Współczynnik przejmowania ciepła na drodze konwekcji swobodnej zależny jest od przyrostu temperatury w potędze 1/4. Przewodności podłużne promieniowania i konwekcji w schemacie są połączone równolegle i aby przewodności te mogły być do siebie dodane, trzeba wyrażenie na współczynnik przejmowania ciepła na drodze promieniowania (8) przekształcić tak, aby był funkcją przyrostu temperatury też w potędze 1/4.

W pracy [1] podana jest zależność (6) w postaci:

$$\alpha_{ior} \approx 2{,}38 \cdot \varepsilon_i \vartheta_i (1 + 0{,}011 t_o). \tag{8}$$

Po podstawieniu do powyższej zależności wartość względnego współczynnika promieniowania $\varepsilon_i = 0{,}9$ oraz po przyjęciu dla transformatorów suchych temperatury otoczenia za stałą i równą $t_o = 20°C$ otrzymuje się:

$$\alpha_{ior} \approx 2{,}58 \vartheta_i^{1/4}. \tag{9}$$

W zakresie przyrostów temperatur $\vartheta_i = (20...100)°K$ wartości obliczone ze wzoru przybliżonego (8) zawierają się w granicach $\pm 5\%$ wartości obliczonej wzorem ścisłym (6).

Dla szerszego przedziału przyrostów temperatury, np. $\vartheta_i = (20...120)°K$ (125°K dla klasy izolacji *H*), słuszniejszy byłby wzór przybliżony:

$$\alpha_{ior} \approx 2{,}64 \vartheta_i^{1/4}. \tag{10}$$

Wartości obliczone na podstawie powyższego wzoru nie różnią się więcej niż $\pm 7\%$ od wartości otrzymanych ze wzoru ścisłego (6).

Wprowadzając uproszczone wyrażenie na współczynnik przejmowania ciepła na drodze promieniowania (9) do przewodności podłużnej otrzymuje się:

$$\Lambda_{io} = \varphi_{rio} \cdot S_i \cdot 2{,}58 \cdot \vartheta_i^{1/4} + \varphi_k \cdot S_k \cdot 1{,}38 h^{-1/4} \cdot \vartheta_i^{1/4} = a_{io} \cdot \vartheta_i^{1/4}, \tag{11}$$

gdzie:

$$a_{io} = 2{,}58 \cdot \varphi_{rio} \cdot S_i + 1{,}38 \cdot \varphi_k \cdot S_k \cdot h^{-1/4}. \tag{11a}$$

Wyrażenie na a_{io} jest zależne tylko od wymiarów geometrycznych układu wymieniającego ciepło.

Z układu równań (5) wynika, że w przypadku gdy ϑ_i mało różni się od ϑ_k, człony z przewodnościami poprzecznymi

$$\Lambda_{ik}(\vartheta_i - \vartheta_k) \tag{12}$$

odgrywają stosunkowo małą rolę. Dla powyższych warunków, gdy $\vartheta_i \approx \vartheta_k$, wartość współczynnika przejmowania ciepła na drodze promieniowania wg zależności (1) niewiele się zmienia i dla tego przypadku można przyjąć

$$\alpha_{rik} = C = \text{const}, \tag{13}$$

czyli:

$$\Lambda_{ik} = a_{ik} C + b_{ik} = \text{const}, \tag{15}$$

gdzie

$$b_{ik} = \frac{\lambda_{kl} \cdot S_{kl}}{d_{kl}}. \tag{15}$$

W układzie równań (5) po uwzględnieniu zależności (11) występują człony z przewodnościami podłużnymi o postaci:

$$\Lambda_{io} \cdot \vartheta_i = a_{io} \vartheta_i^{0,25} \cdot \vartheta_i = a_{io} \cdot \vartheta_i^{1,25}. \tag{16}$$

Można tutaj zastosować przybliżenie funkcji wykładniczej — funkcją liniową o postaci

$$\vartheta^{1,25} \approx n + m \cdot \vartheta, \tag{17}$$

gdzie m i n są stałymi dla przyjętego zakresu linearyzacji.

Dla przedziału przyrostu temperatury $\vartheta = (10...60)°K$ można przyjąć:

$$n = -20 \quad \text{oraz} \quad m = 3{,}1.$$

Dla przedziału $\vartheta = (60...140)°K$

$$n = -80 \quad \text{oraz} \quad m = 4{,}0.$$

Po podstawieniu do układu równań (5) zależności (11), (13), (17) oraz przyjęciu następujących oznaczeń:

$$\begin{aligned} a_{io} \cdot m &= A_{io}, \\ a_{io} \cdot n &= Q_i, \\ a_{ik} \cdot C + b_{ik} &= A_{ik}, \end{aligned} \tag{18}$$

układ równań (5) przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} (A_{10} - \alpha_1 P_1)\vartheta_1 + A_{12}(\vartheta_1 - \vartheta_2) + A_{13}(\vartheta_1 - \vartheta_3) &= P_1 - Q_1, \\ A_{21}(\vartheta_2 - \vartheta_1) + (A_{20} - \alpha_2 P_2)\vartheta_2 + A_{23}(\vartheta_2 - \vartheta_3) &= P_2 - Q_2, \\ A_{31}(\vartheta_3 - \vartheta_1) + A_{32}(\vartheta_3 - \vartheta_2) + (A_{30} - \alpha_3 P_3)\vartheta_3 &= P_3 - Q_3. \end{aligned} \tag{19}$$

Jak wynika z powyższego układu równań, jest on w swej postaci podobny do układu (5), z wyjątkiem czynnika Q_i po prawej stronie ($Q_i < 0$), który wynika z przyjętej linearyzacji.

Po wymnożeniu i wprowadzeniu następnych oznaczeń

$$\begin{aligned} B_i &= P_i - Q_i, \quad i, k = 1, 2, 3, \\ A_{ii} &= A_{io} + A_{ik} - \alpha_i P_i, \quad i \neq k, \end{aligned} \tag{20}$$

otrzymuje się następujący układ równań:

$$\begin{aligned} A_{11}\vartheta_1 - A_{12}\vartheta_2 - A_{13}\vartheta_3 &= B_1, \\ -A_{21}\vartheta_1 + A_{22}\vartheta_2 - A_{23}\vartheta_3 &= B_2, \\ -A_{31}\vartheta_1 - A_{32}\vartheta_2 - A_{33}\vartheta_3 &= B_3. \end{aligned} \tag{21}$$

Rozwiązanie powyższego układu równań ma postać:

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \frac{1}{A}[B_1(A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32}) + B_2(A_{12}A_{33} + A_{13}A_{32}) + B_3(A_{12}A_{23} + A_{13}A_{22})], \\ \vartheta_2 &= \frac{1}{A}[B_1(A_{21}A_{33} + A_{23}A_{31}) + B_2(A_{11}A_{33} - A_{13}A_{31}) + B_3(A_{11}A_{23} + A_{13}A_{21})], \\ \vartheta_3 &= \frac{1}{A}[B_1(A_{21}A_{32} + A_{22}A_{31}) + B_2(A_{11}A_{32} + A_{31}A_{12}) + B_3(A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12})], \end{aligned} \tag{22}$$

gdzie:

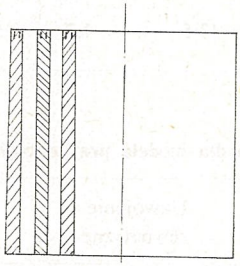
$$A = A_{11}(A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32}) - A_{21}(A_{12}A_{33} + A_{13}A_{32}) - A_{31}(A_{12}A_{23} + A_{13}A_{22}).$$

Tak więc przy poczynionych uproszczeniach układ równań daje się rozwiązać w sposób ogólny.

6. WYNIKI POMIARÓW I OBLICZEŃ

6.1. Badanie modelowe

Dla sprawdzenia proponowanej metody obliczeń cieplnych uzwojeń przeprowadzono badania modelowe. Model składał się z trzech współśrodkowych uzwojeń cylindrycznych nawiniętych przewodem DNSSp 2,2/8,0 na płask, jak pokazano na rys. 3.



Rys. 3. Układ modelowy

Uzwojenia te odtwarzały układ trzech ciał cieplnie sprzężonych i stwarzały analogiczne warunki chłodzenia jak w rzeczywistym transformatorze suchym bez elementów konstrukcyjnych. Model pozwalał nie tylko na wyznaczenie średnich przyrostów temperatury uzwojeń, ale także średniego przyrostu temperatury rdzenia, który był tutaj odtwarzany wewnętrznym uzwojeniem.

Należy podkreślić, że w rzeczywistym transformatorze pomiar średniego przyrostu temperatury rdzenia jest praktycznie niemożliwy, a można pomierzyć tylko temperatury w poszczególnych miejscach rdzenia. Układ trzech współśrodkowych cylindrów pozwala dokładnie ustalić współczynniki konfiguracji i obliczyć przewodności cieplne. Pomiędzy poszczególnymi uzwojeniami nie stosowano klinów dystansujących uzwojenia, aby wymiana ciepła między uzwojeniami odbywała się tylko na drodze promieniowania oraz aby były jednoznacznie określone powierzchnie oddające ciepło.

Badania modelowe obejmowały obliczeniowe wyznaczenie przyrostów temperatury zaproponowaną metodą i porównanie ich z wartościami otrzymanymi w wyniku badań doświadczalnych.

Wyniki pomiarów i obliczeń dla stanu ustalonego i obciążenia cieplnego wszystkich trzech cylindrów zestawiono w tablicy 1. Wyniki pomiarów i obliczeń dla przypadku obciążenia uzwojenia wewnętrznego i środkowego zestawiono w tablicy 2.

Na podstawie zestawionych wyników można stwierdzić stosunkowo dobrą zgodność obliczeń i pomiarów. Największe różnice, około 3°K, występują dla uzwojenia środkowego, co może być spowodowane małą dokładnością współczynnika korekcyjnego uwzględniającego wpływ szerokości kanału φ_k, który był wyznaczony [2] dla układu płaskiego

Tablica 1

Wyniki pomiarów i obliczeń dla modelu przy obciążeniu cieplnym trzech cylindrów

$P_1 = 262{,}1$ W $P_2 = 215{,}6$ W $P_3 = 168{,}0$ W		Uzwojenie zewnętrzne		Uzwojenie środkowe		Uzwojenie wewnętrzne	
		ϑ_1	Δ	ϑ_2	Δ	ϑ_3	Δ
		°K	°K	°K	°K	°K	°K
Pomiar		45,2	—	56,7	—	58,1	—
Obliczenie	Metoda numeryczna	44,4	−0,8	54,8	−1,9	58,4	+0,3
	Metoda linearyzacji	43,5	−1,7	54,2	−2,5	56,2	+0,1

Tablica 2

Wyniki pomiarów i obliczeń dla modelu przy obciążeniu cieplnym dwu cylindrów

$P_1 = 0{,}0$ W $P_2 = 215{,}6$ W $P_3 = 168{,}0$ W		Uzwojenie zewnętrzne		Uzwojenie środkowe		Uzwojenie wewnętrzne	
		ϑ_1	Δ	ϑ_2	Δ	ϑ_3	Δ
		°K	°K	°K	°K	°K	°K
Pomiar		13,0	—	47,6	—	54,5	—
Obliczenie	Metoda numeryczna	12,7	−0,3	47,2	−0,4	55,8	+1,3
	Metoda linearyzacji	14,9	+1,9	45,2	−2,4	54,6	+0,1

i wysokości 0,2 m a model posiadał wysokość 0,5 m. Należy podkreślić, że zgodność pomiarów i obliczeń występuje dla przypadku, gdy wszystkie trzy uzwojenia układu modelowego są obciążone cieplnie i przyrosty temperatur są zbliżone do siebie, jak również dla przypadku, gdy występuje znaczna różnica temperatur między poszczególnymi uzwojeniami.

6.2. Badania na transformatorze

Dla sprawdzenia przydatności proponowanej metody do wyznaczania przyrostów temperatury w transformatorach suchych przeprowadzono obliczenia i pomiary na transformatorze suchym typ T3BPNb 25/0,5. Transformator ten był badany bez obudowy, gdyż przedstawiona metoda pozwala na wyznaczenie średnich przyrostów temperatury w transformatorze suchym budowy otwartej.

Tablica 3

Wyniki pomiarów i obliczeń dla transformatora suchego typ T3BPNb 25/0,5

$P_1 = 88{,}3$ W $P_2 = 57{,}0$ W $P_3 = 54{,}6$ W			Uzwojenie zewnętrzne		Uzwojenie wewnętrzne		Rdzeń
			ϑ_1	Δ	ϑ_2	Δ	ϑ_3
			°K	°K	°K	°K	°K
Pomiar			51,2	—	55,9	—	—
Obliczenie	Metoda numeryczna	a	50,9	−0,3	53,4	−2,5	34,0
		b	54,7	+3,5	60,0	+4,1	36,0
	Metoda linearyzacji	a	50,1	−1,1	52,5	−3,5	34,3
		b	54,4	+3,2	59,6	+3,7	36,2

Zestawienie wyników obliczeń i pomiarów przyrostów temperatury dla obciążenia znamionowego transformatora suchego typ T3BPNb 25/0,5 przedstawiono w tablicy 3.

Przy obliczeniu przewodności podłużnych w transformatorze istnieją trudności w ścisłym wyznaczeniu przewodności promieniowania. Współczynniki konfiguracji odnoszą się do układu idealnego dwóch cylindrów. W rzeczywistym transformatorze kanały wentylacyjne są częściowo wypełnione klinami, a częściowo przysłonięte innymi elementami konstrukcyjnymi (jarzma, belki jarzmowe). Z powyższych względów obliczenia przeprowadzono dla dwóch przypadków:

a) z uwzględnieniem współczynnika konfiguracji, jak dla idealnych cylindrów, czyli z uwzględnieniem oddawania ciepła na drodze promieniowania z kanału do otoczenia; jako powierzchnię promieniowania przyjęto powierzchnię cylindrów zmniejszoną o powierzchnie przykryte klinami,

b) z pominięciem oddawania ciepła na drodze promieniowania z kanału do otoczenia.

Stan rzeczywisty będzie stanem pośrednim. Jak wynika z tablicy 3, wartości przyrostów temperatur pomierzone dla uzwojeń znajdują się pomiędzy wartościami obliczonymi dla przypadków a i b.

Sprawa wyznaczenia przyrostu temperatury rdzenia za pomocą schematu cieplnego pozostaje nadal otwarta. Należy uwzględnić, że rdzeń ma skomplikowany kształt i wielopłaszczyznowy układ powierzchni chłodzących, a sprawdzenie średniej temperatury rdzenia jest praktycznie niemożliwe.

7. ZAKOŃCZENIE

Przedstawiona metoda obliczenia ustalonych przyrostów temperatury może być stosowana w odniesieniu do uzwojeń cylindrycznych transformatorów suchych budowy otwartej.

W celu poprawnego wyznaczenia przyrostu temperatury rdzenia transformatora należy przeprowadzić dalsze badania mające na celu określenie współczynnika przejmowania ciepła dla średniej temperatury.

Dalsze badania winny iść w kierunku określenia przewodności cieplnych rdzenia i obudowy transformatora. Pozwoliłoby to na całościowe opracowanie zagadnień cieplnych w transformatorach suchych z chłodzeniem naturalnym.

LITERATURA

1. E. Jezierski, *Transformatory. Podstawy teoretyczne*, WNT, 1965.
2. W. Lasocki, *Zastępczy schemat cieplny transformatora suchego*, Rozprawy Elektrotechniczne z. 1, 1972.
3. T. Koter, W. Lasocki, *Parametry w zastępczym schemacie cieplnym transformatora suchego przy chłodzeniu naturalnym*, Rozprawy Elektrotechniczne, z. 1, 1973.

W. LASOCKI

METHOD OF TEMPERATURE CALCULATION IN DRY TRANSFORMER WINDINGS

Summary

The paper continues the general topic of thermal quastions in dry transformers. The first part was published in [2], [3]. The work presents the calculation method of windings temperatures taking into account the thermal schema of transformer.

W. LASOCKI

LE CALCUL DES TEMPÉRATURES INSTANTÉES DANS LES ENROULEMENTS DES TRANSFORMATEURS SECS

Résumé

Cet article est une continuation du sujet concernant les problèmes thermiques dans les transformateurs secs, qui étaient dejà considerés dans les travaux [2] et [3]. On présente ici une méthode de calculer les températures dans les enroulements des transformateurs secs, basées sur leur schéma thermique.

W. LASOCKI

BERECHNUNGSMETHODE DER WICKLUNGSTEMPERATUREN IN DEN TROCKENTRANSFORMATOREN

Zusammenfassung

Der Artikel enthält eine Fortsetzung der Analyse von Wärmeproblemen in Trockentransformatoren, die bereits in den Arbeiten [2], [3] beschrieben worden sind. Es wird eine Methode für Temperaturberechnungen von Transformatorwicklungen unter Berücksichtigung eines Ersatzschaltbildschemas des Trockentransformators vorgeschlagen.

В. ЛЯСОЦКИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИРОСТА ТЕМПЕРАТУРЫ ОБМОТОК СУХИХ ТРАНСФОРМАТОРОВ

Резюме

В статье продолжен анализ термических явлений описанных в работах [1], [2]. Представлен метод определения температуры обмоток трансформатора при помощи схемы замещения сухого трансформатора.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1975, 21, z. 4, ss. 807—820

621.372.44:621.372.5

Obliczanie obwodów rezystancyjnych zawierających diody

MICHAŁ TADEUSIEWICZ (ŁÓDŹ)

Instytut Podstaw Elektrotechniki Politechniki Łódzkiej

Otrzymano 18.5.1974

Tematem artykułu jest analiza rozgałęzionych obwodów rezystancyjnych zawierających diody. Wymuszeniami w rozpatrywanych obwodach są niezależne, stałe w czasie napięcia i prądy źródłowe. Wykazano, że jeżeli spełnione są sprecyzowane w pracy założenia, to obliczenia można wykonywać metodą Newtona, przy czym zarówno podstawowy, jak i zmodyfikowany proces Newtona daje ciąg zbieżny do rozwiązania dla dowolnego przybliżenia początkowego. Zamieszczono schematy blokowe programów obliczeń na maszynę cyfrową oraz dla ilustracji przytoczono przykład liczbowy.

1. WSTĘP

Obliczanie nieliniowych obwodów rezystancyjnych przy użyciu maszyn cyfrowych wymaga zastosowania odpowiedniej metody numerycznej. Wiele metod wykorzystywanych w analizie obwodów nieliniowych omówiono w pracach [1÷6], [8÷12], [14÷19]. Wśród znanych aktualnie metod numerycznych na szczególną uwagę zasługuje metoda Newtona odznaczająca się szybką zbieżnością i prostym algorytmem. Metoda ta jest podawana w dwóch wariantach, jako tzw. podstawowa metoda Newtona i zmodyfikowana metoda Newtona [7].

W ogólnym przypadku metoda Newtona wymaga znajomości przybliżenia początkowego bliskiego rozwiązania dokładnego i tylko wówczas daje ciąg iteracji zbieżny do tego rozwiązania. Łatwo można podać przykłady równań, w których niewłaściwy wybór przybliżenia początkowego prowadzi do ciągu rozbieżnego. Z tego powodu metoda Newtona jest często wykorzystywana do uściślenia rozwiązania, którego przybliżenie wyznaczono w inny sposób. W literaturze matematycznej można znaleźć ogólne warunki wystarczające na to, aby ciąg iteracji był zbieżny do rozwiązania przy przyjętym przybliżeniu początkowym [7], [13]. Trzeba jednak podkreślić, że sprawdzenie tych warunków jest często trudne, niewygodne i pracochłonne.

Obliczanie pewnej klasy nieliniowych obwodów rezystancyjnych sprowadza się do rozwiązania równania o postaci umożliwiającej sformułowanie prostych i łatwych do sprawdzenia założeń, przy których ciąg Newtona jest zbieżny dla dowolnego przybliżenia początkowego. W takim przypadku proces obliczeniowy znacznie upraszcza się, bowiem polega jedynie na znalezieniu kolejnych iteracji bez konieczności wyznaczania na wstępie wystarczająco dokładnego punktu, z którego należy startować. W szczególności obwód

rezystancyjny może zawierać diody, których charakterystyki prądowo-napięciowe nie są funkcjami odwzorowującymi przestrzeń m_1 na siebie, co stanowi warunek stosowalności wielu metod, jak np. podanych w pracach [1], [9], [19].

2. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA

Zostaną rozpatrzone obwody zawierające liniowe oporniki i diody oraz wymuszenia o postaci stałych w czasie, niezależnych napięć i prądów źródłowych. Przyjęto, że diody są opisane za pomocą charakterystyk konduktancyjnych

$$i = g(u), \tag{2.1}$$

przy czym strzałki prądu i oraz napięcia u są skierowane jak na rys. 3. Korzystając np. z pracy [5] można stwierdzić, że

$$g(u) = H(e^{\lambda u} - 1), \tag{2.2}$$

gdzie $\lambda = q/kT > 0$ (q jest ładunkiem elektronu, k stałą Boltzmanna, natomiast T temperaturą bezwzględną) oraz $H > 0$ oznacza prąd wsteczny danej diody. Łatwo zauważyć, że $g(u)$ jest funkcją wklęsłą, ściśle monotonicznie rosnącą, odwzorowującą przestrzeń m_1 w zbiór $(-H, +\infty)$.

Założono, że w obwodzie nie ma ani jednego oczka, w skład którego wchodziłyby wyłącznie diody oraz idealne źródła napięcia.

Jak wynika z pracy [17], rozpatrywany obwód zawierający n diod może być opisany równaniem

$$\begin{bmatrix} g_1(u_1) \\ \vdots \\ g_n(u_n) \end{bmatrix} + \mathbf{GU} = \mathbf{I}_z, \tag{2.3}$$

gdzie $\mathbf{G}$ jest macierzą symetryczną stopnia n, natomiast $\mathbf{U}$ i $\mathbf{I}_z$ są macierzami kolumnowymi o n wierszach, których elementami są odpowiednio napięcia na diodach oraz prądy będące odpowiedzią pewnego obwodu liniowego rezystancyjnego [17]. Sformułowane na str. 2 zastrzeżenie gwarantuje wyznaczalność macierzy $\mathbf{G}$ oraz $\mathbf{I}_z$. W dalszym ciągu równanie (2.3) będzie przedstawione w postaci

$$\mathbf{F(X)} + \mathbf{AX} = \mathbf{B}, \tag{2.4}$$

przy czym $\mathbf{X} = \mathbf{U}$, $\mathbf{A} = \mathbf{G}$, $\mathbf{B} = \mathbf{I}_z$ oraz

$$\mathbf{F(X)} = \begin{bmatrix} f_1(x_1) \\ \vdots \\ f_n(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(u_1) \\ \vdots \\ g_n(u_n) \end{bmatrix}.$$

Założono, że elementy macierzy $\mathbf{A}$ spełniają następujące zależności:

$$\sum_{l=1}^{n} a_{kl} \geqslant 0 \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{2.5}$$

$$a_{kl} \leqslant 0 \quad \text{dla} \quad k \neq l \ (k, l = 1, \ldots, n), \tag{2.6}$$

$$\det \mathbf{A} > 0. \tag{2.7}$$

W dodatku wykazano, że jeżeli zachodzą nierówności (2.5) i (2.6), to macierz **A** jest dodatnio półokreślona.

Z pracy [15] wynika, że przy spełnieniu powyższych założeń równanie (2.4) ma jednoznaczne rozwiązanie **Y**.

3. ROZWIĄZANIE RÓWNANIA PODSTAWOWĄ METODĄ NEWTONA

Zostanie wykazane, że jeżeli spełnione są założenia podane w rozdziale 2, to ciąg Newtona jest zbieżny do rozwiązania równania (2.4) przy dowolnym przybliżeniu początkowym.

Równanie (2.4) wygodnie jest zapisać w postaci

$$\mathbf{F}(\mathbf{X})+\mathbf{AX}-\mathbf{B}=\mathbf{\Theta}, \tag{3.1}$$

gdzie $\mathbf{\Theta}$ jest elementem zerowym przestrzeni m_n. Zgodnie z podstawową metodą Newtona przybliżenie $\mathbf{X}_{k+1}$ oblicza się na podstawie znanego przybliżenia $\mathbf{X}_k$ ze wzoru

$$\mathbf{X}_{k+1}=\mathbf{X}_k-[\mathbf{F}'_{x_k}+\mathbf{A}]^{-1}[\mathbf{F}(\mathbf{X}_k)+\mathbf{AX}_k-\mathbf{B}], \tag{3.2}$$

gdzie $\mathbf{F}'_{x_k}$ jest pochodną Frecheta operatora $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ w punkcie $\mathbf{X}_k$. Łatwo zauważyć, że $\mathbf{F}'_{x_k}$ jest macierzą diagonalną o dodatnich elementach znajdujących się na głównej przekątnej. Na podstawie lematu 3 (podanego w dodatku) można stwierdzić, że $\mathbf{F}'_{x_k}$ jest macierzą dodatnio określoną. Stosując następnie lemat 2 dochodzi się do wniosku, że macierz $[\mathbf{F}'_{x_k}+A]$ również jest dodatnio określona. Wobec tego istnieje $[\mathbf{F}'_{x_k}+\mathbf{A}]^{-1}$ (lemat 1) i operacja (3.2) jest dobrze zdefiniowana.

Niech $\mathbf{X}_0$ będzie dowolnym przybliżeniem początkowym. Wówczas zgodnie z zależnością (3.2)

$$\mathbf{X}_1=\mathbf{X}_0-[\mathbf{F}'_{x_0}+\mathbf{A}]^{-1}[\mathbf{F}(\mathbf{X}_0)+\mathbf{AX}_0-\mathbf{B}], \tag{3.3}$$

lub

$$\mathbf{X}_1=\mathbf{X}_0-\Delta\mathbf{X}_0,$$

gdzie

$$\Delta\mathbf{X}_0=[\mathbf{F}'_{x_0}+\mathbf{A}]^{-1}[\mathbf{F}(\mathbf{X}_0)+\mathbf{AX}_0-\mathbf{B}]. \tag{3.4}$$

Stąd

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_1)+\mathbf{AX}_1-\mathbf{B}=\mathbf{F}(\mathbf{X}_0-\Delta\mathbf{X}_0)+\mathbf{AX}_0-\mathbf{A}\Delta\mathbf{X}_0-\mathbf{B},$$

przy czym z wklęsłości funkcji $f_l(x_l)$ $(l=1,\ldots,n)$ wynika zależność

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_0-\Delta\mathbf{X}_0)\geqslant\mathbf{F}(\mathbf{X}_0)-\mathbf{F}'_{x_0}\Delta\mathbf{X}_0.^{1)}$$

Zatem

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_1)+\mathbf{AX}_1-\mathbf{B}\geqslant\mathbf{F}(\mathbf{X}_0)+\mathbf{AX}_0-\mathbf{B}-[\mathbf{F}'_{x_0}+\mathbf{A}]\Delta\mathbf{X}_0,$$

[1)] Nierówność $\mathbf{U}\leqslant\mathbf{V}$, gdzie $\mathbf{U}=\begin{bmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{bmatrix}$, $\mathbf{V}=\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix}$ należy rozumieć następująco:

$$u_k\leqslant v_k \quad \text{dla} \quad k=1,\ldots,n.$$

lub po uwzględnieniu (3.4)

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_1)+\mathbf{A}\mathbf{X}_1-\mathbf{B} \geqslant \mathbf{\Theta}. \tag{3.5}$$

W podobny sposób można wykazać, że dla $k = 2, 3, \ldots$

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_k)+\mathbf{A}\mathbf{X}_k-\mathbf{B} \geqslant \mathbf{\Theta}. \tag{3.6}$$

Z powyższych rozważań wynika, że przy dowolnym przybliżeniu początkowym $\mathbf{X}_0$ wszystkie następne przybliżenia $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots$ wyznaczone ze wzoru iteracyjnego Newtona (3.2) spełniają zależność (3.6) dla $k = 1, 2, \ldots$

Przy oznaczeniach $\mathbf{F}(\mathbf{X}_k)+\mathbf{A}\mathbf{X}_k-\mathbf{B} = \boldsymbol{\epsilon}_k$ (oczywiście $\boldsymbol{\epsilon}_k \geqslant \mathbf{\Theta}$) oraz $\Delta\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_k-\mathbf{X}_{k+1}$ otrzymuje się na podstawie (3.2) następujące równanie

$$[\mathbf{F}'_{x_k}+\mathbf{A}]\Delta\mathbf{X}_k = \boldsymbol{\epsilon}_k. \tag{3.7}$$

Z lematu 5 (podanego w dodatku) wynika, że $\Delta\mathbf{X}_k \geqslant \mathbf{\Theta}$, czyli $\mathbf{X}_{k+1} \leqslant \mathbf{X}_k (k = 1, 2, \ldots)$. Wobec tego ciąg przybliżeń $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots$ w procesie Newtona jest nierosnący.

Jeżeli $\mathbf{Y}$ jest rozwiązaniem równania (3.1), to

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y})+\mathbf{A}\mathbf{Y}-\mathbf{B} = \mathbf{\Theta}.$$

Uwzględniając nierówność (3.6) otrzymuje się

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_k)-\mathbf{F}(\mathbf{Y})+\mathbf{A}(\mathbf{X}_k-\mathbf{Y}) \geqslant \mathbf{\Theta},$$

lub po oznaczeniu $\mathbf{F}(\mathbf{X}_k)-\mathbf{F}(\mathbf{Y}) = \mathbf{\Delta}_F(\mathbf{X}_k-\mathbf{Y})$ (gdzie $\mathbf{\Delta}_F$ jest macierzą diagonalną)

$$[\mathbf{\Delta}_F+\mathbf{A}](\mathbf{X}_k-\mathbf{Y}) \geqslant \mathbf{\Theta}.$$

Funkcja $\mathbf{F}$ jest ściśle monotonicznie rosnąca, wobec czego elementy znajdujące się na głównej przekątnej macierzy $\mathbf{\Delta}_F$ są dodatnie. Z lematu 5 wynika więc, że

$$\mathbf{X}_k \geqslant \mathbf{Y}. \tag{3.8}$$

Zatem ciąg Newtona jest nierosnący i ograniczony z dołu (np. przez $\mathbf{Y}$), jest więc zbieżny. Wobec tego spełniony jest warunek Cauchy'ego

$$\lim_{k\to\infty}(\mathbf{X}_{k+1}-\mathbf{X}_k) = \mathbf{\Theta}$$

i

$$\lim_{k\to\infty}[\mathbf{F}'_{x_k}+\mathbf{A}]^{-1}[\mathbf{F}(\mathbf{X}_k)+\mathbf{A}\mathbf{X}_k-\mathbf{B}] = -\lim_{k\to\infty}(\mathbf{X}_{k+1}-\mathbf{X}_k) = \mathbf{\Theta}. \tag{3.9}$$

Oznaczając granicę ciągu $(\mathbf{X}_k)$ przez $\mathbf{X}_\infty$

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_\infty,$$

otrzymuje się na podstawie (3.9)

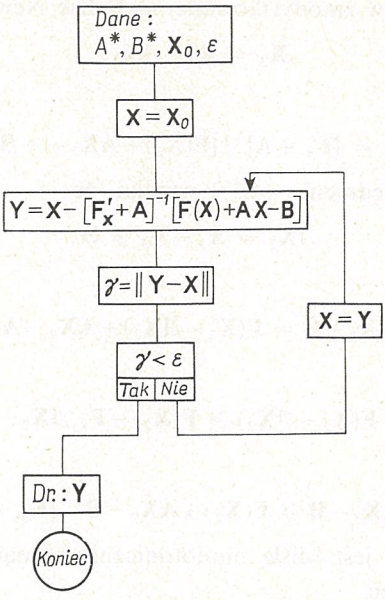
$$[\mathbf{F}'_{x_\infty}+\mathbf{A}]^{-1}[\mathbf{F}(\mathbf{X}_\infty)+\mathbf{A}\mathbf{X}_\infty-\mathbf{B}] = \mathbf{\Theta}$$

lub

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_\infty)+\mathbf{A}\mathbf{X}_\infty-\mathbf{B} = \mathbf{\Theta}. \tag{3.10}$$

Równanie (3.10) wskazuje, że granica ciągu $(\mathbf{X}_k)$ jest rozwiązaniem równania (3.1).

Proces obliczeniowy może być realizowany przy użyciu maszyn cyfrowych. Ogólny program opracowany w postaci schematu blokowego przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Schemat blokowy programu obliczeń według podstawowej metody Newtona

4. ROZWIĄZANIE RÓWNANIA ZMODYFIKOWANĄ METODĄ NEWTONA

Wadą omówionej w poprzednim rozdziale podstawowej metody Newtona jest konieczność znajdowania w każdym kroku obliczeniowym odwrotności macierzy $[\mathbf{F}'_{x_k} + \mathbf{A}]$. Macierz $[\mathbf{F}'_{x_k} + \mathbf{A}]^{-1}$ można wyznaczyć w sposób zaproponowany w pracy [17], co zmniejsza pracochłonność tego fragmentu obliczeń. Obliczenia upraszczają się w sposób zasadniczy w przypadku zmodyfikowanej metody Newtona, w której ciąg iteracji określa wzór

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - [\mathbf{F}'_{x_1} + \mathbf{A}]^{-1}[\mathbf{F}(\mathbf{X}_k) + \mathbf{A}\mathbf{X}_k - \mathbf{B}] \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{4.1}$$

gdzie $\mathbf{X}_1$ oznacza pierwsze przybliżenie.

Na podstawie rozważań przeprowadzonych w rozdziale 3 zostanie wykazane, że przy spełnieniu sformułowanych w pracy założeń również zmodyfikowana metoda Newtona daje ciąg zbieżny do rozwiązania równania (3.1).

Jeżeli $\mathbf{X}_0$ jest dowolnym przybliżeniem początkowym, to $\mathbf{X}_1$ wyznaczone ze wzoru (3.3) spełnia nierówność (3.5).

