

na powierzchnię warstwy czulej. Np. firma Laser Precision Corporation [14] wyprodukowała do tego celu detektor piroelektryczny KT-2000 przeznaczony do współpracy z laserem CO_2 , który ma wartość $W_{\text{dop}} = 100 \text{ W/cm}^2$.

Ostatnio produkowane detektory piroelektryczne stanowią postęp w dziedzinie poszukiwań. Są one dość uniwersalne, lecz ich parametry nie odbiegają od parametrów detektorów stosowanych dotychczas.

LITERATURA

1. P. Kruse, L. Mc Glauchlin, R. Mc Quistan, *Elements of Infrared Technology*, London 1963.
2. M. R. Holter, S. Nudelman, G. M. Smits, W. L. Wolfe, G. J. Zissis, *Fundamentals of Infrared Technology*, Mc Millan, New York 1963.
3. I. Simon, *Promieniowanie podczerwone*, PWN, Warszawa 1968.
4. M. Jatteau, *Infrared Thermography Equipment for Medical Application*, Philips Technical Review, 8, 1969, 278—289.
5. M. Jatteau, *Thermographe fonctionnant á 4 ou 10 microns et permettant le tracé précis des isothermes*, Acta Electronica, 12, 1, 1969, 21—62.
6. C. M. Cade, B. V. Barlow, *Fundamental Design Principles for Thermographic Scanners*, Sci. Prog. Oxf., 55, 1967, 167—185.
7. S. F. Jacobs, M. Sargent, *Photon Noise Limited D^* for Low Temperature Backgrounds and Long Wavelengths*, Infrared Physics, 10, 1970, 233—235.
8. *AGA Thermovision System 680/102B — Operating Manual*.
9. K. Stahl, *Infrarot Detektorren*, Optik, 1, 1968, 11—30.
10. M. Smollett, *The Properties and Performance of Some Modern Infrared Radiation Detectors*, Infrared Physics, 1, 1968, 3—7.
11. Y. Ueda, H. Yamashita, T. Yamaoka, H. Sei, *Infrared Detectors Using Semiconductors*, Fujitsu, 1, 1971, 53—83.
12. *Półprzewodnikowe Detektory Promieniowania*, Materiały z Konferencji, Warszawa 7—8.II.1972.
13. *Mullard Infrared Detectors — Catalogue of Mullard Limited*, 1970.
14. *Laser Precision Corporation Catalogue*, 1972.
15. H. B. Beerman, *Pyroelectric Infrared Radiation Detector*, Am. Ceramic Society Bull., 8, 1967, 737—740.
16. W. M. Doyle, *Pyroelectric Detectors*, Laser Focus Magazine, 7, 1970, 34—37.
17. A. M. Glass, *Investigation of Electrical Properties of SBN with Special Reference to Pyroelectric Detection*, Journal of Applied Physics, 12, 1969, 4699—4713.
18. B. C. McIntosh, D. W. Sypek, *Pyroelectric Detector Arrays*, Laser Focus Magazine, 12, 1972, 38—40.

T. PIOTROWSKI

INFLUENCE OF I.R. DETECTORS FEATURES ON THEIR USEFULNESS IN THERMOGRAPHY

Summary

Recently great progress in thermography technologies has been made. Because of it a new problem appeared: usefulness of I.R. detectors to these applications. The author analyses the influence of an I.R. detector parameters on its application in thermography. NEP , D^* , sensitivity, time constant and spectral range of the detector are taken into account. An example of a detector whose spectral range is well matched to the second atmospheric window (8—13 μm) and to human body emittance is detector CdHgTe . Comparison between CdHgTe and PbTe photoconductive detectors shows that those latter are better suited to higher target temperatures. Formulas for thermal and angular resolutions of thermographic assembly

as a function of detector parameters are discussed. Commonly used thermographs and detectors, with which they are equipped are mentioned. Parameters of I.R. detectors used in thermograph 15-71-03 made in Institute of Electron Technology, Warsaw Technical University, are described.

T. PIOTROWSKI

L'INFLUENCE DE LA CARACTÉRISTIQUE DES DÉTECTEURS INFRA-ROUGE SUR LEUR UTILITÉ DANS LA THERMOGRAPHIE

R é s u m é

Par suite du développement rapide de la technique de thermographie dans le monde le besoin est né d'estimer l'utilité des détecteurs du rayonnement infra-rouge pour les applications dans ce domaine. Dans l'article on a examiné l'influence des propriétés caractéristiques des détecteurs du rayonnement infra-rouge sur leur application aux dispositifs thermographiques. On a tenu compte des paramètres suivants: NEP , D^* , la sensibilité, et la constante de temps. La gamme spectrale de la sensibilité des détecteurs CdHgTe est bien ajustée à la deuxième fenêtre du passage de l'atmosphère et à la gamme de l'émission du corps humain. De la comparaison des détecteurs photoconducteurs CdHgTe et PbTe il résulte que ces derniers s'adoptent mieux au travail dans les températures du source plus élevées. On a décrit les relations déterminantes la capacité diviseur, thermique et angulaire, du thermographe. On a énuméré les types des thermographes utilisés le plus souvent et les détecteurs infra-rouge appliqués à leur construction. Enfin, on a donné les paramètres des détecteurs infra-rouge utilisés dans le thermographe 15-71-03 construit à l'Institut de La Technologie Électronique de l'École Polytechnique de Varsovie.

T. PIOTROWSKI

EINFLUSS DER EIGENSCHAFTEN VON INFRAROTSTRAHLUNGSDETEKTOREN AUF IHRE BRAUCHBARKEIT FÜR THERMOGRAPHEN

Z u s a m m e n f a s s u n g

Im Zusammenhang mit der schnellen Entwicklung in der ganzen Welt der Thermographentechnik entstand das Problem einer Beurteilung der Einsatzmöglichkeit von Infrarotstrahlungsdetektoren. In dieser Bearbeitung wurde der Einfluss charakteristischer Eigenschaften von Infrarotstrahlungsdetektoren bei ihrer Anwendung in thermographischen Vorrichtungen erwogen. Unter anderem wurden folgende Parameter berücksichtigt: NEP , D^* , Empfindlichkeit, Zeitkonstante. Der CdHgTe-Detektor ist ein Beispiel guter Anpassung dessen Spektralempfindlichkeitsbereichs an den zweiten Abschnitt atmosphärischer Durchlässigkeit (8—13 μm) sowie an den Lichtausstrahlungsbereich des menschlichen Körpers. Aus dem Vergleich der Photowiderstandsdetektoren CdHgTe und PbTe ist ersichtlich, dass die letztgenannten dem Einsatz bei höheren Gegenstandstemperaturen besser angepasst sind. Es wurden im weiteren die das thermische und Winkelverteilungsvermögen des Thermographen bezeichnenden Abhängigkeiten diskutiert. Die meist verbreiteten Thermographentypen und die darin angewandten Detektoren wurden aufgezählt. Es wurden Parameter der im Thermographen 15-71-03 angewandten, und vom Institut für Elektronische Technologie der Technischen Hochschule in Warszawa hergestellten PbTe-Detektoren angeführt.

Т. ПИОТРОВСКИ

ВЛИЯНИЕ СВОЙСТВ ДЕТЕКТОРОВ ИНФРАКРАСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ИХ ПРИМЕНЯЕМОСТЬ В ТЕРМОГРАФИИ

Р е з ю м е

Бурное развитие мировой термографической техники привело к постановке задачи оценки применимости детекторов инфракрасного излучения. В статье проанализировано влияние характеристических свойств этих детекторов на их применяемость в термографических установках. Учтены

в частности параметры NEP , D^* чувствительность, постоянную времени. Примером детектора со спектральным диапазоном чувствительности хорошо подобранным ко второму окну пропускания атмосферы (8—13 μm) и диапазону излучения человеческого тела является детектор CdHgTe . Из сравнения фотопроводимых детекторов CdHgTe и PbTe вытекает, что вторые из них лучше приспособлены к работе в диапазоне более высоких температур объекта. Обсуждены зависимости определяющие термическую и угловую разрешающую способность термографа. Перечислены чаще всего встречаемые типы термографов и применяемые в них детекторы. Приведены параметры детекторов PbTe применяемых в термографе 15-17-03 построенном в Институте Электронной Технологии Варшавского Политехнического Института.



Ciśnieniowy model strefy przykatodowej łuku próżniowego

KAZIMIERZ STEFANIAK (POZNAŃ)

Instytut Elektroenergetyki Politechniki Poznańskiej

Otrzymano 8.2.1974

Artykuł zawiera rozważania teoretyczne i wyniki obliczeń niektórych parametrów strefy przykatodowej łuku próżniowego. Pozwoliły one na zbudowanie modelu tej strefy, który, jak się wydaje, lepiej niż dotychczasowe pozwala na wyjaśnienie pewnych zjawisk związanych z rozpatrywaną formą wyładowania. Dotyczy to przede wszystkim zjawisk powstawania, rozwoju, zaniku i dzielenia się plamek katodowych, oraz ich chaotycznego ruchu po powierzchni katody. Model ten ponadto ułatwia wyjaśnienie ruchu wstecznego. Bazuje on na stwierdzonym, niezwykle wysokim, ciśnieniu par metalu elektrod w strefie bezpośredniej nad plamką.

1. WPROWADZENIE

W opisie zjawisk łuku elektrycznego szczególne miejsce zajmują zjawiska zachodzące w plamce katodowej. Liczni badacze są zgodni co do tego, że najważniejszymi, z punktu widzenia powstawania, podtrzymywania i gaszenia łuku próżniowego, są procesy zachodzące na samej katodzie i w strefie bezpośrednio do niej przylegającej, tak zwanej przykatodowej. Stąd też zjawiska przyelektrodowe są do chwili obecnej przedmiotem szerokich badań.

Lee, Greenwood i Polinko [1] udowodnili jak się wydaje zadowalająco twierdzenie, że podstawowym problemem istnienia łuku próżniowego jest zapewnienie koniecznej koncentracji par przy katodzie. Wydaje się, że klasyczny już w tej chwili model łuku próżniowego Reece'a [2] w niedostatecznym stopniu uwzględnił intensywność parowania materiału katody w plamce. Można sądzić, że właśnie ta konieczność zapewnienia dostatecznej koncentracji par może wyjaśnić szereg zjawisk zachodzących na katodzie i w bezpośrednim jej sąsiedztwie.

Należy się spodziewać, że ze względu na specyficzne warunki otoczenia łuku (próżnia) ilość wyprodukowanej pary musi być znaczna. Ponadto spełnienie wymogu dostatecznej koncentracji narzuca niejako określone wymagania odnośnie do temperatury plamki katodowej, to jest miejsca produkującego potrzebną parę metalu i bezpośrednio z nią związanej gęstości prądu.

Niżej przedstawiono próbę ilościowego określenia wspomnianych parametrów, wraz z wypływającymi stąd wnioskami.

Z e s t a w s y m b o l i

- B, C — stałe parowania metalu w próżni,
 E_k — natężenie pola elektrycznego w strefie ładunku przestrzennego,
 I — natężenie prądu łuku,
 j — gęstość prądu w plamce katodowej,
 k — stała Boltzmana,
 L — utajone ciepło parowania,
 M — ciężar molekularny,
 m_o — masa atomu lub cząsteczki,
 N_a — gęstość przestrzenna atomów obojętnych,
 p — ciśnienie par,
 $\sum P_{we}$ — suma gęstości mocy doprowadzonej do plamki katodowej,
 $\sum P_{wy}$ — suma gęstości mocy odprowadzonej z plamki katodowej,
 r_o — promień plamki katodowej,
 T — temperatura pary,
 T_k — temperatura plamki katodowej,
 V_{ar} — średnia arytmetyczna prędkość cząsteczek,
 W, μ — szybkość parowania,
 λ — przewodność cieplna.

2. PAROWANIE KATODY

2.1. Ciśnienie par w obrębie plamki i bezpośrednio nad jej powierzchnią

Ciśnienie par materiału katody wyznaczono dla różnych wartości prądu łuku I w funkcji gęstości j , oraz odwrotnie w funkcji nat. prądu I przy różnych wartościach j .

Przy wykonywaniu obliczeń przyjęto upraszczające założenie, że para wydzielona z katody zachowuje się jak gaz doskonały. Umożliwiło to skorzystanie ze znanej zależności na ciśnienie

$$p = k \cdot N_a \cdot T. \quad (1)$$

Gęstość przestrzenną atomów obojętnych wyznacza wzór:

$$N_a = \frac{4\mu}{V_{ar}} \quad (2)$$

Szybkość parowania, zgodnie z pracami Dushmana [3], dla metalu w próżni, można przedstawić następująco:

$$\log W = C - 0,5 \log T - \frac{B}{T}, \quad (3)$$

przy czym powiązanie między μ a W jest znane, w postaci

$$\mu = \frac{W}{m_o}. \quad (4)$$

Średnią arytmetyczną prędkość cząsteczek V_{ar} można otrzymać znając temperaturę T

$$V_{ar} = \sqrt{\frac{8}{\pi} \cdot \frac{k}{m_o} \cdot T}. \quad (5)$$

We wzorach (1), (3), (5) temperaturę pary T przyjmowano równą temperaturze płamki katodowej. Wyznaczano ją z bilansu mocy dla tejże płamki, zakładając jako obowiązującą emisję $T-F$ (termopolową):

$$\sum P_{we} - \sum P_{wy} = 0. \quad (6)$$

Na moc doprowadzoną do płamki składa się głównie moc dostarczana przez jony dodatnie. Wobec tego gęstość mocy doprowadzanej do płamki z uwzględnieniem jonów odbitych od katody można przedstawić następująco:

$$\sum P_{we} = (1-s) \cdot j[U_k + U_j + U_T - U_\varphi - \alpha_+(U_k + U_T)]. \quad (7)$$

We wzorze (7) napięcia U wyrażają odpowiednio:

U_k — spadek napięcia w strefie ładunku przestrzennego,

U_j — napięcie jonizacji par metalu katody,

U_T — napięcie wyrażające energię cieplną jonów,

$U_\varphi = U_\varphi(E_k, T_k)$ — wynika z obliczeń emisji, reprezentuje ono stratę mocy w płamce spowodowaną emisją elektronów [4].

Pozostałe wielkości to:

$s = s(j, T_k)$ przedstawia część prądu przenoszoną przez elektrony [5, 6], wynika również z obliczeń emisji,

$(1-s) \cdot j$ — gęstość prądu jonów dodatnich,

α_+ — współczynnik odbicia (przyjęto 0,12 wg [7, 8]).

Gęstość mocy odprowadzonej wyznaczono z zależności

$$\sum P_{wy} = s \cdot j \cdot U_\varphi + 4,19 \frac{LW}{M} + 4,19 \frac{\lambda(T_k - T_o)}{r_o}. \quad (8)$$

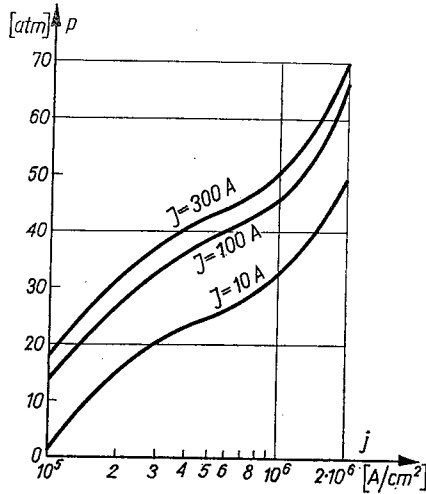
Człon pierwszy prawej strony równania (8) przedstawia gęstość mocy traconej wskutek emisji prądu elektronów, człon drugi gęstość mocy traconej wskutek parowania, człon trzeci wreszcie gęstość mocy traconej na przewodzenie ciepła.

Pozostałe składniki mocy odprowadzonej z płamki pominięto jako znacznie mniejsze [9].

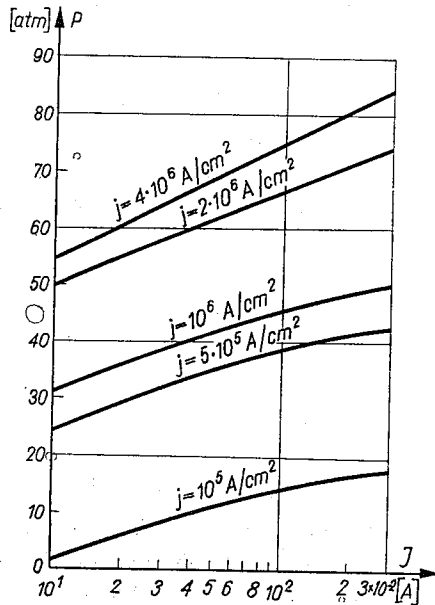
Korzystając z przytoczonych zależności obliczono ciśnienie par dla przypadku katody miedzianej.

Wyniki ilustrują rysunki 1 i 2. Z zamieszczonych na rysunkach 1 i 2 wykresów wynika, że ciśnienie par wydzielonych z katody jest bardzo duże i że wzrasta ono zarówno przy wzroście natężenia prądu łuku, jak i gęstości prądu płamki. Gwałtowny wzrost tegoż ciśnienia następuje po przekroczeniu przez gęstość prądu wartości około 10^6 A/cm².

Należy w tym miejscu dodać, że obliczone wyżej ciśnienia uwzględniają jedynie gęstość przestrzenną atomów powstałą z parowania netto. W rzeczywistości gęstość ta może być



Rys. 1. Ciśnienie par w plamce katodowej w funkcji gęstości prądu dla katody miedzianej



Rys. 2. Ciśnienie par w plamce katodowej w funkcji prądu łuku dla katody miedzianej

większa o cząstki powstałe z odbitych i zneutralizowanych jonów dodatnich. W pracy [9] wykazano, że gęstości cząstek z tego źródła są o dwa rzędy mniejsze od wynikających z samego parowania netto, dlatego w przedstawionych obliczeniach gęstość tę pominięto.

Jest rzeczą oczywistą, że tak duże ciśnienia mogą panować jedynie w obrębie samej plamki i bezpośrednio nad jej powierzchnią, zważywszy na fakt, że dotyczy to wszystko łuku próżniowego. W miarę oddalania się od powierzchni katody ciśnienie to musi zatem gwałtownie maleć.

Dodajmy w tym miejscu, że pod pojęciem plamki katodowej będziemy w wyidealizowanym przypadku rozumieć półkulę o promieniu r_0 i powierzchni πr_0^2 leżącej na płaszczyźnie katody.

Z zależności (2) wynika, że zmniejszenie gęstości przestrzennej atomów N_a , przy stałej szybkości parowania μ , może nastąpić jedynie poprzez wzrost ich prędkości V_{ar} , uwzględniając nawet fakt dużego rozpraszania wyparowanych atomów poza obszar bezpośredniego wyładowania.

Wzrost prędkości wyparowanych atomów nie może nastąpić jedynie na skutek wzrostu temperatury, jak to sugerowałoby równanie (5). Wzrost temperatury musiałby bowiem pociągnąć za sobą i wzrost ciśnienia, jako że korzystając z zależności (1), (2) i (4) można otrzymać na ciśnienie wyrażenie:

$$p = D \cdot \sqrt{T}, \quad (9)$$

gdzie $D = \sqrt{\frac{2\pi k}{m_0}} \cdot W$ jest stałą, jeśli przyjąć również za stałą szybkość parowania W , co będzie miało miejsce przy stałej temperaturze plamki katodowej.

Można stąd wyciągnąć wniosek, że aby ciśnienie atomów obojętnych w miarę oddalania się od powierzchni katody mogło maleć musi mieć miejsce ich przyspieszenie.

2.2. Strumienie par materiału katody

Jak się okazało na podstawie badań eksperymentalnych [10, 11, 12, 13, 14], wspomniane przyspieszenie rzeczywiście ma miejsce, jakkolwiek do chwili obecnej nie jest znany dokładnie mechanizm tego przyspieszenia. Stwierdzono występowanie tak zwanych strug lub strumieni par materiału katody poruszających się ze znacznymi prędkościami przekraczającymi wartości, które wynikałyby z ich temperatury.

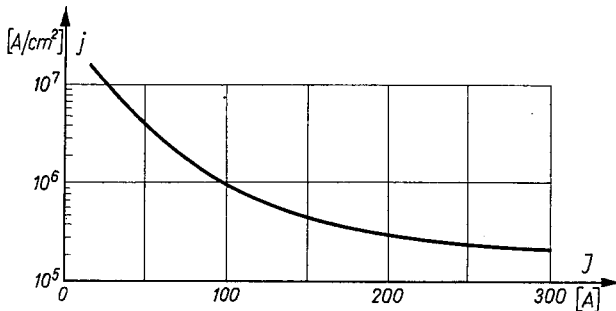
Już pierwsze pomiary prędkości tych strumieni dokonane przez Tanberga [10] dały wartość przekraczającą 10^6 cm/s. Następne pomiary przy stosowaniu różnych metod dały również podobne wyniki. W pracy [14] stwierdzono ponadto, że metale z niską temperaturą wrzenia i niską przewodnością cieplną tworzą intensywne strumienie par, ale ze stosunkowo małymi prędkościami.

Łatwo się przekonać, że otrzymane prędkości rozpatrywanych strumieni przekraczają o rząd wielkości średnią arytmetyczną prędkość atomów, wynikającą z ich temperatury. Wynika stąd również, co już wyraźnie podkreślono, że musi mieć miejsce ich przyspieszenie już po opuszczeniu katody. Należy sądzić, że przyczyną powstawania szybkich strumieni par katody w łuku próżniowym są nadzwyczaj wysokie lokalne ciśnienia tych par bezpośrednio nad plamką katodową (patrz rys. 1 i 2). Jeśli uprzytomnić sobie, że ciśnienia otaczającego środowiska w łuku próżniowym są bardzo niskie, a równocześnie szybkość parowania duża, to jest rzeczą wielce prawdopodobną powstawanie czegoś w rodzaju *tłoka ciśnieniowego*, który może być źródłem przyspieszania cząsteczek.

Tezę tę można sformułować również w odwrotnym kierunku: *ponieważ dla przypadku łuku próżniowego ciśnienie otaczających gazów jest bardzo niskie, ma miejsce szybkie rozpra-*

szanie i kondensacja par metalu, wydzielanych głównie z plamki katodowej, a więc szybkość parowania, a dalej i ciśnienia tych par przy samej plamce muszą być wysokie; chodzi bowiem o zapewnienie w rejonie przykatodowym wystarczającej koncentracji cząstek co, jak stwierdzono uprzednio, jest podstawowym warunkiem istnienia tego typu łuku.

W łuku ciśnieniowym otaczający gaz ogranicza niewątpliwie rozpraszanie się wydzielanych par, co pozwala na zredukowanie szybkości parowania nawet przy założeniu, że tylko jony tych par będą brały udział w przenoszeniu prądu [15]. Pozwala to na wyciągnięcie z pozoru paradoksalnego wniosku, że jest możliwe, aby w łuku normalnym ciśnienie nad plamką było niższe aniżeli w przypadku łuku próżniowego. W rzeczywistości jest to całkiem prawdopodobne. Świadczy o tym chociażby zgodność wniosków, które wynikają z przyjętego w ten sposób modelu z danymi eksperymentalnymi, czy nawet z wyprowadzonymi z innych założeń rezultatami Eckera [16]. Potwierdzają to również prace Robert-



Rys. 3. Minimalna wartość gęstości prądu w funkcji jego natężenia dla katody Cu

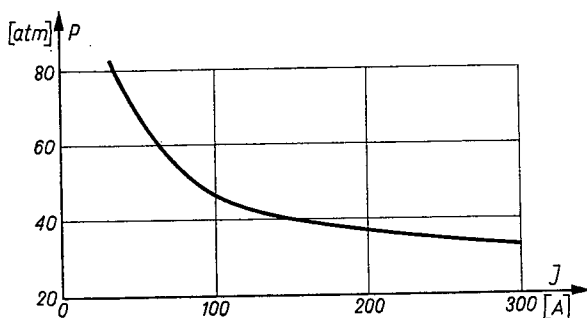
sona [17, 18]. Stwierdził on szybkie malenie siły wywieranej na katodę wraz ze wzrostem ciśnienia otoczenia, w którym pali się łuk.

Przyjęcie powyższej tezy pozwala wyciągnąć wniosek, że prędkość strumienia par katody łuku próżniowego powinna być proporcjonalna do lokalnego ciśnienia nad plamką. Ponieważ ciśnienie to gwałtownie rośnie wraz ze wzrostem gęstości prądu j (patrz rys. 1), więc wzrost wartości j powinien powodować zwiększenie prędkości strumienia. Pokrywa się to całkowicie z rezultatami Eckera [16]. Z danych rys. 2 wynikałoby, że prędkość powinna również być tym większa im większe jest natężenie prądu łuku I . Tak byłoby jednakże tylko w przypadku, gdyby zmiany prądu nie pociągały za sobą zmian wartości j . W rzeczywistości istnieje jednak ścisła zależność $j = f(I)$ dla łuku próżniowego. W pracach [19, 20] przedstawiono metodę ustalenia tej zależności. Opierała się ona na określeniu rozmiarów obszaru zawierającego linie torów jonowych, jako że jony właśnie tworzą ładunek przestrzenny decydujący o mechanizmie emisji katody oraz są głównym źródłem mocy doprowadzonej do plamki katodowej. Założono, że jednym z warunków koniecznych dla zapewnienia dopływu jonów do katody w obrębie jej plamki a nie poza nią, jest aby ciśnienie magnetyczne wywołane przepływem prądu w strefie stopy katodowej było większe od ciśnienia cząstkowego jonów wynikającego z ich koncentracji w rozpatrywanej strefie. Przeprowadzone obliczenia bazujące na powyższym założeniu pozwoliły wyznaczyć minimalną wartość gęstości prądu j_{min} pojedynczej plamki lub zespołu plamek położonych

bardzo blisko siebie. Wynik tychże obliczeń podano na rysunku 3. Korzystając z danych rysunków 1, 2, 3 można określić zależność ciśnienia par p od natężenia prądu I , z uwzględnieniem odpowiedniej zmiany gęstości prądu wraz ze zmianą natężenia. Zależność tę podano na rysunku 4.

Można zatem sądzić, że wzrost natężenia prądu łuku, powodując malenie ciśnienia par zgodnie z przyjętą hipotezą, powinien w rzeczywistości wpływać na zmniejszenie się prędkości strumienia katodowego.

Jak wynika z rysunku 3, gęstości prądu dla przypadku łuku próżniowego są dużo większe od spotykanych w łuku normalnym ciśnieniowym. Są liczne eksperymentalne potwierdzenia powyższego wniosku [19, 20, 21, 22, 23]. W świetle rozpatrywanego modelu jest to całkowicie zrozumiałe, bowiem zapewnienie wystarczającej szybkości parowania dla podtrzymania łuku próżniowego narzuca warunek dużej koncentracji energii doprowa-



Rys. 4. Ciśnienie par nad plamką katodową w funkcji natężenia prądu łuku przy uwzględnieniu zależności $j = f(I)$. Katoda Cu

dzonej do plamki, co wiąże się bezpośrednio z koniecznością występowania dużych gęstości prądu w plamce.

Podsumowując powyższe rozważania można sformułować następujące wnioski odnośnie prędkości strumieni par opuszczających katodę.

— Prędkość ta będzie wzrastać w miarę obniżania ciśnienia otoczenia, w którym pali się łuk. Obniżanie się bowiem tego parametru zwiększa gradient ciśnienia, głównie wskutek wzrostu gęstości prądu w plamce.

— Dla przypadku łuku próżniowego prędkość ta maleje wraz ze wzrostem natężenia prądu łuku.

— Maksymalna prędkość będzie występować bezpośrednio po zainicjowaniu łuku, ponieważ w tym momencie parowanie będzie najintensywniejsze. Później na skutek przeciwdziałania własnego ciśnienia par, szybkość parowania maleje. Pozwala to na utrzymanie się łuku przy zmniejszonej wartości gęstości prądu. Zmniejszanie się gęstości prądu w miarę upływu czasu palenia się łuku zostało zaobserwowane wyraźnie w pracach Rachowskiego, Kanziela i Zykovej [25, 26, 27].

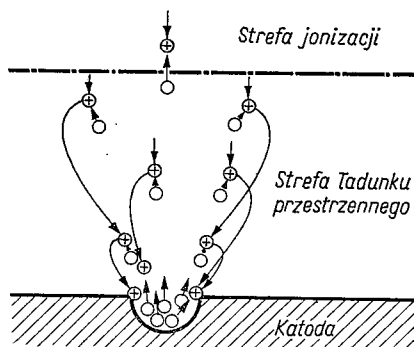
— Przyjęta hipoteza daje rezultaty podobne do otrzymanych w pracy Eckera [16], jak również może wyjaśnić obserwacje poczynione przez Pliutto i innych [14] odnośnie prędkości strumieni par dla różnych materiałów katody.

3. MODEL I ZACHOWANIE SIĘ STREFY PRZYKATODOWEJ

3.1. Model strefy przykatodowej łuku próżniowego

Z rozważań punktu poprzedniego i zamieszczonych tam rysunków wynika, że ciśnienia par metalu w plamce i bezpośrednio nad nią są bardzo wysokie. Ciśnienia te mogą być źródłem przyspieszeń i uzyskiwania przez wyparowane atomy prędkości przekraczających 10^6 cm/s.

W pracy [20], opierając się na kinetycznej teorii gazów przy przyjęciu modelu sprężystych kul i dla założonych zderzeń sprężystych, uwzględniając polaryzacyjne przyciąganie molekuł jonami, wyznaczono średnią drogę swobodną jonu. Przy wyznaczonych w uprzed-



Rys. 5. Rozkład jonów i ich torów w rejonie przykatodowym łuku próżniowego (⊕ — jon, o — atom obojętny, nie zaznaczono na rysunku elektronów)

nio podany sposób ciśnieniach, droga ta jest mniejsza od definiowanej często w modelach łukowych strefy ładunku przestrzennego [2, 9].

Wypływa stąd wniosek, że w strefie tej musi dochodzić do zderzeń między jonami dążącymi do katody ze strefy jonizacji a molekułami lub atomami zawartymi w strumieniu par metalu, dążącymi w kierunku przeciwnym. Ponieważ prędkość strumienia par jest rzędu 10^6 cm/s i więcej, a prędkości skierowane jonów osiągnięte na ich drodze swobodnej tylko rzędu 10^5 cm/s (przy rozpatrywanych natężeniach pól elektrycznych rzędu 10^7 V/cm), jest możliwe, przy założonym zderzeniu sprężystym, nawet odwrócenie kierunku ruchu jonu.

Jony zatem będą miały jak gdyby utrudniony dostęp do centrum plamki, tam gdzie gęstość par będzie największa. Może to być przyczyną powstawania swego rodzaju parasola jonowego wokół ośrodka wydzielania się par, co schematycznie przedstawiono na rys. 5. Dzięki temu jony będą osiągać katodę przede wszystkim na granicach plamki. To właśnie, obok możliwego dodatkowego wpływu krawędzi powstałych na granicy stanu ciekłego i stałego, może być przyczyną obserwowanej wyższej gęstości prądu na krawędziach plamki [26]. Jony dążące do katody w zewnętrznej warstwie strumienia gęstych par będą miały tendencję, na skutek działania sił elektrodynamicznych, do skupiania się w pewien rodzaj wiązek, które osiągając katodę mogą powodować wystąpienie w tym miejscu

małych plamek przylepionych do płamki macierzystej. Rejestrowano już tego typu zjawiska w [9]. Przedstawiony na rys. 5 model wydaje się dobrze tłumaczyć powstawanie takich właśnie *satelitarnych* małych plamek. Równie dobrze można na jego podstawie wyjaśnić takie zjawiska, jak rozpadanie się plamek katodowych łuku próżniowego, inicjowanie nowych, ich chaotyczny ruch po powierzchni katody, czas życia pojedynczej płamki i jego zależność od parametrów cieplnofizycznych materiału katody. Poświęćmy zatem tym zagadnieniom nieco uwagi.

3.2. Interpretacja obserwacji eksperymentalnych zachowania się strefy przykatodowej łuku próżniowego

Zwiększając się z czasem ciśnienie par, na skutek zbyt wolnego ich przemieszczania w kierunku na zewnątrz od katody w porównaniu z szybkością parowania, może być przyczyną rozszerzania się granic obszaru przykatodowego i oczywiście granic samej płamki. To rozszerzanie się powierzchni, po pewnym czasie od momentu zainicjowania, może doprowadzić do zmniejszenia się gęstości prądu poniżej wartości minimalnej, określonej w sposób uprzednio podany. W efekcie płamka zostaje jak gdyby rozsadzona, co doprowadza albo do jej całkowitego wygaśnięcia i przerwania prądu łuku, albo do powstania nowych plamek w miejscach największego zgrupowania torów jonowych. Tory prądowe nowo powstałych plamek wytwarzając wokół siebie pole magnetyczne oddziałują na siebie, co uwzględniając zjawisko ruchu wstecznego będzie przyczyną ich wzajemnego odpychania i *rozbiegania* się plamek po całej powierzchni katody. Tym można tłumaczyć często stwierdzany i opisywany *chaotyczny* ruch plamek katodowych łuku próżniowego [25, 26, 27]. Upoważnia to do stwierdzenia, że przyczyną chaotycznego ruchu i szybkiego przemieszczania się plamek po powierzchni katody może być własne pole magnetyczne sąsiednich plamek, a prędkość tego ruchu będzie zatem funkcją wielkości prądu przypadającego na jedną płamkę, wzajemnej odległości i rozmieszczenia sąsiednich plamek względem siebie.

Jeżeli byśmy znali prędkość rozszerzania się strefy przykatodowej, można byłoby określić czas, po jakim gęstość prądu osiągnie wartość minimalną, zakładając, że nowa płamka startuje od punktu. Czas ten byłby równy czasowi życia płamki. Przyjmując wspomnianą prędkość w granicach $10^2 \div 10^3$ cm/s [26] otrzymuje się w ten sposób, dla gęstości prądu 10^6 A/cm², czas życia w granicach 5,6 ÷ 50 μsek. Otrzymane eksperymentalne wartości [29] odpowiadają temu zakresowi czasowemu. Można jeszcze dodać, że pomierzone przez Weichela [29] czasy życia malały w miarę obniżania ciśnienia gazu otaczającego, co również wynika z przyjętego przez nas modelu.

Z przebiegu krzywej $p = f(I)$, podanej na rys. 4, wynika prosty wniosek, że szybkość rozszerzania się obszaru przykatodowego, a co za tym idzie i prawdopodobieństwo rozpadu (krótszy czas życia) i niestabilność plamek katodowych będą tym większe im mniejszy będzie prąd łuku.

Powyższy wniosek całkowicie pokrywa się z wynikami badań Zykowej, Kanziela i Rachowskiego [25, 26, 27] dotyczących dynamiki rozwoju i zachowania się plamek katodowych łuków palących się przy obniżonym ciśnieniu, z różnymi rodzajami otaczają-

cego gazu i dla różnych materiałów elektrod. Stwierdzono występowanie plamek trzech typów różniących się głównie ruchliwością, wzajemnymi powiązaniem i czasem pojawienia się:

1. plamki najbardziej ruchliwe, prędkość rozszerzania się obszaru katodowego $10^3 \div 4 \cdot 10^3$ cm/s, pojawiają się na początku rozładowania, a następnie rozchodzą się po całej powierzchni katody;

2. plamki pojawiające się później, prędkość ruchu obszaru zajętego tymi plamkami mniejsza, rzędu $10 \div 10^2$ cm/s;

3. plamki występujące tylko grupami, odstęp między poszczególnymi plamkami są rzędu rozmiarów samych plamek, są mało ruchliwe albo całkiem nieruchome.

Plamki drugiego typu pojawiały się po upływie pewnego czasu od początku rozładowania, ale tylko przy wyższych, z badanego zakresu, ciśnieniach i przy większych natężeniach prądu (np. dla Cu od 500 A). Czas ich pojawiania się, od momentu zapłonu łuku, zwiększał się przy obniżaniu ciśnienia. Można to wytłumaczyć w następujący sposób: przy ciśnieniu 400 i 100 Tr wystarcza mniejsza gęstość prądu dla wyprodukowania wystarczającej ilości pary, jako że otaczający gaz ogranicza szybkość jej rozpraszania się. W konsekwencji ciśnienie pary jest mniejsze a tym samym, zgodnie z przyjętym modelem, stabilność plamek rośnie i maleje szybkość ich rozprzestrzeniania się. Mniejszą gęstość prądu może zapewnić składnik termoemisji, co wymaga oczywiście uprzedniego podgrzania do odpowiedniej temperatury miejsca, gdzie powstaną plamki. To ostatnie wyjaśnia pewne opóźnienie momentu pojawienia się tego typu plamek. Stwierdzono powstawanie tych plamek w miejscach, przez które uprzednio przeszły plamki pierwszego typu. Dodatkowym potwierdzeniem przyjętego modelu jest fakt obserwacji tego typu plamek dopiero począwszy od pewnej wartości prądu, co jak pokazuje rys. 4 pociąga za sobą zmniejszenie ciśnienia par. Można tu jeszcze zauważyć, że przy 400 Tr na Cu pojawiały się one począwszy od 500 A, a przy 100 Tr dopiero od prądu 1200 A.

Przy najniższym z badanych ciśnień (10^{-4} Tr) wymienieni badacze stwierdzili równoczesne istnienie jedynie plamek pierwszego i trzeciego typu, przy czym ten ostatni zauważa się dopiero począwszy od pewnych wartości prądu. Szybkość rozszerzania się obszaru zajmowanego plamkami pierwszego typu wzrastała przy obniżaniu ciśnienia, a równocześnie z tym powierzchnia zajmowana przez plamki trzeciego typu malała.

To ostatnie miało miejsce dzięki wzajemnemu zbliżeniu poszczególnych plamek w grupie. Na katodzie Cu plamki w grupie były rozłożone gęściej niż na W, na Ag rozłożone podobnie jak na Cu, ale liczba grup przy tym samym prądzie była większa.

Z powyższego wynika, że na metalach z dobrą przewodnością cieplną plamki w grupie są bardziej skupione, a przy obniżaniu się temperatury topnienia i wrzenia taka plamka grupowa może istnieć przy mniejszym prądzie. Zależność w rozłożeniu plamek w grupie, wartości prądów pojedynczych małych plamek i całych grup od wymienionych cieplnych parametrów materiału katody wskazuje na bezpośrednie powiązanie tych wielkości ze stworzeniem koniecznej dla palenia się łuku gęstości pary nad powierzchnią katody.

Małą ruchliwością a niekiedy nawet zupełny bezruch rozpatrywanych grupowych plamek trzeciego typu można sobie wytłumaczyć wpływem wydzielanych par z sąsiadujących ze sobą pobliskich małych plamek. Pary te dla najbliższej położonych plamek spełniają rolę podobną, jak otaczający gaz w normalnym łuku ciśnieniowym.

W tej sytuacji szybkość rozprzestrzeniania się par wydzielanych z pojedynczej małej plamki radykalnie zmniejsza się, co zgodnie z przyjętym modelem działa stabilizująco. Ten sam wniosek wynika wprost z faktu, że zjawisko łączenia się pojedynczych małych plamek w plamki zespołowe zezwala w związku z tym, co wyżej powiedziano, na zmniejszenie sumarycznej gęstości prądu, a to zgodnie z rys. 1 i naszymi rozważaniami prowadzi wprost do ograniczenia ruchliwości takiej plamki.

Na zależność czasu życia plamek od ciśnienia par i związanej z tym prędkości ich rozprzestrzeniania się wskazuje dodatkowo stwierdzone w tych badaniach zmniejszenie się prędkości rozprzestrzeniania się granic obszaru przykatodowego w miarę wzrostu ciężaru atomowego otaczającego gazu przy jednakowych pozostałych parametrach. W ksenonie prędkość ta była $1,5 \div 2$ razy mniejsza niż w helu. Wynika to niewątpliwie z faktu, że im cięższy gaz tym strumienie wydzielanych par będą bardziej wyhamowywane, a tym samym rozszerzanie granic plamki będzie wolniejsze, co opóźnia moment spadku gęstości prądu poniżej wartości granicznej i dzięki temu czas życia plamki wzrasta.

Zauważmy w końcu, że wszystkie przytoczone wyżej rezultaty eksperymentalne dotyczące zależności prędkości rozszerzania się strefy przykatodowej od różnych parametrów są całkowicie zgodne z wnioskami dotyczącymi prędkości strumieni par wydzielanych z katody i podanymi w uprzednim punkcie.

4. PODSUMOWANIE

Na podstawie przeprowadzonych rozważań i obliczeń można sformułować następujące wnioski końcowe.

Konieczność zapewnienia dostatecznej koncentracji par metalu katody dla podtrzymania palenia się łuku próżniowego wymaga dużej gęstości mocy doprowadzonej do plamki, co jest możliwe tylko przy dużej gęstości prądu.

Duża gęstość prądu jest przyczyną niezwykle wysokich ciśnień par materiału katody w obrębie i bezpośrednio nad plamką.

Duże gęstości par są z kolei źródłem powstawania szybkich strumieni katodowych, które mogą wpływać na takie ukształtowanie torów jonowych, jak to pokazano na rys. 5. Powodują one stopniowe rozszerzanie się strefy przykatodowej w miarę upływu czasu trwania wyładowania. Czas jaki upływa do momentu, gdy gęstość prądu obniży się do wartości minimalnej, jest równocześnie czasem życia plamki.

Korzystając z przedstawionego modelu można wyjaśnić takie zjawiska jak rozpadanie się plamek katodowych, inicjowanie nowych, ich chaotyczny ruch po powierzchni katody. Można również na jego podstawie wyjaśnić zależność czasu życia plamki, prądu przenieszonego plamką pojedynczą czy grupową, wzajemnego rozmieszczenia plamek od parametrów cieplnofizycznych materiału katody.

Dodatkowo, bazując na założeniach tego modelu, można wytłumaczyć ruch wsteczny łuku próżniowego w poprzecznym polu magnetycznym [30], a wyjaśnienie tego zjawiska jest przez wielu badaczy uważane za kamień probierczy każdej teorii opisującej procesy na katodzie omawianego łuku.

LITERATURA

1. T. H. Lee, A. Greenwood, G. Polinko, *Design of Vacuum Interrupters to Eliminate Abnormal Overvoltages*, Pow. Appl. Syst., 17, 1962, s. 376.
2. M. P. Reece, *The Vacuum Switch, Part I — Properties at the Vacuum Arc*, Proc. IEE, 4, 1963, s. 793.
3. S. Dushman, *Scientific Foundations of Vacuum Technique*, J. Wiley & Sons, New York — London — Sydney, 1949.
4. T. H. Lee, *Energy Distribution and Cooling Effect of Electrons Emitted from an Arc Cathode*, J. Appl. Phys., 5, 1960, s. 924.
5. T. H. Lee, *T-F Theory of Electron Emission in High Current Arcs*, J. Appl. Phys., 2, 1959, s. 166.
6. T. H. Lee, A. Greenwood, *Theory for the Cathode Mechanism in Metal Vapour Arcs*, J. Appl. Phys., 5, 1961, s. 916.
7. Earl W. McDaniel, *Collision Phenomena in Ionized Gases*, J. Wiley & Sons, Inc., New York — London — Sydney, 1964.
8. H. S. W. Massey, E. H. S. Burhop, *Electronic and Ionic Impact Phenomena*, Oxford, Clarendon Press, 1952.
9. J. Kutzner, *Charakterystyka fizyczna i ocena podstawowych parametrów łuku elektrycznego w próżni*, Dysertacja doktorska, Poznań 1967.
10. R. Tanberg, *On the Cathode of an Arc Drawn in Vacuum*, Phys. Rev., 35, 1930, s. 1080.
11. E. Kobel, *Pressure and High Velocity Jets at Cathodes of a Mercury Vacuum Arc*, Phys. Rev., 36, 1930, s. 1636.
12. W. E. Berkey, R. C. Mason, *Measurement on the Vapourstream from the Cathode of a Vacuum Arc*, Phys. Rev., 38, 1931, s. 943.
13. M. P. Reece, *The Tanberg Effect*, Nature, 180, 1957, s. 1347.
14. A. A. Pliutto, W. N. Ryžkov, A. T. Kapin, *Wysokoskorostnyje potoki plazmy wakuumnych dug*, Żurnal Ekspier. i Tiech. Fiziki, 47, 1964, s. 494.
15. C. G. Suits, *Bestimmung der Temperatur des Bogens aus Messungen der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalls*, Physics, 6, 1935, s. 191.
16. G. Ecker, *Electrode Components of the Arc Discharge*, Ergebn. d. Naturw., 33, 1961, s. 1.
17. R. M. Robertson, *Forces at the Cathode of a Copper Arc*, Phys. Rev., 49, 1936, s. 861.
18. R. M. Robertson, *The Force on the Cathode of a Copper Arc*, Phys. Rev., 53, 1938, s. 578.
19. J. Kutzner, K. Stefaniak, *Methods of Evaluation of Current Density in a Cathode Spot for a Vacuum Arc*, Internat. Symp. on Arc Phenomena, Łódź 1970.
20. K. Stefaniak, *Zachowanie się w poprzecznym polu magnetycznym łuku elektrycznego w próżni*, Rozprawa doktorska, Poznań 1972.
21. K. D. Froome, *Kondensatorentladungen*, Proc. Phys. Soc., 60, 1948, s. 424.
22. J. D. Cobine, C. J. Gallagher, *Current Density of the Arc Cathode Spot*, Phys. Rev., 74, 1948, s. 1524.
23. J. D. Cobine, E. E. Burger, *Analysis of Electrode Phenomena in the High Current Arc*, J. Appl. Phys., 26, 1955, s. 895.
24. A. W. Bričkin, A. W. Bołotov, T. W. Borisova, *K dynamikie elektrodnych piatek električeskoj dugi*, Żurnal Tiech. Fiziki, 36, 1966, s. 1251.
25. N. M. Zyкова, W. W. Kanziel, W. J. Rachovskij, *Cathode and Anode Spots of the Vacuum Arc*, Proc. of the III-rd Internat. Symp. Discharges and Electrical Insulation in Vacuum, Paris 1968.
26. W. I. Rachovskij, *Fizičeskije osnovy komutacii električeskovo toka w wakuumie*, Izd. Nauka Moskwa 1970.
27. N. M. Zyкова, *Disertacija*, Krasnojarsk 1968.
28. I. G. Kesajev, *Katodnyje prociesy električeskoj dugi*, Izd. Nauka, Moskwa 1968.
29. H. Weichel, *Experimental and Analytical Study of Arc Retrograde Motion*, VII Internat. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Beograd 1965.
30. K. Stefaniak, *Ruch wsteczny łuku elektrycznego w próżni na elektrodach stałych*, Rozprawy Elektrotechniczne, 2, 1975.

K. STEFANIAK

PRESSURE MODEL OF CATHODE ZONE OF VACUUM ARC

Summary

The article contains theoretical considerations and the results of measurements of parameters for cathode zone of vacuum arc. This allowed to build a model of the zone, which, as it seems, in a better way explains certain phenomena connected with the type of discharge in question. Above all, it deals with the phenomenon of formation, development, decay and division of cathode spots and their chaotic movement on cathode surface. The model helps to explain the retrograde movement. It is based on the observed, extremely high pressure of electrode metal vapours in the zone directly above the spot.

K. STEFANIAK

UN MODÈLE DE PRESSION DE LA ZONE PRÈS-CATHODIQUE DE L'ARC À VIDE

Résumé

Cet article contient des réflexions théoriques et les résultats des calculs concernant certains paramètres de la zone près-cathodique de l'arc à vide. Cela a permis de construire un modèle de cette zone, qui peut servir à mieux expliquer quelques phénomènes ayant rapport avec la forme examinée du décharge. Il s'agit avant tout des phénomènes suivants: formation, développement, dépérissement et partage des taches cathodiques et aussi de leur mouvement chaotique sur la surface de la cathode.

En outre le modèle fait plus facile la mise au point du mouvement rétrograde. Il est basé sur l'observation, que la pression des vapeurs du métal des électrodes est excessivement haute dans la zone directement au dessus d'une tache.

K. STEFANIAK

DRUCKMODELL FÜR DIE NEBENKATHODENZONE DES VAKUUMBOGENS

Zusammenfassung

Der Artikel enthält theoretische Erwägungen sowie Berechnungsergebnisse betreffs einiger Parameter der Kathodenzone des Vakuumbogens. Dies ermöglichte, ein Modell dieser Zone zu schaffen, wodurch sich sicher manche mit der untersuchten Entladungsform zusammenhängenden Effekte besser erklären lassen. Dies betrifft vor allem Entstehungs-, Entwicklungs-, Schwund- und Verteilungseffekte von Kathodenflecken sowie deren chaotische Bewegungen auf der Kathodenfläche. Außerdem erleichtert dieses Modell die Erklärung der Rückbewegung, die auf dem festgestellten, außerordentlich hohem Dampfdruck des Elektrodenmetalls in der Zone direkt über dem Flecken basiert.

К. СТЕФАНЯК
МОДЕЛЬ ПРИКАТОДНОЙ ОБЛАСТИ ВАКУУМНОЙ ДУГИ С ТОЧКИ
ЗРЕНИЯ ДАВЛЕНИЙ

Резюме

Статья содержит теоретические рассуждения и результаты расчетов некоторых параметров вакуумной дуги, на основании которых построена модель этой области, дающая более широкие возможности чем другие применяемые до сих пор модели объяснения некоторых явлений, связанных с рассматриваемой формой разряда.

Предже всего это касается явления образования, развития, исчезновения и деления катодных пятен, а также их беспорядочного движения по поверхности катода. Кроме того эта модель облегчает объяснение обратного движения, обоснованного на констатированном необычайно высоком давлении паров металла электродов непосредственно в области над пятном.

Ruch wsteczny łuku elektrycznego w próżni na elektrodach stałych

KAZIMIERZ STEFANIAK (POZNAŃ)

Instytut Elektroenergetyki Politechniki Poznańskiej

Otrzymano 8.2.1974

Artykuł zawiera wyniki badań zachowania się łuku elektrycznego w pierścieniowej przerwie między koncentrycznymi elektrodami przy ciśnieniach rzędu 10^{-5} Tr, prądach łuku w granicach $20 \div 150$ A oraz wartościach indukcji poprzecznie skierowanego pola do 0,5 T. Mierzono prędkość przesuwania się łuku, napięcie i czas jego życia.

Stwierdzono nieciągły charakter przesuwania się plamek katodowych oraz nieco odmienny charakter zachowania się łuku dla większych prądów.

Przeprowadzone rozważania analityczne pozwoliły stwierdzić, że występowanie ruchu wstecznego jest związane przede wszystkim z wysoką gęstością prądu plamki katodowej łuku próżniowego.

1. WPROWADZENIE

Ruch wsteczny¹⁾ jest niewątpliwie jedną z najbardziej intrygujących zagadek łuku próżniowego. Polega on na odwróceniu kierunku ruchu łuku w poprzecznym polu magnetycznym na przeciwny do wyznaczonego prawem Ampera. Od momentu jego odkrycia przez Starka [1] poświęcono mu wiele uwagi, niemniej wydaje się, że nie wszystko jeszcze zostało w tej materii wyjaśnione. Stosunkowo największa liczba publikacji dotyczy prób teoretycznego wyjaśnienia istoty ruchu wstecznego. Do tej pory jednak nie sformułowano żadnej ogólnie akceptowanej hipotezy ujmującej wszystkie zaobserwowane fakty związane z tym specyficznym ruchem.

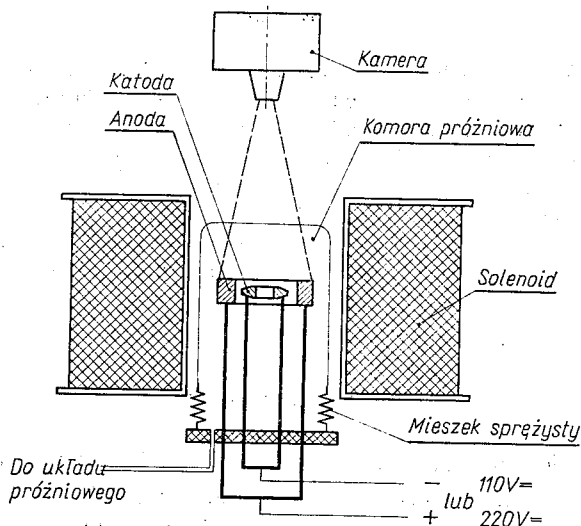
Mało jest natomiast danych eksperymentalnych dotyczących takich parametrów jak prędkość ruchu wstecznego, czas palenia się łuku czy wreszcie jego napięcie, zwłaszcza łuków na katodach z materiałów stałych. Bardziej szczegółowymi danymi dysponujemy jedynie dla łuków rtęciowych, przede wszystkim dzięki badaniom Gallaghera [2], Johna i Winansa [3, 4] oraz Kesajeva [5]. Badania przy wykorzystaniu elektrod stałych ograniczały się jedynie do potwierdzenia występowania na nich również ruchu wstecznego, względnie były przeprowadzone w wycinkowych zakresach i to przeważnie co prawda przy obniżonym ciśnieniu, ale nie na poziomie stosowanym na przykład w łącznikach próżniowych [6]. Celem niniejszej pracy jest choć częściowe wypełnienie tej luki. Zbadano

¹⁾ Ang. *retrograde motion*, ros. *obratnoje dwiżenije*.

zależność prędkości ruchu wstecznego w funkcji indukcji B poprzecznie przyłożonego pola magnetycznego dla różnych wartości natężenia prądu łuku ($20 \div 150$ A), różnych odstępów elektrod d (2 i 5 mm) i różnych materiałów elektrod (Cu, Al, Fe), w zakresie ciśnień do 10^{-5} Tr.

2. OPIS UKŁADU I WARUNKÓW POMIARU

Schemat układu pomiarowego przedstawia rys. 1. Badane elektrody wykonane były w postaci dwóch koncentrycznie umieszczonych pierścieni, przy czym katodę stanowił pierścień wewnętrzny o stałych wymiarach, natomiast anodę pierścień zewnętrzny o stałej średnicy zewnętrznej a zmiennej wewnętrznej. Zmiana tej ostatniej pociągała za sobą



Rys. 1. Schemat układu pomiarowego

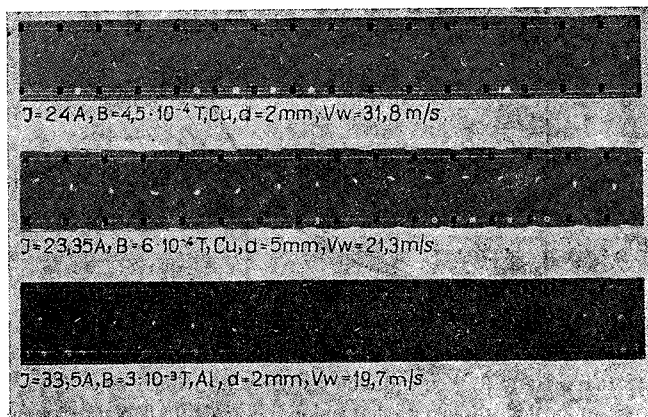
zmianę odstępów międzyelektrodowego d . Elektrody łącznie z doprowadzeniami prądowymi były umieszczone wewnątrz szczelnej komory, podłączonej do układu pomp próżniowych, co umożliwiło uzyskiwanie bardzo niskich ciśnień.

Zarówno same elektrody, doprowadzenia zasilające, jak i komora zostały zaprojektowane jako rozbieralne, co umożliwiała wymianę badanych elektrod. Zasilanie odbywało się poprzez przepustowe izolatoriki próżniowe w dolnej pokrywie komory i dalej dwoma równoległymi rozbieralnymi prętami wkręcanymi do elektrod. Zastosowano podwójne zasilanie elektrod z dwóch końców, celem maksymalnego wyeliminowania wpływu własnego pola magnetycznego pętli prądowej.

Komorę próżniową z badanymi elektrodami umieszczono wewnątrz specjalnie zaprojektowanej cewki, która wytwarzała pionowo skierowane pole magnetyczne. Wytwarzane pole magnetyczne było w każdym punkcie prostopadłe do prądu łuku palącego się w koncentrycznej przerwie między elektrodami i powodowało w ten sposób stałe wirowanie badanego łuku. Szklane zamknięcie od góry komory umożliwiało obserwację tego zjawiska.

Prędkość wirowania łuku ustalano korzystając ze zdjęć wykonywanych kamerą szybką fotografii. Rys. 2 pokazuje przykładowo wycinki z otrzymanych w ten sposób taśm filmowych.

Zapłonu łuku dokonywano przez zwarcie katody z anodą wysuwaną metalową igłą, wykonaną z tego samego materiału co badane elektrody, którą następnie wycofywano



Rys. 2. Wycinki otrzymanych kamerą szybką fotografii zdjęć wirującego łuku

do wnętrza katody. Dzięki temu, że łuk zapalał się zawsze w tym samym miejscu, można było również określić kierunek jego przesuwania się.

Równocześnie z fotograficzną rejestracją obrazu łuku rejestrowano przy pomocy oscylografu pętlicowego przebieg napięcia i prądu łuku. Do sterowania całym przebiegiem próby zastosowano impulsator wybierakowy, który posiadał 5 par zestyków. Maksymalny odstęp czasowy między zadziałaniem pierwszego i ostatniego zestyku wynosił — 3 s, odstęp minimalny między zadziałaniem kolejnych zestyków — 20 ms. Umożliwiało to szeroki zakres wyboru interwałów czasowych zadziałania poszczególnych elementów obwodu probierczego.

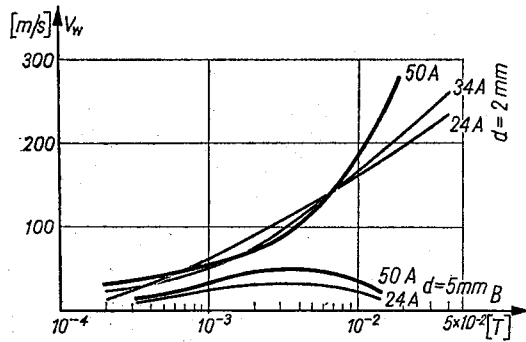
Badania przeprowadzane były w obwodzie prądu stałego o napięciu 125 V i 280 V. Wpływ ewentualnego utleniania się elektrod na wyniki pomiarowe eliminowano przez wykonywanie przed każdą rejestrowaną serią prób kilkunastokrotnego przepuszczenia wirującego łuku po powierzchni elektrody bez ich rejestrowania. Gazem resztkowym w komorze było powietrze atmosferyczne.

3. WYNIKI POMIARÓW PRĘDKOŚCI WSTECZNEJ

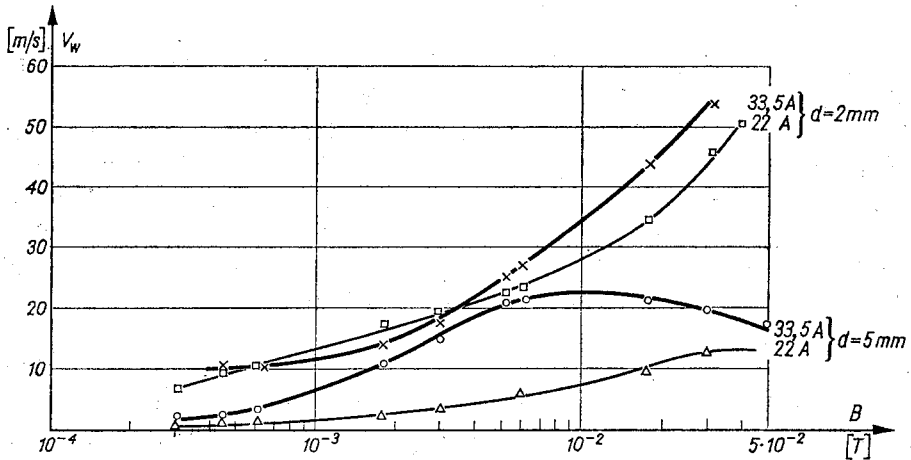
Na podstawie badań stwierdzono, podobnie jak i dla łuków rtęciowych, że prędkość ruchu wstecznego na elektrodach stałych jest proporcjonalna do wartości indukcji magnetycznej B , ale tylko do pewnych jej wartości. Dalszy wzrost indukcji powoduje początkowo malenie prędkości wstecznej, a w końcu przy jeszcze większych wartościach następuje odwrócenie ruchu zgodnie z prawem Ampera. Dotyczy to wszystkich badanych materiałów.

Rysunki 3÷5 przedstawiają zależność pomierzonej prędkości od wartości indukcji dla elektrod Cu, Al, Fe przy różnych wartościach natężenia prądu łuku i dwóch różnych odstępach elektrod.

Odwroćenie kierunku ruchu na normalny, zgodny z prawem Ampera, nie następowało nagle przy jednej określonej wartości natężenia pola magnetycznego. Istniał pewien zakres



Rys. 3. Prędkość wsteczna łuku w funkcji indukcji magnetycznej dla różnych wartości natężeń prądu łuku i przy różnych odstępach międzyelektrodowych d . Katoda Cu, ciśnienie $1 \cdot 10^{-5}$ Tr

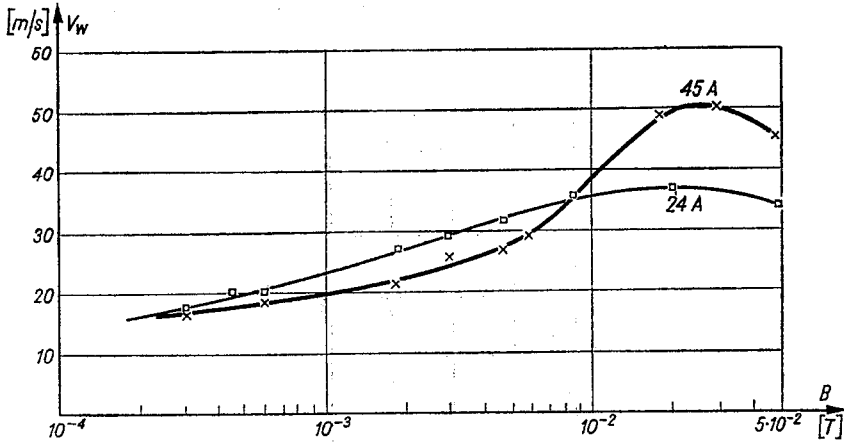


Rys. 4. Prędkość wsteczna łuku w funkcji indukcji magnetycznej dla różnych wartości natężenia prądu i przy różnych odstępach międzyelektrodowych d . Katoda Al, ciśnienie $1 \cdot 10^{-5}$ Tr

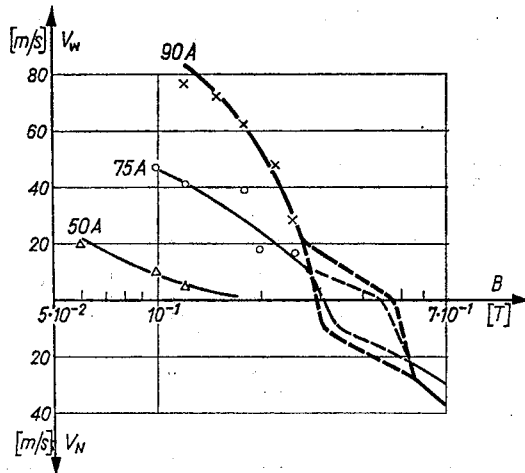
wartości tego pola, w którym łuk przesuwał się albo w jedną albo w drugą stronę. Dopiero po przekroczeniu pewnej granicznej wartości indukcji B łuk obierał zdecydowanie już kierunek normalny. Przedstawiono to na rys. 6. Na rysunku tym, w rozpatrywanym zakresie, zakreślono jedynie obszar zarejestrowanych prędkości w obu kierunkach.

Takie zachowanie się łuku jest na pierwszy rzut oka całkowicie odmienne od obserwowanego na rtęci, gdzie przy silnych polach następowało nawet podwojenie prędkości wstecznej [3, 4]. Należy jednak pamiętać o dużej różnicy w wartościach natężeń prądu łuku w obu rozpatrywanych przypadkach. Ponadto również i na rtęci Gallagher [2] otrzy-

mywał maksimum prędkości wstecznej przy określonej wartości indukcji dla największych wartości natężeń prądu łuku. W naszych warunkach nie można było niestety pomierzyć prędkości dla mniejszych wartości prądu, w rozpatrywanym zakresie indukcji, z powodu natychmiastowego gaśnięcia inicjowanego łuku przy tak znacznych natężeniach pola



Rys. 5. Prędkość wsteczna łuku w funkcji indukcji magnetycznej dla różnych wartości natężeń prądu. Katoda Fe, odstęp międzyelektrodowy $d = 2$ mm, ciśnienie $1 \cdot 10^{-5}$ Tr



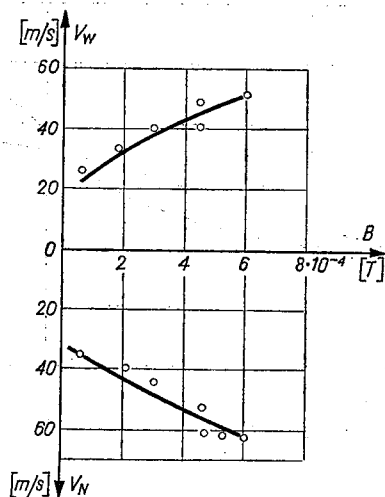
Rys. 6. Prędkość przesuwania się łuku przy silnych polach magnetycznych i większych wartościach natężeń prądu łuku. Katoda Cu, odstęp międzyelektrodowy $d = 2$ mm, ciśnienie $1 \cdot 10^{-5}$ Tr

magnetycznego. Przy prądzie łuku 100 i 150 A otrzymano podobną wartość indukcji B , jak to zaznaczono na rys. 6. Nie udało się jednak pomierzyć dla tych wartości I prędkości, ponieważ plamki katodowe tworzyły w tym przypadku więcej niż jedną plamkę grupową, co uniemożliwiało prześledzenie ruchu łuku.

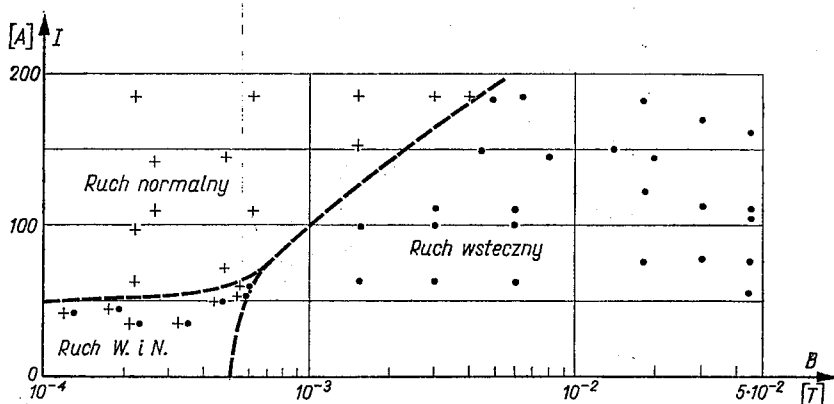
Inną ciekawą obserwacją, jest widoczne na rysunkach 3, 4 i 5 odwrócenie, w pewnym zakresie indukcji B , proporcjonalności między prędkością wsteczną a natężeniem prądu

łuku. Ciekawą dlatego, że badania na rtęci wskazywały na proporcjonalność tych dwóch wielkości w całym badanym zakresie B [3, 4].

Z wymienionych rysunków wynika także, że wydłużenie łuku powoduje wyraźne zmniejszenie prędkości wstecznej, czyli zależność odwrotna od otrzymanej dla łuku ciśnieniowego w rozpatrywanym zakresie prądów i odstępów elektrod [7].



Rys. 7. Prędkość wsteczna v_W i normalna v_N zarejestrowana przy bardzo słabych polach magnetycznych. Katoda Cu, ciśnienie $1 \cdot 10^{-5}$ Tr, odstęp międzyelektrodowy $d = 2$ mm, prąd łuku 50 A

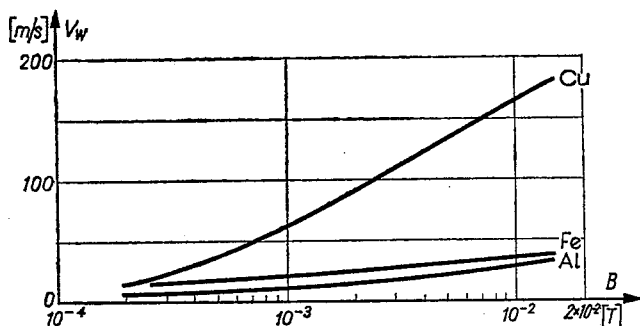


Rys. 8. Kierunek wędrowania łuku w zależności od wartości indukcji magnetycznej B oraz prądu łuku I na elektrodach Cu. Ciśnienie $1 \cdot 10^{-5}$ Tr, odstęp międzyelektrodowy $d = 2$ mm

Stwierdzono dalej, że podobnie jak dla łuku ciśnieniowego istnieje pewna minimalna wartość indukcji konieczna dla zadziałania wydmuchu magnetycznego [7], której wartość uzależniona jest jednocześnie od prądu łuku, tak i tutaj istnieje również pewna minimalna wartość pola magnetycznego po przekroczeniu której łuk zaczyna poruszać się w określonym, w tym przypadku wstecznym kierunku. Wynika to jednoznacznie z rysunków 7 i 8.

Należy przypomnieć w tym miejscu, że zakres tego ruchu wstecznego jest także ograniczony wartością pola magnetycznego od góry, przynajmniej dla większych natężeń prądów łuku (rys. 6).

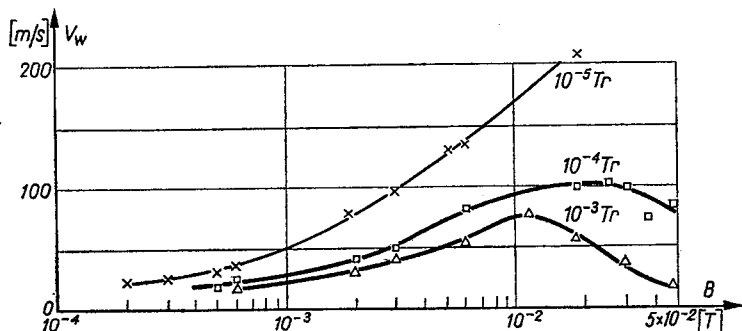
Rezultaty pomiarów przedstawione na rysunkach 7 i 8 należy rozumieć w ten sposób, że do pewnej wartości indukcji magnetycznej rejestrowano ruch albo w jednym albo w dru-



Rys. 9. Prędkość wsteczna łuku na elektrodach z różnych materiałów, przerwa międzyelektrodowa $d = 2$ mm, prąd łuku 24 A, ciśnienie $1 \cdot 10^{-5}$ Tr

gim kierunku, lub też podczas tej samej próby łuk miał momenty ruchu wstecznego i momenty ruchu normalnego. Jak się wydaje można zatem ruch ten w tym zakresie indukcji B interpretować jako normalny, wielokrotnie opisywany, chaotyczny ruch płamek katodowych łuku próżniowego.

