

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTROTECHNIKI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

KWARTALNIK

SPIS TREŚCI DO TOMU XXII — 1976

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA

SPIS TREŚCI DO TOMU XXII

S. Apanasewicz, G. Miksa, D. Przybylak: Ocena wpływu krzywizny rdzenia, uzwojeń i ściany kadzi transformatora na rozkład pola elektromagnetycznego	27
K. Balińska: Model numeryczny do rozpatrywania stanów pracy silnika synchronicznego przy obciążeniach uderowych	355
K. Bareła: Metoda analizy niezawodności kombinacyjnych sieci logicznych	925
D. J. Bem, R. Bernardyn: Obliczanie natężenia pola fali jonosferycznej w zakresie częstotliwości 0,5 ... 1,6 MHz	435
R. Biernacki: Nowa algebraiczna metoda badania stabilności	69
H. Budzisz: Analiza stałoprądowa układu scalonego metodą numeryczną	205
L. Byczkowska-Lipińska: Wpływ częstotliwości rezonansowej uzwojeń transformatora na siły osiowe występujące w czasie zwarcia	189
J. Dobrowolski: Macierz rozproszenia w zastosowaniu do analizy układów mikrofalowych za pomocą elektronicznej maszyny cyfrowej	955
Z. Felendzer: Odzworowanie schematu elektrycznego w graf jako podstawowe zagadnienie rozmieszczenia elementów na podłożu	469
A. J. Fioł: Jednostopniowe generatory kwarcowe o trzech elementach reaktancyjnych	913
W. Gąsowski, J. Kolas: Wyznaczanie stałej bezwzględnej wzorca strumienia magnetycznego przez porównanie z wzorcem oporu	3
J. Gieras, W. Józefowicz: Współczynniki linearyzujące do obliczeń impedancji i strat mocy w ekranowanych płytach ferromagnetycznych	269
Z. Głowacz, J. Król: Identyfikacja parametrów maszyny synchronicznej metodą nastrojonego modelu	339
J. Górecki, L. Nowak, J. Poltz: Numeryczne wyznaczanie strat wiropądowych w przewodzącej płycie ferromagnetycznej	677
J. L. Jakubowski, M. Dobardźić: Przyczynek do metodologii badania izolatorów wysokiego napięcia w warunkach zabrudzeniowych na Saharze	813
S. Jankowski, M. Lepa: Zastosowanie informacyjnej teorii pomiarów do badania dokładności przyrządów pomiarowych	303
T. Kaczorek: Przesuwanie biegunów do z góry zadanych położeń wielowymiarowych układów liniowych stacjonarnych	645
W. Kalita, A. Kusy, S. Paszczyński: Nowe możliwości technologii grubowarstwowej w zakresie rezystorów rutenianowych, przełączników, tranzystorów oraz przyrządów optoelektronicznych	831
F. Kamiński: Wyznacznikowe postacie elementów unormowanej macierzy łańcuchowej i transmisyjnej kaskadowego połączenia czwórników	41
M. Kaźmierski: Przenikalność zastępcza ferromagnetyków ekranowanych	287
Komunikat: XV lat Polskiego Towarzystwa Elektrotechniki Teoretycznej	749
M. Krakowski: Straty wiropądowe wywołane w ekranowanych lub nieekranowanych ciałach ferromagnetycznych przez prądy sinusoidalne w przewodach równoległych	239
K. Lenczewska, M. M. Dobrzański: Zastosowanie złącza Josephsona do generacji i detekcji fali akustycznej o bardzo dużej częstotliwości	767
W. Lipiński: Stała czasowa dyfuzji pola magnetycznego do obszaru przewodzącego	543
A. Lizoń: Radar dopplerowski wyróżniający kierunek ruchu	625
J. Lubacz: Analiza możliwości określania przydatności łącza do transmisji cyfrowej na podstawie krótkotrwałego pomiaru	167

M. Majewski: Metody zwiększania mocy wyjściowej generatorów z diodami lawinowymi . . .	583
E. Mendrela: Silnik indukcyjny obrotowo-liniowy z masywnym wirnikiem	383
J. Migdałski: Metody obliczania niezawodności systemów o strukturach złożonych	499
F. Mosiński: O statystycznej obróbce wyników pomiaru wytrzymałości udarowej izolacji nieregenerującej się	709
W. Nakwaski: Przyrost temperatury obszaru czynnego laserów homozłączowych GaAs w stanie ustalonym	877
W. Nakwaski: Rekombinacja promienista w silnie domieszkowanych półprzewodnikach	555
W. Nakwaski: Wpływ silnego domieszkowania na pasmowy model energetyczny półprzewodnika — ogony pasm	451
A. Napieralski, B. W. Kałmykow: Modelowanie charakterystyk statycznych tyrystora dla celów analizy numerycznej	855
W. Pietrenko, B. M. Wilamowski: Pomiar rezystancji rozproszonej kolektora tranzystora bipolarnego	803
K. Piwnicki: Analogowe syntetyzery częstotliwości	85
K. Plewko: Koncepcja analogowo-dyskretnej metody pomiaru zniekształceń czasowych w odniesieniu do synchronicznych przebiegów binarnych	963
M. Pospieszalski: Pomiary własności dielektryków mikrofalowych metodą rezonatora dielektrycznego	605
J. Purczyński: Wykorzystanie metod Ritza i Trefftza do dwustronnego szacowania pojemności	755
Z. Rydzewski, M. Jaroszewski: Obliczanie optymalnych wymiarów podstawowych części czynnych transformatorów energetycznych	777
R. Sikora, J. Purczyński, M. Gramz: Analiza pola magnetycznego i indukcyjności rdzeni kubkowych	213
A. Smoliński: Telekomunikacja światłowodowa	143
R. Sobocki: O możliwości obliczania indukcyjności rozproszenia uzwojeń transformatora za pomocą ogólnej metody bazującej na pojęciu średnich geometrycznych odległości	687
J. Stanclik: Analiza wpływu niedokładności pomiarów na błędy modelowania dwuzaciskowych elementów elektronicznych	899
C. Syc: Topologiczna analiza liniowych układów czynnych	483
J. Trzeźniowski: Wybrane zagadnienia struktury systemów pomiarowych	319
M. Wiechowski: Analiza spektralna sygnałów próbkowanych w sposób niedeterministyczny	939
T. Wróbel, K. Kozieł, J. Sienkiewicz: Badania nowych modeli asynchronicznych i synchronicznych silników szybkobieżnych prądu przemiennego zwiększonej częstotliwości	407
S. Wyderka: Wyznaczanie obciążenia falowych w udarowym układzie probierczym	421
A. Zaklikiewicz: Kierunki badań teoretycznych nad szumami typu $1/f$ w półprzewodnikach	119
E. Zawalich: Analiza tranzystorowego układu napędowego o sterowaniu impulsowym w stanie quasiustalonym	727

CONTENTS

S. Apanasewicz, G. Miksa, D. Przybylak: Estimation of Influence of Transformer's Core, Windings and Tank Curvature on Electromagnetic Field Distribution	27
K. Balińska: A Numerical Model for Prediction of Synchronous Motor Behavior Under Large Dynamical Loads	355
K. Bareła: Method of Automatic Reliability Analysis in Logical Combinational Networks . .	925
D. J. Bem, R. Bernardyn: Calculation of Sky-Wave Field Strengths in the Frequency Band 0,5... 1,6 MHz	435
R. Biernacki: New Algebraic Criterion for Stability	69
H. Budzisz: DC Analysis of Integrated Circuit by Numerical Method	205
L. Byczkowska-Lipińska: Resonance Frequency of Transformer Windings Influence on Axial Short-Circuit Forces	189

J. Dobrowolski: The Connection Scattering Matrix in Computer-Aided Analysis of Microwave Circuits	955
Z. Felendzer: Transformation of Electrical Diagram into Graph as Basic Problem of Distributing Elements on Base	469
A. J. Fioł: One-Stage Quartz Oscillators with Three Reactance Elements	913
W. Gąsowski, J. Kolasz: Determination of Magnetic Flux Constant of Absolute Normal by Comparison with Normal Resistance	3
J. Gieras, W. Józefowicz: Factors of Linearization for Calculations of Impedance and Loss of Power in Screened Ferromagnetic Plates	269
Z. Głowacz, J. Król: Identification of Synchronous Machine Parameters by the Method of Adjustable Model	339
J. Górecki, L. Nowak, J. Poltz: Numerical Calculation of Eddy-Current Losses in Ferromagnetic Conductive Thin Plate	677
J. L. Jakubowski, M. Dobardzić: Contribution to Methods of High Voltage Insulator Testing in Sahara Pollution Conditions	813
S. Jankowski, M. Lepa: Measurement Information Theory Applied to Measurement Instrument Accuracy Investigation	303
T. Kaczorek: Poles Assignment for Multivariable Linear Time-Invariant Systems	645
W. Kalita, A. Kusy, S. Paszczyński: New Possibilities of Thick Film Technology in Rutenate Resistors, Switches, Transistors and Optoelectronic Devices	831
F. Kamiński: Determinant Forms of Elements in a Standardized Chain and Transmission Matrix of a Cascade Connection in Four-Terminal Networks	41
M. Kaźmierski: Equivalent Magnetic Permeability of Screened Ferromagnetic Materials	287
M. Krakowski: Eddy Current Losses in a Shielded or Unshielded Ferromagnetic Solid Due to A. C. Flowing Through Parallel Conductors	239
K. Lenczewska, M. M. Dobrzański: Application of Josephson Junction in Generation and Detection of High Frequency Waves Acoustics	767
W. Lipiński: Time Parameter of Magnetic Field Diffusion into Conducting Region	543
A. Lizoń: Doppler Radar Showing Motion Direction	625
J. Lubacz: Analysis of Ability to Determine the Quality of Digital Transmission Channels on the Basis of a Short Measurement	167
M. Majewski: Methods of Increasing Output Power in Avalanche Diode Oscillators	583
E. Mendrel: A Rotating-Linear Induction Motor with a Massive Rotor	383
J. Migdalski: Evaluation Methods of Reliable Systems with Complex Structures	499
F. Mosiński: Statistic Elaboration of the Results for the Impulse Strength Measurements of the Insulation	709
W. Nakwaski: Increase in Temperature of GaAs Homo Junction Lasers Active Area in Steady State	877
W. Nakwaski: Radiative Recombination in Highly Doped Semiconductors	555
W. Nakwaski: Influence of Heavy Doping on Band Energy Model of Semiconductor Band-Tailing	451
A. Napieralski, B. W. Kałmykow: Modeling Static Characteristics of a Thyristor for Purpose of Numerical Analysis	855
W. Pietrenko, B. M. Wilamowski: Measurement of Collector Spreading Resistance of Bipolar Transistors	963
K. Piwnicki: Analog Frequency Synthesizers	85
K. Plewko: Conception of Analog-Discrete Method of Temporal Distortion Measurements in Relation to Synchronous Binary Transients	963
M. Pospieszalski: Measurement of Complex Permittivity of Microwave Insulators by the Dielectric Resonator Method	605
J. Purczyński: Use of Ritz and Trefftz Methods for Bilateral Capacity Estimation	755
Z. Rydzewski, M. Jaroszewski: Calculation of Optimal Fundamental Dimensions of Active Parts of Power Transformers	777

R. Sikora, J. Purczyński, M. Gramz: Analysis of Magnetic Field and Inductance of Cup Cores	213
A. Smoliński: Optical Fiber Communications	143
R. Sobocki: On Possibility of Successful Calculating the Leakage Inductance of Transformer Windings by Means of a General Method Based Upon the Conception of Geometric Mean Distances	687
J. Stanlik: Analysis of Two-Terminal Electronic Components Modeling Errors Affected by Measurement Inaccuracy	899
C. Syc: Topological Analysis of Linear Active Circuit	483
J. Trzeźniowski: Structure of Measuring Systems: Selected Problems	319
M. Wiechowski: Spectral Analysis of Randomly Sampled Signals	939
T. Wróbel, K. Kozieł, J. Sienkiewicz: Investigations of New Models of Asynchronous and Synchronous High-Speed, High Frequency AC Motors	407
S. Wyderka: Determination of Wave Reflections in an Impulse Test Circuit	421
A. Zaklikiewicz: Theoretical Investigations of $1/f$ Noise	119
E. Zawalich: Analysis of Pulse-Controlled Transistor Drive Systems Under Quasi-Steady Condition	727

TABLE DES MATIÈRES

S. Apanasewicz, G. Miksa, D. Przybylak: Estimation de l'influence de la courbure du noyau, des enroulements et de la cuve du transformateur sur la répartition du champ électromagnétique	27
K. Balińska: Modèle numérique pour examiner des régimes de travail du moteur synchrone pour les charges de choc	355
K. Bareła: Méthode de l'analyse de fiabilité des réseaux combinatoires logiques	925
D. J. Bem, R. Bernardyn: Calcul d'intensité du champ d'onde ionosphérique dans l'étendue de fréquence 0,5 ... 1,6 MHz	435
R. Biernacki: Nouvelle méthode algébrique d'examiner la stabilité	69
H. Budzisz: Analyse du circuit intégré à courant direct par méthode numérique	205
L. Byczkowska-Lipińska: Influence de la fréquence de résonance des enroulements du transformateur sur les forces d'axe produisant au moment du court-circuit	189
J. Dobrowolski: Matrice de dispersion adaptée à l'analyse des circuits micro-ondes à l'aide d'un calculateur électronique numérique	955
Z. Felendzer: Application du schéma électrique en graphe comme problème principal de la répartition des éléments sur la base	469
A. J. Fiołk: Générateurs à un étage au quartz à trois éléments réactifs	913
W. Gąssowski, J. Kolasz: Désignation de la constante absolue de l'étalon du flux magnétique par comparaison avec l'étalon de la résistance	3
J. Gieras, W. Józefowicz: Coefficients linéarisants pour calculer l'impédance et les pertes de puissance dans les plaques blindées ferromagnétiques	269
Z. Głowacz, J. Król: Identification des paramètres de la machine asynchrone à l'aide de la méthode du modèle variable	339
J. Górecki, L. Nowak, J. Polt: Désignation numérique des pertes par courants parasites dans la plaque ferromagnétique conductrice	677
J. L. Jakubowski, M. Dobardzić: Contribution à la méthodologie de recherche concernant les isolateurs haute tension pollués au Sahara	813
S. Jankowski, M. Lepa: Application de la théorie informatique de mesurage pour examiner la précision des appareils de mesure	303
T. Kaczorek: Décalage des pôles à des positions fixées d'avance de multidimensionnels circuits linéaires stationnaires	645

W. Kalita, A. Kusy, S. Paszczyński: Nouvelles possibilités d'application de la technique des couches épaisses aux résistors à base des composés de ruthénium, aux commutateurs, aux transistors et aux appareils optoélectroniques	831
F. Kamiński: Formes déterminantes des éléments de la matrice réglementée de transfert et de celle de transmission de la connexion en chaîne des quadripôles	41
M. Kaźmierski: Perméabilité équivalents des substances ferromagnétiques blindées	287
M. Krakowski: Pertes de courants de Foucault dans les corps ferromagnétiques blindés ou non blindés provoquées par les courants sinusoïdaux dans les conducteurs parallèles	239
K. Lenczewska, M. M. Dobrzański: Application de la jonction de Josephson pour la génération et la détection des ondes acoustiques à très haute fréquence	767
W. Lipiński: Constante de temps de la diffusion du champ magnétique vers la région conductrice	543
A. Lizoń: Radar Doppler distinguant la direction du mouvement	625
J. Lubacz: Analyse de la possibilité de déterminer l'utilité de liaison pour la transmission digitale à partir de la mesure de courte durée	167
M. Majewski: Méthode d'augmentation de la puissance de sortie des générateurs aux diodes à avalanche	583
E. Mendrela: Moteur à induction rotatif et linéaire à rotor massif	383
J. Migdałski: Méthodes de calcul de la fiabilité de systèmes à structures complexes	499
F. Mosiński: Emprise statistique des résultats des mesures de la résistance aux chocs de l'isolation non régénérée	709
W. Nakwaski: Accroissement de la température de la région active des lasers homo joints GaAs dans le régime établi	877
W. Nakwaski: Recombinaison radiante dans les semi-conducteurs à fortes impuretés	555
W. Nakwaski: Effet de nombreuses impuretés sur le modèle énergétique à bande de semi-conducteur — queues de bandes	451
A. Napieralski, B. W. Kałmykow: Modelage des caractéristiques statiques des thyristors prévu pour l'analyse numérique	855
W. Pietrenko, B. M. Wilamowski: Mesurage de la résistance diffuse du collecteur du transistor bipolaire	803
K. Piwnicki: Synthétiseurs analogues de fréquence	85
K. Plewko: Conception de la méthode analogo-discrète de mesurage des distorsions du temps se rapportant aux parcours binaires synchrones	963
M. Pospieszalski: Mesures des propriétés des diélectriques micro-ondes avec la méthode du résonateur diélectrique	605
J. Purczyński: Application des méthodes de Ritz et Trefftz à l'évaluation bilatérale de la capacité	755
Z. Rydzewski, M. Jaroszewski: Calcul de fondamentales dimensions optimales des parties actives des transformateurs de puissance	777
R. Sikora, J. Purczyński, M. Gramz: Analyse du champ magnétique et de l'inductance des noyaux à godets	213
A. Smoliński: Transmission d'information par voies optiques	143
R. Sobocki: Possibilité de calculer l'inductance de la dispersion des enroulements du transformateur à l'aide d'une méthode généralement appliquée basée sur la conception de moyennes distances géométriques	677
J. Stanclik: Analyse de l'influence de l'inexactitude des mesures sur les erreurs du modelage des éléments électroniques bipoles	899
C. Syc: Analyse topologique des circuits linéaires actifs	483
J. Trzeźniowski: Problèmes de la structure des systèmes de mesure choisis	319
M. Wiechowski: Analyse spectrale des signaux échantillonnés de la manière non déterminative	939
T. Wróbel, K. Kozieł, J. Sienkiewicz: Essais de nouveaux modèles de moteurs rapides asynchrones et synchrones à courant alternatif et à haute fréquence	407

S. Wyderka: Détermination des réflexions ondulatoires en circuit d'essai de choc	421
A. Zaklikiewicz: Tendences des recherches théoriques sur les bruits $1/f$	119
E. Zawalich: Analyse du système menant à transistors à commande par impulsion dans le régime quasi-permanent	727

INHALT

S. Apanasewicz, G. Miksa, D. Przybylak: Einschätzung des Einflusses von Kernwölbung, Wicklungen und der Pfannenwand eines Transformators auf die Verteilung des elektromagnetischen Feldes	27
K. Balińska: Ein numerisches Modell zur Erwägung von Arbeitszuständen eines Synchronmotors bei Stossbelastungen	355
K. Bareła: Methode einer Analyse der Zuverlässigkeit in der logischen Kombinationsschaltungen	925
D. J. Bem, R. Bernardyn: Berechnung der Feldstärke einer ionosphärischen Welle im Frequenzbereich 0,5 ... 1,6 MHz	435
R. Biernacki: Neue algebraische Untersuchungsmethode der Stabilität	69
H. Budzisz: Gleichstromanalyse eines integrierten Systems mittels numerischer Methode	205
L. Byczkowska-Lipińska: Einfluss der Resonanzfrequenz von Wicklungen auf die Achsenkräfte beim Kurzschluss in Transformatoren	189
J. Dobrowolski: Zerstreuungsmatrix bei Anwendung für eine Analyse von Mikrowellensystemen mittels elektronischen Digitalrechners	955
Z. Felendzer: Abbildung eines elektrischen Schemas zu einem Diagramm also Hauptproblem für die Elementenverteilung auf dem Grund	469
A. J. Fiolek: Einstufige Quarzgeneratoren mit drei Reaktanzelementen	913
W. Gąssowski, J. Kolasz: Bestimmung der Konstante des absoluten magnetischen Flussnormals mittels Vergleich mit dem Normalwiderstand	3
J. Gieras, W. Józefowicz: Linearisierende Koeffizienten für die Berechnung von Impedanz und Stärkeverlusten in abgeschirmten ferromagnetischen Platten	269
Z. Głowacz, J. Król: Identifikation von Parametern einer Synchronmaschine mittels Methode eines adjustierbaren Modells	339
J. Górecki, L. Nowak, J. Poltz: Digitale Berechnung der Wirbelstromverluste in einer leitfähigen ferromagnetischen Platte	677
J. L. Jakubowski, M. Dobardžić: Beitrag zur Prüfungsmethodologie von Hochspannungsisolatoren bei den Verschmutzungsverhältnissen der Sahara	813
S. Jankowski, M. Lepa: Anwendung der informativen Messtheorie zur Genauigkeitsprüfung von Messgeräten	303
T. Kaczorek: Verschiebung von Polen in eine im voraus gegebene Lage der stationären mehrdimensionalen Liniensysteme	645
W. Kalita, A. Kusy, S. Paszczyński: Neue Anwendungsmöglichkeiten der Dickfilmentechnologie auf dem Gebiet der Rutheniumresistoren, Umschaltungen, Transistoren sowie optoelektronischer Elemente	831
F. Kamiński: Determinante Formen für Elemente der normierten Ketten- und Betriebsparametermatrix einer Kaskadenverbindung von Vierpolen	41
M. Kaźmierski: Ersatz-Permeabilität abgeschirmter ferromagnetischer Körper	287
M. Krakowski: Durch Sinusströmungen in verschirmten und nichtverschirmten Ferromagnetstoffen in Parallelleitungen hervorgerufene Wirbelstromverluste	239
K. Lenczewska, M. M. Dobrzański: Anwendung der Josephson-Verbindung zur Generation und Detektion einer akustischen Welle mit sehr grosser Frequenz	767
W. Lipiński: Über die Zeitkonstante der Diffusion des elektromagnetischen Feldes im leitenden Raum	543
A. Lizoń: Doppler-Radar mit Richtungsunterscheidung	625

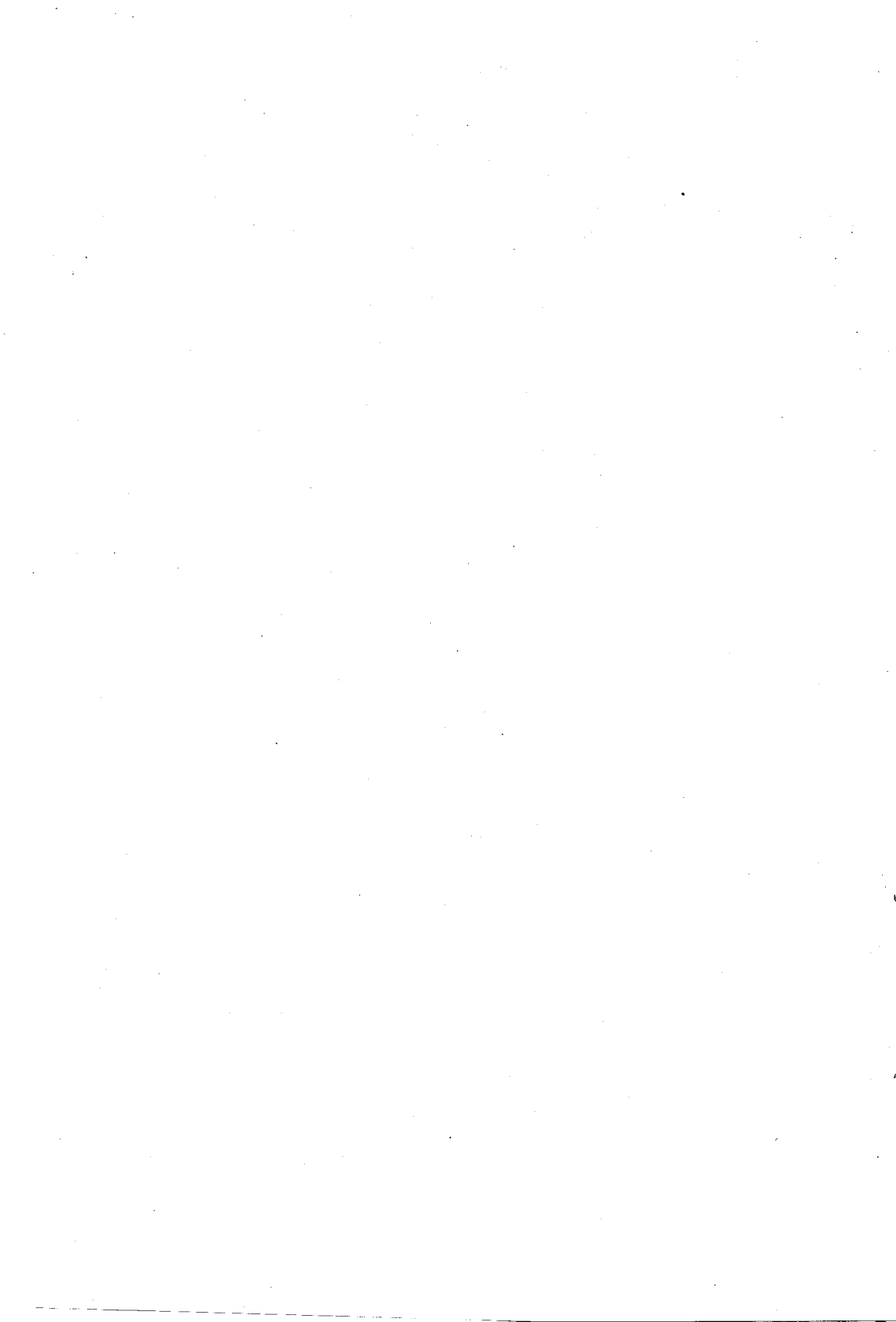
J. Lubacz: Analyse der Bestimmungsmöglichkeit auf Grund einer kurzfristigen Messung der Brauchbarkeit einer Leitung für die digitale Transmission	167
M. Majewski: Vergrößerungsmethode der Anfangsleistung von Generatoren mit Lawinendiode	583
E. Mendrela: Der drehend-fortschreitende Induktionsmotor mit massivem Läufer	383
J. Migdalski: Berechnungsmethoden der Zuverlässigkeit von Systemen mit zusammengesetzten Strukturen	499
F. Mosiński: Bemessung von Stossfestigkeit einer sich nicht regenerierenden Isolierung	709
W. Nakwaski: Temperaturanstieg des aktiven Bereiches von HomoverbindungsLasern GaAs im stationären Zustand	877
W. Nakwaski: Strahlungsrekombination bei stark dotierten Halbleitern	555
W. Nakwaski: Einfluss starker Dotierung auf ein Bandmodell eines energetischen Halbleiters-Bandschwänze	451
A. Napierański, B. W. Kałmykow: Modellierung statischer Charakteristiken von Thyristoren für Zwecke einer numerischen Analyse	855
W. Pietrenko, B. M. Wilamowski: Messungen des Kollektorbahnwiderstandes eines bipolaren Transistors	803
K. Piwnicki: Analogfrequenzsynthesizer	85
K. Plewko: Konzeption einer analog-diskreten Messmethode für Zeitverzerrungen in Bezug auf synchrone Binärvorgänge	963
M. Pospieszalski: Bemessung der Eigenschaften von Mikrowellendielektriken mittels der Methode einer dielektrischen Resonators	605
J. Purczyński: Ausnutzung der Ritz-Treffitz-Methode zur doppelseitigen Kapazitätsbeschätzung	755
Z. Rydzewski, M. Jaroszewski: Berechnung der optimalen Abmessungen aktiver Grundelemente von Transistoren	777
R. Sikora, J. Purczyński, M. Gramz: Analyse eines Magnetfeldes und der Induktivität von Schalenkernen	213
A. Smoliński: Glasfaser-Nachrichtenübertragung	143
R. Sobocki: Über die Möglichkeit der Berechnung der Dispersionsinduktivität von Transformatorwicklungen mittels einer allgemeinen, auf dem Begriff geometrischer Mittelentfernungen basierenden Methode	687
J. Stanclik: Analyse der Einwirkung der Messgenauigkeit auf die Modellierungsfehler bei zweipoligen elektrischen Bauelementen	899
C. Sysc: Topologische Analyse linearer aktiver Schaltungen	483
J. Trzeźniowski: Gewählte Probleme der Struktur von Messsystemen	319
M. Wiechowski: Analyse der in nichtdeterministischer Weise geprobten Spektralsignale	939
T. Wróbel, K. Kozieł, J. Sienkiewicz: Untersuchungen an neuen Modellen von asynchronen und synchronen schnelllaufenden Drehstrom-Hochfrequenz-Motoren	407
S. Wyderka: Ermittlung von Wellenreflexionen im Stossspannungs-Messkreis	421
A. Zaklikiewicz: Richtungen theoretischer Untersuchungen von $1/f$ -Geräuschen	119
E. Zawalich: Beitrag zum quasistationären Betriebsverhalten eines über Gleichspannungssteller gespeisten Gleichstrommotors	727

СОДЕРЖАНИЕ

С. Апанасевич, Г. Микса, Д. Пшибыляк: Оценка влияния кривизны сердечника, обмоток и бака трансформатора на распределение электромагнитного поля	27
К. Балиньска: Математическая модель работы синхронного двигателя при ударной нагрузке	355
К. Барела: Метод анализа надежности логических схем	925

Д. Бем, Р. Бернардин: Вычисление напряженности поля моносферной волны в диапазоне частот 0,5 ... 1,6 МГц	435
Р. Бернацки: Новый алгебраический метод исследования стабильности	69
Х. Будзис: Численный анализ режима интегральной схемы по постоянному току	205
Л. Бычкова - Липиньска: Влияние резонансных частот обмоток трансформатора на осевые усилия выступающие в условиях короткого замыкания	189
М. Веховски: Спектральный анализ сигналов индетерминистически дискретизированных по времени	939
Т. Врубель, К. Козел, Я. Сенкевич: Испытания новых моделей асинхронных и синхронных сверхвысокоскоростных двигателей переменного тока повышенной частоты	407
С. Выдерка: Определение волновых отражений в испытательной схеме ударных напряжений	421
Я. Герас, В. Юзefович: Коэффициенты линеаризации для вычисления импеданса и потерь мощности в экранированных ферромагнитных пластинах	269
З. Гловач, И. Круль: Идентификация параметров синхронной машины при помощи метода настраиваемой модели	339
В. Гонссовски, Ю. Коляса: Определение постоянной первичного эталона магнитного потока методом сравнения с эталоном сопротивления	3
Е. Гурецки, Л. Новак, Ю. Польша: Численное определение потерь от вихревых токов в проводящем ферромагнитном листе	677
Я. Добровольски: Применение матрицы рассеяния к анализу микроволновых цепей с помощью ЭЦВМ	955
Е. Завалик: Анализ квазиустановившихся процессов в электроприводах с импульсным управлением	727
А. Закликевич: Области теоретических исследований шумов $1/f$	119
М. Казьмерски: Эквивалентная проницаемость массивной стали при технической частоте	287
В. Калита, А. Кусы, С. Пашиньски: Новые возможности толсто пленочной технологии в области резисторов на основе рутения, при изготовлении переключателей, транзисторов и оптоэлектронных приборов	831
Ф. Каминьски: Детерминантный вид нормированной цепной и трансмиссионной матрицы каскадного соединения четырехполосников	41
Т. Качорек: Перемещение полюсов в предопределенные положения многомерных линейных стационарных систем	645
М. Краковски: Потери от вихревых токов наведенных в экранированных или неэкранированных ферромагнетиках синусоидальными токами протекающими в параллельных проводниках	239
К. Ленчевска, М. М. Добжаньски: Применение перехода Джозефсона для генерации и детекции акустических волн высокой частоты	767
А. Лизонь: Допплеровский радиолокатор определяющий направление движения	625
В. Липиньски: Постоянная времени диффузии магнитного поля в проводящую зону	543
Ю. Любач: Анализ возможностей определения кратковременным измерением способности канала к передаче цифровых данных	167
М. Маевски: Методы повышения выходной мощности генераторов на лавинно-пролетных диодах	583
Э. Мендреля: Индукционный вращательно-линейный двигатель с массивным ротором	383
Я. Мигдальски: Методы расчета надежности систем со сложными структурами	499
Ф. Мосиньски: О статистической обработке результатов измерений ударной прочности изоляции	709

В. Накваски: Влияние сильных примесей на зонную модель полупроводника — хвосты зон	451
В. Накваски: Нагрев активной зоны арсенидо-галлиевого гомопереходного лазера в установившемся режиме работы	877
В. Накваски: Изучательная рекомбинация в полупроводниках с большим содержанием примесей	555
А. Наперальски, Б. Калмыков: Моделирование статических характеристик тиристора для цифрового анализа	855
В. Петренко, Б. М. Вилимовски: Измерение распределенного сопротивления коллектора биполярного транзистора	803
К. Пивницки: Аналоговые синтезаторы частот	85
К. Плевко: Концепция аналого-дискретного метода измерения временных искажений синхронных бинарных пробегов	963
М. Поспешальски: Исследование свойств микроволновых диэлектриков методом диэлектрического резонатора	605
Я. Пурчиньски: Использование методов Ритца и Трефтца для двухсторонней оценки емкости	755
Э. Рыдзевски, М. Ярошевски: Расчет оптимальных размеров основных активных частей силовых трансформаторов	777
Р. Сикора, Я. Пурчиньски, М. Грамз: Анализ магнитного поля индуктивности броневого сердечников	213
А. Смолицьски: Световодная связь	143
Р. Собоцки: О возможности вычисления индуктивности рассеяния обмоток трансформатора при помощи общего метода обоснованного на понятии средних геометрических расстояний	687
Ю. Станцлик: Анализ влияния неточности измерений на ошибки моделирования двухполосных электронных компонентов	899
Я. Сыц: Топологический анализ линейных активных цепей	483
Ю. Тржестьниовски: Избранные проблемы структуры измерительных систем	319
З. Фелендзер: Отображение электрической схемы графом, как основной вопрос распределения элементов на основе	469
А. Е. Фиок: Одноступенчатые кварцевые генераторы с тремя реактивными элементами	913
Я. Л. Якубовски, М. Добарджичь: К вопросу о методологии исследования изоляторов высокого напряжения в условиях загрязнения на Сахаре	813
С. Янковски, М. Лепа: Применение информационной теории измерений для исследования точности измерительных приборов	303



POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTROTECHNIKI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XXII • ZESZYT 1

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1976

Wytyczne dla Autorów

Komitet Redakcyjny prosi o przestrzeganie następujących wytycznych przy przygotowywaniu maszynopisów artykułów nadsyłanych do opublikowania.

1. *Tematyka i charakter artykułów.* Redakcja przyjmuje do druku prace przeglądowe, kompilacyjne i monograficzne, wchodzące w zakres szeroko pojętej elektrotechniki, które powinny jednak zawierać własny wkład twórczy Autora polegający na: oryginalnym ujęciu zagadnienia, własnej klasyfikacji, krytycznej ocenie (teorii lub metod), wyciągnięciu wniosków co do celowości takiego lub innego działania, prognostyce itp.

2. *Wymagania podstawowe.* Artykuły należy nadsyłać w maszynopisie, w dwóch egzemplarzach. Maszynopis powinien być napisany jednostronnie przez czarną taśmę, na maszynie do pisania z niezabrudzonymi i nieuszkodzonymi znakami. Dopuszcza się odręczne, czytelne uzupełnianie lub pisanie atramentem albo długopisem kolorem czarnym lub ciemnoniebieskim znaków specjalnych oraz znaków w językach, których alfabetów nie ma na maszynach do pisania, np. znaków matematycznych, chemicznych, liter greckich. Maszynopis powinien być napisany na papierze do maszyn do pisania koloru białego, formatu A4; numeracja ciągła na wszystkich kartkach.

3. *Sposób pisania tekstu.* Tekst w maszynopisie powinien być pisany bez używania wyróżnień, a w szczególności nie dopuszcza się spacjiowania (rozstrzelenia), podkreślania i pisania tekstów dużymi literami. Proponowane wyróżnienia Autor może wprowadzić do maszynopisu (zwykłym ołówkiem) za pomocą przyjętych znaków adiustacyjnych (podkreślenie linią przerywaną — spacjiowanie, podkreślenie linią ciągłą — pogrubienie, podkreślenie wężykiem — kursywa itp.). Na jednej kartce maszynopisu powinno być 30 wierszy po około 60 znaków łącznie z odstępami. Marginesy każdej kartki powinny mieć następujące wymiary: górny — ok. 25 mm, lewy — ok. 35 mm. Tekst maszynopisu powinien być napisany z podwójnym odstępem między wierszami; tytuły i podtytuły małymi literami. Akapity należy rozpoczynać z wcięciem równym trzem uderzeniom maszyny do pisania.

4. *Sposób pisania tablic.* Tablice w maszynopisie powinny być napisane w układzie zbliżonym do układu zecerskiego. Tytuły rubryk pionowych i poziomych powinny być napisane małymi literami z podwójnym odstępem między wierszami. Przypisy (notki) dotyczące tablic należy pisać bezpośrednio pod tablicą. Tablice należy numerować kolejno liczbami arabskimi; u góry każdej tablicy podać tytuł.

5. *Sposób pisanie wzorów matematycznych.* Rozmieszczenie znaków, cyfr, liter i odstępów powinno być zbliżone do rozmieszczenia elementów druku. Wskaźniki i wykładniki powinny być napisane wyraźnie i być prawidłowo obniżone lub podwyższone w stosunku do linii wiersza podstawowego. Znaki nad literami i cyframi; strzałki, linie, kropki, daszki itp. powinny być napisane dokładnie nad tymi elementami, do których się odnoszą. Numery wzorów należy umieszczać z prawej strony.

6. *Przygotowanie materiału ilustracyjnego.* Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonywać zgodnie z obowiązującymi normami, na oddzielnych arkuszach, z podaniem kolejnych numerów rysunków. W maszynopisie artykułu na marginesie, obok właściwego tekstu, należy podać jedynie odnośny numer rysunku, a na oddzielnym arkuszu wykaz podpisów pod rysunki. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót: rys.). U samego dołu rysunku (a przy fotografiach na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, tytuł pracy i nazwisko autora. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.

Dalszy ciąg wytycznych na 3 stronie okładki

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTROTECHNIKI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XXII · ZESZYT 1

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1976

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny

PROF. DR WITOLD NOWICKI

Zastępca redaktora naczelnego

PROF. DR HAB. TADEUSZ KACZOREK

Członkowie

PROF. DR LEONARD KNOCH PROF. DR WITOLD ROSIŃSKI

PROF. DR HAB. JANUSZ TUROWSKI

Sekretarz

JANINA MATHEISEL

ADRES REDAKCJI

00-661 Warszawa, Plac Jedności Robotniczej 1
Politechnika, Instytut Teleelektroniki, Gmach Elektroniki, pok. 471

Dyżury Redakcji: poniedziałki i czwartki, godz. 11-13

tel. 28 89 81 lub 210 07-737

- *Telefony domowe: redaktor naczelny - 17 37 03*

zastępca redaktora naczelnego - 44 88 34

sekretarz - 33 84 97

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

Warszawa, Miodowa 10

Nakład 700 (594 + 106)	Oddano do składania 22.VIII. 1975 r.
Ark. wyd. 19,0, ark. druk. 14,75	Podpisano do druku styczniu 1976 r.
Papier druk. sat. kl. III, 70 g. 70 × 100	Druk ukończono w styczniu 1976 r.
Zamówienie nr 1071/75	Cena zł 40.— B-34

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

Wyznaczenie stałej bezwzględnego wzorca strumienia magnetycznego przez porównanie z wzorcem oporu

WIESŁAW GĄSOWSKI (WROCŁAW), JÓZEF KOLASA (WROCŁAW)

Instytut Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej

Otrzymano 18.9.1974

W niniejszej pracy opisano sposób i wyniki porównań wzorca strumienia magnetycznego typu Campbella z wzorcem oporu elektrycznego.

Wzorzec strumienia magnetycznego posiada cewkę pierwotną zasilaną ze źródła energii elektrycznej i stanowiącą źródło pola magnetycznego. Cewka wtórna umieszczona w polu magnetycznym wytworzonym przez cewkę pierwotną ma na celu zapewnienie wymaganej wartości sprzężenia magnetycznego.

Stała strumieniowa k_ψ określa stosunek wartości strumienia magnetycznego sprzężonego z uzwojeniem wtórnym i natężenia prądu stałego płynącego przez uzwojenie pierwotne. Stała k_ψ jest liczbowo równa współczynnikowi indukcyjności wzajemnej M .

W artykule przedstawiono krótki przegląd metod pomiarowych umożliwiających wyznaczenie wartości stałej k_ψ . Następnie uzasadniono wybór metody balistycznej zerowej, Hartshorna i Campbella stosowanej przez autorów. Opisano sposób i wyniki porównań wzorca strumienia magnetycznego typu Campbella o znamionowej stałej strumieniowej 10 mWb/A, z jednoomowym wzorcem oporu elektrycznego. Błąd wyznaczenia rzeczywistej wartości stałej strumieniowej wynosi $\pm 1 \cdot 10^{-4}$ na poziomie ufności $p = 0,95$, przy błędzie opornika wzorcowego wynoszącym $\pm 1 \cdot 10^{-5}$.

We wnioskach końcowych przedyskutowano przydatność stosowanych przez autorów metod pomiarowych do wyznaczenia wartości stałej strumieniowej wzorców.

1. WSTĘP

W ramach prac nad rozbudową bazy metrologicznej pomiarów magnetycznych Instytutu Metrologii Elektrycznej (IME) Politechniki Wrocławskiej wykonano bezwzględny wzorzec strumienia magnetycznego.

Za granicą budową bezwzględnych wzorców pierwotnych strumienia magnetycznego zajmowały się takie państwowe instytucje naukowo-badawcze, jak WNIIM, NPL, NBS, NRC, itp. W literaturze opisano cały szereg tego rodzaju wzorców. Z opisów tych wynika, że w znacznej większości wzorców wykorzystano zaproponowaną przez Campbella konstrukcję bezwzględnego wzorca indukcyjności wzajemnej [1, 2]. Wzorzec strumienia magnetycznego jest więc identyczny z wzorcem indukcyjności wzajemnej, którego wartość prądu uzwojenia pierwotnego jest mierzona z dużą dokładnością. Wartość stałej strumieniowej k_ψ wzorca, określonej jako stosunek wartości strumienia magnetycznego sprzężonego z uzwojeniem wtórnym i natężenia prądu stałego płynącego przez uzwojenie pier-

wotne, jest liczbowo równa współczynnikowi indukcyjności wzajemnej M . Wzorce bezwzględne strumienia magnetycznego wykonane za granicą posiadają najczęściej znamionową stałą strumieniową 10 mWb/A ($M = 10$ mH), wyznaczoną w przypadku aktualnie najdokładniejszych wzorców z błędem nie przekraczającym kilku na milion [3, 4, 5, 6, 7].

Wzorzec bezwzględny wykonany w IME jest także wzorcem typu Campbella o znamionowej stałej strumieniowej wynoszącej 10 mWb/A. Biorąc pod uwagę aktualne potrzeby IME założono w okresie projektowania wzorca, że błąd wyznaczenia stałej k_ψ powinien wynosić około $1 \cdot 10^{-4}$. Celem uzyskania większej pewności co do poprawności wyznaczenia tej stałej postanowiono określić jej wartość dwoma sposobami: pierwszym — przez obliczenie jej z wymiarów geometrycznych wzorca, drugim — przez porównanie z wzorcem jednej z wielkości elektrycznych.

W niniejszym artykule przedstawiono wyniki prac uzyskane w ramach porównania wartości stałej strumieniowej wzorca wykonanego w IME z wartością wzorca oporu.

2. PRZEGLĄD METOD POMIARU STAŁEJ STRUMIENIOWEJ

2.1. Uwagi ogólne

Bezwzględne wzorce strumienia magnetycznego typu Campbella są stosowane przy prądzie stałym lub zmiennym małej częstotliwości, wynoszącej zwykle 10 Hz lub 100 Hz [4, 5, 6, 7]. Wartość stałej strumieniowej tych wzorców określona jest dla prądu stałego. Wyznacza się ją najczęściej przez porównanie z innym wzorcem strumienia magnetycznego o takiej samej znamionowej stałej strumieniowej metodą balistyczną zerową lub różnicową [4, 8]. Błąd porównania zależy głównie od błędu wzorca odniesienia oraz nieczułości układu i w najbardziej korzystnym przypadku osiąga wartość rzędu kilku na sto tysięcy.

Stałą strumieniową k_ψ wzorca można także wyznaczyć przez pomiar współczynnika indukcyjności wzajemnej M wzorca metodami prądu zmiennego przy różnych częstotliwościach f , ekstrapolując ją następnie do częstotliwości $f = 0$. Wśród metod prądu zmiennego najbardziej liczną grupę stanowią metody mostkowe, jak np. Maxwella-Wiena, Maxwella-Campbella, Carey-Forstera, Scheringa-Engelhardta, itd. [9, 10, 11]. Przy zachowaniu szczególnych środków ostrożności, mających na celu eliminację wpływu pasożytniczych sprzężeń elektromagnetycznych, błąd pomiaru wartości współczynnika M zależy głównie od błędów elementów układu mostkowego. Wypadkowy błąd wyznaczenia M metodami mostkowymi osiąga w najlepszym razie wartość rzędu jeden na dziesięć tysięcy. Zaletą metod mostkowych jest przede wszystkim ich przydatność do pomiarów w stosunkowo szerokim przedziale wartości i częstotliwości. W pomiarach precyzyjnych wartości współczynnika M metody mostkowe stosuje się zwykle do porównań metodą podstawienia.

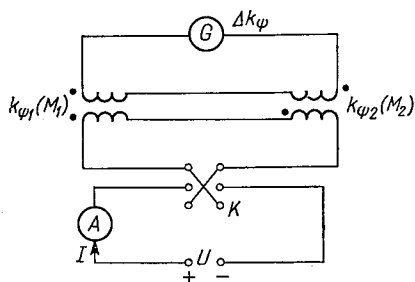
Równorzędną a nawet większą dokładność porównań wzorców można uzyskać w prostszych układach pomiarowych, jak np. Maxwella [12] czy Hartshorna [13]. Błąd porównania tymi metodami zależy przede wszystkim od błędu wzorca odniesienia i nieczułości układu. I tak np. przy wzorcu odniesienia o błędzie rzędu $1 \cdot 10^{-6}$ błąd porównania może osiągnąć wartość rzędu kilku na milion.

Stałą strumieniową wzorca można także wyznaczyć przez porównanie z wzorcem innej wielkości fizycznej, np. oporu elektrycznego. Najlepiej do tego celu nadaje się metoda Wennera [14] oraz Campbella [15]. Układy pomiarowe wykorzystujące te metody umożliwiają wykonanie porównań z błędem nie przekraczającym kilku na milion.

Niżej opisano bardziej szczegółowo kilka metod, najczęściej stosowanych za granicą przy precyzyjnych pomiarach stałej strumieniowej wzorców.

2.2. Metoda balistyczna różnicowa

Zasadę metody balistycznej różnicowej przedstawiono na rys. 1. Uzwojenia pierwotne wzorców strumienia magnetycznego połączone są szeregowo i zasilane ze źródła prądu stałego przez przełącznik K do zmiany kierunku prądu. Początki uzwojeń na schemacie oznaczono kropkami. Uzwojenia wtórne, połączone szeregowo i przeciwsobnie, dołączone



Rys. 1. Układ do porównań wzorców strumienia magnetycznego metodą balistyczną różnicową

są do miernika G , którym może być galwanometr balistyczny, pełny lub fluksomierz elektroniczny. Zmiana kierunku prądu I w uzwojeniach pierwotnych wywołuje odchylenie α_G wskaźnika, proporcjonalne do różnicy $\psi_2 - \psi_1$ strumieni sprzężonych z uzwojeniami wtórnymi; zatem poszukiwaną wartość k_{ψ_2} wyznacza się ze wzoru

$$k_{\psi_2} = k_{\psi_1} + \frac{k_{\Phi} \cdot \alpha_G}{I}, \quad (1)$$

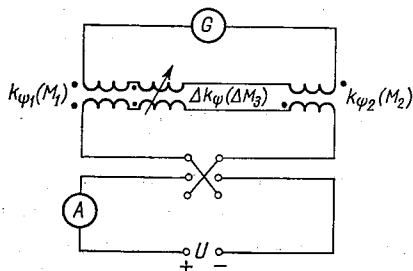
gdzie k_{Φ} — stała strumieniowa miernika G .

Jak wynika z równania (1), wskazanie miernika G będzie różnicą między stałymi k_{ψ_2} i k_{ψ_1} przy prądzie $I = 1$ A. Biorąc pod uwagę, że $k_{\psi_2} \approx k_{\psi_1}$, a $k_{\Phi} \cdot \alpha_G / I$ jest znacznie mniejsze od k_{ψ_1} , błąd wyznaczenia wartości stałej k_{ψ_2} zależy praktycznie tylko od błędu z jakim znana jest wartość stałej k_{ψ_1} . Wadą metody balistycznej różnicowej jest konieczność stosowania stosunkowo dużych wartości prądu I dla uzyskania wystarczająco dużych odchyleń α_G . Duże wartości prądu I mogą z kolei powodować niestabilność termiczną stałych k_{ψ_1} i k_{ψ_2} .

Układ taki stosowany jest we WNIIM-ie do porównań wzorców kontrolnych ze wzorcem bezwzględnym typu Campbella [4]. Różnica między stałymi strumieniowymi wzorców wyznaczana jest za pomocą galwanometru balistycznego. Błąd średni kwadratowy wyznaczenia wartości wzorca nie przekracza $\pm 1 \cdot 10^{-4}$.

2.3. Metoda balistyczna zerowa

Układ pomiarowy przedstawiony jest na rys. 2. Metoda ta różni się od poprzedniej tylko sposobem wyznaczenia różnicy stałych obu wzorców. Różnicę stałych strumieniowych $k_{\psi 1}$ i $k_{\psi 2}$ (lub współczynników indukcyjności wzajemnej M_1 i M_2) obu wzorców



Rys. 2. Układ do porównań wzorców strumienia magnetycznego metodą balistyczną zerową

wyrównuje się za pomocą precyzyjnie regulowanej indukcyjności wzajemnej ΔM_3 o niewielkiej wartości, ale o dużej rozdzielczości odczytu. Wartość ΔM_3 dobiera się tak długo, aż zmiana kierunku prądu w uzwojeniach pierwotnych nie wywołuje odchylenia wskaźnika G . Wartość $k_{\psi 2}$ wyznacza się ze wzoru

$$k_{\psi 2} = k_{\psi 1} + \Delta M_3. \quad (2)$$

Błąd wyznaczenia wartości $k_{\psi 2}$ zależy od niedokładności wyznaczenia wartości $k_{\psi 1}$, wartości ΔM_3 oraz od niedokładności pomiaru wywołanej nieczułością wskaźnika G .

W przypadku porównań wzorców o tej samej wartości znamionowej stałej strumieniowej, tj. $k_{\psi 2} \approx k_{\psi 1}$, błąd wyznaczenia wartości ΔM_3 odgrywa drugorzędną rolę. Przy odpowiednio dużej czułości wskaźnika G również błąd nieczułości układu można sprowadzić do pomijalnie małej wartości. Pozwala to na wykonywanie pomiarów przy mniejszych prądach w porównaniu z metodą balistyczną różnicową.

Wadą metody balistycznej zerowej jest potrzeba stosowania bardzo czułych wskaźników równowagi, jak np. fluksomierze elektroniczne, których obsługa jest stosunkowo kłopotliwa.

2.4. Metoda Hartshorna

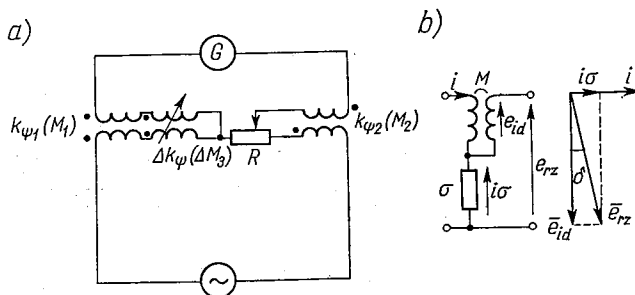
Metoda ta jest metodą zerową, stosowaną przy prądzie zmiennym. Układ Hartshorna przedstawiony na rys. 3a jest bardzo podobny do układu stosowanego przy metodzie balistycznej zerowej. Uzwojenia pierwotne dwu wzorców stałej strumieniowej $k_{\psi 1}$ i $k_{\psi 2}$ zasilane są prądem zmiennym. Uzwojenia wtórne połączone są szeregowo i przeciwsobnie poprzez wskaźnik zera W . W celu wyrównania różnic wartości k_{ψ} dołączona jest regulowana indukcyjność wzajemna ΔM_3 . Opornik R służy do nastawienia napięcia kompensującego różnicę spadków napięcia na zastępczych oporach strat σ_1 i σ_2 wzorców (rys. 3b). Warunki równowagi modułów i faz układu Hartshorna przedstawiają wzory

$$k_{\psi 2} = k_{\psi 1} + \Delta M_3, \quad (3)$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 + R. \quad (4)$$

Błąd systematyczny wyznaczenia $k_{\psi 2}$ zależy od błędu wartości wzorca $k_{\psi 1}$, błędu różnicy ΔM_3 oraz błędu nieczułości układu.

Metodą tą porównywano w *NPL* bezwzględny wzorec M wykonany dla Japonii z oryginalnym wzorcem Campbella [16]. Pomiar wykonano metodą podstawienia przy

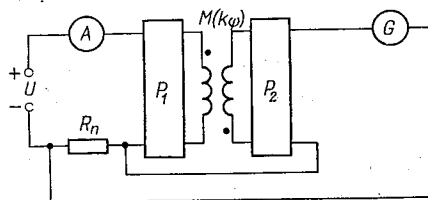


Rys. 3. Układ Hartshorna do porównań wzorców strumienia przy prądzie zmiennym: a) układ, b) schemat zastępczy obrazujący straty wzorca przy prądzie zmiennym małej częstotliwości oraz odpowiadający mu wykres wektorowy

częstotliwości 10 Hz. Błąd porównania oszacowano na ok. $\pm 1 \cdot 10^{-5}$, przy błędzie nieczułości układu $\pm 3 \cdot 10^{-6}$. Metodą tą porównywano także bezwzględne wzorce pierwotne w *NPL* i *NRC* za pośrednictwem trzeciego wzorca transfera [17]. Porównanie wykonano przy częstotliwości 10,8 Hz w *NPL* oraz przy 100 Hz w *NRC*. Błąd porównania oszacowano na $\pm 3 \cdot 10^{-6}$.

2.5. Metoda Wennera

Zasadę metody pomiaru, zaproponowanej przez Wennera, przedstawiono na rys. 4. Uzwojenie pierwotne wzorca M połączone jest szeregowo z opornikiem wzorcowym R_n i zasilane ze źródła prądu stałego poprzez specjalny układ przełączający P_1 . Uzwojenie



Rys. 4. Układ Wennera do porównania wzorca strumienia magnetycznego z wzorcem oporu

wtórne wzorca M połączone jest z opornikiem R_n poprzez galwanometr magnetoelektryczny G oraz przełącznik P_2 pracujący synchronicznie z przełącznikiem P_1 . W stanie równowagi układu, tj. gdy galwanometr nie odchyła się, wartość współczynnika indukcji wzajemnej M oraz stałej strumieniowej k_{ψ} wzorca wyznacza się ze wzoru

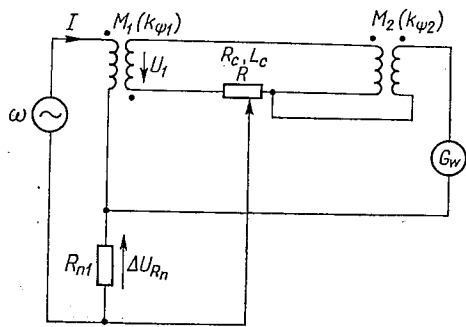
$$M = \frac{R_n}{4f} = k_{\psi}, \quad (5)$$

gdzie f — częstotliwość przełączania P_1 i P_2 .

Realizacja układu Wenna jest bardzo trudna, głównie ze względu na potrzebę kształtowania zmian prądu uzwojenia pierwotnego w czasie. W układzie tym wyznaczono w NBS wartość $1 \Omega_{abs}$ z błędem ok. $\pm 1 \cdot 10^{-5}$ za pomocą wzorca M o błędzie ok. $5 \cdot 10^{-6}$ [18]. Podobny układ stosowany był w tym samym celu także we WNIIM-ie [19].

