i$ -th node is connected with a negative resistance, maximum over other  $v_{(i)} - s$ .

All the above considerations can be extended on such class of  $n$ -ports that satisfy conditions

$$1 \leq j \leq n \quad i^{(j)} = \sum_{k \neq j} g_{kj}(v_{(k)} - v_{(j)}) \quad \text{and} \quad g_{kj} = -g_{jk} \quad (32)$$

where  $i^{(j)}$  denotes the current flowing out from  $j$ -th port. The  $\{g_{kj}\}$  functions satisfy conditions a) ÷ e).

The function  $\Phi$  written for  $n$ -port is as follows:

$$\varphi = \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \int_0^{v_{(i)} - v_{(j)}} g_{ij}(v) dv. \quad (33)$$

From (33) it follows, that

$$\hat{j} \frac{\partial \varphi}{\partial v_{(j)}} = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n g_{ij}(v_{(i)} - v_{(j)}). \quad (34)$$

The right side of (34) represents the sum of currents which flow into the  $n$ -port. So the network which consists of nonlinear one-ports satisfying a) ÷ e),  $n$ -ports satisfying above assumptions and ideal voltage sources can be solved by finding minimum of corresponding function  $\Phi$ .

#### 4. Conclusions

The results obtained in this paper are important not only in solving *DC* nonlinear networks, but also in computation of the time domain solutions [see 4]. The theorems shown here are very practical in the computer-aided analysis of nonlinear networks as from the numerical point of view it is much easier to find a required stationary point of the function than to solve a set of nonlinear equations. On the other hand in the case when the parasitics are given we also know which kinds of operating points are observable. The theorems presented here give us a useful tool for finding the desired points.

#### REFERENCES

1. K. J. Kurman, Conserved and Minimized Values in Nonlinear Networks and Their Nonelectrical Analogies, to be published in Bull. PAN.
2. G. E. Anner, Elementary Nonlinear Electronic Circuits, Prentice-Hall, 1967.
3. L. O. Chua, G. R. Alexander, The Effects of Parasitic Reactances on Nonlinear Networks, IEEE Trans. Cir. Th, vol. CT 18, No. 5, Sept. 1971.
4. M. Marek-Sadowska, Some Generalizations of Variational Description of Electrical Networks, Rozprawy El., 1974, z. 3.

M. MAREK-SADOWSKA

#### WARIACYJNE WŁASNOŚCI MOCY CAŁKOWEJ W NIELINIOWYCH SIECIACH PRĄDU STAŁEGO

##### Streszczenie

Nie wszystkie rozwiązania równań Kirchhoffa dla nieliniowych sieci elektrycznych mogą być obserwowane, ponieważ istnieją punkty pracy, które są niestabilne. Jednakże, kiedy rozwiązujemy układ równań Kirchhoffa nigdy nie mamy pewności, że otrzymany punkt pracy będzie obserwowalny. Na ogół, gdy znane są pasożytnicze reaktancje w rozpatrywanej sieci, znane są także własności obserwowalnych punktów pracy. Twierdzenia przedstawione tutaj pokazują jak znajdować odpowiednie punkty pracy. Wszystkie rezultaty zaprezentowane w niniejszym artykule są bardzo dogodne w budowaniu algorytmów numerycznych.

M. MAREK-SADOWSKA

#### VARIATIONSEIGENSCHAFTEN DER GESAMTBELASTUNG IN NICHTLINEAREN GLEICHSTROMNETZEN

##### Zusammenfassung

Nicht alle Lösungen von Kirchhoff-Gleichungen für nichtlineare elektrische Netze können beobachtet werden, da manche Arbeitspunkte instabil sind. Beim Lösen dieses Kirchhoff-Gleichungssystems kann man niemals im voraus wissen, ob der erhaltene Arbeitspunkt sichtbar sein wird. Im allgemeinen, wenn die Parasitenreaktanz des analysierten Netzes bekannt ist, dann sind auch die Eigenschaften sichtbarer Arbeitspunkte bekannt. Das hier dargelegte Theorem zeigt, wie die entsprechenden Arbeitspunkte zu finden sind. Sämtliche hier dargestellten Ergebnisse eignen sich sehr für den Aufbau von numerischen Algorithmen.

М. МАРЕК-САДОВСКА

ВАРИАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛЬНОЙ МОЩНОСТИ  
В НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СХЕМАХ

## Р е з ю м е

Не все решения уравнений Кирхгофа нелинейных электрических схем наблюдаемы из-за существования неустойчивых рабочих точек. Решая уравнения Кирхгофа никогда нельзя предопределить будет ли полученная рабочая точка наблюдаемой. В общем случае, если известны паразитные реактансы выступающие в рассматриваемой схеме, известны также свойства наблюдаемых рабочих точек. Представленные в труде теоремы показывают, как определять соответствующие рабочие точки. Все приведенные итоги очень удобны для составления численных алгоритмов.

## Some Generalizations of Variational Description of Electrical Networks

MAŁGORZATA MAREK-SADOWSKA (WARSZAWA)

*Instytut Technologii Elektronowej Politechniki Warszawskiej*

*Otrzymano 26.6.1973*

This paper presents a new approach to solving some problems of electrical network. We discuss here the frequency domain analysis, the time-domain nonlinear analysis and some problems of network sensitivities. As a corollary from considerations about the sensitivities presented here, we get the Thevenin theorem generalization for nonlinear networks.

### 1. INTRODUCTION

In this paper we discuss several problems that occur in considerations on electrical networks. We show how to solve them using an appropriate variational description of the network. Some ideas presented here can be useful in building numerical algorithms for solving respective problems.

### 2. THE FREQUENCY DOMAIN ANALYSIS OF LINEAR NETWORKS

Consider a network  $\pi$  of linear  $RLC$  elements and current sources. The complex current flowing through resistor  $R$  joining node  $i$  to node  $j$  is given by:

$$\dot{I}_{ij} = G_{ij} \cdot (\dot{v}_i - \dot{v}_j) \quad (1)$$

where  $G_{ij}$  denotes conductivity of resistor  $R_{ij}$  and  $\dot{v}_i$  denotes node-to-datum complex voltage of  $i$ -th node.

The equations defining real and imaginary parts of  $\dot{I}_{ij}$  are as follows:

$$\operatorname{Re} \dot{I}_{ij} = G_{ij} \cdot (\operatorname{Re} \dot{v}_i - \operatorname{Re} \dot{v}_j), \quad (2)$$

$$\operatorname{Im} \dot{I}_{ij} = G_{ij} \cdot (\operatorname{Im} \dot{v}_i - \operatorname{Im} \dot{v}_j). \quad (3)$$

There are analogous equations for complex currents flowing through inductance  $L_{ij}$  and capacitance  $C_{ij}$ :

$$\dot{I}_L = \frac{1}{j\omega L_{ij}} \cdot (\dot{v}_i - \dot{v}_j), \quad (4a)$$

$$\dot{I}_C = j\omega C_{ij} \cdot (\dot{v}_i - \dot{v}_j), \quad (4b)$$

$$\operatorname{Re} \dot{I}_L = \frac{1}{\omega L_{ij}} \cdot (\operatorname{Im} \dot{v}_i - \operatorname{Im} \dot{v}_j), \quad (5a)$$

$$\operatorname{Re} \dot{I}_C = -\omega C_{ij} (\operatorname{Im} \dot{v}_i - \operatorname{Im} \dot{v}_j), \quad (5b)$$

$$\operatorname{Im} \dot{I}_L = \frac{-1}{\omega L_{ij}} \cdot (\operatorname{Re} \dot{v}_i - \operatorname{Re} \dot{v}_j), \quad (6a)$$

$$\operatorname{Im} \dot{I}_C = \omega C_{ij} (\operatorname{Re} \dot{v}_i - \operatorname{Re} \dot{v}_j). \quad (6b)$$

We define the following functions:

$$\bar{\varphi}_{R_{ij}} = 2 \cdot G_{ij} \cdot (\operatorname{Re} \dot{v}_i - \operatorname{Re} \dot{v}_j) \cdot (\operatorname{Im} \dot{v}_i - \operatorname{Im} \dot{v}_j), \quad (7)$$

$$\bar{\varphi}_{C_{ij}} = \omega C_{ij} [(\operatorname{Re} \dot{v}_i - \operatorname{Re} \dot{v}_j)^2 - (\operatorname{Im} \dot{v}_i - \operatorname{Im} \dot{v}_j)^2], \quad (8)$$

$$\bar{\varphi}_{L_{ij}} = \frac{1}{\omega L_{ij}} [(\operatorname{Im} \dot{v}_i - \operatorname{Im} \dot{v}_j)^2 - (\operatorname{Re} \dot{v}_i - \operatorname{Re} \dot{v}_j)^2], \quad (9)$$

$$\bar{\varphi}_{S_{ij}} = 2 \cdot (\operatorname{Re} \dot{v}_i - \operatorname{Re} \dot{v}_j) \cdot \operatorname{Im} \dot{I}_{S_{ij}} + 2 \cdot (\operatorname{Im} \dot{v}_i - \operatorname{Im} \dot{v}_j) \cdot \operatorname{Re} \dot{I}_{S_{ij}}. \quad (10)$$

The index  $S$  denotes the respective identifier refers to sources.

Now we can define the function  $\bar{\Phi}$ —for the whole considered network  $\pi$ :

$$\bar{\Phi} = \sum_{\substack{i,j \\ i>j}} \bar{\varphi}_{R_{ij}} + \sum_{\substack{i,j \\ i>j}} \bar{\varphi}_{C_{ij}} + \sum_{\substack{i,j \\ i>j}} \bar{\varphi}_{L_{ij}} + \sum_{\substack{i,j \\ i>j}} \bar{\varphi}_{S_{ij}}. \quad (11)$$

It is easily seen that  $\hat{j} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \operatorname{Im} \dot{v}_j}$  represents the real part of sum of currents and  $\hat{j} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \operatorname{Re} \dot{v}_j}$  represents imaginary part of sum of currents flowing into  $j$ -th node. From it follows that to solve the network  $\pi$  it is sufficient to find a such point in which the function  $\bar{\Phi}$  achieves its minimum.

### 3. THE TIME DOMAIN ANALYSIS OF NONLINEAR NETWORKS

Let the network  $\pi$  consists of ideal voltage sources, nonlinear positive conductances described by the family of functions  $\{g_{is}\}$  [see 2], constant or time varying capacitances and inductances.

The current flowing through the capacitance is given by the equation

$$i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt}. \quad (12)$$

Let us assume that  $i_C(t)$  is known for  $t \leq t_n$  and has a value  $i_n$  at some time  $t_n$ ,  $u$  has corresponding value  $u_n$  too. Now if at  $t_n$ , voltage is increased by a small increment to a new value  $u_n + \Delta u_n$ , at time  $t_n + \Delta t_n = t_{n+1}$  the current will have changed to  $i_n + \Delta i_n$ . Thus at the end of the  $\Delta t_n$  increment, the current flowing through the capacitance can be approximated by:

$$i_{C_{n+1}} = 2 \cdot C \cdot \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t_n} - i_{C_n}. \quad (13)$$

The right side of equation (13) can be interpreted as a description of resistor connected parallel with a current source. The current flowing through this resistor is given by

$$i_{C_{r(n+1)}} = 2 \cdot C \cdot \frac{u_{n+1}}{\Delta t_n} \quad (14)$$

and the value of current source is:

$$i_{C_{S(n+1)}} = -i_{C_n} - 2 \cdot C \cdot \frac{u_n}{\Delta t_n}. \quad (15)$$

On the other hand the current flowing through inductance is given by the equation:

$$i_L = \frac{1}{L} \cdot \int_0^t u_L dt. \quad (16)$$

Let us assume that  $u_L(t)$  is known for  $t \leq t_n$  and has a value  $u_n$  at some time  $t_n$ ,  $i_L$  has a corresponding value  $i_n$ . Now if at  $t_n$ , voltage is increased by a small increment to a new value  $u_n + \Delta u_n$ , at time  $t_n + \Delta t_n = t_{n+1}$  the current will have changed to  $i_n + \Delta i_n$ . It can be described by the following equations:

$$i_n = \frac{1}{L} \int_0^{t_n} u_L dt, \quad (17)$$

$$i_{n+1} = \frac{1}{L} \int_0^{t_{n+1}} u_L dt = \frac{1}{L} \int_0^{t_n} u_L dt + \frac{1}{L} \int_{t_n}^{t_{n+1}} u_L dt = i_n + \frac{1}{L} \int_{t_n}^{t_{n+1}} u_L dt. \quad (18)$$

The integral  $\int_{t_n}^{t_{n+1}} u_L dt$  may be approximated by:

$$\frac{1}{L} \int_{t_n}^{t_{n+1}} u_L dt = \frac{1}{L} \left( u_n + \frac{u_{n+1} - u_n}{2} \right) \Delta t_n \quad (19)$$

and we have

$$i_{n+1} = i_n + \frac{\Delta t_n}{2L} u_n + \frac{u_{n+1}}{2L} \Delta t_n. \quad (20)$$

The right side of (20) can be interpreted as a description of resistor connected parallel with a current source.

The current flowing through this resistor is given by:

$$i_{L_{r(n+1)}} = \frac{u_{n+1}}{2L} \Delta t_n \quad (21)$$

and the value of the current source is:

$$i_{L_{S(n+1)}} = i_n + \frac{\Delta t_n}{2L} u_n. \quad (22)$$

For the network with capacitances and inductances approximated in this way we can write appropriate function  $\Phi$  having a property that when we find its respective stationary point, we have at this moment an operating point of the network in time  $t_{n+1}$ :

$$\Phi = \sum_C \Phi_C + \sum_L \Phi_L + \Phi_{res} \quad [\text{see } 1, 2], \quad (23)$$

$$\Phi_C = C \frac{u_{n+1}^2}{\Delta t_n} - \left( i_{Cn} + 2C \frac{u_n}{\Delta t_n} \right) \cdot u_{n+1}, \quad (24a)$$

$$\Phi_L = u_{n+1}^2 \frac{\Delta t_n}{4L} + \left( i_n + \frac{\Delta t_n}{2L} \cdot u_n \right) \cdot u_{n+1}. \quad (24b)$$

The problem of solving network  $\pi$  in time domain we have changed into solving of sequence nonlinear networks which can be easily done using optimization techniques. There is only one problem: how to check  $\Delta t_n$ . If  $\Delta t_n$  is too small we have to compute too many networks and when  $\Delta t_n$  is too big we do not observe the existence of reactances. One way of solving this problem is to check  $\Delta t_n$  such that the substitutional resistances and sources have the same rank of value as other resistances and sources in this network. A more accurate way of finding the values of substitutional elements is by examining the network sensitivities when values of respective elements are changed. This is given in part 4.

#### 4. SOME CONSIDERATIONS ABOUT THE NETWORK SENSITIVITIES

Consider a network  $\pi$  of nonlinear resistors and ideal sources. The characteristics of resistive elements are defined by functions  $\{g_{is}\}$  [see 2]. We change the function describing the element joining node 1 to node 2 from  $g_{12}(v)$  into  $g_{12}(v) + \delta_{12}(v)$ . This network is denoted by  $\pi'$ .

Let us write functions  $\Phi$  and  $\Phi'$  for networks  $\pi$  and  $\pi'$  respectively:

$$\Phi = \int_0^{v_1-v_2} g_{12}(v) dv + \sum_{j=3}^n \sum_{i=1}^j \int_0^{v_i-v_j} g_{ij}(v) dv, \quad (25)$$

$$\Phi' = \int_0^{v'_1-v'_2} (g_{12}(v) + \delta_{12}(v)) dv + \sum_{j=3}^n \sum_{i=1}^j \int_0^{v'_i-v'_j} g_{ij}(v) dv; \quad (26)$$

$v^*$  is a point at which function  $\Phi$  achieves its minimum,  $\bar{v}$  has the same property for function  $\Phi'$ .

Let  $\Phi^*$  denotes the *difference function* and is given by:

$$\Phi^* = \Phi'(v') - \Phi(v^*). \quad (27)$$

Or in the explicit form:

$$\Phi^* = \int_{v_1^*-v_2^*}^{v'_1-v'_2} (g_{12} + \delta_{12}) dv + \sum_{j=3}^n \sum_{i=3}^j \int_{v_i^*-v_j^*}^{v'_i-v'_j} g_{ij}(v) dv + \int_0^{v_2^*-v_1^*} \delta_{12}(v) dv. \quad (28)$$



We define a set of functions  $\{G_{ij}\}$ :

$$\widehat{i, j} \quad G_{ij}(v) \stackrel{\Delta}{=} g_{ij}(v - v_j^* + v_i^*) - g_{ij}(v_i^* - v_j^*) \quad (29)$$

and

$$\widehat{j, i} \quad \Delta_{ij}(v) \stackrel{\Delta}{=} \delta_{ij}(v - v_j^* + v_i^*) - \delta_{ij}(v_i^* - v_j^*) \quad (30)$$

where  $\delta_{ij}(v)$  are defined in the same way as  $\delta_{12}(v)$ .

Between  $\{G_{ij}\}$  and  $\{g_{ij}\}$  there are the following relations:

$$\widehat{i, j} \int_{v_i^* - v_j^*}^{v_i' - v_j'} g_{ij}(v) dv = \int_0^{v_i' - v_j' - (v_j' - v_j^*)} G_{ij}(v) dv + (v_i - v_i^* - (v_j' - v_j^*)) \cdot g_{ij}(v_i^* - v_j^*). \quad (31)$$

Let  $\Delta_j$  denote  $v_j' - v_j^*$ . We must observe, if  $j$  denotes voltage source node, then  $\Delta_j = 0$ . Using this denotation the function  $\Phi^*$  can be rewritten in the following way:

$$\begin{aligned} \Phi^* = & \int_0^{\Delta_1 - \Delta_2} (G_{12}(v) + \Delta_{12}(v)) dv + \sum_{j=3}^n \sum_{i=1}^j \int_0^{\Delta_i - \Delta_j} G_{ij}(v) dv + (\Delta_1 - \Delta_2) \cdot (g_{12}(v_1^* - v_2^*) + \\ & + \delta_{12}(v_1^* - v_2^*)) + \sum_{j=3}^n \sum_{i=1}^j (\Delta_i - \Delta_j) \cdot g_{ij}(v_i^* - v_j^*) + \int_0^{v_1^* - v_2^*} \delta_{12}(v) dv. \end{aligned} \quad (32)$$

It can be easily seen that there exist network  $\bar{\pi}$  having its  $\Phi$  — function equal to  $\Phi^* + C$ , where  $C$  is a constant. We build network  $\bar{\pi}$  from  $\pi$  by changing branch 1—2 described by  $g_{12}(v)$  into resistor described by  $G_{12} + \Delta_{12}$  connected parallel with a current source of efficiency  $g_{12}(v_1^* - v_2^*) + \delta_{12}(v_1^* - v_2^*)$ .

Other resistive branches  $i-j$  we change into respective resistors  $G_{ij}$  connected parallel with current sources of efficiency  $g_{ij}(v_i^* - v_j^*)$ . The voltage sources are short-circuited to the datum node and current sources are left. Have a look at network  $\bar{\pi}$ . From the assumption that  $v^*$  is an operating point of network  $\pi$  we conclude that when we remove all current sources except source  $\delta_{12}(v_1^* - v_2^*)$  we get network  $\Delta\pi$  which has the same operating point as  $\bar{\pi}$ .

Each branch current in  $\Delta\pi$  represents the difference of the respective currents from  $\pi$  and  $\pi'$  and each node voltage in  $\Delta\pi$  represents the difference of the respective voltages from  $\pi$  and  $\pi'$ . So if we want to study the changes of currents and voltages in network  $\pi$  when one or more elements are changed, we can study as well the properties of respective network  $\Delta\pi$ .

The concept of  $\Delta$ -network can be useful in the following considerations. We have network  $\pi$  of nonlinear resistors described by the  $\{g_{is}\}$  functions [see 2] and ideal sources. Let us assume that the nodes  $m$  and  $n$  are not connected in  $\pi$  by one branch the open-circuit voltage  $u_{mn} = e$ . We connect to the nodes  $m$  and  $n$  a resistive element  $\delta_{mn}$  and denote this new network by  $\pi'$ . We are going to find an equivalent network of  $\pi$  looking into terminals  $m-n$ .

Let us consider the network from Fig. 1. It is a  $\Delta\pi$  network of  $\pi$  and  $\pi'$ . Network  $\pi_0$  is built from network  $\pi$  in such a way that all the resistive branches described by  $\{g_{is}\}$  are changed into branches described by  $\{G_{is}\}$ , current sources are open-circuited and vol-

tage sources are short-circuited to the datum node. But from the definition of  $\Delta_{mn}$  we get that the network in Fig. 1 is equivalent to the network in Fig. 2 which is equivalent to the network in Fig. 3. So we get that the network in Fig. 4 is the equivalent network of  $\pi$  looking into terminals  $m$ - $n$ .

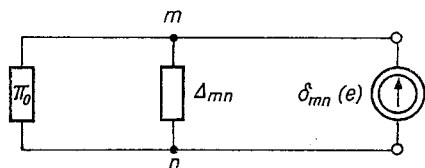


Fig. 1. The network  $\pi_0$ , the  $\Delta_{mn}$  and  $m$ ,  $n$  points

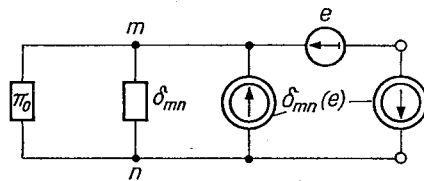


Fig. 2. The network  $\pi_0$ ,  $\delta_{mn}$  and the sources and  $\delta_{mn}(e)$  and  $e$

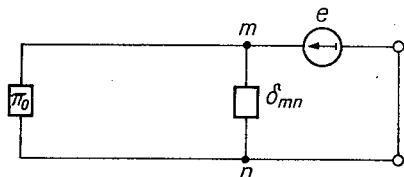


Fig. 3. The network  $\pi_0$ , the source  $e$  and  $\delta_{mn}$

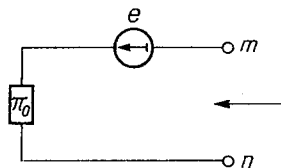


Fig. 4. The Thevenin equivalence network of  $\pi$

We can sum up our discussion and formulate the following corollary: each branch current (node voltage) of the discussed network  $\pi'$  can be represented as a sum of respective currents (voltages) in networks  $\pi$  and in the equivalent network of  $\pi$  looking into terminals  $m$ - $n$ .

## 5. CONCLUSIONS

In this paper have been shown some variational descriptions of nonlinear networks. This approach is very useful from the numerical point of view as it is usually easier to find a stationary point of the function than to solve an equivalent set of nonlinear equations. It has been also shown that the variational description of the network can be useful in some theoretical considerations.

## REFERENCES

1. K. J. Kurman, Conserved and Minimized Values in Nonlinear Networks and Their Nonelectrical Analogies, to be published in Bull. PAN.
2. M. Marek-Sadowska, Variational Properties of the Integral Power in DC Nonlinear Networks, Rozpr. Elektrotechn., z. 3, 1974.

M. MAREK-SADOWSKA

PEWNE UOGÓLNIENIA WARIACYJNEGO OPISU ELEKTRYCZNYCH SIECI  
NIELINIOWYCH

## Streszczenie

W niniejszej pracy przedstawiono nowy sposób rozwiązywania pewnych problemów pojawiających się podczas badania sieci elektrycznych. Dyskutowana jest tutaj analiza sieci w dziedzinie częstotliwościowej, analiza czasowa nieliniowych sieci elektrycznych oraz pewne problemy czułości tych sieci. Jako wniosek z przedstawionych tu rozważań nad czułością wyprowadzono twierdzenie Thevenina uogólnione dla sieci nieliniowych.

M. MAREK-SADOWSKA

EINIGE VERALLGEMEINERUNGEN DER VARIATIONSBSCHREIBUNG NICHTLINEARER  
ELEKTRISCHER NETZE

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird eine neue Lösungsart einiger während der Versuche an elektrischen Netzen auftretender Probleme dargestellt. Diskutiert wird hier die Netzanalyse bezüglich der Frequenz, Zeitanalyse nichtlinearer elektrischer Netze sowie einige Probleme der Empfindlichkeit dieser Netze. Aus den Erwägungen betreffs Empfindlichkeit resultiert das für nichtlineare Netze verallgemeinerte Thevenin-Theorem.

M. МАРЕК-САДОВСКА

НЕКОТОРОЕ ОБОБЩЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО ОПИСАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ  
СХЕМ

## Резюме

В статье представлен новый метод решения некоторых проблем выступающих при исследовании электрических схем. Продискутированы: анализ схем с точки зрения частоты, временной анализ нелинейных схем и некоторые проблемы чувствительности этих схем. В качестве заключения приведенных рассуждений касающихся чувствительности выведена теорема Тевенина обобщенная для нелинейных схем.



## Właściwości szumowe wzmacniaczy operacyjnych

WITOLD J. STEPOWICZ (GDAŃSK), JACEK M. ŻURADA (GDAŃSK)

*Instytut Technologii Elektronicznej Politechniki Gdańskiej*

*Otrzymano 31.5.1973*

W niniejszej pracy omówiono parametry szumowe wzmacniacza operacyjnego, takie jak zastępcze rezystancje i konduktancje źródeł szumów oraz związane z nimi wielkości: wąskopasmowy współczynnik szumów, stosunek sygnał/szum i szum szerokopasmowy na wyjściu. Przedstawiono metody pomiaru tych parametrów.

Omówiono wpływ stopni wejściowych oraz czynników zewnętrznych na szумы wzmacniaczy operacyjnych. Znajomość parametrów szumowych jest konieczna przy projektowaniu małoszumujących układów elektronicznych z zastosowaniem wzmacniaczy operacyjnych.

### 1. WSTĘP

W wyniku coraz powszechniejszego zastosowania monolitycznych wzmacniaczy operacyjnych (w. o.) w układach liniowych zaistniała potrzeba charakteryzowania tego elementu za pomocą odpowiednich parametrów szumowych. Charakterystyka ta służyć ma zarówno do oceny jakości szumowej samego wzmacniacza jak i całego układu ze wzmacniaczem. Przechodzenie sygnału z generatora na wyjście szumiącego w. o. można opisać współczynnikiem szumów i stosunkiem sygnał/szum.

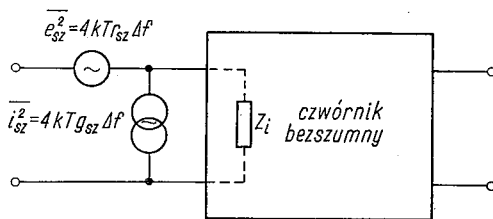
Przyjęty w pracy model pozwala określić wymienione wielkości na drodze pomiarowej lub obliczeniowej dla dowolnej konfiguracji pracy w. o. W modelu tym szумы samego w. o. są opisane przez odpowiednie zastępcze rezystancje i konduktancje szumów. Przedstawiony model uwzględnia stacjonarny składnik całkowitego szumu w. o. Szумы bardzo małej częstotliwości o charakterze dryftu, bądź szумы wybuchowe jako procesy niestacjonarne, mogą być bowiem opisane wyłącznie probabilistycznie, co wykracza poza przyjęty deterministyczny charakter modelu.

Dla oceny dynamiki wzmacniacza operacyjnego istotną rolę odgrywa znajomość jego napięcia szumów w całym paśmie częstotliwości. Może być ono obliczone za pomocą opisywanego modelu pod warunkiem, że znana jest szerokość pasma szumowego wzmacniacza.

## 2. SZUMY CZWÓRNIKA

Szumy czwórnika mogą być przedstawione za pomocą trzech prądowych generatorów szumu. Jeżeli szumy tych generatorów są nieskorelowane, to do kompletnego opisu wystarczą dwa generatory prądowe [1]. Drogą przekształceń można otrzymać różne reprezentacje szumów czwórnika za pomocą dwóch źródeł: napięcia lub/ i prądu szumów na wejściu lub/ i na wyjściu czwórnika. Z możliwych reprezentacji najczęściej stosowana przedstawiona jest na rys. 1. Jak widać z tego rysunku, identyfikacja właściwości szumowych czwórnika sprowadza się do określenia wydajności generatorów szumu — prądowego i napięciowego — sprowadzonych na wejście czwórnika. Możliwe jest formalne przyporządkowanie wymienionym generatorom równoważnych rezystancji i konduktancji szumów  $r_{sz}$ ,  $g_{sz}$  według zależności:

$$\begin{aligned} \overline{e_{sz}^2} &= 4kTr_{sz}\Delta f, \\ \overline{i_{sz}^2} &= 4kTg_{sz}\Delta f, \end{aligned} \quad (1)$$



Rys. 1. Model szumiącego czwórnika z prądowym i napięciowym źródłem szumów na wejściu

gdzie:

$k$  — stała Boltzmanna,

$T$  — temperatura w stopniach Kelvina,

$\Delta f$  — pasmo częstotliwości.

Najważniejsze parametry szumowe czwórnika to:

- stosunek sygnał/szum ( $S/N$ ) wyrażony przez stosunek odpowiednich mocy, prądów lub napięć w określonym punkcie układu; stosunek sygnał/szum jest parametrem czwórnika po ustaleniu poziomu sygnału,
- wąskopasmowy współczynnik szumów  $F$  określony jako stosunek mocy sygnał/szum na wejściu i wyjściu układu

$$F = \frac{(P_s/P_{sz})_{we}}{(P_s/P_{sz})_{wy}}, \quad (2)$$

gdzie:

$P_s$  — moc sygnału w paśmie częstotliwości  $\Delta f$ ,

$P_{sz}$  — moc szumów w paśmie częstotliwości  $\Delta f$ .

Wartość współczynnika szumów zależy od oporności źródła sygnału i przyjmuje wartość minimalną przy oporności źródła zwanej optymalną.

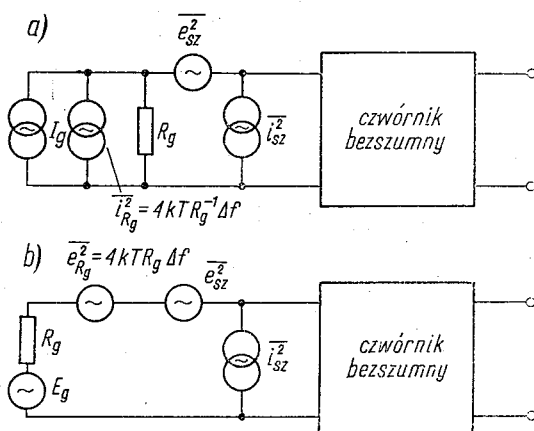
Współczynnik szumów służy przede wszystkim do porównywania właściwości różnych czwórników (np. wzmacniaczy operacyjnych), z którymi może współpracować dane źródło

sygnału o określonej oporności  $R_g$ . Jeżeli dla ustalonej oporności  $R_g$  dany czwórnik posiada najmniejszy współczynnik szumów z rozpatrywanej grupy czwórników, to uzyska się w nim najkorzystniejszy stosunek  $S/N$  w porównaniu z innymi rozpatrywanymi czwórnikami. Jednak nie zawsze oznacza to, że jest to optymalny  $S/N$  możliwy do uzyskania w wybranym czworniku. Często zmniejszenie współczynnika szumów prowadzi do pogorszenia stosunku  $S/N$ .

Można wykazać, że mając możliwość doboru  $R_g$  w warunkach sterowania generatorem prądowym o stałej wydajności  $I_g$ , uzyskuje się najlepszy stosunek  $S/N$  dla  $R_g \rightarrow \infty$ .

Obliczenia na podstawie rys. 2a dają wynik

$$\frac{S}{N} = \frac{u_s}{(u_{sz}^2)^{1/2}} = \frac{R_g I_g}{(e_{sz}^2 + 4kTR_g \Delta f + R_g^2 i_{sz}^2)^{1/2}} \xrightarrow{R_g \rightarrow \infty} \frac{I_g}{(i_{sz}^2)^{1/2}}. \quad (3a)$$



Rys. 2. Czwórnik szumiący sterowany: a) generatorem prądowym, b) generatorem napięciowym

W warunkach sterowania generatorem napięciowym o stałej wydajności  $E_g$  (rys. 2b) najkorzystniejszy jest przypadek, gdy  $R_g \rightarrow 0$ . Stosunek  $S/N$  wynosi wówczas

$$\frac{S}{N} = \frac{E_g}{(e_{sz}^2 + 4kTR_g \Delta f + R_g^2 i_{sz}^2)^{1/2}} \xrightarrow{R_g \rightarrow 0} \frac{E_g}{(e_{sz}^2)^{1/2}}. \quad (3b)$$

Rozważania te są słuszne przy założeniu, że impedancja wejściowa czwornika jest nieskończenie duża, praktycznie znacznie większa od oporności  $R_g$ . Założenie to we wzmacniaczach operacyjnych jest przeważnie spełnione.

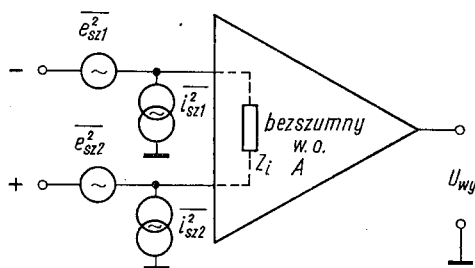
### 3. SZUMY WZMACNIACZA OPERACYJNEGO

Wzmacniacz operacyjny jako układ o dwóch wejściach może być w ogólnym przypadku opisany czterema nieskorelowanymi generatorami szumu [2]. Pokazane to jest na rys. 3.

Generatory  $e_{sz}^2$ ,  $i_{sz}^2$  wykazują jednakże wzajemną korelację począwszy od pewnej częstotliwości. Wzrost korelacji następuje wraz z powiększaniem górnej częstotliwości pracy w. o. Dlatego też generatorom tym przypisać należy zespolone wartości odpowiadających im

immitancji korelacji w zakresie częstotliwości rzędu MHz. Dalsze rozważania pomijają niestacjonarne szумы o  $f = 0$  i efekt korelacji występujący dopiero przy dużych częstotliwościach.

Dla w. o. I generacji, np.  $\mu A 709$ , w których obciążeniem poszczególnych stopni wzmacniacza są oporniki wykazano, że wartości  $g_{sz}$ ,  $r_{sz}$  są głównie zdeterminowane przez właściwości szumowe I stopnia wzmacniacza różnicowego [2]. Szумы generatorów  $i_{sz}^2$  są przede wszystkim zdeterminowane szumami śrutowymi stałego prądu wejściowego, tj. prądu



Rys. 3. Model ogólny dwuwejściowego szumiącego w.o.

bazy  $I_B$  we w. o. z tranzystorami bipolarnymi na wejściu lub prądu bramki  $I_G$  we w. o. z tranzystorami polowymi na wejściu. Ze względu na różne rzędy wartości tych prądów:  $I_B$  — rzędu dziesiątków nA zaś  $I_G$  — rzędu pA, wartości  $g_{sz}$  dla w. o. z wejściowymi tranzystorami bipolarnymi i polowymi różnią się znacznie.

Napięcie szumów  $e_{sz}^2$  zależy głównie od szumów śrutowych prądu kolektora pierwszego stopnia oraz od oporności rozproszonych baz  $r_{bb'}$  (dla tranzystorów bipolarnych), natomiast dla tranzystorów polowych istotną rolę w określeniu  $e_{sz}^2$  odgrywa transkonduktancja stopnia wejściowego. Analiza odpowiednich zależności prowadzi do wniosku, że w stopniu wejściowym korzystnie jest stosować tranzystory bipolarne o dużym współczynniku  $\beta$ , pracujące przy małych prądach kolektora i bazy i posiadające oporności  $r_{bb'}$  o małej wartości. Dla tranzystorów polowych korzystna jest duża wartość transkonduktancji i mała wartość prądu bramki.

Obliczenia przeprowadzone na maszynie cyfrowej dla w. o. II generacji w. o.  $\mu A 741$  wykazały, że za szum układu odpowiedzialne jest głównie źródło prądowe stanowiące obciążenie pierwszego stopnia różnicowego [3].

Na rys. 4 przedstawiono typową konfigurację pracy w. o. z uwzględnieniem wszystkich źródeł szumów. Dodatkowo szумы wprowadza pętla sprzężenia zwrotnego, tj. oporniki  $R_a$  i  $R_b$  oraz opornik symetryzujący  $R_r$ . Obliczone napięcie szumów na wejściu tego układu jest równe:

$$\overline{u_{sz, we}^2} = \left[ R_a + \frac{R_b}{|K|^2} + \left( 1 + \frac{1}{|K|} \right) (r_{sz1} + r_{sz2} + g_{sz2} R_r^2 + R_r) + g_{sz1} \frac{R_b^2}{|K|^2} \right] 4kT\Delta f, \quad (4)$$

gdzie  $K$  — wzmacnienie napięciowe w. o. z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego, dla  $f = 0$ .

Przy wyprowadzaniu wzoru (4) założono, że moduł impedancji wejściowej wzmacniacza jest nieskończenie duży.



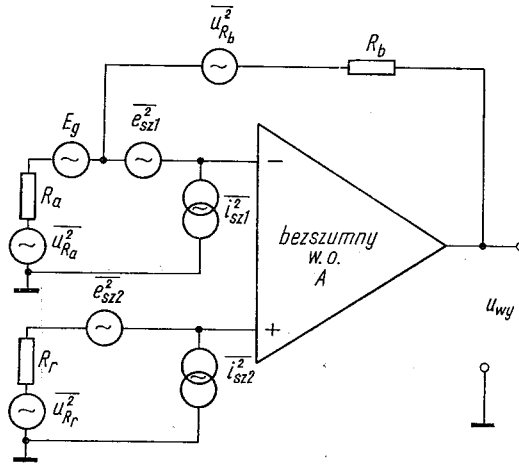
Dalsze uproszczenie polegające na przyjęciu, że

$$|K| = \frac{R_b}{R_a} \gg 1$$

oraz

$$r_{sz1} = r_{sz2} = \frac{r_{sz}}{2},$$

$$g_{sz1} = g_{sz2} = \frac{g_{sz}}{2},$$



Rys. 4. Układ szumiącego w. o. w konfiguracji odwracającej fazę

daje wynik

$$\overline{u_{sz,we}^2} = \left( R_a + R_r + r_{sz} + \frac{g_{sz} R_a^2}{2} + \frac{g_{sz} R_r^2}{2} \right) 4kT \Delta f. \quad (5)$$

Przyjęcie parametrów szumowych  $g_{sz}$ ,  $r_{sz}$  równych dla obu wejść jest konsekwencją symetrii stopnia wejściowego w. o. Ze względu na istnienie napięcia niezrównoważenia zapewnia się następującą równość

$$R_a = R_r.$$

Można wykazać, że współczynnik szumów  $F$  zdefiniowany wg (2) i obliczony na podstawie modelu pokazanego na rys. 4 z wykorzystaniem wejścia odwracającego fazę, jest dany zależnością

$$F = \frac{\overline{u_{sz,we}^2}}{\overline{u_{sz}^2} R_a} = 2 + \frac{r_{sz}}{R_a} + g_{sz} R_a, \quad (6)$$

gdzie  $R_a = R_r$  zostało przyjęte jako oporność generatora sygnału. Widać, że współczynnik ten przyjmuje wartość najmniejszą równą

$$F_{\min} = 2 + 2(r_{sz} g_{sz})^{1/2}, \quad (7)$$

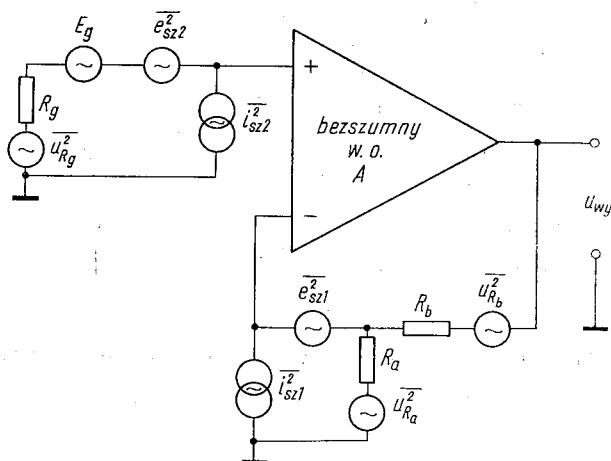
gdy oporność generatora  $R_a$  jest równa

$$R_{a\text{opt}} = \left( \frac{r_{sz}}{g_{sz}} \right)^{1/2}.$$

Utożsamienie  $R_a$  z opornością generatora jest jedną z możliwości pozwalającą obliczyć współczynnik szumów nie zmniejszając ogólności rozważań. Inna metoda wymagałaby rozdzielania oporności  $R_a$  na oporność generatora sygnału  $R_g$  oraz oporność szeregową pętli sprzężenia zwrotnego równą  $R_a - R_g$ .

Podobnie obliczyć można współczynnik szumów dla konfiguracji w. o. nie odwracającej fazy i przedstawionej na rys. 5, gdzie podobnie jak poprzednio zapewniono warunek  $R_a = R_g$ :

$$F = \frac{\overline{u_{sz, we}^2}}{\overline{u_{sz}^2} R_g} = 2 + \frac{r_{sz}}{R_g} + g_{sz} R_g. \quad (8)$$



Rys. 5. Układ szumiącego w. o. w konfiguracji nie odwracającej fazy

Drogą analogicznych przekształceń otrzymać można stosunek  $S/N$  dla układów odpowiednio z rys. 4 i 5, zasilanych generatorami napięciowymi sygnału o wydajności  $E_g$ :

$$\frac{S}{N} = \frac{E_g}{[4kT\Delta f(2R_a + r_{sz} + g_{sz} R_a^2)]^{1/2}}, \quad (9a)$$

$$\frac{S}{N} = \frac{E_g}{[4kT\Delta f(2R_g + r_{sz} + g_{sz} R_g^2)]^{1/2}}. \quad (9b)$$

Przyjęty model szumowy pozwala również obliczyć dla obydwu konfiguracji wyjściowe napięcie skuteczne szumów  $\overline{U_{sz, wy}^2}$  w całym paśmie wzmacniacza

$$\overline{U_{sz, wy}^2} = \int_0^\infty |K_1(i\omega)|^2 \overline{u_{sz, we}^2} d\omega, \quad (10)$$

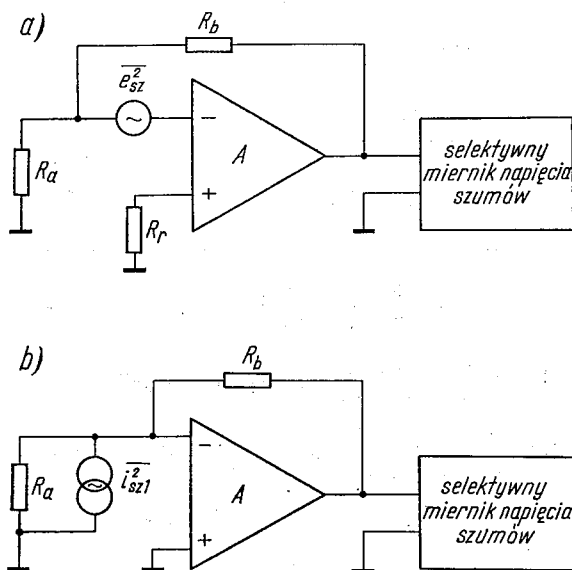
gdzie  $K_1(j\omega)$  jest napięciową funkcją przenoszenia w. o.

Z uwagi na to, że gęstość widma szumów sprowadzonych do wejścia w. o. nie jest stała, określenie równoważnej szerokości pasma szumowego w. o. nie byłoby w ogólności ścisłe. Niemniej jednak można oszacować wartość napięcia skutecznego szumów na wyjściu w. o. otrzymywanego z obliczenia wyrażenia (10) jako w przybliżeniu proporcjonalną do kwadratu wartości wzmocnienia stałoprądowego w. o.  $K(j\omega)$  i częstotliwości granicznej  $f_{3db}$  napięciowej funkcji przenoszenia.

#### 4. POMIAR PARAMETRÓW SZUMOWYCH WZMACNIACZA OPERACYJNEGO

Pomiary parametrów szumowych w. o.  $g_{sz1}$ ,  $g_{sz2}$ ,  $r_{sz1}$ ,  $r_{sz2}$  można wykonać wykorzystując bezpośrednio zależność (5). Np. układ z rys. 6a umożliwia zmierzenie wartości  $r_{sz} = r_{sz1} + r_{sz2}$ . Jeżeli dobrze się wartości oporności tak, że

$$r_{sz} \gg R_a, R_r, \quad g_{sz1} R_a^2 \ll r_{sz}, \quad g_{sz2} R_r^2 \ll r_{sz}, \quad (11)$$



Rys. 6. Układ pomiarowy: a) zastępczej oporności szumów  $r_{sz}$ , b) zastępczej przewodności szumów  $g_{sz1}$

to wówczas

$$\overline{u_{sz,we}^2} = 4kTr_{sz}\Delta f.$$

Ponieważ dla w. o. z tranzystorami bipolarnymi na wejściu przeważnie  $r_{sz}$  jest rzędu kilku  $k\Omega$ , natomiast  $g_{sz}$  rzędu od kilku  $mS$  do  $\mu S$ , warunki (11) łatwo można spełnić.

Pomiar  $g_{sz1}$  może być wykonany w układzie przedstawionym na rys. 6b. Jeżeli jest spełniona nierówność

$$g_{sz1} R_a^2 \gg r_{sz}, R_a, \quad (12)$$

to wówczas

$$\overline{u_{sz, we}^2} = 4kTg_{sz1}R_a^2\Delta f.$$

Spełnienie warunku (12) wymaga znacznego zwiększenia wartości oporności  $R_a$ , co wymaga równoczesnego zwiększenia wartości oporności  $R_b$ , aby zachować warunek  $|K| \gg 1$ .

Pomiar  $g_{sz2}$  oparty jest na analogicznej zasadzie jak pomiar  $g_{sz1}$ .

Zwiększanie oporności  $R_a$  lub  $R_b$  może zmienić warunki i wynik pomiaru, jeżeli oporności te stają się współmierne z modulem impedancji wejściowej w. o.

Alternatywny układ do pomiaru parametrów szumowych w. o. podany jest na rys. 7 [2]. Układ ten zawiera tak dobrane oporności  $R_a$ ,  $R_b$ ,  $R_c$ , aby zwierając kolejno przełączniki  $P1$  i  $P2$  otrzymać na wyjściu składnik szumów zawierający interesujący parametr. W tablicy zestawiono dokładne i przybliżone wartości napięcia szumów sprowadzonego do wejścia oraz warunki, które muszą być spełnione, aby to przybliżenie można było przyjąć za dokładne. Przedstawiony układ jest niejako uogólnioną wersją układu z rys. 6 Oczywiście, przy założeniu symetrii obu wejść wzmacniacza zachodzi równość

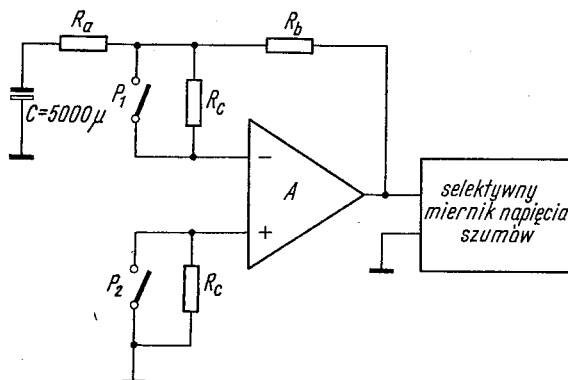
$$g_{sz1} = g_{sz2} = \frac{g_{sz}}{2}.$$

Wystarczy wtedy przeprowadzenie pomiaru dwóch parametrów, np.  $r_{sz}$  i  $g_{sz1}$ .

Tablica

Zestawienie mierzonych wartości oporności szumów sprowadzonych do wejścia dla układu z rys. 7

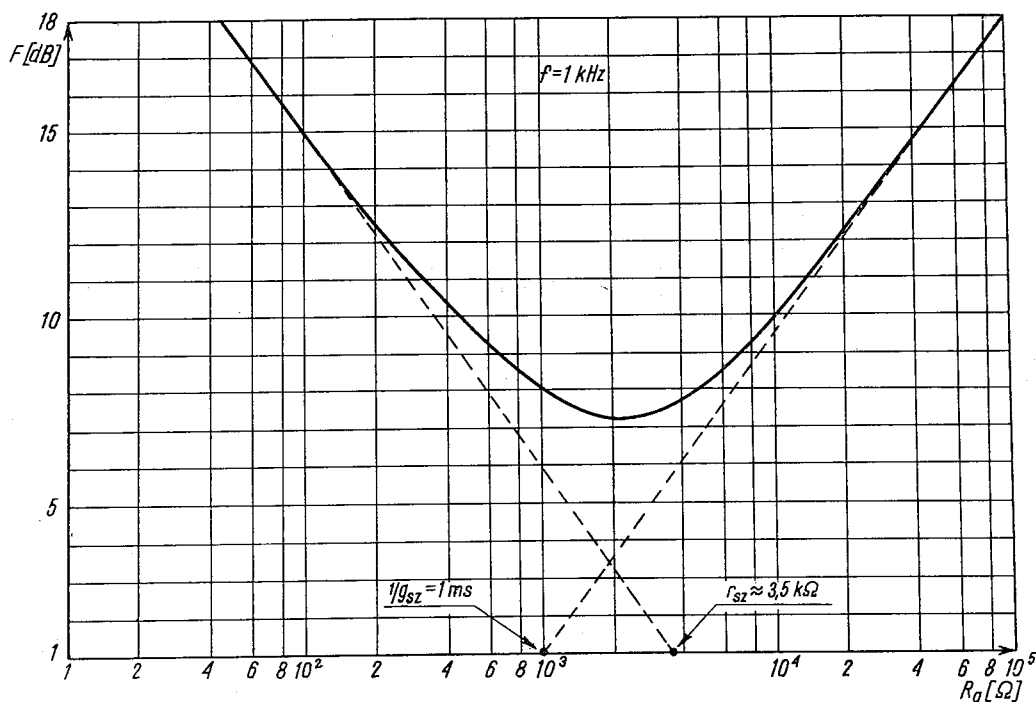
| Pomiar    | Przeł.<br>otwarty | $\overline{u_{sz, we}^2}/4kT\Delta f$                                                                   | Wartość<br>przybliżona | Warunki<br>przybliżenia                         |
|-----------|-------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|-------------------------------------------------|
| $r_{sz}$  | —                 | $R_a + \frac{R_b}{K^2} + \left(1 + \frac{1}{ K }\right)^2 r_{sz}$                                       | $r_{sz}$               | $R_a, R_b \ll r_{sz}$                           |
| $g_{sz1}$ | $P1$              | $R_a + R_c + \frac{R_b}{K^2} + \left(1 + \frac{1}{ K }\right)^2 [r_{sz} + g_{sz1}(R_a + R_c)^2]$        | $g_{sz1}R_c^2$         | $R_c \gg R_a$<br>$g_{sz1}R_c^2 \gg r_{sz}, R_c$ |
| $g_{sz2}$ | $P2$              | $R_a + \frac{R_b}{K^2} + \left(1 + \frac{1}{ K }\right)^2 (r_{sz} + g_{sz2}R_c^2 + R_c) + g_{sz1}R_a^2$ | $g_{sz2}R_c^2$         | $R_c \gg R_a$<br>$g_{sz2}R_c^2 \gg r_{sz}, R_c$ |



Rys. 7. Uogólniony układ pomiarowy oporności i przewodności szumów w. o.

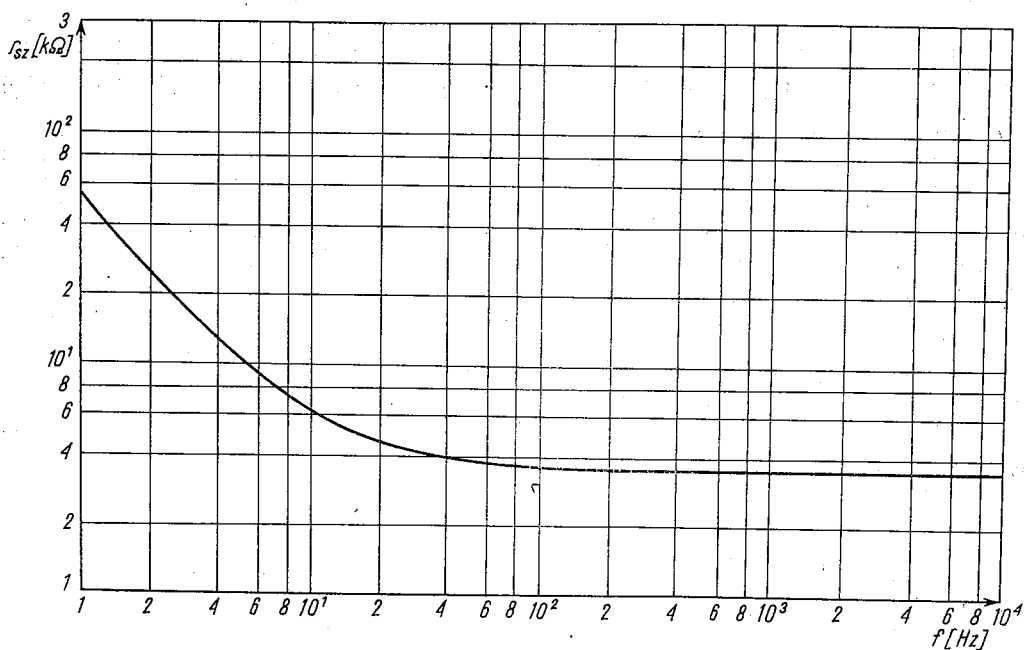
Opisane powyżej sposoby określenia zastępczych rezystancji i konduktancji szumów pozwalają na bezpośrednie pomierzenie tych wielkości w funkcji częstotliwości, napięć zasilających, temperatury itd.

Pomiar współczynnika szumów w. o. jedną ze znanych metod daje również możliwość pośrednią określenia parametrów szumowych  $r_{sz}$ ,  $g_{sz}$  tego wzmacniacza. Jak widać ze wzoru (6), asymptoty wykresu  $F = f(R_g)$  obliczone dla  $R_g \rightarrow 0$  i  $R_g \rightarrow \infty$  pozwalają wyznaczyć wartości  $r_{sz}$  i  $g_{sz}$ . Asymptoty te przecinają się z osią odciętych w punktach odpowiednio  $R'_g = r_{sz}$  i  $R''_g = 1/g_{sz}$ . Dla przykładu podano na rys. 8 zależność  $F(R_g)$  dla w. o.  $\mu A 709$  przy częstotliwości 1 kHz. Z wykresu można obliczyć  $r_{sz}$  z przebiegu asymptoty dla małych  $R_g$ . Uzyskano  $r_{sz} \cong 3,5 \text{ k}\Omega$ . Natomiast z przebiegu asymptoty dla dużych  $R_g$  uzyskano  $g_{sz1} \cong 1 \text{ mS}$ . Oszacowane w ten sposób wartości  $g_{sz}$ ,  $r_{sz}$  pozostają w dobrej zgodności z wartościami wyznaczonymi dla  $f = 1 \text{ kHz}$  w układach pomiarowych podanych w rozdziale 4.

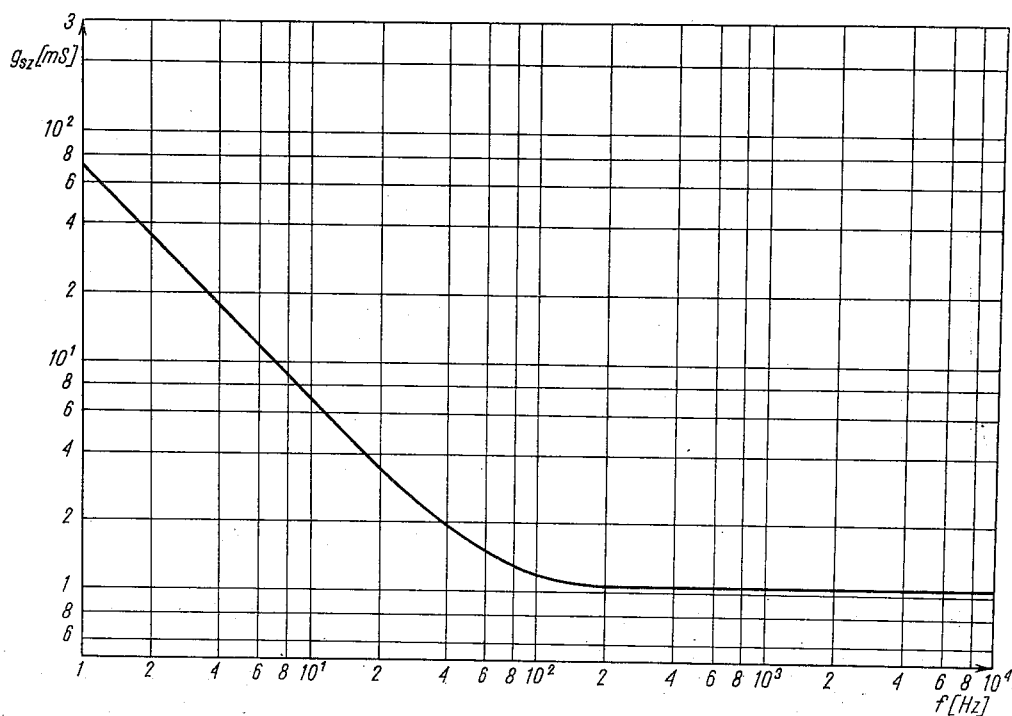


Rys. 8. Zależność  $F(R_g)$  dla w. o.  $\mu A 709$  przy  $f = 1 \text{ kHz}$

Odpowiednie wykresy otrzymane przez pomiar w układach z rys. 6 są przedstawione na rys. 9, 10. Przedyskutowane metody pomiarowe pozwalają określić elementy modelu szumowego w. o. Nie ujmują one specyficznych pomiarów wolnozmiennych sygnałów szumowych, które nie mogą być przedstawione stosowanym w pracy modelem deterministycznym. Omawiane metody pomiarowe mogą zostać zmodyfikowane do pomiaru korelacji między generatorami, występującej przy bardzo dużych częstotliwościach.



Rys. 9. Zależność zastępczej oporności szumów od częstotliwości dla w. o.  $\mu A 709$



Rys. 10. Zależność zastępczej przewodności szumów od częstotliwości dla w. o.  $\mu A 709$

# 5. CZYNNIKI WPŁYWAJĄCE NA WŁAŚCIWOŚCI SZUMOWE WZMACNIACZY OPERACYJNYCH

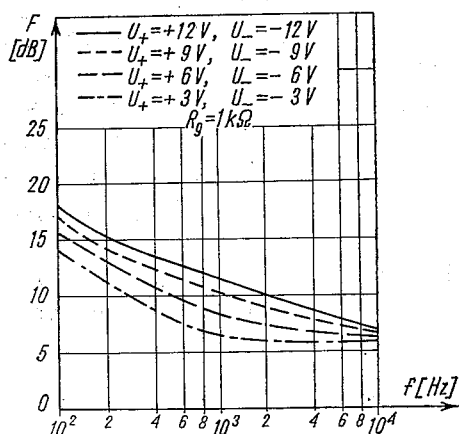
Współczynnik szumów oraz parametry szumowe  $r_{sz}$ ,  $g_{sz}$  w. o. zależą m. in. także od

- częstotliwości,
- napięć zasilania,
- temperatury.

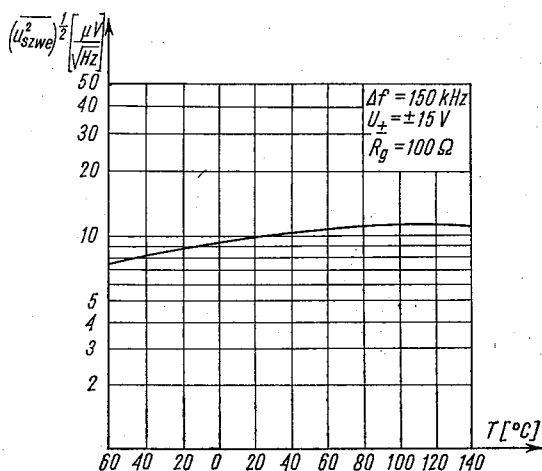
Zależność parametrów szumowych  $g_{sz}$ ,  $r_{sz}$  od częstotliwości ilustrują wykresy podane na rys. 9 i 10. Do częstotliwości rzędu 100 Hz wielkości te maleją monotonicznie w funkcji częstotliwości. Jest to zakres częstotliwości, w którym w badanym wzmacniaczu istotną rolę odgrywa szum  $1/f$ . Dla częstotliwości większych  $g_{sz}$ ,  $r_{sz}$  przyjmują wartość stałą niezależną od częstotliwości. Określony na podstawie wykresów podanych w katalogach zakres częstotliwości, w którym dominuje szum  $1/f$  zawiera się od zera do kilkudziesięciu kHz, w zależności od typu w. o. Jak widać z rysunków 9, 10 charakterystyczne częstotliwości, przy których  $r_{sz}$  i  $g_{sz}$  przestają zależeć od częstotliwości, są równe. W ogólności częstotliwości te jednak nie pokrywają się.