W rozdziale 3 wykazano, że dla $\mathbf{X}_2$ określonego ze wzoru

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 - [\mathbf{F}'_{x_1} + \mathbf{A}]^{-1}[\mathbf{F}(\mathbf{X}_1) + \mathbf{A}\mathbf{X}_1 - \mathbf{B}] \tag{4.2}$$

zachodzi zależność

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_2) + \mathbf{A}\mathbf{X}_2 - \mathbf{B} \geqslant \Theta \tag{4.3}$$

oraz

$$\Delta\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2 \geqslant \Theta. \tag{4.4}$$

Następny element ciągu $\mathbf{X}_3$ w zmodyfikowanej metodzie Newtona jest obliczany z relacji

$$\mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_2 - \Delta\mathbf{X}_2,$$

gdzie

$$\Delta\mathbf{X}_2 = [\mathbf{F}'_{x_1} + \mathbf{A}]^{-1}[\mathbf{F}(\mathbf{X}_2) + \mathbf{A}\mathbf{X}_2 + -\mathbf{B}]. \tag{4.5}$$

Z lematu 5 (przy uwzględnieniu (4.3)) wynika, że

$$\Delta\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_3 \geqslant \mathbf{\Theta}. \tag{4.6}$$

Ponadto

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_3) + \mathbf{A}\mathbf{X}_3 - \mathbf{B} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_2 - \Delta\mathbf{X}_2) + \mathbf{A}\mathbf{X}_2 - \mathbf{A}\Delta\mathbf{X}_2 - \mathbf{B},$$

przy czym

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_2 - \Delta\mathbf{X}_2) \geqslant \mathbf{F}(\mathbf{X}_2) - \mathbf{F}'_{x_2}\Delta\mathbf{X}_2.$$

Zatem

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_3) + \mathbf{A}\mathbf{X}_3 - \mathbf{B} \geqslant \mathbf{F}(\mathbf{X}_2) + \mathbf{A}\mathbf{X}_2 - \mathbf{B} - [\mathbf{F}'_{x_2} + \mathbf{A}]\Delta\mathbf{X}_2. \tag{4.7}$$

Ponieważ funkcja $\mathbf{F}'(\mathbf{X})$ jest ściśle monotonicznie rosnąca, a przybliżenia $\mathbf{X}_1$ i $\mathbf{X}_2$ spełniają zależność (4.4), więc

$$\mathbf{F}'_{x_2} \leqslant \mathbf{F}'_{x_1}.$$

Uwzględniając nierówność (4.6) otrzymuje się

$$[\mathbf{F}'_{x_2} + \mathbf{A}]\Delta\mathbf{X}_2 \leqslant [\mathbf{F}'_{x_1} + \mathbf{A}]\Delta\mathbf{X}_2$$

lub

$$-[\mathbf{F}'_{x_2} + \mathbf{A}]\Delta\mathbf{X}_2 \geqslant -[\mathbf{F}'_{x_1} + \mathbf{A}]\Delta\mathbf{X}_2. \tag{4.8}$$

Korzystając kolejno ze wzorów (4.7), (4.8) i (4.5) znajduje się

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_3) + \mathbf{A}\mathbf{X}_3 - \mathbf{B} \geqslant \mathbf{\Theta}. \tag{4.9}$$

Kontynuacja powyższego rozumowania prowadzi do zależności

$$\mathbf{X}_1 \geqslant \mathbf{X}_2 \geqslant \mathbf{X}_3 \geqslant \ldots$$

oraz

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_k) + \mathbf{A}\mathbf{X}_k - \mathbf{B} \geqslant \mathbf{\Theta} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

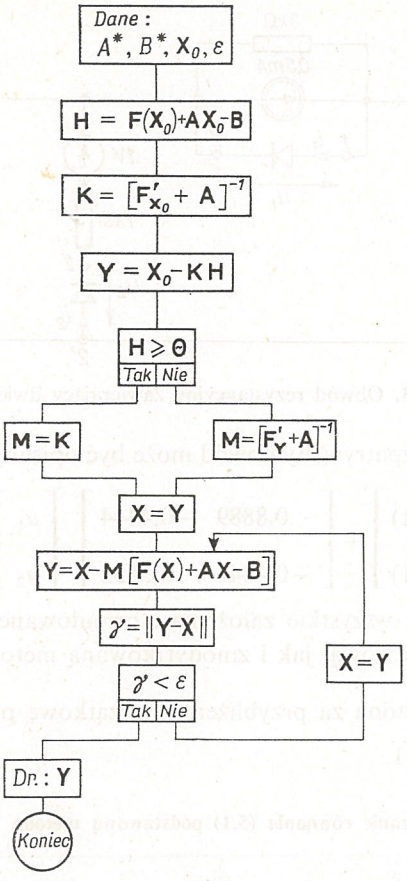
Postępując dalej jak w rozdziale 3 można wykazać, że ciąg $(\mathbf{X}_k)$ jest zbieżny do rozwiązania równania (3.1).

Uwaga. Jeżeli przybliżenie początkowe $\mathbf{X}_0$ spełnia nierówność $\mathbf{F}(\mathbf{X}_0) + \mathbf{A}\mathbf{X}_0 - \mathbf{B} \geqslant \mathbf{\Theta}$ to, jak wynika z powyższych rozważań, obliczenia można wykonywać korzystając z wzoru

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - [\mathbf{F}'_{x_0} + \mathbf{A}]^{-1}[\mathbf{F}(\mathbf{X}_k) + \mathbf{A}\mathbf{X}_k - \mathbf{B}] \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.10}$$

Proces obliczeniowy może być realizowany przy użyciu maszyn cyfrowych. Ogólny program opracowany w postaci schematu blokowego przedstawiono na rys. 2.

Jak wiadomo, obwód *RLC* w stanie ustalonym przy wymuszaniu stałym można modelować za pomocą obwodu rezystancyjnego otrzymanego w wyniku zwarcia cewek i usunięcia kondensatorów. Z tego powodu opisana w pracy metoda umożliwia obliczanie wspomnianych obwodów w stanie ustalonym.



Rys. 2. Schemat blokowy programu obliczeń według zmodyfikowanej metody Newtona

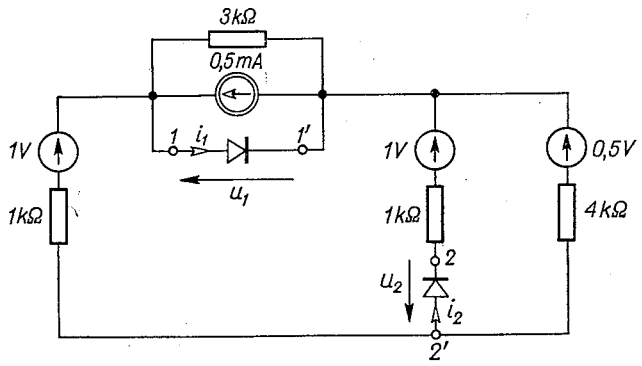
W pracy [18] wykazano, że obwód *RLC* zawierający oporniki nieliniowe można zastąpić do celów obliczeniowych równoważnym obwodem rezystancyjnym. Jeżeli spełnione są pewne założenia, to otrzymany nieliniowy obwód rezystancyjny może być opisany równaniem o postaci (2.4). Przedstawiona metoda pozwala rozwiązać to równanie, co umożliwia wyznaczenie odpowiednich przebiegów czasowych określających stan nieustalony obwodu *RLC*.

5. PRZYKŁAD LICZBOWY

Tytułem przykładu rozpatrzono nieliniowy obwód rezystancyjny zawierający dwie nieidealne diody (rys. 3). Przyjęto, że diody są jednakowe, a ich charakterystyka konduktancyjna dana jest wzorem [5]

$$i_k = 0{,}1(e^{\frac{u}{0{,}026}} - 1) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

przy czym prąd i_k wyrażony jest w miliamperach, a napięcie u w woltach.



Rys. 3. Obwód rezystancyjny zawierający dwie diody

Łatwo sprawdzić, że rozpatrywany obwód może być opisany następującym równaniem:

$$\begin{bmatrix} 0{,}1(e^{\frac{u_1}{0{,}026}}-1) \\ 0{,}1(e^{\frac{u_2}{0{,}026}}-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}8889 & -0{,}4444 \\ -0{,}4444 & 0{,}5556 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5556 \\ 0{,}0556 \end{bmatrix}. \tag{5.1}$$

Równanie (5.1) spełnia wszystkie założenia sformułowane w rozdziale 2 i może być rozwiązane zarówno podstawową, jak i zmodyfikowaną metodą Newtona. W przypadku podstawowej metody Newtona za przybliżenie początkowe przyjęto $\mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Wyniki obliczeń podano w tablicy 1.

Tablica 1

Rozwiązanie równania (5.1) podstawową metodą Newtona

Numer kroku obliczeniowego		0	1	2	3	4
U_1	V	0	0,1196	0,0952	0,0732	0,0568
U_2	V	0	0,0247	0,0177	0,0154	0,0143

5	6	7	8
0,0489	0,0475	0,0474	0,0474
0,0138	0,0137	0,0137	0,0137

Zmodyfikowana metoda Newtona daje ciąg znacznie wolniej zbieżny do rozwiązania równania. Z tego powodu należy wykonać większą liczbę kroków obliczeniowych, jeżeli startuje się z tego samego przybliżenia początkowego. W rozpatrywanym przykładzie za pierwsze przybliżenie przyjęto wynik z kolumny nr 3 w tablicy 1, to jest $\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}0732 \\ 0{,}0154 \end{bmatrix}$. Rezultaty obliczeń zostały podane w tablicy 2.

Tablica 2

Rozwiązanie równania (5.1) zmodyfikowaną metodą Newtona

Numer kroku obliczeniowego		1	2	3	4	5	6
u_1	V	0,0732	0,0568	0,0526	0,0505	0,0493	0,0486
u_2	V	0,0154	0,0143	0,0140	0,0139	0,0138	0,0137

7	8	9	10	11	12
0,0482	0,0479	0,0477	0,0476	0,0475	0,0475
0,0137	0,0137	0,0137	0,0137	0,0137	0,0137

6. WNIOSKI

Przy spełnieniu sprecyzowanych w pracy założeń równanie opisujące obwód rezystancyjny zawierający diody może być rozwiązane metodą Newtona. Zarówno podstawowy, jak i zmodyfikowany proces Newtona daje ciąg zbieżny do rozwiązania przy dowolnym przybliżeniu początkowym. Zmodyfikowana metoda Newtona prowadzi na ogół do ciągu wolniej zbieżnego niż metoda podstawowa, ale jej zaletą jest zmniejszenie pracochłonności poszczególnych iteracji. Czasami celowe jest zastosowanie metody kombinowanej, polegającej na tym, że część kroków obliczeniowych wykonuje się za pomocą metody podstawowej, a część metodą zmodyfikowaną.

Proste obwody można rozwiązywać przy użyciu arytmometru, natomiast w przypadku obwodów skomplikowanych bardzo pomocne są maszyny cyfrowe.

Zakres zastosowań metody Newtona można rozszerzyć na obwody *RLC*, jeżeli cewki i kondensatory zastąpi się odpowiednimi schematami rezystancyjnymi [18].

Dodatek

Definicja macierzy dodatnio określonej (półokreślonej). Macierz symetryczna **A** stopnia n jest dodatnio określona (półokreślona), jeżeli dla każdej macierzy kolumnowej **X** o n wierszach takiej, że $\mathbf{X} \neq \Theta$ ma miejsce nierówność $(\mathbf{AX}, \mathbf{X}) > 0$ $(\geqslant 0)$.

Lemat 1 [5]. Macierz symetryczna jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy jej wszystkie minory główne są dodatnie.

Lemat 2. Jeżeli macierz kwadratowa **A** stopnia n jest dodatnio półokreślona oraz macierz kwadratowa **B** stopnia n jest dodatnio określona, to macierz $[\mathbf{A}+\mathbf{B}]$ jest dodatnio określona.

Dowód.

$\forall \mathbf{X} \neq \Theta$ $([\mathbf{A}+\mathbf{B}]\mathbf{X}, \mathbf{X}) = (\mathbf{AX}, \mathbf{X}) + (\mathbf{BX}, \mathbf{X}) > 0$, bowiem $(\mathbf{AX}, \mathbf{X}) \geqslant 0$ oraz $(\mathbf{BX}, \mathbf{X}) > 0$.

L e m a t 3. Jeżeli elementy znajdujące się na głównej przekątnej macierzy diagonalnej $\mathbf{\Delta}$ są dodatnie to macierz $\mathbf{\Delta}$ jest dodatnio określona.

Dowód. Niech

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \dots 0 \\ \dots \\ 0 \dots \Delta_n \end{bmatrix},$$

wtedy $\forall \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq \mathbf{\Theta}$

$$(\mathbf{\Delta X}, \mathbf{X}) = \Delta_1^2 x_1 + \dots + \Delta_n x_n^2 > 0.$$

L e m a t 4. Jeżeli elementy macierzy symetrycznej $\mathbf{A}$ stopnia n spełniają nierówności

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geqslant 0 \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{d.1}$$

oraz

$$a_{ij} \leqslant 0 \quad \text{dla} \quad i \neq j \qquad (i, j = 1, \dots, n), \tag{d.2}$$

to macierz $\mathbf{A}$ jest dodatnio półokreślona.

Dowód. Dla dowolnej macierzy kolumnowej $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$$(\mathbf{AX}, \mathbf{X}) = x_1 \sum_{k=1}^{n} a_{1k} x_k + x_2 \sum_{k=1}^{n} a_{2k} x_k + \dots + x_n \sum_{k=1}^{n} a_{nk} x_k. \tag{d.3}$$

Oznaczając

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} &= \varepsilon_1, \\ &\dots\dots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk} &= \varepsilon_n, \end{aligned} \tag{d.4}$$

otrzymuje się

$$\begin{aligned} a_{11} &= \varepsilon_1 - \sum_{k=2}^{n} a_{1k}, \\ a_{nn} &= \varepsilon_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_{nk}, \end{aligned} \tag{d.5}$$

przy czym zgodnie z (d.1)

$$\varepsilon_j \geqslant 0 \qquad (j = 1, \dots, n). \tag{d.6}$$

Podstawiając we wzorze (d.3) w miejscu a_{ii} $(i = 1, \dots, n)$ prawe strony równań (d.5) dochodzi się do zależności

$$(\mathbf{AX}, \mathbf{X}) = \varepsilon_1 x_1^2 - x_1^2 \sum_{k=2}^{n} a_{1k} + \sum_{k=2}^{n} a_{1k} x_1 x_k + \dots\dots\dots + \varepsilon_n x_n^2 - x_n^2 \sum_{k=1}^{n-1} a_{nk} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{nk} x_n x_k.$$

Ze względu na symetrię macierzy $\mathbf{A}$

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad (i, j = 1, \dots, n). \tag{d.7}$$

Uwzględniając (d.7) otrzymuje się po elementarnych przekształceniach

$$(\mathbf{AX}, \mathbf{X}) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k^2 - \sum_{k=2}^{n} a_{1k}(x_1 - x_k)^2 - \sum_{k=3}^{n} a_{2k}(x_2 - x_k)^2 - \ldots - a_{n-1,n}(x_{n-1} - x_n)^2. \tag{d.8}$$

Z założenia (d.2) oraz nierówności (d.6) wynika

$$(\mathbf{AX}, \mathbf{X}) \geqslant 0,$$

czyli zgodnie z definicją macierz **A** jest dodatnio półokreślona.

Lemat 5. Jeżeli elementy macierzy symetrycznej **A** stopnia n spełniają zależności

$$\sum_{l=1}^{n} a_{kl} \geqslant 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$$

oraz

$$a_{kl} \leqslant 0 \quad \text{dla} \quad k \neq l \quad (k, l = 1, \ldots, n),$$

macierz diagonalna $\boldsymbol{\Delta}$ stopnia n ma dodatnie elementy na głównej przekątnej oraz macierz kolumnowa $\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$ ma elementy nieujemne, to macierz kolumnowa $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ spełniająca równanie

$$[\boldsymbol{\Delta} + \mathbf{A}]\mathbf{Y} = \boldsymbol{\epsilon} \tag{d.9}$$

ma również elementy nieujemne.

Dowód. Dowód zostanie przeprowadzony metodą nie wprost. Niech istnieją takie liczby naturalne k, l oraz $m \in \langle 1, n \rangle$, że $y_k < 0$, $y_l < 0$ i $y_m < 0$, zaś pozostałe elementy macierzy **Y** są nieujemne. Rozpatrzone zostaną k-te, l-te i m-te równania układu (d.9)

$$(\Delta_k + a_{kk})y_k + a_{kl}y_l + a_{km}y_m + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k,l,m}}^{n} a_{ki}y_i = \varepsilon_k, \tag{d.10}$$

$$a_{lk}y_k + (\Delta_l + a_{ll})y_l + a_{lm}y_m + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k,l,m}}^{n} a_{li}y_i = \varepsilon_l, \tag{d.11}$$

$$a_{mk}y_k + a_{ml}y_l + (\Delta_m + a_{mm})y_m + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k,l,m}}^{n} a_{mi}y_i = \varepsilon_m. \tag{d.12}$$

Sumując lewe strony równań (d.10), (d.11) i (d.12) otrzymuje się

$$(\Delta_k + a_{kk} + a_{lk} + a_{mk})y_k + (\Delta_l + a_{kl} + a_{ll} + a_{ml})y_l + (\Delta_m + a_{km} + a_{lm} + a_{mm})y_m + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k,l,m}}^{n} (a_{ki} + a_{li} + a_{mi})y_i. \tag{d.13}$$

Z założeń lematu wynika, że przy $y_k < 0$, $y_l < 0$, $y_m < 0$ oraz $y_i \geqslant 0$, dla $i = 1, \ldots, n$, $i \neq k, l, m$, wyrażenie (d.13) jest ujemne. Z drugiej jednak strony wiadomo, że wyrażenie to jest równe nieujemnej liczbie $\varepsilon_k + \varepsilon_l + \varepsilon_m$. Otrzymana sprzeczność wskazuje, że założenie $y_k < 0$, $y_l < 0$, $y_m < 0$ jest fałszywe. Zatem $y_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

LITERATURA

1. G. Birkhoff, J.B. Diaz, *Non-linear Network Problems*, Quarterly of Applied Mathematics, nr 4, 1956.
2. W. W. Bondarenko, *Waprosy analiza nieliniejnych elektriczeskich cepiej*, Naukowa dumka, Kijew 1967.

3. T. Chólewicki, *Elektrotechnika teoretyczna*, tom II, WNT, Warszawa 1971.
4. M. L. Dertouzes, M. Athans, R. N. Spann, S. J. Mason, *Systems, Networks and Computation: Basic Concepts*, McGraw — Hill Book Company, 1972.
5. C. A. Desoer, E. S. Kuch, *Basic Circuit Theory*, McGraw-Hill, 1969.
6. T. Kaczorek, *Obliczanie rozgałęzionych obwodów nieliniowych przy użyciu maszyn cyfrowych*, Archiwum Elektrotechniki, nr 4, 1963.
7. L. W. Kantorowicz, G. J. Akiłow, *Funkcjonalnyj analiz w normirowannych prostranstwach*, Fiz-mat-giz, Moskwa 1959.
8. J. Katzenelson, *An Algorithm for Solving Nonlinear Resistor Networks*, BSTJ, nr 8, 1965.
9. J. Katzenelson, L. H. Seitelman, *An Iterative Method for Solution of Networks of Nonlinear Monotone Resistors*, IEEE Transactions on CT, nr 2, 1966.
10. J. Kudrewicz, *O pewnej metodzie obliczania układów parametrycznych*, Archiwum Elektrotechniki, nr 1, 1963.
11. E. S. Kuh, J. N. Hajj, *Nonlinear Circuit Theory: Resistive Networks*, Proceedings of the IEEE, nr 3, 1971.
12. E. A. Łaksberg, *Metody uluczszenia schodimosti czislennogo analiza nieliniejnych schem w staticzeskom reżimie*, Teoreticzeskaja Elektrotechnika, wypusk 15, 1973.
13. L. B. Rall, *Computational Solution of Nonlinear Operator Equations*, John Wiley & Sons., Inc., New York — London — Sydney — Toronto, 1969.
14. I. W. Sandberg, A. N. Willson, *Some Theorems on Properties of DC Equations of Nonlinear Networks*, BSTJ, nr 1, 1969.
15. I. W. Sandberg, A. N. Willson, *Some Network — Theoretic Properties of Nonlinear DC Transistior Networks*, BSTJ, nr 5, 1969.
16. I. W. Sandberg, *Theorems on the Analysis of Nonlinear Transistor Networks*, BSTJ, nr 1, 1970.
17. M. Tadeusiewicz, *Analiza pewnej klasy nieliniowych obwodów rezystancyjnych w przestrzeni m_n*, Rozprawy Elektrotechniczne, z. 2, 1973.
18. M. Tadeusiewicz, *Obliczanie obwodów elektrycznych zawierających oporniki nieliniowe*, Rozprawy Elektrotechniczne, z. 2, 1974.
19. A. N. Willson, *On the Solutions of Equations for Nonlinear Resistive Networks*, BSTJ, nr 8, 1968.

M. TADEUSIEWICZ

CALCULATION OF RESISTIVE NETWORKS WHICH CONTAIN DIODES

Summary

An analysis of branched resistive networks composed of linear resistors and diodes, which are excited by d.c. voltage and current sources is discussed in the paper. It is shown that basic as well as modified Newton sequence is convergent for each initial approximation if some assumptions are satisfied. Some block diagrams of the computer program are presented. The application of the method discussed in the paper is illustrated by an example.

M. TADEUSIEWICZ

CALCUL DES CIRCUITS RÉSISTANTIELS CONTENANT DES DIODES

Résumé

Cet article est consacré à l'analyse des circuits arborescents résistantiels contenant des diodes. Les signaux d'entrée dans les circuits examinés sont les tensions et les courants de source indépendants et constants dans le temps.

On a démontré que, lorsque les hypothèses précisées dans cette étude sont réalisées, on peut faire les calcules par la méthode de Newton. Il faut mentionner ici que la transformation fondamentale ainsi que

modifiée de Newton donne comme résolution une série convergente pour toute approximation initiale choisie. On a présenté aussi des schémas blocs des programmes des calculs pour le calculateur numérique et, pour illustrer, on a cité un exemple en chiffre.

M. TADEUSIEWICZ

BERECHNUNG VON RESISTANZKREISEN MIT DIODEN

Zusammenfassung

Der vorliegende Artikel befaßt sich mit der Analyse verzweigter Residenzkreise mit Dioden. Erzwingungen in den erwogenen Kreisen sind die Unabhängigen, die Konstanten während bestehender Spannung und die Quellenströme. Es wurde nachgewiesen, daß im Falle der Erfüllung der in dieser Arbeit präzisierten Voraussetzungen, die Berechnungen mit der Newton-Methode durchgeführt werden kônnen, wobei sowohl der Grund-, als auch der modifizierte Newton-Prozeß eine mit der beliebigen Anfangsannäherung übereinstimmenden Lösung ergibt. Blockschemen der Berechnungsprogramme für Digitalrechner und Zahlenbeispiele wurden gebracht.

М. ТАДЕУСЕВИЧ

РАСЧЕТ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ С ДИОДАМИ

Резюме

Темой труда является анализ разветвленных резистивных цепей с диодами, возбужденными независимыми, постоянными во времени напряжениями и токами источников. Доказано, что при исполнении сформулированных в труде условий расчет можно проводить по методу Ньютона причем так основной, как и модифицированный процесс являются сходящимися при любом начальном приближении. Представлен алгоритм решения при помощи ЭЦВМ и приведен численный пример.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1975, 21, z. 4, ss. 821—84

621.372.54

Algorytm automatycznego projektowania pasmowych filtrów Czebyszewa

JERZY KISILEWICZ (WROCŁAW)

Instytut Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej

Otrzymano 18.4.1974

W pracy opisany jest algorytm projektowania środkowoprzepustowych filtrów Czebyszewa, o geometrycznie symetrycznej względem częstotliwości średniej pasma przepustowego charakterystyce amplitudowej. W wyniku aproksymacji charakterystyki zadanej, uzyskuje się fizycznie realizowalną transmitancję projektowanego filtru. Tę transmitancję realizuje się przez łańcuchowe połączenie aktywnych, rezonansowych układów *RC*, dla których oblicza się wartości elementów i ważniejsze parametry. W pracy prezentuje się wyniki obliczeń wykonanych przy użyciu elektronicznej maszyny cyfrowej.

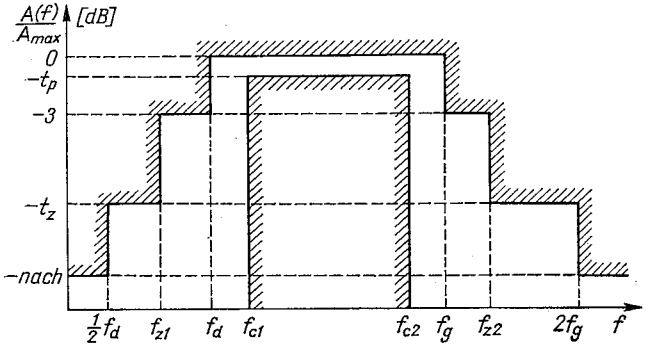
1. WYMAGANE ZAŁOŻENIA

Przystępując do projektowania pasmowych filtrów Czebyszewa określa się wymagania na charakterystykę amplitudową filtru, która następnie jest aproksymowana tak, by filtr dał się fizycznie zrealizować. Wynikiem aproksymacji jest transmitancja spełniająca postawione wymagania. Powyższe wymagania podaje się maszynie cyfrowej w postaci następujących danych:

1) f_d, f_g — graniczne częstotliwości dolna i górna 3-decybelowego pasma przepustowego w kHz,
2) f_{c1}, f_{c2} — częstotliwości krańcowe dolna i górna pasma przepustowego praktycznego w kHz (pasma, w którym maksymalne zniekształcenia tłumieniowe nie są większe od wymaganej wartości t_p),
3) f_{z1}, f_{z2} — częstotliwości krańcowe dolna i górna praktycznego pasma tłumieniowego w kHz (pasma, w którym tłumienność napięciowa nie jest mniejsza od zadanej wartości t_z),
4) t_p — maksymalne zniekształcenia tłumieniowe w praktycznym paśmie przepustowym w dB.
5) t_z — minimalna tłumienność napięciowa w praktycznym paśmie tłumieniowym w dB,
6) *nach* — minimalna tłumienność napięciowa dla częstotliwości $0.5 f_d$ i $2 f_g$,
7) *WZM* — wzmocnienie napięciowe filtru w V/V,
8) R_{we}, R_{wy} — rezystancje wejściowa i wyjściowa zastosowanych w filtrze wzmacniaczy operacyjnych w kΩ,

9) U_{max} — maksymalne napięcie na wyjściu wzmacniacza w V,
10) U_{we} — napięcie sygnału na wejściu filtru w V,
11) szer C — użyty szereg pojemności, 0.5, 1 lub 2%,
12) szer R — użyty szereg rezystancji, 0.5, 1 lub 2%,
13) szer $R1$ — szereg dokładnych rezystancji, 0.5, 1 lub 2%.

Powyższe wymagania nakładają ograniczenia na charakterystykę amplitudową. Ograniczenia te pokazano na rys. 1.



Rys. 1. Ograniczenia nałożone na charakterystykę amplitudową

Przed przystąpieniem do aproksymacji symetryzuje się dane częstotliwości względem 3-decybelowego pasma przepustowego, tak aby

$$f_{c1}^* f_{c2}^* = f_{z1}^* f_{z2}^* = f_d f_g := f_0^2$$

oraz

$$f_{c1}^* \leqslant f_{c1}, \quad f_{c2}^* \geqslant f_{c2}, \quad f_{z1}^* \geqslant f_{z1}, \quad f_{z2}^* \leqslant f_{z2},$$

gdzie wielkości f^* z indeksami $c1$, $c2$, $z1$, $z2$ oznaczają częstotliwości spełniające warunek symetrii.

2. WYZNACZANIE STOPNIA APROKSYMACJI

Aby zastosować wyniki aproksymacji [1] filtru dolnoprzepustowego wielomianami Czebyszewa, stosuje się transformację płaszczyzny operatora środkowoprzepustowego $p \in \bar{p}$ w płaszczyznę operatora dolnoprzepustowego $P \in \bar{P}$. Odwzorowanie $p \to P$ ma postać [1], [15]:

$$P = \frac{1}{B}\left(p + \frac{\omega_0^2}{p}\right), \tag{1}$$

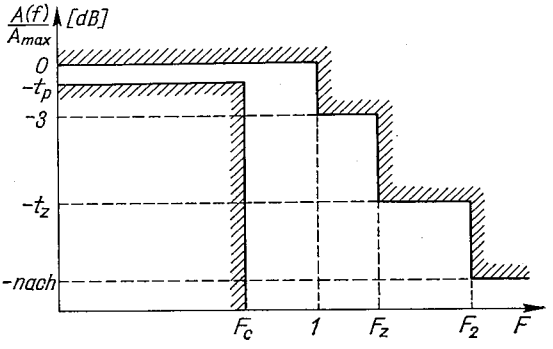
gdzie:

$$B = f_g - f_d, \quad \omega_0^2 = 4\pi^2 f_0^2.$$

Przy odwzorowaniu (1), częstotliwości f filtru pasmowego odpowiada częstotliwość F filtru dolnoprzepustowego, przy czym

$$F = \frac{1}{B}\left(f - \frac{f_0^2}{f}\right). \tag{2}$$

Podstawiając f_{c2}^*, f_{z2}^*, f_g i $2f_g$ do (2) otrzymuje się kolejno ograniczenia w postaci częstotliwości znormalizowanych F_c, F_z, F_g, F_2 na charakterystykę dolnoprzepustową, dla której dokonuje się aproksymacji. Ograniczenia te ilustruje rys. 2.



Rys. 2. Ograniczenia na charakterystykę dolnoprzepustową

Równomiernie falista Czebyszewowska charakterystyka dolnoprzepustowa określona jest wzorem [1]:

$$\frac{A^2(F)}{A_{max}^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\varepsilon^2\cos^2\left(n\cdot\arccos\dfrac{F}{F_c^*}\right)} & \text{dla} \quad 0 \leqslant F < F_c^*, \\ \dfrac{1}{1+\varepsilon^2\operatorname{ch}^2\left(n\cdot\operatorname{arch}\dfrac{F}{F_c^*}\right)} & \text{dla} \quad F \geqslant F_c^*, \end{cases} \tag{3}$$

gdzie

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1\cdot t_p}-1} \tag{4}$$

jest współczynnikiem falistości, n — stopniem aproksymacji oraz

$$F_c^* = \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\dfrac{1}{n}\operatorname{arch}\dfrac{1}{\varepsilon}\right)}. \tag{5}$$

Stopień aproksymacji n dobiera się tak, aby był całkowity, minimalny i spełniał następujące 3 warunki:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & F_c^* > F_c, \\ \text{b)} & 10\lg\dfrac{A^2(F_z)}{A^2{}_{max}} \leqslant -t_z, \\ \text{c)} & 10\lg\dfrac{A^2(F_2)}{A^2{}_{max}} \leqslant -nach. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Dla obliczonego w ten sposób n minimalizuje się współczynnik falistości przy zachowaniu warunków (6). Następnie oblicza się zoptymalizowane wartości F_c, t_z, $nach$ ze wzorów (5) i (6). W oparciu o wzory (2) i (4) oblicza się optymalne parametry filtru f_{c1}, f_{c2} i t_p.

3. BIEGUNY CHARAKTERYSTYKI DOLNOPRZEPUSTOWEJ

Transmitancja układu o charakterystyce amplitudowej wyrażonej wzorem (3) daje się przedstawić [1] w postaci:

$$T_p(P) = \frac{K_p}{(P-P_1)(P-P_2)\ldots(P-P_n)}, \tag{7}$$

gdzie K_p jest współczynnikiem statycznym transmitancji, a P_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — jej k-tym biegunem.

Bieguny P_k wyrażają się [1] wzorami:

$$P_k = -S_k + j\Omega_k, \tag{8}$$

gdzie:

$$S_k = \Omega_c \left[\operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\operatorname{arsh}\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]\sin\frac{(2k-1)\pi}{2n},$$

$$\Omega_k = \Omega_c \left[\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\operatorname{arsh}\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n},$$

$$\Omega_c = 2\pi F_c^*,$$

$$k = 1, 2, \ldots, n.$$

Dla n nieparzystego wystąpi rzeczywisty biegun

$$P_{\frac{n+1}{2}} = -\Omega_c \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\operatorname{arsh}\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{9}$$

4. TRANSFORMACJA CZĘSTOTLIWOŚCI

Jeśli w transmitancji filtru dolnoprzepustowego (7) w miejsce operatora P podstawi się (1), to otrzyma się transmitancję szukanego filtru pasmowego:

$$T(p) = K_p \prod_{k=1}^{n} \frac{Bp}{p^2 - BP_k p + \omega_0^2} = K_p \prod_{k=1}^{n} \frac{Bp}{(p-p_{k1})(p-p_{k2})}. \tag{10}$$

Bieguny transmitancji (10) wyrażają się wzorami

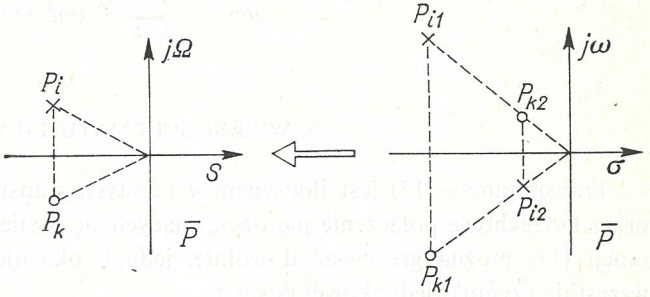
$$\left.\begin{aligned} p_{k1} &= \frac{B}{2}\left[-(S_k + r_k\cos\varphi_k) + j(\Omega_k + r_k\sin\varphi_k)\right], \\ p_{k2} &= \frac{B}{2}\left[-(S_k - r_k\cos\varphi_k) + j(\Omega_k - r_k\sin\varphi_k)\right], \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

gdzie:

$$\left.\begin{aligned} r_k &= \sqrt[4]{(S_k^2-\Omega_k^2-16\pi^2Q^2)^2+4S_k^2\Omega_k^2}\,, \\ \varphi_k &= -\frac{1}{2}\arg[(S_k^2-\Omega_k^2-16\pi^2Q^2)-j2S_k\Omega_k], \\ Q &= \frac{f_o}{B}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

przy czym Q jest dobrocią filtru.

Na podstawie (8) łatwo można wykazać, że dla $i = n+1-k$ bieguny P_i i P_k są sprzężone, $r_i = r_k$, $\varphi_i = -\varphi_k$, p_{i1} i p_{k1} oraz p_{i2} i p_{k2} są parami sprzężone. Wzajemne rozmieszczenie biegunów ilustruje rys. 3.