2.6. Metoda Campbella

W metodzie tej porównuje się wzorec stałej strumieniowej $k_{\psi 1}$ z wzorcem oporu R_{n1} . Schemat układu przedstawiony jest na rys. 5. Uzwojenie pierwotne $k_{\psi 1}$ połączone jest szeregowo z wzorcowym opornikiem R_{n1} o wartości 1 oma. Napięcie U_1 indukowane



Rys. 5. Układ Campbella do porównania wzorca strumienia magnetycznego z wzorcem oporu

w uzwojeniu wtórnym wzorca $k_{\psi 1}$ jest porównywane ze spadkiem napięcia ΔU_{Rn} na oporniku R_{n1} . Dla uzyskania stanu równowagi porównywanych napięć przy stałej częstotliwości prądu zasilającego niezbędna jest regulacja oporu R_c oraz spadku napięcia na oporniku R . Warunki równowagi opisują wzory

$$\omega^2 \cdot k_{\psi 1} \cdot k_{\psi 2} = R_c \cdot R_{n1}, \quad (6)$$

$$k_{\psi 1} \cdot R = L_c \cdot R_{n1}, \quad (7)$$

gdzie:

$\omega = 2\pi f$ — pulsacja prądu zasilającego,

R_c — opór własny obwodu,

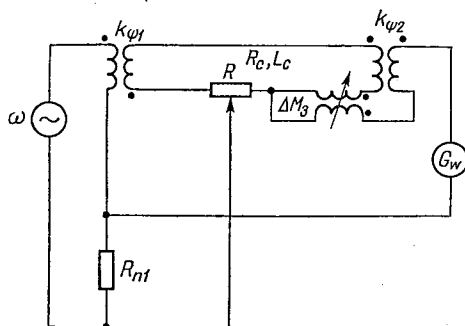
L_c — indukcyjność własna obwodu.

Powyższą metodą wyznaczono w NPL wartość jednostki oporu elektrycznego $1 \Omega_{abs}$ za pomocą bezwzględnego wzorca indukcyjności wzajemnej Campbella o wartości $k_{\psi} = 10 \text{ mWb/A}$ [20]. Błąd wyznaczenia wartości $1 \Omega_{abs}$ oszacowano na $\pm 15 \cdot 10^{-6}$, przy czym błąd wyznaczenia $k_{\psi 1}$ wynosił $\pm 10 \cdot 10^{-6}$.

3. KONCEPCJA METODY POMIAROWEJ

Jak wspomniano we wstępie, autorzy postawili sobie za zadanie wyznaczenie wartości stałej k_{ψ} wzorca strumienia magnetycznego, celem sprawdzenia wartości tej stałej wyznaczonej z wymiarów geometrycznych wzorca.

Wobec braku innego wzorca strumienia magnetycznego (indukcyjności wzajemnej) o stałej k_ψ znanej z odpowiednią dokładnością, autorzy postanowili wyznaczyć stałą k_ψ przez porównanie z wzorcem oporu elektrycznego metodą Campbella. Niezbędny przy tym porównaniu drugi wzorec strumienia magnetycznego zastąpiono wzorcem użytko-



Rys. 6. Zmodyfikowany układ Campbella do porównania wzorca strumienia magnetycznego z wzorcem oporu

wym strumienia. Różnicę między stałymi wzorca badanego i pomocniczego wyrównano za pomocą dekadowej indukcyjności wzajemnej ΔM_3 w układzie jak na rys. 6. Wówczas równanie (6), opisujące stan równowagi modułów w układzie Campbella, przyjmie postać

$$\omega^2 \cdot M^2 = \omega^2 \cdot k_\psi^2 = R_c \cdot R_{n1}. \quad (8)$$

Przyjęta przez autorów zasada pomiaru polegała zatem na wyrównaniu metodą Hartshorna wartości stałych $k_{\psi1} = k_{\psi2} + \Delta M_3 = k_\psi$, a następnie wyznaczeniu wartości k_ψ przez porównanie metodą Campbella z opornikiem wzorcowym 1 Ω . W tym przypadku wartość stałej k_ψ wzorca pomocniczego nie musi być dokładnie znana.

Równość wartości $k_{\psi1}$ i $k_{\psi2} + \Delta M_3$ oraz znajomość wartości R_{n1} , R_c i f warunkuje dokładność wyznaczenia wartości stałej $k_{\psi1}$.

Jako wzorec pomocniczy postanowiono wykorzystać grupę trzech wzorców użytkowych strumienia magnetycznego. Przydatność wzorców użytkowych do pomiarów przy prądzie zmiennym postanowiono stwierdzić przez wyznaczenie wartości ich stałych k_ψ przy prądzie stałym oraz zmian k_ψ ze zmianą częstotliwości prądu zmiennego.

Postanowiono wykonywać pomiary w następującej kolejności:

1) porównanie przy prądzie stałym, metodą balistyczną zerową, wzorców użytkowych między sobą oraz z bezwzględnym wzorcem strumienia magnetycznego wykonanym w Instytucie Metrologii Elektrycznej (IME);

2) porównanie przy prądzie zmiennym, metodą Hartshorna, wzorców użytkowych między sobą oraz z bezwzględnym wzorcem wykonanym w IME;

3) porównanie wzorców użytkowych i bezwzględnego wzorca strumienia magnetycznego ze wzorcem oporu przy prądzie zmiennym metodą Campbella;

4) wyznaczenie stosunku wartości oporów R_{n1} i R_c .

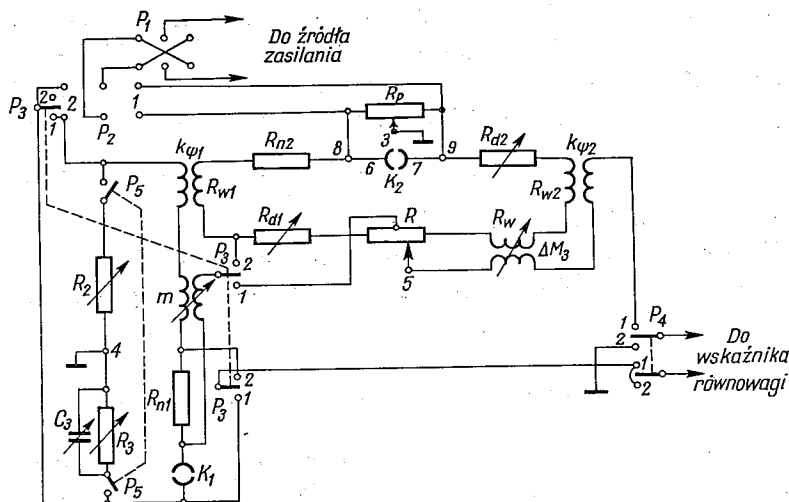
Tak pomyślana kolejność pomiarów pozwoliła wyznaczyć wartość liczbową stałej k_ψ wzorca dwoma sposobami:

a) bezpośrednio — przez porównanie ze wzorcem oporu (metodą Campbella),

b) pośrednio — przez porównanie z wzorcami użytkowymi metodą Hartshorna oraz balistyczną zerową, przy czym poprawne wartości k_ψ wzorców użytkowych wyznaczono także przez porównanie z wzorcem oporu.

densatora dekadowego C_3 . Uziemione są także obudowy wskaźników zera, generatora zasilającego, generatora częstotliwości wzorcowej, obniżacza częstotliwości, wzmacniacza, oscylografu oraz metalowe obudowy oporników.

Dla ograniczenia zmian konfiguracji połączeń przy zmianie metody pomiarów, a tym samym dla maksymalnego ograniczenia i ustalenia szkodliwych sprzężeń elektromagnetycznych między elementami biorącymi udział w pomiarach, wszelkie zmiany wykonano



Rys. 8. Ideowy schemat połączeń uniwersalnego układu, wykonanego w Instytucie Metrologii Elektrycznej do porównań wzorców strumienia magnetycznego metodą balistyczną zerową, Hartshorna i Campbella

za pomocą odpowiednich połączeń przedstawionych na rys. 8. Przy prądzie stałym ponadto wszelkie połączenia obwodu pomiarowego nie powinny wprowadzać do obwodu zmiennych wartości oporów styków. Stąd przełączenia te wykonywane są za pomocą połączeń kołkowych o małych wartościach oporu styku.

4.1. Układy zasilania i kontroli stałości częstotliwości

Źródłem zasilania prądu stałego jest bateria akumulatorów o napięciu 12 V i pojemności 80 Ah.

Przyjęcie częstotliwości zasilania układu pomiarowego zależy od wielu czynników. I tak, celem zmniejszenia szkodliwych wpływów pojemnościowych częstotliwość źródła zasilającego powinna być możliwie mała. Jednak nie może być ona wybrana dowolnie. Wartość częstotliwości wyznacza się z równania równowagi układu Campbella (6). Wskazany byłby wybór częstotliwości 100 Hz, ponieważ układ pomiarowy można by zasiląć przez dzielnik częstotliwości z generatora kwarcowego, zapewniającego lepszą stabilność częstotliwości niż przy zasilaniu z generatora RC. Jak wykazały próby wstępne, zewnętrzne pola elektromagnetyczne o częstotliwości 100 Hz są w laboratorium tak duże, że praktycznie uniemożliwiają poprawne wykonanie pomiarów.

Zdecydowano się wobec tego na częstotliwość 112,5 Hz, gdyż wtedy równowaga układu Campbella zachodzi dla oporu R_c wynoszącego 50 Ω . Wartość tę łatwo można uzyskać i precyzyjnie wyznaczyć metodą podstawienia, za pomocą mostka Wheatstone'a i dwóch równolegle połączonych 100-omowych oporników wzorcowych. Ponadto kontrola częstotliwości 112,5 Hz jest stosunkowo łatwa.

Przy pomiarach prądem zmiennym układ zasilano z generatora RC poprzez dopasowujący wzmacniacz mocy. Stabilność częstotliwości generatora wynoszącą $\pm 0,15\%/godz$ kontrolowano przez porównanie z częstotliwością generatora kwarcowego, o niestaości częstotliwości mniejszej niż $\pm 2 \cdot 10^{-7}/24$ godz. Częstotliwość 200 kHz generatora kwarcowego obniżano do wartości 100 Hz za pomocą powielacza-obniżacza częstotliwości, a następnie porównywano z częstotliwością 112,5 Hz za pomocą oscyloskopu. Otrzymane na ekranie krzywe Lissajou o stosunku częstotliwości $\frac{9}{8}$ dawały obraz stabilny, nie przesuwający się w czasie wykonywania pomiaru.

Zawartość harmoniczných w napięciu zasilającym o częstotliwości 112,5 Hz kontrolowano miernikiem zniekształceń nieliniowych i stwierdzono, że nie przekracza ona 0,4%.

4.2. Wzorce strumienia magnetycznego k_{ψ_1} i k_{ψ_2}

Zgodnie z oznaczeniami przyjętymi na rys. 8 wzorec k_{ψ_1} stanowiła grupa trzech wzorców użytkowych firm Cambridge, Hartmann-Braun i Toczelektropribor. Znamionowe stałe strumieniowe tych wzorców wynoszą 10 mWb/A, a klasa dokładności w zależności od wzorca (0,1...0,5)%. Konstrukcje wspomnianych wzorców są różne. I tak wzorec firmy HB stanowi cewka kołowa o przekroju prostokątnym, nawinięta na porcelanowym karkasie przy użyciu dwóch jednakowych równoległych drutów. Indukcyjność własna L_1 uzwojenia pierwotnego jest równa indukcyjności własnej L_2 uzwojenia wtórnego i tylko nieco większa od indukcyjności wzajemnej M (stałej strumieniowej k_{ψ}), dla wzorca HB $L_1 = L_2 \cong M = 10$ mH, $R_1 = R_2 = 7$ Ω . Zasadniczą wadą takiej konstrukcji wzorca jest duża pojemność między uzwojeniami, co ogranicza zastosowanie wzorca przy prądzie zmiennym do małych częstotliwości.

Wzorec firmy Toczelektropribor (T) składa się z dwóch identycznych współosiowych cewek nawiniętych licą na wspólnym bakelitowym karkasie. Indukcyjności własne cewek są większe niż indukcyjność wzajemna i dla wzorca T wynoszą $L_1 = L_2 = 20$ mH; $R_1 = R_2 = 3,7$ Ω . Wzorec T może być używany przy częstotliwościach do 5 kHz, przy czym zmiana współczynnika indukcyjności wzajemnej M nie przekracza 0,2%.

Wzorec firmy Cambridge (C) jest podobnej konstrukcji jak wzorec T, lecz uzwojenia są wykonane drutem o różnej średnicy. Dane tego wzorca są następujące: $L_1 \cong 4,6$ mH, $L_2 \cong 41$ mH, $R_1 \cong 2,2$ Ω , $R_2 \cong 10,8$ Ω .

Wzorcem badanym, oznaczonym k_{ψ_2} na rys. 8, był wykonany w Instytucie Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej wzorec strumienia magnetycznego typu Campbella [22]. Uzwojenie pierwotne tego wzorca stanowią dwie jednakowe jednowarstwowe cewki, wykonane z gołego miedzianego drutu o średnicy znamionowej 0,5 mm, nawiniętego ze skokiem 1 mm na porcelanowej rurze o średnicy zewnętrznej ok. 299 mm. Każda

z tych cewek posiada 75 zwojów i długość 75 mm. Rozstęp między cewkami wynosi 150 mm. Uzwojenie wtórne jest wielowarstwową cewką o 489 zwojach i średniej średnicy ok. 437 mm, wykonaną z drutu DNE $\varnothing 0,40$ mm, nawiniętego w rowku porcelanowego pierścienia.

Proporcje wymiarów wzorca typu Campbella są tak dobrane, że uzwojenie wtórne, ustawione symetrycznie względem dwóch połówek uzwojenia pierwotnego, znajduje się w obszarze wolnym od linii sił pola magnetycznego, wytworzonego przez uzwojenie pierwotne. Konstrukcja taka charakteryzuje się zarówno małym wpływem niedokładności ustawienia uzwojenia wtórnego, jak i małymi pojemnościami uzwojeń, a w konsekwencji małym wpływem częstotliwości na wartość stałej k_ψ wzorca.

Parametry elektryczne wzorca wykonanego w IME są następujące: uzwojenie pierwotne — $R_1 = 12 \Omega$, $L_1 = 5$ mH, $C_1 = 200$ pF; uzwojenie wtórne — $R_2 = 98 \Omega$, $L_2 = 260$ mH, $C_2 = 500$ pF; pojemność między uzwojeniami $C_{12} = 10$ pF; znamionowa stała strumieniowa $k_{\psi_{zn}} = 10$ mWb/A, rzeczywista stała strumieniowa wyznaczona z wymiarów geometrycznych wzorca $k_\psi = 10,009 \pm 0,001$ mWb/A na poziomie ufności $p = 0,95$.

4.3. Dekadowa indukcyjność wzajemna ΔM_3

W celu wyrównania wartości k_{ψ_1} i k_{ψ_2} metodą balistyczną lub Hartshorna, do obwodu pomiarowego dołączono astatyzowaną indukcyjność wzajemną ΔM_3 regulowaną, o wartości $0 \div 100 \mu\text{H}$ i rozdzielczości odczytu $\pm 0,05 \mu\text{H}$. Błąd graniczny systematyczny tej indukcyjności wynosi $\pm \left(0,3 + \frac{10}{h}\right) \%$, gdzie h — wartość odczytana w μH .

4.4. Opornik R_{n1}

W pomiarach używano czterozaciskowego opornika wzorcowego prądu stałego kl. 0,01. Opornik wykonany jest z drutu manganinowego, nawiniętego bifilarnie na porcelanowym karkasie. Opornik jest starzony sztucznie i naturalnie tak, że zapewniona jest jego duża stabilność oporu w czasie. Wartość oporu została wyznaczona w PKNiM z błędem nie przekraczającym $\pm 0,003\%$. Wartość stałej czasowej opornika nie przekracza $150 \cdot 10^{-9}$ s. Obciążenie oporu w powietrzu nie powinno przekraczać 1 W.

4.5. Potencjometr R

Potencjometr ten służy do ostatecznego wyrównania składowych rzeczywistych przy równoważeniu układu Hartshorna i Campbella. Wartość oporu potencjometru R nie musi być dokładnie znana, ani też dokładnie odczytywana. Natomiast jego indukcyjność własna musi być znikomo mała oraz niezmienna ze zmianą położenia szczotki potencjometru. Całkowita wartość oporu R , wymagana do zrównoważenia wspomnianych układów, zależy głównie od zastępczych oporów strat wzorców k_{ψ_1} i k_{ψ_2} . W przypadku wzor-

ców użytych do pomiarów w IME wartość oporu potencjometru R powinna wynosić około $1...3 \Omega$ w układzie Campbella i około $0,05 \Omega$ w układzie Hartshorna, przy dużej rozdzielczości nastawienia. Aby pogodzić te wymagania, opornik R wykonano jako dwuczęściowy. Składa się on z opornika R_{d1} (rys. 8) regulowanego skokowo w zakresie $1...3 \Omega$ z rozdzielczością nastawienia $0,1 \Omega$ oraz potencjometru R o oporze całkowitym około $0,11 \Omega$.

Potencjometr R wykonano bezindukcyjnie nawijając drut manganinowy o średnicy 2 mm na obwodzie tekstolitowego krążka o średnicy 250 mm i grubości 18 mm.

4.6. W a r i o m e t r m

Wariometr m (z rys. 8) służy do skompensowania wpływu indukcyjności pasożytniczych, pojawiających się w układzie Campbella w wyniku zmiany połączeń w stosunku do układu Hartshorna. Wariometr ten jest niezbędny do ostatecznego zrównoważenia układu Campbella. Maksymalna wartość jego współczynnika indukcyjności wzajemnej wynosi kilka mikrohenrów i nie musi być dokładnie znana ani też odczytywana.

Uzwojenie pierwotne wariometru stanowią 4 zwoje miedzianego drutu nawojowego o średnicy 1 mm, nawinięte na nieruchomym tekstolitowym karkasie o średnicy 28 mm. Uzwojenie wtórne, umieszczone obrotowo wewnątrz uzwojenia pierwotnego, posiada 6 zwojów miedzianego drutu o średnicy 0,1 mm, nawiniętych na tekstolitowym karkasie o średnicy 23 mm.

4.7. W s k a ź n i k i z e r a

Wskaźnikiem równowagi przy pomiarach prądem zmiennym był igłowy galwanometr wibracyjny, o czułości prądowej około $700 \text{ mm}/\mu\text{A.m}$ i napięciowej $3,50 \text{ mm}/\mu\text{V.m}$, dla częstotliwości 50 Hz. Szerokość krzywej rezonansu — 1,5%. W czasie pomiarów galwanometr doregulowywano do częstotliwości napięcia zasilającego układ pomiarowy.

Przy pomiarach metodą balistyczną zerową jako wskaźnika równowagi używano fotoelektrycznego fluksomierza o czułości 5 działek/ μWb .

4.8. W z o r z e c o p o r u 50 Ω

Opór wzorcowy o wartości 50 omów uzyskano przez połączenie równoległe dwóch oporników wzorcowych prądu stałego o wartościach 100 omów. Poprawne wartości oporników 100-omowych wyznaczono przez porównanie z oporem wzorcowym, sprawdzonym przez PKNiM. Poprawną wartość oporu 50 omów wyznaczono z błędem nie przekraczającym $\pm 0,005\%$.

4.9. O p o r n i k i R_{n2} i R_{d2}

Przy częstotliwości zasilania $f = 112,5 \text{ Hz}$ równowaga układu Campbella następuje wtedy, gdy opór obwodu R_c wynosi około 50 omów. Na opór tego obwodu składają się opory uzwojenia wtórnego wzorca $k_{\psi 1}$, pierwotnego wzorca $k_{\psi 2}$ i ΔM_3 oraz przewo-

dów łączących. Uzupełnienie oporu do koniecznej wartości 50 omów wykonane jest przy użyciu oporników manganinowych R_{n2} , R_{d2} , i R_{d1} . Opornik R_{n2} o stałej wartości 10 omów jest nawinięty bifilarnie na porcelanowym karkasie. Opornik R_{d2} , regulowany w przedziale od 1000 do 10 omów z rozdzielczością $1 \cdot 10^{-4}$ oma, nawinięty jest bifilarnie na porcelanowych karkasach drutem manganinowym. Szeregowe połączenie oporów miedzianych z manganinowymi zapewnia zmniejszenie zmiany wartości oporu, wywołanej ewentualnymi zmianami temperatury otoczenia.

5. SPOSÓB WYKONANIA POMIARÓW

W celu precyzyjnego wyznaczenia wartości stałej k_ψ badanego wzorca strumienia magnetycznego, ustalono następujący tok postępowania:

- 1) porównanie wartości obu stałych strumieniowych wzorców $k_{\psi 1}$ i $k_{\psi 2}$ metodą balistyczną zerową;
- 2) porównanie wartości stałych strumieniowych wzorców $k_{\psi 1}$ i $k_{\psi 2}$ metodą Hartshorna;
- 3) porównanie wzorców strumienia magnetycznego z 1-omowym wzorcem oporu w układzie Campbella;
- 4) wyznaczenie oporu obwodu R_c przez porównanie z wzorcem 50-omowym za pomocą prądu stałego.

Porównania opornika 50-omowego z opornikiem 1-omowym nie wykonywano, ponieważ wartości oporników 100-omowych odtwarzające wartość 50 Ω były znane z dokładnością wystarczającą w rozpatrywanym przypadku.

Celem zmniejszenia sprzężeń elektromagnetycznych generator zasilający i wzmacniacz mocy umieszczono w odległości ok. 5 m od układu pomiarowego. W odległości ok. 1 m od nich znajdował się generator częstotliwości wzorcowej wraz z całym układem do kontroli stałości częstotliwości.

Wzorzec $k_{\psi 1}$ ustawiono na drewnianej podstawie na wysokości ok. 1 m od podłogi w odległości ok. 2 m od układu pomiarowego. Oś magnetyczna wzorca ustawiona była poziomo. Wzorzec $k_{\psi 2}$ ustawiono w odległości ok. 2 m od układu pomiarowego (ok. 5 m od wzorca $k_{\psi 1}$) również na drewnianej podstawie. Kierunek osi magnetycznej wzorca — pionowy.

W pobliżu układu pomiarowego umieszczono tylko elementy niezbędne do regulacji i odczytu, tj. dekadową indukcyjność wzajemną ΔM_3 , oporniki R_{d1} , R_{d2} , R i wskaźniki zera.

Celem wyznaczenia wpływu temperatury na uzyskiwane wyniki porównań, pomiary wykonano w temperaturze 16, 18 i 20°C. W pomieszczeniu laboratoryjnym utrzymywano temperaturę z dokładnością $\pm 0,5^\circ\text{C}$, a wilgotność względna wahała się w przedziale 40 ÷ 80%.

Przed przystąpieniem do wykonania pomiarów dla zmniejszenia oporu styku przełączników kołkowych nasmarowano je smarem. Po tej czynności wyregulowano wstępnie elementy gałęzi Wagnera. Sprawdzono następnie doświadczalnie wpływy poszczególnych elementów na siebie oraz zmianę stanu równowagi układu. Nie zauważono przy tym wpływu obserwatora lub innych czynników na stan równowagi układu.

Porównanie wzorców k_{ψ_1} i k_{ψ_2} metodą balistyczną wykonano przy przełącznikach P_2 , P_3 i P_4 (rys. 8) w położeniu 1, przełączniku P_5 w pozycji otwarty i kołkach K_1 i K_2 wyjętych z gniazd. Układ pomiarowy zasilano prądem stałym. Kierunek prądu zmieniano przełącznikiem P_1 . Dla uzyskania stanu równowagi regulowano indukcyjność ΔM_3 . Wskaźnikiem równowagi był fotoelektryczny fluksomierz.

Porównanie wzorców k_{ψ_1} i k_{ψ_2} metodą Hartshorna wykonano przy tym samym położeniu wszystkich przełączników, z tym że układ pomiarowy zasilano prądem zmiennym o częstotliwości 112,5 Hz, a wskaźnikiem zera był galwanometr wibracyjny, doregulowany do tej częstotliwości pomiarowej. Uzyskanie stanu równowagi następuje na drodze kolejnej regulacji potencjometru R i ewentualnie indukcyjności regulowanej ΔM_3 .

Porównanie wzorców k_{ψ_1} i k_{ψ_2} z 1-omowym wzorcem oporu w układzie Campbella następowało, gdy przełączniki P_2 i P_3 były w położeniu 2, przełącznik P_4 w położeniu 1, przełącznik P_5 w położeniu zamknięty, połączenia kołkowe K_1 i K_2 zamknięte. Układ zasilano prądem zmiennym o częstotliwości 112,5 Hz. Wskaźnikiem zera był galwanometr wibracyjny. Stan równowagi uzyskano regulując opór R_{d2} , potencjometr R oraz wiariometr m .

Wyznaczenie oporu R_c obwodu wykonano przy przełącznikach P_2 i P_3 w położeniu 1, przełączniku P_4 w położeniu 2 i otwartych połączeniach kołkowych K_1 i K_2 . Po odłączeniu zasilania od zacisków 8 i 9 wyznaczono metodą podstawienia opór między nimi za pomocą precyzyjnego mostka Wheatstone'a i wzorca oporu 50 omów.

Jak już wspomniano, do wykonywania pomiarów użyto czterech wzorców strumienia magnetycznego — trzy wzorce użytkowe oraz wzorzec bezwzględny, wykonany w IME. Pomiary wykonywano według podanego wyżej harmonogramu cyklicznie w ciągu kilku dni, przy czym w ciągu jednego dnia wykonywano po kilka cykli porównań.

6. WYNIKI PORÓWNAŃ

6.1. Metoda balistyczna zerowa

Wyniki cyklicznych porównań wzorców metodą balistyczną zerową, uzyskane w ciągu jednego dnia jak i w dwóch różnych dniach, nie wykazywały zmian wartości różnicy Δk_{ψ} . Spowodowane to było stosunkowo małą czułością układu pomiarowego wynoszącą około $\pm 2 \text{ A} \cdot \text{dz}/\mu\text{Wb}$. Wobec tego pomiary wykonywano tylko w ciągu dwóch dni, przy czym w ciągu jednego dnia wykonano trzy cykle porównań. Wyniki porównań cyklicznych, uzyskane w jednym dniu, przedstawiono w tablicy 1. W nawiasach podano wartości różnic Δk_{ψ} , w których wyeliminowano błąd przypadkowy metodą Thiessena [23].

W metodzie tej wartość Δk_{ψ} jest bezpośrednio odczytywana z dekadowej indukcyjności wzajemnej ΔM_3 (rys. 8). Dokładność wyznaczenia wartości Δk_{ψ} zależy więc od dokładności indukcyjności ΔM_3 , czułości układu i powtarzalności wyników pomiarów. Jak widać z tablicy 1, wartości Δk_{ψ} wahają się w przedziale od około $4 \mu\text{Wb}/\text{A}$ do około $60 \mu\text{Wb}/\text{A}$. Błąd graniczny systematyczny wyznaczenia wartości Δk_{ψ} za pomocą indukcyjności dekadowej ΔM_3 wynosi odpowiednio $\pm 3\%$ i $\pm 0,5\%$. Błąd nieczułości układu pomiarowego, przy czułości $\pm 2 \text{ A} \cdot \text{dz}/\mu\text{Wb}$ oraz błędzie odczytu wskazania fluksomierza $\pm 0,5$ działki, wynosi odpowiednio $\pm 6\%$ i $\pm 0,4\%$. Błąd przypadkowy pominięto, ponie-

waż nie zauważono jego wpływu na uzyskiwane wyniki pomiarów. Całkowity statystyczny błąd pomiaru wartości Δk_ψ wyznaczono z zależności

$$\delta_s(\Delta k_\psi) = \pm \sqrt{(\delta_{ss}\Delta k_\psi)^2 + (\delta_{sc}\Delta k_\psi)^2}, \quad (9)$$

gdzie:

$\delta_{ss}\Delta k_\psi$ — statystyczny systematyczny błąd Δk_ψ ,

$\delta_{sc}\Delta k_\psi$ — statystyczny błąd nieczułości układu pomiarowego.

Założono również jednakowe prawdopodobieństwo wystąpienia błędu w całym przedziale $\pm \Delta_g(\Delta k_\psi)$. Po podstawieniu odpowiednich wartości do równania (9) otrzymano $\delta_s(\Delta k_\psi) = \pm (0,7...8)\%$ na poziomie ufności $p = 0,95$.

Tablica 1

Wyniki porównań wzorców strumienia magnetycznego metodą balistyczną zerową

Pierwszy dzień pomiarów, $t_{otocz} = 16^\circ\text{C}$, $I_{zasilania} = 0,8\text{A} = \text{const}$

Wzorzec mierzony Wzorzec odniesienia	$\Delta k_\psi [\mu\text{Wb/A}]$				$k_{\psi \text{IME}}$ [mWb/A]
	C	HB	T	IME	
C	—	−44,5	−3,8	+17,0	10,0091
HB	+44,5	—	+40,9 (+40,7)	+61,0 (+61,4)	10,0080
T	+3,8	−40,9 (−40,7)	—	+21,2 (+20,7)	10,0091
IME	−17,0	−61,0 (−61,4)	−21,2 (−20,7)	—	średnia 10,0087

Korzystając z równania (2) wyznaczono również bezwzględną wartość stałej $k_{\psi 1}$ jednego z wzorców, jeżeli znana była stała $k_{\psi 2}$ drugiego wzorca. W prawej części tablicy 1 przedstawiono wartości stałej strumieniowej $k_{\psi \text{IME}}$ wyznaczone jako suma algebraiczna wartości stałej $k_{\psi sr}$ wzorca użytkowego, określonej metodą Campbella (patrz rozdz. 6.3) i różnicy $\Delta k_{\psi \text{IME}}$ zmierzonej metodą balistyczną zerową.

Systematyczny statystyczny błąd wyznaczenia stałej $k_{\psi 1}$ z równania (2) określa wzór

$$\delta_{ss}k_{\psi 1} = \pm 2 \sqrt{(\delta_{ss}k_{\psi 2})^2 + \left[\frac{\Delta k_\psi}{k_{\psi 1}} \delta_{ss}(\Delta k_\psi) \right]^2}, \quad p = 0,95. \quad (10)$$

Podstawiając do równania (10) wartości Δk_ψ i odpowiadające im $\delta_{ss}(\Delta k_\psi)$ podane powyżej otrzymuje się, że wartość $\Delta k_\psi \cdot \delta_{ss}(\Delta k_\psi) / k_{\psi 1}$ wynosi kilka na sto tysięcy. Stąd wniosek, że wartość Δk_ψ jest wyznaczona z wystarczającą dokładnością, jeżeli $\delta_{ss}k_{\psi 1}$ jest $\geq \pm 1 \cdot 10^{-4}$.

6.2. Metoda Hartshorna

Pomiary metodą Hartshorna wykonywano w ciągu pięciu dni, po pięć cykli porównań dziennie. W tablicach 2 i 3 podano przykładowo wyniki pomiarów uzyskane w pierwszym i piątym dniu pomiarów. Wartości podane w tych tablicach są średnimi arytmetycznymi różnicami Δk_ψ z pięciu cykli pomiarowych. W nawiasach podano wartości Δk_ψ , w których błędy przypadkowe wyeliminowano metodą Thiessena.

Tablica 2

Wyniki porównań wzorców strumienia magnetycznego metodą Hartshorna
uzyskane w pierwszym dniu pomiarów

$t_{otocz} = 16^\circ\text{C}$, $f = 112,5 \text{ Hz}$, $I_{zasil} = 50 \text{ mA}$

Wzorzec mierzony Wzorzec odniesienia	$\Delta k_\psi [\mu\text{Wb/A}]$				$k_{\psi \text{ IME}}$ [mWb/A]
	C	HB	T	IME	
C	—	-44,15 (-44,1)	-3,62 (-3,8)	+16,5 (+16,3)	10,0084
HB	+44,15 (+44,1)	—	+40,35 (+40,3)	+60,2 (+60,4)	10,0070
T	+3,62 (+3,8)	-40,35 (-40,3)	—	+19,95 (+20,1)	10,0085
IME	-16,5 (-16,3)	-60,2 (-60,4)	-19,95 (-20,1)	—	średnia 10,0080

Tablica 3

Wyniki porównań wzorców strumienia magnetycznego metodą Hartshorna
uzyskane w piątym dniu pomiarów

$t_{otocz} = 20^\circ\text{C}$, $f = 112,5 \text{ Hz}$, $I_{zas} = 50 \text{ mA}$

Wzorzec mierzony Wzorzec odniesienia	$\Delta k_\psi [\mu\text{Wb/A}]$				$k_{\psi \text{ IME}}$ [mWb/A]
	C	HB	T	IME	
C	—	-44,1	-4,05 (-4,0)	+16,2 (+16,5)	10,0092
HB	+44,1	—	+40,1	-60,3 (-60,6)	10,0067
T	+4,05 (+4,0)	-40,1	—	+20,4 (+20,5)	10,0092
IME	-16,2 (-16,5)	-60,3 (-60,6)	-20,4 (-20,5)	—	średnia 10,0084

Porównując wyniki pomiarów wartości Δk_ψ otrzymane metodą balistyczną zerową (tabl. 1) z wynikami uzyskanymi metodą Hartshorna (tabl. 2 i 3), daje się zauważyć, że wartości Δk_ψ uzyskane przy prądzie zmiennym są średnio mniejsze o około $0,5 \mu\text{Wb/A}$ od wartości Δk_ψ przy prądzie stałym. Wyjątek stanowi porównanie wzorców IME-HB, gdzie różnica ta osiąga średnio wartość $1 \mu\text{Wb/A}$. Zaobserwowane zmiany wartości Δk_ψ spowodowane są prawdopodobnie większym współczynnikiem częstotliwościowym wzorców użytkowych niż wzorca wykonanego w IME. Dotyczy to szczególnie wzorca firmy Hartmann-Braun, na co zwrócono już uwagę w p. 4.2.

Ze względu na identyczny tok postępowania przy pomiarach metodą Hartshorna, jak przy metodzie balistycznej zerowej, analiza błędów jest również identyczna. Błąd wyznaczenia wartości Δk_ψ zależy więc od błędu dekadowej indukcyjności wzajemnej ΔM_3 (rys. 8), nieczułości układu oraz błędu przypadkowego. Błąd indukcyjności ΔM_3 zależy od wartości mierzonej Δk_ψ i w rozpatrywanym przypadku waha się w przedziale od ok. $\pm 0,5\%$ dla $\Delta k_\psi = 60 \mu\text{Wb/A}$, do ok. $\pm 3\%$ dla $\Delta k_\psi = 4 \mu\text{Wb/A}$. Czułość układu wynosiła ok. $\pm 20 \text{ A} \cdot \text{dz}/\mu\text{Wb}$, a stąd błąd nieczułości odpowiednio $\pm 0,1\%$ i $\pm 1\%$. Błąd przypadkowy wyznaczenia wartości Δk_ψ na podstawie pięciu cykli porównań, wykonanych w ciągu jednego dnia, wynosi odpowiednio $\pm 0,2\%$ i $\pm 2\%$. Całkowity statystyczny błąd wyznaczenia wartości Δk_ψ wynosi $\delta_s(\Delta k_\psi) = \pm (0,5...4)\%$, $p = 0,95$.

Podobnie jak w metodzie balistycznej zerowej, również w metodzie Hartshorna wyznaczono wartość stałej $k_{\psi \text{ IME}}$ korzystając z równania (3). Otrzymane wyniki podano w prawej części tablic 2 i 3.

6.3. Metoda Campbella

Jak już wspomniano, za pomocą układu Campbella wyznaczono zarówno stałą $k_{\psi \text{ IME}}$ wzorca wykonanego w IME, jak i stałe wzorców użytkowych. Pomiary metodą Campbella wykonywano w połączeniu z pomiarami wykonywanymi metodą Hartshorna. Stąd ta sama ilość dni i cykli pomiarowych. Przykładowo przedstawiono w tablicach 4 i 5 wyniki porównań uzyskane w pierwszym i piątym dniu pomiarów. W tablicy 6 zestawiono wyniki pomiarów stałej strumieniowej wzorca wykonanego w IME, uzyskane różnymi metodami w poszczególnych dniach pomiarów. Wyniki te nie wykazują widocznej zależności od zmian temperatury otoczenia. Rozrzuty wyników pomiarów, otrzymanych w poszczególnych dniach, przypisuje się błędom przypadkowym. W tej sytuacji stałą $k_{\psi \text{ IME}}$ wyznaczono jako średnią arytmetyczną z wyników otrzymanych w poszczególnych dniach.

Średni kwadratowy błąd systematyczny względny określenia wartości stałej $k_{\psi \text{ IME}}$ metodą Campbella wyznaczono obliczając pochodne cząstkowe wyrażenia (8) względem R_c , R_{n1} oraz f i podstawiając do wzoru

$$\delta_{ss} k_\psi = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial k_\psi}{\partial R_c} \frac{R_c}{k_\psi} \delta_{ss} R_c \right)^2 + \left(\frac{\partial k_\psi}{\partial R_{n1}} \frac{R_{n1}}{k_\psi} \delta_{ss} R_{n1} \right)^2 + \left(\frac{\partial k_\psi}{\partial f} \frac{f}{k_\psi} \delta_{ss} f \right)^2} \quad (11)$$

Stąd otrzymano

$$\delta_{ss} k_\psi = \pm \sqrt{\frac{1}{4} [(\delta_{ss} R_c)^2 + (\delta_{ss} R_{n1})^2] + (\delta_{ss} f)^2}, \quad (12)$$

gdzie: $\delta_{ss} R_c$, $\delta_{ss} R_{n1}$ i $\delta_{ss} f$ — odpowiednio błędy wyznaczenia oporu obwodu R_c , wzorcowania opornika 1-omowego R_{n1} oraz określenia częstotliwości f .

Tablica 4

Wyniki pomiarów stałej strumieniowej k_ψ wzorców metodą
Campbella uzyskane w pierwszym dniu pomiarów
 $t_{otocz} = 16^\circ\text{C}$, $f = 112,5 \text{ Hz}$, $I_{zasil} = 200 \text{ mA}$

Wzorzec mierzony	Wzorzec odniesienia	k_ψ	$k_{\psi sr}$
		mWb/A	mWb/A
C	HB	9,9936	9,9921
	T	9,9912	
	IME	9,9914	
HB	C	9,9500	9,9466
	T	9,9466	
	IME	9,9440	
T	C	9,9882	9,9884
	HB	9,9886	
	IME	9,9884	
IME	C	10,0094	10,0088
	T	10,0087	
	HB	10,0085	

Tablica 5

Wyniki pomiarów stałej strumieniowej wzorców metodą
Campbella uzyskane w piątym dniu pomiarów
 $t_{otocz} = 20^\circ\text{C}$, $f = 112,5 \text{ Hz}$, $I_{zasil} = 200 \text{ mA}$

Wzorzec mierzony	Wzorzec odniesienia	k_ψ	$k_{\psi sr}$
		mWb/A	mWb/A
C	HB	9,9896	9,9927
	T	9,9928	
	IME	9,9956	
HB	C	9,9456	9,9461
	T	9,9480	
	IME	9,9446	
T	C	9,9888	9,9887
	HB	9,9888	
	IME	9,9886	
IME	C	10,0114	10,0094
	T	10,0088	
	HB	10,0080	

Tablica 6

Zestawienie wyników pomiarów stałej strumieniowej $k_{\psi \text{ IME}}$ wzorca IME uzyskane różnymi metodami (bez uwzględnienia dokładności pomiarów)

Nr kolejny dnia pomiaru	Temp. otocz. °C	$k_{\psi \text{ IME}}$ [mWb/A]		
		Metoda pomiaru		
		Campbella	Hartshorna	Balistyczna zerowa
1	16	10,0088	10,0080	10,0087
2	16	10,0088	10,0092	10,0087
3	20	10,0084	10,0087	—
4	18	10,0091	10,0092	—
5	20	10,0094	10,0084	—
średnia		10,0089	10,0087	10,0087

Wartość oporu R_c wyznaczono z zależności

$$R_c = R_{n50} \left(1 + \frac{\Delta R_m}{R_m} \right), \quad (13)$$

gdzie:

R_{n50} — rzeczywista wypadkowa wartość oporu dwóch, równolegle połączonych, 100-omowych oporników wzorcowych,

R_m — odczyt dekady porównawczej mostka Wheatstone'a przy pomiarze oporu R_{n50} ,

ΔR_m — zmiana wartości oporu dekady porównawczej, potrzebna do uzyskania równowagi mostka przy pomiarze oporu R_c .

Obliczając odpowiednie pochodne równania (13) wyznaczono wyrażenie na błąd $\delta_{ss} R_c$. Podstawiając to wyrażenie do wzoru (12) oraz biorąc pod uwagę, że błąd $\delta_{ss} R_{n50}$ wzorcowania obydwóch 100-omowych oporników był identyczny, otrzymano ostatecznie

$$\delta_{ss} k_{\psi} = \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left\{ \frac{(\delta_{ss} R_{n50})^2}{2} + \left(\frac{\Delta R_m}{R_m + \Delta R_m} \right)^2 [\delta_{ss}(\Delta R_m) + \delta_{ss} R_m]^2 + (\delta_{ss} R_{n1})^2 \right\} + (\delta_{ss} f)^2}. \quad (14)$$

Wartość liczbową błędu $\delta_{ss} k_{\psi}$ obliczono wstawiając do wzoru (14) następujące wartości:

$$R_{n1} = 1,00002 \, \Omega; \quad \delta_{ss} R_{n1} \leq \pm 1 \cdot 10^{-5},$$

$$\left. \begin{aligned} R'_{n100} &= 100,016 \, \Omega \\ R''_{n100} &= 99,974 \, \Omega \end{aligned} \right\} \delta_{ss} R_{n50} \leq \pm 1 \cdot 10^{-5},$$

$$R_{n50} = 49,998 \, \Omega,$$

$$R_m \cong 50 \, \Omega; \quad \Delta R_m \leq 0,5 \, \Omega; \quad \delta_{ss} R_m = \delta_{ss}(\Delta R_m) \leq \pm 2 \cdot 10^{-4},$$

$$f = 112,5 \, \text{Hz}; \quad \delta_{ss} f \leq \pm 5 \cdot 10^{-7},$$

otrzymując $\delta_{ss} k_{\psi} = \pm 2 \cdot 10^{-5}$, $p = 0,95$.

Błąd nieczułości w układzie Campbella nie przekraczał wartości $\pm 2 \cdot 10^{-5}$.

Wartość błędu przypadkowego wyliczono z wyników porównań uzyskanych w poszczególnych cyklach pomiarowych, otrzymując $\delta_{sp} k_{\psi} \cong \pm 1 \cdot 10^{-4}$, $p = 0,95$.

Całkowity statystyczny błąd wyznaczenia stałej $k_{\psi \text{ IME}}$ metodą Campbella wynosi więc $\delta_s k_{\psi} = 1 \cdot 10^{-4}$, $p = 0,95$.

Należy podkreślić, że błąd wyznaczenia stałej k_{ψ} metodą balistyczną zerową i metodą Hartshorna jest większy od błędu $\delta_s k_{\psi}$ w metodzie Campbella o błąd wyznaczenia wartości Δk_{ψ} . W wyniku obliczeń otrzymano dla metody balistycznej zerowej oraz metody Hartshorna $\delta_s k_{\psi} \cong 2 \cdot 10^{-4}$, przy $p = 0,95$.

Ostatecznie uzyskano następujące wartości stałej strumieniowej wzorca wykonanego w IME ($p = 0,95$):

- metodą Campbella — $k_{\psi} = 10,009 \pm 0,001 \text{ mWb/A}$,
- metodą balistyczną zerową i metodą Hartshorna — $k_{\psi} = 10,009 \pm 0,002 \text{ mWb/A}$.

Jak widać z przedstawionych wyżej wyników pomiarów wartości k_{ψ} otrzymane przy prądzie stałym jak i prądzie przemiennym o częstotliwości 112,5 Hz są identyczne. Ekstrapolacja wartości k_{ψ} dla częstotliwości 112,5 Hz do częstotliwości $f = 0$ nie spowodowała wystąpienia dodatkowego błędu.

7. UWAGI I WNIOSKI KOŃCOWE

W Instytucie Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej zaprojektowano i wykonano wzorzec strumienia magnetycznego typu Campbella. Wartość jego wyznaczono na drodze rachunkowej oraz sprawdzono na drodze pomiarowej przez porównanie jego wartości z wartością wzorca oporu elektrycznego i częstotliwości, posługując się przy tym metodą Campbella.

Układ pomiarowy zrealizowany przez autorów pozwala nie tylko na wyznaczenie wartości stałej strumieniowej k_{ψ} wzorca strumienia w oparciu o wartość wzorca oporu elektrycznego i częstotliwości. Został on zmodyfikowany w ten sposób, że umożliwia również pomiar wartości stałej k_{ψ} badanego wzorca metodą balistyczną zerową. Wszelkie zmiany układu połączeń, niezbędne przy łączeniu wzorców dla sprawdzenia ich metodą balistyczną zerową, metodą Hartshorna i metodą Campbella, wykonywano za pomocą odpowiednich przełączników nie zmieniających układu przewodów łączących. Uzyskano w ten sposób możliwie małe wpływy szkodliwych sprzężeń elektromagnetycznych. Elementy układu pomiarowego zostały rozmieszczone w dużych odległościach od siebie i innych ewentualnych źródeł zakłóceń. Szkodliwe wpływy sprzężeń magnetycznych zostały ograniczone do wartości mniejszych od $0,2 \mu\text{Wb/A}$, w najmniej korzystnym przypadku.

Rozrzuty wyników porównań wzorca wykonanego w IME z wzorcami użytkowymi, uzyskane w kolejnych cyklach pomiarowych jednego dnia, wynoszą kilka na sto tysięcy. W różnych dniach rozrzuty te są większe i sięgają wartości jeden na dziesięć tysięcy. Wyjątek stanowią jedynie wyniki pomiarów uzyskane przy użyciu wzorca firmy Hartmann-Braun, prawdopodobnie wskutek większego współczynnika częstotliwościowego tego wzorca. Nie zaobserwowano natomiast zależności wyników pomiarów od wahań temperatury w przedziale $16^{\circ}\text{C} \dots 20^{\circ}\text{C}$ oraz wilgotności powietrza w przedziale $(40 \dots 80)\%$. Wyniki pomiarów sprawdzających badany wzorzec wykazują bardzo dobrą zgodność z wynikami obliczeń stałej strumieniowej na podstawie wymiarów geometrycznych. Zdaniem autorów potwierdza to przydatność metody Campbella do wyznaczenia bezwzględnej

wartości stałej k_ψ wzorców strumienia magnetycznego. Jak się wydaje, bardziej wnikliwe badania wpływu czynników zewnętrznych, celem skuteczniejszej ich eliminacji mogą stworzyć możliwość wyznaczenia wartości stałej k_ψ z błędem nie przekraczającym kilka na sto tysięcy.

Badania stabilności k_ψ wzorca strumienia wymagają dłuższego okresu czasu i będą przedmiotem dalszych prac.

Autorzy składają podziękowanie Panu Profesorowi Andrzejowi Jellonkowi oraz Panu Profesorowi Jarosławowi Kuryłowiczowi za inspirowanie tematu, zapoznanie się z rękopisem pracy i poczynienie szeregu cennych uwag.

LITERATURA

1. A. Campbell, *On a Standard of Mutual Inductance*, Proc. Roy. Soc., vol. 79, 1907.
2. A. Campbell, *On the Determination of the Absolute Unit of Resistance by Alternating Current Methods*, Proc. Roy. Soc., vol. 87, 1912.
3. *Novyj etalonnij kompleks sredstv izmerenija magnitnogo potoka*, Izv. Techn., nr 7, 1969.
4. V. A. Karavaeva, N. V. Studencov, V. N. Chorev, *Gosudarstvennyj pervičnyj etalon edinicy magnitnogo potoka*, Izv. Techn., nr 2, 1972.
5. I. L. Cooter, B. L. Dunfee, W. P. Harris, F. L. Hemach, C. Peterson, *Electrical Standards and Measurements*, Electro-Technolog., vol. 79, nr 1, 1967.
6. P. W. Harrison, G. H. Rayner, *A Primary Standard of Mutual Inductance*, Metrologia, vol. 3, 1967.
7. J. T. Henderson, M. Romanowski, *A Standard of Mutual Inductance*, Canadian Journ. of Phys., vol. 33, nr 12, 1955.
8. GOST 8.030-72. *Gosudarstvennyj pervičnyj etalon edinicy magnitnogo potoka*.
9. B. Hague, *Alternating Current Bridge Methods*, Isaak Pitman Sons, London 1962.
10. E. Blechschmidt, *Präzisionsmessungen von Kapazitäten, Induktivitäten und Zeitkonstanten* Band II, VEB Verlag Technik, Berlin 1956.
11. H. Helke, *Ausgewählte Induktivitäts-Messbrücken für Nieder- und Tonfrequenz*, Teil II und III, ATM, I 921-17-18, 1969.
12. J. G. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, London 1873.
13. L. Hartshorn, *A Precision Method for the Comparison of Unequal Mutual Inductance at Telephonic Frequencies*, Journ. Sci. Instr., vol. 2, 1925.
14. F. Wenner, *A Proposed Modification of the Kirchhoff Method for the Absolute Measurement of Resistance*, Science, vol. 29, 1909, str. 475.
15. A. Campbell, *On the Determination of Resistance in Terms of Mutual Inductance*, Proc. Roy. Soc., vol. 107, 1925.
16. D. W. Dye, *Calculation of a Primary Standard of Mutual Inductance of the Campbell Type and Comparison of It with the Similar NPL Standard*, Proc. Roy. Soc., vol. 101, 1922.
17. A. F. Dann, G. R. Rayner, *International Comparisons of Mutual Inductance Standards*, Metrologia, nr 2, 1968.
18. J. L. Thomas, Ch. Peterson, I. L. Cooter, R. Kotter, *An Absolute Measurement of Resistance by the Wenner Method*, Journal of Research of the NBS, vol. 43, 1949.
19. V. M. Janovskij, N. L. Amatuni, S. V. Gorbacevič, *Vosproizvedenie edinicy so-protivlenija po razčetnoj vzaimnoj induktivnosti i častote*, Trudy VNIIM, vyp. 31/81, 1957.
20. L. Hartshorn, N. F. Astbury, *The Absolute Measurement of Resistance by the Method of Albert Campbell*, vol. 236, 1937.

21. U.I. Wiener, Fl. Cretu, *Reproducerea si transmiterea unitatii de flux magnetic in R.S. Romania*, Calitatea Productiei si metrologie, vol. II, nr 12, 1972.
22. J. Kolasa, *Wzorzec strumienia magnetycznego*, Praca doktorska, Wrocław 1973.
23. W. Jeager, *Elektrische Messtechnik*, Verlag von Johann Ambrosius Barth, Leipzig 1928.

W. GĄSOWSKI, J. KOLASA

DETERMINATION OF MAGNETIC FLUX CONSTANT OF ABSOLUTE NORMAL BY COMPARISON WITH NORMAL RESISTANCE

Summary

In the paper a comparison method of Campbell's magnetic flux normal and resistance normal is described and results are given.

The magnetic flux normal comprises an electrically powered primary winding acting as a source of magnetic flux. A secondary winding placed in this flux assures adequate magnetic coupling.

The flux constant k_ψ is defined by the ratio of magnetic flux coupled to the secondary winding, to the d.c. current flowing in the primary winding. Numerically the constant k_ψ is equal to the mutual coupling coefficient M .

The paper contains a brief review of measuring methods that permit the determination of k_ψ constant. There follows a justification in choice of ballistic, Hartshorn and Campbell methods, used by the authors.

The method and results obtained by comparison of a Campbell's magnetic flux normal having a flux constant 10 mWb/A with a 1-ohm normal resistor are described. The real value of the flux-constant was determined with error not exceeding $\pm 1 \cdot 10^{-4}$ with confidence interval $p = 0,95$, the error of the normal resistor lying within $\pm 1 \cdot 10^{-5}$. In conclusion the utility of measuring methods used by the authors to determine the value of normal flux-constant has been discussed.

W. GĄSOWSKI, J. KOLASA

DÉSIGNATION DE LA CONSTANCE ABSOLUE DE L'ÉTALON DU FLUX MAGNÉTIQUE PAR COMPARAISON AVEC L'ÉTALON DE LA RÉSISTANCE

Résumé

Dans cet ouvrage ont a décrit le moyen et les résultats des comparaisons de l'étalon du flux magnétique du type Campbell et de l'étalon de la résistance électrique. L'étalon du flux magnétique a une bobine primaire qui constitue la source du champ magnétique. La bobine secondaire est placée dans un champ magnétique formé par la bobine primaire.

La constante du flux k_ψ détermine la proportion de la valeur du flux magnétique couplé avec le bobinage secondaire et l'intensité du courant constant coulant par le bobinage primaire. La constante k_ψ est numériquement égale au coefficient de l'inductance mutuelle M .

Dans cet article on a présenté une courte revue des méthodes de mesures permettant d'indiquer la valeur de la constante k_ψ . Ensuite on a motivé le choix de la méthode balistique neutre de Hartshorn et Campbell, appliquée par les auteurs. On a décrit le moyen et les résultats des comparaisons de l'étalon du flux magnétique du type Campbell à une constante caractéristique du flux 10 mWb/A avec l'étalon de la résistance électrique de la valeur d'un Ohm. L'erreur commise pendant la désignation de la valeur réelle de la constante du flux s'élève à $\pm 1 \cdot 10^{-4}$ au niveau de la confiance $p = 0,95$, pour l'erreur de l'étalon de la résistance s'élèvent à $\pm 1 \cdot 10^{-5}$.

Dans les propositions finales on a discuté l'utilité des méthodes de mesures, appliquées par les auteurs, pour indiquer la valeur de la constante du flux des étalons.

W. GAŚSOWSKI, J. KOLASA

BESTIMMUNG DER KONSTANTE DES ABSOLUTEN MAGNETISCHEN FLUßNORMALS
MITTELS VERGLEICH MIT DEM NORMALWIDERSTAND

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden Meßverfahren für den Vergleich des absoluten magnetischen Flußnormalen Campbells mit dem Normalwiderstand dargestellt, und Meßergebnisse angeführt.

Das magnetische Flußnormal besteht aus einer von der Stromquelle gespeisten Primärspule, die eine Magnetfeldquelle bildet. Die Sekundärwicklung befindet sich im Magnetfeld der Primärspule und bezweckt die Sicherstellung des erforderlichen, konstanten, magnetischen Kopplungswertes.

Die Flußkonstante k_{ψ} wird als Wertverhältnis des mit Sekundärwicklung gekoppelten magnetischen Flusses und der Gleichstromstärke der Primärwicklung definiert. Die Flußkonstante k_{ψ} gleicht wertmäßig dem Gegeninduktivitätsbeiwert M .

Im Artikel werden einige Meßmethoden zur Bestimmung der Flußkonstante k_{ψ} kurz erfaßt. Im weiteren wurde die Wahl der von den Verfassern benutzten ballistischen Nullmethode und der Meßmethoden nach Hartshorn und Campbell begründet. Die Vergleichsmethode und die Vergleichsergebnisse für das magnetische Flußnormal ($k = 10 \text{ mWb/A}$) mit 1-ohmigen Normalwiderstand wurden beschrieben. Der Bestimmungsfehler des wahren Wertes des Flußnormalen beträgt $\pm 1 \cdot 10^{-4}$ bei statistischer Sicherheit $p = 0,95$ und einer Fehlertoleranz für den Normalwiderstand $\pm 1 \cdot 10^{-5}$.

Abschließend wurde die Brauchbarkeit der von den Verfassern für die Wertbestimmung der Normalflußkonstante angewandten Meßmethoden diskutiert.

В. ГОНССОВСКИ, Ю. КОЛЯСА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННОЙ ПЕРВИЧНОГО ЭТАЛОНА МАГНИТНОГО
ПОТОКА МЕТОДОМ СРАВНЕНИЯ С ЭТАЛОНОМ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Резюме

В труде приведен способ и результаты сравнения эталона магнитного потока типа Кемпбелла с эталоном электрического сопротивления.