Należy również stwierdzić, że przebieg omawianych zależności dla różnych typów w. o., w szczególności z tranzystorami polowymi na wejściu, przyjmuje inny charakter. Np. dla w. o. 107 firmy Teledyne  $r_{sz}$  maleje monotonicznie w funkcji częstotliwości w zakresie do 100 kHz, jednak nachylenie krzywej  $r_{sz} = f(f)$  nie jest stałe. Należy dodać, że katalogi firmowe przeważnie podają zależność prądów i napięć szumów od częstotliwości określonych wzorami (1) przeliczonych na jednostkowe pasmo częstotliwości  $\Delta f = 1$  Hz. Wiedząc, że dla  $\Delta f = 1$  Hz i  $T = 300$  K wartość  $4kT$  wynosi  $1,6 \cdot 10^{-20}$  W i znając parametry  $g_{sz}$ ,  $r_{sz}$  łatwo obliczyć prąd i napięcie szumów.

Zależność współczynnika szumu od napięcia zasilania dla w. o. firmy RCA podaje rys. 11. Malenie współczynnika szumów wraz ze zmniejszaniem się napięcia zasilania tłumaczyć można głównie zmianą prądów stałych układu — a więc zmniejszeniem szumów śrutowych i  $1/f$  w układzie.



Rys. 11. Zależność współczynnika szumów od napięcia zasilania dla w. o. firmy RCA



Rys. 12. Zależność szerokopasmowego napięcia szumów na wejściu od częstotliwości dla w. o.  $\mu A$  739

Przykładowa zależność napięcia szumów  $\overline{U_{sz}^2}$  od temperatury dla w. o.  $\mu A$  739 pokazana jest na rys. 12. Jak widać z rysunku, napięcie skuteczne szumów wzmacniacza rośnie wraz ze wzrostem temperatury.

## 6. ANALIZA SZUMÓW WZMACNIACZY OPERACYJNYCH ZA POMOCĄ MASZINY CYFROWEJ

Niezależnie od opisanych pomiarowych metod identyfikacji parametrów szumowych w. o. istnieje efektywna metoda obliczeniowa prowadząca do wyznaczenia  $r_{sz}$ ,  $g_{sz1}$ ,  $g_{sz2}$  za pomocą maszyny cyfrowej. Polega ona na wprowadzeniu do schematu układu badanego wzmacniacza elementarnych źródeł prądowych szumów cieplnych i śrutowych związanych z parametrami fizycznymi oporności i tranzystorów, a następnie obliczeniu całkowitego szumu na wyjściu w trakcie jednego procesu analizy częstotliwościowej. Ta jednorazowa analiza, której czas jest niezależny od liczby nieskorelowanych źródeł prądowych szumów jest możliwa dzięki wykorzystaniu koncepcji międzywzajemności sieci dołączonej [3]. Sieć dołączona spełnia zasadę wzajemności z siecią oryginalną i jej macierz admitancyjna jest transponowaną macierzą admitancyjną  $Y$  sieci oryginalnej.

Przytoczoną metodę wykorzystano do obliczenia szumów typowego stopnia wejściowego wzmacniacza I generacji [4]. Pozwoliło to nie tylko na obliczenie parametrów modelu szumowego, ale również poprzez porównanie tzw. transmitancji szumowych możliwe było zbadanie udziału poszczególnych elementów w sumarycznym szumie całego wzmacniacza. Posługując się tą metodą można też obliczać bezpośrednio współczynnik szumów i stosunek sygnał/szum dowolnego układu.

## 7. ZAKOŃCZENIE

Jednym z ograniczeń towarzyszących zastosowaniu w. o. jest obecność szumów na jego wyjściu. Szumy te wnoszone są inherentnie przez sam wzmacniacz. Ogólnie przyjęty model szumów dowolnego czwórnika może zostać zaadaptowany do szumowego opisu w. o. Identyfikacja elementów tego modelu następuje albo na drodze pomiarowej, na podstawie danych katalogowych, albo przez zastosowanie metody obliczeniowej na maszynie cyfrowej. Podane w pracy zależności pozwalają określić przy znanym modelu w. o. różne parametry szumowe zarówno w. o. w dowolnych konfiguracjach, jak i układów, w których w. o. występuje jako jeden z elementów.

Przeprowadzona analiza potwierdza słuszność przyjętego modelu i jest punktem wyjścia do projektowania małoszumujących układów ze wzmacniaczami operacyjnymi.

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. Van der Ziel, Noise — Sources, Characterization, Measurement, Prentice Hall, N. Y. 1971.
2. I. G. Graeme i in., Operational Amplifiers, Mc Graw Hill Co., N. Y. 1971.



3. R. Rohrer, L. Nagel, R. Mayer, L. Weber, Computationally Efficient Electronic-Circuit Noise Calculation, IEEE Journ. on Sol. St. Circ., Aug. 1971, s. 204—213.
4. J. Żurada, Właściwości częstotliwościowe i szumowe rzeczywistego źródła prądowego sterowanego napięciem DVCCS, Rozprawy Elektrotechniczne, 1972, z. 3, s. 459—467.

W. J. STEPOWICZ, J. M. ŻURADA

## NOISE PERFORMANCE OF OPERATIONAL AMPLIFIERS

### Summary

In this paper noise performance of the operational amplifier and its equivalent noise resistance as well as noise conductance at the input are described. Spot noise factor, signal to noise ratio and broadband output noise for various configurations of the operational amplifier are derived. Measuring methods are also shown. The influence of external conditions and input stages applied are also shown. Noise characterisation of the operational amplifier is necessary for low-noise design of linear active circuits with use of op-amps.

W. J. STEPOWICZ, J. M. ŻURADA

## LES PARAMETRES DE BRUIT DES AMPLIFICATEURS OPERATIONNELS

### Résumé

On décrit les paramètres fondamentales de bruit dans des quadripôles et on les adapte pour caractériser l'amplificateur opérationnel à l'aide de résistance et de conductance équivalents de bruit. On dérive d'autres notions importantes: facteur de bruit à bande étroite, rapport signal/bruit et le bruit de sortie à bande vaste. On discute l'influence des stages de l'entrée et des conditions externes sur le bruit des amplificateurs opérationnels. Les paramètres de bruit sont nécessaires pour la construction des circuits à bas niveau de bruit et contenant des amplificateurs opérationnels.

W. J. STEPOWICZ, J. M. ŻURADA

## RAUSCHKENNWERTE VON OPERATIONSVERSTÄRKERN

### Zusammenfassung

Im Aufsatz erörtert man den äquivalenten Rauschwiderstand und den Rauschleitwert als Grundrauschkennwerte von Operationsverstärkern sowie andere Kenngrößen, die von den obengenannten Kennwerten abhängen. Hierzu gehören: schmalbändige Rauschzahl, Signal/Rausch-Verhältnis und breitbändiges Ausgangsrauschen. Meßverfahren für äquivalente Rauschelemente werden angegeben. Man betrachtet den Einfluß der Eingangsstufen und der Außenfaktoren auf das Rauschen des Operationsverstärkers. Die Identifizierung von Rauschkennwerten der Operationsverstärker ist für das Entwerfen von Netzwerken mit geringer Rauschzahl unerlässlich.

В. И. СТЕПОВИЧ, Я. М. ЖУРАДА

## ШУМОВЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАЦИОННЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ

## Резюме

В труде обсуждены шумовые параметры операционного усилителя как эквивалентные сопротивления и проводимости источников шумов, а также связанные с ними — узкополосный коэффициент шума, отношение сигнал/шум и широкополосный шум на выходе. Приведен метод измерения параметров шумовой модели. Схарактеризовано влияние входного каскада и внешних условий на шум операционных усилителей. Знание этих шумовых свойств необходимо при проектировании малошумящих схем с операционными усилителями.

## Dokładność reflektometrycznego pomiaru niedopasowania w paśmie mikrofalowym

WŁADYSŁAW ADAMSKI (GDAŃSK)

*Instytut Telekomunikacji Politechniki Gdańskiej*

*Otrzymano 24.5.1973*

Wyprowadzono wyrażenia na współczynniki błędów pomiaru modułu współczynnika odbicia ( $\Gamma$ ) i współczynnika fali stojącej ( $WFS$ ) przy wykonywaniu tych pomiarów za pomocą mikrofalowego reflektometru częstotliwościowego. Współczynniki te obejmują błędy pochodzące od dokonanego wyboru parametrów podzespołów mikrofalowych i małej częstotliwości oraz od stosowanego obciążenia wzorcowego.

Wyrażenia opisujące błędy względne pomiaru  $|\Gamma|$  i  $WFS$  oraz przykładowe krzywe umożliwiają ilościową ocenę maksymalnych błędów pomiaru, spodziewanych w układach reflektometrów. Artykuł może być szczególnie użyteczny przy projektowaniu i stosowaniu mikrofalowych reflektometrów częstotliwościowych, które obecnie są urządzeniami szerokopasmowymi, pracującymi w automatycznych zestawach pomiarowych.

### Wykaz ważniejszych oznaczeń

- $c$  — sprzężenie sprzęgacza kierunkowego, określane jako stosunek napięć lub prądów,
- $C$  — sprzężenie sprzęgacza kierunkowego, określane jako stosunek mocy,
- $d$  — kierunkowość sprzęgacza kierunkowego, określana jako stosunek napięć lub prądów,
- $D$  — kierunkowość sprzęgacza kierunkowego, określana jako stosunek mocy,
- $F$  — współczynnik błędu względnego pomiaru  $WFS$  dla  $\Gamma_r \neq 0$ ,
- $g$  — błąd względny wzorca niedopasowania,
- $G$  — współczynnik błędu względnego pomiaru  $WFS$  dla  $\Gamma_r \neq 0$ ,
- $H$  — współczynnik błędu względnego pomiaru  $WFS$  dla  $\Gamma_w \neq 0$ ,
- $k$  — współbieżność parametrów par sprzęgacz-detektor,
- $K$  — współczynnik proporcjonalności stosunku napięć w kanałach fal odbitej i padającej,
- $r$  — współczynnik fali stojącej ( $WFS$ ),
- $s$  — błąd względny pomiaru modułu współczynnika odbicia, który powstaje przy kalibracji reflektometru,
- $t$  — współbieżność charakterystyk przenoszenia kanałów części m. cz. reflektometru, współczynnik transmisji głównej prowadnicy sprzęgacza kierunkowego, określany jako stosunek napięć lub prądów,

- $T$  — współczynnik transmisji głównej prowadnicy sprzęgacza kierunkowego, określany jako stosunek mocy,  
 $U$  — napięcie odniesienia w pętli  $ARM$ , napięcie otrzymane z detektora mikrofalowego,  
 $\gamma$  — czułość napięciowa detektora mikrofalowego,  
 $\Gamma$  — współczynnik odbicia, współczynnik składowej błędu pomiaru niedopasowania,  
 $\Delta A$  — błąd bezwzględny pomiaru wielkości  $A$ ,  
 $\delta_A$  — błąd względny pomiaru wielkości  $A$ ,  
 $\varepsilon$  — charakteryzuje odchylenie od wartości średniej sprzężenia sprzęgacza kierunkowego,  
 $\zeta$  — charakteryzuje odchylenie od wartości średniej współczynnika transmisji,  
 $\eta$  — charakteryzuje odchylenie od wartości średniej czułości napięciowej detektora,  
 $\chi$  — charakteryzuje odchylenie od wartości średniej funkcji przenoszenia kanału w części m.cz. reflektometru,  
 $A[\text{dB}]$  — wielkość  $A$  wyrażona w decybelach.

### Indeksy dolne

- $o$  — wartość średnia, wzorzec odniesienia, detektor,  
 $p$  — fali padającej,  
 $r$  — fali odbitej, szczątkowy,  
 $t$  — współbieżność,  
 $w$  — widziany w wrotach pomiarowych,  
 1 lub 2 — wrota nr 1 lub 2.

## 1. WSTĘP

Przez niedopasowanie w obwodach mikrofalowych rozumie się, że w rozważanym przekroju prowadnicy falowej impedancja wejściowa jest różna od zadanej impedancji charakterystycznej. Powoduje to powstawanie sygnałów rozchodzących się w kierunku do źródła pobudzającego obwód, a więc powstawanie fali stojącej w prowadnicy falowej.

Stosowane są cztery sposoby liczbowego określania dokładności reflektometrycznego pomiaru niedopasowania. Podaje się: 1 — wartość liczbową błędu bezwzględnego pomiaru modułu współczynnika odbicia ( $\Delta|\Gamma_x|$ ), 2 — błąd względny pomiaru modułu współczynnika odbicia  $\left(\frac{\Delta|\Gamma_x|}{|\Gamma_x|} [\%]\right)$ , 3 — błąd względny pomiaru współczynnika fali stojącej —  $WFS$   $\left(\frac{\Delta r}{r} [\%]\right)$ , 4 — niedokładność pomiaru  $WFS$ , określaną jako  $WFS_u = r_u$  i obliczoną ze wzoru

$$r_u = \frac{1 + \Delta|\Gamma_x|}{1 - \Delta|\Gamma_x|}.$$

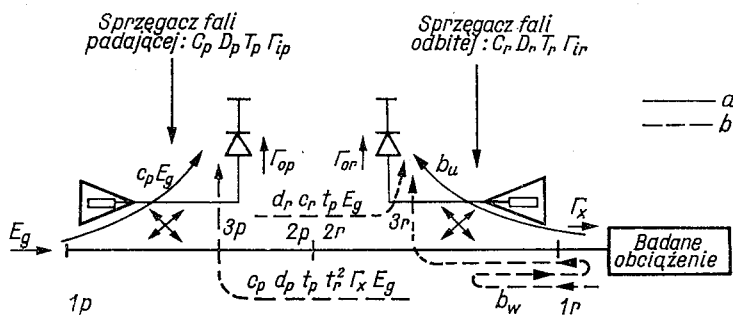
Ostatnia wielkość jest wprowadzana przez analogię do wyrażenia określającego dokładności pomiarów niedopasowania, wykonywanych za pomocą linii pomiarowej ze szczeliną, gdzie podaje się  $WFS$  szczątkowy.

Podawane wartości liczbowe odnoszą się do określonych przedziałów wartości mierzonych  $|\Gamma_x|$  lub mierzonych  $WFS$ . Jak zostanie to wykazane dalej, spotykane w literaturze matematyczne wyrażenia określające błędy reflektometrycznego pomiaru niedopasowania są najczęściej mało dokładne, gdyż nie zawierają wszystkich składników błędów lub nie opisują kompletnych matematycznych związków pomiędzy parametrami podzespołów reflektometru a składowymi błędów. Oprócz wyrażen opisujących składowe błędów, powodowanych parametrami podzespołów mikrofalowych, zostaną wyprowadzone wyrażenia opisujące błędy powodowane parametrami części m.c.z. reflektometru oraz błędy wynikające ze stosowania niedoskonałych wzorców niedopasowania. Okazuje się, że nie jest zupełnie obojętny wybór wartości  $WFS$  takiego wzorca, stosowanego przy regulacji wzmocnienia w układach m.c.z. reflektometru, w celu korekcji charakterystyk przenoszenia torów sygnałów fal padającej i odbitej.

Maksymalny błąd pomiaru układu jest sumą błędów składowych. Stosuje się również [4, 5] błąd średniokwadratowy. Wartość liczbową tego błędu jest mniejsza od wartości maksymalnej i należy spodziewać się, że jej prawdopodobieństwo wystąpienia jest większe niż wartości maksymalnej.

## 2. BŁĘDY CZĘŚCI MIKROFAŁOWEJ REFLEKTOMETRU CZĘSTOTLIWOŚCIOWEGO

Rozważa się najczęściej stosowany układ części mikrofalowej reflektometru częstotliwościowego, składający się z dwóch sprzęgaczy kierunkowych i detektorów, pokazanych na rys. 1.



Rys. 1. Sygnały w części mikrofalowej reflektometru częstotliwościowego  
a — sygnały użyteczne b — sygnały fałszywe

Parametry sprzęgacza kierunkowego zostały zdefiniowane jak podano na rys. 2;  $P_n$  i  $E_n$  oznaczają moce i maksymalne wartości natężenia pola elektrycznego fal wychodzących z wrót  $n$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) zamkniętych dopasowanymi obciążeniami, a  $P_g$  i  $E_g$  jest mocą i odpowiadającym jej natężeniem pola sygnału podawanego z generatora sygnałowego na wrota wejściowe sprzęgacza.

Sygnały użyteczny  $b_u$  oraz fałszywy  $b_w$ , pokazane na rys. 1, można opisać, na podstawie definicji parametrów sprzęgaczy kierunkowych, następującymi wyrażeniami

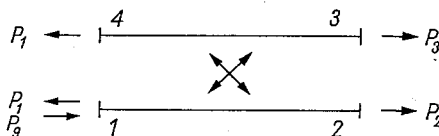
$$b_u = E_g t_p t_r \Gamma_{1r} c_r \Gamma_x, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} b_w &= E_g t_p t_r \Gamma_{1r} c_r \Gamma_x^2 + E_g t_p t_r^3 \Gamma_{2p} c_r \Gamma_x^2 + E_g t_p t_r c_r^3 \Gamma_{or} \Gamma_x^2 = \\ &= E_g t_p t_r c_r (\Gamma_{1r} + t_r^2 \Gamma_{2p} + c_r^2 \Gamma_{or}) \Gamma_x^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Wyrażenie (2) ujmuje tylko pierwsze odbicia sygnału fali odbitej wchodzącej do reflektometru, które są powodowane przez niedopasowanie wrót  $1r$ ,  $2p$  i detektora fali odbitej. Następne odbicia, jak również straty odbiciowe powodowane przez  $\Gamma_{2p}$  i  $\Gamma_{2r} \neq 0$ , pominięto jako wielkości bardzo małe. Wypadkowe sygnały na wejściu detektorów mikrofalowych są:

$$b_{ip} = \frac{E_g c_p}{1 - \Gamma_{3p} \Gamma_{op}} (1 + d_p t_p t_r^2 \Gamma_x), \quad (3)$$

$$b_{ir} = \frac{E_g c_r t_p t_r}{1 - \Gamma_{3r} \Gamma_{or}} \left[ \Gamma_x + \frac{d_r}{t_r} + (\Gamma_{1r} + t_r^2 \Gamma_{2p} + c_r^2 \Gamma_{or}) \Gamma_x^2 \right]. \quad (4)$$



Rys. 2. Parametry sprzęgacza kierunkowego

sprężenie:  $C = \frac{P_3}{P_g}$  lub  $c = \frac{E_3}{E_g}$  lub  $C[\text{dB}] = -10 \lg C = 20 \lg c$ ,

kierunkowość:  $D = \frac{P_4}{P_3}$  lub  $d = \frac{E_1}{E_3}$  lub  $D[\text{dB}] = -10 \lg D = -20 \lg d$ ,

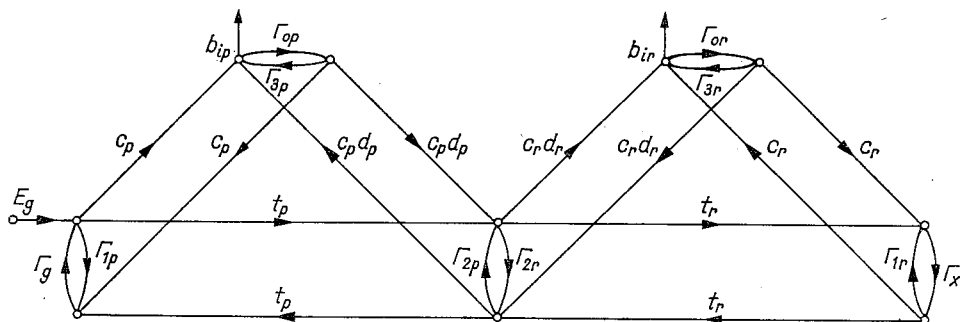
współczynnik transmisji:  $T = \frac{P_2}{P_g}$  lub  $t = \frac{E_2}{E_g}$  lub  $T[\text{dB}] = -10 \lg T = -20 \lg t$

współczynnik odbicia:  $|\Gamma_1| = \sqrt{\frac{P_1}{P_g}} = \frac{E_1}{E_g}$

Po prostych przekształceniach matematycznych i pominięciu małych wyższego rzędu, stosunek sygnałów  $b_{ir}$  do  $b_{ip}$  można zapisać następująco

$$R_i = \frac{c_r t_p t_r}{c_p} \cdot \frac{1 - \Gamma_{3p} \Gamma_{op}}{1 - \Gamma_{3r} \Gamma_{or}} \left[ \Gamma_x + \frac{d_r}{t_r} + (\Gamma_{1r} + t_r^2 \Gamma_{2p} + c_r^2 \Gamma_{or} - d_p t_p t_r^2) \Gamma_x^2 \right]. \quad (5)$$

Wyrażenie (5) może być wyprowadzone przez zastosowanie reguły Masona [10, 15] do grafu przepływu sygnałów, pokazanego na rys. 3. Graf ten został podany i rozwiązany przez Elyego [7]. Uproszczony graf reflektometru podał i rozwiązał wcześniej Kuhn [11].



Rys. 3. Graf przepływu sygnałów dla części mikrofalowej reflektometru pokazanego na rys. 1

Zakładając, że detektory mikrofalowe mają kwadratową charakterystykę detekcji i oznaczając przez  $\gamma_p$  i  $\gamma_r$  czułości napięciowych detektorów, stosunek napięć otrzymanych z detektorów można zapisać następująco:

$$R = \frac{U_r}{U_p} = K(\Gamma_x + \Gamma_r + \Gamma_w \Gamma_x^2)^2, \quad (6)$$

gdzie:

$$K = \frac{C_r T_p T_r}{C_p} \cdot \frac{\gamma_r}{\gamma_p} \left( \frac{1 - \Gamma_{3p} \Gamma_{op}}{1 - \Gamma_{3r} \Gamma_{or}} \right)^2, \quad (7)$$

$$\Gamma_r = \frac{d_r}{t_r}, \quad (8)$$

$$\Gamma_w = \Gamma_{1r} + (\Gamma_{2p} - d_p t_p) t_r^2 + c_r^2 \Gamma_{or}. \quad (9)$$

Wielkość  $\Gamma_r$  jest szczątkowym współczynnikiem odbicia reflektometru, tj. wartością wskazywaną przez reflektometr, gdy idealnie dopasowane obciążenie ( $\Gamma_x = 0$ ) dołączone jest do wrót pomiarowych (wrota 1, na rys. 1) reflektometru;  $\Gamma_w$  jest współczynnikiem odbicia „widzianym” w wrotach pomiarowych reflektometru. Niedopasowanie charakteryzowane przez  $\Gamma_w$  powoduje odbicia użytecznego sygnału fali odbitej, wchodzącego do wrót pomiarowych.

Dla określenia wpływu współczynnika proporcjonalności  $K$  na wynik pomiaru  $\Gamma_x$  wprowadzono następujące oznaczenia:

$$C = \varepsilon C_o, \quad T = \zeta T_o, \quad \gamma = \eta \gamma_o,$$

gdzie  $C_o$ ,  $T_o$  i  $\gamma_o$  są średnimi wartościami w określonych przedziałach zmiennych, od których zależą, a  $\varepsilon$ ,  $\zeta$  i  $\eta$  charakteryzują odchylenia odpowiednich wielkości od ich wartości średnich w tych przedziałach. Wyrażenie (7) zapisano w postaci:

$$K = \frac{C_{or} T_{op} T_{or} \gamma_{or}}{C_{op} \gamma_{op}} \cdot \frac{\varepsilon_r \zeta_p \zeta_r \eta_r}{\varepsilon_p \eta_p} \left( \frac{1 - \Gamma_{3p} \Gamma_{op}}{1 - \Gamma_{3r} \Gamma_{or}} \right)^2 = K_o (1 + \Gamma_t)^2, \quad (10)$$

gdzie:

$$K_o = \frac{C_{or} T_{op} T_{or} \gamma_{or}}{C_{op} \gamma_{op}}, \quad (11)$$

$$\Gamma_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_p} \cdot \frac{\eta_r}{\eta_p} \cdot \zeta_p \zeta_r} \cdot \frac{1 - \Gamma_{3p} \Gamma_{op}}{1 - \Gamma_{3r} \Gamma_{or}} - 1; \quad (12)$$

$\Gamma_t$  jest dewiacją odczytu  $|\Gamma_x|$  powodowaną zmianami parametrów reflektometru przy zmianach częstotliwości i mocy generatora sygnałowego.

Po przekształceniach i pominięciu małych wyższego rzędu, wyrażenie (12) można zapisać w postaci:

$$|\Gamma_t| = |0,115[(\varepsilon_r[\text{dB}] - \varepsilon_p[\text{dB}]) + (\eta_r[\text{dB}] - \eta_p[\text{dB}]) + (\zeta_r[\text{dB}] + \zeta_p[\text{dB}])]| + |\Gamma_{3r} \Gamma_{or} - \Gamma_{3p} \Gamma_{op}|. \quad (13)$$

Wielkość  $\zeta_r[\text{dB}] + \zeta_p[\text{dB}]$  jest całkowitą dewiacją współczynników transmisji sprzęgaczy, a  $\varepsilon_r[\text{dB}] - \varepsilon_p[\text{dB}]$  i  $\eta_r[\text{dB}] - \eta_p[\text{dB}]$  określają współbieżność współczynników sprzężeń i czu-

łości napięciowych detektorów przy zmianach mocy i częstotliwości generatora sygnałowego.

Pojęcie współbieżności parametrów podzespołów reflektometru matematycznie można określić jako normę funkcji  $\frac{f_1}{Af_2}$  oraz funkcji tożsamościowo równej 1, np.

$$\left\| \frac{f_1}{Af_2} - 1 \right\| = \max_{x \in [x_1, x_2]} \left| \frac{f_1(x)}{Af_2(x)} - 1 \right|, \quad (14)$$

gdzie  $f_1(x) = Af_{1z}(x)$ , a stała  $A$  nie zależy od  $x$ .

Przez funkcje  $f_1$  i  $f_2$  rozumiemy sprzężenia sprzęgaczy, czułości napięciowe detektorów albo funkcje przenoszenia kanałów urządzeń m.cz. reflektometru. Zmienna  $x$  może oznaczać częstotliwość, moc generatora sygnałowego, częstotliwość modulującą, temperaturę otoczenia lub napięcie zasilania.

Z wyrażeń (13) i (14) wynika, że sprzęgacze kierunkowe i detektory mikrofalowe nie muszą mieć stałych parametrów w funkcji częstotliwości, a wystarcza aby parametry współpracujących ze sobą podzespołów zmieniały się jednakowo. Stała różnica tych parametrów wyrażonych w [dB] również nie powoduje błędów pomiaru, gdyż może ona być uwzględniona w wyrażeniu na  $K_o$ . Jeżeli np. sprzężenie sprzęgacza fali padającej jest słabsze o  $A$  [dB] od sprzęgacza fali odbitej, to znaczy  $C_{or} = AC_{op}$ , a dla czułości detektorów zachodzi podobna zależność  $\gamma_{or} = B\gamma_{op}$ , to wyrażenie (11) przyjmuje postać

$$K_o = ABT_{op}T_{or}. \quad (15)$$

W praktycznych układach stosuje się  $A$  bliskie 1 lub bliskie 10. Sprzęgacze o  $A \cong 1$  mają zwykle lepszą współbieżność sprzężenia, gdyż łatwiej mogą być wykonane identycznie.

Współczynnik  $B$  w praktyce spełnia warunek  $0,5 \leq B \leq 2$ . Również można przyjąć że w stosowanych układach  $|T_t| \ll 1$ . Podstawiając (10) do (6) i pomijając składniki będące, małymi wyższego rzędu otrzymamy

$$R = K_o(I_x + I_r + I_t I_x + I_w I_x^2)^2, \quad (16)$$

$$|\Delta I_x| = |I_r + I_t I_x + I_w I_x^2|, \quad (17)$$

$$\delta_{|I_x|} = \frac{|\Delta I_x|_{\max}}{|I_x|} = \frac{|I_r|}{|I_x|} + |I_t| + |I_w| |I_x|. \quad (18)$$

Wyrażenie (17) opisuje błąd bezwzględny, a wyrażenie (18) maksymalny błąd względny pomiaru modułu współczynnika odbicia. Błąd pochodzi od nieidealnych podzespołów części mikrofalowej reflektometru. Wyrażenia te są słuszne dla każdego zestawu reflektometru częstotliwościowego, niezależnie od rodzajów użytych w nim podzespołów mikrofalowych i rodzaju współpracującej części małej częstotliwości. Współczynniki  $I_r$ ,  $I_t$  i  $I_w$  dla reflektometrów o innej niż podano na rys. 1 konfiguracji części mikrofalowej, można znaleźć w pracy [1].

Wcześniejsze prace Ansona, Beattego i Engena [2, 3], dotyczące dokładności reflektometrycznych pomiarów niedopasowania, zawierają informację o wpływie na błędy pomiarów niskiej kierunkowości sprzęgaczy i współczynnika odbicia „widzianego” w wrotach pomiarowych reflektometru. Nie uwzględniono tam współczynnika  $I_r$ , który charakteryzuje dodatkowe błędy reflektometrycznego pomiaru niedopasowania, przy stosowaniu



szerokopasmowych metod automatycznych. Wpływ  $\Gamma_w \neq 0$  na błędy pomiaru oszacowano na podstawie pomiarów. Brak jest przejrzystych wyrażeń uzależniających tą wielkość od powszechnie przyjętych parametrów podzespołów mikrofalowych.

Również literatura krajowa [6, 12], dotycząca zagadnień reflektometrycznych pomiarów, zawiera ilościową analizę tylko wpływu skończonej kierunkowości sprzęgaczy na błędy pomiaru. Prace [13, 14] MacKenziego dotyczą już zastosowań reflektometru częstotliwościowego do szerokopasmowych pomiarów niedopasowania i zawierają wyrażenia opisujące wpływ zmian parametrów mikrofalowych na wynik pomiaru przy zmianach częstotliwości pracy urządzenia. Podobnie przeanalizowano problem w [8, 9], gdzie dodatkowo wprowadzono wielkość uzależniającą błąd pomiaru od odchyłek parametrów detektorów przy zmianach poziomu mocy generatora sygnałowego. Podane w [8, 9, 13, 14] wyrażenia nie opisują kompletnych zależności pomiędzy zmianami parametrów podzespołów a wynikającymi z tych zmian błędami pomiarów. Ponadto podawane wyrażenia nie nadają się do ilościowej oceny błędów, gdyż nie zawierają wielkości łatwo otrzymywanych z podawanych przez producentów lub łatwo mierzalnych parametrów podzespołów. Także Ely [7] wprowadził współczynnik  $\Gamma_i$  jedynie w sposób opisowy, podając identyczne jak (17) wyrażenie, gdzie wielkość  $\Gamma_i$  została scharakteryzowana bez podania matematycznej zależności od współbieżności sprzężeń sprzęgaczy, czułości detektorów i odchyłki od prawa detekcji kwadratowej oraz kierunkowości sprzęgaczy.

Bardzo często mikrofalowe reflektometry są również wyskalowane w jednostkach *WFS*. Z zależności pomiędzy *WFS* a współczynnikiem odbicia można wyznaczyć następujący związek pomiędzy dokładnością pomiaru modułu współczynnika odbicia a dokładnością pomiaru odpowiadającej mu wartości *WFS*

$$\delta_r = \frac{|\Delta r|}{r} = \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \delta_{|\Gamma_i|}, \quad (19)$$

gdzie  $r$  jest mierzonym *WFS*, a  $\delta_{|\Gamma_i|}$  jest błędem względnym pomiaru  $|\Gamma_i|$ , określonym zależnością (18).

Na podstawie dwóch ostatnich związków można wyznaczyć wyrażenie opisujące błąd względny reflektometrycznego pomiaru *WFS*

$$\delta_r = F|\Gamma_r| + G|\Gamma_i| + H|\Gamma_w|, \quad (20)$$

gdzie:

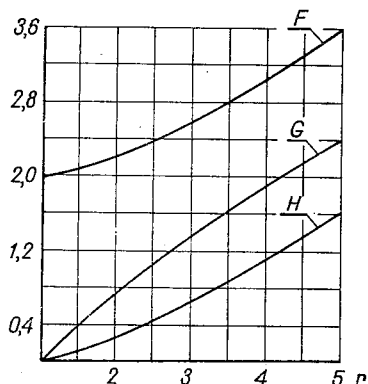
$$F = \frac{(r+1)^2}{2r},$$

$$G = \frac{r^2 - 1}{2r},$$

$$H = \frac{(r-1)^2}{2r}.$$

Współczynniki  $F$ ,  $G$  i  $H$  przedstawiono na rys. 4. Błąd względny reflektometrycznego pomiaru *WFS* jest funkcją rosnącą i jeżeli mamy podaną dokładność pomiaru określonej wartości *WFS*, to można powiedzieć, że błąd względny pomiaru wartości *WFS* mniejszych od danej jest zawsze liczbowo mniejszy. Ostatnie stwierdzenie nie jest słuszne w odnie-

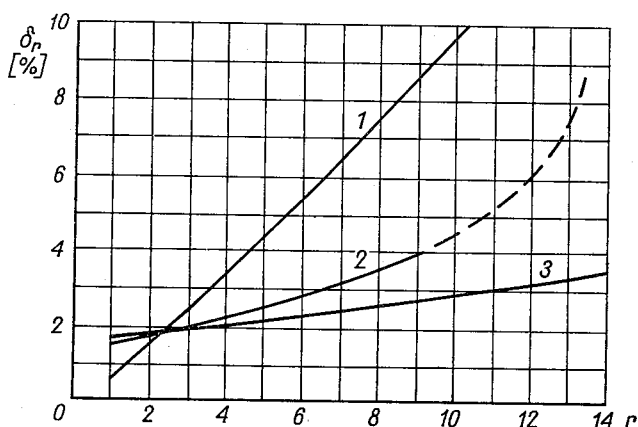
sieniu do błędu względnego reflektometrycznego pomiaru modułu współczynnika odbicia. Widać to z zależności (18). Można stwierdzić, że dla  $|\Gamma_x| < 0,2$ ,  $\delta_{|\Gamma|} = f(|\Gamma_x|)$  jest funkcją malejącą, a dla  $|\Gamma_x| > 0,6$  — funkcją rosnącą. Charakter zmian funkcji błędu względnego reflektometrycznego pomiaru  $|\Gamma_x|$  dla  $0,2 \leq |\Gamma_x| \leq 0,6$  zależy od stosunku  $|\Gamma_r|$  do  $|\Gamma_w|$ .



Tys. 4. Współczynniki błędów względnego reflektometrycznego pomiaru WFS

Przytoczone liczbowe wartości otrzymano przyjmując osiągalne w praktyce parametry części mikrofalowej reflektometru, tj. kierunkowość sprzęgacza fali odbitej  $40 \div 50$  dB,  $|\Gamma_w| = 0,03 \div 0,08$ .

Im mniejsza wartość  $|\Gamma_x|$  jest mierzona, tym gorsza dokładność pomiaru, gdyż wartość składnika  $|\Gamma_r|/|\Gamma_w|$  w wyrażeniu (18) staje się dominującą. Jednakże metody reflektometryczne są najdokładniejszymi metodami przy pomiarach małych odbić, mimo niekorzystnego przebiegu błędu względnego w funkcji mierzonych  $|\Gamma_x|$ . Widać to z wykresów, przedstawionych na rys. 5, podanych w [5].



Rys. 5. Zależność błędów względnego pomiaru WFS od wartości mierzonych WFS za pomocą: 1 — reflektometru, 2 — bezszczelinowej linii, 3 — linii pomiarowej ze szczeliną

Ilościową ocenę błędu względnego pomiaru  $|I_r|$  powodowanego przez  $|I_r| \neq 0$ ,  $\delta_{|I|F}$ , oraz odpowiadającego mu błędu względnego pomiaru  $WFS$ ,  $\delta_{rF}$ , można przeprowadzić w oparciu o następujące wyrażenia:

$$\delta_{|I|F} = \frac{|d_r|}{|t_r| |I_x|} = \frac{1}{|I_x|} 10^{-\frac{D_r[\text{dB}] - T_r[\text{dB}]}{20}}, \quad (21)$$

$$\delta_{rF} = \frac{(r+1)}{2r} 10^{-\frac{D_r[\text{dB}] - T_r[\text{dB}]}{20}}. \quad (22)$$

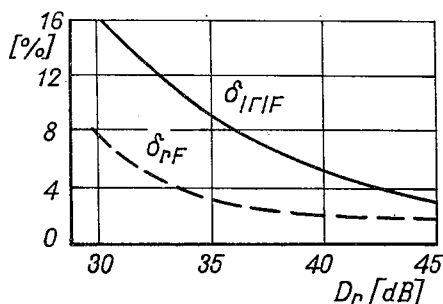
Praktycznie  $D_r[\text{dB}] \gg T_r[\text{dB}]$ .

Wyrażenia (21) i (22) dla  $T_r[\text{dB}] = 0$  przedstawiono na rys. 6 i 7.

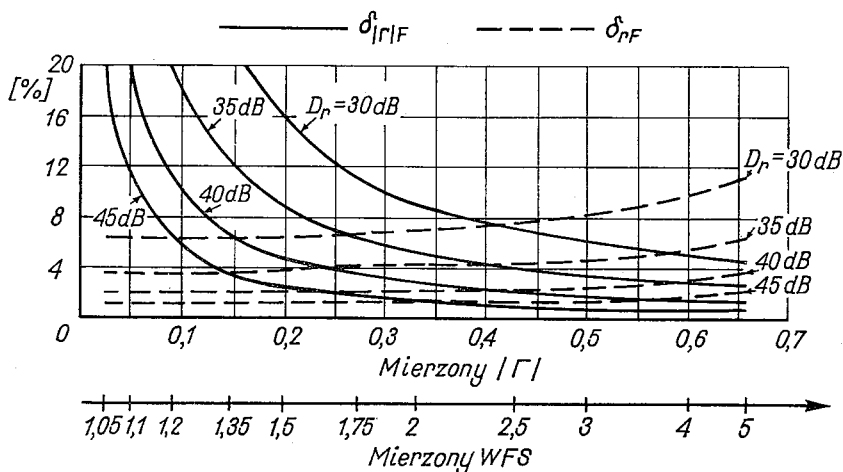
Błędy pomiaru powodowane przez  $I_t \neq 0$  można ocenić ilościowo na podstawie zależności (13), którą można napisać następująco:

$$\delta_{|I|G} = |I_t| = 0,115k_t[\text{dB}], \quad (23)$$

$$\delta_{rG} = 0,115Gk_t[\text{dB}] = 5,75 \cdot 10^{-2} \frac{r^2 - 1}{r} k_t[\text{dB}], \quad (24)$$



Rys. 6. Błąd względny pomiaru niedopasowania o  $WFS_x = 1,5$  powodowany skończoną kierunkowością sprzęgacza fali odbitej



Rys. 7. Błędy względne pomiaru  $|I|$  i  $WFS$  powodowane skończoną kierunkowością sprzęgacza fali odbitej jako funkcje mierzonych  $|I|$  i  $WFS$

gdzie  $k_r$  [dB] oznacza sumaryczną współbieżność parametrów sprzęgaczy i detektorów. Wielkość tę można wyznaczyć na podstawie parametrów sprzęgaczy i detektorów podawanych przez producentów, lub pomierzyć po zestawieniu par sprzęgacz-detektor. W pierwszym przypadku określić można maksymalne spodziewane błędy przy wyborze tych podzespołów dla zastosowań w części mikrofalowej reflektometru.

Ilościową ocenę błędów pomiarów  $|I|$  i  $WFS$  powodowanych przez  $|I_w| \neq 0$  wykonać można na podstawie wyrażeń

$$\delta_{|I|H} = |I_x| |I_w|, \quad (25)$$

$$\delta_{rH} = H |I_w| = \frac{(r-1)^2}{2r} |I_w| \quad (26)$$

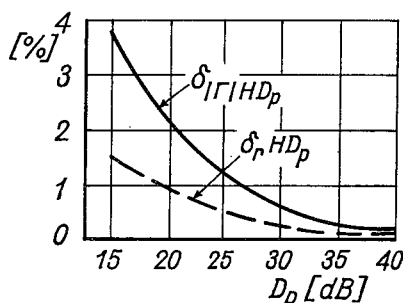
i wielkości określających  $|I_w|$  podanych w wyrażeniu (9). Współczynnik transmisji sprzęgaczy nie jest zwykle większy od 0,5 dB i błędy pomiaru powodowane przez współczynniki odbicia wrót  $1r$  lub  $2p$  można obliczyć wstawiając do związków (25) i (26) w miejsce  $|I_w|$  wielkości  $|I_{1r}|$  lub  $|I_{2p}|$ . Błędy pomiarów powodowane skończoną kierunkowością sprzęgacza fali padającej  $D_p$  [dB] można wyznaczyć z zależności:

$$\delta_{|I|HD_p} = |I_x| \cdot 10^{-\frac{D_p[\text{dB}] + T_p[\text{dB}] + 2T_r[\text{dB}]}{20}}, \quad (27)$$

$$\delta_{rHD_p} = \frac{(r-1)^2}{2r} \cdot 10^{-\frac{D_p[\text{dB}] + T_p[\text{dB}] + 2T_r[\text{dB}]}{20}}. \quad (28)$$

W praktyce  $T$  [dB]  $\ll D$  [dB].

Błędy pomiaru niedopasowania o  $WFS_x = 1,5$  obliczone na podstawie (27) i (28), dla  $T_r$  [dB] =  $T_p$  [dB] = 0, przedstawiono na rys. 8.



Rys. 8. Błąd względny pomiaru niedopasowania o  $WFS_x = 1,5$  powodowany skończoną kierunkowością sprzęgacza fali padającej

Widać, że dla kierunkowości sprzęgacza fali padającej nie gorszej od 35 dB można pominąć błędy pomiaru przez nią powodowane. Błędy pomiarów powodowane niedopasowaniem detektora fali odbitej  $-\Gamma_{or} \neq 0$ , można wyznaczyć z następujących związków:

$$\delta_{|I|H\Gamma_{or}} = |I_x| |I_{or}| \cdot 10^{-\frac{C_r[\text{dB}]}{10}}, \quad (29)$$

$$\delta_{rH\Gamma_{or}} = \frac{(r-1)^2}{2r} |I_{or}| \cdot 10^{-\frac{C_r[\text{dB}]}{10}}. \quad (30)$$

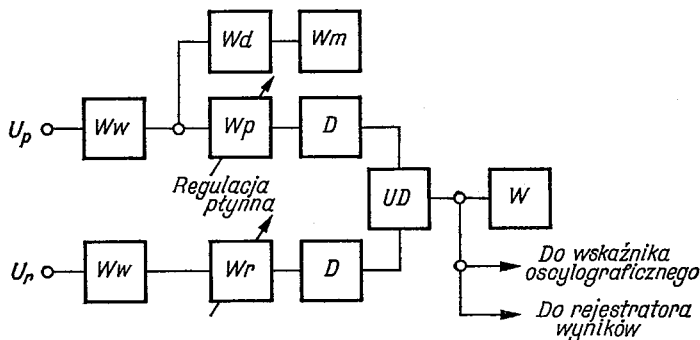
Z wyrażeń (29) i (30) wynika, że korzystne jest stosowanie sprzęgacza fali odbitej o słabym sprzężeniu, gdyż maleją wówczas wymagania odnośnie dopasowania detektora, przy zadanej dokładności pomiaru. Np. dokładność nie gorszą niż 1% dla sprzęgacza 3 dB-go zapewnia detektor o  $WFS \leq 1,2$  a dla sprzęgacza 7 dB-go  $WFS$  może osiągać wartość 2.

Z ilościowej oceny błędów pomiaru powodowanych przez  $\Gamma_w \neq 0$  wynika, że dominującymi przyczynami tego błędu są niedopasowania wrót sprzęgaczy  $1r$  i  $2p$ .

### 3. BŁĘDY CZĘŚCI M.CZ. REFLEKTOMETRU CZĘSTOTLIWOŚCIOWEGO

Napięcia  $U_p$  i  $U_r$  otrzymywane z detektorów mikrofalowych podawane są na wejścia wzmacniaczy napięciowych m.cz. lub prądu stałego, w celu podniesienia ich poziomu, dlaysterowania urządzeń wykonawczych. Stosowane są dwa zasadnicze rodzaje układów m.cz. mikrofalowych reflektometrów częstotliwościowych, które różnią się sposobem wykorzystywania napięć  $U_p$  i  $U_r$ . Pierwszy z nich jest urządzeniem mierzącym stosunek napięć  $U_r$  do  $U_p$  i nazywany jest miernikiem ilorazu napięć. Schemat blokowy miernika ilorazu napięć przedstawiono na rys. 9. Odczyt na wskaźniku lub rejestratorze wyników, oznaczony przez  $|\Gamma_m|^2$ , można opisać następującą zależnością:

$$|\Gamma_m|^2 = \frac{K_r U_r}{K_p U_p} (1+u) = \frac{K_r}{K_p} R(1+u), \quad (31)$$



Rys. 9. Schemat blokowy miernika ilorazu napięć

$W_w$  — wzmacniacz wejściowy,  $W_p$  i  $W_r$  — wzmacniacze regulowane w kanałach fali padającej i odbitej,  $D$  — detektory szczytowe,  $UD$  — układ dzielący,  $W$  — wskaźnik wychyłowy,  $W_d$  i  $W_m$  — wzmacniacz i wskaźnik w obwodzie kontroli poziomu napięcia  $U_p$

gdzie:  $K_r$  i  $K_p$  są charakterystykami przenoszenia kanałów miernika od wejść kanałów do wejść na układ dzielący,  $R$  jest stosunkiem napięć  $U_r$  do  $U_p$ ,  $u$  określa sumę błędów względnych układu dzielącego i wskaźnika lub rejestratora.

Oznacza się przez  $K_{or}$  i  $K_{op}$  wartości średnie funkcji  $K_r$  i  $K_p$  w określonych przedziałach zmiennych, od których zależą, a  $\chi_r$  i  $\chi_p$  charakteryzują odchylenia odpowiednich funkcji od wartości średnich w tych przedziałach. Podstawiając do (31) zależności  $K_r = K_{or}\chi_r$

i  $K_p = K_{op} \chi_p$  oraz wyrażenie na  $R$  opisane przez (16), po prostych przekształceniach i pominięciu małych wyższego rzędu, otrzymamy następujące wyrażenie

$$|I_m|^2 = K_{oc} \left[ \Gamma_x + \Gamma_r + \left( \Gamma_t + t + \frac{u}{2} \right) \Gamma_x + \Gamma_w \Gamma_x^2 \right]^2, \quad (32)$$

gdzie:

$$K_{oc} = \frac{K_{or} C_{or} T_{op} T_{or} \gamma_{or}}{K_{op} C_{op} \gamma_{op}}, \quad (33)$$

$$t = \sqrt{\frac{\chi_r}{\chi_p}} - 1, \quad (34)$$

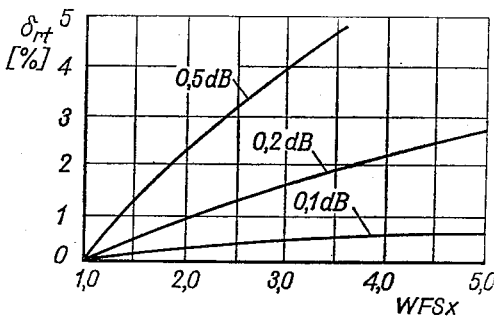
$$\text{lub} \quad t = 5,75 \cdot 10^{-2} (\chi_r [\text{dB}] - \chi_p [\text{dB}]). \quad (35)$$

Wielkość  $t$  określa współbieżność charakterystyk przenoszenia kanałów miernika ilaru napięć. Wielkości  $t$  i  $\frac{u}{2}$  są składowymi błędów względnego pomiaru modułu współczynnika odbicia. Błąd względny pomiaru  $WFS$  powodowany przez nie jest

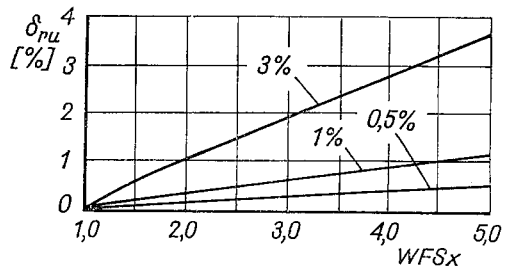
$$\delta_{rt} = 2,875 \cdot 10^{-2} (\chi_r [\text{dB}] - \chi_p [\text{dB}]) \frac{r^2 - 1}{r}, \quad (36)$$

$$\delta_{ru} = \frac{r^2 - 1}{4r} u. \quad (37)$$

Związki (36) i (37) przedstawiono na rys. 10 i rys. 11.



Rys. 10. Błąd względny pomiaru  $WFS$  dla współbieżności kanałów 0,5; 0,2 i 0,1 dB



Rys. 11. Błąd względny pomiaru  $WFS$  dla uchybów wskaźników lub uchybów układu dzielącego równych 3, 1 i 0,5%

Drugi rodzaj układów m.cz. reflektometru częstotliwościowego wykorzystuje napięcie  $U_p$ , otrzymywane z detektora fali padającej, jako napięcie sterujące w pętli automatycznej regulacji poziomu mocy generatora sygnałowego. Z pomiaru napięcia  $U_r$  otrzymujemy informację o badanym obciążeniu.

Schemat reflektometru, którego działanie oparte jest na opisanej zasadzie, przedstawiony jest na rys. 12;  $E_g$  jest sygnałem podawanym na wejście sprzęgacza fali padającej. Jest to sygnał, którego poziom jest kontrolowany przez automatyczną regulację mocy generatora sygnałowego.

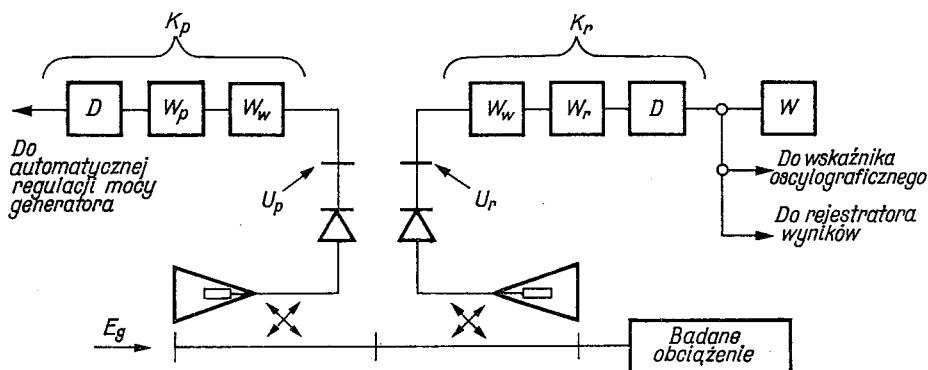
Regulacja działa następująco: sygnał proporcjonalny do różnicy napięć  $K_p U_p$  i napięcia odniesienia  $U_0$  steruje członem regulacyjnym aż do chwili, gdy

$$K_p U_p = U_0. \quad (38)$$

Na podstawie związków (38), (3) i (4) otrzymamy

$$U_0 = E_g^2 \frac{K_p C_p \gamma_p}{(1 - \Gamma_{3p} \Gamma_{op})^2} (1 + d_p t_p t_r^2 \Gamma_x^2), \quad (39)$$

$$U_r = E_g^2 \frac{C_r T_p T_r \gamma_r}{(1 - \Gamma_{3r} \Gamma_{or})^2} \left[ \Gamma_x + \frac{d_r}{t_r} + (\Gamma_{1r} + t_r^2 \Gamma_{2p} + c_r^2 \Gamma_{or}) \Gamma_x^2 \right]^2. \quad (40)$$



Rys. 12. Reflektometr wykorzystujący automatyczną regulację pomiaru mikrofalowego generatora sygnałowego (znaczenie symboli — jak przyjęto na rys. 9)

Z ostatnich dwóch wyrażeń, po przekształceniach i wprowadzeniu symboli  $K_{oc}$ ,  $\Gamma_r$ ,  $\Gamma_t$ ,  $t$  i  $\Gamma_w$ , opisanych identycznymi wyrażeniami jak przy wyprowadzaniu związków (6) i (32), otrzymamy następującą zależność na napięcie  $U_r$  wzmocnione  $K_r$  razy:

$$K_r U_r = K_{oc} U_0 [\Gamma_x + \Gamma_r + (\Gamma_t + t) \Gamma_x + \Gamma_w \Gamma_x^2]^2. \quad (41)$$

Odczyt na wskaźniku lub rejestratorze wzmocnionego napięcia  $U_r$ , oznaczony przez  $|\Gamma'_m|^2$ , można napisać w postaci

$$|\Gamma'_m|^2 = K_r U_r (1 + u_1), \quad (42)$$

gdzie  $u_1$  jest błędem względnym wskaźnika lub rejestratora.

Oznaczając przez  $\bar{U}_0$  średnią wartość napięcia odniesienia a przez  $u_2$  względną stabilność źródła odniesienia, możemy napisać

$$\bar{U}_0 = U_0 (1 + u_2). \quad (43)$$

Na podstawie (41), (42) i (43) otrzymamy

$$|\Gamma'_m|^2 = K_{oc} \bar{U}_0 \left[ \Gamma_x + \Gamma_r + \left( \Gamma_t + t + \frac{u}{2} \right) \Gamma_x + \Gamma_w \Gamma_x^2 \right]^2, \quad (44)$$

gdzie  $u = u_1 + u_2$ .

Zależność (44) jest w zapisie podobna do (32). Sens fizyczny poszczególnych symboli jak i wyrażenia je opisujące są te same, z wyjątkiem symbolu  $u_2$ . W układzie reflektometru

zawierającym miernik ilorazu napięć wielkość  $u_2$  charakteryzuje uchyb układu dzielącego miernika, podczas gdy w drugim przypadku oznacza stabilność źródła napięcia odniesienia. Można więc stwierdzić, że błędy pomiarów wykonywanych przy pomocy obu odmian układów reflektometrów można obliczać z tych samych wyrażeń opisujących składowe błędów w zależności od parametrów podzespołów reflektometrów.

#### 4. BŁĄD WYNIKAJĄCY Z NIEDOSKONAŁYCH WZORCÓW NIEDOPASOWANIA

Jak widać z wyrażenia (33), przez wybór wartości współczynników wzmocnienia  $K_{op}$  i  $K_{or}$  w kanałach układów m.cz. reflektometrów, podczas kalibracji można uzyskać żądane wartości współczynników  $K_{oc}$  i  $K_{oc} \cdot \bar{U}_o$ , które występują w związkach (32) i (44). Dokładne ustalenie tych wartości wykonuje się dołączając do wrót pomiarowych reflektrometru obciążenia mikrofalowe o dokładnie znanej wartości liczbowej  $|I|$  lub  $WFS$ .

Moduł współczynnika odbicia  $|I_o|$  wzorca niedopasowania może być znany z błędem względnym pomiaru, który oznaczmy przez  $g$ . Podstawiając  $|I_o|(1+g)$  za  $I_x$  w wyrażeniu (32) otrzymamy

$$|I_o|^2 = K_{oc} [ |I_o|^4 (1+g) + |I_r| + |I_w| |I_o|^2 (1+g)^2 ]^2. \quad (45)$$

Wyrażenie  $I_t + t + \frac{u}{2}$  występujące w (32) i (44) jest równe zero, gdyż ustalanie wartości  $K_{oc}$  wykonujemy przy ustalonej częstotliwości i mocy mikrofalowego generatora sygnałowego oraz przy ustalonych warunkach pracy (temperatura, zasilanie) układów m.cz. reflektrometru. Żadaną wartość  $K_{oc}$  ustalamy przez regulację wzmocnień w kanałach układów m.cz., po wykonaniu której wskaźnik reflektometru pokaże wartość  $|I_o|$  lub odpowiadającą jej wartość  $WFS$  wzorca. Z (45) otrzymamy

$$K_{oc} = \frac{1}{(1+s)^2}, \quad (46)$$

gdzie

$$s = g + \frac{|I_r|}{|I_o|} + |I_w| |I_o| (1+g)^2; \quad (47)$$

z (47) wynika, że wielkość  $s \ll 1$ .

Wstawiając (46) do (32), po wykonaniu prostych przekształceń i uproszczeń, otrzymuje się wyrażenie na moduł współczynnika odbicia wykazywany na wskaźniku lub rejestratorze wyników mikrofalowego reflektometru

$$|I_m| = \left| I_x + I_r + \left( I_t - s + t + \frac{u}{2} \right) I_x + I_w I_x^2 \right|. \quad (48)$$

Wielkość  $s$  jest maksymalnym błędem względnym pomiaru  $|I_x|$ , który powstaje przy kalibracji reflektometru.



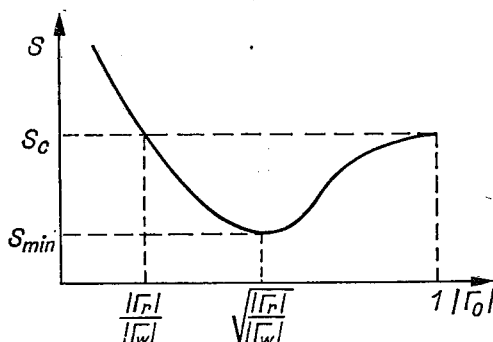
Błąd względny pomiaru  $WFS$ , powodowany przez  $s \neq 0$ , można obliczyć z wyrażenia

$$\delta_{rs} = \frac{r^2 - 1}{2r} \cdot s. \quad (49)$$

Przebieg  $s$  w funkcji  $|I_o|$  przedstawiono na rys. 13.

Jak widać  $s$  osiąga wartość minimalną dla

$$|I_o|_{opt} = \sqrt{\frac{|I_r|}{|I_w|}}. \quad (50)$$



Rys. 13. Błąd względny pomiaru  $|I|$  w zależności od modułu współczynnika odbicia wzorca niedopasowania

Wówczas

$$s_{min} = g + 2\sqrt{|I_r| |I_w|}. \quad (51)$$

Dla  $|I_r| = 1$  i  $|I_o| = \frac{|I_r|}{|I_w|}$  wielkość  $s$  przyjmuje wartość

$$s_c = g + |I_r| + |I_w|. \quad (52)$$

W realizowanych praktycznie reflektometrach, których części mikrofalowe budowane są w oparciu o falowody,  $|I_w| \leq 0,015$  [7]. Dla linii współosiowych, gdzie występuje problem jakości złącz,  $|I_w| = 0,03 \div 0,10$ . Dla kierunkowości sprzęgacza  $D_r = 40$  dB,  $|I_o|_{opt} \geq 0,81$  dla falowodów i  $0,316 \div 0,57$  dla linii współosiowych. Jak widać z rys. 13, nie jest korzystną wartość  $|I_o|$  zbyt mała, mimo że skale podzakresów małych wartości modułów współczynnika odbicia są bardzo rozciągnięte, gdyż przy  $|I_o| < \frac{|I_r|}{|I_w|}$  wartość  $s$  szybko rośnie, gdy  $|I_o|$  maleje.

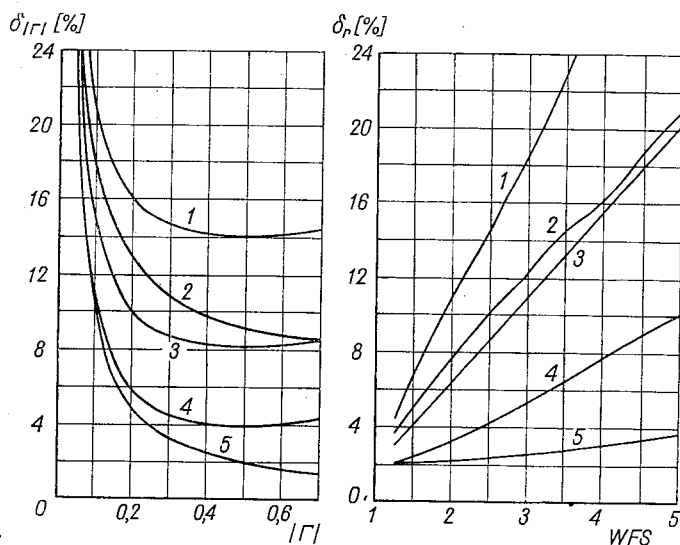
Przy pracy z reflektometrami falowodowymi najczęściej używa się zwieracza jako wzorca niedopasowania. Błąd względny pomiaru modułu współczynnika odbicia, powodowany w tym przypadku przez  $s \neq 0$ , wynosi  $s_c$  obliczone z wyrażenia (52). Wartość  $g$  wynosi  $1 - |I_z|$ , gdzie  $|I_z|$  jest modułem współczynnika odbicia zwieracza.

## 5. WNIOSKI KOŃCOWE

Z przedstawionych powyżej rozważań wynika, że podanie wartości liczbowej błędu pomiaru  $|I|$  i  $WFS$  musi być powiązane z określeniem wartości liczbowej danej wielkości do której błąd ten się odnosi. W przypadku  $WFS$  można stwierdzić, że błąd pomiaru mniej-

szych wartości  $WFS$  jest zawsze liczbowo mniejszy od błędu danej wartości  $WFS$ . Dla określenia spodziewanych, maksymalnych błędów pomiaru  $|I|$  i  $WFS$  w określonych przedziałach ich wartości, konieczna jest znajomość współczynników błędu reflektometrycznego pomiaru niedopasowania, tj.  $\Gamma_r$ ,  $\Gamma_t$ ,  $s$ ,  $t$ ,  $u$  i  $\Gamma_w$ . Przytoczone w artykule związki matematyczne pomiędzy tymi współczynnikami a błędami pomiaru  $|I|$  lub  $WFS$  oraz odpowiednie wykresy, pozwalają łatwo obliczyć maksymalne błędy pomiaru, spodziewane w danym układzie reflektometru.