Rys. 3. Położenie biegunów na płaszczyznach $\bar{P}$ i $\bar{p}$

Grupując w transmitancji (10) sprzężone bieguny parami, dostaje się jej ostateczną postać

$$T(p) = K_p \prod_{k=1}^{n} \frac{Bp}{p^2+\sigma_k p+\omega_k^2}, \tag{13}$$

gdzie dla $k \leqslant \frac{n}{2}$ oraz $i = n+1-k \geqslant \frac{n}{2}$ jest:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_k &= B(S_k+r_k\cos\varphi_k), \\ \omega_k^2 &= \frac{B^2}{4}[(S_k+r_k\cos\varphi_k)^2+(\Omega_k+r_k\sin\varphi_k)^2], \\ \sigma_i &= B(S_k-r_k\cos\varphi_k), \\ \omega_i^2 &= \frac{B^2}{4}[(S_k-r_k\cos\varphi_k)^2+(\Omega_k-r_k\sin\varphi_k)^2]; \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

dla n nieparzystego

$$\sigma_{\frac{n+1}{2}} = BS_{\frac{n+1}{2}}, \qquad \omega^2{}_{\frac{n+1}{2}} = \omega_o^2. \tag{15}$$

4. CHARAKTERYSTYKI CZĘSTOTLIWOŚCIOWE

Z (13) dostaje się charakterystykę amplitudową:

$$|T(j\omega)| = |K_p| \prod_{k=1}^{n} \frac{B\omega}{\sqrt{(\omega^2-\omega_k^2)^2+\sigma_k^2\omega^2}}, \tag{16}$$

charakterystykę fazową:

$$\varphi(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \arg[\sigma_k\omega + j(\omega_k^2-\omega^2)] \tag{17}$$

oraz charakterystykę opóźnieniową:

$$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \frac{\omega_k^2+\omega^2}{(\omega_k^2-\omega^2)^2+\sigma_k^2\omega^2}. \tag{18}$$

5. WYBÓR SCHEMATU FILTRU

Transmitancja (13) jest iloczynem n prostych transmitancji i może być realizowana przez łańcuchowe połączenie nie obciążających się wzajemnie czwórników. Zera transmitancji (13) można grupować dowolnie, jednak okazuje się, że najdogodniej jest mieć wszystkie czynniki jednakowej postaci

$$T_k(p) = \frac{Bp}{p^2+\sigma_k p+\omega_k^2}. \tag{19}$$

Prowadzi to do łańcuchowego połączenia rezonansowych układów o częstotliwościach środkowych f_k i dobrociach Q_k wynoszących:

$$f_k = \frac{\omega_k}{2\pi}, \qquad Q_k = \frac{\omega_k}{\sigma_k}. \tag{20}$$

Okazuje się, że dla $i = n+1-k$ mamy

$$f_i f_k = f_0^2 \quad \text{oraz} \quad Q_i = Q_k.$$

Ponieważ stosowanie cewek w układach jest kłopotliwe, interesujące są realizacje transmitancji (19) za pomocą aktywnych układów RC. Takie układy opisano w [5], [8] i [11].

Biorąc pod uwagę następujące zalety:

— stosowanie w części selektywnej jednakowych rezystorów i kondensatorów,

— zależność rezonansowej częstotliwości tylko od iloczynu RC,

— łatwa regulacja dobroci przez zmianę wzmocnienia w ujemnym sprzężeniu zwrotnym,

zdecydowano się na układ przedstawiony na rys. 4.

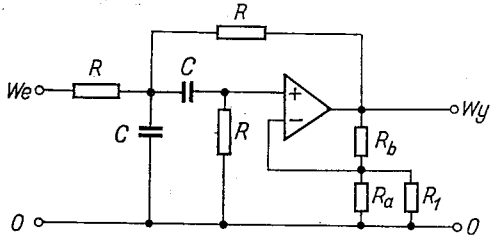
Oznaczając

$$K = \frac{R_b}{R_a \| R_1} \text{ oraz } T = RC,$$

otrzymuje się transmitancję układu przedstawionego na rys. 4. w postaci

$$T_1(p) = \frac{\frac{K+1}{T}p}{p^2 + \frac{3-K}{T} + \frac{2}{T^2}}. \tag{21}$$

Rys. 4. Schemat ogniwa filtru



Stąd i z (19) dostaje się

$$\omega_k = \frac{\sqrt{2}}{R_k C_k}, \quad \sigma_k = \frac{3-K_k}{R_k C_k}, \quad Q_k = \frac{\sqrt{2}}{3-K_k}. \tag{22}$$

6. WPŁYW TOLERANCJI WARTOŚCI ELEMENTÓW

Jak widać z (22), na rezonansowe częstotliwości f_i wpływają wartości R i C, można więc przyjąć

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta C}{C} + \frac{\Delta_1 R}{R}. \tag{23}$$

Oznaczając fabryczne tolerancje elementów $\frac{\Delta R}{R} = \delta_R$, $\frac{\Delta C}{C} = \delta_c$ dostaje się

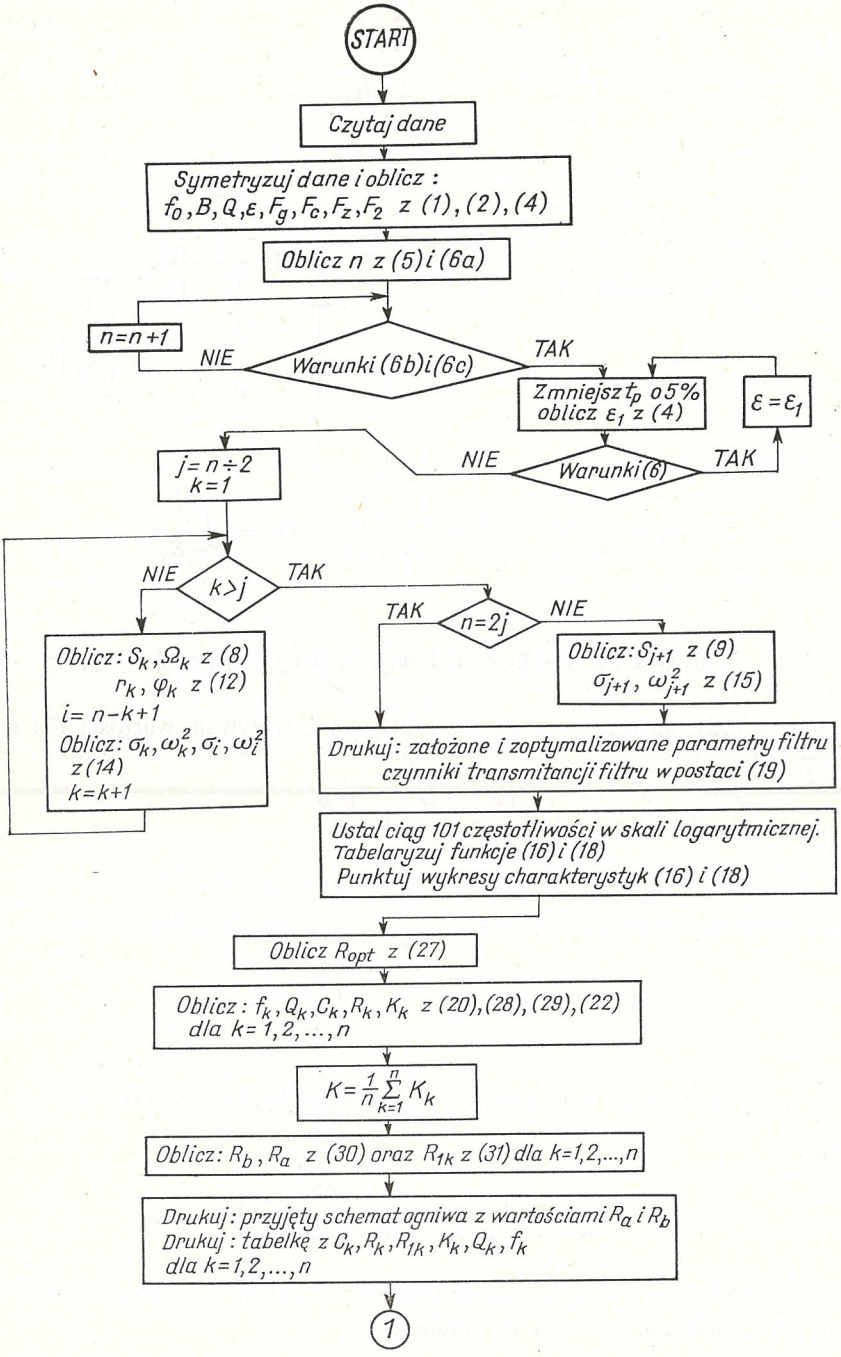
$$\frac{\Delta f}{f} = \delta_c + \delta_R + \frac{\Delta_2 R}{R}, \tag{24}$$

gdzie $\frac{\Delta_2 R}{R}$ uwzględnia wpływ rezystancji wejściowej i wyjściowej wzmacniacza i wyraża się wzorem:

$$\frac{\Delta_2 R}{R} = \frac{R_{wy}}{2R}\left(1 - \frac{R^2}{(R+R_{we})R_{wy}}\right). \tag{25}$$

Na dokładność dobroci Q ma wpływ dokładność R, C oraz K. Okazuje się, że wpływy R i C są do pominięcia, natomiast wpływ K ujmuje wzór

$$\frac{\Delta Q}{Q} = (3\sqrt{2}Q - 2)\,\delta_{R1}. \tag{26}$$



Rys. 5. Schemat blokowy programu: część I

7. DOBÓR WARTOŚCI ELEMENTÓW

Z (25) wynika optymalna wartość R_{opt} minimalizująca $\frac{\Delta_2 R}{R}$:

$$R_{opt} = \frac{1}{2}\left[R_{we} + \sqrt{R_{we}(R_{we}+4R_{wy})}\right]. \tag{27}$$

Pojemności C_k dla k-tego ogniwa filtru są liczone z (22) i dobierane z szeregu szer C

$$C_k = \text{najbliższe z szeregu szer}\, C \text{ do } \frac{\sqrt{2}}{\omega_k R_{opt}} \tag{28}$$

oraz

$$R_k = \text{najbliższe z szeregu szer}\, R \text{ do } \frac{\sqrt{2}}{\omega_k C_k}. \tag{29}$$

Rezystancję opornika R_b oblicza się tak, aby dla średniego

$$K = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} K_k$$

rezystancja obciążająca odwracające wejście wzmacniacza była równa R_{opt}

$$R_b = \text{najbliższe z szeregu szer } R1 \text{ do } R_{opt}\,(1+K). \tag{30}$$

Aby zapewnić stabilność filtru przed strojeniem, za R_a dobiera się trzecią kolejną z szeregu szer $R1$ wartość większą od najbliższej wartości z tego szeregu do

$$\frac{R_b}{\min\limits_k K_k}.$$

Wartość R_{1k} dobiera się z szeregu szer R tak, aby

$$\frac{R_b}{R_a \| R_{1k}} \approx K_k. \tag{31}$$

Schemat blokowy opisanej wyżej części algorytmu pokazano na rys. 5.

8. ŁĄCZENIE OGNIW

Filtr składa się z n ogniw o schemacie przedstawionym na rys. 4. Kolejność ich łączenia nie jest dowolna. Należy bowiem tak połączyć ogniwa filtru, aby żadne z nich przy nominalnym sygnale wejściowym nie zostało przesterowane. W praktyce łączy się ogniwa o jednakowych dobrociach parami, zaczynając od najbardziej skrajnych częstotliwości rezonansowych. Program zapewnia taką właśnie kolejność łączenia. Następnie ustala ciąg $2n-1$ częstotliwości, biorąc częstotliwości rezonansowe f_k i ich średnie geometryczne

$$\sqrt{f_k f_{k+1}} \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{32}$$

Program stwierdza dla każdej częstotliwości, czy przed danym ogniwem, w przypadku nominalnego napięcia sygnału na wejściu filtru, jest konieczne umieszczenie tłumika w celu

zabezpieczenia się przed przesterowaniem. Jeśli tak, to oblicza odpowiedni dzielnik oporowy, taki aby nie obciążał on w istotnym stopniu wejścia ani wyjścia ogniw. Jeśli wzmocnienie tak wyznaczonego filtru jest mniejsze od zadanego, program proponuje umieszczenie wzmacniacza na wyjściu i podaje jego wzmocnienie. W przeciwnym przypadku zwiększa tłumienie dzielników zaczynając od najmniejszego i podaje dwa warianty rozwiązań do wyboru. Zaletą pierwszego wariantu są bardziej wyrównane poziomy sygnału na poszczególnych stopniach filtru, zaś drugi zakłada stosowanie jednakowych dzielników i może ich mieć mniej.

9. OPIS PROGRAMU LICZENIA DZIELNIKÓW

Przystępując do liczenia i rozmieszczania dzielników, program oblicza dla częstotliwości środkowej wzmocnienie filtru bez dzielników z (16) przyjmując

$$|K_p| = \prod_{k=1}^{n} K_{1k},$$

gdzie z (21)

$$K_{1k} = \frac{K_k + 1}{T_k};$$

następnie ustala ciąg $2n-1$ częstotliwości, z których pierwszych n dane jest wzorem (20), a pozostałe wzorem (32). Dla każdej częstotliwości f_j ($j = 1, 2, \ldots, 2n-1$) i każdego ogniwa ustala się wzmocnienie tworząc macierz wzmocnień WZR

$$WZR_{ij} = \frac{K_{1i}\omega_j}{\sqrt{(\omega_j^2 - \omega_i^2)^2 + \sigma_i^2 \omega_j^2}}, \tag{33}$$

gdzie

$\omega_i = 2\pi f_i$,

$j = 1, 2, \ldots, 2n-1$,

$i = 1, 2, \ldots, n$.

Aby dzielnik nie obciążał istotnie wejścia ani wyjścia ogniw przyjmuje się, że jego rezystancje szeregowe i równoległe muszą spełniać warunki:

$$R_s \geqslant 10R_{wy},$$

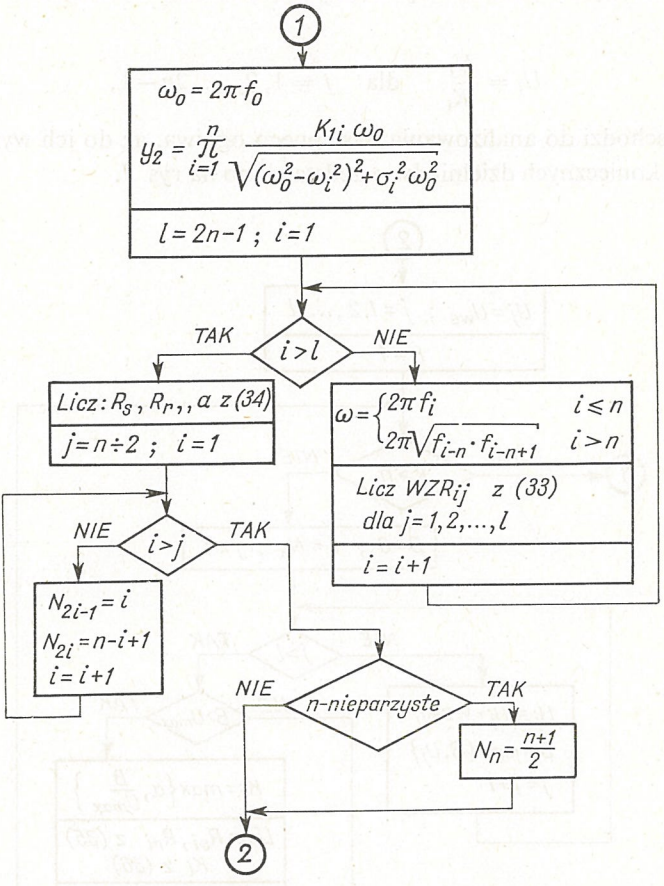
$$R_r \leqslant 0.05\ R_{opt}.$$

Dostaje się więc warunki na minimalne R_s, maksymalne R_r i minimalny podział napięcia na dzielniku a:

$$\left.\begin{aligned} R_{s\,min} &= 10R_{wy}, \\ R_{r\,max} &= 0.05R_{opt}, \\ a &= 200\,\frac{R_{wy}}{R_{opt}} + 1. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

W tablicy N zapamiętuje się kolejność łączenia ogniw, a w tablicy U — napięcie każdej z $2n-1$ częstotliwości przed aktualnie badanym ogniwem.

Schemat blokowy obliczania macierzy WZR, N, U oraz a, $R_{s\,min}$, $R_{r\,max}$ podany jest na rys. 6. W dalszym ciągu program analizuje konieczność użycia dzielników. Dla ogniwa pierwszego, to jest o numerze $i = N_1$, liczy się dla każdej częstotliwości f_j napięcie wyjścio-



Rys. 6. Schemat blokowy programu: część II
Algorytm liczenia macierzy WZR, N oraz a, R_s i R_r

we $U_j = U_j\,WZR_{ij}$ oraz $B = \max_j U_j$. Jeśli $B \leqslant U_{max}$, to oznacza, że dzielnik nie jest potrzebny i można przejść do analizowania następnego ogniwa. Jeśli $B > U_{max}$, to napięcie na wejściu ogniwa trzeba podzielić przez $K_i = B/U_{max}$, przy czym jeśli $K_i < a$, przyjmuje się $K_i = a$.

Rezystancje dzielnika dobiera się według wzorów:

$$\left.\begin{aligned} R_{si} &= \text{najbliższy z szeregu do } R_{s\,min}\sqrt{\frac{K_i}{a}}\,, \\ R_{ri} &= \text{najbliższy z szeregu do } \frac{R_{si}}{K_i - 1}\,, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

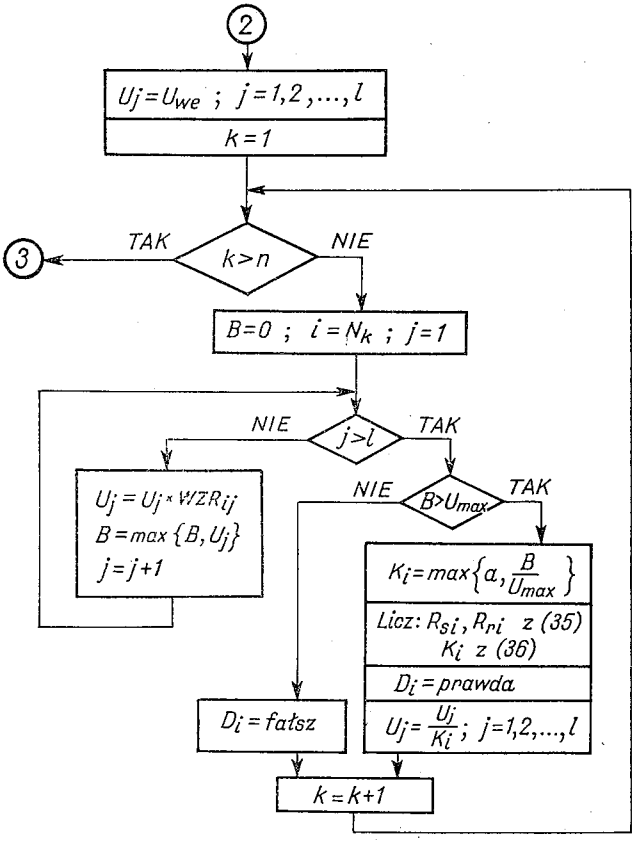
a następnie koryguje uzyskany podział jako

$$K_i = \frac{R_{si}}{R_{ri}} + 1. \tag{36}$$

Fakt konieczności użycia dzielnika zapamiętuje się w tablicy D, oblicza nowe napięcia wyjściowe

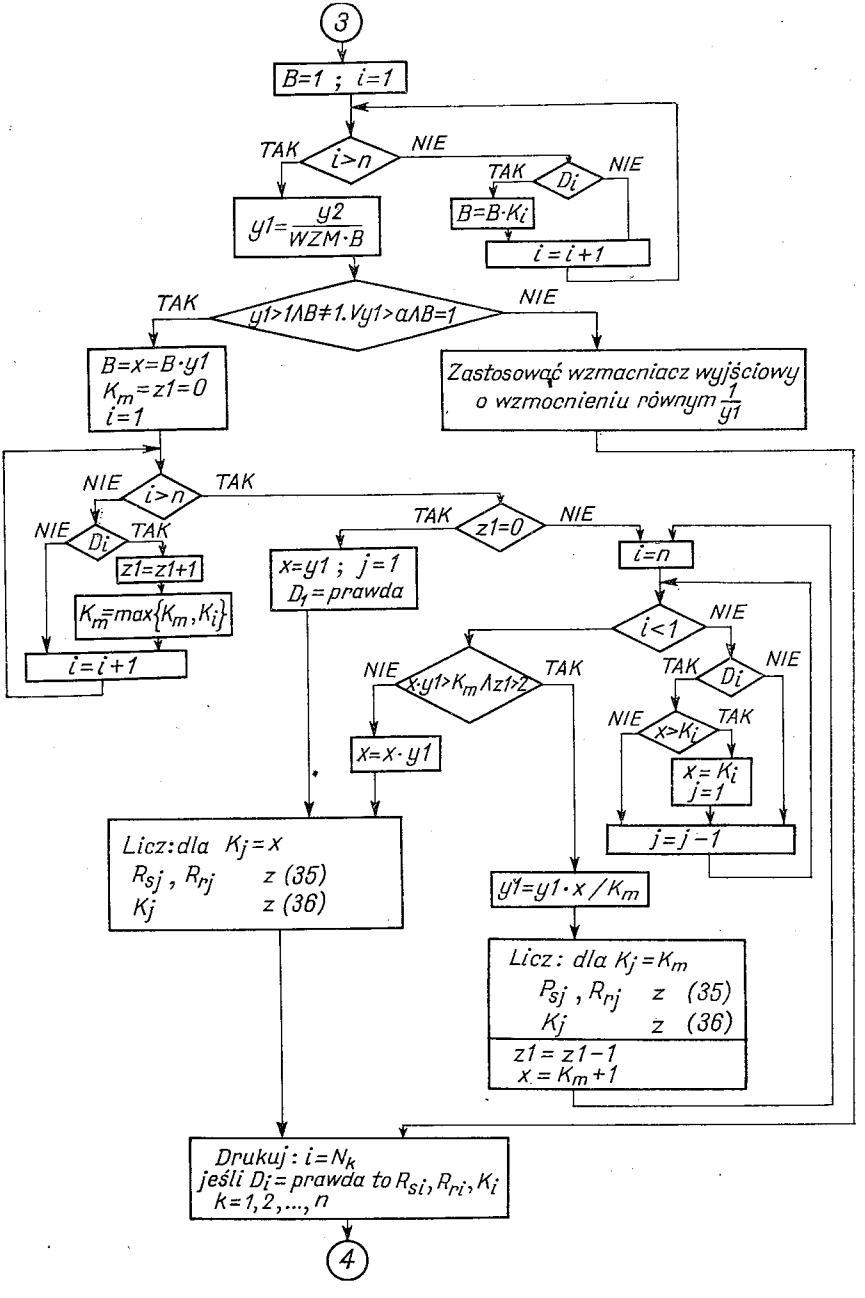
$$U_j = \frac{U_j}{K_i} \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, \ldots, 2n-1, \tag{37}$$

a następnie przechodzi do analizowania następnego ogniwa, aż do ich wyczerpania. Algorytm obliczania koniecznych dzielników przedstawiono na rys. 7.



Rys. 7. Schemat blokowy programu: część III
algorytm liczenia koniecznych dzielników

Maksymalne, możliwe do uzyskania wzmocnienie filtru liczy się dzieląc wzmocnienie filtru bez dzielników przez iloczyn zastosowanych podziałów na dzielnikach. Stosunek tego wzmocnienia do zadanego zapamiętuje się w $y1$. Zadane wzmocnienie można uzyskać wykorzystując dzielniki, jeśli $y1 > 1$ i istnieje co najmniej jeden dzielnik lub — w przypadku, gdy filtr nie wymaga dzielników — jeśli $y1 > a$. W przeciwnym razie należy zastosować wyjściowy wzmacniacz o wzmocnieniu $1/y1$. Jeśli zadane wzmocnienie można uzy-

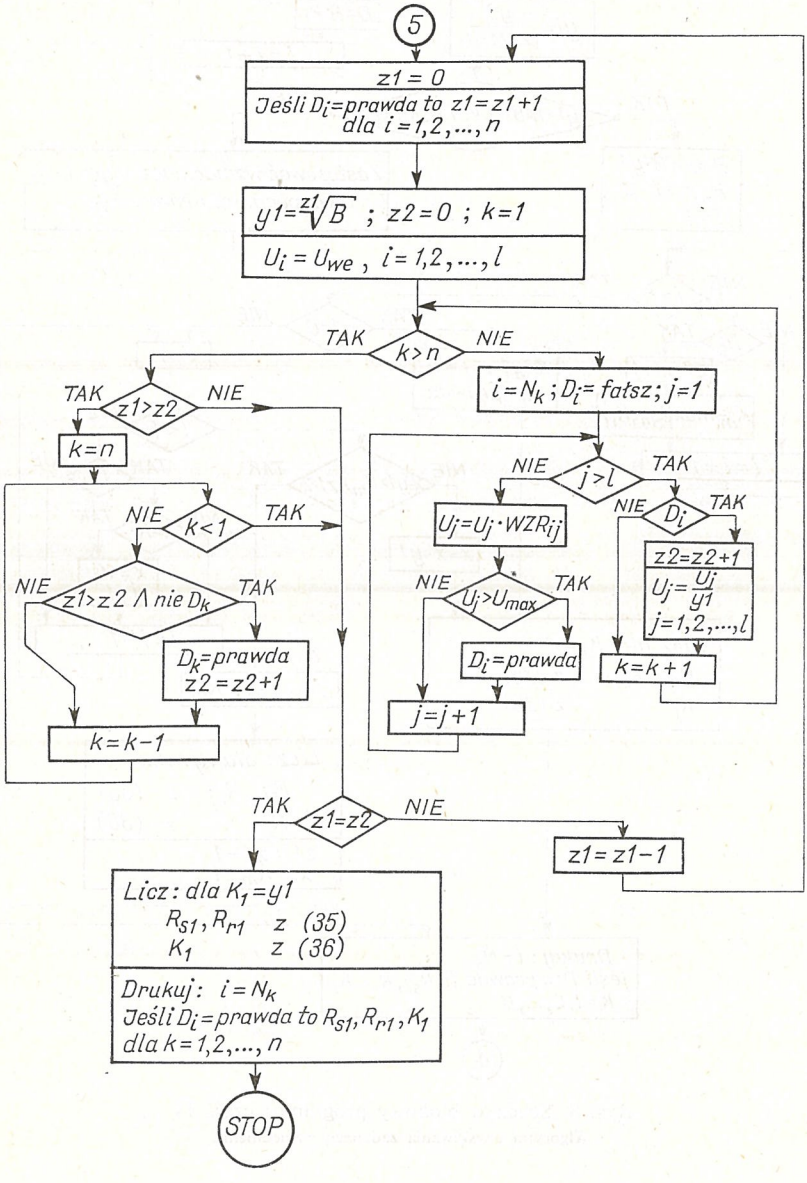


Rys. 8. Schemat blokowy programu: część IV

Algorytm uzyskiwania zadanego wzmocnienia

skać samymi dzielnikami, znajduje się dzielnik największy K_{max} (jeśli nie ma dzielników, stosuje się jeden na wejściu filtru o podziale $y1$). Następnie zaczynając od dzielnika najmniejszego zastępuje się je dzielnikami równymi największemu obliczając nowe $y1$ aż do przedostatniego dzielnika lub stanu, w którym kolejne zastąpienie dałoby $y1 < 1$. Kolejny dzielnik zastępuje się takim, który daje $y1 = 1$, czyli wymagane wzmocnienie filtru.

Powyższa procedura opracowana została tak, aby zmniejszyć różnicę między maksymalnym i minimalnym dzielnikiem i jest przedstawiona na rys. 8.

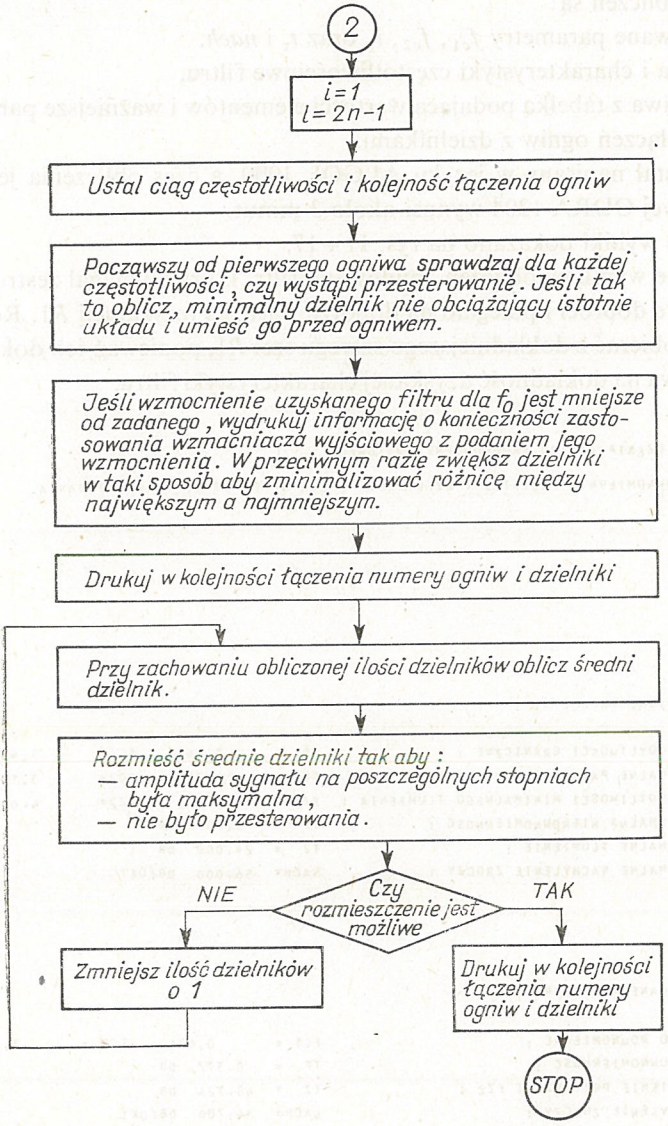


Rys. 9. Schemat blokowy programu: część V
Algorytm 2 uzyskiwania zadanego wzmocnienia

Program realizuje jeszcze inną wersję powyższej procedury, dającą nie większą liczbę jednakowych dzielników. W B zapamiętuje się żądany wypadkowy podział wszystkich dzielników, a w $z1$ uzyskaną ich liczbę. Zatem

$$y1 = \sqrt[z1]{B} \tag{38}$$

oznacza podział każdego dzielnika. W U_j zapamiętuje się napięcia wejściowe. Dla ogniwa o numerze $i = N_1$ liczy się napięcia wyjściowe $U_j = U_j^* \, WZR_{ij}$ $(j = 1, \ldots, 2n-1)$ i sprawdza, czy nie przekraczają U_{max}. Jeśli co najmniej jedno U_j spełnia $U_j > U_{max}$, przyjmuje się dzielnik, oblicza nowe $U_j = U_j/y_1$ i przechodzi do następnego ogniwa, aż do wyczerpania ich. Jeśli uzyskana w ten sposób liczba dzielników $z2$ jest mniejsza od wymaganej $z1$,



Rys. 10. Schemat blokowy heurystycznej części programu (obejmujący schematy z rys. 5÷9)

to zaczynając od ostatniego ogniwa dodaje się dzielniki tam, gdzie ich nie ma, uzyskując $z2 = z1$. Jeśli $z2 > z1$, to zmniejsza się $z1$ o 1 ($z1 := z1 - 1$) i powraca do wzoru (38), oblicza nowe $z2$ i tak aż do uzyskania $z1 = z2$. Jeśli już uzyska się $z1 = z2$, liczy się R_s i R_r z (35), przyjmując $K_i = y_1$.

Schemat blokowy tej procedury przedstawiono na rys. 9, a ogólny schemat całego programu na rys. 10.

10. WYNIKI OBLICZEŃ I UWAGI PRAKTYCZNE

Wynikami obliczeń są:
— zoptymalizowane parametry f_{c1}, f_{c2}, t_p oraz t_z i *nach*,
— transmitancja i charakterystyki częstotliwościowe filtru,
— schemat ogniwa z tabelką podającą wartości elementów i ważniejsze parametry,
— kolejność połączeń ogniw z dzielnikami.

Program został napisany w języku ALGOL 1900, a czas obliczenia jednego filtru na maszynie cyfrowej ODRA 1304 wynosi około 3 minut.

Przykładowe wyniki pokazano na rys. 11 ÷ 17.

Na podstawie wyników obliczeń zbudowano filtr, który wymagał zestrojenia. Strojenie dotyczyło jedynie dobroci i polegało na doborze wartości rezystancji $R1$. Rezystory R_a i R_b proponuje się dobierać z dokładniejszego szeregu szer $R1$, ponieważ ich dokładność w istotny sposób wpływa na dokładność uzyskanej charakterystyki filtru.