Первичная обмотка эталона магнитного потока питается электрической энергией и является источником магнитного поля. Вторичная обмотка, расположенная в магнитном поле созданным первичной обмоткой, обеспечивает требуемое значение индуктивной связи.

Магнитная постоянная эталона k_{ψ} определяет отношение потока индуктивно связанного с вторичной обмоткой и силы постоянного тока первичной обмотки. Постоянная k_{ψ} численно равна коэффициенту взаимной индуктивности M .

Далее представлен краткий обзор измерительных методов определения постоянной k_{ψ} . Обоснован выбор нулевого баллистического метода, а также методов Хартсхорна и Кемпбелла примененных авторами для решения поставленной задачи. Описан способ и результаты сравнения эталона магнитного потока с номинальным значением магнитной постоянной 10 мВб/А с эталоном электрического сопротивления с номинальным значением 1 ом . Действительное значение магнитной постоянной сравнено с погрешностью порядка $\pm 1 \cdot 10^{-4}$ с коэффициентом надежности измерения $p = 0,95$; погрешность эталона сопротивления порядка $\pm 1 \cdot 10^{-5}$.

В заключение рассмотрена пригодность предлагаемых авторами методов измерений для определения магнитной постоянной.

Ocena wpływu krzywizny rdzenia, uzwojeń i ściany kadzi transformatora na rozkład pola elektromagnetycznego

STANISŁAW APANASEWICZ (ŁÓDŹ), GRAŻYNA MIKSA (ŁÓDŹ), DANUTA PRZYBYŁAK (ŁÓDŹ)

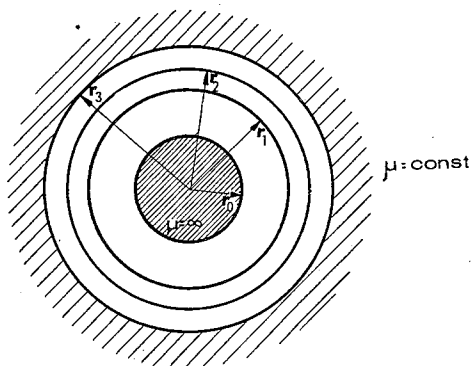
Instytut Elektrotechniki, Oddział w Łodzi

Otrzymano 3.9.1974

Przedstawiona praca jest poświęcona weryfikacji metody obliczania pól elektromagnetycznych w transformatorach polegającej na zastępowaniu walcowego układu uzwojeń i kadzi bardziej prostym układem płaskim. Dla modelu walcowego przedstawionego na rys. 1 oraz odpowiedniego modelu płaskiego wyprowadzono wzory opisujące rozkład pola elektromagnetycznego. Na podstawie obliczeń wykonanych na e.m.c. stwierdzono, że jakościowy charakter rozkładów tych pól jest w obu przypadkach całkowicie zgodny, natomiast różnice ilościowe są znaczne i nawet w dużych transformatorach ze średnicą rdzenia 0,8 m różnice te wynoszą ok. 10%.

1. UWAGI WPROWADZAJĄCE

Przedmiotem niniejszej pracy jest ocena wpływu krzywizny ściany kadzi i uzwojeń transformatora na rozkład pola elektromagnetycznego i zbadanie możliwości zastąpienia dla potrzeb obliczeniowych ściany zakrzywionej ścianą płaską. Dla rozwiązania tego



Rys. 1. Schemat poprzeczny układu zakrzywionego

problemu zostały poniżej wyprowadzone i przeanalizowane wzory opisujące rozkład pola elektromagnetycznego w następującym układzie (rys. 1): powierzchnia kadzi — powierzchnia nieskończenie długiego walca o promieniu r_3 , grubość kadzi jest nieograniczona;

rdzeń — nieskończenie długi walec o promieniu r_0 i nieskończenie dużej przenikalności magnetycznej; uzwojenia — nieskończenie cienkie powierzchnie walcowe o wysokości H i promieniach r_1 i r_2 ; po powierzchniach tych krążą prądy sinusoidalne po okręgach leżących w płaszczyznach $z = \text{const}$.

Wyprowadzone wzory dotyczą kilku przypadków uwzględniających stopniowe spłaszczanie kadzi, rdzenia i uzwojeń. W każdym z tych przypadków rozpatruje się dodatkowo dwie możliwości; jedna z nich jest kolejnym uproszczeniem polegającym na założeniu, że pole indukowane przez prądy wirowe płynące w kadzi jest pomijalnie małe na powierzchni rdzenia, przy czym przez pole przyłożone rozumie się pole jakie istniałoby przy $r_3 = \infty$ (tj. przy braku kadzi). Główną uwagę zwrócono na rozkład pola na powierzchni kadzi, ze względu na badanie strat dodatkowych. Przenikalność magnetyczna kadzi jest w ogólności liczbą zespoloną, co pozwala uwzględniać jej ekranowanie.

2. OPIS POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO

Rozkład pola otrzymamy najpierw przy założeniu istnienia jednego uzwojenia; przy istnieniu dwóch uzwojeń ogólne rozwiązanie będzie superpozycją dwóch rozwiązań odpowiadających uzwojeniom o promieniach r_1 i r_2 .

Z powodu symetrii geometrycznej układu i faktu, że prądy wymuszające pole elektromagnetyczne krążą po okręgach, możemy zakładać, że potencjał wektorowy pola elektromagnetycznego posiada tylko składową obwodową A zależną jedynie od współrzędnych r i z . Spełnia ona równanie:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{A}{r^2} = \lambda^2 A, \quad (1)$$

$$\lambda^2 = \begin{cases} 0 & \text{dla obszaru powietrznego,} \\ j\omega\gamma\mu_m & \text{dla obszaru metalowego,} \end{cases}$$

gdzie:

$$j = \sqrt{-1},$$

μ_m — przenikalność ściany kadzi,

γ — przewodność ściany kadzi,

ω — częstotliwość prądu w uzwojeniach.

W równaniu tym zakłada się, że przyjmowane parametry geometryczne i częstotliwość ω pozwalają na całkowite pominięcie prądów przesunięcia Maxwella ([4], str. 82).

Składowa obwodowa pola elektrycznego $E_\theta = E$ oraz składowe osiowe i radialne indukcji magnetycznej i natężenia pola magnetycznego wyrażają się w zależności od A w sposób następujący:

$$E = j\omega A,$$

$$B_z = \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{A}{r}, \quad B_r = -\frac{\partial A}{\partial z}, \quad (2)$$

$$H_z = \mu^{-1} B_z, \quad H_r = \mu^{-1} B_r.$$

Powyższe funkcje muszą spełniać następujące warunki brzegowe:

$$H_z(z, r_0) = 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varrho \rightarrow 0} [H_z(z, r_1 + \varrho) - H_z(z, r_1 - \varrho)] &= g(z) = \int_0^\infty \frac{\sin H/2\alpha}{\alpha} \cos \alpha z d\alpha \cdot \frac{2i}{\pi H} = \\ &= \int_0^\infty g_0(\alpha) \cos \alpha z d\alpha = \begin{cases} 0 & \text{dla } |z| > H/2, \\ \frac{i}{H} & \text{dla } |z| < H/2, \end{cases} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} [H_r(z, \varrho + r_1) - H_r(z, r_1 - \varrho)] = 0, \quad (5)$$

$$E_m(z, r_3) = E_p(z, r_3) \equiv A_m(z, r_3) = A_p(z, r_3), \quad (6)$$

$$H_{zm}(z, r_3) = H_{zp}(z, r_3), \quad g_0 = \frac{2i}{\pi H \alpha} \sin \alpha H/2, \quad (7)$$

gdzie przez f_m, f_p oznaczono wartości funkcji f w obszarach: metalowym i powietrznym.

Sens fizyczny warunków brzegowych (3) ÷ (7) jest następujący:

- ciągłość składowych stycznych pola magnetycznego i elektromagnetycznego na powierzchni kadzi (wzory (6) i (7)),
- znikanie składowej stycznej pola magnetycznego na powierzchni rdzenia (wzór (3)), ponieważ przenikalność magnetyczna rdzenia jest nieskończona,
- ciągłość składowej normalnej pola magnetycznego na powierzchni uzwojenia $r = r_1$; nieciągłość składowej stycznej pola magnetycznego na tej powierzchni,
- ciągłość składowej normalnej indukcji magnetycznej na powierzchni $r = r_3$ wynika z równości (6).

3. ROZWIĄZANIA DOKŁADNE

Rozwiązania równania (1) możemy poszukiwać w postaci całki Fouriera:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\infty a(r, \alpha) \cos \alpha z d\alpha, \\ B_r &= \int_0^\infty \alpha a(r, \alpha) \sin \alpha z d\alpha, \\ B_z &= \int_0^\infty b(r, \alpha) \cos \alpha z d\alpha, \quad b = \frac{da}{dr} + \frac{a}{r}, \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie $a = a(r, \alpha)$ spełnia równanie typu Bessela:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{da}{dr} - \left(p^2 + \frac{1}{r^2} \right) a &= 0, \\ n^2 &= \lambda^2 + \alpha^2 \end{aligned} \quad (9)$$

i wyraża się w zależności od funkcji walcowych Mc Donalda:

$$a = \begin{cases} c_1 K_1(\alpha r) + c_2 I_1(\alpha r), & r_0 \leq r \leq r_1, \\ c_3 K_1(\alpha r) + c_4 I_1(\alpha r), & r_1 \leq r \leq r_3, \\ c_5 K_1(pr), & r \geq r_3; \end{cases} \quad (10)$$

$$b = \begin{cases} [-c_1 K_0(\alpha r) + c_2 I_0(\alpha r)] \alpha, & r_0 < r < r_1, \\ [-c_3 K_0(\alpha r) + c_4 I_0(\alpha r)] \alpha, & r_1 < r < r_3, \\ -c_5 p K_0(pr), & r > r_3. \end{cases} \quad (11)$$

Na podstawie warunków (3) ÷ (7) współczynniki c_n muszą spełniać następujący układ równań:

$$\begin{aligned} c_1 K_0(\alpha r_0) &= c_2 I_0(\alpha r_0), \\ -c_3 K_0(\alpha r_1) + c_4 I_0(\alpha r_1) + c_1 K_0(\alpha r_1) - c_2 I_0(\alpha r_1) &= \frac{g_0 \mu_0}{\alpha}, \\ c_3 K_1(\alpha r_1) + c_4 I_1(\alpha r_1) &= c_1 K_1(\alpha r_1) + c_2 I_1(\alpha r_1), \\ c_5 K_1(pr_3) &= c_3 K_1(\alpha r_3) + c_4 I_1(\alpha r_3), \\ \frac{-pc_5 K_0(pr_3)}{\mu_m} &= \frac{\alpha [-c_3 K_0(\alpha r_3) + c_4 I_0(\alpha r_3)]}{\mu_0}. \end{aligned} \quad (12)$$

Stąd:

$$\begin{aligned} c_5 &= \frac{c_4}{K_1(pr_3)} [Q_1 K_1(\alpha r_3) + I_1(\alpha r_3)], \\ c_2 &= Q_3 c_4, \\ c_3 &= Q_1 c_4, \quad c_1 = Q_2 Q_3 c_4, \\ c_4 &= \frac{\frac{g_0 \mu_0}{\alpha}}{I_0(\alpha r_1) - Q_1 K_0(\alpha r_1) + Q_3 [Q_2 K_0(\alpha r_1) - I_0(\alpha r_1)]}, \\ Q_2 &= \frac{I_0(\alpha r_0)}{K_0(\alpha r_0)}, \\ \mu_r &= \frac{\mu_m}{\mu_0}, \\ Q_1 &= \frac{I_1(\alpha r_3) + M I_0(\alpha r_3)}{M K_0(\alpha r_3) - K_1(\alpha r_3)}, \\ Q_3 &= \frac{Q_1 K_1(\alpha r_1) + I_1(\alpha r_1)}{Q_2 K_1(\alpha r_1) + I_1(\alpha r_1)}, \\ M &= \mu_r \frac{\alpha}{p} \frac{K_1(pr_3)}{K_0(pr_3)}. \end{aligned} \quad (13)$$

4. UPROSZCZONY OBRAZ POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO W OBSZARZE METALOWYM

Współczynniki c_n określone przez (13) reprezentują dokładne rozwiązania równań (1) ÷ (7). Są one jednak bardzo skomplikowane. Pierwszych uproszczeń można dokonać korzystając z tego, że w praktyce zawsze zachodzi nierówność:

$$r_3^2 \gg \frac{1}{\omega \mu_m \gamma}. \quad (14)$$

Z warunku tego wynika, że w obszarze metalowym równanie (1) redukuje się [1] do równania:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \lambda^2 A, \quad y = r_3 - r, \quad (15)$$

którego rozwiązanie ma postać:

$$\begin{aligned} A_m &= e^{\lambda y} \int_0^\infty c_6(\alpha) \cos \alpha z d\alpha, \\ B_{rm} &= e^{\lambda y} \int_0^\infty \alpha c_6(\alpha) \sin \alpha z d\alpha, \\ B_{zm} &= -e^{\lambda y} \lambda \int_0^\infty c_6(\alpha) \cos \alpha z d\alpha. \end{aligned} \quad (16)$$

Wynik ten może być uzyskany bezpośrednio ze wzorów (10), (11), (13), jeżeli przyjąć dla K_1 (pr) wzory asymptotyczne i zauważyć, że praktyczny przedział zmienności $\alpha = \alpha_0$ jest mały w porównaniu z $|\lambda|$

$$\alpha_0 \ll |\lambda|. \quad (17)$$

Prowadzi to do tego, że we wzorach (13) możemy położyć:

$$M = \frac{\alpha}{\lambda} \mu_r. \quad (18)$$

Współczynnik c_6 wyrazi się wzorem:

$$c_6 = [Q_1 K_1(\alpha r_3) + I_1(\alpha r_3)] c_4, \quad (19)$$

zaś pozostałe współczynniki związane z rozkładem pola w powietrzu będą opisywane wzorami (8), (10), (13) przy uwzględnieniu (18).

Dalsze uproszczenie polega na założeniu, że pole indukowane przez prądy wirowe płynące w kadzi jest pomijalnie małe na powierzchni rdzenia. Jest to szczególnie uzasadnione przy analizie pola na powierzchni kadzi dużych transformatorów. Dla uproszcze-

nia dalszej analizy wyodrębniamy pole przyłożone A_{prz} ; pole takie otrzymamy, jeśli we wzorach (8), (10), (13) przyjmiemy [2]:

$$\begin{aligned} c_4 &= c_5 = 0, \\ c_1 &= c_{1prz} = \frac{K_1(\alpha r_1)}{\Delta} \frac{I_0(\alpha r_0)}{K_0(\alpha r_0)} \frac{g_0 \mu_0}{\alpha}, \\ c_2 &= c_{2prz} = \frac{K_1(\alpha r_1)}{\Delta} \frac{g_0 \mu_0}{\alpha}, \\ c_3 &= c_{3prz} = \frac{K_1(\alpha r_1) I_0(\alpha r_0) + I_1(\alpha r_1) K_0(\alpha r_0)}{\Delta} \frac{g_0 \mu_0}{\alpha K_0(\alpha r_0)} = \frac{2i\mu_0}{\pi H} c = Q_0 c, \\ \Delta &= K_1(\alpha r_1) I_0(\alpha r_1) + K_0(\alpha r_1) I_1(\alpha r_1). \end{aligned} \quad (20)$$

W przypadku istnienia kadzi na pole przyłożone nakłada się pole indukowane A_{pind} , tj.

$$A_p = A_{prz} + A_{ind}, \quad (21)$$

gdzie A_{ind} ma postać:

$$A_{ind} = \int_0^\infty [c_7 K_1(\alpha r) + c_8 I_1(\alpha r)] \cos \alpha z d\alpha, \quad r_0 \leq r \leq r_3. \quad (22)$$

Rezygnacja ze ścisłego spełnienia warunku (3) oznaczałaby przyjęcie we wzorze (22) stałej c_7 równej 0. W tym przypadku A_{ind} i jego pochodna maleją do 0, jeśli r maleje.

Na podstawie warunków (6) i (7) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} c_8 &= \frac{M_0 K_0(\alpha r_3) - K_1(\alpha r_3)}{I_1(\alpha r_3) + M_0 I_0(\alpha r_3)} Q_0 c, \\ c_6 &= \frac{M_0 [K_0(\alpha r_3) I_1(\alpha r_3) + K_1(\alpha r_3) I_0(\alpha r_3)]}{I_1(\alpha r_3) + M_0 I_0(\alpha r_3)} Q_0 c, \end{aligned} \quad (23)$$

$$M_0 = \frac{\alpha}{\lambda} \mu_r, \quad Q_0 = \frac{2i\mu_0}{\pi H}.$$

Zatem przy niedokładnym spełnieniu warunku (3) rozkład pola opisują wzory:

- a) w obszarze metalowym — (16), (23),
 - b) w obszarze powietrznym — (8), (10), (20), (23),
- gdzie

$$\begin{aligned} c_1 &= c_{1prz}, \quad c_4 = c_8, \\ c_2 &= c_{2prz} + c_8, \quad c_3 = c_{3prz}. \end{aligned} \quad (24)$$

5. PRZYPADEK DUŻYCH WARTOŚCI r_3

Dla dostatecznie dużych wartości r_3 równanie (1) dla pola indukowanego w powietrzu przekształca się w równanie następujące:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0, \quad y = r_3 - r. \quad (25)$$

Zamiast (8) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} A &= A_{ind} = \int_0^{\infty} c_9(\alpha) e^{-\alpha y} \cos \alpha z d\alpha, \\ B_z &= B_{z ind} = \int_0^{\infty} c_9(\alpha) \alpha e^{-\alpha y} \cos \alpha z d\alpha, \\ B_r &= B_{r ind} = \int_0^{\infty} c_9(\alpha) \alpha e^{-\alpha y} \sin \alpha z d\alpha. \end{aligned} \quad (26)$$

Podobnie jak w przypadku poprzednim rezygnujemy ze ścisłego spełnienia warunku (3).

Z warunków brzegowych otrzymujemy podobnie jak w (23):

$$\begin{aligned} c_9 &= \frac{M_0 K_0(\alpha r_3) - K_1(\alpha r_3)}{M_0 + 1} Q_0 c, \\ c_6 &= \frac{M_0 [K_0(\alpha r_3) + K_1(\alpha r_3)]}{M_0 + 1} Q_0 c. \end{aligned} \quad (27)$$

Pole jest teraz opisywane przez wzory:

a) w obszarze metalowym — (16), (27),

b) w obszarze powietrznym — (21),

gdzie A_{ind} opisują wzory (26), (27), a A_{prz} — (8), (10), (20).

6. PRZYPADEK GRANICZNY: CAŁKOWITE POMINIĘCIE WPŁYWU KRZYWIZNY POWIERZCHNI KADZI, UZWOJEŃ I RDZENIA

W tym przypadku całkowite pole w obszarze powietrznym (tzn. również przyłożone) opisuje równanie (25). Zamiast rozwiązania (8) będzie teraz:

$$\begin{aligned} A_p &= \int_0^{\infty} a(y, \alpha) \cos \alpha z d\alpha, \\ B_r &= \int_0^{\infty} a(y, \alpha) \alpha \sin \alpha z d\alpha, \quad B_z = - \int_0^{\infty} \frac{da}{dy} \cos \alpha z d\alpha, \\ a &= \begin{cases} c_{10} e^{-\alpha y} + c_{11} e^{\alpha y}, & 0 \leq y \leq y_1 = r_3 - r_1, \\ c_{12} e^{-\alpha y} + c_{13} e^{\alpha y}, & y_1 \leq y \leq y_0 = r_3 - r_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

Dla obszaru metalowego pozostają w mocy wzory (16). Na podstawie warunków brzegowych (3) ÷ (7) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} c_6 &= \frac{2M}{M+1} c_{11}, \\ c_{10} &= \frac{M-1}{M+1} c_{11}, \quad c_{12} = e^{2\alpha y_0} c_{13}, \\ c_{13} &= \frac{\frac{M-1}{M+1} e^{-\alpha y_1} + e^{\alpha y_1}}{e^{\alpha y_1} + e^{(2y_0 - y_1)\alpha}} c_{11} = c_0 c_{11}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$c_0 = \frac{1 + \frac{M-1}{M+1} e^{-2\alpha(r_3-r_1)}}{1 + e^{2\alpha(r_1-r_0)}}, \quad (29) \text{ c.d.}$$

$$c_{11} = \frac{e^{-\alpha(r_3-r_1)}}{1-c_0} \frac{g_0 \mu_0}{2\alpha} = \frac{g_0 \mu_0}{2\alpha} \frac{e^{-\alpha(r_3-r_1)} [1 + e^{-2\alpha(r_1-r_0)}]}{1 - \frac{M-1}{M+1} e^{-2\alpha(r_3-r_0)}},$$

gdzie M określa wzór (18).

Jeśli indukowane pole jest małe na powierzchni rdzenia, to podobnie jak w przypadkach poprzednich otrzymamy zamiast (28) ÷ (29) wzory następujące:

$$\begin{aligned} a_m &= c_{14} e^{\lambda y} = \frac{2M}{M+1} c_{15} e^{\alpha(r_1-r_3)} e^{\lambda y}, \\ c_{15} &= \frac{g_0 \mu_0}{2\alpha} (1 + e^{-2\alpha(r_1-r_0)}). \end{aligned} \quad (30)$$

7. WNIOSKI Z OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

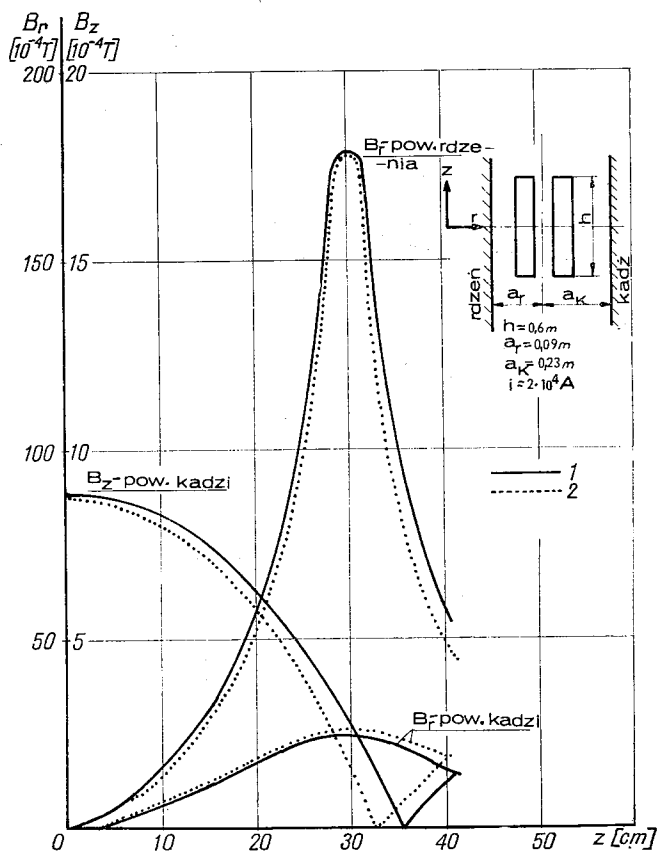
Głównym celem tej pracy było uzyskanie wzorów opisujących pole elektromagnetyczne na powierzchni kadzi do badania strat od prądów wirowych w transformatorach. Na podstawie przeprowadzonej wyżej analizy są one następujące:
w przypadku walcowym

$$\left. \begin{aligned} A &= \int_0^\infty c_6 \cos \alpha z d\alpha, \\ B_r &= \int_0^\infty \alpha c_6 \sin \alpha z d\alpha, \\ B_z &= -\frac{\lambda}{\mu_r} \int_0^\infty c_6 \cos \alpha z d\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

gdzie c_6 jest określone przez (19), gdy warunek brzegowy na rdzeniu jest spełniony ściśle (tj. $B_z = 0$) i przez (23), gdy warunek ten jest spełniony w przybliżeniu;
w przypadku płaskim

$$\left. \begin{aligned} A &= 2\mu_0 \int_0^\infty \frac{M g_0}{\alpha} D \cos \alpha z d\alpha, \\ B_r &= 2\mu_0 \int_0^\infty M g_0 D \sin \alpha z d\alpha, \quad B_z = -2\mu_0 \int_0^\infty g_0 D \cos \alpha z d\alpha, \\ M &= \frac{\alpha}{\lambda} \mu_r, \quad D = \frac{\operatorname{ch} \alpha(r_1-r_0)}{(M+1)e^{\alpha(r_3-r_0)} - (M-1)e^{-\alpha(r_3-r_0)}}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

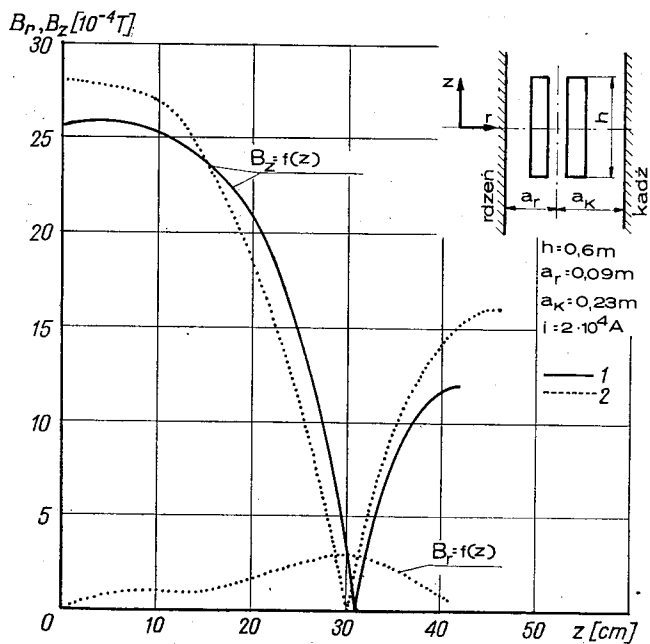
Opisane uproszczenie warunku brzegowego na rdzeniu oznacza tu pominięcie w ostatnim wyrażeniu drugiego składnika w mianowniku. Otrzymane wzory są bardzo zawiłe i ich pełne przeanalizowanie możliwe jest tylko przez ułożenie odpowiednich programów na m.c., co zresztą w przypadku wyrażeń (31) stanowi samodzielny żmudny problem. W Instytucie Elektrotechniki (Oddział Łódzki) ułożono szereg programów (M21—M25) do analizy przedstawionych wzorów; przy ich pomocy można obliczać pole w dowolnym punkcie, przy czym również dla μ_r — zespolonych, w przypadku gdy powierzchnia kadzi jest ekranowana.



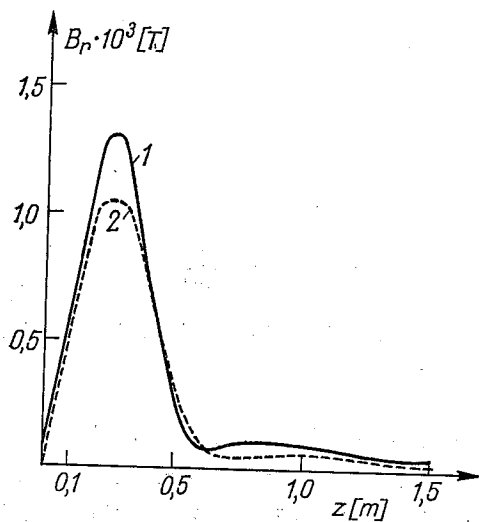
Rys. 2. Porównanie pomierzonych rozkładów indukcji na powierzchni kadzi i rdzenia modelu płaskiego nieekranowanego z rozkładami obliczonymi

Poniżej podajemy kilka wniosków jakie uzyskano z obliczeń numerycznych.

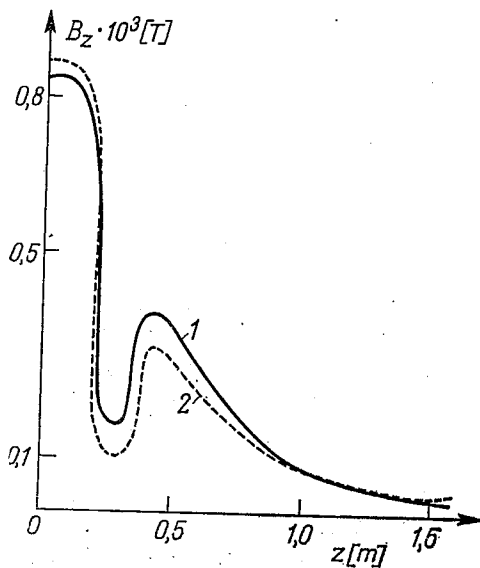
1. Zgodność jakościowa i ilościowa otrzymanych wyników teoretycznych w porównaniu z dysponowanymi wynikami pomiarowymi jest wystarczająco dobra. Ilustrują to rys. 2 i 3. Dotyczy to przynajmniej modelu płaskiego, natomiast jeśli chodzi o model walcowy, to autorzy nie dysponowali odpowiednimi materiałami pomiarowymi.



Rys. 3. Porównanie pomierzonych rozkładów indukcji na powierzchni kadzi modelu płaskiego ekranowanego miedzią z rozkładami obliczonymi



Rys. 4. Rozkład amplitud składowej normalnej indukcji wzdłuż uzwojenia na kadzi



Rys. 5. Rozkład amplitud składowej stycznej indukcji wzdłuż uzwojenia na kadzi

2. Obszar metalowy (kadź) może być traktowany jako płaski; warunek (14) jest spełniony.

3. Zgodność jakościowa w rozkładach pola elektromagnetycznego w przypadkach płaskim i walcowym w obszarze powietrznym jest dobra (rys. 4 i 5), natomiast ilościowa nie: dla małych transformatorów ($r_0 < 0,5$ m) różnica jest znaczna, natomiast w dużych transformatorach ($r_0 > 0,6$ m) jest ona rzędu 10% (tablice 1, 2) na kadzi naprzeciw uzwojeń i większa w obszarze powyżej uzwojeń, gdzie z kolei pole jest dużo słabsze. Różnice te zależą od bardzo wielu parametrów (μ_r , odległości między uzwojeniami, ich odległości od kadzi i rdzenia, wysokości uzwojeń itp.). Różnice poniżej 1% występują dopiero przy $r_0 > 5$ m, co leży już daleko poza zakresem praktycznie stosowanym.

4. W dużych transformatorach przyjęcie uproszczonego warunku brzegowego na rdzeniu, opisanego przy wyprowadzeniu wzoru (23) jest uzasadnione (tablica 3). W przypadku wzorów podanych w tej pracy uproszczenie to nie jest zbyt istotne: skraca nieco otrzymane wzory i powoduje skrócenie czasu liczenia; natomiast w wielu innych przypadkach pozwala ono na otrzymywanie rozwiązań bez rozwiązywania skomplikowanych układów równań całkowych [2, 3].

Tablica 1

Charakterystyczny rozkład amplitud składowych osiowych i promieniowych indukcji magnetycznej B_z , B_r pola przyłożonego w przypadkach walcowym i płaskim ($r_0 = \infty$)
(Dla $\mu_r = 1500$, $\omega = 314$ 1/s, $H = 1$ m, $\Delta_1 = .1$ m, $\Delta_2 = .2$ m, $\Delta_3 = .5$ m, $i = 1$ A; Δ_1 — odległość między uzwojeniami, Δ_2 — odległość pierwszego uzwojenia od rdzenia, Δ_3 — odległość między rdzeniem a powierzchnią na której wybrane są punkty obliczeniowe, B_r i B_z — podane są w teslach). Wartości B_r i B_z przemnożone są przez 10^7 . Wartości r_0 i współrzędnej z podane są w metrach

$z \backslash r_0$	0		.25		.5		.75		1	
	B_r	B_z	B_r	B_z	B_r	B_z	B_r	B_z	B_r	B_z
.05	0	.352	.259	.372	.626	.063	.279	.227	.078	.147
.1	0	.349	.252	.372	.619	.062	.269	.230	.071	.148
.15	0	.349	.247	.373	.616	.060	.261	.234	.063	.148
.2	0	.349	.243	.375	.613	.060	.255	.237	.058	.148
.25	0	.351	.241	.377	.611	.059	.250	.240	.054	.150
.3	0	.352	.239	.380	.610	.059	.246	.243	.051	.151
.4	0	.356	.236	.384	.609	.058	.241	.249	.045	.153
.6	0	.352	.233	.393	.609	.058	.235	.256	.039	.157
.8	0	.367	.231	.397	.608	.057	.229	.262	.032	.161
1	0	.372	.229	.402	.607	.059	.226	.263	.032	.162
1.5	0	.380	.227	.411	.607	.060	.222	.270	.027	.166
10	0	.390	.213	.425	.595	.061	.201	.282	.011	.171
∞	0	.392	.210	.429	.593	.060	.196	.286	.006	.173

Tablica 2

Charakterystyczny rozkład amplitud składowych osiowych i promieniowych indukcji magnetycznej na powierzchni kadzi dla danych jak w tablicy 1

$\begin{matrix} z \\ r_0 \end{matrix}$	0		.25		.5		.75		1	
	B_r	B_z	B_r	B_z	B_r	B_z	B_r	B_z	B_r	B_z
.01	0	.473	.299	.430	.841	.226	.295	.024	.039	.024
.05	0	.427	.277	.389	.817	.191	.263	.008	.019	.038
.10	0	.410	.272	.373	.819	.178	.255	.017	.015	.048
.15	0	.402	.269	.365	.824	.169	.248	.024	.016	.053
.2	0	.395	.267	.359	.827	.163	.243	.031	.019	.057
.25	0	.390	.267	.355	.831	.157	.240	.037	.024	.061
.3	0	.386	.267	.351	.836	.153	.238	.042	.027	.065
.4	0	.382	.268	.346	.845	.146	.235	.050	.034	.070
.6	0	.375	.270	.340	.859	.137	.233	.061	.044	.080
.8	0	.366	.274	.329	.867	.125	.231	.074	.051	.091
1	0	.365	.275	.328	.873	.123	.231	.078	.053	.095
10	0	.343	.272	.307	.904	.098	.220	.108	.075	.118
∞	0	.340	.274	.304	.910	.094	.220	.113	.079	.122

Tablica 3

Porównanie amplitud pola elektromagnetycznego na powierzchni kadzi dla modelu płaskiego z uproszczonym warunkiem brzegowym na rdzeniu (drugie kolumny tablicy) i bez uproszczenia (pierwsze kolumny tablicy)

Wartości podane w tabeli są przemnożone przez 10^7 .

Dane: $h = 1$ m, $\mu_r = 1500$, $r_0 = 0,2$, $r_1 = 0,4$ m, $r_2 = 0,5$ m, $r_3 = 0,7$ m, $r = 0,7$ m, $i = 1$ A.

$Z(\text{m})$	$A(\text{Wb/m})$		$B_r(\text{T})$		$B_z(\text{T})$	
0	.249	.250	0	0	.338	.340
.25	.222	.224	.281	.274	.301	.304
.5	.0663	.0692	.917	.910	.0900	.0939
.75	.0903	.0832	.228	.220	.123	.113
1	.0966	.0897	.0884	.0793	.131	.122

LITERATURA

1. S. Apanasewicz, *O pewnych własnościach struktury pola elektromagnetycznego*, Arch. Elektr., nr 3, 1971.
2. S. Apanasewicz, *Metoda obliczania pola elektromagnesu cylindrycznego umieszczonego w pobliżu ściany metalowej*, Arch. Elektr., nr 3, 1972.
3. S. Apanasewicz, *Obliczanie rozkładu pola elektromagnetycznego w ścianie kadzi transformatorów trójfazowych*, Dokumentacja techn. Instytutu Elektrotechniki nr OŁ/137/72.
4. J. Turowski, *Elektrodynamika techniczna*, WNT, Warszawa 1968.

S. APANASEWICZ, G. MIKSA, D. PRZYBYŁAK

ESTIMATION OF INFLUENCE OF TRANSFORMER'S CORE, WINDINGS AND TANK CURVATURE ON ELECTROMAGNETIC FIELD DISTRIBUTION

Summary

This paper is devoted to verification of electromagnetic field calculation in transformers when the cylindrical system is replaced by a plan one. For cylindrical model (Fig. 1) and its plan homologue the formulas describing the electromagnetic field distribution are presented. Numerical results show that field distribution is similar in both cases, but quantitative differences are considerable in big transformers (core radius — 0.8 m) they amount to about 10%. Examples of numerical calculations for plan case and experimental data are also presented: compliance is satisfactory.

S. APANASEWICZ, G. MIKSA, D. PRZYBYŁAK

ESTIMATION DE L'INFLUENCE DE LA COURBURE DU NOYAU, DES ENROULEMENTS ET DE LA CUVE DU TRANSFORMATEUR SUR LA RÉPARTITION DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Résumé

Les recherches décrites dans cet article ont été consacrées à la vérification de la méthode de calculer les champs électromagnétiques dans les transformateurs, par le remplacement du système cylindrique des enroulements et de la cuve par un système simplifié plan. On a donné des formules qui décrivent la répartition du champ électromagnétique pour le modèle cylindrique (fig. 1) et pour le plan. Les calculs numériques démontrent que le caractère qualificatif de la répartition de ces champs dans les deux cas est identique, mais qu'il y a d'importantes différences quantitatives qui même dans les grands transformateurs (au diamètre du noyau de 0,8 m) atteignent à peu près 10%. Les résultats théoriques pour le modèle plan ont été comparés avec ceux de mesure: ils ont été les mêmes.

S. APANASEWICZ, G. MIKSA, D. PRZYBYŁAK

EINSCHÄTZUNG DES EINFLUSSES VON KERNWÖLBUNG, WICKLUNGEN UND DER PFANNENWAND EINES TRANSFORMATORS AUF DIE VERTEILUNG DES ELEKTROMAGNETISCHEN FELDES

Zusammenfassung

Im vorstehenden Artikel wird eine Überprüfung der Berechnungsmethode von elektromagnetischen Feldern an Transformatoren durchgeführt, wobei die Zylinderwicklungen und der Kessel durch eine einfache Anordnung ersetzt werden. Für ein Zylindermodell (Bild 1) sowie ein entsprechendes Flachmodell

sind die Verteilung des elektromagnetischen Feldes beschreibende Formeln abgeleitet worden. An Hand von Digitalberechnungen wurde festgestellt, daß die Charakteristik der Verteilung der elektromagnetischen Felder für beide Anordnungen vom qualitativen Gesichtspunkt aus vollkommen gleich sind, dagegen treten wesentliche quantitative Unterschiede auf, und sogar bei Großtransformatoren (mit Schenkeldurchmesser von ca 800 mm) betragen diese Unterschiede etwa 10%.

С. АПАНАСЕВИЧ, Г. МИКСА, Д. ПШИБЫЛЯК

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ КРИВИЗНЫ СЕРДЕЧНИКА, ОБМОТОК И БАКА
ТРАНСФОРМАТОРА НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Резюме

Проведена проверка метода расчета электромагнитного поля в трансформаторах, при замещении цилиндрической системы обмоток и бака упрощенной плоской системой. Для цилиндрической модели (рис. 1) и соответствующей ей плоской выведены формулы определяющие распределение электромагнитных полей. На основании цифровых расчетов оказалось, что качественные свойства полей в обоих случаях одинаковы. Количественные же различия — довольно значительные. Даже в больших трансформаторах (с радиусом сердечника ок. 0,8 м) разница составляет ок. 10%. Результаты расчетов для плоской модели сопоставлены с опытными данными: совпадение хорошее.

Wyznacznikowe postacie elementów unormowanej macierzy łańcuchowej i transmisyjnej kaskadowego połączenia czwórników

FRANCISZEK KAMIŃSKI (WARSZAWA)

Instytut Fizyki PAN

Otrzymano 29.4.1974

Rozpatrzono możliwości przedstawienia elementów macierzy A i T łańcucha czwórników biernych w postaci wyznaczników typu Jacobiego. Wskazano na wieloznaczność rozwiązania. Rezultaty pracy znajdują zastosowanie w algebraicznej metodzie syntezy układów o różnorodnej strukturze i przeznaczeniu.

1. WSTĘP

Rozwój różnego rodzaju układów mikrofalowych, elektromechanicznych i piezoelektrycznych, pracujących w zakresie ultra- i hiperdźwięków, zrodził zapotrzebowanie na metody syntezy, odpowiadające specyfice występujących w nich procesów fizycznych. W wyniku przeprowadzonych badań stwierdzono znaczną przydatność tzw. algebraicznej metody syntezy [4, 5, 6, 9]. Posługiwanie się tą metodą zakłada znajomość pewnego układu równań nieliniowych, właściwych dla projektowanego czwórnika [2, 3, 4, 6, 7, 8, 10]. W dotychczasowych opracowaniach wyprowadzano takie równania za każdym razem osobno, wychodząc od zadanej struktury układu przy nałożeniu warunków symetrii lub antysymetrii. Przy tej okazji stwierdzono, iż poszukiwanie układu równań nieliniowych najlepiej prowadzić korzystając z wyznacznikowej postaci odpowiednich funkcji czwórnika [5, 8, 10], tzn. z przedstawienia elementów macierzy A i T w postaci wyznacznika typu Jacobiego [11].

Chcąc zwiększyć zakres przydatności algebraicznej metody syntezy należy rozważyć pewne ogólne zasady ustalania wyznacznikowej postaci funkcji układu, co z kolei stanowi podstawę do wyprowadzenia odpowiednich równań nieliniowych, a także służy do syntezy przy użyciu układów zastępczych [4, 5, 6, 7]. Dlatego w niniejszej pracy omówiono sposoby poszukiwania wyznaczników typu Jacobiego dla elementów unormowanej macierzy łańcuchowej i transmisyjnej kaskadowego połączenia czwórników biernych.

2. WYZNACZNIKOWE POSTACIE ELEMENTÓW ILOCZYNU MACIERZY KWADRATOWYCH CZTEROELEMENTOWYCH

Niech dany będzie iloczyn macierzy kwadratowych czteroelementowych

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1^n = \mathbf{K}_n \mathbf{K}_{n-1} \dots \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_1. \quad (1)$$

Przyjmuje się oznaczanie elementów iloczynu macierzy i poszczególnych czynników macierzowych w sposób następujący:

$$\mathbf{K}_1^n = \begin{bmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix},$$

$$\det \mathbf{K}_i = a_i d_i - b_i c_i = k_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Symbol $\mathbf{K}_r^p$ oznacza, że macierz $\mathbf{K}_r^p$ jest iloczynem $p-r+1$ macierzy $\mathbf{K}_k$ ($k = r, r+1, \dots, p$), ponumerowanych zgodnie ze wzorem (1). W przypadkach nie budzących wątpliwości symbol $\mathbf{K}_r^p$ będzie zastępowany symbolem $\mathbf{K}$.

W monografii [1] zostało wykazane, że elementy trzech kolejnych iloczynów macierzy, tzn. $\mathbf{K}_1^{n-2}$, $\mathbf{K}_1^{n-1}$ oraz $\mathbf{K}_1^n$, pozostają ze sobą w następujących związkach rekurencyjnych:

$$A_n = \left(a_n + \frac{b_n}{b_{n-1}} d_{n-1} \right) A_{n-1} - \frac{b_n}{b_{n-1}} k_{n-1} A_{n-2}, \quad (3)$$

$$B_n = \left(a_n + \frac{b_n}{b_{n-1}} d_{n-1} \right) B_{n-1} - \frac{b_n}{b_{n-1}} k_{n-1} B_{n-2}$$

oraz

$$C_n = \left(\frac{c_n}{c_{n-1}} a_{n-1} + d_n \right) C_{n-1} - \frac{c_n}{c_{n-1}} k_{n-1} C_{n-2}, \quad (4)$$

$$D_n = \left(\frac{c_n}{c_{n-1}} a_{n-1} + d_n \right) D_{n-1} - \frac{c_n}{c_{n-1}} k_{n-1} D_{n-2}.$$

Przy korzystaniu ze związków (3) i (4) uwzględnia się, że

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} = \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

oraz że

$$\mathbf{K}_0^1 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}.$$

W praktyce wystarczy korzystać z jednej tylko pary zależności według (3) lub (4), gdyż przez wprowadzenie macierzy pomocniczej $\mathbf{G}$ uzyskuje się przedstawienie elementów macierzy $\mathbf{K}_1^n$ [10]. Mianowicie jeżeli obok macierzy $\mathbf{K}_1^n$ rozpatrywać iloczyn macierzowy $(\mathbf{K}_0^{n+1})'$ o postaci

$$(\mathbf{K}_0^{n+1})' = \mathbf{G} \mathbf{K}_1^n \mathbf{G} = \mathbf{G} \mathbf{K}_n \mathbf{K}_{n-1} \dots \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_1 \mathbf{G}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

to, jak łatwo sprawdzić, słuszna jest równość

$$(\mathbf{K}_0^{n+1})' = \begin{bmatrix} A'_{n+1} & B'_{n+1} \\ C'_{n+1} & D'_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_n & C_n \\ B_n & A_n \end{bmatrix}, \quad (6)$$

z której wynika, że elementy D_n, C_n macierzy $\mathbf{K}_1^n$ są równe odpowiednio elementom A'_{n+1}, B'_{n+1} macierzy $(\mathbf{K}_0^{n+1})'$, będącej iloczynem macierzy o postaci (5). Zatem zamiast opisywania elementów C_n, D_n przy użyciu związków (4) można skorzystać ze wzoru (3) w odniesieniu do elementów A'_{n+1}, B'_{n+1} macierzy $(\mathbf{K}_0^{n+1})'$. Jednak należy przy tym pamiętać o obecności macierzy $\mathbf{G}$ w iloczynie (5), co daje następujące równania początkowe:

$$\mathbf{K}'_0 = \begin{bmatrix} A'_0 & B'_0 \\ C'_0 & D'_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{skąd} \quad A'_0 = 0, \quad B'_0 = 1, \quad (7)$$

$$(\mathbf{K}_0^1)' = \begin{bmatrix} A'_1 & B'_1 \\ C'_1 & D'_1 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_1 \mathbf{G} = \begin{bmatrix} b_1 & a_1 \\ d_1 & c_1 \end{bmatrix},$$

skąd

$$A'_1 = b_1, \quad B'_1 = a_1. \quad (8)$$

Jednocześnie z wyrażenia $(\mathbf{K}_0^{n+1})' = \mathbf{G}(\mathbf{K}_0^n)'$ wynikają następujące równania końcowe:

$$C_n = B'_{n+1} = \frac{d_n}{b_n} B'_n - \frac{k_n}{b_n} B'_{n-1}, \quad (9)$$

$$D_n = A'_{n+1} = \frac{d_n}{b_n} A'_n - \frac{k_n}{b_n} A'_{n-1}.$$

Analogiczne rozważania można przeprowadzić w odniesieniu do elementów A_n, B_n w przypadku opisywania ich za pomocą zależności (4) z uwzględnieniem (6). Zresztą wariant ten daje się sprowadzić do uprzednio omówionego, jeżeli w iloczynie (1) dokonać podstawienia $\mathbf{K}_i = \mathbf{G}\mathbf{K}'_i\mathbf{G}$ i uwzględnić, że $\mathbf{G}\mathbf{G} = \mathbf{E}$. Dlatego w dalszej analizie poprzestano na opisie elementów macierzy $\mathbf{K}_1^n$ za pomocą związków rekurencyjnych (3) z uwzględnieniem równań (6) ÷ (9).

Jeżeli przytoczone związki rekurencyjne porównać z analogicznym związkiem dla wyznacznika typu Jacobiego [11], tzn.

$$J_n = x_n J_{n-1} - u_{n-1} v_n J_{n-2}, \quad (10)$$

gdzie wyznacznik J_n ma postać

$$J_n = \begin{vmatrix} x_1 & u_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & x_2 & u_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_3 & x_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{n-2} & u_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & v_{n-1} & x_{n-1} & u_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & v_n & x_n \end{vmatrix}, \quad (11)$$

to dochodzi się do wniosku, że poszczególne elementy macierzy $\mathbf{K}_1^n$ według (1) dają się przedstawić w postaci wyznacznika typu Jacobiego o następujących elementach x_i, u_i oraz v_i :

wyznacznikowa postać funkcji A_n

$$A_n = J_n^A,$$

$$x_1 = a_1, \quad x_i = a_i + \frac{b_i}{b_{i-1}} d_{i-1}, \quad u_{i-1} = \frac{b_i}{b_{i-1}} k_{i-1}, \quad v_i = 1, \quad (12)$$

$$i = 2, 3, \dots, n;$$

wyznacznikowa postać funkcji B_n

$$B_n = b_1 J_{n-1}^B,$$

$$x_k = a_{k+1} + \frac{b_{k+1}}{b_k} d_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$u_{i-1} = \frac{b_{i+1}}{b_i} k_i, \quad v_i = 1, \quad i = 2, 3, \dots, n-1;$$

wyzacznikowa postać funkcji C_n

$$C_n = b_n^{-1} J_{n+1}^C,$$

$$x_1 = a_1, \quad x_i = a_i + \frac{b_i}{b_{i-1}} d_{i-1}, \quad u_{i-1} = \frac{b_i}{b_{i-1}} k_{i-1}, \quad v_i = 1,$$

$$x_{n+1} = d_n, \quad u_n = k_n, \quad v_{n+1} = 1, \quad i = 2, 3, \dots, n;$$

wyzacznikowa postać funkcji D_n

$$D_n = \frac{b_1}{b_n} J_n^D,$$

$$x_k = a_{k+1} + \frac{b_{k+1}}{b_k} d_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad x_n = d_n, \quad v_n = 1,$$

$$u_{i-1} = \frac{b_{i+1}}{b_i} k_i, \quad v_i = 1, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \quad u_{n-1} = k_n.$$

Wyrażenia (12)÷(15) określają poszukiwane postacie wyznacznikowe elementów iloczynu macierzy kwadratowych czteroelementowych.

Warto zaznaczyć, że jak wynika ze wzoru (10) wartość wyznacznika Jacobiego J_n zależy od iloczynu elementów $u_{i-1} v_i$ ($i = 2, 3, \dots, n$), a nie od sposobu jego podziału na poszczególne czynniki u_{i-1} i v_i . Dlatego też zbiór elementów u_{i-1} i v_i w każdym z poszczególnych wzorów (12)÷(15) jest tylko jednym z możliwych. Fakt ten można wykorzystywać celem przekształcania elementów wyznacznika, jak to uczyniono w [2].

3. WYZNACZNIKOWE POSTACIE ELEMENTÓW UNORMOWANEJ MACIERZY ŁAŃCUCHOWEJ KASKADOWEGO POŁĄCZENIA CZWÓRNIKÓW BIERNYCH

Wyniki uzyskane w rozdz. 2 stanowią podstawę do wyprowadzenia postaci wyznacznikowej dla elementów unormowanej macierzy łańcuchowej kaskadowego połączenia czwórników biernych o różnorodnej strukturze, w tym także o strukturze mieszanej.

Macierz $\mathbf{a}$ łańcucha ogniów o macierzy łańcuchowej $\mathbf{a}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), rys. 1, wynosi (zob. [12])

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n \mathbf{a}_{n-1} \dots \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1.$$

Jeżeli czwórnik pracuje między oporami R_1 (na wejściu) i R_2 (na wyjściu), to jego macierzy łańcuchowej $\mathbf{a}$ odpowiada unormowana macierz łańcuchowa $\mathbf{A}$ o następującej postaci [1]:

$$\mathbf{A} = \mathbf{H}_1 \mathbf{a} \mathbf{H}_2^{-1} = \mathbf{H} \mathbf{A}_n \mathbf{A}_{n-1} \dots \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{H},$$

gdzie

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{H}' \mathbf{a}_i \mathbf{H}'^{-1}$$

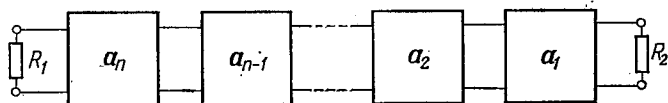
oraz

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{R_k}} & 0 \\ 0 & \sqrt{R_k} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2; \quad \mathbf{H}' = \begin{bmatrix} (R_1 R_2)^{-\frac{1}{4}} & 0 \\ 0 & (R_1 R_2)^{\frac{1}{4}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \sqrt{\varrho} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \end{bmatrix}, \quad \varrho = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}. \quad (18)$$

Macierz $\mathbf{A}_i$ według (17) jest unormowaną macierzą łańcuchową czwórnika, obciążonego na wyjściu i wejściu rezystancjami $R = \sqrt{R_1 R_2}$.

Macierz $\mathbf{A}$ łańcucha czwórników jest iloczynem macierzy $\mathbf{A}_i$ poszczególnych ogniw łańcucha i na tej podstawie jej elementy mają postać wyznacznikową, wyprowadzoną w rozdz. 2, gdzie należy uwzględnić właściwą wartość k_i . W przypadku typowym, kiedy



Rys. 1. Łańcuch czwórników

macierz $\mathbf{A}_i$ we wzorze (16) opisuje właściwości czwórnika biernego, obowiązuje $\det \mathbf{A}_i = k_i = 1$. Niekiedy jednak korzysta się z tożsamości $\mathbf{A}_{i+1} \mathbf{A}_i = (\mathbf{A}_{i+1} \mathbf{G})(\mathbf{G} \mathbf{A}_i) = \mathbf{K}_{i+1} \mathbf{K}_i$, gdzie $\mathbf{K}_i = \mathbf{G} \mathbf{A}_i$, $\mathbf{K}_{i+1} = \mathbf{A}_{i+1} \mathbf{G}$, i wtedy $\det \mathbf{K}_i = -1$ [3, 8, 10].

Ogólnie można powiedzieć, że dla wyznaczenia postaci wyznacznikowej danego elementu macierzy $\mathbf{A}$ wg (16) przydatne są różne iloczyny macierzowe, które dają się wyprowadzić przez przekształcenie iloczynu (16) za pomocą macierzy $\mathbf{G}$. W ten sposób otrzymuje się kilka wariantów postaci wyznacznikowej dla jednego i tego samego elementu macierzy łańcuchowej. Chcąc ująć wszystkie wspomniane odmiany w jednym wzorze, należałoby poprzestać na przepisaniu odpowiedniego wyrażenia z rozdz. 2, uwzględniając w nim współczynnik uwarunkowany obecnością macierzy $\mathbf{H}$ we wzorze (16). Z tego powodu poprzestano na rozpatrzeniu jedynie dwu wariantów.

Wariant pierwszy dotyczy elementów macierzy $\mathbf{A}$ w postaci (16). Ograniczając rozważania do układów biernych otrzymuje się następujące zależności:

$$A_{11} = \varrho J_n^A, \quad A_{12} = (A_{12})_1 J_{n-1}^B, \quad (19)$$

$$A_{21} = (A_{12}^{-1})_n J_{n+1}^C, \quad A_{22} = \frac{(A_{12})_1}{(A_{12})_n \varrho} J_n^D,$$

gdzie wyznaczniki typu Jacobiego mają elementy wynikające ze wzorów (12)÷(15), w których uwzględniono

$$a_i = (A_{11})_i, \quad b_i = (A_{12})_i, \quad d_i = (A_{22})_i, \quad k_i = 1, \quad (20)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Wariant drugi dotyczy elementów macierzy A , obliczonych za pomocą iloczynu macierzowego

$$A = \begin{cases} HK_n K_{n-1} \dots K_2 K_1 H = HKH, & \text{dla } n \text{ parzystego,} \\ HK_n K_{n-1} \dots K_2 K_1 H^{-1} G = HKH^{-1} G, & \text{dla } n \text{ nieparzystego,} \end{cases} \quad (21)$$

gdzie

$$K_{n-2i} = A_{n-2i} G, \quad i = 0, 1, \dots, \frac{n}{2} - 1 \left(\text{lub } \frac{n-1}{2} \right), \quad (22)$$

$$K_{n-2k-1} = G A_{n-2k-1}, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{n}{2} - 1 \left(\text{lub } \frac{n-3}{2} \right).$$

Jak wynika ze wzoru (21), między elementami macierzy A i K występują następujące zależności:

dla n parzystego

$$A_{11} = \varrho K_{11}, \quad A_{12} = K_{12}, \quad A_{21} = K_{21}, \quad A_{22} = \frac{1}{\varrho} K_{22}, \quad (23)$$

dla n nieparzystego

$$A_{11} = \varrho K_{12}, \quad A_{12} = K_{11}, \quad A_{21} = K_{22}, \quad A_{22} = \frac{1}{\varrho} K_{21}. \quad (24)$$

Zatem wystarczy znać postacie wyznacznikowe dla elementów macierzy pomocniczej K , aby określić analogiczną postać elementów macierzy łańcuchowej A .