Przykładowe wyniki obliczeń maksymalnych błędów względnych pomiaru  $|I|$  i  $WFS$  przedstawiono na rys. 14. Krzywe oznaczone numerami 1 otrzymano z sumowania wszystkich składowych błędów, pozostałe krzywe otrzymano dla przypadków, w których nie



Rys. 14. Przykładowe wyniki obliczeń maksymalnych błędów względnych reflektometrycznego pomiaru  $|I|$  i  $WFS$  dla przypadków gdy: 1 — uwzględniono wszystkie współczynniki błędów, 2 — przyjęto  $\Gamma_w = 0$ , 3 — przyjęto  $s = 0$ , 4 — przyjęto, że tylko  $\Gamma_r \neq 0$  i  $\Gamma_w \neq 0$ , 5 — tylko  $\Gamma_r \neq 0$

uwzględniono wszystkich źródeł błędów. Do obliczeń przyjęto następujące parametry podzespołów reflektometru: kierunkowość sprzęgaczy  $D = 40,5$  dB, współczynniki transmisji sprzęgaczy  $T = 0,5$  dB, współczynniki odbicia wrót sprzęgaczy  $\Gamma_{1r} = \Gamma_{2p} = 0,01$ , sprzężenie sprzęgacza fali odbitej  $C_r = 12$  dB,  $WFS$  detektora fali odbitej  $WFS_{or} = 1,5$ , współbieżność par sprzęgacz-detektor  $k_t = 0,2$  dB, współbieżność charakterystyk przenoszenia kanałów m. cz.  $\chi_r - \chi_p = 0,2$  dB,  $u = 1,5\%$ , błąd wzorca niedopasowania  $g = 2\%$ . Obliczone na podstawie związków (8), (9), (23), (35) i (51) współczynniki błędu wynoszą  $|\Gamma_r| = 1\%$ ,  $|\Gamma_w| = 4\%$ ,  $|\Gamma_t| = 2,3\%$ ,  $t = 1,15\%$ ,  $s = 6\%$ . Z krzywych 1 i 5 widać, że uwzględnienie tylko błędów pomiarów  $|I| > 0,2$  powodowanych skończoną kierunkowością sprzęgaczy kierunkowych, przy pominięciu pozostałych składowych, prowadzi do kilkakrotnego zaniżenia wyników obliczeń maksymalnych błędów wypadkowych. Odległości między krzywymi 1 a 2, 3, 4 lub 5 są większe dla większych wartości mierzonych  $|I|$  lub  $WFS$ . Oznacza to, że pominięcie niektórych źródeł błędów pomiarów daje bardziej zaniżone wyniki obliczeń dla dużych wartości liczbowych mierzonych  $|I|$  lub  $WFS$ .

Pozornie wydaje się, że analiza reflektometru, którego działanie opiera się na pomiarze sygnału fali odbitej, przy stałym poziomie sygnału fali padającej, nie obejmuje wpływu stałości poziomu na błędy pomiaru. Można by określić błąd pomiaru powodowany przez współczynnik opisujący jakość stabilizacji sygnału podawanego na wejściu sprzęgacza fali odbitej oraz określić błąd pomiaru pochodzący jedynie od parametrów tworzących obwody sygnału fali odbitej. Tak przeprowadzona analiza daje zawyżone błędy, gdyż wahania poziomu sygnału fali padającej, powodowane przez współczynniki  $\varepsilon_p$ ,  $\gamma_p$  i  $\chi_p$  w dużym stopniu kompensują błędy powodowane przez współczynniki  $\varepsilon_r$ ,  $\gamma_r$  i  $\chi_r$  obwodów sygnału fali odbitej. Współczynniki  $\zeta_p$  i  $u_2$  pogorszące jakość stabilizacji zostały ujęte w odpowiednich wyrażeniach opisujących błędy pomiaru. Inne parametry pętli automatycznej regulacji mocy, takie jak np. czasowa bezwładność pętli czy minimalny sygnał sterowania członem regulacyjnym, nie zostały uwzględnione, gdyż w dobrze działających automatycznych stabilizatorach mocy są to wielkości do pominięcia.

Analiza układów reflektometrów wykazała, że bardzo ważna jest współbieżność zmian parametrów w funkcji zmiennych, od których zależą. Wynika stąd, że korzystnie jest tak konstruować reflektometry, aby ich podzespoły znajdowały się w jednakowych warunkach pracy.

Rozważania nad błędami pochodzącymi od wzorców niedopasowania potwierdziły słuszność stosowania zwieraczy jako obciążeń wzorcowych w reflektometrach falowodowych. Reflektometry współosiowe korzystniej jest wyposażyć w obciążenia wzorcowe o wartościach  $|T|$  bliskich wielkości  $|T_{o}|_{opr}$ .

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. Adamski, On Microwave Reflectometer Analysis, Design and Accuracy of Mismatch Measurement, materiały IMEKO Sympozjum, Budapeszt, 10—13 maja 1972.
2. W. J. Ansen, A Guide to the Use of the Modified Reflectometer Technique of VSWR Measurement, J. of Research of the N. B. S., Vol. 65C, No. 4, Oct., Dec. 1961, pp. 217—223.
3. R. W. Beaty, G. F. Engen, W. J. Ansen, Measurement of Reflections and Losses of Waveguide Joints and Connectors Using Microwave Reflectometer Techniques, IREE Trans. on Instrumentation, Vol. I—9., September 1960, pp. 219—226.
4. I. K. Bondarienko, G. A. Diejniega, Z. B. Magraczew, Awtomatizacja izmierienij paramietrow s.w.cz. traktow, Sowietskoje Radio, Moskwa 1969.
5. L. N. Branskij, M. M. Liewin, W. J. Rozienbiereg, Radioizmierienia, Metody. Sriedstwa. Pogriesznosti, Izdatielstwo Komitietu Standartow, Mier i Izmeritielnych Priborow, Moskwa 1970.
6. P. Dębicki, Niektóre zagadnienia dotyczące konstrukcji, zastosowań i własności sprzęgaczy kierunkowych na liniach sprzężonych w technice mikrofalowej, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej Elektronika XXVI, nr 163, 1970, s. 67—92.
7. P. C. Ely, Swept-Frequency Techniques, Proc. IEEE, Vol. 55, No. 6, June 1967, pp. 991—1002.
8. Hewlett-Packard Application Note 42, Applications of the 416A Radio Meter, 1960.
9. Hewlett-Packard Application Note 65, Swept Frequency Techniques, 1965.
10. J. K. Hutton, Analysis of Microwave Measurement Techniques by Means of Signal Flow Graphs, IREE Trans. on Microwave Theory and Techniques, Vol. MMT-8, March 1960, pp. 206—212.
11. N. Kuhn, Simplified Signal Flow Graph Analysis, Microwave, J., November 1963, pp. 59—66.
12. J. Kuliński, Niektóre współczesne metody pomiaru impedancji, tłumienia i współczynnika fali stojącej, Postępy Radiotechniki, nr 69, 1970, s. 35—48.

13. T. E. MacKenzie, J. F. Gilmore, M. Khazam, The New Sweep-Frequency Reflectometer, The General Radio Experimenter, Vol. 43, Nos. 3, 4, March-April 1969, pp. 3-14.
14. T. E. MacKenzie, Some Recent Advances in Coaxial Components for Sweep-Frequency Instrumentation, Microwave J., No. 6, June 1969, pp. 69-77.
15. L. Robichaud, M. Boisvert, J. Robert, Grafy przepływu sygnałów, PWN, Warszawa 1968.

W. ADAMSKI

## ACCURACY OF MISMATCH MEASUREMENT USING MICROWAVE REFLECTOMETER TECHNIQUES

### Summary

A theoretical analysis of a general type frequency-domain reflectometer is carried out in the paper. Expressions are derived which describe the dependences of the maximum fractional errors in the reflection coefficient and *VSWR* measurements on the parameters of the microwave as well as low frequency parts of the reflectometer.

Additional errors caused by an improper choice of standard load parameters are analysed in the paper.

W. ADAMSKI

## GENAUIGKEIT DER REFLEKTOMETRISCHEN BEMESSUNGEN IM NICHT ANGEPAßTEN MIKROWELLENBAND

### Zusammenfassung

Es wurden Ausdrücke für die Fehlerkoeffizienten der Modulbemessung des Reflexionsfaktors ( $\Gamma$ ) und des Faktors stehender Welle bei der Durchführung dieser Bemessung mittels Frequenz-Mikrowellen-Reflektometers abgeleitet. Diese Koeffizienten enthalten die von getroffener Parameterwahl der Mikrowellenuntergruppen und geringer Frequenz, und auch von angewandter Musterbeanspruchung herrührenden Fehler.

Die die relativen Fehler der  $\Gamma$ -Bemessung und der Bemessung des Faktors stehender Welle beschreibenden Ausdrücke, als auch die Musterkurven gestattet eine quantitative Einschätzung der in Reflektometersystemen auftretenden maximalen Bemessungsfehler. Die im Artikel behandelten Probleme können besonders nützlich beim Entwerfen und bei der Anwendung von Frequenz-Mikrowellen-Reflektometern sein, die zurzeit als breitbandige, in automatischer Meßapparatur arbeitende Vorrichtungen gebaut werden.

В. АДАМСКИ

## ПОГРЕШНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ РАССОГЛАСОВАНИЯ РЕФЛЕКТОМЕТРОМ СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ

### Резюме

В статье рассмотрены вопросы погрешности измерения модуля коэффициента отражения и коэффициента стоячей волны в процессе измерения рефлектометром сверхвысоких частот.

Выведены выражения, характеризующие зависимости между составляющими погрешности измерения и параметрами элементов сверхвысоких частот и цепей низких частот рефлектометра.

Кроме того рассмотрено влияние параметров примененного измерительного эталона модуля коэффициентов отражений на погрешность измерения.

Приведенные выражения и теоретически вычисленные кривые дают возможность быстрого проведения количественного анализа погрешности измерения частотным рефлектометром произвольного типа.

## Układ do pomiaru współczynnika odbicia w pasmie mikrofalowym

IRENA LESZCZYŃSKA (GDAŃSK), JERZY DĄBROWSKI (GDYŃIA)

*Instytut Telekomunikacji Politechniki Gdańskiej*

*Zakład Techniki Mikrofalowej*

*Otrzymano 1.6.1973*

W pracy przedstawiono koncepcję nowego układu do automatycznego pomiaru współczynnika odbicia w pasmie mikrofalowym. Działanie układu opiera się na wykorzystaniu jednego układu hybrydowego — sprzęgacza kierunkowego 3 dB/90° lub magicznego T, wykonanych dowolną techniką. Określenie, w sposób jednoznaczny, zespolonej wartości współczynnika odbicia nieznanego obciążenia uzyskano dzięki wprowadzeniu w układzie modulacji amplitudy i fazy sygnału mikrofalowego.

Praca zawiera teoretyczne uzasadnienie proponowanej koncepcji oraz wyniki jej eksperymentalnej weryfikacji.

### 1. WSTĘP

Rozwój współczesnej techniki mikrofalowej, a co za tym idzie rozwój techniki pomiarowej w pasmie mikrofalowym, wymaga coraz doskonalszej aparatury. W związku z tym bardzo ważnym zagadnieniem staje się automatyzacja pomiarów mikrofalowych.

Jednym z zasadniczych parametrów charakteryzujących element mikrofalowy jest impedancja lub jej pełny odpowiednik — zespolony współczynnik odbicia.

Wśród znanych w literaturze koncepcji mierników impedancji wyróżnić można bardzo rozbudowane systemowo układy z przemianą częstotliwości [1, 2, 13], systemy reflektometryczne [3, § 6.53], układy z kilkoma sondami umieszczonymi w linii pomiarowej [3, 4, 5, 6, 7] oraz układy dwukanałowe [3, 8].

Układy reflektometryczne wymagają stosowania szerokopasmowych precyzyjnych przesuwników fazy oraz regulowanych, szerokopasmowych tłumików mikrofalowych. Układy te są w zasadzie systemami półautomatycznymi. Pomiaru polegają na ręcznej regulacji amplitudy i fazy fali padającej w celu zrównania jej z falą odbitą od nieznannej impedancji.

Układy działające na zasadzie pomiaru napięć w kilku punktach linii pomiarowej są wąskopasmowe. Wymagają one ponadto precyzyjnego doboru jednakowych charakterystyk trzech lub czterech detektorów.

W przypadku układu z trzema sondami umieszczonymi w linii pomiarowej [4] konieczne jest, w celu jednoznacznego określenia kąta fazowego impedancji, skokowe włą-

czanie dodatkowej susceptancji. Na podstawie układów symetrycznych zbudowane są układy Zg — diagrafów. Nie są to układy w pełni automatyczne. Pomiar polega na wyzerowaniu wskaźnika przy pomocy ręcznie przesuwanego zwarcia.

Wiele z przedstawionych systemów dwukanałowych, symetrycznych zawiera układy hybrydowe umożliwiające pomiar fazy. Aby w jednoznaczny sposób określić fazę nieznanego obciążenia zawierają one nie mniej niż dwa układy hybrydowe lub  $90^\circ$  przesuwники fazy [12, 8, 13]. Automatyczne układy symetryczne przedstawione w [9, 10, 11] zawierają po cztery układy hybrydowe typu magiczne  $T$ . Natomiast układ opisywany przez O. Gehre'go [8] oprócz czterech układów magicznego  $T$  wymaga, w celu jednoznacznego określenia kąta fazowego, zastosowania  $90^\circ$  przesuwnika fazy. Duża ilość układów hybrydowych komplikuje znacznie mikrofalową część miernika, powodując powstanie dodatkowych trudności związanych z dobraniem kilku elementów o idealnie współbieżnych charakterystykach.

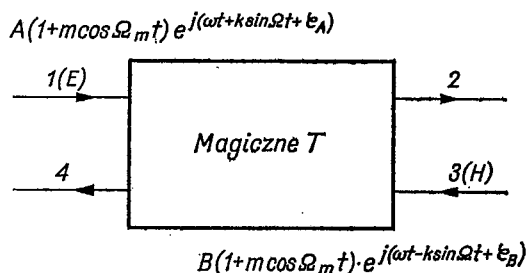
W artykule przedstawiono początkowe etapy pracy nad realizacją automatycznego miernika współczynnika odbicia — koncepcję układu oraz jej teoretyczne uzasadnienie i eksperymentalne potwierdzenie. Proponowany układ można zaliczyć do klasy układów dwukanałowych, symetrycznych. Sygnał mikrofalowy rozdziela się na dwa symetryczne toru — kanał odniesienia i kanał pomiarowy. Tor odniesienia zakończony jest zwarciem, a pomiarowy nieznaną impedancją. Sygnały odbite od impedancji obciążeń obu torów podawane są przez sprzęgacze kierunkowe fali odbitej na układ hybrydowy. Sygnały wychodzące z układu hybrydowego zawierają informację o zespolonej wartości współczynnika odbicia nieznannej impedancji.

Jednoznaczne określenie modułu i fazy współczynnika odbicia przy zastosowaniu tylko jednego układu hybrydowego uzyskuje się dzięki wprowadzeniu jednoczesnej modulacji amplitudy i fazy sygnału mikrofalowego.

## 2. ANALIZA PRACY UKŁADU HYBRYDOWEGO

Przeprowadzono poniżej analizę możliwości zastosowania układu magicznego  $T$  i sprzęgacza  $3\text{dB}/90^\circ$  do pomiaru przesunięcia fazy (rys. 1).

Zasadniczą własnością układu typu magiczne  $T$ , wykorzystywaną w mierniku współczynnika odbicia jest fakt, że przy pobudzeniu gałęzi  $E(I)$ , fala rozdziela się między ramiona 2 i 4 nie pobudzając gałęzi 3. Fale wychodzące z ramion 2 i 4 mają jednakowe am-



Rys. 1. Sposób pobudzenia układu magicznego  $T$  sygnałami zmodulowanymi w amplitudzie i fazie

plitudy, a fazy przeciwne. Natomiast sygnał doprowadzony do gałęzi  $H(3)$  rozdziela się na dwie jednakowe fale (równe amplitudy i jednakowe fazy) między ramiona 2 i 4 nie pobudzając gałęzi 1. Przy pobudzeniu ramion 1( $E$ ) i 3( $H$ ) falami, jak na rys. 1, fale powstające w gałęziach 2 i 4 będą superpozycją fal pochodzących z gałęzi 1 i 3, a postać fal wypadkowych można zapisać następująco:

— w gałęzi 2

$$\hat{e}_2(t) = [A \cdot |s_{12}| e^{j\alpha} + B |s_{32}| e^{j\beta}] \cdot [1 + m \cos \Omega_m t], \quad (1)$$

— natomiast w gałęzi 4

$$\hat{e}_4(t) = [-A \cdot |s_{14}| e^{j\alpha} + B |s_{34}| e^{j\beta}] \cdot [1 + m \cos \Omega_m t], \quad (2)$$

gdzie:

$$\alpha = \omega t + k \sin \Omega t + \varphi_A,$$

$$\beta = \omega t - k \sin \Omega t + \varphi_B,$$

(2a)

$m$  — głębokość modulacji amplitudy,

$k$  — dewiacja fazy.

Zależności (1) i (2) są słuszne w przypadku idealnego dopasowania wrót ( $s_{ii} = 0$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ), nieskończonej izolacji ( $s_{13} = s_{31} = 0$ ,  $s_{24} = s_{42} = 0$ ) oraz symetrii układu ( $s_{12} = s_{21}$ ,  $s_{14} = s_{41}$ ,  $s_{32} = s_{23}$ ,  $s_{34} = s_{43}$ ). W przypadku 3 dB idealnego układu hybrydowego współczynniki transmisji mają jednakowe amplitudy równe  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Zastosowanie detektorów kwadratowych na wyjściu gałęzi 2 i 4 umożliwia pomiar mocy fal wychodzących. Przy założeniu, że detektory mają jednakowe czułości  $\gamma_2 = \gamma_4 = \gamma$ , napięcia na detektorach są proporcjonalne do mocy fal wychodzących z ramion 2 i 4 i wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} U_{d2} &= \gamma [A^2 |s_{12}|^2 \cos^2 \alpha + B^2 |s_{32}|^2 \cos^2 \beta + 2AB |s_{12}| |s_{32}| \cos \alpha \cdot \cos \beta] [1 + m \cos \Omega_m t]^2, \\ U_{d4} &= \gamma [A^2 |s_{14}|^2 \cos^2 \alpha + B^2 |s_{34}|^2 \cos^2 \beta - 2AB |s_{14}| |s_{34}| \cos \alpha \cdot \cos \beta] [1 + m \cos \Omega_m t]^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Do pomiaru przesunięcia fazy między sygnałami wchodzącymi do gałęzi 1 i 3 wykorzystuje się różnicę napięć z obu detektorów

$$\begin{aligned} U_{d2} - U_{d4} &= \gamma [A^2 (|s_{12}|^2 - |s_{14}|^2 \cos^2 \alpha + B^2 (|s_{32}|^2 - |s_{34}|^2 \cos^2 \beta + \\ &\quad + 2AB \cos \alpha \cos \beta (|s_{12}| |s_{32}| + |s_{14}| |s_{34}|))] [1 + m \cos \Omega_m t]^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Stosując układ magicznego  $T$ , który dzieli moc równomiernie między obie gałęzie, tzn.

$$|s_{12}| = |s_{14}|,$$

$$|s_{32}| = |s_{34}|,$$

zależność (4) upraszcza się

$$\begin{aligned} U_{d2} - U_{d4} &= 2\gamma AB |s_{12}| |s_{32}| [\cos(2k \sin \Omega t + \varphi_A - \varphi_B) + \\ &\quad + \cos(2\omega t + \varphi_A + \varphi_B)] \cdot [1 + m \cos \Omega_m t]^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Składnik zawierający częstotliwość mikrofalową zostaje wytłumiony przez filtr dolno-przepustowy znajdujący się na wyjściu detektora. Tak więc różnica napięć sygnałów z obu

detektorów zawiera dwa składniki — jeden proporcjonalny do  $\cos(\varphi_A - \varphi_B)$ , a drugi do  $\sin(\varphi_A - \varphi_B)$

$$U_{d_2} - U_{d_4} = 2\gamma|s_{12}||s_{32}|AB\cos(2k\sin\Omega t)(1+m\cos\Omega_m t)^2 \cdot \cos(\varphi_A - \varphi_B) + \\ - 2\gamma|s_{12}||s_{32}|AB\sin(2k\sin\Omega t)(1+m\cos\Omega_m t)^2 \cdot \sin(\varphi_A - \varphi_B). \quad (6)$$

Pierwszy składnik z zależności (6) zawiera iloczyn funkcji  $\cos(2k \cdot \sin\Omega t)$  oraz funkcji  $(1+m \cdot \cos\Omega_m t)^2$ . Funkcję  $\cos(2k \cdot \sin\Omega t)$  rozłożono w szereg Fouriera ze składnikami o amplitudach będących współczynnikami funkcji Bessela

$$\cos(2k\sin\Omega t)(1+m\cos\Omega_m t)^2 = [J_0(2k) + 2J_2(2k)\sin 2\Omega t + \dots + 2J_{2n}(2k) \cdot \sin 2n\Omega t] \times \\ \times \left[ 1 + \frac{m^2}{2} + 2m\cos\Omega_m t + \frac{m^2}{2}\cos 2\Omega_m t \right].$$

Po dokonaniu operacji mnożenia uzyskuje się oprócz składowej o pulsacji  $\Omega_m$  składową stałą oraz sygnały o pulsacjach  $\Omega_m \pm 2n\Omega$  oraz  $2\Omega_m \pm 2n\Omega$ , które zostają wyeliminowane przez selektywne układy małej częstotliwości.

Analogicznie drugi składnik zawierający iloczyn funkcji  $\sin(2k \cdot \sin\Omega t)$  i funkcji  $(1+m \cdot \cos\Omega_m t)^2$  po rozpisaniu funkcji  $\sin(2k \cdot \sin\Omega t)$  w szereg Fouriera można przedstawić jako

$$\sin(2k\sin\Omega t)(1+m\cos\Omega_m t)^2 = [2J_1(2k)\sin\Omega t + 2J_3(2k)\sin 3\Omega t + \dots + 2J_{2n+1}^{(2k)}\sin(2n+1)\Omega t] \times \\ \times \left[ 1 + \frac{m^2}{2} + 2m\cos\Omega_m t + \frac{m^2}{2}\cos 2\Omega_m t \right].$$

Operacja mnożenia daje w wyniku składnik o pulsacji  $\Omega$  oraz składowe o pulsacjach  $(2n+1)\Omega$ ,  $\Omega_m \pm (2n+1)\Omega$  oraz  $2\Omega_m \pm (2n+1)\Omega$ , które zostają odfiltrowane w układach selektywnych.

Powyższa analiza prowadzi do wniosku, że składowa o pulsacji  $\Omega_m$  występuje tylko w pierwszym składniku sumy (6), natomiast składowe o pulsacji  $\Omega$  tylko w drugiej części tej zależności. Określenie, ze wzoru (6), amplitud sygnałów o pulsacjach  $\Omega_m$  i  $\Omega$  możliwe jest po dokonaniu wyżej opisanej operacji, tzn. po rozpisaniu tej zależności w szereg Fouriera [17]. Ze względu na bardzo złożoną postać uzyskanego wyrażenia nie przytoczono pełnego jej zapisu.

Aby na wyjściu układu wyodrębnić składowe o pulsacjach  $\Omega_m$  i  $\Omega$  stosuje się układy selektywne. Realizując wzmacniacz selektywny sygnałów o pulsacji  $\Omega_m$  uzyskuje się jednoznaczne określenie wielkości  $\cos(\varphi_A - \varphi_B)$ . Analogicznie stosując wzmacniacz selektywny sygnałów o pulsacji  $\Omega$  możliwe jest określenie wartości  $\sin(\varphi_A - \varphi_B)$ .

Interesujące, użyteczne amplitudy przedstawione zostały odpowiednio zależnościami (7), (8)

$$U_{\Omega_m} = 2\gamma AB|s_{12}||s_{32}| \cdot m J_0(2k) \cdot \cos(\varphi_A - \varphi_B) \cos\Omega_m t, \quad (7)$$

$$U_{\Omega} = -2\gamma AB|s_{12}||s_{32}| \left( 1 + \frac{m^2}{2} \right) J_1(2k) \sin(\varphi_A - \varphi_B) \cos\left( \Omega t - \frac{\pi}{2} \right), \quad (8)$$

gdzie:  $J_i(2k)$  — współczynniki funkcji Bessela.

Jak już wspomniano wyżej, w układzie może być zastosowany także 3 dB/90° sprzęgacz kierunkowy. Sposób pobudzenia sprzęgacza 3 dB/90° sygnałami wielkiej częstotliwości pokazano na rys. 2.



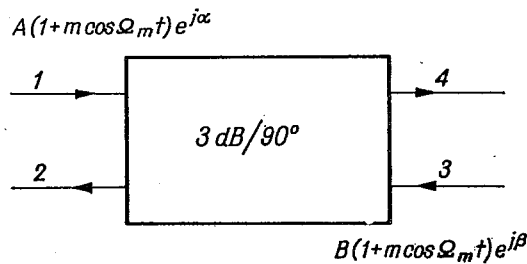
Po zapewnieniu dopasowania wszystkich wrót i zapewnieniu nieskończonej izolacji między wrotami 1—3 oraz korzystając z własności tego typu układu hybrydowego uzyskuje się, na drodze podanej uprzednio analizy, sygnał jednoznacznie określający różnicę faz sygnałów pobudzających

$$U_{d_2} - U_{d_4} = 2\gamma AB |s_{12}| |s_{14}| \sin(2k \cdot \sin \Omega t + \varphi_A - \varphi_B) (1 + m \cos \Omega_m t)^2. \quad (9)$$

Spełniając warunki na selektywność oraz zmniejszając dewiację fazy uzyskuje się określenie przesunięcia fazy między sygnałami pobudzającymi

$$U_{\Omega_m} = +2\gamma AB |s_{12}| |s_{14}| \cdot J_0(2k) \cdot m \cdot \sin(\varphi_A - \varphi_B) \cos \Omega_m t, \quad (10)$$

$$U_{\Omega} = +2\gamma AB |s_{12}| |s_{14}| \cdot J_1(2k) \left(1 + \frac{m^2}{2}\right) \cos(\varphi_A - \varphi_B) \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (11)$$



Rys. 2. Sposób pobudzenia sprzęgacza 3 dB/90° sygnałami wielkiej częstotliwości

W przypadku zastosowania 3-dB układu hybrydowego, zapewniającego 90° przesunięcie fazy między sygnałami wejściowymi uzyskuje się zależności podobne do (7) i (8).

Jednoznaczne określenie wartości kąta różnicy faz dwu sygnałów mikrofalowych uzyskano w układzie dzięki wprowadzeniu jednoczesnej modulacji fazy i amplitudy sygnału mikrofalowego.

Rozważano również możliwość zastosowania podwójnej modulacji amplitudy. Analiza teoretyczna tego przypadku prowadzi jednak do wniosku, że w takim układzie możliwe jest określenie jedynie wartości  $\cos(\varphi_A - \varphi_B)$  dla układu hybrydowego typu magiczne  $T$  lub  $\sin(\varphi_A - \varphi_B)$  w przypadku zastosowania układu hybrydowego typu sprzęgacza 3 dB/90°.

W rzeczywistych układach niemożliwe jest selektywne wybranie składowej o jednej częstotliwości. Parametrem charakterystycznym dla wzmacniaczy selektywnych jest jego pasmo, lub zdolność tłumienia sygnałów o częstotliwościach z otoczenia częstotliwości środkowej.

W praktyce układy prostych przesuwników fazy powodują powstanie obok modulacji fazy szkodliwego sygnału modulacji amplitudy. Tę szkodliwą modulację można wyeliminować stosując układy szybkich ograniczników mocy. Skuteczne działanie ograniczników uzyskuje się gdy  $\Omega_m \gg \Omega$ . Spełniając powyższy warunek w analizowanym układzie pojawia się niebezpieczeństwo zakłócenia sygnału o pulsacji  $\Omega_m$  sygnałami  $\Omega_m \pm n \cdot \Omega$ , gdzie  $n = 1, 2, \dots$ . Sygnały o częstotliwościach  $\Omega_m \pm n \cdot \Omega$  otrzymuje się podobnie jak zależności (7), (8)

$$\begin{aligned} U_{\Omega_m \pm \Omega} &= 2\gamma A \cdot B |s_{12}| \cdot |s_{32}| \cdot m \cdot J_1(2k) \sin(\varphi_A - \varphi_B) \cdot \sin[(\Omega_m \pm \Omega)t], \\ U_{\Omega_m \pm 2\Omega} &= 2\gamma A \cdot B |s_{12}| \cdot |s_{32}| \cdot m J_2(2k) \cos(\varphi_A - \varphi_B) \cdot \cos[(\Omega_m \pm 2\Omega)t]. \end{aligned} \quad (12)$$

Z uwagi na to, że wyrażenia (7) i (12) są funkcjami mierzonego kąta przesunięcia fazy i nie zależą od niego w identyczny sposób, jedyną metodą zmierzającą do oszacowania szkodliwego wpływu amplitud napięć  $U_{\Omega_m \pm \Omega}$  i  $U_{\Omega_m \pm 2\Omega}$  jest porównanie tych amplitud z amplitudą sygnału  $U_{\Omega_m}$

$$\begin{aligned}\frac{U_{\Omega_m \pm \Omega}}{U_{\Omega_m}} &= \frac{J_1(2k)}{J_0(2k)} \cdot \frac{K(\Omega_m + \Omega)}{K(\Omega_m)}, \\ \frac{U_{\Omega_m \pm 2\Omega}}{U_{\Omega_m}} &= \frac{J_2(2k)}{J_0(2k)} \cdot \frac{K(\Omega_m \pm 2\Omega)}{K(\Omega_m)},\end{aligned}\quad (13)$$

gdzie  $K(\Omega_m \pm n\Omega)$  — wzmocnienie układu na określonej częstotliwości ( $n = 0, 1, 2$ ).

Znając przebieg współczynników funkcji Bessela w funkcji argumentu  $k$  można stwierdzić, że wyrażenia (13) będą bliskie zeru dla  $k \rightarrow 0$ . W tym przypadku słuszne są przybliżenia

$$\begin{aligned}\frac{U_{\Omega_m \pm \Omega}}{U_{\Omega_m}} &\cong k \cdot \frac{K(\Omega_m \pm \Omega)}{K(\Omega_m)}, \\ \frac{U_{\Omega_m \pm 2\Omega}}{U_{\Omega_m}} &\cong \frac{1}{2} k^2 \cdot \frac{K(\Omega_m \pm 2\Omega)}{K(\Omega_m)}.\end{aligned}\quad (14)$$

Z wyrażenia (14) można więc ocenić stopień zakłócenia sygnałami pasożytniczymi. Jest on tym mniejszy im mniejsza jest dewiacja fazy oraz im większa selektywność wzmacniacza.

W przypadku obwodów nastrojonych na częstotliwość  $F$  wymagania na ich jakość nie są tak ostre, ponieważ najbliższą częstotliwością pojawiającą się w układzie jest częstotliwość  $2F$ . Tak więc dokładność pomiaru przesunięcia fazy jest determinowana przez dokładność odczytu  $\cos(\varphi_A - \varphi_B)$  w przypadku magicznego  $T$ , a w przypadku sprzęgacza 3 dB/90° od dokładności pomiaru  $\sin(\varphi_A - \varphi_B)$ .

Dobór przyjętej dewiacji fazy należy optymalizować również ze względu na parametry szumowe układu. Czułość omawianego układu można wstępnie oszacować na podstawie zależności (7) i (8) lub (10) i (11). Określając z tych zależności maksymalne amplitudy sygnałów o pulsacjach  $\Omega_m$  i  $\Omega$  uzyskano dla dewiacji  $k < 1$  następującą zależność:

$$\frac{U_{\Omega_m \max}}{U_{\Omega \max}} \cong \frac{m}{k \left( 1 + \frac{m^2}{2} \right)}.$$

Jeżeli czułość układu rozumiana jest jako zdolność pomiaru w obecności szumu, to czułość toru  $U_\Omega$  jest dla  $m < 1$  w przybliżeniu  $n$ -krotnie mniejsza od czułości toru  $U_{\Omega_m}$ . W celu zlikwidowania tej różnicy należy poprawić parametry szumowe toru przez stosowanie małoszumnego stopnia wejściowego oraz większej selektywności wzmacniaczy.

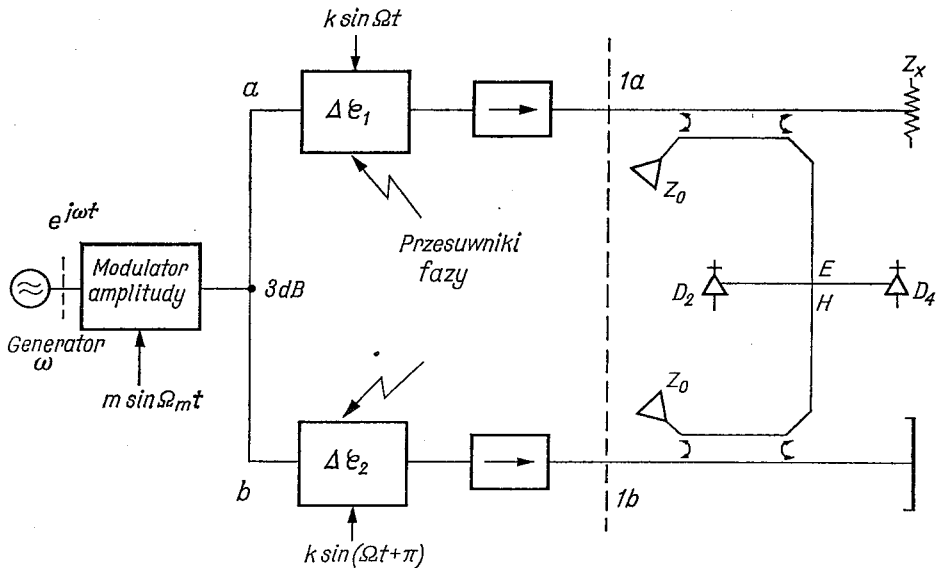
Tak więc dobór dewiacji fazy należy optymalizować zarówno ze względu na parametry szumowe toru  $\Omega$  dla małych  $k$ , jak i ze względu na istnienie, wynikających z zależności (14), zniekształceń, które rosną ze wzrostem dewiacji  $k$ .

### 3. UKŁAD DO POMIARU MODUŁU I FAZY WSPÓŁCZYNNIKA ODBICIA

Proponowany układ pomiarowy należy do tzw. układów symetrycznych. W układach tych następuje podział mocy sygnału mikrofalowego na dwa symetryczne tory, przy czym jeden tor uważany jest za tor odniesienia drugi natomiast za pomiarowy.

Schemat blokowy części mikrofalowej miernika przedstawiony został na rys. 3.

Sygnał z mikrofalowego generatora fali ciągłej doprowadzany jest do modulatora amplitudy. Zmodulowany w amplitudzie sygnał rozdziela się równomiernie na dwa identyczne tory, zawierające przesuwnik fazy, izolator i sprzęgacz kierunkowy. Tor *b* zakończony zwarcie przyjęto jako tor odniesienia, natomiast tor *a* zakończony nieznaną impedancją jest torem pomiarowym.



Rys. 3. Układ miernika współczynnika odbicia

Rozgałęzienie hybrydowe typu magiczne *T* lub sprzęgacz 3 dB/90° włączone są w układzie w ten sposób, że pobudzenie tych układów następuje tylko przez fale odbite od impedancji końcowych torów *a* i *b*. Warunek ten jest spełniony wówczas, gdy kierunkowość sprzęgaczy próbujących falę odbitą jest bardzo duża.

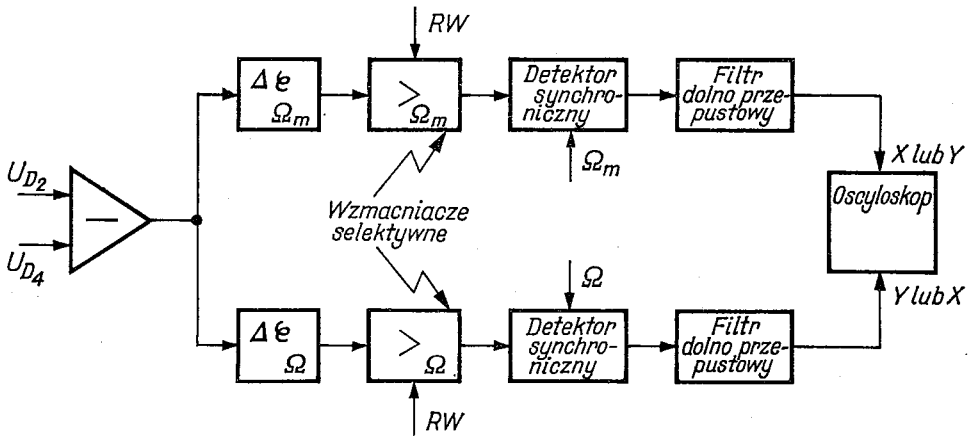
Przetwarzanie sygnałów z wyjścia detektorów mikrofalowych  $D_2$  i  $D_4$  przeprowadza się w układzie małej częstotliwości — rys. 4.

Odejmowania napięć z detektorów mikrofalowych dokonuje wzmacniacz różnicowy. Następnie sygnał rozdziela się na dwa tory, identyczne funkcjonalnie, lecz o innych parametrach elektrycznych. Każdy z torów zawiera przesuwnik fazy o przesunięciu fazy ustalonym jednorazowo, wzmacniacz selektywny, detektor synchroniczny oraz filtr dolno-przepustowy.

Przesuwnik fazy stosuje się w celu odpowiedniego zrównania fazy sygnału w danym kanale z fazą sygnału wzorcowego doprowadzonego do detektora synchronicznego. Usta-

lenie wzmocnienia w każdym torze uzyskuje się przy pomocy regulacji wzmocnienia (*RW*) wzmacniaczy selektywnych.

Napięcie na wyjściu filtra dolnoprzepustowego jest proporcjonalne do amplitudy sygnału danego kanału i w zależności od toru proporcjonalne do sinusa lub cosinusa różnicy faz sygnałów wejściowych układu hybrydowego. Napięcia te doprowadzane są wprost lub przez wzmacniacze wizyjne do płytek odchylających lampy oscyloskopowej.



Rys. 4. Schemat blokowy układu małej częstotliwości

Bardzo istotne jest odpowiednie podłączenie wyjść kanałów z płytkami *X* lub *Y*. Podłączenie to zależy od rodzaju wybranego układu hybrydowego.

Zakładając (rys. 3), że w płaszczyźnie *1a* fala ma postać:

$$\hat{e}_a(t) = \frac{E}{\sqrt{2}} e^{j(\omega t + k \sin \Omega t + \varphi_0)} (1 + m \cos \Omega_m t), \quad (15)$$

w płaszczyźnie *1b* falę można zapisać jako:

$$\hat{e}_b(t) = \frac{E}{\sqrt{2}} e^{j(\omega t - k \sin \Omega t + \varphi_0)} (1 + m \cos \Omega_m t). \quad (16)$$

Zgodnie z wprowadzonymi oznaczeniami, fale pobudzające odpowiednio gałęzie *E* i *H* mają następującą postać:

$$\hat{e}_E(t) = \frac{E}{\sqrt{2}} e^{j(\omega t + k \sin \Omega t + \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_x)} (1 + m \cos \Omega_m t) c(1 - c) |\Gamma_x|, \quad (17)$$

$$\hat{e}_H(t) = \frac{E}{\sqrt{2}} e^{j(\omega t - k \sin \Omega t + \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi)} (1 + m \cos \Omega_m t) c(1 - c), \quad (18)$$

gdzie:

- c* — sprzężenie sprzęgaczy,
- $\varphi_1, \varphi_2$  — przesunięcie fazy sygnału spowodowane skończoną długością drogi elektrycznej od przekroju *1a*, *1b* odpowiednio do ramion *E* lub *H*,
- $\varphi$  — faza nieznanego współczynnika odbicia,
- $|\Gamma_x|$  — moduł nieznanego współczynnika odbicia.

Zgodnie z zależnościami (1), (2) i (2a) oraz (15) i (16) uzyskuje się następujące relacje:

$$\begin{aligned} A &= \frac{E}{\sqrt{2}} \cdot c \cdot (1-c) \cdot |\Gamma_x|, \\ B &= \frac{E}{\sqrt{2}} \cdot c \cdot (1-c), \\ \varphi_A - \varphi_B &= \varphi_x - \pi, \end{aligned} \quad (19)$$

stąd

$$\frac{A}{B} = |\Gamma_x|. \quad (20)$$

Ustalenie wzmocnienia torów małej częstotliwości następuje w czasie kalibracji przeprowadzanej przy pomocy ruchomego zwarcia umieszczonego w torze pomiarowym. Po przeprowadzonej kalibracji napięcia podawane na płytki odchylające oscyloskopu wynoszą

$$\begin{aligned} X &= \delta |\Gamma_x| \cos \varphi_x, \\ Y &= \delta |\Gamma_x| \sin \varphi_x \end{aligned} \quad (21)$$

gdzie  $\delta$  — współczynnik proporcjonalności.

Uzyskany w tej postaci wynik może być, po zobrazowaniu na ekranie oscyloskopu, w prosty sposób odczytany na wykresie biegunowym lub wykresie Smitha jako  $Z_x = R_x + jX_x$ .

#### 4. WYNIKI EKSPERYMENTALNE

W celu eksperymentalnego potwierdzenia uzyskanych w wyniku analizy zależności zestawiono układ pomiarowy z elementów falowodowych na pasmo  $X$ . Zrezygnowano z symetrii obu torów układu z rys. 3 i zastosowano tylko jeden modulowany odbiciowy przesuwnik fazy. Analiza teoretyczna tak uproszczonego układu prowadzi do wniosków analogicznych, jak przytoczono wyżej z tym, że wymagana jest kalibracja układu na każdej częstotliwości.

W drugim torze wprowadzono również odbiciowy przesuwnik fazy ale zakończony precyzyjnym regulowanym zwierakiem, umożliwiającym kalibrowany przesuw fazy. Dodatkowo przed przesuwnikami fazy umieszczono regulowane tłumiki pozwalające na dowolne ustalanie mocy sygnałów w każdym torze.

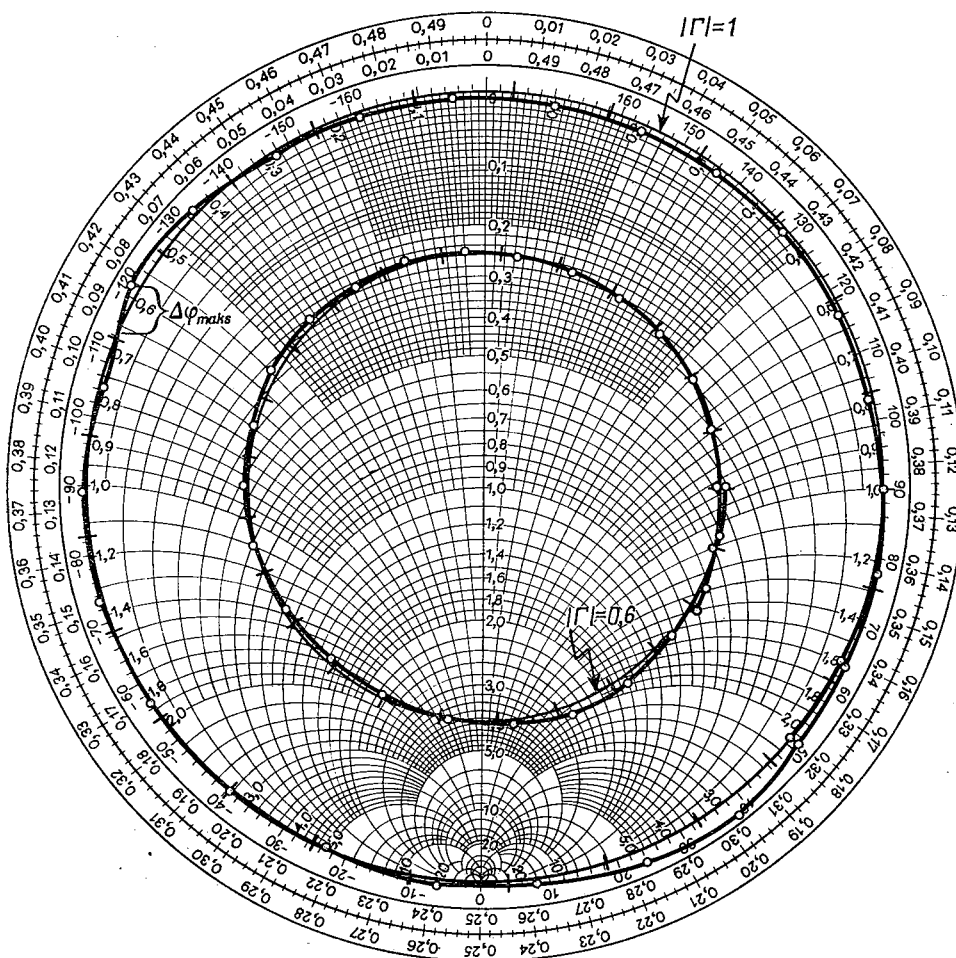
Podobnie jak podczas kalibracji układu, w miejsce badanej impedancji wstawiono zwarcie. W celu zwiększenia dokładności odczytu ekran oscyloskopu zastąpiono dwoma miernikami napięcia z zerem w środku skali. W tak zestawionym układzie możliwa była symulacja pomiaru współczynnika odbicia  $\Gamma$  o stałym module i fazie zmienianej dowolnie w granicach  $0 \div 360^\circ$ .

Zmieniając tłumienie sygnału w torze pomiarowym symulowano, w uproszczony sposób, zmianę modułu współczynnika odbicia. Przy kierunkowości użytych sprzęgaczy ( $> 40$  dB) metoda ta jest równoważna włączaniu wzorcowych obciążeń o współczynniku odbicia  $|\Gamma|$  zmieniającym się w granicach  $0,1 \div 1$ .

Układ małej częstotliwości zrealizowano zgodnie ze schematem blokowym z rys. 4. Częstotliwość  $F$  i  $F$  wybrano odpowiednio 10 Hz i 1000 Hz. Przy takim doborze częstotliwości można już zaobserwować wpływ modulacji fazy sygnału mikrofalowego, związany z powstaniem szkodliwych sygnałów po detekcji kwadratowej (14).

Przy dewiacjach fazy  $k \geq 0,5$  radiana obserwowano wyraźnie modulację amplitudy sygnału 1000 Hz częstotliwością 10 Hz. Efekt ten był zwiększony również przez dodatkową modulację amplitudy sygnału wynikającą ze zmian tłumienia przesuwnika fazy w takt pulsacji modulacji fazy. Prowadziło to do wyraźnego pogorszenia wyników. Dla dewiacji fazy  $k \approx 0,1$  radiana uzyskano wyniki zbliżone do oczekiwanych.

Na rys. 5 przedstawione zostały wyniki pomiarów na wykresie Smitha dla  $|T| \approx 1$  i  $|T| \approx 0,6$ . Dla porównania narysowano okręgi wzorcowe  $|T| = 1$  i  $|T| = 0,6$ , będące zbiorem punktów oczekiwanych. Różnice między zmierzonymi wartościami  $|T|$  i wartościami oczekiwanymi nie przekroczyły 5%.



Rys. 5. Wyniki pomiarów współczynnika odbicia  $|T| = 1$  i  $|T| = 0,6$  przeprowadzonych w proponowanym układzie

Błędy odczytu fazy można w sposób przybliżony określić jako różnicę między kątami wynikającymi z pomiaru, a kątami wyznaczonymi analitycznie (oznaczonymi kreskami na okręgach wzorcowych). Różnice te nie przekraczają  $7^\circ$ .

Przedstawione wyniki pomiarów są zbieżne z podaną wcześniej analizą. Uzyskanie większej dokładności pomiaru możliwe będzie po bardziej starannym dobraniu elementów i zapewnieniu odpowiednich warunków pracy, np. częstotliwości modulacji amplitudy i fazy.

Proponowany układ miernika do pomiaru współczynnika odbicia w pasmie mikrofalowym w wersji przedstawionej na rys. 3 i 4 jest układem automatycznym nie wymagającym poza wstępną kalibracją żadnych dodatkowych operacji w czasie pomiarów. Zaletami proponowanego układu są:

- niezbyt duży stopień skomplikowania,
- zastosowanie tylko jednego układu hybrydowego,
- możliwość zastosowania zarówno układu typu magiczne  $T$ , jak i sprzęgacza  $3\text{dB}/90^\circ$ ,
- układ hybrydowy może być wykonany dowolną techniką, np. techniką *MUS* [14, 15, 16],
- możliwość jednoczesnego określenia modułu i fazy współczynnika odbicia.

Jednak badania eksperymentalne wykazują, że układ w podanej wersji nie jest szerokopasmowym układem pomiarowym. Rzeczywisty układ wymaga bowiem przeprowadzania kalibracji na każdej częstotliwości.

Wąskopasmowość pracy układu nie jest cechą przyjętej koncepcji rozwiązania lecz efektem zastosowania w układzie elementów wąskopasmowych. Dominujący wpływ na ograniczenie szerokości pasma pracy miały detektory, których konstrukcja przewidywała dostrojenie na każdej częstotliwości. Zastosowanie szerokopasmowych detektorów pozwoliłoby na poszerzenie pasma pracy układu oraz uniknięcie konieczności kalibracji na każdej częstotliwości. Dodatkowo na pasmo pracy mają wpływ nieidealne elementy mikrofalowe, których parametry zmieniają się w funkcji częstotliwości.

Jedną z metod wyeliminowania ograniczeń szerokości pasma jest wprowadzenie automatycznie powtarzanej kalibracji wewnątrz układu, zapewniającej utrzymanie odpowiednich warunków pracy, stabilizację poziomów mocy w obu torach oraz regulację wzmacnień w obu torach układu m. cz.

Dalsze prace prowadzone są w kierunku realizacji mikrofalowego, w pełni automatycznego, szerokopasmowego miernika współczynnika odbicia zbudowanego na elementach wykonanych techniką *MUS* (mikrofalowych układów scalonych).

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. R. A. Hackborn, An Automatic Network Analyzer System, Hewlett-Packard Co., The Microwave Journal, May 1968.
2. Complex Impedance and Gain Measurement at RF and Microwave Frequencies, Hewlett-Packard Application Note, Microwave Journal, January 1967.
3. H. Groll, Mikrowellen Messtechnik, Veb Verlag Technik, Berlin 1969, 161—233.
4. B. Parzen, Impedance Measurements with Directional Coupler and Supplementary Voltage Probe, Proc. IRE, No. 10, October 1949.
5. A. L. Samuel, An Oscillographic Method of Presenting Impedances on the Reflection — Coefficient Plane, PIRE, No. 10, November 1947.

6. J. K. Chamberlain, A Direct Reading Waveguide Impedance and Reflections Indicator, *Electronic Engineering*, January 1962.
7. A. Jurkus, A Semi-Automatic Method for the Precision Measurement of Microwave Impedance, *IEEE Trans. on Instr. and Measurement*, No. 4, December 1969.
8. O. Gehre, A Microwave Interferometer for Wide-Band Measurements of Complex Transmission Coefficients, *IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement*, No. 1, February 1970.
9. S. B. Cohn, N. P. Weinhouse, Polar Display Adapter ET-120 for Use with Rantec's Phase Measurement System, Rantec Corp. Celabasas, California 1964.
10. S. B. Cohn, N. P. Weinhouse, An Automatic Microwave Phase-Measurement System, *Microwave Journal*, No. 2, 1964.
11. S. B. Cohn H. Oltman, A Precision Microwave Phase-Measurement System with Sweep Presentation, *International Conv. Rec. Inst. Radio Engrs*, Pt. 3, 1961.
12. G. Lisitano, Anwendung der sinusförmigen Interferenztechnik zum Bau eines Reflectometers und Polarimeters in mm-Wellenbereich, *Diss. Techn. Hochschule München*, 1964.
13. R. W. Anderson, O. T. Dennison, An Advanced New Network Analyzer for Sweep-Measuring Amplitude and Phase from 0.1 to 12.4 GHz, *Hewlett-Packard Journal*, No. 6, February 1967.
14. E. M. Jones, Wide-Band Strip-Line Magic-T, *IRE Trans. on MTT*, March 1960.
15. D. I. Kraker, Asymmetric Coupled-Transmission-Line Magic-T, *IEEE Trans. on MTT*, November 1964.
16. F. C. de Ronde, A New Class of Microstrip Directional Couplers, *GMTT Symposium Digest*, 1970.
17. J. Fagot, Ph. Magne, La modulation de fréquence. Theorie application aux faisceaux hertziens, tłum., na jęz. ros. Izdatielstwo „Sowietskoje Radio”, 1964.

I. LESZCZYŃSKA, J. DĄBROWSKI

## MEASUREMENT OF MICROWAVE REFLECTION COEFFICIENT

### Summary

This paper presents a new conception of the system for automatic measurement of reflection coefficient in a microwave band. This system operates using one hybrid junction only, the magic  $T$  junction or the 3 dB/90° directional coupler which can be made in any manner.

The determination of the complex reflection coefficient of an unknown load is obtained univalently by the application of the amplitude and phase modulations of the microwave signal.

This paper contains the theoretical argumentation of the proposed conception and the results of its experimental verification.

I. LESZCZYŃSKA, J. DĄBROWSKI

## LA MESURE DU COEFFICIENT DE RÉFLEXION DANS LE DOMAINE DES HYPERFRÉQUENCES

### Résumé

Dans l'article on présente l'idée d'un nouveau système pour la mesure du coefficient de réflexion dans le domaine des hyperfréquences.

Pour le fonctionnement de ce système un seul circuit hybride est suffisant — le coupleur hybride 3 dB/90° ou  $T$ -magique — exécuté d'une technologie quelconque.

La détermination univoque du coefficient de réflexion complexe d'un charge inconnu a été effectuée grâce à l'introduction de la modulation de l'amplitude et de la phase du signal dans la partie microonde de système.

L'article contient la motivation théorique de l'idée présentée et les résultats de sa vérification expérimentale.



I. LESZCZYŃSKA, J. DĄBROWSKI

## BEMESSUNG DES REFLEXIONSFAKTORS IM MIKROWELLENBEREICH

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die Konzeption des neuen automatischen Bemessungssystems des Reflexionsfaktors im Mikrowellenbereich dargestellt.

Das System wirkt in Anlehnung an das Hybridensystem-Richtkoppler 3 dB/90° oder das magische  $T$ , die in beliebiger Technik erzeugt werden.

Infolge der Einführung der Amplituden- und Phasenmodulation des Mikrowellensignals erreichte man die eindeutige Bezeichnung des komplexen Reflexionsfaktors.

Diese Arbeit enthält die theoretische Begründung der vorgeschlagenen Konzeption und auch die Ergebnisse experimenteller Versuche.

И. ЛЕЩИНЬСКА, Е. ДОМБРОВСКИ

НОВАЯ СХЕМА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ  
В МИКРОВОЛНОВОМ ДИАПАЗОНЕ

## Резюме

В труде представлена идея новой схемы для автоматического измерения коэффициента отражения в микроволновой полосе частот.

Действие схемы обосновано на использовании одной гибридной системы — 3 дБ/90° направленной связи или гибридной системы типа  $T$ -моста, изготовленных произвольной техникой.

Однозначное определение комплексного значения коэффициента отражения неизвестной нагрузки получено благодаря введению в систему амплитудной и фазовой модуляции микроволнового сигнала.

Работа содержит теоретическое обоснование предлагаемого проекта и результаты его экспериментальной проверки.



## Parametry zastępcze pręta ferromagnetycznego o skończonych wymiarach w liniowo przemieszczającym się polu magnetycznym

JACEK GIERAS (POZNAŃ)

*Instytut Elektrotechniki Przemysłowej Politechniki Poznańskiej*

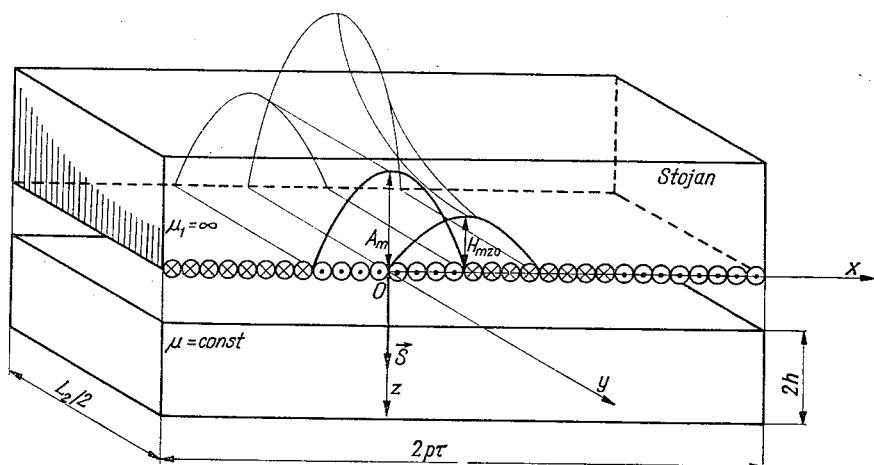
*Otrzymano 27.8.1973*

Przedstawiono równania opisujące trójwymiarowy rozkład pola elektromagnetycznego w masywnym jednorodnym pręcie ferromagnetycznym umieszczonym w liniowo przemieszczającym się polu magnetycznym wzbudzonym przez stojan o uzwojeniu dwufazowym. Na podstawie równań opisujących pole elektromagnetyczne wyznaczono rozpyły prądów, impedancję, straty mocy w pręcie oraz siłę wzajemnego oddziaływania stojan-pręt. Uwzględniono wpływ skończonych wymiarów pręta na powyższe parametry.

### 1. WSTĘP

Analiza pracy liniowych silników indukcyjnych o masywnej bieźni ferromagnetycznej oraz silników indukcyjnych o masywnym wirniku ferromagnetycznym wymaga znalezienia zastępczych parametrów masywnej półprzestrzeni ferromagnetycznej w przemieszczającym się polu magnetycznym. Literatura traktująca o tym zagadnieniu jest bogata, jednak problem sprowadza się przede wszystkim do wyznaczenia impedancji i strat mocy w masywnym ferromagnetyku przy założeniu dwuwymiarowego pola elektromagnetycznego. Natomiast przypadek trójwymiarowego pola elektromagnetycznego i na tej podstawie wyznaczenie zastępczych parametrów bieźni lub wirnika nie został wyczerpująco opracowany — prace [1], [4], [7] sprowadzają się przede wszystkim do analizy pola elektromagnetycznego.

W niniejszej pracy wyznaczono rozkład trójwymiarowego pola elektromagnetycznego wzbudzanego przez liniowy stojan dwufazowy (silniki wykonawcze) w masywnym pręcie ferromagnetycznym, a następnie obliczono jego impedancję, prądy, straty mocy oraz siłę oddziaływania na stojan. Jako wielkość wyjściową przyjęto obciążenie liniowe przyszczełkowej powierzchni stojana. Dla silnika indukcyjnego o masywnym wirniku ferromagnetycznym założono, że średnica wirnika jest dużo większa od głębokości wnikanía fali elektromagnetycznej, dzięki czemu wirnik można rozpatrywać identycznie jak płaską bieźnię liniowego silnika indukcyjnego i rozważania prowadzić w prostokątnym układzie współrzędnych  $x, y, z$  — rys. 1. Zatem bieźnię i wirnik można traktować jako masywny pręt ferromagnetyczny o wymiarach  $L_2, 2p\tau, 2h$ .



Rys. 1. Masywny pręt ferromagnetyczny w liniowo przemieszczającym się polu magnetycznym

## 2. OBCIĄŻENIE LINIOWE STOJANA

Zakłada się, że stojan jest wykonany z materiału ferromagnetycznego o przenikalności magnetycznej  $\mu_1 = \infty$ , konduktywności  $\gamma_1 = 0$  i posiada gładką powierzchnię wewnętrzną (brak uzłobkowania) oraz że uzwojenie stojana ułożone jest w sposób ciągły na powierzchni rozgraniczającej rdzeń stojana od szczeliny powietrznej [3]. Długość  $L_2$  bieźni lub wirnika w kierunku prostopadłym do ruchu pola jest równa długości idealnej  $L_i$  stojana. Amplitudy przestrzennych harmoniczných przepływów uzwojeń wzbudzenia i sterowania (uzwojenie dwufazowe) w przyjętym układzie współrzędnych — rys. 1 — odpowiednio wynoszą:

$$\underline{\Theta}_{mvw} = \frac{2}{\pi} \frac{z_{1w}}{p} \frac{\zeta_{vw}}{v} I_{1mw} e^{j\omega_1 t} = \Theta_{mvw} e^{j\omega_1 t}, \quad (1)$$

$$\underline{\Theta}_{mvs} = \frac{2}{\pi} \frac{z_{1s}}{p} \frac{\zeta_{vs}}{v} I_{1ms} e^{j\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right)} = \Theta_{mvs} e^{j\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right)}, \quad (2)$$

w których:

$v = 1, 3, 5 \dots$  — liczby nieparzyste,

$z_{1w}, z_{1s}$  — liczby zwojów szeregowych uzwojeń wzbudzenia i sterowania.