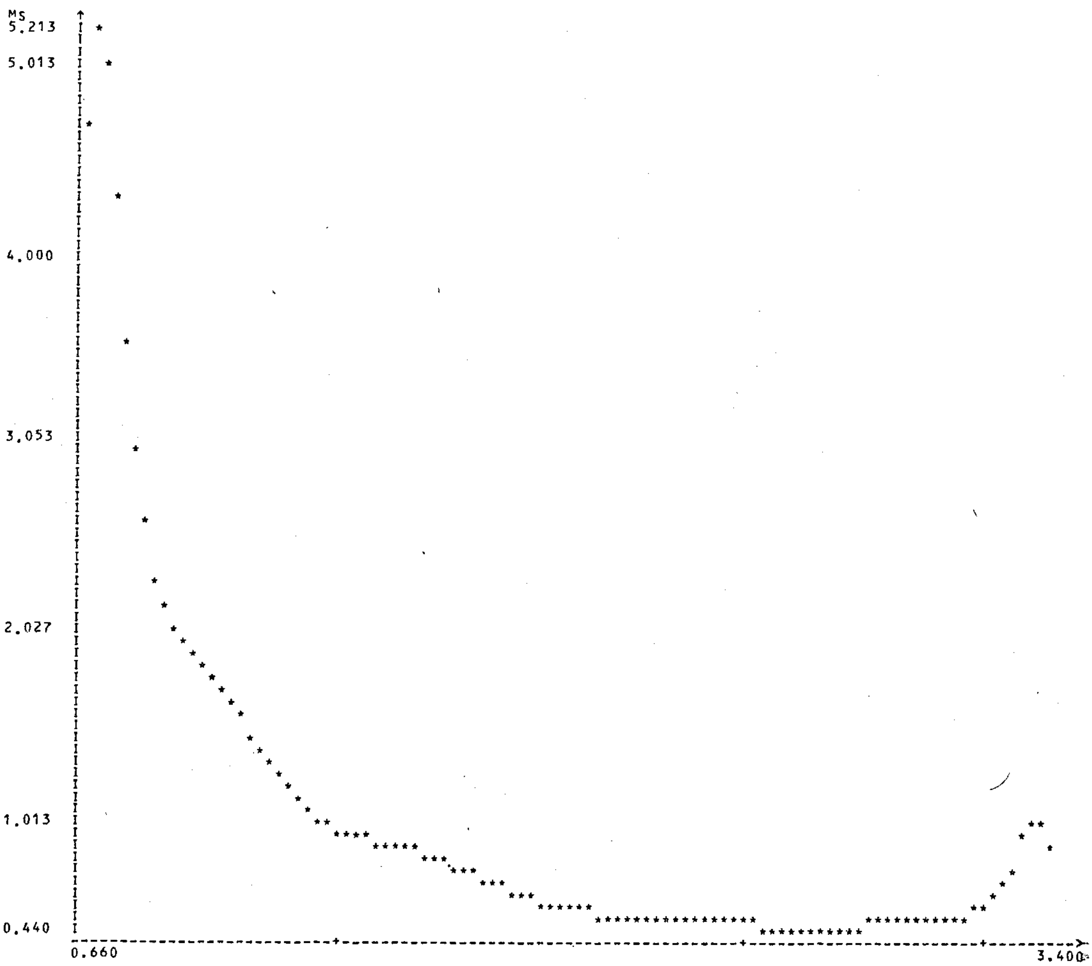
```
OBLICZENIA FILTRU SRODKOWOPRZEPUSTOWEGO
O ROWNOMIERNIE FALISTEJ ( CZEBYSZEWA ) CHARAKTERYSTYCE PRZEPUSZCZANIA.



ZALOZONE PARAMETRY :

CZESTOTLIWOSCI GRANICZNE :          FD =     0,660    FG =     3,400
MINIMALNE PASMO ROWNOMIERNE :       FC1=     0,750    FC2=     3,100
CZESTOTLIWOSCI MINIMALNEGO TLUMIENIA : FZ1=  0,540    FZ2=     4,000
MAKSYMALNA NIEROWNOMIERNOSC :       TP  =   1,000  DB
MINIMALNE TLUMIENIE :               TZ  =  24,000  DB
MINIMALNE NACHYLENIE ZBOCZY :       NACH=  56,000  DB/OKT



UZYSKANE PARAMETRY :

PASMO ROWNOMIERNE :                 FC1 =    0,681    FC2 =    3,294
NIEROWNOMIERNOSC :                  TP  =   0,377  DB
TLUMIENIE PRZY FZ1 I FZ2 :          TZ  =  48,724  DB
NACHYLENIE ZBOCZY :                 NACH=  84,706  DB/OKT
```

Rys. 11. Przykładowe wyniki cz. 1

```
TRANSMITANCJA FILTRU SRODKOWOPRZEPUSTOWEGO DLA CZESTOTLIWOSCI GRANICZNYCH      0.660       3.400
JEST ILOCZYNEM TRANSMITANCJI :


              2.74&  0   P                                       2.74&  0   P
T[  1  ] = ----------------------------          T[  6  ] = ----------------------------
           P↑2 + 4.64& -1  P + 1.79&  1                     P↑2 + 2.29&  0  P + 4.38&  2

              2.74&  0   P                                       2.74&  0   P
T[  2  ] = ----------------------------          T[  5  ] = ----------------------------
           P↑2 + 1.70&  0  P + 2.58&  1                     P↑2 + 5.84&  0  P + 3.05&  2

              2.74&  0   P                                       2.74&  0   P
T[  3  ] = ----------------------------          T[  4  ] = ----------------------------
           P↑2 + 3.92&  0  P + 5.44&  1                     P↑2 + 6.38&  0  P + 1.44&  2
```

Rys. 12. Przykładowe wyniki cz. 2

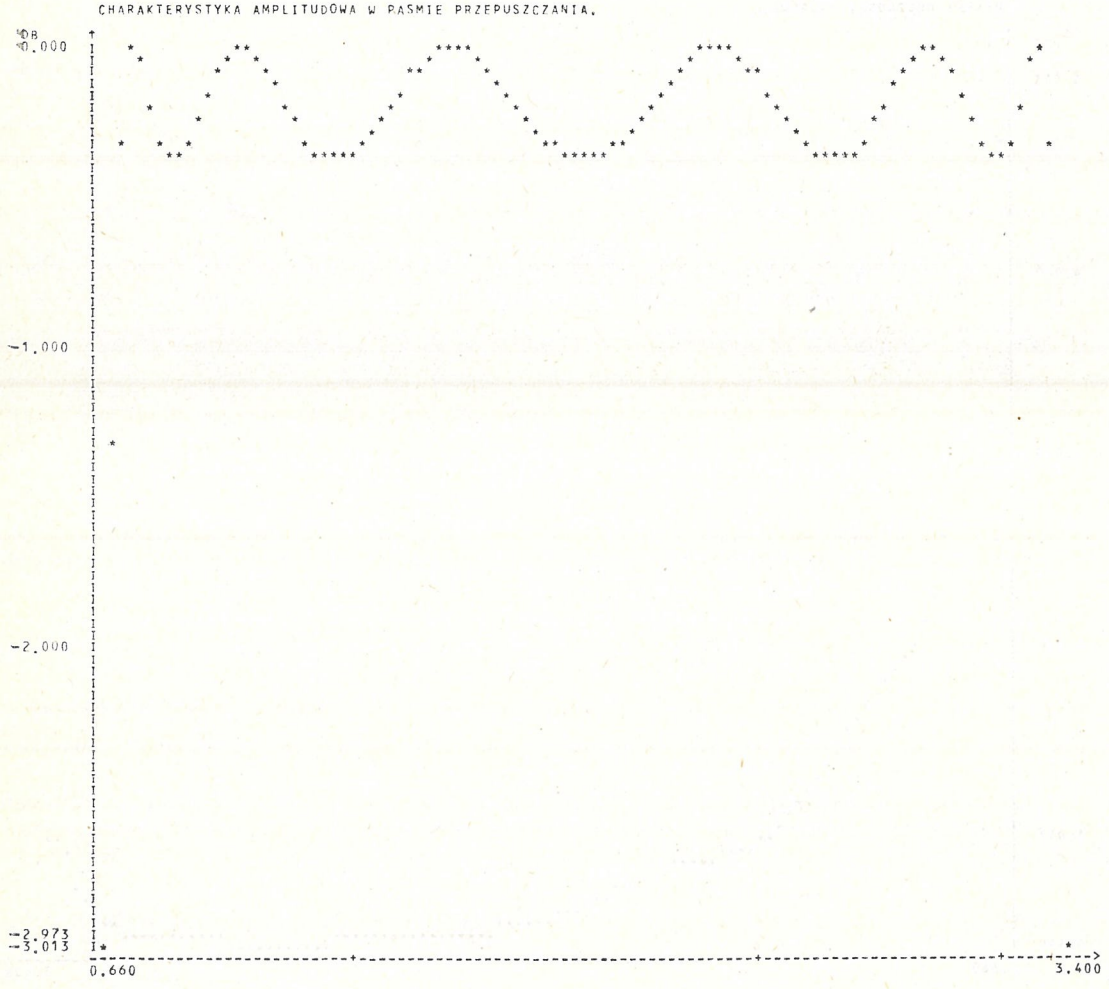
WYKRES OPOZNOSCI GRUPOWEJ.



Rys. 13. Przykładowe wyniki cz. 3

11. ZAKOŃCZENIE

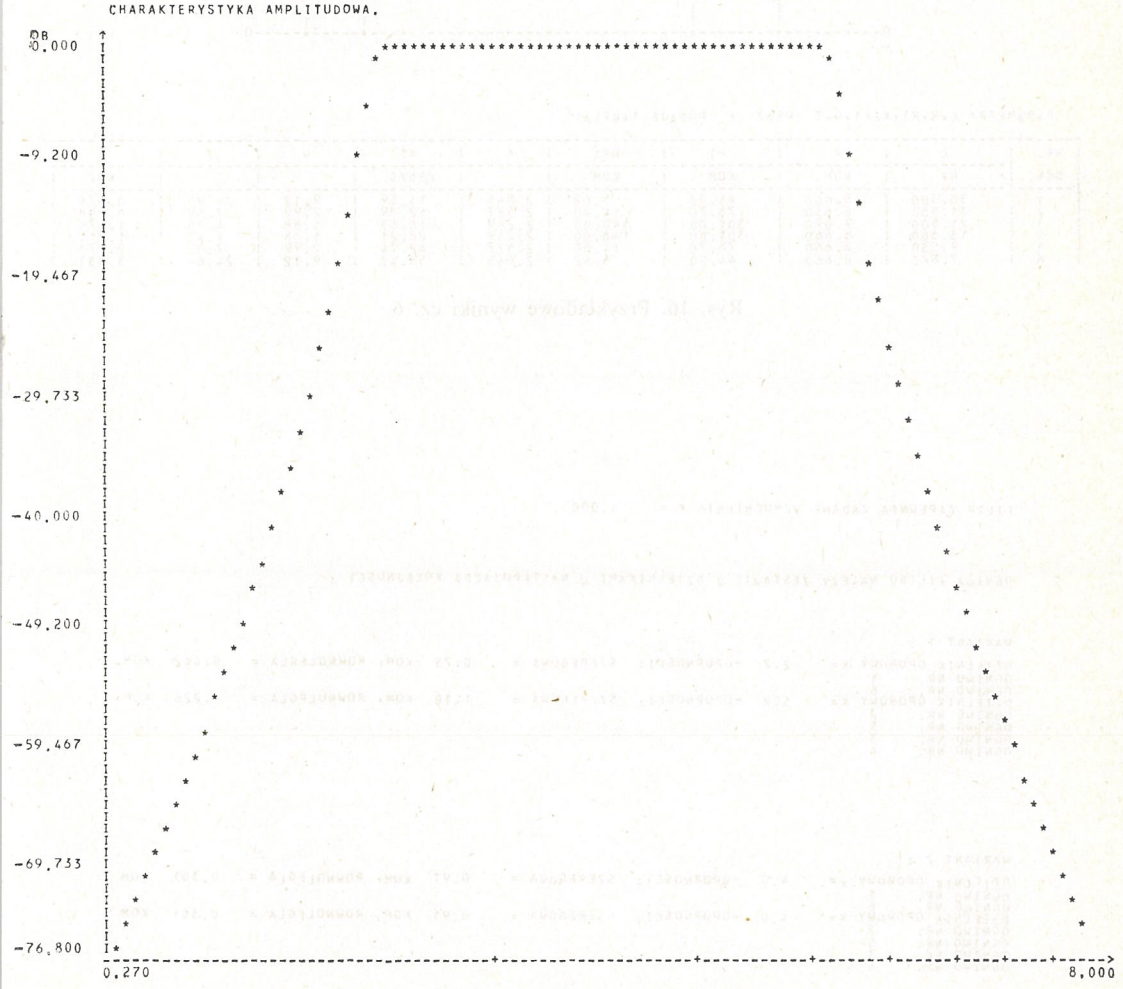
Przy realizacji algorytmu napotkano na duże trudności analitycznego wyznaczania niektórych wielkości. Trudności te ominięto stosując pewne heurystyczne algorytmy dające niekiedy jedynie przybliżone rozwiązania. Na rys. 5 pokazano dwie takie procedury — wyznaczania rzędu aproksymacji n oraz minimalizację zniekształceń tłumieniowych t_p. Rząd n jest wyznaczony dokładnie, natomiast minimalne t_p z dokładnością 5%. W pracy pominięto dowody zbieżności tych procedur, podane w [18]. Na rysunkach 6, 7, 8 i 9 pokazano drugą w całości heurystyczną część programu, dokonującą analizy przesterowań mo-



Rys. 14. Przykładowe wyniki cz. 4

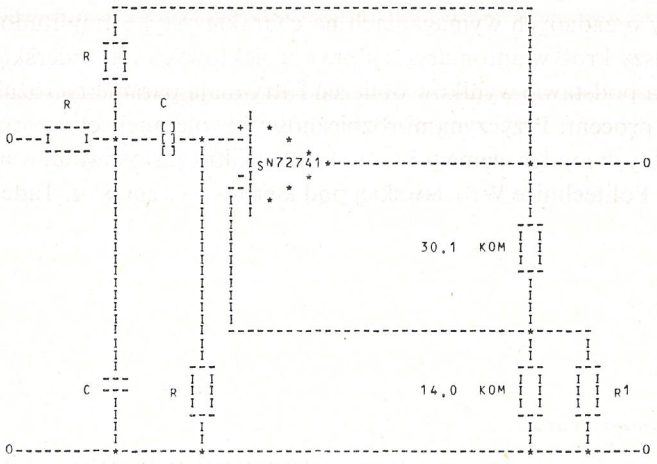
gących wystąpić w układzie łańcuchowo połączonych ogniw. W programie nie uwzględniono istniejących często wymagań na charakterystykę fazową. Opracowanie programu projektującego filtry o zadanych wymaganiach na charakterystykę amplitudową i fazową stanowić będzie dalszy krok w automatyzacji prac projektowych i inżynierskich.

Wykonane na podstawie wyników obliczeń filtry mają parametry różniące się od obliczonych o kilka procent. Przyczynami rozbieżności są tolerancje elementów oraz przyjęcie do obliczeń idealnych modeli elementów. Wykonane filtry zastosowano w modemie 2400 Bd opracowanym w Politechnice Wrocławskiej pod kierownictwem prof. Tadeusza Batyckiego.



Rys. 15. Przykładowe wyniki cz. 5

```
FILTR SKLADA SIE Z   6  OGNIW O NIZEJ POKAZANEJ BUDOWIE
```



PARAMETRY C,R,R1,K,K1,Q,T ORAZ F PODAJE TABELA:

NR. OGN.	C NF	R KOM	R1 KOM	DR1 KOM	K	K1 KRD/S	Q	T	F KHZ
1	38,300	8,660	44,20	5,62	2,845	11,59	9,12	24,98	0,674
2	31,600	8,660	78,70	14,00	2,527	12,89	2,99	7,59	0,808
3	21,500	9,090	301,00	140,00	2,249	16,63	1,88	4,25	1,174
4	13,300	8,660	301,00	140,00	2,249	28,21	1,88	4,42	1,911
5	9,530	8,660	78,70	14,00	2,527	42,74	2,99	7,32	2,778
6	7,870	8,660	44,20	5,62	2,845	56,42	9,12	24,60	3,331

Rys. 16. Przykładowe wyniki cz. 6

```
FILTR ZAPEWNIA ZADANE WZMOCNIENIE K =     5.000

OGNIWA FILTRU NALEZY ZESTAWIC Z DZIELNIKAMI W NASTEPUJACEJ KOLEJNOSCI :

WARIANT 1 :
DZIELNIK OPOROWY K=     2.7  -OPORNOSCI:  SZEREGOWA =    0.75  KOM, ROWNOLEGLA =    0.442  KOM.
OGNIWO NR.     1
OGNIWO NR.     6
DZIELNIK OPOROWY K=     5.9  -OPORNOSCI:  SZEREGOWA =    1.10  KOM, ROWNOLEGLA =    0.226  KOM.
OGNIWO NR.     2
OGNIWO NR.     5
OGNIWO NR.     3
OGNIWO NR.     4

WARIANT 2 :
DZIELNIK OPOROWY K=     4.0  -OPORNOSCI:  SZEREGOWA =    0.91  KOM, ROWNOLEGLA =    0.301  KOM.
OGNIWO NR.     1
OGNIWO NR.     6
DZIELNIK OPOROWY K=     4.0  -OPORNOSCI:  SZEREGOWA =    0.91  KOM, ROWNOLEGLA =    0.301  KOM.
OGNIWO NR.     2
OGNIWO NR.     5
OGNIWO NR.     3
OGNIWO NR.     4
```

Rys. 17. Przykładowe wyniki cz. 7

LITERATURA

1. W. Golde, *Układy elektroniczne*, t. 1, WNT, Warszawa 1970.
2. M. Grobelny *Zarys liniowej teorii układów elektronicznych*, WKiŁ, Warszawa 1968.
3. M. Grobelny, *Komputerowa analiza i synteza układów elektronicznych za pomocą programu DIODA-REDS*, ITiA, Wrocław.
4. O. Przesmycki, *Filtry elektryczne*, WKiŁ, Warszawa 1962.
5. G.K. Beauchomp, A. Twin, *T Filter Design Having an Adjustable Center Frequency*, Electronics-Engineering. Nr 472, 1967.
6. P. Geffe, *Bandpass Filter Shapes up from a Low-Pass Network*, Electronics, Nr 14, 1970.
7. S. Haykin, *Synthesis of RC Active Filter Networks*, London, Mc Graw-Hill, 1969.
8. D. Liawyn Jones, *Use of Operational Amplifiers in Narrow Band Filter Systems for Spectrum Analysis at Audio and Sub-Audio Frequencies*, Electronics-Engineering, Nr 491, 1969.
9. G.S. Maschyt, R.W. Wyndrum, *Active Filters — cz. 5, Applying the Operational Amplifiers*, Electronics, Nr 25, 1968.
10. J.W. Mulloney, *Active Filters — cz. 11, Varying the Aproach*, Electronics, Nr 15, 1969.
11. H.T. Russel, *Design Active Filters with Less Effort*, Electronics Design, Nr 1, 1971.
12. R. Shepard, *Active Filters — cz. 12, Short Cuts to Network Design*, Electronics, Nr 17, 1969.
13. F.G. Stremler, *Simple Arithmetic: An Easy Way to Design Active Bandpass Filters*, Electronics, Nr 12, 1971.
14. B. Gold; Ch.M. Rader, *Cifrowaja obrabotka signałow*, Sowietckoje radio, Moskwa 1973.
15. A. Znamienskij, J. Tepljuk, *Aktywnyje RC-filtry*, Swiaz. Moskva 1970.
16. M. Grobelny, *Projektowanie układów elektronicznych za pomocą komputerów*. WKiŁ, Warszawa 1973.
17. A. Smoliński, *Zasady wzmacniania*, t. 3., PWT, Warszawa 1956.
18. J. Kisilewicz, *Automatyczne projektowanie środkowoprzepustowych filtrów Czebyszewa*, komunikat Nr 72, Instytut Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1973.

J. KISILEWICZ

ALGORITHM FOR AUTOMATIC DESIGN OF BANDPASS CHEBYSHEV FILTERS

Summary

In this paper an algorithm for the design of bandpass filters with symmetrical, Chebyshev amplitude characteristics is presented. The approximation of ideal characteristics gives the realizable filter transmittance. This transmittance is realized by means of cascade-connected active resonators. For these resonators the values of resistors and capacitors are computed. The results of the computations are presented.

J. KISILEWICZ

ALGORITHME DE PROJETER AUTOMATIQUEMENT LES FILTRES PASSE-BANDES DE TCHEBYCHEV

Résumé

Dans cette étude on a présenté l'algorithme de projeter les filtres passe-bandes de Tchebychev à caractéristique de l'amplitude géometriquement symétrique par rapport à la fréquence moyenne du passebande. A la suite de l'approximation de la caractéristique donnée, on obtient une transmittance physiquement réalisable du filtre projeté. Cette transmittance est réalisée par une connexion, en série continue, des circuits *RC* actifs et résonnants pour lesquels on calcule les valeurs des éléments et les paramètres plus importants.

Les résultats des calculs présentés dans l'étude ont été effectués à l'aide d'un calculateur électronique.

J. KISILEWICZ

ALGORITHMEN AUTOMATISCHER PROJEKTIERUNG TSCHEBYSCHEFF-BANDFILTERN

Zusammenfassung

Im vorliegenden Artikel wurde ein Projektierungs-Algorithmus für mitteldurchlässige Tschebyscheff-Filter mit einer hinsichtlich der Mittelfrequenz des Durchlaßbereiches geometrisch symmetrischen Amplitudencharakteristik beschrieben. Im Ergebnis einer Approximation der gegebenen Charakteristik wird eine physisch realisierbare Transmitation des projektierten Filters erhalten. Diese Übergangsfunktion wird mittels Kettenverbindung aktiver *RC*-Resonanzsysteme realisiert, wofür Elementenwerte und wichtigere Parameter berechnet werden.

Im weiteren werden die mittels eines elektronischen Digitalrechners gewonnenen Berechnungsergebnisse angeführt.

Е. КИСИЛЕВИЧ

АЛГОРИТМ АВТОМАТИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПОЛОСОВЫХ ФИЛЬТРОВ ЧЕБЫШЕВА

Резюме

В труде представлен алгоритм проектирования полосовых фильтров с симметрическими амплитудными характеристиками. В результате аппроксимации идеальной характеристики получается физически осуществимая передаточная функция фильтра. Эта передаточная функция реализуется как каскадное соединение активных *RC*-резонаторов. Для этих резонаторов вычисляются значения сопротивлений и конденсаторов.

Представлены результаты вычислений на ЭЦВМ.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1975, 21, z. 4, ss. 843—856

621.3.082.72

Wyznaczanie współczynników kształtu elektrod kwadrupola elektrostatycznego

STEFAN NOWICKI (WARSZAWA), JACEK SEKUTOWICZ (WARSZAWA)
Instytut Technologii Elektronowej NPCP

Otrzymano 22.6.1974

Podano rozkład na szereg potęgowy potencjału o symetrii kwadrupolowej. Przedstawiono metodę wyznaczania współczynników kształtu elektrod, nie wymagającą wysokiej dokładności pomiaru rozkładu potencjałów. Wyznaczono współczynniki kształtu dla elektrod w postaci walców kołowych przy trzech wartościach stosunku promienia walca do apertury kwadrupola.

1. WSTĘP

Aberacja geometryczna soczewek jonowych złożonych z elektrostatycznych kwadrupoli zależy od kształtu elektrod, który może być określony przez 4 liczby — współczynniki kształtu elektrod a, b, c, γ [1]. Współczynniki a, b, c występują w początkowych wyrazach rozkładu na szereg potęgowy potencjału elektrostatycznego w przestrzeni międzyelektrodowej. Rozkład ten, przytoczony w pracy [1] bez dowodu, przedstawiono w rozdz. 2.

Współczynniki a, b, c można wyznaczyć przez pomiar rozkładu potencjału w przestrzeni międzyelektrodowej. Metoda ta wymaga bardzo dokładnego pomiaru potencjału. Wady tej nie ma, przedstawiona w rozdz. 4 metoda wyznaczania a, b, c przez pomiar potencjałów w układzie zastępczym.

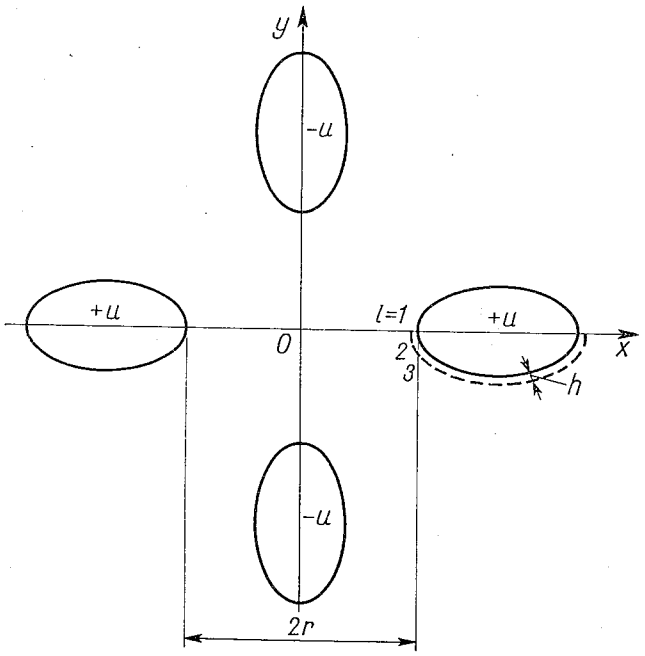
Czwarty współczynnik, kształtu γ, jest stosunkiem maksymalnego do średniego natężenia pola elektrostatycznego występującego w obszarze międzyelektrodowym. Metodę pomiaru γ przedstawiono w rozdz. 5.

W rozdz. 6 przedstawiono przykład liczbowego wyznaczenia współczynników kształtu dla elektrod w postaci walców kołowych. Potencjały mierzono na modelach przewodnościowych wykonanych na papierze przewodzącym.

2. ROZKŁAD POTENCJAŁU KWADRUPOLOWEGO NA SZEREG POTĘGOWY

Prostokątny układ współrzędnych x, y, z jest tak wybrany, że oś z jest wzdłużną osią symetrii kwadrupola. Kwadrupol jest nieskończenie długi. Jego elektrody mają cztery płaszczyzny symetrii: $x = 0$; $y = 0$; $x = y$; $x = -y$. Do elektrod przyłożono odpowiednio potencjały U oraz $-U$, wskutek czego płaszczyzny $x = 0$ oraz $y = 0$ są płaszczyznami symetrii potencjału, zaś płaszczyzny $x = y$ oraz $x = -y$ płaszczyznami antysymetrii. Po-

tencjał na osi z równy jest zeru. W dowolnej płaszczyźnie $z = \text{const}$ (rys. 1) potencjał jest funkcją współrzędnych: $\varphi = \varphi(x, y)$.



Rys. 1. Przekrój elektrod kwadrupola

Funkcję dwu zmiennych można przedstawić w postaci szeregu potęgowego Maclaurina:

$$\varphi(x, y) = a_{00} + (a_{10}x + a_{01}y) + (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2) + (a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3) + \ldots = \sum_{m,n=0}^{\infty}{}' a_{mn}x^m y^n. \tag{1}$$

Z warunku, że oś $y = 0$ jest osią symetrii potencjału mamy

$$a_{mn}x^m y^n = a_{mn}(-x)^m y^n. \tag{2}$$

Warunek (2) jest równoznaczny warunkowi:

$$m \text{ jest parzyste.} \tag{3}$$

Podobnie z warunku, że płaszczyzna $x = 0$ jest płaszczyzną symetrii otrzymuje się:

$$n \text{ jest nieparzyste.} \tag{4}$$

Warunki antysymetrii:

$$\varphi(x, y) = -\varphi(y, x),$$
$$\varphi(x, y) = -\varphi(-y, -x) \tag{5}$$

mogą być ze względu na (3) i (4) zastąpione przez jeden warunek:

$$\varphi(x, y) = -\varphi(x, y). \tag{6}$$

Wprowadzając (1) do (6) otrzymuje się

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n + \sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl} x^l y^k = 0. \tag{7}$$

Równanie (7) musi być spełnione na całej płaszczyźnie x, y. W związku z tym jednomiany o tych samych wykładnikach potęg muszą znikać osobno, tzn.

$$a_{mn} x^m y^n + a_{kl} x^l y^k = 0, \tag{8}$$

jeżeli $k = n$ oraz $l = m$, czyli

$$a_{mn} x^m y^n + a_{nm} x^m y^n = 0. \tag{9}$$

Stąd otrzymuje się końcowy warunek na antysymetrię

$$a_{nm} = -a_{mn}. \tag{10}$$

Rozkład (1) z uwzględnieniem warunków (3) i (4) ograniczony do potęgi 12 ma postać:

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) = {} & a_{00} + (a_{20}x^2 + a_{02}y^2) + (a_{40}x^4 + a_{22}x^2y^2 + a_{04}y^4) + (a_{06}x^6 + \\ & + a_{42}x^4y^2 + a_{24}x^2y^4 + a_{06}y^6) + (a_{80}x^8 + a_{62}x^6y^2 + a_{44}x^4y^4 + a_{26}x^2y^6 + \\ & + a_{08}y^8) + (a_{10\,0}x^{10} + a_{82}x^8y^2 + a_{64}x^6y^4 + a_{46}x^4y^6 + a_{28}x^2y^8 + a_{0\,10}y^{10}) + \\ & + (a_{12\,0}x^{12} + a_{10\,2}x^{10}y^2 + a_{84}x^8y^4 + a_{66}x^6y^6 + a_{48}x^4y^8 + a_{2\,10}x^2y^{10} + \\ & + a_{0\,12}y^{12}) + \ldots\end{aligned} \tag{11}$$

Wprowadzając do (11) warunek (10) oraz uwzględniając, że z (10) wynika $a_{kk} = 0$ otrzymuje się:

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) = {} & a_{20}(x^2 - y^2) + a_{40}(x^4 - y^4) + a_{60}(x^6 - y^6) + a_{42}x^2y^2(x^2 - y^2) + \\ & + a_{80}(x^8 - y^8) + a_{62}x^2y^2(x^4 - y^4) + a_{10\,0}(x^{10} - y^{10}) + a_{82}x^2y^2(x^6 - y^6) + \\ & + a_{64}x^4y^4(x^2 - y^2) + a_{12\,0}(x^{12} - y^{12}) + a_{10\,2}x^2y^2(x^8 - y^8) + a_{84}x^4y^4(x^4 - y^4).\end{aligned} \tag{12}$$

Potencjał $\varphi(x, y)$ czyni w przestrzeni międzyelektrodowej zadość równaniu Laplace'a

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{13}$$

Wprowadzenie funkcji (12) do równania (13) daje

$$\begin{aligned}& 12a_{40}x^2 - 12a_{40}y^2 + (30a_{60} + 2a_{42} + 2a_{64})x^4 - (2a_{42} + 2a_{64} + 30a_{60})y^4 + \\ & + (56a_{80} + 2a_{62})x^6 + 30a_{62}x^4y^2 - 30a_{62}y^4x^2 - (2a_{62} + 56a_{80})y^6 + \\ & + (90a_{10\,0} + 2a_{82})x^8 - (90a_{10\,0} + 2a_{82})y^8 + (56a_{82} + 12a_{84})x^6y^2 + \\ & - (56a_{82} + 12a_{84})x^2y^6 + (132a_{12\,0} + 2a_{10\,2})x^{10} - (132a_{12\,0} + 12a_{10\,2})y^{10} + \\ & + 90a_{10\,2}x^8y^2 - 90a_{10\,2}x^2y^8 = 0.\end{aligned} \tag{14}$$

Tożsamość (14) musi być spełniona na całej płaszczyźnie, co jest równoważne wymaganiu, aby współczynniki przy jednomianach w wyrażeniu (14) znikały. Warunek ten prowadzi do:

$$a_{40} = a_{62} = a_{80} = a_{10\,2} = a_{12\,0} = 0, \tag{15}$$

$$15a_{60}+a_{42}+a_{64}=0,$$
$$45a_{10\,0}+a_{82}=0, \tag{16}$$
$$14a_{82}+3a_{84}=0.$$

Równania (16) można przekształcić do postaci:

$$a_{42}+a_{64}=-15a_{60},$$
$$a_{82}=-45a_{10\,0}, \tag{17}$$
$$a_{84}=-\frac{14}{3}a_{82}=210a_{10\,0}.$$

Podstawiając do (12) związki (15) i (17) otrzymuje się:

$$\begin{aligned}\varphi(x,y)=\;&a_{20}(x^2-y^2)+a_{60}(x^6-y^6)-15a_{60}x^2y^2(x^2-y^2)+\\&+a_{10\,0}(x^{10}-y^{10})+45a_{10\,0}x^2y^2(x^6-y^6)+\\&+210a_{10\,0}x^4y^4(x^2-y^2)+e(14).\end{aligned} \tag{18}$$

Wprowadzając do (18) oznaczenia:

$$a_{20}=a\frac{U}{r^2},\quad a_{60}=b\frac{U}{r^6},\quad a_{10\,0}=c\frac{U}{r^{10}}, \tag{19}$$

gdzie:

$\pm U$ — potencjały elektrod,

r — apertura kwadrupola (por. rys. 1),

otrzymuje się:

$$\begin{aligned}\frac{\varphi}{u}=\;&a\left[\left(\frac{x}{r}\right)^2-\left(\frac{y}{r}\right)^2\right]+b\left[\left(\frac{x}{r}\right)^6-\left(\frac{y}{r}\right)^6\right]-15b\left(\frac{x}{r}\right)^2\left(\frac{y}{r}\right)^2\left[\left(\frac{x}{r}\right)^2-\left(\frac{y}{r}\right)^2\right]+c\left[\left(\frac{x}{r}\right)^{10}-\right.\\&\left.-\left(\frac{y}{r}\right)^{10}\right]-45c\left(\frac{x}{r}\right)^2\left(\frac{y}{r}\right)^2\left[\left(\frac{x}{r}\right)^6-\left(\frac{y}{r}\right)^6\right]+210c\left(\frac{x}{r}\right)^4\left(\frac{y}{r}\right)^4\left[\left(\frac{x}{r}\right)^2-\left(\frac{y}{r}\right)^2\right]+E(14).\end{aligned} \tag{20}$$

Występujące w rozkładzie (20) potencjału kwadrupolowego na szereg potęgowy bezwymiarowe współczynniki a, b, c są współczynnikami kształtu elektrod.

3. WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKÓW a, b, c PRZEZ POMIAR POTENCJAŁÓW W PRZESTRZENI MIĘDZYELEKTRODOWEJ

Najprostszą w idei metodą wyznaczania współczynników a, b, c jest pomiar potencjału w trzech punktach przestrzeni międzyelektrodowej kwadrupola, którego współczynniki kształtu są szukane.

Podstawiając do równania (20) współrzędne x_i, y_i oraz potencjał φ_i punktów $i=1, 2, 3$, otrzymuje się trzy równania, zawierające niewiadome a, b, c oraz człon $E(14)$ zależny od i. Zakładając

$$E(14)=0 \tag{21}$$

można obliczyć a, b, c.