Z rys. 8 wynika również, że im większa jest wartość prądu łuku, tym silniejszego potrzeba pola magnetycznego dla nadania łukowi kierunku wstecznego.



Rys. 10. Prędkość wsteczna łuku w funkcji indukcji przy różnych ciśnieniach otoczenia. Elektrody Cu, natężenie prądu łuku 34 A, odstęp międzyelektrodowy 2 mm

Rys. 9 pokazuje zależność prędkości wstecznej od materiału katody.

Analogicznie jak i dla łuku rtęciowego, otrzymano również spodziewaną zależność badanej prędkości od ciśnienia. Jak wynika z rysunku 10, prędkość ta maleje wraz ze wzrostem ciśnienia. Z rysunku tego wynika również, że im wyższe ciśnienie, tym szybsze począwszy od coraz mniejszych wartości pola magnetycznego następuje malenie prędkości wstecznej.

Analizowana wyżej prędkość dotyczy stopy katodowej. Każdorazowo prędkość określano z kilkukrotnego obiegu łuku po obwodzie katody. Uzyskiwano przez to już pewne uśrednienie jej wartości. Ponadto dla każdego punktu pomiarowego przeprowadzono minimum trzy próby, i ponownie obliczano wartość średnią z tych trzech prób. Przy konstruowaniu wykresów uwzględniono ponadto poprawkę związaną z wahaniami wartości natężenia prądu łuku zarówno w trakcie jednej próby, jak i między wartościami kolejnych prób, przy tych samych parametrach ciśnienia, indukcji i takim samym prądzie nastawczym.

4. INTERPRETACJA OTRZYMANYCH REZULTATÓW EKSPERYMENTALNYCH NA PODSTAWIE PRZYJĘTEGO MODELU STREFY PRZYKATODOWEJ

W poprzednim artykule [8] przedstawiono model strefy przykatodowej, który, jak należy sądzić, może również zadawalająco wyjaśnić ruch wsteczny i zależność jego prędkości od ciśnienia, natężenia prądu łuku oraz natężenia pola magnetycznego.

W sytuacji, gdy na obszar strefy przykatodowej podziałamy poprzecznie skierowanym polem magnetycznym, symetryczny rozkład *parasola* jonowego zmieni się w układ niesymetryczny. Dzięki częściowemu odwróceniu kierunku ruchu jonów szybkim strumieniem par maksimum dodatniego ładunku przestrzennego wystąpi w tej sytuacji na boku wstecznym strefy przykatodowej. Spowoduje to zainicjowanie nowej plamki z tej właśnie strony.

Wykazano już, że początkowa prędkość *wolnych* jonów oraz ich liczba poruszająca się w przeciwnym kierunku do pola elektrycznego będzie proporcjonalna do wartości lokalnego ciśnienia par bezpośrednio nad plamką.

Promień zakrzywienia toru cząstki naładowanej poruszającej się w polu magnetycznym wyznacza następująca zależność:

$$r = \frac{vm}{eB}, \quad (1)$$

gdzie:

v — prędkość cząstki naładowanej,

m — jej masa,

e — ładunek cząstki,

B — indukcja pola magnetycznego.

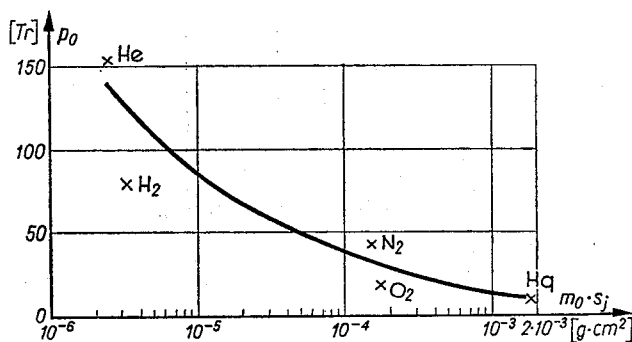
Zatem im wspomniana prędkość będzie większa, tym jony te będą osiągały katodę dalej od granic poprzedniej plamki. Jest to równoznaczne ze zwiększeniem się odstepu między kolejnymi położeniami plamki na powierzchni katody, a tym samym i wzrostem prędkości wstecznej.

Ponieważ lokalne ciśnienie par jest wprost proporcjonalne do gęstości prądu a odwrotnie proporcjonalne do jego natężenia, winno to pociągać za sobą wzrost prędkości wstecznej ze wzrostem gęstości prądu oraz z maleniem jego natężenia. Pierwsza część wniosku nie budzi wątpliwości. Druga natomiast może w tej chwili być dyskusyjna, dlatego nieco później do niej powrócimy. W tym miejscu należy jedynie zaznaczyć, że wyjaśnia

to dlatego w wyniku pomiaru prędkości wstecznej przy mniejszych prądach otrzymuje się większą wartość tej prędkości aż do pewnej wartości indukcji pola magnetycznego B (rysunki 3, 4, 5).

Rozpatrywany model wyjaśnia również zmniejszanie się prędkości wstecznej wraz ze wzrostem ciśnienia otaczającego gazu. Następuje wówczas jak gdyby wyhamowanie strumienia par, przez co maleje prawdopodobieństwo rozpraszania jonów. Można zresztą wytłumaczyć to i w inny sposób. Jak wspomniano uprzednio [8] wzrost ciśnienia otoczenia można powiązać ze zmaleniem koniecznej do istnienia łuku niskociśnieniowego gęstości prądu. To ostatnie zaś, zgodnie z wnioskiem przedstawionym wyżej, pociąga zmniejszenie prędkości wstecznej.

Wyhamowanie to może mieć również związek z ciśnieniem odrotu. Gallagher [2] stwierdził proporcjonalność pomiędzy wyżej wymienionym ciśnieniem a potencjałem

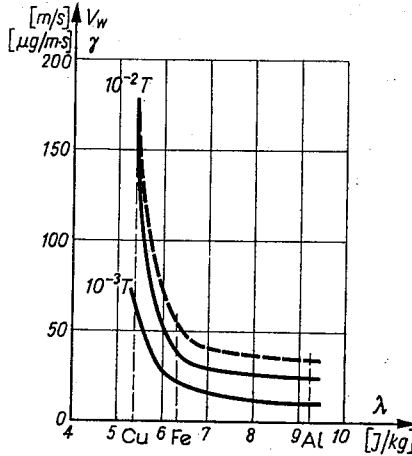


Rys. 11. Ciśnienie odrotu w funkcji iloczynu masy cząsteczki i przekroju jonizacji otaczającego gazu (łuk rtęciowy 4 A, $B = 0,01$ T)

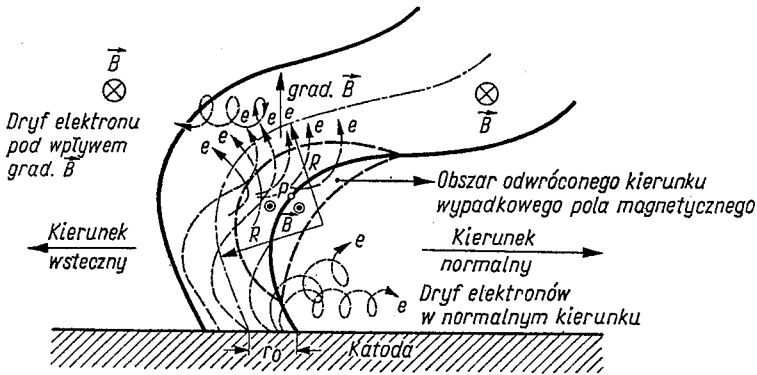
wzbudzenia otaczającego gazu, z pewnymi jednak odstępstwami od tej reguły. Zgodnie z przyjętą przez nas teorią, na wartość ciśnienia odrotu powinna również wpływać masa cząsteczki lub atomu otaczającego gazu. Należy się spodziewać, że im cięższy będzie ten gaz, tym do niższego ciśnienia należy go odpompować, aby zmniejszyć wyhamowywanie strumienia pary i uzyskać w ten sposób warunki niezbędne dla istnienia ruchu wstecznego. Celem stwierdzenia tej hipotezy, korzystając z wyników pracy [2] sporządzono wykres zależności ciśnienia odrotu p od iloczynu masy cząsteczki m i przekroju jonizacji s_j . Przebieg tej zależności przedstawiony na rysunku 11 potwierdza nasze przypuszczenia. Wzajemne powiązanie między ciśnieniem lokalnym par, prędkością ich strugi i jej wyhamowywaniem a rozpraszaniem wstecznym jonów potwierdzają również wyniki eksperymentów Weichela [6], który badał rozkład odstępów między kolejnymi plamkami i czasu ich życia, w funkcji ciśnienia otaczającego gazu oraz indukcji B .

Na wyraźny wpływ częściowego odwracania kierunku ruchu jonów strumieniem par katodowych wskazują również uzyskane wyniki zależności prędkości wstecznej od materiału katody. Korzystając z danych przedstawionych na rysunku 9 wykonano wykres prędkości wstecznej w funkcji ciepła parowania λ materiału katody. Ilustruje to wys. 12, na którym pokazano także szybkość erozji γ w funkcji tegoż samego parametru, pomie-

rzoną przez Kanciela, Kurakina, Potokina, Rachovskiego i Tkaćieva [9]. Autorzy ci stwierdzają przy tym, że erozja ta jest całkowicie spowodowana parowaniem katody. Jak można zauważyć, krzywe prędkości wstecznej i szybkości erozji mają bardzo zbliżony charakter. Wskazuje to na bezpośredni związek pomiędzy parowaniem katody a prędkością wsteczną.



Rys. 12. Prędkość wsteczna w funkcji ciepła parowania materiału katody przy różnych wartościach pola magnetycznego (linia ciągła) oraz szybkość erozji w funkcji tego samego parametru (linia przerywana)

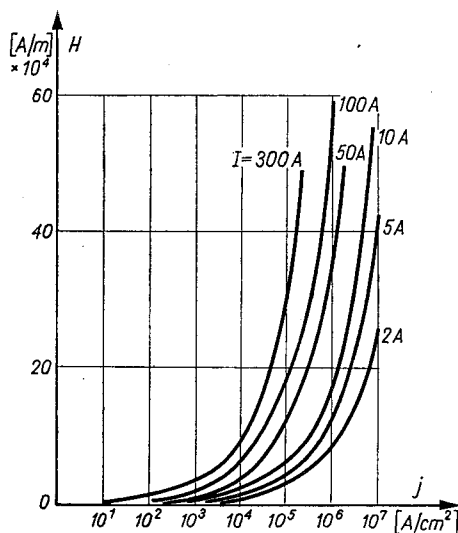


Rys. 13. Strefa przykatodowa łuku próżniowego w poprzecznym polu magnetycznym z zaznaczonymi trajektoriami ruchu elektronów pod wpływem własnego pola magnetycznego

Omówiony wyżej sposób rozkładu torów jonowych nie jest jednakże jedyną przyczyną ruchu wstecznego łuku próżniowego. Drugą równorzędną jest niewątpliwie własne pole magnetyczne zakrzywienia toru prądowego strefy przykatodowej.

Wyrzucane z dużą prędkością strumienie pary z plamki katodowej w łuku próżniowym powodują przy braku środowiska gazowego, że wyładowanie w strefie przykatodowej rozwija się początkowo w kierunku prostopadłym do powierzchni katody. Dopiero dalej w pewnym odstępnie od katody, ulega ono zakrzywieniu w kierunku normalnym, zgodnym

z prawem Ampera. Oddziaływanie pola magnetycznego na tory jonów dodatnich w sposób przedstawiony wyżej jest przyczyną dodatkowego wychylenia się strefy przykatodowej we wstecznym kierunku względem środka plamki katodowej. Efekt ten jest wzmacniany dryfem elektronów opisanym nieco dalej. W rezultacie strefę przykatodową można przedstawić w postaci jak na rysunku 13. Wewnątrz zakrzywienia (rejon punktu P) powstaje własne pole magnetyczne toru prądowego skierowane przeciwnie do przyłożonego zewnętrznego pola B .



Rys. 14. Natężenie własnego pola magnetycznego w funkcji gęstości prądu j plamki katodowej dla różnych wartości prądu łuku (współcz. $k = 0,1$)

Wprowadzając pewne założenia upraszczające [10] obliczono wartość natężenia własnego pola magnetycznego H w punkcie P . Wynosi ono:

$$H = \frac{3}{4} \frac{I}{\pi R(1-k^2)} E_{(k)}, \quad (2)$$

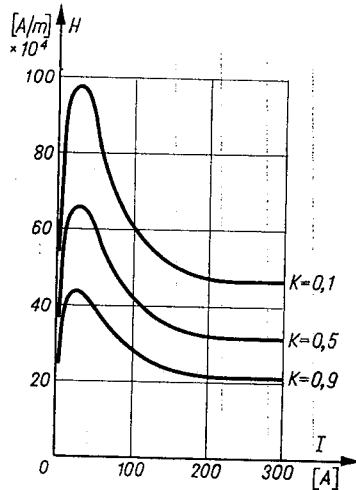
gdzie:

- R — promień zakrzywienia,
- I — natężenie prądu łuku,
- r_o — promień plamki katodowej,
- $E_{(k)}$ — zupełna całka eliptyczna drugiego rodzaju oraz współczynnik

$$k = 1 - \frac{r_o}{R}. \quad (3)$$

Zakładając kołowy kształt plamki katodowej można obliczyć natężenie tego pola w funkcji gęstości prądu dla różnych wartości prądu łuku i dowolnego k . Rys. 14 podaje wynik takich obliczeń dla przyjętego przykładowo $k = 0,1$. Na rysunku tym można zauważyć bardzo gwałtowny wzrost wartości natężenia pola H w miarę wzrostu gęstości prądu j . Wartości tego pola przy spotykanych w łuku próżniowym gęstościach prądów

z całą pewnością przekraczają stosowane natężenia pola zewnętrznego, skierowanego w przeciwnym kierunku wewnątrz krzywizny toru prądowego. W rejonie punktu P następuje zatem odwrócenie kierunku wypadkowego pola magnetycznego. Powoduje to zakrzywienie w tym obszarze toru elektronów na kierunek wsteczny (rys. 13). Może to być przyczyną powstawania na wierzchołku rozpatrywanego zakrzywienia ujemnego ładunku przestrzennego, którego istnienie zakładali już w swej teorii *przerzutu* John i Winans [3, 4]. Tego typu trajektoria ruchu elektronów wywołuje dodatkowo przesuwanie strefy jonizacji w kierunku wstecznym. Powstający w ten sposób ujemny ładunek



Rys. 15. Natężenie pola magnetycznego własnego toru prądowego strefy przykatodowej w funkcji wartości prądu, przy uwzględnieniu zależności $j = f(I)$ dla różnych wartości współczynnika k , na katodzie Cu

przestrzenny wzmacnia niewątpliwie rozpraszanie *wsteczne* jonów strumieniem par opisane wyżej.

Własne pole magnetyczne podtrzymuje w ten sposób zakrzywienie i takie właśnie ukształtowanie strefy przykatodowej, jak to pokazano na rys. 13. Dzięki temu nie dochodzi do zetknięcia się toru wyładowania z katodą na boku normalnym, co mogłoby spowodować przeskok i przesuwanie się plamki w tym kierunku. Przy bardzo silnych jednak polach zewnętrznych, dzięki zmniejszeniu się promienia R , tego rodzaju dogięcie kanału rozładowczego do powierzchni katody na boku normalnym będzie możliwe, mimo że wartość własnego pola H , jak to dalej będzie dowiedzione, jest proporcjonalna do wartości B pola zewnętrznego. Prawdopodobieństwo takiego zetknięcia się kolumny z katodą na boku normalnym będzie oczywiście tym większe, im większy jest prąd łuku (bowiem wzrost I zwiększa równocześnie promień plamki r_0) oraz im większy jest odstęp międzyelektrodowy.

Ciekawy jest, w powiązaniu z tym co wyżej powiedziano, rozkład wartości natężenia pola H w funkcji prądu łuku, przy uwzględnieniu zależności $j = f(I)$. Odpowiednie obliczenia wykonano przyjmując zależność $j = f(I)$ jak w [8]. Wyniki przedstawiono na rys. 15. Z rysunku wynika, że wartość natężenia pola H początkowo wzrasta wraz z wartością

natężenia prądu, osiąga wartość maksymalną, po czym przy dalszym wzroście I początkowo maleje, aby następnie ustalić się na pewnym poziomie. Uwzględniając powyższe oraz fakt, że wraz ze wzrostem natężenia prądu maleje ciśnienie par bezpośrednio nad płamką [8], przy równoczesnym wzroście ogólnego ciśnienia w komorze rozładowniczej na skutek parowania z sąsiednich plamek lub zespołów plamek katodowych, należy się spodziewać, że dla większych natężeń prądów, przy dostatecznie silnym zewnętrznym polu magnetycznym nastąpi odwrót od ruchu wstecznego na kierunek Ampera. Zjawisko to, na co wskazuje rys. 6, istotnie zostało zaobserwowane.

Na podstawie rys. 15 można stwierdzić dalej, że im silniejsze jest przyłożone pole zewnętrzne, tym większe są również wartości natężenia pola własnego. Wzrost B zmniejszając promień R , zmniejsza bowiem równocześnie wartość współczynnika k (3), co daje w efekcie wzrost H . Jest to jedna z przyczyn obserwowanego wzrostu prędkości wstecznej przy wzroście indukcji poprzecznego pola, co wiąże się z krótszymi czasami pozostawiania płamki w jednym miejscu. W tym również może tkwić przyczyna uzyskiwania, począwszy od pewnej wartości B , większej prędkości ruchu wstecznego dla większych prądów łuku (rys. 3, 4, 5). Następuje to przy tej wartości pola, od której szybkość wzrostu wartości własnego pola magnetycznego (ze wzrostem B) zaczyna przewyższać szybkość opadania lokalnego ciśnienia par na płamką (ze wzrostem I).

Oddziaływaniem własnego pola magnetycznego można również wyjaśnić rezultaty eksperymentalne, przedstawione na rys. 8. Wymaganie coraz silniejszego zewnętrznego pola magnetycznego dla nadania łukowi zdecydowanego charakteru wstecznego w miarę wzrostu wartości prądów łuku (w zakresie stosunkowo słabych pól magnetycznych) jest związane z maleniem wpływu rozpraszania wstecznego jonów strumieniem par przy wzroście natężenia prądu. Warunki niezbędne dla uzyskania ruchu wstecznego można w tej sytuacji uzyskać jedynie poprzez wzrost wartości natężenia pola własnego H , a to ostatnie, zgodnie z rys. 15, jest możliwe przez wzrost indukcji pola zewnętrznego B .

Swego czasu Robson i Engel [11] upatrywali w tym właśnie własnym polu magnetycznym przyczyn ruchu wstecznego, jednak ich błędem było uznanie tego pola za jedyną przyczynę. Należy sobie zdawać sprawę z tego, że w p a d k o w e m a k s y m a l n e p o l e będzie jednak zgodne z kierunkiem pola zewnętrznego na boku wstecznym strefy przykatodowej.

Jedynie wzajemne współdziałanie szybkich strug będące przyczyną ruchu jonów dodatnich w kierunku od katody i własnego pola magnetycznego może tłumaczyć wszystkie obserwowane i stwierdzone fakty eksperymentalne. Można zatem stwierdzić, że te właśnie dwa zjawiska są podstawą występowania ruchu wstecznego.

Przedstawione wyżej dane wskazują na szybki wzrost lokalnego ciśnienia par i natężenia własnego pola magnetycznego wraz ze wzrostem gęstości prądu j . Upoważnia to do sformułowania tezy, iż pierwotną przyczyną występowania ruchu wstecznego jest wysoka gęstość prądu łuku próżniowego. Stwierdzona i wielokrotnie opisywana [12] zależność tej gęstości od natężenia prądu łuku, ciśnienia otoczenia, czasu trwania wyładowania, parametrów cieplno-fizycznych materiałów katody, całkowicie potwierdza sformułowaną wyżej tezę.

Oprócz opisanych wyżej dwóch zasadniczych zjawisk będących bezpośrednią funkcją gęstości prądu w plamce katodowej, dwa dodatkowe jeszcze czynniki, być może w nieco

mniejszym stopniu, mogą oddziaływać na prędkość ruchu wstecznego. Pierwszym z nich może być dryf emitowanych elektronów równoległe do katody bezpośrednio nad jej powierzchnią w kierunku Ampera. Dryf ten, pokazany na rys. 13, wyrzuca część elektronów wyemitowanych z plamki katodowej ze strony normalnej, które nie biorąc zatem udziału w jonizacji przesuwają pozornie i dodatkowo wyginają kanał wyładowczy w stronę wsteczną. Ponadto przesuwając się nad powierzchnią katody, osłabiają nad tą jej częścią pole elektryczne, co również preferuje kierunek wsteczny jako miejsce kolejnego położenia nowej plamki. Prędkość tego dryfu

$$v_d = \frac{E}{B}, \quad (4)$$

gdzie: E jest natężeniem pola elektrycznego,

B indukcją pola magnetycznego,

będzie tym mniejsza, im indukcja B będzie większa. Zmniejszenie zaś prędkości zwiększa efekt osłabiania pola elektrycznego. To może być jeszcze jedną dodatkową przyczyną skracania czasu życia plamki w jednym miejscu, w miarę wzrostu wartości B . Uciekające w tym normalnym kierunku elektrony tak długo nie wywołują jonizacji w stopniu znaczącym dla przebiegu wyładowania, jak długo ciśnienie otoczenia jest dostatecznie małe dla zapewnienia wystarczająco długiej drogi swobodnej λ_e . W miarę wzrostu ciśnienia elektrony te mogą powodować jonizację na boku normalnym, a prawdopodobieństwo jonizacji będzie tym większe im mniejszy będzie potencjał wzbudzenia i jonizacji gazów otaczających łuk. Tym, należy sądzić, można tłumaczyć wpływ potencjału wzbudzenia i przekroju jonizacji na wartość ciśnienia odwrotu ([2] i rys. 11).

Drugim dodatkowym czynnikiem wpływającym na występowanie samego ruchu wstecznego i jego prędkość może być dryf elektronów pod wpływem gradientu indukcji \vec{B} . Gradient ten powstaje przez nałożenie się pola zewnętrznego z polem własnym prądu. Dryf ten, jak pokazano na rys. 13, podtrzymuje ujemny ładunek przestrzenny na wierzchołku zakrzywienia rejonu przykatodowego. Ponieważ wartość grad \vec{B} jest wprost proporcjonalna do gęstości prądu, teza sformułowana wyżej zyskuje tym samym nowe potwierdzenie.

5. WNIOSKI

Przeprowadzone pomiary, rozważania teoretyczne i obliczenia wskazują na fakt, że występowanie ruchu wstecznego wiąże się z dużą gęstością prądu w plamce katodowej łuku próżniowego, niezbędną dla zapewnienia koniecznej do egzystencji tego typu wyładowania, koncentracji par przy katodzie. Duża gęstość prądu jest źródłem występowania dwóch zjawisk, które są wspólnie bezpośrednimi przyczynami pojawienia się ruchu wstecznego:

a) powoduje ona występowanie bardzo wysokiego lokalnego ciśnienia par metalu, które tworzą dzięki temu szybkie strumienie, będące przyczyną ruchu jonów dodatnich w kierunku przeciwnym do pola elektrycznego; efekt ten maleje wraz ze wzrostem natężenia prądu łuku oraz wzrostem ciśnienia otaczającego gazu.

b) jest ponadto przyczyną powstawania silnego własnego pola magnetycznego, zakrzywienia rejonu przykatodowego łuku, skierowanego przeciwnie do kierunku przyłożonego pola zewnętrznego; efekt ten wzrasta wraz ze wzrostem indukcji pola zewnętrznego.

Dodatkowymi czynnikami potęgującymi ruch wsteczny są: dryf elektronów w kierunku wstecznym pod wpływem gradientu pola magnetycznego w strefie zakrzywienia rejonu przykatodowego oraz ucieczka elektronów z obszaru wyładowania w kierunku normalnym bezpośrednio nad powierzchnią katody.

LITERATURA

1. J. Stark, *Induktionserscheinungen am Quecksilberlichtbogen im Magnetfeld*, Phys. Zeitschrift, 4, 1903, s. 440.
2. C. J. Gallagher, *The Retrograde Motion of the Arc Cathode Spot*, J. Appl. Phys., 21, 1950, s. 768
3. R. M. St. John, J. G. Winans, *Motion of Arc Cathode Spot in a Magnetic Field*, Phys. Rev., 94, 1954, s. 1097.
4. R. M. St. John, J. G. Winans, *Motion and Spectrum of Arc Cathode Spot in a Magnetic Field*, Phys. Rev., 98, 1955, s. 1664.
5. J. G. Kesajev, *Katodnyje prociesy rtutnoj dugi i voprosy jeje ustoičivosti*, Gos. Energi. Izd., Moskwa 1961.
6. H. Weichel, *Experimental and Analytical Study of Arc Retrograde Motion*, VII Internat. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Beograd 1965.
7. A. Eindinger, W. Rieder, *Das Verhalten des Lichtbogens im transversalen Magnetfeld (Magnetische Blasung)*, Archiv für Elektrotechnik, XLIII, 2, 1957, s. 94.
8. K. Stefaniak, *Cisnieniowy model strefy przykatodowej łuku próżniowego*, Rozprawy Elektrotechniczne, 2, 1975.
9. W. W. Kanciel, T. S. Kurakina, W. S. Potokin, W. J. Rachovskij, L. G. Tkaciev, *K voprosu o vlijanii tieplofiziceskich paramietrov materiala na eroziju elektrodov v silnotočnom vakuunnom razriadie*, Žurnal Tiech. Fiziki, 38, 1968, s. 1074.
10. K. Stefaniak, *Zachowanie się w poprzecznym polu magnetycznym łuku elektrycznego w próżni*, Rozprawa doktorska, Poznań 1972.
11. A. E. Robson, A. Engel, *Origin of Retrograde Motion of Arc Cathode Spots*, Phys. Rev., 93, 1954, s. 1121.
12. W. I. Rachovskij, *Fizičeskije osnovy komutacii električeskovo toka v vakuumie*, Izd. Nauka, Moskwa 1970.

K. STEFANIAK

RETROGRADE MOTION OF ELECTRICAL ARC IN VACUUM ON SOLID ELECTRODES

Summary

The article contains the results of experiments on electrical arc behaviour between concentric electrodes at pressure of order of 10^{-5} Tr, for values of current 20÷150 A and for induction values of transverse magnetic field up to 0,5 T. Measurements were taken on speed of arc motion, on voltage and lifetime.

The experiments proved the non continuous drift of cathode spots and slightly different character of arc behaviour for stronger currents.

Those considerations show that the retrograde motion is above all connected with high current density necessary for the vacuum arc occurrence.

K. STEFANIAK

LE MOUVEMENT RÉTROGRADE DE L'ARC ÉLECTRIQUE DANS LE VIDE SUR LES ÉLECTRODES CONSTANTES

Résumé

Cet article contient les résultats, de la recherche sur le comportement de l'arc électrique dans l'interruption annulaire entre les électrodes concentriques, sous pression d'ordre 10^{-5} Tr, les courants de l'arc entre 20 et 150 A et les valeurs de l'induction du champ transversalement dirigé jusqu'à 0,5 T. On a mesuré la vitesse du déplacement de l'arc, sa tension et sa durée. On a établi le caractère discontinu du déplacement des taches cathodiques et les différences dans le comportement de l'arc pour le courant élevés.

Les considérations analytiques ont permis à constater, que l'effet du mouvement rétrograde est lié avant tout avec la densité du courant de la tache cathodique de l'arc à vide.

K. STEFANIAK

RÜCKBEWEGUNG DES ELEKTROBOGENS IM VAKUUM MIT FESTELEKTRODEN

Zusammenfassung

Der Artikel enthält Untersuchungsergebnisse über das Verhalten des elektrischen Bogens in der Ringpause zwischen konzentrischen Elektroden beim Druck von etwa 10^{-5} Tr, Bogenstrom von 20—150 A und Induktionswerten des Querfeldes bis 0,5 T.

Es wurden Geschwindigkeit der Bogenverschiebung, seine Spannung und Lebensdauer gemessen.

Man hat auch den diskontinuierlichen Charakter der Kathodenfleckensverschiebung sowie einen etwas unterschiedlichen Charakter des Bogenverhaltens bei höheren Strömen festgestellt.

Die durchgeführten analytischen Erwägungen ermöglichen die Feststellung, dass das Auftreten der Rückbewegung vor allem mit hoher Stromdichte des Kathodenfleckens des Vakuumbogens zusammenhängt.

К. СТЕФАНЯК

ОБРАТНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ В ВАКУУМЕ НА ТВЕРДЫХ ЭЛЕКТРОДАХ

Резюме

Статья содержит результаты исследований поведения электрической дуги в кольцевом промежутке между концентрическими электродами при давлениях до 10^{-5} Тг токах дуги в границах 20—150 А и индукциях поперечно направленного поля до 0,5 Т.

Измерялись скорость смещения дуги, напряжение и время ее существования.

Подтвержден непостоянный характер смещения катодных пятен и немного отличающийся характер поведения дуги при больших токах.

Проведены аналитические рассуждения, которые позволили констатировать, что появление обратного движения связано прежде всего с высокой плотностью тока катодного пятна вакуумной дуги.

Przenikalność zastępcza masywnego żelaza przy częstotliwości technicznej

MARCELI KAŹMIERSKI (ŁÓDŹ)

Instytut Elektrotechniki, Oddział w Łodzi, Zakład Transformatorów

Otrzymano 27.11.1973

Przedmiotem pracy jest jedna z metod przybliżonego uwzględnienia nieliniowości magnetycznej masywnego żelaza — metoda zespolonej przenikalności zastępczej. Przenikalność taka linearyzuje środowisko „w głąb” metalu i mimo iż została wyznaczona pomiarowo w jednowymiarowym polu elektromagnetycznym — na próbce toroidalnej, odwzorowuje stosunkowo dokładnie zjawiska zachodzące na powierzchni metalu w większości praktycznych układów pól wielowymiarowych, zazwyczaj jeśli wymiary obiektu przekraczają kilka centymetrów. W takim ujęciu może być ona bezpośrednio wprowadzona, jako funkcja współrzędnych biegnących po powierzchni metalu, do równań Maxwella upraszczając znacznie ich rozwiązanie w środowiskach magnetycznie nieliniowych.

W pracy podano wartości modułu i argumentu przenikalności zastępczej dla stali St 3s i St 4s, przy czym dla silnych pól magnetycznych ($H > 50 \cdot 10^2$ A/m) są one równe: $\mu_z = (1,35 \dots 1,4) \mu_s$, $\psi = 0,44 \dots 0,5$ rad, gdzie μ_s oznacza przenikalność magnetyczną określoną z podstawowej (przy prądzie stałym) krzywej magnesowania.

1. WSTĘP

Pojęcie przenikalności zastępczej, linearyzującej w sposób przybliżony równania elektrodynamiki nieliniowych środowisk ferromagnetycznych, jest znane i stosowane od dawna ([2], [4], [9], [11], [12] i inne). Wielkość ta określona wyłącznie dla płaskiej fali elektromagnetycznej, była dowolnie, zależnie od potrzeb autorów definiowana.

W przedstawionym w niniejszej pracy ujęciu przenikalność zastępcza ma znaczenie pewnej zastępczej wielkości fizycznej i jako taka może być wprowadzona bezpośrednio do równań pola. Uproszczenie takie jest szczególnie przydatne w często spotykanych w praktyce przypadkach pól dwu- i trójwymiarowych [10].

2. DEFINICJA I POJĘCIA PODSTAWOWE

Przez przenikalność zastępczą μ_z masywnego żelaza będziemy rozumieć przenikalność takiego fikcyjnego środowiska liniowego, które umieszczone w tej samej przestrzeni zamiast faktycznego środowiska ferromagnetycznego w przemiennym polu elektromagnetycznym o dowolnej konfiguracji, nie spowoduje zmiany rozkładu i amplitud wektorów tego pola w przestrzeni otaczającej badane środowisko metalowe. Impedancja powierzch-

niowa w dowolnym punkcie na powierzchni takiego środowiska liniowego i straty jednostkowe na jego powierzchni będą wówczas równe impedancji powierzchniowej i stratom jednostkowym występującym w odpowiadającym punkcie na powierzchni rzeczywistego ferromagnetyka.

Z powyższej definicji wynika szereg warunków, które powinna spełniać tak określona przenikalność zastępcza masywnego żelaza.

1. Winna to być przenikalność zależna od właściwości materiału a nie od kształtu powierzchni konkretnego układu. Inaczej mówiąc — nie przenikalność układu, a przenikalność środowiska¹⁾.

2. Ponieważ ferromagnetyk przez swoją nieliniowość jest źródłem wyższych harmonicznych w przebiegach $H(t)$, $B(t)$, $E(t)$, podczas gdy każde środowisko liniowe z $\mu = \text{const}$, niezależnie od wartości tej przenikalności harmonicznych tych nie będzie wprowadzało, to odpowiedniość przebiegów czasowych natężenia pola elektrycznego, magnetycznego i indukcji na powierzchni rzeczywistego ferromagnetyka ($\mu = \text{var}$) i fikcyjnego środowiska liniowego ($\mu = \mu_z = \text{const}$) winna być rozumiana w sensie odpowiedniości zastępczych sinusoid przebiegów odkształconych²⁾.

3. Wprowadzona przenikalność zastępcza winna zapewnić stwierdzone doświadczalnie i uzasadnione teoretycznie [2], [3], [17], [18] różnice w wartościach bezwzględnych, składowych czynnych i biernych impedancji powierzchniowej oraz strat mocy czynnej i biernej występujących w masywnym żelazie.

Najbardziej odpowiednią postacią przenikalności zastępczej odpowiadającą powyższej definicji i spełniającą podane wyżej warunki, jest postać zespolona:

$$\underline{\mu}_z = \mu_z \cdot e^{-j\psi}, \quad (1)$$

przy czym zarówno moduł, jak i argument tak określonej przenikalności zastępczej są funkcją amplitudy natężenia pola magnetycznego na powierzchni żelaza H_{ms} :

$$\underline{\mu}_z(H_{ms}) = \mu_z(H_{ms}) \cdot e^{-j\psi(H_{ms})} \quad (1a)$$

Przyjęta postać (1) przez formalne podobieństwo zapisu sugerować może błędne wnioski utożsamiając ją z zastępczą eliptyczną pętlą histerezy używaną przez wielu autorów. W masywnym żelazie zjawisko histerezy, jako mniej istotne, przy silnych polach może być w zasadzie pominięte. Szerszy pogląd na tę sprawę daje praca [13], gdzie w ogólnym przypadku, po uwzględnieniu zjawiska histerezy, wyraźnie rozdzielono fizyczny sens argumentu przenikalności zespolonej:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \approx \psi_2,$$

przy czym ψ_1 dużo mniejsze od ψ_2 wynika ze strat histerezowych.

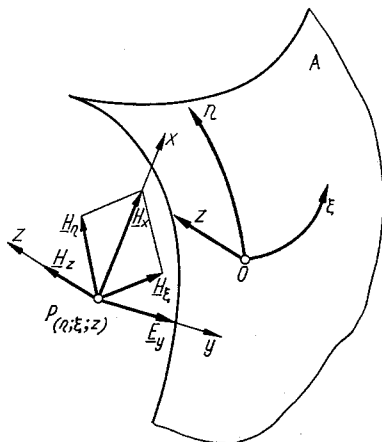
Podsumowując można powiedzieć, że w środowisku zastępczym o przenikalności $\underline{\mu}_z$ sinusoidalne \underline{H} wywołuje sinusoidalną \underline{B} opóźnioną o kąt ψ .

¹⁾ O ile środowisko metalowe jest masywne.

²⁾ Przez sinusoidę zastępczą przebiegu odkształconego będziemy rozumieć sinusoidę o wartości skutecznej równej wartości skutecznej przebiegu odkształconego.

3. ZALEŻNOŚCI PODSTAWOWE

Rozpatrzmy środowisko przewodzące o stałych parametrach μ i γ ograniczone powierzchnią A . Wybierzemy ortogonalny układ współrzędnych z, η, ξ , jak na rysunku 1. Współrzędna z jest normalną do powierzchni A , współrzędne η i ξ — współrzędnymi bieżącymi po A . Jeśli promienie krzywizny powierzchni A są dostatecznie duże w porówna-



Rys. 1. Ortogonalne układy współrzędnych w środowisku przewodzącym

niu z głębokością wnikania fali elektromagnetycznej do metalu, to odpowiednie równania Maxwella we współrzędnych z, η, ξ mają postać tak jakby współrzędne te były współrzędnymi kartezjańskimi. Istotnie można wykazać, że w odniesieniu na przykład do natężenia pola magnetycznego, we współrzędnych z, η, ξ laplasjan ma postać³⁾

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{e_2 e_3}{e_1} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{e_3 e_1}{e_2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e_1 e_2}{e_3} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} \right) \right], \quad (2)$$

gdzie:

$$e_1 = e_2 = \sqrt{1 + \frac{z}{R(\eta, \xi)}} \quad \text{— współczynniki Lamego,}$$

$$e_3 = 1,$$

$R(\eta, \xi)$ — lokalny promień krzywizny powierzchni A .

Zatem, jeśli praktyczny obszar zmienności z jest mały w porównaniu z promieniem krzywizny powierzchni granicznej, co praktycznie występuje we wszystkich środowiskach metalowych, których wymiary powierzchniowe przekraczają kilka centymetrów, można przyjąć, że $e_1 = e_2 = 1$ i

$$\nabla^2 \mathbf{H} \cong \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2}. \quad (2a)$$

³⁾ Patrz np. Szulkin P., Pogorzelski S.: Podstawy teorii pola elektromagnetycznego, WNT, Warszawa 1964.

W punkcie $P(\xi, \eta, z)$ środowiska metalowego można wybrać lokalny układ współrzędnych kartezjańskich x, y, z tak, aby oś x pokrywała się z kierunkiem stycznej składowej natężenia pola magnetycznego do powierzchni A

$$H_x = \sqrt{H_\eta^2 + H_\xi^2}.$$

Pole elektromagnetyczne w otoczeniu punktu P w nowym układzie współrzędnych charakteryzowane jest teraz składowymi H_x, H_z, E_y (rys. 1) i jest polem dwuwymiarowym. Równania Maxwella dla sinusoidalnej zmienności wektorów pola w czasie przybierają tu postać:

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \gamma E_y,$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = j\omega\mu H_x, \quad (3)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -j\omega\mu H_z.$$

Można wykazać [5], że w środowiskach metalowych, gdzie zmiany pola w głąb metalu są znacznie szybsze niż po powierzchni, bez uszczerbku dla dokładności analizy (patrz załącznik) w pierwszym z równań (3) można pominąć drugi wyraz:

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \approx \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad (4)$$

co w połączeniu z drugim równaniem daje:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} = j\omega\mu\gamma H_x = \alpha^2 H_x \quad (5)$$

i prowadzi w rezultacie do równań jak dla pola jednowymiarowego:

$$H_x = \underline{H}_{xs}(x)e^{-\alpha z}, \quad (6)$$

$$\underline{E}_y = -\frac{\alpha}{\gamma} \underline{H}_{xs}(x)e^{-\alpha z} = \underline{E}_{ys}(x)e^{-\alpha z}. \quad (7)$$

Indeksami s oznaczono amplitudy odnośnych wektorów na powierzchni metalu.

Wniosek powyższy można sformułować następująco: w środowiskach metalowych, jeśli zmiany pola elektromagnetycznego w głąb metalu zachodzą znacznie szybciej niż po powierzchni (w układach praktycznych zazwyczaj jeśli wymiary powierzchniowe obiektu przekraczają kilka centymetrów), przy lokalnej analizie pola elektromagnetycznego można posługiwać się zależnościami, jak dla pola jednowymiarowego. Wniosek ten w inny sposób został wyprowadzony w pracach [3] i [5]. W związku z tym ograniczymy rozważania do takiego właśnie pola.

Na powierzchni półprzestrzeni przewodzącej o stałej przenikalności magnetycznej ($\mu = \text{const}$) — rys. 2, przy sinusoidalnej zmienności wektorów pola w czasie (pole jednowymiarowe) obowiązują znane [3] zależności:

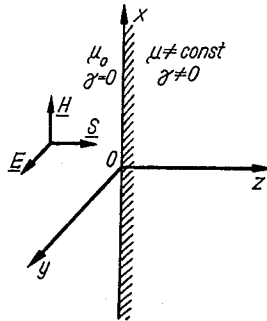
— dla natężenia pola elektrycznego na powierzchni metalu:

$$\underline{E}(0, t) = \underline{E}_{ms} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} \underline{H}_{ms} e^{j\pi/4} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}} \underline{H}_{ms}, \quad (8)$$

— dla impedancji powierzchniowej:

$$\underline{Z}_s = \frac{\underline{E}(0, t)}{\underline{H}(0, t)} = \frac{\underline{E}_{ms}}{\underline{H}_{ms}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} e^{j\pi/4} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}} = R_s + jX_s, \quad (9)$$

$$R_s = X_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}, \quad (10)$$



Rys. 2. Układ wektorów płaskiej fali elektromagnetycznej

— dla jednostkowych strat mocy:

$$\underline{S}_s = \frac{1}{2} \underline{E}_{ms} \cdot \underline{H}_{ms}^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}} \underline{H}_{ms}^2 e^{j\pi/4} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}} \frac{H_{ms}^2}{2} = P_s + jQ_s, \quad (11)$$

$$P_s = Q_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}} \frac{H_{ms}^2}{2}.$$

Dla „zlinearyzowanego” ferromagnetyka będą obowiązywać analogiczne zależności, z tym że w miejsce μ należy wstawić $\underline{\mu}_z = \mu_z \cdot e^{-j\psi}$. Otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \underline{E}_{ms} &= \sqrt{\frac{\omega\underline{\mu}_z}{\gamma}} \underline{H}_{ms} e^{j\pi/4} = \sqrt{\frac{\omega\mu_z}{\gamma}} \underline{H}_{ms} e^{j(\pi/4 - \psi/2)} = \\ &= \sqrt{\frac{\omega\mu_z}{2\gamma}} \underline{H}_{ms} [\cos\psi/2 + \sin\psi/2 + j(\cos\psi/2 - \sin\psi/2)], \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_s &= \sqrt{\frac{\omega\underline{\mu}_z}{\gamma}} e^{j\pi/4} = \sqrt{\frac{\omega\mu_z}{\gamma}} e^{j(\pi/4 - \psi/2)} = \\ &= \sqrt{\frac{\omega\mu_z}{2\gamma}} [\cos\psi/2 + \sin\psi/2 + j(\cos\psi/2 - \sin\psi/2)], \end{aligned} \quad (9a)$$

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu_z}{2\gamma}} (\cos\psi/2 + \sin\psi/2), \quad (10a)$$

$$X_s = \sqrt{\frac{\omega\mu_z}{2\gamma}} (\cos\psi/2 - \sin\psi/2), \quad (10b)$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_s &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu_z}{\gamma}} \underline{H}_{ms}^2 e^{j\pi/4} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu_z}{\gamma}} H_{ms}^2 e^{j(\pi/4 - \psi/2)} = \\ &= \sqrt{\frac{\omega\mu_z}{2\gamma}} \frac{H_{ms}^2}{2} [\cos\psi/2 + \sin\psi/2 + j(\cos\psi/2 - \sin\psi/2)], \end{aligned} \quad (11a)$$

$$P_s = \sqrt{\frac{\omega\mu_z}{2\gamma}} \frac{H_{ms}^2}{2} (\cos\psi/2 + \sin\psi/2), \quad (12a)$$

$$Q_s = \sqrt{\frac{\omega\mu_z}{2\gamma}} \frac{H_{ms}^2}{2} (\cos\psi/2 - \sin\psi/2). \quad (12b)$$

We wzorach (3)...(12) poszczególne symbole oznaczają:

$\underline{E}_{ms}, \underline{H}_{ms}$ — zespolone amplitudy natężenia pól odpowiednio elektrycznego i magnetycznego na powierzchni metalu,

H_{ms}^* — wielkość sprzężona z \underline{H}_{ms} ,

$\underline{Z}_s, R_s, X_s$ — zespolona impedancja powierzchniowa środowiska metalowego i jej składowe: czynna (rezystancja) i bierna (reaktancja),

$\underline{S}_s, P_s, Q_s$ — jednostkowe straty mocy pozornej czynnej i biernej,

$\omega = 2\pi f$ — pulsacja pola elektromagnetycznego,

γ — przewodność właściwa środowiska metalowego,

μ — przenikalność magnetyczna środowiska metalowego.

Wprowadzając wielkości:

$$\mu_{zR} = \mu_z(1 + \sin\psi), \quad (13)$$

$$\mu_{zX} = \mu_z(1 - \sin\psi), \quad (14)$$

otrzymuje się:

$$\underline{Z}_s = \sqrt{\frac{\omega\mu_{zR}}{2\gamma}} + j \sqrt{\frac{\omega\mu_{zX}}{2\gamma}}, \quad (15)$$

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu_{zR}}{2\gamma}}, \quad (16)$$

$$X_s = \sqrt{\frac{\omega\mu_{zX}}{2\gamma}}, \quad (17)$$

$$\underline{S}_s = \sqrt{\frac{\omega\mu_{zR}}{2\gamma}} \frac{H_{ms}^2}{2} + j \sqrt{\frac{\omega\mu_{zX}}{2\gamma}} \frac{H_{ms}^2}{2}, \quad (18)$$

$$P_s = \sqrt{\frac{\omega\mu_{zR}}{2\gamma}} \frac{H_{ms}^2}{2}, \quad (19)$$

$$Q_s = \sqrt{\frac{\omega\mu_{zX}}{2\gamma}} \frac{H_{ms}^2}{2}. \quad (20)$$

Wielkości μ_{zR} i μ_{zX} zdefiniować można jako przenikalności zastępcze odpowiednio dla rezystancji (albo mocy czynnej) i reaktancji (albo mocy biernej). Obydwie te wielkości

związane są z modułem i argumentem przenikalności zastępczej ferromagnetyka wzorami (13) i (14). Argument impedancji (albo mocy pozornej) wynika ze wzoru:

$$\varphi = \arctg \sqrt{\frac{\mu_{zX}}{\mu_{zR}}} = \arctg \sqrt{\frac{1 - \sin\psi}{1 + \sin\psi}}. \quad (21)$$

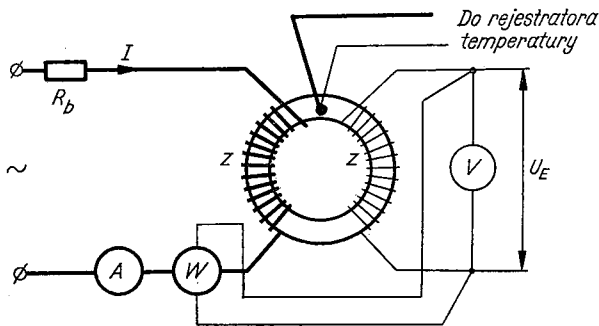
Stawiając zagadnienie odwrotnie, na podstawie znanych μ_{zR} i μ_{zX} wyznaczyć można przenikalność zastępczą środowiska ferromagnetycznego:

$$\mu_z = \frac{\mu_{zR} + \mu_{zX}}{2}, \quad (22)$$

$$\psi = \arcsin \frac{\mu_{zR} - \mu_{zX}}{\mu_{zR} + \mu_{zX}}. \quad (23)$$

4. WYZNACZENIE PRZENIKALNOŚCI ZASTĘPCZEJ

Przenikalności zastępcze dla rezystancji i reaktancji można wyznaczyć na drodze pomiarowej w układach, w których łatwo oblicza się wartości H_{ms} , $E_{ms} = f(H_{ms})$, $P_s = f(H_{ms})$ — najczęściej na próbkach toroidalnych (rys. 3). W tabelicy 1 zestawiono wymiary



Rys. 3. Układ pomiarowy do wyznaczania przenikalności zastępczej próbki pierścieniowej
 \bar{W} — watomierz na niski $\cos\varphi$, V — woltomierz o dużej rezystancji wejściowej, R_b — bocznik do pomiaru wartości skutecznej, średniej i maksymalnej prądu poprzez pomiar odpowiedniej wartości spadku napięcia

geometryczne i skład chemiczny dwóch próbek pierścieniowych z masywnej stali konstrukcyjnej (St 3s i St 4s) używanych do badań.

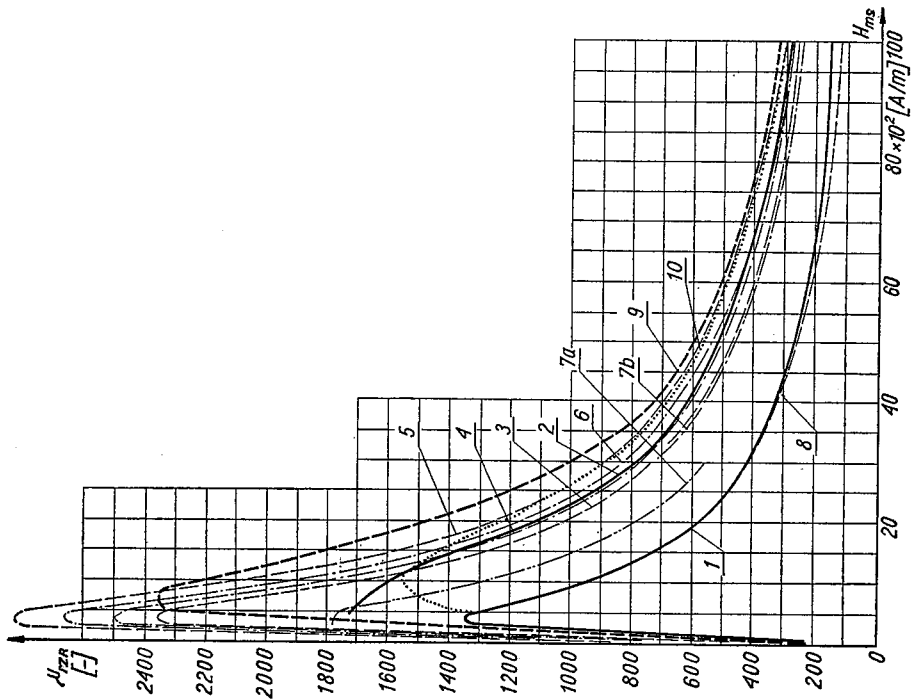
Przenikalność zastępczą dla rezystancji wyznaczyć można przekształcając zależność (19) do postaci:

$$\mu_{zR} = 8 \frac{\gamma}{\omega} \left(\frac{P_s}{H_{ms}^2} \right)^2, \quad (24)$$

gdzie:

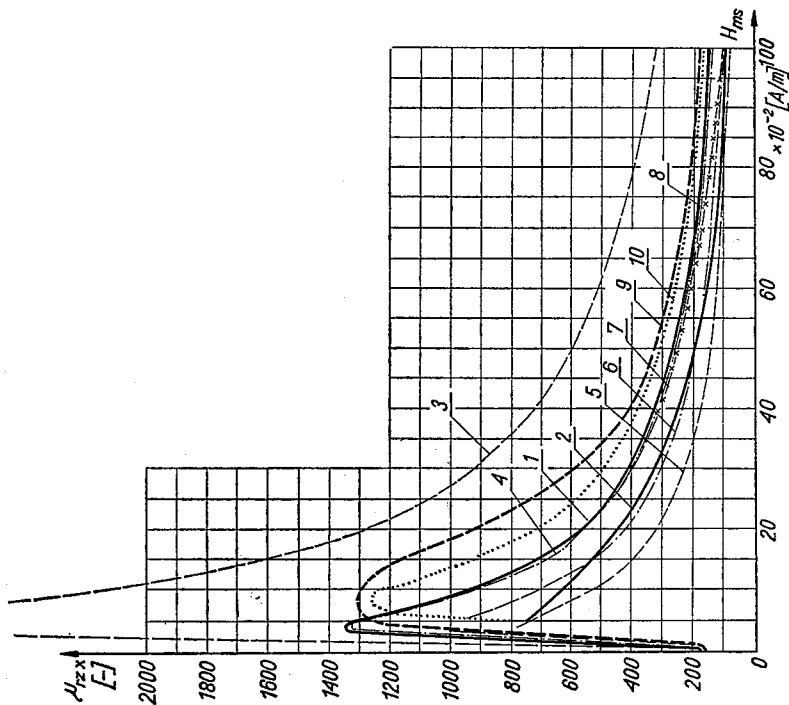
$$H_{ms} = \frac{I_m z}{\pi D_{sr}^2}$$

I_m — maksymalna wartość prądu magnesującego próbkę,



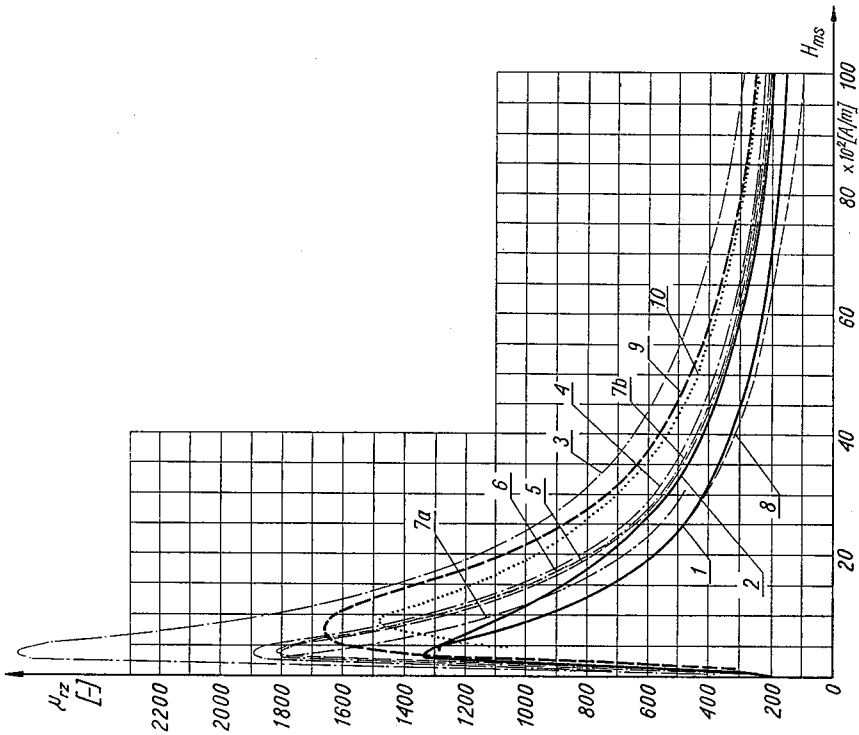
Rys. 4. Wykres zmian względnej przenikalności zastępczej dla rezystancji (strat mocy czynnej) μ_{rzr} w funkcji amplitudy natężenia pola magnetycznego H_{ms} dla stali St 48

1 — względna przenikalność magnetyczna wyznaczona z podstawowej krzywej magnetyzowania, 2 — μ_{rzr} wyznaczona na podstawie pomiaru (wzór (248)), 3 — μ_{rzr} wg metody Rosenberga [12], 4 — μ_{rzr} wg metody Rosenberga z modyfikacją Haberlanda [9], 5 — μ_{rzr} wg metody Haberlanda z modyfikacją Agarwala [4], 6 — μ_{rzr} wg metody Nijjmana [2], 7 — μ_{rzr} wg metody Saviuca [15], [16]; a — dla $5 \cdot 10^2 \leq H_{ms} \leq 20 \cdot 10^2$ A/m, b — dla $20 \cdot 10^2 \leq H_{ms} \leq 200 \cdot 10^2$ A/m, 8 — μ_{rzr} wg metody Kesavamurthy'ego [11] dla $40 \cdot 10^2 \leq H_{ms} \leq 100 \cdot 10^2$ A/m, 9 — μ_{rzr} wg metody Bieriezowskiego [6], 10 — μ_{rzr} wg metody Bieriezowskiego, Niżnika, Krawczyński [8]



Rys. 5. Wykres zmian względnej przenikalności zastępczej dla reaktancji (strat mocy biernej) μ_{rx} w funkcji amplitudy natężenia pola magnetycznego na powierzchni — H_{ms} dla stali St 4s

1 — względna przenikalność magnetyczna wyznaczona z podstawowej krzywej magnesowania, 2 — μ_{rx} wyznaczona na podstawie pomiaru (wzór (25)), 3 — μ_{rx} wg metody Rosenberga [12], 4 — μ_{rx} wg metody Rosenberga z modyfikacją Haberlanda [9], 5 — μ_{rx} wg metody Haberlanda z modyfikacją Agarwala [4], 6 — μ_{rx} wg metody Niejmiana [2], 7 — μ_{rx} wg metody Savinca [15], [16], 8 — dla $5 \cdot 10^2 \leq H_{ms} \leq 20 \cdot 10^2$ A/m, 9 — dla $20 \cdot 10^2 \leq H_{ms} \leq 200 \cdot 10^2$ A/m, 10 — μ_{rx} wg metody Kesavarmurthy'ego [11] dla $40 \cdot 10^2 \leq H_{ms} \leq 100 \cdot 10^2$ A/m, 9 — μ_{rx} wg metody Bieriezowskiego [6], 10 — μ_{rx} wg metody Bieriezowskiego, Niżnika i Krawczyński [8]



Rys. 6. Wykres zmian modułu względnej przenikalności zastępczej μ_{rz} w funkcji amplitudy natężenia pola magnetycznego na powierzchni ni — H_{ms} dla stali St 4s

1 — względna przenikalność magnetyczna wyznaczona z podstawowej krzywej magnetyzowania, 2 — μ_{rz} wyznaczona na podstawie pomiaru (wzór (22)), 3 — μ_{rz} wg metody Rosenberga [12], 4 — μ_{rz} wg metody Rosenberga z modyfikacją Haberlanda [9], 5 — μ_{rz} wg metody Haberlanda z modyfikacją Agarwala [4], 6 — μ_{rz} wg metody Niejmiana [2], 7 — μ_{rz} wg metody Savuica [15], [16]: a — dla $5 \cdot 10^2 \leq H_{ms} \leq 20 \cdot 10^2$ A/m, b — dla $20 \cdot 10^2 \leq H_{ms} \leq 200 \cdot 10^2$ A/m, 8 — μ_{rz} wg metody Kesavamarthy'ego [11] dla $40 \cdot 10^2 \leq H_{ms} \leq 100 \cdot 10^2$ A/m, 9 — μ_{rz} wg metody Bieriezowskiego [6], 10 — μ_{rz} wg metody Bieriezowskiego, Niżnika i Krawczyński [8]

z — liczba zwojów uzwojenia prądowego nawiniętego na próbkę,

$$D_{sr} = \frac{D_z - D_w}{\ln \frac{D_z}{D_w}} \text{ — średnia logarytmiczna średnica próbki,}$$

$$P_s = \frac{P}{2\pi D_{sr}(a+b)},$$

P — całkowite straty mocy czynnej w próbce zmierzone watomierzem w układzie z rys. 3,

a — szerokość próbki,

b — wysokość próbki.

Stąd:

$$\mu_{zR} = \pi \frac{\gamma}{f} \left[\frac{D_{sr}}{(a+b)z^2} \right]^2 \left(\frac{P}{I_m^2} \right)^2 \quad (24a)$$

Analogicznie przenikalność zastępcza dla reaktancji:

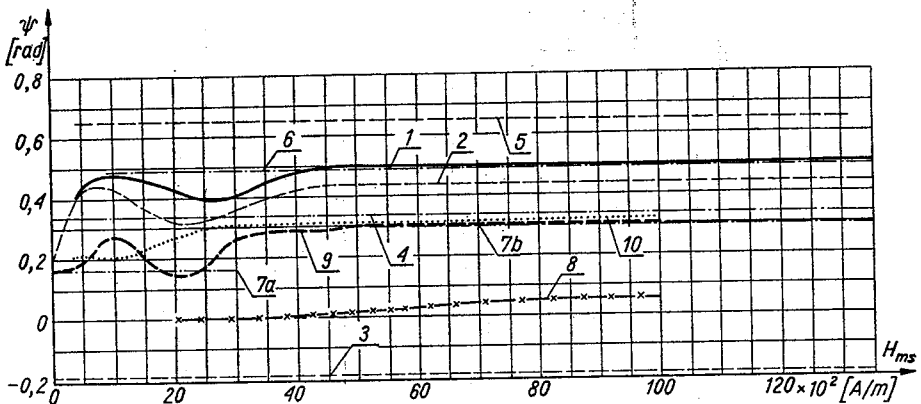
$$\mu_{zX} = \pi \frac{\gamma}{f} \left[\frac{D_{sr}}{(a+b)z^2} \right]^2 \left(\frac{Q}{I_m^2} \right)^2, \quad (25)$$

gdzie:

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2},$$

$S = I \cdot U_E$ — całkowita moc pozorna wydzielana w układzie.

Na rys. 4, 5, 6, 7 przedstawiono wyznaczone pomiarowo ze wzorów (24a) i (25) przenikalności zastępcze μ_{zR} i μ_{zX} oraz przeliczone wzorami (22) i (23) wartości μ_z i ψ dla stali St 3s i St 4s. Ponadto na rysunkach tych naniesiono odpowiednie wartości tych przenikalności wynikające z obliczeń na podstawie przybliżonej analizy teoretycznej przeprowadzonej przez różnych autorów ([12], [9], [4], [2], [15], [16], [11]).

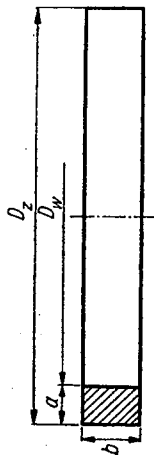


Rys. 7. Wykres zmian argumentu przenikalności zastępczej ψ w funkcji amplitudy natężenia pola magnetycznego na powierzchni H_{ms}

1 — wyznaczony z pomiaru (wzór (23)) dla stali St 4s, 2 — wyznaczony z pomiaru (wzór (23)) dla stali St 3s, 3 — według metody Rosenberga [12], 4 — wg metody Rosenberga z modyfikacją Haberlanda [9], 5 — wg metody Haberlanda z modyfikacją Agarwala [4], 6 — wg metody Niejmiana [2], 7 — wg metody Saviuca [15], [16]: a — dla $5 \cdot 10^2 \leq H_{ms} \leq 20 \cdot 10^2$ A/m, b — dla $20 \cdot 10^2 \leq H_{ms} \leq 200 \cdot 10^2$ A/m, 8 — wg metody Kesavamurthy'ego [11] dla $40 \cdot 10^2 \leq H_{ms} \leq 100 \cdot 10^2$ A/m, 9 — dla I harmonicznej — ψ_1 wg metody Bieriezowskiego [6], 10 — dla I harmonicznej — ψ_1 wg metody Bieriezowskiego, Niżnika i Krawczenki [8]

Tablica 1

Wymiary i skład chemiczny próbek pierścieniowych



Materiał próbki	Wymiary				Skład chemiczny										γ_{20} $\times 10^6 \frac{1}{\Omega m}$
	D_z	D_w	a	b	$z^{1)}$	C	Si	P	S	Mn	Cr	No	W		
	mm	mm	mm	mm	—	%	%	%	%	%	%	%	%		
St 3s	435	402	16,5	18	488	0,2	0,15	0,03	0,37	0,5	0,05	0,03	0,7		
St 4s	159,1	140,4	9,35	196	156	0,18	0,22	0,027	0,032	0,52	—	—	5,45		

¹⁾ Liczba zwojów uzwojenia prądowego równa liczbie zwojów uzwojenia napięciowego

5. PRZENIKALNOŚĆ ZASTĘPCZA DLA I HARMONICZNEJ

W ostatnich latach ukazało się szereg publikacji pracowników Instytutu Elektrotechniki Ukraińskiej Akademii Nauk ([6], [7], [8], [14]) dotyczących analitycznego ujęcia przenikalności zastępczej ferromagnetyków. Przenikalność ta — μ_{zI} — definiowana podobnie jak określona w poprzednim punkcie przenikalność μ_z obowiązuje dla I harmonicznych natężenia pola magnetycznego i indukcji i bazuje na przenikalności określonej z podstawowej krzywej magnesowania dla I harmonicznych tychże wielkości — μ_I .

Na rysunkach 4, 5, 6, 7 wykreślono obliczone według wzorów podanych w pracach [6] i [8] przenikalności zastępcze μ_{zRI} , μ_{zXI} , μ_{zI} i argument ψ_I .

6. WNIOSKI

W pracy wykazano, że w środowiskach ferromagnetycznych, jeśli wymiary powierzchniowe obiektu przekraczają kilka centymetrów, przy lokalnej analizie pola elektromagnetycznego można posługiwać się zależnościami, jak dla pola jednowymiarowego. Dzięki temu będąca przedmiotem rozważań i określona pomiarowo na próbkach pierścieniowych przenikalność zastępcza masywnego żelaza może być użyta przy analizie pola elektromagnetycznego w układach praktycznych z żelazem. Wprowadzenie tej przenikalności znacznie upraszcza taką analizę, szczególnie w często spotykanych przypadkach pól dwu- i trójwymiarowych, kiedy natężenie pola magnetycznego na powierzchni metalu nie jest wielkością stałą, a jest funkcją współrzędnych punktów $M(\xi, \eta)$ leżących na tej powierzchni. Dzięki temu, że przenikalność zastępcza linearyzuje środowisko ferromagnetyczne niejako „w głąb” metalu, otrzymuje się wówczas zależność

$$\underline{\mu}_z = f[H_{ms}(\xi, \eta)] \quad (26)$$

zamiast

$$\mu = f[H(\xi, \eta, z, t)] \quad (27)$$

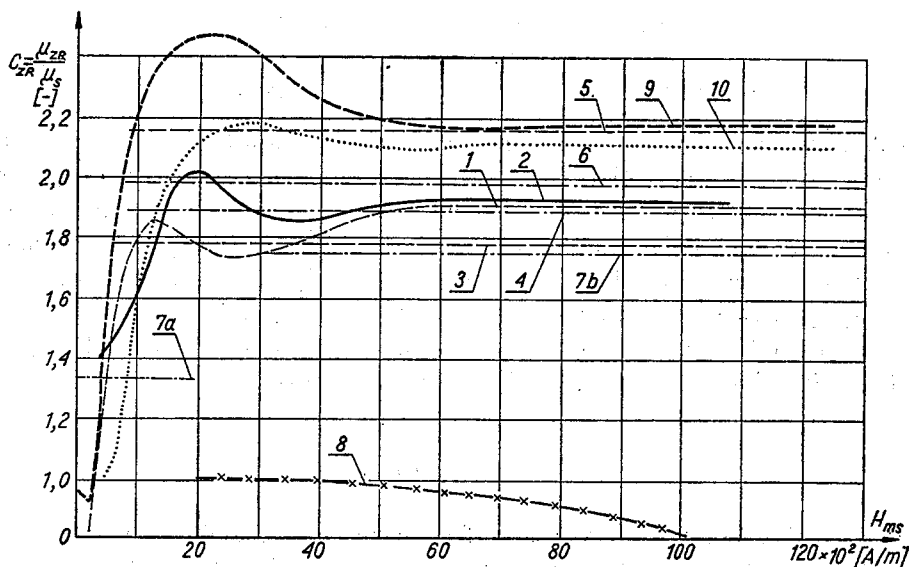
jak przy analizie dokładnej. Analiza pola elektromagnetycznego z uwzględnieniem (27) jest już w przypadku pól dwuwymiarowych bardzo utrudniona nawet przy użyciu dużych maszyn cyfrowych, podczas gdy wprowadzenie zależności (26) sprowadza zagadnienie do prostszych w rozwiązaniu nieliniowych warunków brzegowych [1].

W oparciu o porównanie wyników pomiarów i obliczeń, rozważania dotyczące przenikalności zastępczej masywnej stali można podsumować w kilku wnioskach.