$\zeta_{vw}, \zeta_{vs}$  — współczynniki uzwojenia dla  $v$ -tej harmoniczných uzwojeń wzbudzenia oraz sterowania,

$I_{1mw}, I_{1ms}$  — wartości maksymalne prądów sinusoidalnych w uzwojeniach wzbudzenia oraz sterowania [A],

$p$  — liczba par biegunów,

$\tau$  — podziałka biegunowa [m].

zaś krzywe wzbudzenia tych uzwojeń zasilanych prądami sinusoidalnymi rozłożone na szereg Fouriera mają postać:

$$\underline{\Theta}_{mvw}(x, t) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\Theta_{mvw} e^{j\omega_1 t}}{2} \left( e^{jv \frac{\pi}{\tau} x} + e^{-jv \frac{\pi}{\tau} x} \right),$$

$$\begin{aligned}\underline{\Theta}_{mvs}(x, t) &= \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\Theta_{mvs} e^{j(\omega_1 t - \frac{\pi}{2})}}{2} \left[ e^{jv \left( \frac{\pi}{\tau} x - \frac{\pi}{2} \right)} + e^{-jv \left( \frac{\pi}{\tau} x - \frac{\pi}{2} \right)} \right] = \\ &= \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\Theta_{mvs} e^{j\omega_1 t}}{2} \left[ e^{jv \frac{\pi}{\tau} x - j(v+1) \frac{\pi}{2}} + e^{-jv \frac{\pi}{\tau} x + j(v-1) \frac{\pi}{2}} \right].\end{aligned}$$

Wypadkowy rozkład wzbudzenia uzwojenia dwufazowego zasilanego prądami przesuniętymi o kąt fazowy  $90^\circ$  przedstawia równanie:

$$\underline{\Theta}_m(x, t) = \sum_{v=1}^{\infty} \left( \underline{\Theta}_{mv}^+ e^{j\omega_1 t} e^{-jv \frac{\pi}{\tau} x} + \underline{\Theta}_{mv}^- e^{j\omega_1 t} e^{jv \frac{\pi}{\tau} x} \right). \quad (3)$$

Zgodnie z teorią składowych symetrycznych układów dwufazowych [2] przyjęto oznaczenia:

$$\underline{\Theta}_{mv}^+ = \frac{\underline{\Theta}_{mvw} + \underline{\Theta}_{mvs} e^{j(v-1) \frac{\pi}{2}}}{2}, \quad \underline{\Theta}_{mv}^- = \frac{\underline{\Theta}_{mvw} + \underline{\Theta}_{mvs} e^{-j(v+1) \frac{\pi}{2}}}{2}.$$

Równanie (3) opisuje dwa pola biegnące z jednakową prędkością kątową  $\frac{\Omega_1}{v} = \frac{\omega_1}{vp}$  i przemieszczające się w przeciwnych kierunkach, w ogólnym przypadku o różnych amplitudach.

Przestrzennoczasowy rozkład obciążenia liniowego  $\underline{A}_m(x, t)$  jest krzywą różniczkową krzywej przepływu:

$$\underline{A}_m(x, t) = \frac{d[\underline{\Theta}_m(x, t)]}{dx} = \sum_{v=1}^{\infty} \left[ \underline{A}_{mv}^+ e^{j(\omega_1 t - v \frac{\pi}{\tau} x)} + \underline{A}_{mv}^- e^{j(\omega_1 t + v \frac{\pi}{\tau} x)} \right], \quad (4)$$

gdzie amplitudy obciążeń liniowych wyrażają się wzorami:

$$\underline{A}_{mv}^+ = \frac{z_{1w} \zeta_{vw} I_{1mw} + z_{1s} \zeta_{vs} I_{1ms} e^{j(v-1) \frac{\pi}{2}}}{\tau p} e^{-j \frac{\pi}{2}}, \quad (5)$$

$$\underline{A}_{mv}^- = \frac{z_{1w} \zeta_{vw} I_{1mw} + z_{1s} \zeta_{vs} I_{1ms} e^{-j(v+1) \frac{\pi}{2}}}{\tau p} e^{j \frac{\pi}{2}}, \quad (6)$$

przy czym:

$$I_{1mw} = \sqrt{2} I_{1skw}, \quad I_{1ms} = \sqrt{2} I_{1sks},$$

gdzie  $I_{1skw}$ ,  $I_{1sks}$  — wartości skuteczne prądów w uzwojeniach stojana.

W ogólnym przypadku pracy pole magnetyczne w szczelinie jest polem eliptycznym. Jeżeli dla  $v=1$  w równaniu (4)  $\underline{A}_{mv}^+ = \underline{A}_{mv}$ ,  $\underline{A}_{mv}^- = 0$ , to pole magnetyczne jest kołowym polem współbieżnym (znamionowe warunki pracy silnika), jeżeli  $\underline{A}_{mv}^+ = \underline{A}_{mv}^- = \frac{1}{2} \underline{A}_{mv}$  — pole magnetyczne jest polem pulsującym (zasilanie jednofazowe).

Obciążenie liniowe stojana w kierunku osiowym rozpatruje się jako okresową funkcję prostokątną [1], [4], [7] przyjmującą następujące wartości w przedziałach:

$$\begin{aligned}
-\frac{L_i}{2} < y < \frac{L_i}{2} & \quad - \quad \underline{A}_m(x, y, t) = \underline{A}_m(x, t), \\
y = \pm n \frac{L_i}{2} & \quad - \quad \underline{A}_m(x, y, t) = 0, \\
-\frac{3L_i}{2} < y < -\frac{L_i}{2}; \quad \frac{L_i}{2} < y < \frac{3L_i}{2} & \quad - \quad \underline{A}_m(x, y, t) = -\underline{A}_m(x, t).
\end{aligned}$$

Po rozłożeniu tak opisanej funkcji na szereg Fouriera w przedziale  $\langle -L, L \rangle$  otrzymuje się:

$$\underline{A}_m(x, y, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \underline{A}_{m\nu}^+ e^{-j\nu \frac{\pi}{\tau} x} + \underline{A}_{m\nu}^- e^{j\nu \frac{\pi}{\tau} x} \right) (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n} \cos\left(n \frac{\pi}{L_2} y\right), \quad (7)$$

gdzie  $n = 1, 3, 5 \dots$  — liczby naturalne nieparzyste.

Założenie prostokątnego obciążenia liniowego wzdłuż osi  $y$  prowadzi do wyników częściowo niezgodnych z doświadczeniem w odniesieniu do rozkładu pola elektromagnetycznego na krańcach pręta. Powyższą rozbieżność można w dużym stopniu wyeliminować przyjmując zastępczą długość bieźni i wirnika większą od długości rzeczywistej [4]. Długość zastępcza maleje wraz ze wzrostem stosunku  $L_2/\tau$  i jeżeli parametr ten jest większy od liczby 2, niewiele przewyższa długość rzeczywistą.

### 3. POLE ELEKTROMAGNETYCZNE W MASYWNYM PRĘCIE O STAŁEJ PRZENIKALNOŚCI MAGNETYCZNEJ

Rozkład pola elektromagnetycznego w masywnym pręcie ferromagnetycznym wyznaczono przyjmując następujące założenia upraszczające:

a) bieźnia lub wirnik są wykonane z izotropowego materiału ferromagnetycznego o stałej konduktywności  $\gamma_2$  i stałej względnej przenikalności  $\mu_r$  równej względnej przenikalności  $\mu_{rs}$  na powierzchni — zmienną przenikalność magnetyczną uwzględnia się w dalszych rozważaniach wg metody L. R. Nejmana [5];

b) rozkład pola elektromagnetycznego w kierunku osi  $x$  jest okresowy o okresie  $2\tau$ , składowa stała jest równa zero;

c) rozkład pola elektromagnetycznego w kierunku osi  $y$  jest okresowy o okresie  $2L_2$ , składowa stała jest równa zero;

d) obciążenie liniowe stojana zmienia się według zależności (7);

e) wielkości zmienne w czasie mają przebiegi sinusoidalne.

Przy takich założeniach rozkład pola elektromagnetycznego jest opisany równaniami:

— w szczelinie powietrznej  $\delta$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \underline{H}_{mp} &= 0, \\
\nabla^2 \underline{E}_{mp} &= 0,
\end{aligned} \quad (8)$$

— w masywnej półprzestrzeni

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \underline{H}_m &= \underline{\alpha}_2^2 \underline{H}_m, \\
\nabla^2 \underline{E}_m &= \underline{\alpha}_2^2 \underline{E}_m, \\
\nabla^2 \underline{J}_m &= \underline{\alpha}_2^2 \underline{J}_m,
\end{aligned} \quad (9)$$

przy czym zespolone parametry tłumienia wyrażają się wzorami:

— dla pola współbieżnego

$$\alpha_2^+ = \sqrt{j s \omega_1 \mu_0 \mu_{rs}^+ \gamma_2} = (1+j) \frac{1}{\Delta^+}, \quad (10)$$

— dla pola przeciwbieżnego

$$\alpha_2^- = \sqrt{j(2-s)\omega_1 \mu_0 \mu_{rs}^- \gamma_2} = (1+j) \frac{1}{\Delta^-}, \quad (11)$$

w którym  $\omega_1 = 2\pi f_1$  — pulsacja prądu w uzwojeniach stojana, równoważne zaś głębokości wnikania fali elektromagnetycznej do masywnego ferromagnetyka wynoszą:

$$\Delta^+ = \sqrt{\frac{2}{s \omega_1 \mu_0 \mu_{rs}^+ \gamma_2}}, \quad (12)$$

$$\Delta^- = \sqrt{\frac{2}{(2-s) \omega_1 \mu_0 \mu_{rs}^- \gamma_2}}. \quad (13)$$

Po rozpisaniu równań (8) i (9) na osi współrzędnych  $x, y, z$  otrzymuje się ich zapis skalary i rozwiązuje metodą rozdzielania zmiennych Fouriera. Składowa natężenia pola elektrycznego w kierunku osi  $z$

$$\underline{E}_{mz} = 0, \quad (14)$$

gdyż prądy w masywnym pręcie ferromagnetycznym mogą płynąć tylko w kierunku osiowym, tzn. w kierunku osi  $y$  oraz w kierunku obwodowym, tzn. w kierunku osi  $x$ . Zespolone stałe całkowe w rozwiązaniach ogólnych równań (8) i (9) wyznacza się z następujących warunków brzegowych na granicy środowisk [6]:

$$\underline{H}_{mpx}(x, y, 0) = -\underline{A}_m(x, y), \quad (15)$$

$$\underline{H}_{mpx}(x, y, \delta) = \underline{H}_{mx}(x, y, \delta), \quad (16)$$

$$\mu_0 \underline{H}_{mpz}(x, y, \delta) = \mu_0 \mu_{rs} \underline{H}_{mz}(x, y, \delta). \quad (17)$$

Stałe rzeczywiste występujące w wykładniku potęgi liczby  $e$  wyznaczone na podstawie założeń b) i c) wynoszą:

$$\beta_v = v \frac{\pi}{\tau}, \quad \eta_n = n \frac{\pi}{L_2}.$$

Postępując analogicznie jak w pracy [4], otrzymuje się rozwiązania szczególne równań (8) i (9) w postaci skalarnej (poniżej przytoczono tylko rozwiązania równań (9)):

$$\begin{aligned} \underline{H}_{mx} &= \underline{H}_{mx}^+ + \underline{H}_{mx}^- = \\ &= -\frac{4}{\pi} \left[ \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n} \frac{\sqrt{(\alpha_2^+)^2 + \beta_v^2 + \eta_n^2}}{\underline{C}_{vn}^+ \sqrt{\beta_v^2 + \eta_n^2}} A_{mv}^+ e^{-j\beta_v x} \cos(\eta_n y) e^{-\sqrt{(\alpha_2^+)^2 + \beta_v^2 + \eta_n^2}(z-\delta)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n} \frac{\sqrt{(\alpha_2^-)^2 + \beta_v^2 + \eta_n^2}}{\underline{C}_{vn}^- \sqrt{\beta_v^2 + \eta_n^2}} A_{mv}^- e^{j\beta_v x} \cos(\eta_n y) e^{-\sqrt{(\alpha_2^-)^2 + \beta_v^2 + \eta_n^2}(z-\delta)} \right], \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{my} &= \underline{H}_{my}^+ + \underline{H}_{my}^- = \\
&= j \frac{4\tau}{\pi L_2} \left[ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\nu} \frac{\sqrt{(\alpha_2^+)^2 + \beta_\nu^2 + \eta_n^2}}{\underline{C}_{\nu n}^+ \sqrt{\beta_\nu^2 + \eta_n^2}} \underline{A}_{mv}^+ e^{-j\beta_\nu x} \sin(\eta_n y) e^{-\sqrt{(\alpha_2^+)^2 + \beta_\nu^2 + \eta_n^2}(z-\delta)} + \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\nu} \frac{\sqrt{(\alpha_2^-)^2 + \beta_\nu^2 + \eta_n^2}}{\underline{C}_{\nu n}^- \sqrt{\beta_\nu^2 + \eta_n^2}} \underline{A}_{mv}^- e^{j\beta_\nu x} \sin(\eta_n y) e^{-\sqrt{(\alpha_2^-)^2 + \beta_\nu^2 + \eta_n^2}(z-\delta)} \right], \quad (19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{mz} &= \underline{H}_{mz}^+ + \underline{H}_{mz}^- = \\
&= j \frac{4\tau}{\pi^2} \left[ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\nu n} \frac{\sqrt{\beta_\nu^2 + \eta_n^2}}{\underline{C}_{\nu n}^+} \underline{A}_{mv}^+ e^{-j\beta_\nu x} \cos(\eta_n y) e^{-\sqrt{(\alpha_2^+)^2 + \beta_\nu^2 + \eta_n^2}(z-\delta)} + \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\nu n} \frac{\sqrt{\beta_\nu^2 + \eta_n^2}}{\underline{C}_{\nu n}^-} \underline{A}_{mv}^- e^{j\beta_\nu x} \cos(\eta_n y) e^{-\sqrt{(\alpha_2^-)^2 + \beta_\nu^2 + \eta_n^2}(z-\delta)} \right], \quad (20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{mx} &= \underline{E}_{mx}^+ + \underline{E}_{mx}^- = \\
&= j \frac{4\tau}{\pi L_2} \frac{1}{\gamma_2} \left[ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\nu} \frac{(\alpha_2^+)^2}{\underline{C}_{\nu n}^+ \sqrt{\beta_\nu^2 + \eta_n^2}} \underline{A}_{mv}^+ e^{-j\beta_\nu x} \sin(\eta_n y) e^{-\sqrt{(\alpha_2^+)^2 + \beta_\nu^2 + \eta_n^2}(z-\delta)} + \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\nu} \frac{(\alpha_2^-)^2}{\underline{C}_{\nu n}^- \sqrt{\beta_\nu^2 + \eta_n^2}} \underline{A}_{mv}^- e^{j\beta_\nu x} \sin(\eta_n y) e^{-\sqrt{(\alpha_2^-)^2 + \beta_\nu^2 + \eta_n^2}(z-\delta)} \right], \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{my} &= \underline{E}_{my}^+ + \underline{E}_{my}^- = \\
&= \frac{4}{\pi} \frac{1}{\gamma_2} \left[ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n} \frac{(\alpha_2^+)^2}{\underline{C}_{\nu n}^+ \sqrt{\beta_\nu^2 + \eta_n^2}} \underline{A}_{mv}^+ e^{-j\beta_\nu x} \cos(\eta_n y) e^{-\sqrt{(\alpha_2^+)^2 + \beta_\nu^2 + \eta_n^2}(z-\delta)} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n} \frac{(\alpha_2^-)^2}{\underline{C}_{\nu n}^- \sqrt{\beta_\nu^2 + \eta_n^2}} \underline{A}_{mv}^- e^{j\beta_\nu x} \cos(\eta_n y) e^{-\sqrt{(\alpha_2^-)^2 + \beta_\nu^2 + \eta_n^2}(z-\delta)} \right], \quad (22)
\end{aligned}$$

$$J_{mx} = \underline{J}_{mx}^+ + \underline{J}_{mx}^- = \gamma_2 \underline{E}_{mx}, \quad (23)$$

$$J_{my} = \underline{J}_{my}^+ + \underline{J}_{my}^- = \gamma_2 \underline{E}_{my}. \quad (24)$$

Czynnik czasowy  $e^{j\omega t}$  występujący po obu stronach równań (18) do (24) został wyeliminowany. Zespółone współczynniki  $\underline{C}_{\nu n}^+$ ,  $\underline{C}_{\nu n}^-$  zależne od wymiarów i własności fizycznych masywnego ferromagnetyka odpowiednio wynoszą:

$$\begin{aligned}
\underline{C}_{\nu n}^+ &= \frac{\sqrt{(\alpha_2^+)^2 + \beta_\nu^2 + \eta_n^2}}{\sqrt{\beta_\nu^2 + \eta_n^2}} \operatorname{ch} \delta \sqrt{\beta_\nu^2 + \eta_n^2} + \mu_{rs}^+ \operatorname{sh} \delta \sqrt{\beta_\nu^2 + \eta_n^2} \approx \\
&\approx \frac{\sqrt{(\alpha_2^+)^2 + \beta_\nu^2 + \eta_n^2}}{\sqrt{\beta_\nu^2 + \eta_n^2}} + \mu_{rs}^+ \delta \sqrt{\beta_\nu^2 + \eta_n^2} = k^+ + j l^+, \quad (25)
\end{aligned}$$



$$\underline{C}_{vn}^- = \frac{\sqrt{(\alpha_2^-)^2 + \beta_v^2 + \eta_n^2}}{\sqrt{\beta_v^2 + \eta_n^2}} \operatorname{ch} \delta \sqrt{\beta_v^2 + \eta_n^2} + \mu_{rs}^- \operatorname{sh} \delta \sqrt{\beta_v^2 + \eta_n^2} \approx$$

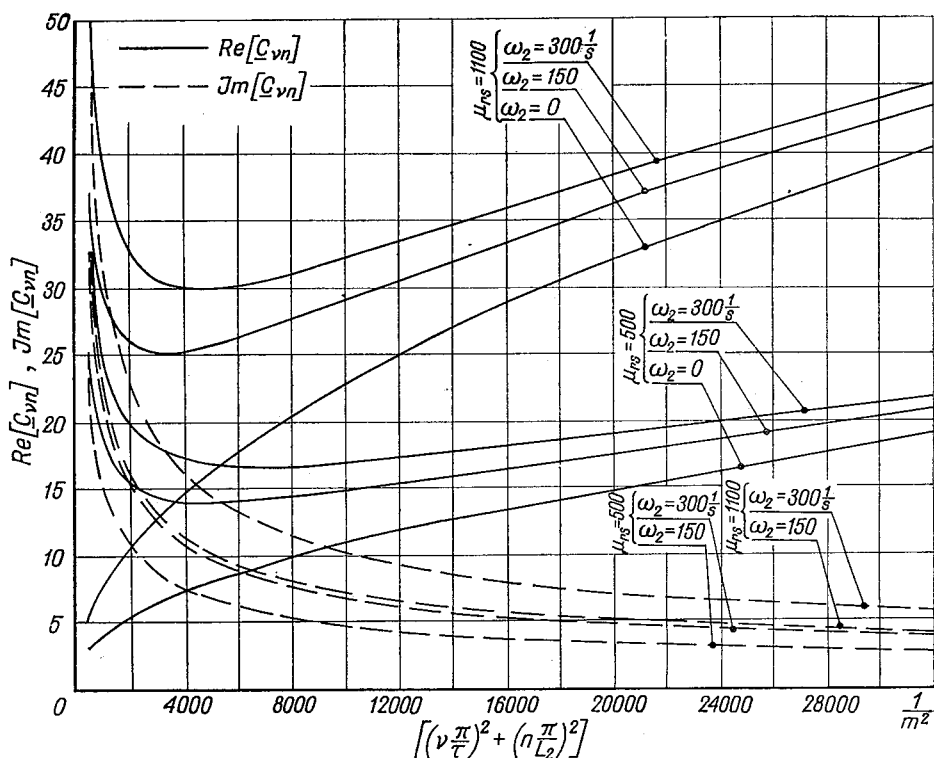
$$\approx \frac{\sqrt{(\alpha_2^-)^2 + \beta_v^2 + \eta_n^2}}{\sqrt{\beta_v^2 + \eta_n^2}} + \mu_{rs}^- \delta \sqrt{\beta_v^2 + \eta_n^2} = k^- + j l^-, \quad (26)$$

gdzie:

$$k = \mu_{rs} \delta \sqrt{\beta_v^2 + \eta_n^2} + \sqrt{\frac{\sqrt{(\beta_v^2 + \eta_n^2)^2 + (\omega_2 \mu_0 \mu_{rs} \gamma_2)^2} + \beta_v^2 + \eta_n^2}{2(\beta_v^2 + \eta_n^2)}},$$

$$l = \sqrt{\frac{\sqrt{(\beta_v^2 + \eta_n^2)^2 + (\omega_2 \mu_0 \mu_{rs} \gamma_2)^2} - \beta_v^2 - \eta_n^2}{2(\beta_v^2 + \eta_n^2)}},$$

przy czym współczynniki  $k^+$  i  $l^+$  otrzymuje się dla  $\omega_2^+ = s\omega_1$ ,  $k^-$  i  $l^-$  — dla  $\omega_2^- = (2-s)\omega_1$ . Zastosowane uproszczenia  $\operatorname{ch} \delta \sqrt{\beta_v^2 + \eta_n^2} \approx 1$  oraz  $\operatorname{sh} \delta \sqrt{\beta_v^2 + \eta_n^2} \approx \delta \sqrt{\beta_v^2 + \eta_n^2}$  są dopuszczalne, ponieważ bezwzględny wymiar szczeliny powietrznej  $\delta < 1$  mm. We wzorach określających parametry silnika indukcyjnego często występuje wartość bezwzględna  $\underline{C}_{vn}$ , która wynosi:



Rys. 2. Zależność współczynników  $k = Re[\underline{C}_{vn}]$  oraz  $l = Im[\underline{C}_{vn}]$  od wymiarów pręta ferromagnetycznego i wyższych harmonicznych rozkładu pola dla szczeliny powietrznej  $\delta = 0,2$  mm i konduktywności ferromagnetyka  $\gamma_2 = 5 \cdot 10^6$  S/m

$$C_{vn} = \sqrt{\frac{V(\beta_v^2 + \eta_n^2)^2 + (\omega_2 \mu_0 \mu_{rs} \gamma_2)^2}{\beta_v^2 + \eta_n^2}} + \sqrt{2} \mu_{rs} \delta \sqrt{\frac{V(\beta_v^2 + \eta_n^2) + (\omega_2 \mu_0 \mu_{rs} \gamma_2)^2 + \beta_v^2 + \eta_n^2}{+ \mu_{rs}^2 \delta^2 (\beta_v^2 + \eta_n^2)}}. \quad (27)$$

Na rys. 2 podano zależność  $C_{vn} = f(\beta_v^2 + \eta_n^2)$  przy  $\mu_{rs} = \text{const}$ ,  $\omega_2 = \text{const}$ ,  $\delta = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ ,  $\gamma_2 = 5 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ .

Składowe normalne pola elektrycznego  $E_{mz}$  i gęstości prądu  $J_{mz}$  są równe zeru; dla typowych wymiarów silników indukcyjnych oraz  $v \geq n$ ,  $v, n \leq 5$ ,  $p \geq 2$  dominujące znaczenie ma składowa  $H_{mx}$ , potem  $H_{my}$  (z wyjątkiem obszarów brzegowych), najmniejsze  $H_{mz}$ , zatem nie popełnia się dużego błędu przyjmując  $H_{mz} \approx 0$ . Pole elektromagnetyczne na powierzchni masywnego pręta można w przybliżeniu uważać za pole dwuwymiarowe, które w miarę wnikania w głąb zanika wykładniczo.

Wykorzystując maszyny cyfrowe można numerycznie uzyskać rozkład poszczególnych składowych pola elektromagnetycznego w masywnej bieźni ferromagnetycznej lub w wirniku w funkcji współrzędnych  $x, y, z$ . Rozkład pola elektromagnetycznego opisany równaniami (18) do (24) jest jednak rozkładem nieco wyidealizowanym, gdyż w rozważaniach nie jest uwzględnione ułożenie stojana. Przy wyznaczaniu parametrów silnika indukcyjnego taki rozkład jest do przyjęcia.

#### 4. ROZPŁYW PRĄDÓW W MASYWNYM PRĘCIE FERROMAGNETYCZNYM

Prądy płynące w masywnym pręcie ferromagnetycznym wyznacza się z równań gęstości prądu (23) i (24). Składową zgodną i przeciwną  $v$ -tych harmonicznym prądów poprzecznych oblicza się następująco:

$$I_{mxv}^+(x) = \int_0^{\pm \frac{L_2}{2}} \int_\delta^\infty J_{mx}^+ dy dz = j \frac{4\tau}{\pi^2} \sum_{n=1}^\infty (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(\alpha_2^+)^2}{V(\alpha_2^+)^2 + \beta_v^2 + \eta_n^2} \frac{1}{C_{vn}^+ \sqrt{\beta_v^2 + \eta_n^2}} A_{mv}^+ e^{-j\beta_v x}, \quad (28)$$

$$I_{mxv}^-(x) = \int_0^{\pm \frac{L_2}{2}} \int_\delta^\infty J_{mx}^- dy dz = -j \frac{4\tau}{\pi^2} \sum_{n=1}^\infty (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(\alpha_2^-)^2}{V(\alpha_2^-)^2 + \beta_v^2 + \eta_n^2} \frac{1}{C_{vn}^- \sqrt{\beta_v^2 + \eta_n^2}} A_{mv}^- e^{j\beta_v x}. \quad (29)$$

Ułamek zawierający zespolony współczynnik  $\alpha_2$  wygodnie jest doprowadzić do postaci:

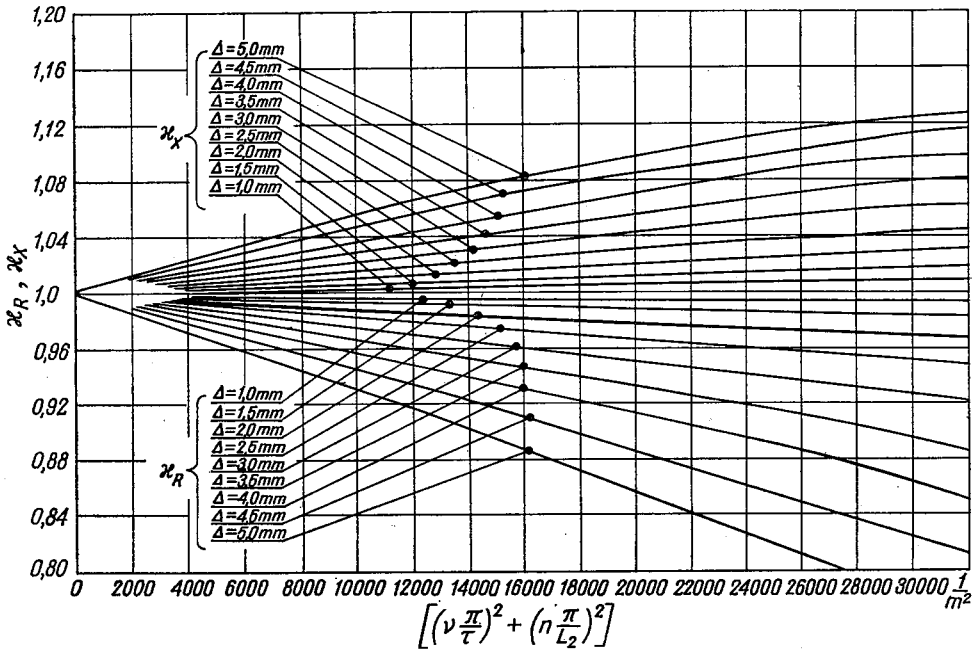
$$\frac{\alpha_2^2}{V(\alpha_2^2 + \beta_v^2 + \eta_n^2)} = \frac{2j \frac{1}{\Delta^2}}{\sqrt{\beta_v^2 + \eta_n^2 + j \frac{2}{\Delta^2}}} = (\kappa_R + j\kappa_X) \sqrt{\frac{\omega_2 \mu_0 \mu_{rs} \gamma_2}{2}}, \quad (30)$$

gdzie:

$$\kappa_R = \frac{2}{\Delta} \sqrt{\frac{V(\beta_v^2 + \eta_n^2)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\Delta}\right)^4 - \beta_v^2 - \eta_n^2}{2 \left[ (\beta_v^2 + \eta_n^2)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\Delta}\right)^4 \right]}}, \quad (31)$$

$$\kappa_X = \frac{2}{\Delta} \sqrt{\frac{\sqrt{(\beta_v^2 + \eta_n^2)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\Delta}\right)^4} + \beta_v^2 + \eta_n^2}{2 \left[ (\beta_v^2 + \eta_n^2)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\Delta}\right)^4 \right]}}. \quad (32)$$

Na rys. 3 podano zależność  $\kappa_R, \kappa_X = f(\beta_v^2 + \eta_n^2)$  przy  $\Delta = \text{const}$ . Jeżeli  $\omega_2 = s\omega_1$ , to  $\Delta = \Delta^+$ ,  $\kappa_R = \kappa_R^+$ ,  $\kappa_X = \kappa_X^+$ , natomiast jeżeli  $\omega_2 = (2-s)\omega_1$ , to  $\Delta = \Delta^-$ ,  $\kappa_R = \kappa_R^-$ ,  $\kappa_X = \kappa_X^-$ .



Rys. 3. Zależność współczynników  $\kappa_R$  i  $\kappa_X$  od wymiarów pręta ferromagnetycznego i wyższych harmonicznych rozkładu pola

W takim razie średnie wartości maksymalne  $\nu$ -tych harmonicznych prądów poprzecznych na długości jednej podziałki biegunowej  $\left\langle -\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2} \right\rangle$  wynoszą:

$$I_{mx\nu}^+ = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} I_{mx\nu}^+(x) dx = \frac{8\tau}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{\nu+n-2}{2}} \frac{1}{\nu^2 n} \times \\ \times \frac{(\kappa_R^+ I^+ - \kappa_X^+ k^+) + j(\kappa_R^+ k^+ + \kappa_X^+ I^+)}{(k^+)^2 + (I^+)^2} \cdot \frac{A_{mv}^+}{\sqrt{\beta_v^2 + \eta_n^2}} \sqrt{\frac{s\omega_1 \mu_0 \mu_{rs}^+ \gamma_2}{2}}, \quad (33)$$

$$I_{mxy}^- = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} I_{mxy}^-(x) dx = \frac{8\tau}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{v+n-2}{2}} \frac{1}{v^2 n} \times \\ \times \frac{(\kappa_X^- k^- - \kappa_R^- l^-) - j(\kappa_R^- k^- + \kappa_X^- l^-)}{(k^-)^2 + (l^-)^2} \frac{A_{mv}^-}{\sqrt{\beta_v^2 + \eta_n^2}} \sqrt{\frac{(2-s)\omega_1 \mu_0 \mu_{rs} \gamma_2}{2}}. \quad (34)$$

Równania (33) i (34) pozwalają wyznaczyć wartości maksymalne czynne i bierne składowej zgodnej oraz przeciwnej prądów płynących w kierunku osi  $x$ .

W podobny sposób oblicza się prądy osiowe współdziałające ze składową normalną indukcji w wytwarzaniu siły elektrodynamicznej:

$$I_{myv}^+ = \int_0^{\tau} \int_{\delta}^{\infty} J_{my}^{+\dagger} dx dz = \frac{8\tau}{j\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{vn} \times \\ \times \frac{(\alpha_2^+)^2}{\sqrt{(\alpha_2^+)^2 + \beta_v^2 + \eta_n^2}} \frac{1}{C_{vn} \sqrt{\beta_v^2 + \eta_n^2}} A_{mv}^+ \cos(\eta_n y), \quad (35)$$

$$I_{myv}^- = \int_0^{\tau} \int_{\delta}^{\infty} J_{my}^{-\dagger} dx dz = j \frac{8\tau}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{vn} \times \\ \times \frac{(\alpha_2^-)^2}{\sqrt{(\alpha_2^-)^2 + \beta_v^2 + \eta_n^2}} \frac{1}{C_{vn} \sqrt{\beta_v^2 + \eta_n^2}} A_{mv}^- \cos(\eta_n y). \quad (36)$$

Maksymalny prąd osiowy występuje przy  $y = 0$ , natomiast przyjmuje wartość zerową na krańcach, przy  $y = \pm \frac{L_2}{2}$ . Średnie wartości maksymalne  $v$ -tych harmonicznich prądów osiowych w przedziale  $\left\langle -\frac{L_2}{2}, \frac{L_2}{2} \right\rangle$  wynoszą:

$$I_{myv}^+ = \frac{16\tau}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{vn^2} \frac{(\kappa_X^+ k^+ - \kappa_R^+ l^+) - j(\kappa_R^+ k^+ + \kappa_X^+ l^+)}{(k^+)^2 + (l^+)^2} \frac{A_{mv}^+}{\sqrt{\beta_v^2 + \eta_n^2}} \sqrt{\frac{s\omega_1 \mu_0 \mu_{rs} \gamma_2}{2}}, \quad (37)$$

$$I_{myv}^- = \frac{16\tau}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{vn^2} \frac{(\kappa_R^- l^- - \kappa_X^- k^-) + j(\kappa_R^- k^- - \kappa_X^- l^-)}{(k^-)^2 + (l^-)^2} \frac{A_{mv}^-}{\sqrt{\beta_v^2 + \eta_n^2}} \sqrt{\frac{(2-s)\omega_1 \mu_0 \mu_{rs} \gamma_2}{2}}, \quad (38)$$

stąd oblicza się:

— wartości czynne

$$I_{myvcz}^+ = \text{Re}[I_{myv}^+], \quad I_{myvcz}^- = \text{Re}[I_{myv}^-],$$

— wartości bierne

$$I_{myvb}^+ = \text{Im}[I_{myv}^+], \quad I_{myvb}^- = \text{Im}[I_{myv}^-],$$

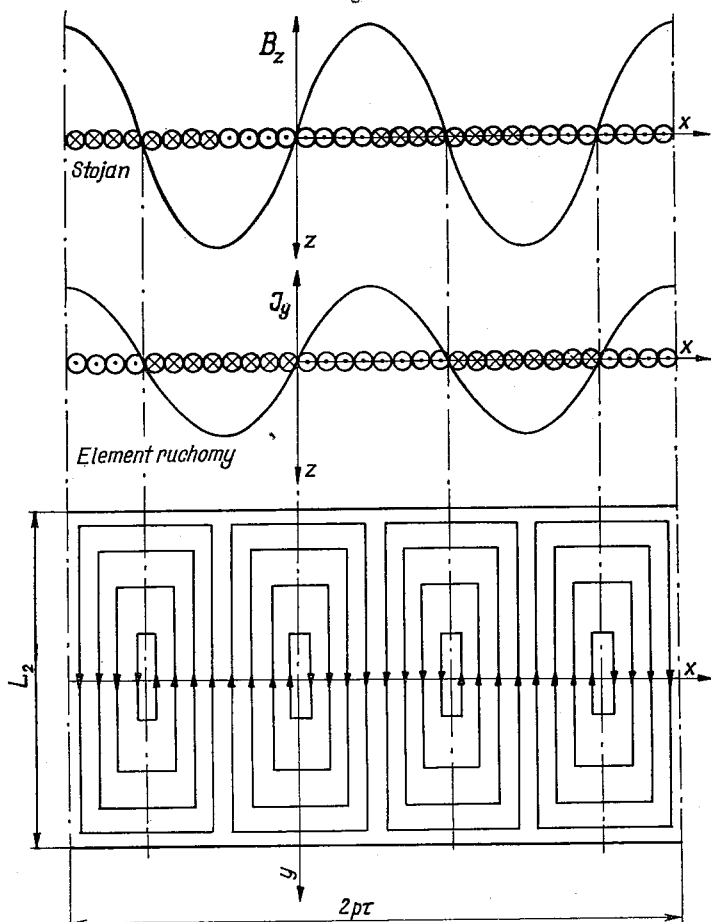
— wartości skuteczne prądów osiowych

$$I_{skyv}^+ = \frac{|I_{myv}^+|}{\sqrt{2}}, \quad I_{skyv}^- = \frac{|I_{myv}^-|}{\sqrt{2}}.$$

Porównując zależności (33) z (37) i (34) z (38) widać, że pierwsza harmoniczna prądu osiowego jest dwa razy większa od pierwszej harmonicznej prądu poprzecznego:

$$\begin{aligned} I_{mycz}^{+} &= -2I_{mxcz}^{+}, & I_{mycz}^{-} &= -2I_{mxcz}^{-}, \\ I_{myb}^{+} &= -2I_{mxb}^{+}, & I_{myb}^{-} &= -2I_{mxb}^{-}. \end{aligned}$$

Fizycznie tłumaczy się ów fakt tym, że prąd osiowy rozgałęzia się na dwie strugi prądów poprzecznych tworząc w przecie ferromagnetycznym  $2p$  zamkniętych obwodów o parametrach rozłożonych. Schematyczny rozptył prądów jest przedstawiony na rys. 4.



Rys. 4. Rozptył prądów według torów prostokątnych w masywnym przecie ferromagnetycznym wzbudzanych przez czterobiegunowy stojan

## 5. IMPEDANCJA FALOWA MASYWNEGO PRĘTA FERROMAGNETYCZNEGO

Jednostkowa impedancja falowa masywnego pręta ferromagnetycznego wyraża się stosunkiem składowych stycznych pola elektrycznego i magnetycznego na powierzchni [6]. Wypadkowy rozkład poszczególnych składowych pola  $\underline{H}_{ms}$ ,  $\underline{E}_{ms}$  na powierzchni, tzn. dla współrzędnej  $z = \delta$ , opisują równania:

$$\begin{aligned} H_{msvn}^+ &= \sqrt{(H_{mxsvn}^+)^2 + (H_{mysvn}^+)^2} = \\ &= \frac{4}{\pi} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sqrt{(\alpha_2^+)^2 + \beta_v^2 + \eta_n^2}}{C_{vn} \sqrt{\beta_v^2 + \eta_n^2}} A_{mv}^+ e^{-j\beta_v x} \sqrt{\frac{1}{n^2} \cos^2 \eta_n y - \frac{\tau^2}{L_2^2} \frac{1}{v^2} \sin^2 \eta_n y}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} E_{msvn}^+ &= \sqrt{(E_{mxsvn}^+)^2 + (E_{mysvn}^+)^2} = \\ &= \frac{4}{\pi} \frac{1}{\gamma_2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(\alpha_2^+)^2}{C_{vn}^+ \sqrt{\beta_v^2 + \eta_n^2}} A_{mv}^+ e^{-j\beta_v x} \sqrt{\frac{1}{n^2} \cos^2 \eta_n y - \frac{\tau^2}{L_2^2} \frac{1}{v^2} \sin^2 \eta_n y}, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} H_{msvn}^- &= \sqrt{(H_{mxsvn}^-)^2 + (H_{mysvn}^-)^2} = \\ &= \frac{4}{\pi} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sqrt{(\alpha_2^-)^2 + \beta_v^2 + \eta_n^2}}{C_{vn}^- \sqrt{\beta_v^2 + \eta_n^2}} A_{mv}^- e^{j\beta_v x} \sqrt{\frac{1}{n^2} \cos^2 \eta_n y - \frac{\tau^2}{L_2^2} \frac{1}{v^2} \sin^2 \eta_n y}, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} E_{msvn}^- &= \sqrt{(E_{mxsvn}^-)^2 + (E_{mysvn}^-)^2} = \\ &= \frac{4}{\pi} \frac{1}{\gamma_2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{(\alpha_2^-)^2}{C_{vn}^- \sqrt{\beta_v^2 + \eta_n^2}} A_{mv}^- e^{j\beta_v x} \sqrt{\frac{1}{n^2} \cos^2 \eta_n y - \frac{\tau^2}{L_2^2} \frac{1}{v^2} \sin^2 \eta_n y}. \end{aligned} \quad (42)$$

Na podstawie powyższych zależności (39), (40), (41) i (42) otrzymuje się wyrażenia na jednostkowe impedancje falowe w danym punkcie pręta dla  $v$ ,  $n$ -tych harmonicznich napięć pól:

— współbieżnego

$$\underline{z}_2^+ = \frac{E_{msvn}^+}{H_{msvn}^+} = \frac{1}{\gamma_2} \frac{(\alpha_2^+)^2}{\sqrt{(\alpha_2^+)^2 + \beta_v^2 + \eta_n^2}} = (\kappa_R^+ + j\kappa_X^+) \sqrt{\frac{s\omega_1 \mu_0 \mu_{rs}^+}{2\gamma_2}} \quad (43)$$

— i przeciwbieżnego

$$\underline{z}_2^- = \frac{E_{msvn}^-}{H_{msvn}^-} = \frac{1}{\gamma_2} \frac{(\alpha_2^-)^2}{\sqrt{(\alpha_2^-)^2 + \beta_v^2 + \eta_n^2}} = (\kappa_R^- + j\kappa_X^-) \sqrt{\frac{(2-s)\omega_1 \mu_0 \mu_{rs}^-}{2\gamma_2}}. \quad (44)$$

Współczynniki  $\kappa_R$  dla rezystancji i  $\kappa_X$  dla reaktancji wynikają z faktu skończonych wymiarów masywnego pręta ferromagnetycznego. Jak wynika z zależności (43) i (44), impedancję masywnego pręta można obliczać ze wzorów wyprowadzonych na podstawie teorii fali płaskiej [6] mnożąc rezystancję przez współczynnik  $\kappa_R < 1$ , reaktancję — przez  $\kappa_X > 1$ .

W rozdziale 4 wykazano, że prąd osiowy  $I_y$  rozgałęzia się na dwie strugi prądów poprzecznych  $I_x$ . W rzeczywistości, oprócz prądów  $I_x$ , poprzez powierzchnie boczne równoległe do osi  $x$  pręta płyną prądy poprzeczne  $I_z$ . Istnieje zatem  $2p$  zamkniętych oczek utworzonych przez prądy  $I_y$ ,  $I_x$ ,  $I_z$ . Wyznaczając średnie drogi prądów w przecie, na podstawie rys. 4 uzyska się jego schemat zastępczy o impedancjach skupionych — rys. 5.

Stosując założenie upraszczające, że głębokość wnikania fali elektromagnetycznej do pręta jest stała wzdłuż średniej drogi prądów  $I_y$  i  $I_x$ , wypadkowa impedancja pojedynczego oczka wynosi:

— przy pominięciu prądu  $I_z$

$$\underline{Z} = 2(\underline{Z}_y + \underline{Z}_x), \quad (45)$$

— przy uwzględnieniu prądu  $I_r$

$$\underline{Z} = 2 \left( \underline{Z}_y + \frac{\underline{Z}_x \underline{Z}_\tau}{\underline{Z}_x + \underline{Z}_\tau} \right). \quad (46)$$

Poszczególne impedancje zastępcze wyznacza się na podstawie zależności (43) i (44) oraz rys. 5, a mianowicie:

$$\underline{Z}_y = (\kappa_R + j\kappa_X) \frac{0,5L_2}{0,5\tau\gamma_2\Delta} = (\kappa_R + j\kappa_X) \frac{L_2}{\tau} \sqrt{\frac{\omega_2 \mu_0 \mu_{rs}}{2\gamma_2}}, \quad (47)$$

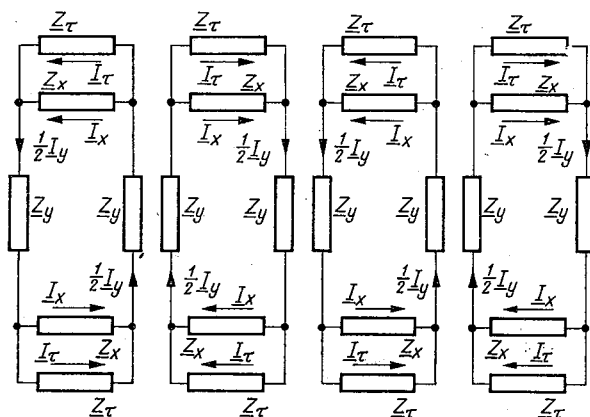
$$\underline{Z}_x = (\kappa_R + j\kappa_X) \frac{0,5\tau}{0,5L_2\delta\gamma_2\Delta} = (\kappa_R + j\kappa_X) \frac{\tau}{L_2} \sqrt{\frac{\omega_2 \mu_0 \mu_{rs}}{2\gamma_2}}, \quad (48)$$

$$\underline{Z}_\tau = (\kappa_{R\tau} + j\kappa_{X\tau}) \frac{0,5\tau}{h\gamma_2\Delta_\tau} = (\kappa_{R\tau} + j\kappa_{X\tau}) \frac{\tau}{2h} \sqrt{\frac{\omega_2 \mu_0 \mu_{rst}}{2\gamma_2}}, \quad (49)$$

gdzie:

$h$  — w masywnych wirnikach krótszy bok prostokąta o polu równym  $\frac{\pi D_2^2}{4}$  ( $h = \frac{\pi D_2^2}{8p\tau} = \frac{D_2}{4}$ ), w przypadku masywnej bieźni — połowa jej wysokości,

$\mu_{rst} \neq \mu_{rs}$  — względna przenikalność magnetyczna na powierzchni bocznej pręta ferromagnetycznego równoległej do osi  $x$ .



Rys. 5. Schemat zastępczy masywnego pręta ferromagnetycznego o impedancjach skupionych

Nie popełnia się dużego błędu zakładając  $\mu_{rst} \approx \mu_{rs}$  (jest możliwe znalezienie ścisłej zależności między  $\mu_{rst}$  i  $\mu_{rs}$  według równań rozkładu pola elektromagnetycznego). Wtedy  $\kappa_{R\tau} = \kappa_R$ ,  $\kappa_{X\tau} = \kappa_X$ . Postępując podobnie jak przy obliczaniu impedancji wirnika klatkowego, należy rozpatrywać impedancję połowy konturu, czyli rzeczywista impedancja masywnego pręta ferromagnetycznego jest równa połowie impedancji określonej zależnościami (45) i (46):  $\underline{Z}_2 = 0,5 \underline{Z}$ .

Do dalszych rozważań zostanie wprowadzone pojęcie współczynnika wzrostu modułu impedancji osiowej  $\underline{Z}_y$ , definiowanego według równania:

$$\underline{Z}_2 = k_z \underline{Z}_y;$$

stąd

$$k_z = 1 + \left( \frac{\tau}{L_2} \right)^2 \frac{1}{\frac{2h}{L_2} + 1}, \quad (50)$$

lub przy pominięciu drogi prądów obwodowych  $I_r$  przez powierzchnie boczne:

$$k_z = 1 + \left( \frac{\tau}{L_2} \right)^2. \quad (51)$$

Zatem sprowadzona do jednego z uzwojeń stojana impedancja masywnego pręta ferromagnetycznego dla poszczególnych harmonicznych pól współbieżnego i przeciwbieżnego ma postać:

$$\underline{Z}_{2s}^+ = R_{2s}^+ + jX_{2s}^+ = (\kappa_R^+ + j\kappa_X^+) \frac{2m_1(z_{1s} \zeta_{rs}^*)^2}{\tau p} k_z L_2 \sqrt{\frac{s\omega_1 \mu_0 \mu_{rs}^+}{2\gamma_2}}, \quad (52)$$

$$\underline{Z}_{2s}^- = R_{2s}^- + jX_{2s}^- = (\kappa_R^- + j\kappa_X^-) \frac{2m_1(z_{1s} \zeta_{rs}^*)^2}{\tau p} k_z L_2 \sqrt{\frac{(2-s)\omega_1 \mu_0 \mu_{rs}^-}{2\gamma_2}}. \quad (53)$$

## 6. STRATY MOCY

Na podstawie twierdzenia Poyntinga do obliczenia gęstości mocy w masywnej półprzestrzeni konieczna jest znajomość składowej normalnej wektora Poyntinga  $\underline{S}$ , której zwrot jest zgodny ze zwrotem osi  $z$  dla przyjętego układu współrzędnych — rys. 1. Według definicji wektora Poyntinga, jego składowe normalne dla  $v$ ,  $n$ -tych harmonicznych pól współbieżnego i przeciwbieżnego przy  $z = \delta$  przedstawiają gęstość mocy elektromagnetycznej traconej w masywnym pręcie:

$$\underline{S}_{zvn}^+ = \frac{1}{2} (\underline{E}_{mxvn}^+ \underline{H}_{myvn}^{+*} - \underline{E}_{myvn}^+ \underline{H}_{mxvn}^{+*})_{z=\delta}, \quad (54)$$

$$\underline{S}_{zvn}^- = \frac{1}{2} (\underline{E}_{mxvn}^- \underline{H}_{myvn}^{-*} - \underline{E}_{myvn}^- \underline{H}_{mxvn}^{-*})_{z=\delta}. \quad (55)$$

Wielkości  $\underline{E}_{mxvn}^+$ ,  $\underline{E}_{myvn}^+$ ,  $\underline{E}_{mxvn}^-$ ,  $\underline{E}_{myvn}^-$  są określone równaniami (21) i (22), natomiast wielkości sprzężone  $\underline{H}_{mxvn}^{+*}$ ,  $\underline{H}_{myvn}^{+*}$ ,  $\underline{H}_{mxvn}^{-*}$ ,  $\underline{H}_{myvn}^{-*}$  według równań (18) i (19) wynoszą:

$$\underline{H}_{mxvn}^{+*} = \underline{H}_{mxsvn}^{+*} e^{-\sqrt{(\alpha_2^{+*})^2 + \beta_v^2 + \eta_n^2}(z-\delta)}, \quad (56)$$

$$\underline{H}_{myvn}^{+*} = \underline{H}_{mysvn}^{+*} e^{-\sqrt{(\alpha_2^{+*})^2 + \beta_v^2 + \eta_n^2}(z-\delta)}, \quad (57)$$

$$\underline{H}_{mxvn}^{-*} = \underline{H}_{mxsvn}^{-*} e^{-\sqrt{(\alpha_2^{-*})^2 + \beta_v^2 + \eta_n^2}(z-\delta)}, \quad (58)$$

$$\underline{H}_{myvn}^{-*} = \underline{H}_{mysvn}^{-*} e^{-\sqrt{(\alpha_2^{-*})^2 + \beta_v^2 + \eta_n^2}(z-\delta)}, \quad (59)$$

gdzie:

$$\alpha_2^{+*} = (1-j) \frac{1}{\Delta^+},$$

$$\alpha_2^{-*} = (1-j) \frac{1}{\Delta^-}.$$



Po podstawieniu poszczególnych harmoniczných natężeń pól według równań (21), (22), (56), (57), (58), (59) do (54) i (55), wykonaniu całkowania zgodnie z twierdzeniem Poyntinga od  $-p\tau$  do  $p\tau$  względem  $x$  oraz od  $-\frac{L_2}{2}$  do  $\frac{L_2}{2}$  względem  $y$  i zsumowaniu wszystkich harmoniczných  $\nu, n$  otrzymuje się straty mocy w masywnym pręcie ferromagnetycznym wywołane odpowiednio polem współbieżnym i przeciwbieżnym:

$$\Delta S_z^+ = \Delta P_z^+ + j\Delta Q_z^+ = \frac{8p\tau}{\pi^2} \times \\ \times \sqrt{\frac{s\omega_1\mu_0\mu_{rs}^+}{2\gamma_2}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\kappa_R^+ + j\kappa_X^+) \frac{V \sqrt{(\beta_\nu^2 + \eta_n^2)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\Delta^+}\right)^4}}{\beta_\nu^2 + \eta_n^2} \left( \frac{\tau^2}{\nu^2 L_2} + \frac{L_2}{n^2} \right) \left( \frac{A_{mv}^+}{C_{\nu n}^+} \right)^2, \quad (60)$$

$$\Delta S_z^- = \Delta P_z^- + j\Delta Q_z^- = \frac{8p\tau}{\pi^2} \times \\ \times \sqrt{\frac{(2-s)\omega_1\mu_0\mu_{rs}^-}{2\gamma_2}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\kappa_R^- - j\kappa_X^-) \frac{V \sqrt{(\beta_\nu^2 + \eta_n^2)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\Delta^-}\right)^4}}{\beta_\nu^2 + \eta_n^2} \left( \frac{\tau^2}{\nu^2 L_2} + \frac{L_2}{n^2} \right) \left( \frac{A_{mv}^-}{C_{\nu n}^-} \right)^2. \quad (61)$$

Nietrudno zauważyć, że w wyrażeniach (60) i (61) występuje współczynnik wzrostu impedancji osiowej  $k_z$  dla  $\nu, n$ -tych harmoniczných pola przy pominięciu prądów  $I_\tau$  — zależność (51), gdyż zastępcza długość  $L_2$  wynosi tutaj:

$$L'_2 = k_{z\nu n} L_2 = \left[ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{\nu^2} \left( \frac{\tau}{L_2} \right)^2 \right] L_2.$$

Zależności (60) i (61) nie uwzględniają zatem strat mocy wywołanych prądami  $I_\tau$  płynącymi przez powierzchnie równoległe do osi  $x$ .

## 7. SIŁA WZAJEMNEGO ODDZIAŁYWANIA STOJAN-MASYWNY PRĘT FERROMAGNETYCZNY

Siłę ponderomotoryczną działającą na jednostkę długości masywnej bieźni ferromagnetycznej lub masywnego wirnika ferromagnetycznego zgodnie z prawem Ampere'a można wyrazić w sposób skalarny:

$$dF_x = I_y B_z dy \sin(\mathbf{dy}, \mathbf{B}_z).$$

Jest to siła skierowana stycznie do powierzchni rozważanego pręta ferromagnetycznego, więc  $\sin(\mathbf{dy}, \mathbf{B}_z) = 1$ . Siły osiowe (równoległe do osi  $y$ ) są równe zero, gdyż prądy poprzeczne

nie  $I_x$  w przedziałach  $\left\langle -\frac{L_2}{2}, 0 \right\rangle$  i  $\left\langle 0, \frac{L_2}{2} \right\rangle$  mają przeciwne zwroty. Gęstość prądu osiowego oraz składowa normalna indukcji zmieniają się wraz ze współrzędnymi  $x, y, z$ , zatem w zapisie zespolonym siła od  $\nu, n$ -tej harmoniczných pola działająca na jednostkę długości  $dy$  jest całką wzdłuż kierunku jej działania względem  $dx$  i w kierunku promieniowym względem  $dz$ :

$$dF_{xvn}^+ = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-p\tau}^{p\tau} \int_{\delta}^{\infty} [B_{mzvn}^+ J_{myvn}^{*+}] dx dz, \quad (62)$$

$$dF_{xvn}^- = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-p\tau}^{p\tau} \int_{\delta}^{\infty} [B_{mzvn}^- J_{myvn}^{*-}] dx dz, \quad (63)$$

gdzie:

$$B_{mzvn}^+ = \mu_0 \mu_{rs}^+ H_{mzvn}^+, \quad (64)$$

$$B_{mzvn}^- = \mu_0 \mu_{rs}^- H_{mzvn}^-, \quad (65)$$

oraz według równania (24):

$$J_{myvn}^{*+} = \frac{4}{\pi} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n} \frac{(\alpha_2^{*+})^2}{C_{vn}^{*+} \sqrt{\beta_v^2 + \eta_n^2}} A_{mv}^{*+} e^{j\beta_v x} \cos(\eta_n y) e^{-\sqrt{(\alpha_2^{*+})^2 + \beta_v^2 + \eta_n^2} (z-\delta)}, \quad (66)$$

$$J_{myvn}^{*-} = \frac{4}{\pi} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n} \frac{(\alpha_2^{*-})^2}{C_{vn}^{*-} \sqrt{\beta_v^2 + \eta_n^2}} A_{mv}^{*-} e^{-j\beta_v x} \cos(\eta_n y) e^{-\sqrt{(\alpha_2^{*-})^2 + \beta_v^2 + \eta_n^2} (z-\delta)}. \quad (67)$$

Harmoniczne  $v, n$  składowych normalnych natężenia pola magnetycznego we wzorach (64), (65) określa równanie (20).

Podstawiając wyrażenia (64) i (66) do (62) oraz (65) i (67) do (63) i wykonując całkowanie, siły na jednostkę długości masywnej bieźni i masywnego wirnika od poszczególnych harmoniczných pola współbieżnego i przeciwbieżnego wynoszą:

$$dF_{xvn}^+ = \mu_0 \mu_{rs}^+ \frac{32\tau^2 p}{\pi^3} \frac{1}{vn^2} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{2(\beta_v^2 + \eta_n^2) + 2\sqrt{(s\omega_1 \mu_0 \mu_{rs}^+ \gamma_2)^2 + (\beta_v^2 + \eta_n^2)^2}}} \left( \frac{A_{mv}^+}{C_{vn}^+} \right) \frac{s\omega_1 \mu_0 \mu_{rs}^+ \gamma_2}{2} \cos^2(\eta_n y) dy, \quad (68)$$

$$dF_{xvn}^- = -\mu_0 \mu_{rs}^- \frac{32\tau^2 p}{\pi^3} \frac{1}{vn^2} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{2(\beta_v^2 + \eta_n^2) + 2\sqrt{[(2-s)\omega_1 \mu_0 \mu_{rs}^- \gamma_2]^2 + (\beta_v^2 + \eta_n^2)^2}}} \left( \frac{A_{mv}^-}{C_{vn}^-} \right)^2 \frac{(2-s)\omega_1 \mu_0 \mu_{rs}^- \gamma_2}{2} \times$$

$$\times \cos^2(\eta_n y) dy. \quad (69)$$

Znak „-” przy siłę pochodzącej od pola przeciwbieżnego oznacza, że jest ona siłą hamującą.

Całkowite siły działające na masywną bieźnię ferromagnetyczną lub masywny wirnik ferromagnetyczny o skończonej długości  $L_2$  od  $v$ -tych harmoniczných pola współbieżnego i przeciwbieżnego oblicza się całkując siły jednostkowe w granicach od  $-\frac{L_2}{2}$  do  $\frac{L_2}{2}$  oraz sumując  $n$ -te harmoniczne rozkładu pola elektromagnetycznego wzdłuż osi  $y$ :

$$F_{xv}^+ = \frac{8\tau^2 L_2 p}{\sqrt{2} \pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{vn^2} \frac{1}{\sqrt{2(\beta_v^2 + \eta_n^2) + 2\sqrt{(s\omega_1 \mu_0 \mu_{rs}^+ \gamma_2)^2 + (\beta_v^2 + \eta_n^2)^2}}} \times$$

$$\times \left( \frac{A_{mv}^+}{C_{vn}^+} \right)^2 s\omega_1 (\mu_0 \mu_{rs}^+)^2 \gamma_2, \quad (70)$$

$$F_{x\nu}^- = -\frac{8\tau^2 L_2 p}{\sqrt{2}\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\nu n^2} \frac{1}{\sqrt{2(\beta_{\nu}^2 + \eta_n^2) + 2\sqrt{[(2-s)\omega_1 \mu_0 \mu_{rs} \gamma_2]^2 + (\beta_{\nu}^2 + \eta_n^2)^2}}} \times \\ \times \left(\frac{A_{m\nu}^-}{C_{\nu n}}\right)^2 (2-s)\omega_1 (\mu_0 \mu_{rs})^2 \gamma_2. \quad (71)$$

Dla pierwszej harmoniczej pola współbieżnego ( $\nu = 1$ ) siła elektrodynamiczna jest użyteczną siłą ciągu, natomiast dla wyższych harmoniczych wystąpią siły pasożytnicze. Dla ogólnego niesymetrycznego stanu pracy silnika indukcyjnego siła użyteczna działająca na masywną bieźnię lub masywny wirnik jest sumą sił od pola współbieżnego i przeciwbieżnego przy  $\nu = 1$ , czyli:

$$F_x = F_x^+ + F_x^-. \quad (72)$$

Moment elektromagnetyczny silnika o masywnym wirniku ferromagnetycznym oblicza się mnożąc siłę określoną zależnością (72) przez promień wirnika:

$$M_{elm} = F_x \frac{D_2}{2}. \quad (73)$$

## 8. UWZGLĘDNIENIE ZMIAN PRZENIKALNOŚCI MAGNETYCZNEJ W GŁĄB MASYWNEGO FERROMAGNETYKA I STRAT HISTEREZOWYCH

Jak wynika z przeprowadzonych rozważań, impedancja oraz straty mocy w masywnym pręcie ferromagnetycznym w polu trójwymiarowym różnią się od impedancji i strat mocy w polu jednowymiarowym współczynnikami  $x_R$  i  $x_X$ . Wartości tych współczynników niewiele odbiegają od jedności — rys. 3, a więc w mniej dokładnych obliczeniach można je we wzorach (52), (53), (60), (61) pominąć i obliczać impedancję oraz straty mocy według wzorów wyprowadzonych na podstawie teorii fali płaskiej [6]. Wydaje się zatem, że można zmienną przenikalność magnetyczną w głąb masywnej bieźni ferromagnetycznej i masywnego wirnika ferromagnetycznego oraz straty histerezowe uwzględniać metodą Nejmana [5] mnożąc rezystancję i straty mocy czynnej przez współczynnik  $a_R = 1, 3 \dots 1, 5$ , natomiast reaktancję i straty mocy biernej — przez współczynnik  $a_X = 0,8 \dots 0,9$ .