Macierz K jest iloczynem macierzy K_i o wyznaczniku $\det K_i = -1$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Postać wyznacznikowa jej elementów daje się określić na podstawie wzorów (12)÷(15). Ostatecznie po wykonaniu odpowiednich działań otrzymuje się następujące wyrażenia na elementy macierzy A dla n parzystego:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \varrho J_n^A, & A_{12} &= (A_{22})_1 J_{n-1}^B, \\ A_{21} &= (A_{11}^{-1})_n J_{n+1}^C, & A_{22} &= \frac{(A_{22})_1}{(A_{11})_n \varrho} J_n^D, \end{aligned} \quad (25)$$

gdzie wyznaczniki typu Jacobiego mają elementy wynikające ze wzorów (12)÷(15), w których uwzględniono $k_i = -1$ oraz

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{n-2i} &= \begin{bmatrix} A_{12} & A_{11} \\ A_{22} & A_{21} \end{bmatrix}_{n-2i}, & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{n-2i-1} &= \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}_{n-2i-1}, \\ i &= 0, 1, \dots, \frac{n}{2} - 1. \end{aligned} \quad (26)$$

Przykładowo elementy wyznacznika J_n^A wynoszą

$$x_i = \begin{cases} (A_{12})_i + \frac{(A_{11})_i}{(A_{22})_{i-1}} (A_{12})_{i-1}, & u_{i-1} = -\frac{(A_{11})_i}{(A_{22})_{i-1}}, & i = 2k \leq n \\ (A_{21})_i + \frac{(A_{22})_i}{(A_{11})_{i-1}} (A_{21})_{i-1}, & u_{i-1} = -\frac{(A_{22})_i}{(A_{11})_{i-1}}, & i = 2k+1 \leq n-1 \end{cases}$$

$$x_1 = (A_{21})_1, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}, \quad v_r = 1 \quad (r = 2, 3, \dots, n).$$

Natomiast dla n nieparzystego otrzymuje się:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \varrho(A_{11})_1 J_{n-1}^B, & A_{12} &= J_n^A, \\ A_{21} &= \frac{(A_{11})_1}{(A_{11})_n} J_n^D, & A_{22} &= \frac{1}{\varrho} (A_{11}^{-1})_n J_{n+1}^C, \end{aligned} \quad (27)$$

gdzie wyznaczniki typu Jacobiego mają elementy wynikające ze wzorów (12)÷(15), w których uwzględniono $k_i = -1$ oraz zależność (26) z tym, że obecnie $i = 0, 1, \dots, \frac{n-1}{2}$

dla wskaźników $n-2i$ (tj. dla wskaźników nieparzystych) lub $i = 0, 1, \dots, \frac{n-3}{2}$ dla wskaźników $n-2i-1$ (tj. dla wskaźników parzystych).

Przykładowo elementy wyznacznika J_n^A wynoszą

$$\begin{aligned} x_i &= \begin{cases} (A_{21})_i + \frac{(A_{22})_i}{(A_{11})_{i-1}} (A_{21})_{i-1}, & u_{i-1} = -\frac{(A_{22})_i}{(A_{11})_{i-1}}, & i = 2k \leq n-1, \\ (A_{12})_i + \frac{(A_{11})_i}{(A_{22})_{i-1}} (A_{12})_{i-1}, & u_{i-1} = -\frac{(A_{11})_i}{(A_{22})_{i-1}}, & i = 2k+1 \leq n, \end{cases} \\ x_1 &= (A_{12})_1, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}, \quad v_r = 1 \quad (r = 2, 3, \dots, n). \end{aligned}$$

W tym miejscu należy zauważyć, że macierz $\mathbf{A}$ wg (16) nie ulegnie zmianie, jeżeli czynniki macierzowe $\mathbf{A}_i$ zastąpić macierzami

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'_i &= (\mathbf{A}_p)_i \mathbf{A}_i (\mathbf{A}_p^{-1})_{i-1}, & \mathbf{A}_0 &= \mathbf{A}_n = \mathbf{E}, \\ i &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (28)$$

gdzie macierze $(\mathbf{A}_p)_k$ ($1 \leq k \leq n-1$) są dowolnymi nieosobliwymi macierzami kwadratowymi czteroelementowymi. Jeżeli macierz $(\mathbf{A}_p)_k$ ma właściwości macierzy łańcuchowej czwórnika, to wtedy te właściwości posiada także i macierz $\mathbf{A}'_k$. W niektórych przypadkach przekształcenie macierzy według (28) jest równoznaczne z odmiennym podziałem danej struktury fizycznej na elementarne ogniwa składowe.

Wniosek, jaki wypływa z przytoczonych uwag, sprowadza się do tego, że można wskazać wiele wyznaczników Jacobiego o odmiennych zbiorach elementów typu x_i oraz u_i , które opisują właściwości tej samej struktury fizycznej. W praktyce fakt ten nie nastęrcza specjalnych trudności, gdyż sposób realizacji układu, jego konfiguracja, określa praktycznie użyteczną postać czynników macierzowych $\mathbf{A}_i$ w iloczynie (16). Przekształcenie według (28) można wykorzystać celem nadania elementom x_i , u_i w wyznacznikach Jacobiego określonych pożądanych właściwości analitycznych.

4. ELEMENTY WYZNACZNIKOWEJ POSTACI FUNKCJI A_{ik} W PRZYPADKU SYMETRII BĄDŹ ANTYSYMETRII ŁAŃCUCHA CZWÓRNIKÓW BIERNYCH

Rezultaty podane w rozdz. 3 zostały uzyskane przy dość ogólnych założeniach co do właściwości łańcucha ogniów. Oczywiście wyłania się pytanie, jak wpływają dodatkowe ograniczenia w postaci symetrii bądź antysymetrii układu na elementy wyznacznikowej postaci funkcji A_{ik} ($i, k = 1, 2$). Obecnie przeanalizuje się niektóre aspekty tego zagadnienia.

4.1. Przypadek układu symetrycznego

Jak wiadomo [1, 12, 13], czwórnik spełnia warunki symetrii, jeżeli elementy a_{11} i a_{22} w jego macierzy łańcuchowej są sobie tożsamościowo równe. Na podstawie tego kryterium można twierdzić, że jeżeli w łańcuchu czwórników macierze A_i według (17) oraz H według (18) spełniają warunek

$$A_i = (GA_{n+1-i}G)_t, \quad H = E, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (29)$$

gdzie indeks t wskazuje na macierz transponowaną [11], to łańcuch ten jest układem symetrycznym.

W rzeczy samej uwzględnienie warunku (29) we wzorze (16) prowadzi do następującej zależności:

$$A = A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1 = G(A_1)_t (A_2)_t \dots (A_{n-1})_t (A_n)_t G = GA_t G,$$

albowiem macierz transponowana iloczynu macierzy jest równa iloczynowi macierzy transponowanych, branych w odwrotnej kolejności. Stąd

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{12} \\ A_{21} & A_{11} \end{bmatrix},$$

czyli że układ będący łańcuchem ogniw o właściwości (29) jest symetryczny.

Zgodnie z uwagami poczynionymi w rozdz. 3 zależność (29) stanowi jedynie warunek dostateczny symetrii łańcucha czwórników. Nadaje się ona jednak do opisu właściwości wielu układów spotykanych w praktyce, m.in. w technice mikrofalowej [7, 8, 10]. Obecnie wykorzysta się ją celem wyprowadzenia wzorów na elementy w wyznacznikach A_{ik} przy założeniu symetrii układu.

W pierwszej kolejności rozpatrzy się wariant odpowiadający związkom (19), (20).

W przypadku funkcji A_{11} i A_{22} obowiązuje zależność

$$A_{11} = A_{22} = J_n^A,$$

gdzie elementy wyznacznika J_n^A wynikają ze wzoru (12) z uwzględnieniem warunku (29). Zatem

$$x_1 = (A_{11})_1, \quad x_i = (A_{11})_i + \frac{(A_{12})_i}{(A_{12})_{i-1}} (A_{22})_{i-1},$$

$$u_{i-1} = \frac{(A_{12})_i}{(A_{12})_{i-1}}, \quad v_i = 1, \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

skąd po podstawieniu warunku (29) otrzymuje się

$$\begin{aligned} x_{n+2-i} &= (A_{22})_{i-1} + \frac{(A_{12})_{i-1}}{(A_{12})_i} (A_{11})_i = \\ &= \frac{(A_{12})_{i-1}}{(A_{12})_i} \left[(A_{11})_i + \frac{(A_{12})_i}{(A_{12})_{i-1}} (A_{22})_{i-1} \right] = \frac{x_i}{u_{i-1}}, \quad u_{n+1-i} = u_{i-1}^{-1}. \end{aligned} \quad (30)$$

Ostatecznie po wykonaniu paru elementarnych przekształceń uzyskuje się następujące wyrażenie na wyznacnikową postać funkcji A_{11} i A_{22} układu symetrycznego:

$$A_{11} = A_{22} = (J_n^A)' = \begin{vmatrix} x'_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x'_2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x'_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x'_{n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x'_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & x'_n \end{vmatrix}, \quad (31)$$

gdzie

$$x'_i = x_i \prod_{k=0}^{s-i} u_{i+k}^{(-1)^{k+1}}, \quad x'_{s+1} = x_{s+1}, \quad s = \frac{n-1}{2} \quad \text{lub} \quad \frac{n}{2},$$

$$i = 1, 2, \dots, s, \quad x'_k = x'_{n+2-k}, \quad k = 2, 3, \dots, n. \quad (32)$$

Warto zwrócić uwagę na równość parami elementów położonych na głównej przekątnej, symetrycznie względem elementu x'_{s+1} , tj. o wskaźnikach k i $n+2-k$ (dla $k = 2, 3, \dots, n$).

Zależność (30) ma również istotne znaczenie dla analizy pozostałych elementów unormowanej macierzy łańcuchowej układu symetrycznego. Stąd w przypadku funkcji A_{21} otrzymuje się

$$x_1 = x_{n+1}, \quad x_{n+2-i} = \frac{x_i}{u_{i-1}}, \quad u_{n+1-i} = \frac{1}{u_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

gdzie elementy x_i, u_i mają postać określoną przez związki (19), (20).

W ten sposób można wykazać, że funkcja A_{21} badanego układu daje się przedstawić następująco:

$$A_{21} = \begin{cases} (A_{12})_{\frac{n}{2}}^{-1} (J_{n+1}^C)', & \text{dla } n \text{ parzystego,} \\ (A_{12})_{\frac{n+1}{2}}^{-1} (J_{n+1}^C)', & \text{dla } n \text{ nieparzystego,} \end{cases} \quad (33)$$

przy czym wyznacznik $(J_{n+1}^C)'$ ma postać następującą:

dla n parzystego

$$(J_{n+1}^C)' = \begin{vmatrix} x_1 & u_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & u_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x_s & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & x_{s+1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & x_3 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x_2 & u_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & x_1 \end{vmatrix}, \quad (34)$$

dla n nieparzystego

$$(J_{n+1}^C)' = \begin{pmatrix} x_1 & u_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & u_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_s & u_s & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x_{s+1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & x_{s+1} & u_s & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x_3 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x_2 & u_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & x_1 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Elementy w wyznacznikach Jacobiego według (34), (35) oblicza się z następujących wzorów:

$$\begin{aligned} x_1 &= (A_{11})_1, & x_i &= (A_{11})_i + \frac{(A_{12})_i}{(A_{12})_{i-1}} (A_{22})_{i-1}, \\ u_{i-1} &= \frac{(A_{12})_i}{(A_{12})_{i-1}}, & i &= 2, 3, \dots, s+1, \end{aligned} \quad (36)$$

gdzie s jest takie samo jak we wzorze (32).

Przechodząc do funkcji A_{12} należy zauważyć, że jak wynika ze wzorów (13), (14) wyznacznik J_{n-1}^B równy jest wyznacznikowi uzyskanemu z J_{n+1}^C przez wykreślenie pierwszych i ostatnich wierszy i kolumn, co zaznacza się następująco:

$$J_{n-1}^B = (J_{n+1}^C)_{ii, kk}, \quad i = 1, \quad k = n+1. \quad (37)$$

Na tej podstawie funkcja A_{12} układu symetrycznego daje się wyrazić za pomocą następującej zależności:

$$A_{12} = \begin{cases} \frac{(A_{12})_1^2}{(A_{12})_{\frac{n}{2}}} (J_{n+1}^C)'_{ii, kk} & \text{dla } n \text{ parzystego,} \\ \frac{(A_{12})_1^2}{(A_{12})_{\frac{n+1}{2}}} (J_{n+1}^C)'_{ii, kk} & \text{dla } n \text{ nieparzystego.} \end{cases} \quad (38)$$

Na tym kończy się analiza symetrycznego łańcucha ogniów biernych z wykorzystaniem iloczynu macierzy w postaci (16). Szczególną uwagę zwrócono na funkcje A_{12} i A_{21} przez szczegółowe przedstawienie odpowiadających im wyznaczników Jacobiego, gdyż funkcje te znajdują zastosowanie w algebraicznej metodzie syntezy czwórników symetrycznych.

Z kolei przeanalizuje się wyznacznikowe postacie elementów unormowanej macierzy łańcuchowej układu symetrycznego, złożonego z ogniów o właściwości (29), w przypadku iloczynu macierzowego według wzoru (21) (tj. wariant drugi).

Dla n parzystego zgodnie ze wzorem (22) z uwzględnieniem warunku (29) otrzymuje się, że czynniki macierzowe w iloczynie (21) spełniają równość

$$(\mathbf{GK}_{n+1-i}\mathbf{G})_t = \mathbf{K}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (39)$$

Zależność (39) jest taka sama jak warunek (29), określający właściwości czynników macierzowych A_i w iloczynie (16). Na tej podstawie można twierdzić, że wszystkie podstawowe rezultaty, uzyskane w trakcie analizy wariantu pierwszego, są nadal ważne, należy jedynie zmienić wzory określające elementy x_i i u_i w odpowiednich wyznacznikach. Zatem w przypadku funkcji A_{11} i A_{22} korzysta się ze wzorów (31), (32), w których uwzględnia się elementy x_i , u_i zgodnie ze związkami przytoczonymi w rozdz. 3 dla wariantu drugiego (bądź wykorzystać wzór (41)).

Jeżeli chodzi o funkcję A_{21} , to na podstawie wzorów (25), (33), (34) i (36) można napisać

$$A_{21} = \begin{cases} (A_{11})_{\frac{n}{2}}^{-1} (J_{n+1}^C)', & \text{dla } \frac{n}{2} \text{ parzystego,} \\ (A_{22})_{\frac{n}{2}}^{-1} (J_{n+1}^C)', & \text{dla } \frac{n}{2} \text{ nieparzystego,} \end{cases} \quad (40)$$

gdzie wyznacznik $(J_{n+1}^C)'$ ma postać (34) o następujących elementach:

$$x_i = \begin{cases} (A_{12})_i + \frac{(A_{11})_i}{(A_{22})_{i-1}} (A_{12})_{i-1}, & u_{i-1} = -\frac{(A_{11})_i}{(A_{22})_{i-1}}, & i = 2k \leq \frac{n}{2} + 1, \\ (A_{21})_i + \frac{(A_{22})_i}{(A_{11})_{i-1}} (A_{21})_{i-1}, & u_{i-1} = -\frac{(A_{22})_i}{(A_{11})_{i-1}}, & i = 2k+1 \leq \frac{n}{2} + 1, \end{cases} \quad (41)$$

$$x_1 = (A_{21})_1, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{4} \left(\text{lub } \frac{n+2}{4} \right), \quad u_s = u_{s+1} = -1.$$

Po sprecyzowaniu elementów wyznacznika $(J_{n+1}^C)'$ można na podstawie wzoru (38) wyznaczyć postać wyznacznikową funkcji A_{12} , a mianowicie

$$A_{12} = \begin{cases} \frac{(A_{22})_1^2}{(A_{11})_{\frac{n}{2}}} (J_{n+1}^C)'_{ii, kk}, & \text{dla } \frac{n}{2} \text{ parzystego,} \\ & i = 1, \quad k = n+1 \\ \frac{(A_{22})_1^2}{(A_{22})_{\frac{n}{2}}} (J_{n+1}^C)'_{ii, kk}, & \text{dla } \frac{n}{2} \text{ nieparzystego.} \end{cases} \quad (42)$$

We wszystkich dotychczasowych rezultatach, dotyczących funkcji A_{21} układu symetrycznego, obserwuje się równość parami elementów x_i i x_{n+2-i} ($i = 1, 2, \dots, n+1$) oraz u_k i u_{n+1-k} ($k = 1, 2, \dots, n$) w wyznaczniku Jacobiego, odpowiadającego tej funkcji. Z uwagi na zależność (37) symetria ta cechuje także wyrażenie wyznacznikowe na funkcję A_{12} . Fakt ten ma istotne znaczenie dla realizacji algebraicznej metody syntezy struktur symetrycznych.

Okazuje się, że omawiana równość nie występuje w przypadku nieparzystej liczby ogniw w łańcuchu symetrycznym, analizowanym w oparciu o wyrażenia (21) i (22).

Dla n nieparzystego zgodnie ze wzorem (22) z uwzględnieniem warunku (29) otrzymuje się, że czynniki macierzowe w iloczynie (21) spełniają równość

$$K_i = (K_{n+1-i})_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (43)$$

Stąd zgodnie ze wzorem (27) funkcja A_{12} jest równa wyznacznikowi J_n^A o następujących elementach x_i i u_i :

$$x_{i+1} = \begin{cases} (A_{21})_{i+1} + \frac{(A_{22})_{i+1}}{(A_{11})_i} (A_{21})_i, & u_i = -\frac{(A_{22})_{i+1}}{(A_{11})_i}, \quad i = 2k-1 \leq \frac{n-1}{2} \\ (A_{12})_{i+1} + \frac{(A_{11})_{i+1}}{(A_{22})_i} (A_{12})_i, & u_i = -\frac{(A_{11})_{i+1}}{(A_{22})_i}, \quad i = 2k \leq \frac{n-1}{2}, \end{cases} \quad (44)$$

oraz

$$x_{n+1-i} = \begin{cases} (A_{12})_i + \frac{(A_{22})_i}{(A_{11})_{i+1}} (A_{12})_{i+1}, & u_{n-i} = -\frac{(A_{22})_i}{(A_{11})_{i+1}}, \quad i = 2k-1 \leq \frac{n-1}{2}, \\ (A_{21})_i + \frac{(A_{11})_i}{(A_{22})_{i+1}} (A_{21})_{i+1}, & u_{n-i} = -\frac{(A_{11})_i}{(A_{22})_{i+1}}, \quad i = 2k \leq \frac{n-1}{2}, \end{cases} \quad (45)$$

$$x_1 = (A_{12})_1, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{4} \quad \left(\text{lub } \frac{n+1}{4} \right).$$

Na przykładzie elementów postaci wyznacnikowej dla funkcji A_{12} widać, że obecnie związek między elementami wyznaczników Jacobiego, uwarunkowany równością (29), jest o wiele bardziej skomplikowany aniżeli w poprzednio rozpatrzonych przypadkach; uwzględnienie warunku symetrii nie spowodowało oczekiwanej większej przejrzystości zależności analitycznych. Dlatego można poniechać dalszej analizy tego wariantu, porzyskając na wskazówkach związanych ze wzorem (27).

Dla uniknięcia wspomnianej niedogodności można skorzystać z następującej drogi postępowania.

Macierz $\mathbf{A}_{\frac{n+1}{2}}$ w iloczynie (16) w przypadku założenia symetrii układu z uwzględnieniem równości (29) jest macierzą czwórnika symetrycznego. Jak łatwo można sprawdzić, daje się ona przedstawić jako kwadrat następującej macierzy pomocniczej $\mathbf{A}'_{\frac{n+1}{2}}$:

$$\mathbf{A}'_{\frac{n+1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2} [1 + (A_{11})_{\frac{n+1}{2}}]} & \frac{(A_{12})_{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{2 [1 + (A_{11})_{\frac{n+1}{2}}]}} \\ \frac{(A_{21})_{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{2 [1 + (A_{11})_{\frac{n+1}{2}}]}} & \sqrt{\frac{1}{2} [1 + (A_{11})_{\frac{n+1}{2}}]} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{\frac{n+1}{2}} = \mathbf{A}_{\frac{n+1}{2}}'^2, \quad (46)$$

przy czym dla ustalenia uwagi przyjęto, że $(A_{11})_{\frac{n+1}{2}}' > 0$ w roboczym pasmie częstotliwości.

Podstawienie zależności (46) do (16) prowadzi do parzystej liczby czynników macierzowych w iloczynie (21) i tym samym pozwala wykorzystać związki (40)÷(42) do wyprowadzenia postaci wyznacnikowej funkcji A_{12} i A_{21} z symetrycznym rozkładem elementów (tj. z takim jak we wzorze (34)).

Oczywiście w niektórych przypadkach, kiedy macierze $\mathbf{A}_i$ spełniają dodatkowe ograniczenia, obok już wymienionych, nie zachodzi potrzeba posługiwania się związkiem (46), a dogodne dla praktyki zależności wynikają bezpośrednio ze wzorów (44) i (45).

4.2. Przypadek układu antymetrycznego

Czwórnik spełnia warunki antymetrii, jeżeli dla jego macierzy łańcuchowej $\mathbf{A}$ można wskazać taką macierz unormowaną $\mathbf{A}_i$ o postaci (16), której elementy A_{12} i A_{21} są sobie tożsamościowo równe [1]. Inaczej mówiąc, unormowana macierz łańcuchowa $\mathbf{A}$ czwórnika antymetrycznego przy odpowiednio dobranych współczynnikach normujących spełnia następujący warunek:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_t. \quad (47)$$

Na podstawie tego kryterium można twierdzić, że jeżeli w łańcuchu czwórników macierze $\mathbf{A}_i$ według (17) spełniają warunek

$$\mathbf{A}_i = (\mathbf{A}_{n+1-i})_t, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (48)$$

to łańcuch ten jest układem antymetrycznym.

W rzeczy samej uwzględnienie warunku (48) oraz równości $\mathbf{H} = \mathbf{H}_t$ we wzorze (16) prowadzi do następującej zależności:

$$\mathbf{A} = \mathbf{H}\mathbf{A}_n\mathbf{A}_{n-1} \dots \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1\mathbf{H} = \mathbf{H}_t(\mathbf{A}_1)_t(\mathbf{A}_2)_t \dots (\mathbf{A}_{n-1})_t(\mathbf{A}_n)_t\mathbf{H}_t = \mathbf{A}_t,$$

czyli do spełnienia warunku antymetrii (47). Zatem układ będący łańcuchem ogniów o właściwości (48) jest antymetryczny.

Przechodząc do analizy wpływu warunków antymetrii w postaci równości (48) na elementy wyznaczników Jacobiego należy przede wszystkim wskazać na podobieństwo związków (43) i (48). Na tej podstawie można wnioskować, że uwzględnienie równości (48) w wyrażeniach (16) (wariant pierwszy) i (21) (wariant drugi, n parzyste) nie przynosi odczuwalnych ułatwień analitycznych. Dla przykładu elementy wyznacznika J_n^A dla funkcji A_{11} w ramach wariantu pierwszego, wzór (19), są następujące:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= (A_{11})_{i+1} + \frac{(A_{12})_{i+1}}{(A_{12})_i} (A_{22})_i, & u_i &= \frac{(A_{12})_{i+1}}{(A_{12})_i}, \\ x_{n+1-i} &= (A_{11})_i + \frac{(A_{21})_i}{(A_{21})_{i+1}} (A_{22})_{i+1}, & u_{n-i} &= \frac{(A_{21})_i}{(A_{21})_{i+1}}, \\ x_1 &= (A_{11})_1, & x_{\frac{n}{2}+1} &= (A_{11})_{\frac{n}{2}+1} + \frac{(A_{21})_{n/2}}{(A_{12})_{n/2}} (A_{22})_{n/2}, & u_{n/2} &= \frac{(A_{21})_{n/2}}{(A_{12})_{n/2}}, \\ & & i &= 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1 \quad \left(\text{lub } \frac{n-1}{2} \right). \end{aligned} \quad (49)$$

Jak wynika z przytoczonych zależności, między odpowiednimi elementami x_i i u_i wyznacznika J_n^A istnieje pewien związek, wynikający z uwarunkowania jednego z elementów macierzy $\mathbf{A}_i$ przez elementy pozostałe (zgodnie z warunkiem $\det \mathbf{A}_i = (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})_i = 1$). Jednak jest to zależność uwikłana; na jej podstawie można stwierdzić tylko tyle, że zadanie elementów o wskaźnikach od $i = 1$ do $i = \frac{n}{2} + 1$ (lub $\frac{n+1}{2}$) rzutuje na parametry pozostałych elementów wyznacznika Jacobiego.

Celem uzyskania bardziej dogodnych zależności proponuje się następujące postępowanie.

W pierwszej kolejności rozpatrzy się wariant pierwszy dla n parzystego, tj. układ antymetryczny o macierzy $\mathbf{A}$ według (16) z uwzględnieniem warunku (48). Zgodnie z (48) spełniona jest równość

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{G}(\mathbf{GA}_{n+1-i}\mathbf{G})_i \mathbf{G} = (\mathbf{GA}'_{n+1-i}\mathbf{G})_i, \quad (50)$$

która jest taka sama jak (29). Jeżeli równość (50) uwzględnić we wzorze (16) dla czynników macierzowych od $i = \frac{n}{2} + 1$ do $i = n$, to iloczyn ten przyjmie następującą postać:

$$\mathbf{A} = \mathbf{GH}^{-1}\mathbf{A}'_n\mathbf{A}'_{n-1} \dots \mathbf{A}'_{\frac{n}{2}+1}\mathbf{GA}_{n/2} \dots \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1\mathbf{H} = \mathbf{GH}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{H},$$

skąd

$$A_{11} = \varrho A'_{21}, \quad A_{12} = A_{21} = A'_{11} = A'_{22}, \quad A_{22} = \frac{1}{\varrho} A'_{12}. \quad (51)$$

W iloczynie macierzowym

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}'_n\mathbf{A}'_{n-1} \dots \mathbf{A}'_{\frac{n}{2}+1}\mathbf{GA}_{n/2} \dots \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 \quad (52)$$

czynniki macierzowe spełniają warunek (29), co oznacza, że elementy macierzy $\mathbf{A}'$ mają postać wyznacznikową, wyprowadzoną w pktcie 4.1 dla układu symetrycznego w ramach wariantu pierwszego (dla n nieparzystego ze względu na obecność macierzy $\mathbf{G}$ w iloczynie (52)). Po stwierdzeniu tego faktu pozostaje już tylko uwzględnić we wzorach (31)–(38) elementy czynników macierzowych w iloczynie (52). Dla lepszej ilustracji rozważań przytoczy się wyniki uzyskane na tej drodze dla funkcji A_{11} i A_{22} .

Zgodnie ze wzorami (33), (35), (36), (38) oraz (51) funkcje A_{11} i A_{22} łańcucha antymetrycznego o parzystej liczbie ogniw posiadają następującą postać wyznacznikową typu Jacobiego (wariant pierwszy):

$$A_{11} = \varrho(J_{n+2}^C)', \quad A_{22} = \frac{1}{\varrho}(A_{12})_i^2(J_{n+2}^C)'_{ii, kk} \quad (i = 1, \quad k = n+2), \quad (53)$$

gdzie wyznacznik $(J_{n+2}^C)'$ ma postać (35) o elementach według (36) z tym, że obecnie ze względu na macierz $\mathbf{G}$ obowiązuje

$$x_{s+1} = \frac{(A_{22})_{n/2}}{(A_{12})_{n/2}}, \quad u_s = (A_{12})_{n/2}^{-1}, \quad s = \frac{n}{2}, \quad u_{s+1} = -1.$$

Przypadek n nieparzystego w ramach wariantu pierwszego rozwiązuje się przez rozszepienie macierzy $\mathbf{A}_{\frac{n+1}{2}}$ we wzorze (16) na dwa czynniki macierzowe zgodnie z następującą zależnością, wyprowadzoną analogicznie jak wyrażenie (46):

$$\mathbf{GA}_{\frac{n+1}{2}} = -j\mathbf{A}'_{\frac{n+1}{2}}\mathbf{A}''_{\frac{n+1}{2}}, \quad \mathbf{A}''_{\frac{n+1}{2}} = \mathbf{GA}'_{\frac{n+1}{2}}\mathbf{G}, \quad (54)$$

gdzie

$$\mathbf{A}'_{\frac{n+1}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{(A_{22})_{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{2[1-j(A_{12})_{\frac{n+1}{2}}]}} & j\sqrt{\frac{1}{2}[1-j(A_{12})_{\frac{n+1}{2}}]} \\ j\sqrt{\frac{1}{2}[1-j(A_{12})_{\frac{n+1}{2}}]} & \frac{(A_{11})_{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{2[1-j(A_{12})_{\frac{n+1}{2}}]}} \end{bmatrix}, \quad (55)$$

przy czym dla ustalenia uwagi przyjęto $j(A_{12})_{\frac{n+1}{2}} < 0$ w roboczym pasmie częstotliwości.

Podstawienie zależności (50) i (54) do iloczynu (16) daje w wyniku następujące wyrażenie:

$$\mathbf{A} = \mathbf{GH}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{H}, \quad \mathbf{A}' = -j\mathbf{A}'_n\mathbf{A}'_{n-1} \dots \mathbf{A}'_{\frac{n+1}{2}}\mathbf{A}''_{\frac{n+1}{2}}\mathbf{A}_{\frac{n-1}{2}} \dots \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1, \quad (56)$$

przy czym należy zauważyć, że macierz $\mathbf{A}'$ obejmuje $n+1$ czynników macierzowych. Jak więc widać, elementy macierzy $\mathbf{A}$ można wyrazić za pomocą elementów macierzy $\mathbf{A}'$ zgodnie ze wzorem (51).

Czynniki macierzowe w iloczynie $\mathbf{A}'$ według (56) spełniają warunek (29), a tym samym postać wyznacznikowa dla elementów macierzy $\mathbf{A}'$ jest analogiczna do postaci wyprowadzonej w pktcie 4.1 dla układu symetrycznego o parzystej liczbie ogniw (w ramach wariantu pierwszego). Na tej podstawie cały problem sprowadza się do uwzględnienia we wzorach (31)÷(38) elementów właściwych dla czynników macierzowych iloczynu (56). Dla przykładu rozpatrzy się postać wyznacznikową dla funkcji A_{11} i A_{22} .

Zgodnie ze wzorami (33), (34), (36), (38) oraz (51), (55) funkcje A_{11} i A_{22} łańcucha antymetrycznego o nieparzystej liczbie ogniw posiadają następującą postać wyznacznikową typu Jacobiego (wariant pierwszy):

$$A_{11} = \frac{-\varrho}{\sqrt{\frac{1}{2}[1-j(A_{12})_{\frac{n+1}{2}}]}} (J_{n+2}^C)' , \quad A_{22} = \frac{-(A_{12})_1^2}{\varrho \sqrt{\frac{1}{2}[1-j(A_{12})_{\frac{n+1}{2}}]}} (J_{n+2}^C)'_{ii, kk}, \quad (57)$$

gdzie wyznacznik $(J_{n+2}^C)'$ ma postać (34) o elementach według (36) z tym, że obecnie $s = \frac{n+1}{2}$.

Nie przedstawia trudności wyprowadzenie postaci wyznacznikowej także i dla funkcji A_{12} , wykorzystując w tym celu wzory (12), (31), (32) oraz (51), (55).

Przechodząc do wariantu drugiego rozpatrzy się w pierwszej kolejności przypadek łańcucha antymetrycznego o nieparzystej liczbie ogniw, spełniających warunek (48). Otóż zgodnie ze wzorami (22) i (48) czynniki macierzowe w iloczynie (21) spełniają równość (39), analogiczną do (29). Zatem postacie wyznacznikowe dla elementów macierzy $\mathbf{A}$ według (21) wyznacza się ze wzoru (27) z uwzględnieniem zależności (12)÷(15) oraz (48), wykorzystując przy tym wyznaczniki wyprowadzone dla układu symetrycznego (wariant pierwszy, n nieparzyste). Rozumując w ten sposób uzyskuje się dla funkcji A_{11} i A_{22} następujące rezultaty:

dla $\frac{n+1}{2}$ parzystego

$$A_{22} = \frac{1}{\varrho} (A_{22})_{\frac{n+1}{2}}^{-1} (J_{n+1}^C)', \quad A_{11} = \varrho \frac{(A_{11})_1^2}{(A_{22})_{\frac{n+1}{2}}} (J_{n+1}^C)'_{ii, kk}, \quad (58)$$

dla $\frac{n+1}{2}$ nieparzystego

$$A_{22} = \frac{1}{\varrho} (A_{11})_{\frac{n+1}{2}}^{-1} (J_{n+1}^C)', \quad A_{11} = \varrho \frac{(A_{11})_1^2}{(A_{11})_{\frac{n+1}{2}}} (J_{n+1}^C)'_{ii, kk}, \quad (59)$$

gdzie wyznacznik $(J_{n+1}^C)'$ ma postać (35) o elementach według wzoru (44), przy czym $x_1 = (A_{12})_1$, $u_{\frac{n+1}{2}} = -1$.

Podobnie, na podstawie wzorów (27), (31), (32) oraz (44), można wyprowadzić postać wyznacznikową elementu A_{12} .

Do rozważenia pozostał jeszcze jeden przypadek, a mianowicie łańcuch antymetryczny o parzystej liczbie ogniw, analizowany na podstawie zależności (21), (22), (25), (26) z uwzględnieniem warunku (48). Otóż w tym przypadku czynniki macierzowe K_i w iloczynie (21) spełniają równość (43), czyli że istota problemu jest taka sama jak w wariancie pierwszym dla n parzystego. Stąd wniosek, że postaci wyznacznikowe dla elementów A_{11} i A_{22} można określić na podstawie wzoru (53). A więc

$$A_{11} = \varrho(J_{n+2}^C)', \quad A_{22} = \frac{1}{\varrho}(A_{22})_1^2(J_{n+2}^C)'_{ii, kk}, \quad i = 1, \quad k = n+2, \quad (60)$$

gdzie wyznacznik $(J_{n+2}^C)'$ ma postać (35) o elementach według (41) z tym, że obecnie

$$x_{s+1} = \begin{cases} \frac{(A_{21})_s}{(A_{11})_s}, \\ \frac{(A_{12})_s}{(A_{22})_s}, \end{cases} \quad u_s = \begin{cases} -(A_{11})_s^{-1}, & \text{dla } s \text{ parzystego,} \\ \\ \\ -(A_{22})_s^{-1}, & \text{dla } s \text{ nieparzystego.} \end{cases} \quad s = \frac{n}{2}$$

Na tym kończy się analiza postaci wyznacznikowej dla elementów unormowanej macierzy łańcuchowej kaskadowego połączenia czwórników biernych przy założeniu warunków (48). Szczególną uwagę zwrócono na związki odnoszące się do funkcji A_{11} i A_{22} , gdyż są one użyteczne przy formułowaniu układu równań nieliniowych do syntezy łańcucha antymetrycznego metodą algebraiczną. Jednocześnie podano wskazówki pomocne przy wyprowadzaniu postaci wyznacznikowych dla funkcji A_{12} (i oczywiście A_{21} , albowiem $A_{12} = A_{21}$). Szczególną uwagę zwrócono na sposoby uzyskiwania postaci wyznacznikowych o symetrycznym rozkładzie elementów. Oczywiście w niektórych przypadkach nie zachodzi konieczność posługiwania się tymi sposobami (zob. np. [2, 3, 4]).

5. WYZNACZNIKOWE POSTACIE FUNKCJI TRANSMISJI I FUNKCJI FILTRACJI ŁAŃCUCHA CZWÓRNIKÓW BIERNYCH

5.1. Przypadek ogólny

Funkcja transmisji T_{11} i funkcja filtracji T_{21} należą do podstawowych wielkości, określających właściwości przesyłowe czwórników. Są one często stosowane w syntezie różnego rodzaju układów filtrujących, dopasowujących itp. na gruncie parametrów skutecznych czwórnika [1 ÷ 10]. Z tego względu zrozumiałe jest dążenie do możliwie wszechstronnego zbadania tych funkcji, a w szczególności określenia odpowiadających im postaci wyznacznikowych. Zadanie to daje się przeprowadzić różnymi sposobami. W tej pracy rozpatrzy się dwa z nich.

Funkcje T_{11} i T_{21} są elementami unormowanej macierzy transmisyjnej T układu. Macierz ta posiada taką samą właściwość jak macierz A , tj. w przypadku kaskadowego połączenia czwórników unormowana macierz transmisyjna całego układu jest równa iloczynowi unormowanych macierzy transmisyjnych poszczególnych ogniw, wziętych w odpowiedniej kolejności z zachowaniem jednolitej zasady normowania [1]. Na tej podstawie można formalnie wykorzystać wzory (12) i (14) dla ustalenia wyznacznikowej postaci

funkcji transmisji i filtracji łańcucha czwórników. Podejście takie jest całkowicie poprawne, ale prowadzi do zespolonych elementów x_i i u_i w wyznacznikach Jacobiego, co pomniejsza praktyczną przydatność uzyskanych wyników.

Drugi sposób polega na wykorzystaniu wzajemnych związków między elementami macierzy T i A . Mianowicie, jak można wykazać [1], funkcje T_{11} i T_{21} dają się wyrazić następująco:

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{1}{2}(A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22}), \\ T_{21} &= \frac{1}{2}(A_{11} + A_{12} - A_{21} - A_{22}). \end{aligned} \quad (61)$$

Ze wzoru (61) widać, że w przypadku czwórnika symetrycznego funkcja filtracji ma postać

$$T_{21} = \frac{1}{2}(A_{12} - A_{21}). \quad (62)$$

Natomiast funkcja filtracji układu antymetrycznego wyraża się wzorem

$$T_{21} = \frac{1}{2}(A_{11} - A_{22}). \quad (63)$$

Związki (61)÷(63) służą do opisu właściwości transmisyjnych czwórnika na podstawie znajomości odpowiednich elementów jego unormowanej macierzy łańcuchowej. Na ich podstawie można wyprowadzić poszukiwaną postać wyznacznikową funkcji T_{11} i T_{21} , wykorzystując w tym celu rezultaty rozdz. 3 i 4.

Ze wzorów (19), (25) oraz (27) wynika, że ogólnie rzecz biorąc można napisać

$$\begin{aligned} A_{11} + A_{12} &= \mu_1 J_n^A + \mu_2 J_{n-1}^B, \\ A_{21} + A_{22} &= \eta_1 J_{n+1}^C + \eta_2 J_n^D, \end{aligned} \quad (64)$$

gdzie współczynniki μ_1, μ_2 oraz η_1, η_2 zależą od przyjętego sposobu wyprowadzenia postaci wyznacznikowej dla elementów macierzy A . W przypadku korzystania ze wzoru (19) są one następujące:

$$\mu_1 = \varrho, \quad \mu_2 = (A_{12})_1, \quad \eta_1 = (A_{12})_n^{-1}, \quad \eta_2 = \frac{(A_{12})_1}{(A_{12})_n \varrho}. \quad (65)$$

Jeżeli natomiast za punkt wyjścia służy wzór (25), to

$$\mu_1 = \varrho, \quad \mu_2 = (A_{22})_1, \quad \eta_1 = (A_{11})_n^{-1}, \quad \eta_2 = \frac{(A_{22})_1}{\varrho(A_{11})_n}. \quad (66)$$

Jeszcze inaczej jest w przypadku wzoru (27), wtedy bowiem

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = \varrho(A_{11})_1, \quad \eta_1 = \frac{1}{\varrho}(A_{11})_n^{-1}, \quad \eta_2 = \frac{(A_{11})_1}{(A_{11})_n}. \quad (67)$$

Na uwagę zasługuje fakt, iż w każdym z podanych zestawów współczynników spełniona jest równość

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\eta_2}{\eta_1}. \quad (68)$$

Analiza elementów w wyznacznikach J_n^A , wzór (12), i J_{n-1}^B , wzór (13), wykazuje, że między nimi występują następujące zależności:

$$\begin{aligned}(x_i)_A &= (x_{i-1})_B, \quad i = 2, 3, \dots, n, \\ (u_k v_{k+1})_A &= (u_{k-1} v_k)_B, \quad k = 2, 3, \dots, n-1,\end{aligned}$$

gdzie wskaźniki A i B podają, do jakiego wyznacznika należą wymienione elementy.

Na podstawie tej właściwości elementów obu wyznaczników dochodzi się do wniosku, że wyrażeniu $A_{11} + A_{12}$ można nadać następującą postać wyznacznikową:

$$A_{11} + A_{12} = J_n^{A+B}, \quad (69)$$

gdzie J_n^{A+B} jest wyznacznikiem typu Jacobiego o elementach

$$\begin{aligned}x_1 &= \mu_1(x_1)_A + \mu_2, \quad x_i = (x_i)_A, \quad v_i = 1, \quad i = 2, 3, \dots, n, \\ u_1 &= \mu_1(u_1)_A, \quad u_k = (u_k)_A, \quad k = 2, 3, \dots, n-1.\end{aligned} \quad (70)$$

Z kolei należy przeanalizować wyrażenie $A_{21} + A_{22}$ i występujące w nim wyznaczniki J_{n+1}^C i J_n^D . Otóż ze wzorów (14) i (15) wynika, że między elementami tych wyznaczników zachodzą następujące związki:

$$\begin{aligned}(x_i)_C &= (x_{i-1})_D, \quad i = 2, 3, \dots, n+1, \\ (u_k v_{k+1})_C &= (u_{k-1} v_k)_D, \quad k = 2, 3, \dots, n.\end{aligned}$$

Zatem słuszne jest następujące przedstawienie wyrażenia $A_{21} + A_{22}$ za pomocą wyznacznika Jacobiego:

$$\begin{aligned}A_{21} + A_{22} &= J_{n+1}^{C+D}, \\ x_1 &= \eta_1(x_1)_C + \eta_2, \quad x_i = (x_i)_C, \quad v_i = 1, \quad i = 2, 3, \dots, n+1, \\ u_1 &= \eta_1(u_1)_C, \quad u_k = (u_k)_C, \quad k = 2, 3, \dots, n.\end{aligned} \quad (71)$$

Uwzględnienie zależności (69) i (71) w wyrażeniu (61) daje następujący rezultat:

$$T_{11} = \frac{1}{2} (J_n^{A+B} + J_{n+1}^{C+D}), \quad T_{21} = \frac{1}{2} (J_n^{A+B} - J_{n+1}^{C+D}).$$

Z kolei warto przyrzeć się elementom wyznaczników w podanych związkach. Jak można sprawdzić na podstawie wzorów (12), (14), (65)÷(68), (70) i (71), spełnione są następujące równości:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_1} (x_1)_{A+B} &= (x_1)_A + \frac{\mu_2}{\mu_1} = (x_1)_A + \frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{1}{\eta_1} (x_1)_{C+D}, \\ \frac{1}{\mu_1} (u_1)_{A+B} &= (u_1)_A = (u_1)_C = \frac{1}{\eta_1} (u_1)_{C+D}, \\ (x_i)_{A+B} &= (x_i)_{C+D}, \quad i = 2, 3, \dots, n, \\ (u_k v_{k+1})_{A+B} &= (u_k v_{k+1})_{C+D}, \quad k = 2, 3, \dots, n-1.\end{aligned}$$

Stąd wypływa wniosek, że sumę lub różnicę rozpatrywanych wyznaczników Jacobiego można zastąpić jednym wyznacznikiem typu Jacobiego rzędu $n+1$, a mianowicie

$$T_{11} = \frac{1}{2} (J_{n+1})_1, \quad T_{21} = \frac{1}{2} (J_{n+1})_2, \quad (72)$$

przy czym elementy wyznaczników wynoszą

$$\begin{aligned}(x_1)_1 &= (x_1)_2 = (x_1)_A + \frac{\mu_2}{\mu_1}, & (x_{n+1})_q &= \mu_1 - (-1)^q \eta_1 (x_{n+1})_C, \\(x_i)_1 &= (x_i)_2 = (x_i)_A, & (u_{i-1})_1 &= (u_{i-1})_2 = (u_{i-1})_A, \\(v_i)_1 &= (v_i)_2 = (v_{n+1})_1 = (v_{n+1})_2 = 1, & i &= 2, 3, \dots, n, \\(u_n)_q &= -(-1)^q \eta_1 (u_n)_C = -(-1)^q \eta_1 k_n, & q &= 1, 2.\end{aligned}\quad (73)$$

Wyrażenia (72), (73) stanowią rozwiązanie postawionego problemu. Na podkreślenie zasługuje fakt, iż wśród elementów wyznacznika $(J_{n+1})_q$ jedynie elementy $(x_1)_q$ i $(x_{n+1})_q$ są zespolone. Pozostałe elementy są rzeczywiste lub urojone; przez wydzielenie i wyniesienie czynnika j przed wyznacznik można wszystkie te elementy uczynić rzeczywistymi.

5.2. Przypadek łańcucha symetrycznego

Celem analizy jest ustalenie, jakie specyficzne właściwości postaci wyznacznikowej funkcji T_{11} i T_{21} wynikają z faktu nałożenia ograniczenia (29) na macierze łańcuchowe poszczególnych czwórników w łańcuchu symetrycznym.

Korzystając z danych pktu 4.1 łącznie ze wzorem (62), otrzymuje się, że funkcja T_{21} łańcucha symetrycznego daje się wyrazić następująco:

W a r i a n t I

$$T_{21} = -\frac{1}{2(A_{12})_g} [(J_{n+1}^C)' - (A_{12})_1^2 (J_{n+1}^C)'_{ii, kk}], \quad (74)$$

$$g = \frac{n}{2} \quad \text{lub} \quad \frac{n+1}{2}, \quad i = 1, \quad k = n+1,$$

gdzie wyznacznik $(J_{n+1}^C)'$ ma postać (34) bądź (35) o elementach według (36).

W a r i a n t II, n parzyste

$$T_{21} = \begin{cases} -\frac{1}{2(A_{11})_g} [(J_{n+1}^C)' - (A_{22})_1^2 (J_{n+1}^C)'_{ii, kk}], & \text{dla } g \text{ parzystego,} \\ g = \frac{n}{2}, \quad i = 1, \quad k = n+1, \\ -\frac{1}{2(A_{22})_g} [(J_{n+1}^C)' - (A_{22})_1^2 (J_{n+1}^C)'_{ii, kk}], & \text{dla } g \text{ nieparzystego,} \end{cases} \quad (75)$$

gdzie wyznacznik $(J_{n+1}^C)'$ ma postać (34) o elementach według wzoru (41).

W a r i a n t II, n nieparzyste

$$T_{21} = -\frac{1}{\sqrt{2[1 + (A_{11})_{\frac{n+1}{2}}]}} [(J_{n+2}^C)' - (A_{22})_1^2 (J_{n+2}^C)'_{ii, kk}], \quad (76)$$

$$i = 1, \quad k = n+2,$$

gdzie wyznacznik $(J_{n+2}^C)'$ ma postać (34) o elementach według wzoru (41) z tym, że obecnie

$$s = \frac{n+1}{2}, \text{ a}$$

$$x_s = \begin{cases} (A'_{12})_s + \frac{(A'_{11})_s}{(A_{22})_{s-1}} (A_{12})_{s-1}, \\ (A'_{21})_s + \frac{(A'_{22})_s}{(A_{11})_{s-1}} (A_{21})_{s-1}, \end{cases} \quad x_{s+1} = \begin{cases} 2(A'_{21})_s, & \text{dla } s \text{ parzystego,} \\ 2(A'_{12})_s, & \text{dla } s \text{ nieparzystego.} \end{cases}$$

Elementy macierzy $A'_{\frac{n+1}{2}}$ są określone za pomocą wzoru (46).

Zależności dla funkcji transmisji T_{11} otrzymuje się na podstawie wzorów (72), (73) z uwzględnieniem (65), (66) oraz warunku (29). Są one następujące:

W a r i a n t I

$$T_{11} = \frac{1}{2} (A_{12})_g^{-1} (J_{n+1}^C)', \quad g = \frac{n}{2} \quad \text{lub} \quad \frac{n+1}{2}, \quad (77)$$

gdzie wyznacznik $(J_{n+1}^C)'$ ma postać (34) lub (35) o elementach określonych za pomocą wzoru (36) z tym, że obecnie $x_1 = (A_{11} + A_{12})_1$.

W a r i a n t II, n parzyste

$$T_{11} = \begin{cases} \frac{1}{2} (A_{11})_{\frac{n}{2}}^{-1} (J_{n+1}^C)', & \text{dla } \frac{n}{2} \text{ parzystego,} \\ \frac{1}{2} (A_{22})_{\frac{n}{2}}^{-1} (J_{n+1}^C)', & \text{dla } \frac{n}{2} \text{ nieparzystego,} \end{cases} \quad (78)$$

gdzie wyznacznik $(J_{n+1}^C)'$ ma postać (34) o elementach według wzoru (41) z tym, że x_1 oblicza się ze wzoru

$$x_1 = (A_{21} + A_{22})_1.$$

W a r i a n t II, n nieparzyste

$$T_{11} = \frac{1}{\sqrt{2[1 + (A_{11})_{\frac{n+1}{2}}]}} (J_{n+2}^C)', \quad (79)$$

gdzie wyznacznik $(J_{n+2}^C)'$ ma postać (34) o elementach według wzoru (41) z tym, że obecnie

$$s = \frac{n+1}{2}, \quad x_1 = (A_{21} + A_{22})_1, \text{ a elementy } x_s, x_{s+1} \text{ są podane przy wzorze (76).}$$

Warto zauważyć, że wszystkie postacie wyznacznikowe, występujące we wzorach (75)÷(79), cechuje symetryczny rozkład elementów x_i i u_i , co ma istotne znaczenie dla praktycznej przydatności wyprowadzonych zależności.

5.3. Przypadek łańcucha antymetrycznego

Celem analizy jest ustalenie, jakie wnioski dotyczące wyznacznikowej postaci dla funkcji transmisji i filtracji łańcucha czwórników biernych wynikają z uwzględnienia równości (48).

Na podstawie związków (53), (57) ÷ (60) oraz (63) otrzymuje się, że funkcja T_{21} łańcucha antymetrycznego daje się wyrazić następująco:

W a r i a n t I, n parzyste

$$T_{21} = \frac{1}{2} \left[\varrho(J_{n+2}^C)' - \frac{1}{\varrho} (A_{12})_1^2 (J_{n+2}^C)'_{ii, kk} \right], \quad i = 1, \quad k = n+2, \quad (80)$$

gdzie wyznacznik $(J_{n+2}^C)'$ ma postać (35) o elementach według (36) z uwzględnieniem uwag dotyczących wzoru (53).

W a r i a n t I, n nieparzyste

$$T_{21} = - \frac{1}{\sqrt{2[1-j(A_{12})_{\frac{n+1}{2}}]}} \left[\varrho(J_{n+2}^C)' - \frac{1}{\varrho} (A_{12})_1^2 (J_{n+2}^C)'_{ii, kk} \right], \quad (81)$$

gdzie wyznacznik $(J_{n+2}^C)'$ ma postać (34) o elementach według (36), przy czym $s = \frac{n+1}{2}$.

W a r i a n t II, n parzyste

$$T_{21} = \frac{1}{2} \left[\varrho(J_{n+2}^C)' - \frac{1}{\varrho} (A_{22})_1^2 (J_{n+2}^C)'_{ii, kk} \right], \quad (82)$$

gdzie wyznacznik $(J_{n+2}^C)'$ ma postać (35) o elementach według (41) z uwzględnieniem uwag poczynionych w związku ze wzorem (60).

W a r i a n t II, n nieparzyste

$$\bar{T}_{21} = \begin{cases} -\frac{1}{2} (A_{22})_{\frac{n+1}{2}}^{-1} \left[\frac{1}{\varrho} (J_{n+1}^C)' - \varrho (A_{11})_1^2 (J_{n+1}^C)'_{ii, kk} \right], & \text{dla } \frac{n+1}{2} \text{ parzystego} \\ i = 1, \quad k = n+1, \\ -\frac{1}{2} (A_{11})_{\frac{n+1}{2}}^{-1} \left[\frac{1}{\varrho} (J_{n+1}^C)' - \varrho (A_{11})_1^2 (J_{n+1}^C)'_{ii, kk} \right], & \text{dla } \frac{n+1}{2} \text{ nieparzystego,} \end{cases} \quad (83)$$

gdzie wyznacznik $(J_{n+1}^C)'$ ma postać (35) o elementach według wzoru (44) z uwzględnieniem uwag dotyczących związków (58), (59).

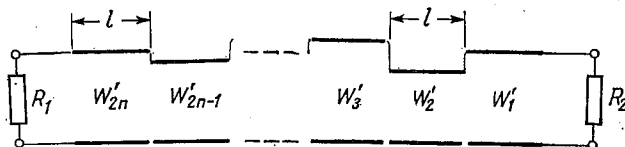
Wyznacnikową postać dla funkcji transmisji łańcucha antymetrycznego otrzymuje się na podstawie związków ogólnych (72), (73), w których uwzględnia się warunek (48) i w razie potrzeby przekształcenia pomocnicze typu (50) lub (54), (55).

6. PRZYKŁAD

Dla lepszego zrozumienia przeprowadzonych rozważań rozpatrzy się następujący przykład.

Niech dany będzie schodkowy tor niejednorodny, złożony z $2n$ (n nieparzyste) odcinków linii jednorodnej (rys. 2) i pracujący między oporami R_1 i R_2 . Poszukuje się postaci wyznacznikowych funkcji A_{11} , A_{22} oraz T_{21} tego układu przy założeniu, że tor jest anty-

metryczny oraz że długość odcinka jednorodnego jest mniejsza od $\frac{\lambda_0}{4}$, gdzie λ_0 — długość fali odpowiadająca środkowej częstotliwości pasma roboczego (przypadki odmienne były już rozpatrzone w pracach [2, 3]). Ze względu na praktyczną przydatność poszukiwanych postaci wyznacznikowych przewiduje się łączenie macierzy łańcuchowych dwu



Rys. 2. Schodkowy tor niejednorodny, złożony z odcinków o jednakowej długości l

odcinków jednorodnych w jeden czynnik macierzowy w wyrażeniu na macierz wypadkową układu **a**. Zatem macierz **A** tego układu obejmuje n czynników macierzowych A_i o następującej postaci:

$$A_i = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} s & W_{2i} \operatorname{sh} s \\ \frac{\operatorname{sh} s}{W_{2i}} & \operatorname{ch} s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{ch} s & W_{2i-1} \operatorname{sh} s \\ \frac{\operatorname{sh} s}{W_{2i-1}} & \operatorname{ch} s \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \operatorname{ch}^2 s + \frac{W_{2i}}{W_{2i-1}} \operatorname{sh}^2 s & \frac{W_{2i-1} + W_{2i}}{2} \operatorname{sh} 2s \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{W_{2i-1}} + \frac{1}{W_{2i}} \right) \operatorname{sh} 2s & \operatorname{ch}^2 s + \frac{W_{2i-1}}{W_{2i}} \operatorname{sh}^2 s \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (84)$$

przy czym

$$W_k = \frac{W'_k}{\sqrt{R_1 R_2}}, \quad k = 1, 2, \dots, 2n,$$

gdzie s — zmienna zespolona, W_k — zredukowana impedancja falowa k -tego odcinka linii długiej, W'_k — impedancja falowa k -tego odcinka linii długiej.

Z założenia o antymetrii toru wynika, że spełniony jest warunek $W_k W_{2n+1-k} = 1$, co po uwzględnieniu we wzorze (84) prowadzi do wniosku, iż $A_{n+1-i} = (A_i)_t$, czyli że spełniona jest równość (48). A więc rozwiązanie postawionego problemu można uzyskać na podstawie wyników pktu 4.2, przy czym poprzestano na wariacie pierwszym.