1) Przenikalność zastępcza $\underline{\mu}_z$ (zarówno moduł μ_z , jak argument ψ) jest funkcją natężenia pola magnetycznego na powierzchni masywnego żelaza. To samo dotyczy określonych wzorami (13) i (14) przenikalności zastępczych dla rezystancji (strat mocy czynnej) μ_{zR} i reaktancji (strat mocy biernej) μ_{zX} ,

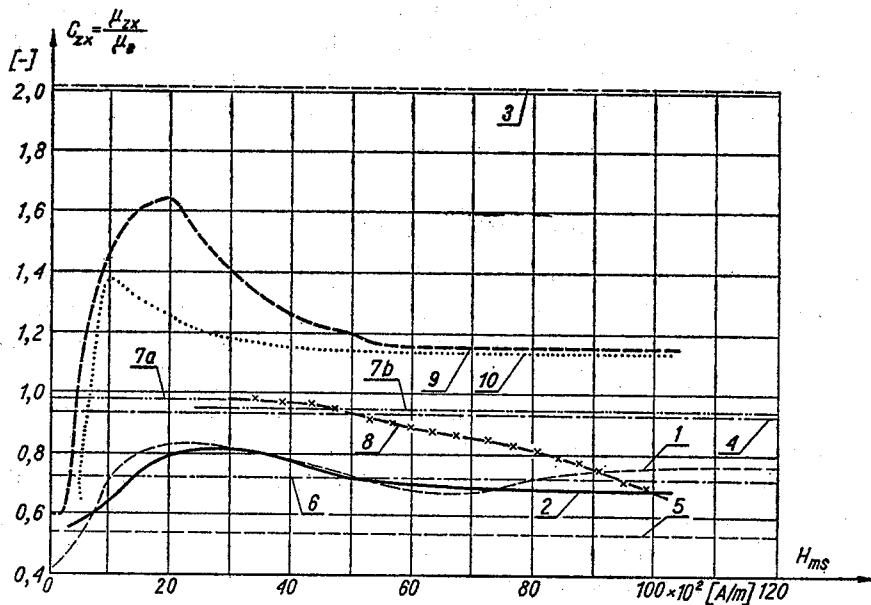
2) dla silnych pól magnetycznych ($H > 50 \cdot 10^2$ A/m) przenikalność zastępczą masywnej stali w sposób przybliżony można otrzymać mnożąc przez stały współczynnik przenikalność wyznaczoną z podstawowej krzywej magnesowania. Współczynnik ten (rys. 8, 9, 10) wynosi:

$$C_z = \frac{\mu_z}{\mu_s} = 1,35 \dots 1,4,$$



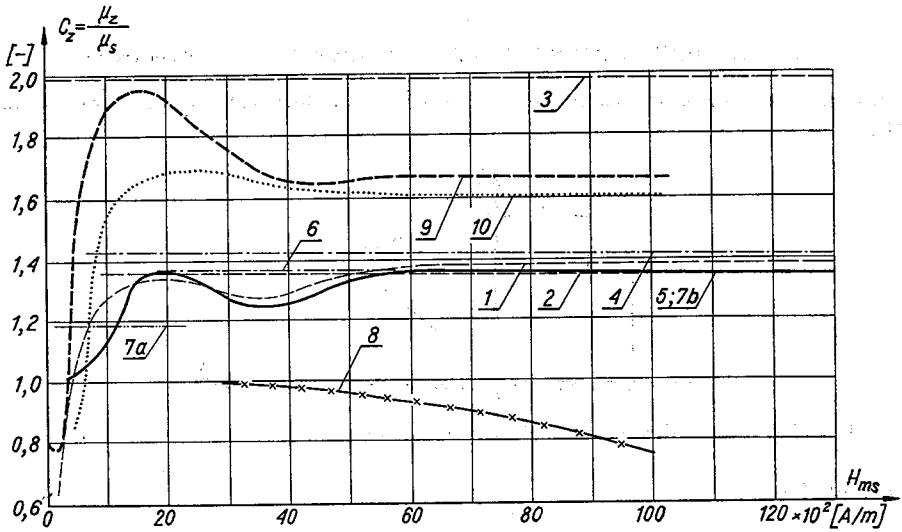
Rys. 8. $C_{zR} = \frac{\mu_{zR}}{\mu_s}$ dla masywnego żelaza

1 — z pomiaru na próbce ze stali St 3s, 2 — z pomiaru na próbce ze stali St 4s, 3 — wg metody Rosenberga [12], 4 — wg metody Rosenberga z modyfikacją Haberlanda [9], 5 — wg metody Haberlanda z modyfikacją Agarwala [4], 6 — wg metody Niejmiana [2], 7 — wg metody Saviuca [15], [16]: a — dla $5 \cdot 10^2 \leq H_{ms} \leq 20 \cdot 10^2$ A/m, b — dla $20 \cdot 10^2 \leq H_{ms} \leq 200 \cdot 10^2$ A/m, 8 — wg metody Kesavamurthy'ego [11] dla $40 \cdot 10^2 \leq H_{ms} \leq 100 \cdot 10^2$ A/m, 9 — μ_{zR1}/μ_s wg metody Bieriezowskiego [6], 10 — μ_{zR1}/μ_s wg metody Bieriezowskiego, Niznika i Krawczenki [8]



Rys. 9. $C_{zX} = \frac{\mu_{zX}}{\mu_s}$ dla masywnego żelaza

1 — z pomiaru na próbce ze stali St 3s, 2 — z pomiaru na próbce ze stali St 4s, 3 — wg metody Rosenberga [12], 4 — wg metody Rosenberga z modyfikacją Haberlanda [9], 5 — wg metody Haberlanda z modyfikacją Agarwala [4], 6 — wg metody Niejmiana [2], 7 — wg metody Saviuca [15], [16]: a — dla $5 \cdot 10^2 \leq H_{ms} \leq 20 \cdot 10^2$ A/m, b — dla $20 \cdot 10^2 \leq H_{ms} \leq 200 \cdot 10^2$ A/m, 8 — wg metody Kesavamurthy'ego [11] dla $40 \cdot 10^2 \leq H_{ms} \leq 100 \cdot 10^2$ A/m, 9 — μ_{zX1}/μ_s wg metody Bieriezowskiego [6], 10 — μ_{zX1}/μ_s wg metody Bieriezowskiego, Niznika i Krawczenki [8]



Rys. 10. $C_z = \frac{\mu_z}{\mu_s}$ — dla masywnego żelaza

1 — z pomiaru na próbce ze stali St 3s, 2 — z pomiaru na próbce ze stali St 4s, 3 — wg metody Rosenberga [12], 4 — wg metody Rosenberga z modyfikacją Haberlanda [9], 5 — wg metody Haberlanda z modyfikacją Agarwala [4], 6 — wg metody Niejmana [2], 7 — wg metody Saviuca [15], [16]: a — dla $5 \cdot 10^2 \leq H_{ms} \leq 20 \cdot 10^2$ A/m, b — dla $20 \cdot 10^2 \leq H_{ms} \leq 200 \cdot 10^2$ A/m, 8 — wg metody Kesavamurthy'ego [11] dla $40 \cdot 10^2 \leq H_{ms} \leq 100 \cdot 10^2$ A/m, 9 — μ_{zI}/μ_s wg metody Bierzowskiego [6], 10 — μ_{zI}/μ_s wg metody Bierzowskiego, Niżnika i Krawczenki [8]

$$C_{zR} = \frac{\mu_{zR}}{\mu_s} = 1,9 \dots 2,0,$$

$$C_{zX} = \frac{\mu_{zX}}{\mu_s} = 0,7 \dots 0,8.$$

Argument przenikalności zastępczej w tymże zakresie wynosi:

$$\psi = 0,44 \dots 0,5 \text{ rad.}$$

Z przytoczonych metod uproszczonych najbliższe rzeczywistym wyniki w zakresie silnych i średnich pól magnetycznych ($H > (10 \dots 20) \cdot 10^2$ A/m) dają:

metoda Rozenberga, tylko przy obliczeniu μ_{zR} ,

metoda Rozenberga z modyfikacją Heberandów (nieco mniejsze dokładności przy wyznaczaniu μ_{zX}),

metoda Niejmana,

metoda Saviuca (wzory dla silnych pól).

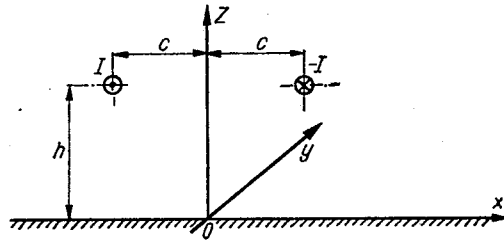
3) Metoda podana przez Kesavamurthy'ego we wszystkich analizowanych przypadkach daje wyniki znacznie odbiegające od wyników pomiarów.

4) Metoda analitycznego wyznaczania przenikalności zastępczej dla I harmonicznych i jej odmiany zaprezentowane w pracach [6], [7], [8], dość uciążliwie w stosowaniu praktycznym (konieczność obliczeń numerycznych) i bazujące na trudnej do określenia przeliczonej z podstawowej krzywej magnesowania przenikalności dla pierwszych harmonicznych μ_I , nie daje rezultatów o dokładności kompensującej skomplikowany tok obliczeń.

Załącznik

UZASADNIENIE UPROSZCZENIA W PIERWSZYM Z RÓWNAŃ (3)

Uproszczenie to oszacujemy na przykładzie dwóch przewodów nad półprzestrzenią przewodzącą (rys. 11).



Rys. 11. Układ dwóch nieskończenie długich przewodów nad półprzestrzenią przewodzącą

Równanie (3)

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \gamma E$$

przedstawimy we współrzędnych bezwymiarowych:

$$z_1 = z \cdot z^*, \quad (28)$$

$$x_1 = x \cdot x^*, \quad (29)$$

gdzie wielkości odniesienia z^* i x^* charakteryzują zmienność natężenia pola magnetycznego H_z i H_x w odpowiednim kierunku:

$$z^* = \sqrt{\omega \mu \gamma},$$

$$x^* = \frac{1}{2c};$$

$2c$ — odległość między przewodami.

Dla żelaza przy częstotliwości technicznej ($\omega = 2\pi \cdot 50$; $\gamma = 7,2 \cdot 10^6 \frac{1}{\Omega m}$; $\mu = 100 \dots 1000$)

$$z^* = 535 \dots 1680.$$

W praktycznych układach odległość $2c$ jest rzędu kilkunastu do kilkudziesięciu centymetrów. Przyjmijmy $2c = 20$ cm, wtedy

$$x^* = \frac{1}{0,2} = 5.$$

Przepisując prawą stronę równości (3) w postaci różnic skończonych i uwzględniając (28) i (29) otrzymuje się:

$$z^* \frac{\Delta H_z}{\Delta z_1} - x^* \frac{\Delta H_x}{\Delta x_1}. \quad (30)$$

Zmienność funkcji H i H poglądowo przedstawiono na rysunku 12.

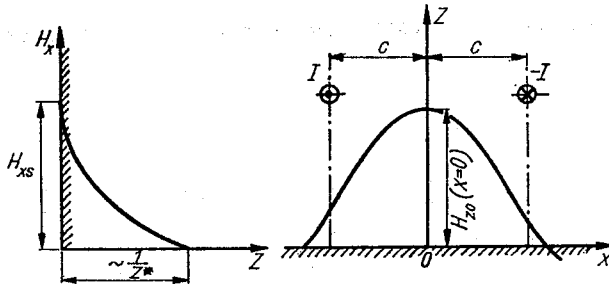
Przyjmując, że:

$$\Delta H_x = H_{x_s} - 0 = H_{x_s},$$

$$\Delta H_z = H_{z_0(x=0)} - 0 = H_{z_0(x=0)},$$

$$\Delta z_1 = \frac{1}{z^*},$$

$$\Delta x_1 = c = \frac{1}{2x^*}$$



Rys. 12. Zmienność amplitud natężenia pola magnetycznego — składowej stycznej i normalnej w głąb i po powierzchni metalu

i uwzględniając, że w powietrzu, na powierzchni metalu, amplitudy indukcji są tego samego rzędu:

$$H_{xs}^{(p)} \approx H_{zo}^{(p)} \approx H,$$

w metalu otrzymuje się:

$$H_{zo}^{(m)} = \frac{\mu_0}{\mu} H_{zo}^{(p)} = \frac{\mu_0}{\mu} H.$$

W związku z tym, w wyrażeniu

$$H[(z^*)^2 - 2(x^*)^2] = H \left[(0,285 \dots 2,82) 10^6 - \frac{1}{100 \dots 1000} 50 \right] \quad (31)$$

pominąć można drugi wyraz.

Dla nieferromagnetyka, np. dla miedzi $\left(\gamma = 47 \cdot 10^6 \frac{1}{\Omega \text{m}}; \mu_r = 1 \right)$ różnica w nawiasie równości (31) wynosi

$$H[(z^*)^2 - 2(x^*)^2] = H[18,4 \cdot 10^3 - 50], \quad (31a)$$

co również upoważnia do utrzymania w mocy wyrażenia (4).

LITERATURA

1. A. A. Bieriezowski, A. N. Krawczenko, *O nieliniowych krajowych zadaczach elektromagnitnego pola*, A.N. USSR, Kijew 1963.
2. L. R. Niejman, *Powierzostnyj effiekt w ferromagnitnych tielach*, Gosenergoizdat, Moskwa, Leningrad 1949.
3. J. Turowski, *Elektrodynamika techniczna*, WNT, Warszawa 1968.
4. P. D. Agarwal, *Eddy Current Losses in Solid and Laminated Iron*, Trans. AIEE, 1959, Nr 5, 169—181.
5. S. Apanasewicz, *O pewnych własnościach struktury pola elektromagnetycznego*, Arch. Elektro-techn., t. XX, z. 3, 1971.
6. A. A. Bieriezowski, *K woprosu opriedielenia elektromagnitnego pola w ferromagnitnych tielach*, Matematyczeskaja fizika — AN USSR. Resp.-miezwiad.sb., Wyp. 4, Kijew 1966, 23—27.
7. A. A. Bieriezowski, A. N. Krawczenko, L. P. Niżnik, *Potieri ot wichriewych tokow w nieliniowych ferromagnitnych tielach*, W zb. — Elektromagnitnyje i półprzewodnikowyje ustrojstwa priobrazowat. tiechn., Kijew, Naukowa Dumka, 1966.
8. A. A. Bieriezowski, L. P. Niżnik, A. N. Krawczenko, *Kompleksnoje powierchno-chnoje soprotiwlenje i ekwiwalentnaja magnitnaja pronicajemost' ferromagnitnych tiel*, W zb. Elektromagnitnyje processy w priobrazowatielnych ustrojstwach, Naukowa Dumka, Kijew 1967.
9. F. Haberland, *Theorie des magnetischen Wechselfeldes im Luftspalt von massiven Eisen*, Arch. Elektrotechn., 1934, 28, 234/246.

10. M. Kaźmierski, *Ocena konieczności ekranowania kadzi transformatora z punktu widzenia lokalnych przegrzań*, Prace Instytutu Elektrotechniki, z. 74, 1972, 61—93.
11. N. Kesavamurthy, P.K. Rajagopalan, *An Analytical Method Taking Account of Saturation and Hysteresis for Calculating the Iron Loss in Solid-Iron Cores Subjected to an Alternating Field*, Proc. IEE, p.C., 1961, Nr 12.
12. J. Lasociński, *Przybliżone metody analizy jednowymiarowego pola elektromagnetycznego w masywnym żelazie*, Rozprawy Elektrotechn., Tom XIII, z. 3, 1967.
13. H. A. Panasiukow, *Powierchoznyj effiekt w massiwnych ferromagnitnyh tielach s ucetom nelinejnosti*, Elektrizestwo, 1958, Nr 9, 1—7.
14. I. J. Podczierniajew, *Ob ekwiwalentnoj magnitnoj pronicajemosti*, W zb. Woprosy teoriii i rasczeta ustrojstw priobrazowat. tiechn. Naukowa Dumka, Kijew 1963, 221—224.
15. V. D. Saviuc, *Contributii la studial efectului pelicular in conductoare ferromagnetice care ocupa un semispatin la cimpurii magnetice medii pe suprafata*, Rev. Roum. Sci. Techn. Electrotechn. et Energ., 1968, T. 18, Nr 1, 161—178.
16. V. D. Saviuc, *K issledowaniju powierchoznogo effiektu w massiwnykh ferromagnitnykh provednikakh*, Rev. Roum. Sci. Techn. Electrotechn. et Energ., 1965, t. 10, Nr 3, 423—433.
17. K. Zakrzewski, *Analiza pola elektromagnetycznego w masywnym żelazie metodą numeryczną*, Archiwum Elektrotechn., 1969, 18, Nr 3, 569—585.
18. K. Zakrzewski, *Pole elektromagnetyczne w masywnym żelazie*, Archiwum Elektrotechn., Tom XIX, 1970, 24, 681—695.

M. KAŹMIERSKI

EQUIVALENT MAGNETIC PERMEABILITY OF SOLID IRON AT TECHNICAL FREQUENCY

Summary

One of the methods of approximate considering the magnetic non-linearity of solid iron: the method of the equivalent complex magnetic permeability is described. This equivalent permeability linearizes the metal medium into „inside” and, in spite of being determined by measurement in one-dimensional electromagnetic field-on the toroidal test specimen, it represents with relatively high exactness the phenomena on the metal surface in most of the practical multi-dimensional electromagnetic field systems, especially if the dimensions of the object exceed a few centimeters.

The complex equivalent permeability in this meaning can be introduced into Maxwell's equations as a function of the current co-ordinates on the metal surface, simplifying visibly their solution in the magnetically non-linear media.

In the paper, the amplitude and phase values of the complex equivalent magnetic permeability for St3s and St4s steel are given. For the strong magnetic fields ($H > 50 \cdot 10^2$ A/m) these values are: $\mu_z = (1,35 \dots 1,4) \mu_s$; $\psi = 0,44 \dots 0,5$ rad, where μ_s is the magnetic permeability obtained from the basic (d.c) magnetization curve.

M. KAŹMIERSKI

PERMÉABILITÉ ÉQUIVALENTE DU FER SOLIDE À LA FRÉQUENCE TÉCHNIQUE

RÉSUMÉ

Dans cet article on a décrit une méthode de traiter la non-linéarité magnétique du fer solide à la manière approximative, c'est à dire la méthode de la perméabilité équivalente complexe. Cette perméabilité linéarise le milieu à l'intérieur du métal et présente un image relativement exacte des phénomènes physiques sur la surface du métal, bien qu'elle soit mesuré dans le champs, électromagnétique unidimensionnel à l'aide d'une épreuve torique.

Il s'agit ici de la majorité de systèmes à plusieurs dimensions, en particulier quand les dimensions de l'objet dépassent quelques centimètres. La perméabilité conçue à cette manière peut être introduite directement aux équations de Maxwell, comme une fonction de coordonnées courantes sur la surface du métal. Cela simplifie bien le solution de ces équations pour les milieux magnétiques non-linéaires.

Dans l'article on a donné les valeurs de l'argument et du module de la perméabilité équivalente pour l'acier St3s et St4s. Pour les champs magnétiques très forts ($H > 50 \cdot 10^2$ A/m) ces valeurs sont égales à: $\mu_z = (1,35 \dots 1,4) \mu_s$, $\psi = 0,44 \dots 0,5$ rad, où μ_s est la perméabilité déterminée de la courbe fondamentale d'aimantation (pour le courant continu).

M. KAŻMIERSKI

ERSATZ-PERMEABILITÄT MASSIVEN EISENS BEI TECHNISCHER FREQUENZ

Zusammenfassung

Gegenstand dieser Arbeit ist die Methode annähernder Berücksichtigung magnetischer Nichtlinearität massiven Eisens — die Methode komplexer Ersatz-Permeabilität.

Eine solche Permeabilität linearisiert die umliegende Zone ins Metallinnern, und obwohl sie nur mittels Messungen im elektromagnetischen Eindimensionalfeld an einer Toroidprobe ermittelt worden ist, bildet sie ziemlich genau die an der Oberfläche des Metalls vorkommenden Erscheinungen der meisten praktischen Anordnungen der Mehrdimensionalfelder ab, besonders, wenn die Objektmessungen mindestens einige Zentimeter betragen. So aufgefasst, kann sie unmittelbar als Funktion der laufenden Koordinaten an der Metalloberfläche in die Maxwell'schen Gleichungen eingeführt werden, wodurch die Berechnung derselben in nichtlinearer magnetischer Zone vereinfacht wird.

In der Arbeit wurden die Werte des Moduls und des Ersatz-Permeabilitätsarguments für Stähle St3s und St4s angegeben, wobei sie für starke magnetische Felder ($H > 50 \cdot 10^2$ A/m) betragen: $\mu = (1,35 \dots 1,4) \mu_s$; $\psi = 0,44 \dots 0,5$ rad, wo μ_s — die auf Basis der Grundmagnetisierungskurve beim Gleichstrom bestimmte Magnetpermeabilität bezeichnet.

M. КАЗЬМЕРСКИ

ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ МАССИВНОЙ СТАЛИ ПРИ ТЕХНИЧЕСКОЙ ЧАСТОТЕ

Резюме

В статье изложен один из методов приближенного учета магнитной нелинейности массивной стали — метод эквивалентной комплексной проницаемости. Эта проницаемость линеаризует металлическую среду по глубине и хотя она определяется по измерениям в одномерном электромагнитном поле — на тороидальном образце, точно воспроизводит явления возникающие на поверхности металла в большинстве практических случаев многомерных полей — преимущественно в случае когда размеры объекта больше нескольких сантиметров. В таком аспекте эта проницаемость, как функция текущих координат по поверхности металла, может быть непосредственно введена в уравнения Максвелла, значительно упрощая их решение в магнитно нелинейных средах.

В статье представлены значения модуля и аргумента эквивалентной проницаемости для стали St3s и St4s причем для больших напряжений магнитных полей ($H > 50 \cdot 10^2$ A/m) эти значения составляют: $\mu_z = (1,35 \dots 1,4) \mu_s$; $\psi = 0,44 \dots 0,5$ рад, где μ_s магнитная проницаемость определенная по основной (при постоянном токе) кривой намагничивания.

Analiza indukcyjności rozproszenia żłobkowego oraz sił działających na uzwojenia maszyn elektrycznych

JAN PURCZYŃSKI (SZCZECIN), RYSZARD SIKORA (SZCZECIN)

Institut Automatyki Przemysłowej Politechniki Szczecińskiej

Otrzymano 4.1.1974

W pracy, po zastosowaniu metody rozdzielania zmiennych, wyznaczono indukcyjność rozproszenia żłobkowego oraz siły działające na uzwojenia maszyn elektrycznych.

Obliczenia przeprowadzono dla żłobków półzamkniętych, wypełnionych częściowo uzwojeniem o przekroju prostokątnym i kołowym.

Oprócz tego wyznaczono indukcyjność oraz siły w żłobku zawierającym dwa uzwojenia, a także rozpatrzono przypadek, gdy nad żłobkiem otwartym znajduje się ząb. Obliczenia przeprowadzono przy założeniu równomiernej gęstości prądu.

WSTĘP

Problemowi znajdowania indukcyjności rozproszenia żłobkowego poświęcono wiele miejsca w dotychczasowej literaturze, m. in. [2, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 15, 16, 17]. Zagadnienie powyższe należy uważać nadal za otwarte, czego dowodem mogą być niedawno wydane dwie spośród cytowanych prac: wydana w 1970 r. praca [17] oraz praca [8], która ukazała się w 1972 r.

Praca [17] stanowi pewne podsumowanie dotychczasowych wyników uzyskanych metodami klasycznymi: metodą rozdzielania zmiennych i metodą odwzorowań konformnych.

W pracy [8] zaproponowano nową metodę obliczania indukcyjności rozproszenia żłobkowego maszyn elektrycznych. Jest nią metoda wariacyjna Ritza.

Obecna praca ma na celu uzupełnienie dotychczasowych rezultatów, uzyskanych na drodze rozdzielania zmiennych. Mianowicie, stosując metodę rozdzielania zmiennych wyznaczono indukcyjność żłobka wypełnionego częściowo uzwojeniem o przekroju poprzecznym prostokątnym i kołowym. W dalszej części pracy określono indukcyjność żłobka zawierającego dwa uzwojenia. Oprócz tego obliczono indukcyjność rozproszenia otwartego żłobka prostokątnego w przypadku nachodzącego nań zęba.

Wzory uzyskane w punktach 2.1 i 2.2 zostały przeliczone na maszynie cyfrowej „Odra 1204”. W rezultacie, dokonano tabelaryzacji wartości indukcyjności żłobka wypełnionego częściowo uzwojeniem o przekroju poprzecznym prostokątnym i kołowym (tablica 1 i 2).

Nieco skromniej przedstawia się literatura dotycząca sił działających na uzwojenia maszyn elektrycznych [1, 13, 14, 18]. W dotychczasowych opracowaniach tego problemu nie uwzględniono wpływu częściowego wypełnienia żłobka na wartość tych sił.

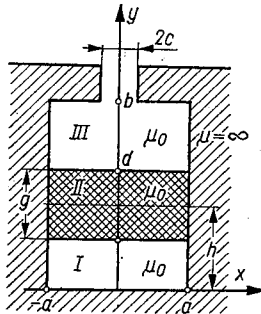
Obliczaniom sił poświęcony jest rozdział 3. Wykorzystano w nim wyniki uzyskane w rozdziale 2. Wyznaczono siły dla wszystkich przypadków omówionych przy analizie indukcyjności. Wykazano, że siły działające na przewody umieszczone w żłobku nie zależą od wypełnienia żłobka uzwojeniem, tzn. taka sama siła działa w przypadku żłobka wypełnionego całkowicie jak i częściowo. Przy analizie indukcyjności oraz sił przyjęto założenie o równomiernym rozkładzie gęstości prądu w uzwojeniach (pominięto zjawisko wypierania prądu).

2. INDUKCYJNOŚĆ ROZPROSZENIA ŻŁOBKOWEGO

2.1. Żłobek o przekroju poprzecznym prostokątnym częściowo wypełniony uzwojeniem

Na rys. 1 przedstawiono przekrój poprzeczny żłobka. Czyni się następujące założenia:

- 1) żłobek jest dostatecznie długi, aby zagadnienie można traktować jako dwuwymiarowe,
- 2) przenikalność magnetyczna ferromagnetyka jest nieskończenie duża,
- 3) indukcja w szczelinie powietrznej między główkami zębów jest wielkością stałą.



Rys. 1. Żłobek o przekroju poprzecznym prostokątnym wypełniony częściowo uzwojeniem

Z założenia 2 wynika zerowanie się składowej stycznej wektora indukcji na powierzchni ferromagnetyka.

Z założenia 3 wynika [7, 11]

$$B_x|_{y=b} = \begin{cases} 0 & c < |x| < a, \\ -\frac{\mu_0 I}{2c} & |x| < c. \end{cases} \quad (1)$$

Potencjał wektorowy spełnia następujące równania

$$\Delta A = \begin{cases} 0 & \text{w obszarze I i III,} \\ -\mu_0 J & \text{w obszarze II.} \end{cases} \quad (2a)$$

$$(2b)$$

Składowe wektora indukcji magnetycznej wyznacza się ze wzorów:

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y}; \quad B_y = -\frac{\partial A}{\partial x}. \quad (3)$$

Z równań (1) i (3) oraz warunku zerowania się składowej stycznej wektora indukcji wynika:

$$\frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{x=a} = \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{x=-a} = 0, \quad (4a)$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad (4b)$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} \Big|_{y=b} = \begin{cases} 0 & c < |x| < a, \\ -\frac{\mu_0 I}{2c} & |x| < c. \end{cases} \quad (4c)$$

Rozwiązanie równań (2a) i (2b) przewiduje się w postaci zapewniającej spełnienie warunku brzegowego (4a) [3, 4, 5, 7]:

w obszarze I

$$A_I = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right) \cos \frac{n\pi x}{a} + A_0 + B_0 y, \quad (5a)$$

w obszarze II

$$A_{II} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + D_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right) \cos \frac{n\pi x}{a} + C_0 + D_0 y - \frac{1}{2} \mu_0 J y^2, \quad (5b)$$

w obszarze III

$$A_{III} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + F_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right) \cos \frac{n\pi x}{a} + E_0 + F_0 y. \quad (5c)$$

Po uwzględnieniu warunku (4b) wzór (5a) przyjmuje postać:

$$A_I = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} + A_0. \quad (6)$$

Na granicy obszarów powinien być spełniony warunek ciągłości potencjału wektorowego oraz składowej stycznej wektora natężenia pola magnetycznego. Opisuje to układ równań:

$$A_I = A_{II}; \quad \frac{\partial A_I}{\partial y} = \frac{\partial A_{II}}{\partial y} \quad \text{dla } y = e, \quad (7a)$$

$$A_{II} = A_{III}; \quad \frac{\partial A_{II}}{\partial y} = \frac{\partial A_{III}}{\partial y} \quad \text{dla } y = d. \quad (7b)$$

Z warunku (7a) oraz równań (5b) i (6) wynika

$$A_{II} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} - \frac{\mu_0 J}{2} (y-e)^2 + A_0. \quad (8)$$

Z równań (5c), (7b) i (8) otrzymuje się

$$A_{\text{III}} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} - \mu_0 J g (y-h) + A_0. \quad (9)$$

Rozwijając funkcję opisaną warunkiem (4c) w szereg Fouriera otrzymuje się

$$\left. \frac{\partial A_{\text{III}}}{\partial y} \right|_{y=b} = - \frac{2\mu_0 J a^2 g}{\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{a}}{n} \cos \frac{n\pi x}{a} - \mu_0 J \cdot g. \quad (10)$$

Wyznaczając ze wzoru (9) $\left. \frac{\partial A_{\text{III}}}{\partial y} \right|_{y=b}$ i porównując z zależnością (10) uzyskuje się

$$A_n = - \frac{2\mu_0 a^3 J g}{\pi^2 c} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi c}{a}}{n^2 \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}}.$$

Ostatecznie potencjał wektorowy w poszczególnych obszarach zapisuje się

$$\begin{aligned} A_{\text{I}} &= \Sigma_1 + A_0, \\ A_{\text{II}} &= \Sigma_1 - \frac{1}{2} \mu_0 J (y-e)^2 + A_0, \\ A_{\text{III}} &= \Sigma_1 - \mu_0 J g (y-h) + A_0, \end{aligned} \quad (11)$$

gdzie

$$\Sigma_1 = - \frac{2\mu_0 a^3 J g}{\pi^2 c} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{a}}{n^2 \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}} \cdot \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a}.$$

Energię elektryczną zgromadzoną w żłobku można wyznaczyć ze wzoru

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dV. \quad (12)$$

W związku z dużą pracochłonnością obliczeń niezbędnych przy zastosowaniu zależności (12) zostanie zaproponowany inny sposób obliczania energii. Ze wzorów (3) wynika

$$B^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 = \operatorname{grad}^2 A. \quad (13)$$

Ze wzoru Greena

$$\int_V \operatorname{grad}^2 A dV + \int_V A \cdot \Delta A dV = \oint_S A \cdot \frac{\partial A}{\partial n} ds$$

oraz z zależności (2b), (12) i (13) stwierdza się związek

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \left[u_0 J \int_V AdV + \oint_S A \cdot \frac{\partial A}{\partial n} ds \right]. \quad (14)$$

Po uwzględnieniu płaskorównoległości pola magnetycznego oraz warunków brzegowych (4a), (4b) i (4c) otrzymuje się

$$W = JI \left[\int_0^a \int_c^d A_{II} dx dy - \frac{ag}{c} \int_0^c A_{III}|_{y=b} dx \right]. \quad (15)$$

Ze wzorów (11), (15) i zależności

$$L = \frac{2W}{I^2} \quad (16)$$

uzyskuje się

$$L = \mu_0 I \left[\frac{6(b-h)-g}{12a} + \frac{a^2}{\pi^3 c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi c}{a}}{n^3} \operatorname{cth} \frac{n\pi b}{a} \right]. \quad (17)$$

W przypadku całkowitego wypełnienia okna $\left(g = b; h = \frac{1}{2}b \right)$ wzór (17) przyjmuje postać

$$L_w = \mu_0 I \left[\frac{b}{6a} + \frac{a^2}{\pi^3 c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi c}{a}}{n^3} \operatorname{cth} \frac{n\pi b}{a} \right]. \quad (18)$$

Wzór (18) pokrywa się z zależnością podaną w pracach [7, 11].

Wzór (17) można zapisać następująco

$$\frac{L}{I} = \mu_0 \frac{6(b-h)-g}{12a} + G_1(\beta, \gamma) \left[\frac{H}{m} \right], \quad (19)$$

gdzie:

$$G_1(\beta, \gamma) = 4 \cdot 10^{-7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{\sin(n\pi\gamma)}{n\pi\gamma} \right]^2 \operatorname{cth}(n\pi\beta), \quad (19a)$$

$$\beta = \frac{b}{a}; \quad \gamma = \frac{c}{a}.$$

Wartości pomocniczej funkcji $G_1(\beta, \gamma)$ zostały obliczone na maszynie cyfrowej. Wyniki tych obliczeń zamieszczono w tablicy 1. W rezultacie przy praktycznych obliczeniach należy korzystać ze wzoru (19) posługując się tablicą 1.

Tablica 1

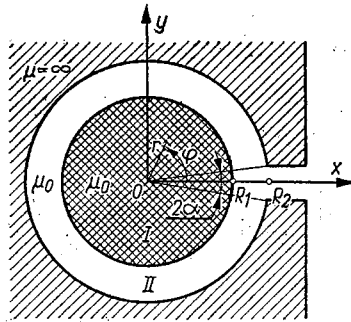
Wartości funkcji G_1

$\gamma \backslash \beta$	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	6,0	10,0
0,1	$8,226 \cdot 10^{-7}$	$7,883 \cdot 10^{-7}$	$7,867 \cdot 10^{-7}$	$7,863 \cdot 10^{-7}$	$7,859 \cdot 10^{-7}$	$7,845 \cdot 10^{-7}$	$7,782 \cdot 10^{-7}$
0,2	$5,451 \cdot 10^{-7}$	$5,143 \cdot 10^{-7}$	$5,130 \cdot 10^{-7}$	$5,129 \cdot 10^{-7}$	$5,127 \cdot 10^{-7}$	$5,124 \cdot 10^{-7}$	$5,109 \cdot 10^{-7}$
0,3	$3,832 \cdot 10^{-7}$	$3,575 \cdot 10^{-7}$	$3,564 \cdot 10^{-7}$	$3,563 \cdot 10^{-7}$	$3,563 \cdot 10^{-7}$	$3,561 \cdot 10^{-7}$	$3,555 \cdot 10^{-7}$
0,4	$2,700 \cdot 10^{-7}$	$2,502 \cdot 10^{-7}$	$2,493 \cdot 10^{-7}$	$2,493 \cdot 10^{-7}$	$2,492 \cdot 10^{-7}$	$2,491 \cdot 10^{-7}$	$2,488 \cdot 10^{-7}$
0,5	$1,852 \cdot 10^{-7}$	$1,711 \cdot 10^{-7}$	$1,705 \cdot 10^{-7}$	$1,705 \cdot 10^{-7}$	$1,705 \cdot 10^{-7}$	$1,704 \cdot 10^{-7}$	$1,702 \cdot 10^{-7}$
0,6	$1,200 \cdot 10^{-7}$	$1,112 \cdot 10^{-7}$	$1,108 \cdot 10^{-7}$	$1,108 \cdot 10^{-7}$	$1,108 \cdot 10^{-7}$	$1,107 \cdot 10^{-7}$	$1,106 \cdot 10^{-7}$
0,7	$7,039 \cdot 10^{-8}$	$6,567 \cdot 10^{-8}$	$6,546 \cdot 10^{-8}$	$6,545 \cdot 10^{-8}$	$6,544 \cdot 10^{-8}$	$6,541 \cdot 10^{-8}$	$6,530 \cdot 10^{-8}$
0,8	$3,407 \cdot 10^{-8}$	$3,215 \cdot 10^{-8}$	$3,206 \cdot 10^{-8}$	$3,205 \cdot 10^{-8}$	$3,205 \cdot 10^{-8}$	$3,202 \cdot 10^{-8}$	$3,193 \cdot 10^{-8}$
0,9	$1,016 \cdot 10^{-8}$	$9,733 \cdot 10^{-9}$	$9,712 \cdot 10^{-9}$	$9,708 \cdot 10^{-9}$	$9,702 \cdot 10^{-9}$	$9,685 \cdot 10^{-9}$	$9,608 \cdot 10^{-9}$
1,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

2.2. Żłobek o przekroju poprzecznym kołowym częściowo wypełniony uzwojeniem

Pole magnetyczne żłobka o przekroju kołowym, całkowicie wypełnionego uzwojeniem zostało wyznaczone w pracach [6, 9, 12, 15]. W pracach [6, 12, 15] wyznaczono również indukcyjność takiego żłobka. Jakkolwiek w pracy [9] przeprowadzono analizę pola magnetycznego żłobka o przekroju kołowym częściowo wypełnionego uzwojeniem, to jednak w dalszym ciągu brak jest wzoru określającego indukcyjność takiego żłobka.

Rys. 2 przedstawia przekrój poprzeczny żłobka kołowego częściowo wypełnionego uzwojeniem.



Rys. 2. Żłobek o przekroju kołowym zapełniony niecałkowicie uzwojeniem

Przyjmuje się założenia analogiczne jak w p. 2.1., przy czym stałość indukcji w szczelinie odnosi się obecnie do składowej

$$B_{\varphi}|_{r=R_2} = \begin{cases} 0 & |\varphi| > \alpha, \\ \frac{\mu_0 I}{2\alpha R_2}, & |\varphi| < \alpha. \end{cases} \quad (20)$$

Rozwiązanie równań (2a) i (2b) w układzie współrzędnych walcowych, przy uwzględnieniu symetrii zagadnienia względem osi Ox , przyjmuje się w postaci [3, 5]:

$$A_I = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \cos n\varphi - \frac{\mu_0 J}{4} r^2 + A_0, \quad (21a)$$

$$A_{II} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n r^n + \frac{c_n}{r^n} \right) \cos n\varphi + c_0 \ln r + B_0. \quad (21b)$$

Składowe wektora indukcji w układzie współrzędnych walcowych wyznacza się ze wzorów

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \varphi}; \quad B_{\varphi} = -\frac{\partial A}{\partial r}. \quad (22)$$

Rozwijając funkcję opisaną wzorem (20) w szereg Fouriera oraz uwzględniając zależność (22) otrzymuje się

$$\left. \frac{\partial A_{II}}{\partial r} \right|_{r=R_2} = -\frac{\mu_0 J R_1^2}{2R_2} \left[1 + \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n} \cos n\varphi \right]. \quad (23)$$

Z równania (21b) oblicza się wyrażenie $\frac{\partial A_{II}}{\partial r}$ i porównuje ze wzorem (23). Stąd

$$c_0 = -\frac{1}{2} \mu_0 J R_1^2; \quad B_n R_2^{n-1} - \frac{c_n}{R_2^{n+1}} = -\frac{\mu_0 J R_1^2}{\alpha R_2} \cdot \frac{\sin n\alpha}{n}. \quad (24)$$

Warunek ciągłości na granicy obszarów zapisuje się

$$A_I = A_{II}; \quad \frac{\partial A_I}{\partial r} = \frac{\partial A_{II}}{\partial r} \quad \text{dla} \quad r = R_2. \quad (25)$$

Z równań (24) i (25) znajduje się stałe A_n , B_n , C_n i B_0 . W rezultacie potencjał wektorowy przyjmuje następującą postać:

$$A_I = -\mu_0 J R_1^2 \left[\frac{r^2}{4R_1^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\alpha n^2} \left(\frac{r}{R_2} \right)^n \cos n\varphi \right] + A_0, \quad (26a)$$

$$A_{II} = -\mu_0 J R_1^2 \left[\frac{1}{2} \ln \frac{r}{R_1} + \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{\alpha n^2} \left(\frac{r}{R_2} \right)^n \cos n\varphi \right] + A_0. \quad (26b)$$

Wzór (14) po uwzględnieniu płaskorównoległości pola magnetycznego oraz wzorów (20) i (22) wyrazi się zależnością

$$W = JI \left[\int_0^\pi \int_0^{R_1} A_I r dr d\varphi - \frac{\pi R_1^2}{2\alpha} \int_0^\alpha A_{II}|_{r=R_2} d\varphi \right]. \quad (27)$$

Ze wzorów (16), (26a), (26b) i (27) otrzymuje się

$$L = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{2}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^3} + \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{4} \right]. \quad (28)$$

W przypadku całkowitego wypełnienia żłobka ($R_2 = R_1$) wzór (28) upraszcza się do postaci

$$L_w = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{2}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^3} + \frac{1}{4} \right]. \quad (29)$$

Wzór (29) pokrywa się z zależnością w pracach [6, 12].

Ze wzorów (28) i (29) uzyskuje się

$$L = L_w + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (30)$$

Ze związku (30) wynika $L \geq L_w$, tzn. częściowe wypełnienie okna żłobka powoduje wzrost indukcyjności.

Wzór (28) można zapisać w postaci dogodnej do obliczeń praktycznych:

$$L = l \cdot G_2(\varrho, \alpha), \tag{31}$$

gdzie

$$G_2(\delta, \alpha) = 10^{-7} \left[\frac{1}{2} - 2 \ln \varrho + \frac{4}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^3} \right],$$

$$\varrho = R_1/R_2.$$

Wartości funkcji $G_2(\varrho, \alpha)$ zostały wyznaczone na maszynie cyfrowej i zamieszczone w tabelicy 2. W rezultacie, obliczając indukcyjność rozproszenia żłobkowego częściowo wypełnionego żłobka o przekroju kołowym, należy korzystać ze wzoru (31) i tabelicy 2.

Tabela 2

Tabela wartości funkcji $G_2 \times 10^{-6}$

$\alpha[0] \backslash \varrho$	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60
4	1,759	1,678	1,620	1,576	1,539
6	1,597	1,516	1,458	1,414	1,377
8	1,482	1,401	1,344	1,299	1,263
10	1,393	1,312	1,255	1,210	1,173
12	1,320	1,239	1,182	1,137	1,101
14	1,259	1,178	1,120	1,076	1,039
16	1,206	1,125	1,067	1,022	0,9860
18	1,159	1,078	1,020	0,9756	0,9391
20	1,117	1,036	0,9783	0,9337	0,8973
22	1,079	0,9980	0,9405	0,8959	0,8594
24	1,045	0,9636	0,9060	0,8614	0,8249
26	1,013	0,9319	0,8743	0,8297	0,7933
$\alpha[0] \backslash \varrho$	0,70	0,80	0,90	1,00	
4	1,508	1,482	1,458	1,437	
6	1,347	1,320	1,296	1,275	
8	1,232	1,205	1,181	1,160	
10	1,143	1,116	1,092	1,071	
12	1,070	1,043	1,020	0,9985	
14	1,008	0,9817	0,9581	0,9371	
16	0,9552	0,9285	0,9049	0,8839	
18	0,9083	0,8816	0,8580	0,8370	
20	0,8664	0,8397	0,8162	0,7951	
22	0,8286	0,8019	0,7783	0,7573	
24	0,7941	0,7674	0,7438	0,7228	
26	0,7624	0,7357	0,7122	0,6911	

2.3. Dwa uzwojenia w żłobku prostokątnym

Na rys. 3 przedstawiony jest przekrój poprzeczny żłobka prostokątnego zawierającego dwa uzwojenia. W uzwojeniu dolnym płynie prąd I_1 o gęstości

$$J_1 = \frac{I_1}{2ag_1}, \quad (32a)$$

a w górnym prąd I_2 o gęstości

$$J_2 = \frac{I_2}{2ag_2}. \quad (32b)$$

Dokonuje się tych samych założeń co w p. 2a. Warunki brzegowe mają postać (4a), (4b) oraz

$$\frac{\partial A}{\partial y} \Big|_{y=b} = \begin{cases} 0 & c < |x| < a, \\ -\frac{\mu_0(I_1+I_2)}{2c} & |x| < c, \end{cases} \quad (33)$$

Potencjał wektorowy w obszarach bezprądowych I, III i V spełnia równanie Laplace'a (2a), a w obszarach prądowych równanie Poissona

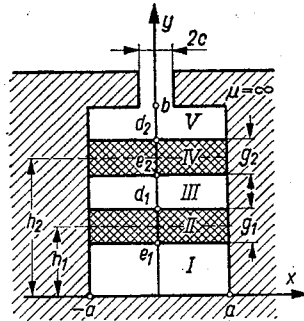
$$\Delta A_{II} = -\mu_0 J_1, \quad (34a)$$

$$\Delta A_{IV} = -\mu_0 J_2. \quad (34b)$$

Rozwiązanie równań (2a), (34a) i (34b) przewiduje się w postaci, która zapewnia spełnienie warunku (4a):

$$\begin{aligned} A_I &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right) \cos \frac{n\pi x}{a} + A_0 + B_0 y, \\ A_{II} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + D_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right) \cos \frac{n\pi x}{a} + c_0 + D_0 y - \frac{1}{2} \mu_0 J_1 y^2, \\ A_{III} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + F_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right) \cos \frac{n\pi x}{a} + E_0 + F_0 y, \\ A_{IV} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(G_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + H_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right) \cos \frac{n\pi x}{a} + G_0 + H_0 y - \frac{1}{2} \mu_0 J_2 y^2, \\ A_V &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(K_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + M_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \right) \cos \frac{n\pi x}{a} + K_0 + M_0 y. \end{aligned} \quad (35)$$

Stałe $A_0, B_0, A_n, \dots, M_n$ wyznacza się podobnie jak w p. 2a, tzn. wypełnia się warunek (4b), a następnie uwzględnia warunki ciągłości potencjału i jego pierwszych pochodnych na granicy obszarów. Wreszcie rozwija się funkcję określoną wzorem (33) w szereg analogiczny do wzoru (10) i porównuje z odpowiednią pochodną potencjału A_V .



Rys. 3. Dwa uzwojenia umieszczone w żłobku prostokątnym

Przeprowadzając wymienione operacje uzyskuje się następującą postać potencjału wektorowego

$$\begin{aligned}
 A_I &= \Sigma_2 + A_0, \\
 A_{II} &= \Sigma_2 - \frac{1}{2} \mu_0 J_1 (y - e_1)^2 + A_0, \\
 A_{III} &= \Sigma_2 - \mu_0 J_1 g_1 (y - h_1) + A_0, \\
 A_{IV} &= \Sigma_2 - \frac{1}{2} \mu_0 J_2 (y - e_2)^2 + \mu_0 J_1 g_1 (h_1 - y) + A_0, \\
 A_V &= \Sigma_2 - \mu_0 y (J_1 g_1 + J_2 g_2) + \mu_0 (J_1 g_1 h_1 + J_2 g_2 h_2) + A_0,
 \end{aligned} \tag{36}$$

gdzie

$$\Sigma_2 = - \frac{2 \mu_0 a^3 (J_1 g_1 + J_2 g_2)}{c \pi^3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n \pi c}{a}}{n^2 \operatorname{sh} \frac{n \pi b}{a}} \operatorname{ch} \frac{n \pi y}{a} \cos \frac{n \pi x}{a}.$$

Energję magnetyczną wyznacza się z zależności analogicznej do wzoru (15)

$$W = l \left\{ J_1 \int_0^{a_1} \int_0^{a_1} A_{II} dx dy + J_2 \int_0^{a_2} \int_0^{a_2} A_{IV} dx dy - \frac{a}{c} (J_1 g_1 + J_2 g_2) \int_0^c A_V |_{y=b} dx \right\}. \tag{37}$$

Ze wzorów (36) i (37) otrzymuje się

$$\begin{aligned}
 W &= \mu_0 l \left\{ \frac{a^2 (I_1 + I_2)}{2 \pi^3 c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n \pi c}{a}}{n^3} \operatorname{cth} \frac{n \pi b}{a} + (I_1 + I_2)^2 \frac{b}{4a} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{I_1^2}{24a} (6h_1 + g_1) - \frac{I_2^2}{24a} (6h_2 + g_2) - \frac{I_1 I_2}{2a} h_2 \right\}. \tag{38}
 \end{aligned}$$

Porównując zależność

$$W = \frac{1}{2} I_1^2 L_1 + \frac{1}{2} I_2^2 L_2 + M I_1 I_2$$

oraz wzór (38) znajduje się odpowiednie indukcyjności własne przewodów oraz indukcyjność wzajemną:

$$\begin{aligned} L_1 &= \mu_0 l \left[G_1(\beta, \gamma) + \frac{6(b-h_1)-g_1}{12a} \right], \\ L_2 &= \mu_0 l \left[G_1(\beta, \gamma) + \frac{6(b-h_2)-g_2}{12} \right], \\ M &= \mu_0 l \left[G_1(\beta, \gamma) + \frac{b-h_2}{2a} \right], \end{aligned} \quad (39)$$

gdzie funkcja $G_1(\beta, \gamma)$ określona jest wzorem (19a) oraz $\beta = \frac{b}{a}$; $\gamma = \frac{c}{a}$.

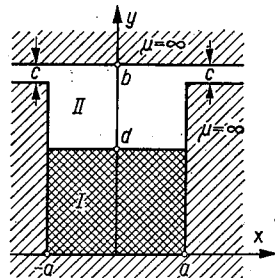
Ze wzoru (39) wynika, że pomocnicza funkcja $G_1(\beta, \gamma)$ znajduje również zastosowanie w przypadku żłobka wypełnionego częściowo dwoma uzwojeniami. Oznacza to, że wyznaczając L_1, L_2 i M należy posłużyć się tablicą 1.

Przyjmując we wzorze (38) $I_2 = 0$ oraz uwzględniając związek (16) uzyskuje się indukcyjność określoną wzorem (17).

W przypadku żłobka otwartego ($a = c$) wzory (39) znacznie upraszczają się, ponieważ $G_1(\beta, \Delta) = 0$. W tym przypadku w żłobku występuje jednowymiarowe pole magnetyczne (przy poczynionych założeniach).

2.4. Żłobek prostokątny otwarty z nachodzącym nań zębem

Na rys. 4 przedstawiony jest żłobek prostokątny otwarty, nad którym znalazł się ząb. Zakładając, że wymiar $c \ll 2a$ można przyjąć, że strumień zamyka się poprzez szczelinę c .



Rys. 4. Żłobek prostokątny otwarty oraz znajdujący się nad nim ząb

Warunki brzegowe mają postać:

$$\frac{\partial A}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial A}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0, \quad (40a)$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{x=a} = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq y < b-c, \\ -\frac{\mu_0 I}{2c} & \text{dla } b-c < y \leq b, \end{cases} \quad (40b)$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{x=a} = -\frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{x=-a} \quad (40c)$$

W obszarze I potencjał wektorowy spełnia równanie Poissona (2b). Wprowadzając nową funkcję potencjału A_1

$$A_1 = A + \frac{1}{2} \mu_0 J x^2 = A + \frac{\mu_0 I x^2}{4ad}, \quad (41)$$

zagadnienie sprowadza się do rozwiązania równania Laplace'a (2a). Potencjał wektorowy A_1 spełnia następujące warunki brzegowe

$$\left. \frac{\partial A_1}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial A_1}{\partial y} \right|_{y=b} = 0, \quad (42a)$$

$$\left. \frac{\partial A_1}{\partial x} \right|_{x=a} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2d} & 0 \leq y < d, \\ 0 & 0 < y < b-c, \\ -\frac{\mu_0 I}{2c} & b-c < y \leq b, \end{cases} \quad (42b)$$

$$\left. \frac{\partial A_1}{\partial x} \right|_{x=-a} = - \left. \frac{\partial A_1}{\partial x} \right|_{x=a}. \quad (42c)$$

Ze względu na symetrię względem osi y oraz zerowanie się składowej stycznej wektora indukcji dla $y = 0$, rozwiązanie równania (2a) ma postać

$$A_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \right) \cos \frac{n\pi y}{b} + A_0 + B_0 x.$$

Stąd

$$\left. \frac{\partial A_1}{\partial x} \right|_{x=a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} \left(A_n \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b} + B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b} \right) \cos \frac{n\pi y}{b} + B_0 \quad (43)$$

oraz

$$\left. \frac{\partial A_1}{\partial x} \right|_{x=-a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{b} \left(-A_n \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b} + B_n \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{b} \right) \cos \frac{n\pi y}{b} + B_0.$$

Z zależności (42c) wynika $B_n = B_0 = 0$.

Przedstawiając warunek (42b) w postaci szeregu trygonometrycznego, otrzymuje się

$$\left. \frac{\partial A_1}{\partial x} \right|_{x=a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_0 I}{n\pi} \left[\frac{\sin \frac{n\pi d}{b}}{d} - (-1)^n \frac{\sin \frac{n\pi c}{b}}{c} \right] \cdot \cos \frac{n\pi y}{b}. \quad (44)$$

Porównując wzory (43) i (44) uzyskuje się

$$A_n = \frac{\mu_0 I b}{\pi^2 n^2 \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \left[\frac{\sin \frac{n\pi d}{b}}{d} - (-1)^n \frac{\sin \frac{n\pi c}{b}}{c} \right].$$

Ostatecznie, potencjał A_1 wyrazi się wzorem

$$A_1 = \frac{\mu_0 I b}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin \frac{n\pi d}{b}}{d} - (-1)^n \frac{\sin \frac{n\pi c}{b}}{c} \right] \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{b}}{n^2 \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} + A_0. \quad (45)$$

Ze wzorów (41) i (45) otrzymuje się postać potencjału wektorowego w obszarze I:

$$A_1 = \frac{\mu_0 I b}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin \frac{n\pi d}{b}}{d} - (-1)^n \frac{\sin \frac{n\pi c}{b}}{c} \right] \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{b}}{n^2 \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} - \frac{\mu_0 I x^2}{4ad} + A_0. \quad (46a)$$

Natomiast w obszarze II, gdzie obowiązuje równanie Laplace'a $\Delta A_{II} = 0$, potencjał wektorowy

$$A_{II} = A_1. \quad (46b)$$

Ze wzorów (3), (12), (16), (46a) i (46b) uzyskuje się następującą postać indukcyjności

$$L = \mu_0 l \left\{ \frac{a}{6d} + \frac{b^2}{\pi^3 c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi c}{b}}{n^3} \operatorname{cth} \frac{n\pi a}{b} + \frac{2b^3}{\pi^4 ad^2} \times \right. \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi d}{b}}{n^4} + \frac{2b^3}{adc\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi c}{b} \sin \frac{n\pi d}{b}}{n^3} - \\ \left. - \frac{b^2}{\pi^3 d^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi d}{b}}{n^3} \operatorname{cth} \frac{n\pi a}{b} \right\}. \quad (47)$$

W przypadku, gdy przewód wypełnia całkowicie żłobek $d = b - c$, wzór (47) upraszcza się do postaci

$$L_w = \mu_0 l \left\{ \frac{a}{6(b-c)} + \frac{2b^4}{\pi^4 ac(b-c)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi c}{b}}{n^4} + \right. \\ \left. + \frac{b^3(b-2c)}{\pi^3 c^2(b-c)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi c}{b}}{n^3} \operatorname{cth} \frac{n\pi a}{b} \right\}.$$

2.5. Podsumowanie

W teorii maszyn elektrycznych rozróżnia się trzy podstawowe składniki indukcyjności rozproszenia. Są nimi:

indukcyjność rozproszenia żłobkowego, indukcyjność połączeń czołowych oraz indukcyjność rozproszenia między główkami zębów. Rozdział 2 poświęcony jest niemal w całości

obliczaniu indukcyjności rozproszenia żłobkowego. Jedynie w punkcie 2.4 wyznaczono łączną wartość indukcyjności rozproszenia żłobkowego oraz indukcyjności między główkami zębów.

Przy wyznaczaniu indukcyjności rozproszenia żłobkowego przyjęto, że uzwojenie wykonane jest jako masywny przewód o przekroju poprzecznym prostokątnym albo kołowym. W rzeczywistości uzwojenie to wykonane jest z pewnej ilości zwojów i wewnątrz żłobka umieszczonych jest np. n przewodów. Aby uwzględnić fakt, należy wartości indukcyjności określonej wzorami punktów 2.1, 2.2, 2.3 i 2.4 pomnożyć przez n^2 .

Indukcyjność rozproszenia żłobkowego, wyznaczona w tym rozdziale odnosi się nie do żłobka rzeczywistego, a do pewnego modelu matematycznego. Model ten otrzymuje się przez idealizację kształtu żłobka oraz przyjęcie nieskończonej dużej przenikalności magnetycznej ferromagnetyka. W rzeczywistości, przenikalność ferromagnetyka ma wartość skończoną.

3. SIŁY DZIAŁAJĄCE NA UZWOJENIA MASZYN ELEKTRYCZNYCH

3.1. Żłobek o przekroju poprzecznym prostokątnym częściowo wypełniony uzwojeniem

W przypadku żłobka przedstawionego na rys. 1 wystąpi składowa siły F_y , którą wyznacza się ze wzoru

$$F_y = 2l \int_0^a \int_0^d B_{xII} J dx dy. \quad (48)$$

Ze wzorów (3) i (11) otrzymuje się

$$B_{xII} = -\mu_0 J(y-e) - \frac{2\mu_0 a^2 Jg}{\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{a}}{n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a}. \quad (49)$$

Wykonując całkowanie określone wzorem (48) uzyskuje się

$$F_y = -\frac{\mu_0 I^2}{4a}. \quad (50)$$

Znak "-" w zależności (50) wskazuje, że siła skierowana jest ku dołowi.

Wzór (50) pokrywa się z zależnością podaną w pracach [1, 13, 14, 18]. W wymienionych pracach wzór (50) uzyskano dla żłobka otwartego ($\gamma = \frac{c}{a} = 1$) całkowicie wypełnionego uzwojeniem. Wynika stąd, że zarówno szerokość szczeliny powietrznej $2c$ jak i grubość uzwojenia (wypełnienie okna) nie wpływa na wielkość siły. Ostatni wniosek słuszny jest

w ograniczonym zakresie. Przyjęcie nieskończonej przenikalności ferromagnetyka oznaczało brak nasycenia. W przypadku bardzo małej szczeliny ($2c \rightarrow 0$) wystąpi wyraźnie zjawisko nasycenia, wpływające na wartość sił działających na uzwojenia [18].

3.2. Żłobek o przekroju poprzecznym kołowym częściowo wypełniony uzwojeniem

Uwzględniając symetrię względem osi Ox w żłobku przedstawionym na rys. 2 wystąpi składowa siły F_x . Wartość tej siły wyznacza się ze wzoru [13, 14]

$$F_x = - \int_0^{R_1} \int_0^{2\pi} [B_{r1} \sin \varphi + B_{\varphi 1} \cos \varphi] J r dr d\varphi. \quad (51)$$

Ze wzorów (22) i (26a) wynika

$$B_{r1} = \mu_0 J \frac{R_1^2}{R_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n\alpha} \left(\frac{r}{R_2}\right)^{n-1} \sin n\varphi,$$

$$B_{\varphi 1} = \mu_0 J R_1^2 \left[\frac{r}{2R_1^2} + \frac{1}{R_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n\alpha} \left(\frac{r}{R_2}\right)^{n-1} \cos n\varphi \right].$$

Przeprowadzając całkowanie otrzymuje się

$$F_x = - \frac{\mu_0 I^2 \sin \alpha}{\pi R_2 \alpha}. \quad (52)$$

Wzór (52) otrzymano w pracach [13, 14] jako przypadek szczególny ($w \rightarrow 0$). W wymienionych pracach przeanalizowano wpływ zjawiska wypierania prądu na wielkość siły w żłobku o przekroju kołowym wypełnionym całkowicie uzwojeniem.

Ze wzoru (52) wynika, że wymiary uzwojenia (promień R_1) nie wpływają na wielkość siły. Oznacza to, podobnie jak dla żłobka o przekroju poprzecznym prostokątnym, że siła działająca na uzwojenie nie zależy od wypełnienia żłobka.

3.3. Żłobek o przekroju prostokątnym z dwoma uzwojeniami

Podobnie jak w punkcie 3.1 wystąpi tu tylko składowa siły F_y . Oddzielnie zostanie wyznaczona siła działająca na uzwojenia dolne i górne. Siłę działającą na uzwojenia dolne wyznacza się ze wzoru

$$F_{1y} = 2l \int_0^a \int_{\epsilon_1}^{d_1} B_{xII} J_1 dx dy, \quad (53)$$

gdzie J_1 określa wzór (32a).

Składową wektora indukcji B_{xII} znajduje się ze wzorów (3) i (36)

$$B_{xII} = \frac{\partial A_{II}}{\partial y} = -\mu_0 J_1 (y - e_1) - \frac{2\mu_0 a^2 (J_1 g_1 + J_2 g_2)}{c\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{a}}{n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a}. \quad (54)$$

Ze wzorów (32a), (53) i (54) otrzymuje się

$$F_{1y} = -\frac{\mu_0 I_1^2}{4a}. \quad (55)$$

Ze wzoru (55) wynika, że siła działająca na dolne uzwojenie pokrywa się z siłą działającą na pojedyncze uzwojenie umieszczone w żłobku (wzór 50).

Na górne uzwojenie działa siła, którą wyznaczamy z zależności:

$$F_{2y} = 2a \int_0^a \int_{e_2}^{d_2} B_{IVx} J_2 dx dy, \quad (56)$$

gdzie J_2 określa wzór (32b).

Z zależności (3) i (36) otrzymuje się

$$B_{IVx} = \frac{\partial A_{IV}}{\partial y} = -\mu_0 J_2 (y - e_2) - \mu_0 J_1 g_1 - \frac{2\mu_0 a^2 (J_1 g_1 + J_2 g_2)}{c\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi c}{a}}{n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{a}. \quad (57)$$

Po uwzględnieniu wzorów (32b) i (57) i wykonaniu całkowania zgodnie z (56) uzyskuje się:

$$F_{2y} = -\frac{\mu_0 I (I_2^2 + 2I_1 I_2)}{4a}. \quad (58)$$

Przyjmując we wzorze (58) $I_1 = 0$ (brak dolnego uzwojenia) otrzymuje się zależność zgodną z wzorem (50).

Jak wynika z zależności (58) obecność dolnego uzwojenia z prądem powoduje wzrost siły działającej na uzwojenie górne. Siła działająca na uzwojenie górne wzrasta o człon

$$\Delta F_y = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2a}. \quad (59)$$

Wzory (55) jak i (58) nie zależą od wymiarów uzwojeń (grubości g i wysokości h) oraz od wielkości szczeliny $2c$.

Identyczne wzory, jak powyżej wyprowadzone (55) i (58), obowiązują w przypadku żłobka otwartego ($c = a$).

3.4. Żłobek prostokątny otwarty z nachodzącym nań zębem

Na uzwojenie przedstawione na rys. 4 działać będzie siła F_y , którą znajduje się z zależności:

$$F_y = 2l \int_0^a \int_0^d B_{x1} J dx dy. \quad (60)$$

Ze wzorów (3) i (46a) otrzymuje się

$$B_{x1} = -\frac{\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin \frac{n\pi d}{b}}{d} + (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{n\pi c}{b}}{c} \right] \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}}{n \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}}. \quad (61)$$

Po scałkowaniu zależności (60) uzyskano:

$$F_y = -\frac{\mu_0 I^2 b^2}{\pi^3 a d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(1 - \cos \frac{n\pi d}{b} \right) \left[\frac{\sin \frac{n\pi d}{b}}{d} + (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{n\pi c}{b}}{c} \right]. \quad (62)$$

W celu uproszczenia zależności (62) korzysta się ze wzorów podanych w pracy [10]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} = \frac{x^3}{12} - \frac{\pi}{4} x^2 + \frac{\pi^2}{6} x, \quad (63a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{n} = \frac{x}{2} \quad (63b)$$

Przeprowadzając dwukrotne całkowanie równania (63b) w przedziale $\langle 0, x \rangle$ oraz uwzględniając zależność [10]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

otrzymuje się

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{n^3} = -\frac{x^3}{12} + \frac{\pi^2}{12} x. \quad (64)$$

Po wykorzystaniu równości (63a) i (64) ze wzoru (62) uzyskuje się

$$F_y = -\frac{\mu_0 I^2}{4a}. \quad (65)$$

Z zależności (65) wynika, że obecność zęba nie wpływa na siłę F_y , — wzór (65) nie jest funkcją wymiaru c .

Oprócz tego, podobnie jak we wszystkich poprzednich przypadkach, siła nie zależy od wypełnienia żłobka uzwojeniem — zależność (65) nie jest funkcją wymiaru d .

3.5. Wnioski końcowe

Jak wynika z rozważań rozdziału 2 i 3, częściowe wypełnienie żłobka uzwojeniem wpływa w sposób istotny na indukcyjność rozproszenia żłobkowego, natomiast nie ma żadnego wpływu na wielkość sił działających na uzwojenia. W każdym z rozpatrywanych w punktach 3.1, 3.2, 3.3 i 3.4 przypadkach zależność określająca siłę nie była funkcją wymiarów uzwojenia. Należy podkreślić fakt, że powyższy wniosek wyciągnięto przy uwzględnieniu dwuwymiarowego obrazu pola magnetycznego wewnątrz żłobka.

W tym miejscu należałoby powtórzyć uwagi poczynione w p. 2.5, a mianowicie wzory uzyskane w rozdz. 3 należy pomnożyć przez n^2 , gdzie n — liczba zwojów. Obowiązuje również uwaga o modelu matematycznym żłobka rzeczywistego. W szczególności, w niektórych stanach pracy maszyny elektrycznej przestaje być słuszne założenie o nieskończonej przenikalności magnetycznej ferromagnetyka. Występuje wówczas zależność sił działających na uzwojenia od stopnia nasycenia ferromagnetyka. Problem ten został omówiony w pracy [18].

LITERATURA

1. J. F. Calvert, *Forces in Turbine Generator Stator Windings*, Trans. AJEE, 1931, s. 178.
2. B. Dubicki, *Maszyny elektryczne*, t. III, PWN, Warszawa, 1964.
3. L. W. Kantorowicz, W. I. Kryłow, *Pribliżennyye metody wysszewo analiza*, Moskwa 1950.
4. G. Korn, T. Korn, *Sprawocznik po matematykje*, „Nauka”, Moskwa 1968.
5. P. Moon, D. E. Spencer, *Teoria pola*, PWN, Warszawa 1966.
6. F. Ollendorf, *Berechnung magnetischer Felder*, Springer Verlag, Wien 1952.
7. J. Purczyński, R. Sikora, *Pole magnetyczne w żłobku maszyny elektrycznej jako przypadek zagadnienia Neumanna dla równania Poissona*, Referat wygłoszony na Sympozjum „Nowoczesne metody magnetyczne w elektrotechnice”, Wilga 1970.
8. J. Purczyński, *Metoda Ritzza obliczania indukcyjności rozproszenia*, Archiwum Elektrotechniki, 1972, z. 4.
9. H. Rothert, *Über die Nutstreuung elektrischer Maschinen*, Archiv für Elektrotechnik, 1938, s. 306—329; 372—389; 434—451.
10. M. I. Ryżyk, S. I. Gradsztejn, *Tablica cętek, sum, szeregów i iloczynów*, PWN, Warszawa 1964.
11. R. Sikora, W. Lipiński, *Dwuwymiarowe wypieranie prądu w przewodach*, Arch. Elektrotechniki, 1971, z. 2.
12. R. Sikora, P. Rolicz, *Impedancja pręta o przekroju kołowym umieszczonego w żłobku maszyny elektrycznej*; Arch. Elektrotechniki, 1972, z. 3.
13. R. Sikora, P. Rolicz, *Analiza sił działających na pręty umieszczone w żłobkach maszyny elektrycznej*, Arch. Elektrotechniki, 1973, z. 2.
14. R. Sikora, P. Rolicz, *Analiza sił działających na pręty umieszczone w żłobkach maszyn elektrycznych*, Część II, Arch. Elektrotechniki, 1973, z. 3.
15. S. A. Swann, I. W. Salmon, *Effective Resistance and Reactance of a Solid Cylindrical Conductor Placed in a Semiclosed Slot*, Proc. IEE, 1962, c.
16. S. A. Swann, I. W. Salmon, *Effective Resistance and Reactance of a Rectangular Conductor Placed in a Semi-Closed Slot*, Proc. IEE, 1963, 2.
17. T. Śliwiński, *Nutenstreuung elektrischer Maschinen*, Wissenschaftliche Zeitschrift der Elektrotechnik, 1970, Bd 16.
18. J. Turowski, *Wpływ nasycenia na siły w uzwojeniach maszyn elektrycznych*, Arch. Elektrotechniki, t. XIX, z. 4, 1960.

J. PURCZYŃSKI, R. SIKORA

ANALYSIS OF DISSIPATIVE INDUCTANCE OF SLOTS AND OF FORCES ACTING ON THE WINDINGS IN ELECTRICAL MACHINES

Summary

Dissipative inductance of slots and forces acting on the windings in electrical machines have been determined by means of application of separation of variable method.

Computation has been done for semi-closed slots with rectangular and circular sections.

Inductance and forces acting in a slot containing two windings have been evaluated. There has been also considered the case of tooth projecting above an open slot. Calculations have been carried out under conditions of uniform current density.

J. PURCZYŃSKI, R. SIKORA

ANALYSE DE L'INDUCTANCE DE FUITE D'ENCOCHES ET DES FORCES AGISSANTES SUR L'ENROULEMENT DES MACHINES ÉLECTRIQUES

Résumé

Dans l'article on a déterminé l'inductance de fuite d'encoches et les forces agissantes sur les bobinages des machines électriques, en employant la méthode de la séparation des variables.

Les calculs ont été effectués pour les encoches reprecées, remplies en partie de l'enroulement avec la section rectangulaire et avec la section circulaire. On a déterminé aussi l'inductance et les forces dans l'encoche contenant deux enroulements et on a examiné le cas quand une dent se trouve au-dessus de l'encoche ouverte. On a effectué des calculs en admettant une densité uniforme du courant.

J. PURCZYŃSKI, R. SIKORA

ANALYSE DER INDUKTIVITÄT DER NUTSTREUUNG SOWIE DER AUF WICKLUNGEN ELEKTRISCHER MASCHINEN WIRKENDEN KRÄFTE

Zusammenfassung

Nach Anwendung einer Trennungsmethode von Variablen wurden in dem Artikel die Induktivität und die auf Wicklungen elektrischer Maschinen wirkende Kraft bestimmt.

Die Berechnungen wurden für halbgeschlossene Nuten durchgeführt, die teilweise mit einer Wicklung mit rechtwinkligem und kreisförmigem Querschnitt gefüllt waren.

Außerdem wurden Induktivität und Kräfte in einer mit zwei Wicklungen versehenen Nute bestimmt, und auch der Fall erwogen, wenn sich ein Zahn über der offenen Nute befindet. Die Berechnungen führte man unter der Voraussetzung durch, daß die Stromdichte gleichmäßig ist.

Я. ПУРЧЫŃСКИ, Р. СИКОРА

АНАЛИЗ ИНДУКТИВНОСТИ ПАЗОВОГО РАССЕЯНИЯ И СИЛ ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ОБМОТКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

Резюме

В статье, при применении метода Фурье, рассчитаны индуктивность пазового рассеяния и силы действующие на обмотки электрических машин. Расчеты проведены для полужакрытых пазов частично заполненных обмоткой из проводников прямоугольного и круглого сечения. Кроме индуктивностей рассчитаны силы действующие в пазу содержащем две обмотки. Рассмотрен также пример, когда над открытым пазом находится зубец. Расчеты проведены при предпосылке постоянной плотности тока.

Wykorzystanie metody rozdzielania zmiennych oraz metody wariacyjnej do analizy pola rozproszenia żłobkowego

JAN PURCZYŃSKI (SZCZECIN), RYSZARD SIKORA (SZCZECIN)

Instytut Automatyki Przemysłowej Politechniki Szczecińskiej

Otrzymano 29.4.1974

W pracy rozważono dwa zagadnienia.

1. Po zastosowaniu metody rozdzielania zmiennych, wyznaczono indukcyjność rozproszenia żłobka o przekroju poprzecznym eliptycznym. Uzyskane wyniki zostały wykorzystane do obliczania indukcyjności rozproszenia żłobków występujących w praktyce.