## 9. WNIOSKI

1. Wprowadzone współczynniki  $x_R$  i  $x_X$  charakteryzują zmianę parametrów masywnego ferromagnetyka o skończonych wymiarach umieszczonego w trójwymiarowym polu elektromagnetycznym w stosunku do masywnej półprzestrzeni ferromagnetycznej, na którą pada fala płaska.

2. Skończone wymiary pręta i wyższe harmoniczne rozkładu przestrzennego pola powodują nieznaczne zmniejszenie rezystancji rozważanego pręta i nieznaczne zwiększenie jego reaktancji; zmiany te są tym większe, im większa jest głębokość wnikania oraz im mniejsze są wymiary geometryczne pręta i długość fali elektromagnetycznej traktowanej jako fala monochromatyczna.

3. Na podstawie przedstawionych rozważań można skonstruować algorytm obliczeń elektromagnetycznych na maszynie cyfrową z uwzględnieniem harmonicznych przestrzennych trójwymiarowego rozkładu pola silników indukcyjnych o elemencie ruchomym charakteryzującym się parametrami rozłożonymi.

4. W praktycznych obliczeniach inżynierskich impedancję oraz straty mocy w masywnej bieźni ferromagnetycznej i w masywnym wirniku ferromagnetycznym silników indukcyjnych można obliczać ze wzorów dla fali płaskiej, ponieważ współczynniki  $x_R$  i  $x_X$  niewiele różnią się od jedności — rys. 3.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. G. Angst, The Polyphase Induction Motor with Solid Rotor. Effects of Saturation and Finite Length. Transactions AIEE — Power Apparatus and Systems, vol. 80, 1962, s. 902—910.
2. J. S. Czeczot, Mikromaszyny elektryczne w automatyce, WNT, Warszawa 1968.
3. M. Dąbrowski, Pole magnetyczne wzbudzone przez warstwę prądową w szczelinie maszyny elektrycznej, Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej „Elektryka”, nr 13, 1970, s. 37—46.
4. J. Lasociński, Pole elektromagnetyczne w szczelinie maszyny o masywnym wirniku ferromagnetycznym przy uwzględnieniu skończonej długości maszyny, Rozprawy Elektrotechniczne, t. XII, z. 1, 1966, s. 69—90.
5. L. R. Nejman, Powierzchniowy efekt w ferromagnetycznych ciałach, GEI, Leningrad—Moskwa 1949.
6. J. Turowski, Elektrodynamika techniczna, WNT, Warszawa 1968.
7. A. J. Wood, C. Concordia, An Analysis of Solid Rotor Machines. Part III. Finite Length Effects, Transactions AIEE — Power Apparatus and Systems, April 1960, s. 21—26.

J. GIERAS

#### EQUIVALENT PARAMETERS OF FERROMAGNETIC BAR WITH FINITE DIMENSIONS IN A LINEAR DISLOCATING MAGNETIC FIELD

##### Summary

Equations are presented describing a three-dimensional distribution of a magnetic field in a solid uniform ferromagnetic bar placed in a linear dislocating magnetic field excited by a linear stator with two-phase winding. On the basis of equations describing electromagnetic field, current flow, impedance, loss of power in the bar and the force of stator-bar interaction have been determined. The influence of the bar's finite dimensions on the parameters above has been taken into account.

J. GIERAS

#### PARAMÈTRES EQUIVALENTS DE LA BARRE FERROMAGNÉTIQUE AUX DIMENSIONS FINIES DANS LE CHAMP MAGNÉTIQUE SE DÉPLACANT LINÉAIRE

##### Résumé

L'article présente les équations décrivant la distribution tridimensionnelle du champ électromagnétique dans la barre massive homogène ferromagnétique placée dans le champ magnétique se déplaçant linéaire qui est induit par le stator linéaire à enroulement biphasé. A partir des équations décrivant le champ magnétique on a déterminé la répartition des courants, l'impédance, la perte de la puissance dans la barre et la force de la réaction réciproque stator-barre. On a considéré l'influence des dimensions finies de la barre sur ces paramètres.

J. GIERAS

ERSATZSCHALTBILDPARAMETER EINES FERROMAGNETISCHEN STABES MIT  
ENDLICHEN DIMENSIONEN IM LINEAR VERLAGEREN, MAGNETISCHEN FELD

## Zusammenfassung

Die hier angeführten Gleichungen beschreiben die dreidimensionale Verteilung eines elektromagnetischen Feldes eines massiven ferromagnetischen Stabes, der im linear verlagerten, magnetischen, durch linearen Stator mit Zweiphasenwicklung erregten Feld untergebracht worden ist. Auf Grund der das elektromagnetische Feld beschreibenden Gleichungen wurden Stromverteilung, Impedanz, Leistungsverlust im Stab und Wechselwirkungskraft Stator-Stab ermittelt. Es wurde der Einfluß der endlichen Stabdimensionen auf obige Parameter berücksichtigt.

Я. ГЕРАС

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ФЕРРОМАГНИТНОГО СТЕРЖНЯ  
КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ В ЛИНЕЙНО БЕГУЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

## Резюме

Представлены уравнения описывающие трехмерное распределение электромагнитного поля в массивном однородном ферромагнитном стержне, расположенном в линейно бегущем магнитном поле, возбуждаемом статором с двухфазной обмоткой. На основании уравнений описывающих электромагнитное поле определены: распределение токов, импеданс, потери мощности в стержне и сила взаимодействия статор-стержень. Учтено влияние конечных размеров стержня на вышеуказанные параметры.



## Niezawodność systemów o strukturze hierarchicznej

BOHDAN S. BUTKIEWICZ (WARSZAWA)

*Instytut Podstaw Elektroniki Politechniki Warszawskiej*

*Otrzymano 2.11.1973*

W pracy omówiono zagadnienia związane z określeniem hierarchii w systemie i zdefiniowano pojęcie grafu hierarchicznego. Na tej podstawie podano metody wyznaczania parametrów niezawodnościowych systemów hierarchicznych. Omówiono zagadnienie całkowitych kosztów rocznych ponoszonych na system hierarchiczny. Podano metody optymalizacji systemów hierarchicznych z punktu widzenia doboru elementów do zadanej struktury przy zadanych ograniczeniach oraz z punktu widzenia doboru struktury i elementów spośród ustalonego zbioru elementów przy zadanych ograniczeniach dotyczących całkowitych kosztów rocznych systemu.

### 1. WSTĘP

Systemy hierarchiczne zawsze odgrywały bardzo dużą rolę. Znane są od dawna, z tym że wiązały się raczej z charakterem stosunków społecznych a nie z techniką. Z tego też chyba względu opracowania teoretyczne dotyczące systemów hierarchicznych, ujmujące zagadnienia hierarchii w sposób matematyczny w oparciu o teorię relacji i teorię grafów, ukazały się niedawno. Do najważniejszych należy praca [39]. Niektóre definicje można znaleźć w [48] i [50]. Uzyskane w nich wyniki łącznie z wynikami uzyskanymi przez autora, częściowo publikowanymi w [4], przedstawiono w rozdziale 2. Określono w ten sposób pojęcie systemu hierarchicznego.

Systemy hierarchiczne należą do tzw. wielkich systemów. Organizacja takich systemów wymaga zazwyczaj wprowadzenia hierarchii. W teorii niezawodności zaczęto zajmować się systemami hierarchicznymi dopiero w ostatnich kilku latach, w związku z czym liczba prac opublikowanych są ten temat jest bardzo mała. Najistotniejszymi z nich są prace Ilina [27], [28], [29], [30] i Koekina [33].

Zagadnienia niezawodnościowe wiążą się ściśle z zagadnieniami ekonomicznymi. Na ten temat ukazało się już bardzo dużo prac. Między innymi omawiają one problem minimalizacji kosztów ponoszonych na system. Przegląd sposobów wyznaczania tych kosztów dla pojedynczego urządzenia i zależność ich od intensywności uszkodzeń urządzenia podano w p. 4.1. Zależność ta jest jedną z podstawowych dla przeprowadzonej następnie przez autora optymalizacji systemu hierarchicznego pod względem niezawodnościowym. Zagadnienie to sformułowano jednak całkowicie inaczej niż w pracach Ilina i Koekina. W pracach tych poszukuje się optymalnych intensywności uszkodzeń elementów lub optymalnej struktury systemu minimalizujących całkowite koszty ponoszone na system.

Coraz większe znaczenie praktyczne ma rozwiązanie innego problemu, polegającego

na minimalizacji funkcji celu związanej ze wskaźnikami niezawodnościowymi systemu, przy czym wartość całkowitych kosztów rocznych ponoszonych na system jest z góry ustalona. W niniejszej pracy minimalizację przeprowadzono w dwóch przypadkach. W pierwszym założono strukturę systemu jako daną nakładając na nią jedynie słabe ograniczenia. Zadanie polega na dobraniu elementów do tej struktury spośród zadanego zbioru elementów (Zadanie 1). W drugim przypadku zadanie (Zadanie 4) polega na doborze zarówno struktury (przy ograniczeniu klasy struktur do struktur hierarchicznych drzewiastych) jak i elementów (spośród zadanego zbioru elementów). W obu przypadkach założono, że minimalizowana funkcja celu jest funkcją wypukłą.

Ustalenie postaci funkcji celu wiąże się z wyborem modelu uszkodzania się systemu i obliczaniem parametrów systemu jako całości. Zagadnieniu temu poświęcono rozdział 3. Na podstawie analizy wielu prac przyjęto, że strumień uszkodzeń systemu jest strumieniem Poissona. Na tej podstawie można wyznaczyć parametry niezawodnościowe, charakteryzujące cały system. Dla systemów hierarchicznych o dużej liczbie elementów obliczenia należy prowadzić na maszynach matematycznych. Dla wyznaczenia algorytmów obliczeń konieczne jest zastosowanie metod opracowanych w teorii grafów, w szczególności metody wyznaczenia dróg elementarnych łączących poszczególne wierzchołki grafu. Przedstawiono je w p. 3.2. Konieczne jest również eliminowanie w trakcie obliczeń prawdopodobieństw odpowiadających zdarzeniom zależnym. Metodę taką podano w p. 3.3. Oprócz zazwyczaj stosowanych parametrów, takich jak oczekiwany czas międzyawaryjny czy intensywności uszkodzeń poszczególnych połączeń par wierzchołków, zaproponowano inne oceny niezawodności systemu, mające tę własność, że odpowiadające im funkcje celu są wypukłe. Umożliwia to efektywnie dokonanie optymalizacji w oparciu o tak skonstruowane funkcje celu.

### Oznaczenia

W celu uniknięcia konieczności stosowania wielopoziomowych zapisów typu  $\lambda_{x,r,i}(t)$  przyjęto specjalny system indeksowania. Indeksy umieszczone są w takich przypadkach w nawiasie i kolejnym poziomom indeksów odpowiadają kolejne wewnętrzne nawiasy. Indeksy traktujemy zatem jako argumenty określone na zbiorze liczb całkowitych lub na części tego zbioru. Dla łatwego wyróżnienia indeksów wykaz ich będzie oddzielany od wykazu innych argumentów średnikiem, tzn.

$$\lambda_{x,r,i}(t) \triangleq \lambda[x(r,i); t].$$

Jeżeli dana funkcja nie ma indeksów, to w zasadzie należy pisać w miejscu wykazu indeksów symbol  $\emptyset$ . W nie budzących wątpliwości sytuacjach będziemy go jednak opuszczać razem ze średnikiem w celu uproszczenia zapisów. Najważniejsze oznaczenia zebrano w tablicy.

Inne często stosowane oznaczenia podano poniżej:

- $\vee$     suma logiczna,
- $\wedge$     iloczyn logiczny,
- $\Rightarrow$     implikacja,
- $\neg$     negacja,
- $\bigvee$     kwantyfikator szczegółowy,



- $\bigwedge$  kwantyfikator ogólny,  
 $\cup$  suma zbiorów,  
 $\cap$  iloczyn zbiorów,  
 $\setminus$  różnica zbiorów,  
 $\mathcal{P}$  {zdarzenie} prawdopodobieństwo zdarzenia,  
 $P(t)$  funkcja niezawodności = prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy w przedziale czasu  $(0, t)$ ,  
 $\nu$  liczba uszkodzeń,  
 $\lambda$  intensywność uszkodzeń,  
 $t$  czas,  
 $\tau$  długość przedziału czasu,  
 $T_0$  wartość średnia czasu bezawaryjnej pracy,  
 $E\{\}$  wartość oczekiwania,  
 $F(t)$  dystrybuanta rozkładu czasu bezawaryjnej pracy,  
 $\chi$  współczynnik hierarchii,  
 $q$  liczba stopni hierarchii,  
 $K$  całkowite koszty roczne,  
 $k$  całkowite koszty roczne „zredukowane”,  
 $R$  funkcja celu.

Tablica oznaczeń

| wierzchołek  | krawędź      | element      | droga elementarna |                                                                                               |
|--------------|--------------|--------------|-------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| $w$          | $g$          | $x$          | $d$               |                                                                                               |
| $w(r)$       | $g(r)$       | $x(r)$       | —                 | ... $r$ -tego stopnia hierarchii                                                              |
| $w(r, i)$    | $g(r, i)$    | $x(r, i)$    | —                 | ... $r$ -tego stopnia hierarchii o numerze porządkowym $i$                                    |
| $w(r, i, u)$ | $g(r, i, u)$ | $x(r, i, u)$ | —                 | urządzenie typu $u$ reprezentujące ... $r$ -tego stopnia hierarchii o numerze porządkowym $i$ |
| $W$          | $G$          | $E$          | $\Delta$          | zbiór ... podzbiory ...                                                                       |
| $V$          | $\Gamma$     | $V$          | —                 | waga ...                                                                                      |
| $\nu$        | $\gamma$     | $\xi$        | $\delta$          | liczba ...                                                                                    |

## 2. SYSTEMY HIERARCHICZNE

### 2.1. Pojęcie hierarchii

Słowo hierarchia wywodzi się z dwu greckich słów: hieros (święty) i arkhia (dowództwo). Wiąże się ono obecnie z pojęciem porządku lub klasyfikacji. Ponieważ będziemy go używać w odniesieniu do urządzeń technicznych oraz używać go jako pojęcia matematycznego

musimy mu nadać bardziej precyzyjne znaczenie. Przyjmiemy tu definicję podaną w pracy [50].

*Definicja.* Niech  $W$  będzie zbiorem skończonym uporządkowanym relacją porządkującą. Hierarchią na zbiorze  $W$  będziemy nazywać nietrywialny podział zbioru  $W$  na klasy równoważności, które uporządkowano relacją dobrego porządku.

Powyższe klasy równoważności będziemy nazywać stopniami hierarchii.

*Twierdzenie* [50]. Do tego, aby na zbiorze  $W$  istniała hierarchia, wystarcza, aby istniał w nim największy (lub najmniejszy) element.

*Twierdzenie* [39]. Niech  $W$  jest zbiorem skończonym z relacją  $\psi$  słabego porządku posiadającą własność (2.2). Wówczas w zbiorze  $W$  istnieje element największy.

Podamy teraz kilka przykładów wprowadzania hierarchii na zbiorze, spotykanych w literaturze [39].

*Przykład 1.* Niech skończony zbiór  $W$  uporządkowany będzie relacją dobrego porządku posiadającą dodatkowo dwie własności:

$$\bigwedge_{a \in W} \bigwedge_{b \in W} \bigwedge_{c \in W} [(a\varphi b \wedge a\varphi c) \Rightarrow b = c], \quad (2.1)$$

$$\bigwedge_{a \in W} \bigvee_{b \in W} [a\varphi b \vee b\varphi a]. \quad (2.2)$$

Ponieważ  $\varphi$  jest porządkiem dobrym, to w zbiorze  $W$  istnieje element największy (niekoniecznie jedyny). Można więc zbudować hierarchię na  $W$ . Relacja  $\varphi$  umożliwia utworzenie z elementów  $W$  łańcuchów o postaci

$$a(1)\varphi a(2), a(2)\varphi a(3), \dots, a(n-1)\varphi a(n).$$

Liczbę par związanych relacją  $\varphi$  w łańcuchu nazywamy długością łańcucha. Ponieważ  $\varphi$  jest relacją przechodnią i spełnia (2.1) oraz (2.2), więc każdy element jest albo największym elementem, albo związany jest z jednym i tylko jednym elementem największym. Oznaczmy długość drogi od elementu  $a$  do odpowiadającego mu elementu największego przez  $l(a)$ . Określimy relację  $\varphi^*$

$$\bigwedge_{a \in W} \bigwedge_{b \in W} [a\varphi^* b \Leftrightarrow l(a) = l(b)]. \quad (2.3)$$

Jak widać jest ona relacją równoważności. Odpowiadający jej zbiór ilorazowy  $W/\varphi^* = \{W(1), W(2), \dots, W(q)\}$  stanowi podział, za pomocą którego tworzymy hierarchię. Relację  $\varphi^{**}$  dobrego porządku na  $W/\varphi^*$  określamy następująco:

$$W(r)\varphi^{**}W(m) \Leftrightarrow \bigwedge_{a \in W(r)} \bigwedge_{b \in W(m)} [a\varphi b], \quad (2.4)$$

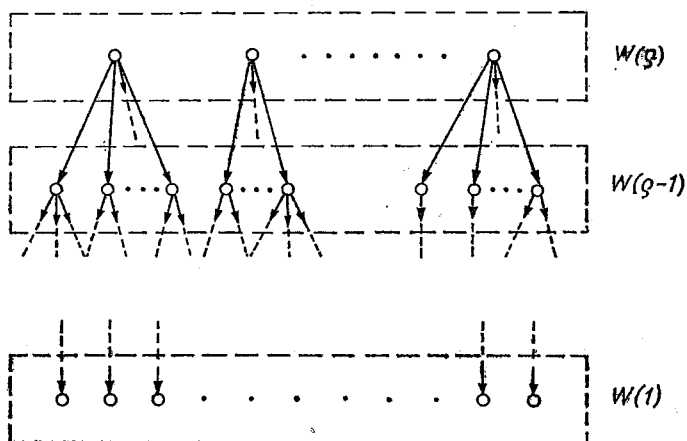
lub co na jedno wychodzi

$$W(r)\varphi^{**}W(m) \Leftrightarrow \bigwedge_{a \in W(r)} \bigwedge_{b \in W(m)} [l(a) > l(b)]. \quad (2.5)$$

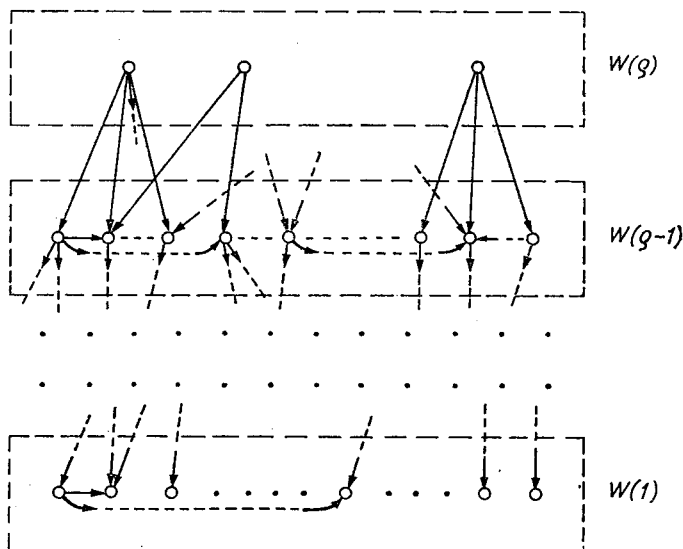
W ten sposób zbudowano na zbiorze  $W$  uporządkowanym relacją  $\varphi$ , hierarchię  $W/\varphi^*$  z relacją  $\varphi^{**}$  dobrego uporządkowania. Hierarchię tę ilustruje graf z rys. 1.

*Przykład 2.* Niech  $\psi$  będzie relacją słabego porządku w  $W$  i niech posiada ona własność (2.2). Dowolny element, który nie jest elementem największym, może być zatem związany z wieloma elementami największymi. Określimy teraz nieco inaczej długość drogi do elementu  $a$   $l^*(a) = \min_c l(a, c)$ , gdzie  $l(a, c)$

długość drogi od elementu  $a$  do elementu  $c$  zbioru  $W(q)$  elementów największych. Relację  $\psi^*$ , zbiór ilorazowy  $W/\psi^*$  oraz relację  $\psi^{**}$  określamy identycznie jak poprzednio, z tym że we wzorach (2.3) i (2.5) należy podstawić odległość  $l^*$  zamiast  $l$ . Hierarchię tę ilustruje graf z rys. 2.



Rys. 1. Graf ilustrujący przykład 1



Rys. 2. Graf ilustrujący przykład 2

## 2.2. Definicja grafu hierarchicznego

W poprzednim rozdziale określono pojęcie hierarchii i podano przykłady wprowadzenia hierarchii. Oparto się tam na pojęciu relacji binarnej. W niniejszym rozdziale podano definicję pojęcia grafu hierarchicznego przyjętą jako podstawową w tej pracy. Definicja ta była już publikowana przez autora w pracy [5]. Przy jej formułowaniu kierowano się przede wszystkim jak najlepszym dostosowaniem jej do zagadnień występujących przy analizie wielkich systemów. Oparta jest ona o najogólniejsze, znane autorowi niniejszej pracy, pojęcie grafu wprowadzone przez A. A. Zykowa w pracy [57]. Do definicji grafu wykorzystano tam pojęcie relacji trójargumentowej. Relację trójargumentową (zgodnie

z [49]) rozumiemy jako trójargumentową funkcję logiczną (tj. przybierającą dwie wartości „prawda” i „fałsz”).

Wprowadzimy najpierw pojęcie grafu, na którym określono funkcję. Grafem, na którym określono funkcję, będziemy nazywać czwórke uporządkowaną

$$\mathcal{G} = \langle (W, G, I, H) \rangle,$$

gdzie:

1.  $W$  jest zbiorem skończonym, nazywanym zbiorem wierzchołków grafu  $\mathcal{G}$ .
2.  $G$  jest zbiorem skończonym, nazywanym zbiorem krawędzi grafu  $\mathcal{G}$ , przy czym  $G \cap W = \emptyset$ .
3.  $I$  jest relacją trójargumentową, którą będziemy nazywać incydentorem grafu.  $I(\cdot, \cdot)$  określony jest dla wszystkich uporządkowanych trójek elementów grafu  $\langle w(\alpha), g, w(\beta) \rangle$ , dla których  $w(\alpha), w(\beta) \in W$  oraz  $g \in G$  i spełnia następujący warunek

$$\bigwedge_{g \in G} \bigvee_{w(\alpha), w(\beta) \in W} \{I(w(\alpha), g, w(\beta)) \wedge \bigwedge_{w(\vartheta), w(v) \in W} [I(w(\vartheta), g, w(v)) \Rightarrow (w(\alpha) = w(\vartheta) \wedge w(\beta) = w(v)) \vee (w(\alpha) = w(v) \wedge w(\beta) = w(\vartheta))]\}. \quad (2.6)$$

Zdanie  $I(w(\alpha), g, w(\beta))$  czytamy następująco: krawędź  $g$  łączy uporządkowaną parę wierzchołków  $\langle w(\alpha), w(\beta) \rangle$ . Z podanego warunku wynika, że każda krawędź łączy albo tylko jedną parę wierzchołków  $\langle w(\alpha), w(\beta) \rangle$ , albo dokładnie dwie pary  $\langle w(\alpha), w(\beta) \rangle$  i  $\langle w(\beta), w(\alpha) \rangle$ .

jeżeli  $w(\alpha) = w(\beta)$ , to krawędź tworzy pętlę.

4.  $H$  jest funkcją określoną na zbiorze  $E = W \cup G$  wierzchołków i krawędzi grafu, o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych.

Zajmiemy się teraz tylko pewnym szczególnym rodzajem grafu, na którym określono funkcję. Niech będzie dany skończony zbiór  $W$ . Podzielmy zbiór  $W$  na  $\varrho$  rozłącznych podzbiorów  $W(r)$  ( $r = 1, 2, \dots, \varrho$ ), uporządkujmy te podzbiory za pomocą relacji porządkującej, zgodnie z malejącymi mocami i ponumerujmy

$$\overline{W(1)} \geq \overline{W(2)} \geq \dots \geq \overline{W(r)} \geq \dots \geq \overline{W(\varrho)}.$$

Podział zbioru  $W$  na podzbiory  $W(r)$  oraz ich kolejność w przypadku równych mocy wprowadzamy dowolnie, lecz dalej uważamy go za niezmienny. Tak określoną liczbę porządkową  $r$  nazywamy stopniem hierarchii wierzchołka  $w(r, i) \in W(r)$ . Tak określone uporządkowanie elementów  $W(r)$  w zbiorze  $W$  jest uporządkowaniem dobrym.

Żałómy, że incydentor  $I$  grafu  $\mathcal{G}$  ma następujące dodatkowe własności.

1. Istnieje taki podzbiór  $G' \subset G$ , że każda krawędź  $g \in G'$  łączy jedynie wierzchołki o różnych stopniach, przy czym wszystkie krawędzie są albo:

a) skierowane do wierzchołka niższego stopnia, tzn.

$$\bigwedge_{g \in G'} \bigvee_{w(r+m), w(r) \in W} [I(w(r+m), g, w(r)) \wedge \neg I(w(r), g, w(r+m)) \wedge (m \neq 0)], \quad (2.7)$$

albo:

b) skierowane do wierzchołka wyższego stopnia, tzn.

$$\bigwedge_{g \in G'} \bigvee_{w(r), w(r+m) \in W} [I(w(r), g, w(r+m)) \wedge \neg I(w(r+m), g, w(r)) \wedge (m \neq 0)], \quad (2.8)$$

albo:

c) nieskierowane, tzn.

$$\bigwedge_{g \in G'} \bigvee_{w(r), w(r+m) \in W} [I(w(r), g, w(r+m)) \wedge I(w(r+m), g, w(r)) \wedge (m \neq 0)]. \quad (2.9)$$

Przez  $m$  oznaczono tu liczbę naturalną taką, że

$$1 \leq r+m \leq \varrho.$$

2. Niech

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{w(r) \in W} \{ [I(w(r+m, i), g(\alpha), w(r)) \vee I(w(r), g(\alpha), w(r+m, i))] \wedge (m \neq 0) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \neg \left( \bigvee_{g(\beta) \in G} \bigvee_{w(r+l, j) \in W} [ (w(r+l, j) \neq w(r+m, i)) \wedge (I(w(r+l, j), g(\beta), w(r)) \vee \right. \\ & \quad \left. \vee I(w(r), g(\beta), w(r+l, j))) \wedge (l \neq 0) ] \right) \}, \quad (2.10) \end{aligned}$$

gdzie  $w(r+m, i), w(r+l, j) \in W$ ,  $g(\alpha), g(\beta) \in G$  oraz  $m, l$  liczby naturalne takie, że  $1 \leq r+m \leq \varrho$ ,  $1 \leq r+l \leq \varrho$ . Wynika stąd, że każdy wierzchołek jest połączony nie więcej niż z jednym wierzchołkiem o wyższym niż on stopniu hierarchii.

3. Niech każda krawędź  $g \in G''$ , gdzie  $G'' = G \setminus G'$  łączy jedynie wierzchołki o tych samych stopniach

$$\bigwedge_{g \in G''} \bigvee_r \bigvee_{w(r, i), w(r, j) \in W(r)} I(w(r, i), g, w(r, j)) \quad (2.11)$$

i krawędzie te są nieskierowane

$$\bigwedge_{g \in G''} \bigvee_{w(r, i), w(r, j) \in W} [I(w(r, i), g, w(r, j)) \wedge I(w(r, j), g, w(r, i))]. \quad (2.12)$$

Założmy ponadto, że funkcja  $H$  określona na zbiorze  $E = W \cup G$  wierzchołków i krawędzi grafu zdefiniowana jest następująco:

$$H(e) = \begin{cases} r & \text{dla } e = w(r, i) \in W(r), \quad r = 1, 2, \dots, \varrho, \\ c & \text{dla } e = g \in G, \end{cases} \quad (2.13)$$

gdzie  $c$  jest liczbą naturalną,  $c = 1, 2, \dots, \varrho$ , wybraną tak, że jeżeli  $I(w(r+m), g, w(r)) \vee I(w(r), g, w(r+m))$ , to  $r \leq c \leq r+m$ . Liczbę  $c$  będziemy nazywać stopniem hierarchii krawędzi. Funkcja  $H$  określa w grafie stopnie poszczególnych elementów grafu. W szczególności zadanie funkcji  $H$  na zbiorze  $W$  określa wspomniany poprzednio podział zbioru  $W$  na podzbiory  $W(x)$ .

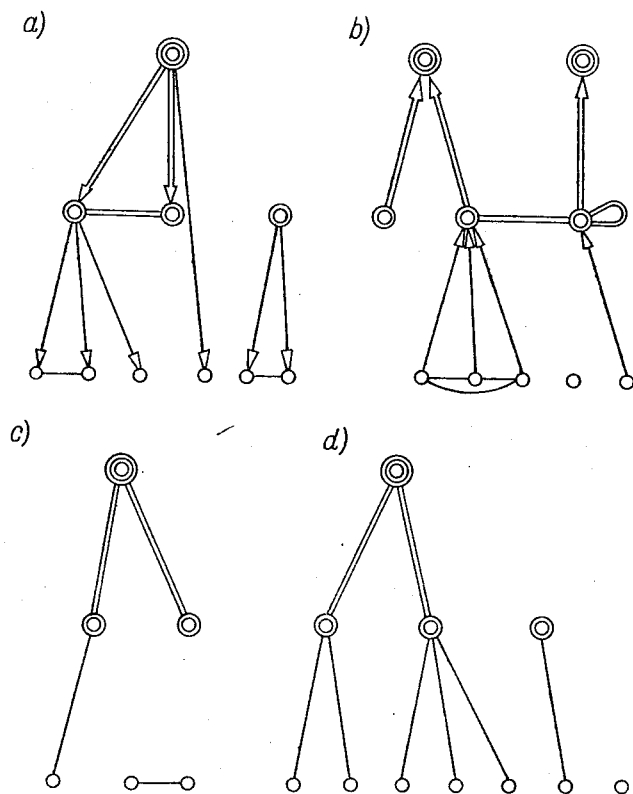
Graf  $\mathcal{G} = \langle W, G, I, H \rangle$ , którego incydentor  $I$  spełnia dodatkowe warunki 1, 2, 3 i funkcja  $H$  jest zdefiniowana podanym wyżej postulatem (2.13), będziemy nazywać grafem hierarchicznym, a wartości funkcji  $H$  stopniami hierarchii poszczególnych wierzchołków lub krawędzi w danym grafie hierarchicznym.

Możliwe jest również podanie innych aksjomatów, określających w sposób równoważny graf hierarchiczny. Łatwo na przykład zauważyć analizując punkt 1 i 2 założeń, że graf  $\langle W, G', I \rangle$  rozumiany w sensie zwykłym musi być drzewem lub lasem. Jest to warunek konieczny.

Na rys. 3 podano przykłady różnych typów grafów. Przyjęto na nim taką konwencję, iż liczba kółek oznacza stopień hierarchii wierzchołka, a liczba linii — stopień hierarchii krawędzi.

Określimy teraz pewne relacje zachodzące między wierzchołkami w grafie hierarchicznym. Będziemy mówić, że wierzchołek  $w(r, i)$  podlega wierzchołkowi  $w(r+m, j)$ , jeżeli między nimi istnieje droga (potocznie nazywana drogą służbową) złożona jedynie z krawędzi  $g \in G'$  nie przechodząca przez wierzchołki stopnia wyższego niż  $r+m$ . Podobnie będziemy mówić, że  $w(r, i)$  podlega bezpośrednio  $w(r+m, j)$  jeżeli

$$\bigvee_{g \in G'} I(w(r+m, j), g, w(r, i)). \quad (2.14)$$



Rys. 3. Przykłady grafów hierarchicznych

Jeżeli wierzchołek  $w(r, i) \in W(r)$  jest połączony z wierzchołkiem  $w(r, j) \in W(r)$ , to mówimy, że współpracują one ze sobą. Z założenia bowiem mamy

$$I(w(r, i), g, w(r, j)) \Rightarrow [(g \in G'') \wedge I(w(r, j), g, w(r, i))],$$

tzn.  $g$  należy do  $G''$  i jest nieskierowana. Drogę złożoną z krawędzi  $g \in G''$  możemy nazywać drogą współpracy.

Określimy jeszcze pewne wielkości charakteryzujące wierzchołki i krawędzie danego grafu hierarchicznego. Wprowadźmy następującą definicję rekurencyjną. Wagi wierz-

chołków pierwszego stopnia są z definicji równe jedności; wagi wierzchołków, którym nie podlega żaden wierzchołek pierwszego stopnia, są nieokreślone; waga wierzchołka  $w(r, i)$  ( $r = 2, 3, \dots, \varrho$ ) w grafie hierarchicznym  $\mathcal{G}$  jest równa sumie wag wszystkich wierzchołków podlegających mu bezpośrednio

$$V(r, i) = \sum_{m, j} V(r-m, j), \quad (2.15)$$

o ile wagi te są określone. Wagi wierzchołków nie są, jak widać, całkowicie określone przez strukturę grafu. Jedynie dla niektórych, szczególnych grafów scentralizowanych, każdemu elementowi można przypisać wagę. Nie jest to wygodne a w zastosowaniach praktycznych powyżej zdefiniowane wagi mogą okazać się niewystarczające. W tym celu określimy pojęcie, grafu hierarchicznego w sensie szerszym.

Grafem hierarchicznym w sensie szerszym będziemy nazywać piątkę uporządkowaną

$$\langle W, G, I, H, \omega \rangle, \quad (2.16)$$

gdzie  $W, G, I, H$  są określone jak dla grafu hierarchicznego, natomiast  $\omega$  jest funkcją wagi, która każdemu wierzchołkowi i każdej krawędzi przypisuje liczbę rzeczywistą

$$\omega : e \in E \rightarrow \mathbb{R}.$$

W dalszej części pracy będziemy zakładać, że wagi wierzchołków, którym bezpośrednio nie podlega żaden wierzchołek pierwszego stopnia, są przyjęte na podstawie analizy zadań stawianych urządzeniom reprezentowanym przez te wierzchołki. Wagi pozostałych wierzchołków są już wówczas określone przez podaną poprzednio definicję. Wagi  $I(c, j)$  krawędzi  $g(c, j) \in G'$  przyjęto jako równe wagom niższych stopniem wierzchołków  $w(r, i)$ , z którymi są one połączone, tzn.

$$I(c, j) = V(r, i), \quad (2.17)$$

gdzie

$$\bigwedge_{g(c, j) \in G'} \{ [I(w(r+m, n), g(c, j), w(r, i)) \vee I(w(r, i), g(c, j), w(r+m, n))] \wedge (m > 0) \}.$$

Wag krawędzi współpracy nie definiujemy tutaj. Należy je dobierać zależnie od zadań stawianych systemowi.

Wśród grafów hierarchicznych drzewiastych wyróżniać będziemy grafy o strukturze symetrycznej, tzn. takie, w których wierzchołkom tego samego stopnia hierarchii odpowiadać będą identyczne wagi. W przypadku tym określać będziemy dla każdego stopnia hierarchii  $r$  ( $r = 2, \dots, \varrho$ ) tzw. współczynnik hierarchii  $\chi(r)$  równy liczbie wierzchołków stopnia  $r-1$  podlegających bezpośrednio wierzchołkowi stopnia  $r$ , czyli

$$\chi(r) = \frac{V(r, i)}{V(r-1, j)}, \quad (2.18)$$

gdzie  $i, j$  dowolne, przy czym  $w(r, i) \in W(r)$ ,  $w(r-1, j) \in W(r-1)$ .

W pracy używać będziemy pojęcia system hierarchiczny. Rozumieć je będziemy jako system o strukturze opisywanej grafem hierarchicznym. Pojęcia słowa *system* nie będziemy definiować, gdyż mimo prób wielu autorów nie udało się go dostatecznie ogólnie i precyzyjnie określić. Rozumiemy je intuicyjnie.

### 3. METODA OBLICZANIA PARAMETRÓW NIEZAWODNOŚCIOWYCH SYSTEMÓW HIERARCHICZNYCH

#### 3.1. Charakterystyka problemu

Rozważmy dowolny system hierarchiczny, którego struktura jest znana i przedstawiona za pomocą grafu hierarchicznego  $\langle W, G, I, H \rangle$ . Zadaniem naszym będzie analiza powyższego systemu z punktu widzenia niezawodności. Rozpatrywać będziemy prawdopodobieństwo poprawnej pracy elementów, dróg elementarnych podsystemów i całego systemu. Prawdopodobieństwa te obliczane dla przedziału czasu  $(0, t)$  odpowiadać będą funkcji niezawodności, obliczane w momencie czasu  $t$  — niestacjonarnemu współczynnikowi gotowości. Będziemy zakładać, że znane są prawdopodobieństwa poprawnej pracy elementów (ogólnie w jakimś przedziale  $(t_0, t_0 + \tau)$ ). Na tej podstawie wyznaczymy prawdopodobieństwo istnienia sprawnych połączeń w systemie i obliczymy inne dalej zdefiniowane wskaźniki niezawodnościowe systemu hierarchicznego. Postawione zagadnienia są zazwyczaj skomplikowane obliczeniowo. Liczba dróg elementarnych grafu hierarchicznego zawierającego krawędzie współpracy może być bowiem bardzo duża. Z tego względu należy podać algorytm wyznaczania dróg elementarnych w grafie hierarchicznym. Ponieważ pojęcie drogi elementarnej dla grafu hierarchicznego określono identycznie jak dla grafu, wystarczy więc podać ten algorytm dla grafu w sensie zwykłym. Algorytm ten opisano w następnym rozdziale.

Znając wszystkie drogi elementarne łączące daną parę wierzchołków grafu oraz funkcje niezawodności poszczególnych elementów grafu możemy wyznaczyć poszukiwane prawdopodobieństwo. Obliczenie komplikuje jednak fakt, że poszczególne drogi elementarne mają niektóre krawędzie identyczne. W związku z tym zdarzenia polegające na uszkodzeniu tych dróg nie są na ogół od siebie statystycznie niezależne i nie stanowią zdarzeń wzajemnie wykluczających się. W rozdziale 3.3 podano algorytm postępowania, który zapewnia eliminację zdarzeń zależnych.

#### 3.2. Algorytm wyznaczania dróg elementarnych

Niech będzie dany skończony graf  $\langle W, G, I \rangle$ . Algorytm postępowania prowadzący do wyznaczania dróg elementarnych podano w [32]. Skonstruowano go na podstawie macierzy incydencji grafu. Obecnie istnieje wiele podobnych algorytmów. Bibliografię, dotyczącą tego tematu, podaje Zykow w pracy [57]. Autor niniejszej pracy zaleca następujący algorytm, oparty o macierz incydencji, oznaczoną dalej przez  $D$ , której elementy  $d_{ij}$  odpowiadać będą uporządkowanym parom wierzchołków  $\langle w_i, w_j \rangle$ . Wyraz  $d_{ij}$  odpowiadający  $i$ -temu wierszowi i  $j$ -tej kolumnie macierzy przyjęto równy sumie symboli<sup>1)</sup> odpowiadających wszystkim krawędziom nieskierowanym, łączącym parę wierzchołków  $\langle w_i, w_j \rangle$  i tym krawędziom skierowanym, dla których  $w_i$  jest wierzchołkiem początkowym a  $w_j$  końcowym. Można pokazać, że element  $d_{ij}^m$  macierzy  $D^m = [d_{ij}^m]$  ( $m$ -tej potęgi  $D$ ) równy jest sumie wszystkich możliwych iloczynów, których czynnikami są symbole krawędzi

<sup>1)</sup> Symbole te są elementami tworzącymi pierścienia nieprzemiennej ze względu na operację „.”.



tworzących drogę o długości równej  $m$  łączącą wierzchołek  $w_i$  z wierzchołkiem  $w_j$ . Otrzymane w ten sposób drogi nie muszą być drogami elementarnymi. Jeżeli w każdej z kolejno otrzymanych macierzy  $D^m$  będziemy przeprowadzać redukcję dróg zawierających łuk, stanowiący jedną z dotychczas otrzymanych dróg elementarnych oraz redukcję dróg zawierających krawędzie powtarzające się, to macierz zredukowana  $D_r^m$  będzie zawierała jedynie drogi elementarne o długości  $m$ . Łatwo zauważyć, że ciąg macierzy  $D_r^m$  ma własność

$$\bigvee_M \bigwedge_{m>M} (D_r^m = [0]) \quad (3.1)$$

oraz

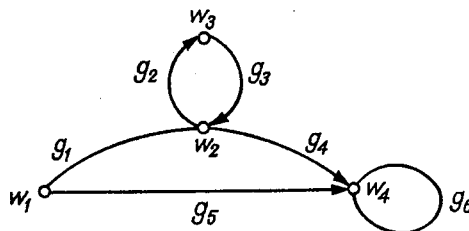
$$M \leq \min(v-1, \gamma)$$

gdzie  $v$  oznacza liczbę wierzchołków, a  $\gamma$  liczbę krawędzi grafu. Droga elementarna przechodzi bowiem przez każdy wierzchołek a więc i każdą krawędź co najwyżej raz. Tworząc sumę

$$\mathcal{D} = \sum_{m=1}^M D^m \quad (3.2)$$

otrzymamy macierz dróg elementarnych. Dla grafu z rys. 4 mamy np.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & g_1 & 0 & g_5 \\ g_1 & 0 & g_2 & g_4 \\ 0 & g_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_6 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 & g_1 & g_1 g_2 & g_5 + g_1 g_4 \\ g_1 & g_2 g_3 & g_2 & g_4 + g_1 g_5 \\ g_3 g_1 & g_3 & g_3 g_2 & g_3 g_4 + g_3 g_1 g_5 \\ 0 & 0 & 0 & g_6 \end{bmatrix}.$$



Rys. 4. Graf ilustrujący metody wyznaczania dróg elementarnych

Oprócz podanej wyżej metody oraz metod podanych w [32] i [57], w 1968 r. opublikowano bardzo interesujące i zupełnie nieznanne u nas w kraju (i nie tylko u nas) prace [20], [35] i [36] dotyczące wyznaczania dróg i cykli w grafach zorientowanych. Opierają się one o metodę tworzenia wykazów, nad którymi dokonuje się następnie operacji. Zamiast opisywać graf macierzą incydencji, opisujemy go za pomocą wykazu. Opis dla grafu z rys. 4 wyglądałby następująco

$$1(2, 4), \quad 2(1, 3, 4), \quad 3(2), \quad 4(4).$$

W opisie tym przy numerze danego wierzchołka podano w nawiasie wykaz numerów wierzchołków, do których prowadzą z danego wierzchołka krawędzie. Operacjom dokonywanym na macierzach odpowiadają operacje dokonywane na wykazach.

Mnożeniu macierzy odpowiada następujące postępowanie, zwane mnożeniem wykazów. W miejsce każdego z elementów wymienionych w nawiasach pierwszego wykazu należy wstawić odpowiadające im elementy wymienione w nawiasach drugiego wykazu. Wykaz odpowiadający kwadratowi macierzy incydencji przedstawiałby się następująco

$$1(1, 3, 4, 4), \quad 2(2, 2, 4, 4), \quad 3(1, 3, 4), \quad 4(4).$$

Operacje nad wykazami wymagają zazwyczaj znacznie mniejszej liczby komórek pamięci maszyny szczególnie wtedy, gdy macierze incydencji grafów zawierają dużo zer. Według [36] algorytmy oparte o metodę wykazów są bardziej ekonomiczne niż metody macierzowe, jeżeli

$$\gamma < \frac{v^2}{\log_2 v}. \quad (3.3)$$

### 3.3 Algorytm obliczania prawdopodobieństw

W celu ustalenia algorytmu postępowania prowadzącego do obliczenia wskaźników niezawodnościowych systemu rozważmy najpierw pola zdarzeń odpowiadające uszkodzeniom elementów. Pole zdarzeń każdego elementu zakładamy jako dwupunktowe i określamy następująco:

zdarzenie  $Z(x)$  — element znajduje się aktualnie w stanie sprawnym,

zdarzenie  $\bar{Z}(x)$  — element znajduje się aktualnie w stanie niesprawnym.

Dopuszczamy możliwość przejścia elementu ze stanu  $Z(x)$  do stanu  $\bar{Z}(x)$  i na odwrót, tzn. rozpatrujemy systemy z odnową (naprawialne).

Pole zdarzeń systemu jest potęgą kartezjańską pola zdarzeń jednego elementu. Wykładnik tej potęgi jest równy liczbie elementów  $\xi$  systemu. Ustawmy wszystkie elementy systemu w ciąg

$$\{x_1, x_2, \dots, x_\xi\}. \quad (3.4)$$

Pola zdarzeń drogi elementarnej można opisać wprowadzając ciąg binarny

$$\{b_1, b_2, \dots, b_\xi\} \quad (3.5)$$

o wyrazach określonych następująco:

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{gdy element } x_i \text{ wchodzi w skład drogi elementarnej,} \\ 0 & \text{gdy element } x_i \text{ nie wchodzi w skład tej drogi.} \end{cases}$$

Pole to jest potęgą kartezjańską pola zdarzeń elementu, której wykładnik jest równy liczbie  $\xi(d)$  elementów wchodzących w skład tej drogi, tzn. równy liczbie jedynek w ciągu  $\{b_i\}$ . Prawdopodobieństwo zdarzenia  $Z(d)$ , iż droga elementarna  $d$  łącząca parę uporządkowaną wierzchołków znajduje się w stanie sprawności jest równe

$$P = \prod_{u=1}^{\xi(d)} p_u, \quad (3.6)$$

gdzie  $p_u$  — prawdopodobieństwo zdarzenia  $Z(x)$  elementu, dla którego  $b_i = 1$ .

Określmy teraz prawdopodobieństwo zdarzenia łącznego, iż droga elementarna  $d_1$  oraz droga elementarna  $d_2$  znajdują się w stanie sprawności. Niech ciągi

$$\{b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1\xi}\}$$

$$\{b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2\xi}\},$$

odpowiadają powyższym drogom elementarnym, a prawdopodobieństwa zdarzeń  $Z(d_1)$  i  $Z(d_2)$  wynoszą  $P_1$  i  $P_2$ . Prawdopodobieństwo zdarzenia, że obie drogi elementarne są sprawne, jest równe iloczynowi prawdopodobieństw odpowiadających elementom wchodzącym w skład obu dróg. Zbiór tych elementów można opisać za pomocą ciągu

$$\{b_{31}, b_{32}, \dots, b_{3\xi}\}.$$

Wyrazy  $b_{3i}$  tego ciągu można wyznaczyć poprzez wyrazy  $b_{1i}, b_{2i}$  w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \text{jeżeli } (b_{1i} = 0) \wedge (b_{2i} = 0) \text{ to } b_{3i} = 0, \\ \text{w pozostałych przypadkach } b_{3i} = 1, \end{aligned} \quad (3.7)$$

czyli  $b_{3i}$  jest sumą boolowską wyrazów  $b_{1i}$  i  $b_{2i}$ .

Operację tę będziemy zapisywali następująco

$$\{b_{1i}\} \oplus \{b_{2i}\} = \{b_{3i}\}. \quad (3.8)$$

Wyżej wspomniane prawdopodobieństwo zdarzenia łącznego jest zatem równe

$$P_{12} = \prod_{k=1}^{\xi(d_3)} p_k, \quad (3.9)$$

gdzie  $p_k$  — prawdopodobieństwa odpowiadające elementom (tworzącym pewną drogę  $d_2$ ), dla których  $b_{3i} = 1$ .

Na ogół oczywiście  $P_{12} \neq P_1 P_2$ , gdyż zdarzenia mogą być zależne.

Wzór (3.9) można uogólnić na większą liczbę dróg elementarnych łączących parę wierzchołków

$$P_{12 \dots n} = \prod_{k=1}^{\xi(d)} p_k, \quad (3.10)$$

gdzie  $p_k$  — prawdopodobieństwa odpowiadające elementom, dla których wyrazy  $b_i$  ciągu

$$\{b_i\} = \{b_{1i}\} \oplus \{b_{2i}\} \oplus \dots \oplus \{b_{ni}\} \quad (3.11)$$

są równe jedności.

Prawdopodobieństwo zdarzenia  $Z(w)$ , iż daną parę wierzchołków łączy co najmniej jedna sprawna droga elementarna, jest równe prawdopodobieństwu alternatywy odpowiednich zdarzeń  $Z(d)$ , tzn. równe

$$\sum_{i=1}^{\delta} P_i - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{\delta} P_{ij} + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k}}^{\delta} P_{ijk} - \dots + (-1)^{\delta+1} P_{123 \dots \delta}, \quad (3.12)$$

gdzie  $P_{ij}, P_{ijk}, \dots, P_{123 \dots \delta}$  są prawdopodobieństwami łącznych zdarzeń  $Z(d)$  dróg elementarnych  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{\delta}$ . Jeżeli liczba składników we wzorze (3.12) jest duża, to zazwyczaj część wyrazów można pominąć, gdyż poszczególne sumy stanowią ciąg monotonicznie nierosnący.

Opisana wyżej metoda wyznaczania prawdopodobieństwa zdarzeń  $Z(w)$  na podstawie znajomości dróg elementarnych wynika w zasadzie wprost z definicji odpowiednich pól zdarzeń, niemniej, gwoździ ścisłości, należy stwierdzić, że zależność typu (3.12) została wcześniej podana przez Y. Fu i S. Yau w pracach [17] i [18]. Pomysł stosowania kodu dwójkowego „w celu ograniczenia możliwości przypadkowego pominięcia niektórych stanów”, podał Z. Frydrych w pracy [16].

Oprócz powyższej metody obliczania prawdopodobieństwa  $Z(w)$  można stosować tzw. metodę zbiorów rozcinających [46]. Zbiorem rozcinającym grafu nazywamy podzbiór jego elementów mający tę własność, że usunięcie elementów tego podzbioru czyni graf niespójnym, przy czym właściwości tej nie ma żaden podzbiór powyższego podzbioru.

Niech będzie dana rodzina zbiorów rozcinających graf w taki sposób, że interesujące nas dwa wierzchołki, po rozcięciu grafu, stają się niezwiązane. Oznaczmy przez  $Q_i$  prawdopodobieństwo zdarzenia, iż żaden z elementów  $i$ -tego zbioru rozcinającego nie jest sprawny. Jak pokazano w [12] i [55] prawdopodobieństwo zdarzenia (dopełniającego do zdarzenia  $Z(w)$ ), iż danej pary wierzchołków nie łączy żadna droga, jest równe

$$\sum_{i=1}^Q Q_i - \sum_{i,j=1}^Q Q_{ij} + \sum_{i,j,k=1}^Q Q_{ijk} - \dots + (-i)^{p+1} Q_{123\dots p}, \quad (3.13)$$

gdzie  $Q_{ij}$ ,  $Q_{ijk}$ , ...,  $Q_{123\dots p}$  są prawdopodobieństwami odpowiednich zdarzeń łącznych, a  $q$  jest liczbą rodziny zbiorów rozcinających.

### 3.4. Obliczanie parametrów niezawodnościowych

#### *Założenia*

Ocena systemu hierarchicznego pod względem niezawodnościowym nie jest zadaniem prostym. Przyjęcie jako kryterium oceny intensywności strumienia uszkodzeń całego systemu, tzn. przyjęcie, że uszkodzenie dowolnego elementu powoduje uszkodzenie całego systemu, nie jest najczęściej właściwe. W praktyce wielkość ta może okazać się nieinteresująca i może nie dawać intuicyjnego pojęcia o jakości systemu. Uszkodzenie jednego elementu systemu powoduje skutki ograniczone zazwyczaj do pewnego podsystemu. W związku z powyższym, kryterium oceny niezawodnościowej systemu powinno zależeć od struktury systemu oraz od zadań stawianych systemowi. Kryterium takiego nie da się zatem narzucić arbitralnie dla wszystkich systemów hierarchicznych.

Poszczególne elementy systemu hierarchicznego opisywać będziemy funkcjami niezawodności, czyli prawdopodobieństwami poprawnej pracy tych elementów w przedziale czasu  $(0, t)$ . W obecnym stanie badań niezawodnościowych jedynym i to nie zawsze przez producentów podawanym parametrem niezawodnościowym jest intensywność uszkodzeń elementu  $\lambda(t)$ , dokładniej — średnia wartość intensywności uszkodzeń  $\lambda$ . Przyjęcie, iż  $\lambda(t) = \text{const}$ , odpowiada założeniu o wykładniczej funkcji niezawodności urządzenia

$$P(t) = e^{-\lambda t}. \quad (3.14)$$

Jeżeli przyjęlibyśmy bardziej skomplikowany rozkład, to im lepiej opisywałby on rzeczywiste zmiany  $\lambda(t)$  urządzenia w funkcji czasu, tym więcej parametrów tego rozkładu

należałoby określić. Błąd w ocenie tych parametrów będzie powodował rozbieżność uzyskanych rezultatów obliczeń z rzeczywistością. Rozbieżność tę nie łatwo byłoby ocenić, jak pokazuje B. W. Gniedienko w pracy [22].

Badania wpływu założonych rozkładów na rezultaty obliczeń niezawodnościowych były już prowadzone. Mianowicie w pracy [21] B. W. Gniedienko, rozpatrując system z rezerwą obciążoną i podlegającą odnowie, wyznaczył prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy grupy rezerwowej w przeciągu czasu  $t$  dla dowolnego rozkładu czasu bezawaryjnej pracy i dowolnego rozkładu czasu odnowy elementów. Wyraża się ono przybliżonym wzorem

$$P(t) \approx e^{-\frac{t}{T_0}}, \quad (3.15)$$

gdzie  $T_0$  oznacza wartość średnią bezawaryjnego czasu pracy grupy rezerwowej w stacjonarnych warunkach pracy.

Badaniem wpływu postaci rozkładu czasu trwania odnowy na niezawodność systemu z dublowaniem elementów zajmowali się Ju. A. Wasiliew i B. A. Kozłow w pracy [52]. I. A. Rjabinin i W. D. Rubinowicz w pracy [44] badali wpływ postaci rozkładów czasu trwania poprawnej pracy i czasu trwania odnowy na charakterystyki niezawodnościowe systemu z rezerwą. Z prac tych wynika, że przy małych wartościach średniego czasu odnowy typ rozkładu czasu trwania odnowy ma bardzo mały wpływ na rezultaty obliczeń, więc z powodzeniem można go traktować jako wykładniczy.

Bardzo istotny wynik uzyskano w pracy [42]. Dowiedziono w niej, że system z rezerwowaniem i odnową elementów jest systemem starzejącym się, tzn. takim, którego intensywność uszkodzeń jest funkcją monotonicznie nie malejącą. Funkcja niezawodności  $P(t)$  systemu starzejącego się spełnia nierówność

$$P(t) > e^{-\frac{t}{T_0}} \quad (3.16)$$

dla czasów  $t$  nie przekraczających średniego czasu bezawaryjnej pracy  $T_0$  (patrz np. [21]).

R. F. Drenick [10] dowodzi, przy dość ogólnych założeniach dotyczących rozkładów czasu życia  $n$  rozmaitych podzespołów wchodzących w skład urządzenia z natychmiastową odnową, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t) = e^{-\frac{t}{\theta_n}}, \quad (3.17)$$

gdzie parametr  $\theta_n$  zależy od średnich czasów życia  $T_i$  podzespołów

$$\frac{1}{\theta_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i},$$

a  $P_n(t)$  jest prawdopodobieństwem bezawaryjnej pracy urządzenia w przedziale czasu  $(0, t)$  przy założeniu stacjonarności procesu uszkodzenia się.

W przypadku niestacjonarnego procesu uszkodzeń z jakim z reguły mamy do czynienia w początkowym okresie funkcjonowania urządzenia można również uzyskać analogiczny rezultat, ale przy silniejszych założeniach ograniczających klasę rozkładów czasów życia [2].

Jeżeli rozkład intensywności uszkodzeń podzespołów zachowuje się w prawostronnym otoczeniu punktu  $t = 0$  jak  $\beta t^\alpha$  dla pewnych dodatnich  $\alpha$  i  $\beta$ , to dla dużych  $n$

$$P_n(t) \cong e^{-n\beta t^\alpha}. \quad (3.18)$$

Na podstawie przytoczonych badań prowadzonych przez wielu autorów wynika, iż założenie, że funkcja niezawodności elementu systemu hierarchicznego ma postać wykładniczą, jest w pełni uzasadnione. Dla dowolnego elementu  $x(r, i)$  systemu hierarchicznego można zapisać je w następującej formie

$$\mathcal{P}\{x(r, i); t\} = e^{-\lambda[x(r, i)]t}, \quad (3.19)$$

gdzie  $\lambda[x(r, i)]$  jest intensywnością uszkodzeń elementu.

Oprócz założenia (3.19) będziemy jeszcze przyjmować założenia dotyczące działania systemu jako całości. Będziemy zakładać, że strumień uszkodzeń systemu jest strumieniem pojedynczym bez następstwa [6], [7]. Uzasadnienie tego założenia podał autor w pracy [5].

Z założenia (3.19) wynika stacjonarność strumieni uszkodzeń elementów, a więc i stacjonarność strumienia uszkodzeń systemu. Strumień uszkodzeń systemu hierarchicznego jest zatem stacjonarny, pojedynczy i bez następstwa. Zgodnie z określeniem Chinczina [8] można go nazwać strumieniem Poissona. Dla strumienia poissonowskiego prawdopodobieństwo powstania  $s$  uszkodzeń w przedziale czasu o długości  $\tau$  wynosi

$$\mathcal{P}\{v(\tau) = s\} = \frac{(\lambda\tau)^s}{s!} e^{-\lambda\tau}. \quad (3.20)$$

Przyjęte założenia co do natury uszkodzeń w systemie można by w zasadzie opisać tylko dwiema zależnościami (3.19) i (3.20). Dyskusję przeprowadzono jednak po to, aby pokazać, iż założenia te dla systemów hierarchicznych wynikają w sposób naturalny, a nie są jedynie założeniami upraszczającymi obliczenia. Odrębną sprawą jest, że przy innych założeniach obliczenia byłyby skomplikowane, a dla zazwyczaj spotykanych systemów hierarchicznych mogłyby być nie do wykonania, nawet przy użyciu maszyn matematycznych.

### *Waga a intensywność uszkodzeń*

W systemie hierarchicznym wagi elementów są na ogół różne. Im większa waga elementu tym więcej podzespołów musi zawierać urządzenie realizujące zadania danego elementu. Załóżmy, że:

1. na danym stopniu hierarchii zadania wszystkich wierzchołków są jakościowo identyczne,

2. na danym stopniu hierarchii zadania wszystkich krawędzi są jakościowo identyczne.

Zadania te mogą się różnić jedynie ilościowo. Oznacza to np., że wierzchołek  $w(r, i)$  o wadze  $V(r, i)$  obsługuje w jakiś ustalony sposób  $V(r, i)$  wierzchołków stopnia pierwszego, a dowolny wierzchołek  $w(r, j)$  o wadze  $V(r, j)$  obsługuje w identyczny sposób  $V(r, j)$  wierzchołków stopnia pierwszego.