Badany łańcuch czwórników należy do tej grupy układów, w których można wykorzystać dwie odrębne drogi celem wyprowadzenia postaci wyznacznikowej odpowiedniej funkcji układu. Jedna droga to związki podane w pktcie 4.2, które oparte są na wyznaczniku typu $(J_{n+1}^c)'$ o specyficznym rozkładzie elementów. Droga druga to oparcie się na ogólnych zależnościach uzyskanych w rozdz. 2 i 3. Obranie tej drogi postępowania ma swe uzasadnienie w tym, że $(A_{12})_i / (A_{12})_{i+1} = \text{const}$ w funkcji częstotliwości). Obecnie pokrótce rozpatrzy się obie możliwości.

Rezultaty uzyskane na podstawie związków wyprowadzonych w pktcie 4.2 są następujące. Funkcje A_{11} i A_{22} zadanego toru mają postacie wyznacznikowe wynikające ze wzoru (57) z uwzględnieniem zależności (34) i (36). Zatem

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{-2\varrho}{\sqrt{2-j(W_n+W_n^{-1})\operatorname{sh}2s}} (J_{n+2}^C)', \\ A_{22} &= \frac{-(W_1+W_2)^2\operatorname{sh}^22s}{2\varrho\sqrt{2-j(W_n+W_n^{-1})\operatorname{sh}2s}} (J_{n+2}^C)'_{ii, kk}, \quad i=1, \quad k=n+2. \end{aligned} \quad (85)$$

Elementy x_i i u_i wyznacznika $(J_{n+2}^C)'$ są następujące:

$$\begin{aligned} x_i &= \left(1 + \frac{W_{2i-1} + W_{2i}}{W_{2i-3} + W_{2i-2}}\right) \operatorname{ch}^2s + \left(\frac{W_{2i}}{W_{2i-1}} + \frac{W_{2i-3}}{W_{2i-2}} \cdot \frac{W_{2i-1} + W_{2i}}{W_{2i-3} + W_{2i-2}}\right) \operatorname{sh}^2s, \\ x_1 &= \operatorname{ch}^2s + \frac{W_2}{W_1} \operatorname{sh}^2s, \quad x_{\frac{n+3}{2}} = 2 \frac{\operatorname{ch}^2s + W_n^2 \operatorname{sh}^2s}{\sqrt{2-j(W_n+W_n^{-1})\operatorname{sh}2s}}, \\ x_{\frac{n+1}{2}} &= \frac{\operatorname{ch}^2s + W_n^{-2} \operatorname{sh}^2s}{\sqrt{2-j(W_n+W_n^{-1})\operatorname{sh}2s}} + j \frac{\sqrt{2-j(W_n+W_n^{-1})\operatorname{sh}2s}}{(W_{n-2} + W_{n-1})\operatorname{sh}2s} \left(\operatorname{ch}^2s + \frac{W_{n-2}}{W_{n-1}} \operatorname{sh}^2s\right), \\ u_{i-1} &= \frac{W_{2i-1} + W_{2i}}{W_{2i-3} + W_{2i-2}}, \quad u_{\frac{n-1}{2}} = j \frac{\sqrt{2-j(W_n+W_n^{-1})\operatorname{sh}2s}}{(W_{n-2} + W_{n-1})\operatorname{sh}2s}, \quad u_{\frac{n+1}{2}} = 1, \\ i &= 2, 3, \dots, \frac{n-1}{2} \end{aligned} \quad (86)$$

oraz

$$x_{n+3-k} = x_k, \quad u_{n+2-k} = u_k, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n+1}{2}.$$

Wyrażenie wyznacznikowe dla funkcji T_{21} otrzymuje się na podstawie wzoru (81), skąd

$$T_{21} = \frac{-1}{\sqrt{2-j(W_n+W_n^{-1})\operatorname{sh}2s}} \left[\varrho (J_{n+2}^C)' - \frac{1}{4\varrho} (W_1+W_2)^2 \operatorname{sh}^22s (J_{n+2}^C)'_{ii, kk} \right], \quad (87)$$

gdzie wyznacznik $(J_{n+2}^C)'$ jest taki sam jak we wzorze (85).

Jeżeli poszukiwania wyznacznikowej postaci dla poszczególnych funkcji układu przeprowadza się za pomocą zależności ogólnych, podanych w rozdz. 2 i 3, to wtedy uzyskuje się następujące wyniki.

Zgodnie ze wzorami (12), (19) i (20) postać wyznacznikowa funkcji A_{11} wyraża się wzorem

$$A_{11} = \varrho J_n^A.$$

Elementy x_i i u_i wyznacznika J_n^A wyznacza się na podstawie wyrażenia (49) i (84), skąd

$$\begin{aligned} x_1 &= \operatorname{ch}^2s + \frac{W_2}{W_1} \operatorname{sh}^2s, \\ x_{i+1} &= \left(1 + \frac{W_{2i+1} + W_{2i+2}}{W_{2i-1} + W_{2i}}\right) \operatorname{ch}^2s + \left(\frac{W_{2i+2}}{W_{2i+1}} + \frac{W_{2i-1}}{W_{2i}} \cdot \frac{W_{2i+1} + W_{2i+2}}{W_{2i-1} + W_{2i}}\right) \operatorname{sh}^2s, \\ x_{n+1-i} &= \left(1 + \frac{W_{2i-1}^{-1} + W_{2i}^{-1}}{W_{2i+1}^{-1} + W_{2i+2}^{-1}}\right) \operatorname{ch}^2s + \left(\frac{W_{2i}}{W_{2i-1}} + \frac{W_{2i+1}}{W_{2i+2}} \cdot \frac{W_{2i-1}^{-1} + W_{2i}^{-1}}{W_{2i+1}^{-1} + W_{2i+2}^{-1}}\right) \operatorname{sh}^2s, \\ u_i &= \frac{W_{2i+1} + W_{2i+2}}{W_{2i-1} + W_{2i}}, \quad u_{n-i} = \frac{W_{2i-1}^{-1} + W_{2i}^{-1}}{W_{2i+1}^{-1} + W_{2i+2}^{-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}. \end{aligned} \quad (88)$$

W przypadku funkcji A_{22} odpowiednie wyniki otrzymuje się na podstawie zależności (15), (19), (20), (49) oraz (84), skąd

$$A_{22} = \frac{1}{\varrho} W_1 W_2 J_n^D,$$

przy czym elementy wyznacznika J_n^D wynoszą

$$(x_i)_D = (x_{i+1})_A, \quad (u_i)_D = (u_{i+1})_A, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2},$$

$$(x_n)_D = \text{ch}^2 s + \frac{W_1}{W_2} \text{sh}^2 s, \quad (u_{n-1})_D = 1,$$

gdzie elementy z indeksem A mają postać według (88), a elementy z indeksem D należą do wyznacznika J_n^D .

Funkcja filtracji T_{21} daje się zatem wyrazić następująco (zob. wzór (63)):

$$T_{21} = \frac{1}{2} \left(\varrho J_n^A - \frac{1}{\varrho} W_1 W_2 J_n^D \right). \quad (89)$$

Na podstawie wyrażenia (89) można wyprowadzić układ równań nieliniowych do syntezy danego toru schodkowego metodą algebraiczną z wykorzystaniem układu zastępczego o stałych skupionych (w postaci znormalizowanego wielomianowego filtru dolnoprzepustowego) [4, 8]. Na uwagę zasługuje fakt, iż wszystkie elementy typu u_i w wyznacznikach występujących we wzorze (89) są niezależne od częstotliwości.

Jest rzeczą oczywistą, że obie postacie funkcji filtracji, tzn. (87) i (89), są sobie całkowicie równoważne i tylko względy natury praktycznej decydują o wyborze jednej z nich. Obok tego można wyprowadzić jeszcze inne postacie wyznacznikowe dla tych samych funkcji układu, np. przez odmienne określenie czynników macierzowych A_i (formowanie tych macierzy zaczynać nie od początku toru, a od jego środka).

7. UWAGI KOŃCOWE

Wyznacznikowe postacie funkcji opisujących właściwości transmisyjne łańcucha czwórników biernych stanowią jeden z instrumentów syntezy układu. Problematyka ta nie posiada jeszcze dostatecznego naświetlenia w literaturze i dlatego uznano za wskazane, aby omówić ją w sposób bardziej szczegółowy.

W niniejszej pracy główną uwagę zwrócono na sposób wyprowadzenia postaci wyznacznikowych typu Jacobiego wraz z różnymi przekształceniami, pomocnymi w przypadku układów symetrycznych i antymetrycznych. Stwierdzono, że nałożenie warunku symetrii w postaci równości (29) bądź warunku antymetrii w postaci równości (48) pozwala przedstawić funkcje istotne dla syntezy układu jako wyznaczniki typu Jacobiego o specyficznym, symetrycznym rozkładzie elementów.

Na podkreślenie zasługuje fakt, iż poszukiwanie postaci wyznacznikowych przeprowadzono w ramach dwu wariantów, co pozwala stosować zalecenia metody algebraicznej syntezy w przypadku zerowania się (w roboczym pasmie częstotliwości) elementów zarówno na głównej przekątnej czynników macierzowych, jak i na drugiej. W trakcie

rozważań nie poczyniono żadnych założeń dotyczących struktury i konfiguracji ogniwa łańcucha; poprzestano jedynie na założeniu, że czwórniki te są liniowe i odwracalne. Dzięki temu rezultaty pracy mają zastosowanie w syntezie wielu układów mikrofalowych, zawierających elementy o stałych rozłożonych lub o strukturze mieszanej.

LITERATURA

1. A. L. Feldsztejn, L. R. Jawicz, *Sintez czetyriochpolusnikow i wośmipolusnikow na SWCz*, wyd. II, Izd. „Swiaź”, Moskwa 1971.
2. F. Kamiński, *Uogólniony układ równań nieliniowych do syntezy ćwierćfalowych antymetrycznych torów niejednorodnych metodą algebraiczną*, Arch. Elektrotechn., t. 21, nr 2, 1972, s. 363—367.
3. F. Kamiński, *Uogólniony układ równań nieliniowych do syntezy półfalowych torów niejednorodnych metodą algebraiczną*, Arch. Elektrotechn., t. 21, nr 2, 1972, s. 368—373.
4. F. Kamiński, *Synteza pewnej grupy torów niejednorodnych metodą algebraiczną z uwzględnieniem układów zastępczych o elementach skupionych*, Arch. Elektrotechn., t. 21, nr 2, 1972, s. 374—380.
5. F. Kamiński, *O syntezie pewnej grupy filtrów elektromechanicznych za pomocą układów zastępczych o stałych rozłożonych lub skupionych*, Arch. Elektrotechn., t. 22, nr 2, 1973, s. 517—521.
6. F. Kamiński, *Synteza filtru elektromechanicznego ze sprzęgaczami prostymi*, Arch. Elektrotechn., t. 22, nr 3, 1973, s. 525—537.
7. F. Kamiński, *O syntezie układów filtrujących o strukturze mieszanej II rodzaju*, Arch. Elektrotechn., t. 22, nr 3, 1973, s. 539—548.
8. F. Kamiński, *Układ równań nieliniowych do syntezy filtrów o strukturze mieszanej metodą algebraiczną*, Arch. Elektrotechn., t. 23, nr 1, 1974, s. 167—181.
9. F. Kamiński, *Synteza wąskopasmowych schodkowych linii filtrujących ze sprzęgaczami różnego rodzaju metodą algebraiczną*, Arch. Elektrotechn., t. 23, nr 3, 1974, s. 763—780.
10. F. Kamiński, *Równania nieliniowe do syntezy łańcuchowych układów filtrujących o strukturze mieszanej metodą algebraiczną*, Arch. Elektrotechn., t. 24, nr 2, 1975, s. 445—459.
11. A. P. Miszina, I. W. Proskuriakow, *Algebra wyższa — Algebra liniowa, wielomiany, algebra ogólna*, PWN, Warszawa 1966.
12. W. Nowicki, *Zasady teletransmisji przewodowej*, tom I, PWT, Warszawa 1953.
13. C. Rajski, *Teoria obwodów*, tom I, WNT, Warszawa 1971.

F. KAMIŃSKI

DETERMINANT FORMS OF ELEMENTS IN A NORMALIZED CHAIN AND TRANSMISSION MATRIX OF A TWOPORT CASCADE

Summary

The paper investigates the possibility of presenting the elements of a normalized chain matrix A and a normalized transmission matrix T of a chain of passive four-terminal networks in the form of Jacobi type determinants. The ambiguity of the solution has been pointed out. It has been determined that imposing the condition of symmetry or of antimetry allows one to present the function essential for the synthesis of the system as Jacobi type determinants having a specific, symmetrical distribution of elements.

The search for determinant forms has been carried out within the framework of two variants, which permits the application of the algebraic method of synthesis in case of neutralizing of elements (in the operating frequency band) both on the main diagonal of matrix factors and on the secondary one.

During the investigation no assumptions were made as to the structure and configuration of the ladder sections; the only assumption made was that four-terminal networks were linear and reciprocal. Owing to this, the results obtained in the paper can find application in the synthesis of many circuits, in particular microwave ones having elements with distributed constants or with mixed structure.

F. KAMIŃSKI

FORMES DÉTERMINANTES DES ÉLÉMENTS DE LA MATRICE NORMALISÉE DE TRANSFERT ET DE CELLE DE PARAMÈTRES COMPOSITES DE QUADRIPOLES EN ÉCHELLE

Résumé

On a considéré les possibilités de représenter les éléments de la matrice normalisée de transfert A et de celle de paramètres composites de T d'une chaîne des quadripôles passifs sous la forme de déterminants du type Jacobi. On a démontré la polysignification de la résolution. On a constaté que l'admission de la condition de symétrie ou antisymétrie permet de présenter les fonctions essentielles de la synthèse du système comme déterminants du type Jacobi à la répartition des éléments spécifiques et symétriques.

Les recherches des formes déterminantes ont été faites en deux variantes, ce qui a permis d'appliquer la méthode algébrique de la synthèse dans le cas de l'annulation (dans la bande de fréquences utiles des éléments sur la diagonale principale des facteurs matriciels ainsi que sur l'autre).

Au cours des considérations, on n'a admis aucune hypothèse ni pour la structure ni pour la configuration des mailles de la chaîne. On s'est borné seulement à admettre l'hypothèse que les quadripôles sont linéaires et réciproques. Grâce à cela les résultats des recherches peuvent être utilisés dans la synthèse de nombreux systèmes, surtout dans ceux des microondes, contenant les éléments aux constantes réparties ou à la structure mixte.

F. KAMIŃSKI

DETERMINANTE FORMEN FÜR ELEMENTE DER NORMIERTEN KETTEN- UND BETRIEBSPARAMETERMATRIX EINER KASKADENVERBINDUNG VON VIERPOLEN

Zusammenfassung

Es wurden die Möglichkeiten erörtert, die Elemente einer normierten Kettenmatrix A und einer Betriebsparametermatrix T passiver Vierpole in Form von Jacobischen Determinanten darzustellen. Es wurde auf die Mehrdeutigkeit der Lösung hingewiesen. Man stellte fest, dass es durch die Auferlegung der Symmetrie- bzw. Antimetriebedingung möglich wird, die wesentlichen Funktionen für die Netzwerksynthese als Jacobische Determinanten mit spezifischer, symmetrischer Elementenverteilung zu gestalten.

Untersuchungen zwecks Klärung der Form der Determinanten wurden in zwei Varianten vorgenommen, was gestattete, die Hinweise des algebraischen Synthesenverfahren im Nullungsfall (im Betriebsfrequenzband) von Elementen sowohl an der Hauptdiagonale als auch an der anderen der Matrixfaktoren zu berücksichtigen.

Bei den Erwägungen wurden keinerlei Voraussetzungen betreffs Struktur und Anordnung (Konfiguration) der Gliedkette gemacht: man hat lediglich angenommen, dass die Vierpole linear und umkehrbar seien. Dieserhalb finden die Ergebnisse Anwendung bei Synthesen vieler Systeme, besonders Mikrowellensysteme, die Elemente mit verteilten Konstanten bzw. Mischstrukturen aufweisen.

Ф. КАМИŃСКИ

ДЕТЕРМИНАНТНЫЙ ВИД НОРМИРОВАННОЙ ЦЕПНОЙ И ВОЛНОВОЙ МАТРИЦЫ ПЕРЕДАЧИ КАСКАДНОГО СОЕДИНЕНИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Резюме

Рассмотрены возможности представления элементов нормированной цепной матрицы A и нормированной волновой матрицы передачи T цепи пассивных четырехполосников в виде детерминантов типа Якоби. Указано на многозначность решения. Констатируется, что принятие

условия симметрии или антисимметрии позволяет представить функции необходимые для синтеза системы в виде детерминантов типа Якоби со специфическим симметричным распределением элементов.

Поиски детерминантного вида проведены в двух вариантах, благодаря чему можно применять указания алгебраического метода синтеза в случае обращения в нуль (в рабочем диапазоне частот) элементов как на главной диагонали матрицы, так и на другой.

При исследовании не сделано никаких предположений касающихся структуры и конфигурации звеньев цепи; принято только то, что четырехполосники линейны и обратимы. Благодаря этому результаты исследований применимы в синтезе многих систем, в частности свч, содержащих элементы с распределенными постоянными или со смешанной структурой.



Nowa algebraiczna metoda badania stabilności

RADOSŁAW BIERNACKI (WARSZAWA)

Instytut Podstaw Elektroniki Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 9.9.1974

W pracy przedstawiono nową algebraiczną metodę badania stabilności układów liniowych. Podstawą metody są własności rozwinięcia funkcji wymiernych klasy Z_{RC} na pewnego typu ułamek łańcuchowy. Zaletą prezentowanej metody jest proste badanie stabilności nieasympdotycznej.

1. WSTĘP

Algebraiczne metody badania stabilności elektrycznych układów liniowych polegają na przeprowadzeniu, według określonej reguły, skończonej liczby działań na współczynnikach pewnego wielomianu [1], [2].

Jest rzeczą znaną, że stabilność układu stacjonarnego, liniowego i skupionego jest bezpośrednio związana z położeniem zer wielomianu charakterystycznego (mianownika transmitancji) układu. Wiadomo, że wszystkie zera wielomianu charakterystycznego układu stabilnego muszą mieć części rzeczywiste niedodatnie, przy czym zera położone na osi urojonej nie mogą być wielokrotne. W przypadku, gdy części rzeczywiste wszystkich zer wielomianu charakterystycznego są ujemne (tzn. zera te leżą w lewej półpłaszczyźnie otwartej) mówi się o stabilności asymptotycznej. Ponieważ stabilność jest w pewnym sensie cechą wielomianu, wielu autorów (np. [1]) używa określenia wielomian stabilny. W niniejszej pracy będziemy stosować określenie wielomian stabilny w przypadku ogólniejszym (tzn. wielomian stabilny może posiadać pojedyncze zera na osi urojonej). W przypadku stabilności asymptotycznej będziemy mówić o wielomianach Hurwitza. Ze względu na zastosowania, ograniczymy rozważania do wielomianów o współczynnikach rzeczywistych.

Jak wspomniano, przedstawiana metoda wykorzystuje własności funkcji wymiernych. W przypadku, gdy wielomiany w liczniku i w mianowniku pewnej funkcji wymiernej $f(x)$ posiadają wspólne zero w punkcie x_0 , to jako wartość funkcji w tym punkcie będziemy przyjmować granicę $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Pozwala to na utożsamianie funkcji wymiernych różniących się jedynie wspólnym czynnikiem licznika i mianownika.

Przyjęte w pracy oznaczenia są zgodne z [4].

Wykaz ważniejszych oznaczeń

- a, b — wielomiany,
 $a(x), b(x)$ — funkcje wielomianowe zmiennej zespolonej x nazywane dalej wielomianami,
 $a|b$ — wielomian a dzieli wielomian b , tzn. istnieje wielomian c taki, że $b = ac$,
 $a \sim b$ — wielomiany a i b są stowarzyszone, tzn. $a|b$ i $b|a$,
 sta — stopień wielomianu a ,
 (a, b) — największy wspólny dzielnik wielomianów a i b ,
 $\mathcal{R}$ — zbiór liczb rzeczywistych,
 $\mathcal{R}^+$ — zbiór liczb rzeczywistych dodatnich.

2. FUNKCJE RC I FUNKCJE REAKTANCYJNE

Niech będzie dana funkcja wymierna $f(x)$ o współczynnikach rzeczywistych

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n}, \quad (1)$$

przy czym $b(x) \not\equiv 0$.

Definicja 1. Funkcję (1) nazywamy funkcją RC, jeśli można ją przedstawić w postaci

$$f(x) = H \frac{(x + \alpha_1)(x + \alpha_2) \dots (x + \alpha_p)}{(x + \beta_1)(x + \beta_2) \dots (x + \beta_r)} \quad \text{lub} \quad f(x) = H, \quad (2)$$

gdzie: H jest stałą dodatnią ($H \in \mathcal{R}^+$), $p = r$ lub $p = r - 1$, liczby α_i i β_i są rzeczywiste i spełniają nierówności $0 \leq \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \dots$

Funkcja RC jest więc funkcją, która może być impedancją dwójnika zbudowanego z elementów R lub C .

Własności funkcji RC są dobrze zbadane i podane w literaturze [3]. Poniżej zostaną przytoczone najważniejsze spośród tych własności w nieco ogólniejszym niż zazwyczaj sformułowaniu. Wprowadzimy w tym celu dwa dodatkowe pojęcia.

Definicja 2. O funkcji wymiernej (1) mówimy, że jest skracalna do stałej, jeśli wielomiany a i b są stowarzyszone ($a \sim b$).

Definicja 3. Wielomian $q(x)$ o współczynnikach rzeczywistych nazywamy wielomianem RC, jeśli wszystkie zera tego wielomianu są rzeczywiste ujemne i pojedyncze.

Bezpośrednio z definicji wynika, że każdy wielomian RC ma wszystkie współczynniki niezerowe i jednakowego znaku (będziemy przyjmować, że są one dodatnie). Oczywiście, wielomian stopnia zerowego jest również wielomianem RC.

Jeśli funkcja RC dana w postaci (1) nie jest skracalna do stałej, a największy wspólny dzielnik wielomianów $a(x)$ i $b(x)$ jest wielomianem RC, to funkcja $f(x)$ posiada następujące własności.

Własność 1. Stopień wielomianu $a(x)$ jest równy bądź o jeden mniejszy od stopnia wielomianu $b(x)$, tzn. współczynnik a_n może być równy zeru.

Własność 2. Wielomian $b(x)$ może mieć zero w punkcie $x = 0$, tzn. współczynnik b_0 może być równy zeru.

Własność 3. Wszystkie współczynniki wielomianów $a(x)$ i $b(x)$ są niezerowe (z uwzględnieniem własności 1 i 2) i jednakowego znaku; dalej będziemy zakładać, że są one dodatnie.

Własność 4. Jeśli $a_n \neq 0$, to dla $i = 0, 1, \dots, n-1$

$$\frac{a_i}{a_n} > \frac{b_i}{b_n},$$

a w szczególności, gdy $b_0 \neq 0$, to

$$\frac{a_0}{b_0} > \frac{a_n}{b_n}, \quad (3)$$

przy czym nierówność ta jest prawdziwa również wtedy, gdy $a_n = 0$.

Własność 5. Wszystkie podane niżej funkcje:

$$a) \frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}, \quad (4)$$

$$b) \frac{1}{xf(x)}, \quad (5)$$

$$c) f(x) - \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \quad (6)$$

$$d) \frac{1}{\frac{1}{f(x)} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}} \quad (7)$$

są funkcjami *RC*.

Założenie o nieskracalności do stałej nie jest potrzebne w przypadku własności 3, 5a i 5b, a założenie, że największy wspólny dzielnik wielomianów $a(x)$ i $b(x)$ jest wielomianem *RC* można opuścić w przypadku własności 1, 2, 5 oraz w przypadku nierówności (3).

Ważne dalej są też własności działań nie wyprowadzających poza zbiór funkcji *RC*.

Własność 6. Jeśli $f_1(x)$ i $f_2(x)$ są funkcjami *RC*, to funkcje:

$$a) f_1(x) + f_2(x), \quad (8)$$

$$b) \frac{1}{\frac{1}{f_1(x)} + \frac{1}{f_2(x)}} \quad (9)$$

są funkcjami *RC*.

Definicja 4. Funkcja wymierna $g(x)$ o współczynnikach rzeczywistych jest funkcją reaktancyjną, gdy można ją przedstawić w postaci

$$g(x) = \frac{H}{x} \frac{(x^2 + \omega_1^2)(x^2 + \omega_3^2) \dots (x^2 + \omega_{r+1}^2)}{(x^2 + \omega_2^2)(x^2 + \omega_4^2) \dots (x^2 + \omega_r^2)},$$

gdzie $H \in \mathbb{R}^+$ i $0 \leq \omega_1^2 < \omega_2^2 < \omega_3^2 \dots < \omega_r^2 (< \omega_{r+1}^2)$.

Z definicji tej wynika, że zera i bieguny funkcji reaktancyjnej leżą na osi urojonej i wzajemnie się przeplatają. Dalej będzie potrzebna następująca własność funkcji *RC* i funkcji reaktancyjnych.

Własność 7. Jeśli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ spełniają równość

$$g(x) = xf(x^2), \quad (10)$$

to $g(x)$ jest funkcją reaktancyjną wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x)$ jest funkcją RC.

Należy zauważyć, że dla każdej funkcji reaktancyjnej $g(x)$ istnieje funkcja wymierna $f(x)$ taka, że spełniony jest związek (10).

3. ROZKŁAD WIELOMIANÓW STABILNYCH

Niech będzie dany wielomian $d(x)$ o współczynnikach rzeczywistych

$$d(x) = d_0 + d_1x + \dots + d_nx^n. \quad (11)$$

Jeśli wielomian (11) ma pojedyncze zero w punkcie $x = 0$ (tzn. $d_0 = 0$ i $d_1 \neq 0$), to jest on wielomianem stabilnym wtedy i tylko wtedy, gdy stabilny jest wielomian

$$\frac{d(x)}{x} = d_1 + d_2x + \dots + d_nx^{n-1}. \quad (12)$$

Pomocniczy wielomian (12) nie ma zera w punkcie $x = 0$. W związku z tym dalej będziemy badać wielomiany w postaci (11) przy założeniu $d_0 \neq 0$.

Zgodnie z przyjętymi określeniami, każdy wielomian Hurwitza jest wielomianem stabilnym; ponadto, każdy wielomian Hurwitza ma wszystkie współczynniki jednakowego znaku i żaden z nich nie jest równy zeru (bez zmniejszania ogólności rozważań będziemy przyjmować, że są one dodatnie). To samo odnosi się do wielomianów stabilnych z wyjątkiem tych wielomianów, których zera są położone wyłącznie na osi urojonej.

Dowolny wielomian stabilny (11) można przedstawić w następującej postaci

$$d(x) = c(x)q(x^2), \quad (13)$$

gdzie wielomian Hurwitza $c(x)$ ma wszystkie zera wielomianu $d(x)$ leżące w lewej półpłaszczyźnie otwartej, a wielomian $q(x^2)$ ma wszystkie zera urojone wielomianu $d(x)$. Zera wielomianu $q(x^2)$ są pojedyncze i parami sprzężone. Oznacza to, że wielomian $q(x^2)$ jest rozkładalny na różne czynniki kwadratowe typu $(x^2 + \alpha_i^2)$. Oczywiście wielomian $q(x)$ jest rozkładalny na różne czynniki liniowe typu $(x + \alpha_i^2)$, a więc zgodnie z definicją 3 jest on wielomianem RC.

Każdy wielomian $d(x)$ można jednoznacznie przedstawić w postaci sumy dwóch wielomianów, z których jeden

$$p(x^2) = d_0 + d_2x^2 + d_4x^4 + \dots \quad (14)$$

zawiera wyłącznie parzyste potęgi x wielomianu (11), a drugi

$$xn(x^2) = d_1x + d_3x^3 + d_5x^5 + \dots \quad (15)$$

zawiera wyłącznie nieparzyste potęgi x wielomianu (11)

$$d(x) = p(x^2) + xn(x^2). \quad (16)$$

Podane niżej twierdzenie jest podstawą wprowadzonego kryterium stabilności.

Twierdzenie 1. Zera wielomianów $p(x^2)$ i $x \cdot n(x^2)$ w (16) są pojedyncze, leżą na osi urojonej i przeplatają się wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian (16) jest wielomianem Hurwitza.

Dowód jest podany np. w [1].

Łatwo zauważyć, że jeśli wielomiany $p(x^2)$ i $x \cdot n(x^2)$ spełniają założenia powyższego twierdzenia, to są one względnie pierwsze i funkcja

$$g(x) = \frac{xn(x^2)}{p(x^2)} \quad (17)$$

jest funkcją reaktancyjną. Wówczas, zgodnie z (10), funkcja

$$f(x) = \frac{n(x)}{p(x)} \quad (18)$$

jest funkcją RC. Jednak funkcja $f(x)$ w (18) może być funkcją RC również wtedy, gdy wielomiany n i p nie są względnie pierwsze. Nie można więc bezpośrednio przeformułować twierdzenia 1 korzystając z pojęcia funkcji RC.

Niech będzie dany wielomian $d(x)$ przedstawiony w postaci (16) taki, że $n(x^2) \cdot p(x^2) \neq 0$.

Lemat. Wielomian $r(x^2)$ dzieli wielomian $d(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $r|p$ i $r|n$.

Dowód. Istotnie, jeśli $r|p$ i $r|n$, to $p(x^2) = l(x^2) \cdot r(x^2)$ i $n(x^2) = m(x^2)r(x^2)$ i wobec (16) $r(x^2)$ dzieli $d(x)$. Na odwrót, jeśli $r(x^2)$ dzieli $d(x)$, tzn. $d(x) = e(x)r(x^2)$, to przedstawiając wielomian $e(x)$ w postaci (16) $e(x) = l(x^2) + x \cdot m(x^2)$ wielomian $d(x)$ przyjmuje postać $d(x) = l(x^2)r(x^2) + x \cdot m(x^2)r(x^2)$. Z jednoznaczności rozkładu (16) wynika, że $r(x^2)$ dzieli wielomiany $p(x^2)$ i $n(x^2)$, czyli $r|p$ i $r|n$. c.b.d.o.

Bezpośrednio z lematu wynika następujący wniosek.

Wniosek 1. Jeśli wielomian $q(x^2)$ dzieli wielomian $d(x)$ i nie istnieje wielomian $r(x^2)$ dzielący $d(x)$ taki, że $\text{st } r > \text{st } q$, to $q = (n, p)$.

W rozkładzie (13) wielomian $c(x)$ jest wielomianem Hurwitza. Na mocy twierdzenia 1 jego część parzysta i nieparzysta są wielomianami względnie pierwszymi. Oznacza to, że wielomian $q(x^2)$ spełnia założenia powyższego wniosku, jest on więc największym wspólnym dzielnikiem wielomianów $n(x^2)$ i $p(x^2)$. Przeprowadzone rozumowanie prowadzi do następującego uogólnienia twierdzenia 1.

Twierdzenie 2.

a) wielomian (16) jest wielomianem Hurwitza wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f(x) = \frac{n(x)}{p(x)}$ jest funkcją RC nie posiadającą bieguna w punkcie $x = 0$ a wielomiany n i p są względnie pierwsze,

b) jeśli żaden z wielomianów $p(x^2)$ i $n(x^2)$ w (16) nie jest równy tożsamościowo zeru, to wielomian $d(x)$ jest wielomianem stabilnym wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $f(x) = \frac{n(x)}{p(x)}$ jest funkcją RC a największy wspólny dzielnik wielomianów $n(x)$ i $p(x)$ jest wielomianem RC,

c) jeśli $d(x) = q(x^2)$ lub $d(x) = x \cdot q(x^2)$, to wielomian $d(x)$ jest wielomianem stabilnym wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $q(x)$ jest wielomianem RC.

4. MACIERZ WSPÓŁCZYNNIKÓW FUNKCJI WYMIERNEJ

Niech będzie dana funkcja wymierna $f(x)$ przedstawiona w postaci (1) i niech $a_0^2 + b_0^2 > 0$ oraz $a_n^2 + b_n^2 > 0$. Ze współczynników funkcji $f(x)$ można zbudować macierz $\mathbf{M}$ zgodnie z poniższą definicją.

Definicja 5. Macierz $\mathbf{M} = [m_{ij}]$ (o wymiarze $(2 \times n + 1)$) współczynników funkcji $f(x)$ określona jest zależnościami

$$m_{1j} = a_{j-1}, \quad m_{2j} = b_{j-1} \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, n+1. \quad (19)$$

W pierwszym wierszu macierzy $\mathbf{M}$ występują więc kolejne współczynniki wielomianu $a(x)$, a w drugim wierszu kolejne współczynniki wielomianu $b(x)$. Natomiast w kolumnach znajdują się współczynniki $a(x)$ i $b(x)$ występujące przy tych samych potęgach x

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Wyznaczniki kwadratowych podmacierzy macierzy $\mathbf{M}$

$$v_{k-1} = \det \begin{bmatrix} a_0 & a_k \\ b_0 & b_k \end{bmatrix} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (21)$$

oraz

$$w_l = \det \begin{bmatrix} a_l & a_n \\ b_l & b_n \end{bmatrix}, \quad l = 0, 1, \dots, n-1 \quad (22)$$

pozwalają na zdefiniowanie dwóch wielomianów $v(x)$ i $w(x)$ oraz funkcji $f_1(x)$.

Definicja 6. Współczynniki wielomianów:

$$v(x) = v_0 + v_1 x + \dots + v_{n-1} x^{n-1}, \quad (23)$$

$$w(x) = w_0 + w_1 x + \dots + w_{n-1} x^{n-1} \quad (24)$$

dane są wzorami (21) i (22), a funkcja $f_1(x)$ określona jest zależnością:

$$f_1(x) = \frac{v(x)}{w(x)}. \quad (25)$$

Jak łatwo zauważyć $v_{n-1} = w_0$, więc do wyznaczenia funkcji $f_1(x)$ należy obliczyć $2n-1$ wyznaczników stopnia drugiego.

Uwaga 1. Gdy jeden z wierszy macierzy $\mathbf{M}$ zostanie pomnożony przez liczbę rzeczywistą k różną od zera, to wielomiany (23) i (24) będą odpowiednio równe $k \cdot v(x)$ i $k \cdot w(x)$, a funkcja (25) nie ulegnie zmianie.

Uwaga 2. Gdy jeden z wierszy macierzy $\mathbf{M}$ zostanie pomnożony przez liczbę rzeczywistą dodatnią, to znaki wyznaczników (21) i (22) nie ulegną zmianie.

Jeśli wiersze macierzy $\mathbf{M}$ są liniowo zależne, to wszystkie wyznaczniki (21) i (22) są równe zeru. Wówczas $v(x) \equiv 0$ i $w(x) \equiv 0$. Przy założeniu przyjętym na wstępie, że $a_0^2 + b_0^2 > 0$ i $a_n^2 + b_n^2 > 0$, prawdziwe jest twierdzenie odwrotne: jeśli jeden z wielomianów (23) lub (24) jest tożsamościowo równy zeru, to wiersze macierzy $\mathbf{M}$ są liniowo zależne i drugi wielomian jest też równy zeru. Liniowa zależność wierszy macierzy $\mathbf{M}$ ma miejsce w dwóch przypadkach:

1. gdy jeden z wierszy składa się z samych zer — przypadek ten nie będzie dalej rozważany,
2. gdy wielomiany a i b w (1) są stowarzyszone, tzn. gdy funkcja $f(x)$ jest skracalna do stałej.

5. TWIERDZENIE O ROZKŁADZIE FUNKCJI RC

Niech będzie dana funkcja RC w postaci (1) spełniająca założenia:

1. $f(x)$ nie jest skracalna do stałej,
2. $x = 0$ nie jest biegunem $f(x)$ (tzn. $b_0 > 0$),
3. największy wspólny dzielnik licznika $a(x)$ i mianownika $b(x)$ jest wielomianem RC.

Funkcję $f(x)$ można przedstawić w postaci

$$f(x) = \frac{a_n}{b_n} + \frac{\left(a_0 - \frac{a_n}{b_n} b_0\right) + \left(a_1 - \frac{a_n}{b_n} b_1\right)x + \dots + \left(a_{n-1} - \frac{a_n}{b_n} b_{n-1}\right)x^{n-1}}{b(x)}$$

lub zgodnie z (22) i (24)

$$f(x) = \frac{a_n}{b_n} + \frac{1}{b_n} \cdot \frac{w_0 + w_1 x + \dots + w_{n-1} x^{n-1}}{b(x)} = \frac{a_n}{b_n} + \frac{1}{b_n} \cdot \frac{w(x)}{b(x)}. \quad (26)$$

Podobnie funkcję $f(x)$ można przedstawić w postaci

$$f(x) = \frac{a_0}{b_0} + \frac{\left(a_1 - \frac{a_0}{b_0} b_1\right)x + \left(a_2 - \frac{a_0}{b_0} b_2\right)x^2 + \dots + \left(a_n - \frac{a_0}{b_0} b_n\right)x^n}{b(x)}$$

i zgodnie z (21) i (23)

$$f(x) = \frac{a_0}{b_0} - \frac{1}{b_0} \cdot \frac{v_0 x + v_1 x^2 + \dots + v_{n-1} x^n}{b(x)} = \frac{a_0}{b_0} - \frac{x}{b_0} \cdot \frac{v(x)}{b(x)}. \quad (27)$$

Z porównania (26) i (27) wynika równość

$$\frac{a_0}{b_0} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{b_n} \frac{w(x)}{b(x)} + \frac{1}{b_0} x \frac{v(x)}{b(x)}$$

lub (28)

$$w_0 b(x) = b_0 w(x) + x b_n v(x).$$

Po podstawieniu $b(x)$ z (28) do (26) funkcja $f(x)$ przyjmuje postać:

$$f(x) = \frac{a_n}{b_n} + \frac{1}{\frac{b_0 b_n}{w_0} + \frac{b_n^2}{w_0} x \frac{v(x)}{w(x)}} = A + \frac{1}{B + C x f_1(x)}. \quad (29)$$

Rozkład (29) charakteryzują dwa twierdzenia podane niżej.

Twierdzenie 3. A. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest funkcją RC spełniającą założenia 1—3, to

1. rozkład (29) funkcji $f(x)$ istnieje (tzn. $A, B, C \in \mathcal{R}$ i $C \neq 0$) oraz jest dodatni, tzn. $A \geq 0$, $B > 0$, $C > 0$;
2. funkcja $f_1(x)$ jest funkcją RC o następujących własnościach: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x) > 0$, a więc

$stv = st w$, b) $x = 0$ nie jest biegunem funkcji $f_1(x)$, c) największy wspólny dzielnik wielomianów $v(x)$ i $w(x)$ jest wielomianem RC.

B. Jeżeli dowolna funkcja $f(x)$ ma rozkład (29) dodatni i $f_1(x)$ jest funkcją RC, to $f(x)$ jest funkcją RC.

Dowód. B. Jeśli $f_1(x) = \frac{v(x)}{w(x)}$ jest funkcją RC i $C \in \mathcal{R}^+$, to na mocy (5) funkcja $\frac{w(x)}{xCv(x)}$ jest funkcją RC . Ponieważ $\frac{1}{B}$ jest funkcją RC dla $B \in \mathcal{R}^+$, to na podstawie (9) funkcja $\frac{1}{B+Cxf_1(x)}$ jest funkcją RC . Stąd na mocy (8) $f(x)$ jako suma dwóch funkcji RC jest funkcją RC .

A. Z własności 2 i 3 funkcji RC wynika, że $A = \frac{a_n}{b_n} \geq 0$. Ponadto na mocy (3) $w_0 = a_0b_n - b_0a_n > 0$. Biorąc pod uwagę założenie 2 i własność 3 mamy $B = \frac{b_0b_n}{w_0} > 0$ i $C = \frac{b_n^2}{w_0} > 0$. Ponieważ $w(0) = w_0$ i $v_{n-1} = w_0$, więc oczywiście punkt $x = 0$ nie jest biegunem funkcji $f_1(x)$, a stopień wielomianu $v(x)$ jest równy $n-1$.

Na podstawie własności 4 funkcji RC wszystkie wyznaczniki (22) są dodatnie. Wobec tego st $w = n-1$ i wszystkie współczynniki $w(x)$ są dodatnie. Ponieważ $b_n \neq 0$, $b_0 \neq 0$, $w(x) \neq 0$ i $w_0 \neq 0$, to wyprowadzenie rozkładu (29) nie jest ograniczone żadnymi zastrzeżeniami. Rozkład ten więc istnieje i jest dodatni.

Na mocy (6) i (26) funkcja $b_n \left(f(x) - \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{w(x)}{b(x)}$ jest funkcją RC . Bezpośrednio z (28) wynika równość

$$\frac{b_n}{w_0} \cdot \frac{1}{\frac{b(x)}{w(x)} - \frac{b_0}{w_0}} = \frac{w(x)}{xv(x)} = \frac{1}{xf_1(x)}.$$

Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{b(x)}{w(x)} = \frac{b_0}{w_0}$, to zgodnie z (7) i (5) funkcja $f_1(x)$ jest funkcją RC .

Dowód, że (v, w) jest wielomianem RC będzie bezpośrednim wnioskiem z następnego twierdzenia. cbdo.

Twierdzenie 4. Jeżeli istnieje rozkład (29) dowolnej, nieskracalnej do stałej funkcji $f(x)$, to wielomiany (a, b) i (v, w) są stowarzyszone.

Dowód. Niech $\frac{a}{b} = A + B \frac{w}{b}$, gdzie $B \neq 0$ oraz niech $q|w$ i $q|b$. Istnieją więc wielomiany c i d także, że $w = cq$ i $b = dq$. Wówczas $\frac{a}{b} = \frac{Ab+Bw}{b} = \frac{(Ad+Bc)q}{b}$, czyli $q|a$. Na odwrót, jeśli $q|a$ i $q|b$, to z postaci $\frac{w}{b} = -\frac{A}{B} + \frac{1}{B} \cdot \frac{a}{b}$ wynika, że $q|w$. Wobec tego (a, b) dzieli wielomiany w i b oraz na odwrót $(w, b)|b$ i $(w, b)|a$. Oznacza to, że $(a, b) \sim (w, b)$. Oznaczając $\frac{b(x)}{w(x)} = C + xD \frac{v(x)}{w(x)}$ podobnie dowodzi się, że $(w, b) \sim (v, w)$. Ponieważ relacja stowarzyszenia jest przechodnia, to ostatecznie $(a, b) \sim (v, w)$. cbdo.

W założeniach twierdzenia 3 przyjęto, że (a, b) jest wielomianem RC . Na mocy powyższego twierdzenia (v, w) jest również wielomianem RC i to takim samym (z dokładnością do stałej).

Ponieważ wszystkie współczynniki wielomianu $w(x)$ są dodatnie, $f_1(x)$ jest funkcją RC i (v, w) jest wielomianem RC , to wszystkie współczynniki wielomianu $v(x)$ są również dodatnie. Uwaga ta jest istotna, gdyż umożliwia rozstrzygnięcie o niestabilności wielomianu w prezentowanym kryterium.

6. BADANIE STABILNOŚCI ASYMPTOTYCZNEJ

Niech będzie dany wielomian (11) o dodatnich współczynnikach. Oznaczmy przez $f_0(x)$ funkcję (18):

$$f_0(x) = \frac{d_1 + d_3 x + d_5 x^2 + \dots}{d_0 + d_2 x + d_4 x^2 + \dots}.$$

Macierz $\mathbf{M}_0$ współczynników funkcji $f_0(x)$ o wymiarze $(2 \times r)$ jest równa

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} d_1, d_3, \dots, d_{n-1}, 0 \\ d_0, d_2, \dots, d_{n-2}, d_n \end{bmatrix}, \quad (30)$$

gdy n jest parzyste, wówczas $r = \frac{n+2}{2}$ lub

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} d_1, d_3, \dots, d_n \\ d_0, d_2, \dots, d_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

gdy n jest nieparzyste, wówczas $r = \frac{n+1}{2}$.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby wielomian $d(x)$ był wielomianem Hurwitza jest, aby funkcja $f_0(x)$ była funkcją RC , której licznik i mianownik są wielomianami względnie pierwszymi. Z drugiej strony, na mocy twierdzeń 3 i 4 warunkiem równoważnym jest, aby funkcja (25) $f_1(x)$ była funkcją RC , której licznik i mianownik są względnie pierwsze. Macierz $\mathbf{M}_1$ współczynników funkcji $f_1(x)$ można utworzyć bezpośrednio z wyrazów macierzy $\mathbf{M}_0$ zgodnie z definicją 6:

— w pierwszym wierszu wpisuje się kolejno wyznaczniki z kolumn: 1-szej i 2-giej, 1-szej i 3-ciej, ..., 1-szej i ostatniej.

— w drugim wierszu wpisuje się kolejno wyznaczniki z kolumn: 1-szej i ostatniej, 2-giej i ostatniej, ..., przedostatniej i ostatniej.

Macierz $\mathbf{M}_1$ ma wymiar $(2 \times r - 1)$. Zgodnie z uwagą podaną wyżej, warunkiem koniecznym, by wielomian $d(x)$ był wielomianem Hurwitza jest dodatniość wszystkich wyrazów macierzy $\mathbf{M}_1$.

Z wyrazów macierzy $\mathbf{M}_1$ tworzy się dalej — według tej samej reguły — macierz $\mathbf{M}_2$ o wymiarze $(2 \times r - 2)$ itd. Po $r - 2$ krokach powstaje macierz $\mathbf{M}_{r-2}$ o wymiarze (2×2) . Jeśli wyznacznik tej macierzy jest dodatni i wszystkie wyrazy kolejnych macierzy $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_{r-2}$ są dodatnie, to wtedy i tylko wtedy wielomian $d(x)$ jest wielomianem

Hurwitza. Istotnie, jeśli wyrazy macierzy M_{r-2} są dodatnie i $\det M_{r-2} > 0$, to jak łatwo zauważyć M_{r-2} jest macierzą współczynników funkcji RC . Wówczas, jeśli wszystkie wyrazy macierzy $M_1, M_2, \dots, M_{r-2}$ są dodatnie, to z twierdzenia 3 wynika, że M_0 jest macierzą współczynników funkcji RC . Ponadto z twierdzenia 4 wynika, że największy wspólny dzielnik wielomianów $n(x)$ i $p(x)$ „przenosi się” na kolejne macierze. Oznacza to, że jeśli $\text{st}(n, p) = k$, to macierz M_{r-k-1} ma wiersze liniowo zależne. Wówczas macierz M_{r-k} jest zerowa (wszystkie jej wyrazy są równe zero). Ponieważ macierz M_{r-2} ma wiersze liniowo niezależne, to jedyną możliwością jest $k = 0$, a z tego wynika, że licznik i mianownik funkcji $f_0(x)$ są wielomianami względnie pierwszymi.

Reasumując, w celu zbadania, czy wielomian $d(x)$ jest wielomianem Hurwitza, należy utworzyć macierz M_0 zgodnie z (30) lub (31) a następnie obliczyć wyrazy wszystkich macierzy $M_1, M_2, \dots, M_{r-2}$ oraz wyznacznik $\det M_{r-2}$. Dodatniość wyników wszystkich obliczeń oznacza, że wielomian $d(x)$ jest wielomianem Hurwitza. Jeśli w obliczeniach pojawi się zero lub liczba ujemna, to badanie wielomianu $d(x)$ może zostać przerwane, gdyż oznacza to, że $d(x)$ nie jest wielomianem Hurwitza.

7. BADANIE STABILNOŚCI NIEASYMPTOTYCZNEJ

Badanie stabilności różni się od badania stabilności asymptotycznej jedynie tym, że licznik $n(x)$ i mianownik $p(x)$ funkcji (18) nie muszą być wielomianami względnie pierwszymi. Na mocy twierdzenia 2 największy wspólny dzielnik tych wielomianów musi być jednak wielomianem RC .

Z twierdzenia 4 wynika, że jeśli $\text{st}(n, p) = k$ ($0 < k \leq r-1$), to wielomian (n, p) jest największym wspólnym dzielnikiem liczników i mianowników wszystkich następujących funkcji: $f_0(x), f_1(x), \dots, f_{r-k-1}(x)$ odpowiadających macierzom $M_0, M_1, \dots, M_{r-k-1}$.

Ponieważ stopień licznika (i mianownika) funkcji $f_{r-k-1}(x)$ jest równy k , to licznik (lub mianownik) tej funkcji jest największym wspólnym dzielnikiem wielomianów $n(x)$ i $p(x)$ oraz funkcja $f_{r-k-1}(x)$ jest skracalna do stałej. Oznacza to, że macierz M_{r-k-1} ma wiersze liniowo zależne, a macierz M_{r-k} jest zerowa. Podobnie jak poprzednio, z twierdzenia 3 wynika, że wszystkie wyrazy macierzy $M_1, M_2, \dots, M_{r-k-1}$ muszą być dodatnie, aby badany wielomian $d(x)$ był stabilny. Możliwy jest jednak przypadek, gdy wyzeruje się cała macierz M_{r-k} . Wówczas dowolny z wierszy macierzy M_{r-k-1} (z poprzedniego kroku) składa się ze współczynników wielomianu (n, p) .

Niech wielomian $q = (n, p)$ wyznaczony z macierzy M_{r-k-1} ma postać

$$q(x) = q_0 + q_1 x + \dots + q_k x^k. \quad (32)$$

Należy jeszcze rozstrzygnąć, czy wielomian $q(x)$ jest wielomianem RC . W tym celu można zastosować metodę Sturma [1]. Niżej zaproponowana jest inna metoda, która poza prostotą charakteryzuje się jednolitością w odniesieniu do poprzednich fragmentów.

Niech będzie dana funkcja $h(x)$ określona przez wielomian $q(x)$ i jego pochodną $q'(x)$:

$$h(x) = \frac{q'(x)}{q(x)}. \quad (33)$$

Twierdzenie 5. Wielomian $q(x)$ jest wielomianem RC wtedy i tylko wtedy, gdy $h(x)$ jest funkcją RC , której licznik i mianownik są wielomianami względnie pierwszymi i $x = 0$ nie jest biegunem funkcji $h(x)$.

Dowód. Niech $q(x)$ będzie wielomianem RC . Ponieważ wszystkie zera wielomianu $q(x)$ są pojedyncze, to wielomiany $q(x)$ i $q'(x)$ są względnie pierwsze. Wielomian $q(x)$ ma k różnych zer rzeczywistych ujemnych. Istnieje więc $k-1$ różnych przedziałów, których brzegiem są zera wielomianu $q(x)$ i w których wewnątrz nie znajdują się zera wielomianu $q(x)$. Zgodnie z twierdzeniem Rolle'a, w każdym z tych przedziałów znajduje się przynajmniej jedno zero wielomianu $q'(x)$. Ponieważ $q'(x)$ może mieć najwyżej $k-1$ różnych zer, to w każdym z tych przedziałów znajduje się dokładnie jedno zero wielomianu $q'(x)$. Stąd na mocy definicji 1 funkcja $h(x)$ jest funkcją RC . Z definicji 3 wynika, że $x = 0$ nie może być zerem wielomianu $q(x)$, a tym samym nie może być biegunem funkcji $h(x)$. Dowód twierdzenia odwrotnego wynika bezpośrednio z definicji funkcji RC (definicja 1). c.b.d.o.

Z powyższego twierdzenia wynika, że badanie wielomianu (32) można zastąpić badaniem funkcji (33). Należy tylko stwierdzić, czy jest ona funkcją RC nie posiadającą bieguna w $x = 0$, której licznik i mianownik są wielomianami względnie pierwszymi. Łatwo zauważyć, że powyższe warunki są identyczne jak w twierdzeniu 2 pkta.

Z tego wynika, że do badania funkcji (33) można zastosować opisany wyżej algorytm badania stabilności asymptotycznej.

Oznaczmy przy N_0 macierz (20) współczynników funkcji $h(x)$:

$$N_0 = \begin{bmatrix} q_1, 2q_2, 3q_3, \dots, kq_k, 0 \\ q_0, q_1, q_2, \dots, q_{k-1}, q_k \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Według poprzednio opisanej reguły należy wyznaczyć macierze: $N_1, N_2, \dots$ Macierz N_{k-1} otrzymana po $k-1$ krokach ma wymiar (2×2) . Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby wielomian (32) był wielomianem RC jest dodatniość wyznacznika $\det N_{k-1}$ oraz wszystkich wyrazów macierzy: $N_1, N_2, \dots, N_{k-1}$.

8. PORÓWNANIE PRZEDSTAWIONEJ METODY Z KRYTERIUM ROUTH'A

Istnieje wiele algebraicznych metod badania stabilności. Do najczęściej używanych należą kryteria Hurwitza i Routh'a [1], [2]. Jak wiadomo, kryterium Hurwitza rozstrzyga jedynie o stabilności asymptotycznej. Kryterium Routh'a jest natomiast adaptowaną do celów badania stabilności metodą określającą liczbę zer wielomianu leżących w prawej półpłaszczyźnie. Przedstawiony w niniejszej pracy algorytm wykazuje pewne podobieństwo do reguły Routh'a. Podstawą prezentowanej metody są własności rozwinięcia (29) funkcji (18) na ułamek łańcuchowy:

$$f(x) = A_1 + \frac{1}{A_2 + A_3x + \frac{1}{\frac{A_4}{x} + A_5 + \frac{1}{A_6 + \dots}}} \quad (35)$$

Łatwo wykazać, że reguła Routha jest bezpośrednio związana z rozwinięciem funkcji (18) na ułamek łańcuchowy innego typu:

$$f(x) = B_1 + \frac{1}{B_2x + \frac{1}{B_3 + \frac{1}{B_4x + \frac{1}{B_5 + \dots}}}} \quad (36)$$

W obu metodach jest więc wykorzystywane dzielenie wielomianów niezbędne przy rozwinięciach na ułamki łańcuchowe. To właśnie jest przyczyną pewnego podobieństwa obu algorytmów.

Można wykazać, że liczba współczynników A_i w rozwinięciu (35) jest taka sama jak liczba współczynników B_i w rozwinięciu (36). Różnica polega na tym, że w jednym kroku można wyznaczyć dwa kolejne współczynniki rozwinięcia (35) a tylko jeden współczynnik rozwinięcia (36). Liczba kroków w omawianej metodzie jest więc w przybliżeniu dwa razy mniejsza niż w metodzie Routha. Jednak liczba działań jest w obu przypadkach prawie jednakowa. Badanie stabilności metodą przedstawioną w pracy wymaga wykonania

$\frac{1}{2}(n-1)^2$ mnożeń i $\frac{1}{4}(n-1)^2$ dodawań, gdy n (stopień wielomianu (11)) jest liczbą nie-

parzystą oraz w sumie $\frac{3}{4}n(n-2)+1$ działań, gdy n jest liczbą parzystą. Niewątpliwą zaletą

jest brak dzielen, których liczba w metodzie Routha stanowi w przybliżeniu $\frac{1}{3}$ wszystkich działań.

Porównania wymaga również liczba badań znaku. Liczba ta jest mniejsza w przypadku metody Routha, gdyż badanie znaku stosuje się tylko do liczb w pierwszej kolumnie. Dochodzi tu jednak konieczność badania zmiany znaku. Metoda opisana w pracy wymaga sprawdzania dodatniości każdego obliczonego wyznacznika, czyli około $\frac{1}{4}(n-1)^2$ razy. Jednak badanie znaku za każdym razem pozwala na wcześniejsze zakończenie obliczeń w przypadku niestabilności wielomianu.

Podamy teraz przykłady zastosowań przedstawionej metody. W dwóch pierwszych przykładach zastosujemy dla porównania również metodę Routha.