2. Przedstawiono wariacyjną metodę obliczania indukcyjności rozproszenia żłobkowego. Metoda ta pozwoliła wyznaczyć indukcyjność rozproszenia żłobka prostokątnego w tych przypadkach, w których zawodziła metoda rozdzielania zmiennych, m.in. częściowe zapełnienie żłobka oraz asymetria w rozmieszczeniu uzwojenia.

W pracy wyznaczono również siły działające na uzwojenie umieszczone w żłobku prostokątnym.

1. WSTĘP

Praca stanowi kontynuację tematu podjętego w artykule [7]. Składa się ona z dwóch zasadniczych rozdziałów.

W rozdziale 2, stosując metodę rozdzielania zmiennych, przeanalizowano pole magnetyczne w żłobku o przekroju poprzecznym eliptycznym. Uzyskane wyniki zostały wykorzystane do obliczenia indukcyjności rozproszenia żłobków występujących w praktyce.

W rozdziale 3 zastosowano rachunek wariacyjny do obliczania indukcyjności rozproszenia żłobkowego. Metoda wariacyjna pozwoliła wyznaczyć indukcyjność rozproszenia żłobka prostokątnego w tych przypadkach, w których zawodziła metoda rozdzielania zmiennych. Dotyczy to m.in. częściowego wypełnienia żłobka oraz asymetrii w rozmieszczeniu uzwojenia. Obraz pola znaleziony na drodze wariacyjnej umożliwił wyznaczenie sił działających na uzwojenia umieszczone w żłobku prostokątnym.

2. ŻŁOBEK O PRZEKROJU POPRZECZNYM ELIPTYCZNYM

2.1. Uwagi wstępne

Indukcyjność rozproszenia żłobkowego maszyn elektrycznych wyznacza się na ogół przy założeniach odbiegających od rzeczywistego obrazu pola magnetycznego wewnątrz żłobka. Mianowicie przyjmuje się, że wektor indukcji skierowany jest prostopadle do osi

symetrii żłobka [1] [10]. Jedyne w nielicznych przypadkach indukcyjność rozproszenia żłobkowego obliczono wychodząc z rzeczywistego obrazu pola [1] [13].

Między innymi w pracach [4] i [9] analizuje się pole magnetyczne wewnątrz żłobka o przekroju kołowym. W pracy [9] wyznaczono postać potencjału wektorowego w przypadku żłobka wypełnionego częściowo uzwojeniem, natomiast w pracy [4] obliczono indukcyjność rozproszenia żłobkowego dla żłobka wypełnionego całkowicie uzwojeniem.

Indukcyjność rozproszenia żłobkowego w przypadku żłobka o przekroju kołowym wyrażona wzorem dokładnym [4] [13], jak i przybliżonym [1] [10], jest funkcją stosunku szerokości szczytowej żłobkowej b_4 i średnicy żłobka $2R_2$ (rys. 6). Tym samym indukcyjność jest funkcją kąta α oznaczonego na rys. 6. Indukcyjność żłobka o kształcie przedstawionym na rys. 11 została wyznaczona w pracy [9]. W wyniku przyjęcia jednowymiarowego obrazu pola magnetycznego (wektor indukcji prostopadły do osi symetrii) uzyskana tam postać indukcyjności nie zależy od kąta α . Również w pracy [1] zamieszczono szereg nomogramów pozwalających wyznaczyć indukcyjność żłobka pokazanego na rys. 7; brak jest zależności indukcyjności rozproszenia od kąta α . W granicznym przypadku ($h = 0$) żłobki z rys. 7 i 11 przechodzą w żłobki o przekroju kołowym, których indukcyjność jest funkcją kąta α .

W celu wyeliminowania tej sprzeczności w rozdziale tym została wyznaczona indukcyjność rozproszenia żłobkowego dla żłobków z rys. 7 i rys. 11 przy uwzględnieniu dwuwymiarowego obrazu pola.

W punkcie 2.2 pracy przeprowadzono analizę pola magnetycznego wyidealizowanego żłobka o przekroju eliptycznym (rys. 1). W wyniku obliczeń przeprowadzonych na maszynie cyfrowej, indukcyjność tego żłobka została stabelaryzowana (tablica 1) i przedstawiona na rys. 4.

W punkcie 2.3 wyznaczono indukcyjność żłobka o przekroju eliptycznym częściowo wypełnionego uzwojeniem (rys. 5).

Punkt 2.4 poświęcono zastosowaniu teorii żłobka eliptycznego do wyznaczania indukcyjności żłobków przedstawionych na rys. 7 i rys. 11. Wykazano, że wyidealizowany kształt eliptyczny żłobka odbiega tylko nieznacznie od żłobka z rys. 7.

W rozdziale 2 zastosowano metodę rozdzielania zmiennych, która pozwoliła w sposób prosty i przejrzysty wyznaczyć pole magnetyczne wewnątrz żłobka.

Metodę rozdzielania zmiennych w układzie współrzędnych eliptyczno-walcowych użyto do obszaru zajętego przez prąd w pracy [11]. W pracy tej wyznaczono pole magnetyczne wytworzone przez prąd płynący przewodem o przekroju eliptycznym posiadającym dowolną przenikalność magnetyczną. Indukcyjność żłobków o przekroju eliptycznym została wyznaczona w pracy [8]. W wyniku zastosowania metody rozdzielania zmiennych, w pracy [8] przeanalizowano pole magnetyczne a także indukcyjność żłobków o przekroju eliptycznym.

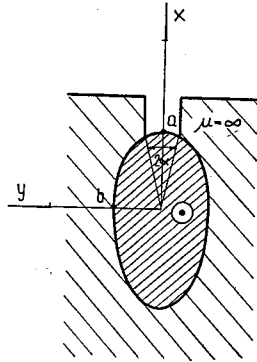
2.2. Żłobek półotwarty wypełniony całkowicie

Na rys. 1 przedstawiony jest żłobek o przekroju poprzecznym eliptycznym. Przez uzwojenie żłobka o przenikalności μ_0 płynie prąd stały I . Długość żłobka l jest dostatecznie duża, aby zagadnienie można traktować jako dwuwymiarowe. Przenikalność magnetyczną

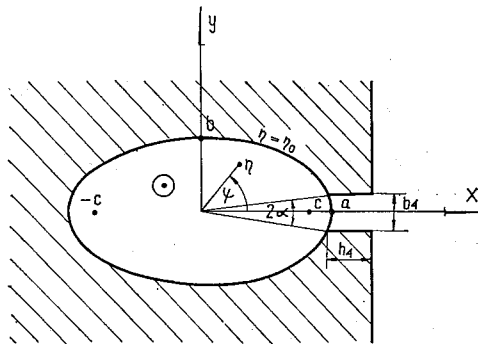
ferromagnetyka przyjmuje się nieskończenie dużą, $\mu = \infty$. Z tego założenia wynika zerowanie się składowej stycznej wektora indukcji na granicy ferromagnetyk-przewód (od strony przewodu). Potencjał wektorowy \bar{A} , w obszarze zajęтым przez prąd, spełnia równanie Poissona

$$\Delta A = -\mu_0 J. \quad (1)$$

We wzorze (1) pominięto symbol wektorów, ponieważ potencjał wektorowy oraz wektor gęstości prądu posiadają tylko jedną składową — skierowaną wzdłuż osi z .



Rys. 1. Przekrój poprzeczny półzamkniętego żłobka eliptycznego



Rys. 2. Wymiary geometryczne żłobka o przekroju poprzecznym eliptycznym

W celu zastosowania metody rozdzielenia zmiennych wprowadza się układ współrzędnych eliptyczno-walcowych określony zależnościami [2, 3]:

$$\begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} \eta \cos \psi, \\ y &= c \operatorname{sh} \eta \sin \psi, \\ z &= z. \end{aligned} \quad (2)$$

W układzie tym granica uzwojenie-ferromagnetyk zapisuje się równaniem $\eta = \eta_0 = \text{const}$ (rys. 2).

Operator Laplace'a w układzie współrzędnych eliptyczno-walcowych przyjmuje postać

$$\Delta A = \frac{1}{c^2 (\operatorname{ch}^2 \eta - \cos^2 \psi)} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial \psi^2} \right). \quad (3)$$

Rozwiązanie równania (1) przewiduje się w postaci

$$A = A' + A'', \quad (3a)$$

gdzie:

A' — rozwiązanie szczególne równania Poissona,

A'' — rozwiązanie ogólne równania jednorodnego, tzn. równania Laplace'a.

W najprostszym przypadku [3]

$$A' = -\frac{\mu_0 J c^2}{8} (\operatorname{ch} 2\eta + \cos 2\psi); \quad (4)$$

A'' spełnia równanie Laplace'a $\Delta A'' = 0$, lub

$$\frac{\partial^2 A''}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 A''}{\partial \psi^2} = 0. \quad (5)$$

Rozwiązanie ogólne równania (5) ma postać

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sh} \\ \operatorname{ch} \end{pmatrix} p\eta \cdot \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} p\psi,$$

a rozwiązanie szczególne: $C\eta + D\psi$.

Ze względu na okresowość funkcji A'' względem zmiennej ψ , współczynnik $D = 0$.

Ponieważ funkcja A'' jest parzysta względem zmiennej ψ , rozwiązanie równania (5) przewiduje się w postaci

$$A'' = \sum_{p=1}^{\infty} (A_p \operatorname{ch} p\eta + B_p \operatorname{sh} p\eta) \cos p\psi + C\eta. \quad (6)$$

Rotacja wektora $\mathbf{A} = A \cdot \mathbf{a}_z$ w układzie współrzędnych eliptyczno-walcowych wyraża się wzorem (dodatek, wzór 59):

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \eta - \cos^2 \psi}} \left\{ \frac{\partial A}{\partial \psi} \mathbf{a}_\eta - \frac{\partial A}{\partial \eta} \mathbf{a}_\psi \right\}. \quad (7)$$

Składowe wektora indukcji przyjmują postać:

$$B_\eta = \frac{1}{c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \eta - \cos^2 \psi}} \cdot \frac{\partial A}{\partial \psi} = \frac{1}{c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \eta - \cos^2 \psi}} \cdot \left\{ \frac{1}{4} \mu_0 J c^2 \sin 2\psi - \sum_{p=1}^{\infty} p (A_p \operatorname{ch} p\eta + B_p \operatorname{sh} p\eta) \sin p\psi \right\}, \quad (8a)$$

$$B_\psi = -\frac{1}{c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \eta - \cos^2 \psi}} \frac{\partial A}{\partial \eta} = \frac{1}{c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \eta - \cos^2 \psi}} \left\{ \frac{1}{4} \mu_0 J c^2 \operatorname{sh} 2\eta - \sum_{p=1}^{\infty} p (A_p \operatorname{sh} p\eta + B_p \operatorname{ch} p\eta) \cos p\psi - C \right\}. \quad (8b)$$

Ze względu na skończoną wartość B_ψ w każdym punkcie, np. ($\psi = 0$; $\eta = 0$), należy przyjąć $B_p = C = 0$.

Na brzegu obszaru składowa B_ψ wektora indukcji wyraża się zależnością

$$B_\psi|_{\eta=\eta_0} = \frac{1}{c \sqrt{\text{ch}^2 \eta_0 - \cos^2 \psi}} \left\{ \frac{1}{4} \mu_0 J c^2 \text{sh} 2\eta_0 - \sum_{p=1}^{\infty} p A_p \text{sh} p \eta_0 \cos p \psi \right\}. \quad (9)$$

Wyrażenie (9) otrzymano z zależności $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ wykorzystując wzory (3a), (4), (6) i (8b) i warunek skończonej wartości indukcji. Składowa B_ψ wektora indukcji zeruje się na granicy uzwojenie-ferromagnetyk. Na podstawie wzoru (9) przyjęto następującą postać składowej stycznej wektora indukcji

$$B_\psi|_{\eta=\eta_0} = \begin{cases} 0 & , \quad |\psi| > \alpha, \\ \frac{B_0}{c \sqrt{\text{ch}^2 \eta_0 - \cos^2 \psi}} & , \quad |\psi| < \alpha. \end{cases} \quad (10)$$

Stałą B_0 wyznacza się z prawa przepływu

$$\oint B_\psi|_{\eta=\eta_0} d\tau = \mu_0 I_0. \quad (11)$$

Uwzględniając wzór (60) (dodatek 2) określający postać elementu łuku $d\tau$ w układzie współrzędnych eliptyczno-walcowych oraz zależność (10), równanie (11) przyjmie postać

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} B_0 d\psi = \mu_0 I;$$

stąd

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\alpha}. \quad (12)$$

Z równania elipsy o półosiach a i b oraz z zależności (2) otrzymuje się

$$\text{sh} 2\eta_0 = \frac{2ab}{c^2}, \quad (13a)$$

$$\text{ch} 2\eta_0 = \frac{a^2 + b^2}{c^2}. \quad (13b)$$

Wykorzystując wzór określający pole elipsy

$$S = \pi ab \quad (14)$$

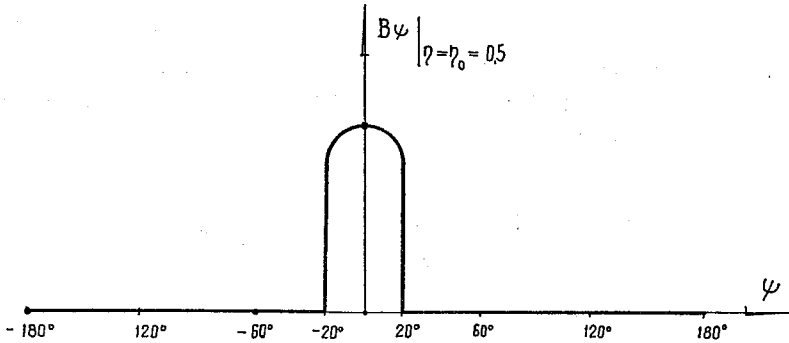
oraz związek (13a), zależność między prądem I a gęstością J zapisze się następująco:

$$I = \frac{\pi}{2} J c^2 \text{sh} 2\eta_0. \quad (15)$$

Wzór (10) przyjmuje postać:

$$B_\psi|_{\eta=\eta_0} = \begin{cases} 0 & , \quad |\psi| > \alpha, \\ \frac{\pi \mu_0 J c \text{sh} 2\eta_0}{4\alpha \sqrt{\text{ch}^2 \eta_0 - \cos^2 \psi}} & , \quad |\psi| < \alpha. \end{cases} \quad (16)$$

Na podstawie wzoru (16) sporządzono rys. 3 przedstawiający przebieg składowej stycznej wektora indukcji jako funkcję kąta ψ (rysunek sporządzono dla $\eta_0 = 0,5$ i $\alpha = 20^\circ$).



Rys. 3. Założony do obliczeń rozkład składowej indukcji B_ψ w szczelinie powietrznej dla żłóbka o parametrach $\eta_0 = 0,5$ i $\alpha = 20^\circ$

Składową styczną wektora indukcji traktuje się jako złożenie dwóch funkcji:

$$B_\psi|_{\eta=\eta_0} = \frac{\pi\mu_0 Jc \operatorname{sh} 2\eta_0}{4\alpha \sqrt{\operatorname{ch}^2 \eta_0 - \cos^2 \psi}} \cdot f(\psi), \quad (17)$$

gdzie

$$f(\psi) = \begin{cases} 0, & |\psi| > \alpha, \\ 1, & |\psi| < \alpha. \end{cases} \quad (18)$$

Rozwinięcie funkcji $f(\psi)$ w szereg Fouriera ma postać:

$$f(\psi) = \frac{\alpha}{\pi} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin p\alpha}{p\alpha} \cos p\psi. \quad (19)$$

Ze wzorów (17) i (19) wynika

$$B_\psi|_{\eta=\eta_0} = \frac{\mu_0 Jc \operatorname{sh} 2\eta_0}{4\sqrt{\operatorname{ch}^2 \eta_0 - \cos^2 \psi}} \left[1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin p\alpha}{p\alpha} \cos p\psi \right]. \quad (20)$$

Porównując wzory (9) i (20) wyznacza się stałą A_p

$$A_p = - \frac{\mu_0 Jc^2 \operatorname{sh} 2\eta_0 \sin p\alpha}{2\alpha p^2 \operatorname{sh} p\eta_0}. \quad (21)$$

W rezultacie wzór (3a) przyjmuje postać

$$A = - \frac{1}{8} \mu_0 Jc^2 \left\{ \operatorname{ch} 2\eta + \cos 2\psi + \frac{4\operatorname{sh} 2\eta_0}{\alpha} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin p\alpha}{p^2 \operatorname{sh} p\eta_0} \cos p\psi \operatorname{ch} p\eta \right\}; \quad (22)$$

$$B_{\eta} = \frac{\mu_0 J c}{4 \sqrt{\text{ch}^2 \eta - \cos^2 \psi}} \left\{ \sin 2\psi + \frac{2 \text{sh} 2\eta_0}{\alpha} \sum_1^{\infty} \frac{\sin p\alpha}{p \text{sh} p\eta_0} \sin p\psi \text{ch} p\eta \right\}, \quad (23a)$$

$$B_{\psi} = \frac{\mu_0 J c}{4 \sqrt{\text{ch}^2 \eta - \cos^2 \psi}} \left\{ \text{sh} 2\eta + \frac{2 \text{sh} 2\eta_0}{\alpha} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin p\alpha}{p \text{sh} p\eta_0} \cos p\psi \text{sh} p\eta \right\}. \quad (23b)$$

Energię magnetyczną zgromadzoną w żłobku można wyznaczyć ze wzoru

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_v (B_{\psi}^2 + B_{\eta}^2) dv = \frac{l}{2\mu} \int_s (B_{\psi}^2 + B_{\eta}^2) ds. \quad (24)$$

Jednakże ze względu na pracochłonność tej metody zostanie zaproponowany inny sposób.

Ze wzoru Greena wynika

$$\int_v \text{grad}^2 A dv + \int_v A \Delta A dv = \oint_s A \frac{\partial A}{\partial n} ds.$$

Z zależności

$$\text{grad}^2 A = \frac{1}{c^2(\text{ch}^2 \eta - \cos^2 \psi)} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial \psi} \right)^2 \right] = B_{\psi}^2 + B_{\eta}^2$$

oraz z równania (1) otrzymuje się

$$\int_v (B_{\psi}^2 + B_{\eta}^2) dv + \mu_0 J \int_v A dv = \oint_s A \frac{\partial A}{\partial n} ds. \quad (25)$$

Uwzględniając równania (24) i (25) uzyskuje się

$$W = \frac{1}{2} J \int_v A dv + \frac{1}{2\mu_0} \oint_s A \frac{\partial A}{\partial n} ds.$$

Z założenia o płaskorównoległości pola magnetycznego oraz z zależności $\frac{\partial A}{\partial n} = -B$, wynika

$$W = \frac{l}{2} J \int_s A ds - \frac{l}{2\mu} \oint_1 A B_{\psi}|_{\eta=\eta_0} d\tau. \quad (26)$$

Wykorzystując wzory (60) i (61) (dodatek 2) określające element łuku i element powierzchni w układzie współrzędnych eliptyczno-walcowych oraz zależności (8b) i (16), równanie (26) przyjmie postać

$$W = \frac{l J c^2}{2} \int_0^{\eta_0} \int_0^{2\pi} A (\text{ch}^2 \eta - \cos^2 \psi) d\eta d\psi - \frac{l \pi J c^2 \text{sh} 2\eta_0}{8\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} A|_{\eta=\eta_0} d\psi. \quad (27)$$

Po podstawieniu wyrażenia (22) do wzoru (27) i przeprowadzeniu całkowania, otrzymuje się:

$$W = \frac{\pi}{64} \mu_0 J^2 l c^4 \text{sh} 2\eta_0 \left[\text{ch} 2\eta_0 + \frac{2 \sin 2\alpha}{\alpha} + \frac{8 \text{sh} 2\eta_0}{\alpha^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 p\alpha \text{cth} p\eta_0}{p^3} \right]. \quad (28)$$

Z zależności

$$W = \frac{1}{2} LI^2 \quad (29)$$

oraz ze wzorów (15) i (28) otrzymuje się wzór na indukcyjność:

$$L = \frac{\mu_0 l}{8\pi} \left\{ \text{cth} 2\eta_0 + \frac{2\sin 2\alpha}{\alpha \text{sh} 2\eta_0} + 8\alpha \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 p\alpha}{(\alpha p)^3} \text{cth} p\eta_0 \right\}. \quad (30)$$

Z równań (13a) i (13b) wynika

$$\text{cth} 2\eta_0 = \frac{a^2 + b^2}{2ab}. \quad (31)$$

Stąd

$$\eta_0 = \frac{1}{2} \text{arc th} \frac{a^2 + b^2}{2ab}.$$

Uwzględniając zależność

$$\text{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1},$$

otrzyma się

$$\eta_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{a+b}{a-b}. \quad (32)$$

Ostatecznie indukcyjność żłobka o przekroju eliptycznym o półosiach a i b wyraża się wzorem (30), gdzie $\text{cth} 2\eta_0$ określony jest wzorem (31) a η_0 równaniem (32). Natomiast $\text{sh} 2\eta_0$ wyznacza się ze wzoru

$$\text{sh} 2\eta_0 = \frac{2ab}{a^2 - b^2}. \quad (33)$$

Uwzględniając (31) i (33) wzór (30) przyjmie postać

$$L = \frac{\mu_0 l}{8\pi} \left\{ \frac{a^2 + b^2}{2ab} + \frac{\sin 2\alpha}{\alpha} \frac{a^2 - b^2}{ab} + 8\alpha \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 p\alpha}{(\alpha p)^3} \text{cth} p\eta_0 \right\}. \quad (34)$$

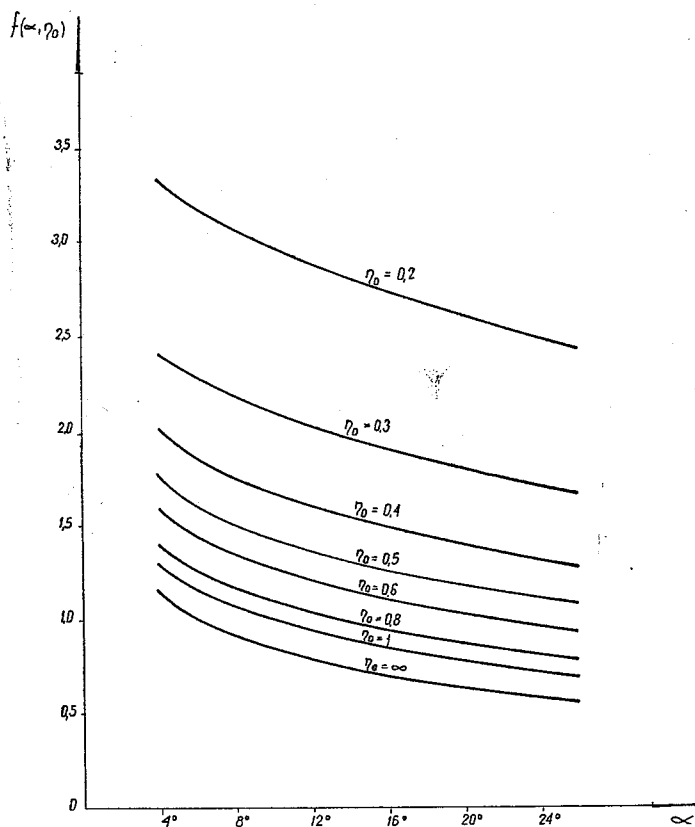
Dla małej wartości $\alpha \sin 2\alpha \approx 2\alpha$ i wzór (34) ma następujący kształt:

$$W = \frac{\mu_0 l}{8\pi} \left\{ \frac{5a^2 - 3b^2}{2ab} + 8\alpha \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 p\alpha}{(\alpha p)^3} \text{cth} p\eta_0 \right\}. \quad (34a)$$

Dla $a \rightarrow b \rightarrow R$ $\eta_0 \rightarrow \infty$ (wzór 32) i zależności (30), (34) i (34a) przechodzą w równość:

$$L = \frac{\mu_0 l}{8\pi} \left\{ 1 + 8\alpha \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 p\alpha}{(\alpha p)^3} \right\}. \quad (35)$$

Wzór (35) pokrywa się z zależnością określającą indukcyjność żłobka półzamkniętego o przekroju kołowym, podaną w pracy [4].



Rys. 4. Zależność bezwymiarowej funkcji $f(\alpha, \eta_0)$ od parametrów żłobka α i η_0
 Rys. 4 sporządzono na podstawie wzoru (36)

Tablica 1

Wartości funkcji $f(\alpha, \eta_0)$
 Tablicę sporządzono wykorzystując wzór (36)

$\eta_0 \backslash \alpha$	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°	22°	24°
0,1	6,014	5,866	5,730	5,600	5,474	5,350	5,228	5,107	4,988	4,869
0,2	3,174	3,066	2,974	2,892	2,816	2,744	2,675	2,608	2,543	2,479
0,3	2,270	2,171	2,090	2,020	1,958	1,901	1,847	1,796	1,747	1,700
0,4	1,839	1,744	1,667	1,603	1,546	1,495	1,448	1,404	1,362	1,322
0,5	1,594	1,500	1,426	1,363	1,309	1,261	1,218	1,177	1,139	1,104
0,6	1,439	1,346	1,273	1,212	1,159	1,113	1,071	1,033	0,997	0,964
0,7	1,334	1,242	1,169	1,109	1,057	1,012	0,972	0,935	0,901	0,869
0,8	1,260	1,168	1,096	1,036	0,985	0,941	0,901	0,865	0,832	0,801
0,9	1,206	1,114	1,042	0,983	0,933	0,889	0,849	0,814	0,782	0,752
1,0	1,165	1,073	1,002	0,943	0,893	0,849	0,810	0,776	0,744	0,715
2,0	1,032	0,941	0,870	0,812	0,763	0,720	0,683	0,650	0,619	0,592
∞	1,014	0,923	0,852	0,795	0,746	0,703	0,666	0,633	0,603	0,575

Na podstawie wzoru (30) sporządzono tablicę 1 określającą zależność bezwymiarowej funkcji $f(\alpha, \eta_0)$ od parametrów α i η_0 , gdzie $f(\alpha, \eta_0) = \frac{L}{\mu_0 l}$:

$$f(\alpha, \eta_0) = \frac{1}{8\pi} \left(\operatorname{cth} 2\eta_0 + \frac{2\sin 2\alpha}{\alpha \operatorname{sh} 2\eta_0} + 8\alpha \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 p\alpha}{(p\alpha)^3} \operatorname{cth} p\eta_0 \right). \quad (36)$$

Wykorzystując tablicę 1 sporządzono rys. 4 przedstawiający zależność $f(\alpha, \eta_0)$ od α i η_0 .

2.3. Żłobek częściowo wypełniony uzwojeniem

Uzwojenie i żłobek mają kształt współosiowych elips (rys. 5), tzn.

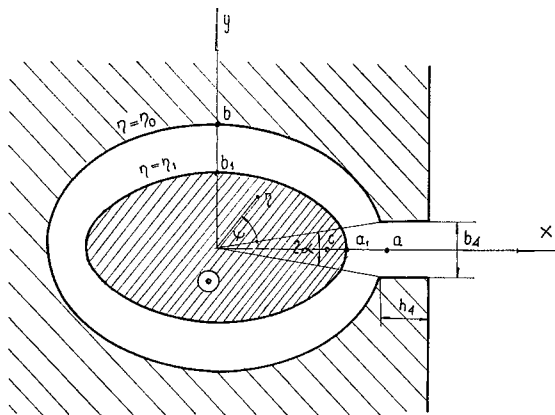
$$c^2 = a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2. \quad (37)$$

Potencjał wektorowy w obszarze zajęтым przez prąd, $\eta \leq \eta_1$, przyjmuje się w postaci:

$$A_I = -\frac{1}{8} \mu_0 J c^2 (\operatorname{ch} 2\eta + \cos 2\psi) + \sum_{p=1}^{\infty} (A_p \operatorname{ch} p\eta + B_p \operatorname{sh} p\eta) \cos p\psi + C\eta + A_0, \quad (38a)$$

a w obszarze bezprądowym, $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_0$

$$A_{II} = \sum_{p=1}^{\infty} (D_p \operatorname{ch} p\eta + E_p \operatorname{sh} p\eta) \cos p\psi + F\eta + D_0. \quad (38b)$$



Rys. 5. Żłobek o przekroju eliptycznym częściowo zapełniony uzwojeniem

Składowe wektora indukcji wyznacza się ze wzorów:
w obszarze $\eta \leq \eta_1$

$$B_{I\eta} = \frac{1}{c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \eta - \cos^2 \psi}} \frac{\partial A_I}{\partial \psi}, \quad (39a)$$

$$B_{I\psi} = -\frac{1}{c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \eta - \cos^2 \psi}} \frac{\partial A_I}{\partial \eta}, \quad (39b)$$

w obszarze $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_0$

$$B_{II\eta} = \frac{1}{c \sqrt{\text{ch}^2 \eta - \cos^2 \psi}} \frac{\partial A_{II}}{\partial \psi}, \quad (39c)$$

$$B_{II\psi} = - \frac{1}{c \sqrt{\text{ch}^2 \eta - \cos^2 \psi}} \frac{\partial A_{II}}{\partial \eta}. \quad (39d)$$

Warunek brzegowy przyjmuje się analogicznie jak w rozdz. 2.2 (wzór 16)

$$B_\psi|_{\eta=\eta_0} = \begin{cases} 0, & |\psi| > \alpha, \\ \frac{\pi \mu_0 J c \text{sh} 2\eta_1}{4\alpha \sqrt{\text{ch}^2 \eta_0 - \cos^2 \psi}}, & |\psi| < \alpha. \end{cases} \quad (40)$$

Uwzględniając wzór (20) otrzyma się

$$B_\psi|_{\eta=\eta_0} = \frac{\mu_0 J c \text{sh} 2\eta_1}{4 \sqrt{\text{ch}^2 \eta_0 - \cos^2 \psi}} \left[1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin p\alpha}{p\alpha} \cos p\psi \right]. \quad (41)$$

Na granicy obszarów ($\eta = \eta_1$) spełnione muszą być warunki ciągłości potencjału wektorowego, składowej normalnej wektora indukcji oraz składowej stycznej wektora nążeńcia pola magnetycznego. Opisuje to następujący układ równań

$$A_I = A_{II} \quad \text{dla} \quad \eta = \eta_1, \quad (42a)$$

$$B_{I\psi} = B_{II\psi} \quad \text{dla} \quad \eta = \eta_1. \quad (42b)$$

Ze względu na skończoną wartość $B_{I\psi}$ ze wzorów (38a) i (39b) wynika $B_p = C = 0$. Pozostałe stałe wyznacza się ze wzorów (38a, b), (39a, b, c, d), (41), (42a, b).

Ostatecznie:

w obszarze $\eta \leq \eta_1$

$$A_I = - \frac{1}{8} \mu_0 J c^2 \left[\text{ch} 2\eta + \cos 2\psi + \frac{4 \text{sh} 2\eta_1}{\alpha} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin p\alpha}{p^2 \text{sh} p\eta_0} \text{ch} p\eta \cos p\psi + \right. \\ \left. + 2\eta_1 \text{sh} 2\eta_1 - \text{ch} 2\eta_1 + (\text{cth} 2\eta_0 - \text{cth} 2\eta_1) \text{sh} 2\eta_1 \text{ch} 2\eta \cos 2\psi \right] + B_0, \quad (43a)$$

w obszarze $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_0$

$$A_{II} = - \frac{1}{8} \mu_0 J c^2 \left\{ 2\eta \text{sh} 2\eta_1 + \frac{4 \text{sh} 2\eta_1}{\alpha} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin p\alpha}{p^2 \text{sh} p\eta_0} \text{ch} p\eta \cos p\psi + \right. \\ \left. + (\text{cth} 2\eta_0 \text{ch} 2\eta - \text{sh} 2\eta) \text{sh} 2\eta_1 \cos 2\psi \right\} + B_0. \quad (43b)$$

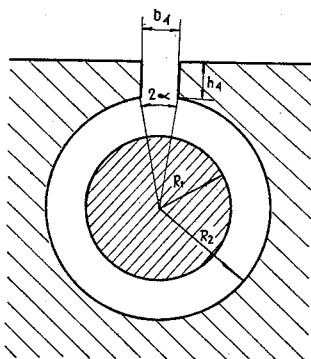
Wzór (27) przyjmie obecnie postać

$$W = \frac{Jlc^2}{2} \int_0^{\eta_1} \int_0^{2\pi} A_I (\text{ch}^2 \eta - \cos^2 \psi) d\eta d\psi - \frac{Jl\pi c^2 \text{sh} 2\eta_1}{4\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} A_{II}|_{\eta=\eta_0} d\psi. \quad (44)$$

Ostatecznie indukcyjność wyrazi się wzorem:

$$L = \frac{\mu_0 l}{8\pi} \left[\operatorname{cth} 2\eta_0 + \frac{2\sin 2\alpha}{\alpha \operatorname{sh} 2\eta_0} + 8\alpha \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 p\alpha}{(p\alpha)^3} \operatorname{cth} p\eta_0 + 4(\eta_0 - \eta_1) \right]. \quad (45)$$

Dla żłobka wypełnionego całkowicie, $\eta_0 = \eta_1$, wzór (45) przechodzi w (30).



Rys. 6. Żłobek o przekroju kołowym częściowo wypełniony uzwojeniem jako graniczny przypadek żłobka przedstawionego na rys. 5

Dla żłobka o przekroju kołowym (rys. 6) wypełnionego częściowo uzwojeniem $a_1 \rightarrow b_1 \rightarrow R_1$ oraz $a \rightarrow b \rightarrow R$, $\eta_0 \rightarrow \infty$, $\eta_1 \rightarrow \infty$. Z zależności (32) i (37) wynika dla $a = b = R$ i $a_1 = b_1 = R_1$

$$\eta_0 - \eta_1 = \ln \frac{R}{R_1}.$$

Wzór (45) przyjmuje postać

$$L = \frac{\mu_0 l}{8\pi} \left\{ 1 + 4 \ln \frac{R}{R_1} + 8a \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin^2 p\alpha}{(p\alpha)^3} \right\}. \quad (45a)$$

Wzór (45a) pokrywa się z zależnością, którą można wyznaczyć z postaci potencjału wektorowego podanej w pracy [9].

Przy wyznaczaniu indukcyjności ze wzoru (45) wygodnie jest posłużyć się funkcją $f(\alpha, \eta_0)$ wprowadzoną dla żłobka wypełnionego całkowicie uzwojeniem (wzór 36)

$$L = \mu_0 l \left[f(\alpha, \eta_0) + \frac{\eta_0 - \eta_1}{2\pi} \right]. \quad (46)$$

Ze wzorów (32), (37) i (46) otrzymuje się:

$$L = \mu_0 l \left[f(\alpha, \eta_0) + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a_1+b_1} \right]. \quad (47)$$

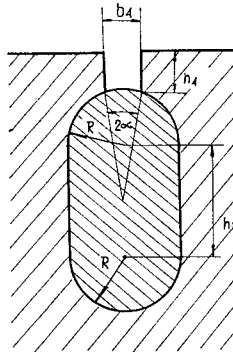
2.4. Indukcyjność żłobka rzeczywistego

Rzeczywisty kształt żłobka przedstawiony na rys. 7 odbiega nieco od założonego kształtu eliptycznego (rys. 1). Zakłada się jednakową wysokość obu żłobków

$$2a = 2R + h_1 \quad (48a)$$

oraz jednakową powierzchnię

$$\pi ab = \pi R^2 + 2Rh_1. \quad (48b)$$



Rys. 7. Oznaczenie wymiarów rzeczywistego żłobka owalnego

Ze wzorów (48a), (48b) i (32) otrzyma się

$$\eta_0 = \frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{2 + 2,55x}{(0,727 + x)x} \right], \quad (49)$$

gdzie $x = \frac{h_1}{2R}$.

Opierając się na wzorze (49) sporządzono tablicę 2 i rys. 8.

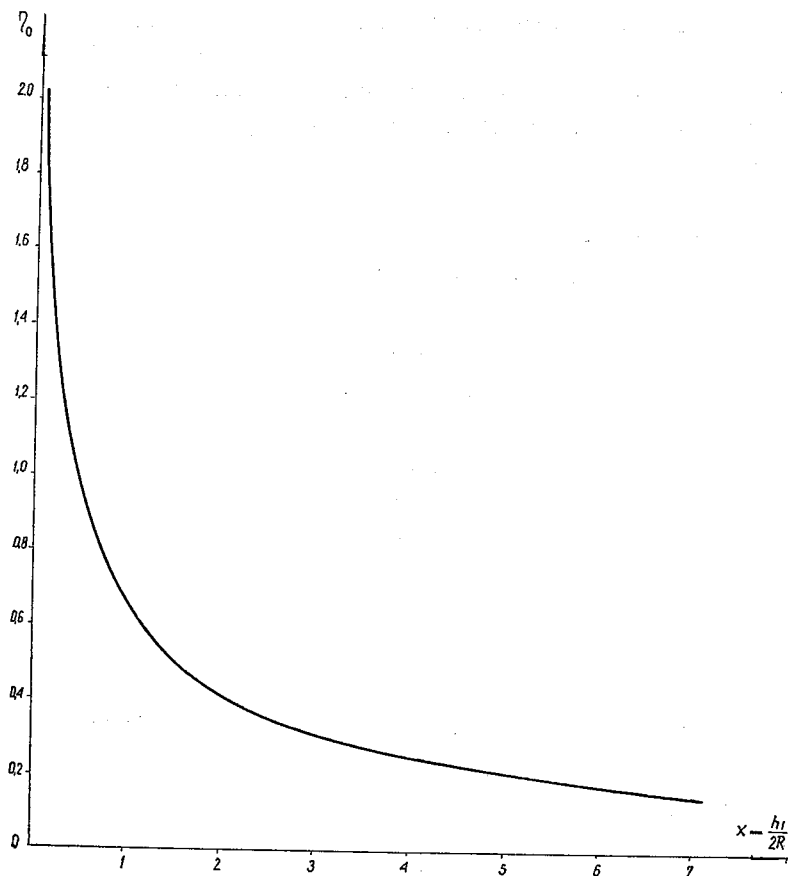
Ze wzorów (48a) i (48b) można wyznaczyć

$$\Delta b = b - R = 0,273R \frac{x}{x+1}, \quad (50)$$

gdzie $x = \frac{h_1}{2R}$.

Wzór (50) pozwala ocenić na ile kształt zastępczego żłobka eliptycznego odbiega od kształtu żłobka rzeczywistego.

Na rys. 9 przedstawiono kontur rzeczywistego żłobka oraz zastępczego dla $x = 1, 2, 4$. Z rys. 9 wynika, że zastępczy żłobek różni się tylko nieznacznie kształtem od żłobka rzeczywistego. Oznacza to, że teoria żłobka eliptycznego podana w p. 2.2 i 2.3 może być z powodzeniem zastosowana do wyznaczania indukcyjności rozproszenia żłobkowego żłobka przedstawionego na rys. 7. W celu zilustrowania proponowanej metody rozpatrzony zostanie przykład zaczerpnięty z pracy [1].



Rys. 8. Zależność parametru η_3 zastępczej elipsy od współczynnika $x = \frac{h_1}{2R}$ określonego dla żłobka rzeczywistego (tablica 2)

Tablica 2

Wartości parametru η_0 zastępczej elipsy w funkcji współczynnika $x = \frac{h_1}{2R}$ określonego dla żłobka rzeczywistego (wzór 49)

$x = \frac{h_1}{2R}$	η_0	$x = \frac{h_1}{2R}$	η_0
0	∞	1,0	0,645
0,05	2,02	1,5	0,505
0,1	1,67	2	0,417
0,2	1,34	3	0,311
0,4	1,02	4	0,249
0,5	0,925	6	0,178
0,6	0,846	10	0,113
0,8	0,734	15	0,078

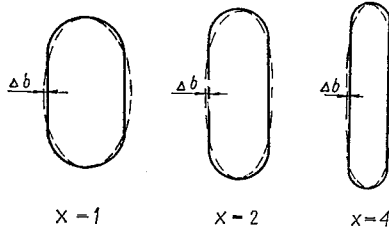
Żłobek o przekroju przedstawionym na rys. 10 zostaje zastąpiony żłobkiem z rys. 7 (wymiary podano w mm). Jako R przyjmuje się średnią arytmetyczną promieni R_1 i R_2

$$R = \frac{R_1 + R_2}{2} = 3,5.$$

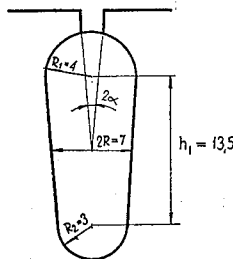
Parametr $x = \frac{h_1}{2R} = 1,93$.

Z rys. 8 odczytuje się parametr η_0 zastępczego żłobka eliptycznego

$$\eta_0 = 0,427.$$



Rys. 9. Porównanie kształtów rzeczywistego żłobka oraz zastępczego żłobka eliptycznego
Rys. 9 sporządzono przy założeniu jednakowej wysokości oraz jednakowym polu obu żłobków; wymiar Δb określa wzór (50)



Rys. 10 Kształt żłobka zaczerpnięty z pracy [1]
Wymiary żłobka podano w [mm]

Z tablicy 1 lub z rys. 4 odczytuje się $f(\alpha, \eta_0)$ dla paru wartości α . I tak dla $\alpha = 6^\circ$ $L = 1,75\mu_0 l$, dla $\alpha = 12^\circ$ $L = 1,52\mu_0 l$, a dla $\alpha = 21^\circ$ $L = 1,31\mu_0 l$.

Z nomogramów podanych w pracy [1] można odczytać wartość indukcyjności tego żłobka

$$L = 1,30\mu_0 l.$$

Stosując wzór podany w pracy [9]:

$$L = \mu_0 l \left[0,685 + \frac{1}{3} \frac{h_1}{2R} \right] \quad (51)$$

otrzyma się

$$L = 1,33\mu_0 l.$$

Według [10] indukcyjność rozproszenia tego żłobka wyniesie

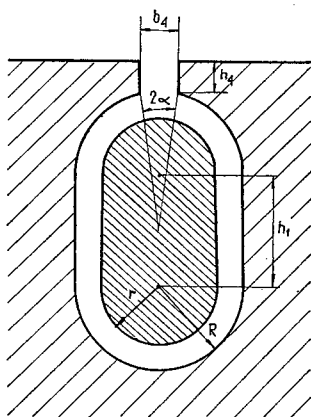
$$L = \mu_0 l \left[0,77 + 0,28 \frac{h_1}{2R} \right]. \quad (52)$$

Średnia wartość indukcyjności $L = 1,31\mu_0 l$ odpowiada kątowi $\alpha = 21^\circ$. W pracy [1], skąd zaczerpnięto powyższy przykład, nie podano wartości kąta α , ponieważ indukcyjność wyznaczano ze wzoru, który nie był funkcją kąta α .

W przypadku żłobka częściowo wypełnionego (rys. 11) indukcyjność wyznacza się analogicznie jak przy żłobku wypełnionym całkowicie. Z podanych wymiarów żłobka wyznacza się parametry

$$x = \frac{h_1}{2R}, \quad x_1 = \frac{h_1}{2r}.$$

Z tablicy 2 lub z rys. 8 odczytuje się parametry η_0 i η_1 zastępczych elips (rys. 5). Ze wzoru (46) oraz z tablicy 1 lub rys. 4 wyznacza się wartość indukcyjności żłobka wypełnionego częściowo.



Rys. 11. Rzeczywisty żłobek częściowo zapełniony uzwojeniem

Dla przykładu wyznacza się indukcyjność żłobka o danych:

$$2R = h_1 = 10 \text{ mm}$$

oraz

$$\frac{r}{R} = 0,8; \quad 0,7; \quad 0,6.$$

Dla parametru $x = \frac{h_1}{2R} = 1$ z tablicy 2 odczytuje się $\eta_0 = 0,645$. Z tablicy 1 lub rys. 4 dla $\alpha = 16^\circ$ i $\eta_0 = 0,645$ otrzymuje się

$$f(\alpha, \eta_0) = 1,05.$$

$$\text{Dla } \frac{r}{R} = 0,8; \quad x_1 = \frac{h_1}{2r} = \frac{h_1}{2R} \frac{R}{r} = \frac{x}{0,8} = 1,25$$

Z tablicy 2 $\eta_1 = 0,57$. Ze wzoru (46) wyznacza się $L = 1,06\mu_0 l$. Analogicznie dla $\frac{r}{R} = 0,7$

otrzyma się $L = 1,07\mu_0 l$, a dla $\frac{r}{R} = 0,6$ $L = 1,08\mu_0 l$.

W wypadku wypełnienia całkowitego $\frac{r}{R} = 1$ otrzyma się $L = 1,05\mu_0 l$. Wynika stąd, że częściowe wypełnienie powoduje wzrost indukcyjności. I tak dla $\frac{r}{R} = 0,8$ indukcyjność wzrasta o 1%, a dla $\frac{r}{R} = 0,6$ o 3%.

2.5. D o d a t e k

2.5.1. Obliczenie rot \mathbf{A} w układzie współrzędnych eliptyczno-walcowych

Rotację wektora \mathbf{A} w układzie współrzędnych (u_1, u_2, u_3) wyznacza się ze wzoru [2] [3]

$$\text{rot } \bar{\mathbf{A}} = g^{-\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1(g_{11})^{\frac{1}{2}} & \bar{\mathbf{a}}_2(g_{22})^{\frac{1}{2}} & \bar{\mathbf{a}}_3(g_{33})^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ A_1(g_{11})^{\frac{1}{2}} & A_2(g_{22})^{\frac{1}{2}} & A_3(g_{33})^{\frac{1}{2}} \end{vmatrix}. \quad (53)$$

Współczynniki metryki g_{11}, g_{22}, g_{33} występujące w zależności (53) wyznacza się ze wzoru

$$g_{ii} = \left(\frac{\partial x}{\partial u_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i} \right)^2. \quad (54)$$

Wyznacznik macierzy współczynników metryki g , dla układu współrzędnych ortogonalnych, ma postać

$$g = g_{11}g_{22}g_{33}. \quad (55)$$

Dla układu współrzędnych eliptyczno-walcowych (wzór 2)

$$u_1 = \eta; \quad u_2 = \psi; \quad u_3 = z. \quad (56)$$

Współczynniki metryki, wyznaczone ze wzoru (54) przy uwzględnieniu wzorów (2) i (56), wynoszą

$$\begin{aligned} g_{11} &= g_{22} = c^2(\text{ch}^2\eta - \cos^2\psi), \\ g_{33} &= 1, \quad g = (g_{11})^2. \end{aligned} \quad (57)$$

Wektor $\bar{\mathbf{A}}$ posiada tylko jedną składową, zgodną z osią z , tzn.

$$A_1 = A_2 = 0 \quad \text{i} \quad A_3 = A \neq 0. \quad (58)$$

Podstawiając (57) i (58) do wzoru (53), otrzymuje się

$$\text{rot } \bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{c\sqrt{\text{ch}^2\eta - \cos^2\psi}} \left[\frac{\partial A}{\partial \psi} \bar{\mathbf{a}}_\eta - \frac{\partial A}{\partial \eta} \bar{\mathbf{a}}_\psi \right]. \quad (59)$$

2.5.2. Wyznaczenie elementu łuku $d\tau$ i elementu powierzchni w układzie współrzędnych eliptyczno-walcowych

Element łuku $d\tau$ w układzie współrzędnych ortogonalnych wyraża się wzorem [2, 3]

$$(d\tau)^2 = g_{11}(du_1)^2 + g_{22}(du_2)^2 + g_{33}(du_3)^2.$$

Ze wzoru (56) dla $\eta = \eta_0$ i $z = \text{const}$ otrzyma się

$$d\tau = (g_{22})^{\frac{1}{2}} du_2.$$

Uwzględniając zależność (57), uzyska się

$$d\tau = c \sqrt{\text{ch}^2 \eta - \cos^2 \psi} d\psi. \quad (60)$$

Element powierzchni w układzie współrzędnych ortogonalnych wyraża się wzorem [2, 3]

$$ds = (g_{11}g_{22})^{\frac{1}{2}} du_1 du_2.$$

Wykorzystując związki (56) i (57) otrzyma się

$$ds = c^2 (\text{ch}^2 \eta - \cos^2 \psi) d\eta d\psi. \quad (61)$$

3. ŻŁOBEK PÓLZAMKNIĘTY O PRZEKROJU PROSTOKĄTNYM

3.1. Uwagi wstępne

W pracy [7] przeanalizowano wpływ częściowego wypełnienia żłobka uzwojeniem na wartość indukcyjności rozproszenia oraz sił działających na uzwojenie. Do analizy pola magnetycznego użyto metody rozdzielania zmiennych. Mimo uwzględnienia częściowego wypełnienia, w pracy [7] zakładano, iż uzwojenie dotyka ścianek bocznych żłobka. Założenie to było konieczne, aby można było zastosować metodę rozdzielania zmiennych. W przypadku, gdy pomiędzy uzwojeniem a ścianką boczną żłobka występuje szczelina, metoda rozdzielania zmiennych jest bezsilna.

Analiza tych przypadków jest możliwa tylko przy użyciu metod przybliżonych. W rozdziale tym omówiona zostanie tylko jedna z metod przybliżonych — metoda wariacyjna Ritza.

Wdrożeniu metod wariacyjnych do analizy pola magnetycznego poświęcono m.in. prace [5], [6].

W rozdziale tym wariacyjną metodę analizy pola magnetycznego ograniczono do pola magnetycznego wewnątrz żłobka prostokątnego.

3.2. Rozważania ogólne

Potencjał wektorowy płaskorównoległego pola magnetycznego prądu stałego spełnia równanie (1) dla jednego z następujących warunków brzegowych

$$A|_r = 0, \quad A_r = \omega(p), \quad (26a)$$

$$\left. \frac{\partial A}{\partial n} \right|_r = 0, \quad (26b)$$

$$\left. \frac{\partial A}{\partial n} \right|_r = \varphi(p). \quad (26c)$$

Rozwiązanie zagadnienia Dirichleta (62a) dla równania Poissona (1) sprowadza się do minimalizacji następującego funkcjonału [5], [6]

$$F = l \iint_D [\text{grad}^2 A - 2\mu JA] dx dy. \quad (63)$$

W przypadku jednorodnego zagadnienia Neumanna (62b) funkcjonał wyraża się wzorem (63) oraz musi być spełniony dodatkowy warunek

$$\iint_D A dx dy = 0. \quad (62b')$$

Rozwiązanie niejednorodnego zagadnienia Neumanna (62c) dla równania Poissona (1) jest równoważne minimalizacji funkcjonału o postaci

$$F = l \left\{ \iint_D [\text{grad}^2 A - 2\mu JA] dx dy - 2 \int_F A \varphi(p) ds \right\}. \quad (64)$$

Energię pola magnetycznego prądu stałego można wyznaczyć ze wzoru (65) lub (66)

$$W = \frac{l}{2} \iint_D A_d J dx dy, \quad (65)$$

$$W = \frac{l}{2\mu} \iint_D |B_d|^2 dx dy. \quad (66)$$

Symbol d użyty we wzorach (65) i (66) oznacza wartość dokładną tzn. rzeczywistą.

Wykorzystując wzory

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y} \quad \text{i} \quad B_y = -\frac{\partial A}{\partial x}, \quad (67)$$

śluzne dla pola płaskorównoległego, wzór (66) przyjmie postać

$$W = \frac{l}{2\mu} \iint_D \text{grad}^2 A_d dx dy. \quad (66a)$$

Potencjał wektorowy A_d , jako rozwiązanie równania (1), realizuje minimum funkcjonału (63). Wykorzystując ten fakt oraz wzory (65) i (66a) otrzymuje się

$$\frac{F_{min}}{2\mu} = W - 2W = -W,$$

czyli

$$W = -\frac{F_{min}}{2\mu}. \quad (68)$$

Z zależności (68) wynika ważna własność pola magnetycznego prądu stałego. A mianowicie, rozkład potencjału wektorowego zapewnia maksimum energii magnetycznej.

Wykorzystując związek między indukcyjnością a energią

$$W = \frac{1}{2} LI^2, \quad (69)$$

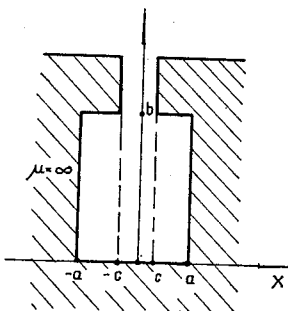
równanie (68) przyjmie następującą postać

$$L = - \frac{F_{min}}{\mu I^2} \quad (70)$$

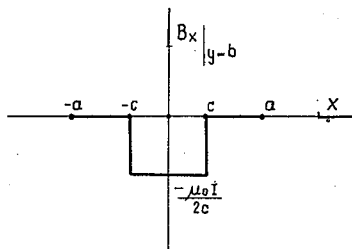
Ze wzoru (70) wynika, że proces minimalizacji funkcjonału odnosi się bezpośrednio do wartości indukcyjności. Tym samym metoda Ritza bezpośredniej minimalizacji funkcjonału jest szczególnie przydatna do wyznaczania indukcyjności. Zależności (68) i (70) są słuszne również dla funkcjonału (64), tzn. dla niejednorodnego zagadnienia Neumanna (62c) [6].

3.3. Dobór funkcji potencjału wektorowego

Na rys. 12 przedstawiono przekrój poprzeczny żłobka półzamkniętego maszyny elektrycznej.



Rys. 12. Wymiary żłobka półzamkniętego, prostokątnego analizowanego w rozdziale 3



Rys. 13. Założony rozkład składowej B_x wektora indukcji w szczeliny powietrznej

Przyjęto następujące założenia:

- żłobek jest dostatecznie długi, aby zagadnienie można traktować jako dwuwymiarowe,
- przenikalność ferromagnetyka jest nieskończenie duża, brak nasycenia,
- składowa B_x wektora indukcji w szczeliny powietrznej między główkami zębów jest stała.

Z założenia b) wynika brak składowej stycznej wektora indukcji na granicy powietrze-ferromagnetyk (od strony powietrza). Z założenia c) oraz z prawa przepływu wynika rozkład składowej B_x wektora indukcji dla współrzędnej $y = b$, pokazany na rys. 13.

Poszukiwany potencjał wektorowy powinien spełniać następujące warunki brzegowe

$$\left. \frac{\partial A}{\partial x} \right|_{x=-a} = \left. \frac{\partial A}{\partial x} \right|_{x=a} = \left. \frac{\partial A}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad (71a)$$

$$\left. \frac{\partial A}{\partial y} \right|_{y=b} = \begin{cases} -\frac{\mu_0 I}{2c}, & |x| < c, \\ 0, & c < |x| < a. \end{cases} \quad (71b)$$

Przyjmuje się go jako wielomian zmiennych x i y będący parzystą funkcją zmiennej x

$$A = A_0 + A_1 x^2 + A_2 x^4 + A_3 y + A_4 y^2 + A_5 yx^2 + A_6 yx^4 + A_7 y^2 x^4 + A_8 y^2 x^2.$$

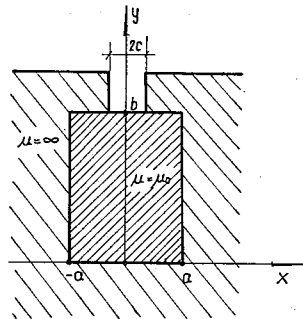
Po uwzględnieniu warunków (71a), potencjał wektorowy przyjmie postać

$$A = A_0 + A_1 y^2 + A_2 y^2 (2a^2 x^2 - x^4) + A_3 (2a^2 x^2 - x^2). \quad (72)$$

Ze względu na nieciągłość warunku brzegowego (71b) zrezygnowano ze spełnienia go.

3.4. Żłobek wypełniony całkowicie uzwojeniem

Na rys. 14 przedstawione jest rozmieszczenie uzwojenia. Postać warunków brzegowych oznacza, że występuje tu zagadnienie Neumanna.



Rys. 14. Żłobek wypełniony całkowicie uzwojeniem

Minimalizowany funkcjonal wyraża się wzorem analogicznym do wyrażenia (64)

$$F = 2l \int_0^a \int_0^b [\text{grad}^2 A - 2\mu_0 J A] dx dy + \frac{4\mu_0 J a b l}{c} \int_0^c A|_{y=b} dx. \quad (73)$$

Pierwsze przybliżenie potencjału wektorowego poszukuje się w postaci

$$A = A_0 + A_1 y^2 + A_2 y^2 (2a^2 x^2 - x^4). \quad (74)$$

Wykonując działania określone wzorem (73), uzyskuje się

$$F = -4abl \left\{ \frac{2}{3} A_1^2 b^2 + \frac{28}{45} A_1 A_2 b^2 a^4 + A_2 b^2 a^6 \left(\frac{64}{525} b^2 + \frac{214}{945} a^2 \right) + \mu_0 J \left[\frac{2}{3} A_1 b^2 + A_2 b^2 \left(\frac{2}{3} a^2 c^2 - \frac{1}{5} c^4 - \frac{7}{45} a^4 \right) \right] \right\}. \quad (75)$$

Z układu równań

$$\frac{\partial F}{\partial A_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial A_2} = 0,$$

otrzymuje się

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{\mu_0 J}{2} - \mu_0 J \frac{49(3c^4 + 7a^4 - 10a^2c^2)}{128a^2(3b^2 + 2a^2)}, \\ A_2 &= \mu_0 J \frac{105(3c^4 + 7a^4 - 10a^2c^2)}{128a^6(3b^2 + 2a^2)}. \end{aligned} \quad (76)$$

Podstawiając (76) do wzoru (75), otrzymuje się

$$F_{min} = (\mu_0 J)^2 \cdot 2abl \left[\frac{b}{3} + \frac{7(3c^4 + 7a^4 - 10a^2c^2)b^2}{128a^6(3b^2 + 2a^2)} \right].$$

Zgodnie ze wzorem (70) indukcyjność rozproszenia wyrazi się zależnością

$$L = \mu_0 l \left[0,167\beta + 9,13 \cdot 10^{-3} \frac{\beta(7 - 10\gamma^2 + 3\gamma^4)^2}{\beta^2 + 0,667} \right], \quad (77)$$

gdzie

$$\frac{b}{a} = \beta, \quad \frac{c}{a} = \gamma.$$

Przyjmując drugie przybliżenie w postaci (72) po wykonaniu obliczeń analogicznych do tych, jakie przeprowadzono dla pierwszego przybliżenia, uzyska się:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{\mu_0 J}{2} - \frac{\mu_0 J \cdot 49 \cdot (3c^4 + 7a^4 - 10a^2c^2)}{128a^2(3a^2 + 3b^2)}, \\ A_2 &= \mu_0 J \frac{105(3c^4 + 7a^4 - 10a^2c^2)}{128a^6(3a^2 + 2b^2)}, \\ A_3 &= \mu_0 J \frac{21(3c^4 + 7a^4 - 10a^2c^2)(a^2 - b^2)}{128a^6(3a^2 + 2b^2)}. \end{aligned}$$

Indukcyjność rozproszenia wynikająca z drugiego przybliżenia wyraża się wzorem

$$L_{II} = \mu_0 l \left[0,167\beta + 0,0136 \frac{\beta^2 + 0,0041}{(\beta^2 + 1,5)\beta} (7 - 10\gamma^2 + 3\gamma^4)^2 \right]. \quad (78)$$

Zgodnie z pracą [7], indukcyjność wyznaczona (przy tych samych założeniach) metodą rozdzielania zmiennych, ma postać

$$L_d = \mu_0 l \left[0,167\beta + \frac{0,0324}{\gamma^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\pi\gamma}{n^3} \operatorname{cth} n\pi\beta \right]. \quad (79)$$

Dla żłobka o wymiarach $\beta = 8$ i $\gamma = 0,5$; $L_d = 1,49\mu_0 l$,
indukcyjność wyznaczona ze wzorów (77) i (78) wynosi odpowiednio $L_I = 1,36\mu_0 l$,
 $L_{II} = 1,37\mu_0 l$,

gdzie:

L_I — indukcyjność wyznaczona z pierwszego przybliżenia metody Ritza,

L_{II} — indukcyjność wyznaczona z drugiego przybliżenia metody Ritza.

Błąd pierwszego przybliżenia wynosi 8,8%, a drugiego 8%. Jak widać błąd drugiego przybliżenia różni się tylko nieznacznie od błędu pierwszego przybliżenia. Natomiast, przy stosowaniu drugiego przybliżenia w znacznym stopniu wzrasta ilość obliczeń. Z tego powodu w następnych przykładach korzysta się będzie z przybliżenia o postaci (74).

Na ogół indukcyjność rozproszenia żłobkowego wyznacza się przy założeniu jednowymiarowego obrazu pola magnetycznego (wektor indukcji równoległy do dna żłobka). Przy tym założeniu, indukcyjność wyrazi się zależnością [1], [9]

$$L_0 = 0,167\beta\mu_0 l. \quad (80)$$

Wynik powyższy można uzyskać na drodze wariacyjnej przyjmując najprostsze przybliżenie $A = A_0 + A_1 y^2$, tzn. zakładając w pierwszym przybliżeniu (74) $A_2 = 0$.

Założenia poczynione przy wyprowadzaniu wzorów (77), (78) i (79) są bliższe prawdy niż przyjęcie jednowymiarowego obrazu pola. Uwaga powyższa jest słuszna przy braku nasycenia zębów żłobka (wpływ nasycenia będzie uwzględniony w dalszej części).

Dla żłobka o parametrach $\gamma = \frac{1}{2}$ i $\beta = 2$ (żłobek o przekroju poprzecznym kwadratowym) indukcyjność wyznaczona poszczególnymi metodami układa się następująco

$$L_d = 0,5\mu_0 l, \quad L_{II} = 0,45\mu_0 l, \quad L_0 = 0,33\mu_0 l.$$

Stąd indukcyjność wyznaczona z przyjęciem jednowymiarowego obrazu pola obarczona jest błędem 33%, a indukcyjność znaleziona na drodze wariacyjnej jest bliższa prawdy — błąd wynosi 10%.

Przypadek powyższy (całkowite wypełnienie żłobka) został tak dokładnie rozpatrzony z tego powodu, że znana jest dla niego dokładna wartość indukcyjności (wzór 79). Dzięki temu można łatwo określić dokładność metody wariacyjnej. Natomiast, dla następnych przypadków brak jest w literaturze wzorów określających indukcyjność przy założeniu dwuwymiarowego obrazu pola.

Potencjał wektorowy, wyznaczony na drodze wariacyjnej, pozwala obliczyć siłę działającą na uzwojenia. W przypadku żłobka przedstawionego na rys. 14 wystąpi składowa siły, którą wyznacza się ze wzoru

$$F_y = 2l \int_0^a \int_a^b B_x J dx dy. \quad (81)$$

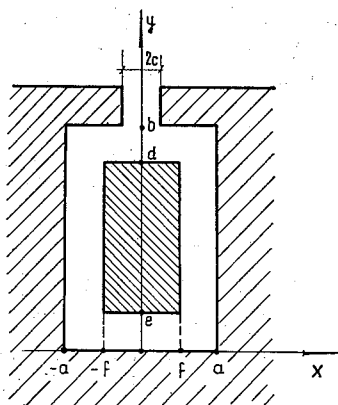
Ze wzorów (67), (74), (76) i (81) wynika

$$F_y = -\frac{\mu_0 I^2}{4a}. \quad (82)$$

Zależność (82) jest identyczna z wyrażeniem uzyskanym w pracy [7] przy uwzględnieniu dwuwymiarowego obrazu pola metodą rozdzielenia zmiennych. Oznacza to, iż w tym przypadku, metoda wariacyjna zapewnia dokładną wartość siły.

3.5. Żłobek częściowo wypełniony uzwojeniem

Rys. 15 przedstawia rozmieszczenie uzwojenia w żłobku. Potencjał wektorowy poszukuje się w postaci (74).



Rys. 15. Żłobek prostokątny wypełniony częściowo uzwojeniem

Minimalizowany funkcjonal wyraża się wzorem

$$F = 2b \int_0^a \int_a^b \text{grad}^2 A dx dy - 4\mu_0 J l \int_0^f \int_e^d A dx dy + 2 \frac{\mu_0 I l}{c} \int_0^c A|_{y=b} dx.$$

Po wykonaniu minimalizacji otrzyma się

$$A_1 = -\mu_0 J \frac{49}{128} \frac{d-e}{b} \frac{f}{a} \frac{(3c^4 - 10a^2c^2 + 7a^4) - \frac{1}{3b^2} (d^2 + ed + e^2)(3f^4 - 10a^2f^2 + 7a^4)}{a^2(3b^2 + 2a^2)} - \mu_0 J \frac{f}{a} \frac{3(d-e) \left[b^2 - \frac{1}{3} (d^2 + ed + e^2) \right]}{4b^3}, \quad (83)$$

$$A_2 = \mu_0 J \frac{105}{128} \frac{f}{a} \frac{d-e}{b} \frac{3c^4 - 10a^2c^2 + 7a^4 - \frac{1}{3b^2} (d^2 + ed + e^2)(3f^4 - 10a^2f^2 + 7a^4)}{a^6(3b^2 + 2a^2)}.$$

Indukcyjność rozproszenia żłobkowego wyraża się wzorem

$$L = \mu_0 l \left\{ 0,167(1,5 - 0,5\delta)^2 \beta + 9,13 \cdot 10^{-3} \frac{\beta}{\beta^2 + 0,667} \left[G(\gamma) - \frac{\delta}{3} G(\varepsilon) \right]^2 \right\}, \quad (84)$$

gdzie: $\beta = \frac{b}{a}$; $\gamma = \frac{c}{a}$; $\varepsilon = \frac{f}{a}$; $\delta = \frac{d^2 + ed + e^2}{b^2}$, $G(x) = 7 - 10x^2 + 3x^4$.

Należy podkreślić fakt, że w przypadku żłobka jak na rys. 15 zawodzi metoda rozdzielania zmiennych.

Dla szczególnego przypadku $\varepsilon = \delta = 1$ (uzwojenie wypełnia całkowicie żłobek), wzór (84) przyjmuje postać (77).

Siła działająca na uzwojenie wyznaczona ze wzoru

$$F_y = 2l \int_0^f \int_e^d B_x J dx dy$$

oraz z zależności (67), (74) i (83) zapisze się następująco

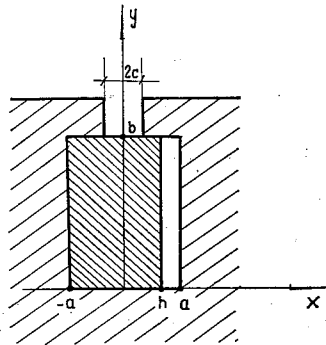
$$F_y = -\frac{\mu_0 I^2 l}{4a} \cdot \frac{d+c}{b} \left[1,5 - 0,5\delta + \frac{49}{64} (1-\varepsilon^4) \frac{G(\gamma) - \frac{\delta}{3} G(\varepsilon)}{2+3\beta^2} \right], \quad (85)$$

gdzie oznaczenia jak we wzorze (84).

Gdy $\varepsilon = \delta = 1$ (całkowite wypełnienie), wzór (85) przechodzi w zależność (82).

3.6. Asymetria w rozmieszczeniu uzwojenia

Rozpatrzony zostanie przypadek niesymetrycznego rozmieszczenia uzwojenia w żłobku (rys. 16).



Rys. 16. Asymetria w rozmieszczeniu uzwojenia

Poszukiwany potencjał wektorowy zakłada się w postaci (74). Minimalizowany funkcjonał wyraża się zależnością

$$F = 2l \int_0^a \int_0^b \text{grad}^2 A dx dy - 2\mu_0 J l \int_{-a}^h \int_0^b A dx dy + 2 \frac{\mu_0 I l}{c} \int_0^c A|_{y=b} dx.$$

Po wykonaniu niezbędnych obliczeń otrzyma się

$$A_1 = -\mu_0 J \frac{a+h}{4a} - \mu_0 J \frac{49(a+h) \left[(3c^4 + 7a^4 - 10a^2c^2) - \left(\frac{7}{3} a^3h - \frac{7}{3} a^2h^2 - h^3a + h^4 \right) \right]}{256a^3(3b^2 + 2a^2)}, \quad (86)$$

$$A_2 = \mu_0 J \frac{105(a+h) \left[(3c^4 + 7a^4 - 10a^2c^2) - \left(\frac{7}{3} a^3h - \frac{7}{3} a^2h^2 - h^3a + h^4 \right) \right]}{256a^7(3b^2 + 2a^2)}.$$

Indukcyjność rozproszenia ma postać

$$L = \mu_0 l \left\{ 0,167\beta + 9,13 \cdot 10^{-3} \frac{\beta}{\beta^2 + 0,667} [7 - 10\gamma^2 + 3\gamma^4 - 0,333(7\xi - 7\xi^2 - 3\xi^3 + 3\xi^4)] \right\}, \quad (87)$$

gdzie

$$\beta = \frac{b}{a}; \quad \gamma = \frac{c}{a}; \quad \xi = \frac{h}{a}.$$

Dla $\xi = \frac{h}{a} = 1$ wzór (87) przechodzi w zależność (77).

Wartość siły F_y działającej na uzwojenie znajduje się ze wzoru

$$F_y = l \int_0^b \int_{-a}^h B_x J dx dy$$

oraz zależności (67), (74) i (86). W wyniku przeprowadzonych obliczeń, uzyskano

$$F_y = -\frac{\mu_0 I^2 l}{4a} \left\{ 1 + \frac{7\xi(3\xi^2 - 7)(\xi + 1)}{64(3\beta^2 + 2)} \left[3\gamma^4 - 10\gamma^2 + 7 - \frac{\xi}{3}(\xi - 1) \cdot (3\xi^2 - 7) \right] \right\}. \quad (88)$$

Na skutek niesymetrycznego rozmieszczenia uzwojenia, obok siły F_y , wystąpi również siła F_x

$$F_x = -l \int_{-a}^b \int_0^h B_y J dx dy. \quad (89)$$

Wykonując niezbędne obliczenia, otrzyma się

$$F_x = -\frac{35\mu_0 I^2 \beta (\xi + 1)(1 - \xi)^2}{256a(3\beta^2 + 2)} \left[3\gamma^4 - 10\gamma^2 + 7 - \frac{\xi}{3}(1 - \xi)(7 - 3\xi^2) \right], \quad (90)$$

gdzie:

$$\beta = \frac{b}{a}; \quad \gamma = \frac{c}{a}; \quad \xi = \frac{h}{a}.$$

Dla $\xi = \frac{h}{a} = 1$ składowa siły $F_x = 0$.