Niech  $\lambda[x(r, i), t]$  oznacza intensywność uszkodzeń elementu  $x(r, i)$  w chwili  $t$ . Wielkość  $\lambda[x(r, i), t]$  jest oczywiście zależna od wagi  $X(r, i)$  elementu  $x(r, i)$ . Przytoczmy bowiem rozumowanie podane w pracy [21] odnoszące się do urządzenia złożonego z grup jednako-

wych podzespołów. Jeśli jednakowe podzespoły znajdują się w mniej więcej jednakowych warunkach, bądź różne warunki nie wpływają w sposób istotny na ich niezawodność, to funkcje niezawodności tych podzespołów są różne. Przypuśćmy np. że w pierwszej grupie znajduje się  $n_1$  podzespołów o funkcji niezawodności  $p_1(t)$ , w drugiej grupie  $n_2$  podzespołów o funkcji niezawodności  $p_2(t)$  itd. Wówczas funkcja niezawodności  $P(t)$  urządzenia, przy założeniu, że elementy uszkadzają się w sposób niezależny i uszkodzenie dowolnego elementu powoduje uszkodzenie systemu, jest równa

$$P(t) = [p_1(t)]^{n_1} [p_2(t)]^{n_2} \dots [p_l(t)]^{n_l}. \quad (3.21)$$

Wyrażając funkcje niezawodności poprzez intensywność uszkodzeń mamy

$$e^{-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau} = e^{-n_1 \int_0^t \lambda_1(\tau) d\tau - \dots - n_l \int_0^t \lambda_l(\tau) d\tau}; \quad (3.22)$$

stąd

$$\lambda(t) = n_1 \lambda_1(t) + n_2 \lambda_2(t) + \dots + n_l \lambda_l(t). \quad (3.23)$$

Odnieśmy powyższe rozumowanie do systemów o strukturze hierarchicznej. Niech urządzenia elementu  $x(r, i)$  systemu składają się z podzespołów różnych typów o licznosciach  $n_1, n_2, \dots, n_l$ . Z poczynionych założeń wynika, że liczby  $n_j$  są proporcjonalne do wagi  $X(r, i)$  elementu

$$n_j = m_j X(r, i), \quad j = 1, 2, \dots, l; \quad (3.24)$$

na podstawie (3.23) mamy

$$\lambda[x(r, i); t] = X(r, i)(m_1 \lambda_1 + \dots + m_l \lambda_l) = X(r, i) \lambda[x(r); t], \quad (3.25)$$

co oznacza, że intensywność uszkodzeń  $\lambda[x(r, i); t]$  elementu  $x(r, i)$  jest proporcjonalna do jego wagi  $X(r, i)$ . Wielkość  $\lambda[x(r); t]$  opisuje intensywność uszkodzeń właściwą danemu rodzajowi elementu, danemu stopniowi hierarchii  $r$  i danej chwili czasu  $t$ , przypadającą na jednostkę wagi elementu. Biorąc pod uwagę założenie (3.19), można napisać

$$\lambda[x(r, i)] = X(r, i) \lambda[x(r)]. \quad (3.26)$$

Założenie (3.26) ma bardzo ważne konsekwencje. Umożliwia bowiem ono określenie strumienia uszkodzeń dróg elementarnych, podsystemów i całego systemu jedynie na podstawie znajomości struktury systemu i zbioru liczb  $\lambda[x(r)]$ , którego moc jest równa  $2r_{\max} - 1$ . Konwencjonalne podejście do zagadnienia wymagałoby oprócz opisu struktury podania zbioru liczb  $\lambda[x(r, i)]$ , którego moc jest dla zazwyczaj spotykanych systemów hierarchicznych bardzo duża.

### *Funkcje niezawodności*

Funkcja niezawodności elementu wyraża się dla dowolnych zmian intensywności uszkodzeń  $\lambda[x(r, i); t]$  w czasie zależnością

$$P[x(r, i); t] = e^{-\int_0^t \lambda[x(r, i); \tau] d\tau} \quad (3.27)$$

Przyjęcie założenia (3.19) i związku (3.26) prowadzi do zależności

$$P[x(r, i); t] = e^{-X(r, i)\lambda[x(r)]t}. \quad (3.28)$$

Znajomość funkcji niezawodności elementu pozwala na wyznaczenie funkcji niezawodności charakteryzujących drogi systemu, podsystemy, a także cały system.

Rozważmy dowolną drogę elementarną  $d$  w grafie hierarchicznym. Z założenia o niezależności uszkodzeń poszczególnych elementów wynika, że funkcja niezawodności  $P(d; t)$  tej drogi jest równa iloczynowi funkcji niezawodności elementów składowych

$$P(d; t) = \prod_{x(r, i) \in \Xi(d)} P[x(r, i); t]; \quad (3.29)$$

stąd

$$P(d; t) = e^{-\sum_{x(r, i) \in \Xi(d)} X(r, i)\lambda[x(r)]t}. \quad (3.30)$$

Opisującą drogę  $d$  intensywność uszkodzeń wynosi zatem

$$\lambda(d) = \sum_{x(r, i) \in \Xi(d)} X(r, i)\lambda[x(r)]. \quad (3.31)$$

Rozważmy teraz dowolną parę  $\langle w_m, w_n \rangle$  wierzchołków grafu. Niech wierzchołki te łączy  $\delta$  dróg elementarnych  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_\delta$ . Z rozważań przeprowadzonych w p. 3.3 wynika, że prawdopodobieństwa  $P_i (i = 1, 2, \dots, \delta)$  występujące we wzorze (3.12) można traktować jako funkcje niezawodności poszczególnych dróg elementarnych, a prawdopodobieństwa  $P_{ij}, P_{ijk}, \dots, P_{123\dots\delta}$  zgodnie ze wzorem (3.10) jako iloczyny funkcji niezawodności elementów, należących jednocześnie do par  $d_i d_j$ , trójek  $d_i d_j d_k, \dots$ , wszystkich dróg elementarnych, tzn. do zbiorów

$$\begin{aligned} \Xi(d_i) \cap \Xi(d_j), \quad \Xi(d_i) \cap \Xi(d_j) \cap \Xi(d_k), \dots, \\ \Xi(d_1) \cap \Xi(d_2) \cap \Xi(d_3) \dots \cap \Xi(d_\delta). \end{aligned}$$

Zbiory te można wyznaczać łatwą do zaprogramowania na maszynie matematycznej metodą, stosując operację (3.8) na ciągach binarnych. Funkcję niezawodności połączenia pary wierzchołków grafu można zatem zapisać następująco

$$\begin{aligned} P[\langle w_m, w_n \rangle; t] = \sum_{j=1}^{\delta} P[d_j; t] + \sum_{\substack{j, k=1 \\ j < k}}^{\delta} \prod_{x(r, i) \in \Xi(d_j) \cap \Xi(d_k)} P[x(r, i); t] - \dots \\ \dots + (-1)^{\delta+1} \prod_{x(r, i) \in \Xi(d_1) \cap \Xi(d_2) \cap \dots \cap \Xi(d_\delta)} P[x(r, i); t]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Rozważmy dowolny podsystem  $s$  systemu hierarchicznego. Uszkodzenie elementu nie musi powodować uszkodzenia podsystemu. Zadanie systemu może polegać np. na zapewnieniu sprawnego połączenia między dowolną parą wierzchołków (system telefoniczny). Wówczas funkcja niezawodności podsystemu zależy od funkcji niezawodności określonych wzorem (3.32) oraz od struktury konkretnego podsystemu. Praktycznie nie da się jej zapisać w jawny sposób w ogólnym przypadku, bowiem prawdopodobieństwa bezawaryjnej pracy poszczególnych połączeń par wierzchołków są od siebie zależne. Niemniej, w każdym konkretnym przypadku, funkcję tę można wyznaczyć.



### Parametry niezawodnościowe

Omówimy teraz niektóre parametry niezawodnościowe charakteryzujące cały system hierarchiczny, które mogłyby stanowić kryterium oceny jakości systemu z punktu widzenia jego niezawodności. Jednym z najczęściej podawanych parametrów niezawodnościowych jest wartość średnia czasu pracy bezawaryjnej  $T_o$ . W przypadku rozkładu wykładniczego jest ona równa dla elementu

$$T_o[x(r, i)] = \frac{1}{\lambda[x(r, i)]}, \quad (3.33)$$

dla drogi elementarnej

$$T_o(d) = \frac{1}{\lambda(d)} = \frac{1}{\sum_{x(r, i) \in \mathcal{B}(d)} X(r, i) \lambda[x(r)]}, \quad (3.34)$$

dla podsystemu w przypadku szeregowego pod względem niezawodnościowym połączenia elementów

$$T_o(s) = \frac{1}{\lambda(s)} = \frac{1}{\sum_{x(r, i) \in \mathcal{B}(s)} X(r, i) \lambda[x(r)]}. \quad (3.35)$$

W innych przypadkach, jak już wspomnieliśmy, sprawa się komplikuje i obliczenie wartości  $T_o(s)$  może być bardzo pracochłonne i co najważniejsze trudne do zalgorytmizowania. Algorytm taki musi uwzględniać zadania podsystemu, gdyż od nich zależy pojęcie uszkodzenia podsystemu, oraz uwzględniać istnienie rezerw w postaci kilku lub więcej dróg łączących niektóre (lub być może wszystkie) pary wierzchołków. Zagadnienie to jest istotne wówczas, jeżeli odnowa uszkodzonych elementów nie następuje natychmiast lecz dopiero po pewnym czasie, zwanym czasem trwania odnowy. Aby uniknąć strat powodowanych awarią, należy wówczas szukać dróg obejścia<sup>2)</sup>.

Zgodnie z rozważaniami przeprowadzonymi na wstępie niniejszego rozdziału można przyjąć, iż w przypadku systemów hierarchicznych czas bezawaryjnej pracy i czas odnowy mają rozkłady wykładnicze. Wówczas prawdopodobieństwo poprawnej pracy elementu w chwili  $t$  wyraża się wzorem

$$A(t) = \frac{T_2}{T_1 + T_2} e^{-\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right)t} + \frac{T_1}{T_1 + T_2} \quad (3.36)$$

i jest nazywane niestacjonarnym współczynnikiem gotowości [45]. Współczynnik ten dla podsystemu o szeregowej strukturze niezawodnościowej jest oczywiście równy

$$A(s; t) = \prod_{x(r, i) \in \mathcal{B}(s)} A[x(r, i); t]. \quad (3.37)$$

Rzadko który system hierarchiczny jest wprowadzony do eksploatacji w jednym momencie czasu przyjmowanym przez nas za chwilę  $t = 0$ . Zazwyczaj budowa systemu trwa

<sup>2)</sup> Zagadnieniem optymalnego wyboru dróg obejścia w wielkich systemach zajmował się m. in. J. Felicki w pracy [13].

nawet kilka lat i system jest włączany do eksploatacji etapami lub wreszcie system funkcjonuje od dawna i dokonujemy jedynie jego rozbudowy i modernizacji. W związku z tym słuszniejsze wydaje się opisywanie systemów hierarchicznych stacjonarnym współczynnikiem gotowości równym granicy

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \frac{T_1}{T_1 + T_2}. \quad (3.38)$$

Prace nad oceną niezawodności urządzeń złożonych z wielu elementów były już podejmowane niejednokrotnie i uzyskano w nich zadawalające rezultaty (patrz np. [3], [24], [41], [42]), które mogą mieć również zastosowanie w przypadku systemów hierarchicznych, niemniej nie uwzględniają one ich specyficznej struktury.

Zaproponujemy zatem nieco inne metody oceny niezawodności systemów hierarchicznych. Niech sprawne działanie systemu zależy od sprawnego działania jakiegoś zbioru dróg elementarnych. Może to być np. zbiór dróg łączących wierzchołek o najwyższym stopniu hierarchii z wierzchołkami 1-szego stopnia (w systemie energetycznym byłyby to drogi doprowadzające energię elektryczną z elektrowni do użytkowników), lub np. zbiór dróg łączących wierzchołki 1-szego stopnia (co miałyby miejsce w systemie łączności). Ocenę niezawodności systemu może w tym przypadku stanowić oczekiwana w całym zbiorze wartość prawdopodobieństwa poprawnej pracy drogi elementarnej, tzn.

$$E\{P[d(l); t]\} \quad (3.39)$$

Podstawiając zależności (3.30) i (3.31) mamy

$$E\{P[d(l); t]\} = \frac{1}{\delta} \sum_{l=1}^{\delta} e^{-\lambda[d(l)]t}. \quad (3.40)$$

Rozwińmy powyższe wyrażenie w szereg

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \sum_{l=1}^{\delta} e^{-\lambda[d(l)]t} &= \frac{1}{\delta} \sum_{l=1}^{\delta} \left\{ 1 - \frac{\lambda[d(l)]}{1!}t + \dots + (-1)^n \frac{\lambda^n[d(l)]}{n!}t^n + \dots \right\} = \\ &= 1 - \frac{1}{\delta} \sum_{l=1}^{\delta} \frac{\lambda[d(l)]}{1!}t + \dots + (-1)^n \frac{1}{\delta} \sum_{l=1}^{\delta} \frac{\lambda^n[d(l)]}{n!}t^n + \dots \approx \\ &\approx 1 - \frac{1}{\delta} \sum_{l=1}^{\delta} \frac{\lambda[d(l)]}{1!}t + \dots + (-1)^n \frac{\left( \frac{1}{\delta} \sum_{l=1}^{\delta} \lambda[d(l)] \right)^n}{n!}t^n + \dots = \\ &= e^{-\frac{1}{\delta} \sum_{l=1}^{\delta} \lambda[d(l)]t} = e^{-E[\lambda[d(l)]]t}. \end{aligned}$$

Czyli w przybliżeniu

$$E\{P[d(l); t]\} \approx e^{-E[\lambda[d(l)]]t}. \quad (3.41)$$

Ponieważ

$$\frac{1}{\delta} \sum_{l=1}^{\delta} \lambda^n[d(l)] \geq \left( \frac{1}{\delta} \sum_{l=1}^{\delta} \lambda[d(l)] \right)^n, \quad (3.42)$$

więc dla dowolnego  $t$  oszacowanie (3.41) jest oszacowaniem od dołu.

Zauważmy, że  $E\{P[d(l); t]\}$  jest po prostu wartością oczekiwaną funkcji niezawodności drogi elementarnej, zatem wielkość

$$E\{\lambda[d(l)]\} \quad (3.43)$$

opisuje w przybliżeniu intensywność uszkodzeń odpowiadającą rozkładowi (3.40). Wynika stąd, iż ocena (3.39) w przybliżeniu pokrywa się z inną oceną niezawodności systemu, polegającą na wyznaczeniu wartości oczekiwanej intensywności uszkodzeń drogi elementarnej, tzn. oceną (3.43).

Powyższe kryteria oceny systemu nie zawsze mogą być stosowane w sposób mechaniczny. Dla pewnych systemów prowadzą one do wniosku, iż system o strukturze z założenia nie spełniającej zadań stawianych systemowi byłby optymalny. W takich przypadkach dobre wyniki daje ocena niezawodności najgorszej pod względem intensywności uszkodzeń drogi spośród wyróżnionego zbioru  $\Delta$  dróg elementarnych, tzn. wyznaczenie

$$\sup_{d(l) \in \Delta} \lambda[d(l)], \quad (3.44)$$

lub co na jedno wychodzi

$$\inf_{d(l) \in \Delta} P[d(l); t]. \quad (3.45)$$

Jakkolwiek ocena taka może wydać się zbyt pesymistyczna, daje ona dobre wyniki jako kryterium optymalizacji systemu hierarchicznego.

W sytuacji, gdy system zawiera krawędzie współpracy, słuszniejsze lecz bardziej pracochłonne są oceny oparte o funkcję niezawodności  $P[\langle w_m, w_n \rangle; t]$  wyznaczoną według wzoru (3.32), czyli

$$E\{P[\langle w_m, w_n \rangle; t]\}, \quad (3.46)$$

lub

$$\inf_{\langle w_m, w_n \rangle} P[\langle w_m, w_n \rangle; t]. \quad (3.47)$$

#### 4. OPTIMALIZACJA SYSTEMÓW HIERARCHICZNYCH Z PUNKTU WIDZENIA NIEZAWODNOŚCI

##### 4.1. Charakterystyka problemu

Problem optymalizacji niezawodnościowej systemu hierarchicznego jest w praktyce zagadnieniem bardzo skomplikowanym zarówno ze względu na wielką liczbę elementów jak i ich wzajemne powiązania funkcjonalne. Dodatkową trudność stanowi ustalenie parametrów niezawodnościowych poszczególnych elementów, które nie są bezpośrednio

mierzalne i mogą być jedynie estymowane z pewnym poziomem ufności za pomocą badań statystycznych. Wymienione trudności powiększa skomplikowana, jak pokazano w p. 4.2, sprawa obliczania efektów ekonomicznych uzyskiwanych przy zastosowaniu urządzeń określonego typu w charakterze elementu systemu. Pewne ułatwienie stanowi fakt, iż systemy hierarchiczne zawierają duże liczby urządzeń tego samego typu.

Rozwiązanie w sposób ogólny problemu optymalizacji rozumianego jako wyznaczenie optymalnej struktury z jednoczesnym optymalnym doбором elementów, bez nałożenia bardzo silnych ograniczeń na klasę przeszukiwanych struktur i zbiór urządzeń mogących realizować zadania poszczególnych elementów, jest w obecnym stanie techniki obliczeniowej niemożliwy. Liczba danych wejściowych i operacji, jakie należałoby wykonać w przypadku zazwyczaj spotykanych systemów hierarchicznych, przekracza bowiem możliwości najnowocześniejszych maszyn cyfrowych.

Z powyższego względu rozważymy dwa oddzielne zagadnienia:

1. optymalny dobór urządzeń z zadanego zbioru realizujących zadania elementów systemu przy założeniu, że znana jest struktura systemu,
2. optymalny dobór struktury spośród zadanej klasy struktur przy założeniu, że znane są elementy systemu.

Aby je rozwiązać, należy najpierw poruszyć problem funkcji celu, która dla wielkich systemów z reguły wiąże się z zagadnieniami ekonomicznymi. Z tego względu rozważymy najpierw związek całkowitych kosztów eksploatacji dowolnego urządzenia z jego niezawodnością. Przytoczone prace dotyczą zależności obowiązującej między powyższymi wielkościami w przemyśle elektronicznym, ale mają one z całą pewnością charakter ogólny.

#### 4.2. Całkowite koszty eksploatacji a intensywność uszkodzeń urządzenia

Z wpływu jaki odgrywa niezawodność urządzenia na koszty zdawano sobie intuicyjnie sprawę prawdopodobnie już dawno. Pierwsze prace wiążące intensywność uszkodzeń z kosztami ukazały się jednak dopiero w latach 1958—1960 w USA [25], [40], [45], [54] i co jest charakterystyczne w wyniku problemów powstałych w elektronicznej technice wojskowej, gdzie do tej pory zagadnienia ekonomiczne odgrywały podrzędną rolę.

W obecnym stanie badań można uznać, iż teoretyczne związki między intensywnością uszkodzeń a poszczególnymi rodzajami kosztów ponoszonych w czasie planowania, zakupu, instalacji i eksploatacji urządzenia zostały ustalone i po części empirycznie sprawdzone. Globalnie ekonomiści ujmują powyższe rodzaje kosztów za pomocą jednego wskaźnika zwanego całkowitymi kosztami rocznymi, tzn. całkowitymi kosztami przypadającymi na jeden rok eksploatacji urządzenia. W pracy [14] B. Fox podaje, iż na całkowite koszty roczne  $K$  składają się:

- koszty wytworzenia, które obejmują koszty wstępne w rodzaju kosztów zakupu (lub kosztów własnych, produkcji) i kosztów instalacji urządzenia,
- koszty planowania,
- koszty operacyjne, tzn. ponoszone w trakcie eksploatacji,
- koszty utrzymania obejmujące koszty napraw i remontów.

Na tej podstawie wyprowadzono wniosek o następującej zależności całkowitych kosztów rocznych od intensywności uszkodzeń

$$K = A\lambda^{-c} + B\lambda^c + C, \quad (4.1)$$

gdzie  $A, B, C$  — stałe, a wykładnik potęgi jest liczbą z przedziału  $0 < c < 1$ .

W pracy [53] uzyskano zależność

$$K = \frac{k_r + k_w + k_q}{T_a} \frac{1}{\lambda} + \lambda k_q + k_h, \quad (4.2)$$

gdzie  $k_r, k_w, k_q, k_h, T_a$  — stałe.

Wydawnictwa rozpowszechniane przez NOT podają, iż na całkowite koszty roczne składają się: koszty amortyzacji wydatków na zakup urządzenia, koszty eksploatacji, koszty napraw, dodatkowe koszty (straty) wywołane awarią urządzenia. Na tej podstawie uzyskano zależność

$$K = b\lambda^{-\frac{1}{m}} + d\lambda^{1-\frac{1}{m}} + e, \quad (4.3)$$

gdzie  $b, d, e$  — stałe, a współczynnik  $m$  przybiera wartość od 4 do 7.

W pracy [33] przyjęto, iż na całkowite koszty ponoszone na system o hierarchicznej strukturze sterowania składają się wydatki na zakup aparatury i koszty strat ponoszonych w związku z niewypełnianiem zadań stawianych systemowi w przypadku jego uszkodzenia. Na tej podstawie uzyskano zależność

$$K = b\lambda + c \lg \frac{1}{\lambda} + d, \quad (4.4)$$

gdzie  $b, c, d$  są stałe.

### Porównanie

Jak łatwo stwierdzić, wszystkie zależności są podobne jakościowo. Dla urządzeń niezawodnych o bardzo małej intensywności uszkodzeń koszty całkowite są wysokie i przy  $\lambda \rightarrow 0$  rosną teoretycznie do nieskończoności jak  $A\lambda^{-c}$ , gdzie  $A$  i  $c$  — pewne stałe, przy czym  $0 < c \leq 1$ . Jedynie według źródeł radzieckich wzrost ten jest logarytmiczny. Powyższy wzrost kosztów wynika ze wzrostu kosztu zakupu i instalacji aparatury przy wzroście jej niezawodności, który przewyższa korzyści osiągnięte przez obniżenie kosztów napraw i strat powstających w wyniku awarii. Z drugiej strony, przy bardzo dużej intensywności uszkodzeń urządzenia, koszty całkowite są również duże i przy  $\lambda \rightarrow \infty$  rosną teoretycznie jak  $B\lambda$ , gdzie  $B$  i  $c$  — pewne stałe,  $0 < c \leq 1$ . Fakt ten jest związany ze wzrostem częstości napraw, wzrostem płac ekip remontowych i wzrostem strat powodowanych awariami. Dla pewnej intensywności uszkodzeń koszty osiągają minimum.

Z porównania wynika, że do dalszych rozważań najlepiej jest przyjąć zależność (4.1). Przez odpowiednie dobranie współczynników można sprowadzić ją do zależności (4.2). Do zależności (4.4) można mieć pewne zastrzeżenia, zaś zależność (4.3) jest nieco ogólniejsza, ale dość skomplikowana i praktycznie trudno by było przeprowadzić estymację

jej parametrów z dostateczną wiarygodnością. Charakter zależności (4.1), przyjętej za podstawę do dalszych rozważań, przedstawia rys. 5.

Łatwo pokazać, że krzywa osiąga minimum

$$K_{\min} = C + 2\sqrt{AB} \quad (4.5)$$

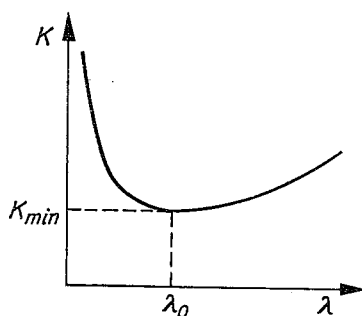
dla wartości

$$\lambda_0 = \left( \frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{2c}}. \quad (4.6)$$

W praktyce należy tak dobierać intensywność uszkodzeń, aby  $\lambda \leq \lambda_0$ , zabezpieczamy się bowiem wówczas przed decyzją nieoptymalną. Z tego punktu widzenia w literaturze spotyka się nawet bardzo uproszczone związki między  $K$  i  $\lambda$  w rodzaju

$$K = A\lambda^{-c}. \quad (4.7)$$

Jest to słuszne, o ile tylko nie interesuje nas zagadnienie minimalizacji kosztów.



Rys. 5. Zależność całkowitych kosztów rocznych od intensywności uszkodzeń elementu

### *Waga a koszty*

Rozpatrzmy teraz związek między całkowitymi kosztami rocznymi ponoszonymi na element  $x(r, i)$  systemu a wagą  $X(r, i)$  tego elementu. Przyjmijmy założenie, że zadania wierzchołków (krawędzi) są na danym stopniu hierarchii identyczne jakościowo, a mogą różnić się jedynie ilościowo. Można wówczas przeprowadzić rozumowanie podobne do rozumowania podanego w p. 3.4 i wyciągnąć wniosek, że związek ten jest liniowy

$$K[x(r, i)] = k[x(r)]X(r, i). \quad (4.8)$$

Współczynnik proporcjonalności  $k[x(r)]$  zależny jest od rodzaju elementu (wierzchołek czy krawędź) i stopnia hierarchii.

### *Podsumowanie*

W poprzednim rozdziale wyznaczyliśmy zależność (3.26) wiążącą wagę z intensywnością uszkodzeń. Porównując ją z zależnościami (4.1) i (4.8), otrzymamy

$$k[x(r)] = A\lambda^{-c}[x(r)] + B\lambda^c[x(r)] + C. \quad (4.9)$$

Płynie stąd wniosek, iż współczynniki  $A = A[x(r)]$ ,  $B = B[x(r)]$ ,  $C = C[x(r)]$ ,  $c = c[x(r)]$  są dla danego stopnia hierarchii i rodzaju elementów stałe, gdyż wzór (4.1) odnosi się oczywiście do wielkości „zredukowanych”  $k[x(r)]$  i  $\lambda[x(r)]$ , te bowiem tylko mogą być porównywane dla elementów o różnych wagach. Dla ustalonego stopnia hierarchii i rodzaju elementu można napisać wprost

$$k = A\lambda^{-c} + B\lambda^c + C, \quad (4.10)$$

gdzie  $0 < c \leq 1$ .

#### 4.3. Optymalizacja niezawodności elementów systemu

##### *Założenia*

Efektywne rozwiązanie problemu optymalizacji, jak wynika z charakterystyki tego problemu przeprowadzonej w p. 4.1, uwarunkowane jest przyjęciem założeń ograniczających zakres rozważań. Przyjmijmy zatem następujące założenia:

1. Strukturę systemu można opisać za pomocą grafu hierarchicznego. Graf ten jest znany i zadane są wagi  $X(r, i)$  wszystkich jego elementów. W zasadzie będziemy przyjmować, że wagi elementów wyznaczono zgodnie z definicjami (2.15) i (2.17), przy czym jeżeli definicja nie określała wagi jakiegoś elementu, to wagę tę przyjęto na podstawie innych kryteriów opartych o zadania stawiane temu elementowi.

2. Dla każdego elementu  $x(r, i)$  systemu zadany jest zbiór urządzeń różnych typów. Urządzenia te potencjalnie są zdolne realizować zadania tego elementu systemu. Każde z tych urządzeń scharakteryzowane jest stałą intensywnością uszkodzeń  $\lambda$  (tzn. strumień uszkodzeń urządzenia ma rozkład Poissona) oraz pewnym interesującym nas wskaźnikiem eksploatacyjnym  $K$  (np. całkowitym rocznym kosztem eksploatacji). Każde urządzenie jest zatem scharakteryzowane parą  $\langle \lambda, K \rangle$ ; każdy element systemu zbiorem par  $\langle \lambda(u), K(u) \rangle$ , gdzie  $u$  — liczba naturalna, określająca typ danego urządzenia. Cały system można scharakteryzować zbiorem par

$$\lambda[x(r, i), u], \quad K[x(r, i), u]. \quad (4.11)$$

3. Zadana jest maksymalna wartość  $K_{\max}$  wskaźnika eksploatacyjnego jakim ma charakteryzować się system. Wskaźnik eksploatacji jest wielkością addytywną, tzn. dla dowolnego podsystemu wskaźnik eksploatacji jest sumą wskaźników eksploatacyjnych elementów składowych podsystemu, w szczególności dla całego systemu

$$K(s) = \sum_r \sum_i K[x(r, i)]. \quad (4.12)$$

4. Dane jest kryterium oceny niezawodności systemu w postaci funkcji

$$R(\{\lambda[x(r, i)]\}), \quad (4.13)$$

zwanej dalej funkcją celu. Funkcję  $R$  zapisaną w ten dość nietypowy, ale w naszym przypadku wygodny sposób rozumiemy jako funkcję wielu zmiennych  $\lambda[x(r, i)]$ , gdzie  $x(r, i) \in \Xi$ . Funkcja celu musi spełniać pewne ogólne założenia, które omówione zostaną dalej.

## Zadanie 1

Zadanie nasze polega na wyborze dla każdego elementu systemu odpowiedniego typu urządzenia spośród urządzeń zdolnych realizować zadania tego elementu. Wybór powinien zapewniać najwyższą niezawodność systemu ocenianą za pomocą funkcji celu, z uwzględnieniem zadanej maksymalnej wartości wskaźnika eksploatacyjnego. Matematycznie zadanie to można sformułować następująco: należy dla każdego elementu  $x(r, i)$  dobrać taką parę

$$\langle \lambda[x(r, i), u^*], \quad K[x(r, i), u^*] \rangle \quad (4.14)$$

spośród zbioru par

$$\begin{aligned} &\langle \lambda[x(r, i), 1], \quad K[x(r, i), 1] \rangle, \\ &\dots\dots\dots \\ &\langle \lambda[x(r, i), u], \quad K[x(r, i), u] \rangle, \\ &\dots\dots\dots \\ &\langle \lambda[x(r, i), n], \quad K[x(r, i), n] \rangle, \end{aligned} \quad (4.15)$$

aby uzyskać minimalną<sup>3)</sup> wartość funkcji celu  $R$  przy zadanym ograniczeniu

$$\sum_{x(r, i) \in \mathcal{E}} K[x(r, i)] \leq K_{\max}. \quad (4.16)$$

Tak sformułowane zadanie jest zadaniem programowania nieliniowego.

## Funkcja celu

Dobór funkcji celu jest zagadnieniem zupełnie odrębnym. Jak już wspomniano, ocena niezawodności systemu zależna jest od jego zadań, zatem funkcja celu musi te zadania uwzględniać. Z tego też powodu w założeniach przyjęto ogólną postać (4.13) funkcji celu. W p. 3.4 podano rozmaite oceny niezawodności systemu, które mogą stanowić punkt wyjścia dla wyboru funkcji celu (4.13).

Niech dla rozpatrywanego systemu spełniona będzie zależność (3.26). Wówczas funkcję celu można przedstawić w postaci

$$R(\{\lambda[x(r)]\}, \quad \{X(r, i)\}). \quad (4.17)$$

Założmy, że dla wszystkich stopni hierarchii spełnione są zależności (4.1). Rozwiązując je ze względu na  $\lambda$  możemy sprowadzić je do postaci

$$\lambda_{1,2} = \left( \frac{k-C}{2B} \pm \sqrt{\left( \frac{k-C}{2B} \right)^2 - \frac{A}{B}} \right)^{\frac{1}{c}}. \quad (4.18)$$

Rozwiązanie ze znakiem „+” jest na pewno nieoptymalne, gdyż przy tym samym wskaźniku eksploatacyjnym można osiągnąć mniejszą intensywność uszkodzeń (rozwiązanie ze znakiem „-”). Fakt ten ilustruje rys. 5. Można zatem napisać

$$\lambda = \left( \frac{k-C}{2B} - \sqrt{\left( \frac{k-C}{2B} \right)^2 - \frac{A}{B}} \right)^{\frac{1}{c}}. \quad (4.19)$$

<sup>3)</sup> Stosując funkcje celu typu (3.40) zadanie polega na maksymalizacji, co w niczym nie zmienia stosowanych do rozwiązania metod.



Podstawiając do (4.8) otrzymamy

$$R(\{k[x(r)]\}, \{X(r, i)\}). \quad (4.20)$$

W przypadku zadanej struktury systemu wagi  $X(r, i)$  są znanymi liczbami, można więc uważać, że  $R$  jest jedynie funkcją zmiennych  $k[x(r)]$

$$R(\{k[x(r)]\}). \quad (4.21)$$

Będziemy zakładać, że funkcja celu (4.20) jest funkcją wypukłą i pozostaje nią dla dowolnego doboru wag  $X(r, i)$  (o ile wagi nie są z góry ustalone). Pokażemy teraz, że podane w p. 3.4 oceny niezawodności systemów hierarchicznych w połączeniu z zależnością (4.19) są funkcjami celu mającymi powyższą własność.

Rozważmy funkcję celu o postaci

$$R = \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j. \quad (4.22)$$

Postać ta obejmuje oceny (3.43) i (3.44) będąc od nich nieco ogólniejsza. Wyznamy Hessian  $\nabla^2 R$

$$\nabla^2 R = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 R}{\partial k_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 R}{\partial k_1 \partial k_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 R}{\partial k_n \partial k_1} & \cdots & \frac{\partial^2 R}{\partial k_n^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 R}{\partial k_1^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\partial^2 R}{\partial k_n^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 R_1}{\partial k_1^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\partial^2 R_n}{\partial k_n^2} \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

gdzie przyjęto oznaczenie  $R_j = \alpha_j \lambda_j$ .

Można pokazać, że w zakresie rozwiązań optymalnych (4.19)

$$\frac{\partial^2 R_j}{\partial k_j^2} = \frac{d^2 R_j}{d\lambda_j^2} \left( \frac{d\lambda_j}{dk_j} \right)^2 + \frac{dR_j}{d\lambda_j} \frac{d^2 \lambda_j}{dk_j^2} \geq 0,$$

więc macierz jest dodatnio półokreślona i funkcja (4.22) jest wypukła.

### Metody optymalizacji

Jak już wspomnieliśmy zagadnienie dotyczy programowania nieliniowego. W zasadzie można się obejść również bez jakiegokolwiek programu obliczając funkcję celu dla wszystkich możliwych wariantów doboru par (4.14) spośród par (4.15) i wybierając wariant optymalny. Tego rodzaju postępowanie możliwe jest jednak tylko przy bardzo małej liczbie wariantów i ogólnie nie może być polecane.

Do rozwiązania zadania 1 można starać się również przystosować metody programowania całkowito-liczbowego [1], [56]. Znane w obecnej chwili metody tego programowania są jednak nawet dla liniowych funkcji celu mało efektywne i wykazują dość słabą zbieżność. Z tego względu zadanie 1 rozwiązano w pracy inaczej.

Dzięki wprowadzeniu założeń (3.26) i (4.8) zredukowano liczbę zmiennych zadania 1, która może sięgać liczby elementów systemu hierarchicznego do kilku zmiennych (dokład-

nie do liczby  $2r_{\max} - 1$ , gdzie  $r_{\max}$  — liczba stopni hierarchii). Powyższe założenia wynikają ze specyficznej struktury i własności systemów hierarchicznych, można więc zakładać, że nie zmniejszają one ogólności rozważań. Dzięki temu można sformułować następujące zadanie.

### Zadanie 2

Należy wyznaczyć takie wartości zmiennych  $k[x(r)]$ , aby uzyskać minimalną wartość wypukłej funkcji celu

$$R(\{k[x(r)]\}) \quad (4.24)$$

przy ograniczeniach

$$-k[x(r)] + k_{\min}[x(r)] \leq 0, \quad (4.25)$$

$$\sum_{x(r)} k[x(r)] \sum_i X(r, i) - K_{\max} \leq 0. \quad (4.26)$$

Ograniczenia (4.25) wynikają z zależności analogicznych do (4.5). Ograniczeń tych jest  $2r_{\max} - 1$ . Zauważmy, że zbiór określany przez ograniczenia (4.25) jest zbiorem wielościanowym wypukłym [47], tzn. przecięciem skończonej liczby półprzestrzeni domkniętych. Nierówność (4.26) jest ścianą ograniczającą powyższy zbiór wielościanowy wypukły. Zatem (4.25) i (4.26) określają wielościan wypukły. Hiperpłaszczyzna

$$\sum_{x(r)} k[x(r)] \sum_i X(r, i) - K_{\max} = 0 \quad (4.27)$$

jest hiperpłaszczyzną podpierającą wielościan wypukły, tzn. wszystkie punkty tego wielościanu leżą po jednej stronie hiperpłaszczyzny.

Zadanie powyższe polega zatem na minimalizacji funkcji wypukłej na zbiorze wypukłym. Jest to więc zadanie programowania wypukłego [23]. Nie jest ono niestety całkowicie równoważne zadaniu 1.

Przytoczone uprzednio funkcje celu są funkcjami różniczkowalnymi. Pozwala to na zastosowanie do rozwiązania zadania metody podanej przez Kuhna i Tuckera w pracy [34] zwanej czasem metodą uogólnionych współczynników Lagrange'a. Wartości  $2r_{\max} - 1$  zmiennych  $k[x(r)]$  będące rozwiązaniami zadania 2 muszą spełniać, w myśl tej metody, poniższy układ równań i nierówności:

dla każdego  $x(r) = w(1), g(1), w(2), g(2), \dots, w(r_{\max})$

$$\frac{\partial R}{\partial k[x(r)]} = \sum_{x(r)} z[x(r)] + z[2r_{\max}] \sum_i X(r, i) = 0, \quad (4.28)$$

$$k_{\min}[x(r)] - k[x(r)] \leq 0, \quad (4.29)$$

$$\sum_{x(r)} k[x(r)] \sum_i X(r, i) - K_{\max} \leq 0, \quad (4.30)$$

$$z[x(r)] \geq 0, \quad (4.31)$$

$$z[x(r)] \cdot (k_{\min}[x(r)] - k[x(r)]) = 0, \quad (4.32)$$

$$z[2r_{\max}] \cdot \left( \sum_{x(r)} k[x(r)] \sum_i X(r, i) - K_{\max} \right) = 0, \quad (4.33)$$

gdzie wielkości  $z[x(r)]$  oraz wielkość  $z[2r_{\max}]$  są stałymi współczynnikami zwanymi współczynnikami Lagrange'a.

Funkcja celu  $R$  maleje ze wzrostem  $k$ . Wynika stąd, że minimum  $R$  będzie osiągane na hiperpłaszczyźnie (4.27). Zauważmy ponadto, że ograniczenia (4.29) nie są istotne. Gdybyśmy bowiem rozwiązali powyższy układ pomijając je i w wyniku otrzymali dla pewnych  $k[x(r)]$  wartości mniejsze od odpowiadających im zadanych wartości minimalnych  $k_{\min}[x(r)]$ , znaczyłoby to najczęściej, iż należy zrezygnować z budowy danych stopni hierarchii. Gdyby zmiana struktury była z pewnych względów niemożliwa, to należałoby powiększyć wartość  $K_{\max}$  lub szukać nowych elementów o nieco innej zależności  $k$  od  $\lambda$ . Istnieje również możliwość, że źle dobrano funkcję celu w stosunku do zadań systemu. Rozwiązania muszą więc spełniać układ

dla każdego  $x(r)$

$$\frac{\partial R}{\partial k[x(r)]} + z \sum_i X(r, i) = 0, \quad (4.34)$$

$$\sum_{x(r)} k[x(r)] \sum_i X(r, i) - K_{\max} = 0, \quad (4.35)$$

$$z \geq 0, \quad (4.36)$$

gdzie  $z$  współczynnik (odpowiadający w poprzednim układzie współczynnikowi  $z[2r_{\max}]$ ).

Powyższy układ równań może być dla podanych poprzednio funkcji celu rozwiązany w ciągu kilkunastu minut bez jakichkolwiek obliczeń maszynowych nawet dla kilku stopni hierarchii. Rozwiązanie tego układu stanowi jednocześnie rozwiązanie zadania 2, słuszne jest bowiem następujące twierdzenie [26]: niech  $f(x)$  będzie funkcją wypukłą,  $Q$  wypukłym domkniętym zbiorem w liniowej przestrzeni topologicznej  $E$ , wówczas każdy punkt minimum lokalnego  $f(x)$  na  $Q$  jest punktem minimum globalnego.

Niech  $k^*[x(r)]$  stanowią rozwiązania zadania 2. Na podstawie (4.19) można obliczyć odpowiadające im wartości  $\lambda^*[x(r)]$ . Stąd na podstawie zależności (4.8) i (3.26) otrzymujemy

$$K^*[x(r, i)] = X(r, i) k^*[x(r)], \quad (4.37)$$

$$\lambda^*[x(r, i)] = X(r, i) \lambda^*[x(r)]. \quad (4.38)$$

Powróćmy teraz do zadania 1. Spośród zbioru par (4.15) należy dla każdego elementu  $x(r, i)$  wybrać parę najbardziej zbliżoną do pary otrzymanej z równań (4.37) i (4.38). W ten sposób określimy typ urządzenia, które należy zastosować w roli  $x(r, i)$  elementu systemu. Otrzymujemy w ten sposób rozwiązanie suboptymalne zadania 1. Może ono, ale nie musi, pokrywać się z rozwiązaniem optymalnym (4.14). Im więcej różnorodnych typów urządzeń mamy do wyboru, tym łatwiej zbliżyć się podaną metodą do rozwiązania optymalnego, tak że różnice mogą stać się już nieistotne ze względu na inne kryteria wyboru nie objęte funkcją celu; bezpośrednie rozwiązanie zadania 1 jest natomiast tym trudniejsze.

W sytuacji, gdy żądane jest dokładne rozwiązanie zadania 1, pozostaje nadal metoda przeliczania poszczególnych wariantów z tym, że wiele z nich będzie można z góry odrzucić, kierując się wynikami otrzymanymi dla zadania 2.

Mogłoby się wydać, że istotnym ograniczeniem metody jest przyjęcie liniowych zależności (3.26) i (4.8), wiążących intensywność uszkodzeń i wskaźnik eksploatacyjny z wagą elementu. Tak jednak nie jest. Jeśli bowiem

$$\frac{K[x(r, i)]}{X(r, i)} \neq \text{const} = k[x(r)],$$

$$\frac{\lambda[x(r, i)]}{X(r, i)} \neq \text{const} = \lambda[x(r)],$$

to należy zdefiniować wagi poszczególnych elementów w taki sposób, aby zależności (3.26) i (4.8) były spełnione. Wagi nie będą wówczas ściśle związane ze strukturą systemu. Ograniczenie metody stanowi więc jedynie założenie identycznego charakteru zależności  $K[x(r, i)]$  oraz  $\lambda[x(r, i)]$  od wag dla danego rodzaju elementu i stopnia hierarchii. Przyjęcie różnych charakterów tych zależności byłoby możliwe, ale wprowadzałoby dodatkowe komplikacje w metodzie, tak że mogłaby ona stracić zdecydowaną wyższość nad innymi, chociaż umożliwiłoby to lepsze zbliżenie do rezultatów optymalnych.

Oprócz postawionego wyżej zadania 1, można postawić jeszcze jedno bardzo ważne zadanie, polegające najczęściej na minimalizacji kosztów. Można sformułować je następująco.

### Zadanie 3

Wszystkie elementy ustalonego stopnia hierarchii i rodzaju scharakteryzowane są zależnością (4.10). Należy dla każdego elementu  $x(r, i)$  dobrać taką wartość  $\lambda[x(r, i)]$ , aby uzyskać minimalną wartość sumy

$$\sum_{x(r, i) \in \Xi} K[x(r, i)]. \quad (4.39)$$

Zadanie powyższe nie ma dodatkowych ograniczeń.

W świetle uzyskanych w pracy [14] wyników (4.5) i (4.6), odnoszących się do pojedynczego elementu, wynika, iż rozwiązanie zadania 3 otrzymujemy jeżeli intensywności uszkodzeń elementów będą równe

$$\lambda[x(r, i)] = \left( \frac{A[x(r)]}{B[x(r)]} \right)^{\frac{1}{2c[x(r)]}}; \quad (4.40)$$

wówczas

$$\min \sum_{x(r, i) \in \Xi} K[x(r, i)] = \sum_{x(r, i) \in \Xi} (C[x(r)] + 2\sqrt{A[x(r)]B[x(r)]})X(r, i). \quad (4.41)$$

Tak sformułowane zadanie może prowadzić bardzo łatwo do rozwiązań nieoptymalnych w sensie (4.19) przy niedokładnych danych wyjściowych. Dlatego poprawniejsze jest sformułowanie zagadnienia optymalizacyjnego w postaci zadania 1.

## 4.4 Optymalizacja struktury

### Charakterystyka problemu

Temat optymalizacji sieci należy uważać za wciąż niedostatecznie opracowany. Rozwiązano jedynie kilka najprostszych zagadnień, jak zagadnienie Steinera [9]. W pracy [19] została podana metoda geometryczna znajdowania punktów Steinera w przypadku, gdy minimalizacji podlega nie łączna długość, a łączny koszt budowy sieci. Metodę nadającą się do programowania podano w pracy [43]. Optymalizację struktury omawia także wiele prac (patrz [38]), odnoszących się do optymalizacji wielkich systemów automatycznego sterowania. Niektóre z nich (np. [37]) zajmują się systemami o hierarchicznej strukturze. Zagadnienia niezawodnościowe w systemach hierarchicznych omawia zaledwie kilka prac [13], [28], [30], [33]. Pewne aspekty zagadnień niezawodnościowych omawiane są w pracach ściśle „branżowych” [11], [12], [15], [16], omawiających systemy telekomunikacyjne.

Wszystkie powyższe prace rozpatrują zagadnienie optymalizacji z punktu widzenia minimum kosztów. W niniejszej pracy przyjęto inny punkt widzenia. Traktujemy wielkość całkowitych kosztów rocznych jako z góry zadaną, a minimalizować będziemy funkcję celu związaną z intensywnością uszkodzeń systemu.

Przyjmijmy następujące założenia:

- 1) dane są urządzenia różnych typów  $w(u)$ ,  $g(u)$ , które mogą realizować zadania odpowiednio wierzchołków i krawędzi systemu hierarchicznego; przez  $u$  oznaczono tu typ urządzenia,
- 2) urządzenia powyższe scharakteryzowane są maksymalną liczbą wierzchołków pierwszego stopnia, które zdolne są one obsłużyć w sposób właściwy danemu systemowi; przez analogię do wag elementów będziemy oznaczać je odpowiednio  $V(u)$  i  $\Gamma(u)$ ,
- 3) znane są całkowite koszty roczne  $K[w(u)]$  i  $K[g(u)]$  (lub inny addytywny wskaźnik eksploatacyjny) urządzeń,
- 4) czasy bezawaryjnej pracy poszczególnych urządzeń podlegają rozkładowi wykładniczemu; znane są intensywności uszkodzeń  $\lambda[w(u)]$  i  $\lambda[g(u)]$ ,
- 5) wielkości  $K[g(u)]$  i  $\lambda[g(u)]$  zależą od rozmiarów liniowych  $l$  (długości) urządzeń  $g(u)$  i zależności te są znane.

Postawmy następujące zadanie.

### Zadanie 4

Należy wyznaczyć optymalną strukturę systemu spośród klasy struktur opisywanych grafem hierarchicznym drzewiastym oraz dobrać elementy  $x(r, i)$  systemu spośród zadanego zbioru urządzeń, tak aby uzyskać minimalną wartość funkcji celu

$$R(\{\lambda[w(u)]\}, \{\lambda[g(u)]\}), \quad (4.42)$$

opisującej niezawodność systemu, przy zadanym ograniczeniu

$$\sum_{x(r, i) \in \mathcal{E}} K[x(r, i)] - K_{\max} \leq 0 \quad (4.43)$$

oraz zadanym rozkładzie przestrzennym wierzchołków pierwszego stopnia hierarchii.

### Metoda rozwiązania

Z rozważań przeprowadzonych w p. 4.3 wynika, że ograniczenie (4.43) jest w zasadzie ograniczeniem równościowym

$$\sum_{x(r, i) \in \mathcal{E}} K[x(r, i)] - K_{\max} = 0, \quad (4.44)$$

gdyż minimum funkcji celu będzie osiągnięte na powyższej hiper-płaszczyźnie. Zadanie doboru elementów polega więc na podzieleniu wartości  $K_{\max}$  w optymalny sposób na poszczególne elementy. Zadanie powyższe różni się w zdecydowany sposób od zadań jakie postawiono w pracach [28], [30], [33]. Nie można tu bowiem dokonywać optymalizacji kolejno dla coraz wyższych stopni hierarchii jak to uczyniono w [28], gdyż nie są ustalone elementy pierwszego stopnia, a ponadto nie znana jest dekompozycja wartości  $K_{\max}$  na poszczególne stopnie hierarchii.

W celu rozwiązania zadania 4, autor niniejszej pracy proponuje następujące postępowanie.

1. Zadanie wartości  $K[w(u)]$  oraz  $V(u)$  możemy na płaszczyźnie  $K, V$  interpretować jako punkty odpowiadające urządzeniom różnych typów. Na tej podstawie wykreślamy zależność funkcjonalną  $K[w]$  od wag  $V$  i aproksymujemy ją analitycznie funkcją wypukłą (np. krzywą drugiego stopnia). Funkcję tę będziemy oznaczać  $\zeta(\mathcal{O}; V)$ . Zadanie wartości  $K[g(u)]$  oraz  $\Gamma(u)$  aproksymujemy w przestrzeni  $K, \Gamma, I$  funkcją wypukłą  $\Psi(\mathcal{O}; \Gamma, I)$ . W praktyce może być trudna aproksymacja powierzchni rozpiętej na zadanych punktach za pomocą funkcji. Zadanie to można sobie ułatwić przyjmując, iż funkcja ta jest iloczynem dwu czynników, z których jeden zależy tylko od  $\Gamma$  a drugi tylko od  $I$ . Analogicznie ustalamy funkcje  $\mathcal{X}(\mathcal{O}; V)$  i  $\mathcal{Y}(\mathcal{O}; \Gamma, I)$  odpowiadające  $\lambda[w]$  i  $\lambda[g]$ . Koncepcja powyższa odpowiada utworzeniu pewnego kontinuum typów urządzeń.

2. Wyznamy teraz optymalną liczbę stopni hierarchii  $\varrho$  systemu. W tym celu przyjmijmy chwilowo ograniczenie klasy rozpatrywanych struktur do struktur symetrycznych o stałym współczynniku hierarchii  $\chi$ . Ponieważ znana jest liczba  $v(1)$  wierzchołków pierwszego stopnia, więc  $\chi = [v(1)]^{\frac{1}{\rho-1}}$ . W rozpatrywanej strukturze wagi poszczególnych wierzchołków i krawędzi odpowiadające poszczególnym stopniom hierarchii będą równe.

$$\begin{aligned} V(r) &= [v(1)]^{\frac{r-1}{\rho-1}}, \quad r = 1, \dots, \varrho, \\ \Gamma(r) &= [v(1)]^{\frac{r-1}{\rho-1}}, \quad r = 1, \dots, \varrho-1. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Załóżmy, że rozkład wierzchołków w (1) na płaszczyźnie jest równomierny lub rozmieszczone są one w linii prostej. Dla tych przypadków podano w [33] wyrażenia określające sumaryczną długość  $L$  krawędzi systemu o strukturze drzewiastej symetrycznej w zależności od liczby stopni  $\varrho$ , współczynnika hierarchii i odległości  $l_0$  pomiędzy wierzchołkami w(1). Wynosi ona dla równomiernego rozmieszczenia

$$L(\varrho) = \frac{l_0 \chi^{\rho-1} (\sqrt{\chi} - 1)}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\left[ \frac{\sqrt{4/\pi} (\sqrt{\chi} - 1)}{\chi} \right]^{\rho-1} - 1}{\frac{\sqrt{4/\pi} (\sqrt{\chi} - 1)}{\chi} - 1}, \quad (4.46)$$

a dla rozmieszczenia wzdłuż linii

$$L(\varrho) = l_0 \frac{\chi + 1}{2} \cdot \chi^{\varrho-1} (\varrho - 1). \quad (4.47)$$

W pracy [30] podano podobne wyrażenia przybliżone. Znajomość tych wyrażen pozwala nam sformułować zadanie:

Wyznaczyć takie  $\varrho$  i takie wartości  $l(\varrho, r)$  odpowiadające krawędziom w powyższej strukturze, aby osiągnąć minimum funkcji celu

$$R(\{\mathcal{Y}(\varrho, r; \chi^{r-1}, l(\varrho, r))\}, \{\mathcal{X}(\varrho, r; \chi^{r-1})\}) \quad (4.48)$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{r=1}^{\varrho-1} \chi^{\varrho-r} l(\varrho, r) - L(\varrho) = 0, \quad (4.49)$$

$$\sum_{r=1}^{\varrho} \chi^{\varrho-r} \zeta(\varrho, r; \chi^{r-1}) + \sum_{r=1}^{\varrho-1} \chi^{\varrho-r} \Psi(\varrho, r; \chi^{r-1}, l(\varrho, r)) - K_{\max} = 0. \quad (4.50)$$

Zmienna optymalizowana  $\varrho$  występuje jako liczba składników sum. Sumowania tego nie da się efektywnie przeprowadzić w naszym przypadku. Ponieważ jednak wartości  $\varrho$  wahają się zazwyczaj od 3 do 5, to wyznaczenie wartości funkcji celu dla poszczególnych  $\varrho$  nie stanowi problemu. Dla każdej z powyższych wartości  $\varrho$  należy przeprowadzić przedtem optymalizację ze względu na dobór wartości  $l$ . Można tu jednak poprzednio zastosować uogólnioną metodę współczynników Lagrange'a. Dla ustalonego  $\varrho$  mamy

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial l(\varrho, r)} - z_1 \chi^{\varrho-r} - z_2 \chi^{\varrho-r} \frac{\partial \Psi}{\partial l(\varrho, r)} &= 0 \quad \text{dla } r = 1, \dots, \varrho, \\ \sum_{r=1}^{\varrho-1} \chi^{\varrho-r} l(\varrho, r) - L(\varrho) &= 0, \\ \sum_{r=1}^{\varrho} \chi^{\varrho-r} \zeta(\varrho, r; \chi^{r-1}) + \sum_{r=1}^{\varrho-1} \chi^{\varrho-r} \Psi(\varrho, r; \chi^{r-1}, l(\varrho, r)) - K_{\max} &= 0, \\ z_1 \geq 0, \quad z_2 &\geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.51)$$

Podstawiając otrzymane stąd wartości  $l(\varrho, r)$  do funkcji celu wyznaczymy jej wartość dla ustalonego  $\varrho$ . Porównując wartości funkcji celu dla kilku wartości  $\varrho$  wyznaczamy wartość optymalną  $\varrho^*$ .

3. Na podstawie zadanego zbioru urządzeń różnych typów, znalezionej wartości  $\varrho^*$  i obliczonych na tej podstawie wag (4.45), ustalamy typy urządzeń mających pracować w charakterze elementów na poszczególnych stopniach hierarchii. Typy te dobieramy kierując się zadanymi wartościami  $V(u)$  i  $I(u)$  tak, aby odpowiadały one w przybliżeniu wagom (4.45). W przypadkach, gdy dwa urządzenia będą miały wagi zbliżone do wag (4.45), o ostatecznym wyborze decydujemy intuicyjnie opierając się na wartościach  $K[x(u)]$  i  $\lambda[x(u)]$ . W ten sposób wyznaczona jest struktura systemu i dobrane elementy z uwzględnieniem realnych danych.

4. Przy niejednakowych odległościach między wierzchołkami  $w(1)$  ale dość równomiernym ich rozkładzie w przestrzeni otrzymane optymalne wartości  $l(q, r)$  należy traktować jako wartości średnie. Znajomość tych wartości pozwala dobierać położenia poszczególnych wierzchołków  $w(r)$  (gdzie  $r > 1$ ) w przestrzeni. Powstające ewentualnie rozbieżności najprościej korygować drogą intuicyjną. Jeżeli uważamy tego rodzaju postępowanie za zbyt mało dokładne, możemy przeprowadzić ścisłą optymalizację. Należy w tym celu przyjąć układ współrzędnych i wyznaczyć wartości współrzędnych odpowiadających wszystkim wierzchołkom  $w(1)$ . Wartości współrzędnych wierzchołków  $w(r)$  dla  $r > 1$  uważamy za zmienne optymalizowane. Dla przyjętej struktury i elementów wyznaczamy postać funkcji celu, w której długości krawędzi są nieznane, ale wyrażone są za pomocą współrzędnych wierzchołków  $w(r)$ ,  $r > 1$ . Korzystamy tu ze znajomości funkcji  $\mathcal{U}(\mathcal{O}; \Gamma, l)$ . Obliczając pochodne cząstkowe funkcji celu względem współrzędnych wierzchołków i porównując je do zera otrzymujemy układ równań, którego rozwiązanie daje współrzędne optymalne. Żadnych ograniczeń tu nie uwzględniamy, ponieważ są one automatycznie spełnione przy założonej strukturze i elementach. Powyższe postępowanie, proste z teoretycznego punktu widzenia, w praktyce może być nieco kłopotliwe ze względu na liczbę zmiennych równań, które należy rozwiązać. Spodziewane efekty w postaci podwyższenia niezawodności systemu nie będą na pewno duże, więc przeprowadzenie wtórnej optymalizacji nie zawsze będzie opłacalne.

Podanej metodzie postępowania na pewno można postawić kilka zarzutów. Metoda ta prowadzi tylko do rozwiązania suboptymalnego, niemniej uzyskanie dokładnego rozwiązania dla znakomitej większości zagadnień optymalizacji struktury jest niemożliwe ze względu na trudności obliczeniowe, którym nie mogą sprostać obecnie stosowane maszyny. W cytowanych pracach rozpatrzono nieco prostsze zagadnienia przy silniejszych ograniczeniach (zakładają z reguły znajomość elementów). Tym można tłumaczyć ograniczenie przez autora rozważań do klasy struktur drzewiastych. Zagadnienie optymalizacji struktur zawierających krawędzie współpracy jest interesujące, ale trudne i nie ma tu dostatecznie opracowanych efektywnych metod nawet dla prostych zagadnień. Jedną z metod podano w pracy [31] dla przypadku optymalizacji wiązek międzycentralnych z punktu widzenia minimalizacji kosztów (nie dotyczy zagadnień niezawodnościowych). Niestety nie może ona mieć zastosowania w naszym przypadku ze względu na całkowicie różny charakter ograniczenia(4.44).

## 5. ZAKOŃCZENIE

W pracy tej starano się scharakteryzować niektóre zagadnienia występujące przy analizie niezawodności i syntezie systemów o strukturze hierarchicznej. Temat ten jest bardzo szeroki i powiązany z wieloma dziedzinami wiedzy, takimi jak teoria grafów — czysto abstrakcyjny dział matematyki, nieliniowe programowanie matematyczne, teoria niezawodności i związane z nią aspekty teorii masowej obsługi, ekonomia.

Problem optymalizacji niezawodności elementów sformułowany w Zadaniu 1 sprowadzono do Zadania 2. Zadanie to z matematycznego punktu widzenia można określić jako problem optymalizacji globalnej. Przy wprowadzonych założeniach wypukłości funkcji



celu, jej różniczkowalności wynikającej z warunków fizycznych i wypukłości zbioru ograniczeń, istnieje rozwiązanie tego zadania. Może być ono wyznaczone z równań (4.34) (4.35), (4.36). Dla podanych funkcji celu mogą być one rozwiązane w prosty sposób, bez użycia maszyn cyfrowych. Stanowi to bardzo cenną zaletę metody, gdyż umożliwia ona szybkie otrzymanie rozwiązania suboptymalnego. Rozwiązanie to może być uściślone (zalecane jest zastosowanie maszyny cyfrowej), np. metodą przeliczenia kilku lub kilkunastu wariantów w pobliżu rozwiązania suboptymalnego. Ograniczeniom podanej metody jest jedynie fakt, że przy dużych rozbieżnościach zależności  $K[x(r, i)]$  oraz  $\lambda[x(r, i)]$  od wag  $X(r, i)$ , wyznaczonych przez strukturę systemu, otrzymane rozwiązanie Zadania 2 może być dalekie od rozwiązania Zadania 1, czyli uzyskanie go niewiele tylko upraszcza zagadnienie. W tym przypadku metoda pozostawia szerokie pole dla intuicji inżynierskiej.

Problem optymalizacji struktury sformułowany w Zadaniu 4 rozwiązano przy ograniczeniu klasy rozważanych struktur do struktur drzewiastych. Otrzymano rozwiązanie w postaci struktury wraz z dobranymi elementami jest tylko suboptymalne. Prowadzi ono bowiem do struktury zbliżonej do symetrycznej struktury drzewiastej o jednakowym współczynniku hierarchii dla wszystkich stopni. Nie ma więc całkowitej pewności, że otrzymana struktura jest optymalną. Istnieje oczywiście możliwość dalszego przeszukiwania struktur bliskich otrzymanej i tą drogą zbliżenia się do optimum. Wydaje się, że dla rzeczywistych systemów hierarchicznych liczba wariantów, które należy rozpatrzyć, aby uzyskać strukturę optymalną, nie powinna w tej sytuacji przekraczać kilku lub kilkunastu. Umożliwia to już opracowanie efektywnego programu obliczeń.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. A b a d i e i i n n i, *Nonlinear Programming*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1967.
2. R. E. Barlow, F. Proschan, *Mathematical Theory of Reliability*, John Wiley.
3. J. K. Bieljajew, T. N. Dugina, E. W. Czepurin, Wyzniesienie niższej dowieritelnojj granicy dla wierojatnosti biezotkaznoj raboty skłoznych sistiem, *Izd. AN SSSR Tiejniceskaja kibier-nietila*, N°2, 1967, s. 52—59, N°3, s. 67—78.
4. B. S. Butkiewicz, Graf hierarchiczny. Definicja i zastosowanie do analizy systemów, *Archiwum Elektrotechniki*, z. 4, 1971.
5. B. S. Butkiewicz, Niezawodność systemów o strukturze hierarchicznej, *Rozprawa doktorska*, Biblioteka Główna Politechniki Warszawskiej, 1972.
6. A. J. Chinczin, *Matematiczeskije metody teorij massowogo obsłuziwania*, *Trudy matiematyczeskogo instituta im. W. A. Stieklowa*, T. 49, *Izd. AN SSSR* 1955.
7. A. J. Chinczin, *Raboty po teorij massowogo obsłuziwania*, Fizmatgiz, 1963.
8. A. J. Chinczin, *Teorija wierojatnostiej i jejo primienienije*, 1 wyp. 1 (1956), s. 3—17.
9. R. Courant, H. Robbins, *Co to jest matematyka*, PWN, Warszawa 1962.
10. R. F. Drenick, The Failure Law of Complex Equipment, *J. Soc. Indust. Appl. Math.* v. 8, N°1. 1960, s. 680—690.
11. Z. Dudziński, Optymalizacja struktury sieci teletransmisyjnej metodami programowania matematycznego, *Rozprawa doktorska*.
12. Z. Dudziński, Zastosowanie teorii niezawodności do zagadnień sieci telekomunikacyjnych, *Biuletyn Techniczny Ministerstwa Łączności*, 1965, nr. 6, s. 9—17.
13. J. Felicki, Zagadnienie niezawodności wielkich systemów, *Problemy sterowania wielkimi systemami*, Wyd. PAN, 1964.
14. B. Fox, Total Annual Cost, a Reliability Criterion, *Proceedings tenth national symposium on reliability and quality control*, Washington 1964.