9. PRZYKŁADY

Przykład 1. Zbadań stabilności wielomianu $x^6 + 4x^5 + 9x^4 + 13x^3 + 12x^2 + 7x + 2$. Macierz (30) jest równa:

$$M_0 = \begin{bmatrix} 7, & 13, & 4, & 0 \\ 2, & 12, & 9, & 1 \end{bmatrix}.$$

Zgodnie z opisem badania stabilności (pkt 6) kolejne macierze M_i są następujące:

$$M_1 = \begin{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 7, & 13 \\ 2, & 12 \end{bmatrix}, & \det \begin{bmatrix} 7, & 4 \\ 2, & 9 \end{bmatrix}, & \det \begin{bmatrix} 7, & 0 \\ 2, & 1 \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} 7, & 0 \\ 2, & 1 \end{bmatrix}, & \det \begin{bmatrix} 13, & 0 \\ 12, & 1 \end{bmatrix}, & \det \begin{bmatrix} 4, & 0 \\ 9, & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58, & 55, & 7 \\ 7, & 13, & 4 \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 58 \cdot 13 - 7 \cdot 55, & 58 \cdot 4 - 7 \cdot 7 \\ 58 \cdot 4 - 7 \cdot 7, & 55 \cdot 4 - 7 \cdot 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 369, & 183 \\ 183, & 129 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\det M_2 = 369 \cdot 129 - 183^2 = 184,5 \cdot 258 - 183^2 > 0$ oraz wszystkie wyrazy macierzy M_1 i M_2 są dodatnie, to badany wielomian jest wielomianem Hurwitza.

Schemat Routha dla tego samego wielomianu jest następujący:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} 1 \\ 4 \\ 9 - \frac{1 \cdot 13}{4} \\ \frac{23}{4} \\ 13 - \frac{4 \cdot \frac{41}{4}}{\frac{23}{4}} \\ \frac{135}{23} \\ \frac{41}{4} - \frac{\frac{23}{4} \cdot \frac{129}{23}}{\frac{135}{23}} \\ \frac{214}{45} \\ \frac{129}{23} - \frac{\frac{135}{23} \cdot 2}{\frac{214}{45}} \\ \frac{336}{107} \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \quad 12 \quad 2 \\ 13 \quad 7 \\ 12 - \frac{1 \cdot 7}{4} \quad 2 \\ \frac{41}{4} \quad 2 \\ 7 - \frac{4 \cdot 2}{\frac{23}{4}} \\ \frac{129}{23} \\ 2 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

Oczywiście wszystkie wyrazy w pierwszej kolumnie są tego samego znaku, gdyż badany wielomian jest wielomianem Hurwitza.

Przykład 2. Zbadać stabilność wielomianu $x^6 + 4x^5 + 8x^4 + 10x^3 + 8x^2 + 4x + 1$.
Macierz (30) jest następująca:

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} 4, & 10, & 4, & 0 \\ 1, & 8, & 8, & 1 \end{bmatrix}.$$

Zgodnie z uwagami 1 i 2 macierz $\mathbf{M}_0$ można uprościć dzieląc wszystkie wyrazy pierwszego wiersza przez 2

$$\mathbf{M}'_0 = \begin{bmatrix} 2, & 5, & 2, & 0 \\ 1, & 8, & 8, & 1 \end{bmatrix}.$$

Macierze $\mathbf{M}_1$ i $\mathbf{M}_2$ są odpowiednio równe:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 11, & 14, & 2 \\ 2, & 5, & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 27, & 18 \\ 18, & 18 \end{bmatrix}.$$

Macierz $\mathbf{M}_2$ też można uprościć

$$\mathbf{M}'_2 = \begin{bmatrix} 3, & 2 \\ 1, & 1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\det \mathbf{M}'_2 = 1 > 0$ i wszystkie wyrazy macierzy $\mathbf{M}_1$ i $\mathbf{M}_2$ są dodatnie, to badany wielomian jest wielomianem Hurwitza.

Schemat Routha jest w tym przypadku następujący:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 8 & 8 & 1 \\ 4 & 10 & 4 & \\ \frac{11}{4} & 7 & 1 & \\ \frac{54}{11} & \frac{36}{11} & & \\ \frac{10}{3} & 1 & & \\ \frac{9}{5} & & & \\ 1 & & & \end{array}$$

Przykład 3. Zbadać stabilność wielomianu: $x^7 + 2x^6 + 5x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$,

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} 2, & 3, & 5, & 1 \\ 1, & 2, & 3, & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 3 \\ 3, & 4, & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1, & -2 \\ \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Prowadzenie dalszych obliczeń jest niecelowe, ponieważ w macierzy $\mathbf{M}_2$ pojawił się wyraz ujemny. Badany wielomian nie jest stabilny. Niestabilność wynika z istnienia co najmniej jednego zera położonego w prawej półpłaszczyźnie otwartej.

Przykład 4. Zbadać stabilność wielomianu: $x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 2x^3 + 4x^2 + x + 2$,

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} 1, & 2, & 2, & 1 \\ 2, & 4, & 4, & 2 \end{bmatrix}.$$

Wiersze macierzy M_0 są liniowo zależne, a więc macierz M_1 jest zerowa. Badany wielomian nie jest wielomianem Hurwitza. W celu sprawdzenia czy jest on wielomianem stabilnym należy utworzyć macierz (34) w oparciu o wyrazy dowolnego wiersza macierzy M_0

$$N_0 = \begin{bmatrix} 2, & 4, & 3, & 0 \\ 1, & 2, & 2, & 1 \end{bmatrix}.$$

Jeśli wszystkie wyrazy macierzy N_1 i N_2 oraz wyznacznik $\det N_2$ będą dodatnie, to badany wielomian jest stabilny

$$N_1 = \begin{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 2, & 4 \\ 1, & 2 \end{bmatrix}, & \det \begin{bmatrix} 2, & 3 \\ 1, & 2 \end{bmatrix}, & \det \begin{bmatrix} 2, & 0 \\ 1, & 1 \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} 2, & 0 \\ 1, & 1 \end{bmatrix}, & \det \begin{bmatrix} 4, & 0 \\ 2, & 1 \end{bmatrix}, & \det \begin{bmatrix} 3, & 0 \\ 2, & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Ponieważ pierwszy wyraz pierwszego wiersza macierzy N_1 jest równy zeru, to badany wielomian nie jest stabilny.

Przykład 5. Zbadać stabilność wielomianu: $x^8 + x^7 + 7x^6 + 6x^5 + 17x^4 + 11x^3 + 17x^2 + 6x + 6$,

$$M_0 = \begin{bmatrix} 6, & 11, & 6, & 1, & 0 \\ 6, & 17, & 17, & 7, & 1 \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} 36, & 66, & 36, & 6 \\ 6, & 11, & 6, & 1 \end{bmatrix}.$$

Po skróceniu pierwszego wiersza macierzy M_1 przez 6 widać, że wiersze tej macierzy są liniowo zależne. Należy więc jeszcze zbadać, czy wielomian: $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ jest wielomianem RC,

$$N_0 = \begin{bmatrix} 11, & 12, & 3, & 0 \\ 6, & 11, & 6, & 1 \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} 49, & 48, & 11 \\ 11, & 12, & 3 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 60, & 26 \\ 26, & 12 \end{bmatrix}.$$

Macierz N_2 można zastąpić macierzą $N'_2 = \begin{bmatrix} 30, & 13 \\ 13, & 6 \end{bmatrix}$.

Ponieważ $\det N'_2 = 11 > 0$ i wyniki wszystkich poprzednich obliczeń były dodatnie, to badany wielomian jest wielomianem stabilnym. Posiada on sześć zer pojedynczych leżących na osi urojonej i dwa zera położone w lewej półpłaszczyźnie otwartej.

Przykład 6. Zbadać stabilność wielomianu: $d(x) = x^9 + x^8 + 7x^7 + 6x^6 + 17x^5 + 11x^4 + 17x^3 + 6x^2 + 6x$. Wielomian ten ma pojedyncze zero dla $x = 0$. Dalsze badanie sprowadza się do badania wielomianu $\frac{d(x)}{x}$. Na podstawie poprzedniego przykładu stwierdzamy, że powyższy wielomian jest wielomianem stabilnym.

Przykład 7. Zbadać stabilność wielomianu: $x^7 + 6x^5 + 11x^3 + 6x$. Zgodnie z punktem c) twierdzenia 2 powyższy wielomian jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ jest wielomianem RC. Z obliczeń przeprowadzonych w przykładzie 5 wynika, że badany wielomian jest stabilny; wszystkie zera tego wielomianu leżą na osi urojonej i są pojedyncze.

LITERATURA

1. A. Turowicz, *Geometria zer wielomianów*, PWN, Warszawa 1967.
2. F.R. Gandmacher, *Teorija matric*, Izd. Nauka, Moskwa 1966.
3. J. Osiowski, *Zarys rachunku operatorowego*, WNT, Warszawa 1965.
4. G. Birkhoff, S. Mac Lane, *Przegląd algebry współczesnej*, PWN, Warszawa 1966.

R. BIERNACKI

NEW ALGEBRAIC CRITERION FOR STABILITY

Summary

In the paper is presented a new algebraic criterion for stability of linear systems. The method is based on the properties of some RC driving-point impedance function expansion in a continued fraction form. One of the advantages of this method is the possibility of a simple examination of a nonasymptotic stability.

R. BIERNACKI

NOUVELLE MÉTHODE ALGÈBRIQUE D'EXAMINER LA STABILITÉ

Résumé

Dans cet article on a présenté la nouvelle méthode algébrique d'examiner la stabilité des systèmes linéaires. La méthode est basée sur les propriétés du développement de la fonction rationnelle de la classe Z_{RC} en une sorte de fraction continue. L'avantage de cette méthode consiste en une simplicité de l'examen de la stabilité non asymptotique.

R. BIERNACKI

NEUE ALGEBRAISCHE UNTERSUCHUNGSMETHODE DER STABILITÄT

Zusammenfassung

Eine neue Untersuchungsmethode der Stabilität von linearen Netzwerken wurde dargestellt. Grundlage dieser Methode sind die Entwicklungseigenschaften meßbarer Funktionen der Klasse Z_{RC} hinsichtlich einer Kettenbruchform, und ihr Vorteil — die Einfachheit der Untersuchung der nichtasymptotischen Stabilität.

Р. БИРНАЦКИ

НОВЫЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ СТАБИЛЬНОСТИ

Резюме

В труде представлен новый алгебраический метод исследования устойчивости линейных стационарных схем. Этот метод обоснован на некоторых свойствах импедансных функций двухполосников Z_{RC} . Его достоинством является простое исследование неасимптотической устойчивости.

Analogowe syntetyzery częstotliwości

KONRAD PIWNICKI (WARSZAWA)

Instytut Radioelektroniki Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 3.9.1974

Syntetyzer częstotliwości, sterowany jednym wysokostabilnym generatorem wzorcowym, może dostarczać bardzo dużej liczby częstotliwości, których dokładność i stabilność jest taka jak w generatorze wzorcowym. Częstotliwość wyjściowa jest wynikiem mnożenia częstotliwości wzorcowej przez liczbę wymierną. Realizuje się to za pomocą prostych operacji mnożenia i dzielenia częstotliwości przez liczby naturalne oraz dodawania i odejmowania częstotliwości.

W artykule przedstawiono zasady działania syntetyzerów częstotliwości wykorzystujących analogowe układy elektroniczne. Syntetyzery takie zbudowane są z jednakowych dekad syntezy, których liczba decyduje o minimalnym skoku częstotliwości. Częstotliwość wyjściową wybiera się za pomocą przełączników podających kolejne cyfry w układzie dziesiętnym. Opisano rozwiązania dekad syntezy produkowanych przez różne firmy.

Druga część artykułu poświęcona jest metodom minimalizacji szumów na wyjściu syntetyzera. Przedstawiono najnowsze rozwiązania układów przeznaczonych do rozszerzania zakresu częstotliwości wyjściowych syntetyzerów. Układy te umożliwiają uzyskanie bardzo wysokiej maksymalnej częstotliwości wyjściowej przy względnie małych szumach.

1. WSTĘP

Częstotliwość jest wielkością fizyczną, którą można obecnie wytwarzać i mierzyć z największą dokładnością, dlatego wiele współczesnych metod pomiarowych opiera się na pomiarze częstotliwości lub na badaniach charakterystyk częstotliwościowych. Do badań tych niezbędne są dokładne i stabilne źródła częstotliwości przestrajane w sposób skokowy lub ciągły. Z drugiej strony podobne potrzeby stwarza ogromny rozwój radiokomunikacji. Zmniejszanie odstępów międzykanałowych i stosowanie modulacji wąskopasmowych powodują znaczny wzrost wymagań na dokładność i stabilność częstotliwości nośnych nadajników radiowych i generatorów lokalnych w odbiornikach.

Źródłami częstotliwości o największej dokładności i stabilności są wzorce atomowe i wzorcowe generatory kwarcowe pracujące w optymalnych warunkach. Źródła te mogą dostarczać tylko jednej ściśle określonej częstotliwości; aby otrzymać dowolną pożądaną częstotliwość, nie tracąc przy tym na dokładności i stabilności, buduje się urządzenia elektroniczne zwane syntetyzernami częstotliwości. Syntetyzery częstotliwości stanowią bardzo szeroką klasę urządzeń od najprostszych, wytwarzających tylko jedną częstotliwość wyjściową, aż do bardzo skomplikowanych przyrządów pomiarowych, w których

za pomocą przełączników można wybierać dowolną częstotliwość z kilku miliardów częstotliwości wyjściowych.

Synteza częstotliwości sprowadza się do realizacji prostych operacji mnożenia i dzielenia częstotliwości wzorcowej przez liczby naturalne oraz dodawania i odejmowania częstotliwości. Podstawowymi układami są więc powielacze i dzielniki częstotliwości oraz mieszacze i filtry służące do przemiany częstotliwości. Układy te oprócz swych zasadniczych funkcji wprowadzają zawsze niepożądane napięcia zakłócające w postaci szumów i częstotliwości niepożądanych. Zakłócenia te powodują, że widmo napięcia wyjściowego z syntetyzera nie przedstawia idealnie czystego prążka i może być znacznie więcej zakłócone od widma napięcia pochodzącego z generatora wzorcowego. Dlatego najistotniejszym problemem syntezy częstotliwości jest wybór odpowiednich układów elektronicznych i ich optymalizacja pod kątem minimalizacji napięć zakłócających.

2. RODZAJE SYNTETYZERÓW CZĘSTOTLIWOŚCI

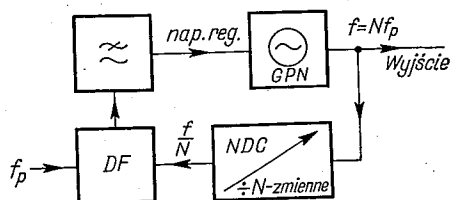
Rozwój układów syntezy częstotliwości, podobnie jak innych urządzeń elektronicznych, jest ściśle powiązany z postępem w dziedzinie elementów elektronowych. Jednak w tym przypadku nowe elementy przyczyniały się nie tylko do udoskonalenia stosowanych układów, lecz także preferowały odmienne rozwiązania układowe. Rozpatrując te rozwiązania w porządku chronologicznym można wyróżnić trzy podstawowe klasy syntetyzerów częstotliwości.

Pierwsza obejmuje syntetyzery częstotliwości projektowane dla konkretnych zastosowań bez wykorzystania jakiejś ogólnej zasady działania. Wszystkie bloki takich syntetyzerów były różne i nie istniała na ogół możliwość rozszerzenia układu lub adaptacji do innych wymagań. Budowane w technice lampowej miały bardzo duże rozmiary, znaczne pobory mocy zasilania i nie najlepszą niezawodność. Dlatego przede wszystkim dążono do zmniejszenia liczby elementów, co prowadziło często do stosowania wyszukanych układów elektronicznych, które wymagały wielu precyzyjnych strojów i regulacji. Obsługa syntetyzera była dość skomplikowana, wykorzystywano bowiem strojenia skokowe i ciągłe oraz różnorodne wskaźniki synchronizacji [1].

Do drugiej klasy zalicza się iteracyjne syntetyzery częstotliwości, które budowane są z jednakowych dekad syntezy. W każdej dekadzie powtarzane są takie same operacje arytmetyczne, a mianowicie sumowanie częstotliwości i dzielenie częstotliwości przez dziesięć. Łącząc odpowiednią liczbę dekad syntezy można otrzymać dowolnie mały skok częstotliwości, który praktycznie ograniczony jest tylko przez stabilność wzorca. Syntetyzery iteracyjne są więc bardzo uniwersalne i stosunkowo łatwe do produkcji, składają się bowiem głównie z jednakowych bloków i można bez trudności budować różne wersje o wymaganych parametrach. Pożądaną częstotliwość wyjściową wybiera się w sposób jednolity za pomocą jednakowych przełączników skojarzonych z poszczególnymi dekadami. Przełączniki te zmieniają napięcia stałe, sterujące np. matryce diodowe, można więc łatwo realizować programowanie i zdalne wybieranie częstotliwości, co pozwala na całkowite zautomatyzowanie pomiarów. Syntetyzery takie produkowane są przez wszystkie większe firmy na świecie i są obecnie najbardziej rozpowszechnione. Budowane są w technice tranzystorowej, a nowe modele zawierają już duży procent układów scalonych.

Trzecią klasę stanowią zliczające syntetizery częstotliwości, w których wykorzystuje się zliczanie impulsów przez cyfrowy licznik elektroniczny o regulowanej pojemności. Licznik taki spełnia rolę nastawnego dzielnika częstotliwości, którego stosunek podziału może być zmieniany za pomocą przełączników. Nastawny dzielnik częstotliwości NDC umieszczony jest w pętli fazowej regulacji częstotliwości (rys. 1), dzieli on częstotliwość f , pochodzącą z generatora przestrajanego napięciem GPN, przez wybraną za pomocą przełączników liczbę naturalną N . Napięcie wyjściowe z dzielnika jest porównywane w de-

Rys. 1. Uproszczony schemat zliczającego syntetizera częstotliwości



tektorze fazy DF z napięciem o częstotliwości wzorcowej f_p , a sygnał błędny z detektora fazy przez filtr dolnoprzepustowy tak przestrasza generator, aby obie częstotliwości porównywane były identyczne: $f/N = f_p$, czyli $f = Nf_p$. Jeśli zakres zmian N zawiera się w granicach od N_1 do N_2 , to z generatora można otrzymać częstotliwości od $N_1 f_p$ do $N_2 f_p$ ze skokiem częstotliwości równym f_p .

Przedstawiona zasada działania syntetizera zliczającego znana była od dawna i realizowano ją w wersjach laboratoryjnych stosując technikę lampową a następnie tranzystorową, jednak zbyt duża liczba elementów i związane z tym wady, a także niska częstotliwość pracy nie skłaniały do stosowania i produkcji takich urządzeń. Natomiast zastosowanie układów scalonych, które w wersjach cyfrowych pracują do bardzo wysokich częstotliwości, stworzyło nową jakość. Zliczający syntetizer częstotliwości nie zawiera indukcyjności, które są elementami nie dającymi się miniaturyzować (jedyna cewka stosowana jest tylko w generatorze, chociaż buduje się także generatory RC), można więc taki syntetizer całkowicie scalić, przy czym większość zespołów budowana jest z typowych cyfrowych układów scalonych. Dzięki temu otrzymuje się bardzo tani syntetizer o małych rozmiarach, małym poborze mocy zasilania i ogromnej niezawodności w pracy. Syntetizery zliczające nadają się szczególnie dobrze do urządzeń radiokomunikacyjnych i są stosowane nawet w urządzeniach noszonych. Natomiast zakres zastosowań przedstawionej najprostszej wersji do celów miernictwa jest ograniczony minimalnym skokiem częstotliwości, który nie może być praktycznie mniejszy od 100 Hz. Do tych celów buduje się jednak bardziej złożone układy o dowolnie małym skoku, które zawierają np. kilka pętli fazowej regulacji częstotliwości. W zliczających syntetizerach częstotliwości można bardzo łatwo zrealizować programowanie i zdalne sterowanie.

Powyższa klasyfikacja dotyczy tylko ogólnych zasad działania syntetizerów częstotliwości i nie wnika w rozwiązania układowe, które mogą mieć bardzo dużo wersji. Z punktu widzenia realizacji elementarnych układów elektronicznych stosowanych do syntezy częstotliwości wyróżnia się dwa zasadnicze rodzaje układów:

1) układy z syntezą bezpośrednią, w których operacje na częstotliwościach przeprowadza się metodami pasywnymi, stosując tylko generatory harmoniczne, mieszacze i filtry,

2) układy z syntezą pośrednią wykorzystujące fazową regulację częstotliwości.

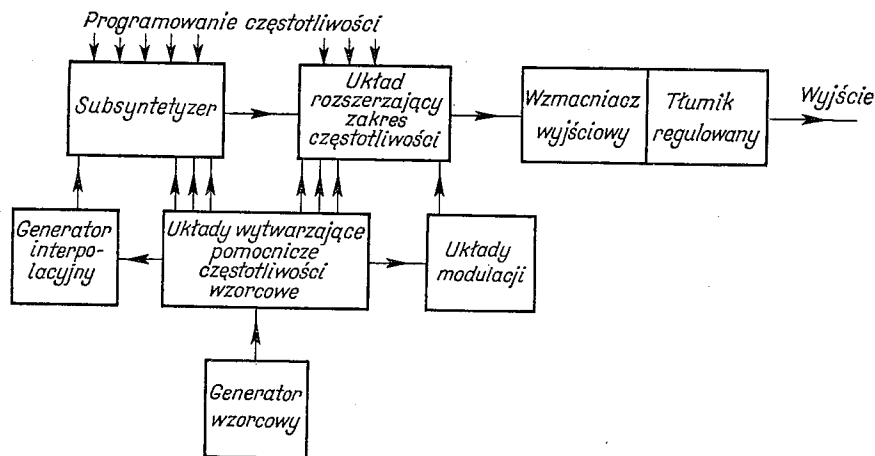
Każdy syntetyzer częstotliwości składa się z dużej liczby układów elementarnych. Syntetery, w których występują tylko układy pierwszego rodzaju nazywają się syntetami z syntezą bezpośrednią; cechują się one bardzo krótkim czasem przełączania częstotliwości rzędu 20—100 μ s. Urządzenia te mają jednak dość duże rozmiary i są drogie, istnieją także trudności z rozszerzaniem w górę zakresu częstotliwości wyjściowych.

Natomiast syntetery, w których stosuje się fazową regulację częstotliwości noszą nazwę syntetyzerów z syntezą pośrednią. Są one tańsze i mają mniejsze rozmiary, poza tym istnieje możliwość znacznego zwiększenia w łatwy sposób częstotliwości wyjściowej. Czasy przełączania częstotliwości są jednak dość długie, zawierają się one w granicach 1—50 ms, co wynika z czasów chwytania fazowych regulacji częstotliwości. Oprócz tego konieczne jest często stosowanie wskaźnika synchronizacji, który sygnalizuje stan synchronizmu; generator z fazową regulacją częstotliwości wytwarza bowiem zawsze napięcie, nawet pod nieobecność napięcia wejściowego i przy braku synchronizacji.

W dalszym ciągu niniejszego artykułu przedstawione będą problemy związane z analogowymi realizacjami układów syntezy częstotliwości, a syntetery zliczające, które wykorzystują przede wszystkim technikę cyfrową, będą opisane w oddzielnej publikacji.

3. ZASADA DZIAŁANIA ITERACYJNYCH SYNTETYZERÓW CZĘSTOTLIWOŚCI

Współczesny analogowy syntetyzer częstotliwości dostarczający dużej liczby nastawianych częstotliwości wyjściowych składa się z kilku zasadniczych bloków (rys. 2). Najważniejszym jest subsyntetyzer, który wytwarza najdrobniejszą siatkę częstotliwości, naj-

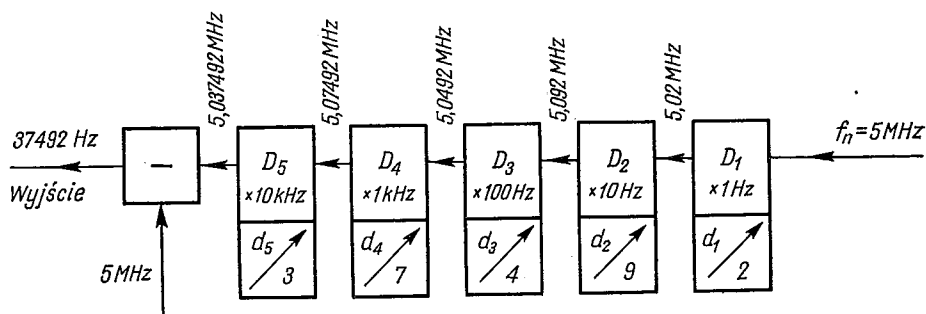


Rys. 2. Schemat blokowy uniwersalnego syntetyzera częstotliwości

częściej w zakresie 1 MHz, tzn. realizuje skoki częstotliwości co 100 kHz, 10 kHz, 1 kHz, 100 Hz, 10 Hz, ... Większe skoki częstotliwości, co 1 MHz, 10 MHz, 100 MHz, uzyskuje się w oddzielnym bloku zawierającym układy służące do rozszerzania zakresu częstotliwości. Można tam także wprowadzić modulację napięcia wyjściowego. Subsyntetyzer

i układ rozszerzający zakres częstotliwości wymagają dostarczenia od kilku do kilkunastu różnych pomocniczych częstotliwości wzorcowych, które są wytwarzane, w oddzielnym bloku, z częstotliwości generatora wzorcowego. Niektóre syntetyzery wyposażone są w generator interpolacyjny umożliwiający płynną zmianę częstotliwości wyjściowej w wąskim zakresie, a także synchronizację syntetyzera innym źródłem częstotliwości za pomocą fazowej regulacji.

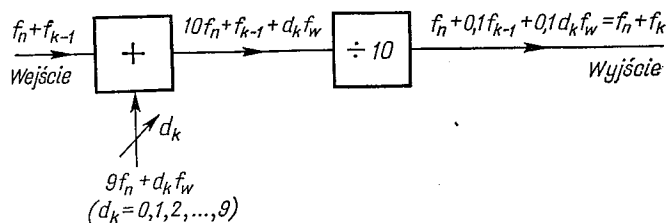
Jako sybsyntetyzer wykorzystuje się najczęściej syntetyzer iteracyjny, który składa się z jednakowych dekad syntezy połączonych kaskadowo. Na rys. 3 przedstawiono schemat blokowy takiego syntetyzera złożonego z pięciu dekad. Kierunek sygnału oraz numeracja



Rys. 3. Schemat blokowy iteracyjnego syntetyzera częstotliwości

dekad przebiegają od prawej strony do lewej, takie jest bowiem usytuowanie dekad w przyrządzie, aby kolejne przełączniki (licząc od lewej do prawej) służyły do nastawiania coraz mniejszych skoków częstotliwości.

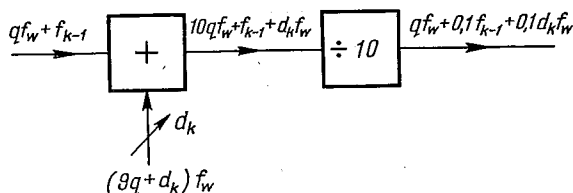
Zasada budowy jednej dekady syntezy jest przedstawiona na rys. 4, na którym bloki funkcjonalne oznaczono znakami operacji arytmetycznych przeprowadzanych nad częstotliwościami. Jeżeli taka dekada syntezy umieszczona jest jako k -ta w łańcuchu identycz-



Rys. 4. Uproszczony schemat dekady syntezy

nych dekad, to do jej wejścia doprowadzane jest z $(k-1)$ -szej dekady napięcie o częstotliwości $f_n + f_{k-1}$, gdzie f_n jest częstotliwością nośną, a f_{k-1} — częstotliwością sygnału. Do wejścia pierwszej dekady doprowadzana jest tylko częstotliwość nośna f_n . W układzie sumującym do częstotliwości wejściowej dodaje się częstotliwość $9f_n + d_k f_w$, gdzie f_w — częstotliwość wzorcowa, a d_k może być zmieniane od 0 do 9 co jednostkę za pomocą przełącznika skojarzonego z dekadą, czyli $d_k = 0, 1, \dots, 9$. Częstotliwość wyjściowa z układu sumującego jest dzielona przez dziesięć, wobec tego napięcie wyjściowe z k -tej dekady ma częstotliwość: $f_n + 0,1 f_{k-1} + 0,1 d_k f_w = f_n + f_k$. W syntetyzerze iteracyjnym złoż-

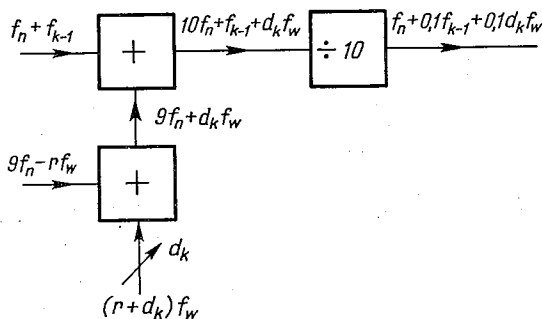
niczne w zakresie od 15 do 40. Jeżeli częstotliwość nośna jest niską harmoniczną f_w , czyli $f_n = qf_w$, to można bezpośrednio wytwarzać częstotliwości $9f_n + d_k f_w = (9q + d_k)f_w$ jako harmoniczne częstotliwości f_w , przy czym $(9q + d_k) < 70$, czyli $q < 6$. Takie rozwiązanie dekady syntezy (rys. 5) stwarza trudne wymagania dla układu sumującego, gdyż duże są



Rys. 5. I wariant dekady syntezy

względne zmiany częstotliwości na wyjściu. W tym przypadku układ sumujący można realizować tylko w postaci mieszacza z filtrami pasmowoprzepustowymi przełączanymi współbieżnie ze zmianami d_k , lub w postaci mieszacza z fazową regulacją częstotliwości. Najczęściej wybiera się drugą alternatywę, czyli dekada taka znajduje przede wszystkim zastosowanie przy syntezie pośredniej.

Częstotliwość nośną w dekadzie syntezy można wybrać dowolnie dużą rozdzielając sumowanie częstotliwości na dwa układy sumujące. Częstotliwość $9f_n + d_k f_w$ jest w tym przypadku sumą dwóch częstotliwości: jednej pochodzącej z generatora harmonicznym $(r + d_k)f_w$, która zależy od ustawienia przełącznika dekady i drugiej stałej $9f_n - rf_w$. Te dwie częstotliwości należy dodać do częstotliwości wejściowej dekady, co można zrealizować w dwóch wariantach przedstawionych na rysunkach 6 i 7. W obu przypadkach układy

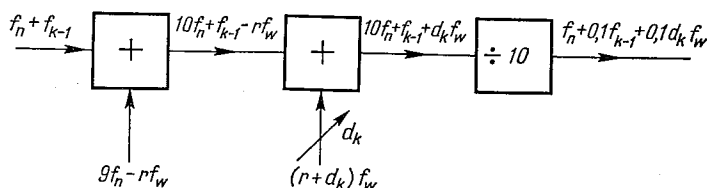


Rys. 6. II wariant dekady syntezy

sumujące można zbudować w postaci mieszaczy i stałych filtrów pasmowoprzepustowych, można więc takie rozwiązania stosować przy syntezie bezpośredniej. We wszystkich dekadach syntezy zakres zmian częstotliwości na wejściu dzielnika $\div 10$ jest równy $10f_w$, przy czym gdy d_k są dodatnie to zmiany częstotliwości zawierają się w przedziale od $10f_n$ do $10f_n + 10f_w$, a gdy d_k ujemne — od $10f_n - 10f_w$ do $10f_n$. Natomiast zakres zmian częstotliwości po pierwszym układzie sumującym jest równy $10f_w$ dla układu na rys. 6 i tylko f_w na rys. 7.

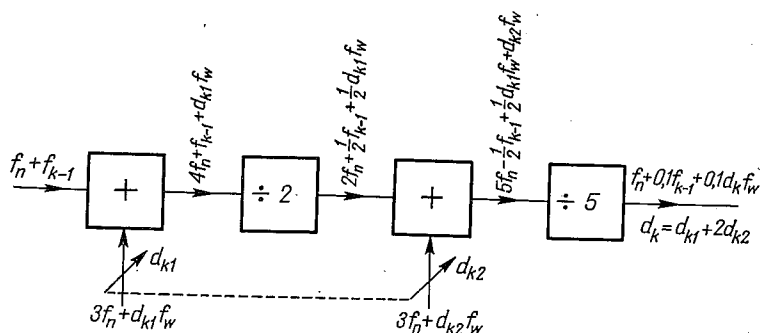
W przedstawionych dotąd dekadach syntezy konieczne jest dostarczenie dziesięciu harmonicznym częstotliwości f_w , z których za pomocą przełącznika wybiera się jedną odpowiadającą pożądanemu d_k ; te dziesięć częstotliwości są najczęściej wytwarzane

wspólnie dla wszystkich dekad wchodzących w skład syntetyzera iteracyjnego. Istnieją także syntetizery, w których do każdej dekady doprowadza się tylko odpowiednio ukształtowane napięcie o częstotliwości f_w , a selekcja pożądaney harmonicznej (w zależności od pozycji przełącznika d_k) dokonywana jest w zespole dekady syntezy.



Rys. 7. III wariant dekady syntezy

Istnieje możliwość zmniejszenia liczby częstotliwości harmonicznych f_w , koniecznych dla pracy dekady, z dziesięciu do czterech (rys. 8). Dzielenie częstotliwości przez 10 zastąpiono tu dzieleniem przez 2 i 5 oraz umieszczono między tymi dzielnikami dodatkowy układ sumujący. Cztery częstotliwości, które dowolnie można doprowadzać do obu



Rys. 8. IV wariant dekady syntezy

układów sumujących, mają postać $3f_n + d_{ki}f_w$, gdzie $d_{ki} = 0, 1, 2, 3$; $i = 1, 2$, przy czym dołączanie danej częstotliwości do drugiego układu sumującego jest równoważne dołączaniu dwa razy większej częstotliwości do pierwszego układu sumującego; wobec tego $d_k = d_{k1} + 2d_{k2}$. Jeżeli w tym przypadku częstotliwość f_n jest harmoniczną f_w , czyli $f_n = af_w$, to częstotliwości $(3a + d_{ki})f_w$ można wytwarzać bezpośrednio jako harmoniczne f_w dla $a < 22$. Dekada taka jest rzadko stosowana ze względu na rozbudowany układ i dość skomplikowane przełączanie.

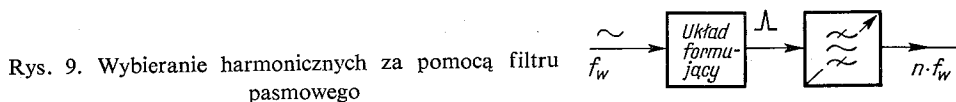
4. ELEMENTARNE UKŁADY SYNTEZY

Podstawowymi układami elementarnymi stosowanymi w syntetyzerach są powielacze częstotliwości wytwarzające częstotliwości harmoniczne, układy sumowania częstotliwości oraz dzielniki częstotliwości. Układy te są stosowane zarówno w dekadach syntezy jak i przy rozszerzaniu zakresu częstotliwości syntetyzera. W niniejszym rozdziale przedsta-

wione będą metody realizacji elementarnych układów syntezy. Układom tym stawia się bardzo ostre wymagania odnośnie tłumienia niepożądanych składowych i stosunku sygnału do szumu.

4.1. Wytwarzanie harmonicznych

Wytwarzanie harmonicznych składa się z dwóch operacji: formowania napięcia okresowego bogatego w harmoniczne i wybierania pożądaney harmonicznej. Formowanie napięcia o dużej zawartości harmonicznych może być dokonywane w sposób pasywny za pomocą elementu nieliniowego, najczęściej stosuje się specjalne diody ładunkowe. Można też formować napięcie w sposób aktywny za pomocą różnych układów impulsowych jak przerzutniki, generatory blokujące, układy z tranzystorami lawinowymi lub tyrystorami. Formowanie aktywne pozwala uzyskać znacznie większe napięcia, jednak powstają przy nim szумы związane z wpływem różnych fluktuacji na momenty zadziałania układu impulsowego. Do dekad syntezy należy na ogół dostarczyć dziesięć kolejnych harmonicznych częstotliwości f_w , dlatego niekiedy operację formowania rozszerza się stosując dodatkowo filtr, który przepuszcza tylko 10 pożądaney harmonicznych.

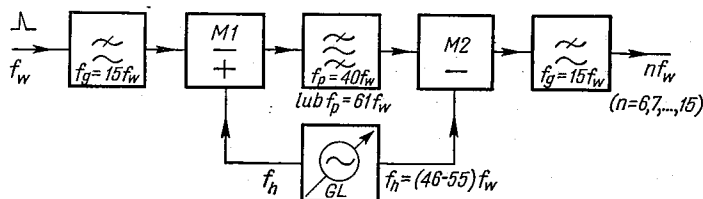


Wybieranie pożądaney harmonicznej polega na selektywnym wyróżnieniu jednej składowej harmonicznej z widma uformowanego napięcia okresowego. Najważniejszym zadaniem jest dokładne odfiltrowanie niepożądanych składowych widma, szczególnie sąsiednich harmonicznych. Tłumienie niepożądanych składowych względem pożądaney harmonicznej musi być większe od 80 dB.

Selekcji harmonicznej można dokonać bezpośrednio za pomocą filtru pasmowo-przepustowego (rys. 9), przy czym rząd harmonicznej, którą można uzyskać zależy od jakości filtru. Jeśli wybieranie harmonicznych odbywa się w dekadzie syntezy, to stosuje się skomplikowane filtry przestrajane lub przełączane. Częściej jednak wytwarza się stale wszystkie 10 częstotliwości harmonicznych w oddzielnym bloku, a za pomocą przełączników dekad syntezy wybiera się dla poszczególnych dekad odpowiednie częstotliwości. Projektuje się wówczas bardzo starannie dziesięć oddzielnych filtrów, często są to filtry kwarcowe. W tym przypadku przełączniki dekad sterują, za pomocą napięć stałych, matryce diodowe złożone ze specjalnych diod przeznaczonych do przełączania napięć wielkiej częstotliwości. Przy takim rozwiązaniu można łatwo zrealizować zdalne przełączanie i programowanie syntetyzera.

Do wybierania harmonicznych w każdej dekadzie syntezy oddzielnie stosuje się najczęściej filtr heterodynowy lub fazową regulację częstotliwości. Filtr heterodynowy (zwany też układem Wadleya) wykorzystuje metodę kompensacji odchyłek częstotliwości generatora lokalnego GL za pomocą podwójnej przemiany częstotliwości (rys. 10). W układzie takim pożądaną harmoniczną uformowanego napięcia wejściowego wybiera się za pomocą jednego filtru pasmowoprzepustowego o stałej częstotliwości pośredniej f_p , przez przełą-

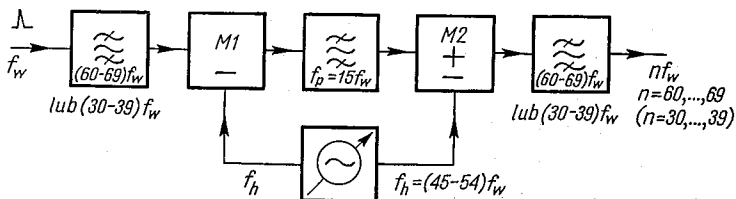
czanie częstotliwości generatora lokalnego. Małe niedokładności częstotliwości tego generatora nie mają wpływu na częstotliwość wyjściową, gdyż w pierwszym mieszaczu dodaje się częstotliwość f_h , a w drugim odejmuje lub odwrotnie. Szerokość pasma filtru pośredniej częstotliwości nie powinna przekraczać f_w , ze względu na tłumienie sąsiednich harmoniczných. W przypadku idealnie prostokątnego filtru maksymalna sumaryczna



Rys. 10. Filtr heterodynowy z wysoką częstotliwością pośrednią

niestabilność częstotliwości środkowej tego filtru oraz niestałość częstotliwości generatora lokalnego nie może być większa od f_w .

Istnieją dwie wersje filtru heterodynowego przeznaczonego do wybierania harmoniczných. Pierwsza (rys. 10) ma zastosowanie do selekcji harmoniczných niskich rzędów; wtedy na wejściu i wyjściu są filtry dolnoprzepustowe, a częstotliwość pośrednia jest wysoka. Natomiast do selekcji harmoniczných wysokich rzędów stosuje się niską częstotliwość pośrednią, a filtry na wejściu i wyjściu są pasmowoprzepustowymi (rys. 11). Bardzo

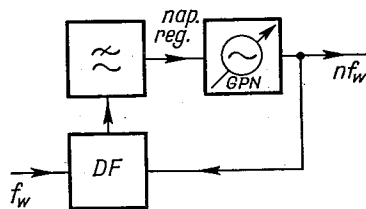


Rys. 11. Filtr heterodynowy z niską częstotliwością pośrednią

ważnym problemem w filtrze heterodynowym jest odpowiedni wybór częstotliwości pośredniej oraz takiego rozwiązania mieszaczy, aby nie powstawały niepożądane składowe o częstotliwościach leżących w pasmie przenoszenia filtrów [4].

Przy syntezie pośredniej stosuje się często do wybierania harmoniczných fazową regulację częstotliwości; dzięki temu eliminuje się filtry pasmowe, które są kosztowne, kłopotliwe w produkcji i zajmują dużą objętość. W układzie z fazową regulacją częstotliwości (rys. 12) porównuje się za pomocą detektora fazy DF fazę napięcia z generatora przestrajanego napięciem GPN z fazą napięcia o częstotliwości wzorcowej f_w . Napięcie wyjściowe z detektora fazy, po przejściu przez filtr dolnoprzepustowy, tak przestrasza generator, że w stanie synchronizmu jego częstotliwość jest dokładnie równa wielokrotności częstotliwości wzorcowej f_w . Rząd harmoniczných, którą generator wytwarza, zależy od wstępnego ustawienia częstotliwości generatora. Rząd ten można więc wybierać zmieniając zgrubnie, za pomocą przełącznika dekady, częstotliwość drgań generatora. Dokładne dostrojenie dokonuje się za pomocą napięcia z pętli regulacji. Do przestrajania generatora

napięciem stosuje się najczęściej diody pojemnościowe, można też stosować inne elementy o reaktancji zależnej od napięcia lub prądu, jak tranzystory reaktancyjne lub indukcyjności z nasycanymi rdzeniami ferrytowymi. Napięcie o częstotliwości wzorcowej f_w doprowadzane do detektora fazy ma zwykle postać wąskich impulsów, dzięki temu eliminuje się możliwość synchronizacji generatora na częstotliwościach niepożądanych, które byłyby



Rys. 12. Fazowa regulacja częstotliwości

kombinacjami mnożenia i dzielenia częstotliwości f_w . Rozwiązanie takie nosi często nazwę generatora synchronizowanego impulsami [3], [7].

Zakresem chwytania fazowej regulacji częstotliwości nazywa się zakres częstotliwości, w którym musi znajdować się częstotliwość generatora aby mogła zadziałać regulacja i mógł nastąpić stan synchronizmu. Zakres ten zależy przede wszystkim od częstotliwości granicznej filtra dolnoprzepustowego. Przy małym zakresie chwytania konieczne jest stosowanie dodatkowych elementów, które umożliwiają chwycenie regulacji. Stosuje się w tym celu jedno z następujących rozwiązań:

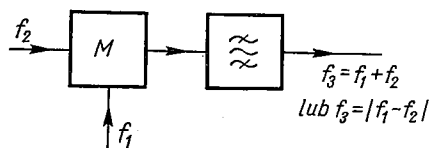
- a) detektor częstotliwości, którego napięcie wyjściowe wstępnie przestrajają generator w zakresie chwytania,
- b) załączanie napięcia wolnozmiennego w pętlę regulacji, napięcie to przestrajają powoli generator do momentu chwycenia,
- c) rozszerzanie pasma filtra dolnoprzepustowego w stanie asynchronizmu i zwężanie pasma po chwyceniu,
- d) stosowanie nieliniowych filtrów dolnoprzepustowych.

Układ z fazową regulacją częstotliwości zawiera znacznie mniej elementów niż filtr heterodynowy, nie wymaga stosowania mieszaczy i filtrów, a filtr dolnoprzepustowy jest prostym filtrem RC . Układ taki daje się więc łatwo zminiaturyzować i można go zbudować w postaci układu scalonego. Oprócz tego fazowa regulacja częstotliwości ma bardzo dobre właściwości filtracyjne z punktu widzenia eliminacji zakłóceń napięcia wejściowego, czyli spełnia rolę wąskiego filtra pasmowoprzepustowego, którego szerokość pasma zależy od częstotliwości granicznej filtra w pętli regulacji. Pożądana jest więc mała częstotliwość graniczna filtra dolnoprzepustowego, jednak im mniejsza jest ta częstotliwość, tym mniejszy jest zakres chwytania, dłuższy czas chwytania i tym lepszą stabilność krótkookresową musi mieć generator przestrajany napięciem. Bowiem z punktu widzenia zakłóceń powstających w generatorze GPN, działanie filtracyjne układu jest równoważne zastosowaniu filtra pasmowozaporowego, który tłumi tylko częstotliwości zakłócające położone blisko prążka napięcia wyjściowego. Częstotliwość graniczną filtra wybiera się więc w sposób kompromisowy [7].

Ostatnio do wybierania harmonicznyc stosuje się coraz częściej zliczający syntetyzer częstotliwości, którego zasada działania została przedstawiona w p. 2.

4.2. Sumowanie częstotliwości

Najprostszym układem sumowania (lub odejmowania) częstotliwości jest mieszacz z filtrem pasmowoprzepustowym (rys. 13). Gdyby mieszacz był idealnym układem mnożącym napięcia wejściowe, to na jego wyjściu pojawiłyby się tylko napięcia o częstotliwościach $f_1 + f_2$ oraz $|f_1 - f_2|$. W rzeczywistości na wyjściu mieszacza otrzymuje się cały



Rys. 13. Najprostszy układ sumowania (lub odejmowania) częstotliwości

szereg składowych wynikłych z sumowania i odejmowania harmoniczných częstotliwości wejściowych:

$$|nf_1 \pm mf_2|, \text{ gdzie } n, m — \text{liczby naturalne.} \quad (6)$$

Sumę $n + m = z$ nazywa się rzędem składowej.

Wiele z niepożądanych składowych widma powstających w mieszaczu może trafić w pasmo przepustowe filtru i zakłócać napięcie wyjściowe. Na ogół amplitudy składowych wyższych rzędów bardzo szybko maleją ze wzrostem z , należy więc szczególną uwagę poświęcić eliminacji produktów niepożądanych o małym z ; wiąże się to z wyborem częstotliwości wejściowych f_1 i f_2 oraz odpowiednim rozwiązaniem układowym mieszacza. Należy przy tym zwrócić uwagę, że na ogół częstotliwości wejściowe zmieniają się w określonych granicach:

$$f_{1min} \leq f_1 \leq f_{1max}, \quad f_{2min} \leq f_2 \leq f_{2max}, \quad (7)$$

a filtr ma szerokość pasma:

$$B = f_{max} - f_{min}. \quad (8)$$

Ogólnie biorąc wszystkie składowe niepożądane trafiające w pasmo przenoszenia filtru można łatwo znaleźć posługując się prostymi wykresami [5], [6]. W syntetyzerach częstotliwości występują najczęściej dwa szczególne przypadki stosowania omawianego układu, które będą rozważone oddzielnie.

Pierwszy przypadek, występujący w dekadach syntezy, dotyczy sumowania częstotliwości małej f_1 z dużą f_2 :

$$f_3 = f_1 + f_2, \quad (9)$$

gdzie $f_1 \ll f_2$. Groźne są tu składowe niepożądane o częstotliwościach:

$$kf_1 + f_2, \quad (10)$$

gdzie $k = 2, 3, \dots$, oraz

$$2f_2 - kf_1, \quad (11)$$

a także harmoniczne f_1 , czyli kf_1 .

Zakładając idealnie prostokątny filtr, można całkowicie wyeliminować produkty typu (10), o ile zostanie spełniony warunek:

$$B < f_{1min}. \quad (12)$$

Całkowita eliminacja pozostałych składowych niepożądanych jest teoretycznie niemożliwa, można jednak pozbyć się produktów o rzędzie nie większym od z_0 przez ograniczenie maksymalnej częstotliwości f_1 :

$$f_{1max} < \frac{1}{z_0} f_{2min}. \quad (13)$$

Tłumienie tego typu składowych niepożądanych musi być w syntetyzerach większe od 80 dB. Jednak wskutek możliwości sumowania się produktów w wielu stopniach, każdy układ musi zapewniać tłumienie co najmniej 100 dB, odpowiada to dla stosowanych mieszaczy $z_0 \geq 9$. Z powyższych rozważań wynika, że układ przedstawiony na rys. 13 stwarza wiele ograniczeń i trudności, przy czym nie uwzględniono skończonego nachylenia zboczny filtru oraz tolerancji częstotliwości granicznych filtru.

Nieco zmodyfikowany układ mieszacza z filtrem stosuje się przy wytwarzaniu częstotliwości wyjściowej syntetyzera, która zmienia się w szerokich granicach od zera do f_{max} i otrzymywana jest przez odjęcie dwóch częstotliwości:

$$f_3 = f_1 - f_2, \quad f_2 < f_1. \quad (14)$$

W tym przypadku po mieszaczu umieszczony jest filtr dolnoprzepustowy o częstotliwości granicznej f_{max} . Składowe niepożądane, które mogą być przenoszone przez filtr mają postać:

$$(m+1)f_2 - mf_1, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

(rzęd składowej $z = 2m+1$ jest liczbą nieparzystą), oraz

$$kf_1 - kf_2 = k(f_1 - f_2), \quad k = 2, 3, \dots \quad (16)$$

Te ostatnie produkty są po prostu harmonicznymi częstotliwości pożądaney i nie są one w większości zastosowań groźne, a poza tym powstają one także w szerokopasmowym wzmacniaczu wyjściowym. Tłumienie harmonicznym sygnału na wyjściu syntetyzera powinno wynosić około 40 dB. Praktycznie należy więc eliminować tylko niskie rzędu składowych pierwszego typu (15). Jeśli chcemy aby w pasmo przenoszenia filtru nie trafiały składowe o rzędzie mniejszym i równym z_1 , to musi być spełniony warunek:

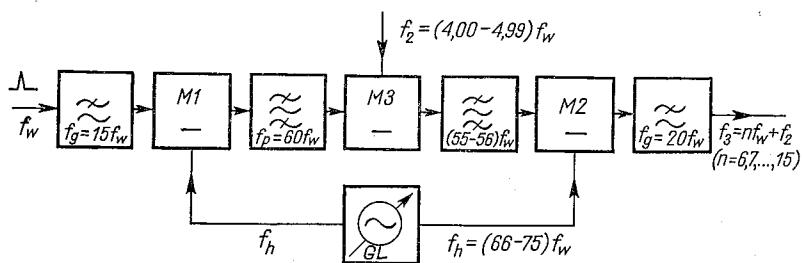
$$f_{max} < \frac{2}{z_1+1} f_{2min}. \quad (17)$$

Na przykład dla $z_1 = 7$ otrzymuje się: $4f_{max} < f_{2min}$, czyli częstotliwości odejmowane muszą być kilkakrotnie większe od maksymalnej częstotliwości wyjściowej. Rozważane składowe niepożądane powstają przede wszystkim w zakresie wyższych częstotliwości wyjściowych i można je znacznie oddalić od częstotliwości pożądaney.

Oprócz przedstawionego wyżej zagadnienia wyboru częstotliwości, istotnym problemem jest zastosowanie właściwego mieszacza. Mieszacze z tranzystorami bipolarnymi stosowane są na częstotliwościach do około 100 MHz, w przypadkach gdy składowe niepożądane można łatwo odfiltrować. Natomiast w bardzo krytycznych miejscach umieszcza

się mieszacze zrównoważone z tranzystorami polowymi, które dzięki znoszeniu się niektórych składowych i kwadratowej charakterystyce tranzystora wytwarzają bardzo mało szkodliwych produktów. Wreszcie na bardzo wysokich częstotliwościach stosuje się mieszacze zrównoważone z diodami Schottky'ego dla sygnałów szerokopasmowych, a mieszacze z diodami waraktorowymi przy sygnałach wąskopasmowych. Ogólnie wiadomo, że składowe wyższych rzędów na wyjściu mieszacza maleją, gdy zmniejsza się napięcia wejściowe, powoduje to jednak pogorszenie stosunku sygnału do szumu.

Ze względu na trudności eliminowania składowych niepożądanych w mieszaczu z filtrem, do sumowania częstotliwości w syntetyzerach wykorzystuje się też inne układy, a mianowicie mieszacz z filtrem heterodynowym lub mieszacz z fazową regulacją częstotliwości.

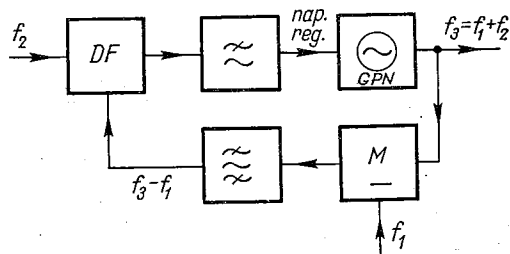


Rys. 14. Mieszacz z filtrem heterodynowym

Na rys. 14 przedstawiono schemat blokowy mieszacza z filtrem heterodynowym (stosowany w dekadach syntezy), który łączy funkcje wybierania harmoniczných i sumowania częstotliwości. W porównaniu z rys. 10, schemat uzupełniony jest dodatkowym mieszaczem i filtrem pasmowoprzepustowym, które służą do odejmowania częstotliwości, jednak na wyjściu otrzymuje się sumę dwóch częstotliwości wejściowych. Można także zrealizować schemat z niską częstotliwością pośrednią, podobny do przedstawionego na rys. 11. W obu przypadkach przy wyborze częstotliwości doprowadzanych do kolejnych mieszaczy należy kierować się przedstawionymi wyżej kryteriami dotyczącymi tłumienia składowych niepożądanych, jednak ze względu na małe szerokości pasm filtrów można łatwo wyeliminować szkodliwe produkty. Szerokość pasma filtru pośredniej częstotliwości zależy od dokładności nastawiania i długookresowej niestałości częstotliwości generatora lokalnego. Aby uzyskać dokładną eliminację wpływu krótkookresowej niestałości częstotliwości oraz szumów generatora, należy zapewnić jednakowy czas propagacji sygnału na obydwu drogach od generatora lokalnego do ostatniego mieszacza $M2$. Tak zbudowany mieszacz z filtrem heterodynowym znajduje zastosowanie w układach rozszerzających zakresy częstotliwości syntetyzerów.

W syntetyzerach częstotliwości z syntezą pośrednią, stosuje się często do sumowania częstotliwości mieszacz z fazową regulacją częstotliwości (rys. 15). Napięcia wejściowe o częstotliwościach f_1 i f_2 są doprowadzane odpowiednio do mieszacza i detektora fazy. Częstotliwości te są oczywiście zmienne (7), przy czym $f_1 > f_2$. W porównaniu z rys. 12, dodatkowy mieszacz i filtr pasmowy służą do odejmowania częstotliwości f_1 od f_3 , wobec tego w stanie synchronizmu napięcie wyjściowe z generatora przestrajanego napięciem ma częstotliwość $f_3 = f_1 + f_2$. Jeżeli $f_1 \gg f_2$, to filtr pasmowy można zastąpić filtrem dolnoprzepustowym i można posłużyć się przedstawionymi wyżej rozważaniami dotyczącymi

składowych niepożądanych powstających przy odejmowaniu dwóch częstotliwości. Jednak wymagania dotyczące tłumienia szkodliwych produktów są tu znacznie łagodniejsze ze względu na filtracyjne właściwości fazowej regulacji częstotliwości, które nie zależą od częstotliwości wyjściowej. Efektywna szerokość pasma jest znacznie mniejsza od zmian częstotliwości wyjściowej generatora, a stosunek sygnału do szumu na wyjściu może być



Rys. 15. Mieszacz z fazową regulacją częstotliwości

znacznie większy od tego stosunku dla napięć wejściowych. Aby usunąć możliwość niepożądanej synchronizacji generatora częstotliwością różnicową $f_1 - f_2$, musi być spełniony warunek:

$$f_{1\max} - f_{3\min} < f_{2\min}, \quad (18)$$

gdzie $f_{3\min}$ jest najniższą częstotliwością przestrajania generatora. Otrzymuje się więc ograniczenie na minimalną częstotliwość wejściową $f_{2\min}$. Mieszacz z fazową regulacją częstotliwości umożliwia także łączenie funkcji wybierania częstotliwości harmonicznych f_w oraz sumowania częstotliwości. Za pomocą takiego układu, rozszerzonego o jeszcze jeden mieszacz i filtr pasmowy można w jednej pętli sumować trzy częstotliwości.