Założenie (21) prowadzić może do znaczącego błędu wyniku. Błąd ten można utrzymać w małych wartościach, jeżeli pomiar potencjału przeprowadzić dla większej liczby punktów położonych na jednej z osi symetrii kwadrupola, np. na osi $y = 0$. Wówczas równanie (20) przyjmuje postać:

$$\left(\frac{\varphi}{U}\right)_{y=0} = a\left(\frac{x}{r}\right)^2 + b\left(\frac{x}{r}\right)^6 + c\left(\frac{x}{r}\right)^{10} + E(14). \tag{22}$$

Wykreślając krzywą doświadczalną: $\left(\frac{\varphi}{U}\right) = f\left[\left(\frac{x}{r}\right)^2\right]$ można wyznaczyć współczynnik a. Następnie wykreślając: $\frac{\varphi}{U} - a\left(\frac{x}{r}\right)^2 = f\left[\left(\frac{x}{r}\right)^6\right]$ można wyznaczyć współczynnik b. Wreszcie z wykresu

$$\frac{\varphi}{U} - a\left(\frac{x}{r}\right)^2 - b\left(\frac{x}{r}\right)^6 = f\left[\left(\frac{x}{r}\right)^{10}\right]$$

można wyznaczyć współczynnik c.

Wartości bezwzględne współczynników $|b|$ oraz $|c|$ są znacznie mniejsze od $|a|$. W związku z tym niedokładność względna wyznaczania współczynnika a jest w przybliżeniu równa niedokładności pomiaru φ. Natomiast niedokładność wyznaczania b oraz c jest wielokrotnie większa. Wyznaczanie współczynników b oraz c niniejszą metodą wymaga więc bardzo małych i trudnych do uzyskania niedokładności pomiaru φ. Trudność tę usuwa metoda przedstawiona w następnym rozdziale.

4. METODA WYZNACZANIA WSPÓŁCZYNNIKÓW a, b, c PRZEZ POMIAR POTENCJAŁÓW W UKŁADZIE ZASTĘPCZYM

W metodzie tej przedmiotem pomiaru jest potencjał ϕ określony związkiem:

$$\phi = \varphi - U\left[\left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{y}{r}\right)^2\right], \tag{23}$$

gdzie: φ jest potencjałem punktu (x, y) w przestrzeni międzyelektrodowej kwadrupola, którego współczynniki kształtu są poszukiwane, r jest aperturą kwadrupola, $\pm U$ oznacza potencjał odpowiednich elektrod (por. rys. 1).

Funkcja ϕ spełnia równanie Laplace'a, ponieważ zarówno jej pierwszy składnik (φ) spełnia to równanie (por. rozdz. 2), jak i drugi:

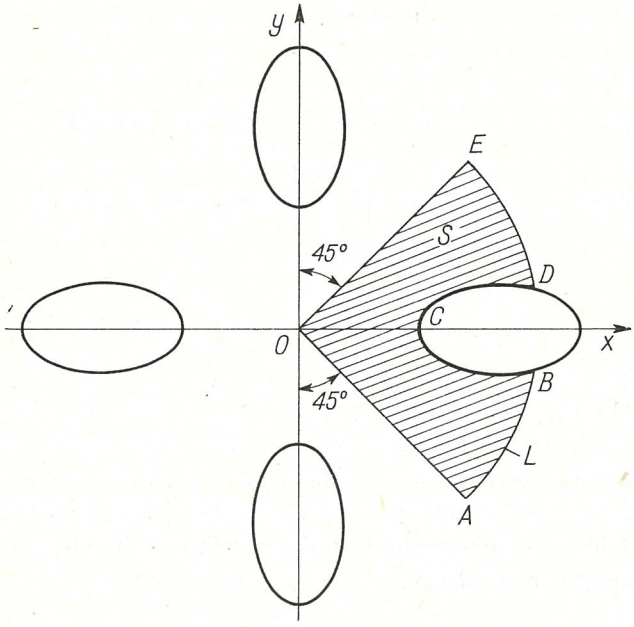
$$W = U\left[\left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{y}{r}\right)^2\right], \tag{24}$$

co łatwo sprawdzić.

Można więc znając warunki brzegowe na ϕ poszukiwać wartości ϕ wewnątrz obszaru jedną z metod pomiaru rozkładu potencjału.

Na rys. 2 wskazano jednospójny, skończony obszar S, otoczony zamkniętą linią brzegową L. Potencjał W na krawędzi L jest wyznaczalny analitycznie z dowolnie małą niedokładnością. Potencjał φ na krawędzi L jest na odcinkach OB oraz OE równy zeru (z zerową

niedokładnością), na łuku BCD równy jest U (z zerową niedokładnością), natomiast na łukach AB oraz DE może być pomierzony z niedokładnością zależną od metody pomiaru. Niedokładność ta ma niewielki wpływ na niedokładność wyznaczenia współczynników a, b, c.



Rys. 2. Obszar jednospójny S i jego kontur L

Skoro znany jest rozkład φ oraz W wzdłuż krawędzi L, znany jest także rozkład ϕ na L. Wymuszając odpowiednie potencjały na krawędzi L można zmierzyć potencjały ϕ wybranych punktów wewnątrz obszaru S.

Z równań (20) i (23) otrzymuje się związek

$$\frac{\phi}{U} = (a-1)\left[\left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{y}{r}\right)^2\right] + b\left[\left(\frac{x}{r}\right)^6 - \left(\frac{y}{r}\right)^6\right] - 15b\left(\frac{x}{r}\right)^2\left(\frac{y}{r}\right)^2\left[\left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{y}{r}\right)^2\right] +$$
$$+ c\left[\left(\frac{x}{r}\right)^{10} - \left(\frac{y}{r}\right)^{10}\right] - 45c\left(\frac{x}{r}\right)^2\left(\frac{y}{r}\right)^2\left[\left(\frac{x}{r}\right)^6 - \left(\frac{y}{r}\right)^6\right] +$$
$$+ 210c\left(\frac{x}{r}\right)^4\left(\frac{y}{r}\right)^4\left[\left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{y}{r}\right)^2\right] + E(14). \tag{25}$$

Dla punktów położonych na osi $y = 0$ równanie (25) przyjmuje postać:

$$\left(\frac{\phi}{U}\right)_{y=0} = (a-1)\left(\frac{x}{r}\right)^2 + b\left(\frac{x}{r}\right)^6 + c\left(\frac{x}{r}\right)^{10} + E(14). \tag{26}$$

Dalsze postępowanie przebiega jak w rozdz. 3. Obecnie jednak niewiadome $a-1, b, c$ są tego samego rzędu wielkości, co usuwa wymaganie bardzo małej niedokładności pomiaru ϕ.

5. METODA WYZNACZANIA WSPÓŁCZYNNIKA γ

Czwarty współczynnik kształtu elektrod zdefiniowano w pracy [1] jako stosunek maksymalnego natężenia pola elektrostatycznego w przestrzeni międzyelektrodowej do natężenia średniego.

$$\gamma \stackrel{df}{\equiv} \frac{E_{max}}{E_{sr}}. \tag{27}$$

Maksymalne natężenie pola E_{max} występuje przy powierzchni elektrody. Aby je zmierzyć wystarcza zmierzyć potencjały φ_l punktów $l = 1, 2 \ldots$ oddalonych o mały odcinek h od powierzchni elektrody (por. rys. 1):

$$E_{max} = \frac{|U - \varphi_l|_{max}}{h} \tag{28}$$

gdzie: U oznacza potencjał elektrody, zaś l ten punkt pomiarowy, dla którego wartość bezwzględna różnicy $U - \varphi_l$ jest największa.

Średnie natężenie pola występujące w (27) jest określone przez definicję:

$$E_{śr} = \frac{U}{r}. \tag{29}$$

6. PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA METODY

Jako przykład zastosowania metod opisanych w rozdz. 4 i 5 wyznaczono współczynniki a, b, c dla kwadrupoli o elektrodach w postaci walców kołowych. Wybrano trzy wartości stosunku promieni walca R do apertury kwadrupola r:

$$\frac{R}{r} = 0{,}5, \quad 1 \text{ oraz } 1{,}5.$$

W terminologii stosowanej w tej pracy, każda z wartości $\frac{R}{r}$ reprezentuje inny kształt elektrod i dla każdej wyznaczono współczynniki a, b, c, γ.

Pomiary potencjałów przeprowadzono na modelach przewodnościowych na papierze przewodzącym. Ze względu na symetrię i antysymetrię potencjału wystarcza odwzorowanie tylko 1/8 płaszczyzny przekroju elektrod.

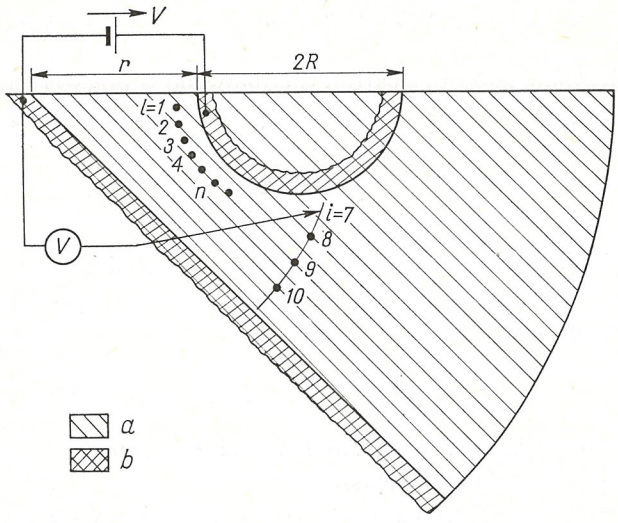
Do wykonania modelu użyto papieru nawęglanego o oporze 50 k$\Omega/\square$. Elektrody wykonano nanosząc na odpowiednie obszary warstwę srebra koloidalnego. Napięcia mierzone były woltomierzem cyfrowym o oporze wejściowym 2 GΩ.

Na rys. 3 wskazano układ do pomiaru potencjałów φ_l, potrzebnych do wyznaczenia współczynnika γ (por. rozdz. 5) oraz do pomiaru potencjałów φ_i ($i = 7 \ldots 10$) potrzebnych do wyznaczenia warunków brzegowych ϕ_i ($i = 7 \ldots 10$) na łuku AB (por. rozdz. 4 i rys. 2).

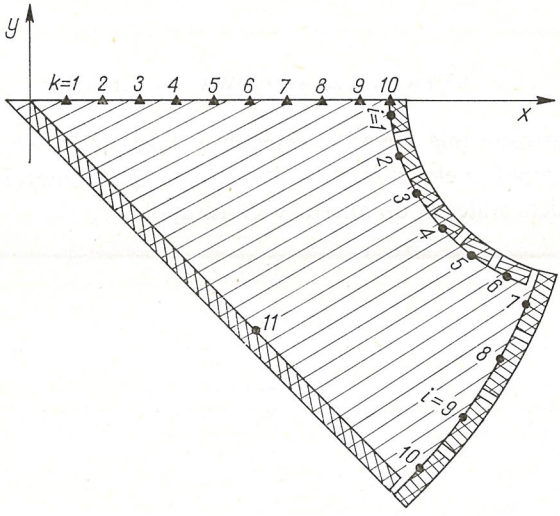
Na rys. 4 wskazano układ do pomiaru potencjałów ϕ_k. Dla przeprowadzenia tego pomiaru należy wymusić na linii brzegowej w punktach $i = 1 \ldots 11$ odpowiednie potencjały:

$$\phi_i = \varphi_i - U\left[\left(\frac{x_i}{r}\right)^2 - \left(\frac{y_i}{r}\right)^2\right], \tag{30}$$

gdzie x_i, y_i oznaczają współrzędne punktu i.



Rys. 3. Układ do pomiaru potencjałów φ_l oraz φ_i
a — papier przewodzący, b — obszary pokryte srebrem koloidalnym



Rys. 4. Układ do pomiaru potencjałów φ_k

Potencjały φ_i punktów $i = 1...6$ leżących na powierzchni elektrody są równe potencjałowi elektrody:

$$\varphi_{i(i=1...6)} = U.$$

Potencjały φ_i punktów $i = 7...10$ zostały zmierzone w układzie wg rys. 3.

Potencjały punktów położonych na linii brzegowej opisanej równaniem $x = -y$ równe są zeru, ze względu na antysymetrię. Drugie człony potencjałów we wzorze (30) zostały obliczone dla odpowiednich współrzędnych x_i, y_i.

Znając φ_i oraz drugie człony potencjału można obliczyć

$$\phi_{i(i=1...11)}.$$

Wymuszając (jednocześnie) na elektrodach $i = 1...11$ odpowiednie potencjały ϕ_i można zmierzyć potencjały ϕ_k punktów $k = 1...10$.

W praktyce pomiary przeprowadzono w dogodniejszy sposób, a mianowicie potencjały na elektrodach i wymuszono kolejno (utrzymując potencjał pozostałych elektrod i równy zeru). Stosując zasadą superpozycji potencjałów otrzymano potencjał ϕ_k jako sumę i składników.

Tablica 1

Wartości współczynnika γ

R/r	0,5	1	1,5
γ	2,6	2,9	5,0

W wyniku pomiarów otrzymano wartości φ_l oraz ϕ_k. Wartości φ_l nie są tu przytoczone, natomiast w tablicy 1 podano pochodne od nich wartości współczynnika γ (por. rozdz. 5). Wartości $\frac{\phi_k}{U}$ podano w tablicy 2.

Tablica 2

Wartości $\frac{\phi_k}{U}$

k \ R/r	0,5	1	1,5
1	$-1{,}10 \cdot 10^{-3}$	$0{,}175 \cdot 10^{-3}$	$0{,}272 \cdot 10^{-3}$
2	$-4{,}45$,,	$0{,}510$,,	$1{,}01$,,
3	$-9{,}20$,,	$0{,}961$,,	$2{,}18$,,
4	$-15{,}1$,,	$1{,}55$,,	$3{,}83$,,
5	$-21{,}5$,,	$2{,}06$,,	$5{,}81$,,
6	$-27{,}9$,,	$2{,}72$,,	$7{,}52$,,
7	$-31{,}8$,,	$3{,}25$,,	$8{,}79$,,
8	$-32{,}0$,,	$2{,}32$,,	$9{,}26$,,
9	$-22{,}2$,,	$1{,}79$,,	$6{,}78$,,
10	0	0	0

W celu oceny niedokładności wyznaczania potencjału ϕ_k przeprowadzono pomiary dla przypadku gdy na konturze granicznym wymuszono potencjały określone przez zadaną funkcję współrzędnych, a mianowicie:

$$\phi = U\left[\left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{y}{r}\right)^2\right]. \tag{31}$$

Wartości pomierzone $\phi_{k,ex}$ oraz obliczone ze wzoru (31) $\phi_{k,th}$ zestawiono w tablicy 3.

Jak wynika z tablicy 3 niedokładność pomiarów potencjału ϕ_k nie przekracza 10%, jeżeli pominąć punkt $k = 1$. Niedokładność ta pochodzi głównie z niejednorodności i anizotropii rezystywności papieru przewodzącego.

Niedokładność wyznaczenia współczynników a, b, c, γ metodami opisanymi w rozdz. 4 i 5 jest podobnej wielkości co niedokładność pomiaru potencjału. Dla optymalizacji

kształtu elektrod znajomość współczynników kształtu z niedokładnością 10% można uznać za wystarczającą i korzystać z taniej metody pomiaru potencjału na papierze przewodzącym.

Tablica 3

Wartości $\phi_{k,\,ex}$ oraz $\phi_{k,\,th}$

k	$\phi_{k,\,th}$	$\phi_{k,\,ex}$	$\frac{\phi_{ex}-\phi_{th}}{\phi_{ex}}$
1	0,010	0,012	0,180
2	0,040	0,044	0,094
3	0,090	0,095	0,055
4	0,160	0,171	0,068
5	0,250	0,271	0,084
6	0,360	0,377	0,048
7	0,490	0,501	0,023
8	0,640	0,647	0,012
9	0,810	0,811	0,001
10	1.000	1.000	0

Podane w tablicy 2 potencjały $\frac{\phi_k}{U}$ spełniają równanie

$$\frac{\phi_k}{U} = (a-1)\left(\frac{x}{r}\right)^2 + b\left(\frac{x}{r}\right)^6 + c\left(\frac{x}{r}\right)^{10} + E(14) + \Delta. \tag{32}$$

Równanie (32) różni się od (25) członem Δ_k pochodzącym z niedokładności pomiaru ϕ_k.

Na rys. 5 przedstawiono 10 punktów pomiarowych z tablicy 2 dla kształtu $\frac{R}{r} = 0{,}5$, w układzie współrzędnych $\left(\frac{x}{r}\right)^2, \frac{\phi}{U}$. Przez punkty te przeprowadzono interpolowaną krzywą. Wykreślono styczną do krzywej, przechodzącą przez początek układu współrzędnych i stycznej przyporządkowano równanie:

$$\frac{\phi}{U} = (a-1)\left(\frac{x}{r}\right)^2 \tag{33}$$

Z przebiegu stycznej wyznaczono:

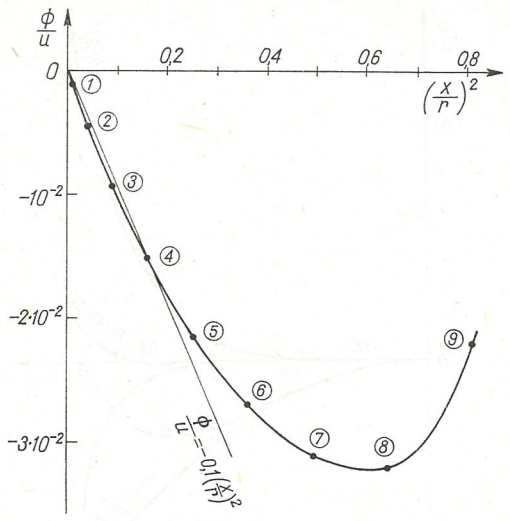
$$a-1 = -0{,}10.$$

Podobnie wyznaczono współczynnik b, wykreślając krzywą

$$\frac{\phi}{U} - (a-1)\left(\frac{x}{r}\right)^2 = f\left[\left(\frac{x}{r}\right)^6\right] \tag{34}$$

i styczną do tej krzywej przechodzącą przez początek układu, której przyporządkowano równanie:

$$\frac{\phi}{U} = b\left(\frac{x}{r}\right)^6. \tag{35}$$



Rys. 5. Funkcja $\frac{\phi}{u} = f\left[\left(\frac{x}{r}\right)^2\right]$ dla $\frac{R}{r} = 0{,}5$

Współczynnik c znaleziono z przebiegu stycznej do krzywej

$$\frac{\phi}{U} - (a-1)\left(\frac{x}{r}\right)^2 - b\left(\frac{x}{r}\right)^6 = f\left[\left(\frac{x}{r}\right)^{10}\right]. \tag{36}$$

Znaleziono: $b = 0{,}14$, $c = -0{,}06$.

Na rys. 6 przedstawiono:

$$\frac{\phi}{U}, \quad (a-1)\left(\frac{x}{r}\right)^2, \; b\left(\frac{x}{r}\right)^6, \; c\left(\frac{x}{r}\right)^{10}, \; E(14)+\Delta_k$$

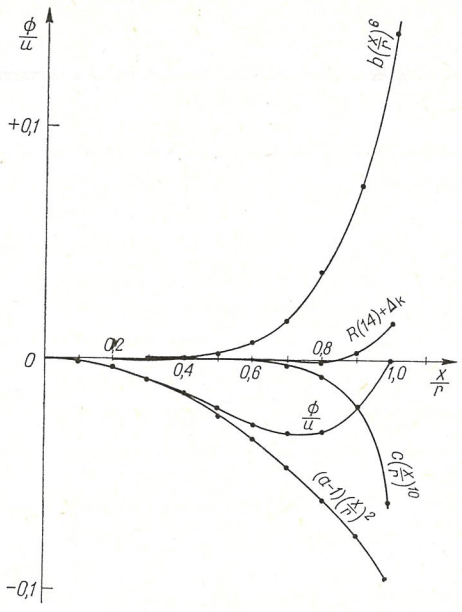
w funkcji $\frac{x}{r}$. Widoczny jest udział kolejnych członów rozkładu potencjału na szereg potęgowy. Składnik $E(14)+\Delta_k$ reprezentuje człony rzędu 14 i wyższe oraz błąd pomiaru ϕ_k.

W podobny sposób wyznaczono współczynniki $a-b$, c dla kształtu $R/r = 1$ oraz 1,5. Otrzymane wyniki zestawiono w tablicy 4, przy czym w tablicy tej powtórzono wartości współczynników γ.

Tablica 4

Współczynniki a, b, c, γ dla $\frac{R}{r} = 0{,}5$, 1 oraz 1,5

R/r	a	b	c	γ
0,5	−0,095	+0,14	−0,061	2,6
1	+0,010	−0,014	+0,0025	2,9
1,5	+0,024	−0,024	−0,00025	5,0



Rys. 6. Potencjał zastępczy $\frac{\phi}{u}$ oraz jego składniki w funkcji $\left(\frac{x}{r}\right)$.

7. UWAGI KOŃCOWE

Pomiar rozkładu potencjałów może być zastąpiony przez obliczenia na maszynie cyfrowej. W tym przypadku metoda wyznaczania potencjałów w układzie zastępczym jest dogodniejsza, ze względu na znaczne obniżenie kosztu obliczeń, w stosunku do metody wyznaczania potencjałów w przestrzeni międzyelektrodowej.

Metodę układu zastępczego (rozdz. 4) można stosować dwukrotnie, dla uzyskania dokładniejszych wartości współczynników a, b, c. Po wyznaczeniu pierwszej wartości współczynnika a_1 wprowadza się drugi układ zastępczy, w którym mierzony ma być rozkład potencjału określonego funkcją:

$$\phi = \varphi - a_1 U\left[\left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{y}{r}\right)^2\right] \tag{37}$$

zamiast rozkładu pierwszego określonego przez (23).

LITERATURA

1. S. Nowicki, *Kwadrupol elektrostatyczny: aberacja geometryczna zależna od kształtu elektrod i maksymalny kąt aperturowy*, Arch. Elektrot., w druku.

S. NOWICKI, J. SEKUTOWICZ

DETERMINING FORM COEFFICIENTS FOR ELECTROSTATIC QUADRUPOLE ELECTRODES

Summary

A distribution series of a quadrupole electrostatic potential is given in the article.

An experimental method for determining coefficients of electrode form is also described. The method does not require a high accuracy of potential distribution measurement.

Coefficients of electrode form are determined for electrodes shaped like a circular cylinder for three values of the relation of cylinder radius to quadrupole aperture.

S. NOWICKI, J. SEKUTOWICZ

DÉSIGNATION DES COEFFICIENTS DE LA FORME DES ÉLECTRODES DU QUADRIPÔLE ÉLECTROSTATIQUE

Résumé

On a présenté le développement du potentiel à symétrie quadripôle en série de puissance. On a donné la méthode de laboratoire pour désigner des coefficients de la forme des électrodes qui n'exige pas une exactitude parfaite de mesure du développement du potentiel. On a désigné les coefficients de forme pour les électrodes en forme des cylindres circulaires pour les trois grandeurs du rapport du rayon du cylindre à l'aperture du quadripôle.

S. NOWICKI, J. SEKUTOWICZ

BESTIMMUNG DER ELEKTRODENGESTALTKOEFFIZIENTEN EINES ELECTROSTATISCHEN QUADRUPOLS

Zusammenfassung

Es wurde die Entwicklung des Quadrupolpotentials in eine Potenzreihe sowie eine experimentelle Methode zur Bestimmung von Elektrodengestaltkoeffizienten dargestellt.

Die Gestaltkoeffizienten der Kreiszylinderelektroden wurden für drei Verhältniswerte des Zylinderradius/Quadrupolapertur bestimmt.

С. НОВИЦКИ, Я. СЕКУТОВИЧ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФОРМЫ ЭЛЕКТРОД ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО КВАДРУПОЛЯ

Резюме

В труде представлено разложение в степенной ряд потенциала с квадрупольной симметрией. Приведен экспериментальный метод определения коэффициентов формы электродов, не требующий большой точности измерения распределения потенциала. Коэффициенты формы электродов были определены для электродов типа цилиндров круглого сечения при трех значениях отношения радиуса цилиндра к апертуре квадруполя.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1975, 21, z. 4, ss. 857—876

621.372.62

Przegląd metod przestrzeni stanów w syntezie pasywnych układów elektrycznych

MARCELI URUSKI (WROCŁAW)

Instytut Telekomunikacji i Akustyki Politechniki Wrocławskiej

Otrzymano 4.7.1974

W artykule przedstawiono przegląd zastosowań metod przestrzeni stanów do syntezy pasywnych układów elektrycznych. Opierając się na danych literaturowych omówiono następujące problemy:

— problem realizacji pasywnych układów odwracalnych i nieodwracalnych, opisanych macierzą hybrydową lub macierzą rozproszenia,
— zagadnienie syntezy pasywnych układów zawierających minimalną liczbę żyratorów i elementów reaktancyjnych,
— problem równoważności (ekwiwalentności) układów elektrycznych.

Ponadto zwrócono uwagę na pewne zagadnienia dotychczas nie rozwiązane.

Oznaczenia

z, s — zmienne zespolone,
$\tilde{\mathbf{Y}}(s)$ — transpozycja macierzy,
$\mathbf{Y}^*(s)$ — macierz sprzężona,
$\mathbf{Y}^{-1}(s)$ — odwrotność macierzy,
$|\mathbf{Y}(s)|$ — wyznacznik,
$\mathbf{Y}_*(s) = \mathbf{Y}(-s)$ —
$\overset{\circ}{+}$ — prosta suma,
$\sum$ — macierz diagonalna o elementach ± 1,
$\mathbf{1}_k$ — macierz diagonalna, zawierająca k jedynek,
$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$
$\mathbf{P} \geqslant 0$ — macierz dodatnio półokreślona,
$\mathbf{P} > 0$ — macierz dodatnio określona.

1. WSTĘP

Głównym zadaniem syntezy układów elektrycznych jest podanie metod umożliwiających znalezienie układu elektrycznego, posiadającego założone własności dynamiczne. Dynamiczne własności układu można scharakteryzować za pomocą macierzy hybrydowej $\mathbf{H}(s)$ lub też za pomocą macierzy rozproszenia $\mathbf{S}(s)$.

W klasycznych metodach syntezy [1, 2] realizacja układu o zadanej macierzy polega na wykonaniu pewnych matematycznych operacji na macierzy w celu sprowadzenia jej do form, które opisują proste struktury układowe. Odpowiednie połączenie tych struktur tworzy układ o żądanej macierzy $\mathbf{H}(s)$ lub $\mathbf{S}(s)$. Najogólniej, taki sposób postępowania w przypadku układów pasywnych prowadzi do układu *RLC* zawierającego idealne transformatory nawet wtedy, gdy wiadomo, że zadana macierz posiada realizację w układzie nie zawierającym transformatorów [7].

Charakterystyczną cechą klasycznych metod syntezy jest to, iż warunkują one ściśle określone własności układu. Na przykład, struktura układu jest wynikiem określonego sposobu postępowania, właściwego dla danej metody syntezy. Dlatego też metody te nie umożliwiają wyboru optymalnego, z punktu widzenia praktycznych zastosowań, układu.

W ostatnim dziesięcioleciu zwrócono uwagę na możliwość wykorzystania powszechnie stosowanego w teorii systemów i sterowania pojęcia przestrzeni stanów do rozwiązywania zagadnień teorii obwodów. Stwierdzono, że najbardziej naturalną i ogólną metodą analizy i syntezy układów elektrycznych jest metoda oparta na pojęciu przestrzeni stanów. W przestrzeni stanów układ elektryczny opisuje się za pomocą tzw. równań stanu (modele stanu). Model stanu układu elektrycznego, w przeciwieństwie do opisu macierzowego, zawiera informacje o własnościach układu. To stwarza możliwość wyboru, przez zmianę bazy w przestrzeni stanów, modelu stanu układu, który posiadałby określone własności, na przykład własność pasywności, aktywności, odwracalności, nieodwracalności czy też żądane własności topologiczne. Tym samym metody syntezy oparte na pojęciu przestrzeni stanów umożliwiają optymalizację układu. Może to być przykładowo optymalizacja układu przydatnego do mikroelektronicznej realizacji [3, 17, 18].

Metody syntezy bazujące na pojęciu przestrzeni stanów pozwalają również na uproszczenie problemu syntezy. Mianowicie, zagadnienie realizacji dynamicznego układu sprowadza się do rozwiązania znacznie prostszego zagadnienia realizacji bezinercyjnego układu opisanego najogólniej stałą macierzą hybrydową $\mathbf{H}(s) = \text{const}$.

W przeciwieństwie do klasycznych metod syntezy, które bazują na analitycznych własnościach macierzy, metody przestrzeni stanów są metodami algebraicznymi. Takie metody syntezy, w przypadku układów pasywnych, stały się realne z chwilą, gdy udało się przetransformować analityczne własności macierzy dodatniej rzeczywistej (rzeczywistej ograniczonej) na algebraiczne własności stałych macierzy tworzących tzw. minimalną realizację macierzy rzeczywistej dodatniej (rzeczywistej ograniczonej).

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie najważniejszych wyników uzyskanych w dziedzinie syntezy układów n-wejściowych, bazującej na pojęciu przestrzeni stanów, jak również zwrócenie uwagi na dotychczas nie rozwiązane zagadnienia. Główną uwagę poświęcono problemom syntezy pasywnych układów. Interesujące rozważania dotyczące syntezy aktywnych układów scalonych są przedstawione w pracach [3, 17].

2. PODSTAWOWE POJĘCIA WYKORZYSTYWANE W METODACH PRZESTRZENI STANÓW

Liniowy, dynamiczny, stacjonarny $(n+m)$-wejściowy układ elektryczny można opisać macierzą transmitancji $\mathbf{W}(s)$ o wymiarach $n \times m$, której elementami są wymierne funkcje zmiennej zespolonej s[4]. Macierz $\mathbf{W}(s)$ wiąże m-wymiarowy wektor wejść $\mathbf{P}(s)$ (wektor

pobudzeń: prąd, napięcie) z n-wymiarowym wektorem wyjść $\mathbf{R}(s)$ (wektor odpowiedzi: prąd, napięcie) według relacji:

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{W}(s)\mathbf{P}(s). \tag{1}$$

W dalszych rozważaniach zakłada się, że $\mathbf{W}(\infty) = \text{const}$[1].

Przy powyższym założeniu dynamiczne własności analizowanego układu można również scharakteryzować za pomocą równań stanu:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{p}, \\ \mathbf{r} &= \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}+\mathbf{D}\mathbf{p}, \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie: $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ — m-wymiarowy wektor pobudzeń,
$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ — n-wymiarowy wektor odpowiedzi,
$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ — k-wymiarowy wektor zmiennych stanu,
$\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}$ — stałe, rzeczywiste macierze o wymiarach odpowiednio: $k\times k$, $k\times m$, $k\times n$, $n\times m$.

Obliczając transformatę Laplace'a równań (2), przy zerowych warunkach początkowych, a następnie eliminując $\mathbf{X}(s)$ oraz porównując otrzymane równanie z zależnością (1), można stwierdzić, że:

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{D}+\tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{1}_k-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}. \tag{3}$$

Zbiór macierzy $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ określa jednoznacznie macierz $\mathbf{W}(s)$. Odwrotne stwierdzenie nie jest prawdziwe. Wykazano [4], że dla dowolnej wymiernej macierzy $\mathbf{W}(s)$ ($W(\infty) =$ $=$ const) istnieje nieskończenie wiele zbiorów macierzy $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$, które spełniają równanie (3) przy $\mathbf{D} = \mathbf{W}(\infty)$. Dowolny zbiór macierzy $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ spełniający zależność (3) nosi nazwę realizacji macierzy $\mathbf{W}(s)$.

Wśród wszystkich realizacji macierzy $\mathbf{W}(s)$ istnieją takie, w których wymiar k macierzy $\mathbf{A}$ jest minimalny. Takie realizacje nazywa się minimalnymi realizacjami macierzy $\mathbf{W}(s)$. Jeśli zbiór $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ definiuje jedną minimalną realizację, to inna minimalna realizacja jest określona zależnością [4]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}, \\ \mathbf{B}_0 &= \mathbf{T}\mathbf{B}, \\ \mathbf{C}_0 &= \tilde{\mathbf{T}}^{-1}\mathbf{C}, \\ \mathbf{D}_0 &= \mathbf{D} = \mathbf{W}(\infty), \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie: $\mathbf{T}$ — dowolna rzeczywista, nieosobliwa macierz o wymiarach $k\times k$.

Sposób znalezienia dowolnej minimalnej realizacji oraz wszystkich realizacji przedstawiono np. w pracach [4, 5, 23] i artykułach w języku polskim [16, 17].

Wymiar kwadratowej macierzy $\mathbf{A}$ występującej w minimalnej realizacji określa stopień macierzy $\mathbf{W}(s)$, który oznacza się $\delta\mathbf{W}(s)$. Okazuje się, że taka definicja stopnia $\mathbf{W}(s)$ pokrywa się z matematyczną definicją stopnia macierzy, podaną przez McMillana [14][2].

---

[1] Założenie $\mathbf{W}(\infty) = \text{const}$ nie zmniejsza ogólności rozważań (patrz rozdział 4).

[2] Wykazano, że stopień macierzy według Mc Millana pokrywa się również ze stopniem macierzy zdefiniowanym następująco:

$$\delta\mathbf{W}(s) = \max_{\mathbf{F}} \text{stopień licznika } |\mathbf{W}(s)+\mathbf{F}|,$$

gdzie $\mathbf{F}$ jest stałą macierzą wybraną tak, aby stopień licznika wyznacznika $|\mathbf{W}(s)+\mathbf{F}|$ był maksymalny.

Minimalne realizacje są interesujące z uwagi na fakt, że $\delta\mathbf{W}(s)$ określa minimalną liczbę reaktancyjnych elementów, konieczną do pasywnej realizacji macierzy $\mathbf{W}(s)$.

3. WŁASNOŚCI MINIMALNYCH REALIZACJI MACIERZY W(s)

W rozdziale sformułowano pewne algebraiczne własności minimalnych realizacji macierzy $\mathbf{W}(s)$. Jak wiadomo, warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby macierz $\mathbf{W}(s)$ była macierzą immitancji (macierzą rozproszenia) pasywnego układu n-wejściowego, jest warunek, aby macierz $\mathbf{W}(s)$ była macierzą rzeczywistą dodatnią (macierzą rzeczywistą ograniczoną). Macierz $\mathbf{W}(s)$ nazywa się macierzą rzeczywistą dodatnią (w skrócie MRD) jeśli [1]:

a) $\mathbf{W}(s)$ jest analityczną macierzą w półpłaszczyźnie Re $s > 0$,

b) $\mathbf{W}^*(s) = \mathbf{W}(s^*)$ w półpłaszczyźnie Re $s > 0$,

c) $\mathbf{W}(s)+\tilde{\mathbf{W}}^*(s) \geqslant 0$ w półpłaszczyźnie Re $s > 0$.