15. Z. Frydrych, Uwagi o niezawodnościowych aspektach planowania rozplywu łączności, *Prace Instytutu Łączności*, z. 1 (53), 1969.
16. Z. Frydrych, Wskaźniki niezawodności relacji telefonicznych i metody ich obliczenia, *Prace Instytutu Łączności*, z. 1(53), 1969.
17. Y. Fu, Application of Topological Methods to Probabilistic Communication Networks, *Trans. IEEE, COM-13* 1965, september, s. 301—307.
18. Y. Fu, S. S. Yau, A Note on the Reliability of Communication Networks, *J.SIAM* 1962, t. 10, September, s. 469—474.
19. E. N. Gilbert, Minimum Cost Communication Network, *The Bell System Technical*, Vol. XLVI, Nr. 9, Nov. 1967, s. 2209.
20. L. A. Grieczina, Ob odnom spisocznym algoritmie pierieczislenija wsiech cyklow w orientirowannom grafie, *Trudy seminaru „Algoritmizacija proizvodstwiennych processiow”*, Wypusk 2, Akademiya Nauk Ukrainskoj SSR, Kijew 1969.
21. B. W. Gniedenko, J. K. Bielajew, A. D. Sołowiew, Matematyczne metody w teorii niezawodności (tłum.), WNT, Warszawa 1966.
22. B. W. Gniedenko, Priedisłowie. Teorija nadiežnosti i massowe obsłuziwaniye, *Izd. „Nauka”*, Moskwa 1969.
23. E. G. Golsztejn, Wypukłoko programmirowaniye. Elementy teorii, *Izd. „Nauka”*, Moskwa 1970.
24. A. M. Gurewicz, I. S. Nejszadt, Nadiežnost' logiczeskich sistem uprawlenija, *Izd. „Nauka”*, Moskwa 1968.
25. P. R. Gyllenhaal, J. E. Robinson, A Reliability-cost Optimization Procedure, *Proceedings fifth national symposium on reliability and quality control*, Philadelphia 1959.
26. G. Hadley, Nieliniejnoje i dinamiczeskoje programmirowaniye, *Izd. „Mir”*, Moskwa 1967. Moskwa 1967.
27. W. A. Ilin, Bolszije sistemi telemekhaniki s mnogostupienchatym uprawlenijem, *Wiestnik Akademii Nauk*, 1965, N°5.
28. W. A. Ilin, Sistemi telemekhaniki dla rassriedotoczennych obiektow, *Goseniergoizdat*, Moskwa 1963.
29. W. A. Ilin, Tielekontrol i tieleuprawlenije rassriedotoczennymi obiektami, *Goseniergoizdat*, Moskwa 1963.
30. W. A. Ilin, Wielkie systemy telemekhaniki (tł. ros.) WNT, Warszawa 1970.
31. K. Kassenberg, Metoda ustalania wiązek międzycentralowych w automatycznej sieci telefonicznej międzymiastowej, *Prace Instytutu Łączności*, 1968, nr. 52.
32. A. Kaufman, Y. Malgrange, Recherche des chemins et circuits hamiltoniens d'un graphe, *Rev. franc. rech. operat.*, 7(1963), N°26.
33. A. J. Koekin, Optimizacija nadiežnosti i struktury ijerarchiczeskich sistem uprawlenija, *Awtomatika i telemekhanika*, N° 10, 11, 1965.
34. N. W. Kuhn, A. W. Tucker, Nonlinear Programming, *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Univ. Calif. Berkeley, 1951.
35. W. T. Kulik, L. A. Grieczina, Programma identifikacji putiej i ciklow orientirowannych sietiej, *Trudy seminaru „Algoritmizacija proizvodstwiennych processiow”*, Wypusk 2, AN USSR, Kijew 1969.
36. W. T. Kulik, Spisocznyje algoritmy rieszenija niekotorych ekstremalnych zadacz na grafach, *Trudy seminaru „Algoritmizacija proizvodstwiennych processiow”*, Wypusk 2, AN USSR, Kijew 1969.
37. R. Kulikowski, Adaptacyjna optymalizacja wielkich systemów o hierarchicznej strukturze sterowania. *Problemy sterowania wielkimi systemami*, Wyd. PAN, 1964.
38. R. Kulikowski, Sterowanie w wielkich systemach, WNT, Warszawa 1970.
39. W. W. Łukoszkow, Ob organizacii ijerarchii sistem uprawlenija, *Trudy seminaru „Algoritmizacija proizvodstwiennych processiow”*, Wypusk 2, AN USSR, Kijew 1969.

40. R. L. Mc Laughlin, H. D. Voegtlen, Ground Electronic Equipment Support Cost Vs. Reliability and Maintainability, Proceedings fifth national symposium on reliability and quality control, Philadelphia 1959.
41. Matematyčeskaja teorija nadiežnosti informacionno-logiczeskich upravljajuszczich ustrojstw, Izd. Leningrad Uniw., 1966.
42. A. M. Polovko, Fundamentals of Reliability Theory, Academic Press New York and London 1968, s. 22—48.
43. R. C. Prim, Shortest Connection Network and Some Generalizations, Bell System Techn. Journ., vol 36, 1957.
44. I. A. Rjabinin, W. D. Rubinowicz, O wlijanii tipa zakonow raspriedielenija wriemieni isprawnoj raboty i wriemieni wosstanowlenija na charakteristiki nadiežnosti niezawierajuszczich sistem. Teorija nadiežnosti i massowe obslužiwanije, Izd. „Nauka”, Moskwa 1969.
45. G. H. Sandler, Maximum Inspection Efficiency by Linear Programming, Proceedings fifth national symposium on reliability and quality control, Philadelphia 1959.
46. S. Seshu, M. B. Reed, Linear Graphs and Electrical Networks, Addison-Wesley, 1961.
47. M. Simmonard, Programowanie liniowe, PWN, Warszawa 1967.
48. S. Słupecki, L. Borkowski, Wwiedienije w matematyčeskiju logiku i osnovy teorii množstwa, Izd. „Progress”, Moskwa 1965.
49. A. A. Stoljar, Logiczeskoje wwiedienije w matematiku, Izd. „Wyszejszaja szkoła”, Mińsk 1971.
50. J. A. Szichanowicz, Wwiedienije w sowriemiennuju matematiku, Izd. „Nauka”, Moskwa 1966.
51. S. Walukiewicz, Optymalizacja przestrzennych i funkcjonalnych struktur i systemów informacyjnych, Arch. Automatyki i Telemechaniki, nr. 4, 1970.
52. J. A. Wasiljew, B. A. Kozłow, O wlijanii wida zakona raspriedielenija wriemieni wosstanowlenija na nadiežnost' dublirowannoj sistemi, Teorija nadiežnosti i massowe obslužiwanije, Izd. „Nauka”, Moskwa 1969, s. 37—45.
53. H. Weiher, Niezawodność urządzeń telekomunikacyjnych z ekonomicznego punktu widzenia, Przegląd zagadnień łączności, 1967, nr 4 (67).
54. E. L. Welker, Relationship Between Equipment Reliability Preventive Maintenance Policy, and Operating-Cost, Proceedings fifth national symposium on reliability and quality control. Philadelphia 1959.
55. O. Wing, P. Demetron, Analysis of Probabilistic Networks, Trans. IEEE COM-12, 1964, September, s. 38—48.
56. S. I. Zuchowickij, L. G. Awdiejewa, Liniejnoje i wypukłoje programmirowanije, Izd. „Nauka”, Moskwa 1967.
57. A. A. Zykw, Teorija koniecznych grafow, Izd. „Nauka”, Sibirskoje otdielenije, Nowosibirsk 1969.

B. S. BUTKIEWICZ

## RELIABILITY OF SYSTEMS WITH HIERARCHICAL STRUCTURE

### Summary

To describe in a mathematically precise way a structure of hierarchical systems the author defines the conception of a *hierarchical graph*. A hierarchical graph is an ordered four  $\langle W, G, I, H \rangle$ , where  $W$  is a finite set of vertex,  $G$  is a finite set of branches ( $W \cap G = \emptyset$ ),  $I$  is a three-argument relation defined for all ordered three  $\langle w(\alpha), g, w(\beta) \rangle$  of graph elements, for which  $w(\alpha), w(\beta) \in W$  and  $g \in G$ .  $I(w(\alpha), g, w(\beta))$  is read: branch  $g$  leads from vertex  $w(\alpha)$  to vertex  $w(\beta)$ . Set  $W$  was divided into subsets  $W(r)$  which are ordered according to their cardinal numbers. Function  $H$  is defined on the set of graph elements  $E = W \cup G$  with values in the set of natural numbers, see (2.13). Function  $H$  defines degrees of hierarchy of the elements. Relation  $I$  must fulfil (2.6) and special conditions:

1. there exists such a subset  $G' \subseteq G$  that for all  $g \in G'$  is accomplished (2.7) or (2.8) or (2.9),
2. every vertex is connected with no more than one vertex of higher degree of hierarchy, see (2.10),
3. every branch  $g \in G'' = G - G'$  joins only vertex with the same degree of hierarchy and is not directed, see (2.11) and (2.12).

If (2.14) occurs we will say that the vertex  $w(r, i)$  is submitted to a vertex  $w(r+m, j)$ . Weights of the elements are defined in the graph. Weight of the first degree vertex is equal to 1; weight of vertex which has no submitted first degree vertex is not defined; weight  $V(r, i)$  of vertex  $w(r, i)$  ( $r = 2, 3, \dots, q$ ) is equal to the sum of submitted vertex weights (2.15) if they are defined. The weights of branches  $g \in G'$  are defined by (2.17), and for  $g \in G''$  are not defined by the structure of the graph. Further it is allowed that the weights of all vertices and branches may be established on the basis of analysing the operations to be performed by the devices representing these vertices and branches.

The methods and algorithms for enumerating all elementary paths and calculating system reliability parameters are described in section 3. After analysing many works concerning the large systems with repair, (3.19) is allowed, i.e. reliability function of system element  $x(r, i)$  is exponential. For evaluating hierarchical system reliability criteria (3.39), (3.43), (3.44), (3.45), (3.46), (3.47) are proposed.

The optimization methods of system reliability are presented in section 4. Total annual cost is related to failure density of  $x(r, i)$  by (4.1). Relation (3.26) between failure density of elements and their weights as well as relation (4.8) between total annual costs of elements are assumed to be linear in this paper, but it is not necessary; they must be convex functions. Four problems are considered.

**Problem 1:** To find for each element  $x(r, i)$  the device of type  $u^*$  characterized by pair (4.14) among the set of devices of different types  $u$  (characterized by set of pairs (4.15)) in order to obtain the minimal value of convex objective function (4.13) subject to the linear constraint (4.16). Using the relation (3.26), (4.8) and (4.9) problem 1 may be reduced to problem 2.

**Problem 2:** To find the values  $k[x(r)]$  to obtain the minimal value of convex objective function (4.24) subject to the constraints (4.25) and (4.26). The number of variables in the problem 2 is  $2r_{\max} - 1$  only. To solving this problem the Kuhn-Tucker theorem and the Lagrange multipliers method are applied. The solution may be obtained from equations (4.34), (4.35) and (4.36). Among the pairs (4.15) for each  $x(r, i)$  we chose the pair closest to the pair calculated from (4.37) and (4.38). This is suboptimal solution of problem 1.

**Problem 3:** For each  $x(r, i)$  to find the value of  $\lambda[x(r, i)]$  to minimize the sum (4.39). The solution may be obtained from (4.40).

In this paper the structure optimization method is presented. The class of considered structures is restricted to the hierarchical graphs-trees. The devices of different types  $w(u)$ ,  $g(u)$ , their total annual costs  $K[w(u)]$ ,  $K[g(u)]$ , failure densities  $\lambda[w(u)]$ ,  $\lambda[g(u)]$  and numbers  $V(u)$ ,  $\Gamma(u)$  which denote their maximal weights in the system are given. Values  $K[g(u)]$  and  $\lambda[g(u)]$  depend on the length of devices  $g(u)$  and these relationships are known. Following problem is considered.

**Problem 4:** To find the optimal structure in the class of hierarchical trees and to pick the elements among given set of devices to obtain the minimal value of (4.42) subject to the constraint (4.43).

To solving this problem functions  $\xi, \Psi, \mathcal{L}, \mathcal{Y}$  approximating dependence of  $K$  and  $\lambda$  on  $V$  or  $\Gamma$  and  $l$  are introduced. From equations (4.51) we find optimal values  $l(q, r)$ , then calculating (4.48) for several  $q$  we find the optimal value  $q^*$ . Calculating the weights (4.45) and comparing them with given numbers  $V(u)$ ,  $\Gamma(u)$  we find a suboptimal solution of problem 4.

B. S. BUTKIEWICZ

## RELIABILITY DES SYSTÈMES A STRUCTURE HIÉRARCHIQUE

### Résumé

L'article présente les problèmes de la détermination de la hiérarchie dans un système ainsi que la définition du terme *le graphe hiérarchique*.

A partir de ces définitions on a présenté les méthodes de la calcul des paramètres de reliability des systèmes hiérarchiques. On a aussi traité le problème du montant des frais annuels pour les systèmes hié-

rarchiques. Ensuite on a présenté la méthode d'optimisation de la structure et des éléments, en prenant, dans l'ensemble des éléments fixé, ceux qui accomplissent les limitations du montant des frais annuels données.

B. S. BUTKIEWICZ

## ZUVERLÄSSIGKEIT DER SYSTEME MIT HIERARCHISCHER STRUKTUR

### Zusammenfassung

Es wurden hier die mit der Hierarchiebestimmung im System zusammenhängenden Probleme behandelt, und der Begriff eines *hierarchischen Graphen* definiert. Auf dieser Grundlage wurden Bestimmungsmethoden von Parametern hierarchischer Zuverlässigkeitssysteme erhalten. Diskutiert wurde das Problem voller, aus dem Hierarchiesystem entstehender Jahreskosten. Es wurde weiterhin Optimierungsmethoden von Hierarchiesystemen vom Gesichtspunkt einer Anpassung der Elemente an die vorgegebene Struktur bei vorgegebenen Begrenzungen erwogen, sowie vom Gesichtspunkt der Struktur- und Elementenwahl aus der festgesetzten Elementensammlung bei gegebenen Beschränkungen in Bezug auf die gesamten Jahreskosten dieses Systems.

Б. С. БУТКЕВИЧ

## НАДЕЖНОСТЬ СИСТЕМ С ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

### Резюме

В труде рассмотрены вопросы связанные с определением иерархии в системе и приведено определение понятия *иерархического графа*. На этом основании предложены методы определения параметров надежности иерархических систем. Обсужден вопрос суммарных годовых издержек на иерархическую систему. Приведен метод оптимизации иерархических систем с точки зрения подбора элементов к заданной структуре при определенных ограничениях и с точки зрения избрания структуры и элементов из данного множества элементов при определенных ограничениях касающихся суммарных годовых издержек на систему.



## Efektywna szybkość transmisji w systemach transmisji danych ze sprzężeniem zwrotnym decyzji

JERZY DRÓŹDŹ (WARSZAWA)

*Instytut Teleelektroniki Politechniki Warszawskiej*

Otrzymano 17.5.1973

Przedstawiono metodę analitycznego wyznaczania efektywnej szybkości transmisji w systemach transmisji danych ze sprzężeniem zwrotnym decyzji (*SZD*). Rozpatrzone zostały dwa warianty *SZD*, a mianowicie: system z naprzemiennym potwierdzeniem (*SNP*) oraz system z równoczesnym potwierdzeniem (*SRP*). Wykazano, że działanie omawianych systemów może być rozpatrywane jako realizacja procesu, którego matematycznym modelem jest jednorodny proces Markowa. W oparciu o wyniki analizy porównano sprawność obydwu systemów oraz dokonano oceny wpływu, jaki na efektywną szybkość transmisji mają parametry robocze systemów oraz warunki transmisji w kanale ziarnistym.

### 1. WPROWADZENIE

Ważnym parametrem każdego systemu transmisji danych jest efektywna szybkość transmisji  $v_{ef}$  definiowana jako średnia ilość informacji użytecznej przesyłanej przez system w ciągu sekundy przy założeniu, że źródło i ujście informacji nie stanowią czynników hamujących transmisję. Dla binarnych, synchronicznie pracujących systemów *TD*, w tym również dla systemów ze sprzężeniem zwrotnym decyzji (*SZD*) zachodzi:

$$v_{ef} = \eta v_m, \quad (1.1)$$

gdzie:

$v_m$  — szybkość modulacji wyrażana w bodach lub, co jest równoważne, w odstępach jednostkowych modulacji na sekundę,

$\eta$  — sprawność transmisji, równa średniej ilości informacji użytkowej przypadającej na jeden element sygnału, wyrażana w bitach na element.

Sprawność transmisji w systemie *SZD* uwarunkowana jest przez dwa czynniki, a mianowicie:

— współczynnik wykorzystania bloku  $R_b$ , definiowany jako:

$$R_b = \frac{k}{k+r+s} \quad (1.2)$$

oraz

— współczynnik powtarzania bloków  $R_p$  definiowany jako:

$$R_p = 1 - \frac{k+r+s}{v_m} v_{NB}, \quad (1.3)$$

gdzie:

$k$  — liczba elementów informacyjnych w bloku (informacja użytkowa),

$r$  — liczba elementów kontrolnych w bloku,

$s$  — liczba elementów służbowych w bloku,

$v_{NB}$  — częstość wysyłania nowych bloków<sup>1)</sup> przez nadajnik.

Związek pomiędzy sprawnością transmisji  $\eta$  a współczynnikami  $R_b$  i  $R_p$  wyraża wzór:

$$\eta = R_b(1 - R_p). \quad (1.4)$$

W realnych warunkach zachodzi zawsze:

$$0 < R_b < 1$$

oraz

$$0 \leq R_p \leq 1;$$

stąd zachodzi również:

$$0 \leq \eta < 1. \quad (1.5)$$

Na podstawie zależności (1.2) ÷ (1.4) otrzymuje się wzór:

$$\eta = \frac{k}{v_m} v_{NB} \quad (1.6)$$

obrazujący związek zachodzący pomiędzy sprawnością transmisji a niektórymi parametrami roboczymi systemu *SZD*.

W pracy przedstawiono metodę analitycznego wyznaczania wielkości  $\eta$  dla dwóch systemów *SZD*, a mianowicie dla:

— systemu z naprzemiennym potwierdzeniem (*SNP*),

— systemu z równoczesnym potwierdzeniem (*SRP*).

Zmiennymi niezależnymi w analizie są wielkości:

szybkość modulacji  $v_m$ ,

liczba elementów informacyjnych w bloku  $k$

oraz

elementowa stopa błędów pierwotnych dla:

kanału docelowego — oznaczana dalej  $p_d$ ,

kanału powrotnego — oznaczana dalej  $p_p$ .

## 2. ZAŁOŻENIA

Analiza została przeprowadzona przy następujących założeniach.

*Założenie Z1* — Rodzaj transmisji: transmisja synchroniczna, binarna.

*Założenie Z2* — Stopa błędów:

<sup>1)</sup> Pod pojęciem nowy blok należy rozumieć blok wysyłany po raz pierwszy.



$$p_d = p \quad \text{dla } SNP \text{ i } SRP, \quad (2.1)$$

$$p_p = \begin{cases} p & \text{dla } SNP, \\ 0 & \text{dla } SRP. \end{cases} \quad (2.2)$$

**Założenie Z3** — Stacjonarność błędów. Dla kanału docelowego i dla kanału powrotnego zachodzi:

$$P^{(i)} (\geq 1, N) = \text{const}(i), \quad (2.3)$$

gdzie:

$i$  — numer bloku transmitowanego w kanale,

$N$  — liczba elementów w bloku:

$$N = k + r + s, \quad (2.4)$$

$P(\geq 1, N)$  — prawdopodobieństwo pojawienia się co najmniej jednego błędu w bloku  $N$  — elementowym.

**Założenie Z2** wymaga komentarza.

W systemie *SNP* kanały: docelowy i powrotny tworzone są naprzemiennie w tym samym kanale fizycznym i mają te same nominalne parametry (pasmo częstotliwości, poziom sygnału nadawanego). Można więc przyjąć:  $p_p = p_d$  dla *SNP*.

W systemie *SRP* obydwie kanały pracują równocześnie, przy czym z reguły kanał powrotny tworzony jest poprzez wydzielenie na ten cel wąskiego pasma częstotliwości kanału fizycznego, w którym realizowany jest kanał docelowy. Z uwagi na różną szerokość pasm oraz odmienny kształt charakterystyk amplitudowych i fazowych obu kanałów szumy i zakłócenia mogą w niejednakowym stopniu wpływać na warunki transmisji w kanale docelowym i w kanale powrotnym, stąd zachodzi:  $p_p \neq p_d$  dla *SRP*.

W chwili obecnej brak danych statystycznych, które pozwoliłyby ocenić prawdopodobieństwo błędu w tak utworzonym wąskim kanale powrotnym. Można jednak, stosując odpowiednie reguły decyzyjne odbioru w kanale powrotnym, zminimalizować prawdopodobieństwo błędu końcowego w tym kanale, tak aby niepotrzebne powtórzenia spowodowane zniekształceniami sygnałów przesyłanych w kanale powrotnym stanowiły znikomą frakcję wszystkich retransmisji. Możliwość, o której mowa, wynika z faktu małego wykorzystania przepustowości kanału powrotnego<sup>2)</sup>. Uwzględniając powyższe należy oczekiwać, że przyjęcie założenia:  $p_p = 0$  w nieistotny sposób wpłynie na ilościowe wyniki analizy sprawności transmisji w systemie *SRP*. Warto przy tym dodać, że uwzględnienie faktu występowania błędów w kanale powrotnym nie zmienia metody analizy, prowadząc jedynie do niewielkiej, ilościowej rozbudowy przyjętego modelu matematycznego.

**Założenie Z3** zasługuje na podkreślenie z uwagi na swój ogólny charakter. Postuluje ono mianowicie stacjonarność błędów tylko w odniesieniu do błędów blokowych. Uwzględniając płynące stąd ograniczenia można więc zastosować dowolny model matematyczny dla opisu procesu generowania błędów elementowych w kanale ziarnistym.

<sup>2)</sup> W znormalizowanym przez Zalecenie V41 CCITT systemie *SRP* pracującym z szybkością modulacji 1200 bodów i długością bloku 260 elementów wykorzystanie przepustowości kanału powrotnego nie przekracza 7%.

### 3. SYSTEM SNP

#### 3.1. Charakterystyka systemu

System SNP pracuje naprzemiennie. Po przesłaniu bloku z danymi odwracany jest kierunek transmisji, a następnie tym samym kanałem przesyłane są sygnały mające sens decyzji *akceptuję* lub *powtórz*.

Po odebraniu przez nadajnik sygnału *akceptuję* przesyłany jest następny blok informacyjny. Po odebraniu sygnału *powtórz* następuje retransmisja bloku.

System *SNP* ma następujące zalety:

- umożliwia pracę ze zmienną długością bloku (zmienne  $k$ ),
- nie wymaga stosowania oddzielnego kanału dla przesyłania sygnałów decyzyjnych,
- z uwagi na naprzemienny sposób pracy jest szczególnie przydatny do zastosowań w konwersacyjnych systemach teleinformatycznych.

Algorytmicznym odpowiednikiem *SNP* jest system IBM 2770 [1]. W systemie tym w celu eliminacji skutków błędów w kanale powrotnym, stosowana jest binarna numeracja decyzji *akceptuję*. Przedsięwzięte są również środki umożliwiające bezawaryjne kontynuowanie transmisji w przypadku niewłaściwej lub niezrozumiałej odpowiedzi, a także w przypadku braku odpowiedzi odbiornika (przesyłanie bloków zapytania o odpowiedź). W dalszym ciągu podane zostaną podstawowe informacje wyjaśniające bliżej zasadę działania omawianego systemu.

##### 3.1.1. Znaki sterujące

Do sterowania transmisji wykorzystywane są, między innymi, następujące znaki grupy *TC* kodu *ISO—7*:

- SYN* — synchronizacja,
- STX* — początek tekstu,
- ETB* — koniec bloku,
- ACK 0* — parzysta odpowiedź pozytywna (duoznak),
- ACK 1* — nieparzysta            „        „        „
- NAK* — odpowiedź negatywna,
- ENQ* — zapytanie o odpowiedź.

Znaki sterujące posiadają ósmy element kontroli parzystości.

##### 3.1.2. Synchronizacja

Po każdej zmianie kierunku transmisji pierwszymi sygnałami przesyłanymi w kanale są:

*CS* — 32-elementowy ciąg synchronizacyjny złożony z naprzemian występujących jedynek i zer oraz

2 znaki *SYN*.

Sygnał *CS* służy do celów synchronizacji elementowej, znaki *SYN* zaś — do celów synchronizacji blokowej. Bezбłędne odebranie obydwu znaków *SYN* jest warunkiem koniecznym dla rozpoczęcia analizy dalszych sygnałów przez stację aktualnie odbierającą.

## 3.1.3. Rodzaje bloków

W czasie transmisji przesyłane są następujące rodzaje bloków:  
w kanale docelowym:

*BI* — blok informacyjny,

*BZO* — blok zapytania o odpowiedź,

*BPZO* — blok późnego zapytania o odpowiedź;

w kanale powrotnym:

*BOP* — blok odpowiedzi pozytywnej (parzystej lub nieparzystej),

*BON* — blok odpowiedzi negatywnej.

Bloki *BZO* i *BPZO* wysyłane są w następujących przypadkach:

*BZO* — po odebraniu przez nadajnik niezrozumiałej odpowiedzi,

*BPZO* — jeśli nadajnik nie odbierze żadnej odpowiedzi w ustalonym czasie  $T_r$ , zwanym dalej czasem krytycznym nadajnika.

Dla dalszych rozważań wygodne jest przyjęcie następujących oznaczeń:

*B1* — blok *BI* wysyłany po raz pierwszy,

*B2* — powtarzany blok *BI*,

*B3* — blok *BZO*,

*B4* — blok *BPZO*,

*B5* — blok *BOP*,

*B6* — blok *BON*.

## 3.1.4. Budowa bloków

Bloki informacyjne *B1* i *B2* składają się z sekwencyjnie połączonych:

*CS, SYN, SYN, STX, CI, ETB, CK,*

gdzie:

*CI* —  $k$ -elementowy ciąg informacyjny,

*CK* —  $r$ -elementowy ciąg kontrolny.

Liczba elementów w blokach informacyjnych *B1* i *B2* wynosi odpowiednio:

$$N_1 = N_2 = k + r + 64. \quad (3.1)$$

Bloki zapytania o odpowiedzi *B3* i *B4* składają się z sekwencyjnie połączonych:

*CS, SYN, SYN, ENQ.*

Liczba elementów w blokach zapytania o odpowiedzi wynosi:

$$N_3 = N_4 = 56. \quad (3.2)$$

Blok odpowiedzi pozytywnej *B5* składa się z sekwencyjnie połączonych:

*CS, SYN, SYN, ACK, 0*    lub    *1.*

Liczba elementów w bloku *B5* wynosi:

$$N_5 = 64. \quad (3.3)$$

Blok odpowiedzi negatywnej  $B_6$  składa się z sekwencyjnie połączonych:

$CS, SYN, SYN, NAK$ .

Liczba elementów w bloku  $B_6$  wynosi:

$$N_6 = 56. \quad (3.4)$$

### 3.1.5. Klasyfikacja błędów

Ze względu na skutki rozróżnić należy następujące typy błędów  $\beta_i$  mogących wystąpić podczas transmisji bloku  $j$ -go rodzaju:

$\beta_1$  — błąd w znakach  $SYN, STX$  lub  $ETB$  bloku  $B_1$  lub  $B_2$ ,

$\beta_2$  — błąd w ciągach  $CI$  i  $CK$  bloku  $B_1$  lub  $B_2$ ,

$\beta_3$  — błąd w znakach  $SYN$  lub  $ENQ$  bloku  $B_3$  lub  $B_4$ ,

$\beta_4$  — błąd w znakach  $SYN$  bloku  $B_5$  lub  $B_6$ ,

$\beta_5$  — błąd w grupach znaków  $ACK 0$  lub  $ACK 1$  bloku  $B_5$ ,

$\beta_6$  — błąd w znaku  $NAK$  bloku  $B_6$ .

Uzasadnionym jest przyjąć założenie, że błędy występujące w ciągu synchronizacyjnym  $CS$  nie mają praktycznie wpływu na działanie systemu.

### 3.1.6. Algorytm sterowania

Algorytm sterowania  $SNP$  określają trzy następujące reguły.

**Reguła R1.** Reakcja odbiornika na błędy typu  $\beta_1$  i  $\beta_2$  w bloku informacyjnym jest zgodna z treścią tablicy 1.

Tablica 1

Reakcja odbiornika na błędy w  $B_1$  i  $B_2$

| Wystąpił błąd typu |           | Odbiornik wysyła |
|--------------------|-----------|------------------|
| $\beta_1$          | $\beta_2$ |                  |
| NIE                | NIE       | $B_5$            |
| TAK                | ×         | nic              |
| NIE                | TAK       | $B_6$            |

× — błąd nie wpływa na reakcję odbiornika

Tablica 2

Reakcja odbiornika na błędy w  $B_3$  i  $B_4$

| Wystąpił błąd typu $\beta_3$ | Odbiornik wysyła             |
|------------------------------|------------------------------|
| NIE                          | powtórnie ostatnią odpowiedź |
| TAK                          | nic                          |

**Reguła R2.** Reakcja odbiornika na błędy typu  $\beta_3$  w bloku zapytania o odpowiedź jest zgodna z treścią tablicy 2.

**Reguła R3.** Reakcja nadajnika na błędy typu  $\beta_4$ ,  $\beta_5$  i  $\beta_6$  w bloku odpowiedzi jest zgodna z treścią tablicy 3.

Tablica 3

Reakcja nadajnika na błędy w B5 i B6

| Wystąpił błąd typu |                         | Nadajnik wysyła                                |
|--------------------|-------------------------|------------------------------------------------|
| $\beta_4$          | $\beta_5$ lub $\beta_6$ |                                                |
| NIE                | NIE                     | B1 — jeśli odebrał B5<br>B2 — jeśli odebrał B6 |
| TAK                | ×                       | B4                                             |
| NIE                | TAK                     | B3                                             |

\* — błąd nie wpływa na reakcję nadajnika

### 3.2. Matematyczny model działania SNP

Efektywna szybkość transmisji  $v_{ef}$  systemu SNP w bardzo istotny sposób zależy od warunków transmisji w kanale docelowym i w kanale powrotnym. Ze względu na przypadkowy charakter zjawisk będących przyczyną powstawania błędów w kanałach do analizy  $v_{ef}$  wygodnie jest użyć metod probabilistycznych. Dalsze rozważania prowadzą do wniosku, że matematycznym modelem pozwalającym określić zależność pomiędzy warunkami transmisji w kanałach docelowym i powrotnym a efektywną szybkością transmisji systemu SNP jest jednorodny proces Markowa.

#### 3.2.1. Formalizacja problemu

Efektywna szybkość transmisji  $v_{ef}$  jest ściśle związana z częstością  $\nu_{NB}$  wysyłania przez nadajnik nowych bloków informacyjnych (patrz wzór 1.6). Wygodnie jest w związku z tym odnieść wszystkie dalsze rozważania do stanów nadajnika powiązanych w sposób wzajemnie jednoznaczny z rodzajem aktualnie wysyłanego bloku.

Wprowadza się pojęcia  $j$ -go stanu nadajnika  $E_j$  oraz  $i$ -go kroku  $K^{(i)}$  zdefiniowane następująco:

$E_j \triangleq$  stan nadajnika związany z wysyłaniem bloku  $j$ -go rodzaju, gdzie:

$j = 1, 2, \dots, \kappa$ ,

$\kappa = 4$ , liczba stanów nadajnika,

$K_i^{(i)} \triangleq$  całość procesów realizowanych w układzie: nadajnik-odbiornik-nadajnik w związku z jednorazową transmisją  $i$ -go bloku w kanale docelowym.

Wprowadza się ponadto następujące oznaczenia i terminologię.

Zamiast słowa *nadajnik* będzie używane wymienne słowo *układ*.

Zdarzenie polegające na wysyłaniu przez nadajnik w  $i$ -tym kroku bloku  $j$ -go rodzaju oznaczane będzie:

$$E_j^{(i)}$$

i wyrażane słownie: w  $i$ -tym kroku układ znajduje się w stanie  $E$ .

Zdarzenie polegające na wysyłaniu przez nadajnik w  $i$ -tym kroku bloku  $k$ -go rodzaju przy warunku, że w  $(i-1)$ -szym kroku nadajnik wysłał blok  $j$ -go rodzaju oznaczane będzie:

$$E_j^{(i-1)} \rightarrow E_k^{(i)}$$

i wyrażane słownie: w  $i$ -tym kroku układ przeszedł ze stanu  $E_j$  do stanu  $E_k$ .

Prawdopodobieństwa zdarzeń, o których mowa wyżej oznaczane będą odpowiednio:

$$P(E_j^{(i)} = p_j^{(i)}), \quad (3.5)$$

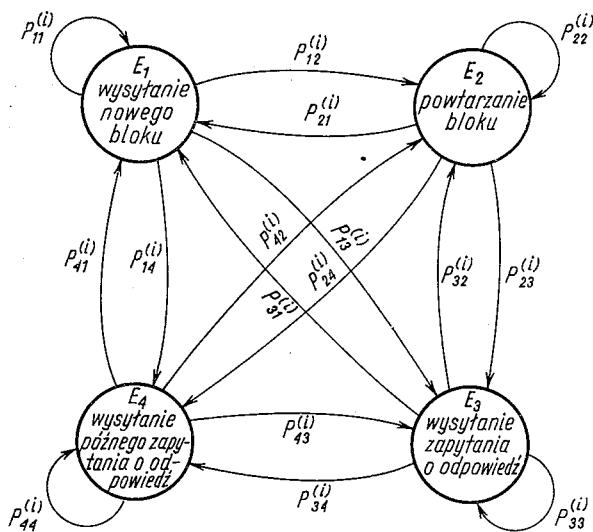
$$P(E_j^{(i-1)} \rightarrow E_k^{(i)}) = p_{jk}^{(i)} \quad (3.6)$$

i nazywane:

$p_j^{(i)}$  — prawdopodobieństwo znalezienia się układu w  $i$ -tym kroku w stanie  $E_j$ ,

$p_{jk}^{(i)}$  — prawdopodobieństwo przejścia układu w  $i$ -tym kroku ze stanu  $E_j$  do stanu  $E_k$ .

Stosując wyżej przyjętą terminologię, działanie systemu *SNP* można analizować w oparciu o matematyczny model, jak na rys. 1.



Rys. 1. Matematyczny model działania systemu *SNP*

### 3.2.2. Działanie *SNP* jako proces Markowa

Układ modelujący działanie *SNP* realizuje proces o następujących ważnych właściwościach.

**Właściwość W1.** W dowolnym momencie (w dowolnym kroku) układ znajduje się w jednym z wzajemnie wykluczających się stanów  $E_j$ :

$$j = 1, 2, 3, 4.$$

**Właściwość W2.** Jeżeli w  $(i-1)$ -szym kroku układ znajdował się w stanie  $E_j$ , to zachowanie układu w  $i$ -tym kroku jest jednoznacznie określone przez wartości  $p_{jk}^{(i)}$ ;  $j, k = 1, 2, 3, 4$ .

W teorii prawdopodobieństwa proces taki nazywany jest błędzeniem przypadkowym. W dalszym ciągu zbadane zostaną właściwości prawdopodobieństw  $p_{jk}^{(i)}$ , co pozwoli bliżej określić charakter błędzenia przypadkowego dla *SNP*.

Analizując dokładniej reguły R1÷R3 opisujące algorytm sterowania *SNP* łatwo stwierdzić, że zachowanie układu w  $i$ -tym kroku zdeterminowane jest przez:

- stan układu w  $(i-1)$ -ym kroku,
  - błędy  $\beta_i$  powstałe w trakcie realizacji  $i$ -go kroku,
  - odpowiedź, jaką ostatnio wysłał odbiornik (tylko w odniesieniu do stanów  $E_3$  i  $E_4$ ).
- Sytuacje, jakie mogą zaistnieć podczas realizacji  $i$ -go kroku, przedstawione zostały w tablicy 4.

Tablica 4

Możliwe sytuacje podczas realizacji  $i$ -go kroku

|    | Stan układu po $(i-1)$ -szym kroku | W $i$ -tym kroku wystąpił błąd typu |           |           |           |           |           | Ostatnia odpowiedź odbiornika | Stan układu po $i$ -tym krok |
|----|------------------------------------|-------------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------------------------|------------------------------|
|    |                                    | $\beta_1$                           | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ | $\beta_5$ | $\beta_6$ |                               |                              |
| 1  | $E_1$ lub $E_2$                    | NIE                                 | NIE       | —         | NIE       | NIE       | —         | ×                             | $E_1$                        |
| 2  | „                                  | NIE                                 | TAK       | —         | NIE       | —         | NIE       | ×                             | $E_2$                        |
| 3  | „                                  | NIE                                 | NIE       | —         | NIE       | TAK       | —         | ×                             | $E_3$                        |
| 4  | „                                  | NIE                                 | TAK       | —         | NIE       | —         | TAK       | ×                             | „                            |
| 5  | „                                  | TAK                                 | ×         | —         | —         | —         | —         | ×                             | $E_4$                        |
| 6  | „                                  | NIE                                 | NIE       | —         | TAK       | ×         | —         | ×                             | „                            |
| 7  | „                                  | NIE                                 | TAK       | —         | TAK       | —         | ×         | ×                             | „                            |
| 8  | $E_3$ lub $E_4$                    | —                                   | —         | NIE       | NIE       | NIE       | —         | ACK                           | $E_1$                        |
| 9  | „                                  | —                                   | —         | NIE       | NIE       | —         | NIE       | NAK                           | $E_2$                        |
| 10 | „                                  | —                                   | —         | NIE       | NIE       | TAK       | —         | ACK                           | $E_3$                        |
| 11 | „                                  | —                                   | —         | NIE       | NIE       | —         | TAK       | NAK                           | „                            |
| 12 | „                                  | —                                   | —         | TAK       | —         | —         | —         | ×                             | $E_4$                        |
| 13 | „                                  | —                                   | —         | NIE       | TAK       | ×         | —         | ACK                           | „                            |
| 14 | „                                  | —                                   | —         | NIE       | TAK       | —         | ×         | NAK                           | „                            |

— bez znaczenia

Z treści tablicy 4 wynikają następujące wnioski:

1. dla  $k = 1, 2, 3, 4$  zachodzą związki:

$$p_{2k}^{(i)} = p_{1k}^{(i)}$$

oraz

(3.7)

$$p_{4k}^{(i)} = p_{3k}^{(i)};$$

2. zachowanie układu w  $i$ -tym kroku nie zależy od stanów układu w krokach poprzedzających krok  $(i-1)$ -szy,
3. dla  $j = 3, 4$  zachowanie układu uzależnione jest od ostatniej odpowiedzi odbiornika

Ostatnia zależność (wniosek 3) może być kłopotliwa przy wykonywaniu obliczeń. Niedogodności tej można pozbyć się zauważając, że dla  $j = 3, 4$  musi zachodzić oczywiście:

$$\frac{p_{j1}^{(i)}}{p_{j2}^{(i)}} = \frac{1 - P(\beta_2)}{P(\beta_2)} \quad (3.8)$$

oraz

$$P(\beta_5/ACK \cup \beta_6/NAK) = [1 - P(\beta_2)]P(\beta_5) + P(\beta_2)P(\beta_6), \quad (3.9)$$

gdzie:

$P^{(i)}(\beta_l)$  — prawdopodobieństwo wystąpienia błędu  $l$ -go typu podczas realizacji  $i$ -go kroku,

$P(\beta_5/ACK \cup \beta_6/NAK)$  — prawdopodobieństwo całkowite niezrozumiałej odpowiedzi odbiornika.

Uwzględniając powyższe oraz że na mocy założenia Z3 zachodzi

$$P^{(i)}(\beta_l) = \text{const}(i), \quad (3.10)$$

można postulować spełnienie następujących dwóch ważnych właściwości przez prawdopodobieństwa  $p_{jk}^{(i)}$  dla SNP.

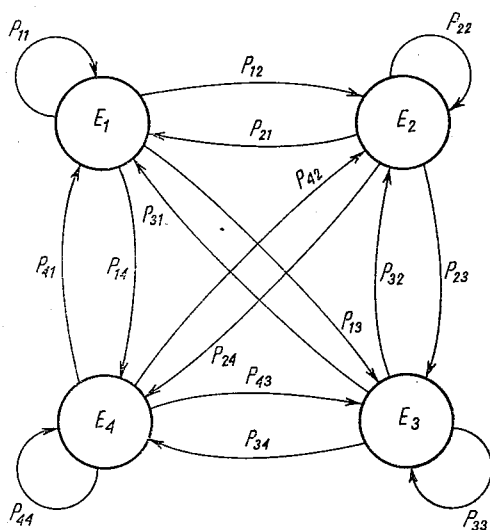
**Właściwość W3.** Dla dowolnie wybranych, lecz ustalonych,  $j, k$  prawdopodobieństwa  $p_{jk}^{(i)}$  nie zależą od drogi, jaką układ doszedł do stanu  $E_j$ , to znaczy dla  $j, k = 1, 2, 3, 4$  i dowolnych  $E_{\lambda 1}, E_{\lambda 2}, \dots$  zachodzi:

$$P(\dots E_{\lambda 2}^{(i-3)} \rightarrow E_{\lambda 1}^{(i-2)} \rightarrow E_j^{(i-1)} \rightarrow E_k^{(i)}) = P(E_j^{(i-1)} \rightarrow E_k^{(i)}). \quad (3.11)$$

**Właściwość W4.** Dla dowolnie wybranych, lecz ustalonych,  $j, k$  prawdopodobieństwa  $p_{jk}^{(i)}$  zależą tylko od numerów  $j, k$ , nie zależą natomiast od numeru kroku  $i$ :

$$p_{jk}^{(i)} = \text{const}(i), \quad (3.12)$$

$$j, k = 1, 2, 3, 4.$$



Rys. 2. Jednorodny proces Markowa dla SNP



Spełnienie właściwości (3.12) oznacza stacjonarność prawdopodobieństw  $p_{jk}^{(0)}$ . W dalszym ciągu prawdopodobieństwa te oznaczane będą symbolem  $p_{jk}$  i nazywane prawdopodobieństwami przejść (w jednym kroku).

Każdy proces, dla którego spełnione jest (3.11) jest procesem Markowa. Każdy proces Markowa, dla którego zachodzi (3.12) jest jednorodny. Wynika stąd wniosek, że matematycznym modelem opisującym działanie *SNP* jest jednorodny proces Markowa (rys. 2).

### 3.2.3. Ergodyczność procesu

Jednorodny proces Markowa opisujący działanie *SNP* jest w dowolnym momencie (kroku) całkowicie określony przez macierz **M** prawdopodobieństw przejść  $p_{jk}$ :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

oraz prawdopodobieństwa

$$P_0(E_j) = a_j; j = 1, 2, 3, 4 \quad (3.14)$$

znalezienia się układu w chwili początkowej w stanie  $E_j$ .

Obecnie wykazane zostanie, że do analizowanego procesu stosuje się twierdzenie Markowa o prawdopodobieństwach granicznych (ergodycznych), tzn. że istnieją takie  $p_j$ , że dla dowolnego  $k = 1, 2, 3, 4$  zachodzi:

$$p_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{kj}(n), \quad (3.15)$$

gdzie  $p_{kj}(n)$  — prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że układ startując ze stanu  $E_k$  znajdzie się po raz pierwszy w stanie  $E_j$  dokładnie po  $n$  krokach.

Istotnie, jeśli pominąć trywialny przypadek

$$p = 0,$$

to dla wszystkich  $l = 1, 2, \dots, 6$  zachodzi nierówność

$$P(\beta_l) > 0, \quad (3.16)$$

co, zgodnie z treścią tablicy 4, pociąga za sobą:

$$p_{jk} > 0 \quad (3.17)$$

dla dowolnych  $j, k = 1, 2, 3, 4$ .

Spełnienie nierówności (3.17) jest warunkiem wystarczającym [2] dla istnienia  $p_j$  danych przez (3.15).

Z teorii jednorodnych procesów Markowa [2] wiadomo ponadto, że stacjonarność  $p_{jk}$  (wzór 3.12) pociąga za sobą natychmiast:

$$a_j = p_j. \quad (3.18)$$

Prawdopodobieństwa graniczne  $p_j$  wyznacza się z następujących zależności:

$$p_j = \sum_{k=1}^{\varkappa} p_{kj} p_k \quad (3.19)$$

oraz

$$\sum_{j=1}^{\varkappa} p_j = 1, \quad (3.20)$$

gdzie dla przypomnienia  $\varkappa = 4$ , liczba stanów układu.

### 3.3. Wyznaczanie prawdopodobieństw $p_{jk}$ i $p_j$

Wartości prawdopodobieństw  $p_{jk}$  dla  $j = 1, 3$  wyznacza się korzystając z tablicy 4 przy uwzględnieniu zależności (3.8) i (3.9). W wyniku otrzymuje się wzory:

$$p_{11} = [1 - P(\beta_1)] [1 - P(\beta_2)] [1 - P(\beta_4)] [1 - P(\beta_5)], \quad (3.21)$$

$$p_{12} = [1 - P(\beta_1)] P(\beta_2) [1 - P(\beta_4)] [1 - P(\beta_6)], \quad (3.22)$$

$$p_{13} = [1 - P(\beta_1)] [1 - P(\beta_4)] \{P(\beta_2) P(\beta_6) + [1 - P(\beta_2)] P(\beta_5)\}, \quad (3.23)$$

$$p_{14} = P(\beta_1) + [1 - P(\beta_1)] P(\beta_4), \quad (3.24)$$

$$p_{31} = [1 - P(\beta_3)] [1 - P(\beta_2)] [1 - P(\beta_4)] [1 - P(\beta_5)], \quad (3.25)$$

$$p_{32} = [1 - P(\beta_3)] P(\beta_2) [1 - P(\beta_4)] [1 - P(\beta_6)], \quad (3.26)$$

$$p_{33} = [1 - P(\beta_3)] [1 - P(\beta_4)] \{P(\beta_2) P(\beta_6) + [1 - P(\beta_2)] P(\beta_5)\}, \quad (3.27)$$

$$p_{34} = P(\beta_3) + [1 - P(\beta_3)] P(\beta_4). \quad (3.28)$$

Wartości prawdopodobieństw  $p_{jk}$  dla  $j = 2, 4$  oblicza się uwzględniając (3.7).

Oczywiście dla  $j = 1, 2, \dots, \varkappa$  zachodzi:

$$\sum_{k=1}^{\varkappa} p_{jk} = 1, \quad (3.29)$$

gdzie  $\varkappa$  — liczba stanów układu.

Prawdopodobieństwa  $p_j$  wyznacza się z zależności (3.19) i (3.20). Wprowadzając oznaczenie:

$$A = p_1 + p_2, \quad (3.30)$$

można układ równań (3.19) przekształcić do postaci:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_{11} A + p_{31} (1 - A), \\ p_2 &= p_{12} A + p_{32} (1 - A), \\ p_3 &= p_{13} A + p_{33} (1 - A), \\ p_4 &= p_{14} A + p_{34} (1 - A). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dodając stronami dwa pierwsze równania (3.31) otrzymuje się:

$$A = \frac{p_{31} + p_{32}}{p_{13} + p_{14} + p_{31} + p_{32}}. \quad (3.32)$$

Wzory (3.31) i (3.32) pozwalają wyznaczyć szukane wartości  $p_j$  dla  $j = 1, 2, 3, 4$  na podstawie wartości  $p_{jk}$  danych wzorami (3.21 ÷ (3.28).

### 3.4. Zależności czasowe SNP

Wprowadza się następujące oznaczenia:

- $T_I$  — czas trwania bloku informacyjnego  $B1$  lub  $B2$ ,  
 $T_p$  — „ „ „ odpowiedzi pozytywnej  $B5$ ,  
 $T_n$  — czas trwania bloku odpowiedzi negatywnej  $B6$ ,  
 $T_z$  — „ „ „ zapytania o odpowiedź  $B3$  lub  $B4$ ,  
 $T_r$  — krytyczny czas nadajnika,  
 $\tau_{no}$  — czas przełączenia kierunku transmisji z nadawania na odbiór,  
 $\tau_{on}$  — czas przełączenia kierunku transmisji z odbioru na nadawanie,  
 $\tau = \tau_{no} + \tau_{on}$ ,  
 $\tau_{KD}$  — czas propagacji sygnału w kanale docelowym,  
 $\tau_{KP}$  — „ „ „ „ „ powrotnym,  
 $\tau_p = \tau_{KD} + \tau_{KP}$  — czas opóźnienia pętli: nadajnik-odbiornik-nadajnik.

Stosując powyższe oznaczenia i korzystając z reguł  $R1 \div R3$  można dla dowolnych  $j, k = 1, 2, 3, 4$  wyznaczyć czas  $T_{jk}$  trwania kroku, w którym układ przeszedł ze stanu  $E_j$  do stanu  $E_k$ . Wartości czasów  $T_{jk}$  zamieszczone są w tablicy 5.

W tablicy 5 występuje 6 rodzajów kroków, różniących się od siebie czasem trwania. W dalszej analizie przyjęte zostanie upraszczające założenie:

$$T_p = T_n = T_z. \quad (3.33)$$

Przyjęcie założenia (3.33) w nieistotny sposób wpływa na dokładność obliczeń, pozwala natomiast zmniejszyć liczbę rodzajów kroków do czterech.

Tablica 5

Wartości  $T_{jk}$  czasów trwania kroku związanego z przejściem układu ze stanu  $E_j$  do stanu  $E_k$

| $j \backslash k$ | 1                           | 2                           | 3                           | 4                  |
|------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|--------------------|
| 1                | $T_I + T_p + \tau_p + \tau$ | $T_I + T_n + \tau_p + \tau$ | $T_I + T_p + \tau_p + \tau$ | $T_I + T_r + \tau$ |
| 2                | $T_I + T_p + \tau_p + \tau$ | $T_I + T_n + \tau_p + \tau$ | $T_I + T_p + \tau_p + \tau$ | $T_I + T_r + \tau$ |
| 3                | $T_z + T_p + \tau_p + \tau$ | $T_z + T_n + \tau_p + \tau$ | $T_z + T_p + \tau_p + \tau$ | $T_z + T_r + \tau$ |
| 4                | $T_z + T_p + \tau_p + \tau$ | $T_z + T_n + \tau_p + \tau$ | $T_z + T_p + \tau_p + \tau$ | $T_z + T_r + \tau$ |

Oznaczając przez:  $K_\mu$  —  $\mu$ -ty rodzaj kroku oraz przez:  $t_\mu$  — czas trwania  $\mu$ -tego kroku, otrzymuje się wartości  $t_\mu$  dla  $\mu = 1, 2, 3, 4$  jak w tablicy 6.

Z treści tablicy 6 wynikają następujące związki pomiędzy wielkościami  $T_{jk}$  i  $t_\mu$ :

$$T_{1k} = T_{2k} = \begin{cases} t_1 & \text{dla } k = 1, 2, 3, \\ t_2 & \text{dla } k = 4 \end{cases} \quad (3.34)$$

oraz

$$T_{3k} = T_{4k} = \begin{cases} t_3 & \text{dla } k = 1, 2, 3, \\ t_4 & \text{dla } k = 4. \end{cases} \quad (3.35)$$

Znając wartości  $T_{jk}$  można wyznaczyć średni czas trwania  $T_j$  kroku związanego z wysyłaniem przez nadajnik bloku  $j$ -go rodzaju:

$$T_j = \sum_{k=1}^x p_{jk} T_{jk}, \quad (3.36)$$

Tablica 6

Warunki realizacji kroków  $K_\mu$  oraz wartości  $t_\mu$

| $K_\mu$ | Stan układu<br>w $(i-1)$ -szym kroku | Stan układu<br>w $i$ -tym kroku | $t_\mu$                     |
|---------|--------------------------------------|---------------------------------|-----------------------------|
| $K_1$   | $E_1$ lub $E_2$                      | $E_1$ lub $E_2$ lub $E_3$       | $T_I + T_p + \tau_p + \tau$ |
| $K_2$   | $E_1$ lub $E_2$                      | $E_4$                           | $T_I + T_r + \tau$          |
| $K_3$   | $E_3$ lub $E_4$                      | $E_1$ lub $E_2$ lub $E_3$       | $2T_p + \tau_p + \tau$      |
| $K_4$   | $E_3$ lub $E_4$                      | $E_4$                           | $T_p + T_r + \tau$          |

przy czym z (3.7), (3.34) i (3.35) wynika natychmiast:

$$T_1 = T_2 \quad (3.37)$$

oraz

$$T_3 = T_4. \quad (3.38)$$

Średni czas trwania kroku w systemie *SNP* wyniesie:

$$T_s = E(T_j) = \sum_{j=1}^x p_j T_j. \quad (3.39)$$

Korzystając z (4.28), (5.5) i (5.6) można przedstawić ostatni wzór w dogodniejszej do obliczeń postaci:

$$T_s = AT_1 + (1-A)T_3. \quad (3.40)$$

Wartości  $T_1$  i  $T_3$  wyznacza się z zależności (3.36) podstawiając odpowiednie wartości  $t_\mu$  z tablicy 5 oraz  $x = 4$ . W wyniku otrzymuje się:

$$T_1 = T_I + T_p + \tau_p + \tau + p_{14}(T_r - T_p - \tau_p) \quad (3.41)$$

oraz

$$T_3 = 2T_p + \tau_p + \tau + p_{34}(T_r - T_p - \tau_p). \quad (3.42)$$

Biorąc pod uwagę, że:

1. częstość wysyłania nowych bloków  $v_{NB}$  w systemie *SNP* jest wprost proporcjonalna do  $P(E_1^{(l)})$  i odwrotnie proporcjonalna do średniej długości kroku  $T_s$ ,
2. dla dostatecznie dużej liczby kroków na mocy (3.18) zachodzi równość

$$P(E_j^{(l)}) = p_j,$$

otrzymuje się:

$$v_{NB} = \frac{p_1}{T_s}. \quad (3.43)$$

Podstawiając (3.43) do (1.6) otrzymuje się szukaną wielkość  $\eta_{SNP}$ :

$$\eta_{SNP} = \frac{k}{V_m} \frac{p_{11}}{T_s}. \quad (3.44)$$

Korzystając z zależności (3.30), (3.31) i (3.40) można ostatni wzór przekształcić do dogodniejszej dla obliczeń postaci:

$$\eta_{SNP} = \frac{k(p_{11} + p_{31}B)}{v_m(T_1 + T_3B)}, \quad (3.45)$$

gdzie

$$B = \frac{p_{13} + p_{14}}{p_{31} + p_{32}}. \quad (3.46)$$

Wzory (3.45) i (3.46) łącznie z wzorami (3.21)–(3.28) na  $p_{jk}$  oraz wzorami (3.41) i (3.42) na  $T_1$  i  $T_3$  pozwalają wyznaczyć  $\eta_{SNP}$  przy zadanych wartościach  $k, r, s, p, v_m, \tau$  i  $\tau_p$ .

Dla bardzo dobrych kanałów można obliczyć asymptotyczną wartość  $\eta_{SNP}$  korzystając z wzoru:

$$\eta_{SNP}(p=0) = \frac{k}{k+r+s+64+(\tau_p+\tau)v_m}, \quad (3.47)$$

gdyż, jak łatwo zauważyć, zachodzą następujące związki:

$$\lim_{p \rightarrow 0} P(\beta_l) = 0, \quad \text{dla } l = 1, 2, \dots, 6,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} p_{11} = 1,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} B = 0,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} T_1 = t_1 = \frac{k+r+s+64}{v_m} + \tau_p + \tau.$$

#### 4. SYSTEM SRP

##### 4.1. Charakterystyka systemu -

W systemie *SRP* realizowana jest jednoczesna transmisja bloków informacyjnych — w kanale docelowym oraz sygnałów *akceptuję* lub *powtórz* — w kanale powrotnym.

Charakterystyczną wielkością omawianego systemu jest cykl powtarzania  $q$  definiowany jako liczba bloków przesyłanych podczas jednej retransmisji. Dla systemów *SRP* z niekodowanym kanałem powrotnym<sup>3)</sup> wielkość  $q$  związana jest z czasem  $T_I$  trwania bloku informacyjnego, czasem  $\tau_d$  podejmowania decyzji o sygnale powrotnym, czasem  $\tau_M$  opóźnienia modemów oraz czasem  $\tau_p$  opóźnienia pętli nierównością:

$$(q-2)T_I \leq \tau_p + \tau_d + \tau_M \leq (q-1)T_I. \quad (4.1)$$

Przy zadanym  $q$  nierówność (4.1) pozwala wyznaczyć graniczne wartości  $\tau_p$ , a więc zasięg działania systemu. W szczególności dla  $q = 2$  otrzymuje się:

$$0 \leq \tau_p \leq T_I - \tau_d - \tau_M. \quad (4.2)$$

System pracuje z ustaloną (niekiedy przełączaną) długością bloku. Blok składa się z reguły z sekwencyjnego połączenia:

- informacji służbowej —  $s$  elementów,
- ciągu informacyjnego  $CI$  —  $k$  elementów,
- ciągu kontrolnego  $CK$  —  $r$  elementów,

podobnie jak dla *SNP* zachodzi więc:

$$N = k + r + s. \quad (4.3)$$

Synchronizacja ustalana jest jednorazowo przed rozpoczęciem właściwej transmisji, a następnie podtrzymywana w czasie transmisji, najczęściej na zasadzie skokowej korekcji fazy elementowej skali odbiornika. Kanał powrotny nie musi być na ogół synchronizowany. W niektórych rozwiązaniach zapewnia się możliwość odzyskiwania synchronizacji utraconej w czasie transmisji bez konieczności wznowiania transmisji od początku (resynchronizacja).

Algorytm sterowania *SRP* jest następujący. Podczas wysyłania  $i$ -tego bloku w kanale docelowym, nadajnik odbiera w kanale powrotnym decyzję odbiornika o  $(i-q+1)$ -szym bloku. W przypadku decyzji *akceptuję* wysyłany jest następny,  $(i+1)$ -szy blok informacyjny. W przypadku decyzji *powtórz* następuje retransmisja  $q$  bloków, począwszy od  $(i-q+1)$ -go bloku.

Z reguły stosowana jest cykliczna numeracja nowych bloków wysyłanych przez nadajnik, co pozwala wykrywać i eliminować niepotrzebne powtórzenia oraz wykrywać brak potrzebnego powtórzenia, traktowany jako kryterium awarii.

Algorytmicznym odpowiednikiem *SRP* jest system protekcji znormalizowany przez zalecenie V41 CCITT [3].

## 4.2. Matematyczny model działania *SRP*

System może znajdować się w jednym z dwóch wzajemnie wykluczających się stanów:

- $E_1$  — przesyłanie nowego bloku,
- $E_2$  — retransmisja  $q$  ostatnich bloków.

<sup>3)</sup> W systemie *SRP* z niekodowanym kanałem powrotnym sygnały decyzyjne mają postać ciągłych stanów zmiennych o czasie trwania równym blokowi.

Dla analizy działania *SRP* dogodnie jest wprowadzenie dwóch rodzajów kroków, zdefiniowanych następująco:

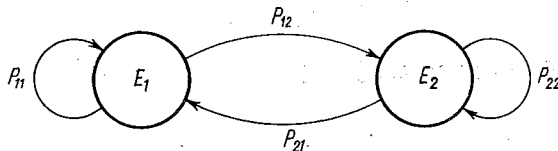
$K_1^{(i)}$  — całość procesów związanych z przesłaniem  $i$ -go bloku w przypadku pozytywnej decyzji o  $(i-q)$ -tym bloku,

$K_2^{(i)}$  — całość procesów związanych z retransmisją  $q$  bloków (od  $(i-q)$ -tego do  $(i-1)$ -go) w przypadku negatywnej decyzji o  $(i-q)$ -tym bloku.