4.3. Dzielenie częstotliwości

Układy dzielników częstotliwości nie będą rozważane szczegółowo, gdyż są one na ogół dobrze znane, nie ma też żadnych różnic między dzielnikami stosowanymi w syntetyzerach częstotliwości i dzielnikami w innych urządzeniach elektronicznych [2].

Można wyróżnić następujące rodzaje dzielników częstotliwości:

- zliczające — złożone z przerzutników bistabilnych, obecnie stosuje się cyfrowe układy scalone,
- relaksacyjne — wykorzystujące synchronizowane multiwibratory lub generatory blokujące,
- regeneracyjne — wykorzystujące mieszacze i filtry, ewentualnie także powielacze częstotliwości,
- z fazową regulacją częstotliwości,
- parametryczne.

Z punktu widzenia zastosowań dzielników częstotliwości do dekad syntezy, interesujące są przede wszystkim układy dzielące przez dziesięć, przy czym najważniejszym parametrem jest stabilność fazy napięcia wyjściowego. Niewątpliwie najlepsze właściwości mają zliczające dzielniki częstotliwości, które są aperiodyczne, niezawodne, tanie, cechują się

bardzo dobrą stabilnością fazy i można je stosować w postaci gotowych układów scalonych. Jednak w syntetyzerach analogowych unika się na ogół przebiegów impulsowych ze względu na możliwości powstawania zakłóceń. Dlatego przy syntezie bezpośredniej stosuje się najczęściej dzielniki regeneracyjne, a przy pośredniej — dzielniki z fazową regulacją częstotliwości, chociaż w nowych modelach syntetyzerów pojawiają się coraz liczniej dzielniki zliczające w postaci cyfrowych układów scalonych.

5. PRZYKŁADY ROZWIĄZAŃ SYNTETYZERÓW ITERACYJNYCH

Jak wiadomo, syntetyzer iteracyjny składa się z jednakowych dekad syntezy. W każdej dekadzie do częstotliwości wejściowej dodaje się dodatkową częstotliwość (zależną od nastawienia przełącznika dekady) w taki sposób, że zapełnia się kolejne miejsce w dziesiętnym zapisie częstotliwości sygnału. Od liczby zastosowanych dekad zależy liczba cyfr znaczących częstotliwość, a więc w konsekwencji minimalny skok częstotliwości. Zasadę działania dekady syntezy opisano w p. 3, jednak rozwiązania układowe realizujące te koncepcje mogą być bardzo różne. W dalszym ciągu będą przedstawione różne układy dekad syntezy tworzących syntetizery iteracyjne produkowane przez różne firmy. Na tablicy 1 umieszczono podstawowe dane szeregu dekad syntezy stosowanych w syntetyzerach częstotliwości, posłużono się przy tym oznaczeniami wprowadzonymi w p. 3.

Tablica 1

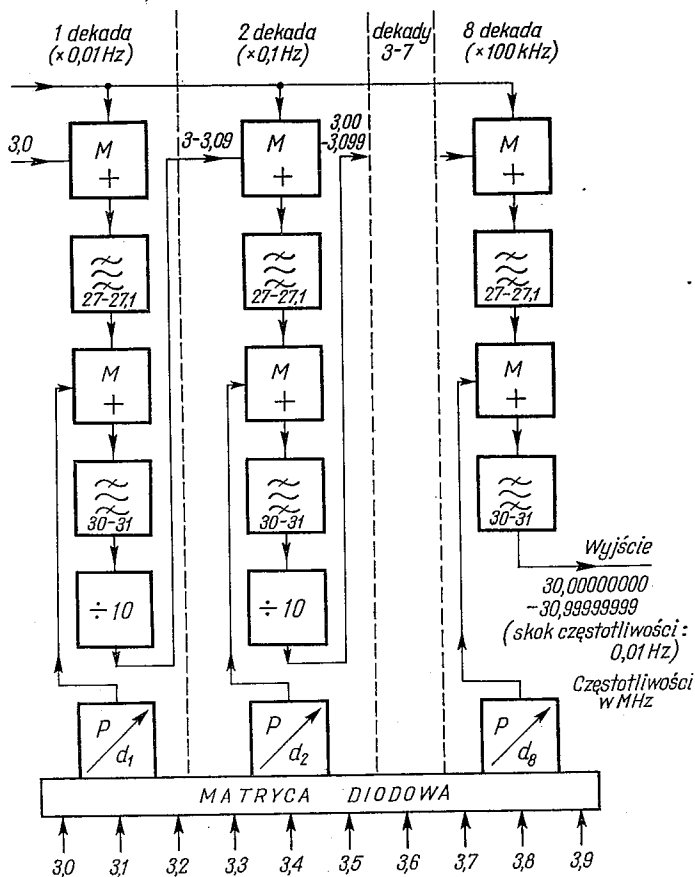
Dane dekad syntezy produkowanych przez różne firmy

Lp.	firma	model syntetyzera	rys.	f_n MHz	f_w MHz	r	q	rodzaj syntezy
1	Hewlett-Packard	5105A	7	3,0	0,1	30	—	bezpośrednia
2	Fluke	645A	7	4,0	0,1	30	—	bezpośrednia
3	Rohde & Schwarz	SMDH	6	1,8	0,1	22	—	bezpośrednia
4	General Radio	1162A	7	5,0	0,1	30	—	pośrednia
5	Takeda Riken	3130D	7	5,0	0,1	30	—	pośrednia
6	Schomandl	ND 30M	5	0,5	0,1	—	5	pośrednia
7	Schomandl	MS100M	6	18,0	1,0	7	—	pośrednia
8	Schlumberger	FS100X	6	2,1	0,1	-11	—	pośrednia
9	Schlumberger	4000	7	2,0	0,1	20	—	pośrednia
10	Adret	301	5	0,2	0,01	—	20	pośrednia
11	Adret	6000	7	2,0	0,1	20	—	pośrednia
12	Racal	MA250	5	0,3	0,1	—	3	pośrednia
13	Plessey	PG331	5	0,2	0,1	—	2	pośrednia
14	TRT	FE365	5	0,3	0,1	—	3	pośrednia

Jak widać, najczęściej wykorzystuje się syntezę pośrednią, która pozwala łatwiej i taniej realizować elementarne układy syntezy mimo rozbudowanych często schematów.

Na rys. 16 przedstawiono schemat blokowy syntetyzera iteracyjnego stosowanego przez firmę Hewlett-Packard w syntetyzerach częstotliwości 5100A i 5105A, które są przyrządami z syntezą bezpośrednią. Syntetyzer iteracyjny składa się w tym przypadku z ośmiu

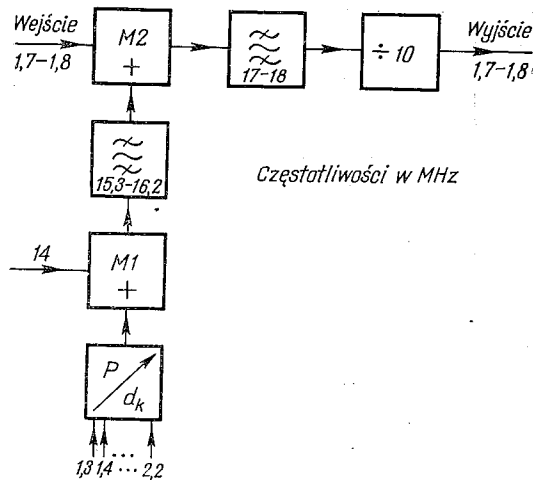
dekad syntezy wykorzystujących zasadę działania z rys. 7. W każdej dekadzie sumowanie częstotliwości dokonywane jest za pomocą mieszaczy i filtrów pasmowoprzepustowych. Wszystkie częstotliwości na rys. 16 i dalszych podawane są w MHz. W pierwszych mieszaczach każdej dekady do częstotliwości wejściowej dodaje się częstotliwość 24 MHz, a szerokość pasma filtru wynosi tylko 100 kHz, natomiast w drugich mieszaczach dodaje



Rys. 16. Syntetyzer iteracyjny Hewlett-Packard 5100A

się częstotliwości zależne od ustawienia przełączników dekad P [8]. Dzięki odpowiedniemu wyborowi częstotliwości, we wszystkich układach sumowania częstotliwości spełnione są warunki (12) i (13). Na wyjściu ostatniej dekady nie dzieli się częstotliwości przez dziesięć i dzięki temu uzyskuje się zmiany częstotliwości w granicach 1 MHz z minimalnym skokiem częstotliwości 0,01 Hz. Kolejność dekad na rys. 16 jest taka, aby sygnał przebiegał od lewej strony rysunku do prawej, w przyrządzie jednak (patrząc od przodu) kolejność dekad jest odwrotna, gdyż przełączniki dekad muszą być tak umieszczone, aby podawać kolejne cyfry pozycyjnego zapisu częstotliwości wyjściowej. Bardzo podobny syntetyzer iteracyjny z synteza bezpośrednią stosowany jest przez firmę Fluke, inne są tylko częstotliwości doprowadzane do pierwszego mieszacza każdej dekady syntezy, wynika to z wyboru innej częstotliwości nośnej (tablica 1).

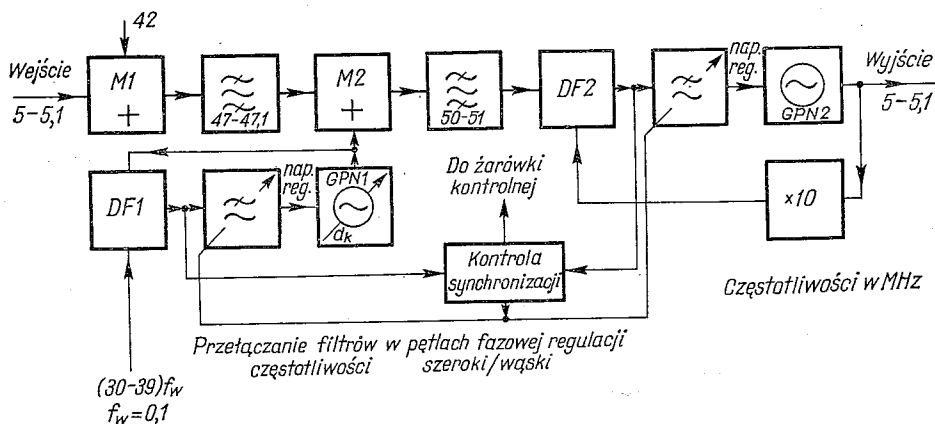
Firma Rohde & Schwarz produkuje także syntetyzer częstotliwości SMDH z syntezą bezpośrednią. Schemat dekady syntezy przedstawiony jest na rys. 17, wykorzystano tu zasadę działania z rys. 6. W tym przypadku obydwa filtry pasmowe w dekadzie muszą mieć szerokość pasma 1 MHz. Częstotliwości wybierane przełącznikiem dekady P są przełączane napięciami stałymi za pomocą matrycy diodowej, co umożliwia programowanie i zdalne nastawianie częstotliwości. Przyjęto tu ciekawe rozwiązanie, wybierając d_k o wartościach ujemnych, co nie powoduje zmiany zasady działania [10].



Rys. 17. Dekada w syntetyzerze Rohde & Schwarz SMDH

Należy wyraźnie podkreślić, że przy syntezie bezpośredniej, mimo prostoty schematu blokowego, realizacja elementarnych układów jest bardzo trudna ze względu na konieczność dokładnej eliminacji składowych niepożądanych i minimalizację szumów. Natomiast przy syntezie pośredniej, składowe niepożądane i szumy stosunkowo łatwo eliminuje się za pomocą fazowej regulacji częstotliwości. Dlatego w większości produkowanych syntetyzerów wykorzystywane jest drugie rozwiązanie.

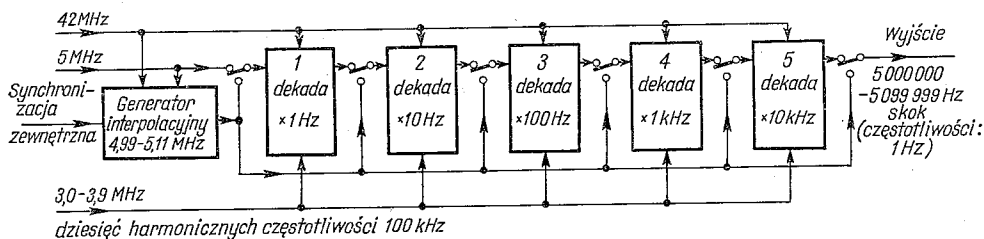
W dekadzie syntezy firmy General Radio (rys. 18), podstawowe operacje na częstotliwościach dokonywane są podobnie jak na rys. 16, jednak zastosowano dodatkowo dwa układy fazowej regulacji częstotliwości. Jeden służy do wybierania harmonicznnych częstotliwości f_w , które w tym przypadku odbywa się w każdej dekadzie oddzielnie. Do dekady doprowadzane jest uformowane napięcie zawierające od 30-tej do 39-tej harmonicznnej 100 kHz. Selekcja pożądaney harmonicznnej następuje, za pomocą przełącznika dekady, przez zgrubną zmianę częstotliwości generatora przestrajanego napięciem GPN1, a dokładne dostrojenie generatora zapewnia pętla fazowej regulacji. Drugi układ fazowej regulacji wykorzystywany jest do dzielenia częstotliwości przez 10. W układzie tym, aby uniknąć błędnej synchronizacji i zwiększyć wzmocnienie w pętli regulacji, zastosowano 10-krotny powielacz częstotliwości, dzięki któremu częstotliwości doprowadzane do wejść detektora fazy są jednakowe. Taki dzielnik częstotliwości z fazową regulacją znakomicie oczyszcza napięcie wyjściowe z niepożądanych składowych i szumów. Zwiększenie zakresów chwytania w obu układach fazowej regulacji częstotliwości zrealizowano za pomocą przełączania filtrów dolnoprzepustowych na szerokie w stanie asynchronizmu i wąskie



Rys. 18. Dekada w syntetyzerze General Radio 1164A

po chwyceniu synchronizacji. Stan synchronizmu obu pętli sygnalizuje żarówka kontrolna [9].

Sposób połączenia dekad w syntetyzerze iteracyjnym General Radio przedstawiono na rys. 19. Uwzględniono także możliwość załączania generatora interpolacyjnego, który pozwala na płynną zmianę częstotliwości wyjściowej oraz umożliwia zewnętrzną synchronizację syntetyzera dla dowolnej częstotliwości pracy. Generator interpolacyjny może być załączony na wejście dowolnej dekady, wszystkie poprzednie dekady zostają wówczas

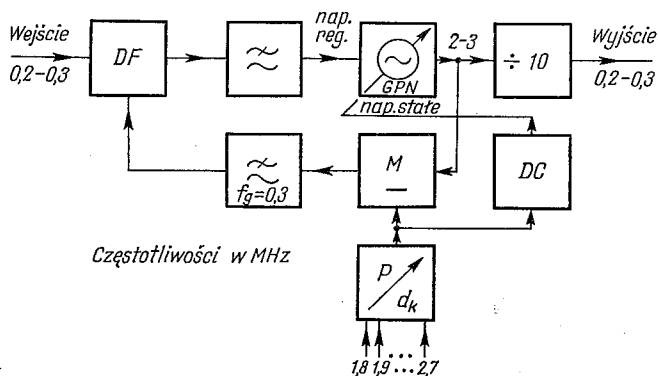


Rys. 19. Syntetyzer iteracyjny General Radio 1164A

odłączone, a częstotliwość można zmieniać w sposób ciągły wykorzystując generator i dalsze dekady. W zależności od tego, do której dekady dołączy się generator interpolacyjny, można przestrajać płynnie częstotliwość wyjściową syntetyzera w zakresie najmniejszego skoku częstotliwości wytwarzanego w tej dekadzie. Aby pokryć cały zakres za pomocą czynnych dekad syntezy i generatora interpolacyjnego, generator ten powinien mieć ciągły zakres przestrajanie nie mniejszy niż zakres zmian dyskretnych częstotliwości na wyjściu każdej dekady syntezy. Generator musi więc umożliwiać przestrajanie co najmniej o częstotliwość f_w na częstotliwości nośnej f_n , czyli jego względny zakres przestrajanie wynosi f_w/f_n ; im zakres ten jest mniejszy tym stabilniejszy generator można zbudować. Aby nie popsuć walorów syntetyzera, generator interpolacyjny powinien cechować się dużą dokładnością i stabilnością częstotliwości, dlatego jest to na ogół dość rozbudowany układ, w którym do częstotliwości precyzyjnego generatora przestrajanego

dodaje się wysoką pomocniczą częstotliwość wzorcową, dzięki temu zmniejsza się znacznie względną niestabilność częstotliwości. W opisywanym przypadku generator interpolacyjny przestrajany jest w zakresie zwiększonym o 10% z każdej strony w porównaniu z wymaganym minimalnym zakresem częstotliwości. Ułatwia to posługiwanie się syntetyzerem, gdyż nie wymaga przełączania dekad przy pracy w pobliżu krańców podzakresów.

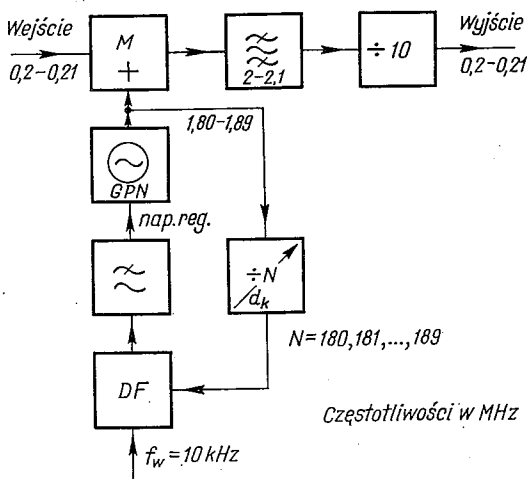
Najprostszy schemat dekady z syntezą pośrednią przedstawiono na rys. 20; układ taki stosowany był przez wiele firm (tablica 1), szczególnie w syntetyzerach częstotliwości



Rys. 20. Dekada w syntetyzerze Plessey PG 331

dla urządzeń radiokomunikacyjnych. Częstotliwość nośna jest tu niską wielokrotnością częstotliwości wzorcowej ($f_n = 2f_w$) i dzięki temu dekada zawiera tylko jeden układ sumowania częstotliwości, który jest zrealizowany jako mieszacz z fazową regulacją częstotliwości (porównaj rys. 5 i rys. 15). Częstotliwości dobrano w ten sposób, że po mieszaczu wystarcza filtr dolnoprzepustowy, nie ma więc w dekadzie żadnego filtra pasmowego. Ze względu na duży względny zakres zmian częstotliwości generatora przestrajanego napięciem GPN zastosowano wstępne przestrajanie generatora co 100 kHz za pomocą napięcia z detektora częstotliwości DC, który jest sterowany sygnałem pochodzącym z przełącznika dekady [19].

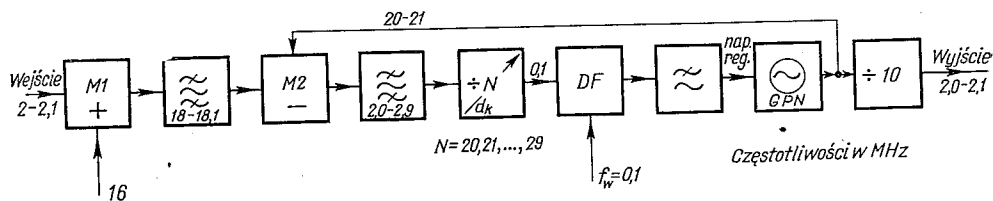
Odmienne rozwiązanie dekady syntezy, wykorzystujące również zasadę działania przedstawioną na rys. 5, zastosowała firma Adret Electronique w syntetyzerze 301 (rys. 21). Wybieranie harmoniczných dokonywane jest w dekadzie syntezy za pomocą zliczającego syntetyzera częstotliwości (rys. 1), dzięki czemu otrzymuje się bardzo wysokie rzędy harmoniczných częstotliwości wzorcowej. Umożliwia to zastosowanie tylko jednego mieszacza z filtrem pasmowoprzepustowym. Pożądaną harmoniczną wybiera się przez zmianę stosunku podziału nastawnego dzielnika częstotliwości, który zbudowany jest z cyfrowych układów scalonych i można go łatwo programować za pomocą napięć stałych w kodzie BCD. Do dekady doprowadza się tylko jedną częstotliwość wzorcową f_w . Na wyjściu zastosowano cyfrowy układ scalony dzielący przez 10. Jednak zastosowane tu niskie częstotliwości pracy nie pozwalają uzyskać wysokich częstotliwości wyjściowych z syntetyzera, wymaga to bowiem zbyt dużego stopnia powielenia częstotliwości, co powoduje także proporcjonalny wzrost szumów i zakłóceń. Dlatego do syntetyzerów na wyższe



Rys. 21. Dekada w syntetyzerze Adret Electronique 301

częstotliwości (model 6000) firma stosuje inne dekady o dziesięciokrotnie wyższych częstotliwościach wejściowych i wyjściowych [18].

Inny przykład zastosowania zliczającego syntetyzera częstotliwości w dekadzie syntezy stosowany przez firmę Schlumberger w syntetyzerze 4000 jest przedstawiony na rys. 22. W dekadzie tej do pętli fazowej regulacji oprócz nastawnego dzielnika częstotliwości włączony jest jeszcze mieszacz M2 z filtrem pasmowoprzepustowym, dzięki temu realizuje się



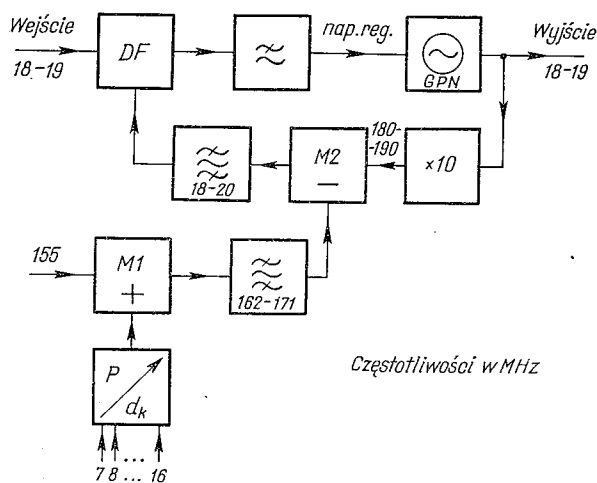
Rys. 22. Dekada w syntetyzerze Schlumberger 4000

sumowanie częstotliwości doprowadzonej z zewnątrz do tego mieszacza z częstotliwością Nf_w , która zależy od nastawianego stosunku podziału N . Dodatkową zaletą takiego układu jest niska częstotliwość wejściowa doprowadzana do nastawnego dzielnika częstotliwości mimo wysokiej częstotliwości pracy generatora przestrajanego napięciem GPN, ułatwia to znacznie praktyczną realizację układu [11].

Na szczególną uwagę zasługuje dekada syntezy (rys. 23) stosowana przez firmę Scho-mandl w syntetyzerze częstotliwości MS100M. Przyjęto tu bardzo wysokie częstotliwości pracy około dziesięciokrotnie większe od używanych w innych dekadach. Zmniejsza to radykalnie wpływ szumów syntetyzera iteracyjnego oraz bardzo ułatwia rozszerzanie zakresu częstotliwości. W dekadzie tej wykorzystano zasadę działania przedstawioną na rys. 6, przy czym drugi układ sumowania częstotliwości połączono w jednej pętli fazowej

regulacji z dzieleniem przez dziesięć. Jest to skojarzenie układu z rys. 15 z dzielnikiem częstotliwości opisanym przy wyjaśnianiu rys. 18.

Przedstawione warianty dekad syntezy nie wyczerpują oczywiście wszystkich możliwości, pozwalają jednak zorientować się w najbardziej typowych rozwiązaniach układów. Obecnie ogólną tendencją jest dążenie do zmniejszania szumów i składowych niepożądanych, co dotyczy szczególnie ostatnich dekad syntetyzera iteracyjnego, gdyż otrzymywana



Rys. 23. Dekada w syntetyzerze Schomandl MS 100M

z nich częstotliwość wyjściowa nie jest już dzielona i powstałe zakłócenia nie ulegają zmniejszeniu. Oprócz tego dąży się do upraszczania i podnoszenia niezawodności elementarnych układów, co skłania do szerszego stosowania układów scalonych zarówno liniowych jak i cyfrowych, preferuje to stosowanie przy syntezie pośredniej zliczających syntetyzerów częstotliwości. Szereg firm już obecnie stosuje zamiast trzech pierwszych dekad w syntetyzerze iteracyjnym, jeden prosty syntetyzer zliczający, który dzięki wielokrotnemu podzieleniu częstotliwości pozwala na uzyskanie najmniejszych skoków częstotliwości i równocześnie nie ma wpływu na zakłócenia napięcia wyjściowego.

Syntetyzer iteracyjny dostarcza częstotliwości, które można zmieniać na ogół w zakresie 100 kHz lub 1 MHz z dowolnie małym skokiem częstotliwości, zależnym od liczby dekad syntezy. Tak mały zakres zmian częstotliwości zadawała niewielu użytkowników i dlatego syntetizery częstotliwości są rozbudowywane przez dodatkowe układy syntezy służące do rozszerzania zakresu częstotliwości wyjściowych.

6. SZUMY W SYNTETYZERACH CZĘSTOTLIWOŚCI

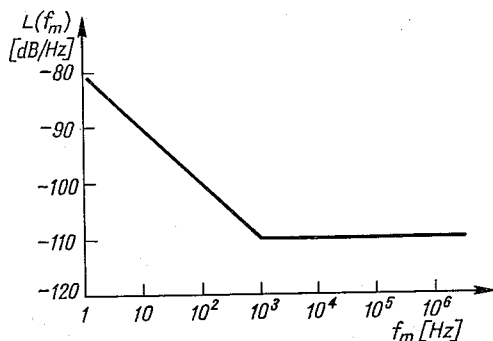
Najważniejszym parametrem charakteryzującym syntetyzer częstotliwości jest czystość spektralna napięcia wyjściowego. Istotnym problemem jest więc poznanie rodzajów zakłóceń oraz źródeł ich powstawania. Zakłócenia napięcia na wyjściu syntetyzera można podzielić na cztery rodzaje:

- harmoniczne częstotliwości wyjściowej,
- modulacja z częstotliwością sieci zasilającej,

- c) inne składowe o widmie prążkowym postające w układach nieliniowych lub na skutek niepożądanych sprzężeń między różnymi układami,
 d) modulacja szumami.

Zakłócenia te nie są oczywiście niezależne od siebie. Na przykład, jeśli do mieszacza doprowadza się duże napięcie sygnału, to zmniejsza się wpływ szumów, ale zwiększają się efekty nieliniowe i wzrastają zakłócenia o widmie prążkowym. Zakłócenia nie dają się więc całkowicie wyeliminować, ale można je znacznie zmniejszyć przez właściwe zaprojektowanie układu. Pierwsze trzy rodzaje zakłóceń są na ogół dobrze znane, a także wiadomo w jaki sposób można je zredukować, dlatego dalsze rozważania będą dotyczyły tylko szumów.

Syntetyzer sterowany jest wzorcem częstotliwości i wytwarza pożądaną częstotliwość, której dokładność i stabilność długookresowa są takie same jak dokładność i stabilność wzorca. Można przyjąć, że częstotliwość wyjściowa jest wynikiem mnożenia częstotliwości wzorca przez liczbę wymierną W , która jest na ogół zapisywana w układzie dziesiętnym.



Rys. 24. Uproszczony wykres $L(f_m)$

Jednak syntetyzer zawiera dużą liczbę elementarnych układów elektronicznych, które wprowadzają szумы powodujące przypadkową modulację amplitudy i fazy. Modulacja amplitudy jest eliminowana w układach nieliniowych, można ją całkowicie usunąć stosując ograniczniki amplitudy, natomiast modulacja fazy nie daje się wyeliminować. Dlatego szумы w syntetyzerze częstotliwości mają charakter przypadkowej modulacji fazy i nazywa się je szumami fazy.

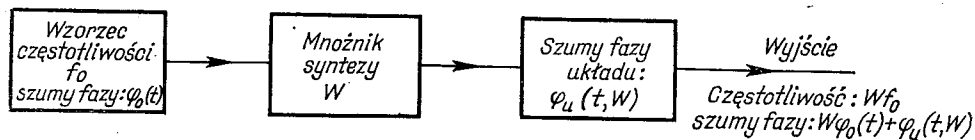
Szумы fazy określa się przez podanie w dB zależności stosunku mocy szumów fazy w pasmie 1 Hz do mocy sygnału w funkcji odstrojenia f_m od częstotliwości sygnału, co oznacza się często symbolem $L(f_m)$. W syntetyzerach częstotliwości widmo sygnału jest symetryczne ze względu na brak modulacji amplitudy i bardzo małe wskaźniki modulacji fazy, dlatego $L(f_m)$ jest określane tylko dla dodatnich f_m i nazywa się często stosunkiem mocy jednowstęgowych szumów fazy w pasmie 1 Hz do mocy fali nośnej. Łatwo zauważyć, że $L(f_m)$ jest związane z jednostronnym widmem gęstości mocy fazy chwilowej sygnału $S_\varphi(f_m)$ następującą zależnością:

$$L(f_m) = 10 \log \frac{S_\varphi(f_m)}{2} \text{ dB/Hz.} \quad (19)$$

Na rys. 24 przedstawiono typowy przebieg $L(f_m)$, który wykreśla się zawsze w skalach logarytmicznych. Często zamiast pełnego wykresu podaje się wartości $L(f_m)$ dla kilku

odstrojeń f_m , a jako charakterystyczną liczbę przyjmuje się niekiedy $L(1 \text{ Hz})$, przy czym praktycznie nie można tej liczby pomierzyć, a otrzymuje się ją na drodze ekstrapolacji przez przedłużenie wykresu [11].

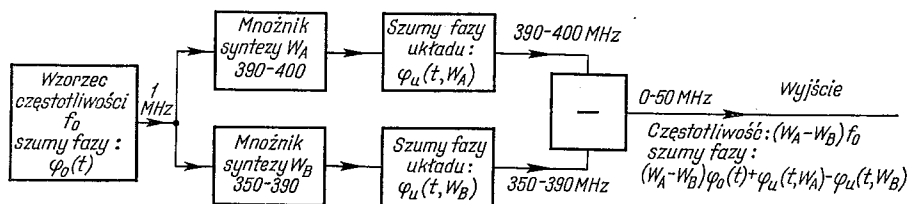
Elementarnymi źródłami szumów fazy są przede wszystkim elementy elektronowe, które wytwarzają szумы migotania i szумы addytywne. Widmo gęstości mocy szumów migotania jest odwrotnie proporcjonalne do częstotliwości f_m , szумы te można w układzie praktycznie zmniejszyć przez stosowanie ujemnego sprzężenia zwrotnego. Badania wyka-



Rys. 25. Wąskopasmowy model syntetyzery częstotliwości

zały, że jednostopniowy wzmacniacz tranzystorowy w układzie wspólnego emitera, pracujący bez ujemnego sprzężenia zwrotnego, wytwarza szумы migotania o wartości $L(1 \text{ Hz}) = -115 \text{ dB/Hz}$. Natomiast na szумы addytywne składają się szумы cieplne i śrutowe, mają one widmo gęstości mocy nie zależne od częstotliwości (szum biały) i ich wpływ uwidacznia się przy większych odstrojeniach f_m . Szумы addytywne tworzą tzw. tło szumów, które dla elementarnego układu elektronicznego (wzmacniacz, mieszacz) zawiera się w granicach od -145 do -170 dB/Hz , w zależności od poziomu sygnału.

Ogólnie biorąc, szумы fazy na wyjściu syntetyzera częstotliwości pochodzą z wzorca częstotliwości i układu syntezy. Należy przy tym pamiętać, że przy powielaniu częstotliwości szумы fazy rosną mnożąc się przez mnożnik syntezy, a przy dzieleniu częstotliwości — maleją dzielone przez stosunek podziału. Z tego względu za szумы na wyjściu syntetyzera odpowiedzialne są wzorzec częstotliwości, układy rozszerzania częstotliwości i ewentualnie ostatnia dekada syntetyzera iteracyjnego; układy te muszą być bardzo starannie projektowane pod kątem minimalizacji szumów.



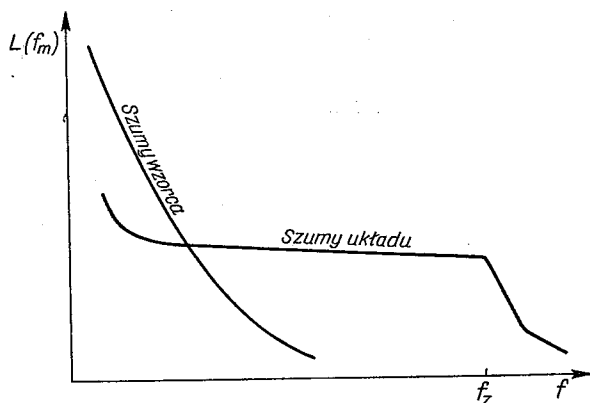
Rys. 26. Szerokopasmowy model syntetyzera częstotliwości

Na rys. 25 przedstawiono uproszczony model syntetyzera częstotliwości, gdzie wyodrębniono idealny blok (bez szumów) mnożący częstotliwość wzorca f_0 z szumami fazy $\varphi_0(t)$ przez mnożnik syntezy W i blok reprezentujący szумы układu $\varphi_u(t, W)$. Taka idealizacja nie zawsze jest zgodna z rzeczywistością, można ją bowiem zrealizować tylko w układach wąskopasmowych. Natomiast syntetery częstotliwości mają wyjście szerokopasmowe, tzn. dostarczają dowolnej częstotliwości od najniższej (bliskiej zera) aż do częstotliwości maksymalnej f_{max} . Wymaga to zastosowania dwóch torów wąskopasmowych (rys. 26) o mnożnikach syntezy W_A i W_B oraz układu odejmowania częstotliwości, czyli z punktu

widzenia częstotliwości wyjściowej mnożnik syntezy $W = W_A - W_B$. Natomiast wypadkowe szumy fazy, we właściwie zaprojektowanym układzie, wyrażają się w tym przypadku wzorem [13]:

$$\varphi_w(t) = W_A \varphi_0(t) - W_B \varphi_0(t) + \varphi_u(t, W_A) - \varphi_u(t, W_B) = W \varphi_0(t) + \varphi_u(t). \quad (20)$$

Jeżeli zapewni się jednakowe czasy przejścia sygnału w obu gałęziach wąskopasmowych, to szumy pochodzące od wzorca jako skorelowane odejmą się i ich różnica pozostanie taka sama jak w układzie wąskopasmowym. Szumy układu są jednak znacznie większe i nie zależą od mnożnika syntezy W . Wynika to z faktu, iż szumy układu w poszczególnych



Rys. 27. Szumy fazy w syntetyzerze częstotliwości

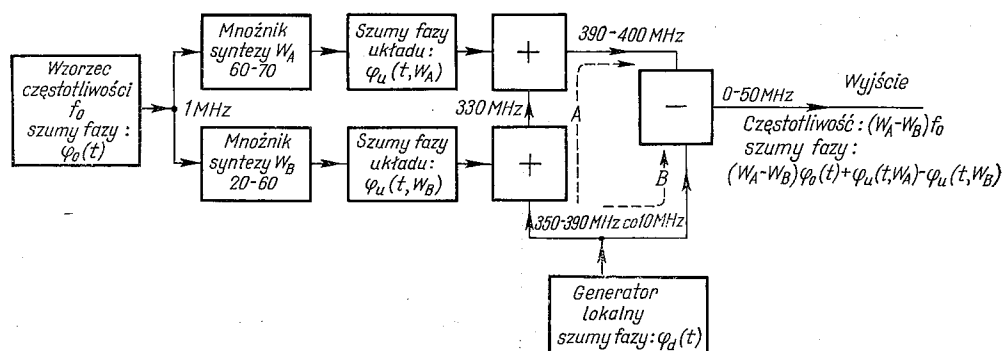
gałęziach wąskopasmowych są nieskorelowane i nie odejmują się na wyjściu. Szumy te zależą od mnożników W_A i W_B , które są uwarunkowane maksymalną częstotliwością syntetyzera f_{max} . Przy konkretnym rozwiązaniu układu można powiedzieć, że szumy syntetyzera nie zależą od aktualnej częstotliwości wyjściowej lecz są w przybliżeniu proporcjonalne do maksymalnej częstotliwości f_{max} .

Typowe przebiegi $L(f_m)$ dla szumów fazy z rys. 26 są przedstawione na rys. 27. Szumy fazy pochodzące od wzorca częstotliwości są proporcjonalne do mnożnika syntezy W i dominują przede wszystkim przy małych odstrojeniach. Szumy fazy układu są stałe w dużych granicach odstrojeń, a ich górna częstotliwość graniczna f_z jest określona przez szerokość pasma najwęższego filtra w układzie rozszerzającym zakres częstotliwości.

Kwarcowe generatory wzorcowe, stosowane w syntetyzerach częstotliwości, powinny cechować się bardzo małymi szumami (tło szumów rzędu -170 dB/Hz). Jednak generatory te pracują na ogół przy bardzo małych napięciach sygnału w celu osiągnięcia jak najlepszej długookresowej stałości częstotliwości, co powoduje niekorzystny stosunek sygnału do szumu. Dlatego wzorce do syntetyzerów częstotliwości powinny być specjalnie projektowane, często stosuje się dodatkowo na wyjściu bardzo wąski filtr kwarcowy lub układ fazowej regulacji częstotliwości w celu zmniejszenia szumów fazy. Korzystne jest stosowanie wzorców o możliwie wysokiej częstotliwości.

Zmniejszenie szumów fazy układu przy danym f_{max} można osiągnąć tylko przez wybór mniejszych mnożników W_A i W_B , przy zachowaniu bez zmiany ich różnicy. Jeżeli układ odejmowania częstotliwości ma postać mieszacza z filtrem dolnoprzepustowym, to jak wynika z zależności (17), częstotliwości odejmowane powinny być co najmniej cztery

razy większe od częstotliwości granicznej filtru, która jest równa maksymalnej częstotliwości wyjściowej f_{max} . Zmniejszenie mnożników syntezy jest możliwe przy zastosowaniu mieszacza z filtrem heterodynowym (rys. 28), w którym zwiększenie częstotliwości odejmowanych na wyjściu odbywa się przez dodanie częstotliwości generatora lokalnego. Aby wyeliminować wpływ szumów tego generatora konieczne jest zapewnienie idealnie jednakowych czasów propagacji sygnału na obu drogach A i B od generatora do wyj-



Rys. 28. Szerokopasmowy model syntetyzera z filtrem heterodynowym

ściowego układu odejmowania częstotliwości, tylko wtedy można uzyskać odjęcie szumów skorelowanych. Na rys. 28 podano orientacyjne liczby dla syntetyzera o maksymalnej częstotliwości wyjściowej $f_{max} = 50$ MHz; porównując te liczby z odpowiednimi danymi z rys. 26, można zauważyć, że mnożniki syntezy są około sześciokrotnie mniejsze i w konsekwencji odpowiednio mniejsze są szумы układu.

W gałęzi A na rys. 28 znajduje się filtr pośredniej częstotliwości 330 MHz, jest to gałąź o małej szerokości pasma, natomiast gałąź B ma dużą szerokość pasma, powoduje to pogorszenie kompensacji szumów dla dużych f_m . Przy syntezie pośredniej można znacznie zmniejszyć szerokość pasma dla szumów w gałęzi B przez zastosowanie mieszacza z fazową regulacją częstotliwości; szerokość pasma filtru dolnoprzepustowego w pętli regulacji powinna być w tym przypadku możliwie jak największa, aby nie zniekształcać szumów skorelowanych, co uniemożliwiłoby ich odjęcie się na wyjściu.

Generator lokalny w opisywanym układzie jest samodzielnym generatorem nie zależnym od częstotliwości wzorcowych; generator ten wytwarza bezpośrednio bardzo wysoką częstotliwość i jego szумы własne są bardzo małe. Gdyby tę samą częstotliwość otrzymywać przez powielenie częstotliwości generatora wzorcowego, to wskutek powielenia szumów fazy tego generatora oraz szumów powielaczy częstotliwości, otrzymywane napięcie miałyby bardzo duży poziom szumów, co znacznie pogorszyłoby właściwości układu. Ze względu na małe szумы układ przedstawiony na rys. 28 jest obecnie stosowany w większości syntetyzerów przy rozszerzaniu zakresu częstotliwości.

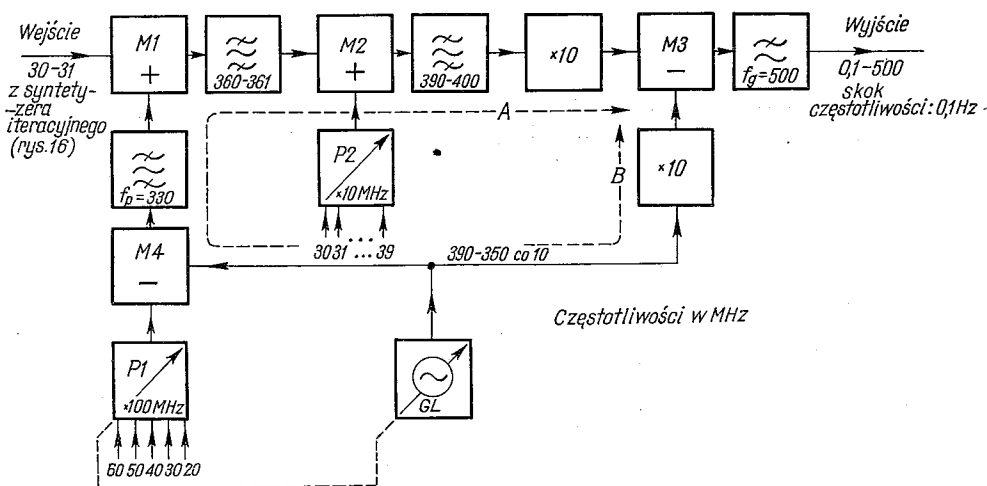
7. UKŁADY ROZSZERZAJĄCE ZAKRESY CZĘSTOTLIWOŚCI SYNTETYZERÓW

Najprostszą metodą zwiększenia zakresu częstotliwości syntetyzera jest powielenie częstotliwości otrzymywanych z subsyntetyzera. Jednak powielacze częstotliwości są na ogół układami wąskopasmowymi i największe względne szerokości pasm nie przekraczają

10%, nie można więc zmieniać w dużych granicach częstotliwości wyjściowej. Dalszą wadą tej metody jest wzrost szumów fazy, powodowany powieleniem szumów subsyntetyzera oraz szumami powielaczy częstotliwości.

Znacznie lepszą metodą jest rozszerzanie zakresu za pomocą przemiany częstotliwości. Jako pierwszy stopień układu rozszerzania częstotliwości stosuje się wówczas dekadę, podobną do dekady syntezy w syntetyzerze iteracyjnym, ale pracującą na dziesięciokrotnie większych częstotliwościach. Na wyjściu takiej dekady otrzymuje się najczęściej zakres zmian częstotliwości 10 MHz na częstotliwości nośnej $10f_n$. Zakres ten można dalej zwiększać tą samą metodą, wykorzystując dekadę o częstotliwościach sto razy większych. Takie rozwiązania stosowane były w starszych modelach syntetyzerów częstotliwości, cechowały się one dość dużymi szumami układu.

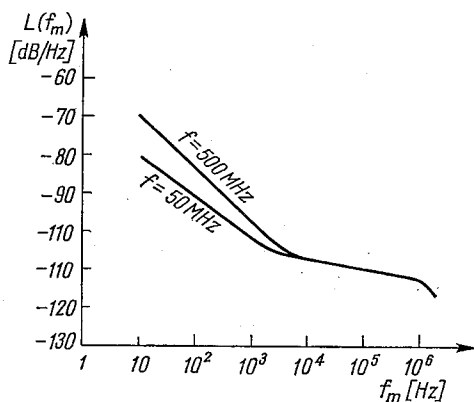
Najczęściej do rozszerzania zakresu częstotliwości syntetyzerów używa się układu wykorzystującego mieszacz z filtrem heterodynowym, którego zalety opisano w p. 6. Pełny schemat blokowy takiego układu, stosowanego przez firmę Hewlett-Packard w syntetyzerze z syntezą bezpośrednią model 5105A przedstawiono na rys. 29. W porównaniu z rys. 28, istotną różnicą jest umieszczenie w obu gałęziach *A* i *B* powielaczy mnożących



Rys. 29. Układ rozszerzania zakresu częstotliwości w syntetyzerze Hewlett-Packard 5105A

częstotliwości przez dziesięć; odpowiada to dziesięciokrotnemu zwiększeniu wszystkich częstotliwości wejściowych i ich zmian. Wobec tego z punktu widzenia wyjścia układu, dekady syntetyzera iteracyjnego wytwarzają 10-krotnie większe skoki częstotliwości, przełącznik P2 wybierający częstotliwości od 30 do 39 MHz co 1 MHz zapewnia skoki $\times 10$ MHz, a przełącznik P1 wybierający częstotliwości od 20 do 60 MHz co 10 MHz i zmieniający częstotliwość generatora lokalnego w zakresie 350 do 390 MHz co 10 MHz, wytwarza skoki częstotliwości $\times 100$ MHz. Uzyskano w ten sposób maksymalną częstotliwość wyjściową $f_{max} = 500$ MHz. Układ można też bez większych zmian wykorzystać do syntetyzera o częstotliwości $f_{max} = 50$ MHz, wystarczy tylko usunąć powielacze częstotliwości i zmniejszyć częstotliwość graniczną filtra dolnoprzepustowego na wyjściu [12].

Jak wiadomo, w układzie rozszerzania zakresu powinny odjąć się szумы skorelowane pochodzące z wzorca częstotliwości i niezależnie szумы skorelowane z generatora lokalnego. Szумы te można tym łatwiej skompensować im mniejsza jest ich szerokość pasma, dlatego w syntetyzerze mimo bardzo dobrego wzorca częstotliwości zastosowano jeszcze wąski filtr kwarcowy dla częstotliwości wzorcowej. Natomiast generator lokalny ma obwód rezonansowy w postaci linii paskowej, dzięki czemu uzyskano dużą dobroć, która nie ulega zmianie przy przełączaniu częstotliwości. W celu zmniejszenia szumów, zarówno element aktywny (tranzystor) jak i wyjście dołączono do punktów obwodu o bardzo małej impedancji. Szумы fazy opisywanego syntetyzera przedstawiono na rys. 30 [12], szумы układu nie zależą od aktualnej częstotliwości wyjściowej, natomiast częstotliwość ta ma

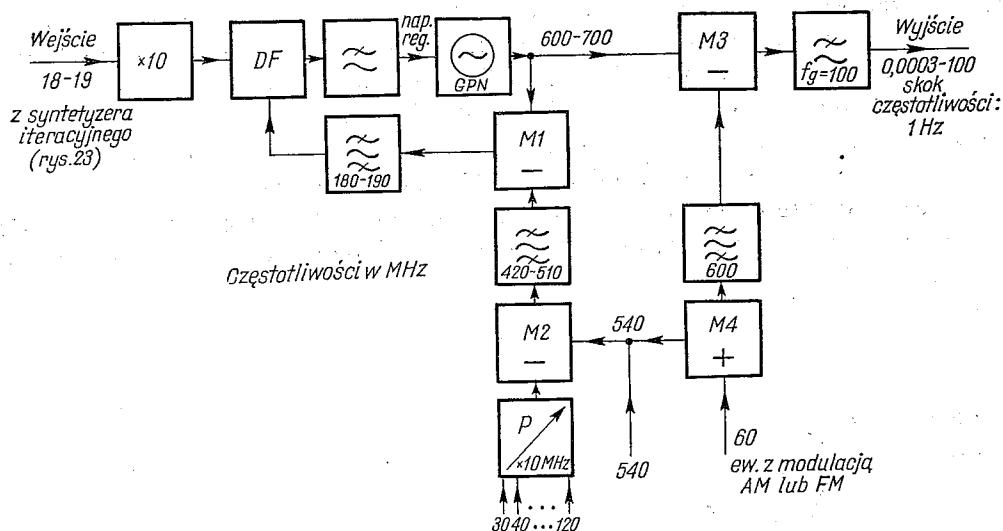


Rys. 30. Szумы fazy syntetyzera Hewlett-Packard 5105A

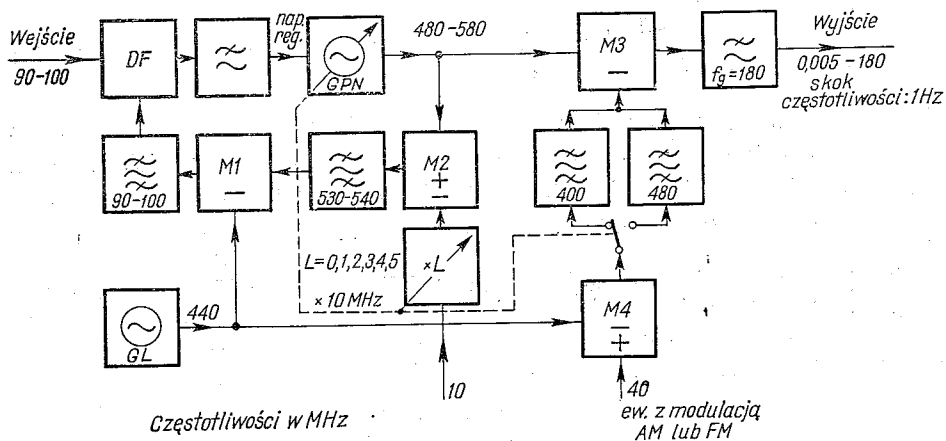
wpływ na szумы pochodzące z wzorca, które dominują przy małych f_m . Gdyby ten sam układ bez powielaczy zastosować do syntetyzera o częstotliwości $f_{max} = 50$ MHz, to w tym przypadku wykres $L(f_m)$ przebiegałby o 20 dB niżej, przy założeniu, że powielacze były bezzsumne.

W syntetyzerach z syntezą pośrednią realizuje się także rozszerzanie zakresu częstotliwości za pomocą mieszacza z filtrem heterodynowym, jednak w gałęzi o dużej szerokości pasma umieszcza się mieszacz z fazową regulacją częstotliwości i dzięki temu zmniejsza się szerokość pasma dla szumów. W tej też gałęzi dokonuje się sumowania częstotliwości generatora lokalnego, subsyntetyzera i wybieranych przełącznikiem pomocniczych częstotliwości wzorcowych. Układ taki, zastosowany przez firmę Schomandl w syntetyzerze MS 100M, przedstawiono na rys. 31. Zamiast generatora lokalnego, dostarczana jest do układu częstotliwość 540 MHz, otrzymywana przez powielenie częstotliwości generatora wzorcowego. Od częstotliwości 540 MHz odejmuje się częstotliwość wybraną przełącznikiem P, a rezultat sumuje się, za pomocą mieszacza z fazową regulacją, z powieloną 10-krotnie częstotliwością syntetyzera iteracyjnego. W drugiej gałęzi znajduje się filtr pośredniej częstotliwości 600 MHz, który przenosi sumę częstotliwości 540 MHz i 60 MHz, przy czym napięcie o częstotliwości 60 MHz może mieć modulowaną amplitudę i częstotliwość. Maksymalna częstotliwość wyjściowa syntetyzera wynosi 100 MHz.

Podobne rozwiązanie, zastosowane przez firmę Solartron w syntetyzerze 4601, przedstawiono na rys. 32. W tym przypadku generator lokalny składa się z niezależnego genera-



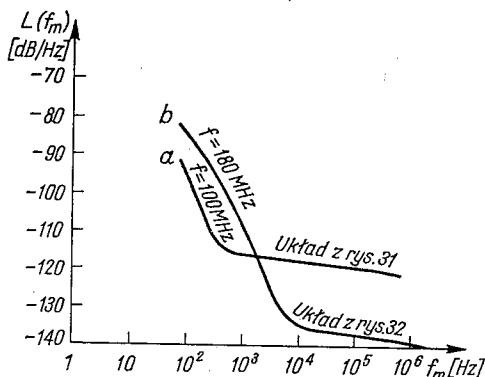
Rys. 31. Układ rozszerzania zakresu częstotliwości w syntetyzerze Schomandl MS 100M



Rys. 32. Układ rozszerzania zakresu częstotliwości w syntetyzerze Solartron 4601

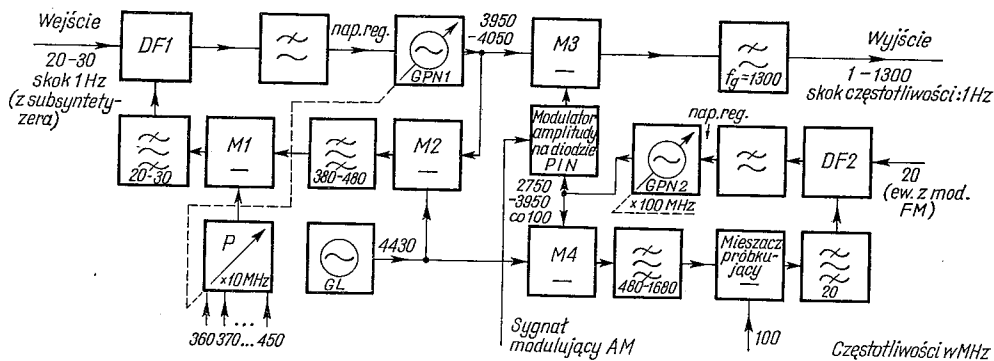
tora kwarcowego o małych szumach, pracującego na częstotliwości 110 MHz i 4-krotnego powielacza częstotliwości. W pętli fazowej regulacji sumują się trzy częstotliwości pochodzące z generatora lokalnego, subsyntetyzera i przełączanego powielacza częstotliwości $\times L$, przy czym ta ostatnia częstotliwość przy niektórych położeniach przełącznika $\times 10$ MHz, może być odejmowana od sumy poprzednich [15]. Dzięki małym krotnościom powielenia $\times L$ i wysokiej częstotliwości generatora wzorcowego wynoszącej 10 MHz, uzyskano bardzo małe mnożniki syntezy, co przyczyniło się do znacznego zmniejszenia szumów. Szerokość pasma pętli fazowej regulacji częstotliwości jest bardzo duża (około 0,5 MHz); pozwala to na całkowite stłumienie szumów generatora przestrajanego napięciem GPN i oprócz tego nie zniekształca się szumów pochodzących z generatora lokalnego, co umożliwia bardzo dokładną ich eliminację w mieszaczu wyjściowym. Duża szerokość filtra w pętli

regulacji zapewnia też krótki czas przełączania częstotliwości, który w tym przypadku jest mniejszy od 1 ms. W drugiej gałęzi znajdują się dwa filtry pośredniej częstotliwości, które przełączane są w zależności od pozycji przełącznika $\times 10$ MHz; dzięki temu dodając do częstotliwości generatora lokalnego lub odejmując częstotliwość 40 MHz (może być zmodulowana) otrzymuje się pokrycie pełnego zakresu częstotliwości aż do $f_{max} = 180$ MHz, chociaż na wejściu mieszacza M3 częstotliwość może być zmieniana tylko w granicach 100 MHz. Opisanie wyżej zabiegi, mające na celu zmniejszenie szumów fazy, dały bardzo dobre rezultaty szczególnie przy większych odstrojeniach f_m , co można zauważyć na rys. 33.



Rys. 33. Szumy fazy syntetyzerów: a) Schomandi MS 100M, b) Solartron 4601

W układzie przedstawionym na rys. 32, częstotliwości odejmowane w mieszaczu wyjściowym są małe w porównaniu z maksymalną częstotliwością wyjściową, występuje to szczególnie dla częstotliwości wyjściowych większych od 100 MHz, gdy włączony jest filtr o częstotliwości pośredniej 400 MHz. Posługując się zależnością (17) można stwierdzić,

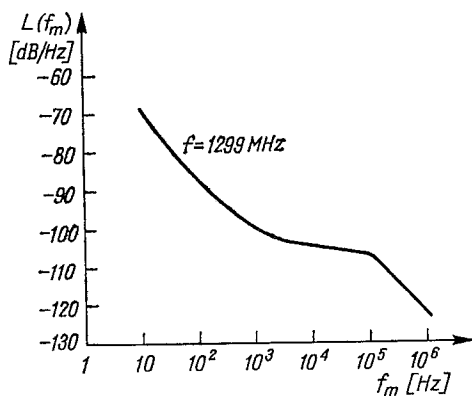


Rys. 34. Układ rozszerzania zakresu częstotliwości w syntetyzerze Hewlett-Packard 86602A

że przez filtr dolnoprzepustowy na wyjściu tłumione są tylko składowe niepożądane trzeciego rzędu. Dlatego mieszacz M3 jest tutaj specjalnie precyzyjnie wykonany i poziom składowych wyższych rzędów nie przekracza -80 dB.