Macierz $\mathbf{W}(s)$ nazywa się macierzą rzeczywistą ograniczoną (MRO) [1], jeśli spełnia warunek a) i b) oraz dodatkowo spełnia warunek $1_n - \tilde{\mathbf{W}}^*(s)\,\mathbf{W}(s) \geqslant 0$ w prawej półpłaszczyźnie.

Widać więc, że podstawowym problemem w syntezie pasywnych układów jest zbadanie własności minimalnej realizacji macierzy rzeczywistej dodatniej oraz rzeczywistej ograniczonej. Zasadnicze znaczenie ma pytanie, jakie warunki konieczne i wystarczające muszą spełniać macierze $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$, stanowiące minimalną realizację macierzy RD lub macierzy RO. Odpowiedź na to pytanie jest zawarta w twierdzeniach 1 i 2.

Twierdzenie 1 [6]. Niech $\mathbf{W}(s)$ oznacza wymierną macierz o wymiarach $n \times n$, przy czym $\mathbf{W}(\infty) = \text{const}$ oraz niech $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ będzie minimalną realizacją $\mathbf{W}(s)$. Załóżmy, że bieguny $\mathbf{W}(s)$ leżą w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s, a bieguny leżące na osi $j\omega$ są jednokrotne. Wtedy warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby $\mathbf{W}(s) \in \text{MRD}$ jest istnienie symetrycznej macierzy $\mathbf{P} > 0$ oraz rzeczywistych macierzy K_0 i L takich, że:

$$\mathbf{PA}+\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{P} = -\mathbf{L}\tilde{\mathbf{L}}, \tag{5a}$$

$$\mathbf{PB} = \mathbf{C}-\mathbf{L}\mathbf{K}_0, \tag{5b}$$

$$\mathbf{D}+\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{K}}_0\mathbf{K}_0. \tag{5c}$$

Ze szkicu dowodu podanego w pracy [6] wynika sposób określenia macierzy $\mathbf{P}, \mathbf{L}, \mathbf{K}_0$ spełniających równanie (5). Sposób ten jest następujący. Jeśli $\mathbf{W}(s) \in \text{MRD}$, to istnieje macierz $\mathbf{K}(s)$ spełniająca warunek [6]

$$\mathbf{W}(s)+\tilde{\mathbf{W}}_*(s) = \tilde{\mathbf{K}}_*(s)\mathbf{K}(s), \tag{6}$$

gdzie macierz $\mathbf{K}(s)$ o wymiarach $r \times n$ (r — normalny rząd macierzy $\mathbf{W}(s)+\tilde{\mathbf{W}}_*(s)$) jednocześnie z prawostronnie odwrotną macierzą $\mathbf{K}^{-1}(s)$ (tzn. $\mathbf{K}(s)\mathbf{K}^{-1}(s) = \mathbf{1}_r$) są analityczne w prawej półpłaszczyźnie.

Wśród wszystkich macierzy $\mathbf{K}(s)$ spełniających zależność (6) i posiadających powyższe własności istnieje przynajmniej jedna macierz $\mathbf{K}(s)$ mająca minimalną realizację złożoną z macierzy $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{L}, \mathbf{K}_0\}$, gdzie: $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ — macierze minimalnej realizacji $\mathbf{W}(s)$, $\mathbf{K}_0 =$

$= \mathbf{K}(\infty)$. Zatem, mając zdefiniowane macierze $\mathbf{L}$ i $\mathbf{K}_0$, z równania (5a) można obliczyć elementy macierzy $\mathbf{P}$.

Określenie macierzy $\mathbf{K}(s)$, spełniającej zależność (6) i posiadającej omówione własności, nie jest prostym zagadnieniem. Szczególną trudność sprawia znalezienie macierzy $\mathbf{K}(s)$, której prawostronna odwrotność jest analityczna w prawej półpłaszczyźnie. Celowe byłoby opracowanie prostszej procedury określania macierzy $\mathbf{K}(s)$ od procedury zawartej w pracy [6].

Trudności związanych z faktoryzacją części parahermitowskiej macierzy $\mathbf{W}(s)$ można uniknąć, stosując algebraiczną metodę obliczania elementów macierzy $\mathbf{P}$ [12, 6]. Symetryczną macierz $\mathbf{P} > 0$ określa się przez rozwiązanie następującej nierówności macierzowej:

$$\mathbf{PA}+\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{P}+(\mathbf{PB}-\mathbf{C})\,(\mathbf{D}+\tilde{\mathbf{D}})^{-1}(\tilde{\mathbf{PB}}-\tilde{\mathbf{C}}) \leqslant 0. \tag{7}$$

W pracy [12] podano również sposób wyznaczenia wszystkich symetrycznych macierzy $\mathbf{P} > 0$, spełniających nierówność (7). Jest to szczególnie ważne przy określaniu ekwiwalentnych realizacji układu (patrz rozdział 7). Nierówność (7) ma sens, jeśli część symetryczna macierzy $\mathbf{D}$ jest nieosobliwa. Gdy $|\mathbf{D}+\tilde{\mathbf{D}}| = 0$, wtedy w nierówności (7) macierz $(\mathbf{D}+\tilde{\mathbf{D}})^{-1}$ należy zastąpić pseudoodwrotnością[3] macierzy $(\mathbf{D}+\tilde{\mathbf{D}})$.

Podobnie jak dla MRD, można sformułować algebraiczne warunki, które muszą spełniać macierze minimalnej realizacji macierzy RO.

Twierdzenie 2 [8]. Niech $\mathbf{W}(s)$ będzie wymierną macierzą o wymiarach $n \times n$, przy czym $\mathbf{W}(\infty) = \text{const}$ oraz zbiór $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ stanowi minimalną realizację macierzy $\mathbf{W}(s)$. Załóżmy, że elementy macierzy $\mathbf{W}(s)$ są analityczne w półpłaszczyźnie $\mathrm{Re}\, s \geqslant 0$. Macierz $\mathbf{W}(s) \in \mathrm{MRO}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje symetryczna macierz $\mathbf{P} > 0$ oraz rzeczywiste macierze $\mathbf{L}$ i $\mathbf{K}_0$ takie, że

$$\mathbf{PA}+\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{P} = -\mathbf{C}\tilde{\mathbf{C}}-\mathbf{L}\tilde{\mathbf{L}}, \tag{8a}$$

$$-\mathbf{PB} = \mathbf{CD}+\mathbf{LK}_0, \tag{8b}$$

$$\mathbf{1}_n-\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{K}}_0\mathbf{K}_0. \tag{8c}$$

Macierze $\mathbf{P}, \mathbf{L}, \mathbf{K}_0$ można określić metodami przedstawionymi dla macierzy RD.

W zagadnieniach syntezy układów odwracalnych ważną rolę odgrywają następujące własności minimalnych realizacji.

Twierdzenie 3 [5]. Niech $\mathbf{W}(s)$ będzie symetryczną, wymierną macierzą o wymiarach $n \times n$, przy czym $\mathbf{W}(\infty) = \text{const}$. Załóżmy, że zbiór $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ stanowi minimalną realizację $\mathbf{W}(s)$. Wtedy istnieje nieosobliwa, symetryczna macierz $\mathbf{T}_1$ taka że:

$$\tilde{\mathbf{M}} = (\mathbf{1}_n \varsigma\, \mathbf{T}_1^{-1})\mathbf{M}(\mathbf{1}_n \varsigma\, \mathbf{T}_1), \tag{9a}$$

[3] Pseudoodwrotność dowolnej osobliwej macierzy $\mathbf{F}$ określamy następująco. Niech ortogonalna macierz $\mathbf{U}$ diagonizuje macierz $\mathbf{F}$, tzn.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_1 & \tilde{\mathbf{U}}_3 \\ \tilde{\mathbf{U}}_2 & \tilde{\mathbf{U}}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 & \mathbf{U}_4 \end{pmatrix},$$

gdzie $|\Lambda| \neq 0$. Wtedy pseudoodwrotność macierzy $\mathbf{F}$ wynosi

$$\mathbf{F}^{-1} = (\tilde{\mathbf{U}}_1 \; \tilde{\mathbf{U}}_2)\Lambda^{-1}(\mathbf{U}_1 \; \mathbf{U}_2).$$

gdzie:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \tilde{\mathbf{C}} \\ -\mathbf{B} & -\mathbf{A} \end{pmatrix}.$$

Twierdzenie 4 [5]. Niech $\mathbf{W}(s)$ będzie wymierną macierzą o wymiarach $n \times n$, przy czym $\mathbf{W}(\infty) = \text{const}$. Istnieje minimalna realizacja $\{\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}', \mathbf{D}'\}$ macierzy $\mathbf{W}(s)$ taka, że:

$$(\mathbf{1}_n \varsigma \Sigma_1)\mathbf{M}' = \tilde{\mathbf{M}}'(\mathbf{1}_n \varsigma \Sigma_1), \tag{9b}$$

gdzie:

$$\mathbf{M}' = \begin{pmatrix} \mathbf{D}' & \tilde{\mathbf{C}}' \\ -\mathbf{B}' & -\mathbf{A}' \end{pmatrix},$$

Σ_1 — diagonalna macierz o elementach ± 1, wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{W}(s) = \tilde{\mathbf{W}}(s)$.

Macierz $\mathbf{M}'$ można określić następująco. Niech $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}. \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ będzie dowolną minimalną realizacją symetrycznej macierzy $\mathbf{W}(s)$. Zgodnie z twierdzeniem 3 istnieje symetryczna, nieosobliwa macierz $\mathbf{T}_1$ spełniająca zależność:

$$\tilde{\mathbf{M}} = (\mathbf{1}_n \varsigma \mathbf{T}_1^{-1})\mathbf{M}(\mathbf{1}_n \varsigma \mathbf{T}_1), \tag{10}$$

gdzie:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \tilde{\mathbf{C}} \\ -\mathbf{B} & -\mathbf{A} \end{pmatrix},$$

Ponieważ $\mathbf{T}_1$ jest symetryczną macierzą, więc jest ona podobna kongruentnie do macierzy diagonalnej Σ_1

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{L}_1 \Sigma_1 \tilde{\mathbf{L}}_1. \tag{11}$$

Można teraz sprawdzić, że macierz $\mathbf{M}'$ o postaci

$$\mathbf{M}' = (\mathbf{1}_n \varsigma \mathbf{L}_1^{-1})\mathbf{M}(\mathbf{1}_n \varsigma \mathbf{L}_1) \tag{12}$$

spełnia równanie (9b).

4. SYNTEZA HYBRYDOWA UKŁADÓW *RCLT*

W rozdziale omówiono metody syntezy pasywnych układów odwracalnych, tj. układów złożonych z elementów R, L, C, T (T — idealne transformatory).

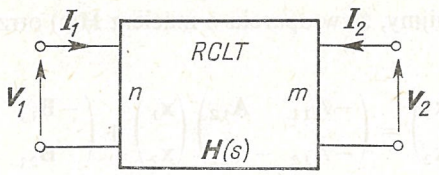
Rozważmy $(n+m)$ — wejściowy układ *RLCT* opisany macierzą hybrydową $\mathbf{H}(s)$ (rys. 1). Przyjmując:

$$\mathbf{R}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix},$$

otrzymuje się:

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{P}(s),$$

$$\begin{matrix} (n) \\ (m) \end{matrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{11}(s) & \mathbf{H}_{12}(s) \\ \mathbf{H}_{21}(s) & \mathbf{H}_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

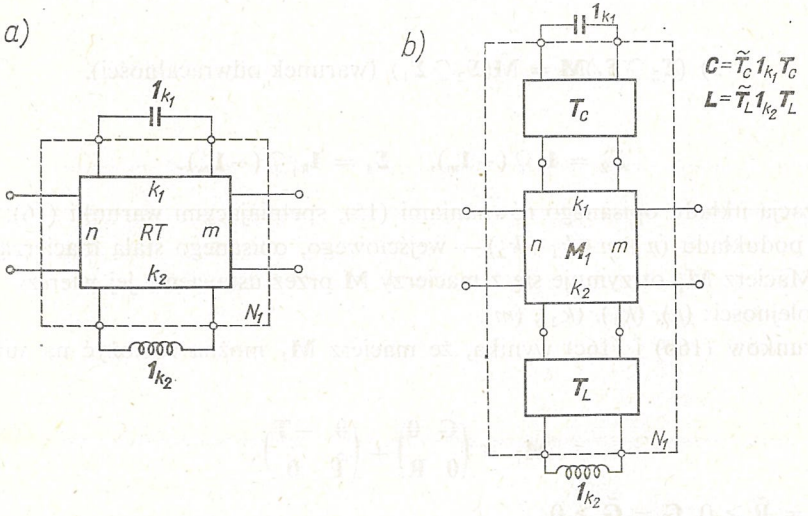


Rys. 1. Ogólna struktura syntezowanego układu

Ponieważ układ zawiera tylko elementy *RLCT*, to podmacierze $\mathbf{H}_{ij}(s)$ posiadają następujące własności [7]:

$$\begin{aligned} &\text{a) } \mathbf{H}_{11}(s),\ \mathbf{H}_{22}(s) \text{ są symetryczne,} \\ &\text{b) } \mathbf{H}_{21}(s) = -\tilde{\mathbf{H}}_{12}(s), \\ &\text{c) } \mathbf{H}(s) \in \mathrm{MRD}. \end{aligned} \tag{14}$$

Niech analizowany układ zawiera k_1 kondensatorów oraz k_2 induktorów o jednostkowych wartościach. Zagadnienie syntezy układu *RLCT* będzie polegać na znalezieniu, na podstawie macierzy $\mathbf{H}(s)$, układu o strukturze pokazanej na rys. 2a.



Rys. 2. a) Struktura odwracalnego układu realizującego macierz $\mathbf{H}(s)$, b) Struktura odwracalnego układu realizującego macierz $\mathbf{H}(s)$ na podstawie macierzy $\mathbf{M}_1$

Niech $\mathbf{H}(\infty) = \text{const}$. Nie zmniejsza to ogólności rozważań. Jeśli $\mathbf{H}(s)$ posiada biegun w punkcie $s = \infty$, wtedy

$$\mathbf{H}(s) = s\mathbf{L}_1 + \mathbf{H}_1(s).$$

gdzie: $\mathbf{H}_1(\infty) = \text{const}$ oraz $\mathbf{L}_1 \geqslant 0$.

Ponieważ realizacja macierzy $\mathbf{L}_1$ jest dobrze znana [1], więc zagadnienie syntezy macierzy $\mathbf{H}(s)$ redukuje się do problemu realizacji macierzy $\mathbf{H}_1(s)$, nie posiadającej bieguna

w punkcie $s = \infty$. Przyjmijmy, że w oparciu o macierz $\mathbf{H}(s)$ otrzymano następujący model stanu [7]:

$$\begin{matrix}(k_1)\\(k_2)\end{matrix}\begin{pmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{L}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathring{\mathbf{x}}_1\\ \mathring{\mathbf{x}}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ -\tilde{\mathbf{A}}_{12} & -\mathbf{A}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\mathbf{B}_{11} & -\mathbf{B}_{12}\\ \mathbf{B}_{21} & -\mathbf{B}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{v}_1\\ \mathbf{i}_2\end{pmatrix},$$
$$\begin{matrix}(n)\\(m)\end{matrix}\begin{pmatrix}\mathbf{i}_1\\ \mathbf{v}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tilde{\mathbf{B}}_{11} & \tilde{\mathbf{B}}_{21}\\ -\tilde{\mathbf{B}}_{12} & \tilde{\mathbf{B}}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12}\\ -\tilde{\mathbf{D}}_{12} & \mathbf{D}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{v}_1\\ \mathbf{i}_2\end{pmatrix}. \tag{15}$$

Powyższy model stanu jest modelem stanu układu *RLCT* (rys. 2a), jeżeli [7]:

$$\begin{aligned}&1)\ \mathbf{C} = \tilde{\mathbf{C}} > 0, \quad \mathbf{L} = \tilde{\mathbf{L}} > 0,\\ &2)\ \text{macierz}\end{aligned} \tag{16a}$$

$$\mathbf{M} = \begin{matrix}(n)\\(m)\\(k_1)\\(k_2)\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc} (n) & (m) & (k_1) & (k_2)\\ \hline \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \tilde{\mathbf{B}}_{11} & \tilde{\mathbf{B}}_{21}\\ -\tilde{\mathbf{D}}_{12} & \mathbf{D}_{22} & -\tilde{\mathbf{B}}_{12} & \tilde{\mathbf{B}}_{22}\\ \hline \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{A}_{11} & -\mathbf{A}_{12}\\ -\mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} & \mathbf{A}_{22}\end{array}\right) \in \mathrm{MRD} \text{ (warunek pasywności)} \tag{16b}$$

oraz

$$3)\ (\Sigma_2 \mathbin{\varsigma} \Sigma_1)\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{M}}(\Sigma_2 \mathbin{\varsigma} \Sigma_1) \text{ (warunek odwracalności)}, \tag{16c}$$

gdzie:

$$\Sigma_2 = \mathbf{1}_n \mathbin{\varsigma} (-\mathbf{1}_m), \quad \Sigma_1 = \mathbf{1}_{k_1} \mathbin{\varsigma} (-\mathbf{1}_{k_2}).$$

Realizacja układu opisanego równaniami (15), spełniającymi warunki (16), polega na realizacji podukładu $(n+m+k_1+k_2)$ — wejściowego, opisanego stałą macierzą hybrydową $\mathbf{M}_1$. Macierz $\mathbf{M}_1$ otrzymuje się z macierzy $\mathbf{M}$ przez ustawienie jej wierszy i kolumn według kolejności: (n), (k_1), (k_2), (m).

Z warunków (16b) i (16c) wynika, że macierz $\mathbf{M}_1$ można rozłożyć na sumę dwóch macierzy

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix}\mathbf{G} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{R}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{0} & -\mathbf{T}\\ \tilde{\mathbf{T}} & \mathbf{0}\end{pmatrix}, \tag{17}$$

gdzie: $\mathbf{R} = \tilde{\mathbf{R}} \geqslant 0$, $\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{G}} \geqslant 0$.

Zatem macierz $\mathbf{M}_1$ posiada realizację w układzie $(n+m+k_1+k_2)$ — wejściowym, zawierającym jedynie rezystory i transformatory [2. 1]. Ostateczna realizacja modelu stanu (15) wymaga podłączenia do k_1 wejść, układu wielowejściowego transformatora o macierzy przekładni $\mathbf{T}_c$, zakończonego jednostkowymi kondensatorami oraz do k_2 wejść, układu wielowejściowego transformatora o macierzy przekładni $\mathbf{T}_L$, zakończonego jednostkowymi induktorami (rys. 2b).

Z przeprowadzonych powyżej rozważań wynika, że zasadniczym problemem syntezy macierzy $\mathbf{H}(s)$ w układzie *RLCT* jest wyznaczenie modelu stanu (15), spełniającego warunki (16). Przedstawiono zgodnie z pracą [5] sposób wyznaczania żądanego modelu stanu.

Etap wstępny, w tej metodzie, wymaga określenia dowolnej minimalnej realizacji $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ macierzy $\mathbf{H}(s)$. Następnie określa się inną minimalną realizację $\{\mathbf{TAT}^{-1}, \mathbf{TB}, \tilde{\mathbf{T}}^{-1}\mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ taką, że macierz

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{T}^{-1} \\ -\mathbf{TB} & -\mathbf{TAT}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \tilde{\mathbf{C}}_2 \\ -\mathbf{B}_2 & -\mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

jest MRD. Można wykazać [15], że jeśli nieosobliwa macierz $\mathbf{T}$ spełnia zależność

$$\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{T} = \mathbf{P}, \tag{19}$$

gdzie: $\mathbf{P}$ jest macierzą spełniającą warunki twierdzenia 1, to macierz $\mathbf{M}_2 \in \mathrm{MRD}$. Elementy macierzy $\mathbf{M}_2$ definiują model stanu

$$\begin{aligned} \mathring{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}_2\mathbf{x} + \mathbf{B}_2\mathbf{p}, \\ \mathbf{r} &= \tilde{\mathbf{C}}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{p}. \end{aligned} \tag{20}$$

Zgodnie z twierdzeniem 3[4], istnieje symetryczna macierz $\mathbf{T}_2$ taka, że (patrz zależność (9a))

$$(\boldsymbol{\Sigma}_2 \varsigma \mathbf{T}_2)\mathbf{M}_2 = \tilde{\mathbf{M}}_2(\boldsymbol{\Sigma}_2 + \mathbf{T}_2), \tag{21}$$

gdzie: $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1^{-1}$.

Ponieważ $\mathbf{T}_2 = \tilde{\mathbf{T}}_2$, więc można macierz $\mathbf{T}_2$ zawsze przedstawić w postaci

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{S}_1(\mathbf{Q}_1\boldsymbol{\Sigma}_1\tilde{\mathbf{Q}}_1) = (\mathbf{Q}_1\boldsymbol{\Sigma}_1\tilde{\mathbf{Q}}_1)\mathbf{S}_1, \tag{22}$$

gdzie: macierz $\mathbf{S}_1$ jest symetryczna i dodatnio określona, macierz $\mathbf{Q}_1 = \tilde{\mathbf{Q}}_1$ i jest ortogonalna oraz $\boldsymbol{\Sigma}_1$ jest macierzą diagonalną, którą można przedstawić w postaci $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \mathbf{1}_{k_1} \varsigma (-\mathbf{1}_{k_2})$, przy czym k_1 i k_2 są jednoznacznie określone. Zmieniając bazę w równaniach stanu (20): $\mathbf{x} = \mathbf{Q}_1\mathbf{y}$ i mnożąc pierwsze z równań (20) przez $\tilde{\mathbf{Q}}_1\boldsymbol{S}_1$ otrzymuje się

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}_1\mathbf{S}_1\mathbf{Q}_1\mathring{\mathbf{y}}_1 &= (\tilde{\mathbf{Q}}_1\mathbf{S}_1\mathbf{A}_2\mathbf{Q}_1)\mathbf{y} + (\tilde{\mathbf{Q}}_1\boldsymbol{S}_1\mathbf{B}_2)\mathbf{p}, \\ \mathbf{r} &= \tilde{\mathbf{C}}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{y} + \mathbf{D}\mathbf{p}, \end{aligned} \tag{23}$$

a następnie wykazuje się, że model stanu (23) spełnia warunki (16).

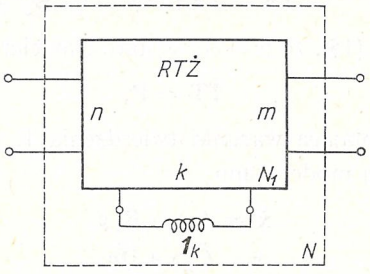
Omówiona metoda konstrukcji modelu stanu układu *RLCT* bazuje na minimalnej realizacji macierzy $\mathbf{H}(s)$, dlatego też umożliwia syntezę układu z minimalną liczbą reaktancyjnych elementów. Metoda ta jest również słuszna dla układów bezstratnych, tzn. układów zawierających tylko elementy *LCT*. Ponadto, dla układów bezstratnych istnieją inne, bezpośrednie metody syntezy, które umożliwiają — bez korzystania z twierdzenia 1 — wyznaczenie realizowalnego modelu stanu [11].

5. SYNTEZA HYBRYDOWA UKŁADÓW NIEODWRACALNYCH

Rozważono zagadnienie syntezy pasywnych układów nieodwracalnych, tj. układów zawierających oprócz elementów *RLCT* również żyratory.

[4] Chcąc zastosować twierdzenie 3 i 4 dla macierzy hybrydowej $\mathbf{H}(s)$ należy w zależnościach (9a), (9b) i (12) jednostkową macierz 1_n zastąpić macierzą $\boldsymbol{\Sigma}_2$, a warunek symetrii macierzy $\mathbf{W}(s)$ warunkiem symetrii macierzy $\boldsymbol{\Sigma}_2\mathbf{H}(s)$.

Niech będzie dany $(n+m)$-wejściowy układ N, opisany macierzą hybrydową $\mathbf{H}(s)$ i złożony z elementów *RLCT*. Zastępując w układzie N kondensatory przez żyratory i induktory oraz normalizując indukcyjności induktorów do jednostkowych wartości, układ N przyjmuje postać pokazaną na rys. 3.



Rys. 3. Struktura nieodwracalnego układu realizującego macierz $\mathbf{H}(s)$

Problem syntezy układu *RLTŻ* opisanego macierzą $\mathbf{H}(s)$ polega na wyznaczeniu układu N o strukturze przedstawionej na rys. 3. Załóżmy, że na podstawie $\mathbf{H}(s)$ otrzymano model stanu

$$\begin{aligned}(k)\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{p},\\ (n+m)\mathbf{r} &= \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}+\mathbf{D}\mathbf{p}.\end{aligned} \tag{24}$$

Model stanu (24) jeśt modelem stanu układu N (rys. 3), jeśli [6] macierz

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \tilde{\mathbf{C}} \\ -\mathbf{B} & -\mathbf{A} \end{pmatrix} \tag{25}$$

jest MRD. Niestety macierze dowolnej minimalnej realizacji $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ macierzy $\mathbf{H}(s)$ nie muszą tworzyć macierzy $\mathbf{M}$ będącej MRD. Zatem zagadnienie syntezy zostanie rozwiązane, jeśli znajdziemy nieosobliwą macierz $\mathbf{T}$ taką, że macierz

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{T}^{-1} \\ -\mathbf{T}\mathbf{B} & -\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} \end{pmatrix}$$

będzie MRD. Sposób wyznaczania macierzy $\mathbf{T}$ omówiono w poprzednim rozdziale. Realizacja układu N (rys. 3) polega na realizacji nieodwracalnego $(n+m+k)$-wejściowego układu N_1, opisanego stałą macierzą hybrydową $\mathbf{M}_1$. Synteza macierzy M_1 w układzie *RTŻ* jest powszechnie znana, np. [1, 2].

Powyższą metodę syntezy układu *RLTŻ* można również zastosować do rozwiązania zagadnienia syntezy układu *RCTŻ*. Punktem wyjściowym przy syntezie takiego układu powinna być macierz hybrydowa określona następująco

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}'_{11} & \mathbf{H}'_{12} \\ \mathbf{H}'_{21} & \mathbf{H}'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{pmatrix}.$$

Sposób wyznaczania realizowalnego modelu stanu układu *RCTŻ* jest identyczny z przedstawionym sposobem wyznaczania modelu stanu układu *RLTŻ*.

Opisana metoda syntezy zapewnia użycie minimalnej liczby elementów reaktancyjnych, gdyż liczba elementów $k = \delta\mathbf{H}(s)$ i równa się wymiarowi macierzy $\mathbf{A}$ występującej w minimalnej realizacji $\mathbf{H}(s)$. Natomiast zagadnienie syntezy układu zawierającego jednocześnie minimalną liczbę elementów reaktancyjnych oraz minimalną liczbę żyratorów nie zostało, w ogólnym przypadku, rozwiązane.

Ostatnio [9] opracowano metodę syntezy układu bezstratnego złożonego z minimalnej liczby elementów reaktancyjnych i żyratorów. Metodę tę omówiono na przykładzie macierzy admitancyjnej. Ograniczenie się do macierzy admitancyjnej nie zmniejsza ogólności tej metody.

Realizacja macierzy reaktancji[5] $\mathbf{Y}(s)$ o wymiarach $n \times n$ w nieodwracalnym bezstratnym układzie polega na wyznaczeniu modelu stanu, dla którego macierz $\mathbf{M}_1$ będzie macierzą skośnie symetryczną tzn.

$$\mathbf{M}_1 + \tilde{\mathbf{M}}_1 = 0. \tag{26}$$

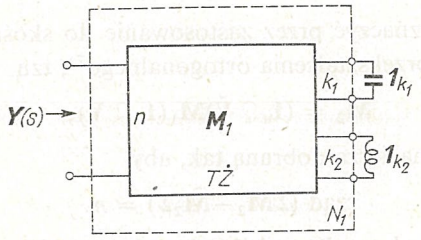
Macierz $\mathbf{M}_1$ spełniającą warunek (26) określa się następująco [6]. Niech $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ będzie dowolną minimalną realizacją macierzy $\mathbf{Y}(s)$ ($\mathbf{Y}(\infty) = \text{const}$). Wtedy istnieje symetryczna macierz $\mathbf{P} > 0$ taka, że [10]

$$\mathbf{PA} + \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{PB} = \mathbf{C}. \tag{27}$$

Symetryczną macierz $\mathbf{P} > 0$ można przedstawić w postaci

$$\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{T} = \mathbf{P},$$

gdzie: $\mathbf{T}$ jest macierzą nieosobliwą.



Rys. 4. Układ realizujący macierz reaktancji $\mathbf{Y}(s)$ na podstawie macierzy hybrydowej $\mathbf{M}_1$

Definiując macierz $\mathbf{M}_1$ według zależności

$$\mathbf{M}_1 = (\mathbf{1}_n \varsigma \mathbf{T})\mathbf{M}(\mathbf{1}_n \varsigma \mathbf{T}^{-1}), \tag{28}$$

gdzie:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \tilde{\mathbf{C}} \\ -\mathbf{B} & -\mathbf{A} \end{pmatrix},$$

można pokazać, że $\mathbf{M}_1$ spełnia warunek (26).

Niech najogólniej macierz $\mathbf{M}_1$ będzie hybrydową macierzą $(n+k)$-wejściowego, bezstratnego, niedynamicznego układu N_1 (rys. 4), w którym $(n+k_1)$-wejść jest pobudzanych napięciowo, a ostatnie $k_2 = (k-k_1)$-wejść jest pobudzanych prądowo.

---

[5] Macierz $\mathbf{Y}(s)$ nazywa się macierzą reaktancji, jeśli [1] a) $\mathbf{Y}(s) \in \text{MRD}$, b) $\tilde{\mathbf{Y}}_*(s) + \mathbf{Y}(s) = \mathbf{0}$.

Realizując $(n+k)$-wejściowy układ, opisany macierzą $\mathbf{M}_1$ i dołączając do wejść oznaczonych numerami od $(n+1)$ do $(n+k_1)$ jednostkowe kondensatory oraz do wejść oznaczonych numerami od $(n+k_1+1)$ do $(n+k)$ jednostkowe induktory otrzymuje się układ o żądanej macierzy admitancyjnej $\mathbf{Y}(s)$ i minimalnej liczbie elementów reaktancyjnych. Chcąc otrzymać układ zawierający również minimalną liczbę żyratorów, należy wyznaczyć podukład N_1 (rys. 4), który będzie zawierał minimalną liczbę żyratorów. Jak wiadomo, minimalna liczba żyratorów g, konieczna do realizacji admitancyjnej macierzy $\mathbf{Y}(s)$ o wymiarach $n \times n$ wynosi [9]

$$g = 1/2 \text{ rząd } [\mathbf{Y}(s) - \tilde{\mathbf{Y}}(s)] = 1/2 \text{ rząd } \mathbf{Y}(\infty) = 1/2n \quad [6]. \tag{29}$$

Ponieważ wszystkie żyratory mają znajdować się w podukładzie N_1 opisanym macierzą hybrydową $\mathbf{M}_2$, stąd [9]

$$g = 1/2 \text{ rząd } (\Sigma \mathbf{M}_2 - \tilde{\mathbf{M}}_2 \Sigma), \tag{30}$$

gdzie:

$$\Sigma = \mathbf{1}_n \hat{+} \mathbf{1}_{k_1} \hat{+} (-\mathbf{1}_{k_2}) \text{ dla } k_1 \text{ i } k_2 \text{ takich, że}$$

$$k_1 + k_2 = k = \delta \mathbf{Y}(s).$$

Porównując zależności (29) i (30) można zauważyć, że

$$\text{rząd } (\Sigma \mathbf{M}_2 - \tilde{\mathbf{M}}_2 \Sigma) = n. \tag{31}$$

Zatem w celu otrzymania układu zawierającego minimalną liczbę żyratorów i elementów reaktancyjnych należy wyznaczyć skośnie symetryczną macierz $\mathbf{M}_2$ spełniającą warunek (31).

Macierz $\mathbf{M}_2$ można wyznaczyć przez zastosowanie do skośnie symetrycznej macierzy $\mathbf{M}_1$ (patrz równanie (28)) przekształcenia ortogonalnego [7], tzn.

$$\mathbf{M}_2 = (\mathbf{1}_n \hat{+} \tilde{\mathbf{V}}) \mathbf{M}_1 (\mathbf{1}_n \hat{+} \mathbf{V}), \tag{32}$$

gdzie: $\mathbf{V}$ jest ortogonalną macierzą dobraną tak, aby

$$\text{rząd } (\Sigma \mathbf{M}_2 - \tilde{\mathbf{M}}_2 \Sigma) = n.$$

Dowodzi się [9], że dla $k_1 = k_2 = k/2$ taka ortogonalna macierz $\mathbf{V}$ zawsze istnieje Macierz $\mathbf{V}$ należy dobrać tak, aby macierze $\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{F}\mathbf{V}$ i $\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{G}\mathbf{V}$ miały następujące postacie:

$$\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{F}\mathbf{V} = \begin{matrix} \\ \left(\frac{k}{2}\right) \end{matrix} \overset{\left(\frac{k}{2}\right)}{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{F}_{12} \\ -\tilde{\mathbf{F}}_{12} & \mathbf{F}_{22} \end{pmatrix}},$$

$$\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{G}\mathbf{V} = \overset{\left(\frac{k}{2}\right)}{\begin{pmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ -\tilde{\mathbf{G}}_{12} & \mathbf{0} \end{pmatrix}} \begin{matrix} \\ \left(\frac{k}{2}\right) \end{matrix},$$

gdzie: $\mathbf{F} = \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\tilde{\mathbf{B}} - \mathbf{A}$, $\mathbf{G} = \mathbf{A}$.

[6] Przedostatnia równość jest słuszna, gdy $|\mathbf{Y}(\infty)| \neq 0$.

[7] Należy zauważyć, że własność skośnej symetryczności jest niezmiennikiem przekształcenia ortogonalnego.