Czasy trwania kroków  $K_j^{(i)}$  wynoszą odpowiednio:

$$T_j = \begin{cases} T_I & \text{dla } j = 1, \\ qT_I & \text{dla } j = 2. \end{cases} \quad (4.4)$$

Z algorytmu działania *SRP* oraz z założeń Z2 i Z3 wynika, że prawdopodobieństwa przejść  $p_{jk}^{(i)}$  są stacjonarne oraz nie zależą od drogi jaką układ doszedł do stanu  $E_j$ . Dla  $j, k = 1, 2$  spełnione są więc zależności (3.11) i (3.12). Stąd wniosek, że — podobnie jak w przypadku *SNP* — jako matematyczny model działania systemu *SRP* może być użyty jednorodny proces Markowa (rys. 3).



Rys. 3. Jednorodny proces Markowa dla *SRP*

Z algorytmu sterowania *SRP* wynika:

$$p_{11} = p_{21} = 1 - P(\geq 1, N), \quad (4.5)$$

$$p_{12} = p_{22} = P(\geq 1, N), \quad (4.6)$$

gdzie, dla przypomnienia:  $P(\geq 1, N)$  — prawdopodobieństwo wystąpienia co najmniej jednego błędu w bloku  $N$ -elementowym.

Prawdopodobieństwa graniczne  $p_j$  wyznacza się korzystając z wzorów (3.19) i (3.20) podstawiając w nich  $\varkappa = 2$ . Prowadzi to do zależności:

$$p_1 = \frac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}}, \quad (4.7)$$

$$p_2 = \frac{p_{12}}{p_{12} + p_{21}}. \quad (4.8)$$

Uwzględniając (4.5) i (4.6) oraz warunek normy (3.29) otrzymuje się ostatecznie:

$$p_1 = p_{11} = 1 - P(\geq 1, N), \quad (4.9)$$

$$p_2 = p_{12} = P(\geq 1, N). \quad (4.10)$$

#### 4.3. Zależności czasowe *SRP*

W systemie *SRP* istnieją tylko dwa rodzaje kroków, przy czym czasy ich trwania są dane przez (4.4).

Średni czas kroku w systemie *SRP* wyznacza się analogicznie jak dla *SNP*. Podstawiając do wzoru (3.39) wartości  $T_j$  dane przez (4.4) otrzymuje się:

$$T_s = (p_1 + p_2 q) T_I. \quad (4.11)$$

Wzór (3.43) na częstość wysyłania nowych bloków  $v_{NB}$  jest również słuszny dla *SRP*. Podstawienie (4.11) do (3.43) daje:

$$v_{NB} = \frac{p_1}{(p_1 + p_2 q) T_I}. \quad (4.12)$$

Uwzględniając, że

$$T_I = \frac{k + r + s}{V_m}, \quad (4.13)$$

z (1.6) i (4.12) otrzymuje się:

$$\eta_{SRP} = \frac{k}{k + r + s} \frac{p_1}{p_1 + qp_2}. \quad (4.14)$$

Ostateczną postać wzoru uzyskuje się przez podstawienie do (4.14) wzorów (4.9) i (4.10):

$$\eta_{SRP} = \frac{k}{k + r + s} \frac{1}{1 + q \frac{P(\geq 1, N)}{1 - P(\geq 1, N)}}. \quad (4.15)$$

Dla bardzo dobrych kanałów otrzymuje się asymptotyczną wartość  $\eta_{SRP}$  ze wzoru:

$$\eta_{SRP}(p = 0) = \frac{k}{k + r + s}, \quad (4.16)$$

gdyż oczywiście zachodzi związek

$$\lim_{p \rightarrow 0} P(\geq 1, N) = 0.$$

Porównanie efektywnej szybkości systemów *SNP* i *SRP* dla bardzo dobrych kanałów ( $p \approx 0$ ) umożliwiają wzory (3.47) i (4.16). Podstawiając do tych wzorów przykładowo:

$$r = 16,$$

$$s = \begin{cases} 4 & \text{dla } SRP, \\ 64 & \text{dla } SNP \end{cases}$$

oraz dzieląc je stronami otrzymuje się przy  $p \rightarrow 0$ :

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Delta = \frac{k + 20}{k + 144 + (\tau_p + \tau) V_m}, \quad (4.17)$$

gdzie

$$\Delta \triangleq \frac{\eta_{SNP}}{\eta_{SRP}} = \frac{V_{efSNP}}{V_{efSRP}}. \quad (4.18)$$

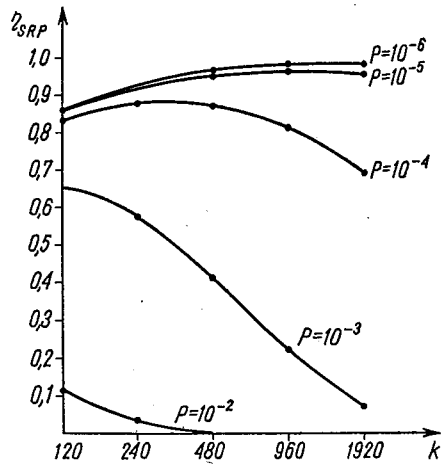
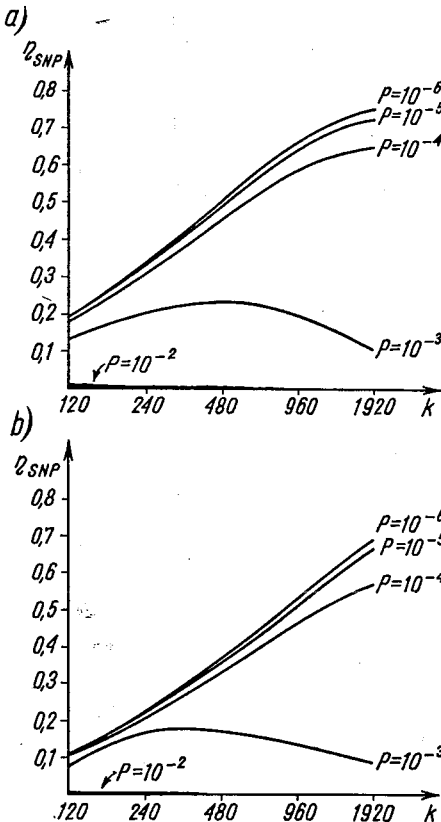


## 5. REZULTATY OBLICZEŃ I WNIOSKI

Na podstawie wyników przeprowadzonej analizy obliczono wartości  $\eta_{SNP}$  i  $\eta_{SRP}$  dla następujących danych wyjściowych:

$$\begin{aligned}
 p &= 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, & V_m &= 1200, 2400 \text{ bd}, \\
 k &= 120, 240, 480, 960, 1920 & \tau_p &= 200 \text{ ms}; \\
 r &= 16 & \tau &= 100 \text{ ms}, \\
 s &= \begin{cases} 64 \text{ dla } SNP, \\ 4 \text{ dla } SRP \end{cases} & T_r &= 3 \text{ s}, \\
 & & q &= 2.
 \end{aligned}$$

Jako model kanału użyty został stacjonarny, symetryczny kanał bezpamięciowy. Rezultaty obliczeń przedstawione są graficznie na rysunkach 4, 5 i 6.

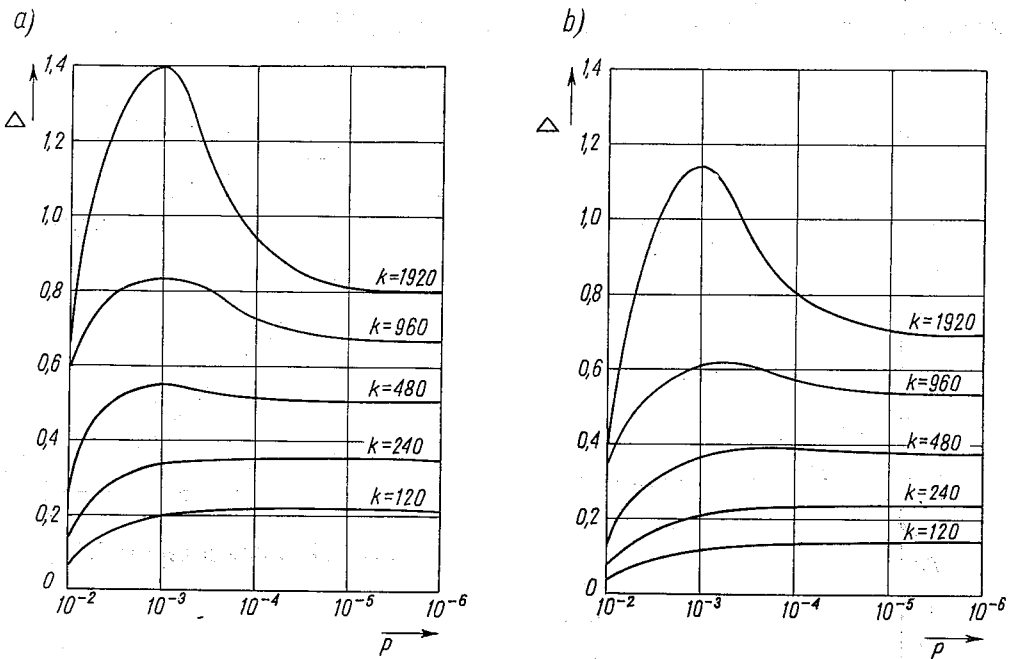
Rys. 5. Wykres funkcji  $\eta_{SRP} = f(k)$ 

Rys. 4. Wykres funkcji  $\eta_{SNP} = f(k)$   
 a) dla  $v_m = 1200$  bodów, b) dla  $v_m = 2400$  bodów

Przebiegi z rysunków 4a i 4b ilustrują zależność  $\eta_{SNP}$  od  $k$  przy  $p$  traktowanym jako parametr, odpowiednio dla  $V_m = 1200$  i  $2400$  bodów. Uniwersalna ze względu na  $V_m$  rodzina krzywych przedstawiona na rys. 5 ilustruje analogiczną zależność dla  $SRP$ . Porównanie sprawności transmisji badanych systemów ułatwiają przebiegi  $\Delta = \frac{\eta_{SNP}}{\eta_{SRP}} = f(p)$ , przy  $k$  traktowanym jako parametr, przedstawione na rysunkach 6a i 6b.

Rezultaty obliczeń pozwalają sformułować następujące wnioski co do efektywnej szybkości transmisji systemów *SNP* i *SRP*:

1. Przy pracy z blokami o małej i średniej długości ( $k < 1000$ ) system *SRP* jest szybszy niż system *SNP*, przy czym przewaga *SRP* jest wyraźna dla kanałów o złej jakości ( $p \approx 10^{-2}$ ).
2. Przy pracy z długimi blokami ( $k \geq 1000$ ) system *SNP* może konkurować z systemem *SRP* dla kanałów o średniej jakości ( $p = 10^{-3} \div 10^{-4}$ ).
3. W obydwu systemach występuje problem optymalizacji długości bloku, przy czym potrzeba optymalizacji uwidacznia się wyraźnie przy pracy na kanałach niezbyt dobrych ( $p = 10^{-2} \div 10^{-3}$ ).



Rys. 6. Wykres funkcji  $\Delta = f(p)$   
a) dla  $\nu_m = 1200$  bodów b) dla  $\nu_m = 2400$  bodów

4. Przy pracy na dobrych i bardzo dobrych kanałach w systemie *SNP* powinny być stosowane możliwie długie bloki. W systemie *SRP* zwiększenie długości bloku powyżej  $k \approx 250$  elementów nie daje w tym wypadku istotnych korzyści. Stosowanie dłuższego bloku w *SRP* może natomiast być podyktowane wymaganiem na osiągnięcie większego zasięgu (patrz nierówności 4.1, 4.2).

5. W systemie *SRP* sprawność transmisji nie zależy od szybkości modulacji  $V_m$ . W systemie *SNP* sprawność transmisji maleje ze wzrostem  $V_m$ , przy czym efekt ten w niewielkim stopniu zależy od wartości  $p$  oraz  $k$ .

Uzyskane zależności i wzory pozwalają ocenić wpływ wielkości  $\tau_p$ ,  $\tau$  i  $T_r$  na sprawność transmisji w systemie *SNP*. Zgodnie z wzorem (3.47) należy oczekiwać, iż wpływ  $\tau_p$  i  $\tau$  będzie tym silniejszy, im większa jest szybkość modulacji  $V_m$  oraz im krótszy blok

(mniejsze  $k$ ). Z analizy zależności (3.36), (3.41) i (3.42) wynika, że wpływ  $T_r$  jest istotny przy pracy na kanałach o złej jakości (system często wchodzi w stan  $E4$ ).

Na zakończenie warto podkreślić, że efektywna szybkość transmisji jest ważnym, ale nie jedynym, kryterium dla podjęcia decyzji o tym, który system,  $SNP$  czy  $SRP$ , należy zastosować w każdym konkretnym przypadku. Decyzję warunkują także inne czynniki, a wśród nich przede wszystkim:

- współczynnik poprawy jakości transmisji gwarantowany przez system,
- przystosowanie do współpracy z innymi ogniwami łańcucha teleinformatycznego,
- stopień komplikacji układów.

Zagadnienia powyższe wykraczają jednak poza ramy niniejszego opracowania.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. International Business Machines Corporation,  
System Components IBM 2770 Data Communication System,  
A27 — 3013. IBM Systems Development, Division, Publications Center, Dept. E01, Research Triangle Park, North Carolina 27709, 1969.
2. M. F i s z, Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna, PWN, W-wa 1967.
3. CCITT, Zalecenie V41, Biała Księga, tom VIII, Mar del Plata 1968.

J. DRÓŻDŻ

#### EFFECTIVE TRANSMISSION RATE OF DATA TRANSMISSION SYSTEMS WITH DECISION FEEDBACK

##### S u m m a r y

Analytic method of determination of effective transmission rate in data transmission systems with decision feedback is presented. Two kinds of systems are taken into account, i.e.:

- system with alternate confirmation (SAC),
- system with simultaneous confirmation (SSC).

It is proved that the mathematical model of the above systems may be represented by homogeneous Markov process. The comparison of SAC and SSC transmission efficiency is made. Final results of the analysis might be useful for determining how the effective transmission rate depends on the system parameters and the characteristics of a digital channel.

J. DRÓŻDŻ

#### EFFEKTIVE TRANSMISSIONSGESCHWINDIGKEIT IM TRANSMISSIONSSYSTEMEN FÜR DATENVERARBEITUNG MIT ENTSCHLUßRÜCKKOPPLUNG

##### Z u s a m m e n f a s s u n g

Es wurde hier eine analytische Methode zur Bestimmung der effektiven Transmissionsgeschwindigkeit in Transmissionssystemen für Datenverarbeitung mit Entschlußrückkopplung (SZD) vorgetragen. Zwei Varianten dieses Systems wurden erörtert: das System mit alternierender Bestätigung (SNP) und das System mit gleichzeitiger Bestätigung (SRP). Es wurde nachgewiesen, daß die Wirkungsweise dieser Systeme als Realisierung des Prozesses angesehen werden kann, dessen mathematisches Modell der homogene Markow-Prozeß ist. In Anlehnung an die Ergebnisse der Analyse wurden die Leistungen beider Systeme miteinander verglichen, und der Einfluß beurteilt, den die Arbeitsparameter der Systeme auf die effektive Transmissionsgeschwindigkeit und -verhältnisse im gekörnten Kanal ausüben.

В. ДРУДЖ

# ЭФФЕКТИВНАЯ СКОРОСТЬ ТРАНСМИССИИ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ С РЕШАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

## Резюме

Представлен аналитический метод определения эффективной скорости передачи для систем передачи данных с решающей обратной связью. Обсуждаются два варианта этих систем, т. е.

- система с попеременным подтверждением (СПП),
- система с одновременным подтверждением (СОП).

Доказано, что в качестве математической модели вышеперечисленных систем, можно использовать однородный маркововский процесс. Сравнена полезная пропускная способность СПП и СОП. Заключительные результаты анализа могут быть использованы для определения, каким образом эффективная скорость передачи зависит от параметров системы, а также от характеристик дискретного канала.

## Miniaturowy termostat do sondy hallotronowej

ROMUALD DRAHOKAUPIL (WROCŁAW)

*Instytut Telekomunikacji i Akustyki Politechniki Wrocławskiej*

*Otrzymano 28.6.1973*

W pracy omówiono zasadę działania, analizę oraz realizację praktyczną miniaturowego termostatu mostkowego o sprzężeniu cieplnym z regulacją ciągłą, zastosowanego do stabilizacji temperatury hallotronu. Podano wyniki pomiarów uzyskanych parametrów termostatu. Przedstawiono wnioski i propozycje dotyczące możliwości poprawy uzyskanych wyników.

### 1. WSTĘP

W wielu dziedzinach nauki i techniki coraz bardziej doniosłe znaczenie ma problem termoregulacji i stabilizacji temperatury. Potrzeba zapewnienia stałej temperatury pewnych elementów, podzespołów czy nawet całych urządzeń dotyczy najczęściej dziedziny elektroniki. Rozwój półprzewodników rozszerzył zakres zastosowań termostatów, gdyż elementy półprzewodnikowe w większości przypadków mają parametry znacznie zależne od temperatury. Wymagania dotyczące precyzji i niezawodności działania termoregulatorów wciąż rosną. Jako przykład można podać problem stabilizacji temperatury urządzenia elektronicznego pracującego w pomieszczeniu o temperaturze pokojowej oraz problem stabilizacji temperatury podobnego urządzenia ale pracującego w warunkach kosmicznych. Miniaturyzacja elementów i urządzeń elektrycznych pociąga za sobą konieczność miniaturyzacji urządzeń termostatu, a w szczególności naczyń termostatowych.

Termostaty elektroniczne można klasyfikować według różnych kryteriów:

1. pod względem sposobu dostarczania mocy grzejnej termostaty dzieli się na działające w sposób ciągły i przerywny,
2. według rodzaju sprzężenia zwrotnego odróżnia się termostaty o sprzężeniu elektrycznym i o sprzężeniu cieplnym,
3. według rodzaju zastosowanego czujnika można odróżnić termoregulatory bimetaliczne i termometrowe, termoregulatory mostkowe oraz termoregulatory z wykorzystaniem zmiany stanu skupienia substancji krystalicznej,
4. ze względu na znak dostarczanej mocy cieplnej odróżnia się termostaty o dodatniej mocy cieplnej (z zastosowaniem grzejników) oraz termostaty o ujemnej mocy cieplnej

(z zastosowaniem oziębiaczy); w przypadku, gdy temperatura otoczenia może być zarówno niższa jak i wyższa od temperatury stabilizowanej, stosuje się grzejniki i oziębiacze jednocześnie;

5. ze względu na rodzaj prądu dostarczonego do grzejnika lub czujnika mają zastosowanie termostaty prądu stałego i prądu zmiennego.

W roku 1972 w zakładzie doświadczalnym Instytutu Telekomunikacji i Akustyki Politechniki Wrocławskiej prowadzono prace mające na celu zbadanie możliwości budowy oraz realizację praktyczną miniaturowego termostatu przeznaczonego do stabilizacji temperatury hallotronu. Hallotron miał pełnić rolę czujnika w układzie stabilizacji pola magnetycznego spektrometru ERP. Ze względu na duże wymagania dotyczące stałości stabilizowanego pola magnetycznego oraz na niestalość parametrów hallotronu w funkcji temperatury (w szczególności stałej Halla) zachodziła konieczność zapewnienia stałej temperatury hallotronu z dokładnością rzędu setnych części stopnia Celsjusza. Użyty do tego celu termostat powinien mieć następujące właściwości:

- niewielkie wymiary geometryczne naczynia termostatowego (ze względu na konieczność umieszczenia naczynia wraz z hallotronem między nabiegunnikami elektromagnesu),
- dokładność stabilizacji temperatury w granicach  $0,01 \div 0,03^{\circ}\text{C}$  przy zmianach temperatury otoczenia w granicach  $25 \pm 10^{\circ}\text{C}$ ,
- niewrażliwość układu elektrycznego termostatu na zmiany temperatury otoczenia i zmiany napięcia zasilania,
- pomijalny wpływ oddziaływania pola magnetycznego wytworzonego przez grzejnik na hallotron,
- niewielki czas dogrzewania po włączeniu.

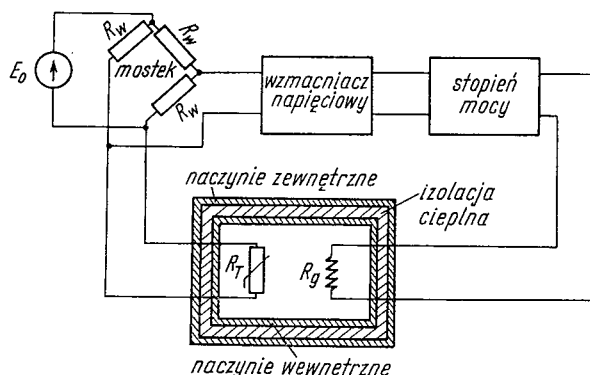
Zarówno analiza teoretyczna jak i przeprowadzone eksperymenty wykazały, że najbardziej korzystnym rozwiązaniem byłoby zastosowanie termostatu prądu stałego o sprzężeniu cieplnym z regulacją ciągłą.

W niniejszej pracy przedstawiono zasadę działania i analizę stabilizatora temperatury o sprzężeniu cieplnym i regulacją ciągłą. Omówiono również sposób realizacji praktycznej termostatu oraz przedstawiono jego charakterystykę statyczną stabilizacji. Podano także wykaz ważniejszych parametrów termoregulatora. Przedstawiono wnioski i propozycje dotyczące możliwości poprawy uzyskanych wyników.

## 2. ZASADA DZIAŁANIA I ANALIZA PRACY TERMOSTATU MOSTKOWEGO ZE SPRZĘŻENIEM CIEPLNYM I REGULACJĄ CIĄGLĄ

Schemat blokowy mostkowego układu automatycznej regulacji temperatury z regulacją ciągłą przedstawiono na rys. 1. Czujnik temperatury znajdujący się w naczyniu wewnętrznym termostatu ma rezystancję w znacznym stopniu zmieniającą się z temperaturą. Czujnik ten stanowi jedno z ramion mostka elektrycznego zasilanego napięciem  $E_0$ . W stanie ustalonym mostek pracuje w pobliżu równowagi, tzn. napięcie między węzłami leżącymi na poziomej przekątnej mostka jest bliskie zeru. Jakakolwiek zmiana temperatury wewnątrz naczynia termostatowego (a tym samym zmiana temperatury czujnika) powoduje zmianę rezystancji czujnika. Mostek przestaje być wówczas w równowadze i na poziomej jego prze-

kątnej pojawia się spadek napięcia będący elektrycznym sygnałem błędu. Sygnał błędu zostaje wzmacniony we wzmacniaczu napięciowym i steruje stopień mocy. Zadaniem stopnia mocy jest dostarczenie do naczynia termostatowego mocy grzejnej zależnej od sygnału błędu. Zmiana mocy pod wpływem sygnału błędu powoduje w konsekwencji taką zmianę



Rys. 1. Schemat blokowy termostatu mostkowego ze sprzężeniem elektrycznym o działaniu ciągłym

wtórą temperatury wewnątrz naczynia termostatu, która kompensuje zmianę pierwotną. Dokładność tej kompensacji zmian temperatury zależy od wzmacnienia pętlowego układu.

W celu dokonania analizy statycznej i dynamicznej układu termoregulatora należałoby ustalić i skonkretyzować pewne pojęcia i wielkości charakteryzujące poszczególne bloki układu.

## 2.1. Naczynie termostatowe

Naczynie termostatowe składa się zwykle z następujących elementów:

- naczynia zewnętrznego,
- izolacji cieplnej,
- naczynia wewnętrznego,
- grzejnika,
- czujnika.

Grzejnik wykonany jest zwykle w postaci drutu rezystancyjnego, równomiernie nawiniętego na zewnętrznej powierzchni naczynia wewnętrznego. Czujnik umieszczony jest najczęściej wewnątrz tego naczynia. W naczyniu wewnętrznym znajduje się element, którego temperaturę chcemy stabilizować.

Procesy cieplne w naczyniu termostatowym podlegają podobnym prawom jak zjawiska elektryczne [1]. Dlatego w nauce o wymianie ciepła wprowadza się szereg tzw. analogów ciepło-elektrycznych. Tak więc analogiem cieplnym pola elektrycznego, określonego rozkładem potencjału w przestrzeni i czasie  $V = f(x, y, z, t)$ , jest pole temperatury określone rozkładem temperatury w przestrzeni i czasie  $T = f(x, y, z, t)$ . Analogiem cieplnym na-

tężenia pola elektrycznego  $K = -\text{grad } V$  jest gradient temperatury  $\text{grad } T = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta n} = \frac{\partial T}{\partial n}$ , gdzie  $\Delta T$  jest przyrostem temperatury na odcinku  $\Delta n$ .

Procesy, jakie mogą zachodzić w termostatach, nie są stacjonarne. W ogólnym przypadku założenie, że w poszczególnych punktach we wnętrzu termostatu temperatura zmienia się w czasie w jednakowy sposób, nie jest prawdziwe. Zaburzenia cieplne rozchodzące się w ośrodku ciągłym jednorodnym drogą przewodnictwa ciepła podlegają prawu Fouriera określonemu w następujący sposób:

$$\frac{\delta T}{\delta t} = a \Delta^2 T, \quad (1)$$

gdzie:

$\frac{\partial T}{\partial t}$  — pochodna temperatury względem czasu w punkcie  $(x, y, z)$ ,

$\Delta^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$  — operator Laplace'a,

$a$  — współczynnik wyrównywania temperatur [1].

Przy skomplikowanych warunkach początkowych i brzegowych znalezienie rozwiązania równania (1) jest trudne lub praktycznie niemożliwe; z tej przyczyny właściwości dynamiczne termostatów analizuje się wykorzystując bardzo proste modele. Na przykład problem trójwymiarowy można sprowadzić do problemu jednowymiarowego rozważając model naczynia termostatu w postaci nieskończenie długiego pręta o bardzo dobrej izolacji cieplnej na ściankach bocznych [2]. Wówczas analogiem elektrycznym takiego modelu byłaby linia długa  $RC$ . Nie zawsze adaptacja takiego modelu do rzeczywistej konstrukcji naczynia termostatowego jest możliwa. W takim przypadku pozostaje założyć, że naczynie termostatowe stanowi pewną sieć o parametrach skupionych. Założenie takie jest niezbyt dokładnym przybliżeniem rzeczywistości, ale umożliwia przeprowadzenie prostych obliczeń rachunkowych. Analizując naczynie termostatowe jako układ o parametrach skupionych przyjmuje się następujące analogi cieplno-elektryczne:

— moc grzejna  $P_g = \frac{dQ}{dt}$  — jako analog cieplny prądu,

— temperatura  $T$  jako analog napięcia,

— oporność cieplna  $R$  jako analog rezystancji,

— pojemność cieplna  $C$  jako analog pojemności.

Dla sieci opisanych tak przyjętymi analogami cieplno-elektrycznymi obowiązują identyczne prawa jak dla sieci elektrycznej.

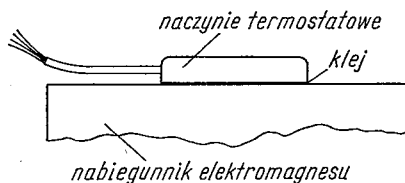
Przy konstruowaniu modelu cieplno-elektrycznego naczynia termostatu, zaprojektowanego i wykonanego praktycznie, kierowano się następującymi założeniami:

— zarówno naczynie zewnętrzne jak i wewnętrzne termostatu wykonane są z materiału o bardzo małej oporności cieplnej,

— naczynie termostatowe zewnętrzne jest przyklejone cienką warstwą dobrze przewodzącego ciepło kleju do metalowego nabiegunnika elektromagnesu o masie nieporównywalnie większej od masy naczynia termostatowego (rys. 2),

— naczynie termostatowe stanowi układ o parametrach skupionych.

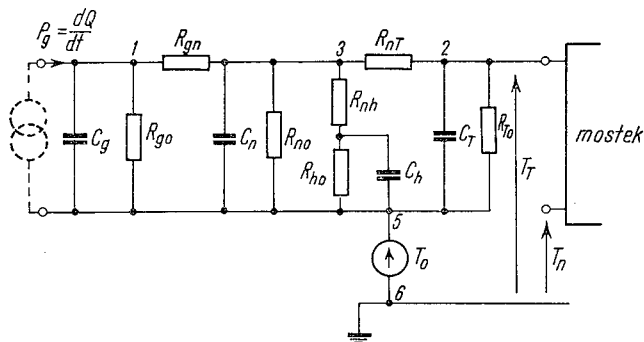




Rys. 2. Sposób umieszczenia naczynia termostatowego wraz z hallotronem na nabiegunniku elektromagnesu

Z drugiego założenia wynika, że na obudowie zewnętrznej wymuszana jest poprzez nabiegunnik temperatura otoczenia, a zatem stanowi on źródło temperaturowe  $T_o$  będące analogiem cieplnym źródła napięciowego.

Schemat modelu naczynia termostatowego przedstawiono na rys. 3. Poszczególne elementy przedstawionej sieci mają następujące znaczenie:



Rys. 3. Model cieplno-elektryczny naczynia termostatowego

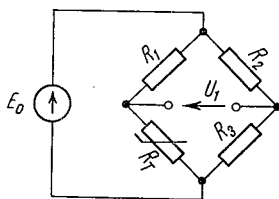
- źródło prądowe  $P_g = \frac{dQ}{dt}$  — źródło mocy grzejnej,
- źródło napięciowe  $T_o$  — źródło wymuszające temperaturę otoczenia na naczyniu zewnętrznym,
- węzeł nr 1 — węzeł grzejnika,
- węzeł nr 2 — węzeł czujnika (termistora),
- węzeł nr 3 — węzeł naczynia wewnętrznego,
- węzeł nr 4 — węzeł hallotronu,
- węzeł nr 5 — węzeł naczynia zewnętrznego,
- węzeł nr 6 — węzeł odniesienia o temperaturze  $0^\circ\text{C}$ ,
- $C_g$  — pojemność cieplna grzejnika,
- $C_T$  — pojemność cieplna czujnika,
- $C_n$  — pojemność cieplna naczynia wewnętrznego,
- $C_h$  — pojemność cieplna hallotronu,
- $R_{go}$  — oporność cieplna między grzejnikiem a otoczeniem,
- $R_{gn}$  — oporność cieplna między grzejnikiem a naczyniem wewnętrznym,
- $R_{no}$  — oporność cieplna między naczyniem wewnętrznym a otoczeniem,
- $R_{nh}$  — oporność cieplna między naczyniem wewnętrznym a hallotronem,

- $R_{ho}$  — oporność cieplna przewodów elektrycznych doprowadzonych do hallotronu z zewnątrz,
- $R_{nT}$  — oporność cieplna między naczyniem wewnętrznym i czujnikiem (termistorem),
- $R_{To}$  — oporność cieplna przewodów elektrycznych doprowadzonych z termistora do otoczenia,
- $T_T$  — temperatura termistora,
- $T_n$  — temperatura odniesienia (patrz analiza mostka).

## 2.2. Mostek

Schemat elektryczny mostka podano na rys. 4. Zakłada się pracę mostka w pobliżu równowagi. Mostek jest więc swego rodzaju przetwornikiem elektryczno-cieplnym, ponieważ zmiany temperatury termistora wywołują zmiany rezystancji termistora  $R_T$ , a to z kolei wywołuje zmiany napięcia  $U_1$ . Należałoby więc wprowadzić pojęcie transmitancji napięciowo-temperaturowej mostka. Przy pracy w pobliżu równowagi maksimum tej transmitancji uzyskuje się wówczas, gdy  $R_1 = R_2 = R_3 = R_w \simeq R_T$ . Jeśli dla pewnej temperatury odniesienia  $T_n$ ,  $R_T = R_w$ , wówczas

$$R_T = [R_w + \alpha_T(T_T - T_n)], \quad (2)$$



Rys. 4. Schemat elektryczny mostka

gdzie  $\alpha_T$  — temperaturowy współczynnik rezystancji termistora dla  $T = T_n$ .

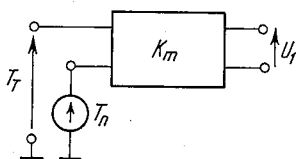
Wówczas napięcie

$$U_1 = \frac{1}{2} E_0 |\alpha_T| (T_n - T_T) = K_m (T_n - T_T), \quad (3)$$

gdzie  $K_m = \frac{1}{2} E_0 |\alpha_T|$  — transmitancja temperaturowo-napięciowa mostka.

Tak więc blokowo można przedstawić mostek w postaci podanej na rys. 5.

Ważną sprawą jest aby rezystory wzorcowe  $R_w$  charakteryzowały się dużą stałością rezystancji. Jeśli założymy, że rezystory wzorcowe poddane są bezpośredniemu działaniu



Rys. 5. Schemat blokowy mostka

zmian temperatury otoczenia, to wpływ zmian rezystancji wzorcowych pod wpływem zmian temperatury otoczenia na dokładność stabilizacji będzie pomijalny wtedy, gdy spełni się warunek:

$$\frac{\max |\Delta T_T|}{\max |\Delta T_o|} \gg \frac{|\alpha_R|}{|\alpha_T|}, \quad (4)$$

gdzie:

$\max |\Delta T_T|$  — maksymalna dopuszczalna zmiana temperatury stabilizowanej (termistora),

$\max |\Delta T_o|$  — maksymalna przewidywana zmiana temperatury otoczenia,

$\alpha_R$  — temperaturowy współczynnik zmian rezystancji opornika wzorcowego.

### 2.3. Wzmacniacz napięciowy

Musi to być wzmacniacz napięciowy różnicowy o dużym współczynniku tłumienia sygnału sumacyjnego (CMRR), aby uniezależnić dokładność stabilizacji od zmian napięcia  $E_o$  zasilania mostka.

Ponadto musi być spełniony warunek

$$\max |\Delta T_T| K_m > \Delta U_K, \quad (5)$$

gdzie:  $\Delta U_K$  — napięcie dryftu termicznego wzmacniacza odniesione do jego wejścia przy maksymalnej zmianie temperatury otoczenia.

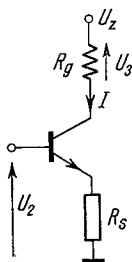
Wobec powyższego celowe wydaje się zastosowanie operacyjnego wzmacniacza scalonego. Możliwość zastosowania sprzężenia zwrotnego w tym wzmacniaczu pozwala na dobranie odpowiedniego wzmocnienia napięciowego jakie okaże się potrzebne. Zastosowanie sprzężenia zwrotnego poprawi również parametry wzmacniacza.

### 2.4. Stopień mocy

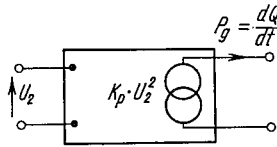
Uproszczony schemat stopnia mocy pokazano na rys. 6. Rezystancja  $R_g$  stanowi tu rezystancję grzejnika, a rezystancja  $R_s$  realizuje prądowe szeregowe sprzężenie zwrotne. Jeśli sprzężenie zwrotne jest dostatecznie głębokie, wówczas moc grzejna

$$P_g = \frac{U_2^2 R_g}{R_s^2} = K_p U_2^2, \quad (6)$$

gdzie  $K_p$  — statyczna transmitancja energetyczno-napięciowa (cieplno-napięciowa).



Rys. 6. Uproszczony schemat stopnia mocy



Rys. 7. Schemat blokowy stopnia mocy

Widać więc, że zależność między napięciem sterującym stopień mocy a mocą grzejną jest nieliniowa (kwadratowa). Jest to zjawisko niekorzystne, ale trudne do wyeliminowania.

Można wprowadzić również pojęcie dynamicznej transmitancji energetyczno-napięciowej:

$$K_{pd} = \frac{dP_g}{dU_2} = 2K_p U_2 = I \frac{R_g}{R_s}. \quad (7)$$

Schemat blokowy stopnia mocy przedstawiono na rys. 7.

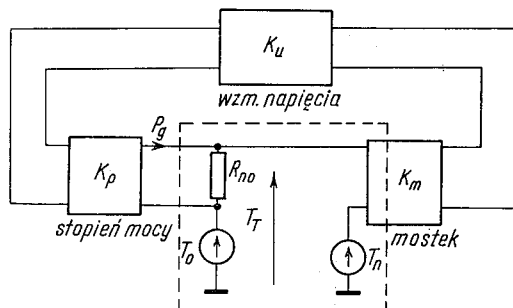
## 2.5. Analiza statyczna automatycznego regulatora temperatury

Zakłada się, że wszelkie zmiany wielkości cieplnych i elektrycznych (temperatury, mocy grzejnej, napięcia) mają częstotliwość bliską zeru. Wówczas w schemacie zastępczym naczynia termostatowego można pominąć wszelkie pojemności cieplne. Jeśli założyć ponadto, że  $R_{gn}, R_{nh}, R_{nT} \ll R_{no}$  oraz  $R_{go}, R_{ho}, R_{To} \gg R_{no}$ , to schemat zastępczy naczynia termostatowego znacznie się uprości. Wówczas schemat blokowy termostatu da się przedstawić w postaci jak na rys. 8. Równanie pętli zamkniętej będzie miało postać:

$$[(T_n - T_T) K_m K_u]^2 \cdot K_p = \frac{T_T - T_o}{R_{no}}. \quad (8)$$

Po podniesieniu do kwadratu i uporządkowaniu:

$$T_T^2 - T_T \left[ 2T_n + \frac{1}{K_m^2 K_u^2 K_p R_{no}} \right] + T_n^2 + \frac{T_o}{K_m^2 K_u^2 K_p R_{no}} = 0. \quad (9)$$



Rys. 8. Schemat termostatu z uproszczonym modelem naczynia termostatowego zastosowany do analizy statycznej

Rozwiązując równanie (9) względem  $T_T$  i przyjmując oznaczenie  $K_m^2 K_u^2 K_p R_{no} = \beta$  otrzymuje się:

$$T_T = \frac{2T_n + \frac{1}{\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 + \frac{4}{\beta}[T_n - T_o]}}{2}. \quad (10)$$

Ponieważ stopień mocy dostarcza mocy grzejnej wówczas, gdy  $U_2 \geq 0$ , stąd musi być  $T_T \leq T_n$ . Dlatego przyjmuje się rozwiązanie:

$$T_T = \frac{2T_n + \frac{1}{\beta} - \sqrt{\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 + \frac{4}{\beta}[T_n - T_o]}}{2}. \quad (11)$$

Jeśli

$$4\beta(T_n - T_o) \gg 1 \quad (12)$$

oraz

$$T_n \gg \sqrt{\frac{T_n - T_o}{\beta}}, \quad (13)$$

wówczas

$$T_T \simeq T_n. \quad (14)$$

Przechwyt termostatu:

$$\frac{\Delta T_T}{\Delta T_o} \simeq \frac{dT_T}{dT_o} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\beta[T_n - T_o]}} = \frac{1}{D}, \quad (15)$$

$D$  — dobroć termostatu.

Jeśli jest spełniony warunek (13), wówczas

$$\frac{dT_T}{dT_o} \simeq \frac{1}{2\sqrt{\beta(T_n - T_o)}} = \frac{1}{2K_m K_u \sqrt{K_p R_{no}[T_n - T_o]}}. \quad (16)$$

Ze wzorów (15) i (16) wynika, że współczynnik stabilizacji temperatury termostatu zależy od temperatury otoczenia i jest tym lepszy, im niższa jest ta temperatura. Jeśli  $T_o \rightarrow T_n$ , to  $\frac{dT_T}{dT_o} \rightarrow 1$ , a więc układ przestaje stabilizować. Dlatego, projektując układ termostatu, należy ustalić taką temperaturę odniesienia  $T_n$ , aby była ona co najmniej kilkakrotnie większa od maksymalnej temperatury otoczenia  $T_o$ . Wówczas  $\sqrt{T_n - T_o}$  zmienia się w niewielkim stopniu pod wpływem zmian  $T_o$  i można przyjąć, że stabilizator temperatury pracuje w przybliżeniu liniowo, a współczynnik stabilizacji termostatu jest stały. Wówczas

$$\frac{\Delta T_T}{\Delta T_o} \simeq \frac{1}{K_m K_u R_{no} K_{pd}}, \quad (17)$$

gdzie:

$$K_{pd} = 2 \sqrt{\frac{K_p}{R_{no}}(T_n - T_o)} = I \frac{R_g}{R_s}, \quad (18)$$

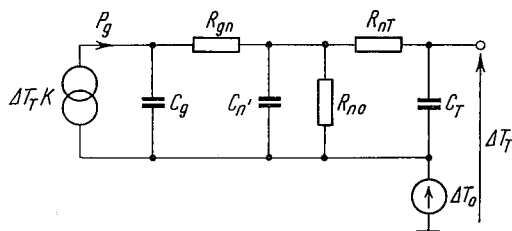
$$[K_{pd}] = A.$$

Współczynnik stabilizacji termostatu jest odwrotnie proporcjonalny do prądu płynącego przez grzejnik.

Z analizy statycznej wynika zatem, że w celu uzyskania wysokiego przechwyty termostatu należy zapewnić dostatecznie duże wzmocnienie pętlowe  $K_m K_u R_{no} K_{pd}$ , przy czym celowe jest, aby zapewnić na tyle dużą temperaturę stabilizowaną  $T_T \simeq T_n$ , ażeby maksymalna temperatura otoczenia była co najmniej kilkakrotnie mniejsza od temperatury stabilizowanej.

## 2.6. Analiza dynamiczna

Przyjmuje się uproszczony model naczynia termostatowego. W porównaniu z modelem przedstawionym na rys. 6 pomija się  $R_{go}$ ,  $R_{ho}$ ,  $T_{To}$ . Przyjmuje się  $R_{nh} = 0$  oraz wprowadza się oznaczenie  $C'_n = C_n + C_o$ .  $C'_n$  jest wówczas pojemnością cieplną naczynia wewnętrznego i hallotronu.



Rys. 9. Model termostatu zastosowany do analizy dynamicznej

Uproszczony model termostatu dla składowej zmiennej (dla przyrostów) pokazano na rys. 9. Model ten zostanie przeanalizowany metodą operatorową [3]. Zakładając bezinercyjność części elektrycznej termostatu i przyjmując:

$$-\frac{\Delta T_T(s) - \Delta T_o(s)}{P_g(s)} = M(s) \quad (19)$$

oraz

$$K = K_m K_u K_{pd},$$

otrzymuje się

$$\frac{\Delta T_T}{\Delta T_o} = \frac{1}{1 + KM(s)} = \frac{C_g C'_n C_T R_{gn} R_{nT} s^3 + (C_g C'_n R_{gn} + C_g C_T R_{nT} + C_g C_T R_{gn} + C'_n C_T R_{nT}) s^2 + (C_g + C'_n + C_T) s + R_{no}^{-1}}{C_g C'_n C_T R_{gn} R_{nT} s^3 + (C_g C'_n R_{gn} + C_g C_T R_{nT} + C_g C_T R_{gn} + C'_n C_T R_{nT}) s^2 + (C_g + C'_n + C_T) s + R_{no}^{-1} + K}. \quad (20)$$

Układ termoregulatora będzie wtedy i tylko wtedy stabilny, jeśli bieguny wielomianu opisanego równaniem (20) będą leżały w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej  $s$ . Korzystając z kryterium Hurwitza otrzymuje się następujący warunek stabilności:

$$1 + KR_{no} < \left( \frac{1}{C_T R_{nT}} + \frac{1}{C'_n R_{gn}} + \frac{1}{C'_n R_{nT}} + \frac{1}{C_g R_{ng}} \right) \cdot (C_g + C'_n + C_T) R_{no} = D_{\max}. \quad (21)$$

Z warunku (21) wynikają następujące wnioski:

- jeśli tylko wzmocnienie pętlowe  $K_m K_u K_{pd} R_{no} = K R_{no} \gg 1$ , to  $R_{no}$  nie ma wpływu na stabilność, możliwy jest zatem dowolny wzrost  $R_{no}$  bez naruszenia warunku stabilności,
- zmniejszenie jakiegokolwiek oporności cieplnej szeregowej lub wszystkich jednocześnie zwiększa wartość  $D_{max}$ ,
- jeśli jedna z pojemności cieplnych dąży do 0 lub do  $\infty$  to  $D_{max} \rightarrow \infty$ ,
- jeśli wszystkie pojemności cieplne zmieniają się z takim samym współczynnikiem proporcjonalności, to  $D_{max}$  nie zmienia się.

Zakładając  $C'_n \gg C_g$  i  $C'_n \gg C_T$  oraz  $C_g R_{ng} \ll (C_T R_{nT}, C'_n R_{gn}, C'_n R_{nT})$  otrzymujemy uproszczony warunek

$$1 + K R_{no} = D < \frac{C'_n R_{no}}{C_g R_{ng}} = \frac{\tau_n}{\tau_g}. \quad (22)$$

W celu uzyskania dużego stabilnego wzmocnienia pętlowego  $D$  należałoby dążyć do tego, aby stała czasowa naczynia wewnętrznego była możliwie duża, a stała czasowa grzejnika możliwie mała. Szczególnie atrakcyjne jest przy tym zwiększanie wzmocnienia pętlowego poprzez wzrost  $R_{no}$ , ponieważ wzrost  $R_{no}$  praktycznie nie wpływa na warunki stabilności (21), (22).

### 3. REALIZACJA PRAKTYCZNA TERMOSTATU

Ze względu na zastosowanie, projektowany termostat powinien spełniać następujące wymagania:

- możliwie duża miniaturyzacja naczynia termostatowego,
- ograniczenie wysokości naczynia zewnętrznego od góry ze względu na ustaloną odległość między nabiegunnikami elektromagnesu,
- ograniczenie wysokości naczynia wewnętrznego od dołu ze względu na grubość płytki hallotronowej,
- minimalizacja wpływu pola magnetycznego wytworzonego przez grzejnik na hallotron,
- uzyskanie dużego wzmocnienia pętlowego (dużej dokładności stabilizacji).

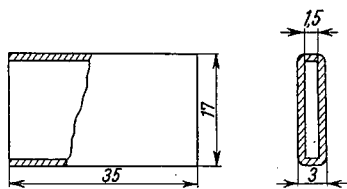
Ze względu na stabilność powinny być spełnione dodatkowo następujące warunki:

- uzyskanie dużego wzmocnienia pętlowego poprzez zastosowanie dużej oporności cieplnej między naczyniem a otoczeniem,
- minimalizacja oporności cieplnych  $R_{gn}$  i  $R_{nT}$ ,
- maksymalizacja pojemności cieplnej naczynia przy minimalizacji pozostałych.

Uzyskanie dużej oporności cieplnej przy zadanych wymiarach geometrycznych naczyń termostatowych jest trudne. Ze względu na ograniczenie od dołu wymiarów geometrycznych naczynia wewnętrznego i od góry wymiarów geometrycznych naczynia zewnętrznego, grubość warstwy izolacyjnej nie może być większa niż 1 mm. Stąd wynika konieczność zastosowania materiału izolacyjnego o dużej oporności cieplnej jednostkowej. W wyniku przeprowadzonych eksperymentów stwierdzono, że katalogowe wartości oporności cieplnych jednostkowych dla poszczególnych materiałów izolacyjnych nie pokrywają się z wartościami rzeczywistymi w przypadku małej grubości warstw tych materiałów. Wartości

rzeczywiste oporności cieplnych jednostkowych są tym mniejsze w (porównaniu z katalogowymi), im cieńsza jest warstwa izolująca. Dla izolacji termicznej o grubości 1 mm najwyższą oporność cieplną spośród przebadanych materiałów miały pianka poliuretanowa i styropian. Przy zastosowaniu naczynia termostatycznego wewnętrznego o wymiarach jak na rys. 10 i zastosowaniu styropianowej warstwy izolującej o grubości 1 mm uzyskano oporność cieplną  $R_{no} = 37^\circ/\text{W}$ .

Naczynie wewnętrzne wykonano ze srebra, w celu uzyskania dużej pojemności cieplnej przy minimalnej objętości oraz małej oporności cieplnej. Na zewnętrznej powierzchni naczynia wewnętrznego nawinięto grzejnik wykonany z drutu rezystancyjnego  $400 \Omega/\text{m}$ ,  $\varnothing 0,02$ . Uzwojenia grzejnika nawinięto bifilarnie w celu minimalizacji wpływu pola mag-



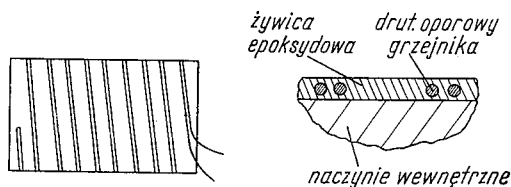
Rys. 10. Naczynie wewnętrzne termostatu

netycznego wytwarzanego przez grzejnik na hallotron. Aby zapewnić dużą przewodność cieplną między grzejnikiem a naczyniem wewnętrznym, całą powierzchnię zewnętrzną naczynia wewnętrznego (wraz z uzwojeniem grzejnika) pokryto cienką warstwą żywicy epoksydowej.

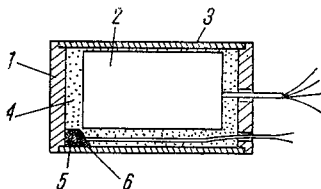
Naczynie zewnętrzne wykonano w postaci prostopadłościennego pudełka miedzianego o wymiarach zewnętrznych  $52 \times 27 \times 7$  i grubości ścianek około 1 mm.

Jako czujnik zastosowano miniaturowy termistor wykonany we własnym zakresie o  $\alpha_T = -0,03 \text{ K}^{-1}$ .

Sposób nawinięcia grzejnika pokazano na rys. 11, a schemat rozmieszczenia elementów w naczyniu wewnętrznym na rys. 12.



Rys. 11. Sposób nawinięcia grzejnika na naczynie wewnętrzne

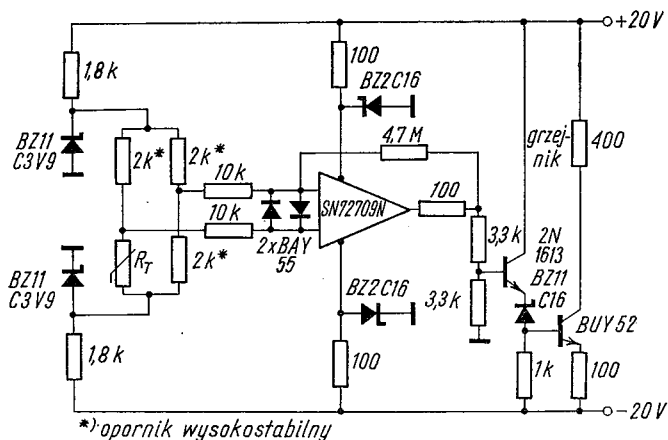


Rys. 12. Rozmieszczenie elementów w naczyniu wewnętrznym

1 — korek miedziany, 2 — hallotron, 3 — naczynie wewnętrzne, 4 — smar silikonowy, 5 — termistor, 6 — żywica epoksydowa



Schemat elektryczny termostatu przedstawiono na rys. 13. Zastosowano tutaj stabilizację napięcia zasilania mostka za pomocą diod Zenera BZ11C3V9. Wybór tej wartości napięcia zasilania jest kompromisowy. Powiększanie napięcia zasilania mostka zwiększa bowiem proporcjonalnie jego transmitancję temperaturowo-napięciową, lecz powoduje wzrost szkodliwej mocy cieplnej wydzielanej w termistorze. Jako oporniki wzorcowe zastosowano w mostku wysokostabilne oporniki produkcyjne krajowej z grupy OROAW, co gwarantuje spełnienie nierówności (4) przy  $\max |\Delta T_0| \leq 20^\circ\text{C}$ . Symetryczne zasilanie mostka z jednej strony oraz duży CMRR wzmacniacza operacyjnego z drugiej strony eliminują wpływ zmian napięcia zasilania mostka na zmiany temperatury stabilizowanej.



Rys. 13. Schemat elektryczny układu termostatu zrealizowanego praktycznie

Jako wzmacniacz napięciowy zastosowano wzmacniacz operacyjny scalony SN72709N (Texas Instruments). Małe napięcie dryftu termicznego tego wzmacniacza odniesione do wejścia ma pomijalny wpływ na dokładność stabilizacji temperatury. Zastosowano ujemne sprzężenie zwrotne, które ustala taką wartość wzmocnienia napięciowego wzmacniacza, jaka zapewnia stabilną pracę termostatu przy odpowiednio dużym wzmocnieniu pętlowym. Dla rezystancji sprzęgającej  $4,7 \text{ M}\Omega$  uzyskuje się stabilną pracę termostatu przy wzmocnieniu pętlowym około 350. Termostat zaczyna pracować niestabilnie przy wzroście tej rezystancji do około  $9 \text{ M}\Omega$ , a zatem zapas stabilności jest dość duży. Mimo to sposób ustalania się temperatury wewnętrznej termostatu po włączeniu jest już periodyczny gasnący przy  $R = 4,7 \text{ M}\Omega$ .

Istotny problem stanowi pomiar zmian temperatury wewnętrznej termostatu pod wpływem zmian temperatury otoczenia. Wprowadzenie bowiem do naczynia wewnętrznego dodatkowego czujnika z wielu względów nie jest możliwe (między innymi ze względu na miniaturyzację naczynia i brak miejsca na dodatkowy czujnik). Z drugiej jednak strony pomiar charakterystyki statycznej termostatu z pustym naczyniem wewnętrznym (bez hallotronu) nie byłby obiektywny, bo nie odpowiadałby rzeczywistym warunkom pracy urządzenia. Z tego względu do pomiarów zmian temperatury wewnętrznej termostatu pod wpływem zmian temperatury otoczenia wykorzystano ten sam termistor, który pełni

rolę czujnika w termostacie. Jeśli założyć bowiem niewrażliwość części elektrycznej termostatu na zmiany temperatury otoczenia, wówczas:

$$|\Delta T_T| = \frac{|\Delta U_3|}{K'}, \quad (23)$$

przy czym:

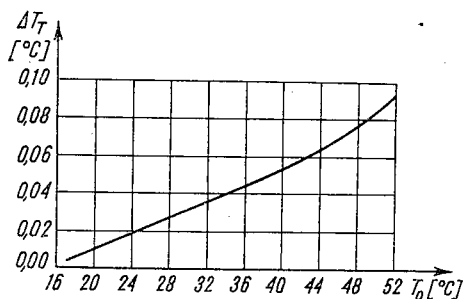
$\Delta U_3$  — zmiana napięcia na grzejniku,

$$K' = K_m K_u K_u',$$

$K_u'$  — wzmacnienie napięciowe stopnia mocy.

W zaprojektowanym układzie  $K' = 110 \text{ VK}^{-1}$ .

Charakterystykę statyczną termostatu zmierzoną w oparciu o powyżej przytoczony sposób pomiaru temperatury wewnętrznej termostatu przedstawiono na rys. 14. Widać stąd, że przy zmianach temperatury otoczenia  $25 \pm 10^\circ\text{C}$  zmiany temperatury wewnętrznej są równe około  $\pm 0,025^\circ\text{C}$ . Przechwyt termostatu jest zatem równy około  $2,5 \cdot 10^{-3}$ .



Rys. 14. Zależność zmian temperatury wewnętrznej termostatu od temperatury otoczenia

#### Wykaz ważniejszych parametrów termostatu

1. Moc grzejna w stanie ustalonym przy  $T_o = 25^\circ\text{C}$  — 0,6 W.
2. Moc grzejna w okresie dogrzewania — 2 W.
3. Czas dogrzewania  $\langle 5 \text{ min. przy } T_o \rangle 15^\circ\text{C}$ .
4. Nominalna temperatura wewnętrzna termostatu —  $50^\circ\text{C}$ .
5. Zmiany temperatury wewnętrznej —  $\pm 0,025^\circ\text{C}$  przy zmianach temperatury otoczenia  $25 \pm 10^\circ\text{C}$ .
6. Przechwyt termostatu  $< 0,003$  przy  $T_o \leq 30^\circ\text{C}$  oraz  $< 0,006$  przy  $T_o \leq 45^\circ\text{C}$ .
7. Wymiary naczynia wewnętrznego —  $35 \times 17 \times 3$ .
8. Rodzaj izolacji cieplnej — styropian.
9. Grubość izolacji cieplnej — 1 mm.
10. Wymiary naczynia zewnętrznego —  $52 \times 27 \times 7$ .
11. Napięcie zasilania układu elektrycznego termostatu  $\pm 20 \text{ V}$ .
12. Dopuszczalne zmiany napięcia zasilania  $\pm 15\%$ .
13. Pobór mocy  $< 3 \text{ W}$ .

## 4. WNIOSKI

Badania wykazały, że zrealizowany układ termostatu spełnia postawione mu wymagania i nadaje się do zastosowania w praktyce. Mimo to celowe byłoby zastanowić się, w jaki sposób jeszcze bardziej można poprawić osiągnięte rezultaty. Zarówno analiza jak i pomiary wykazały, że główne ograniczenie dokładności stabilizacji temperatury termostatu stanowi niestabilna praca termoregulatora przy przekroczeniu pewnej granicznej wartości wzmocnienia pętlowego. Wobec zastosowania wysokostabilnych oporników wzorcowych w mostku, scalonego wzmacniacza operacyjnego o małym dryfie napięciowym odniesionym do wejścia oraz czujnika termistorowego o dużym TWO wszelkie inne źródła niestabilności temperatury wewnętrznej są do pominięcia. Gdyby udało się zatem zbudować taki termostat, w którym dałoby się zastosować znacznie większe stabilne wzmocnienie pętlowe, można by dokładność stabilizacji poprawić co najmniej o rząd. Ponieważ podstawowym źródłem inercyjności termostatu jest naczynie termostatyczne (elektryczne stałe czasowe są pomijalnie małe) należy oczekiwać poprawy warunków stabilności poprzez zastosowanie odpowiedniej technologii wykonania naczynia termostatycznego. Wobec ograniczeń na grubość izolacji cieplnej nie da się jednak zwiększyć znacznie oporności cieplnej między naczyniem wewnętrznym a zewnętrznym. Pozostaje więc minimalizować pojemności cieplne grzejnika i czujnika  $C_g$  i  $C_T$  oraz oporności cieplne  $R_{gn}$  i  $R_{nT}$  przy równoczesnym zapewnieniu możliwie dużej pojemności cieplnej naczynia wewnętrznego. Gdyby udało się zatem pokryć naczynie dostatecznie cienką warstwą materiału izolacyjnego, a następnie napylić na tę warstwę materiał rezystancyjny na grzejnik, można by znacznie zmniejszyć  $C_g$  i  $R_{gn}$ . W podobny sposób można by napylić na powierzchnię naczynia wewnętrznego czujnik wykonany z materiału o dużym TWO, co zmniejszyłoby  $R_{nT}$  i  $C_T$ .

Poprawę warunków stabilności daje się uzyskać również na drodze elektrycznej włączając w pętlę sprzężenia zwrotnego integrator Millera o odpowiednio dobranym współczynnikiem całkowania. Można by wówczas zastosować znacznie większe wzmocnienie pętlowe. Takie rozwiązanie zwiększa jednak znacznie czas dogrzewania termostatu oraz powoduje wzrost bezwładności jego działania (tzn. termostat dobrze stabilizuje tylko bardzo powolne zmiany temperatury).

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. S. Hahn, R. Kuński, Termostaty elektroniczne, WNT, Warszawa 1968.
2. Z. Jellonek, Analiza działania termostatu z termoregulatorem kontaktowym, Przegląd Telekomunikacyjny, nr 9, 1946, s. 256—262.
3. J. Osowski, Zarys rachunku operatorowego, WNT, Warszawa 1965.

R. DRAHOKAUPIL

## A MINIATURE THERMOSTAT FOR HALLOTRON PROBE

## Summary

In the paper the operation principle, analysis and construction of a miniature bridge thermostat with thermal coupling and continuous control are discussed. The thermostat is used to stabilize hallotron temperature. The obtained parameters of the thermostat are given. Conclusions and suggestions concerning possibilities of improving the parameters are presented.

R. DRAHOKAUPIL

## UN THERMOSTAT EN MINIATURE POUR HALLOTRON

## Résumé

L'article décrit le principe d'action, l'analyse et une réalisation pratique d'un thermostat en pont avec le couplage thermique et le réglage continu. Le thermostat a été construit pour la stabilisation de la température de hallotron. On y a présenté les résultats de mesures de paramètres de thermostat en donnant aussi les propositions pour perfectionner les paramètres.

R. DRAHOKAUPIL

## MINIATURTHERMOSTAT FÜR EINE HALLOTRONSONDE

## Zusammenfassung

In der Arbeit wurde die Wirkungsweise, die Analyse und die praktische Realisierung eines miniaturisierten Brückenthermostats mit einer mit ständiger thermischer Regulation versehenen Rückkopplung besprochen. Dieser Thermostat wurde zur Temperaturstabilisierung des Hallotrons angewandt. Einige Meßergebnisse der am Studienmodell erhaltenen Parameter sowie auch einige Hinweise zur Verbesserung dieser Parameter wurden angeführt.

Р. ДРАХОКАУПИЛЬ

## МИНИАТЮРНЫЙ ТЕРМОСТАТ ДЛЯ ДАТЧИКА ХОЛЛА

## Резюме

В работе описан принцип действия, анализ и практическая реализация миниатюрного термостата действующего непрерывно. Этот термостат предназначен для стабилизации температуры датчика Холла. Приведены результаты измерений и представлены выводы.