Znak minus występujący we wzorze (89) oznacza, że składowa siły F_x skierowana jest przeciwnie do zwrotu osi O_x . Identyczna uwaga odnosi się do wyrażeń określających składową siły F_y .

W tym przypadku, podobnie jak w p. 3.5. zawodzi metoda rozdzielania zmiennych.

3.7. Uwzględnienie pola rozproszenia między główkami zębów żłobka półzamkniętego

W poprzednich obliczeniach została pominięta indukcyjność związana z istnieniem pola rozproszeniowego pomiędzy główkami zębów żłobka. Zgodnie z oznaczeniami (rys. 17) jest to pole występujące w obszarze

$$-c < x < c \quad \text{i} \quad b < y < d.$$

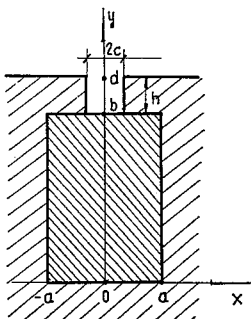
Pole to można uwzględnić stawiając warunek $B_x = \text{const}$ nie dla $y = b$ jak to było czynione poprzednio, ale dla $y = d$.

Potencjał wektorowy poszukuje się w postaci

$$A = A_0 = A_1(2a^2x^2 - x^4) + A_2y^2. \quad (91)$$

Minimalizowany funkcjonal ma postać

$$F = 2l \int_0^a \int_0^b (\text{grad}^2 A - 2\mu_0 JA) dx dy + 2l \int_0^c \int_b^d \text{grad}^2 A dx dy + \frac{4\mu_0 J a b l}{c} \int_0^c A|_{y=d} dx.$$



Rys. 17. Wymiary zębka przyjęte do analizy uwzględniającej pole rozproszenia między główkami zębów

W wyniku procesu minimalizacji otrzymano

$$A_1 = \mu_0 J \frac{ab(3c^4 - 10a^2c^2 + 7c^4)}{16 \left[c(d-b) \left(5a^4 - 6a^2c^2 + \frac{15}{7}c^4 \right) + \frac{8}{7}ba^7 \right]}, \quad (92)$$

$$A_2 = -\mu_0 J \frac{3ab \left(d^2 - \frac{1}{3}b^2 \right)}{4[c(d^3 - b^3) + ab^3]}.$$

Indukcyjność rozproszenia wynosi

$$L = \mu_0 l \left\{ \frac{b}{6a} \cdot K_1 + 1,83 \cdot 10^{-3} \frac{a \left[3 \left(\frac{c}{a} \right)^4 - 10 \left(\frac{c}{a} \right)^2 + 7 \right]^2}{b} \cdot K_2 \right\}, \quad (93)$$

gdzie

$$K_1 = \frac{1}{4} \frac{\left[3 \left(\frac{d}{b} \right)^3 - 1 \right]^2}{\frac{c}{a} \left[\left(\frac{d}{b} \right)^3 - 1 \right] + 1}; \quad K_2 = \frac{1}{\left(\frac{d}{b} - 1 \right) \left(\frac{c}{a} \right)^3 \left[35 - 42 \left(\frac{c}{a} \right)^2 + 15 \left(\frac{c}{a} \right)^4 \right] + 1}.$$

Dla $d = b$ współczynniki K_1 i K_2 równe są jedności. W tym przypadku wzór (93) przyjmuje postać, jaką otrzyma się w punkcie 3.4, zakładając w drugim przybliżeniu (72)

współczynnik $A_2 = 0$. Dla małych wartości $h \left(\frac{h}{b} \ll 1 \right)$ współczynniki K_1 i K_2 wyrażają się wzorami

$$K_1 \approx 1 + 6 \frac{h}{b}, \quad K_2 \approx 1.$$

Pierwszy człon we wzorze (93) przyjmuje postać

$$\mu_0 l \left(\frac{1}{6} \frac{b}{a} + \frac{h}{a} \right).$$

W rezultacie, uwzględnienie pola rozproszenia między główkami żłobka spowodowało wzrost indukcyjności o człon $\mu_0 l \frac{h}{a}$.

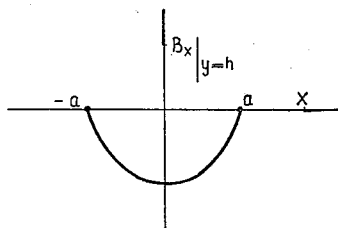
Ponieważ uwzględnienie pola między główkami (przez postawienie warunku $B_x = \text{const}$ dla $y = d$) mocno komplikuje tok obliczeń, wygodniej będzie przyjąć, że pole w szczelinie jest jednorodne. Stąd indukcyjność związana z polem magnetycznym w szczelinie powietrznej wyrazi się zależnością [1], [9]

$$L_g = \mu_0 \frac{h}{2c}. \quad (94)$$

Szczegółowa analiza indukcyjności szczerybiny żłobkowej została przeprowadzona w pracy [13].

3.8. Uwzględnienie nasycenia zębów żłobka

W punkcie 3.3 czyniono założenie, że rozkład składowej indukcji $B_x|_{y=b}$ ma kształt jak na rys. 13. Powyższy przebieg wynikał z przyjęcia nieskończenie dużej wartości przenikalności magnetycznej ferromagnetyka.



Rys. 18. Założony rozkład składowej B_x wektora indukcji w szczelinie powietrznej uwzględniający nasycenie główek zęba

W rzeczywistości, główki zębów mogą ulec nasyceniu. W tym przypadku nie można już przyjąć $B_x|_{y=b} = 0$ na odcinkach $(-a, -c)$ oraz (c, a) (rys. 12 i 13). Pewnym przybliżeniem stanu nasycenia będzie przyjęcie rozkładu indukcji w kształcie paraboli, jak na rys. 18. Przebieg ten opisuje funkcja paraboliczna dobrana tak, aby było spełnione prawo przepływu

$$B_x|_{y=b} = \frac{3\mu_0 I}{4a^3} (x^2 - a^2). \quad (95)$$

Warunki brzegowe wyrażają się zależnościami (71a) i (95). Potencjał wektorowy poszukuje się w postaci (74). Minimalizowany funkcjonal ma postać

$$F = 2l \int_0^a \int_0^b \left[\text{grad}^2 A - \frac{\mu_0 I}{ab} A \right] dx dy - 4 \int_0^a B_x|_{y=b} A|_{y=b} dx.$$

Po przeprowadzeniu obliczeń, otrzyma się

$$A_1 = -\frac{3}{8} \mu_0 J \frac{5a^2 + 4b^2}{3b^2 + 2a^2}; \quad A_2 = \frac{15}{8} \mu_0 J \frac{1}{a^2(3b^2 + 2a^2)}.$$

Indukcyjność rozproszenia wyniesie

$$L = \mu_0 l \left[0,167\beta + \frac{0,286}{\beta^2 0,667} \right]. \quad (96)$$

Dla żłobka o współczynniku $\beta = \frac{b}{a} = 8$, ze wzoru (96) uzyskuje się

$$L = 1,34 \mu_0 l.$$

Wyznaczona metodą rozdzielania zmiennych, wartość dokładna wynosi w tym przypadku $L_a = 1,36 \mu_0 l$. Błąd metody wariacyjnej wynosi zatem 1,5%. Mała wartość błędu wynika stąd, że założony rozkład indukcji jest funkcją ciągłą (parabolą). Przy ciągłych warunkach brzegowych już pierwsze przybliżenie daje zadowalające wyniki. Natomiast założenie rozkładu indukcji w postaci funkcji nieciągłej, jak to czyniono w p. 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, daje gorszą zbieżność metody wariacyjnej. Dla porównania, błąd pierwszego przybliżenia w p. 3.4 dla $\beta = 8$ i $\gamma = \frac{1}{2}$ miał wartość 8,8%, a błąd drugiego przybliżenia 8%.

Porównując wartość indukcyjności wyznaczonej w tamtym przypadku, można stwierdzić, że nasycenie spowodowało zmniejszenie indukcyjności o około 8,5%.

4. WNIOSKI KOŃCOWE

Jak wynika z rys. 4, indukcyjność żłobka eliptycznego jest funkcją zarówno parametru η_0 jak i kąta α . Silna zależność indukcyjności od kąta α przenosi się zatem na żłobek rzeczywisty przedstawiony na rys. 7. W dotychczasowej literaturze uwzględniano wpływ parametrów h_1 i R , natomiast pomijano zależność indukcyjności od kąta α . Natomiast stopień wypełnienia żłobka uzwojeniem (rys. 11) praktycznie nie wpływa na wartość indukcyjności — wynika to z rozpatrzonego przykładu liczbowego.

Z analizy dokonanej w rozdziale 3 wynika celowość stosowania metod wariacyjnych do wyznaczania indukcyjności rozproszenia żłobkowego. Zastosowanie metod wariacyjnych pozwoliło rozwiązać zagadnienia, w których zawodzi metoda rozdzielania zmiennych — p. 3.5, 3.6, 3.7. Oprócz tego, istotne znaczenie posiada fakt prostej postaci końcowych wzorów, co umożliwi łatwą ocenę wpływu parametrów konstrukcyjnych na wartość indukcyjności i sił dynamicznych.

LITERATURA

1. B. Dubicki, *Maszyny elektryczne*, t. III, PWN, Warszawa 1964.
2. G. Korn, T. Korn, *Sprawoznaczenie z matematyki*, „Nauka, Moskwa 1968.
3. P. Moon, D.E. Spencer, *Teoria pola*, PWN, Warszawa 1966.
4. F. Ollendorf, *Berechnung magnetischer Felder*, Springer Verlag, Wien 1952.
5. J. Purczyński, *Metoda Ritza obliczania indukcyjności rozproszenia*, Arch. Elektr., 1972, z. 4.
6. J. Purczyński, *Wariacyjna metoda obliczania indukcyjności rozproszenia*, praca doktorska, Gdańsk 1971.
7. J. Purczyński, R. Sikora, *Analiza indukcyjności rozproszenia żłobkowego oraz sił działających na uzwojenia maszyn elektrycznych*, Rozpr. Elektr., 1975, z. 1.
8. J. Purczyński, R. Sikora, *Die Streuung in den elliptischförmigen Nuten*, E.u.M. Austria (w druku).
9. H. Rotherth, *Über die Nutstreuung elektrischer Maschinen*, Archiv für Elektr., 1938, s. 306—329; 372—389; 434—445.
10. W. Schuisky, *Berechnung elektrischer Maschinen*, Springer Verlag, Wien 1960.
11. R. Sikora, J. Purczyński, W. Lipiński, *Das magnetische Feld des gleichstromdurchflossenen Leiters von elliptischen Querschnitt*, Archiv für Elektr., 1973, H. 4.
12. R. Sikora, P. Rolicz, *Analiza sił działających na pręty umieszczone w żłobkach maszyny elektrycznej*, Arch. Elektr., 1973, z. 2.
13. T. Śliwiński, *Nutstreuung elektrischer Maschinen*, Wissenschaftliche Zeitschrift der Elektrotechnik, 1970, Bd 16.

J. PURCZYŃSKI, R. SIKORA

ANALYSIS OF LEAKAGE FIELD IN SLOTS BY MEANS OF SEPARATION OF VARIABLES METHOD AND VARIATION METHOD

Summary

The following two problems have been considered in the paper.

1° Leakage inductance of the slot with elliptical section has been determined by means of the variables separation method. Obtained results have been applied for calculation of leakage inductance of slot which can be applied in electrical engineering practice.

2° Variation method of calculation of leakage inductance has been introduced. By means of this method has been determined leakage inductance of rectangular slot in the cases which cannot be solved by use of the variables separation method. These cases include partly filled slot, asymmetry of dislocation of windings, etc.

In the paper have been also determined forces acting on windings placed in rectangular slot.

J. PURCZYŃSKI, R. SIKORA

APPLICATION DE LA MÉTHODE DE LA SÉPARATION DES VARIABLES ET DE LA MÉTHODE VARIATIONNELLE À L'ANALYSE DU CHAMPS DE FUITE D'ENCOCHES

Résumé

On a considéré deux problèmes.

1. Après avoir appliqué la méthode de la séparation des variables, on a déterminé l'inductance de fuite d'encoches avec la section transversale elliptique. Les résultats obtenus ont été utilisés pour calculer l'inductance de fuite des encoches existants en pratique.

2. On a présenté une méthode variationnelle de calculer l'inductance de fuite d'encoches. Cette méthode a permis à déterminer l'inductance de fuite d'encoches rectangulaires dans les cas, où la méthode de la

séparation des variables avait failli de donner les solutions (entre autres: le cas du remplissage partiel de l'encoche et le cas de l'asymétrie dans la dislocation des enroulements).

Dans l'article on a déterminé aussi les forces agissantes sur les enroulements mis dans l'encoche rectangulaire.

J. PURCZYŃSKI, R. SIKORA

AUSNUTZUNG DES VARIABLENTRENNUNGSVERFAHRENS UND DER VARIATIONSRECHNUNG ZUR ANALYSE EINES NUTSTREUFELDES

Zusammenfassung

In der Arbeit sind zwei Probleme untersucht worden.

1. Nach der Anwendung des Trennungsverfahrens der Variablen ist die Induktivität der Nutstreuung mittels eines elliptischen Querschnitts bestimmt worden. Die erhaltenen Ergebnisse sind zur Berechnung der in der Praxis auftretenden Induktivität ausgewertet worden.

2. Es ist die variable Methode der Induktivitätsberechnung der Nutstreuung dargestellt worden. Diese Methode hat es ermöglicht, die Induktivität der Streuung einer rechteckigen Nut in diesen Fällen zu bestimmen, wenn sich die Trennungsmethode der Variablen als unzuverlässig erwiesen hat, u.a. bei einer Teilauffüllung der Nut, und auch bei bestehender Asymmetrie in der Wicklungsverteilung.

Im weiteren wurden auch die auf die in einer rechteckigen Nut untergebrachte Wicklung einwirkenden Kräfte bestimmt.

Я. ПУРЧЫЊСКИ, Р. СИКОРА

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ И ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА К АНАЛИЗУ ПОЛЯ ПАЗОВОГО РАССЯНИЯ

Резюме

В статье рассмотрены две проблемы.

1. После применения метода Фурье определена индуктивность рассеяния паза имеющего эллиптическое сечение. Полученные результаты применены к расчету индуктивности рассеяния выступающих на практике пазов.

2. Представлен вариационный метод расчета индуктивности пазового рассеяния. Этот метод сделал возможным расчет индуктивности рассеяния прямоугольного паза в тех случаях, когда метод Фурье не давал результатов, например в случае частичного заполнения паза и асимметричного расположения обмотки.

В статье определены также силы действующие на обмотки уложенные в прямоугольном пазе.

Zniekształcenia sygnałów o wąskopasmowej, sinusoidalnej modulacji w liniowych obwodach selektywnych

ROMUALD NOWAK (WARSZAWA)

Instytut Radioelektroniki Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 27.4.1974

Asymetria charakterystyk częstotliwościowych obwodów selektywnych powoduje, nawet przy dostrojeniu, powstanie zniekształceń amplitudy i fazy sygnałów zmodulowanych. W artykule wyprowadzono wzory ogólnie, opisujące chwilowe wartości amplitudy oraz odchyłek fazy i częstotliwości odpowiedzi obwodu selektywnego na wymuszenie o sinusoidalnej modulacji amplitudy lub o sinusoidalnej, wąskopasmowej modulacji kąta.

Dla najczęściej stosowanych w radiotechnice obwodów selektywnych, jak zespół niezależnych obwodów rezonansowych i dwa obwody sprzężone, dostrojonych do częstotliwości nośnej, podano odpowiednie wzory obliczeniowe. Szczegółowo przedyskutowano przebiegi odchyłek fazy i częstotliwości odpowiedzi pojedynczego, dostrojonego obwodu rezonansowego na wymuszenie o sinusoidalnej modulacji amplitudy.

Wprowadzony w artykule wskaźnik asymetrii, określony dla danego obwodu przez jego charakterystykę przenoszenia, stanowi w praktyce dogodną miarę wprowadzanych przez obwód zniekształceń. Przedstawione wyniki mogą znaleźć zastosowanie przy projektowaniu odbiorników częstotliwości wzorcowej, której źródłem jest częstotliwość nośna sygnału radiofonicznego. Mogą być one również użyteczne przy określaniu błędów w układach pomiarowych, wykorzystujących sygnały o wąskopasmowej modulacji kąta.

1. WSTĘP

Charakterystyka przenoszenia (transmitancja) liniowego obwodu selektywnego:

$$K(j\omega) = K(\omega)e^{j\psi(\omega)} \quad (1)$$

przyjmuje dla pewnej pulsacji ω_r wartość $K_r = K(\omega_r)$, równą ekstremalnej wartości modułu tej charakterystyki. Typowy kształt zależności modułu i argumentu charakterystyki przenoszenia od pulsacji przedstawiono na rys. 1.

Gdyby moduł charakterystyki (1) był parzystą a argument nieparzystą funkcją odstrojenia od pulsacji ω_r , tzn. gdyby spełnione były warunki zwane dalej umownie warunkami symetrii:

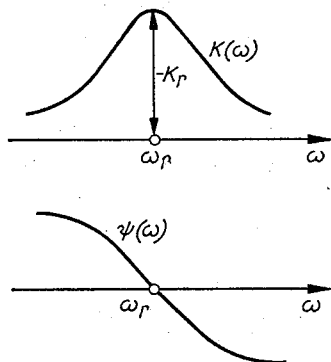
$$\begin{aligned} K(\omega - \omega_r) &= K(\omega_r - \omega), \\ \psi(\omega - \omega_r) &= -\psi(\omega_r - \omega) \end{aligned} \quad (2)$$

oraz gdyby fala nośna sygnału zmodulowanego o pulsacji ω spełniała warunek dostrojenia:

$$\omega_n = \omega_r, \quad (3)$$

to obwód taki wprowadzałby dla przenieszonego za pomocą modulacji sygnału tylko zniekształcenia wynikające z ograniczenia pasma.

Naruszenie któregośkolwiek z warunków, symetrii (2) lub dostrojenia (3), powoduje powstanie zniekształceń nieliniowych przenieszonego sygnału (tzn. obwiedni amplitudy



Rys. 1. Zależność modułu K i argumentu ψ od pulsacji dla typowej charakterystyki przenieszenia obwodu selektywnego

dla sygnałów o modulacji amplitudy i odchyłki fazy lub częstotliwości dla sygnałów o modulacji kąta) oraz zniekształconej modulacji wtórnej (tzn. kąta dla sygnałów o modulacji amplitudy i amplitudy dla sygnałów o modulacji kąta).

Zniekształcenia sygnału modulującego oraz modulacja wtórna, występujące w obwodzie niedostrojonym, były już wielokrotnie analizowane w literaturze. Np. zniekształcenia nieliniowe obwiedni szczegółowo opracowali Egidi i Oberto [1], [2], [3], a Tiewierowski [4] próbował ująć w sposób uproszczony wtórną modulację kąta zachodzącą przy rozstrojeniu obwodu. Natomiast problem wtórnej modulacji kąta w obwodzie dostrojonym nie był dotychczas — o ile autorowi wiadomo — analizowany.

Tak stan rzeczy był całkowicie usprawiedliwiony, gdyż zniekształcenia i wtórna modulacja, powstające przy obwodzie dostrojonym, nie miały większego znaczenia praktycznego jako efekty pomijalnie małe. Dopiero powszechne wykorzystanie ogólnodostępnych wzorców częstotliwości w postaci częstotliwości nośnych sygnałów o modulowanej amplitudzie nadało tym efektom znaczenie praktyczne. Dotyczy to głównie wtórnej modulacji kąta powiększającej niestabilność częstotliwości odtwarzanego wzorca.

W artykule wyprowadzono, w dogodnej do dalszej analizy formie, wzory ogólne określające chwilowe wartości amplitudy oraz odchyłek fazy i częstotliwości odpowiedzi obwodu selektywnego na wymuszenie o sinusoidalnej modulacji amplitudy. Wzory te stanowiły podstawę wyjściową dla szczegółowej analizy wtórnej modulacji kąta występującej przy dostrojeniu. W analizie tej oparto się na jednym, ogólnym założeniu upraszczającym, iż stosunek częstotliwości modulującej i nośnej jest znacznie mniejszy od jedności. Założenie to jest w sposób niemal doskonały spełnione dla wszystkich sygnałów wąskopasmowych. Na zakończenie wyprowadzono zależności umożliwiające bezpośrednie wykorzystanie poprzednich wyników również do analizy zniekształceń i wtórnej modulacji w przypadku sygnałów o wąskopasmowej, (płytkiej) sinusoidalnej modulacji kąta.

2. ZALEŻNOŚCI OGÓLNE PRZY MODULACJI AMPLITUDY

Chwilową wartość $w(t)$ wymuszenia o sinusoidalnej, liniowej modulacji amplitudy, określa suma trzech składowych — odpowiadających fali nośnej i dwóm wstęgom bocznym:

$$w(t) = W_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) + \frac{1}{2} m W_n \cos[(\omega_n + \Omega_m) t + \varphi_n] + \frac{1}{2} m W_n \cos[(\omega_n - \Omega_m) t + \varphi_n], \quad (4)$$

gdzie: W_n , φ_n , ω_n oraz Ω_m oznaczają odpowiednio amplitudę, fazę początkową i pulsację fali nośnej oraz pulsację przebiegu modulującego, a m oznacza głębokość modulacji amplitudy. W równaniu (4) wybrano początek skali czasu w taki sposób, aby początkowy kąt fazowy kosinusoidalnego przebiegu modulującego był równy zeru.

Chwilową wartość $e(t)$ odpowiedzi obwodu liniowego o charakterystyce przenoszenia (1) na wymuszenie (4) określa suma trzech analogicznych składowych, która może być opisana również w postaci przebiegu wąskopasmowego o zmiennej w czasie amplitudzie $E(t)$ i odchyłce $\varphi(t)$ fazy od fazy fali nośnej:

$$\begin{aligned} e(t) = E(t) \cos[\omega_n t + \varphi_n + \psi(\omega_n) + \varphi(t)] = & W_n K(\omega_n) \cos[\omega_n t + \varphi_n + \psi(\omega_n)] + \\ & + \frac{1}{2} m W_n K(\omega_n + \Omega_m) \cos[(\omega_n + \Omega_m) t + \varphi_n + \psi(\omega_n + \Omega_m)] + \\ & \frac{1}{2} m W_n K(\omega_n - \Omega_m) \cos[(\omega_n - \Omega_m) t + \varphi_n + \psi(\omega_n - \Omega_m)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Zapisując odpowiedź (5) w postaci sygnału analitycznego, a następnie normalizując ten sygnał względem składowej o częstotliwości nośnej¹⁾ otrzymuje się zespoloną funkcję czasu, określającą chwilowe wartości amplitudy $E(t)$ i odchyłki fazy $\varphi(t)$ w postaci:

$$\frac{Et}{E_n} e^{j\varphi(t)} = 1 + g e^{j(\Omega_m t + \Gamma)} + d e^{-j(\Omega_m t + \Delta)} = 1 + m B \cos(\Omega_m t + \beta) + j m A \cos(\Omega_m t + \alpha), \quad (6)$$

gdzie:

$$g = \frac{m}{2} \frac{K(\omega_n + \Omega_m)}{K(\omega_n)}, \quad d = \frac{m}{2} \frac{K(\omega_n - \Omega_m)}{K(\omega_n)} \quad (7)$$

oznaczają stosunki amplitud wstęp bocznych i fali nośnej odpowiedzi $e(t)$, kąty:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \psi(\omega_n + \Omega_m) - \psi(\omega_n), \\ \Delta &= \psi(\omega_n) - \psi(\omega_n - \Omega_m) \end{aligned} \quad (8)$$

oznaczają odpowiednio początkowe kąty fazowe pomiędzy górną wstęgą i falą nośną oraz falą nośną i dolną wstęgą boczną odpowiedzi obwodu, a $E_n = W_n K(\omega_n)$ oznacza

¹⁾ Normalizacja polega na podzieleniu sygnału analitycznego odpowiedzi przez sygnał analityczny ładowej nośnej tej odpowiedzi.

amplitudę składowej nośnej tej odpowiedzi. Natomiast parametry A , B , α i β określone są przez następujące wzory:

$$\begin{aligned} (mA)^2 &= g^2 + d^2 - 2gd \cdot \cos(\Gamma - \Delta), & \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{d \cos \Delta - g \cos \Gamma}{d \sin \Delta - g \sin \Gamma}, \\ (mB)^2 &= g^2 + d^2 + 2gd \cdot \cos(\Gamma - \Delta), & \operatorname{tg} \beta &= \frac{d \sin \Delta + g \sin \Gamma}{d \cos \Delta + g \cos \Gamma}. \end{aligned} \quad (9)$$

Kąt $\Gamma - \Delta = \psi(\omega_n + \Omega_m) + \psi(\omega_n - \Omega_m)$ równa się sumie przesunięć fazowych obu wstęp bocznych, wprowadzonych przez obwód selektywny.

Ponieważ współczynniki g i d , określone wzorami (7), są proporcjonalne do głębokości modulacji m , to jak wynika z zależności (9) parametry A , B , α i β są niezależne od indeksu m . Zależą one tylko od wartości charakterystyki przenoszenia obwodu dla częstotliwości nośnej i częstotliwości obu wstęp bocznych.

Moduł i argument zespolonej funkcji (6) wyznaczają odpowiednio wartości chwilowe unormowanej amplitudy oraz odchyłki fazy odpowiedzi obwodu selektywnego. Wartości te można wyrazić w postaci następujących funkcji pomocniczej zmiennej kątowej:

$$\Theta = \Omega_m t \quad (10)$$

wprowadzonej dla skrócenia zapisu:

$$\left[\frac{E(\Theta)}{E_n} \right]^2 = [1 + mB \cos(\Theta + \beta)]^2 + [mA \cos(\Theta + \alpha)]^2, \quad (11)$$

$$\operatorname{tg} \varphi(\Theta) = \frac{mA \cos(\Theta + \alpha)}{1 + mB \cos(\Theta + \beta)} \cong \varphi(\Theta). \quad (12)$$

Przybliżenie, występujące po prawej stronie zależności (12), jest słuszne gdy $\operatorname{tg} \varphi(\Theta) \ll 1$, który to warunek jest dobrze spełniony w zastosowaniach praktycznych. Obejmują one bowiem wyłącznie przypadki odstrojeń fali nośnej o wartościach nie przekraczających szerokości pasma obwodu selektywnego. W związku z powyższym znacznie upraszcza się wzór na chwilową wartość odchyłki pulsacji $\Omega(t)$ odpowiedzi od pulsacji nośnej, wyznaczony za pomocą pochodnej:

$$\Omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \Omega_m \frac{d\varphi(\Theta)}{d\Theta}. \quad (13)$$

Stąd:

$$\Omega(\Theta) \cong -mA\Omega_m \frac{mB \sin(\alpha - \beta) + \sin(\Theta + \alpha)}{[1 + mB \cos(\Theta + \beta)]^2}. \quad (14)$$

Interpretację geometryczną wprowadzonych wyżej parametrów ujmuje wykres wskazowy zespolonej funkcji (6) przedstawiony na rys. 2. Wykres wykonano dla chwili początkowej $t = 0$, przy założeniu dostrojenia obwodu do fali nośnej. Wykaz o długości d , umieszczony w lewej półpłaszczyźnie rysunku, jest obrazem geometrycznym wielkości sprzężonej z unormowaną składową funkcji (6), odpowiadającą dolnej wstędze bocznej odpowiedzi. Odchyłka (14) wyznacza na tym rysunku chwilową wartość prędkości kątowej wskazu wypadkowego.

wości. Jak już wspomniano wyżej, wartość wskaźnika asymetrii zależy tylko od kształtu charakterystyki przenoszenia obwodu selektywnego — wskaźnik ten jest więc parametrem charakterystycznym obwodu i jak się dalej okaże może być, przy dostrojeniu obwodu, łatwo określony w postaci funkcji stosunku częstotliwości modulującej i nośnej.

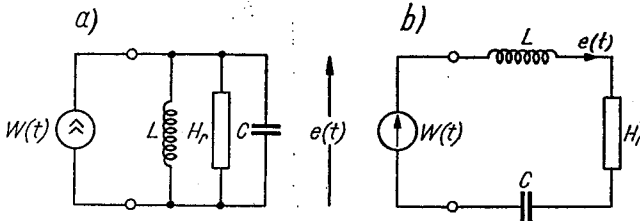
Wspomniane we wstępie prace Egidi i Oberto zawierają tablice [3], pozwalające wyznaczyć nie tylko wartości chwilowe obwiedni (24 punkty na okres), lecz również zawartość dwunastu pierwszych harmonicznych tej obwiedni. Tablice podają powyższe dane dla 6270 kombinacji wartości trzech parametrów: $\frac{g-d}{g+d}$, $\frac{1}{g+d}$ i $\frac{\Gamma+D}{2}$. W ten sposób zagadnienie zniekształceń obwiedni zostało praktycznie zamknięte i w dalszym ciągu tego artykułu będzie omawiana głównie wtórna modulacja kąta.

3. PRZYPADEK POJEDYNCZEGO OBWODU REZONANSOWEGO

3.1. Obwód o rezonansowej charakterystyce przenoszenia

Dla dualnych obwodów rezonansowych, przedstawionych na rys. 3, imitancja obwodu H , równa odwrotności charakterystyki przenoszenia, określona jest wzorem:

$$\frac{H(jq)}{H_r} = 1 + jq = \frac{K_r}{K(jq)} \quad (17)$$



Rys. 3. Schematy prostych obwodów rezonansowych: a — równoległego ze źródłem prądowym, b — szeregowego ze źródłem napięciowym

Dla obwodu równoległego z rys. 3a — konduktancja rezonansowa $H_r = \omega_r C Q$, a dla obwodu szeregowego z rys. 3b — rezystancja rezonansowa $H_r = \omega_r L \cdot \frac{1}{Q}$, gdzie Q — dobroć obwodu i $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — pulsacja rezonansowa. We wzorze (17) wprowadzono

unormowane rozstrojenie obwodu $q = Q \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right)^2$. Na rys. 3 chwilowa wartość wy-

²⁾ Przy analizie obwodów selektywnych, dla niewielkich odstrożeń, powszechnie stosuje się założenia upraszczające: $\frac{\omega}{\omega_r} \cong 1$ i $q \cong 2Q \frac{\omega - \omega_r}{\omega_r}$ które przeważnie symetryzują całkowicie charakterystykę przenoszenia. Dla dostrojonych obwodów, przy takich założeniach, zniekształcenia i wtórna modulacja nie zostają objęte analizą.

szczenia $w(t)$ reprezentowana jest dla obwodu równoległego przez źródło prądowe, a dla obwodu szeregowego przez źródło napięciowe. Odpowiednio, chwilową wartość odpowiedzi $e(t)$ oznaczono na rys. 3a jako napięcie na obwodzie i na rys. 3b jako prąd w obwodzie. Wartości poszczególnych parametrów znormalizowanej funkcji (6) są w tym przypadku określone przez wzory:

$$E_n = \frac{W_n}{H_r \cdot \sqrt{1+q_n^2}}, \quad g = \frac{m}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+q_n^2}{1+q_g^2}}, \quad d = \frac{m}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+q_n^2}{1+q_d^2}},$$

$$\Gamma = \arctg q_n - \arctg q_g, \quad \Delta = \arctg q_d - \arctg q_n, \quad (18)$$

gdzie:

$$q_n = Q \left(\frac{\omega_n}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega_n} \right), \quad q_g = Q \left(\frac{\omega_n + \Omega_m}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega_n + \Omega_m} \right), \quad q_d = Q \left(\frac{\omega_n - \Omega_m}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega_n - \Omega_m} \right)$$

oznaczają odpowiednio unormowane rozstrojenia częstotliwości nośnej i górnej oraz dolnej wstęgi bocznej.

Na podstawie wzorów (18) można wyznaczyć parametry A , B , α i β oraz funkcje określające chwilowe wartości amplitudy, odchyłek fazy i częstotliwości dla dowolnego odstrojenia obwodu od częstotliwości nośnej. Otrzymane w ten sposób funkcje są bardzo złożone i mało przydatne w zastosowaniach praktycznych, w których obwód pracuje w warunkach dostrojenia.

Przy dostrojeniu $q_n = 0$ i $E_n = \frac{W_n}{H_r}$ oraz:

$$A = -\frac{1}{2} \frac{q_g + q_d}{\sqrt{(1+q_g^2)(1+q_d^2)}}, \quad \tg \alpha = \frac{q_d - q_g}{1 + q_g q_d} = \tg(\Gamma + \Delta),$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{(q_d - q_g)^2 + 4}{(1+q_g^2)(1+q_d^2)}}, \quad \tg \beta = \frac{(q_d - q_g)(1 - q_g q_d)}{q_g^2 + q_d^2 + 2}.$$

Gdyby imitancja obwodu spełniała warunki (2), to przy dostrojeniu suma $q_d + q_g$ byłaby równa zero i wartość wskaźnika asymetrii A byłaby również zerowa. W rzeczywistości:

$$q_g + q_d = -2Q \frac{v^2}{1-v^2} < 0, \quad (20)$$

gdzie

$$v = \frac{\Omega_m}{\omega_n} = \frac{\Omega_m}{\omega_r} \quad (21)$$

oznacza stosunek częstotliwości modulującej i nośnej, równy przy dostrojeniu stosunkowi częstotliwości modulującej i rezonansowej obwodu.

Na podstawie zależności (20) otrzymuje się następujące nierówności:

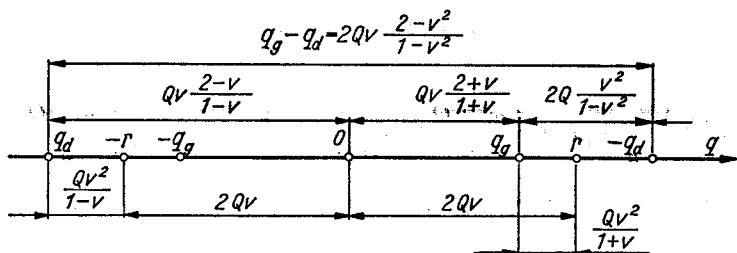
$$|q_d| > |q_g|, \quad g > d, \quad |A| > |\Gamma|. \quad (22)$$

Ponieważ ponadto kąty Δ i Γ przybierają wartości ujemne, wykres wskazowy dla omawianego przypadku byłby lustrzanym odbiciem wykresu z rys. 2.

W praktyce częstotliwość sygnału modulującego jest zawsze znacznie mniejsza od częstotliwości fali nośnej. Spełnienie warunku:

$$v = \frac{\Omega_m}{\omega_n} = \frac{\Omega_m}{\omega_r} \ll 1 \quad (23)$$

pozwala, po dokładnym obliczeniu sumy $q_g + q_d$ według wzoru (20), na dalsze uproszczenie wzorów (19). Uproszczenie polega na wprowadzeniu przybliżonej wartości modułu unor-



Rys. 4. Rozkład charakterystycznych wartości unormowanego rozstrojenia q na osi liczbowej

mowanego rozstrojenia wstęp bocznych względem częstotliwości rezonansowej, równej przy dostrojeniu częstotliwości nośnej. Rozstrojenie to, zwane dalej w skrócie umownie *rozstrojeniem wstęgowym*, określone jest w sposób następujący:

$$r = \operatorname{tg} \varrho = 2Qv = 2Q \frac{\Omega_m}{\omega_n}. \quad (24)$$

Kąt $\varrho = \operatorname{arctg} r$ jest miarą kątową rozstrojenia wstęgowego³⁾.

Na rys. 4 przedstawiono rozkład wartości r , q_d i q_g na osi liczbowej zmiennej q , co pozwala na ocenę następujących przybliżeń:

$$\begin{aligned} q_g + q_d &= -2Q \frac{v^2}{1-v^2} \cong -2Qv^2 = -\frac{r^2}{2Q}, & q_g &= Qv \frac{2+v}{1+v} \cong r, \\ q_g - q_d &= 2Qv \frac{2-v^2}{1-v^2} \cong 2r, & q_d &= Qv \frac{v-2}{1-v} \cong -r, \\ q_g q_d &= -Q^2 v^2 \frac{4-v^2}{1-v^2} \cong -r^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Przybliżenia (25) sprowadzają wzory (19) do bardzo prostej postaci:

$$\begin{aligned} A &\cong \frac{1}{4Q} \frac{r^2}{1+r^2} = \frac{1}{4Q} \sin^2 \varrho, & \alpha &\cong -\operatorname{arctg} \frac{2r}{1-r^2} = -2\varrho, \\ B &\cong \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} = \cos \varrho, & \beta &\cong -\operatorname{arctg} r = -\varrho. \end{aligned} \quad (26)$$

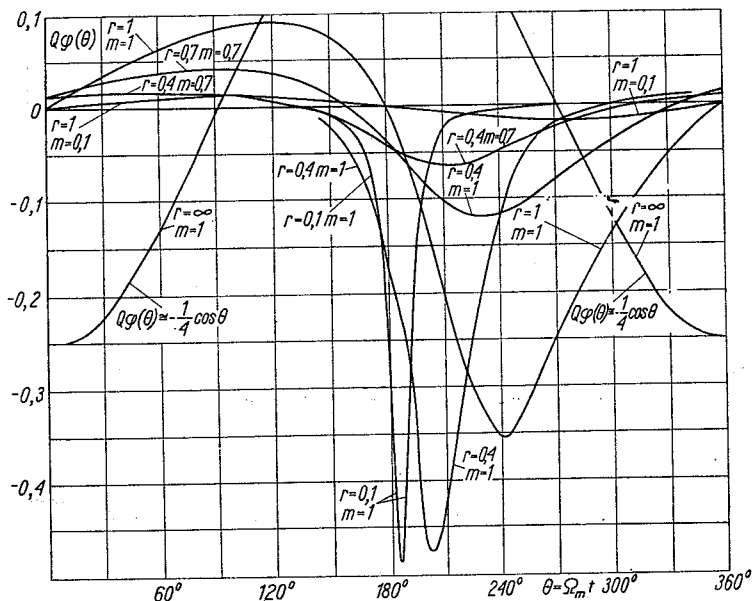
³⁾ Kąt ten równa się wartości bezwzględnej przesunięcia fazy każdej ze wstęp bocznych względem nośnej, wprowadzanego przez pojedynczy dostrojony obwód rezonansowy o symetrycznej charakterystyce.

Odpowiednio znormalizowane funkcje $E(\Theta)$, $\varphi(\Theta)$ i $\Omega(\Theta)$, po uwzględnieniu zależności (26), określone są wzorami:

$$\left[\frac{E(\Theta)}{E_n} \right]^2 \cong [1 + m \cos \varrho \cdot \cos(\Theta - \varrho)]^2 + \left[\frac{m}{4Q} \sin^2 \varrho \cdot \cos(\Theta - 2\varrho) \right]^2, \quad (27)$$

$$\varphi(\Theta) \cong \frac{m}{4} \frac{\sin^2 \varrho \cdot \cos(\Theta - 2\varrho)}{1 + m \cos \varrho \cdot \cos(\Theta - \varrho)}, \quad (28)$$

$$Q^2 \frac{\Omega(\Theta)}{\omega_n} \cong \frac{m}{8} \frac{\sin^3 \varrho [\sin \varrho \cos \varrho - \sin(\Theta - 2\varrho)]}{\cos \varrho [1 + m \cos \varrho \cdot \cos(\Theta - \varrho)]^2}. \quad (29)$$



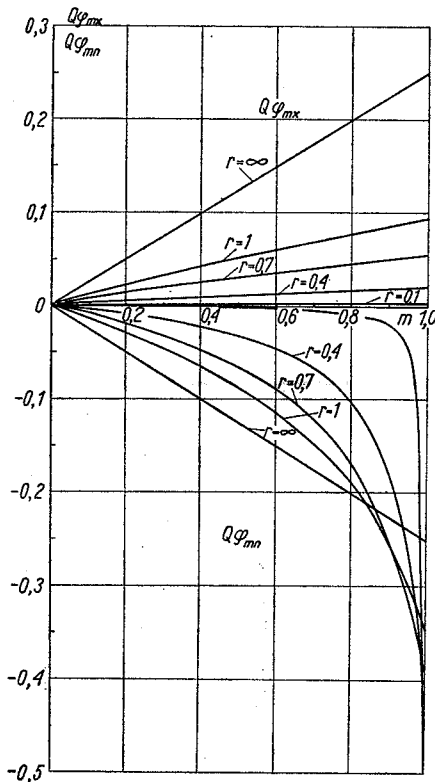
Rys. 5. Przebiegi unormowanej wartości chwilowej odchyłki fazy odpowiedzi pojedynczego, dostrojonego obwodu rezonansowego z rys. 3

Wykresy funkcji (28) i (29) dla wybranych wartości parametrów m i $r = \tan \varrho$ przedstawiono na rysunkach 5 i 6. Opisywane przez te funkcje chwilowe wartości odchyłek fazy i częstotliwości są periodycznymi funkcjami czasu z okresem równym okresowi przebiegu modulującego $\frac{2\pi}{\Omega_m}$. Zniekształcenia obu przebiegów są tym większe im większa jest wartość głębokości modulacji m i mniejsza wartość rozstrojenia wstęgowego r , proporcjonalnego do częstotliwości sygnału modulującego. Obie krzywe są niesymetryczne względem osi czasu (lub zmiennej pomocniczej Θ). Ekstremalne odchylenia w kierunku ujemnym są większe niż w kierunku dodatnim. Tylko przy $r \rightarrow \infty$ lub $m \rightarrow 0$ kształt krzywych zbliża się do sinusoidalnego. Pomimo asymetrii, odchyłki fazy i częstotliwości są przebiegami o zerowych wartościach średnich. Międzyszczytowe wartości obu odchyłek rosną wraz ze wzrostem wartości iloczynów mr lub mA . (Jak wynika z równań (26) wartość wskaźnika asymetrii rośnie monotonicznie ze wzrostem rozstrojenia wstęgowego — por. rys. 12).

Funkcje aproksymujące unormowane wartości chwilowe amplitudy oraz częstotliwości odpowiedzi pojedynczego, dostrojonego obwodu rezonansowego (z rys. 3) przy różnych założeniach upraszczających

Założenia upraszczające	$\frac{E(\theta)}{E_n}$	$Q(\varphi(\theta))$	$Q^2 \frac{\Omega(\theta)}{\omega_n}$
$r \gg 1$ ($\varphi \ll 1$)	$1 + \frac{1}{2} \left[\frac{m}{4Q} \cos(\theta - 2\varrho) \right]^2 \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{m}{4Q} \cos\theta \right)^2$	$\frac{m}{4} \cos(\theta - 2\varrho) \approx -\frac{m}{4} \cos\theta$	$-\frac{mr}{8} \sin(\theta - 2\varrho) \approx \frac{mr}{8} \sin\theta$
$m \ll 1$	$1 + m \cos\varrho \cdot \cos(\theta - \varrho)$	$\frac{m}{4} \sin^2\varrho \cdot \cos(\theta - 2\varrho)$	$-\frac{m}{8} \frac{\sin^3\varrho}{\cos\varrho} \sin(\theta - 2\varrho)$
$r \gg 1$ $m \ll 1$ ($\varphi \ll 1$)	$1 + \frac{m}{r} \cos(\theta - \varrho) \approx 1 + \frac{m}{r} \sin\theta$	$\frac{m}{4} \cos(\theta - 2\varrho) \approx -\frac{m}{4} \cos\theta$	$\frac{mr}{8} \sin(\theta - 2\varrho) \approx \frac{mr}{8} \sin\theta$
$r \ll 1$ $m \ll 1$	$1 + m \cos(\theta - \varrho) \approx 1 + m \cos\theta$	$\frac{mr^2}{4} \cos(\theta - 2\varrho) \approx \frac{mr^2}{4} \cos\theta$	$-\frac{mr^3}{8} \sin(\theta - 2\varrho) \approx -\frac{mr^3}{8} \sin\theta$
$r \ll 1$ $m < 1$	$1 + m \cos(\theta - \varrho) \approx 1 + m \cos\theta$	$\frac{mr^2}{4} \frac{\cos(\theta - 2\varrho)}{1 + m \cos(\theta - \varrho)} \approx \frac{1}{4} \frac{mr^2 \cos\theta}{1 + m \cos\theta}$	$-\frac{mr^3}{8} \frac{\sin(\theta - 2\varrho)}{[1 + m \cos(\theta - \varrho)]^2} \approx -\frac{1}{8} \frac{mr^3 \sin\theta}{(1 + m \cos\theta)^2}$
$r \ll 1$ $m \approx 1$	$1 + \cos(\theta - \varrho) \approx 1 + \cos\theta$	$\frac{r^2}{2} \frac{\cos(\theta - 2\varrho)}{2 + (2 - r^2) \cos(\theta - \varrho)}$	$-\frac{r^3}{2} \frac{\sin(\theta - 2\varrho)}{[2 + (2 - r^2) \cos(\theta - \varrho)]^2}$

$$r = 2Q \frac{\Omega_m}{\omega_n} = \text{tg } \varrho$$



Rys. 7. Zależność ekstremalnych wartości odchyłki fazy od głębokości modulacji m i rozstrojenia wstęgowego r dla odpowiedzi pojedynczego, dostrojonego obwodu rezonansowego z rys. 3

Funkcja (28), opisująca odchyłki fazy, osiąga wartości ekstremalne dla argumentu $\Theta = \Theta_e$, wyznaczonego przez warunek zerowania się pochodnej, tzn. przez miejsca zerowe licznika funkcji (29):

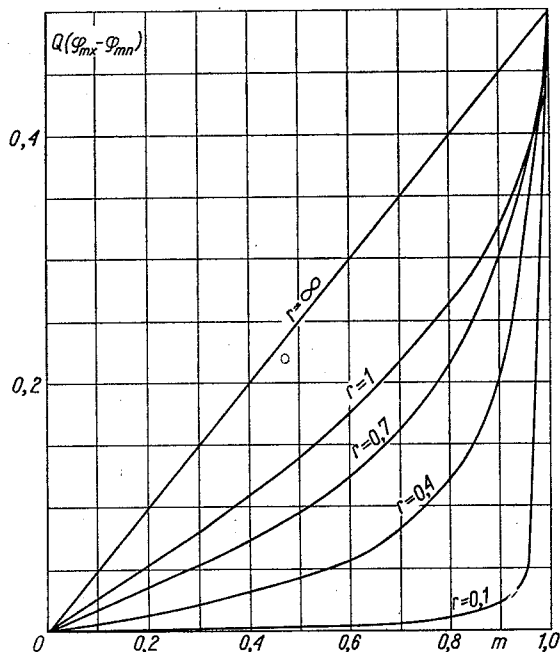
$$\sin(\Theta_e - 2\varrho) = m \sin \varrho \cdot \cos \varrho = \frac{m}{2} \sin 2\varrho. \quad (30)$$

Przy $\Theta_e = \arcsin\left(\frac{m}{2} \sin 2\varrho\right) + 2\varrho$ odchyłka fazy osiąga wartość maksymalną φ_{mx} , a przy $\Theta_e = \pi - \arcsin\left(\frac{m}{2} \sin 2\varrho\right) + 2\varrho$ – wartość minimalną φ_{mn} . Obie te wartości dają się obliczyć na podstawie zależności:

$$Q\varphi_{mx} = \frac{mr^2}{4} \frac{1}{z_1 + m}, \quad Q\varphi_{mn} = -\frac{mr^2}{4} \frac{1}{z_1 - m}, \quad (31)$$

gdzie

$$z_1 = \sqrt{(1+r^2)^2 - (mr)^2} = \cos^{-2}\varrho \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4}m^2 \sin^2 2\varrho} \quad (32)$$



Rys. 8. Zależność międzyszczytowych wartości odchyłki fazy od głębokości modulacji m i rozstrojenia wstęgowego r dla odpowiedzi pojedynczego, dostrojonego obwodu rezonansowego z rys. 3

pełni rolę zmiennej pomocniczej wprowadzonej dla skrócenia zapisu. Natomiast wartość międzyszczytowa odchyłki fazy określa wzór:

$$Q(\varphi_{mx} - \varphi_{mn}) = \frac{mr^2}{2(1+r^2)} \frac{z_1}{1+r^2-m^2}. \quad (33)$$

Zależności (31) i (33), traktowane jako funkcje dwóch zmiennych r i m , zostały wykreślone na rysunkach 7 i 8. Jak wynika z tych rysunków, w przedziałach $(0 \leq m \leq 1)$ i $(0 \leq r \leq \infty)$, wartość międzyszczytowa odchyłki fazy spełnia warunek:

$$\varphi_{mx} - \varphi_{mn} \leq \frac{1}{2Q}, \quad (34)$$

bardzo dogodny dla szacunkowych obliczeń.

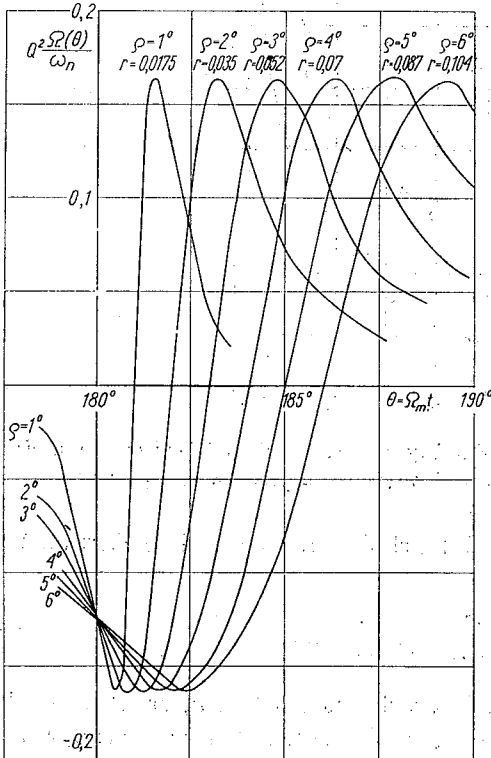
W celu wyznaczenia ekstremalnych wartości odchyłki częstotliwości należy obliczyć drugą pochodną odchyłki fazy:

$$\frac{4Q}{m \sin^2 \varrho} \frac{d^2 \varphi(\Theta)}{d\Theta^2} \cong \frac{2m \cos \varrho \cdot \sin(\Theta - \varrho) [m \cos \varrho \cdot \sin \varrho - \sin(\Theta - 2\varrho)]}{[1 + m \cos \varrho \cdot \cos(\Theta - \varrho)]^3} - \frac{\cos(\Theta - 2\varrho) [1 + m \cos \varrho \cdot \cos(\Theta - \varrho)]}{[1 + m \cos \varrho \cdot \cos(\Theta - \varrho)]^3}. \quad (35)$$

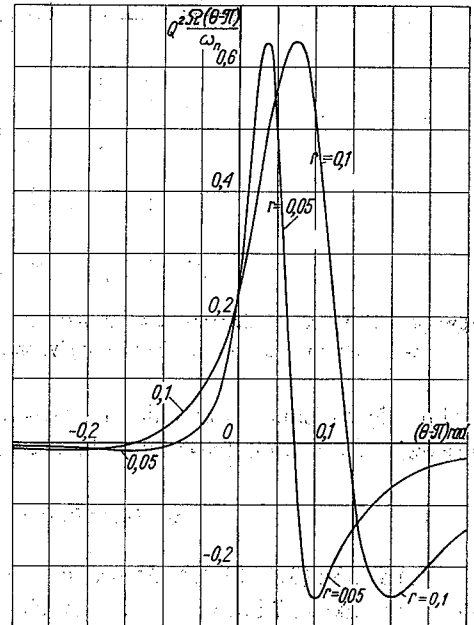
Określenie wartości zmiennej pomocniczej Θ , przy której następuje zerowanie się licznika pochodnej (35) wymaga rozwiązania pełnego równania trygonometrycznego czwartego stopnia. Z tego względu dokładne wyznaczenie wartości ekstremalnych odchyłki częstotli-

wości byłyby mało przydatne do szacunkowych obliczeń praktycznych. Dla uzyskania przybliżonych, lecz możliwie prostych i łatwych do interpretacji wyników, trzeba posłużyć się funkcjami asymptotycznymi z tablicy 2. Z postaci wyrażeń zamieszczonych w ostatniej kolumnie tej tablicy można bezpośrednio wyznaczyć wzory⁴⁾ na amplitudę odchyłki częstotliwości za wyjątkiem przypadków gdy $r \ll 1$ przy $m < 1$ i $m = 1$.

a)



b)



Rys. 9. Przebiegi unormowanej wartości chwilowej odchyłki częstotliwości, przy stu procentowej głębokości modulacji i małych wartościach rozstrojenia wstęgowego, dla odpowiedzi pojedynczych, dostrojonych obwodów rezonansowych: a — z rys. 3, b — z rys. 10

Przypadek $r \ll 1$ przy $m = 1$ daje się również rozwiązać z dobrym przybliżeniem. Jak wynika z rys. 6 i odpowiadającej temu przypadkowi funkcji aproksymującej, oba ekstrema zachodzą przy wartościach zmiennej pomocniczej θ tylko nieznacznie różniącej się od π . Rozwijając funkcje trygonometryczne, występujące w równaniu (29), na szeregi w otoczeniu punktów $\varrho = 0$ i $\theta = \pi$ oraz pomijając wyrazy o wyższych potęgach, otrzymuje się następującą funkcję aproksymującą

$$Q^2 \frac{\Omega(\theta - \pi)}{\omega_n} \cong \frac{r^3}{2} \frac{(\theta - \pi) - r}{\langle r^2 + [(\theta - \pi) - r]^2 \rangle}, \quad (36)$$

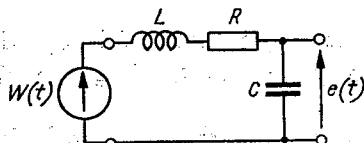
⁴⁾ Wzory te zostały zebrane w tablicy 4.

opisującą unormowaną odchyłkę pulsacji przy założeniach: $\rho \cong r \ll 1$, $m = 1$ i $\Theta \cong \pi$. Wyniki obliczeń pokazują, że wartości ekstremalne funkcji (36) wynoszą w przybliżeniu $\pm 0,16$, a maksimum i minimum tej funkcji zachodzą przy wartościach argumentu $(\Theta - \pi)$ równych odpowiednio: $r\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ i $r\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Na rys. 9a zamieszczono rodzinę krzywych obliczonych w oparciu o funkcję (29) przy $m = 1$ i $r \leq 0,105$, w otoczeniu punktu $\Theta = \pi$. Wyniki obliczeń są zgodne z przewidywanymi na podstawie funkcji aproksymującej (36). Ekstrema odchyłki częstotliwości mają równe wartości bezwzględne — niezależne, w rozpatrywanym obszarze, od wartości parametru r . Jak wynika z powyższego, obszar $r \cong 0$ i $m = 1$ jest obszarem granicznym, w którym do oceny omawianych efektów nie wystarcza znajomość tylko jednego parametru — wskaźnika asymetrii A . Z uwagi na zerowanie się mianownika w funkcjach odchyłek fazy i częstotliwości istotną rolę zaczyna w tym zakresie odgrywać również parametr B . W zastosowaniach praktycznych jednak szczytowe wartości głębokości modulacji nie występują nigdy przy minimalnej wartości częstotliwości modułującej.

3.2. Obwód o przepięciowej charakterystyce przenoszenia

Omówiony w p. 3.1 przypadek obwodu o rezonansowej charakterystyce przenoszenia (17) określa w zasadzie dolną granicę zniekształceń i wtórnej modulacji w jednorezan-



Rys. 10. Schemat obwodu rezonansowego o przepięciowej charakterystyce przenoszenia

sowych obwodach selektywnych. Przy innych konfiguracjach obwodu rezonansowego odstępstwa charakterystyki przenoszenia od warunków symetrii (2) są jeszcze większe, co powoduje, że wskaźnik asymetrii i zniekształcenia oraz wtórna modulacja są również większe.

Schemat jednego z takich obwodów, o charakterystyce przenoszenia określonej przez przepięcie na pojemności obwodu szeregowego, przedstawia rys. 10. (Wymuszenie ma postać źródła napięciowego a odpowiedzią jest napięcie na pojemności obwodu). Charakterystyka przenoszenia obwodu z rys. 10 ma postać następującą:

$$\frac{K(jq)}{K_r} = \frac{\omega_r}{\omega} \frac{1}{1 + jq} \quad (37)$$

Odstępstwa charakterystyki (37) od warunków (2) są łatwo zauważalne. Jak wiadomo, maksimum modułu tej charakterystyki występuje przy pulsacji ω_q , gdzie

$$\omega_q = \omega_r \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad (38)$$

ma wartość nieco mniejszą od pulsacji rezonansowej. Argument charakterystyki (38) jest taki sam jak charakterystyki (17), natomiast moduł zostaje powiększony w stosunku $\frac{\omega_r}{\omega}$.

Przy dostrojeniu częstotliwości nośnej do rezonansowej obwodu można stosunek ten zastąpić ułamkiem:

$$\frac{\omega_r}{\omega} = \frac{1}{1 \pm v}, \quad (39)$$

gdzie znak plus odnosi się do górnej, a znak minus do dolnej wstęgi bocznej. Biorąc pod uwagę, że $v = \frac{r}{2Q}$ oraz postępując analogicznie jak w p. 3.1, otrzymuje się dla dostrojenia (3) wzory określające parametry A , B , α i β zamieszczone w piątym wierszu tablicy 3. Asymptotyczne przybliżenia amplitud odchyłek fazy i częstotliwości dla omawianego przypadku podaje piąty wiersz tablicy 4.

Zależność wskaźnika asymetrii obwodu przepięciowego od rozstrojenia wstęgowego przedstawia na rys. 12 krzywa oznaczona napisem „przepięcie”. Jak wynika z tego rysunku, wskaźnik asymetrii obwodu przepięciowego jest zawsze większy od wskaźnika obwodu z rys. 3 (określonego przez krzywą oznaczoną „ $p = 1$ ”). Oba wskaźniki dążą do wspólnej asymptoty o wartości $\frac{1}{4Q}$, lecz wskaźnik dla przepięcia osiągamaksimum przy $r = r_A = \sqrt{2}$.

Funkcja aproksymująca odchyłkę częstotliwości odpowiedzi obwodu przepięciowego w otoczeniu punktu $\Theta = \pi$, przy $m = 1$, $r \cong 0$ i $\omega_n = \omega_r$ określona jest przez zależność:

$$Q^2 \frac{\Omega(\Theta - \pi)}{\omega_n} \cong -\frac{r^2}{2} \frac{(\Theta - \pi)^2 - 2r^2}{[(\Theta - \pi) - r]^2 + r^2}, \quad (40)$$

której wykresy przedstawiono na rys. 9b. Funkcja (40) wykazuje trzy ekstrema o wartościach $-0,25$, $+0,635$ i $-0,012$ dla argumentów równych odpowiednio: $2r$, $(\sqrt{3}-1)r \cong 0,73r$ i $-(\sqrt{3}+1)r \cong -2,73r$. Jak wynika z powyższego maksymalne odchyłki częstotliwości w kierunkach dodatnim i ujemnym mają różne wartości. Unormowana wartość międzyszczytowa odchyłki równa $0,885$ jest prawie trzykrotnie większa od analogicznej wartości dla pojedynczego obwodu o charakterystyce rezonansowej. Minimum funkcji (40), występujące dla $\Theta - \pi \cong -2,73r$, powoduje tylko dodatkowe odkształcenie przebiegu.

Dla rozstrojeń wstęgowych o wartościach mniejszych od $\sqrt{2}$, odstępstwa charakterystyki przenoszenia (37) od warunków symetrii są najbardziej widoczne, ponieważ przy małych wartościach r obie wstęgi boczne wypadają na tym samym, opadającym zboczku modułu tej charakterystyki. Można by się było spodziewać, że przy dostrojeniu fali nośnej do częstotliwości ω_a , wyznaczającej wierzchołek modułu charakterystyki, zniekształcenia odpowiedzi obwodu będą odpowiednio mniejsze. Taki sposób dostrojenia powinien poprawić symetrię amplitudową, przy nieznacznym tylko pogorszeniu asymetrii fazowej. Jest on zresztą powszechnie stosowany w zastosowaniach praktycznych, ponieważ umożli-

wia posługiwanie się prostym wskaźnikiem rezonansu w postaci woltomierza dołączonego do kondensatora obwodu.

Obliczone na podstawie wzorów ogólnych (18) wyrażenie określające wskaźnik asymetrii dla warunku

$$\omega_n = \omega_q, \quad (41)$$

przy dodatkowych założeniach upraszczających:

$$q_n^2 = \frac{1}{4Q^2} \ll 1, \quad \frac{\omega_r}{\omega_q} \cong 1, \quad v^2 \ll 2v, \quad \frac{r^2}{Q} \ll (1+r^2)^2, \quad (42)$$

ma postać następującą:

$$A \cong \frac{2+r^2}{4Q(1+r^2)}. \quad (43)$$

Krzywa $QA(r)$, dla tego przypadku, byłaby krzywą monotonicznie malejącą od wartości 0,5 przy $r = 0$, do wartości asymptotycznej 0,25 przy $r \rightarrow \infty$. Porównując powyższy wynik z wykresami krzywych $QA(r)$, zamieszczonych na rys. 12, łatwo zauważyć, że wartość wskaźnika (43) jest zawsze większa od odpowiednich wartości nie tylko dla obwodu z rys. 3, lecz również dla dostrojonego obwodu z rys. 10. Wynika stąd wniosek ogólny, iż zniekształcenia i wtórna modulacja odpowiedzi obwodu o charakterystyce przepięciowej będą ogólnie większe niż obwodu o charakterystyce rezonansowej.

Przypadek rozstrojonego obwodu przepięciowego analizował Tiewierowski [4]. Posługując się przybliżającymi założeniami, $\omega \cong \omega_r \cong \omega_o$, gdzie $\omega_o = \omega_r \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}$ — pulsacja drgań własnych obwodu, wyznaczył ekstremalną wartość dewiacji fazy

$$\Delta\varphi_{mx} = mQ \frac{|\omega_n - \omega_o|}{\omega_o}, \quad (44)$$

zachodzącą przy odstrojeniu:

$$(\omega_n - \omega_o)^2 = \Omega_m^2 - \frac{\omega_r^2}{4Q^2}. \quad (45)$$

Przy wspomnianych wyżej założeniach upraszczających, symetryzujących charakterystykę przenoszenia i utożsamiających częstotliwości charakterystyczne obwodu, otrzymane przez Tiewierowskiego wyniki są bardzo przybliżone a proponowana przez niego metoda nie może być wykorzystana do analizy wtórnej modulacji przy dostrojeniu.

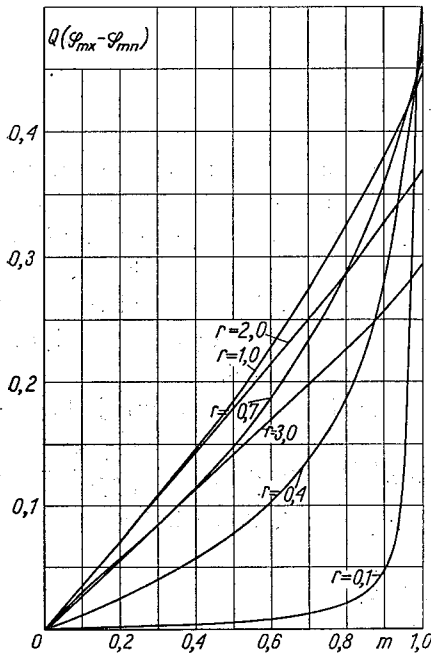
Analizując charakterystyki przenoszenia jednorezonansowych obwodów selektywnych o innych schematach zastępczych obwodu rezonansowego, jak np. obwód równoległy ze stratami skupionymi w gałęzi indukcyjnej, czy obwód szeregowy ze stratnym kondensatorem, można stwierdzić, że odstępstwa od warunków symetrii są dla tych obwodów również większe niż dla obwodu z rys. 3. Obwód selektywny o rezonansowej charakterystyce przenoszenia, zapewnia więc najmniejsze z możliwych zniekształcenia i wtórną modulację kąta dla sygnałów o modulowanej amplitudzie.

4. WIELOREZONANSOWE OBWODY SELEKTYWNE

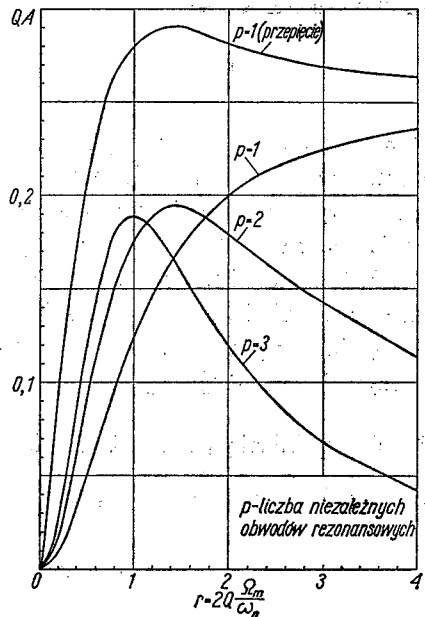
4.1. Obwody selektywne z niezależnymi obwodami rezonansowymi

Charakterystyka przenoszenia czwórnik, zawierającego p niezależnych, identycznych obwodów rezonansowych, pobudzanych zgodnie z rys. 3, określona jest równaniem:

$$\frac{K(jq)}{K_r} = \frac{1}{(1+jq)^p} \quad (46)$$



Rys. 11. Zależność międzyszczytowych wartości odchyłki fazy od głębokości modulacji m i rozstrojenia wstęgowego r dla odpowiedzi obwodu selektywnego, składającego się z dwóch niezależnych, dostrojonych obwodów rezonansowych, pobudzanych zgodnie ze schematem z rys. 3



Rys. 12. Zależność wskaźnika asymetrii od rozstrojenia wstęgowego r dla obwodów selektywnych zawierających p niezależnych, identycznych dostrojonych obwodów rezonansowych, pobudzanych zgodnie z rys. 3

Krzywa oznaczona napisem „przebiecie” określa wskaźnik asymetrii obwodu pięciowego z rys. 10, dostrojonego do częstotliwości rezonansowej

Jak wiadomo, moduł tej charakterystyki równa się iloczynowi modułów charakterystyk obwodów składowych, a argument sumie argumentów tych charakterystyk. Wyprowadzone, podobnie jak poprzednio, wzory określające parametry A , B , α i β dla 2, 3 i p identycznych, dostrojonych obwodów składowych zestawiono w tabelicy 3. Zależność wskaźnika asymetrii od rozstrojenia wstęgowego wykreślono w postaci krzywych $QA(r)$ na rys. 12. Dla $p \geq 2$ wskaźnika asymetrii osiąga wartość maksymalną A_{mx} przy rozstrojeniu wstęgowym r_A . Wartości A_{mx} i r_A podano również w odpowiednich kolumnach tabelicy 3.

W tabelicy 4 zestawiono wzory dla unormowanych wartości amplitud sinusoidalnych funkcji aproksymujących odchyłki fazy i częstotliwości przy różnych założeniach upraszczających. (W kolumnie odnoszącej się do przypadku $m = 1$ i $r \cong 0$, z uwagi na odkształcony charakter przebiegów, podano zamiast amplitud połówki wartości międzyszczytowych).

Dla dostrojonego obwodu selektywnego o charakterystyce (46) ekstremalne i międzyszczytowe wartości odchyłki fazy określają stosunkowo proste wzory:

$$Q\varphi_{mx} = \frac{pmr^2}{4} \frac{1}{z_p + m}, \quad Q\varphi_{mn} = -\frac{pmr^2}{4} \frac{1}{z_p - m}, \quad (47)$$

$$Q(\varphi_{mx} - \varphi_{mn}) = \frac{pmr^2}{2(1+r^2)} \frac{z_p}{(1+r^2)^{p-1} - m^2}$$

gdzie z_p — zmienna pomocnicza:

$$z_p = \sqrt{(1+r^2)^p - (mr)^2}. \quad (48)$$

Wykresy zależności międzyszczytowej odchyłki fazy od parametrów m i r zamieszczono dla obwodu dwurezonansowego ($p = 2$) na rys. 11. Podobnie jak dla obwodu pojedynczego ($p = 1$), międzyszczytowa wartość odchyłki fazy obwodu wielorezonansowego nie przekracza również wartości $\frac{1}{2Q}$. Największe odchyłki fazy zachodzą w obszarze $m \cong 1$ i $r \cong 0$. Poza tym obszarem, międzyszczytowa wartość odchyłki fazy osiąga maksimum przy pewnej wartości rozstrojenia wstęgowego (dla obwodu dwurezonansowego przy $r = 1$). Dla pojedynczego obwodu rezonansowego z rys. 3 międzyszczytowa wartość odchyłki fazy rośnie monotonicznie (por. rys. 8) ze wzrostem rozstrojenia wstęgowego.

Podobnie jak dla obwodu pojedynczego, można wyznaczyć funkcję aproksymującą odchyłki częstotliwości w otoczeniu punktu $\theta = \pi$ przy $m = 1$ i $r \cong 0$. Dla obwodu wielorezonansowego funkcja aproksymująca ma postać następującą:

$$Q^2 \frac{\Omega(\theta - \pi)}{\omega_n} = \frac{pr^3}{2} \frac{\theta - \pi - pr}{[(\theta - \pi - pr)^2 + pr^2]^2}. \quad (49)$$

Funkcja (49) osiąga wartości ekstremalne równe $\pm \frac{3\sqrt{3}}{32\sqrt{p}} \cong \pm \frac{0,162}{\sqrt{p}}$ przy wartościach

argumentu $(\theta - \pi) = \left(p \pm \sqrt{\frac{p}{3}}\right)r$. W związku z powyższym, międzyszczytowe wartości odchyłki częstotliwości, przy dużej głębokości modulacji i małych rozstrojeniach wstęgowych, maleją wraz ze wzrostem liczby obwodów.

Jak wynika z rys. 12, w zakresie małych wartości rozstrojenia wstęgowego, wartość wskaźnika asymetrii rośnie wraz z liczbą obwodów. Pomimo tego, przy $m = 1$, międzyszczytowe wartości odchyłek częstotliwości maleją wraz z liczbą obwodów. W tym szczególnym obszarze wartości parametrów m i r , jak to już wspomniano w p. 3.1, o ekstremum decyduje w znacznym stopniu również parametr $B = \cos^p \varrho$, determinujący minimum mianownika funkcji (14).