Ostatecznie, synteza układu polega na zrealizowaniu macierzy $\mathbf{M}_2$ w bezstratnym układzie $\left(n+\frac{k}{2}+\frac{k}{2}\right)$-wejściowym zawierającym $1/2n$ żyratorów, oraz na dołączeniu do wejść $(n+1)+\left(n+\frac{k}{2}\right)$ jednostkowych kondensatorów, a do ostatnich $\frac{k}{2}$-wejść jednostkowych induktorów.

W szczególnym przypadku, gdy macierz $\mathbf{M}_1$ jest macierzą admitancji, macierz $\mathbf{V}$ określa się tak, aby rząd $(\mathbf{M}_2-\tilde{\mathbf{M}}_2) = n(\Sigma = \mathbf{1}_k)$. Wtedy synteza macierzy $\mathbf{Y}(s)$ polega na zrealizowaniu macierzy $\mathbf{M}_2$ w bezstratnym układzie $(n+k)$-wejściowym zawierającym $1/2n$ żyratorów, oraz na dołączeniu do wejść $(n+1)\div(n+k)$ jednostkowych kondensatorów.

W opisanych sposobach syntezy układów nieodwracalnych używa się między innymi elementów indukcyjnych i transformatorów. Powszechnie wiadomo, że do realizacji nieodwracalnego układu wystarcza zbiór elementów *RCŻ*. Rozważone w tym rozdziale układy można zawsze przekształcić do układów zawierających tylko elementy *RCŻ*. Na przykład, w przypadku układu *RCTŻ* realizując (metodą podaną np. w [18]) bezinercyjny układ opisany stałą macierzą hybrydową jako układ złożony z elementów *RŻ* otrzymuje się realizację nieodwracalnego układu zawierającego tylko elementy *RCŻ*.

6. SYNTEZA MACIERZY ROZPROSZENIA METODAMI PRZESTRZENI STANÓW

Metodę przestrzeni stanów do syntezy macierzy rozproszenia po raz pierwszy zastosowali Youla i Tissi [5]. Autorzy ci podali stosunkowo prostą metodę syntezy układu bezstratnego, tzw. układu opisanego paraunitarną macierzą rozproszenia[8].

Natomiast w ogólnym przypadku, gdy macierz rozproszenia jest MRO, tzn. macierzą opisującą układ stratny, synteza polega na realizacji pewnej macierzy paraunitarnej otrzymanej z MRD w oparciu o klasyczną teorię Oono i Yasuury [5]. Proces uzyskania macierzy paraunitarnej zgodnie z [5] jest zagadnieniem trudnym. Dlatego też wydaje się, że najprostszą metodą syntezy macierzy rozproszenia, w pełni wykorzystującą pojęcie przestrzeni stanów, jest metoda przedstawiona w pracy [8]. Metoda ta umożliwia przeprowadzenie syntezy tzw. macierzy „dyskretnie" ograniczonej. „Dyskretnie" ograniczoną macierz $\mathbf{W}(z)$ otrzymuje się z RO macierzy rozproszenia $\mathbf{S}(s)$, korzystając z zależności

$$\mathbf{S}(s)\Big|_{s=\frac{z+1}{z-1}} = \mathbf{W}(z). \tag{33}$$

Przyjmijmy, że na podstawie macierzy $\mathbf{W}(z)$ otrzymano następujący model stanu

$$\begin{aligned} \mathring{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{p}, \\ \mathbf{r} &= \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}+\mathbf{D}\mathbf{p}. \end{aligned} \tag{34}$$

[8] Macierz $\mathbf{S}(s)$ nazywa się paraunitarną, jeśli

$$\tilde{\mathbf{S}}_*(s)\mathbf{S}(s) = \mathbf{1}_n.$$

Model stanu (34) jest modelem stanu pasywnego odwracalnego układu, jeśli macierz $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \tilde{\mathbf{C}} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \tag{35}$$

spełnia warunki:

$$\mathbf{1}_{n+k} - \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{M} \geqslant 0 \quad \text{(warunek pasywności)}, \tag{36}$$

$$(\mathbf{1}_n \varsigma \boldsymbol{\Sigma})\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{1}_n \varsigma \boldsymbol{\Sigma}) \quad \text{(warunek odwracalności)}, \tag{37}$$

gdzie: $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{1}_{k_1} \varsigma (-\mathbf{1}_{k_2})$, dla pewnych dodatnich k_1 i k_2 takich, że $k_1 + k_2 = k$.

Model stanu (34) jest modelem stanu pasywnego nieodwracalnego układu, jeśli macierz $\mathbf{M}$ spełnia tylko warunek (36). Proces realizacji modelu stanu (34), spełniającego warunki (36) i (37), polega na wyznaczeniu niedynamicznego, odwracalnego $(n+k_1+k_2)$-wejściowego układu opisanego macierzą rozproszenia

$$\mathbf{S}_a = (\mathbf{1}_n \varsigma \boldsymbol{\Sigma})\mathbf{M} \tag{38}$$

oraz na dołączeniu do wejść $(n+1) \div (n+k_1)$ jednostkowych induktorów, a do wejść $(n+k_1+1) \div (n+k)$ jednostkowych kondensatorów.

Natomiast, w celu realizacji modelu stanu (34) spełniającego warunek (36), należy wyznaczyć niedynamiczny, nieodwracalny $(n+k)$-wejściowy układ, opisany macierzą rozproszenia

$$\mathbf{S}_a = \mathbf{M} \tag{39}$$

oraz dołączyć do wejść o numerach od $(n+1)$ do $(n+k)$ jednostkowe induktory.

Przy określeniu macierzy $\mathbf{M}$ spełniającej wymagania (36) i (37) wykorzystuje się twierdzenie 2 w wersji dla „dyskretnie" ograniczonej macierzy $\mathbf{W}(z)$. Z transformacji (33) wynika, że jeśli $\mathbf{S}(s) \in \mathrm{MRO}$, to $\mathbf{W}(z)$ spełnia warunki:

a) elementy $\mathbf{W}(z)$ są analityczne w obszarze $|z| \geqslant 1$,

b) $1_n - \tilde{\mathbf{W}}^*(z)\mathbf{W}(z) \geqslant 0$ w obszarze $|z| > 1$.

Jeśli $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ jest minimalną realizacją $\mathbf{W}(z)$ i wszystkie osobliwości macierzy $\mathbf{W}(z)$ leżą w obszarze $|z| < 1$, to $\mathbf{W}(z)$ jest macierzą „dyskretnie" ograniczoną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje macierz $\mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{Q}} > 0$ oraz macierze $\mathbf{L}$ i $\mathbf{K}_0$ takie, że

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{Q}\mathbf{A} - \mathbf{Q} = -\mathbf{C}\tilde{\mathbf{C}} - \mathbf{L}\tilde{\mathbf{L}}, \tag{40a}$$

$$-\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{Q}\mathbf{B} = \mathbf{C}\mathbf{D} + \mathbf{L}\mathbf{K}_0, \tag{40b}$$

$$\mathbf{1}_n - \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{D} = \tilde{\mathbf{K}}_0\mathbf{K}_0 + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{Q}\mathbf{B}. \tag{40c}$$

Macierz $\mathbf{Q}$ można znaleźć stosując metody opisane w komentarzu do twierdzenia 1.

W celu realizacji układu nieodwracalnego należy wyznaczyć macierz $\mathbf{M}$ spełniającą warunek (36).

6.1. Określenie macierzy $\mathbf{M}$ spełniającej warunek (36)

Niech zbiór $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ stanowi dowolną minimalną realizację macierzy $\mathbf{W}(z)$. Po wyznaczeniu symetrycznej macierzy $\mathbf{Q} > 0$ spełniającej zależności (40), dowodzi się, że macierz $\mathbf{M}_1$ zdefiniowana następująco

$$\mathbf{M}_1 = (\mathbf{1}_n \varsigma \mathbf{T})\mathbf{M}(\mathbf{1}_n \varsigma \mathbf{T}^{-1}), \tag{41}$$

gdzie:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \tilde{\mathbf{C}} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{T} = \mathbf{Q}$$

spełnia warunek (36).

Natomiast dla realizacji odwracalnego układu należy wyznaczyć macierz $\mathbf{M}$ spełniającą warunki (36) i (37).

6.2. Określenie macierzy M spełniającej warunki (36) i (37)

Niech macierz $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1$ (wzór 41) spełnia warunek (36). Ponieważ $\mathbf{W}(z)$ jest symetryczną macierzą, więc twierdzenie 3 gwarantuje istnienie symetrycznej, nieosobliwej macierzy $\mathbf{T}_1$ takiej, że:

$$\tilde{\mathbf{M}}_1 = (\mathbf{1}_n \varsigma \mathbf{T}_1^{-1})\mathbf{M}_1(\mathbf{1}_n \varsigma \mathbf{T}_1).$$

Symetryczna macierz $\mathbf{T}_1$, zgodnie z zależnością (22) może być przedstawiona:

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{V}\Sigma\tilde{\mathbf{V}}) = (\mathbf{V}\Sigma\tilde{\mathbf{V}})\mathbf{F},$$

gdzie:

$$\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}} > 0, \quad \mathbf{V}^{-1} = \tilde{\mathbf{V}}, \quad \Sigma = \mathbf{1}_{k_1} \varsigma (-\mathbf{1}_{k_2}),$$

tzn. $\mathbf{F}$ jest macierzą dodatnio określoną, a $\mathbf{V}$ macierzą ortogonalną, przy czym k_1 i k_2 są jednoznacznie określone.

Dowodzi się, że macierz $\mathbf{M}_2$ zdefiniowana wzorem:

$$\mathbf{M}_2 = (\mathbf{1}_n \varsigma \tilde{\mathbf{V}}\mathbf{F}^{1/2})\mathbf{M}_1(\mathbf{1}_n \varsigma \mathbf{F}^{-1/2}\mathbf{V}) \tag{42}$$

spełnia warunki (36) i (37).

Synteza macierzy rozproszenia wyżej opisaną metodą umożliwia wyznaczenie układu zawierającego minimalną liczbę elementów reaktancyjnych. Oczywiście, liczba elementów reaktancyjnych jest równa wymiarowi macierzy $\mathbf{A}$, występującej w minimalnej realizacji macierzy rozproszenia. W przypadku syntezy macierzy rozproszenia w nieodwracalnym układzie istnieje możliwość zrealizowania układu, zawierającego również minimalną liczbę rezystorów. W tym celu należy wyznaczyć $\mathbf{Q}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{K}_0$ (równania 40) tak, aby macierz $\mathbf{L}$ zawierała minimalną liczbę wierszy [13].

7. ZAGADNIENIE EKWIWALENTNOŚCI PASYWNYCH UKŁADÓW

Problem ekwiwalentności (równoważności) pasywnych układów rozważono przy założeniu, iż zadana jest macierz „dyskretnie" ograniczona $\mathbf{W}(z)$. Dwa układy, opisane macierzami $\mathbf{W}(z)$ i $\mathbf{W}'(z)$ nazywa się równoważnymi, jeśli $\mathbf{W}(z) = \mathbf{W}'(z)$. Bazując na pojęciach przestrzeni stanów, zagadnienie ekwiwalentności pasywnych nieodwracalnych układów można przedstawić następująco.

Niech będzie $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ dowolną, minimalną realizacją macierzy $\mathbf{W}(z)$, spełniającą warunek pasywności

$$\mathbf{1}_{n+k} - \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{M} \geqslant 0, \tag{43}$$

gdzie:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \tilde{\mathbf{C}} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix}.$$

Dowolna, inna, pasywna (tzn. spełniająca warunek (43)) minimalna realizacja jest określona zależnością:

$$\mathbf{M}_1 = (\mathbf{1}_n \circ \mathbf{T})\mathbf{M}(\mathbf{1}_n \circ \mathbf{T}^{-1}),$$

gdzie: $\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{T} = \mathbf{Q}$, a macierz $\mathbf{Q}$ spełnia równania (40).

Należy wyznaczyć wszystkie pasywne, minimalne realizacje macierzy $\mathbf{W}(z)$. W świetle rozważań zawartych w poprzednim rozdziale nietrudno zauważyć, iż problem wyznaczenia wszystkich pasywnych, minimalnych realizacji polega na znalezieniu wszystkich symetrycznych, dodatnio określonych macierzy $\mathbf{Q}$, spełniających zależności (40). Powyższy problem rozważono w pracy [12]. Pokazano, że wszystkie macierze $\mathbf{Q}$ są rozwiązaniem nierówności macierzowej:

$$\mathbf{Q}\mathbf{A}_1 + \tilde{\mathbf{A}}_1\mathbf{Q} + (\mathbf{Q}\mathbf{B}_1 + \mathbf{C}_1\mathbf{D}_1)(\mathbf{1}_n - \tilde{\mathbf{D}}_1\mathbf{D}_1)^{-1}(\tilde{\mathbf{B}}_1\mathbf{Q} + \tilde{\mathbf{D}}_1\tilde{\mathbf{C}}_1) + \mathbf{C}_1\tilde{\mathbf{C}}_1 \leqslant 0, \tag{44}$$

gdzie[9)]

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= (\mathbf{A} - \mathbf{1}_k)^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{1}_k) \\ \mathbf{B}_1 &= \sqrt{2}(\mathbf{A} - \mathbf{1}_k)^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}_1 &= -\sqrt{2}(\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{1}_k)^{-1}\mathbf{C} \\ \mathbf{D}_1 &= \mathbf{D} - \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{A} - \mathbf{1}_k)^{-1}\mathbf{B} \end{aligned}$$

Ponadto omówiono sposób, w jaki, na podstawie znajomości jednego rozwiązania nierówności (44), można znaleźć wszystkie rozwiązania tej nierówności.

Dla pasywnych układów odwracalnych problem ekwiwalentności formułuje się następująco [5].

Niech $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ będzie dowolną minimalną realizacją macierzy $\mathbf{W}(z)$ spełniającą warunki:

$$\mathbf{1}_{n+k} - \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{M} \geqslant 0 \text{ (warunek pasywności)}, \tag{45}$$

oraz

$$(\mathbf{1}_n \circ \Sigma)\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{1}_n \circ \Sigma) \text{ (warunek odwracalności)}, \tag{46}$$

gdzie:

$$\Sigma = \mathbf{1}_{k_1} \circ (-\mathbf{1}_{k_2}) \text{ dla nieujemnych } k_1 \text{ i } k_2 \text{ takich, że } k_1 + k_2 = k = \delta\mathbf{W}(z).$$

Dowolna, inna, odwracalna, minimalna realizacja (niekoniecznie pasywna) jest określona zależnością

$$\mathbf{M}_1 = (\mathbf{1}_n \circ \mathbf{T})\mathbf{M}(\mathbf{1}_n \circ \mathbf{T}^{-1}), \tag{47}$$

[9)] Macierze $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1, \mathbf{D}_1\}$ stanowią minimalną realizację macierzy $\mathbf{S}(s)$, natomiast $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$ są minimalną realizacją macierzy $\mathbf{W}(z)$.

gdzie T spełnia równanie

$$\mathbf{T}\Sigma\tilde{\mathbf{T}} = \Sigma. \tag{48}$$

Zatem zagadnienie określenia wszystkich pasywnych, odwracalnych, minimalnych realizacji macierzy $\mathbf{W}(z)$ będzie polegać na wyznaczeniu wszystkich macierzy T spełniających równość (48) oraz takich, że macierz $\mathbf{M}_1$ spełnia warunek pasywności

$$\mathbf{1}_{n+k} - \tilde{\mathbf{M}}_1 \mathbf{M}_1 \geqslant 0.$$

Powyższy problem ekwiwalentności w ogólnym przypadku, tj. układów *RLCT*, dotychczas nie został rozwiązany.

Istniejące rozwiązania dotyczą jedynie układów bezstratnych oraz układów zawierających elementy *RLT* lub *RCT*. Dla układów bezstratnych (macierz M jest ortogonalna) wszystkie pasywne, odwracalne, minimalne realizacje $\mathbf{M}_1$ (wzór (47)) można wyznaczyć, wybierając dowolną ortogonalną macierz T [5]. Również dla układów *RLT* lub *RCT* przez wybór dowolnej, ortogonalnej macierzy T znajduje się wszystkie pasywne, odwracalne, minimalne realizacje [5].

8. ZAKOŃCZENIE

W niniejszej pracy przedstawiono problem syntezy układów elektrycznych metodami przestrzeni stanów, przyjmując jako punkt wyjściowy zadaną macierz hybrydową lub macierz rozproszenia. Przy tak postawionym problemie syntezy, zagadnienie realizacji n-wejściowego układu $RLCT(\dot{Z})$ polega na wyznaczeniu — na podstawie opisu macierzowego — odpowiedniego modelu stanu, który realizuje się za pomocą wielowejściowego układu $RT(\dot{Z})$, obciążonego induktorami i kondensatorami. Model stanu układu $RT(\dot{Z})$ określa się, korzystając z twierdzenia o dodatniej rzeczywistości (twierdzenie 1). Celowe byłoby opracowanie procedury pozwalającej na wyznaczenie realizowanego modelu stanu bezpośrednio (tzn. nie korzystając z twierdzenia 1) z opisu macierzowego. Próbę rozwiązania powyższego zagadnienia, w odniesieniu do układów bezstratnych, podjęto w pracy [11].

Innym interesującym problemem jest zagadnienie ekwiwalentności układów. Zagadnienie to w ogólnym przypadku stratnych układów *RLCT* nie zostało dotychczas rozwiązane. Również na rozwiązanie oczekuje problem realizacji układu, zawierającego minimalną liczbę żyratorów oraz elementów reaktancyjnych.

Z rozważań przedstawionych w poprzednich rozdziałach wynika, że zagadnienie realizacji dynamicznego układu *RLCT* zawsze sprowadza się do zagadnienia realizacji bezinercyjnego układu *RT*, opisanego stałą macierzą hybrydową M. Ponieważ ta macierz hybrydowa jest określona przez model stanu układu, to wybierając odpowiedni model stanu, można by było zrealizować bezinercyjny układ nie zawierający idealnych transformatorów, a tym samym zrealizować dynamiczny, beztransformatorowy układ. W tym celu należałoby znać warunki, jakie musi spełniać stała macierz hybrydowa, aby posiadała realizację w rezystancyjnym układzie. Niestety dotychczas takie warunki nie są znane, jak również nie znane są metody realizacji stałej macierzy hybrydowej.

Ostatnio [22] opracowano procedurę syntezy rezystancyjnego układu jedynie dla pewnej szczególnej klasy macierzy hybrydowych.

Na zakończenie warto zwrócić uwagę, że przy rozwiązywaniu problemu syntezy układów elektrycznych metodami przestrzeni stanów, można przyjąć jako punkt wyjściowy zadane równania stanu. Omówienie tego zagadnienia przekroczyłoby ramy niniejszego opracowania. Bliższe szczegóły można znaleźć w pracach [19, 20, 21] (patrz również pozycje literatury cytowane w [21]).

LITERATURA

1. R. W. Newcomb, *Linear Multiport Synthesis*, Mc Graw-Hill, New York 1966.
2. D. Hazony, *Elements of Network Synthesis*, Reinhold, New York 1963.
3. R. W. Newcomb, *Active Integrated Circuit Synthesis*, Printice-Hall, 1968, s. 67—106.
4. R. E. Kalman, *Mathematical Description of Linear Dynamical Systems*, J. SIAM Control, Ser, A.. nr 2, 1963, s. 152—192.
5. D. C. Youla, P. Tissi, *N-port Synthesis Via Reactance Extraction — Part 1*, IEEE Internat, Conv. Rec., cz. 1, 1966, s. 183—208.
6. B. D. O. Anderson, R. W. Newcomb, *Impedance Synthesis Via State-space Technique*, Proc. IEE, nr 7, 1968, s. 928—936.
7. R. Yarlagadda, *Network Synthesis — a State Space Approach*, IEEE, Trans., CT-19, nr 3, 1972, s. 227—232.
8. S. Vongpanitlerd, B. D. O. Anderson, *Scattering Matrix Synthesis Via Reactances Extraction*, IEE Trans., CT-17, nr 4, 1970, s. 511—517.
9. B. D. O. Anderson, *Minimal Gyrator Lossless Synthesis*, IEEE Trans., CT-20, nr 1, 1973, s. 11—15.
10. B. D. O. Anderson, *A System Theory Criterion for Positive Real Matrices*, SIAM J. Appl. Math., May, 1967, s. 171—182.
11. R. Yarlagadda, *Reciprocal Lossless Synthesis of Hybryd Parametres of LCT Networks by State-space Approach*, IEEE Trans., CT-19, nr 1, 1972, s. 69—70.
12. B. D. O. Anderson, *The Inverse Problem of Stationary Covariance Generation*, J. Stat. Phys., vol. 1, nr 1, 1969, s. 133—147.
13. S. Vongpanitlerd, B. D. O. Anderson, *Passive Reciprocal State-space Using a Minimal Number of Resistors.*, Rep. Tech., Dep. Elec. Eng., Univ. of Newcastle, Newcastle, Australia, November, 1968.
14. R. E. Kalman, *Irreducible Realizations and the Degree of a Matrix of Rational Functions*, J. Soc, Ind. Appl. Math., June, 1965, s. 520—544.
15. B. D. O. Anderson, R. W. Brockett, *A Multiport State-space Darlington Synthesis*, IEEE Trans., CT-14, nr 3, 1967, s. 336—337.
16. T. Kaczorek, *Związek macierzy transmitancji operatorowych z opisem w przestrzeni stanów*, Arch. Elektrot., z. 4, 1969, s. 823—835.
17. M. Białko, W. Sieńko, *Synteza liniowych układów scalonych metodami przestrzeni stanów*, cz. 1, Rozpr. Elektrot., z. 2, 1971, s. 235—252.
18. W. Sieńko, M. Białko, *Synteza liniowych układów scalonych metodami przestrzeni stanów*, cz. 2, Rozpr. Elektrot., z. 2, 1971, s. 235—268.
19. R. Yarlagadda, Y. Tokad, *On the Realization of RLC Networks from the State-model Characterizations*, 9th Midwest Symp. on Circuit Theory, Oklahoma State Univ. Stillwater, Oklahoma. May 9—10, 1966.
20. R. Yarlagadda, Y. Tokad, *Synthesis of LC Networks a State-model Approach*, Proc. IEE, nr 6, 1966, s. 975—981.
21. Y. Tokad, *State-variables Technique for the Analysis and Synthesis of Electrical Networks*, NATO Advanced Study Institute on Network and Signal Theory, Bournemouth-England, September, 1972.

22. S. H. Chung, P. H. Roe, *An Algorithm for the Realization of General Hybryd Matrices for Resistive Multiports*. IEEE Trans,. CT-19, nr 5, 1972, s. 436—443.
23. B. D. O Anderson, R. W. Newcomb, R. E. Kalman, D. C. Youla, *Equivalence of Linear Time-invariant Dynamical Systems*, J. Franklin Inst., nr 5, 1966, s. 371—378.

M. URUSKI

A REVIEW OF STATE-SPACE TECHNIQUE FOR THE SYNTHESIS OF PASSIVE ELECTRICAL NETWORKS

Summary

In this paper a review of methods concerning the state-space approach to the synthesis of passive n-port networks published in the literature so far is given. The problems considered are:
— realization of reciprocal and nonreciprocal multiport networks described by hybrid or scattering matrices,
— synthesis problem of passive networks containing minimum number of gyrators and reactive elements,
— equivalent realizations problem.

Moreover, some open questions of the state-space synthesis theory are discussed.

M. URUSKI

REVUE DES APPLICATIONS DES MÉTHODES DE L'ESPACE D'ÉTATS À LA SYNTHÈSE DES RÉSEAUX ÉLÉCTRIQUES PASSIFS

Résumé

Dans l'article on présente une revue des applications des méthodes de l'espace d'états à la synthèse des réseaux éléctriques passifs. Sur la base de la littérature téchnique moderne on discute les problèmes suivants:
— la réalisation des réseaux passifs definis par une matrice hybride ou une matrice de dissipation.
— la synthèse des réseaux passifs contenants une quantité minime de gyrateurs et d'éléments réactifs.
— l'equivalence des réseaux éléctriques.

En outre on énumère quelques problèmes, qui jusqu'au présent ne sont pas resous.

M. URUSKI

ÜBERSICHT ÜBER DIE ANWENDUNGEN VON METHODEN DES ZUSTANDSRAUMES IN DER SYNTHESE ELEKTRISCHER NETZWERKE

Zusammenfassung

Im folgenden Beitrag wurde eine Übersicht über die Methoden des Zustandsraumes in der Synthese elektrischer Netzwerke gegeben. Ausgehend von den in der Fachliteratur angeführten Daten wurden folgende Probleme besprochen:
— Realisierungsproblem passiver umkehrbarer und unumkehrbarer Netzwerke, die durch eine Hybrid- oder Streumatrix beschrieben werden,
— Syntheseproblem passiver Netzwerke, die eine minimale Anzahl von Gyratoren und Reaktanzelementen enthalten,
— Äquivalenzproblem elektrischer Netzwerke.

Außerdem wurde die Aufmerksamkeit auf einige bisher ungelösten Probleme gelenkt.

УРУСКИ

ОБЗОР МЕТОДОВ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЯ В СИНТЕЗЕ ПАССИВНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Р е з ю м е

В статье представлен обзор синтеза пассивных электрических цепей методами пространства состояния. На основании важнейших работ, изданных в последние годы, рассмотрены следующие вопросы:

— реализации пассивных обратимых и необратимых цепей описанных гибридной матрицей или матрицей рассеяния,
— синтеза пассивных цепей содержащих минимальное число гираторов и реактивных элементов,
— эквивалентных цепей.

Кроме того в работе обращено внимание на неразрешенные до сих пор вопросы синтеза.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1975, 21, z. 4, ss. 877—888

621.396.934
621.391

Analiza przydatności kodu Hamminga w otwartym asynchronicznym systemie wielodostępowym

JÓZEF WOŹNIAK (GDAŃSK)
Instytut Telekomunikacji Politechniki Gdańskiej

Otrzymano 3.6.1974

Praca dotyczy analizy jakości przesyłania informacji w otwartych asynchronicznych systemach wielodostępowych. W szczególności zbadano efekty wynikające z zastosowania kodu korekcyjnego Hamminga.

Przedstawiono — w postaci analitycznej oraz w formie wykresów — zależności pomiędzy podstawowymi parametrymi charakteryzującymi pracę systemu, takimi jak: intensywność zgłoszeń, elementowa stopa błędu, długość ciągu kodowego oraz współczynnik jakości.

1. WSTĘP I ZAŁOŻENIA PODSTAWOWE

Obserwowany w ostatnich latach szybki wzrost intensywności przepływu informacji cyfrowych, wywołany głównie rozwojem techniki komputerowej, spowodował pojawienie się nowych wymagań stawianych systemom przesyłania informacji.

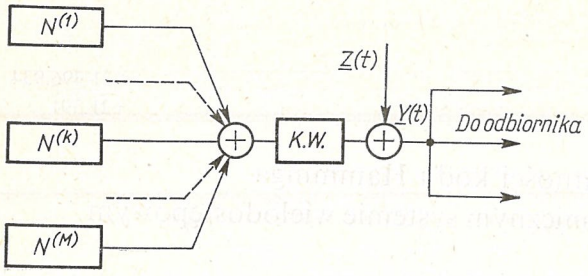
W wielu przypadkach właściwe wykorzystanie potencjału obliczeniowego maszyn cyfrowych możliwe jest jedynie wówczas, gdy istnieją systemy przesyłania informacji zapewniające wysoką jakość i szybkość transmisji oraz dużą niezawodność.

Względy ekonomiczne oraz technologiczne powodują coraz szersze wprowadzanie kanałów o coraz większych przepustowościach. Powstaje zatem zagadnienie właściwego ich wykorzystania. Można to osiągnąć przez zastosowanie techniki zwielokrotnienia. Wspólny kanał wielodostępowy przydzielany jest wówczas większej liczbie użytkowników według określonej reguły dostępu [1], [2].

Poprawę jakości transmisji w systemach wielodostępowych można osiągnąć między innymi dzięki wprowadzaniu sprzężenia zwrotnego lub kodowania. Zastosowanie sprzężenia zwrotnego pozwala na znaczną poprawę jakości kosztem skomplikowania zarówno wyposażenia jak i pracy systemu.

W systemach otwartych (tzn. bez sprzężenia zwrotnego) właściwą drogą poprawy jakości jest kodowanie. W przypadku systemu ze sterowaniem centralnym [1] wprowadzona przez kodowanie rozwlekłość ogranicza jedynie sprawność wykorzystania kanału.

W przypadku systemu asynchronicznego, tzn. bez sterowania centralnego (patrz rys. 1), problem jest bardziej złożony. Wydłużenie ciągu kodowego zapewnia tutaj z jednej strony możliwość korekcji pewnej liczby błędów elementarnych, z drugiej jednak zwiększa prawdopodobieństwo interferencji sygnałów wysyłanych przez różne nadajniki.



Rys. 1. Schemat blokowy asynchronicznego systemu wielodostępowego
$N^{(k)}$ — k-ty nadajnik, KW — kanał wspólny, $z(t)$ — szumy zewnętrzne, $y(t)$ — sygnał na wejściu odbiornika

Poniższy artykuł poświęcony został ocenie jakości otwartego asynchronicznego systemu wielodostępowego, stosującego kod Hamminga.

Rozważono zagadnienie jakości transmisji informacji cyfrowych w odniesieniu do dwóch systemów:

a — systemu bez zabezpieczeń kodowych,

b — systemu stosującego kod Hamminga.

Jako kryterium jakości przyjęto średnie prawdopodobieństwo poprawnej decyzji ostatecznej o przysyłanych wiadomościach. Celem porównania systemów a i b wprowadzono współczynnik jakości J będący stosunkiem prawdopodobieństw poprawnych decyzji dla systemów: z kodem — b oraz bez kodu — a.

Ponadto założono, że:

Z.1. Liczba źródeł informacji (użytkowników) M jest ustalona,

Z.2. praca poszczególnych źródeł jest niezależna i charakteryzuje się małym wypełnieniem czasowym,

Z.3. intensywność pracy λ, tzn. średnia liczba wiadomości wysyłanych w jednostce czasu, jest stała dla wszystkich źródeł,

Z.4. informacje mają strukturę pakietów będących ciągami binarnymi o stałej długości T,

Z.5. momenty początkowe wysyłanych pakietów opisane są rozkładem Poissone'a.

Założenie Z.5 możliwe jest do przyjęcia w systemie, w którym pracuje co najmniej 10 źródeł [3].

Błędy elementarne powstające w czasie transmisji pakietu mogą być spowodowane dwoma czynnikami: szumem zewnętrznym oraz interferencjami. Wpływ tych czynników na jakość pracy systemów a i b będzie przedmiotem dalszych rozważań.

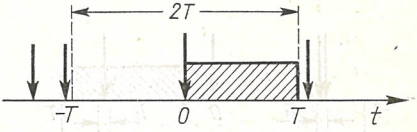
2. PRAWDOPODOBIEŃSTWA INTERFERENCJI PAKIETÓW

Z punktu widzenia wybranego źródła informacji pozostałe M-1 źródła muszą być traktowane jako potencjalne źródla zakłóceń interferencyjnych. Intensywność pracy tych źródeł r zgodnie z założeniami Z.1 i Z.3 wynosi

$$r = (M-1) \cdot \lambda. \tag{1}$$

Prawdopodobieństwo braku interferencji wybranego pakietu z jakimkolwiek innym można wyznaczyć korzystając z założeń Z.2 i Z.5. Jest to bowiem prawdopodobieństwo sytuacji, w której wybrany pakiet o długości T nie nałoży się z jakimkolwiek innym.

Sytuacja taka wystąpi wówczas, gdy moment rozpoczęcia transmisji dowolnego spośród $M-1$ pozostałych źródeł nie wypadnie w czasie krótszym niż T zarówno przed jak i po momencie rozpoczęcia transmisji z wybranego źródła. Ilustruje to rys. 2.



Rys. 2. Ilustracja braku interferencji wybranego pakietu

Wobec powyższego prawdopodobieństwo P_1' braku intereferencji jest równe prawdopodobieństwu, że w przedziale o długości $2T$ nie rozpocznie się wysyłanie informacji przez żadne z pozostałych $M-1$ źródeł

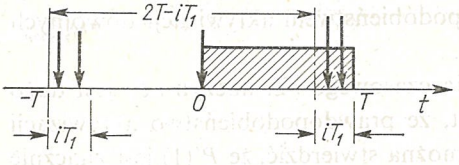
$$P_1' = e^{-2rT}. \tag{2}$$

Prawdopodobieństwo P_2' interferencji wybranego pakietu jest zatem równe:

$$P_2' = 1-P_1' = 1-e^{-2rT}. \tag{3}$$

Prawdopodobieństwo P_2' zależy silnie od czasu trwania pakietu T. Każde wydłużenie czasu transmisji (tj. zwiększenie długości ciągu kodowego) powoduje wykładniczy wzrost P_2'.

Niech T_1 oznacza czas trwania sygnału elementarnego a N liczbę sygnałów elementarnych; wówczas czas trwania całego pakietu T wynosi $T = N \cdot T_1$. Korzystając z tych oznaczeń wyznaczmy prawdopodobieństwo $P_I(i \cdot T_1)$ interferencji wybranego pakietu w czasie t nie większym niż iT_1, gdzie $i = 0, 1, 2, \ldots, N$ (patrz rys. 3).



Rys. 3. Ilustracja interferencji wybranego pakietu w czasie nie większym niż iT_1

Aby czas nałożenia się wybranego pakietu z innymi pakietami nie przekroczył wartości iT_1, aktywizacje $M-1$ źródeł mogą występować jedynie w przedziałach czasu $(-T, -T+iT_1)$, $(T-iT_1, T)$ zaznaczonych na rys. 3. Warunek ten jest spełniony, gdy w czasie $t = 2T-iT_1$ nie nastąpi aktywizacja żadnego źródła zakłócającego. Poszukiwane prawdopodobieństwo $P_I(iT_1)$ ma zatem postać:

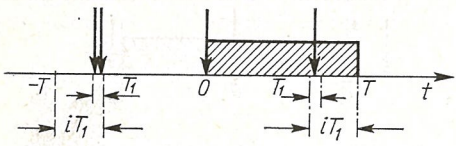
$$P_I(iT_1) = e^{-r(2T-iT_1)}. \tag{4}$$

Korzystając z powyższej zależności prawdopodobieństwo $P(i)$ interferencji wybranego pakietu w czasie $(i-1)T_1 < t \leqslant iT_1$ można przedstawić jako:

$$P(i) = P_I(iT_1) - P_I[(i-1)T_1] = e^{-r(2T-iT_1)} - e^{-r[2T-(i-1)T_1]} \tag{5a}$$

Przykładową ilustrację graficzną interferencji wybranego pakietu w czasie $t \in ((i-1)T_1, iT_1)$ przedstawiono na rys. 4.

Prawdopodobieństwo $P(i)$ jest prawdopodobieństwem sytuacji, w której aktywizacje $M-1$ źródeł mogą występować jedynie w przedziałach czasu o długości T_1. Dla ustalonej liczby i odpowiadającej w zasadzie liczbie interferencyjnych sygnałów elementarnych prawdopodobieństwo $P(i)$ jest malejącą funkcją długości pakietu.



Rys. 4. Ilustracja interferencji wybranego pakietu w czasie $(i-1)T_1 < t \leqslant iT_1$

W dalszych rozważaniach interesować nas będzie szczególnie prawdopodobieństwo interferencji dokładnie jednego sygnału elementarnego. W tym celu dokonujemy dyskusji prawdopodobieństwa $P(i)$. Otrzymamy dla $i = 1$ wzór (5a) ma postać:

$$P(1) = e^{-r(2T-T_1)} - e^{-2rT}. \tag{5b}$$

$P(1)$ jest prawdopodobieństwem sytuacji, w której aktywizacje dowolnych spośród $M-1$ źródeł mogą mieć miejsce w przedziałach czasu $(-T, -T+T_1)$, $(T-T_1, T)$ lub na części obu tych przedziałów.

Oznaczmy przez $P'(1)$ prawdopodobieństwo aktywizacji $M-1$ źródeł zakłócających wyłącznie w jednym z wymienionych przedziałów oraz przez $P''(1)$ prawdopodobieństwo aktywizacji dowolnych spośród $M-1$ źródeł zakłócających zarówno w jednym jak i drugim przedziale. W obu przypadkach sumaryczny czas interferencji jest mniejszy lub równy T_1. Prawdopodobieństwo $P'(1)$ jest proporcjonalne do wielkości $1-e^{-rT_1}$ będącej prawdopodobieństwem aktywizacji dowolnych spośród $M-1$ źródeł w czasie T_1, natomiast prawdopodobieństwo $P''(1)$ proporcjonalne jest do iloczynu $(1-e^{-\alpha rT_1}) \cdot (1-e^{-(1-\alpha)rT_1})$, gdzie $0 < \alpha < 1$, natomiast $1-e^{-\alpha rT_1}$ jest prawdopodobieństwem aktywizacji dowolnych spośród $M-1$ źródeł zakłócających w czasie $\alpha \cdot T_1$.

Dla małych wartości współczynnika wypełnienia czasowego rT, iloczyn rT_1 jest dużo mniejszy od jedności. Uwzględniając ponadto fakt, że prawdopodobieństwo aktywizacji jest tym mniejsze, im krótszy jest przedział czasu, można stwierdzić, że $P'(1)$ jest znacznie większe od prawdopodobieństwa $P''(1)$. A zatem prawdopodobieństwo interferencji dokładnie jednego sygnału elementarnego jest z dużą dokładnością równe prawdopodobieństwu $P(1)$ interferencji w czasie nie większym niż czas trwania sygnału elementarnego (wzór 5b).

3. PORÓWNANIE JAKOŚCI SYSTEMÓW: BEZ KODOWANIA (a) ORAZ Z KODOWANIEM (b)

W rozdziale 2 zajmowaliśmy się opisem prawdopodobieństw związanych z interferencjami pakietów przesyłanych przez kanał wspólny. Obecnie, korzystając z wyprowadzonych wzorów, przejdziemy do porównania jakości systemów z kodowaniem i bez kodowania. Rozważmy dwa przypadki różniące się założeniami dotyczącymi jakości kanału wspólnego; przypadek 1 dotyczący kanału bezszumowego (charakteryzującego się zerową elementową stopą błędu $P_b = 0$) oraz przypadek 2 dotyczący kanału z szumem ($P_b \neq 0$).

3.1. Przypadek kanału bez szumu

W poniższych rozważaniach obowiązywać będą obok założeń Z.1 ÷ Z.5 dwa dodatkowe założenia:

Z.6 — w kanale wspólnym brak szumów zewnętrznych $P_b = 0$,

Z.7 — każda interferencja powoduje, że w pakiecie interferującym wszystkie sygnały elementarne, które nałożyły się z innymi pakietami, są odtworzone błędnie (nie musi to pociągać za sobą błędnej decyzji ostatecznej).

Założenie Z.7 jest identyczne z założeniami czynionymi w pracach [2] i [4]. Należy zwrócić uwagę, że jest ono założeniem najbardziej pesymistycznym.

Przy podanych założeniach prawdopodobieństwo P_1 podjęcia poprawnej decyzji ostatecznej o przesyłanym pakiecie określone jest dla systemu bez kodowania (a) wzorem (2).

Dla określonej liczby pozycji informacyjnych N_x wzór ten przyjmuje postać:

$$P_1 = e^{-2rT_x}, \tag{6}$$

gdzie $T_x = N_x \cdot T_1$.

W przypadku zastosowania kodu Hamminga istnieje możliwość korekcji pojedynczego błędu spowodowanego interferencją. Przy ustalonej długości N_x długość ciągu kodowego wynosi:

$$N = N_x + N_k, \tag{7}$$

gdzie N_k — liczba pozycji kontrolnych w ciągu kodowym. Znajduje się ją jako najmniejszą liczbę spełniającą nierówność:

$$2^{N_k} \geqslant N+1. \tag{8}$$

W związku z tym prawdopodobieństwo $P_1^{(H)}$ poprawnej decyzji przy zastosowaniu kodu Hamminga określone jest wzorem:

$$P_1^{(H)} \cong e^{-rT_1[2(N_x+N_k)-1]}. \tag{9}$$

Jest to postać otrzymana ze wzoru (4) dla $i = 1$. Współczynnik jakości J zdefiniowany w rozdziale 1 ma więc postać:

$$J = \frac{P_1^{(H)}}{P_1} \cong e^{-(2N_k-1)rT_1}. \tag{10}$$

Interesuje nas odpowiedź na pytanie, czy przy dodatkowych założeniach Z.6 i Z.7 można uzyskać poprawę jakości transmisji przez wprowadzenie kodowania. W tym celu należy sprawdzić, dla jakich N_k współczynnik jest nie mniejszy od 1. Są to wartości N_k spełniające nierówność:

$$e^{-(2N_k-1)rT_1} \geqslant 1. \tag{11}$$

Wynika stąd, że liczba pozycji kontrolnych ograniczona jest nierównością:

$$N_k \leqslant \frac{1}{2}. \tag{12}$$

Z własności kodu Hamminga wiadomo jednak, że minimalna wartość N_k wynosi 2 (dla $N_x = 1$), a zatem nierówność (12) nie może być nigdy spełniona. Przy podanych założeniach system a — bez kodowania jest zawsze lepszy od systemu z kodowaniem — b.

Zakłócenia interferencyjne powodują bowiem wykładnicze zmniejszenie się prawdopodobieństwa poprawnej decyzji ze wzrostem N_k (patrz np. wzór (9)). Jakość systemu b jest więc tym gorsza, im dłuższy jest ciąg kontrolny.

Przy powyższych założeniach optymalnym systemem jest zatem system bez żadnych zabezpieczeń kodowych.

3.2. Przypadek kanału z szumem

W rozpatrywanym teraz przypadku utrzymujemy w mocy założenia Z.1 ÷ Z.5 oraz Z.7 (rozdz. 1 i 3.1'), natomiast w miejsce założenia Z.6 wprowadzamy założenie Z.8:
Z.8 — w kanale wspólnym występują szumy zewnętrzne — $P_b \neq 0$.

Przy uczynionych założeniach prawdopodobieństwo podjęcia poprawnej decyzji ostatecznej dla systemu bez kodowania (system a) ma następującą postać:

$$P_1 = e^{-2rN_xT_1}(1-P_b)^{N_x} + P_p. \tag{13}$$

Pierwszy składnik wzoru (13) jest prawdopodobieństwem braku błędów zarówno szumowych jak i interferencyjnych w odebranym pakiecie, natomiast drugi — P_p — jest prawdopodobieństwem podjęcia poprawnej decyzji ostatecznej w przypadku wystąpienia w odebranym pakiecie błędów interferencyjnych oraz szumowych, wzajemnie się znoszących.

Prawdopodobieństwo P_p wyraża się wzorem:

$$P_p \cong \sum_{i=1}^{N_x} P(i) \cdot P_b^i (1-P_b)^{N_x - i} \cdot \alpha^0(i). \tag{14}$$

Przy warunku, że liczba błędów zarówno szumowych jak i interferencyjnych wynosi i, $\alpha^0(i)$ oznacza prawdopodobieństwo warunkowe jednoczesnego wystąpienia błędów interferencyjnych i szumowych na tych samych pozycjach w odebranym pakiecie. $P(i)$ (patrz wzór 5) jest prawdopodobieństwem interferencji wybranego pakietu w czasie t $t \in ((i-1)T_1, iT_1)$.

Prawdopodobieństwo podjęcia poprawnej decyzji w systemie stosującym kod Hamminga wyraża się wzorem:

$$P_1 \cong e^{-[2(N_x+N_k)-1]rT_1} \cdot (1-P_b)^N + e^{-2rT} \binom{N}{1} P_b (1-P_b)^{N-1} + P_p^{(H)}. \tag{15}$$

We wzorze tym pierwszy składnik jest prawdopodobieństwem interferencji pakietu w czasie nie większym niż czas trwania sygnału elementarnego T_1, przy jednoczesnym braku błędów szumowych. Składnik drugi jest prawdopodobieństwem powstania pojedynczego błędu wywołanego szumem zewnętrznym przy braku błędów interferencyjnych. Składnik trzeci natomiast — $P_p^{(H)}$ — jest prawdopodobieństwem podjęcia poprawnej decyzji ostatecznej w przypadku wystąpienia na określonych pozycjach w odebranym pakiecie błędów interferencyjnych i szumowych. Składnik ten jest odpowiednikiem prawdopodobieństwa P_p występującego we wzorze (13).

Prawdopodobieństwo $P_p^{(H)}$ wyraża się wzorem:

$$P_p^{(H)} \cong \sum_{l=-1}^{1} \sum_{\substack{i=1-l \\ i\geqslant 1}}^{N-l\leqslant N} P(i+l) \cdot P_b^i (1-P_b)^{N-i} \cdot \alpha^l(i), \tag{16}$$

gdzie $\alpha^l(i)$ — prawdopodobieństwo warunkowe jednoczesnego występowania błędów interferencyjnych i szumowych na określonych pozycjach przy warunku, że liczba błędów szumowych wynosi i, a różnica pomiędzy liczbą błędów interferencyjnych i szumowych jest równa l.

Analiza wzorów (13) oraz (15) w przedstawionej poprzednio postaci jest dość złożona. Dokonując jednak prostych oszacowań składników występujących w wymienionych wzorach przy uwzględnieniu własności systemów asynchronicznych (w szczególności chodzi tu o mały współczynnik wypełnienia czasowego), można stwierdzić, że prawdopodobieństwa P_p oraz $P_p^{(H)}$ są małe w porównaniu z pozostałymi składnikami sum we wzorach (13) i (15). Przy takich uproszczeniach współczynnik jakości J zdefiniowany wcześniej można sprowadzić do następującej postaci:

$$J \cong e^{-(2N_k-1)rT_1}(1-P_b)^{N_k} + N \cdot e^{-2N_k rT_1} \cdot P_b(1-P_b)^{N_k-1}. \tag{17}$$

Badając zachowanie się współczynnika jakości J w zależności od prawdopodobieństwa błędów elementarnych P_b można stwierdzić, że istnieje ostre maksimum dla

$$P_b = P_{bo} = \frac{N - e^{rT_1} \cdot N_k}{N_k(N - e^{rT_1})}; \tag{18a}$$

z uwagi na to, że $rT_1 \ll 1$, wartość prawdopodobieństwa błędu binarnego P_{bo} ekstremalizującą współczynnik J można wyrazić za pomocą wzoru:

$$P_{bo} \cong \frac{N - N_k}{N_k(N-1)}. \tag{18b}$$

Widać stąd, że dla dużych N_x, P_{bo} jest rzędu $1/N_k$. Maksimum J osiągane jest więc dla kanałów o bardzo niskiej jakości, a zatem mało przydatnych dla transmisji cyfrowych. Badając zachowanie się współczynnika J (wzór (17)) w zależności od zmian iloczynu intensywności r i czasu trwania sygnału elementarnego T_1 można stwierdzić nasycenie się współczynnika J dla $rT_1 \to 0$.

Dzieje się tak dlatego, gdyż przy ustalonych wartościach N_x oraz P_b osiągana jest wówczas wartość maksymalna

$$\lim_{rT_1 \to 0} J = (1-P_b)^{N_k} + \binom{N}{1} P_b(1-P_b)^{N_k-1}. \tag{19}$$

Zajmijmy się z kolei odpowiedzią na pytanie, dla jakich wartości N_k, przy ustalonych wartościach P_b oraz rT_1, współczynnik J osiąga wartość nie mniejszą od 1. Po prostych przekształceniach otrzymujemy następującą postać na N_k:

$$N_k \leqslant \frac{\ln[e^{rT_1}(1-P_b) + NP_b] - \ln(1-P_b)}{2rT_1 - \ln(1-P_b)}. \tag{20}$$

Liczba pozycji kontrolnych N_k, przy której stosowanie kodu Hamminga zapewnia poprawę jakości transmisji, musi spełniać powyższą nierówność.

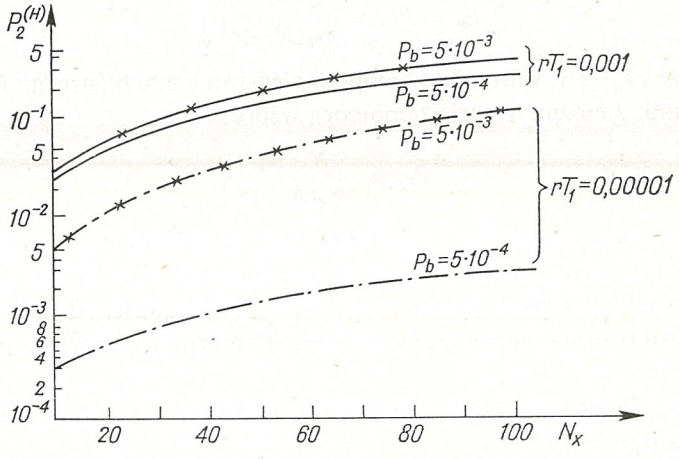
Bliższą analizę tej nierówności jak również szczegółową analizę wzorów (17) i (19) dokonaną na podstawie rozwiązania numerycznego przedstawiono w kolejnym rozdziale.

4. DYSKUSJA WYNIKÓW

Z rozważań przytoczonych w rozdziale 3.1 wynika, że dla kanałów bezszumowych stosowanie kodowania jest niecelowe, gdyż współczynnik jakości J jest mniejszy od jedności. Jakość systemu stosującego kod jest w tych warunkach tym gorsza, im większa jest liczba pozycji kontrolnych.

Interesujących wniosków dostarczają wyniki uzyskane w rozdziale 3.2. W przypadku kanału wspólnego z szumem $P_b \neq 0$ przy wzroście elementowej stopy błędu następuje wzrost współczynnika jakości J do wartości większych od jedności. Jest to jednakże poprawa względna, gdyż prawdopodobieństwa P_1 oraz $P_1^{(H)}$ są funkcjami malejącymi prawdopodobieństwa P_b.

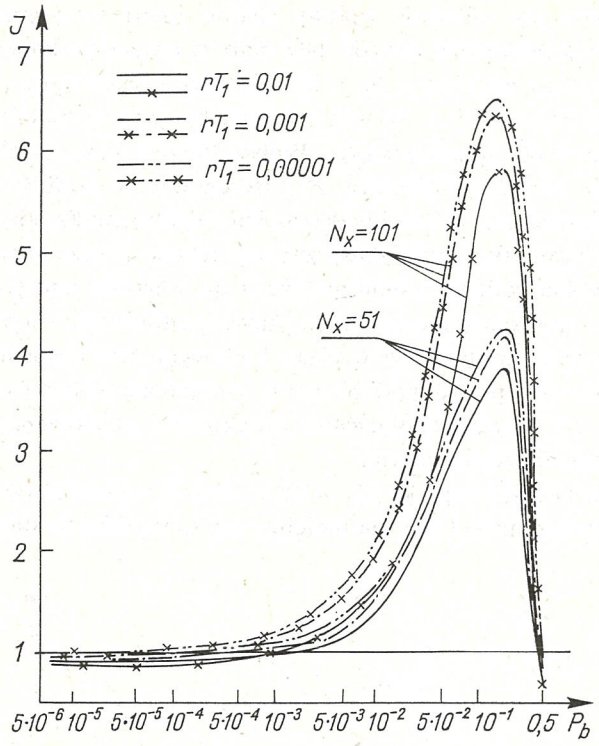
Fakt ten ilustruje rysunek 5. Na rysunku tym pokazano zachowanie się prawdopodobieństwa $P_2^{(H)}$ błędnej decyzji (zdefiniowanego jako $1-P_1^{(H)}$) w zależności od zmian długości ciągu informacyjnego N_x przy różnych wartościach parametrów P_b oraz rT_1. Współczynnik jakości J osiąga wartość maksymalną dla $P_b = P_{bo}$.



Rys. 5. Zależność prawdopodobieństwa błędnej decyzji $P_2^{(H)}$ od długości ciągu informacyjnego N_x

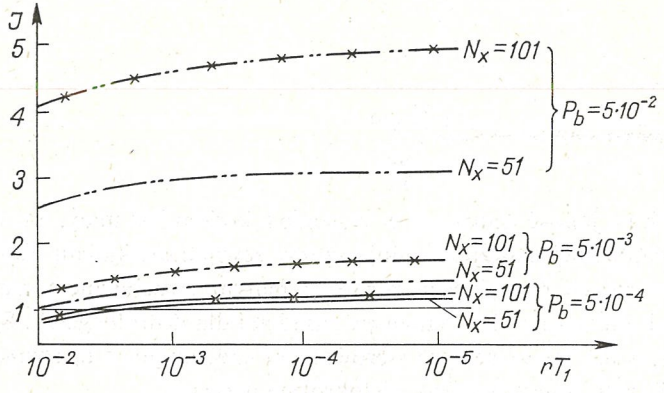
Wykres zachowania się J w zależności od prawdopodobieństwa P_b pokazano na rys. 6. Widać z niego, że dla różnych wartości N_x maksymalna wartość współczynnika jakości jest tym większa, im dłuższy jest ciąg informacyjny N_x. Wzrost wartości współczynnika J następuje dla malejących wartości iloczynu rT_1 (odpowiada to zmniejszaniu się współczynnika wypełnienia czasowego rT).

Krzywe wykreślone dla malejących wartości rT_1 zagęszczają się. Zjawisko to jest ilustracją wzoru (19), z którego wynika, że przy ustalonych wartościach N_x oraz P_b maksymalna wartość współczynnika J osiągana jest dla $rT_1 \to 0$. Dokładniejszą ilustrację wzoru



Rys. 6. Zależność współczynnika J od prawdopodobieństwa błędu binarnego P_b dla różnych wartości rT_1 i N_x

(19) oraz efektu zagęszczania się krzywych przedstawiono na rys. 7. W warunkach gdy $rT_1 \to 0$, wpływ błędów interferencyjnych na jakość transmisji jest pomijalnie mały.

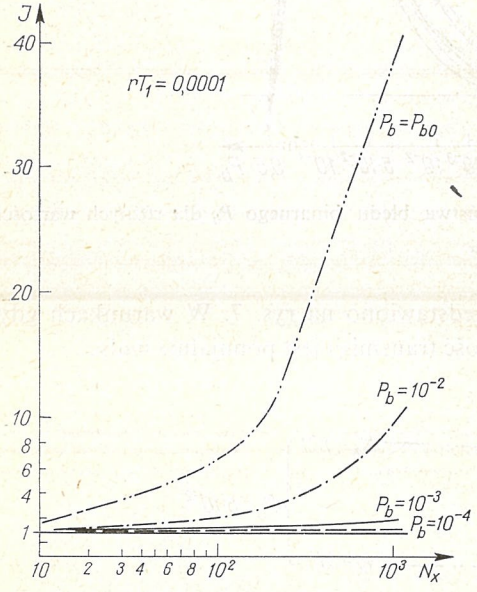


Rys. 7. Zależność współczynnika jakości J od iloczynu rT_1

Rozpatrywany system asynchroniczny zachowuje się identycznie jak system synchroniczny pracujący z małym wypełnieniem czasowym. Powracając do rys. 6 stwierdzamy, że

prezentowany wykres jest odbiciem wpływu błędów interferencyjnych i szumowych na prawdopodobieństwo poprawnej decyzji. Dla małych prawdopodobieństw błędów binarnych (elementowej stopy błędów) — $P_b < 10^{-4}$ krzywe J przebiegają — dla pewnych wartości rT_1 — poniżej prostej $J = 1$. W tych warunkach o jakości transmisji w systemie z kodowaniem decydują błędy interferencyjne. Wpływ błędów szumowych widoczny jest dla większych wartości prawdopodobieństw P_b, szczególnie w pobliżu wartości $P_b = P_{bo}$. W punkcie tym osiągana jest wartość maksymalna współczynnika jakości. W tych warunkach względna poprawa jakości transmisji jest największa. Dalsze pogarszanie jakości kanału powoduje szybkie malenie współczynnika J do wartości mniejszych (lub równych) od jedności. Jest to spowodowane wzrostem prawdopodobieństwa wystąpienia błędów na dodatkowych pozycjach kontrolnych w ciągu kodowym. Dla elementowej stopy błędów o wartościach bliskich 0,5 prawdopodobieństwo wystąpienia dwóch i więcej błędów binarnych jest większe od prawdopodobieństwa wystąpienia pojedynczego błędu binarnego spowodowanego szumem zewnętrznym.

Z rys. 6 widać ponadto, że np. dla $rT_1 = 10^{-5}$ oraz P_b większych od $5 \cdot 10^{-6}$ niezależnie od wartości N_x współczynnik J jest nie mniejszy od 1. Wynika to stąd, że wpływ błędów



Rys. 8. Zależność współczynnika J od długości ciągu informacyjnego N_x

interferencyjnych na jakość transmisji w systemie z kodem jest mały, a o wartości prawdopodobieństwa poprawnej decyzji decydują szumy zewnętrzne kanału wspólnego. W systemach asynchronicznych pracujących z bardzo małym wypełnieniem czasowym poprawę jakości transmisji można uzyskać zatem (w zasadzie) dla dowolnego P_b. System zachowuje się w tych warunkach jak system ze sterowaniem centralnym z tą różnicą, że sprawność wykorzystania kanału wspólnego jest wielokrotnie niższa.

Weźmy pod uwagę przeciętne warunki pracy systemu, tzn. obciążenie rT kanału wspólnego rzędu 0,01. Odpowiada to przykładowo wykorzystaniu ciągów kodowych o długościach około 100 elementów oraz wartości iloczynu $rT_1 = 0{,}0001$. W tych warunkach — jak widać to z rys. 8 — zauważalną poprawę jakości transmisji uzyskujemy w przypadku ko-

rzystania z kanałów, charakteryzujących się wysoką elementową stopą błędu — P_b rzędu $10^{-2} \div 10^{-3}$.

Powyższe warunki pracy zbliżone są do warunków, w jakich pracują np. morskie systemy radiowe wykorzystujące zaszumione kanały jonosferyczne.

LITERATURA

1. J. Seidler, *Systemy przesyłania informacji cyfrowych*, WNT, Warszawa 1972.
2. W. Sobczak, *Analiza jakości systemów wielodostępowych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, nr 198, Gdańsk 1973.
3. Ch. Downson, H. Sklar, *False Address in Randon Access System Employing Discrete Time Frequency Addressing*, IEEE Int. Conv. Rec., Vol. 12, 1964, s. 217—230.
4. N. Abramson, *The Aloha System — Another Alternative for Computer Communications*, University of Hawaii Information Sciences Program Technical, Rept. B-70, 1970.

J. WOŹNIAK

ANALYSIS OF HAMMING CODE UTILITY IN ASYNCHRONOUS MULTIPLE ACCESS SYSTEM WITHOUT FEEDBACK

Summary

In this paper the problem of transmission quality estimation in an asynchronous multiple access system without feedback is described. In particular the improvement of the transmission quality by the use of Hamming code has been investigated.

J. WOŹNIAK

ANALYSE DE LA POSSIBILITÉ D'APPLIQUER LE CODE DE HAMMING DANS UN SYSTÈME ASYNCHRONIQUE OUVERT A MULTIPLES ACCÈS

Résumé

Dans l'ouvrage on a présenté l'analyse de la qualité de la transmission de l'information dans les systèmes asynchroniques ouverts à multiples accès. On a examiné surtout les effets de l'application du code correctif de Hamming.

Sous les formes analytique et graphique on a présenté les dépendances entre les paramètres principaux caractérisant le fonctionnement du système, tels que: le taux d'appels, le taux élémentaire d'erreur, la longueur de série du code et le coefficient de qualité.

J. WOŹNIAK

BRAUCHBARKEITSANALYSE DER HAMMING-CODE FÜR DAS ASYNCHRONE MEHRZUGANGSSYSTEM OHNE RÜCKKOPPLUNG

Zusammenfassung

Die Arbeit behandelt die Qualitätsanalyse der Datenübertragung im offenen asynchronischen Mehrzugangssystem. Insbesondere wurden die sich aus der Anwendung der Hamming-Korrektionscode ergebenden Effekte geprüft.

In analytischer Form und auch in Diagrammen wurden die gegenseitigen Abhängigkeiten der die Arbeit des Systems charakterisierenden Grundparameter dargestellt. Es handelt sich hier um: Meldeintensivität, Elementarfehlerfluß, Länge der Codereihe und Qualitätsfaktor.

Ю. ВОЗЬНЯК

АНАЛИЗ ПРИГОДНОСТИ КОДА ХЭММИНГА В АСИНХРОННОЙ МНОГОДОСТУПНОЙ СИСТЕМЕ БЕЗ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Р е з ю м е

Работа посвященна проблеме оценки качества передачи данных в асинхронных многодоступных системах без обратной связи. В частности рассмотрена возможность улучшения качества передачи при применении кода Хэмминга.

TREŚĆ

Hoang Suoc: The Direct Topological Method in Network Sensitivity Analysis 767
A. Cichocki, S. Osowski: Nowa metoda badania aktywnych układów drabinkowych niejednorodnych ze źródłami sterowanymi 785
W. Lasocki: Wyznaczanie ustalonych przyrostów temperatury uzwojeń w transformatorze suchym 797
M. Tadeusiewicz: Obliczanie obwodów rezystancyjnych zawierających diody 807
J. Kisilewicz: Algorytm automatycznego projektowania pasmowych filtrów Czebyszewa 821
S. Nowicki, J. Sekutowicz: Wyznaczanie współczynników kształtu elektrod kwadrupola elektrostatycznego 843
M. Uruski: Przegląd metod przestrzeni stanów w syntezie pasywnych układów elektrycznych 857
J. Woźniak: Analiza przydatności kodu Hamminga w otwartym asynchronicznym systemie wielodostępowym 877

CONTENTS — TABLE DES MATIÈRES — INHALT

Hoang Suoc: Zastosowanie bezpośredniej topologicznej metody do analizy czułości układów elektronicznych 783
La méthode topologique directe dans l'analyse de sensibilité des circuits électriques 783
Anwendung einer direkten topologischen Methode zur Empfindlichkeitsanalyse elektronischer Systeme 783
A. Cichocki, S. Osowski: New Method of Studying Non-Homogenous Active Ladder Networks with Control Supply 794
Une méthode nouvelle d'étudier les systèmes non-homogènes actifs, à la structure d'échelle . . 794
Neue Untersuchungsmethode nichthomogener aktiver Leitersysteme mit gesteuerten Quellen 795
W. Lasocki: Method of Temperature Calculation in Dry Transformer Windings 806
Le calcul des températures instantées dans les enroulements des transformateurs secs 806
Berechnungsmethode der Wicklungstemperaturen in den Trockentransformatoren 806
M. Tadeusiewicz: Calculation of Resistive Networks which Contain Diodes 818
Calcul des circuits résistantiels contenant des diodes 818
Berechnung von Resistanzkreisen mit Dioden 819
J. Kisilewicz: Algorithm for Automatic Design of Bandpass Chebyshev Filters 841
Algorithme de projeter automatiquement les filtres passe-bandes de Tchebychev 841
Algorithmen automatischer Projektierung Czebyszew-Bandfiltern 842
S. Nowicki, J. Sekutowicz: Determining Form Coefficients for Electrostatic Quadrupol Electrodes 855
Désignation des coefficients de la forme des électrodes du quadrupôle électrostatique 855
Bestimmung der Elektrodengestalltkoeffizienten eines elektrostatischen Quadrupols 855
M. Uruski: A Review of State-Space Technique for the Synthesis of Passive Electrical Networks 875
Revue des applications des méthodes de l'espace d'états à la synthèse des réseaux éléctriques passifs 875
Übersicht über die Anwendungen von Methoden des Zustandsraumes in der Synthese elektrischer Netzwerke 875
J. Woźniak: Analysis of Hamming Code Utility in Asynchronous Multiple Access System without Feedback 887

Analyse de la possibilité d'appliquer le code de Hamming dans un système asynchronique ouvert à multiples accès 887
Brauchbarkeitsanalyse der Hamming-Code für das asynchrone Mehrzugangssystem ohne Rückkopplung 887

СОДЕРЖАНИЕ

Хоанг Суоц: Непосредственный топологический метод в анализе чувствительности электрических цепей 784
А. Цихоцки, С. Осовски: Новый метод исследования неоднородных цепных схем с управляемыми источниками 795
В. Лясоцки: Определение прироста температуры обмоток сухих трансформаторов 806
М. Тадеусевич: Расчет резистивных цепей с диодами 819
Е. Кисилевич: Алгоритм автоматического проектирования подосных фильтров Чебышева 842
С. Новицки, Я. Секутович: Определение коэффициентов формы электрод электростатического квадруполя 855
М. Уруски: Обзор методов пространства состояния в синтезе пассивных электрических цепей 876
Ю. Возьняк: Анализ пригодности кода Хэмминга в асинхронной многодоступной системе без обратной связи 888

KOMUNIKAT

Główna Komisja Badania Zbrodni Hitlerowskich w Polsce informuje, że kończy prace nad rejestrem strat osobowych inteligencji polskiej w latach 1939—1945, w tym środowiska naukowego.

W przygotowaniu jest publikacja poświęcona **upamiętnieniu pracowników nauki — ofiar wojny i okupacji**. W związku z tym prosi się zainteresowanych o nadesłanie:

1 — uzupełnień do opublikowanych już życiorysów lub biogramów;
2 — materiałów o osobach, o których nie ma dotąd informacji w piśmiennictwie. Informacja powinna zawierać: nazwisko i imię, datę i miejsce urodzenia, stopień i tytuł naukowy, pełnione funkcje, dyscyplinę naukową, najwyżniejsze dzieła, działalność społeczno-zawodową przed wojną i podczas okupacji, martyrologię oraz datę, miejsce i okoliczności śmierci;
3 — fotografii, odpisów lub fotokopii dokumentów dotyczących martyrologii i śmierci.

Kartotekę osobową strat naukowców polskich zamyka się w lutym 1976 r.

Korespondencję i materiały prosimy kierować na adres:

DR MARIAN WALCZAK, POLSKA AKADEMIA NAUK, WARSZAWA — PAŁAC KULTURY I NAUKI

7. *Streszczenia.* Do każdej nadsyłanej pracy należy dołączyć krótkie streszczenie (analizę w języku polskim (w 5 wgz.) oraz streszczenie w językach obcych: angielskim, francuskim, niemieckim i rosyjskim. W razie niemożności przygotowania streszczeń w językach obcych Autor powinien przynajmniej podać niezbędną do wykonania tłumaczenia obcojęzyczną terminologię.

8. *Literatura.* Po zakończeniu artykułu należy podać wykaz literatury cytowanej w tekście, wymieniając w następującej kolejności: pierwsze litery imion, nazwisko autora, po czym po przecinku pełny tytuł dzieła lub artykułu; dalej, w przypadku książki — wydawcę, miejsce wydania i rok, a w przypadku artykułu — tytuł czasopisma, numer zeszytu, rok wydania i ewent. numer strony. Pozycje wykazu powinny być ponumerowane.

Uwagi

1. Niezastosowanie się Autora do podanych wyżej wytycznych pociągnie za sobą konieczność potrącenia z honoranium autorskiego kosztów związanych z doprowadzeniem dostarczonych materiałów do postaci wymaganej przez Redakcję.

2. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egz. odbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze Autor może zamówić w Redakcji na własny koszt.

3. **Autora obowiązuje korekta autorska, którą należy zwracać w ciągu 3 dni** pod adresem Redakcji.

Cena zł 40.—

Rozprawy Elektrotechniczne

Kwartalnik

WARUNKI PRENUMERATY CZASOPISMA

Cena prenumeraty rocznej zł 160.—
„ „ półrocznej zł 80.—

Instytucje państwowe, społeczne, zakłady pracy, szkoły itp. mogą zamawiać prenumeratę wyłącznie w miejscowych oddziałach i delegaturach RSW „Prasa — Książka — Ruch".

Prenumeratorzy indywidualni mogą opłacać prenumeratę w urzędach pocztowych i u listonoszy lub dokonywać wpłat na konto PKO nr 1-6-100020, RSW „Prasa — Książka — Ruch", Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, Warszawa, ul. Towarowa 28 (w terminie do 10 dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty).

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa — Książka — Ruch". Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych, Warszawa, ul. Wronia 23, konto PKO nr 1-6-100024.

Bieżące i archiwalne numery można nabywać lub zamawiać we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Warszawa, Pałac Kultury Nauki (wysoki parter) oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki".

Sprzedaż egzemplarzy numerów zdezaktualizowanych, na uprzednie pisemne zamówienie, prowadzi RSW „Prasa — Książka — Ruch", Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, Warszawa, ul. Towarowa 28.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona-Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, POLAND.

Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, POLAND.

Rozpr. Elektrot. T. 21 z. 4, s. 765 — 892 + wkł. Warszawa 1975
Indeks 37521/37483