Wzory określające parametry A, B, α i β dla typowych, dostronionych obwodów selektywnych

Liczba obwodów	Nr rys.	A	A_{max}	r_A	B	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \beta$
1	3	$\frac{1}{4Q} \frac{r^2}{1+r^2} = \frac{\sin^2 \varrho}{4Q}$	$\frac{1}{4Q_1} \stackrel{*)}{=} \frac{0,25^*)}{Q}$	∞	$\frac{1}{\sqrt{1+r^2}} = \cos \varrho$	$-\frac{2r}{1-r^2} = -\operatorname{tg} 2\varrho$	$-r = -\operatorname{tg} \varrho$
2	3	$\frac{1}{2Q} \frac{r^2}{(\sqrt{1+r^2})^3} = \frac{\sin^2 \varrho \cdot \cos \varrho}{2Q}$	$\frac{1}{3Q\sqrt{3}} \stackrel{*)}{\approx} \frac{0,194}{Q}$	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{1+r^2} = \cos^2 \varrho$	$-\frac{3-r^2}{1-3r^2} = -\operatorname{tg} 3\varrho$	$-\frac{2r}{1-r^2} = -\operatorname{tg} 2\varrho$
3	3	$\frac{3}{4Q} \frac{r^2}{(1+r^2)^2} = \frac{3 \sin^2 \varrho \cdot \cos^2 \varrho}{4Q}$	$\frac{3}{16Q} \stackrel{*)}{\approx} \frac{0,188}{Q}$	1	$\frac{1}{(\sqrt{1+r^2})^3} = \cos^3 \varrho$	$-\frac{4r(1-r^2)}{(1-r^2)^2-4r^2} = -\operatorname{tg} 4\varrho$	$-\frac{3-r^2}{1-3r^2} = -\operatorname{tg} 3\varrho$
p	3	$\frac{p}{4Q} \frac{r^2}{(\sqrt{1+r^2})^{p+1}} = \frac{p \sin^2 \varrho \cdot \cos^{p-1} \varrho}{4Q}$	$\frac{p(\sqrt{p-1})^{p-1}}{2Q(\sqrt{p+1})^{p+1}}$	$\sqrt{\frac{2}{p-1}}$	$\frac{1}{(\sqrt{1+r^2})^p} = \cos^p \varrho$	$-\operatorname{tg}(p+1)\varrho$	$-\operatorname{tg} p\varrho$
1	10	$\frac{1}{4Q} \frac{r\sqrt{4+r^2}}{1+r^2} = \frac{\sin \varrho}{4Q} \sqrt{4-3 \sin^2 \varrho}$	$\frac{1}{4Q} \stackrel{*)}{=} \frac{0,25^*)}{Q}$ $\frac{1}{2Q\sqrt{3}} \stackrel{*)}{\approx} \frac{0,289}{Q}$	∞ $\sqrt{2}$	$\approx \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} = \cos \varrho$	$\frac{2}{r(3+r^2)}$	$-r = -\operatorname{tg} \varrho$
2	13	$\frac{r^2}{2Q} \frac{\sqrt{r^2(1+3s)^2 + (1+5s)^2}}{(1+s-r^2)^2 + 4r^2}$			$\approx \frac{1+s}{\sqrt{(1+s-r^2)^2 + 4r^2}}$	$-\frac{r^4-2(r^2+2)(1+s)+(1+s)^2}{-r(3r^4-2(s-1)r^2-(1+s)^2)}$	$-\frac{2r}{1+s-r^2}$

$r = 2Q \cdot \frac{\Omega m}{\omega_n} = \operatorname{tg} \varrho, \quad s = (Q\zeta)^2, \quad A_{max}$ — maksymalna wartość wskaźnika asymetrii, występująca przy $r = r_A$
 $*)$ wartość asymptotyczna.
 Numer rysunku wskazuje schemat określający sposób pobudzenia obwodu

Tablica 4
Wzory określające amplitudy odchyłek fazy $\Delta\varphi$ i pulsacji $\Delta\Omega$ odpowiedzi typowych, dostrójonych obwodów selektywnych w szczególnych przypadkach granicznych

Liczba obwodów	$r \geq 1$		$m \leq 1$		$m = 1, r \approx 0$		$r \leq 1, m \leq 1$	
	$Q\Delta\varphi$	$Q^2 \frac{\Delta\Omega}{\omega_n}$	$Q\Delta\varphi$	$Q^2 \cdot \frac{\Delta\Omega}{\omega_n}$	$Q^2 \cdot \frac{\Delta\Omega^{(*)}}{\omega_n}$	$Q\Delta\varphi$	$Q^2 \cdot \frac{\Delta\Omega}{\omega_n}$	
1	$\frac{m}{4}$	$\frac{mr}{8}$	$\frac{m}{4} \sin^2 \varrho = \frac{mr^2}{4(1+r^2)}$	$\frac{m \sin^2 \varrho}{8 \cos \varrho} = \frac{mr^3}{8(1+r^2)}$	0,162	$\frac{mr^2}{4}$	$\frac{mr^3}{8}$	
2	$\frac{m}{2r}$	$\frac{m}{4}$	$\frac{m}{2} \sin^2 \varrho \cdot \cos \varrho = \frac{mr^2}{2(\sqrt{1+r^2})^3}$	$\frac{m}{2} \sin^3 \varrho = \frac{mr^3}{4(\sqrt{1+r^2})^3}$	0,115	$\frac{mr^2}{2}$	$\frac{mr^3}{4}$	
3	$\frac{3m}{4r^2}$	$\frac{3m}{8r}$	$\frac{3}{4} m \sin^2 \varrho \cdot \cos^2 \varrho = \frac{3mr^2}{4(1+r^2)^2}$	$\frac{3}{8} m \sin^3 \varrho \cdot \cos \varrho = \frac{3mr^3}{8(1+r^2)^2}$	0,094	$\frac{3mr^2}{4}$	$\frac{3mr^3}{8}$	
p	$\frac{pm}{4r^{p-1}}$	$\frac{pm}{8r^{p-2}}$	$\frac{p}{4} m \sin^3 \varrho \cos^{p-1} \varrho = \frac{pmr^2}{4(1+r^2)^2}$	$\frac{p}{8} m \sin^3 \varrho \cos^{p-2} \varrho = \frac{pmr^3}{8(1+r^2)^2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{32\sqrt{p}}$	$\frac{pmr^2}{4}$	$\frac{pmr^3}{8}$	
1	$\frac{m}{4}$	$\frac{mr}{8}$	$\frac{m}{4} r \cdot \sqrt{r^2+4}$	$\frac{m}{8} \frac{r^2 \sqrt{r^2+4}}{1+r^2}$	0,885	$\frac{mr}{2}$	$\frac{mr^2}{4}$	
2	$\frac{m(1+3s)}{2r}$	$\frac{m(1+3s)}{4}$	$\frac{mr^2}{2} \frac{\sqrt{r^2(1+3s)^2 + (1+5s)^2}}{(1+s-r^2)^2 + 4r^2}$	$\frac{mr^3}{8} \frac{\sqrt{r^2(1+3s)^2 + (1+5s)^2}}{(1+s-r^2)^2 + 4r^2}$	—	$\frac{mr^2(1+5s)}{2(1+s)^2}$	$\frac{mr^3(1+5s)}{4(1+s)^2}$	

Nr rys. oznacza schemat określający sposób pobudzenia obwodu, $s = (Qk)^2$, $r = 2Q \frac{\Omega_m}{\omega_n} = tg \varrho$

*) połowa wartości międzyszczytowej

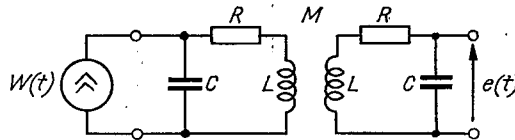
4.2. Obwód selektywny z dwoma sprzężonymi obwodami rezonansowymi

Charakterystyka przenoszenia filtru pasmowego, zawierającego dwa identyczne obwody rezonansowe, o schemacie przedstawionym na rys. 13, jest określona równaniem [5]:

$$\frac{K(jq)}{K_r} = \frac{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_r} Qk\right)^2}{(1 + jq)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_r} Qk\right)^2}, \quad (50)$$

gdzie k — współczynnik sprzężenia, dla sprzężenia transformatorowego jak na rys. 13, równy $\frac{M}{L}$, czyli stosunkowi indukcyjności wzajemnej do indukcyjności pojedynczego obwodu.

Zamieszczone w tablicy 3 wyrażenie, określające wartość współczynnika asymetrii dla dostrojonego obwodu z rys. 13, zostało wyprowadzone przy analogicznych jak w p.3.1



Rys. 13. Schemat filtru pasmowego o dwóch sprzężonych obwodach rezonansowych

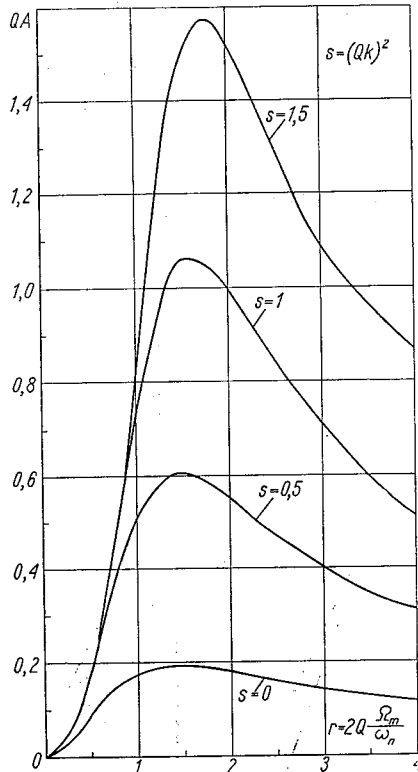
założeniach (23) i (25), po wprowadzeniu jak w p.3.2 zależności (39). Wartości pozostałych parametrów, jak B , α i β , podane w tablicy 3 dla tego przypadku, wyznaczono przy dodatkowym założeniu upraszczającym wprowadzonym do równania (50):

$$\frac{\omega}{\omega_r} Qk \cong Qk. \quad (51)$$

Dla porównania wyznaczono również dodatkowo wartość parametru A przy założeniu (51); okazała się ona prawie dwukrotnie mniejsza od obliczonej bez tego założenia upraszczającego. Wskaźnik asymetrii jest jednak parametrem wyjątkowo czułym na wszelkie uproszczenia symetryzujące charakterystykę przenoszenia. Stosowanie założenia (51) przy określaniu pozostałych parametrów jest całkowicie uzasadnione, umożliwiając istotne skrócenie niezbędnych przekształceń.

Zależność wskaźnika asymetrii od rozstrojenia wstęgowego, przy trzech wartościach parametru $s = (Qk)^2$, ujmuje rodzina krzywych na rys. 14. Dla porównania, na rysunku tym wykreślono również wartości wskaźnika A dla obwodu dwurezonansowego o niezależnych obwodach rezonansowych (krzywa dla $s = 0$ identyczna z krzywą $p = 2$ z rys. 12).

Jak wynika z rys. 14, w przypadku obwodów sprzężonych wartości wskaźnika asymetrii są zawsze większe niż dla obwodów niezależnych — bez względu na sprzężenie. Stanowi to istotną wskazówkę dla konstruktorów urządzeń odbiorczych sygnałów częstotliwości wzorcowej.



Rys. 14. Zależność wskaźnika asymetrii od rozstrojenia wstęgowego r i sprzężenia między obwodami s , dla dostrojonego filtra pasmowego z rys. 13

5. ODPOWIEDŹ OBWODU SELEKTYWNEGO NA WYMUSZENIE O WĄSKOPASMOWEJ MODULACJI KĄTA

Wykorzystana w p. 2 metoda postępowania może być z powodzeniem zastosowana również do wyznaczenia amplitudy oraz odchyłek fazy i częstotliwości odpowiedzi obwodu selektywnego na wymuszenie o sinusoidalnej, wąskopasmowej (płytkiej) modulacji kąta. Dotyczy to sygnałów o tak małej wartości indeksu modulacji, że możliwe jest pominięcie składowych wstęp bocznych wyższych rzędów. W rezultacie takiego uproszczenia, chwilową wartość wymuszenia o sinusoidalnej modulacji kąta, dostatecznie dokładnie opisuje — podobnie jak przy modulacji amplitudy — suma tylko trzech składowych, fali nośnej i dwóch wstęp bocznych, w postaci:

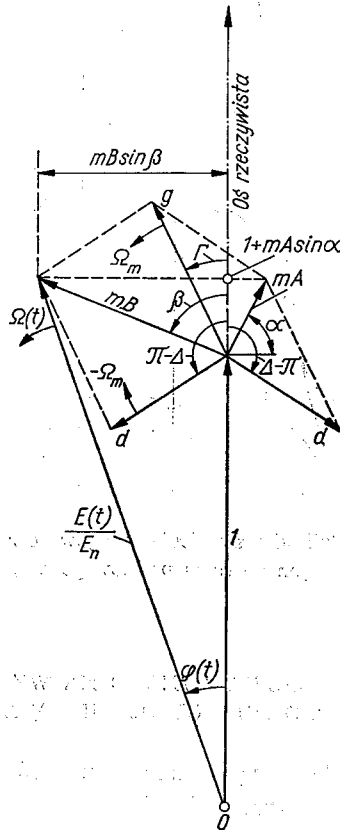
$$w(t) \cong W_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) + \frac{1}{2} m W_n \cos[(\omega_n + \Omega_m)t + \varphi_n] - \frac{1}{2} m W_n \cos[(\omega_n - \Omega_m)t + \varphi_n]. \quad (52)$$

Funkcja (51) opisuje modulację częstotliwości przebiegiem $\cos \Omega_m t$ lub modulację fazy przebiegiem $\sin \Omega_m t$, przy $m \ll 1$. Symbol m oznacza w tym przypadku indeks modulacji

kąta, równy maksymalnej dewiacji fazy, a pozostałe oznaczenia są identyczne jak we wzorze (4).

Zespolona funkcja czasu, opisująca analogicznie jak funkcja (6) chwilowe wartości amplitudy i odchyłki fazy odpowiedzi obwodu, ma w przypadku modulacji kąta następującą postać ogólną ($\theta = \Omega_m t$):

$$\frac{E(\theta)}{E_n} e^{j\varphi(\theta)} = 1 + g e^{j(\theta + \Gamma)} - d e^{-j(\theta + \Delta)} = 1 + mG \cos(\theta + \gamma) + j mD \cos(\theta + \delta), \quad (53)$$



Rys. 15. Wykres wskazowy funkcji (55) w chwili początkowej

gdzie g , d , Γ i Δ są określone za pomocą wzorów (7) i (8).

Po dokonaniu odpowiednich przekształceń otrzymuje się następujące zależności dla parametrów G , D , γ i δ :

$$G = A, \quad D = B, \quad \gamma = \alpha - \frac{\pi}{2}, \quad \delta = \beta - \frac{\pi}{2}, \quad (54)$$

gdzie A , B , α i β są określone wzorami (9). Funkcja (53) z uwzględnieniem zależności (54) przybiera postać:

$$\frac{E(\theta)}{E_n} e^{j\varphi(\theta)} = 1 + mA \sin(\theta + \alpha) + j mB \sin(\theta + \beta), \quad (55)$$

a odpowiednie funkcje określające chwilowe wartości amplitudy oraz odchyłek fazy i częstotliwości są określone przez następujące wzory:

$$\left[\frac{E(\theta)}{E_n} \right]^2 = 1 + mAsin(\theta + \alpha)]^2 + [mBsin(\theta + \beta)]^2, \quad (56)$$

$$\operatorname{tg}\varphi(\theta) = \frac{mBsin(\theta + \beta)}{1 + mAsin(\theta + \alpha)} \cong \varphi(\theta), \quad (57)$$

$$\Omega(\theta) = mB\Omega_m \frac{mAsin(\alpha - \beta) + \cos(\theta + \beta)}{[1 + mAsin(\theta + \alpha)]^2}. \quad (58)$$

Wykres wskazowy funkcji (55) zamieszczono na rys. 15.

Przybliżenie we wzorze (57) jest w dalszym ciągu dopuszczalne, ponieważ, jak wynika z tablicy 3, parametr B spełnia zawsze warunek $B \leq 1$, a indeks modulacji m jest z założenia znacznie mniejszy od jedności. Upraszcza to, podobnie jak przy modulacji amplitudy, obliczenie odchyłki częstotliwości za pomocą pochodnej odchyłki fazy.

Jak wynika z kształtu funkcji (56 ÷ 58), wskaźnik asymetrii A pozwala i w omawianym przypadku oszacować stopień wprowadzanych zniekształceń. Przy $A = 0$:

$$\varphi(t) = mBsin(\Omega_m t + \beta), \quad \Omega(t) = mB\Omega_m \cos(\Omega_m t + \beta) \quad (59)$$

i zarówno modulacja fazy jak i częstotliwości pozostają niezniekształcone. Natomiast wraz ze wzrostem wskaźnika asymetrii rosną zniekształcenia sygnału modulującego z uwagi na wpływ mianownika funkcji (57) i (58). Zniekształcenia te mogą być obliczone dla omówionych wyżej obwodów selektywnych przy wykorzystaniu wzorów z tablicy 3 lub 4.

6. WNIOSKI I ZASTOSOWANIA PRAKTYCZNE

Przedstawiona w artykule analiza złożonych zjawisk fizycznych pozwala za pomocą prostych środków formalnych uzyskać interesujące w szczególnych zastosowaniach praktycznych wyniki. Wybrany sposób ujęcia zagadnienia jest dostatecznie ogólny. Obejmuje on oddziaływanie wszystkich sygnałów o wąskopasmowej, sinusoidalnej modulacji na dowolne obwody selektywne o znanych charakterystykach przenoszenia. Szerokość pasma obwodu nie ma przy tym istotnego znaczenia. Wzory ogólne z p. 2.1 mogą być stosowane również do analizy obwodów rozstrojonych przy dowolnych, wąskopasmowych wymuszeniach o trzech składowych sinusoidalnych. Oczywiście w tak ogólnym przypadku wprowadzenia wzorów obliczeniowych wymaga dość złożonych przekształceń.

W przypadku obwodu dostrojonego do fali nośnej sygnału o sinusoidalnej modulacji wzory upraszczają się tak dalece, że mogą być wykorzystane bezpośrednio do obliczeń projektowych. Warto ponownie podkreślić, że jedynym, ogólnym założeniem upraszczającym, przyjętym przy wyprowadzaniu tych wzorów, jest warunek aby stosunek częstotliwości modulującej i nośnej był znacznie mniejszy od jedności. Warunek ten, całkowicie

niezależny od parametrów obwodów, jest z założenia spełniony dla wszystkich sygnałów wąskopasmowych — a więc dla wszystkich sygnałów o modulacji analogowej.

Jak już wspomniano we wstępie, przedstawione wyniki mają bezpośrednie zastosowanie praktyczne przy projektowaniu łącz dla transmisji sygnałów częstotliwości wzorcowej, emitowanych za pośrednictwem fali nośnej sygnałów radiofonicznych *AM*. Takim sygnałem jest np. sygnał Warszawskiej Radiostacji Centralnej na falach długich.

W nadajniku radiofonicznym modulacja amplitudy jest z reguły realizowana w końcowym stopniu wzmacniacza mocy. Sygnał zmodulowany jest więc przed wypromieniowaniem przenoszony tylko przez dwa obwody selektywne — obwód wyjściowy modulatora i antenę nadawczą. Obwody te, a w szczególności obwód wyjściowy, mogą już po stronie nadawczej łączyć wprowadzić wtórną, niepożądaną modulację kąta, powiększającą nieścisłość częstotliwości wzorcowej.

W odbiorniku, po wstępnym, selektywnym wzmocnieniu sygnału odebranego, należy usunąć modulację w celu odtworzenia przebiegu wzorcowego w postaci sinusoidalnej. Do realizacji tego zadania wykorzystuje się cztery podstawowe metody:

- liniową selekcję częstotliwościową składowej nośnej sygnału za pomocą wąskopasmowego filtru w.c.z. — zwykle elektromechanicznego (kwarcowego),
- ograniczanie amplitudy, polegające na nieliniowym odkształceniu sygnału połączonym z częstotliwościową selekcją składowych podstawowych: nośnej i stłumionych wstęp bocznych,
- synchronizację przez sygnał odebrany specjalnego generatora lokalnego (o częstotliwości nominalnej równej częstotliwości nośnej) za pomocą pętli fazowej regulacji częstotliwości,
- parametryczną stabilizację amplitudy odbieranego sygnału, za pomocą pętli szybkiej, automatycznej regulacji wzmocnienia.

W dwóch pierwszych metodach selekcja częstotliwościowa odbywa się za pośrednictwem obwodów selektywnych, których asymetria będzie powodowała wtórną modulację kąta. W przypadku metody drugiej modulacja ta będzie mniejsza wskutek spłylenia modulacji amplitudy przez ogranicznik. Jednakże nieliniowe warunki pracy ogranicznika stwarzają niebezpieczeństwo dodatkowej modulacji kąta, powstającej w obwodach ogranicznika przy niedostatecznym stłumieniu niepożądanych efektów nieliniowych. Np. powstające w obwodzie ogranicznika składowe sygnału modulującego mogą przez zmianę punktu pracy elementu nieliniowego powodować pogłębienie się wtórnej modulacji kąta.

W metodzie trzeciej selekcja częstotliwościowa jest realizowana za pomocą filtru dolno-przepustowego pętli automatyki. Ten sposób selekcji eliminuje wprawdzie całkowicie wpływ asymetrii lecz wprowadza nowe efekty niepożądane. Aby powstające w detektorze błędów pętli (detektorze fazy) składowe sygnału modulującego nie powodowały bezpośredniej modulacji częstotliwości generatora lokalnego (synchronizowanego —przestrajanego napięciem wyjściowym filtru), filtr musi charakteryzować się niską częstotliwością graniczną i doskonałym tłumieniem w paśmie zaporowym. Przeważnie tłumienie będzie tym lepsze im niższa jest częstotliwość graniczna filtru. Obniżanie częstotliwości granicznej pociąga jednak za sobą wzrost krótkoterminowej niestabilności częstotliwości napięcia wyjściowego. Jak wiadomo, pętla automatyki nie nadaje za fluktuacjami fazy generatora

synchronizowanego o widmie leżącym poza pasmem przepustowym filtru. Im niższa jest częstotliwość graniczna tego filtru, tym większy wpływ na niestabilność częstotliwości odtwarzanego przebiegu wzorcowego ma własna niestabilność generatora lokalnego.

Realizacja metody czwartej w zasadzie nie wymaga stosowania ani obwodów selektywnych ani takich elementów nieliniowych, które mogłyby powodować dodatkową modulację wtórną. Jednakże przy małych natężeniach pola sygnału konieczne jest wstępne, selektywne wzmocnienie tego sygnału. Wzmacniacz wstępny można włączyć do pętli automatycznej regulacji wzmocnienia, lecz w takim przypadku sygnał będzie narażony na wpływ asymetrii obwodów selektywnych. Ponadto, ponieważ pętla musi reagować na dużą dynamikę zmian amplitudy w stosunkowo szerokim paśmie częstotliwości (całe pasmo sygnału modulującego) oraz z uwagi na błąd statyczny pętli, osiągnięcie skutecznej stabilizacji będzie nastęczało znaczne trudności techniczne.

W przypadku wzorców częstotliwości wysokiej klasy optymalnym rozwiązaniem będzie oczywiście złożone rozwiązanie kompromisowe, wykorzystujące w maksymalnym stopniu zalety kilku powyższych metod, przy jednoczesnym utrzymaniu na dopuszczalnym poziomie charakterystycznych dla nich efektów niepożądanych. Wskazówki i zależności zawarte w niniejszym artykule mogą znacznie ułatwić wybór i optymalizację obwodów selektywnych, wchodzących w skład takiego rozwiązania lub zastosowanych we wstępnym wzmacniaczu odbiornika i wyjściowym wzmacniaczu nadajnika.

Zaproponowany, jako globalna miara wtórnej modulacji kąta, wskaźnik asymetrii wydaje się być parametrem bardzo użytecznym przy wyborze optymalnego obwodu selektywnego. Szczególnie łatwo za pomocą tego parametru można porównać różne obwody selektywne. Im mniejsza wartość wskaźnika asymetrii tym ogólnie lepszy jest dany obwód z omawianego punktu widzenia. Wymienione w p. 3.1 i 4.1 ograniczenia zakresu stosowalności takiej miary zniekształceń, występujące przy bardzo głębokiej i powolnej modulacji amplitudy nie są istotne w omówionych wyżej zastosowaniach praktycznych. W praktyce, chociażby ze względu na ograniczenie od dołu pasma sygnału modulującego, nie występują koincydencje szczytowych głębokości modulacji i minimalnej wartości częstotliwości sygnału modulującego.

Przytoczone w tablicy 3 wzory pozwalają na obliczenie wskaźnika asymetrii dla najczęściej spotykanych w radiotechnice obwodów selektywnych, a krzywe z rysunków 12 i 14 umożliwiają szybką ocenę jakości wybranego rozwiązania. Użyteczne są również wzory aproksymujące amplitudy odchyłek fazy i częstotliwości dla przypadków krańcowych, zestawione w tablicy 4. Przypadek małej głębokości modulacji ($m \ll 1$) dobrze opisuje współpracę obwodu z ogranicznikiem amplitudy. Przypadek dużego rozstrojenia wstęgowego ($r \gg 1$) odpowiada działaniu obwodu z rezonatorem elektromechanicznym o dużej dobroci. Warunki pracy obwodu wyjściowego nadajnika (o niewielkiej dobroci skutecznej) ujmuje w przybliżeniu, dla skrajnych głębokości modulacji, założenie małych wartości rozstrojenia wstęgowego ($r \ll 1$, $m \ll 1$) i ($r \cong 0$, $m = 1$).

Zamieszczone w artykule wyniki analizy teoretycznej pozwalają w praktyce na oszacowanie minimalnych, możliwych do uzyskania w danym rozwiązaniu, wartości odchyłek fazy i częstotliwości powstających w obwodach selektywnych. Te minimalne wartości stanowią dla danego rozwiązania teoretyczną granicę możliwości technicznych. Ponieważ najmniejszą modulację wtórną spośród rozpatrywanych obwodów wprowadza pojedynczy

obwód rezonansowy, pobudzany zgodnie z rys. 3, odchyłki wyznaczone dla takiego obwodu wyznaczają granice ostateczne dla rezonansowych obwodów selektywnych.

W zastosowaniach technicznych należy uwzględnić stopień idealizacji obwodu z rys. 3. W fizycznych obwodach rezonansowych odstępstwa od rozmieszczenia strat powiększą asymetrię obwodu. Zachodzące w czasie eksploatacji — pod wpływem zmian warunków klimatycznych lub efektu starzenia — rozstrajanie obwodów będzie powodowało pogłębianie się modulacji wtórnej. Z pogłębianiem modulacji wtórnej należy się również liczyć przy nieliniowych warunkach pobudzania obwodu.

Na podstawie rozważań z p. 5, przytoczony w poprzednich rozdziałach materiał daje się również wykorzystać do analizy zniekształceń sygnałów o wąskopasmowej płytkiej, sinusoidalnej modulacji kąta w obwodach selektywnych. Sygnały o takiej właśnie modulacji stosuje się między innymi w specjalnych urządzeniach pomiarowych — np. w mikrofalowych dalmierzach geodezyjnych. Przedstawione wyniki mogą w tym przypadku usprawnić określanie błędów pomiarowych wprowadzanych przez asymetrię obwodów selektywnych, a posługiwanie się wskaźnikiem asymetrii niewątpliwie ułatwi wybór obwodu optymalnego.

LITERATURA

1. C. Egidi, P. Oberto, *Generally Distorted Three Spectral Lines Amplitude Modulation*, Archiv. der el. Ubertragung, Nr. 18, 1964, s. 525.
2. C. Egidi, P. Oberto, *Amplitude Modulation with the Three Spectral Lines Having any Amplitude and Phase*, Alta Frequenza, Nr. 34, 1965, s. 152.
3. C. Egidi, P. Oberto, *Modulation Envelopes — Tables of Contours and Harmonic Components*, Instituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris, Turyn, 1969.
4. W. I. Tiewierowski, *Raschet fazowej stabilnosti vychodnogo signala rezonansnogo filtra*, Izmieritel'naja Technika, Nr. 6, 1973, s. 15.
5. W. Rotkiewicz, P. Rotkiewicz, B. Zaleski, *Technika odbioru radiowego — podstawowe układy wielkiej częstotliwości*, Wyd. Nauk.-Techn., Warszawa 1973.

R. NOWAK

DISTORTIONS OF NARROW-BAND AM AND FM SIGNALS IN LINEAR SELECTIVE CIRCUITS

Summary

A transmission curve asymmetry causes amplitude and phase distortion of AM and FM signals. The paper describes an undesirable angle modulation of AM and FM signals. The paper describes an undesirable angle modulation of AM signals and distortion of FM signals in conditions of narrow-band sinusoidal modulation. Phase and frequency deviations, arising in a single resonant circuit, are detail discussed. Formulas are given for multiresonant circuits with independent resonators and for two coupled resonators. An asymmetry index, proportional to the absolute value of a vector difference between upper and conjugate lower sideband vectors, is introduced. This index is a useful measure of distortion and can be used for comparison of various selective circuits. The conclusion of the paper can be useful in the design of standard frequency receivers.

R. NOWAK

DÉFORMATION DES SIGNAUX AVEC LA MODULATION SINUSOÏDALE DANS LES CIRCUITS SÉLECTIFS LINÉAIRES

R é s u m é

L'asymétrie des caractéristiques de fréquence des circuits sélectifs a pour conséquence, même si la syntonisation est appliquée, les déformations de l'amplitude et de la phase des signaux modulés. Dans l'article on a dérivé les formules générales pour les valeurs instantanées de l'amplitude et de la déviation de la phase et de la fréquence de la réponse du circuit sélectif à un signal avec la modulation sinusoidale de l'amplitude ou avec la modulation de l'angle.

On a présenté les formules permettant à effectuer les calculs pour les circuits sélectifs utilisés dans la radiotéchnique le plus souvent, c'est à dire pour un ensemble contenant des circuits de résonance indépendants et deux circuits accouplés, conformes à la fréquence portative.

On a fait une analyse détaillée de la déviation de la phase et de la fréquence de la réponse d'un signal avec la modulation sinusoidale de l'amplitude.

L'index d'asymétrie, introduit dans l'article et déterminé pour un circuit donné par sa caractéristique de déplacement, constitue en pratique une mesure commode des déformations introduites par le circuit.

Les résultats présentés peuvent être appliqués à la préparation des projets des émetteurs de la fréquence modèle, qui a pour source la fréquence portative du signal radiophonique. Ces résultats peuvent aussi être utiles pour déterminer les erreurs dans les systèmes de mesurages utilisant les signaux avec la modulation de l'angle.

R. NOWAK

VERZERRUNGEN DER *AM*- UND *FM*-SCHMALBANDSIGNALE
IN LINEAREN SELEKTIVSTIMMKREISEN

Z u s a m m e n f a s s u n g

Die Asymmetrie der Übertragungskurve veranlaßt die Entstehung von Verzerrungen der Signalamplitude und -phase. In diesem Artikel sind die sekundäre Phasenmodulation der *AM*-Signale und die Verzerrungen der *FM*-Signale (bei der Voraussetzung sinusförmiger Schmalbandmodulation) beschrieben worden.

Eingehend wurden die Phasen- und Frequenzabweichungen für den einzelnen Schwingungskreis diskutiert. Es wurden Formeln für Selektivstimmkreise mit unabhängigen bzw. zwei gekoppelten Schwingungskreisen aufgestellt. Ein zum Vergleich verschiedener Selektivstimmkreise dienender Asymmetrieindex wurde eingeführt.

Das Endergebnis dieser Arbeit soll beim Entwerfen von Empfangsnetzketten für Normalfrequenzsignale Hilfe gewährleisten.

P. НОВАК

ИСКАЖЕНИЯ УЗКОПОЛОСНЫХ АМ И ЧМ СИГНАЛОВ
В ИЗБИРАТЕЛЬНЫХ ЦЕПЯХ

Р е з ю м е

Асимметрия частотных характеристик обуславливает возникновение амплитудных и фазовых искажений сигналов. В статье, при условиях синусоидальной, узкополосной модуляции, рассматриваются: вторичная угловая модуляция сигналов ам и искажения сигналов чм. Подробно

обсуждены частотные и фазовые отклонения, возникающие в одном резонансном контуре. Выведены формулы для избирательных цепей с независимыми контурами и для связанных контуров. Введен показатель асимметрии, пропорциональный модулю разницы комплексных векторов боковых полос (верхней и сопряженной нижней), он является удобной мерой возникающих искажений. Используя этот показатель можно быстро сравнить разные цепи. Получены заключения полезные при проектировании приемных устройств сигналов стандартной частоты.

Maksymalizacja wieloskładnikowych przepływów statycznych w warunkach uszkodzeń gałęzi sieci

WOJCIECH MOLISZ (GDAŃSK)

Instytut Informatyki Politechniki Gdańskiej

Otrzymano 8.5.1974

W pracy niniejszej, dotyczącej zakresu analizy przepływów w sieciach wielowęzłowych, zwrócono uwagę na niedoskonałość modeli deterministycznych. Zainteresowano się problemem wieloskładnikowych przepływów statycznych i wprowadzono losowy model przepustowości gałęzi. Sformułowano probabilistyczny problem przepływów i sprowadzono go do równoważnego zadania deterministycznego programowania liniowego.

1. WSTĘP

W ostatnich latach obserwuje się niesłabnące zainteresowanie metodami i modelami sieciowymi. Tłumaczy się ono potrzebami wynikającymi z szybkiej rozbudowy sieci energetycznych (rurociągi naftowe, gazociągi, sieci wysokiego napięcia), komunikacyjnych, a zwłaszcza telekomunikacyjnych.

Badania teoretyczne nad sieciami prowadzone są równoległe w dwóch nurtach: analizy i syntezy. Przedmiotem zainteresowania są zarówno przepływy statyczne jak i dynamiczne. Jak się wydaje, najdonioślejszym rozwiązaniem dotychczas w literaturze zagadnieniem z zakresu analizy przepływów statycznych jest problem maksymalizacji przepływów wieloskładnikowych w warunkach deterministycznych. Zajmowali się nim między innymi Baliński [1], Ford, Fulkerson [4], Hartman, Lasdon [6], Tomlin [7], Wollmer [8], Zangwill [9]. Wszystkie te prace zawierały jednak wyłącznie modele deterministyczne. Z kolei prace uwzględniające uszkodzenia gałęzi sieci poświęcone były analizie niezawodności strukturalnej, a zagadnienia przepływów pomijały zupełnie. Tymczasem analiza przepływów statycznych w warunkach niedeterministycznych dostarcza praktycznie ważne dane o możliwościach działania zawodnej sieci. Dane te są bardziej wartościowe w stosunku do wyników analizy idealnego modelu deterministycznego, ponieważ model probabilistyczny sieci jest lepszym przybliżeniem rzeczywistości.

Niniejszy artykuł napisano z myślą o sieciach telekomunikacyjnych. W tym kontekście przepływy wieloskładnikowe pojawiają się w następstwie powstawania w źródle ruchu tkm. potrzeb adresowanych do różnych odpyływów. Uszkodzenia gałęzi sieci, niezależnie od ich charakteru zmniejszają możliwości realizacji tych potrzeb. Jeżeli wolno wprowadzić model probabilistyczny zachowania się zawodnych gałęzi, a ich własności statystyczne są znane, wówczas będzie interesujące znalezienie odpowiedzi na jedno z dwóch równoważnych pytań:

1) jak sterować rozplywem strumieni ruchu w gałęziach sieci, by zrealizować określone z góry potrzeby w możliwie największym procencie przypadków (ściślej: należy znaleźć przepływy gałęziowe maksymalizujące prawdopodobieństwo realizacji określonych potrzeb ilościowych),

2) jak sterować rozplywem strumieni ruchu w gałęziach sieci, by w danym z góry procencie przypadków zrealizować potrzeby w maksymalnym stopniu (ściślej: znaleźć takie przepływy gałęziowe, które z określonym prawdopodobieństwem pozwolą na spełnienie potrzeb w stopniu maksymalnym).

W obu sformułowaniach zwrotu „procent przypadków” użyto w sensie statystycznym; w modelach sformalizowanych odpowiada mu prawdopodobieństwo. Artykuł jest poświęcony metodzie znalezienia odpowiedzi na drugie z przedstawionych pytań.

Znaczenie symboli użytych w artykule

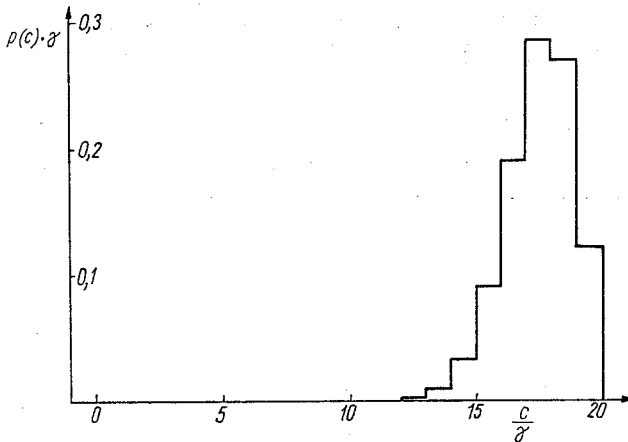
- A — macierz incydencji
- F — dystrybuanta
- K — nominalna ilość łączy w wiązce
- M — ilość węzłów w sieci
- N — ilość gałęzi
- O — macierz $M.N$ złożona z samych zer
- $P(z)$ — prawdopodobieństwo zdarzenia z
- Q — całkowita ilość składników ruchu tkm. w sieci
- b — wektory odpowiadające potrzebom źródeł i odpływów
- c — przepustowość gałęzi (zm. losowa)
- e — ilość czynnych łączy w wiązce (tj. w gałęzi); zmienna losowa
- f — wydajności źródeł — zapotrzebowania odpływów
- k, m, n, q — bieżące indeksy zmiennych o zakresie zmienności od 1 do odpowiedniej dużej litery
- $p(a)$ — gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej a
- p — prawdopodobieństwo uszkodzenia dowolnego łącza w wiązce
- s — prawdopodobieństwo poprawnej pracy dowolnego łącza w wiązce
- r — realizacja zmiennej losowej
- γ — przepustowość pojedynczego łącza w wiązce
- σ — odchylenie standardowe zmiennej losowej
- — kreska nad symbolem — wartość średnia zmiennej losowej
- ~ — wężyk pod symbolem — zmienna losowa
- * — gwiazdka nad symbolem z prawej — rozwiązanie optymalne

2. MODEL GAŁĘZI SIECI

W modelu sieci telekomunikacyjnej węzły reprezentują centralne telekomunikacyjne, a gałęzie — wiązki łączy między centralnymi. W sieci krajowej między różnymi centralami międzymiastowymi występują różne liczby łączy w wiązkach. Trzeba zaznaczyć, że tak

zbudowane gałęzie nie wyczerpują wszystkich możliwości połączeń między centralami, ale dla naszych potrzeb pozostaniemy przy tym opisie. W związku z powyższym przepustowość dowolnej gałęzi sieci zależy od ilości czynnych łączy w wiązce. Z różnych przyczyn łączy te mogą ulegać uszkodzeniom, w wyniku czego przepustowość gałęzi będzie się zmieniać. Dobrym modelem przepustowości zmieniającej się w taki sposób jest zmienna losowa. Rozkład gęstości prawdopodobieństwa tej zmiennej określimy podobnie, jak się to się czyni w analizie niezawodności systemu technicznego.

Niech n -ta gałąź sieci będzie zbudowana z K_n łączy w określonej relacji. Nie wnikając w realizację techniczną tych łączy założymy, że każde z nich może ulec uszkodzeniu z prawdopodobieństwem P_k ($k = 1, \dots, K_n$), przy czym uszkodzenia są statystycznie niezależne



Rys. 1. Znormalizowany rozkład gęstości prawdopodobieństwa losowej przepustowości gałęzi złożonej z 20 jednakowych łączy o prawdopodobieństwie uszkodzenia każdego z nich równym 0,1

(przypadek uszkodzeń zależnych rozpatrzmy później). Podkreślamy tutaj, że to upraszczające założenie jest podyktowane jedynie chęcią wprowadzenia przejrzystego sformułowania pierwszego przybliżenia. Prawdopodobieństwa P_k są trudne lub niemożliwe do określenia w sposób ścisły. W praktyce podczas badania niezawodności znanych sieci komputerowych (jak np. amerykańskiej — Advanced Research Projects Agency of the Department of Defense, w skrócie ARPA) przyjmowano P_k z zakresu $\langle 0,1; 0,3 \rangle$.

Dla sieci o zaostzonych wymaganiach niezawodnościowych przyjmuje się $P_k = 0,1$. Jeżeli wolno przyjąć, że prawdopodobieństwa uszkodzeń łączy są jednakowe, tj., że $P_k = p$ dla $k = 1, \dots, K_n$, to możemy określić prawdopodobieństwo, że uszkodzeniu ulegnie żadne, jedno, dwa, ..., wszystkie łączy. Można również określić rozkład prawdopodobieństwa czynnej ilości łączy w wiązce. Jest to rozkład dwumianowy. Jeżeli przez s oznaczymy prawdopodobieństwo poprawnej pracy pojedynczego łączy ($s = 1 - p$), to rozkład prawdopodobieństwa poprawnej pracy 0, 1, ..., K_n łączy n -tej gałęzi określony jest przez zależność:

$$P(e_n = k) = \binom{K_n}{k} s^k (1-s)^{K_n-k}. \quad (1)$$

Z zależności (1) otrzymujemy rozkład gęstości prawdopodobieństwa losowej przepustowości gałęzi n -tej. Punkty rozkładu $e_n = k$ w (1) określają bowiem wartości skoków rozkładu $p(c)$ dla wartości $c_n = k \cdot \gamma$, gdzie γ jest przepustowością pojedynczego łączy.

Rozkład $p(c)$ jest rozkładem zmiennej losowej ciągłej, ale jest nieciągłą funkcją swego argumentu (uskoki spowodowane uszkodzeniami łączy). Przykładowy rozkład $p(c)$ dla $K_n = 20$ i prawdopodobieństwa uszkodzenia łączy $p = 0,1$ przedstawiony jest na rys. 1.

Momenty rozkładu zmiennej ξ_n są następujące:

Wartość średnia:

$$\bar{c}_n = s\gamma K_n, \quad (2)$$

odchylenie standardowe:

$$\sigma_n = [\bar{c}_n(1-s)\gamma]^{1/2}. \quad (3)$$

Jeżeli prawdopodobieństwa uszkodzeń łączy w wiązce nie są jednakowe, lecz występuje kilka grup łączy o różnych prawdopodobieństwach poprawnej pracy, wówczas rozkład prawdopodobieństwa $P(e_n = k)$ jest uogólnionym rozkładem dwumianowym. Punkt rozkładu $e_n = k$ znajduje się przez zsumowanie prawdopodobieństw wszystkich możliwych układów złożonych z k jedynek i $K_n - k$ zer. Obliczenie rozkładów $p(c_n)$ staje się jeszcze bardziej uciążliwe, kiedy grupy łączy posiadają nie tylko różne prawdopodobieństwa uszkodzeń, ale i różne przepustowości. Jednakże w każdym konkretnym przypadku potrafimy je obliczyć.

3. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU MAKSYMALIZACJI PRZEPIYWU

Struktura analizowanej sieci jest opisana przez macierz incydencji węzłów i gałęzi, oznaczoną przez A .

Sieć ma M węzłów i gałęzi N , służy do przesłania Q składników ruchu tkm. Jeżeli przez x_{qn} oznaczymy wielkość przepływu q -tego składnika przez n -tą gałąź, to warunki zachowania ciągłości przepływu zapiszemy w postaci:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{AO} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{OA} & \dots & \mathbf{O} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{OA} & \dots & \mathbf{A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{QN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_Q \end{bmatrix}, \quad (4)$$

gdzie:

\mathbf{O} — macierz $M \cdot N$ złożona z samych zer,

\mathbf{b}_q — wektor $M \cdot 1$ o elementach:
$$\begin{cases} -f_q & \text{— dla źródła } q\text{-tego składnika,} \\ +f_q & \text{— dla odpływu } q\text{-tego składnika,} \\ 0 & \text{— dla innych węzłów,} \\ q = 1, \dots, Q. \end{cases}$$

Układ równań (4) określa równocześnie warunki zgodności przepływów z zapotrzebowaniami źródeł i odpływów; f_q jest wielkością zapotrzebowania w q -tym odpływie, a więc zgodnie z tym co powiedziano we wstępie jest to zapotrzebowanie na q -ty składnik ruchu tkm. Składniki te są bowiem identyfikowane przez adresy węzłów przeznaczenia, czyli numery odpływów. Zapotrzebowanie na q -ty składnik wykazuje się również w jego źródle, stąd dwukrotne f_q ze znakami plus i minus.

Oprócz warunków ciągłości przepływów w węzłach (węzły pośrednie nie gromadzą i nie wytwarzają składników) przy analizie sieci obowiązują warunki nieujemności:

$$x_{qn} \geq 0 \tag{5}$$

oraz ograniczenia przepustowości gałęzi.

Ze względu na to, że nie wiadomo z góry, jak ukształtują się konkretne realizacje zmiennych c_1, \dots, c_n , zażądamy, aby wymagane przepływy mogły być zrealizowane z określonymi prawdopodobieństwami. Wobec tego ograniczenia przepustowości przyjmują postać:

$$P\left(\sum_{q=1}^Q x_{qn} \leq c_n\right) \geq P_n, \tag{6}$$

gdzie P_n — liczby dane z góry ($0 \leq P_n \leq 1$) dla $n = 1, \dots, N$.

W ten sposób zagwarantujemy, że statystycznie biorąc w $P_n \cdot 100\%$ przypadków zdolamy zrealizować przepływy w gałęzi n , wynikające z nałożonych wymagań, a jedynie w $(1 - P_n) \cdot 100\%$ przypadków wskutek uszkodzeń łączy w gałęzi n nie będziemy w stanie przesłać wszystkich wymaganych składników ruchu. Nie wnika się przy tym w jakim stopniu sieć nie podoła wymaganiom, lecz stwierdza się tylko fakt możliwości lub niemożności realizacji tych wymagań.

Do pełnego sformułowania problemu przepływów brak jeszcze funkcji celu. Przyjmuje ona postać:

$$z = \sum_{q=1}^Q \sum_{n=1}^N x_{qn}. \tag{7}$$

Funkcja z dana przez (7) jest całkowitym przepływem w sieci i dlatego podlegać będzie maksymalizacji. Przepływ ten oznacza maksymalną liczbę łączy realizowanych w warunkach uszkodzeń. A więc problem przepływów wieloskładnikowych polega na znalezieniu przepływów x_{qn}^* ($q = 1, \dots, Q$; $n = 1, \dots, N$) maksymalizujących:

$$z = \sum_q \sum_n x_{qn},$$

przy warunkach:

$$\left. \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc} \text{AO} & \dots & \text{O} \\ \text{OA} & \dots & \text{O} \\ \dots & \dots & \dots \\ \text{OO} & \dots & \text{A} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} x_{11} \\ \vdots \\ x_{QN} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \vdots \\ b_Q \end{array} \right] \end{array} \right\} \tag{8}$$

$$x_{qn} \geq 0$$

$$P\left(\sum_q x_{qn} \leq c_n\right) \geq P_n.$$

4. ROZWIĄZANIE PROBLEMU PRZEPIŹYWÓW

Zadanie (8) należy do klasy zadań programowania probabilistycznego, nazywanej programowaniem z ograniczeniami losowymi. Twórcami tej klasy byli Charnes i Cooper [2], [3] około 15 lat temu. Ich podejście i większość metod pochodnych uzależnia rozwiąza-

nie optymalne od realizacji zmiennych losowych występujących w zadaniu. W przypadku zadania (8) oznaczałoby to zależność:

$$x_{qn}^*(\mathbf{e}^r) = h(\mathbf{e}^r) \quad (9)$$

(gdzie r oznacza realizację wektora losowych przepustowości \mathbf{e}), przy czym funkcję h należy znaleźć.

My postawimy sobie zadanie skromniejsze z obliczeniowego punktu widzenia. Znajdziemy x_{qn}^* jednorazowo, uniwersalne w sensie statystycznym, tzn. będące rozwiązaniem (8), statystycznie spełniającym co najmniej w $P_n \cdot 100\%$ przypadkach (tj. realizacjach \mathbf{e}^r) relację (6). Związek (6) można zapisać w postaci:

$$1 - P\left(\xi_n \leq \sum_{q=1}^Q x_{qn}\right) \geq P_n. \quad (10)$$

Wariancja σ_n^2 jest dodatnia i możemy znormalizować (10), otrzymując:

$$1 - P\left(\frac{\xi_n - \bar{c}_n}{\sigma_n} \leq \frac{\sum_{q=1}^Q x_{qn} - \bar{c}_n}{\sigma_n}\right) \geq P_n. \quad (11)$$

Ale (11) wyznacza taki obszar dopuszczalny przepływów x_{qn} , w którym dystrybuanta spełnia związek:

$$F\left(\frac{\sum_{q=1}^Q x_{qn} - \bar{c}_n}{\sigma_n}\right) \leq 1 - P_n. \quad (12)$$

Z (12) otrzymujemy ograniczenie całkowitych przepływów gałęziowych:

$$\sum_{q=1}^Q x_{qn} \leq \bar{c}_n + \sigma_n F^{-1}(1 - P_n), \quad (13)$$

$$n = 1, \dots, N.$$

A więc problem probabilistyczny (8) został sprowadzony do problemu deterministycznego polegającego na znalezieniu przepływów x_{qn}^* , maksymalizujących:

$$z = \sum_{q=1}^Q \sum_{n=1}^N x_{qn},$$

przy warunkach:

$$\left. \begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{QN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_Q \end{bmatrix}, \\ & \sum_{q=1}^Q x_{qn} \leq \bar{c}_n + \sigma_n F^{-1}(1 - P_n), \\ & n = 1, \dots, N, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$x_{qn} \geq 0$ dla wszystkich q i n .

Problem (14) ma liniową funkcję celu i liniowe ograniczenia; zadanie probabilistyczne sprowadziło się do deterministycznego programowania liniowego dzięki temu, że losowe są tylko przepustowości gałęzi.

Zastanówmy się teraz, jaki wpływ może mieć usunięcie założenia o niezależności losowych uszkodzeń łączy. W przypadku sieci telekomunikacyjnych fizyczne uzasadnienie zależności statystycznej uszkodzeń jest oczywiste. Jeżeli dla przykładu gałęź sieci stanowi linia kablowa realizująca wiele łączy, to uszkodzenie izolacji, powłoki, przecięcie kabla, zerwanie w wyniku robót ziemnych itd. eliminuje z pracy kilka lub nawet wszystkie łączy. Tutaj realizacja łączy we wspólnych liniach powoduje współzależność uszkodzeń.

Hänsler [5] podał wzór na prawdopodobieństwo uszkodzenia gałęzi złożonej z l jednakowych równoległych łączy:

$$P = P_0^{1-\alpha(l-1)},$$

gdzie:

P_0 — prawdopodobieństwo uszkodzenia pojedynczego łącza,

α — współczynnik mający sens stopnia korelacji między uszkodzeniami łączy
 $0 \leq \alpha \leq 1$,

$\alpha = 0$ — odpowiada uszkodzeniom niezależnym,

$\alpha = 1$ — pełna korelacja (np. przecięcie całej gałęzi).

Zależność Hänslera może jednak dostarczyć tylko jednego punktu rozkładu $p(c)$ w przypadku zależnych uszkodzeń łączy. Jeżeli niektóre zmienne losowe przepustowości c_i oraz c_j są skorelowane ze sobą (co przy przyjętym modelu może się zdarzyć w praktyce bardzo rzadko), wówczas musimy rozpatrywać rozkład prawdopodobieństwa wektora c , traktowanego jako N -wymiarowa zmienna losowa. Związki analogiczne do (13) należy traktować wówczas jako prawdopodobieństwa brzegowe.

5. PODSUMOWANIE

Na wstępie stwierdziliśmy nieadekwatność znanych dotychczas deterministycznych modeli przepływów statycznych w sieci do sytuacji, w której występuje możliwość uszkodzeń gałęzi. Wprowadziliśmy więc losowy model przepustowości gałęzi dla interpretacji telekomunikacyjnej. Korzystając z tego sformułowaliśmy probabilistyczne zadanie maksymalizacji statycznych przepływów wieloskładnikowych w sieci.

Zadanie to sprowadziło się do deterministycznego programowania liniowego. Zmienna losowa będąca modelem przepustowości gałęzi sieci miała przy tym rozkład gęstości prawdopodobieństwa zależny od przyjętych założeń, przy czym:

- 1° — w najprostszym przypadku niezależnych i jednakowo niezawodnych łączy był to rozkład wynikający z rozkładu dwumianowego,
- 2° — dla łączy o różnej niezawodności, lecz niezależnych statycznie, był to uogólniony rozkład dwumianowy,
- 3° — dla łączy zależnych statycznie był to odpowiedni rozkład brzegowy.

Dzięki temu, że adekwatny problem deterministyczny jest liniowy, otrzymaliśmy atrakcyjne narzędzie, umożliwiające optymalizację przepływów dla szerszej klasy sieci niż dotychczas.

LITERATURA

1. M. L. Baliński, *Fixed Cost Transportation Problems*, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 8 (March 1961), pp. 41—54.
2. A. Charnes, W. W. Cooper, *Chance-Constrained Programming*, Management Science, Vol. 6 nr. 1 (October 1959), pp. 73—79.
3. A. Charnes, W. W. Cooper, *Deterministic Equivalents for Optimizing and Satisficing Under Chance Constraints*, Operations Research, Vol. 11, nr. 1 (Jan-Feb. 1963), pp. 18—39.
4. L. R. Ford, D. R. Fulkerson, *Przepływy w sieciach*, PWN, Warszawa 1969.
5. E. Hänsler, G. Mc. Auliffe, R. S. Wilkov, *Optimizing the Reliability in Centralized Computer Networks*, IEEE Trans. COM-20, nr. 3 (June 1972), pp. 640—644.
6. J. K. Hartman, L. S. Lasdon, *A Generalized Upper Bounding Algorithm for Multicommodity Network Flow Problems*, Networks (Wiley), Vol. 1 (1972), pp. 333—354.
7. J. A. Tomlin, *Minimum Cost Multicommodity Network Flows*, Operations Research, Vol. 14, nr. 1 (February 1966), pp. 45—61.
8. R. D. Wollmer, *Multicommodity Networks With Resource Constraints, the Generalized Multicommodity Flow Problem*, Networks, Vol. 1 (1972), pp. 245—263.
9. W. T. Zangwill, *Minimum Concave Cost Flows in Certain Networks*, Management Science, Vol. 14, nr. 7 (March 1966), pp. 429—450.

W. MOLISZ

MAXIMIZING MULTICOMMODITY STATIC FLOWS IN CONDITIONS OF NETWORK BRANCH DEFECT

Summary

This paper considers the analysis of the multicommodity network. After a discussion of the accuracy of deterministic network models a random model of branch capacity is introduced. A probabilistic multicommodity flow problem is formulated; it is shown that its deterministic equivalent is the linear programming problem.

W. MOLISZ

MAXIMIZATION DES ÉCOULEMENTS STATIQUES À COMPOSANTES MULTIPLES QUAND DES BRANCHES DU CIRCUIT SONT ENDOMMAGÉS

Résumé

Dans l'article on considère le problème des écoulements statiques à composantes multiples et on construit un modèle aléatoire de ces écoulements dans les branches du circuit. On formule un problème probabilistique des écoulement et puis on le transforme en un équivalent problème de la programmation linéaire.

W. MOLISZ

MAXIMIERUNG MEHRBESTANDTEILIGER STATISCHER DURCHFLÜSSE BEI BESCHÄDIGUNGEN VON NETZZWEIGEN

Zusammenfassung

In der Arbeit wurde der Durchfluß in Netzen analysiert, und es wurde auf die Unvollkommenheit deterministischer Modelle aufmerksam gemacht. Außerdem wurde das Problem mehrbestandteiliger statistischer Durchflüsse betrachtet, und für die Durchsatzleistung der Zweige ein willkürliches Modell eingeführt.

Das probabilistische Problem der Durchflüsse wurde formuliert, und auf die Basis einer äquivalenten linearen Programmierung gebracht.

В. МОЛИШ

МАКСИМАЛИЗАЦИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СТАТИЧЕСКИХ ПОТОКОВ
В УСЛОВИЯХ ПОВРЕЖДЕНИЙ СЕТЕВЫХ ВЕТВЕЙ

Р е з ю м е

В работе посвященной анализу потоков в многоузловых сетях обращено внимание на несовершенство детерминистических моделей сети. Рассмотрена проблема статических многокомпонентных потоков и введена вероятностная модель пропускной способности каналов — ветвей сети. Сформулирована вероятностная задача потоков, которая сведена к задаче линейного программирования.

Optymalizacja niesynchronicznych systemów wielodostępowych ze zwielokrotnianiem dwuetapowym

WOJCIECH SOBCZAK (GDAŃSK)

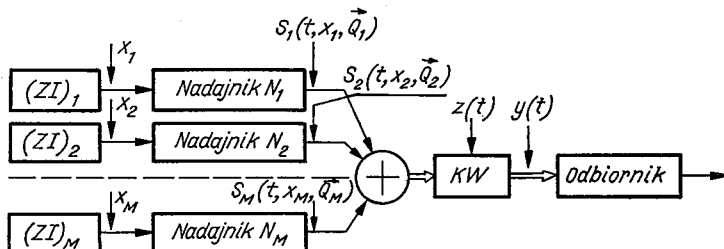
Instytut Telekomunikacji Politechniki Gdańskiej

Otrzymano 19.4.1974

Praca dotyczy systemów wielodostępowych, w których przesyłane są informacje analogowe, zaś sygnały nadawane zależą od parametrów biernych. Jako kryterium optymalizacji przyjęto błędy średniokwadratowe decyzji. Podano wzory umożliwiające wyznaczanie błędów średniokwadratowych optymalizowanych reguł odbioru.

1. OPTYMALIZACJA REGUŁ ODBIORU

W pracy niniejszej zakłada się, że istnieje M źródeł informacji wysyłających wiadomości będące elementami zbiorów jednowymiarowych ciągłych. Proces zwielokrotniania jest realizowany w dwu etapach. Z każdym źródłem informacji związany jest nadajnik wysyłający sygnał składowy. Sygnały składowe sumują się tworząc sygnał złożony, który jest



Rys. 1. Ogólna struktura systemu wielodostępowego ze zwielokrotnianiem dwuetapowym

przesyłany przez wspólny kanał KW . Struktura omawianego systemu pokazana jest na rysunku 1. Systemy o powyższej strukturze opisane są np. w pracach [1], [2], [3] i [4]. W cytowanych pracach nie uwzględniano wpływu parametrów biernych na sygnały nadawane. Wobec powyższego przyjmiemy teraz, że sygnały składowe są funkcjami czasu; zależą ponadto od adresu (czyli numeru źródła informacji), wiadomości (którą aktualnie przenoszą) oraz od parametrów biernych [5]. Jako model sygnałów nadawanych przyjmuje się funkcje $s_m(t, x_m, \vec{Q}_m)$, gdzie $\vec{Q}_m = (Q_m^{(1)}, Q_m^{(2)}, \dots, Q_m^{(k)})$ tworzą zespół parametrów wpływających na postać sygnałów nadawanych. Zakładamy dalej, że parametry bierne $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_M$ są przypadkowe i statystycznie niezależne. Sygnały składowe mają postać

$$s_m(t, x_m, \vec{Q}_m) = x_m \Phi_m(t, \vec{Q}_m), \quad 0 < t \leq T, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (1)$$

gdzie funkcje $\Phi_m(t, \vec{Q}_m)$ tworzą rodzinę funkcji liniowo niezależnych.

Wynika stąd, że sygnał złożony jest teraz następujący

$$s(t; x_1, x_2, \dots, x_M; \vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_M) = \sum_{m=1}^M x_m \Phi_m(t, \vec{Q}_m), \quad 0 < t \leq T. \quad (2)$$

Odnośnie kanału zakłada się, że sygnał odebrany $y(t)$ jest sumą sygnału nadawanego oraz białego szumu gaussowskiego. W celu znalezienia optymalnych reguł decyzyjnych, należy wcześniej wyznaczyć warunkową gęstość prawdopodobieństwa nadawanych wiadomości przy ustalonym sygnale odebranym $y(t)$. Ponieważ sygnał złożony jest funkcją nie tylko wiadomości, ale również parametrów biernych, wobec tego warunkowa gęstość prawdopodobieństwa sygnałów odbieranych przy ustalonych wiadomościach nadanych (x_1, x_2, \dots, x_M) wyraża się wzorem

$$p_y[y(\cdot)|x_1, \dots, x_M] = \int_{\Omega_1} \dots \int_{\Omega_M} p_y[y(\cdot)|x_1, \dots, x_M; \vec{Q}_1, \dots, \vec{Q}_M] p(\vec{Q}_1, \dots, \vec{Q}_M|x_1, \dots, x_M) d\vec{Q}_1, \dots, d\vec{Q}_M \quad (3)$$

gdzie Ω_m ($m = 1, 2, \dots, M$) jest obszarem zmienności parametrów \vec{Q}_m .

Ze wzoru (3) wynika, że

$$p_x[x_1, \dots, x_M|y(\cdot)] = C \int_{\Omega_1} \dots \int_{\Omega_M} p_y[y(\cdot)|x_1, \dots, x_M; \vec{Q}_1, \dots, \vec{Q}_M] p(x_1, \dots, x_M; \vec{Q}_1, \dots, \vec{Q}_M) d\vec{Q}_1, \dots, d\vec{Q}_M. \quad (4)$$

Ponieważ w kanale występuje biały szum gaussowski, wobec tego

$$p_y[y(\cdot)|x_1, \dots, x_M; \vec{Q}_1, \dots, \vec{Q}_M] = C_1 \exp \left\{ -\frac{1}{2S_0} \int_0^T \left[y(t) - \sum_{m=1}^M x_m \Phi_m(t, \vec{Q}_m) \right]^2 dt \right\}. \quad (5)$$

Podstawiając wyrażenie (5) do wzoru (4) otrzymujemy

$$p_x[x_1, \dots, x_M|y(\cdot)] = C' \int_{\Omega_1} \dots \int_{\Omega_M} \left[\exp \left\{ -\frac{1}{2S_0} \int_0^T \left[y(t) - \sum_{m=1}^M x_m \Phi_m(t, \vec{Q}_m) \right]^2 dt \right\} \right] p(x_1, \dots, x_M; \vec{Q}_1, \dots, \vec{Q}_M) d\vec{Q}_1, \dots, d\vec{Q}_M \quad (6)$$

Jeżeli wiadomości mają rozkład równomierny oraz wiadomości i parametry bierne są statystycznie niezależne, wówczas

$$\frac{\partial}{\partial x_l} p_x[x_1, \dots, x_M|y(\cdot)] = C'' \int_{\Omega_1} \dots \int_{\Omega_M} \left\{ \frac{1}{S_0} \int_0^T \left[y(t) - \sum_{m=1}^M x_m \Phi_m(t, \vec{Q}_m) \right] \Phi_l(t, \vec{Q}_l) \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2S_0} \int_0^T \left[y(t) - \sum_{m=1}^M x_m \Phi_m(t, \vec{Q}_m) \right]^2 dt \right\} p(\vec{Q}_1, \dots, \vec{Q}_M) d\vec{Q}_1, \dots, d\vec{Q}_M, \quad (7)$$

$l = 1, 2, \dots, M.$

Wynika stąd, że optymalne decyzje są rozwiązaniami następującego układu M równań

$$\int_{\Omega_1} \dots \int_{\Omega_M} \left\{ \int_0^T \left[y(t) - \sum_{m=1}^M x_m \Phi_m(t, \vec{Q}_m) \right] \Phi_l(t, \vec{Q}_l) dt \right\} \exp \left\{ - \frac{1}{2S_o} \int_0^T \left[y(t) - \sum_{m=1}^M x_m \Phi_m(t, \vec{Q}_m) \right]^2 dt \right\} p(\vec{Q}_1, \dots, \vec{Q}_M) d\vec{Q}_1, \dots, d\vec{Q}_M = 0, \quad (8)$$

$$l = 1, 2, \dots, M.$$

Z uwagi na trudności znalezienia rozwiązań powyższego układu równań w przypadku ogólnym, przyjmiemy założenie upraszczające. Zakładamy, że stosunek sygnału do szumu $\bar{\rho}$ jest na tyle duży, że

$$\exp \left\{ - \frac{1}{2S_o} \int_0^T \left[y(t) - \sum_{m=1}^M x_m \Phi_m(t, \vec{Q}_m) \right]^2 dt \right\} \approx 1. \quad (9)$$

Przy powyższym założeniu, równania (8) upraszczają się

$$\int_{\Omega_1} \dots \int_{\Omega_M} \left\{ \int_0^T \left[y(t) - \sum_{m=1}^M x_m \Phi_m(t, \vec{Q}_m) \right] \Phi_l(t, \vec{Q}_l) dt \right\} p(\vec{Q}_1, \dots, \vec{Q}_M) d\vec{Q}_1, \dots, d\vec{Q}_M = 0, \quad (10)$$

$$l = 1, 2, \dots, M.$$

Po prostych algebraicznych przekształceniach można je sprowadzić do postaci

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M x_m \int_{\Omega_m} \int_{\Omega_l} \int_0^T \Phi_m(t, \vec{Q}_m) \Phi_l(t, \vec{Q}_l) p(\vec{Q}_m, \vec{Q}_l) dt d\vec{Q}_m d\vec{Q}_l = \\ = \int_{\Omega_l} \int_0^T y(t) \Phi_l(t, \vec{Q}_l) p(\vec{Q}_l) dt d\vec{Q}_l, \end{aligned} \quad (11)$$

$$l = 1, 2, \dots, M.$$

Wprowadźmy upraszczające oznaczenia

$$a_{ml} = \int_{\Omega_m} \int_{\Omega_l} \int_0^T \Phi_m(t, \vec{Q}_m) \Phi_l(t, \vec{Q}_l) p(\vec{Q}_m, \vec{Q}_l) dt d\vec{Q}_m d\vec{Q}_l. \quad (12)$$

Podstawiając je do równań (11) otrzymujemy

$$\sum_{m=1}^M a_{ml} x_m = \int_{\Omega_l} \int_0^T y(t) \Phi_l(t, \vec{Q}_l) p(\vec{Q}_l) dt d\vec{Q}_l, \quad (13)$$

$$l = 1, 2, \dots, M.$$

Quasi-optymalne decyzje (z uwagi na założenie (9)) są rozwiązaniem powyższego układu równań, a zatem

$$x_m^*(y) = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1m-1} \int_{\Omega_1} \int_0^T y(t) \Phi_1(t, \vec{Q}_1) p(\vec{Q}_1) dt d\vec{Q}_1 a_{1m+1} \dots a_{1M} \\ \dots \\ a_{M1} \dots a_{Mm-1} \int_{\Omega_M} \int_0^T y(t) \Phi_M(t, \vec{Q}_M) p(\vec{Q}_M) dt d\vec{Q}_M a_{Mm+1} \dots a_{MM} \end{vmatrix} \quad (14)$$

gdzie

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1M} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{M1} & \dots & a_{MM} \end{vmatrix},$$

zaś elementy a_{ml} ($m, l = 1, 2, \dots, M$) są określone przy pomocy wzoru (12).

2. JAKOŚĆ REGUŁ QUASI-OPTYMALNYCH

Zakładamy teraz, że nadany został zespół wiadomości (x'_1, \dots, x'_m). Sygnał odebrany jest wówczas realizacją procesu stochastycznego

$$\underline{Y}(t) = \sum_{m=1}^M x'_m \Phi_m(t, \vec{Q}_m) + \underline{Z}(t). \quad (15)$$

Z wzoru (14) widać, że quasi-optymalne decyzje są liniowymi kombinacjami funkcjonałów liniowych sygnałów odbieranych. Podstawiając proces stochastyczny (15) do wzoru (14) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \underline{X}_m^*(\vec{x}') &= \\ &= \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1m-1} \int_{\Omega_1} \int_0^T \left[\sum_{k=1}^M x'_k \Phi_k(t, \vec{Q}_k) + \underline{Z}(t) \right] \Phi_1(t, \vec{Q}_1) p(\vec{Q}_1) dt d\vec{Q}_1 a_{1m+1} \dots a_{1M} \\ \dots \\ a_{M1} \dots a_{Mm-1} \int_{\Omega_M} \int_0^T \left[\sum_{k=1}^M x'_k \Phi_k(t, \vec{Q}_k) + \underline{Z}(t) \right] \Phi_M(t, \vec{Q}_M) p(\vec{Q}_M) dt d\vec{Q}_M a_{Mm+1} \dots a_{MM} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

Wariancje zmiennych \underline{X}_m^* ($m = 1, 2, \dots, M$) są błędami średniokwadratowymi decyzji. Stwierdzimy to znajdując wpierw wartości średnie decyzji. W tym celu podstawmy proces (15) do równań (13)

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M a_{ml} \underline{X}_m^*(\vec{x}') &= \\ &= \int_{\Omega_l} \int_0^T \left[\sum_{m=1}^M x'_m \Phi_m(t, \vec{Q}_m) + \underline{Z}(t) \right] \Phi_l(t, \vec{Q}_l) p(\vec{Q}_l) dt d\vec{Q}_l, \end{aligned} \quad (17)$$

$$l = 1, 2, \dots, M.$$

signal forming rules case. The additive white Gaussian noise is operating in the channel. Mean square errors are criteria of the system quality. Estimated solutions of the optimization problem are found and mean square errors for them calculated.

W. SOBCZAK

OPTIMISATION DES SYSTÈMES ASYNCHRONIQUES À ACCÈS MULTIPLES

R é s u m é

Dans l'article on considère les systèmes à accès multiples, où on transmet des informations et les signaux remis dépendent des paramètres passifs. Comme le critère de l'optimisation on a choisi les erreurs carrées d'une décision. On a donnée des formules qui permettent à déterminer les erreurs carrées des règles de la réception optimisées.

W. SOBCZAK

OPTIMIERUNG NICHTSYNCHRONISCHER MEHRABSTÄNDIGER SYSTEME MIT ZWEIETAPPENMÄSSIGER VERVIELFACHUNG

Z u s a m m e n f a s s u n g

Die Arbeit betrifft mehrabständige Systeme, mit deren Hilfe Analoginformationen überwiesen werden, wobei die Sondersignale von Passivparametern abhängig sind.

Es wurden Formeln gebracht, die es ermöglichen, eine Fehlerbestimmung mittelquadratischer optimierter Empfangsregeln zu bestimmen.

В. СОБЧАК

ОПТИМИЗАЦИЯ АСИНХРОННЫХ МНОГОВХОДНЫХ СИСТЕМ С ДВУХЭТАПНОЙ МУЛЬТИПЛИКАЦИЕЙ

Р е з ю м е

Работа посвящена методом оптимизации многовходных, непрерывных, асинхронных систем. Для оценки качества принято среднеквадратическую ошибку. Найдены оптимальные структуры приемников и оценено их качество.

Wykorzystanie metody badań statystycznych do oceny niezawodności systemów teletransmisyjnych

OLGA CHOREŃ (GDAŃSK), MARIAN ZIENTALSKI (GDAŃSK)

Instytut Telekomunikacji Politechniki Gdańskiej

Otrzymano 6.4.1974

W artykule omówiono zastosowanie metody modelowania statystycznego (Monte-Carlo) do rozwiązywania zagadnień niezawodnościowych systemów teletransmisyjnych. Jako przykład określono podstawowe charakterystyki niezawodności stacji końcowej opracowanego w kraju systemu telefonii nośnej 960-krotnej.

1. WPROWADZENIE

Metody analityczne stosowane do określania niezawodności systemów złożonych, Pomimo że są metodami dość ogólnymi, są bardzo kłopotliwe do wykorzystania w obliczeniach inżynierskich. Wynika to z faktu, że aparat matematyczny tych metod jest bardzo złożony [2], a rozwiązanie w postaci zamkniętej udaje się otrzymać jedynie dla pewnych przypadków szczególnych.

Konieczność nałożenia wielu ograniczeń i uproszczeń może zniekształcić obraz niezawodności, a w wielu przypadkach doprowadzić wręcz do błędnych wyników i wniosków. Dlatego wykorzystanie metod ogólnych, czy opracowanie pewnych szczególnych modeli matematycznych nie rozwiązuje na razie problemu stworzenia inżynierskiej metodyki określenia niezawodności systemów złożonych.

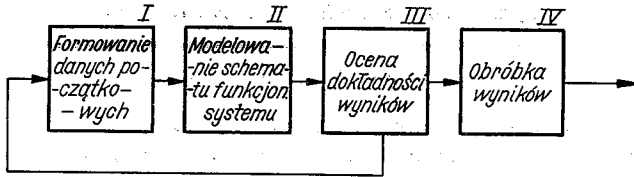
W tej sytuacji bardzo interesujące wydaje się wykorzystanie dla oceny niezawodności systemów złożonych metody modelowania statystycznego, zwanej również metodą Monte-Carlo. Metoda ta pozwala na wyeliminowanie wielu wad cechujących metody analityczne. Została ona wykorzystana w Instytucie Telekomunikacji PG dla oceny niezawodności krajowego systemu telefonii 960-krotnej TN-960.

2. OGÓLNY OPIS METODY MODELOWANIA STATYSTYCZNEGO

Istota metody modelowania statystycznego (Monte-Carlo) polega na zbudowaniu modelu probabilistycznego rozpatrywanego zagadnienia, realizacji tego modelu na elektronicznej maszynie cyfrowej oraz przyjęciu otrzymanych wyników jako przybliżonego rozwiązania zadania. Ogólny schemat blokowy statystycznego algorytmu modelowania procesu funkcjonowania systemu metodą Monte-Carlo przedstawiono na rysunku 1.

Poszczególne bloki algorytmu spełniają następujące funkcje.

Blok I. W zależności od postawionego zadania, w bloku tym generowane są probabilistyczne charakterystyki zgodnie z przyjętym schematem niezawodnościowym. W przypadku systemów o szeregowej strukturze niezawodnościowej działanie bloku polega głównie na formowaniu ciągów niezależnych liczb losowych (czasów poprawnej pracy i czasów odnowy) o zadanych rozkładach. W przypadku systemów o równoległej strukturze niezawodnościowej zachodzi konieczność formowania losowych wektorów i losowych procesów o zadanych charakterystykach probabilistycznych, modelowania zależnych zmiennych losowych, formowania macierzy korelacyjnych, itd.



Rys. 1. Statystyczny algorytm modelowania procesu funkcjonowania systemu metodą Monte-Carlo

Przy sporządzaniu podalgorytmu bloku I korzystamy z metod formowania ciągów liczb losowych o rozkładzie równomiernym [4, 7], a następnie z metod przekształcania tych ciągów w niezbędne zależności stochastyczne [4].

Blok II. W przypadku systemów nieodnawialnych blok II realizuje zależności pomiędzy losowymi czasami poprawnej pracy poszczególnych elementów T_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), a ogólnym czasem poprawnej pracy systemu T_s :

$$\Psi_1: X_1 \rightarrow Y_1, \quad (1)$$

gdzie:

$X_1 = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ — zbiór czasów poprawnej pracy poszczególnych elementów systemu,

$Y_1 = \{T_s\}$ — zbiór jednoelementowy, składający się z czasu poprawnej pracy systemu,

Ψ_1 — funkcja odwzorowująca zbiór X_1 , w zbiór Y_1 , której postać zależy od rodzaju systemu.

Przy badaniu systemów odnawialnych zadanie bloku II będzie polegało na określeniu wartości losowego czasu poprawnej pracy T_s oraz losowego czasu odnowy T_{os} systemu w zależności od wartości losowych czasów poprawnej pracy T_i ($i = 1, 2, \dots, n$) i losowych czasów odnowy T_{oi} ($i = 1, 2, \dots, n$) poszczególnych jego elementów, czyli w przypadku tym blok II realizuje zależności:

$$\Psi_2: X_2 \rightarrow Y_2, \quad (2)$$

$$\Psi_3: X_2 \rightarrow Y_3, \quad (3)$$

gdzie:

$X_2 = \{T_1, T_2, \dots, T_n; T_{o1}, T_{o2}, \dots, T_{on}\}$ — zbiór czasów poprawnej pracy i czasów odnowy poszczególnych elementów systemu,

$$Y_2 = \{T_s\},$$

$$Y_3 = \{T_{os}\},$$

Ψ_2 i Ψ_3 — funkcje, odwzorowujące odpowiednio zbiór X_2 w zbiór Y_2 oraz zbiór X_2 w zbiór Y_3 .

B l o k III. W bloku tym, zarówno dla systemów o szeregowej strukturze niezawodnościowej, jak i systemów o równoległej strukturze niezawodnościowej, zachodzi ocena dokładności otrzymanych wyników, na podstawie której podejmuje się decyzje o kontynuowaniu lub przerywaniu procesu modelowania. Teoretyczną podstawą określenia dokładności wyników rozwiązania zagadnień metodą Monte-Carlo jest prawo wielkich liczb i teoria estymacji [3, 8].

Średnia arytmetyczna $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i$ z N -elementowej próby ma rozkład asymptotycznie normalny $N\left(E(T), \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma_T\right)$, gdzie $E(T)$ i σ_T oznaczają wartość przeciętną i odchylenie standardowe rozkładu teoretycznego modelowanej zmiennej losowej T . Dla zadanego poziomu ufności α i dla z góry danej wartości ε (błąd metody Monte-Carlo) możemy wyznaczyć licznosc N próby, tak aby spełniony był warunek:

$$P\left(\left|\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i - E(T)\right| < \varepsilon\right) = \alpha. \quad (4)$$

Korzystamy w tym celu z centralnego twierdzenia Lindberga-Levy'ego i stwierdzamy, że jeżeli zachodzi:

$$N \geq \frac{\sigma_T^2}{\varepsilon^2} \left[\Phi^{-1} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right]^2,$$

gdzie

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt, \quad (5)$$

to warunek (4) jest spełniony. Jeżeli wariancja σ_T^2 nie jest znana, to we wzorze (5) możemy ją zastąpić empiryczną wariancją: $s_T^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (t_i - \hat{t})^2$, gdzie $\hat{t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i$, bo licznosc próby jest duża.

Należy podkreślić, że przy rozwiązywaniu zagadnień niezawodnościowych na *EMC* nie należy dążyć do zbyt dużej dokładności, gdyż same dane początkowe już obciążone są pewnym błędem. W związku z tym dokładność kilku procent jest do przyjęcia, co w sposób istotny zmniejsza liczbę doświadczeń.

B l o k IV. Blok ten określa wymagane charakterystyki niezawodności systemu. Obróbka informacji przebiega w sposób następujący. Pobieramy N -elementową prostą próbę losową $(t_{s1}, t_{s2}, \dots, t_{sN})$, gdzie t_{sl} jest realizacją zmiennej losowej T_s w l -tym doświadczeniu, ($l = 1, 2, \dots, N$).

Przedział $[0, t_{smax}]$, gdzie $t_{smax} = \max_{l=1, \dots, N} \{t_{sl}\}$, dzielimy na r rozłącznych przedziałów (zwanych przedziałami klasowymi) o długości:

$$\Delta t = \frac{t_{smax}}{r}. \quad (6)$$

Liczbę przedziałów r wybieramy w taki sposób, aby przy próbie informacji można stosować istniejące testy zgodności [3, 7]. Jako jeden ze wzorów na określenie liczby przedziałów, można zaproponować następujący:

$$r = 1 + 3,3 \lg N. \quad (7)$$

Kolejne przedziały mają numery odpowiednio od 1 do r , wówczas numer przedziału, do którego trafi l -ta realizacja czasu poprawnej pracy systemu t_{sl} określimy wg wzoru:

$$k = 1 + \text{entier} \left(\frac{t_{sl}}{\Delta t} \right), \quad (k = 1, 2, \dots, r), \quad (8)$$

gdzie: $\text{entier} \left(\frac{t_{sl}}{\Delta t} \right)$ oznacza część całkowitą liczby $\left(\frac{t_{sl}}{\Delta t} \right)$.

W ten sposób po przeprowadzeniu N niezależnych doświadczeń otrzymamy w każdym z r przedziałów liczby, charakteryzujące częstość trafienia zmiennej losowej T_s do danego przedziału. Stąd można określić podstawowe charakterystyki poprawnej pracy systemu:

1) częstość uszkodzeń $a_s^*(t_k)$:

$$a_s^*(t_k) = \frac{m_k}{\Delta t_k N}, \quad (k = 1, 2, \dots, r), \quad (9)$$

gdzie m_k — liczba uszkodzeń w k -tym przedziale;

2) prawdopodobieństwo poprawnej pracy systemu $R_s^*(t_k)$:

$$R_s^*(t_k) = \frac{N - n_k}{N}, \quad (10)$$

gdzie: $n_k = \sum_{l=1}^k m_l$ ($k = 1, 2, \dots, r$);

3) średni czas poprawnej pracy systemu T_s^* :

$$T_s^* = \frac{\sum_{k=1}^r t_k m_k}{N}, \quad (11)$$

gdzie t_k — środek k -tego przedziału klasowego;

4) intensywność uszkodzeń $\lambda_s^*(t_k)$:

$$\lambda_s^*(t_k) = \frac{m_k}{(N - n_{k-1}) \Delta t_k} \quad (k = 1, 2, \dots, r), \quad (12)$$

gdzie $n_{k-1} = \sum_{l=1}^{k-1} m_l$ — sumaryczna liczba uszkodzeń na początku rozpatrywanego przedziału czasu.

W maszynach cyfrowych można modelować również procesy naprawy systemu. W tym celu zakres zmian czasu odnowy $(0, t_{os,max})$ rozbija się na r_o przedziałów o długości Δt_o . Numer przedziału, oznaczony przez k_o , określamy wg wzoru:

$$k_o = 1 + \text{entier} \left(\frac{t_{osl}}{\Delta t_o} \right), \quad (k_o = 1, 2, \dots, r_o), \quad (13)$$

gdzie t_{osl} — czas odnowy w l -tym doświadczeniu.

Wówczas średni czas odnowy określimy wg wzoru:

$$T_{os}^* = \frac{\sum_{k_o=1}^{r_o} t_{k_o} m_{k_o}}{N_1}, \quad (14)$$

gdzie:

- N_1 — ogólna liczba napraw systemu,
- m_{k_o} — liczba napraw systemu w k_o -tym przedziale,
- t_{k_o} — środek k_o -tego przedziału klasowego.

Na podstawie przytoczonych wyżej relacji można określić również inne charakterystyki niezawodności, np. współczynnik gotowości do pracy K_{gs} , współczynnik przestoju K_{ps} itd.:

$$K_{gs} = \frac{T_s^*}{T_s^* + T_{os}^*}, \quad (15)$$

$$K_{ps} = 1 - K_{gs}. \quad (16)$$

Dla systemów o szeregowej strukturze niezawodnościowej postać funkcji Ψ_1 , Ψ_2 , Ψ_3 nie zależy od liczby elementów wchodzących w skład systemu. W zależności od liczby elementów zmienia się tylko ilość czasu maszynowego, potrzebnego dla przeprowadzenia jednego doświadczenia, a w związku z tym również ogólny czas rozwiązywania postawionego zadania, natomiast charakter wykonywanych operacji pozostaje taki sam.

Przy badaniach systemów o równoległej strukturze niezawodnościowej wykorzystujemy fakt, że składają się one z podsystemów o szeregowej strukturze niezawodnościowej, które są podstawą dla określenia niezawodności i efektywności całego systemu. Stochastyczne operatory opisujące sformalizowany schemat funkcjonowania podsystemów o szeregowej strukturze niezawodnościowej są operatorami uniwersalnymi, dlatego proces określenia niezawodności i efektywności systemów o równoległej strukturze niezawodnościowej polega na wykorzystaniu tych operatorów przy jednoczesnym uwzględnieniu charakterystycznych cech funkcjonowania rozpatrywanego systemu.

Metoda badań statystycznych posiada szereg zalet, które wyróżniają ją spośród innych znanych obecnie metod obliczeniowych, ponieważ:

- a) umożliwia ocenę niezawodności systemów o dowolnym stopniu złożoności,
- b) umożliwia rozwiązanie zagadnień oceny niezawodności systemów przy ogólnych założeniach odnośnie czasu pracy i czasu odnowy,
- c) posiada prosty schemat obliczeniowy,
- d) umożliwia łatwą ocenę dokładności otrzymanych wyników,
- e) wykazuje małą czułość względem poszczególnych błędów,
- f) charakteryzuje się brakiem kumulacji błędów.

Jednakże posługując się metodą Monte-Carlo należy pamiętać, że oprócz wielu zalet posiada ona również wady, ograniczające w niektórych przypadkach jej zastosowanie. Są to:

- 1) korelacja wyników pojawiająca się ze wzrostem liczby doświadczeń; w związku z tym, w przypadkach wykorzystania generatorów liczb pseudolosowych, należy uwzględnić cykliczność ciągu otrzymanych liczb,
- 2) konieczność realizacji określonej liczby doświadczeń w celu otrzymania żądanej dokładności, co może doprowadzić do błędów wymienionych w pkt. 1;
- 3) konieczność spełnienia wymagania o niezależności doświadczeń.

Mimo szeregu wymienionych wyżej wad, metoda modelowania statystycznego jest wygodnym i ważnym narzędziem w dziedzinie rozwiązywania zagadnień niezawodnościowych, ponieważ pozwala sprowadzić ogrom tych zagadnień do stosunkowo niewielkiej liczby uniwersalnych algorytmów charakteryzujących się prostotą i łatwością realizacji na nowoczesnych maszynach cyfrowych. W przypadku systemów złożonych jest to najkorzystniejsza metoda otrzymania rozwiązania.

Zastosowanie metody Monte-Carlo do oceny niezawodności systemów teletransmisyjnych pokazano na przykładzie stacji końcowej systemu telefonii nośnej 960-krotnej.

3. OCENA NIEZAWODNOŚCI STACJI KOŃCOWEJ SYSTEMU TN-960

3.1. Postawienie problemu

Przy ocenie niezawodności systemów teletransmisyjnych powszechnie przyjmuje się szeregową strukturę niezawodnościową, tzw. model „najgorszego elementu”, w którym uszkodzenie dowolnego elementu powoduje uszkodzenie systemu w całości. Jest to model bardzo uproszczony, możliwy do przyjęcia tylko jako pierwsze przybliżenie w początkowym okresie opracowywania systemu. Przy przyjęciu tego modelu otrzymujemy zazwyczaj wygórowane wymagania niezawodnościowe w stosunku do poszczególnych elementów systemu, których spełnienie jest bardzo kosztowne i w wielu przypadkach nie ma uzasadnienia.

Dlatego w przeprowadzonej ocenie niezawodności systemu TN-960 będziemy rozpatrywać stację końcową jako system odnawialny o równoległej strukturze niezawodnościowej. Wówczas jakość funkcjonowania systemu określimy za pomocą funkcji efektywności $\Phi(t)$, która stanowi wartość przeciętną efektu wyjściowego systemu $\vartheta[H(\cdot), t]$ [8] w funkcji czasu:

$$\Phi(t) = E\{\vartheta[H(\cdot), t]\} = \sum_{j=0}^{M-1} \Phi^{(j)}(t) P[H^{(j)}(t)], \quad (17)$$

gdzie:

$\Phi^{(j)}(t)$ — realizacja funkcjonału $\vartheta[H(\cdot), t]$ w stanie $H^{(j)}$ ($j = 0, 1, 2, \dots, M-1$),

$P[H^{(j)}(t)]$ — prawdopodobieństwo znajdowania się systemu w stanie $H^{(j)}$.

Funkcja $\Phi^{(j)}(t)$ określa efekt wyjściowy systemu w stanie $H^{(j)}$ ($j = 0, 1, 2, \dots, M-1$).

Należy podkreślić, że w praktyce będą interesować nas nie średnie wartości efektywności funkcjonowania systemu, lecz progowe. Rzeczywiście, określenie sumarycznego efektu pracy systemu w przypadku bardzo małych $\Phi^{(j)}(t)$ nie wydaje się być celowe. Uwzględniając natomiast techniczne, fizyczne i inne właściwości systemu, można w każdej chwili czasu t wyznaczyć dla $\Phi^{(j)}(t)$ wartość dopuszczalną $\Phi_{dop}(t)$. Wówczas te stany, dla których efekt pracy systemu jest mniejszy od efektu dopuszczalnego $\Phi_{dop}(t)$, będą traktowane jako uszkodzenia systemu.

Proces określenia niezawodności i efektywności stacji końcowej systemu TN-960 polegał na:

- wyborze modelu uszkodzeń i odnowy poszczególnych elementów elektronicznych stacji końcowej,
- określeniu wskaźników niezawodności poszczególnych zespołów stacji końcowej,
- zbudowaniu zgodnie z ustaloną efektywnością modelu niezawodnościowego stacji końcowej jako systemu o równoległej strukturze niezawodnościowej,
- określeniu prawdopodobieństwa znajdowania się systemu w poszczególnych stanach,
- obliczeniu niezawodności i efektywności funkcjonowania systemu.

3.2. Wybór modelu niezawodnościowego

3.2.1. Uszkodzenia elementów

Czas poprawnej pracy elementów elektronicznych uwarunkowany jest jakością produkcji (błędy konstrukcyjne i technologiczne), warunkami eksploatacji oraz procesami starzenia. Można przy tym wyróżnić uszkodzenia elementów, spowodowane działaniem bodźców skokowych (uszkodzenia nagłe) oraz uszkodzenia spowodowane działaniem bodźców kumulujących się.

W pierwszym przypadku mechanizm pojawienia się uszkodzenia polega na tym, że w pewnej losowej chwili czasu występuje nagłe duże odchylenie parametru roboczego elementu od wartości dopuszczalnej, które związane jest z przebicciem, przerwą lub innym fizycznym zniszczeniem elementu. Mechanizmowi pojawienia się uszkodzeń na skutek oddziaływania bodźców kumulujących się odpowiada sytuacja, w której uszkodzenie powstaje w wyniku stopniowego starzenia się lub zużywania elementu. Istotnie, jakkolwiek doskonała byłaby konstrukcja elementu, a także jego technologia i materiały, ulega on z biegiem czasu określonym zmianom nieodwracalnym. Zmiany te, to korozja, stopniowa deformacja i zmęczenie materiałów, dyfuzja jednego materiału w drugi itp. Procesy te nakładają się na siebie, oddziałują wzajemnie i w wyniku końcowym prowadzą do zmiany charakterystyk roboczych elementu.

Najbardziej typowa dla praktyki jest sytuacja, w której element poddany jest działaniu kilku niezależnych bodźców uszkadzających.

W wielu pracach dotyczących niezawodności elementów elektronicznych [1, 7] wykazano, że czas poprawnej pracy i -tego elementu T_i ($i = 1, 2, \dots, n$) jest dobrze opisywany za pomocą rozkładu Weibulla. Wówczas dystrybuanta zmiennej losowej T_i ma następującą postać

$$F_i(t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{a_i} \right)^{b_i} \right], \quad \begin{matrix} a_i > 0, & b_i > 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n) \end{matrix} \quad (18)$$

gdzie:

a_i i b_i — parametry rozkładu,
 n — ogólna liczba elementów.

Na podstawie (18) można wyznaczyć następujące charakterystyki niezawodności elementów:

1) prawdopodobieństwo poprawnej pracy $R_i(t)$:

$$R_i(t) = \exp \left[- \left(\frac{t}{a_i} \right)^{b_i} \right] \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (19)$$

2) intensywność uszkodzeń $\lambda_i(t)$:

$$\lambda_i(t) = \frac{b_i}{a_i} \left(\frac{t}{a_i} \right)^{b_i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (20)$$

3) średni czas poprawnej pracy T_i :

$$T_i = a_i \Gamma \left(1 + \frac{1}{b_i} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (21)$$

gdzie $\Gamma \left(1 + \frac{1}{b_i} \right)$ jest funkcją gamma.

Przy określeniu parametrów a_i i b_i dla rozkładów czasu poprawnej pracy poszczególnych elementów elektronicznych wzięto pod uwagę fakt, że bierne zespoły (filtry, transformatory), jak również obwody wejściowe wzmacniaczy pracują przy niskich poziomach sygnału, a średnie obciążenie elementów wynosi 10 ÷ 20% obciążenia nominalnego. W związku z tym można uważać, że dominującą przyczyną powstawania uszkodzeń będą nie przeciążenia elementów, lecz procesy starzenia. One również będą decydować o wartościach współczynników a_i i b_i .

Jako podstawowy materiał do wyznaczania współczynników a_i i b_i wykorzystano dane dotyczące intensywności uszkodzeń elementów urządzeń telefonii nośnej [6]. Zgodnie z tymi danymi elementy zostały podzielone na trzy zasadnicze grupy, w których intensywności uszkodzeń wynoszą odpowiednio:

- dla grupy I (oporniki) — $1 \cdot 10^{-9}$ [h⁻¹],
- dla grupy II (kondensatory, elementy indukcyjne, tranzystory, diody) — $1 \cdot 10^{-8}$ [h⁻¹],
- dla grupy III (potencjometry, przekaźniki, filtry, złącza stykowe) — $1 \cdot 10^{-7}$ [h⁻¹].

Jako maksymalny czas życia elementów przyjmuje się okres 25 ÷ 30 lat, gdyż jest to okres maksymalnej eksploatacji urządzeń telefonii nośnej. Wybór takiego właśnie okresu eksploatacji podyktowany jest kwestią moralnego zużycia urządzeń, związanego z szybkim rozwojem nowych technik i technologii produkcji elementów oraz ogólnym postępem technicznym.

Po przeprowadzeniu obliczeń ustalono następujące rozkłady czasu poprawnej pracy:

1) dla elementów I grupy:

$$F_1(t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{294000} \right)^{3,8} \right], \quad (22)$$

2) dla elementów II grupy:

$$F_2(t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{160400} \right)^{3,8} \right], \quad (23)$$

3) dla elementów III grupy:

$$F_3(t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{87500} \right)^{3,8} \right]. \quad (24)$$

3.2.2. Uszkodzenia zespołów

Przy wyborze modelu niezawodnościowego zespołów stacji końcowej systemu *TN-960* poczyniono następujące założenia:

- 1) uszkodzenia elementów składowych są niezależne,
- 2) każdy zespół rozpatrujemy jako nieodnawialny system o szeregowej strukturze niezawodnościowej, tj. uszkodzenie dowolnego elementu powoduje uszkodzenie zespołu w całości,
- 3) czasy poprawnej pracy elementów składowych zespołów mają rozkłady opisane wzorami (22), (23), (24).

Przyjęcie szeregowej struktury niezawodnościowej zespołów jest uzasadnione, ponieważ uszkodzenie elementu we wzmacniaczu, filtrze, modulatorze itp. spowoduje zmianę parametrów wyjściowych zespołów poza dopuszczalne tolerancje. Wówczas zmienną losową T_z , reprezentującą czas poprawnej pracy zespołu, określa się wzorem:

$$T_z = \min \{ T_1, T_2, \dots, T_n \}, \quad (25)$$

gdzie:

- T_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — zmienna losowa reprezentująca czas poprawnej pracy i -tego elementu,
 n — liczba elementów zespołu.

Spełnienie nierówności $T_z > t$ wymaga jednocześnie spełnienia nierówności $T_1 > t$, $T_2 > t$, ..., $T_n > t$. Zatem dystrybucję zmiennej losowej określimy według wzoru:

$$F_z(t) = P\{T_z < t\} = 1 - P\{T_1 > t, T_2 > t, \dots, T_n > t\}. \quad (26)$$

W przypadku, gdy zmienne T_i ($i = 1, 2, \dots, n$) są niezależne, otrzymamy:

$$F_z(t) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - F_i(t)], \quad (27)$$

gdzie $F_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) — dystrybucja czasu poprawnej pracy i -tego elementu.

Wykorzystując wzór (27) i uwzględniając fakt, że wszystkie podstawowe elementy elektroniczne zostały podzielone na trzy grupy o rozkładach czasu poprawnej pracy, opisanych wzorami (22) ÷ (24), otrzymujemy:

$$F_{z_m}(t) = 1 - \exp \left[- \sum_{k=1}^3 c_{kz_m} \left(\frac{t}{a_k} \right)^{3,8} \right], \quad (28)$$

gdzie:

$F_{z_m}(t)$ — dystrybuanta czasu poprawnej pracy m -tego zespołu,
 C_{z_m} ($k = 1, 2, 3$) — liczba elementów w k -tej grupie m -tego zespołu,
 a_k ($k = 1, 2, 3$) — parametr rozkładu Weibulla dla elementów k -tej grupy.

Przedstawiając wzór (28) w postaci:

$$F_{z_m}(t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{a_{z_m}} \right)^{3,8} \right], \quad (29)$$

gdzie:

$$a_{z_m} = \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^3 \frac{C_{kz_m}}{a_k^{3,8}} \right)^{\frac{1}{3,8}}},$$

otrzymujemy średni czas poprawnej pracy m -ego zespołu T_{z_m} :

$$T_{z_m} = a_{z_m} \Gamma \left(1 + \frac{1}{3,8} \right). \quad (30)$$

Korzystając z podanych zależności, obliczono prawdopodobieństwa poprawnej pracy $R_{kz_m}(t)$ oraz średnie czasy poprawnej pracy T_{z_m} zespołów stojaków: generacyjnego — *SG*, przemiany kanałowej — *SPK*, przemiany grup pierwotnych — *SPGP* i przemiany grup wtórnych — *SPGW* stacji końcowej systemu *TN-960*.

W celu określenia rozkładu czasu odnowy $V(t)$ wykorzystano dane dotyczące niezawodności eksploatacyjnej, uzyskane z eksploatacji urządzeń stacji końcowej systemów o mniejszej krotności. Podyktowane jest to faktem, że opracowany w kraju system *TN-960* jest obecnie badany na trasie doświadczalnej i uzyskanie pełnych informacji dotyczących niezawodności eksploatacyjnej tego systemu będzie możliwe po uruchomieniu produkcji seryjnej i wdrożeniu systemu do eksploatacji. Szereg stojaków urządzeń końcowych systemów o mniejszej krotności (np. *SPK*, *SPGP*, *SPGW* i częściowo *SG*) jest wykorzystywanych w systemie *TN-960*.

W wyniku obróbki danych wysunięto hipotezę, że rozkład czasu odnowy opisywany jest za pomocą rozkładu Weibulla:

$$V(t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{0,4183} \right)^{0,4915} \right]. \quad (31)$$

Średni czas odnowy T_o zgodnie z (31) równa się:

$$T_o = 0,86[\text{h}] \approx 50[\text{min}], \quad (32)$$

co pokrywa się ze średnią światową, która wynosi 30 ÷ 60 minut.

3.2.3. Model niezawodnościowy stacji końcowej systemu *TN-960*

Przy opracowaniu modelu niezawodnościowego stacji końcowej systemu *TN-960* kierowano się przesłankami fizycznymi i techniczno-ekonomicznymi, stanowiącymi podstawę dla określenia niezawodności i efektywności systemu.

W przypadku ogólnym efektywność systemu w stanie $H^{(j)}$ ($j = 0, 1, \dots, M-1$) jest funkcją czasu i określenie jej jest skomplikowanym problemem. W praktyce jednakże wiele systemów informacyjnych o równoległej strukturze niezawodnościowej należy do tzw. systemów z dodawaniem funkcji [8], tj. systemów w których każdy kanał odgrywa samodzielną rolę, a liczba poprawnie działających kanałów jest wskaźnikiem jakości pracy systemu. Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku urządzeń końcowych systemu TN-960. Dla takich systemów słuszna jest następująca zależność

$$\sum_{k=1}^K \Phi_k(t) = 1, \quad (33)$$

gdzie:

$\Phi_k(t)$ — efektywność systemu w przypadku działania tylko jednego k -tego kanału,
 K — ogólna liczba kanałów w systemie.

Przy określeniu granicy dopuszczalnej funkcji $\Phi^{(j)}(t)$ dla stacji końcowej systemu TN-960 poczyniono następujące założenia:

- 1) stację końcową rozpatrujemy jako system o równoległej strukturze niezawodnościowej z dodawaniem funkcji,
- 2) dla rozpatrywanych okresów czasu pracy systemu przepływ informacji w systemie jest stały, niezależny od czasu,
- 3) jako próg uszkodzenia przyjęto uszkodzenie na poziomie grupy wtórnej (60 kanałów telefonicznych).

Zgodnie z założeniem 2 efektywność systemu w stanie $H^{(j)}$ ($j = 0, 1, \dots, M-1$) jest niezależna od czasu i może być określona jako stosunek liczby poprawnie działających kanałów akustycznych n_j do ogólnej liczby kanałów N :

$$\Phi^{(j)} = \frac{n_j}{N}. \quad (34)$$

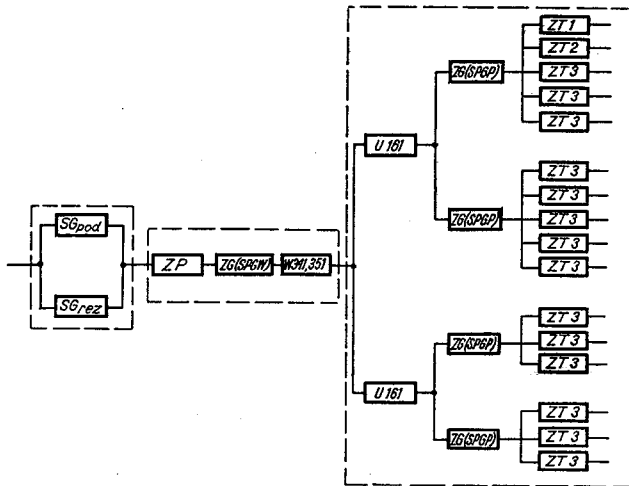
Zgodnie z założeniem 3 dopuszczalna wartość parametru $\Phi^{(j)}$ wynosi:

$$\Phi_{dop} = \frac{60}{960} = \frac{1}{16}. \quad (35)$$

Uzyskany na podstawie analizy pracy systemu schemat blokowy dla obliczenia niezawodności i efektywności stacji końcowej systemu TN-960, przy ustaleniu progu uszkodzenia stacji na poziomie grupy wtórnej, przedstawiono na rys. 2. Poszczególne bloki schematu mają szeregową strukturę niezawodnościową.

Przy sporządzaniu schematu kierowano się następującymi zasadami:

- schemat blokowy sporządza się na podstawie funkcjonalnych i elektrycznych schematów systemu,
- schemat blokowy służy tylko do pokazania wpływu poszczególnych zespołów na ogólną niezawodność systemu,
- zespoły, których uszkodzenie obniża efektywność systemu, przedstawione zostają w postaci bloków połączonych równolegle;



Rys. 2. Schemat blokowy do obliczenia niezawodności i efektywności stacji końcowej systemu TN-960 zawierający: SG — stojak generacyjny (podstawowy i rezerwowany), ZP — zespół przełączający, ZG (SPGW) — zespoły generacyjne stojaka SPGW, W 341, 351 — wzmacniacz sygnału zbiorczego w pasmie liniowym, U 161 — zespół pomocniczy, ZG (SPGP) — zespoły generacyjne dla stojaka SPGP; ZT1, ZT2, ZT3 — zespoły transmisyjne nr 1, 2, 3

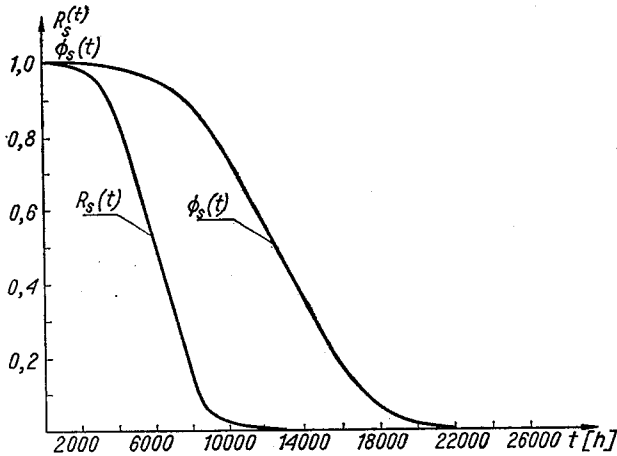
- kanał niezawodnościowy przedstawia sobą ciąg bloków połączonych szeregowo (z uwzględnieniem rezerwacji),
- bloki niezbędne dla poprawnej pracy kilku innych równolegle połączonych bloków zamieszcza się na schemacie przed tymi blokami i włącza się szeregowo względem całej grupy równolegle połączonych bloków,
- uszkodzenia poszczególnych bloków są niezależne,
- przy sporządzaniu schematu blokowego dla obliczenia niezawodności i efektywności stacji końcowej nie są uwzględnione urządzenia pomocnicze z punktu widzenia transmisji, takie jak generatory prądów pilotowych, odbiorniki pilotów, itd.,
- w przypadku niezależności uszkodzeń ciąg bloków można zamienić jednym blokiem, przedstawiającym sumę tych bloków, połączonych szeregowo w sensie niezawodnościowym.

W wyniku przeprowadzonej analizy otrzymano następujące wzory do obliczania niezawodności $R_s(t)$ i efektywności $\Phi_s(t)$ stacji końcowej TN-960 jako systemu nieodnawialnego:

$$R_s(t) = \exp \left[- \left(\frac{t}{2092} \right)^{3,8} \right], \quad (36)$$

$$\Phi_s(t) = \exp \left[- \left(\frac{t}{13440} \right)^{3,8} \right]. \quad (37)$$

Wykresy funkcji $R_s(t)$ i $\Phi_s(t)$ przedstawiono na rysunku 3.

Rys. 3. Wykresy funkcji $R_s(t)$ i $\Phi_s(t)$ w zależności od czasu

Zgodnie z (36) i (21) średni czas poprawnej pracy stacji końcowej T_s wynosi:

$$T_s = 1891 \text{ [h]}, \quad (38)$$

czyli średnio co 79 dni na stacji będzie występowało uszkodzenie.

W wielokrotnych systemach telefonii nośnej bardzo ważnym wskaźnikiem jest średni czas poprawnej pracy jednego kanału telefonicznego. Niezawodność stacji końcowej TN-960, zawierającej 960 dwutorowych zakończeń kanałowych, pod warunkiem, że uszkodzenia poszczególnych kanałów są niezależne i niezawodność kanałów jest jednako-
wa, obliczymy w sposób następujący:

$$R_s(t) = \exp \left[-960 \left(\frac{t}{a_k} \right)^{3,8} \right], \quad (39)$$

gdzie a_k — parametr rozkładu Weibulla czasu poprawnej pracy w przeliczeniu na jeden kanał telefoniczny.

Uwzględniając (36) i (21) otrzymamy wzór na obliczenie czasu poprawnej pracy jednego kanału telefonicznego T_k :

$$T_k = \sqrt[3,8]{960} 2092 \Gamma(1,263) = 11516 \text{ [h]}, \quad (40)$$

czyli w jednym kanale telefonicznym uszkodzenie będzie powstawało średnio co 16 miesięcy.

3.3. Określenie niezawodności stacji końcowej systemu TN-960 z uwzględnieniem procesów odnowy

Rozpatrywany system telefonii 960-krotnej, jak zdecydowana większość systemów technicznych jest systemem odnawialnym. Rozwiązanie zagadnienia oceny niezawodności stacji końcowej systemu TN-960 uzyskano drogą modelowania statystycznego. Poczyniono przy tym następujące założenia:

1. proces odnowy rozpoczyna się natychmiast po wystąpieniu uszkodzenia zespołu; w przypadku zespołów rezerwowanych odnowa rozpoczyna się przed wystąpieniem uszkodzenia całej grupy rezerwowej,
- 2) z chwilą zakończenia odnowy zespół natychmiast jest włączony do pracy,
- 3) uszkodzenia poszczególnych zespołów są niezależne,
- 4) rozkład czasu poprawnej pracy stojaka generacyjnego (podstawowego i rezerwowego) opisany jest wzorem:

$$F_{SG_{podst, rez}}(t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{30755} \right)^{3,8} \right], \quad (41)$$

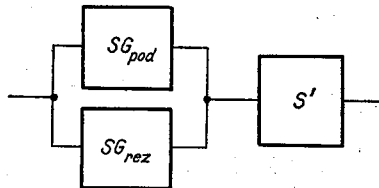
- 5) rozkład czasu poprawnej pracy stacji końcowej $F_{s'}(t)$ (bez zespołów stojaka generacyjnego) opisany jest wzorem:

$$F_{s'}(t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{2104} \right)^{3,8} \right], \quad (42)$$

- 6) rozkład czasu odnowy opisany jest wzorem (31) i jest jednakowy dla wszystkich zespołów stacji,
- 7) czas pracy i czas odnowy są zmiennymi losowymi niezależnymi.

W celu określenia niezawodności i efektywności stacji końcowej TN-960 na poziomie uszkodzenia grupy wtórnej należy zamodelować na maszynie cyfrowej wektor losowy X_2 ($X_2 = \{T_1, T_2, \dots, T_n; T_{o1}, T_{o2}, \dots, T_{on}\}$), przedstawiający sobą zbiór czasów poprawnej pracy i czasów odnowy poszczególnych bloków, pokazanych na rys. 2, oraz zrealizować zależności (2) i (3).

Wektor losowy X_2 zawiera 54 elementy składowe. W związku z trudnościami natury technicznej (ograniczenia pamięciowe i niedostateczna szybkość obliczeń) rozpatrzono tylko ten przypadek, dla którego efektywność systemu równa się jedności, czyli określono

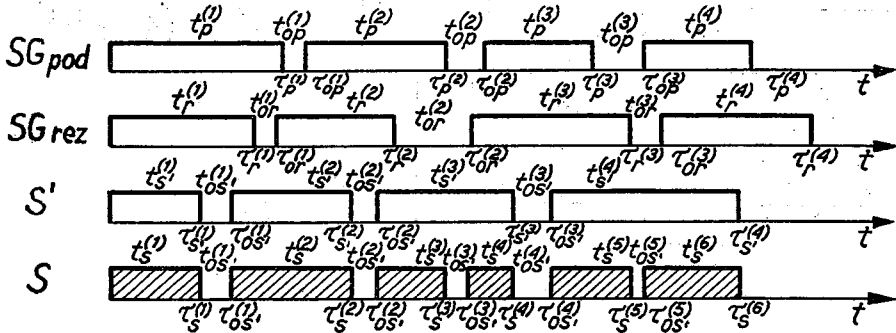


Rys. 4. Schemat blokowy dla obliczenia niezawodności stacji końcowej systemu TN-960 z uwzględnieniem procesu odnowy: SG_{podst} — stojak generacyjny podstawowy, SG_{rez} — stojak generacyjny rezerwowo, S' — połączone szeregowo w sensie niezawodnościowym zespoły stacji końcowej (bez zespołów stojaka generacyjnego)

niezawodność stacji końcowej z uwzględnieniem odnowy poszczególnych bloków. Wówczas schemat blokowy dla obliczenia niezawodności stacji będzie miał postać jak na (rys. 4).

Zgodnie z poczynionymi wyżej założeniami, możemy przedstawić diagram czasowy losowej sytuacji powstałej w procesie funkcjonowania stacji końcowej, jak na rys. 5. Wartości $t_p^{(j)}$, $t_r^{(j)}$, $t_s^{(j)}$, $t_{op}^{(j)}$, $t_{or}^{(j)}$, $t_{os}^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots$)

z rysunku 5 oznaczają czasy poprawnej pracy i czasy odnowy odpowiednich zespołów w j -tej realizacji, natomiast wartości $\tau_p^{(j)}$, $\tau_r^{(j)}$, $\tau_s^{(j)}$ oraz $\tau_{op}^{(j)}$, $\tau_{or}^{(j)}$, $\tau_{os}^{(j)}$, — odpowiednio chwile wystąpienia j -tego uszkodzenia oraz chwile zakończenia j -tej odnowy zespołów.



Rys. 5. Diagram czasowy losowej sytuacji powstałej w procesie funkcjonowania stacji końcowej

Na podstawie wzorów (2) i (3) można napisać:

$$\Psi: \{T_p, T_r, T_{s'}, T_{op}, T_{or}, T_{os'}\} \rightarrow \{T_{ps}\},$$

$$\Psi_3: \{T_p, T_r, T_{s'}, T_{op}, T_{or}, T_{os'}\} \rightarrow \{T_{os}\},$$

gdzie:

T_p, T_r — losowe czasy poprawnej pracy odpowiednio stojaków generacyjnych podstawowego i rezerwowego,

$T_{s'}$ — losowy czas pracy stacji końcowej bez uwzględnienia stojaków generacyjnych,

$T_{op}, T_{or}, T_{os'}$ — losowe czasy odnowy wymienionych wyżej zespołów,

T_{ps} — losowy czas poprawnej pracy pomiędzy uszkodzeniami stacji końcowej,

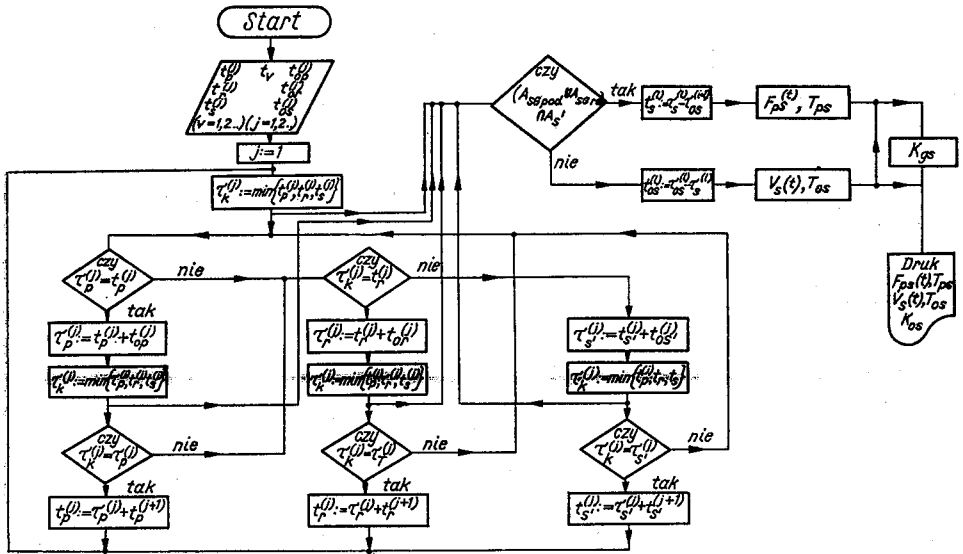
T_{os} — losowy czas odnowy stacji.

W rozpatrywanym przypadku zachodzi konieczność zamodelowania na elektronicznej maszynie cyfrowej 6-wymiarowego wektora losowego o zadanych rozkładach poszczególnych składowych wektora. Jako wynik modelowania uzyskano:

- rozkład czasu poprawnej pracy stacji końcowej pomiędzy uszkodzeniami $F_{ps}(t)$;
- średni czas pracy stacji pomiędzy uszkodzeniami T_{ps} ;
- rozkład czasu odnowy stacji $V_s(t)$;
- średni czas odnowy stacji T_{os} ;
- współczynnik gotowości stacji końcowej do pracy K_{gs} .

W celu określenia wymienionych wskaźników niezawodności należy wyznaczyć losowe chwile zmiany stanu stacji końcowej $\tau_s^{(i)}$ i $\tau_{os}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots$) i określić charakter tych zmian (uszkodzenie lub odnowa).

Schemat blokowy algorytmu, określającego wymagane charakterystyki niezawodności przedstawiono na rys. 6. Celem wygenerowania czasów poprawnej pracy i czasów od-



Rys. 6. Schemat blokowy algorytmu obliczenia niezawodności stacji końcowej systemu TN-960

nowy poszczególnych bloków wykorzystano następujący generator programowy liczb losowych o rozkładzie równomiernym:

- a) $x_v = 7333 \cdot A_{v-1} \quad (v = 1, 2, \dots)$,
- b) $t_v = x_v - \text{entier}(x_v)$,
- c) $A_v = t_v$,

gdzie:

t_v — v -ta realizacja zmiennej losowej T o rozkładzie równomiernym,
 A_v — pewna zmienna, której wartość początkowa A_0 wynosi 0,7724538509.

Procedura (43) jest procedurą rekurencyjną, w wyniku realizacji której otrzymujemy ciąg liczb $\{t_1, t_2, \dots\}$ o rozkładzie równomiernym. Na podstawie otrzymanego ciągu generujemy losowe czasy poprawnej pracy $t_p^{(j)}, t_r^{(j)}, t_s^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots$) i losowe czasy odnowy $t_{op}^{(j)}, t_{or}^{(j)}, t_{os}^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots$) zespołów SG_{pod}, SG_{rez}, S' .

Obliczenia wskaźników niezawodności stacji końcowej systemu TN-960 zostały przeprowadzone na elektronicznej maszynie cyfrowej „Elliott 803”. Dane dotyczące rozkładów czasu poprawnej pracy i czasu odnowy stacji oraz wyniki obliczeń charakterystyk niezawodności metodą Monte-Carlo przedstawione zostały w tabelcy 1.

Weryfikacja rozkładów czasu pracy pomiędzy uszkodzeniami $F_{ps}(t)$ i czasu odnowy $V_s(t)$ wykazała, że są to rozkłady Weibulla o następującej postaci:

$$F_{ps}(t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{2280} \right)^{3,6221} \right], \tag{44}$$

$$V_s(t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{0,4915} \right)^{0,4894} \right]. \tag{45}$$

Wykorzystując wzory (44), (45) i (15), określimy średni czas prac pomiędzy uszkodzeniami T_{ps} , średni czas odnowy T_{os} i współczynnik gotowości do pracy K_{gs} stacji końcowej sy-

Tablica 1

Wyniki modelowania procesu funkcjonowania stacji końcowej systemu TN-960

Charakterystyki zdolności stacji końcowej systemu TN-960 do pracy bez uszkodzeń				Charakterystyki zdolności stacji końcowej systemu TN-960 do odnowy			
$N = 5000$ $r = 15$ $\Delta t = 300$ [h]				$N = 5000$ $r_o = 8$ $\Delta t_o = 60$ [min]			
t_k [h]	m_k	$R_s(t_k)$	T_s [h]	t_{k_o} [min]	m_{k_o}	$V_s(t_{k_o})$	T_{os} [min]
0 ÷ 300	0	1,0000	2101,5	0 ÷ 60	3360	0,6721	54,04 (0,9006 [h])
300 ÷ 600	4	0,9992		60 ÷ 120	741	0,8204	
600 ÷ 900	37	0,9918		120 ÷ 180	486	0,9175	
900 ÷ 1200	140	0,9658		180 ÷ 240	143	0,9461	
1200 ÷ 1500	380	0,8878		240 ÷ 300	92	0,9646	
1500 ÷ 1800	637	0,7608		300 ÷ 360	76	0,9797	
1800 ÷ 2100	907	0,5794		360 ÷ 420	49	0,9895	
2100 ÷ 2400	1052	0,3690		420 ÷ 480	53	1,000	
2400 ÷ 2700	895	0,1900					
2700 ÷ 3000	586	0,0728					
3000 ÷ 3300	265	0,0198					
3300 ÷ 3600	82	0,0340					
3600 ÷ 3900	16	0,0000					
3900 ÷ 4200	0						
4200 ÷ 4500	0						
$K_{gs} = 0,99956$							

stemu TN-960. Otrzymamy:

$$T_{ps} = 2054 \text{ [h]}, \quad (46)$$

$$T_{os} = 0,89 \text{ [h]}, \quad (47)$$

$$K_{gs} = 0,99957. \quad (48)$$

Z porównania (46) ÷ (48) z wynikami przedstawionymi w tablicy 1 widać, że różnice pomiędzy odpowiednimi współczynnikami nie przekraczają 2,5%. Błąd metody Monte-Carlo, obliczony według wzoru (5) na poziomie ufności $\alpha = 0,95$ przy ogólnej liczbie doświadczeń $N = 5000$, nie przekracza 1%.

4. ZAKOŃCZENIE

Przedstawiona w artykule i wykorzystana dla opracowanego w kraju systemu telefonii 960-krotnej TN-960 metodyka oceny niezawodności umożliwiła przybliżoną ocenę niezawodności teletransmisyjnych urządzeń stacji końcowej na etapie ich opracowywania i produkcji prototypu. Brak danych statystycznych, charakteryzujących proces funkcjonowania tego systemu podczas eksploatacji, wymagał przyjęcia założeń potwierdzonych w eksploatacji systemów o mniejszej krotności do TN-60 włączenie.

Jako model matematyczny, opisujący rozkład czasu poprawnej pracy elementów elektronicznych wybrano rozkład Weibulla. Parametry rozkładu dla poszczególnych elementów określono na podstawie średnich światowych wartości intensywności uszkodzeń, przyjętych obecnie dla obliczeń niezawodności sprzętu teletransmisyjnego, a także opierając się na czynniku moralnego zużycia się urządzeń. Podejście takie wydaje się uzasadnione, ponieważ znaczna część wykorzystywanych w systemie elementów jest pochodzenia zagranicznego, lub produkcji krajowej opartej na licencji zagranicznej.

Na podstawie rozkładów czasu poprawnej pracy elementów ustalono rozkłady czasu poprawnej pracy poszczególnych zespołów, a także całych stojaków przemiany i generacji stacji końcowej systemu *TN-960*. Zakładano przy tym, że rozpatrywane zespoły mają szeregową strukturę niezawodnościową i niezależnymi uszkodzeniami i nie są odnawiane. Oczywiście model ten należy traktować jako pierwsze przybliżenie, ponieważ pominięto zagadnienie funkcjonalnej zależności pomiędzy poszczególnymi elementami, czyli to najważniejsze, co odróżnia konkretny zespół od przypadkowego zbioru elementów. W rzeczywistości każdy zespół, każdy układ elektroniczny wymaga wnikliwej analizy strukturalnej, opartej na teorii grafów i aparacie matematycznym algebry Boole'a [1]. Jest to skomplikowane zagadnienie, wykraczające poza ramy tej publikacji.

Uwzględniając niewielki wpływ stanów, charakteryzujących się małą liczbą poprawnie pracujących kanałów telefonicznych, na ogólną efektywność pracy stacji końcowej, obliczono efektywność stacji na poziomie uszkodzenia grupy wtórnej, zawierającej 60 kanałów telefonicznych. Przyjęcie tego założenia pozwoli na uniknięcie problemu wielowymiarowości, a otrzymany wynik będzie stanowił ocenę „z dołu” efektywności systemu, która w rzeczywistości będzie większa. Ponieważ dla systemów telefonii wielokrotnej bardzo ważnym wskaźnikiem jest jakość pracy jednego kanału telefonicznego, obliczono średni czas jego poprawnej pracy, który wynosi ok. 16 miesięcy.

Określenie rozkładu czasu poprawnej pracy stacji w całości pozwala na wyznaczenie optymalnych okresów przeprowadzenia prac profilaktycznych, minimalizujących przeciętny koszt obsługi stacji w rozpatrywanym przedziale czasu.

Oceniając niezawodność stacji końcowej z uwzględnieniem odnowy, obliczoną metodą modelowania statystycznego, uzyskano średni czas poprawnej pracy stacji wynoszący 85 dni. Z obliczeń wynika, że średni czas pracy stacji z uwzględnieniem odnowy jest większy od średniego czasu poprawnej pracy stacji, jako systemu nieodnawialnego, który wynosi 78 dni.

Wykorzystana do obliczenia charakterystyk niezawodności stacji końcowej metoda Monte-Carlo wykazała bardzo dobrą zbieżność, gdyż dla 5000 realizacji błąd na poziomie ufności $\alpha = 0,95$ nie przekracza 1%. Kolejne uproszczenie przy określeniu charakterystyk niezawodności stacji końcowej *TN-960* polegało na założeniu, że czas poprawnej pracy i czas odnowy są zmiennymi losowymi niezależnymi. W rzeczywistości jednak są to zmienne skorelowane, a najbardziej oczywista korelacja występuje: pomiędzy czasem poprawnej pracy $t^{(j)}$ po $(j-1)$ -szej odnowie a czasem trwania tej odnowy $t_0^{(j)}$ oraz pomiędzy czasem poprawnej pracy $t^{(j)}$ a czasem kolejnej j -tej odnowy $t_0^{(j)}$. Uwzględnienie tego typu korelacji jest szczególnie ważne przy przewidywaniu prawdopodobieństwa wykonania wymaganych funkcji w zadanym okresie czasu.

Reasumując należy stwierdzić, że przedstawiona metoda pozwoliła na dokonanie przybliżonej oceny niezawodności urządzeń teletransmisyjnych stacji końcowej systemu TN-960 na etapie ich opracowania i produkcji prototypu. Uzyskanie dokładniejszych danych wyjściowych do obliczeń będzie możliwe po zakończeniu badań eksploatacyjnych na trasie doświadczalnej TN-960, które pozwolą na uzyskanie dodatkowych informacji dotyczących:

1) rzeczywistych warunków pracy elementów takich jak temperatura, wilgotność, obciążenia elektryczne itp.,

2) rozkładów czasu poprawnej pracy elementów i zespołów z uwzględnieniem warunków pracy,

3) zależności pomiędzy niezawodnością poszczególnych elementów a niezawodnością zespołów.

4) strategii odnowy uszkodzonych elementów,

5) korelacji pomiędzy czasem poprawnej pracy i czasem odnowy zespołów.

Uwzględnienie powyższych czynników pozwoli na dokładniejsze określenie charakterystyk niezawodności oraz podjęcie odpowiednich decyzji w trakcie kolejnych rewizji dokumentacji opracowanych urządzeń TN-960, mających na celu zabezpieczenie wymaganego poziomu jakości systemu.

Zwiększenie jakości systemów złożonych jest nie tylko problemem technicznym, ale również skomplikowanym problemem natury ekonomicznej. Zagadnienie optymalnego doboru niezawodności elementów systemu z uwzględnieniem aspektów ekonomicznych zostanie przez autorów omówione w odrębnej publikacji.

LITERATURA

1. R. Barlow, F. Proschan, *Matematyčeskaja teorija nadiožnosti*, Izd. „Sow. Radio”, Moskwa 1969.
2. O. Choreń, M. Zientalski, *Metody oceny niezawodności systemów telekomunikacyjnych*, Rozprawy Elektrotechniczne, 1974, 20, z. 1.
3. E. Fidelis, S. Firkowicz, K. Grzesiak, J. Kołodziejski, Wiśniewski: *Matematyczne podstawy oceny niezawodności*, PWN, Warszawa 1966.
4. L. K. Gorski, *Statyčeskije algoritmy issledowanija nadiožnosti*, Izd. „Nauka”, Moskwa 1970.
5. *Problemy Łączności*, nr 61, 63. Instytut Łączności, Warszawa 1971.
6. *Przegład zagadnień łączności*, nr 95, 96, Instytut Łączności, Warszawa 1970.
7. N. A. Szyszonok, W. R. Repkin, L. L. Barwinski, *Osnowy teorii nadiožnosti i eksploatacji radioelektronnoy techniki*, Izd. „Sow. Radio”, Moskwa 1964.
8. A. G. Warżapietion, *Issledowanije tečniczeskoj efektiwnosti složnych sistem*, Izwiestija LETI, 1968.

O. CHOREŃ, M. ZIENTALSKI

APPLICATION OF MONTE CARLO METHOD TO EVALUATE MULTIPLEX SYSTEMS RELIABILITY

Summary

This paper discusses an application of Monte Carlo method for solving reliability problems of multiplex systems. As an example some basic reliability characteristics of the multiple telephone network automatic voice, type TN-960 are computed.

O. CHOREŃ, M. ZIENTALSKI

APPLICATION DE LA MÉTHODE DE LA RECHERCHE STATISTIQUE A L'ESTIMATION
DE LA FIABILITÉ DES SYSTÈMES A COURANTS PORTEURS

Résumé

Dans l'article on a décrit l'application de la méthode du modélage statistique à la solution des problèmes de la fiabilité du système à courants porteurs. En titre d'exemple on a déterminé les principales caractéristiques de la fiabilité des équipements terminaux du système à courants porteurs pour la téléphonie à 960 voies réalisée en Pologne.

O. CHOREŃ, M. ZIENTALSKI

AUSNUTZUNG DER METHODE STATISCHER PRÜFUNGEN ZUR BEURTEILUNG DER
ZUVERLÄSSIGKEIT VON ÜBERTRAGUNGSTECHNISCHEN SYSTEMEN

Zusammenfassung

Im vorliegenden Artikel wurde die Anwendung der statischen Modellierungsmethode (Monte Carlo) zur Lösung von Zuverlässigkeitsproblemen übertragungstechnischer Systeme behandelt. Beispielsweise wurden Grundcharakteristiken der Zuverlässigkeit einer Endstation des in Polen bearbeiteten 960-maligen Trägerfrequenzfernsprechsystems bestimmt.

O. ХОРЕНЬ, М. ЗЕНТАЛЬСКИ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ СТАТИСТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПРИ
ОЦЕНКЕ НАДЕЖНОСТИ ТЕЛЕТРАНСМИССИОННЫХ СИСТЕМ

Резюме

Статья посвящена проблеме применения метода статистического моделирования (Монте-Карло) к решению задач определения надежности. В качестве примера рассмотрена конечная станция 960-канальной системы дальней связи TN-960 и определены основные характеристики надежности станции.

O dekompozycji struktury sieci telefonicznej międzycentralowej metodą zespołów minimalnych

IGNACY KALISZEWSKI (WARSZAWA), TADEUSZ NOWICKI (WARSZAWA), WIESŁAW STAŃCZAK (WARSZAWA)

*Institut Organizacji i Kierowania
Polskiej Akademii Nauk i Ministerstwa Nauki, Szkolnictwa Wyższego i Techniki*

Otrzymano 16.3.1974

Proces projektowania struktury sieci telefonicznej jest bardzo złożony. Wstępna dekompozycja struktury sieci prowadzi do uproszczenia problemu. Pozwala to na szybkie uzyskanie rozwiązania suboptymalnego. W niniejszym artykule zaproponowano pewną metodę dekompozycji struktury sieci telefonicznej opierającą się na znanych sposobach stosowanych do analogicznych problemów występujących w sieciach elektrycznych o stałych skupionych [2].

Omówiona tu metoda została zaprogramowana na maszynie matematyczną ODRA 1204 w Instytucie Organizacji i Kierowania.

Na zakończenie artykułu podano dwie struktury danych związanych z projektowaną siecią telekomunikacyjną i rozwiązania uzyskane za pomocą maszyny matematycznej.

1. WSTĘP

Projektowanie sieci telefonicznej jest czynnością żmudną. Wynika to ze złożoności problemu spowodowanej koniecznością wzięcia pod uwagę dużej ilości różnorodnych czynników. Dotychczasowe doświadczenia projektantów wykazały, że proces projektowania można podzielić na kilka etapów. Na początku należy zebrać dane dotyczące obszaru, dla którego projektowana jest sieć. Będą to między innymi dane demograficzne pozwalające na przewidzenie zapotrzebowania na usługi telefoniczne. Po korekcie tej prognozy uczynionej z uwagi na względy finansowe można utworzyć specjalne mapki rozważanego terenu. Na ich podstawie wyznacza się geometrię sieci, to znaczy granice rejonów obsługiwanych przez poszczególne centrale oraz położenie poszczególnych central.

Następnie, na przykład posługując się metodą współczynników zainteresowania, określa się macierz $[A_{ij}]$ rozptywu ruchu międzycentralowego. Znając miejsca lokalizacji central można na podstawie mapki terenu określić macierz $[l_{ij}]$ długości ewentualnych połączeń międzycentralowych. Na marginesie należy zauważyć, że macierz długości połączeń wcale nie musi być równa macierzy wzajemnych odległości. Znając te dane przystępuje się do określenia struktury sieci międzycentralowej. Jest to zagadnienie dość złożone. Szczególnie trudno je rozwiązać gdy znaczna jest liczba central w sieci.

Dla ułatwienia procesu projektowania dokonuje się często wstępnej dekompozycji struktury sieci, tzn. wyodrębnienia z niej pewnych zespołów central. Celem niniejszej

publikacji jest opisane jednej z metod dekompozycji, która może ułatwić rozwiązanie skomplikowanego zagadnienia, jakim jest analiza sieci telekomunikacyjnej.

Prezentowana metoda dekompozycji sieci oparta została na pracy F. Luccio, M. Sami [2], odnoszącej się jednak do sieci elektrycznych o stałych skupionych. Metodę zaproponowaną przez wyżej wymienionych autorów można wykorzystać również w odniesieniu do sieci telekomunikacyjnych. Po raz pierwszy dokonano tego w Instytucie Organizacji i Kierowania — PAN [1]. Podana tu metoda została praktycznie wykorzystana w odniesieniu do sieci telefonicznych. Może ona również znaleźć zastosowanie w dekompozycji najnowocześniejszego rodzaju sieci telekomunikacyjnych, jakimi są sieci teleinformatyczne. W tego typu sieciach (mogą nimi być także sieci telefoniczne)¹⁾, przeznaczonych do transmisji informacji cyfrowej, szczególnego znaczenia nabierają problemy analizy sieci, wynikające z konieczności racjonalnego sterowania przepływem strumieni informacji w sieci [4].

2. DEKOMPOZYCJA GRAFU METODĄ ZESPOŁÓW MINIMALNYCH

W rozdziale tym przedstawiona zostanie metoda dekompozycji grafu nieskierowanego opierająca się na definicjach tzw. zespołów minimalnych. Sposób wykorzystania tej metody przy projektowaniu sieci telefonicznej, jak również fizyczną interpretację użytych tu pojęć, charakterystycznych dla aparatu teorii grafów przedstawiono w następnym rozdziale.

Załóżmy na wstępie, że dany jest graf G , zupełny, nieskierowany i bez pętli własnych, opisany m -wymiarową macierzą $W = [w_{ij}]$ wag krawędzi grafu. Z własności grafu G wynika, że macierz W jest symetryczna oraz że elementami głównej diagonalii są zera.

Definicja 1. Dowolny podzbiór m -elementowego zbioru wierzchołków grafu nazywać będziemy zespołem.

Dla oznaczenia zespołu stosować będziemy symbol G_i . Oznaczmy przez g_i następującą sumę:

$$g_i = \sum_{i \in I_i, j \in J_i} w_{ij},$$

gdzie:

I_i — zbiór wierzchołków należących do G_i ,

J_i — zbiór wierzchołków nie należących do G_i .

Definicja 2. Zespół G_i nazywać będziemy zespołem minimalnym, jeżeli dla każdego podzespołu $G_j \subset G_i$, $j \neq i$, $g_j > g_i$. Pojedynczy element uważamy jako zespół minimalny z definicji.

W myśl powyższej definicji za zespół minimalny będziemy uważać taki podzbiór wierzchołków grafu G , dla których suma wag krawędzi liczona w obrębie tego podzbioru jest większa niż suma wag krawędzi łączących wierzchołki danego podzbioru z pozostałymi wierzchołkami grafu G . Jeżeli wagę krawędzi grafu interpretować jako miarę uzależnienia wierzchołków grafu między sobą, to równoważnym powyższemu stwierdzeniu jest, że zespół

¹⁾ Chodzi o systemy telefoniczne oparte na modulacji impulsowo-kodowej (PCM) stanowiące podstawę przyszłych sieci zintegrowanych.

minimalny to taki zespół, dla którego sumaryczne uzależnienie wierzchołków od siebie jest większe od sumarycznego uzależnienia wierzchołków tego zespołu z pozostałymi wierzchołkami grafu.

Zdefiniowane w powyższy sposób zespoły minimalne grafu mają szereg interesujących własności. Przytoczone poniżej dwa twierdzenia ilustrują najistotniejsze z nich. Twierdzenia podane zostały bez dowodu, a zainteresowanych odsyła się do prac cytowanych w bibliografii [1, 2].

Twierdzenie 1. Niech G_K i G_L będą minimalnymi zespołami w grafie G , takimi że $G_K \not\subseteq G_L$ i $G_L \not\subseteq G_K$. Wtedy G_K oraz G_L muszą być zespołami rozłącznymi, tj. $G_K \cap G_L = \emptyset$.

Powyższa własność stanowi o przydatności pojęcia zespołu minimalnego do zadania dekompozycji grafu. Istotnie, znalezienie zespołów minimalnych w grafie, w myśl tego co zostało powiedziane powyżej, gwarantuje uzyskanie rozłącznych podzbiorów wierzchołków grafu G dobranych tak, aby suma wag krawędzi łączących te podzbiory była możliwie mała.

Następne twierdzenie pozwala na skonstruowanie efektywnego algorytmu wyznaczania zespołów minimalnych grafu metodą iteracyjną.

Twierdzenie 2. Niech $G_{j_1}, G_{j_2}, \dots, G_{j_n}$ będą minimalnymi zespołami ($n \geq 2$), takimi że połączenie dowolnych m zespołów spośród nich ($2 \leq m < n$) nie jest zespołem minimalnym. Dalej niech $G_i = G_{j_1} \cup G_{j_2} \cup \dots \cup G_{j_n}$ i $g_i < g_{j_1}, g_{j_2}, \dots, g_{j_n}$. Wtedy G_i jest zespołem minimalnym.

Schemat algorytmu przedstawia się w sposób następujący.

1. START. Algorytm wykorzystuje cztery robocze listy L_1, L_2, L_3 i L_4 . Początkowo lista L_1 zawiera wszystkie pojedyncze wierzchołki grafu stanowiące początkowe zespoły minimalne. Natomiast L_2, L_3 i L_4 są puste.

2. Wszystkie zespoły w L_1 są testowane parami w celu stwierdzenia czy suma ich wag tworzy zespół minimalny (twierdzenie 2). Jeżeli tak, to zespoły te eliminowane są z L_1 , a następnie łączone w jeden wspólny zespół, który wpisywany jest na listy L_2 i L_4 .

3. Jeżeli $L_2 = \emptyset$, tzn. nie znaleziono w kroku 2 żadnych nowych zespołów minimalnych, to przejdź do 8.

4. Wszystkie zespoły z listy L_2 , a następnie zespoły z list L_1 i L_2 są testowane parami w celu stwierdzenia, czy ich suma tworzy zespół minimalny (twierdzenie 2). W przypadku stwierdzenia, że któraś z testowanych par tworzy zespół minimalny, zespoły tworzące tę parę są eliminowane z L_2 lub z L_1 i L_2 , a następnie łączone w jeden wspólny zespół, który wpisywany jest na listy L_3 i L_4 .

5. Wszystkie zespoły z listy L_2 są dołączone do L_1 i eliminowane z L_2 ($L_2 = \emptyset$).

6. Jeżeli lista L_3 jest pusta, przejdź do 8.

7. Wszystkie zespoły z listy L_3 są przenoszone na listę L_2 i eliminowane z L_3 ($L_3 = \emptyset$).

Przejdź do 4.

8. $J = 2$.

9. Jeżeli J nie jest mniejsze od liczby zespołów na liście L_1 , przejdź do 13.

10. $J = J + 1$.

11. Generowane są kolejno wszystkie J -elementowe sumy zespołów z listy L_1 . Jeżeli J -elementowa suma zespołów będzie zespołem minimalnym (twierdzenie 2), to zespoły

te są eliminowane z L_1 a następnie łączone w jeden zespół, który wpisywany jest na listę L_2 oraz L_4 i następuje przejście do 4. Jeżeli nie, to generuje się następną J -elementową sumę zespołów.

12. Przejdź do 9.

13. STOP.

3. ZASTOSOWANIE DEKOMPOZYCJI GRAFU METODĄ ZESPOŁÓW MINIMALNYCH DO ANALIZY SIECI TELEFONICZNEJ

W rozdziale tym uwaga będzie skoncentrowana na nieskierowanych unigrafach bez pętli własnych. Inaczej mówiąc, brane będą pod uwagę takie grafy, w których żadnej z krawędzi nie przypisano orientacji. Poza tym założy się, że dwa różne wierzchołki grafu może łączyć co najwyżej jedna krawędź. Ponadto odrzucona będzie możliwość wystąpienia pętli własnej, to znaczy takiej krawędzi, której końce stanowi jeden i ten sam wierzchołek. Wyżej omówione grafy będzie można w prosty i naturalny sposób interpretować jako strukturę sieci telefonicznej.

Tak więc zachodzi następujące wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie: centrali telefonicznej odpowiada wierzchołek, a połączeniu międzycentralowemu, czyli wiązce łączy, krawędź w grafie. Na wstępie można założyć, co uprości dalsze rozważenia i zapisy, że rozważany graf odpowiadający sieci jest grafem zupełnym, to znaczy każde jego dwa wierzchołki mają bezpośrednie połączenie w postaci krawędzi.

Teraz należy się zastanowić, w jaki sposób przypisać wagi poszczególnym krawędziom. Oczywistym jest, że powinny one nieść informacje o opłacalności budowy bezpośrednich połączeń międzycentralowych. Z drugiej strony muszą one odzwierciedlać oddziaływania ruchowe pomiędzy poszczególnymi centralami. Trudno bez dokładnych badań nad istniejącymi sieciami oraz bez wykorzystania metod symulacyjnych podać postać funkcji, przy pomocy której byłoby można policzyć rozważane wagi. Wiadomo jedynie, że im większeciążenie pomiędzy centralami, tym bardziej potrzebne jest bezpośrednie połączenie pomiędzy nimi. Z drugiej strony zachodzi wręcz przeciwna zależność między kosztem budowy danej relacji, a celowością jej budowy. Tak więc z dobrym przybliżeniem dla wag krawędzi można napisać [1]:

$$w_{ij} = \frac{a_1(A_{ij} + A_{ji})}{b_0 + (b_1 + b_2 m) \mu(l_{ij}) l_{ij}},$$

gdzie:

A_{ij} — ruch generowany w i -tej i kierowany do j -tej centrali,

l_{ij} — długość ewentualnego połączenia pomiędzy i -tą a j -tą centralą,

b_0 — koszt połączenia międzycentralowego niezależny od jego długości oraz ilości łączy w wiązce,

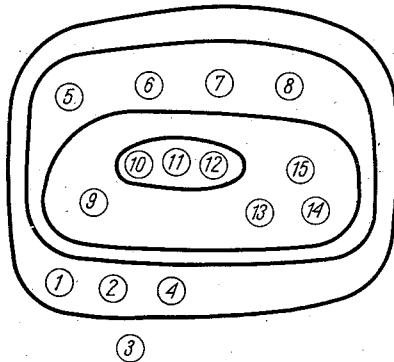
b_1 — najniższy koszt jednostkowy połączenia międzycentralowego zależny jedynie od długości relacji,

b_2 — najniższy koszt jednostki długości jednego łącza,

Poniżej podano macierz wag w grafie odpowiadającym sieci o piętnastu centralach:

$$w_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 & 10 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 10 & 0 & 20 & 10 & 5 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 10 & 20 & 0 & 10 & 5 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 10 & 10 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 10 & 0 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 10 & 10 & 15 & 25 & 30 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 115 & 120 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 10 & 115 & 0 & 112 & 30 & 25 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & 10 & 120 & 112 & 0 & 5 & 8 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 30 & 5 & 0 & 5 & 20 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 25 & 8 & 5 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 & 10 & 11 & 20 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Wynik procesu dekompozycji przedstawiono na rysunku 2. Nie uwzględniono na nim połączeń międzycentralowych, a to w celu uzyskania większej przejrzystości. Zespoły minimalne zostały wyróżnione pogrubioną linią.



Rys. 2. Wynik dekompozycji sieci z piętnastoma centralami

Obliczenia dotyczące tej sieci podobnie jak poprzedniej, przeprowadzane były na maszynie ODRA-1204. Czas przetwarzania w tym przypadku wyniósł 290 sekund.

LITERATURA

1. D. Biegalski, T. Nowicki, F. Sreedyński, W. Stańczak, *Metody optymalizacji telefonicznych sieci strefowych nowoprojektowanych*, opracowanie ICS-PAN, W-wa 1973.
2. F. Luccio, M. Sami, *On the Decomposition of Network in Minimally Interconnected Subnetworks*, IEEE Trans. on Circuit Theory, vol. CT 16, nr 2.

3. T. Nowicki, W. Stańczak, *O optymalnym umiejscowieniu odosobnionej telefonicznej centrali miejskiej*, Prace ICS-PAN, w druku.
4. T. Nowicki, *Sur l'écoulement des flux d'information dans les réseaux téléinformatiques*, Colloque Informatique et Telecommunications, Rennes 1973.
5. S. Seshu, M.B. Reed, *Linear Graphs and Electrical Networks*, Addison-Wesley, London 1961.

I. KALISZEWSKI, T. NOWICKI, W. STAŃCZAK

ON THE TELEPHONE INTEREXCHANGE NETWORK STRUCTURE DECOMPOSITION USING THE METHOD OF MINIMALLY INTERCONNECTED SUBGRAPHS

Summary

The process of the telephone network structure design is very complex. Initial decomposition of network structure leads to simplification of the problem. It permits one to obtain quickly a suboptimal solution. In the presented paper there was proposed some method of telephone network structure decomposition based on the known method applied in analogous problems appearing in lump parameter electrical networks [2]. The method described here was programmed on the computer ODRA 1204 at Institute of Organisation and Management. At the end of this paper there were given two data structures connected with design telecommunication network and solutions obtained with the help of the computer.

I. KALISZEWSKI, T. NOWICKI, W. STAŃCZAK

LA DÉCOMPOSITION DE LA STRUCTURE DU RÉSEAU TÉLÉPHONIQUE À L'AIDE DE LA MÉTHODE DES ENSEMBLES MINIMES

Résumé

La préparation du projet d'un réseau téléphonique représente un problème très compliqué. La décomposition préliminaire de la structure du réseau permet à simplifier ce problème et à obtenir rapidement une solution suboptimale. Dans cet article on présente une méthode de la décomposition de la structure du réseau téléphonique basée sur le procédé utilisé dans la théorie des circuits électriques [2]. Cette méthode a été programmée sur l'ordinateur ODRA 1204, à l'Institut de l'Organisation et de la Direction.

À la fin de l'article on a présenté deux structures des données correspondantes à un réseau de télécommunication en projet et les solutions obtenues à l'aide de l'ordinateur.

I. KALISZEWSKI, T. NOWICKI, W. STAŃCZAK

ZERSETZUNG DER STRUKTUR EINES ZWISCHENAMTFERNMELDENETZES MITTELS KLEINSTAGGREGATMETHODE

Zusammenfassung

Der Projektierungsprozess für die Bauart eines Fernmeldenetzes ist eine sehr komplizierte Angelegenheit. Eine einleitende Zersetzung der Netzstruktur führt zur Vereinfachung des Problems. Das gestattet eine schnelle suboptimale Lösung. Im vorliegenden Artikel wird eine Methode für die Zerlegung der Fernmeldenetzstruktur in Anlehnung an die bekannten, bei analogen theoretischen Problemen des Stromkreises angewandten Methoden [2] vorgeschlagen.

Die hier behandelte Methode wurde im Institut für Organisation und Leitung der Polnischen Wissenschaftsakademie und des Ministeriums für Hochschulwesen und Technik zwecks Berechnung auf dem Digitalrechner ODRA 1204 programmiert.

Im letzten Teil des Artikels wurden zwei Strukturen der mit dem projektierten Fernmeldenetz zusammenhängenden Daten angeführt, und mit Hilfe des Digitalrechners hierfür Lösungen erzielt.

И. КАЛИШЕВСКИ, Т. НОВИЦКИ, В. СТАНЬЧАК

О ДЕКОМПОЗИЦИИ СТРУКТУРЫ ТЕЛЕФОННОЙ СЕТИ МЕЖСТАЦИОННЫХ
СОЕДИНИТЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА
МИНИМАЛЬНЫХ ВЗАИМО-СВЯЗАННЫХ ПОДГРАФОВ

Резюме

Процесс проектирования структуры телефонной сети является очень сложным процессом. Предварительная декомпозиция структуры сети позволяет упростить этот процесс и быстро получить субоптимальное решение.

В этой статье предлагается некоторый метод декомпозиции структуры телефонной сети основанный на базе известных методов, которые применяются для решения аналогичных проблем, выступающих в электрических цепях [2].

Предлагаемый метод был запрограммирован на вычислительную машину ODRA-1204 в Институте Организации и Управления АН ПНР. В заключение статьи приведены две структуры данных связанных с проектируемой сетью связи и решения полученные с помощью вычислительной машины.

I REŚĆ

E. Kowalczyk: Problemy bioinformacji	287
S. Budkowski: Dualne zapisy uzupełnień do 2	295
A. Kusy, S. Paszczyński, A. Wrona: Nieliniowość napięciowa i szumy prądowe rezystywnych warstw grubych PdO/Pd-Ag	305
J. Kaliński: Niektóre właściwości elementów składowych mikrofalowych przetworników wielkości fizycznych	325
R. Kalicka: Wpływ przyjętego napięcia progowego na wartość i charakter zmian parametrów niezrównoważenia komparatorów scalonych	367
W. Janke: Specyfika półprzewodnikowych liniowych układów scalonych pracujących z prądami mikroamperowymi	379
T. Piotrowski: Wpływ cech detektorów promieniowania podczerwonego na ich przydatność w termografii	391
K. Stefaniak: Ciśnieniowy model strefy przykatodowej łuku próżniowego	405
K. Stefaniak: Ruch wsteczny łuku elektrycznego w próżni na elektrodach stałych	419
M. Kaźmierski: Przenikalność zastępcza masywnego żelaza przy częstotliwości technicznej	435
J. Purczyński, R. Sikora: Analiza indukcyjności rozproszenia żłobkowego oraz sił działających na uzwojenia maszyn elektrycznych	455
J. Purczyński, R. Sikora: Wykorzystanie metody rozdzielania zmiennych oraz metody wariacyjnej do analizy pola rozproszenia żłobkowego	475
R. Nowak: Zniekształcenia sygnałów o wąskopasmowej, sinusoidalnej modulacji w liniowych obwodach selektywnych	507
W. Molisz: Maksymalizacja wieloskładnikowych przepływów statycznych w warunkach uszkodzeń gałęzi sieci	537
W. Sobczak: Optymalizacja niesynchronicznych systemów wielodostępowych ze zwielokrotnianiem dwuetapowym	547
O. Choroń, M. Zientalski: Wykorzystanie metody badań statystycznych do oceny niezawodności systemów teletransmisyjnych	553
I. Kaliszewski, T. Nowicki, W. Stańczak: O dekompozycji struktury sieci telefonicznej międzycentralowej metodą zespołów minimalnych	573

CONTENTS — TABLE DES MATIÈRES — INHALT

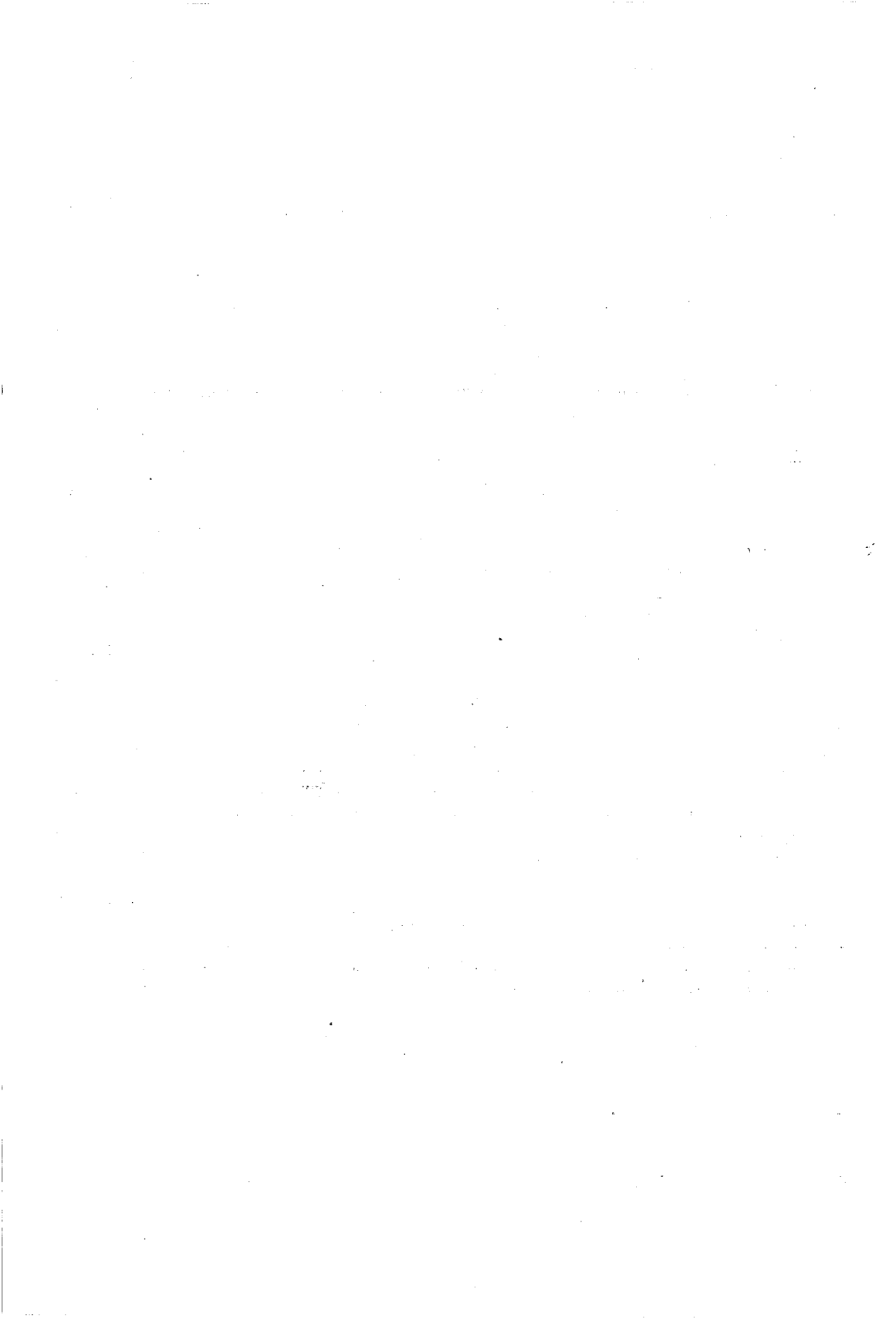
E. Kowalczyk: The Bioinformation Problems	292
Problèmes de bioinformation	292
Probleme der Bioinformation	293
S. Budkowski: Dual 2's Complement Binary Codes	302
Écritures dual en complément à 2	303
Zweiartige Registrierung der Ergänzungen zu 2	303
A. Kusy, S. Paszczyński, A. Wrona: Voltage Non-Linearity and Current Noise of Thick PdO/Pd-Ag Resistive Films	322
La non-linéarité de tension et le bruit de courant des couches épaisses résistantes PdO/Pd-Ag	323
Spannungsnichtlinearität und Stromrauschen dicker PdO/Pd-Ag-Widerstandsschichten	323
J. Kaliński: Some Properties of Component Parts of Microwave Transducers of Physical Quantities	365

Certaines propriétés des composants des convertisseurs micro-ondes des grandeurs physiques	365
Manche Eigenschaften der Bauelemente für Mikrowellenumsetzer physikalischer Größen	366
R. Kalicka: The Influence of Threshold Voltage, Defined by Author, on Values and Sign of Parameters of Disequilibrium of Integrated Comparators	376
Influence de la tension de seuil exercée sur les valeurs et les directions des changements des paramètres du déséquilibre des comparateurs scélés	376
Einfluss der angenommenen Schwellenspannung auf den Wert und Änderungscharakter von Parametern des Ausgleichmangels bei integrierten Komparatoren	377
W. Janke: Properties of Linear Semiconductor IC's Operating on the Microampere Current Level	389
Spécificité des circuits intégrés monolithiques linéaires fonctionnant sous le courant d'ordre des microampères	389
Spezifische Eigenschaften linearer integrierter Schaltungen im Mikroamperebereich	390
T. Piotrowski: Influence of I.R. Detectors Features on Their Usefulness in Thermography	401
L'influence de la caractéristique des détecteurs infra-rouge sur leur utilité dans la thermographie	402
Einfluss der Eigenschaften von Infrarotstrahlungsdetektoren auf ihre Brauchbarkeit für Thermographen	402
K. Stefaniak: Pressure Model of Cathode Zone of Vacuum Arc	417
Un modèle de pression de la zone près-cathodique de l'arc à vide	417
Druckmodell für die Nebenkathodenzone des Vakuumbogens	417
K. Stefaniak: Retrograde Motion of Electrical Arc in Vacuum on Solid Electrodes	433
Le mouvement rétrograde de l'arc électrique dans le vide sur les électrodes constantes	434
Rückbewegung des Elektrobogens im Vakuum mit Festelektroden	434
M. Kazmierski: Equivalent Magnetic Permeability of Solid Iron at Technical Frequency	452
Perméabilité équivalente du fer solide à la fréquence technique	452
Ersatz-Permeabilität massiven Eisens bei technischer Frequenz	453
J. Purczyński, R. Sikora: Analysis of Dissipative Inductance of Slots and of Forces Acting on the Windings in Electrical Machines	474
Analyse de l'inductance de fuite d'encoches et des forces agissantes sur l'enroulement des machines électriques	474
Analyse der Induktivität der Nutstreuung sowie der auf Wicklungen elektrischer Maschinen wirkenden Kräfte	474
J. Purczyński, R. Sikora: Analysis of Leakage Field in Slots by Means of Separation of Variables Method and Variation Method	504
Application de la méthode de la séparation des variables et de la méthode variationnelle à l'analyse du champ de fuite d'encoches	504
Ausnutzung des Variablentrennverfahrens und der Variationsrechnung zur Analyse eines Nutstrefeldes	505
R. Nowak: Distortions of Narrow-Band AM and FM Signals in Linear Selective Circuits	534
Déformation des signaux avec la modulation sinusoïdale dans les circuits sélectifs linéaires	535
Verzerrungen der AM- und FM-Schmalbandsignale in linearen Selektivstimmkreisen	535
W. Molisz: Maximizing Multicomponent Static Flows in Conditions of Network Branch Defect	544
Maximisation des écoulements statiques à composantes multiples quand des branches du circuit sont endommagées	544
Maximierung mehrbestandteiliger statischer Durchflüsse bei Beschädigungen von Netzweigen	544
W. A. Sobczak: Analysis of Two Stage Multiplexing Signal Systems with Uncontrolled Component Signal Forming Rules	551
Optimisation des systèmes asynchroniques à accès multiples	552
Optimierung nichtsynchroneisier mehrabständiger Systeme mit zweietappenmässiger Vervielfachung	552
O. Choreń, M. Zientalski: Application of Monte Carlo Method to Evaluate Multiplex Systems Reliability	571
Application de la méthode de la recherche statistique à l'estimation de la fiabilité des systèmes à courants porteurs	572

Ausnutzung der Methode statischer Prüfungen zur Beurteilung der Zuverlässigkeit von Übertragungstechnischen Systemen	572.
I. Kaliszewski, T. Nowicki, W. Stańczak: On the Telephone Interexchange Network Structure Decomposition Using the Method of Minimally Interconnected Subgraphs	579
La décomposition de la structure du réseau téléphonique à l'aide de la méthode des ensembles minimes	579
Zersetzung der Struktur eines Zwischenamtfernmeldenetzes mittels Kleinstaggregatmethode	579

СОДЕРЖАНИЕ

Э. Ковальчик: Проблемы биоинформации	293.
С. Будковски: Двойственные представления чисел в коде с дополнением до двух	304
А. Кусы, С. Пащиньски, А. Врона: Нелинейность напряжения и токовые шумы резистивных толстых пленок Pd0/Pd-Ag	324
Е. Калинински: Некоторые свойства составных элементов микроволновых преобразователей физических величин	366
Р. Калицка: Влияние принятого порога напряжения на значение и характер изменений параметров дисбаланса интегральных компараторов	377
В. Янке: Особенности полупроводниковых линейных интегральных схем в режиме микроотоков	390
Т. Пиотровски: Влияние свойств детекторов инфракрасного излучения на их применимость в термографии	402
К. Стефаняк: Модель прикатодной области вакуумной дуги с точки зрения давлений	417
К. Стефаняк: Обратное движение электрической дуги в вакууме на твердых электродах	434
М. Казьмерски: Эквивалентная проницаемость массивной стали при технической частоте	453
Я. Пурчынски, Р. Сикора: Анализ индуктивности пазового рассеяния и сил действующих на обмотки электрических машин	474
Я. Пурчынски, Р. Сикора: Применение метода Фурье и вариационного метода к анализу поля пазового рассеяния	505
Р. Новак: Искажения узкополосных ам и чм сигналов в избирательных цепях	535
В. Молиш: Максимализация многокомпонентных статических потоков в условиях повреждений сетевых ветвей	545
В. Собчак: Оптимизация асинхронных многоходовых систем с двухэтапной мультипликацией	552
О. Хорень, М. Зентальски: Применение методов статистических исследований при оценке надежности телетрансмиссионных систем	572.
II. Калишевски, Т. Новицки, В. Станьчак: О декомпозиции структуры телефонной сети межстационарных соединительных линий с использованием метода минимальных взаимосвязанных подграфов	580



7. *Streszczenia.* Do każdej nadsyłanej pracy należy dołączyć krótkie streszczenie (analizę) w języku polskim (w 5 egz.) oraz streszczenia w językach obcych: angielskim, francuskim, niemieckim i rosyjskim. W razie niemożności przygotowania streszczeń w językach obcych Autor powinien przynajmniej podać niezbędną do wykonania tłumaczenia obcojęzyczną terminologię.

8. *Literatura.* Po zakończeniu artykułu należy podać wykaz literatury, wymieniając w następującej kolejności: pierwsze litery imion, nazwisko autora, po czym po przecinku pełny tytuł dzieła lub artykułu; dalej, w przypadku książki — wydawcę, miejsce wydania i rok, a w przypadku artykułu — tytuł czasopisma, numer zeszytu, rok wydania i ewent. numer strony. Pozycje wykazu powinny być ponumerowane.

Uwagi

1. Niezastosowanie się Autora do podanych wyżej wytycznych pociągnie za sobą konieczność potrącenia z honorarium autorskiego kosztów związanych z doprowadzeniem dostarczonych materiałów do postaci wymaganej przez Redakcję.

2. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egz. odbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze Autor może zamówić w Redakcji na własny koszt.

3. Autora obowiązuje korekta autorska, którą należy zwracać w ciągu 3 dni pod adresem Redakcji.

Rozprawy Elektrotechniczne

Kwartalnik

WARUNKI PRENUMERATY CZASOPISMA

Cena prenumeraty rocznej zł 160.—
 " " półrocznej zł 80.—

Institucje państwowe, społeczne, zakłady pracy, szkoły itp. mogą zamawiać prenumeratę wyłącznie w miejscowych oddziałach i delegaturach RSW „Prasa — Książka — Ruch”.

Prenumeratory indywidualni mogą opłacać prenumeratę w urzędach pocztowych i u listonoszy lub dokonywać wpłat na konto PKO nr 1-6-100020, RSW „Prasa — Książka — Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, Warszawa, ul. Towarowa 28 (w terminie do 10 dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty).

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa — Książka — Ruch”, Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych, Warszawa, ul. Wronia 23, konto PKO nr 1-6-100024.

Bieżące i archiwalne numery można nabywać lub zamawiać we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Warszawa, Pałac Kultury Nauki (wysoki parter) oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

Sprzedż egzemplarzy numerów zdezaktualizowanych, na uprzednie pisemne zamówienie, prowadzi RSW „Prasa — Książka — Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, Warszawa, ul. Towarowa 28.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona-Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, POLAND.

Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, POLAND.

Rozpr. Elektrot. T. 21 z. 2, s. 285—584; Warszawa 1975

Indeks 37521/37483

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTROTECHNIKI

**ROZPRAWY
ELEKTROTECHNICZNE**

TOM XXI · ZESZYT 3

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1975



POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTROTECHNIKI

ROZPRAWY
ELEKTROTECHNICZNE

TOM XXI · ZESZYT 3

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1975

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny

PROF. DR WITOLD NOWICKI

Członkowie

PROF. TADEUSZ CHOLEWICKI, PROF. EUGENIUSZ JEZERSKI,
PROF. DR WITOLD ROSIŃSKI

Sekretarz

JANINA MATHEISEL

ADRES REDAKCJI

00-661 Warszawa, Politechnika, Plac Jedności Robotniczej 1
Instytut Teleelektroniki, Gmach Elektroniki, pokój 343, tel. 21-007-564
Telefony domowe: redaktor naczelny - 173703, sekretarz - 338497

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 750 (633+117)	Oddano do składania 26.II. 1975 r.
Ark. wyd. 14,5 ark. druk. 11,25	Podpisano do druku w lipcu 1975 r.
Papier druk. m/gł imp. kl. III, 80 g. 70×100	Druk ukończono w lipcu 1975 r.
Zamówienie nr 297/75	Cena zł 40.— B-56

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

Ogólny model struktury \overline{RC} o stałych rozłożonych i jego parametry macierzowe

ANDRZEJ CHYRCZAKOWSKI (TORUŃ)

Instytut Podstaw Elektroniki Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 15.12.1974

Opisano model struktury $\overline{\mathcal{E}-\mathcal{Y}-N\mathcal{Z}}$ o stałych rozłożonych, którego jednostkowa impedancja szeregową z i jednostkowa admitancja równoległa y określone są odpowiednio przez funkcje współrzędnej przestrzennej:

$$p(x) \in C^1, \quad p(x) \neq 0 \quad \text{i} \quad q(x) \in C,$$

na całej długości struktury. Przedyskutowano ogólne właściwości równań opisujących przedstawiony model struktury oraz wyznaczono ogólną postać admitancyjnej macierzy nieoznaczonej struktury $\overline{\mathcal{E}-\mathcal{Y}-N\mathcal{Z}}$ jako elementu o czterech zaciskach niezależnych, umożliwiającą dalsze badanie jej własności.

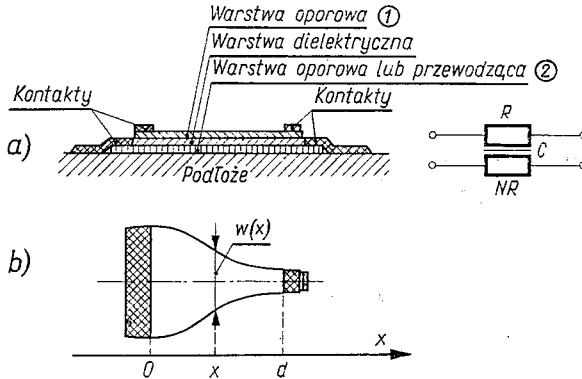
1. WSTĘP

W dostępnej w języku polskim literaturze na temat struktur \overline{RC} o stałych rozłożonych [1]–[4] właściwości ich omawia się niemal wyłącznie na przykładzie struktury jednorodnej, a więc najprostszego typu. Ścisłe wyrażenia na parametry macierzowe takiej struktury dają się uzyskać w stosunkowo prosty sposób. Oprócz struktury jednorodnej istnieje pewna klasa struktur o funkcjach kształtujących określonych przez warunki narzucone na równanie struktury, przy których wyrażenia na jej parametry macierzowe dają się uzyskać w zwartej postaci, jak czyni się to na przykład w pracy [5].

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie ogólnego modelu struktury o stałych rozłożonych, w której sposób uzależnienia parametrów jednostkowych od współrzędnej przestrzennej podlega jedynie pewnym ogólnym ograniczeniom, zgodnym z warunkami fizycznej realizowalności struktury. Wykorzystywana metoda wyznaczenia parametrów macierzowych omawianego modelu przedstawiona została przez Ghausi'ego i Kelly'ego w [6].

2. STRUKTURA \overline{RC} O STAŁYCH ROZŁOŻONYCH

Przez strukturę \overline{RC} o stałych rozłożonych rozumiemy element, w którym magazynowanie ładunku elektrycznego (zjawisko pojemności elektrycznej) występuje łącznie z rozpraszaniem energii (zjawiskiem oporności) w każdym punkcie struktury. Pojemność i oporność elektryczna nie są tu więc rozdzielone i nie występują jako parametry skupio-



Rys. 1. Realizacja struktury \overline{RC} o stałych rozłożonych

a) przekrój podłużny przez warstwy struktury i jej oznaczenie schematowe, b) ukształtowanie geometryczne warstw

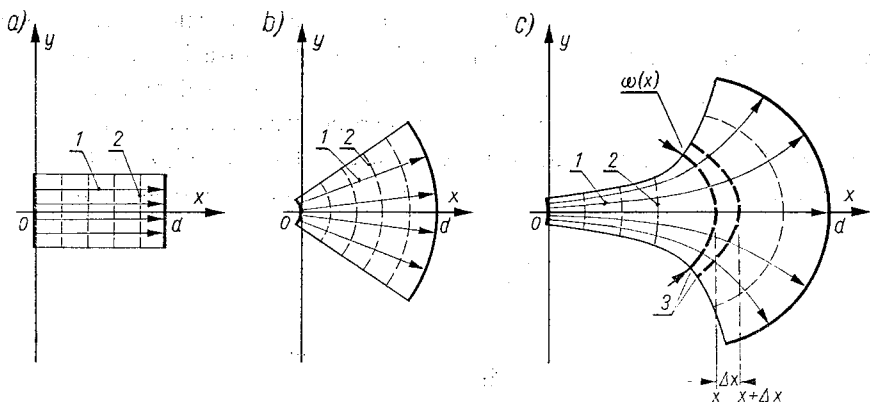
ne w różnych miejscach układu, lecz są rozłożone na całej długości tego samego elementu. Najprostsze realizacje struktury \overline{RC} o stałych rozłożonych wykonane być mogą w postaci nałożonych na siebie na przemian warstw: oporowej lub przewodzącej, dielektrycznej i oporowej tworzących układ pokazany schematycznie na rys. 1a.

Na schemacie ideowym strukturę taką oznacza się symbolem przedstawionym na rys. 1b, w którym górnej warstwie oporowej odpowiada symbol oporności R , dolnej — NR . Po między obydwiema warstwami o charakterze rezystancyjnym występuje rozłożona pojemność oznaczona symbolicznie przez C .

W warstwach rezystancyjnych struktury włączonej za pośrednictwem kontaktów do obwodu elektrycznego płyną prądy przewodzenia, a w warstwie dielektrycznej — prąd przesunięcia. Rozkład wektora gęstości prądu w każdej z warstw zależy, ogólnie biorąc, od ukształtowania geometrycznego warstw struktury, własności materiału, z którego zostały wykonane, ich grubości itp. Zakładając, że możliwe do pominięcia są wszystkie wpływy zewnętrzne oraz że warstwy składające się na strukturę są jednorodne, tzn. warstwy rezystancyjne charakteryzują się stałą wartością rezystywności powierzchniowej na całej swej powierzchni a warstwa dielektryczna zapewnia stałą wartość pojemności na jednostkę powierzchni na całym obszarze struktury, możemy rozptyw prądów i rozkład pola elektrycznego w strukturze uważać za związane jedynie z kształtem geometrycznym jej warstw.

Podchodząc do analizy własności struktury w sposób całkowicie ogólny, należy rozpatrywać ją jako element trójwymiarowy. W praktyce wystarczający jest model oparty o dwuwymiarowy polowy opis zjawisk elektrycznych zachodzących w jej warstwach [6]; do opisu obwodowego przechodzi się następnie na podstawie wyników analizy polowej.

Dla rozpatrzenia ogólnych właściwości struktury o stałych rozłożonych jako elementu obwodu można posłużyć się prostszym, jednowymiarowym modelem elektrycznym struktury, wprowadzającym od razu opis obwodowy, a więc posługującym się pojęciami napięcia i prądu. W opisie tym interesować się będziemy zależnością parametrów jednostkowych r i c struktury od jednej jedynie współrzędnej przestrzennej x , związanej z obranym układem współrzędnych. Dla struktur posiadających symetrię osiową — a jest to prawie zawsze spotykany przypadek — oś współrzędnej x odpowiada z zasady osi symetrii struk-



Rys. 2. Rozkład potencjału i przepływ prądu w strukturach o różnych rodzajach zbieżności
 a) struktura jednorodna — prostokątna, b) struktura o zbieżności liniowej — wycinek pierścienia kołowego, c) struktura o zbieżności geometrycznej $\omega(x)$ 1 — linie przepływu prądu, 2 — linie równego potencjału, 3 — powierzchnie przekroju struktury, odpowiadające wycięciu jej elementarnego odcinka Δx

tury (rys. 2). Współrzędne przestrzenne traktować można bezwymiarowo, normalizując je względem odcinka obranego za jednostkę.

Parametry jednostkowe służą do scharakteryzowania własności elektrycznych elementarnego odcinka struktury ograniczonego przez linie ekwipotencjalne pola elektrycznego w jej warstwach rezystancyjnych. W związku z tym prawidłowe określenie parametrów jednostkowych zakłada znajomość przebiegu linii ekwipotencjalnych w tych warstwach. Parametry $r_i = r_i(x)$ ($i = 1, 2$) oraz $c = c(x)$ określone są następująco:

— jednostkowy opór szeregowy warstwy rezystancyjnej 1:

$$r_1(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta R_1(x)}{\Delta x}, \quad (1)$$

gdzie $\Delta R_1(x)$ — całkowity opór odcinka warstwy 1 pomiędzy przekrojami x i $x + \Delta x$ struktury, poprowadzonymi zgodnie z przebiegiem linii ekwipotencjalnych (rys. 2c)

i odpowiednio

— jednostkowy opór szeregowy warstwy rezystancyjnej 2:

$$r_2(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta R_2(x)}{\Delta x} \quad (2)$$

z $\Delta R_2(x)$ określonym analogicznie jak $\Delta R_1(x)$;

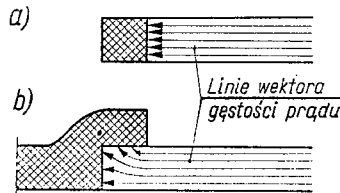
— jednostkowa pojemność

$$c(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta C(x)}{\Delta x}, \quad (3)$$

gdzie $C(x)$ — całkowita pojemność występująca pomiędzy odcinkami warstw 1 i 2 ograniczonymi przez przekroje x i $x + \Delta x$ (rys. 2c).

Za powierzchnie ekwipotencjalne odpowiadające punktom $x = 0$ i $x = d$, gdzie d jest długością struktury mierzoną wzdłuż osi x , uważać możemy powierzchnie metalicznych

kontaktów nałożonych na końcach warstw rezystancyjnych, przy założeniu, że wykonane są one z doskonale przewodzącego materiału. W fizycznych realizacjach struktur kontakty te nałożone są, ze względów technologicznych, najczęściej na lub pod warstwami rezystancyjnymi, w związku z czym winny one być dostatecznie wąskie w stosunku do wymiaru podłużnego struktury w celu umożliwienia pominięcia zakłóceń rozptyłu prądów w przekroju podłużnym warstwy w pobliżu kontaktów (rys. 3). Założenie o wąskich kontaktach



Rys. 3. Przepływ prądu w warstwie rezystancyjnej w pobliżu kontaktu

a) przy idealnym umieszczeniu kontaktu, b) przy kontakcie umieszczonym na warstwie rezystancyjnej

umożliwić ma także pominięcie wpływu pojemności skupionych, występujących w związku z obecnością kontaktów na krańcach struktury.

Z określeń parametrów jednostkowych $r_i(x)$ ($i = 1, 2$) i $c(x)$ (1)÷(3) wynika, że są to odpowiednio szybkości przyrostu całkowitego oporu $R_i(x)$ ($i = 1, 2$) warstw rezystancyjnych i całkowitej pojemności $C(x)$ występującej pomiędzy warstwami struktury, liczonych od jej początku do przekroju odpowiadającego powierzchni ekwipotencjalnej odległej od początku struktury o x , przy przesuwaniu się z x wzdłuż przyjętej osi współrzędnych (rys. 2c):

$$r_i(x) = \frac{d}{dx} R_i(x), \quad i = 1, 2; \quad (4)$$

$$c(x) = \frac{d}{dx} C(x).$$

Jak wynika z powyższych określeń, wymiarami parametrów jednostkowych warstw rezystancyjnych i dielektrycznej fizycznej realizacji struktury \overline{RC} o stałych rozłożonych są odpowiednio $\left[\frac{\Omega}{m} \right]$ i $\left[\frac{F}{m} \right]$. Jeśli współrzędne geometryczne struktury traktować będziemy jako współrzędne znormalizowane, a więc bezwymiarowo, wielkości te przyjmą wymiar $[\Omega]$ i $[F]$.

Najprostszy sposób uzależnienia parametrów jednostkowych struktury \overline{RC} o stałych rozłożonych od współrzędnej przestrzennej polega na odpowiednim, jednakowym ukształtowaniu warstw wchodzących w jej skład zgodnie z pewną funkcją $w(x)$ (rys. 1a), kształtującą tzw. zbieżność geometryczną struktury. W zależności od funkcji tej wyróżnia się struktury o zbieżności wykładniczej, hiperbolicznej itp. Gdy $w(x) = w_0 = \text{const}$, strukturę nazywamy jednorodną; ma ona kształt prostokąta. W strukturze tej linie ekwipotencjalne są prostymi prostopadłymi do jej osi podłużnej i gęstość prądu jest stała w każdym prze-

kroju poprzecznym każdej z warstw rezystancyjnych (rys. 2a). Dla przypadku tego można stwierdzić, że

$$r(x) = r_0 = \text{const},$$

$$c(x) = c_0 = \text{const};$$

na całym odcinku $[0, d]$ osi x -i wartości parametrów jednostkowych r i c związane są w prosty sposób ze stałymi materiałowymi poszczególnych warstw oraz ich szerokością $w(x) = w_0$. Dla struktury jednorodnej jest oczywiście

$$r_1(x) = \frac{r_{\square_1}}{w_0} \tag{5a}$$

$$r_2(x) = \frac{r_{\square_2}}{w_0}$$

gdzie r_{\square_1} i r_{\square_2} — rezystywności powierzchniowe warstw 1 i 2 oraz

$$c(x) = c_0 w_0, \tag{5b}$$

gdzie c_0 — pojemność na jednostkę powierzchni warstwy dielektrycznej.

Łatwo zauważyć, że niezależnie od szerokości w_0 struktury, stałe pozostają iloczyny $r_1 c = r_{\square_1} c_0$, $r_2 c = r_{\square_2} c_0$ oraz że r_1 i r_2 znajdują się w stałym stosunku wzajemnym

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_{\square_2}}{r_{\square_1}} = N,$$

czyli

$$r_2 = N r_1. \tag{6}$$

Dla struktur niejednorodnych, wobec jednakowego ukształtowania obydwu warstw rezystancyjnych 1 i 2, różniących się między sobą jedynie wartością rezystywności powierzchniowej, przebieg linii ekwipotencjalnych jest w warstwie 1 i 2 taki sam, i sposób uzmiennienia parametrów $r_1(x)$ i $r_2(x)$ pozostaje dla nich także jednakowy, pozwalając na napisanie

$$r_1(x) = \frac{r_{\square_1}}{p(x)}, \tag{5'}$$

$$r_2(x) = \frac{r_{\square_2}}{p(x)},$$

gdzie $p(x)$ jest funkcją określającą zmienność jednostkowego oporu szeregowego struktury w funkcji współrzędnej przestrzennej x .

Stąd dla struktur niejednorodnych także

$$r_2(x) = N r_1(x), \quad N = \frac{r_{\square_2}}{r_{\square_1}}, \tag{6'}$$

co tłumaczy symbol NR użyty na rysunku 1b.

Strukturę taką nazywamy strukturą typu $R-C-NR$ [7], [8]; jako element dualny do niej wprowadzić można strukturę typu $C-R-NC$ [7], trudniejszą do realizacji ze względu na większą liczbę warstw.

Funkcja $w(x)$, kształtująca strukturę niejednorodną, nie określa, w przypadku ogólnym, bezpośrednio zmienności parametrów r i c struktury, czyli jej kształtu elektrycznego. Weźmy pod uwagę wycinek struktury rozpatrywany przy określaniu parametrów jednostkowych $r_i(x)$ ($i = 1, 2$) i $c(x)$ (1)÷(3). Linie ekwipotencjalne ograniczające ten odcinek mają charakter krzywych odległych od siebie na osi struktury o Δx (rys. 2c). Dla struktury niejednorodnej interesować się możemy jej „szerokością” $w(x)$ liczoną wzdłuż linii ekwipotencjalnej odpowiadającej punktowi x na osi. Przy wyznaczaniu oporu $\Delta R_i(x)$ ($i = 1, 2$) występującego w wyrażeniach (1), (2) konieczna jest znajomość rozkładu wektora gęstości prądu przewodzenia na obszarze interesującego nas odcinka. Rozkład ten nie jest równomierny na całej szerokości struktury i większej odległości między liniami ekwipotencjalnymi odpowiada mniejsza gęstość prądu. Tym samym poszczególne części wycinka z rys. 2c przedstawiają sobą różny opór. Opór całkowity $\Delta R_i(x)$ wyraża się ilorzem różnicy potencjałów między rozpatrywanymi liniami ekwipotencjalnymi i całkowitego prądu $i(x)$, równego całce z gęstości prądu po całej szerokości struktury. Wyznaczając $r_1(x)$ i $r_2(x)$ zgodnie z (1) i (2), wartości te są ściśle odwrotnie proporcjonalne do $w(x)$ tylko w przypadku stałej gęstości prądu wzdłuż całej linii ekwipotencjalnej, co odpowiada stałej odległości między sąsiednimi liniami ekwipotencjalnymi na całej szerokości struktury. Parametry $r_1(x)$ i $r_2(x)$ określone są więc, ogólnie, przez pewną funkcję $p(x)$ różną od $w(x)$:

$$r_i(x) = \frac{r_{0i}}{p(x)}, \quad i = 1, 2. \quad (5a'')$$

Pojemność $\Delta C(x)$ występująca w określeniu pojemności jednostkowej (3) jest proporcjonalna do powierzchni całego wycinka pomiędzy przekrojami x i $x + \Delta x$. Przechodząc do granicy zgodnie z wyrażeniem (3) wartość $c(x)$ jest, w ogólnym przypadku, różna od $c_0 \cdot w(x)$ ze względu na różną odległość między sąsiednimi liniami ekwipotencjalnymi na szerokości struktury. Ogólnie wartość ta określona jest przez pewną funkcję $q(x)$ zależną od konkretnego ukształtowania geometrycznego warstw

$$c(x) = c_0 q(x), \quad (5b'')$$

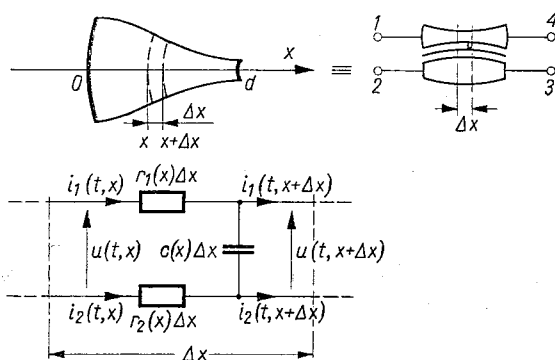
gdzie $q(x) \neq w(x)$.

Funkcje $p(x)$ i $q(x)$ są identyczne z szerokością $w(x)$ struktury liczoną wzdłuż linii ekwipotencjalnych jedynie w przypadkach stałych odległości między sąsiednimi liniami ekwipotencjalnymi na całej szerokości struktury. Warunek ten spełniony jest dokładnie tylko dla struktur o regularnych kształtach: prostokątnej oraz będącej wycinkiem pierścienia kołowego (rys. 2a, b). Struktura prostokątna jest wspomnianą już strukturą jednorodną; struktura pierścieniowa z rys. 2b realizuje elektryczną zbieżność liniową [6]. W przypadku tym zbieżność elektryczna struktury jest jednakowa dla obydwu parametrów jednostkowych $r(x)$ i $c(x)$:

$$p(x) \equiv q(x) \equiv w(x) = 1 + \frac{x}{x_0}$$

i iloczyn $r_i(x)c(x) = r_{\square}c_0$ pozostaje stały niezależnie od x , podobnie jak w strukturze jednorodnej.

We wszystkich pozostałych przypadkach fizycznych realizacji struktur niejednorodnych przy pomocy płaskich struktur warstwowych zasadniczo nie daje się uzyskać uzmiennienia parametrów $r(x)$ i $c(x)$ przy pomocy tej samej funkcji $p(x)$, reprezentującej szerokość elektryczną struktury. Szerokości elektryczne $p(x)$ i $q(x)$ są dla obydwu rodzajów parametrów jednostkowych różne. W praktyce jednak warunek $r_i(x) \cdot c(x) = \text{const}$, a więc stałość odległości między sąsiednimi liniami ekwipotencjalnymi spełniony jest w sposób przybliżony, lecz z wystarczającą dokładnością dla struktur o niezbyt dużym stopniu zbieżności [6]. Można przyjmować więc, że parametry jednostkowe struktury



Rys. 4. Model elementarnego odcinka Δx niejednorodnej struktury $\overline{RC-NR}$

określone są jedną funkcją kształtu elektrycznego $p(x)$, jak czyni się to powszechnie w literaturze. Kształt geometryczny struktury odpowiadający danemu kształtowi elektrycznemu daje się praktycznie wyznaczyć także jedynie przy pomocy metod przybliżonych.

Aby przy wyznaczaniu właściwego kształtu geometrycznego struktury możliwe było pominięcie wpływu niejednorodności pola elektrycznego na brzegach warstwy dielektrycznej, które mogą być źródłem dodatkowej niedokładności w uzyskanym kształcie elektrycznym, warstwy struktury winny mieć dostatecznie małą grubość w stosunku do jej pozostałych wymiarów. W realizacjach cienkowarstwowych struktury \overline{RC} warunek ten można uważać za spełniony.

Celem wyznaczenia zależności różniczkowych, wiążących ze sobą prądy i napięcia występujące w rozpatrywanej strukturze o stałych rozłożonych, przedstawimy — przyjmując model jednowymiarowy — elementarny odcinek struktury o długości Δx w postaci zastępczego układu o stałych skupionych; dla omawianej struktury schemat takiego układu pokazany jest na rys. 4.

W oparciu o prawa Kirchhoffa możemy dla układu z rys. 4 napisać zespół równań

$$\begin{cases} u(t, x + \Delta x) - u(t, x) = -r_1(x)\Delta x i_1(t, x) + r_2(x)\Delta x i_2(t, x), \\ i_1(t, x + \Delta x) - i_1(t, x) = -i_2(t, x + \Delta x) + i_2(t, x) = -c(x)\Delta x \frac{\partial u(t, x + \Delta x)}{\partial t}, \end{cases} \quad (7)$$

który po obustronnym podzieleniu przez Δx i przejściu z Δx do 0 sprowadza się do układu równań różniczkowych cząstkowych

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = -r_1(x)i_1(t, x) + r_2(x)i_2(t, x), \\ \frac{\partial i_1(t, x)}{\partial x} = -\frac{\partial i_2(t, x)}{\partial x} = -c(x)\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}. \end{cases} \quad (8)$$

Układ ten można poddać jednowymiarowemu przekształceniu Laplace'a względem czasu otrzymując układ równań różniczkowych zwyczajnych o zmiennych współczynnikach, wiążących ze sobą wielkości operatorowe — transformaty napięcia i prądów. Przy założeniu zerowych warunków początkowych mamy

$$\begin{cases} \frac{du(s, x)}{dx} = -r_1(x)i_1(s, x) + r_2(x)i_2(s, x), \\ \frac{di_1(s, x)}{dx} = -\frac{di_2(s, x)}{dx} = -sc(x)u(s, x). \end{cases} \quad (9)$$

Zmienna zespolona s występuje w układzie tym jako parametr.

Jednowymiarowy model elektryczny struktury pozostaje wystarczająco dokładny w zakresie częstotliwości, przy których wymiary geometryczne struktury są pomijalne w stosunku do długości fali odpowiadającej częstotliwości pracy. Przy częstotliwościach, dla których wymiary geometryczne struktury \overline{RC} o stałych rozłożonych stają się porównywalne z długością fali, opis obwodowy przestaje być słuszny także w stosunku do innych elementów obwodu elektrycznego, w którym pracuje struktura z uwagi na porównywalność ich wymiarów z wymiarami fizycznych realizacji struktury.

Należy zauważyć jeszcze, że postępując w nakreślony wyżej sposób traktujemy strukturę \overline{RC} jak linię transmisyjną zasilaną w zwykły sposób, pozwalający na wprowadzenie modelu jej elementarnego odcinka Δx , pokazanego na rys. 4. Tymczasem struktura ta jest elementem o czterech zaciskach niezależnych i może być w ogólnym przypadku zasilana skośnikowo, czyli przyjmując np. zaciski 1—3 za wejściowe, 2—4 za wyjściowe itp. W odniesieniu do tak zasilanej struktury słuszność przyjętego schematu zastępczego elementarnego odcinka Δx jest ograniczona. Jeżeli jednak długość struktury jest pomijalnie mała w porównaniu z długością fali odpowiadającą częstotliwości pracy, co praktycznie jest zawsze spełnione chociażby z uwagi na zakres częstotliwości pozwalający na stosowanie jednowymiarowego modelu struktury, prowadzone w ten sposób rozważania pozwalają na uzyskanie poprawnych wyników [14].

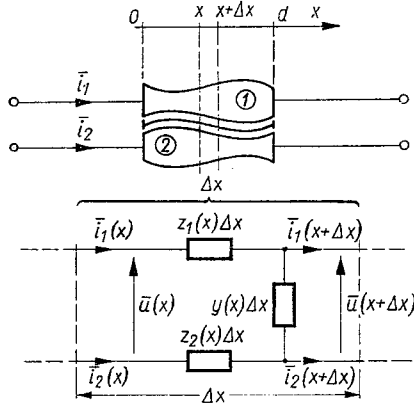
3. STRUKTURA $\mathcal{L}-\mathcal{Y}-N\mathcal{L}$

Po omówieniu, tytułem wprowadzenia, struktury $R-C-NR$ o stałych rozłożonych przystąpimy do rozpatrzenia własności struktury ogólniejszej, której parametry jednostkowe są odpowiednio jednostkową impedancją szeregową $z(s, x)$ i jednostkową admitancją równoległą $y(s, x)$. Analogicznie do schematu pokazanego na rys. 4, schemat zastępczy elementarnego odcinka Δx takiej struktury przedstawić można w postaci układu o stałych skupionych (rys. 5). Występujące tutaj napięcie $u(x)$ i prądy $i_1(x)$, $i_2(x)$ są wielkościami

operatorowymi, będąc transformatami Laplace'a odpowiednich napięć i prądów w strukturze:

$$\begin{aligned} u(x) &= u(s, x) = \mathcal{L}[u(t, x)], \\ i_j(x) &= i_j(s, x) = \mathcal{L}[i_j(t, x)], \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{10}$$

O przebiegach czasowych $u(t, x)$ i $i_j(t, x)$ ($j = 1, 2$) zakładamy, że są one transformowalne w sensie Laplace'a.



Rys. 5. Niejednorodna struktura $\mathcal{L}-\mathcal{Y}-N\mathcal{L}$ i model jej elementarnego odcinka Δx

Parametry jednostkowe struktury $\mathcal{L}-\mathcal{Y}-N\mathcal{L}$ określamy podobnie jak w przypadku struktury RC; będą one, obok zależności od współrzędnej przestrzennej x , także funkcją zmiennej zespolonej s :

— jednostkowe impedancje szeregowe $z_1(x)$ i $z_2(x)$:

$$\begin{aligned} z_1(x) &= z_1(s, x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathcal{Z}_1(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} \mathcal{Z}_1(x), \\ z_2(x) &= z_2(s, x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathcal{Z}_2(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} \mathcal{Z}_2(x), \end{aligned} \tag{11}$$

gdzie: $\Delta \mathcal{Z}_j(x)$ — całkowita impedancja szeregową odcinka „warstwy” impedancyjnej j ($j = 1, 2$) pomiędzy przekrojami ekwipotencjalnymi x i $x + \Delta x$ struktury (rys. 5),

$\mathcal{Z}_j(x)$ — całkowita impedancja warstwy j ($j = 1, 2$) występująca pomiędzy początkiem struktury a przekrojem ekwipotencjalnym w odległości x od jej początku;

— jednostkowa admitancja równoległa

$$y(x) = y(s, x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathcal{Y}(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} \mathcal{Y}(x), \tag{12}$$

gdzie: $\Delta \mathcal{Y}(x)$ — całkowita admitancja równoległa występująca pomiędzy odcinkami warstw 1 i 2 ograniczonymi przekrojami ekwipotencjalnymi x i $x + \Delta x$ struktury,

$\mathcal{Y}(x)$ — całkowita admitancja równoległa pomiędzy warstwami 1 i 2 na odcinku od początku struktury do przekroju w odległości x .

Przyjęty w ten sposób model jest również modelem jednowymiarowym; dla rozpatrywanej w ten sposób struktury $\mathcal{L} - \mathcal{Y} - N\mathcal{L}$ spełnione muszą więc być także założenia gwarantujące słuszność takiego modelu.

W strukturze $\mathcal{L} - \mathcal{Y} - N\mathcal{L}$ mówić możemy — w miejsce warstw rezystancyjnych i dielektrycznej — o „warstwach” impedancyjnych i „warstwie” admitancyjnej. O jednostkowych impedancjach szeregowych $z(s, x)$ i admitancji równoległej $y(s, x)$ odpowiednich warstw wystarczy w przypadku ogólnym założyć, że dla każdej wartości współrzędnej przestrzennej x z przedziału odpowiadającego długości struktury są one funkcjami holomorficznymi w pewnym obszarze D płaszczyzny zmiennej zespolonej s , ciągłymi w obszarze domkniętym \bar{D} , a dla każdej wartości s z tego obszaru funkcja określająca ich zależność od x jest mierzalna i ograniczona [9]. Analogicznie do struktur $C - R - NC$ [7], [8] można wprowadzić koncepcję struktury $\mathcal{Y} - \mathcal{L} - N\mathcal{Y}$.

Ogólniejsza od $R - C - NR$ postać struktury $\mathcal{L} - \mathcal{Y} - N\mathcal{L}$ pozwala na uwzględnienie także zjawiska rozłożonej indukcyjności szeregowej oraz upływności równoległej modelowanego przez nią elementu o stałych rozłożonych. Może to być element o konstrukcji innej niż konstrukcja warstwowa przedstawiona na rys. 1; od jego konfiguracji przestrzennej wymagać należy jedynie, aby pozwalała na przyjęcie jednowymiarowego modelu elektrycznego. Ze względu na prowadzenie rozważań pod kątem ich przydatności do określenia własności struktur \overline{RC} o stałych rozłożonych przyjmujemy dodatkowo, że — analogicznie jak $r_1(x)$ i $r_2(x)$ w strukturze $R - C - NR$ — parametry $\varepsilon_1(x)$ i $\varepsilon_2(x)$ struktury $\mathcal{L} - \mathcal{Y} - N\mathcal{L}$ związane są ze sobą zależnością:

$$\varepsilon_2(s, x) = N\varepsilon_1(s, x), \quad (13)$$

gdzie N — liczba rzeczywista dodatnia.

W fizycznie realizowanych strukturach \overline{RC} o stałych rozłożonych indukcyjności szeregowych warstw rezystancyjnych są na tyle małe, że efekt ich występowania zaczyna być zauważalny dopiero przy częstotliwościach, przy których model jednowymiarowy przestaje obowiązywać i struktura rozpatrywana być musi jako element przestrzenny, przy pomocy metod polowych. W strukturach \overline{RC} więc

$$\varepsilon_1(x) = r_1(x) = r_{\square_1} \frac{1}{p(x)},$$

$$\varepsilon_2(x) = r_2(x) = Nr_1(x) = N\varepsilon_1(x) \quad (14)$$

i uczynione założenie odpowiada w pełni warunkom fizycznym.

W strukturach \overline{RC} istotne może być natomiast zjawisko upływności równoległej związanej ze stratnością warstwy dielektrycznej. Jednostkowa admitancja równoległa $y(x)$

przyjmuje w tym wypadku postać

$$y(x) = g(x) + sc(x) = (g_0 + sc_0) q(x)^{1)} \quad (15)$$

Struktury, w których zjawisko to uwzględniane jest na równi z opornością i pojemnością rozłożoną, nazywane są strukturami \overline{RCG} .

4. RÓWNANIA STRUKTURY $\mathcal{L}-\mathcal{Y}-N\mathcal{L}$

Poczyniwszy powyższe uwagi możemy napisać, w oparciu o oznaczenia wprowadzone na rys. 5 z uwzględnieniem związku (13)

$$z_2(x) = N_{z_1}(x) = N_z(x),$$

równania dla schematu zastępczego elementarnego odcinka Δx struktury $\mathcal{L}-\mathcal{Y}-N\mathcal{L}$ analogicznie do równań (7) dla struktury $R-C-NR$. Obowiązuje przy tym również uwaga poczyniona na temat słuszności przyjętego schematu zastępczego odcinka Δx przy skośnikowym zasilaniu struktury. Równania te będą miały postać:

$$\begin{cases} \bar{u}(x+\Delta x) - \bar{u}(x) = -z(x)\Delta x \bar{i}_1(x) + N_z(x)\Delta x \bar{i}_2(x), \\ \bar{i}_1(x+\Delta x) - \bar{i}_1(x) = -\bar{i}_2(x+\Delta x) + \bar{i}_2(x) = -y(x)\Delta x \bar{u}(x+\Delta x), \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \frac{\bar{u}(x+\Delta x) - \bar{u}(x)}{\Delta x} = -z(x)[\bar{i}_1(x) - N\bar{i}_2(x)], \\ \frac{\bar{i}_1(x+\Delta x) - \bar{i}_1(x)}{\Delta x} = -\frac{\bar{i}_2(x+\Delta x) - \bar{i}_2(x)}{\Delta x} = -y(x)\bar{u}(x+\Delta x). \end{cases} \quad (17)$$

Równania (16) i (17) wiążą ze sobą od razu wielkości operatorowe $\bar{u}(x)$ i $\bar{i}(x)$, o których wspomniano już wcześniej (10), i w napisanej postaci słuszne są przy założeniu zerowych warunków początkowych. Dokonując przejścia granicznego przy $\Delta x \rightarrow 0$ dochodzimy do zależności obowiązującej w każdym przekroju struktury:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}(x)}{dx} = -z(x)[\bar{i}_1(x) - N\bar{i}_2(x)], \\ \frac{d\bar{i}_1(x)}{dx} = -\frac{d\bar{i}_2(x)}{dx} = -y(x)\bar{u}(x), \end{cases} \quad (18)$$

gdzie $\bar{i}_1(x)$ i $\bar{i}_2(x)$ oznaczają transformaty Laplace'a prądów odpowiednio w górnej i dolnej warstwie struktury (rys. 5), w odległości x od jej początku. Jak łatwo zauważyć z drugiego z równań (18), wielkości te związane są ze sobą równaniem

$$\bar{i}_1(x) + \bar{i}_2(x) = D, \quad (19)$$

¹⁾ Określenie jednostkowej przewodności (upływności) równoległej $g(x)$ struktury \overline{RC} o stałych rozłożonych jest w pełni analogiczne do określenia pojemności jednostkowej:

$$g(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta G(x)}{\Delta x},$$

gdzie $\Delta G(x)$ — całkowita upływność występująca pomiędzy odcinkami warstw rezystancyjnych 1 i 2 ograniczonymi przez przekroje x i $x+\Delta x$ (rys. 2c),

Wartość $\Delta G(x)$, jest, tak samo jak $\Delta C(x)$, proporcjonalna do powierzchni wycinka struktury ograniczonego przekrojami ekwipotencjalnymi. Wynika stąd proporcjonalność wartości parametrów jednostkowych $c(x)$ i $g(x)$.

gdzie $D = D(s)$ nie zależy od x będąc jednocześnie w przypadku ogólnym funkcją zmienną zespoloną s , ustaloną w zależności od warunków brzegowych narzuconych na rozwiązanie układu równań (18).

Pamiętając o związku (19) możemy zamiast $\bar{i}_1(x)$ i $\bar{i}_2(x)$ wprowadzić do rozważań wielkość

$$\bar{v}(x) = \bar{i}_1(x) - N\bar{i}_2(x), \quad (20)$$

będącą kombinacją liniową prądów $\bar{i}_1(x)$ i $\bar{i}_2(x)$. Posługując się nią doprowadzimy układ (18) do postaci

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}(x)}{dx} = -z(s, x)\bar{v}(x), \\ \frac{d\bar{v}(x)}{dx} = -y(s, x)(1+N)\bar{u}(x). \end{cases} \quad (21)$$

Jest to układ dwóch równań różniczkowych liniowych I-go rzędu o zmiennych współczynnikach, zależnych od parametru zespolonego s . W przypadku, gdy rozważana struktura typu $\mathcal{L}-\mathcal{Y}-N\mathcal{Z}$ modeluje strukturę RC (RCG) o stałych rozłożonych, funkcje $z(s, x)$ i $y(s, x)$ mają postać określoną wcześniej przez

$$\begin{cases} z(s, x) = r(x) = r_{\square 1} \frac{1}{p(x)}, \\ y(s, x) = g(x) + sc(x) = (g_0 + sc_0)q(x). \end{cases} \quad (22)$$

Znaczenia poszczególnych symboli wyjaśnione zostały poprzednio. Jest to postać typu

$$\begin{cases} z(s, x) = z(s) \frac{1}{p(x)}, \\ y(s, x) = y(s)q(x), \end{cases} \quad (23)$$

przy czym $z(s)$ i $y(s)$ są funkcjami holomorficznymi w całej płaszczyźnie zmiennej zespolonej s . Jeśli więc $\frac{1}{p(x)}$ i $q(x)$ są ciągłymi funkcjami zmiennej x w całym przedziale $[0, d]$ — co oznacza ciągłość $p(x)$ i $q(x)$ wraz z warunkiem $p(x) \neq 0$ dla $x \in [0, d]$ — wówczas wnosić możemy o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań \bar{u} i \bar{v} układu (21), ich ciągłości i różniczkowalności względem x w przedziale $[0, d]$ oraz analityczności względem s na całej płaszczyźnie zespolonej, na podstawie odpowiednich twierdzeń o istnieniu i własnościach rozwiązań układu równań różniczkowych liniowych (patrz np. [10]).

Układ równań (21) o współczynnikach określonych wzorami (23) zastąpić można równoważnym równaniem II-go rzędu przez wyrugowanie funkcji $\bar{v}(x)$. Trzeba dodatkowo zażądać przy tym, aby $p(x)$ występująca w wyrażeniu (23) była funkcją różniczkowalną względem x dla $x \in [0, d]$. Otrzymujemy w ten sposób

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\bar{u}(x)}{dx} \right] - z(s)y(s)(1+N)q(x)\bar{u}(x) = 0, \quad (24)$$

gdzie

$$\frac{p(x)}{z(s)} \frac{d\bar{u}(x)}{dx} = - \frac{1}{z(s, x)} \frac{d\bar{u}(x)}{dx} = \bar{v}(x). \quad (25)$$

Równanie o tej postaci znane jest jako równanie Sturm [11]. Można doprowadzić je do postaci

$$\frac{d^2 \bar{u}(x)}{dx^2} + \frac{p'(x)}{p(x)} \frac{d\bar{u}(x)}{dx} - z(s)q(s)(1+N) \frac{q(x)}{p(x)} \bar{u}(x) = 0, \quad (26)$$

z której wynika dodatkowy warunek istnienia i jednoznaczności jego rozwiązań, w postaci ciągłości pochodnej $p'(x)$ dla $x \in [0, d]$.

W podsumowaniu możemy więc napisać: jeżeli funkcje kształtu $p(x) \neq 0$ i $q(x)$, określające zbieżność elektryczną struktury $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{Y} \rightarrow N\mathcal{E}$ są odpowiednio klasy: $p(x) \in C^1[0, d]$ i $q(x) \in C[0, d]$, gdzie d — długość struktury, to o własnościach rozwiązań układu równań struktury (21) wnioskować możemy na podstawie własności rozwiązań równania Sturm (24).

Do równania (24) odnosi się cała teoria Sturm, której zarys przedstawiony jest np. w [11].

Warunki $p(x) \neq 0$, $p(x) \in C^1$ i $q(x) \in C$ w $[0, d]$ narzucane na funkcje kształtu nie wprowadzają praktycznych ograniczeń na rodzaj zbieżności struktury. W wypadku, gdy $p(x)$ lub $q(x)$ nie jest ciągła na odcinku $[0, d]$ (ze względu na warunki fizycznej realizowalności mogą one posiadać jedynie skończoną liczbę nieciągłości I-go rodzaju) i x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) są punktami nieciągłości, wystarczy podzielić przedział $[0, d]$ na części w punktach x_i i badać zachowanie się rozwiązań równania w każdej z tych części oddzielnie. Podobnie uczynić możemy, jeśli w przedziale $[0, d]$ wystąpią punkty nieciągłości pochodnej $p'(x)$. Warunki fizyczne nie wykluczają tu jednak, w odróżnieniu od funkcji $p(x)$, punktów nieciągłości II-go rodzaju, np. x_j , $j = 1, 2, \dots, m$. Podział odcinka $[0, d]$ może być wówczas przeprowadzony w punktach $x_j \pm \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, a o własnościach rozwiązań układu (21) w punktach x_j wnioskować będziemy na podstawie przejścia granicznego przy $\varepsilon \rightarrow 0$ ze względu na ich ciągłość, w stosunku do której nie ingeruje fakt nieistnienia pochodnej $p'(x)|_{x=x_j}$. Założenie $p(x) \neq 0$ spełnione jest zawsze z warunków fizycznych.

Rozwiązanie równania (24), jako liniowego równania różniczkowego II-go rzędu, przedstawić można — jak wiadomo — w postaci kombinacji liniowej dwu niezależnych liniowo rozwiązań, tworzących układ fundamentalny $(\bar{u}_I, \bar{u}_{II})$:

$$\bar{u}(s, x) = a\bar{u}_I(x) + b\bar{u}_{II}(x). \quad (27)$$

Układów tych jest nieskończenie wiele. Operator różniczkowy typu

$$L(\bar{u}) = \frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{d\bar{u}}{dx} \right] + l(x)\bar{u} \quad (28)$$

występujący w równaniu (24) jest operatorem samosprężonym [6], [11], [12].

Funkcje \bar{u}_I i \bar{u}_{II} będące w przedziale $[0, d]$ liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania

$$L(\bar{u}) = 0, \quad (29)$$

w którym $L(\bar{u})$ jest operatorem typu (28), spełniają tzw. tożsamość Abela [6], [11]:

$$p(x)[\bar{u}_I(x)\bar{u}'_{II}(x) - \bar{u}'_I(x)\bar{u}_{II}(x)] = p(0)[\bar{u}_I(0)\bar{u}'_{II}(0) - \bar{u}'_I(0)\bar{u}_{II}(0)] = \text{const}, \quad (30)$$

dla każdego $x \in [0, d]$, gdzie (') oznacza różniczkowanie względem x .

Tożsamość tę otrzymać można ze znanego wzoru Liouville'a

$$W[u_I(x), u_{II}(x)] = W[u_I(0), u_{II}(0)] e^{-\int_0^x b(\xi) d\xi}, \quad (31)$$

gdzie $W[u_I, u_{II}]$ jest wyznacznikiem Wrońskiego rozwiązań liniowego równania różniczkowego II-go rzędu:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + b(x) \frac{du}{dx} + c(x) = 0. \quad (32)$$

W wypadku rozpatrywanego przez nas równania $b(x) = \frac{p'(x)}{p(x)}$, skąd wynika wprost tożsamość (30). Wzór (30) uzyskać można także bezpośrednio z równania (29) $L(\bar{u}) = 0$ o $L(\bar{u})$ danym wyrażeniem (28) [11]. Tożsamość Abela (30) będzie przydatna w toku dalszych obliczeń.

Jeśli dane jest rozwiązanie $\bar{u}(s, x)$ równania struktury (24) w postaci (27), ze związku (25) znaleźć możemy wyrażenie na $\bar{v}(s, x) = \bar{i}_1(x) - N\bar{i}_2(x)$, po czym, korzystając z poczynionej wcześniej uwagi (19), uzyskać zespół wyrażeń na napięcie $\bar{u}(s, x)$ oraz prądy $\bar{i}_1(s, x)$ i $\bar{i}_2(s, x)$ w strukturze. Wyrażenia te będą miały postać

$$\begin{cases} \bar{u}(s, x) = a\bar{u}_I(s, x) + b\bar{u}_{II}(s, x), \\ \bar{i}_1(s, x) = -\frac{1}{(1+N)z(s, x)} [a\bar{u}'_I(s, x) + b\bar{u}'_{II}(s, x)] + \frac{N}{1+N} D(s), \\ \bar{i}_2(s, x) = \frac{1}{(1+N)z(s, x)} [a\bar{u}'_I(s, x) + b\bar{u}'_{II}(s, x)] + \frac{1}{1+N} D(s), \end{cases} \quad (33)$$

gdzie \bar{u}'_I i \bar{u}'_{II} oznaczają odpowiednio pochodne \bar{u}_I i \bar{u}_{II} względem x . Zawierają one trzy stałe dowolne a , b i D będące — w przypadku ogólnym — funkcjami zmiennej zespolonej s i określane w zależności od warunków brzegowych narzucanych na napięcie i prądy w strukturze w określonych warunkach pracy.

Oprócz wymienionych trzech wielkości \bar{u} , \bar{i}_1 , \bar{i}_2 wygodnie jest wyznaczyć jeszcze dwie inne: napięcia wzdłużne $\bar{u}_g(x)$ („górne”) i $\bar{u}_d(x)$ („dolne”) między przekrojem — odpowiednio górnej lub dolnej warstwy struktury — odległym o x od jej początku i przekrojem początkowym tej warstwy. Napięcia te dają się wyznaczyć z rys. 4 jako

$$\begin{cases} \Delta\bar{u}_g(x) \simeq -z(x)\Delta x \bar{i}_1(x), & d\bar{u}_g(x) = -z(x)\bar{i}_1(x) dx, \\ \Delta\bar{u}_d(x) \simeq -Nz(x)\Delta x \bar{i}_2(x), & d\bar{u}_d(x) = -Nz(x)\bar{i}_2(x) dx, \end{cases} \quad (34)$$

skąd

$$\begin{aligned} \bar{u}_g(x) &= -\int_0^x z(x)\bar{i}_1(x) dx, \\ \bar{u}_d(x) &= -N\int_0^x z(x)\bar{i}_2(x) dx, \end{aligned} \quad (35)$$