Na szczególną uwagę zasługuje układ rozszerzania zakresu częstotliwości w syntetyzerze firmy Hewlett-Packard model 86602A (rys. 34). Maksymalna częstotliwość wyjściowa tego syntetyzera (z syntezą pośrednią) wynosi 1300 MHz. Idea budowy układu jest

taka sama jak poprzednio, jednak w obu gałęziach od generatora lokalnego do wyjściowego mieszacza umieszczono mieszacze z fazową regulacją częstotliwości. W pierwszej gałęzi, od częstotliwości generatora lokalnego odejmuje się częstotliwość subsyntetyzera i częstotliwość wybieraną przełącznikiem P, który realizuje skoki częstotliwości co 10 MHz. Natomiast w drugiej gałęzi wytwarzane są skoki częstotliwości co 100 MHz, zrezygnowano tu jednak z wytwarzania 10-ciu częstotliwości pomocniczych wybieranych przełącznikiem, zamiast tego zastosowano mieszacz z próbkowaniem, w którym od częstotliwości wejściowej odejmuje się odpowiednią harmoniczną 100 MHz, która jest częstotliwością próbkującą. Rząd wybieranej harmonicznej zależy od wstępnego ustawienia, za pomocą prze-



Rys. 35. Szumy fazy syntetyzera Hewlett-Packard 86602A

łącznika $\times 100$ MHz, częstotliwości generatora przestrajanego napięciem GPN2. W pętli fazowej regulacji odejmuje się od częstotliwości generatora lokalnego częstotliwość n -tej harmonicznej 100 MHz, gdzie $n = 5, 6, \dots, 17$ i dodaje się częstotliwość 20 MHz, która ewentualnie może być zmodulowana częstotliwościowo. Sygnał można także zmodulować amplitudowo za pomocą modulatora amplitudy z diodą PIN, który umieszczony jest przed mieszaczem wyjściowym. Aby uzyskać dobrą kompensację szumów fazy pochodzących z generatora lokalnego, zapewniono idealnie jednakowe charakterystyki przenoszenia obu gałęzi. Zastosowany generator lokalny o częstotliwości 4430 MHz jest wykonany technologią cienkowarstwową, jego stabilność temperaturowa jest rzędu $4 \cdot 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$, a szumy fazy przy odstrojeniu 100 kHz: $L(100 \text{ kHz}) = -110 \text{ dB/Hz}$. Charakterystyka ilustrująca szumy fazy całego układu przedstawiona jest na rys. 35 [17].

Podobnie jak w poprzednim układzie, częstotliwości odejmowane w mieszaczu wyjściowym są relatywnie małe i filtr dolnoprzepustowy na wyjściu tłumi tylko składowe niepożądane trzeciego rzędu. Produkty piątego rzędu pojawiają się w pasmie przenoszenia filtru przy częstotliwościach wyjściowych większych od 899 MHz, a siódmego rzędu przy częstotliwościach większych od 680 MHz, jednak ich odległość od pożądanego częstotliwości jest zawsze większa od 50 MHz. Poziomy tych produktów są mniejsze od -70 dB dzięki bardzo precyzyjnemu zrównoważeniu mieszacza wyjściowego. Realizacja opisanego układu możliwa była tylko dzięki zastosowaniu technologii cienkowarstwowej, za pomocą której wykonano paskowe linie transmisyjne wykorzystywane jako obwody i transformatory w generatorach, mieszaczach i filtrach.

8. ZAKOŃCZENIE

Najlepszymi źródłami częstotliwości są syntetyzery częstotliwości sterowane jednym wysokostabilnym generatorem kwarcowym. Dokładność i stabilność długookresowa częstotliwości wyjściowej jest taka sama jak dokładność i stabilność generatora wzorcowego.

Syntetyzer częstotliwości zbudowany jest z dużej liczby układów elektronicznych, które są źródłami szumów i składowych niepożądanych. Najważniejszym problemem jest więc wybór najlepszych układów i odpowiednie ich opracowanie, a także właściwa technologia oraz konstrukcja w celu minimalizacji zakłóceń. Każdy elementarny układ elektroniczny, przed umieszczeniem w syntetyzerze częstotliwości, powinien być dokładnie przebadany indywidualnie, a następnie w całym bloku funkcjonalnym, pod względem wytwarzanych szumów i innych zakłóceń. Praktycznie wymaga to rozbudowanego zestawu aparatury pomiarowej, o bardzo dużej czułości, do pomiarów widma i szumów.

Oddzielnym zagadnieniem jest właściwa technologia wykonania układów, sposób upakowania, ekranowanie oraz filtracja napięć zasilających. Obecnie, dla układów analogowych, najlepsza jest technologia cienkowarstwowa, która zapewnia wysoką precyzję wykonania, możliwość realizacji linii transmisyjnych, a także dużą niezawodność. Układy mają małe rozmiary fizyczne, co znacznie zmniejsza szkodliwe sprzężenia i ułatwia ekranowanie. Sposób ekranowania, który decyduje o tłumieniu napięć zakłócających, wymaga szczególnych badań, gdyż przy niewłaściwym zaprojektowaniu przestrzeń zaekranowana może stać się rezonatorem, który zamiast tłumić, wzmocni niektóre częstotliwości niepożądane.

Wydaje się, że syntetyzery częstotliwości o dużych maksymalnych częstotliwościach wyjściowych są obecnie najtrudniejszymi do realizacji urządzeniami elektronicznymi. Spowodowane jest to bardzo dużymi szerokościami pasm filtrów i trudno osiągalnymi wymaganiami na poziom szumów i tłumienia składowych niepożądanych.

LITERATURA

1. R. Nowak, *Układy syntezy częstotliwości*, Rozprawy Elektrotechniczne, t. V, zeszyt 3, 1959.
2. H. J. Finden, *The Problem of Frequency Synthesis*, Journal Brit. I.R.E., January 1961.
3. K. Gilabert, J. Larcher, *Standards de fréquences modernes*, L'onde Électrique, vol. 48, Avril 1968.
4. J. Noordanus, *Frequency Synthesizers — A Survey of Techniques*. IEEE Trans. on Communication Technology, vol. COM-17, April 1969.
5. W. A. Lewin, *Stabilizacja dyskretnego mnożestwa czastot*, Energja, Moskwa 1970.
6. V. F. Kroupa, *Frequency Synthesis*, Griffin, London 1973.
7. W. W. Szachgildjan, A. A. Lachowkin, *Fazowaja awtopodstrojka czastoty*, Swjaż, Moskwa 1966.
8. V. E. Van Duzer, *A 0—50 MHz Frequency Synthesizer*, Hewlett-Packard Journal, vol. 15, May 1964.
9. A. Noyes, *Coherent Decade Frequency Synthesizers*, General Radio Experimenter, vol. 38, September 1964.
10. J. Gerhold, *Dekadischer HF-Messenger SMDH*, Neues von Rohde & Schwarz, Januar 1968.
11. *Schlumberger Instruments and Systems*, Catalogue 1973—1974.

12. A. Tykulsky, *Digital Frequency Synthesizer Covering 0,1 MHz to 500 MHz in 1,0 Hz Steps*, Hewlett-Packard Journal, October 1967.
13. A. Tykulsky, B. Maldewin, *Phase Noise in Frequency Synthesizers*, Hewlett-Packard Journal, vol. 19, October 1967.
14. D. G. Meyer, *An Ultra Low Noise Direct Frequency Synthesizer*, Proc. of the 24-th Annual Symposium on Frequency Control, Fort Monmouth, N. J., 1970.
15. P. Sample, *Radio Frequency Instrumentation for Automatic Testing*, Communication 74 Conference, Brighton, June 1974.
16. V. O. Stokes, *Techniques of Frequency Synthesis*, Proc. IEE, vol. 120, October 1973, IEE Reviews.
17. R. Hassun, M. Humpherys, D. Scherer, Y. D. Kim, B. Stribling, C. Cook, *Synthesized Signal Generation to 1,3 GHz*, Hewlett-Packard Journal, vol. 24, March 1973.
18. *Adret Electronique Condensed Catalog*, April 1973.
19. K. G. Perkins, *An Integral Synthesiser Used in a High Grade H. F. Receiver*, Conference on frequency generation and control for radio systems, London 1967.

K. PIWNICKI

ANALOG FREQUENCY SYNTHESIZERS

Summary

A frequency synthesizer derived from a single, highly stable frequency standard is capable of providing a large number of frequencies, which reflect the accuracy and stability of the standard. The output frequency of the synthesizer is the result of multiplying the frequency of the standard by a rational number. It is obtained by means of simple arithmetical operations (addition, subtraction, multiplication and division).

This paper presents the design philosophy of frequency synthesizers employing analog electronic circuits. Such a synthesizer consists of identical decimal insertion units or „decades”, whose number determines the smallest frequency step. The output frequency may be chosen by switches usually based on the decimal system. The various solutions of the decades manufactured by several firms are described.

The second part of the paper is concerned with the methods of minimizing the output noise of the synthesizer. The newest solutions of circuits extending the frequency range of synthesizers are presented. These circuits are capable of providing a very high output frequency with relatively low noise.

K. PIWNICKI

SYNTHÉTISEURS ANALOGUES DE FRÉQUENCE

Résumé

Le synthétiseur de fréquence commandé par un générateur d'étalon peut fournir une très large gamme de fréquences dont l'exactitude et la stabilité sont les mêmes que celles du générateur étalon. La fréquence de sortie n'est que le résultat de multiplication de la fréquence d'étalon par un nombre rationnel. On l'obtient par quelques simples opérations de multiplication et de division des fréquences par nombres naturels ainsi que par l'addition et soustraction des fréquences.

Dans la première partie de cet article on a présenté les principes de fonctionnement des synthétiseurs de fréquence basés sur les circuits électroniques analogues. Les synthétiseurs de ce type sont composés de décades de synthèse identiques dont la quantité détermine la chute minimale de fréquence. Le choix de fréquence de sortie s'effectue à l'aide des commutateurs mettant le chiffre d'ordre en décimal. On a présenté une brève description des décades de synthèse produites par les différentes entreprises.

La deuxième partie de cet article est consacrée à la méthode de minimalisation de bruit à la sortie du synthétiseur. On a présenté la construction la plus récente des circuits élargissant la gamme de fréquence de sortie des synthétiseurs. Le circuit de ce type permet d'obtenir la fréquence de sortie maximale à valeur très élevée et les bruits relativement très réduits.

K. PIWNICKI

ANALOGFREQUENZSYNTHESIZER

Zusammenfassung

Der von einem hochstabilen Quarzgenerator gesteuerte Synthesizer kann eine sehr hohe Frequenzzahl liefern. Die Genauigkeit und Stabilität der Frequenz gleicht der eines Quarzgenerators. Die Ausgangsfrequenz ist das Resultat der Multiplikation der Referenzfrequenz mal eine rationale Zahl. Die Realisation erfolgt mittels einfacher arithmetischer Operationen (Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren).

In dem Artikel wurde das Arbeitsprinzip der Frequenzsynthesizer dargestellt, das von der Analogtechnik angewandt wird. Die Synthesizer bestehen aus gleichartigen Frequenzwahlstufen (Dekaden), wobei deren Anzahl die kleinsten Frequenzschritte bestimmen. Mit Hilfe von Schaltern, die die aufeinander folgenden Ziffern im Dezimalsystem angeben, wird die Ausgangsfrequenz gewählt. Es wurden von verschiedenen Firmen erarbeitete Lösungen von Dekaden angeführt.

Der zweite Teil des Artikels wird den Minimalisierungsmethoden des Rauschpegels im Ausgangssignal gewidmet. Es wurde auf Lösungen hingewiesen, die das Erweitern des Ausgangsfrequenzbereichs anstreben. Dank dieser Lösungen ist es möglich, sehr hohe maximale Ausgangsfrequenzen bei relativ geringem Rauschpegel zu erreichen.

К. ПИВНИЦКИ

АНАЛОГОВЫЕ СИНТЕЗАТОРЫ ЧАСТОТ

Резюме

С синтезатора частоты, управляемого одним высокостабильным генератором с кварцевой стабилизацией, можно получать очень большое количество частот с точностью и стабильностью такой же как в эталонном генераторе. Выходная частота синтезатора получается как результат умножения частоты эталонного генератора на рациональное число. Эта операция осуществляется путем простых умножений и делений частоты и натуральных чисел, а также суммирования и вычитания частот.

В труде представлены принципы действия синтезаторов частот использующих аналоговые электронные цепи. Минимальный шаг перестройки в таком синтезаторе определен числом одинаковых декад синтеза. Выходная частота устанавливается с помощью переключателей, определяющих очередные цифры в десятичной системе. Описано несколько вариантов декад синтеза тора изготовленных несколькими фирмами.

Вторая часть труда посвящена методам минимализации шумов на выходе синтезатора. Представлены новейшие системы расширения диапазона выходных частот синтезаторов. В этих системах получаются очень высокие максимальные выходные частоты с относительно низкими шумами.

Kierunki badań teoretycznych nad szumami typu $1/f$ w półprzewodnikach

ANDRZEJ ZAKLIKIEWICZ (WARSZAWA)

*Instytut Technologii Elektronowej
przy Naukowo Produkcyjnym Centrum Półprzewodników*

Otrzymano 17.7.1974

Podano matematyczne podstawy, na których opierają się dotychczasowe prace teoretyczne nad szumami $1/f$. Stwierdzono, że do wyjaśnienia zjawiska szumów $1/f$ niezbędne jest założenie występowania procesów pułapkowania o bardzo długich stałych czasu.

Przedstawiono dwa modele, w których decydujący jest czas wiązania swobodnych nośników ładunku przez pułapki. Następnie na przykładzie tranzystora MOS z kanałem n , podano sposób wyznaczania widma szumów $1/f$, związanych z odpowiednim rozkładem czasów dochodzenia nośników do pułapek. Taki rozkład jest możliwy w przypadku wymiany ładunku pomiędzy pułapkami znajdującymi się w warstwie tlenku a półprzewodnikiem, dokonującej się drogą tunelowania.

Po przeprowadzeniu analizy dotychczasowych badań teoretycznych zaprezentowano nowy model szumów $1/f$, którego istota polega na przyjęciu odpowiednio długich czasów gromadzenia nośników w zespołach pułapek. Mechanizm tego gromadzenia opiera się na zjawisku silnej aktywowanej chemisorpcji cząsteczek wodoru w półprzewodniku. Wyprowadzono ogólny wzór na widmo szumów $1/f$.

1. WSTĘP

Obecna znajomość zjawisk zachodzących w półprzewodnikach i przyrządach półprzewodnikowych pozwala stwierdzić, że jedynie proces pułapkowania swobodnych nośników ładunku może być odpowiedzialny za występowanie szumów $1/f$. Wiadomo też, że normalne centra generacyjno-rekombinacyjne nie dają składowej szumów typu $1/f$. Wiązano więc zjawisko tych szumów z powolnymi stanami powierzchniowymi [1]. Rozwój technologii półprzewodnikowej pozwala eliminować powolne stany powierzchniowe ze współczesnych przyrządów półprzewodnikowych. Nie idzie z tym w parze równoczesne obniżenie i eliminacja szumów $1/f$. Mimo to w dalszym ciągu dominuje w nauce przekonanie, że szumy te są zjawiskiem, przynajmniej w głównej mierze, powierzchniowym. Istnieją jednak uzasadnione, odmienne poglądy na zagadnienie powierzchniowego charakteru szumów $1/f$, co przedstawione zostanie w rozdziale 5 pracy.

Do wyjaśnienia zjawiska szumów $1/f$ niezbędne jest przyjęcie występowania procesów pułapkowania o bardzo długich czasach trwania. Może to być zrealizowane w dwojaki sposób:

1. czas wiązania swobodnych nośników ładunku przez pułapki jest taki, że zapewnia odpowiedni kształt charakterystyki widmowej szumów; interpretacja taka zaproponowana przez Bessa [3] zmodyfikowana została w roku 1968 przez Jäntscha [4],
2. odpowiedzialne za występowanie szumów $1/f$ są czasy dochodzenia swobodnych nośników ładunku do pułapek.

Drugi z wymienionych przypadków daje się wytłumaczyć zjawiskiem tunelowania, mającym miejsce w niektórych strukturach. Sugestie na temat takiego sposobu wyjaśnienia mechanizmu szumów $1/f$ wysunął w 1955 roku Mc Whorter [2]. Napisano ostatnio cały szereg prac [7 ÷ 17] tłumaczących szumy $1/f$ w strukturach MIS (w szczególności w strukturach metal— SiO_2 —Si) zjawiskiem tunelowego przejścia swobodnych nośników ładunku z półprzewodnika do pułapek rozmieszczonych w sposób przypadkowy w warstwie tlenku na głębokości od 0 do kilkudziesięciu Å, licząc od powierzchni półprzewodnika.

2. PÓDSTAWY MATEMATYCZNE TEORII SZUMÓW $1/f$ [18].

Przedstawiony tu kierunek teoretycznych studiów nad szumami $1/f$ opiera się na następującej procedurze matematycznej. Przyjmuje się, że każde spułapkowanie nośnika (rozumiane jako czas związania nośnika w pułapce), bądź tunelowe przejście nośnika do pułapki jest elementarnym zdarzeniem szumowym, powodującym fluktuację gęstości nośników ΔN wokół ich wartości średniej N_0 , odpowiadającej stanowi równowagi.

Zakłada się następnie eksponencjonalny rozkład stałych czasu tych elementarnych wydarzeń szumowych:

$$g_1(\tau)d\tau = \exp(-\tau/\tau_0)d(\tau/\tau_0), \quad (1)$$

gdzie τ_0 — średnia wartość stałej czasu.

Znormalizowany współczynnik autokorelacji procesu stochastycznego definiowany jako

$$c(s) = \frac{\overline{X(t)X(t+s)}}{X^2(t)}, \quad (2)$$

gdzie:

$X(t)$ — zdarzenie elementarne,

s — opóźnienie czasowe,

jest dla rozkładu określonego wzorem (1) następujący:

$$c(s) = \exp(-s/\tau_0). \quad (3)$$

Stosując przekształcenie Wienera-Chinczyna:

$$S(f) = 4 \int_0^\infty \overline{X(t)X(t+s)} \cos \omega s ds, \quad (4)$$

które po wprowadzeniu znormalizowanej funkcji autokorelacji przyjmuje postać

$$S(f) = 4\overline{X^2(t)} \int_0^\infty c(s) \cos \omega s ds, \quad (5)$$

otrzymuje się, w przypadku rozważanego procesu, gęstość widmową fluktuacji nośników

$$S_{\Delta N}(f) = 4\overline{\Delta N^2} \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (6)$$

Gęstość widmowa (6) jest scharakteryzowana przez jedną stałą czasową τ_o . Jeśli każdy element o powierzchni P i o rozmiarach rzędu kwadratu Debye'a L_D^2 (około 10^{-10} cm^2) można traktować niezależnie, to istnieje możliwość charakteryzowania każdego takiego elementu jego własną stałą czasu τ_i . Widmo całkowite będzie sumą widm od poszczególnych elementów:

$$S_N(f) = \sum_i C_i \frac{\tau_i}{1 + \omega^2 \tau_i^2}, \quad (7)$$

gdzie C_i — stała rozkładu.

Sumowanie można w granicy zastąpić całkowaniem

$$S_N(f) = 4N_o P \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2} g_2(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Przy założonym rozkładzie stałych czasu różnych elementów powierzchni, typu:

$$\begin{aligned} g_2(\tau) d\tau &= g_o d\tau/\tau & \text{dla } \tau_1 < \tau < \tau_2, \\ g_2(\tau) d\tau &= 0 & \text{dla } \tau < \tau_1 \text{ lub } \tau > \tau_2, \end{aligned} \quad (9)$$

gdzie

$$g_o = \frac{1}{\ln(\tau_2/\tau_1)},$$

otrzymamy w wyniku całkowania wzoru (8) następującą zależność

$$S_N(f) = \frac{4N_o P}{\omega \ln(\tau_2/\tau_1)} (\arctg \omega \tau_2 - \arctg \omega \tau_1). \quad (10)$$

Wyrażenie to ma wartość stałą, równą $4N_o P \tau_2 / \ln(\tau_2/\tau_1)$ dla $\omega \tau_2 \ll 1$, zmienia się jak $1/\omega$ dla $\omega \tau_1 \ll 1 \ll \omega \tau_2$ i zmienia się jak $1/\omega^2$ dla $\omega \tau_1 \gg 1$.

3. ROZKŁAD CZASÓW PUŁAPKOWANIA ODPOWIEDZIALNY ZA ZJAWISKO SZUMÓW $1/f$

Rozpatrzone zostaną dwa rodzaje pułapek zapewniających wiązanie swobodnych nośników ładunku na przedziały czasu odpowiednie do wytworzenia widma szumów typu $1/f$. Najpierw przedstawiony zostanie model, w którym pułapkami są atomy zanieczyszczeń adsorbowane przez tzw. centra emisyjne i emitowane w głąb półprzewodnika, a następnie model z pułapkami w postaci chemisorbowanych jonów wody.

W pierwszym modelu przyjmuje się, że centra emisyjne są rozłożone w sposób przypadkowy na powierzchni półprzewodnika i umiejscowione w punktach, w których linie dyslokacji biegnące z głębi półprzewodnika stykają się z jego powierzchnią. Każde centrum emisyjne zawiera znaczną liczbę atomów zanieczyszczeń i może te atomy emitować i adsorbować. Szacuje się [3], że liczba centrów emisyjnych jest rzędu $10^6/\text{cm}^2$, co w przypadku koncentracji $10^{11}/\text{cm}^2$ atomów zanieczyszczeń daje 10^5 atomów zanieczyszczeń w każdym centrum. Atomy zanieczyszczeń wyemitowane z centrum emisyjnego dyfundują ruchami Browna w głąb półprzewodnika wzdłuż linii dyslokacji. W całym okresie swej wędrówki na zewnątrz centrum emisyjnego atomy zanieczyszczeń stanowią pułapki dla swobodnych nośników ładunku i przez ten okres czasu są zdolne do unieruchomienia elektronu lub dziury. Wędrówka atomu zanieczyszczeń jest więc typowym zdarzeniem szumowym.

To, że atomy zanieczyszczeń pułapują swobodne nośniki tylko wtedy gdy znajdują się na zewnątrz centrów emisyjnych, tłumaczyć można różnicą energii jonizacji na powierzchni i w głębi półprzewodnika. Energia ta jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu stałej dielektrycznej półprzewodnika, która z kolei jest większa w głębi półprzewodnika.

W modelu z pułapkami w postaci chemisorbowanych cząsteczek wody przyjmuje się [4], że:

- a) na powierzchni granicznej półprzewodnika z warstwą tlenków znajduje się $10^9 \div 10^{10}/\text{cm}^2$ aktywnych centrów emitujących i adsorbujących cząsteczki wody,
- b) cząsteczki wody są chemisorbowane z dużą stałą czasu,
- c) chemisorbowane cząsteczki wody mają, dzięki jonizacji, ładunek dodatni,
- d) dopuszcza się możliwość chemisorbowania innych niż woda cząsteczek.

W przypadku przyłożenia do próbki półprzewodnikowej dostatecznie silnego pola elektrycznego, cząsteczki wody dysocjują w aktywnych centrach, przy czym następuje rozerwanie dotychczasowych wiązań semipolarnych. Cząsteczki te dyfundują ruchami Browna po powierzchni granicznej i są następnie wiązane przez sąsiednie albo własne centrum. Proces ten powoduje szumową modulację rekombinacji powierzchniowej.

Jeśli jon porusza się ruchami Browna, to w czasie τ przebywa on odległość r . Wartość średnia kwadratu tej odległości określa wzór:

$$\overline{r^2} = 4D\tau, \quad (11)$$

gdzie D — stała dyfuzji.

W przypadku dyfuzji chemisorbowanej wody po powierzchni krzemu pokrytej warstwą SiO_2 : $D = 2 \cdot 10^{-11} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$.

Dyfundujący jon przebywa drogę, której wartość minimalna jest równa odległości pomiędzy sąsiednimi minimami potencjału na powierzchni półprzewodnika $r_{\min} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$, natomiast maksymalna odpowiada średniej odległości pomiędzy sąsiednimi aktywnymi centrami $r_{\max} = 10^{-5} \text{ cm}$ przy liczbie aktywnych centrów $10^{10}/\text{cm}^2$.

Można więc z równania (11) wyznaczyć minimalny i maksymalny czas dyfuzji: $\tau_{\min} = 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ i $\tau_{\max} = 0,5 \text{ s}$. Wielkości te są obowiązujące jedynie dla wytrawionej powierzchni krzemu pokrytego warstwą SiO_2 i dla temperatury pokojowej.

Widmo szumów w przypadku eksponencjalnego rozkładu stałych czasu w granicach jak wyżej wyznacza się następująco.

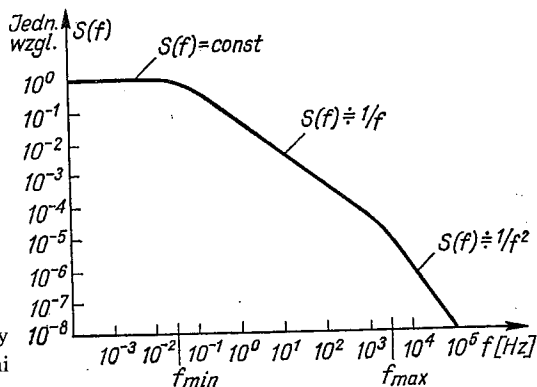
Natężenie prądu elektrycznego przepływającego przez próbkę półprzewodnikową fluktuuje wokół średniej wartości $\bar{J}$:

$$J = \bar{J} + \Delta J; \quad (12)$$

ΔJ jest spowodowane przez fluktuacje jonów ΔN_j dysocjujących w aktywnych centrach

$$\Delta J = K \cdot \Delta N_j. \quad (13)$$

Stała proporcjonalności K zależy od rodzaju próbki.



Rys. 1. Obliczone widmo względnej gęstości mocy szumów w przypadku wytrawionej powierzchni krzemu [4]

Jeżeli przyjmujemy rozkłady $g(\tau)d\tau$ czasów trwania określone wyrażeniami (1) i (9), to widmowa gęstość mocy szumów będzie miała postać:

$$S(f) = \frac{A}{f} (\arctg f/f_{min} - \arctg f/f_{max}), \quad (14)$$

gdzie

$$A = \frac{2K^2 \overline{\Delta N_j^2}}{\pi \ln(\tau_{min}/\tau_{max})} \quad (15)$$

oraz

$$f_{min} = \frac{1}{2\pi \tau_{min} \ln(\tau_{min}/\tau_{max})} \quad (16)$$

i

$$f_{max} = \frac{1}{2\pi \tau_{max} \ln(\tau_{min}/\tau_{max})}. \quad (17)$$

Biorąc pod uwagę wyznaczone poprzednio wartości τ_{min} i τ_{max} otrzymamy dla wytrawionej powierzchni krzemu: $f_{min} = 3 \cdot 10^{-2}$ Hz i $f_{max} = 3 \cdot 10^3$ Hz. Przebieg tak wyznaczonej widmowej gęstości mocy szumów jest pokazany na rys. 1 [4].

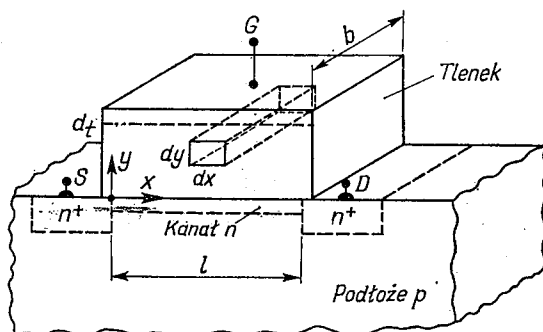
Jeśli przyjmujemy dyfuzję chemisorbowanych cząsteczek innych niż woda lub inną warstwę pasywnującą niż SiO_2 , wtedy stała dyfuzji na powierzchni granicznej może mieć inną wartość niż tutaj obliczoną. Inne będą wówczas również wartości f_{min} i f_{max} , jednak zakres szumów $1/f$ (stosunek f_{min}/f_{max}) pozostanie bez zmian.

4. CZAS DOJŚCIA NOŚNIKÓW DO PUŁAPEK JAKO PRZYCZYNA SZUMÓW $1/f$

Poniżej przedstawiony sposób wyjaśnienia zjawiska szumów $1/f$ odnosi się do tranzystorów MOS, chociaż można go stosować również w odniesieniu do innych struktur typu MIS.

Robi się tutaj dwa podstawowe założenia [9]:

- 1) w warstwie tlenków na głębokości kilkudziesięciu Å od powierzchni granicznej półprzewodnik-tlenek znajduje się zbiór pułapek (stanów powierzchniowych) o poziomach energetycznych leżących w granicach pasma zabronionego.
- 2) wymiana ładunku pomiędzy tymi pułapkami a półprzewodnikiem odbywa się drogą tunelowania.



Rys. 2. MOST o kanale typu n z pułapkami w warstwie tlenku

Wyznaczenie wzoru na widmo szumów przeprowadzone zostanie dla tranzystora MOS z kanałem n . Rozważany będzie proces pułapkowania nośników mniejszościowych, w tym przypadku elektronów. Stwierdzono bowiem, że pułapkowanie nośników większościowych nie daje widma szumów w zakresie zgodnym z obserwowanym na drodze doświadczeń [9].

Widmo średniego kwadratu fluktuacji liczby nośników $\delta n_t \Delta V$ pułapkowanych w elemencie o objętości $\Delta V = b \cdot dy \cdot dx$ (rys. 2) jest określone zależnością [7]:

$$S_{\delta n_t \Delta V} = 4\Delta f \frac{\tau}{1 + (\omega\tau)^2} N_t l_t l_{pt} \Delta V, \quad (18)$$

gdzie:

- Δf — skuteczna szerokość pasma,
- N_t — koncentracja pułapek,
- τ — stała czasu procesów pułapkowania,
- $l_t = 1 - l_{pt}$ — część pułapek zajętych.

Wahania liczby nośników $(\delta n_t \Delta V)^2$ w objętości ΔV wywołują wahania prądu drenu δI_D , których średnia kwadratowa wyraża się wzorem:

$$\overline{(\delta I_D)^2} = \left[\frac{I_D}{4n(x)} \right]^2 \overline{(\delta n_t \Delta V)^2}, \quad (19)$$

$n(x)$ — koncentracja elektronów przypadająca na jednostkową objętość w funkcji współrzędnej x kanału, zależna od wahań liczby nośników

$$n(x) = \frac{bC_{ox}}{q} |U_{DSO} - U(x)|, \quad (20)$$

gdzie:

U_{DSO} — napięcie odcięcia drenu,

$U(x)$ — elektrostatyczny potencjał wzdłuż kanału,

C_{ox} — pojemność warstwy tlenku na jednostkę powierzchni.

Z teorii tranzystorów MOS wiadomo, że:

$$I_D = qn(x)\mu \left| \frac{dU(x)}{dx} \right|, \quad (21)$$

gdzie μ — średnia wartość ruchliwości w kanale.

Z podanych wyżej zależności, widmo średniej wartości wahań prądu drenu wskutek wahań ilości spuląpkowanych nośników w elemencie o objętości ΔV w miejscu x wynosi:

$$S_{\delta I_D} = \frac{4\tau\Delta f}{1+(\omega\tau)^2} N_t l_t l_{pt} \frac{\mu I_D q^2 dy dx}{l^2 C_{ox} |U_{DSO} - U(x)|} \left| \frac{dU(x)}{dx} \right|. \quad (22)$$

Po scałkowaniu równania (22) zarówno względem rozkładu pałapek w tlenku, tzn. względem y , jak również względem potencjału kanału $U(x)$ uzyskuje się całkowitą gęstość widmową kwadratu natężenia prądu szumów drenu.

Średni kwadrat natężenia prądu szumów drenu będzie:

$$\overline{i_{nd}^2} = \frac{4\Delta f q^2 I_D \mu}{l^2 C_{ox}} \int_0^{U_{DS}} \int_{W_v}^{W_c} \int_0^{d_t(W)} \frac{\tau(W, y)}{1+(\omega\tau)^2} \frac{1}{|U_{DSO} - U(x)|} N_t(W, y) l_t l_{pt} dy dW dU, \quad (23)$$

gdzie:

$d_t(W)$ — odległość na jaką rozmieszczone są pałapki o energii W w warstwie tlenku, licząc od powierzchni półprzewodnika,

W_c — energia dna pasma przewodnictwa,

W_v — energia wierzchołka pasma walencyjnego,

$N_t(W, y)$ — koncentracja pałapek zależna od energii W i położenia y w warstwie tlenku.

Stała czasowa τ może zależeć od energii pałapek i ich położenia w stosunku do płaszczyzny powierzchni.

Dla elementarnego procesu pałapkowania, korzystając ze statystyki Schockley-Read-Hall (SRH) otrzymuje się:

$$\tau(y) = \frac{1}{C_o(y)(n_s + n_1)}, \quad (24)$$

gdzie:

n_s — koncentracja elektronów na powierzchni granicznej półprzewodnik-tlenek,

$$n_1 = n_i \exp \frac{E_i - E_t}{kT}, \quad (25)$$

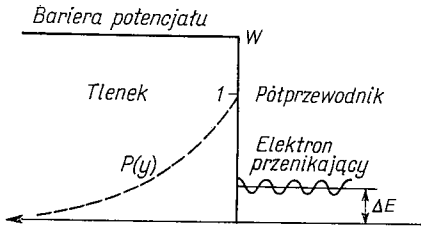
n_i — koncentracja nośników w półprzewodniku samoistnym,

E_i — poziom Fermiego dla półprzewodnika samoistnego,

E_t — poziom energii pałapki.

Wyrażenie $C_o(y)$ jest prawdopodobieństwem pułapkowania elektronu w odległości y od powierzchni granicznej. Prawdopodobieństwo, że elektron znajdujący się przy powierzchni granicznej zostanie związany z pułapką w odległości y maleje ze wzrostem tej odległości. Jeśli przyjmimy identyczną stałą pułapkowania c dla wszystkich pułapek, a przez $P(y)$ oznaczmy stosunek prawdopodobieństwa znalezienia elektronu w miejscu y do prawdopodobieństwa w miejscu $y = 0$, wówczas będzie:

$$C_o(y) = cP(y). \quad (26)$$



Rys. 3. Bariera potencjału przyjęta dla obliczenia prawdopodobieństwa znalezienia elektronu w odległości y od płaszczyzny granicznej

Jeśli przyjmimy, że elektrony osiągają pułapki rozłożone w warstwie tlenku drogą tunelowego przejścia przez powierzchniową barierę potencjału, to w przypadku prostokątnej bariery (rys. 3) prawdopodobieństwo

$$P(y) = \exp(-\alpha y), \quad (27)$$

przy czym

$$\alpha = \frac{4\pi}{h} \sqrt{2m^*W}, \quad (28)$$

gdzie:

h — stała Plancka,

m^* — masa efektywna elektronu,

W — wysokość bariery potencjału, równa pracy wyjścia półprzewodnika.

Pominięto tutaj energię ΔE elektronu przenikającego z półprzewodnika w kierunku pułapek [9].

Z wyrażen (24), (26) i (27) otrzymujemy wzór na stałą czasu:

$$\tau(y) = \frac{1}{c(n_s + n_1)} \exp(\alpha y) = \tau_s \exp(\alpha y), \quad (29)$$

gdzie

$$\tau_s = \frac{1}{c(n_s + n_1)}, \quad (30)$$

jest stałą czasu pułapkowania na powierzchni granicznej (dla $y = 0$).

W przypadku struktury Si—SiO₂ [9] energia $W = 4 \text{ eV}$ i przyjmując $m^* = m$ otrzymujemy $\alpha \cong 2 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-1}$, co przy założeniu rozkładu pułapek na głębokość $d_t = 20 \text{ Å}$ daje $\alpha d_t = 40$. Zatem maksymalna wartość stałej czasu $\tau_{max} = \tau_s \cdot 10^{17}$. Jeśli $\tau_s = 10^{-8} \text{ s}$, to $\tau_{max} = 10^9 \text{ s}$.

Średni kwadrat natężenia prądu szumów w równaniu (23) zależy nie tylko od stałej czasu τ lecz także od rozkładu koncentracji pułapek $N_t(W, y)$. Najprostszym jest rozkład

przestrzennie stały względem odległości y , mianowicie $N_t(y) = N_o$ [cm^{-3}], ze stałym poziomem energetycznym pułapek, tzn:

$$\int_{W_v}^{W_c} N_t(W) dW = N_o. \quad (31)$$

Otrzymujemy teraz:

$$\overline{i_n^2} = \frac{4\Delta f q^2 I_D \mu N_o}{l^2 C_{ox}} \int_0^{U_{DS}} \int_0^{d_t} \frac{\tau(y)}{1 + (\omega\tau)^2} l_t l_{pt} \frac{dy dU}{|U_{DSO} - U|}. \quad (32)$$

Jeśli przyjmiemy $\tau_s = \tau_s(x) = \text{const}$ wzdłuż kanału oraz weźmiemy pod uwagę, że $dy = d\tau/\alpha \cdot \tau$, to:

$$\int_0^{d_t} \frac{\tau(y) dy}{1 + [\omega\tau(y)]^2} = \frac{1}{\alpha\omega} \{ \arctg[\omega\tau_s \exp(\alpha d_t)] - \arctg\omega\tau_s \}. \quad (33)$$

Ponieważ $\tau_s = 10^{-8}$ s i $\exp(\alpha d_t) = 10^{17}$, to dla częstotliwości spełniających silną nierówność $\omega\tau_s \ll 1$ równanie (33) daje w rezultacie:

$$\frac{\pi}{2\alpha\omega}. \quad (34)$$

Należy zwrócić uwagę, że nawet przy częstotliwości tak dużej jak $f = 1$ MHz mamy ciągle $\omega\tau_s \ll 1$.

W celu określenia średniego kwadratu natężenia prądu szumów 1/f należy jeszcze wyznaczyć całkę:

$$\int_0^{U_{DS}} \frac{l_t(U) l_{pt}(U)}{|U_{DSO} - U|} dU. \quad (35)$$

Korzystając ponownie ze statystyki SRH można dojść do wyrażenia na iloczyn $l_t l_{pt}$

$$l_t l_{pt} = \frac{n_s n_1}{(n_1 + p_1 + n_s)^2}. \quad (36)$$

Ponieważ n_s zmienia się wzdłuż kanału zgodnie z zależnością:

$$n_s(x) = n_{os} \frac{U_{DS} - U}{U_{DS}}, \quad (37)$$

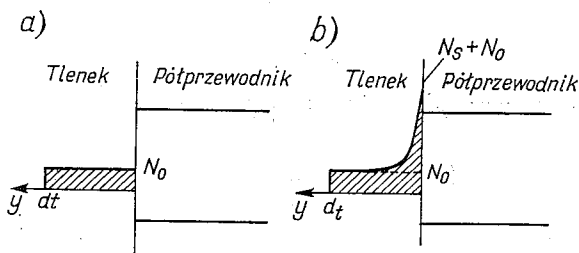
zatem

$$l_t l_{pt} = \frac{n_1 n_{os} (U_{DS} - U)}{U_{DS} \left(n_1 + p_1 + n_{os} \frac{U_{DS} - U}{U_{DS}} \right)^2}, \quad (38)$$

gdzie n_{os} — gęstość elektronów na powierzchni granicznej przy źródle.

Wyrazy n_1 i p_1 są zależne od różnicy $(E_i - E_t)$, zatem wartość całki (35), a więc i wartość średniego kwadratu natężenia prądu szumów 1/f są zależne od energetycznego rozkładu koncentracji pułapek.

Z przeliczenia całki (35) wynika [9], że maksymalna wartość średniego kwadratu natężenia prądu szumów $1/f$ występuje w przypadku pułapek o energii w pobliżu poziomu Fermiego dla elektronów. Jeśli jednak poziom Fermiego znajduje się w zakresie przerwy energetycznej, w miejscu gdzie istnieje mała koncentracja pułapek, to również pułapki o innych poziomach mogą mieć wpływ na wartość szumów $1/f$.

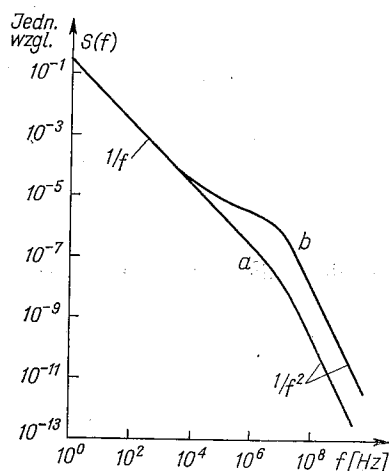


Rys. 4. Przykłady dwóch różnych rozkładów pułapek w warstwie tlenku

a) równomierny rozkład pułapek N_0 na odległość d_t ,

b) rozkład typu $N_t = N_s \exp(-ay) + N_0$

Przyjmowany dotychczas równomierny rozkład koncentracji pułapek w kierunku y jest hipotetycznym przypadkiem szczególnym. Można także zbadać nierównomierne rozkłady, przykładowo eksponencjalnie malejącą od $N_s + N_0$ do N_0 (rys. 4b) koncentrację pułapek wewnątrz odcinka $0 \ll y < d_t$.



Rys. 5. Widmo szumów dla dwóch różnych przypadków rozkładu pułapek, przedstawionych na rys. 4 [9]

Współczynnik określający kształt widma szumów dla przypadku z rys. 4b będzie następujący:

$$\int_0^{d_t} [N_s \exp(-\alpha y) + N_0] \frac{\tau_s \exp(\alpha y)}{1 + \omega^2 \tau_s^2 \exp(2\alpha y)} dy. \quad (39)$$

Dla zakresu małych częstotliwości, takich że $\omega \tau_s \ll 1$ i $\omega \tau_s \exp(\alpha d_t) \gg 1$, będziemy mieli jednakowy poziom szumów dla obydwóch rozkładów przedstawionych na rys. 4, gdyż wartość całki (39) jest równa w przybliżeniu wyrażeniu (34).

Natomiast dla dużych częstotliwości, powyżej $\omega_{gr} = 1/\tau_s$ będzie spełnione $\omega\tau_s > 1$ i wartość całki (39) ma dla przypadku b postać

$$\frac{N_o}{\alpha\tau_s} \frac{1}{\omega^2} \left(1 + \frac{N_s}{2N_o} \right). \quad (40)$$

Dla równomiernego rozkładu pułapek jest teraz:

$$\frac{N_o}{\alpha\tau_s\omega^2}. \quad (41)$$

Na rys. 5 przedstawiono widmo szumów dla obu rozważanych przypadków. Przyjęto $N_s = 100 N_o$ oraz $\tau_s = 10^{-8}$ s [9].

5. ANALIZA PRZEDSTAWIONYCH KIERUNKÓW TEORETYCZNEGO BADANIA ZJAWISKA SZUMÓW TYPU $1/f$

Na podstawie przedstawionego dotychczas materiału dotyczącego teoretycznych badań mechanizmu szumów $1/f$ można wyodrębnić pewne wspólne cechy charakterystyczne dla interpretacji tych szumów. Są one następujące.

a) *Pułapkowanie*. Rozpatrując wszystkie znane zjawiska elektronowe i jonowe w półprzewodnikach i przyrządach półprzewodnikowych można ustalić drogą eliminacji, że tylko z procesem pułapkowania swobodnych nośników ładunku można związać występowanie procesów o czasach trwania dostatecznie długich do wyjaśnienia szumów podlegających prawu $1/f$ na częstotliwościach tak małych, jak to stwierdzono eksperymentalnie. Mierzono mianowicie szumy $1/f$ w dół, aż do częstotliwości 10^{-4} Hz [20] i pomimo to dolna granica tych szumów nie została jeszcze wyznaczona.

b) *Zjawisko powierzchniowe*. Doświadczenia z efektem połowym prowadzone przez Mc Whortera [2] oraz Rae i Levinsteina [21] doprowadziły do stwierdzenia, że odpowiedzialnymi za występowanie szumów $1/f$ są pułapki powierzchniowe. Stąd bierze się zainteresowanie szumami $1/f$ w strukturach MOS i próby wyjaśnienia ich mechanizmu, takie jak przedstawione w p. 4 pracy lub podobne.

c) Każde pojedyncze pułapkowanie jest *elementarnym zdarzeniem szumowym*. Ten sposób rozpatrywania zjawiska szumów $1/f$ został przeniesiony automatycznie z dobrze teoretycznie opracowanych zagadnień związanych z szumami śrutowymi.

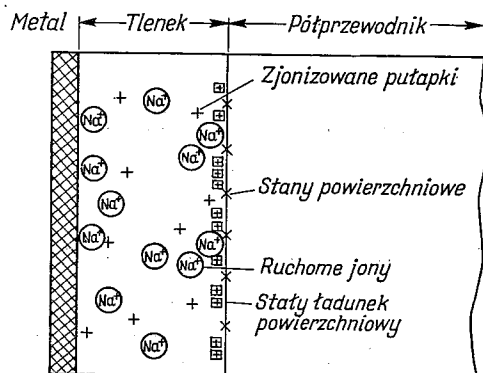
d) *Odpowiedni rozkład czasów pułapkowania lub czasów tunelowania*. Przyjmuje się występowanie takiego rozkładu czasów trwania szumowych zdarzeń elementarnych (wzory 1 i 9), który daje w rezultacie widmo gęstości mocy wymaganego kształtu, $S(f) = \text{const} \cdot f^m$ przy $m \simeq -1$.

Nie do podważenia jest tylko spostrzeżenie przedstawione w punkcie a. Rzeczywiście nie ma innego zjawiska niż pułapkowanie, stosownego do wyjaśnienia obserwowanego widma szumów. Należy tylko ustalić jaki rodzaj pułapek może wchodzić tutaj w rachubę. Dotychczas proponowano trzy rodzaje pułapek:

- 1) atomy zanieczyszczeń znajdujące się w tzw. centrach emisyjnych,
- 2) chemisorbowane cząsteczki wody,

- 3) bliżej nieokreślone pułapki w warstwie tlenku, do których tunelują swobodne nośniki z wnętrza półprzewodnika.

Występowanie pułapek tego trzeciego rodzaju wydaje się być najmniej prawdopodobne. Model powierzchni granicznej półprzewodnik-tlenek podany przez S. M. Sze [22] nie uwzględnia takich pułapek, rozłożonych na głębokości kilkudziesięciu Å od powierzchni



Rys. 6. Stany i ładunki w warstwie tlenku struktury MOS

granicznej. Stwierdzono mianowicie, że w strukturach MOS znajdują się następujące rodzaje stanów i ładunków (rys. 6):

- 1) stany powierzchniowe, które są zdefiniowane jako poziomy energetyczne leżące w granicach pasma zabronionego i które mogą wymieniać ładunek z półprzewodnikiem w krótkim czasie,
- 2) stały ładunek powierzchniowy, zlokalizowany w pobliżu (~ 200 Å) powierzchni półprzewodnika, nieruchomy nawet po przyłożeniu zewnętrznego pola elektrycznego,
- 3) jony ruchome, takie jak np. jony sodu, które przesuwały się pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego lub temperatury,
- 4) zjonizowane pułapki, które mogą być wytworzone np. przez naświetlenie promieniami X.

Jeśli chodzi o stany powierzchniowe, to trzeba przypomnieć, że rozróżniano w nich stany powierzchniowe szybkie i powolne, pierwsze z nich umiejscawiając na powierzchni półprzewodnika a drugie na zewnętrznej warstwie tlenku (rozważono wtedy tylko struktury półprzewodnik-tlenek). Wymiana ładunku pomiędzy półprzewodnikiem a stanami szybkimi następowała gwałtownie, natomiast stany powolne wymagały dłuższego czasu do wymiany ładunku. W obecnych strukturach MOS z grubą warstwą tlenku, rzędu 1000 Å, uwzględnia się tylko stany powierzchniowe leżące na powierzchni granicznej półprzewodnik-tlenek.

Przy obecnym stanie technologii półprzewodnikowej oraz techniki pomiaru koncentracji różnego rodzaju zanieczyszczeń i dyslokacji nie ma potwierdzenia koncepcji Bessa występowania centrów emisyjnych grupujących znaczne ilości atomów zanieczyszczeń. Jednakże opierając się na wynikach doświadczeń, które wskazują że poziom szumów $1/f$ jest proporcjonalny do gęstości defektów strukturalnych, nie można wykluczyć udziału tych defektów w generacji omawianych szumów.

Jedynie model z pułapkami w postaci chemisorbowanych cząsteczek wydaje się odpowiedni do interpretacji mechanizmu szumów $1/f$. Model ten posiada jednak następujące słabe punkty:

- 1) procesy odpowiedzialne za szumy $1/f$ nie są związane z energią dostarczaną z zewnątrz,
- 2) wędrówkę cząsteczki chemisorbowanej wody wiążącej swobodny nośnik ładunku traktuje się jako elementarne zdarzenie szumowe,
- 3) rozważa się tylko procesy dyfuzji chemisorbowanych cząsteczek po powierzchni półprzewodnika.

Skutkiem takiego rozpatrywania zjawiska jest zbyt mały zakres otrzymanego teoretycznie widma szumów $1/f$ — tylko 5 dekad częstotliwości, podczas gdy eksperymentalnie stwierdzono występowanie tych szumów w zakresie większym niż 10 dekad.

Przekonanie, że szumy $1/f$ są zjawiskiem powierzchniowym, oparte jest wyłącznie na wynikach dawniejszych badań eksperymentalnych. Wobec tego wystarczające wydaje się być podważenie tego poglądu również na drodze eksperymentalnej. Odpowiednie prace w tym kierunku podjął F. N. Hooge [23] [24] w roku 1969 i doszedł do wniosków, że szumy $1/f$:

- 1) występują nawet w próbkach czystego złota,
- 2) są odwrotnie proporcjonalne do liczby ruchomych nośników ładunku w badanej próbce,
- 3) nie są zjawiskiem powierzchniowym.

Punkty 2 i 3 odnoszą się również do półprzewodników [25].

Jeśli chodzi o charakterystyczne cechy związane z szumami i wymienione na początku niniejszego rozdziału jako punkty c i d, to trzeba stwierdzić, że wymagany jest bardzo specyficzny rozkład stałych czasu perturbacji (rozumianych jako elementarne zdarzenia szumowe) typu:

$$g(\tau)d\tau = g_1(\tau)g_2(\tau) = \frac{g_0 \exp(-\tau/\tau_0)}{\tau} d\tau. \quad (42)$$

Założenie takiego rozkładu jest oczywiście hipotetyczne i ponadto wydaje się mało prawdopodobne w świetle znanych zjawisk w półprzewodnikach. Teoretycznie, tylko zjawisko tunelowego przejścia przez barierę potencjału na granicy półprzewodnik-tlenek uzasadnia częściowo wymagany rozkład zależnością określoną wzorem (29).

6. NOWY MODEL SZUMÓW TYPU $1/f$

Jak to wynika z przeprowadzonej w poprzednim rozdziale pracy analizy, chemisorpcja jest odpowiednim zjawiskiem do wyjaśnienia generacji szumów $1/f$. Zagadnienie należy jednak rozpatrywać w sposób inny niż poprzednio podany. Przede wszystkim za zdarzenie szumowe przyjmiemy cały proces unieruchamiania swobodnych nośników ładunku, następujący dzięki silnej aktywowanej chemisorpcji cząsteczek nie wody lecz wodoru. Cząsteczki te poruszając się ruchami Browna mogą wnikać na dość duże odległości od powierzchni półprzewodnika. Chemisorpcyjne wiązania cząsteczek wodoru mogą więc występować nie tylko na powierzchni ale również i wewnątrz półprzewodnika [30].

Istnieje również inna matematyczna możliwość wyjaśnienia mechanizmu szumów $1/f$. Mianowicie, gęstość widmową szumów można określić jako [26]:

$$S(f) = R \int_0^{\infty} P(\tau) A^2(\tau) |F(\omega, \tau)|^2 d\tau, \quad (43)$$

gdzie:

R — średnia liczba perturbacji w jednostce czasu,

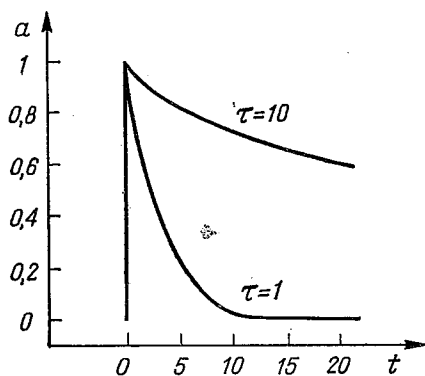
$A^2(\tau)$ — średni kwadrat amplitudy perturbacji o stałej czasu τ ,

$P(\tau)$ — prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia szumowego o stałej czasu τ ,

$F(\omega, \tau)$ — jest transformatą Fouriera zdarzeń szumowych klasy $H(a, \tau)$, tzn.:

$$F(\omega, \tau) = a^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} H(a, \tau) e^{-j\omega t} dt. \quad (44)$$

Okazuje się, że widmo o gęstości zgodnej z prawem $1/f$ otrzymuje się dla pewnej klasy przebiegów czasowych typu $H(a, \tau) = a \cdot \exp(-t/\tau)$, przedstawionych na rys. 7.



Rys. 7. Perturbacje zapewniające widmową gęstość szumów typu $1/f$, zaproponowane przez Halforda [26]

Jeżeli tylko spełnione zostaną warunki:

$$1) \quad P(\tau) A^2(\tau) = B \cdot \tau^{-2}, \quad (45)$$

gdzie B — stała liczbowa,

$$2) \quad 0 < \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2, \quad (46)$$

to widmowa gęstość mocy:

$$S(f) = R \cdot B \cdot f^{-1}, \quad (47)$$

dla częstotliwości leżących w zakresie $(2\pi\tau_2)^{-1} \ll f \ll (2\pi\tau_1)^{-1}$.

Widzimy więc, że widmo szumów typu $1/f$ może być wytworzone przez ładowanie bądź rozładowanie zespołu pułapek, następujące w podobny sposób jak ładowanie i rozładowanie kondensatora. W rozważanej próbce półprzewodnikowej trzeba założyć istnienie pewnej liczby takich zespołów pułapek i przyjąć zachodzenie warunków (45) i (46) dla przebiegów czasowych od różnych zespołów.

Oczywiście inna będzie teraz definicja zdarzenia elementarnego. Nie będzie to jednostkowy skok liczby nośników lub też jednostkowa zmiana gęstości prądu przepływającego przez próbkę, ale zdarzenie elementarne stanowi cały przebieg ładowania-rozładowania zespołu pułapek typu $a \cdot \exp(-t/\tau)$.

6.1. Różne rodzaje adsorpcji

Należy rozróżnić dwa typy adsorpcji: adsorpcję fizyczną i chemiczną (chemisorpcję). Różnica pomiędzy adsorpcją fizyczną i chemiczną sprowadza się do różnego pochodzenia sił wiążących zaadsorbowaną cząsteczkę z ciałem stałym (adsorbentem). Jeżeli to są siły pochodzenia elektrostatycznego, to mamy do czynienia z adsorpcją fizyczną. Jeżeli jednak siły wywołujące adsorpcję mają naturę chemiczną (siły wymienne), wtedy występuje adsorpcja chemiczna, polegająca na chemicznym łączeniu cząsteczek z ciałem stałym [27].

Istnieje następny podział na adsorpcję aktywowaną i zwykłą czyli nieaktywowaną. Pierwsza z nich jest adsorpcją, która zachodzi jedynie po uprzednim wzbudzeniu (aktywacji) rozważanego układu i wymaga pewnej wstępnej straty energii (energii aktywacji). Adsorpcja aktywowana różni się od zwykłej charakterem kinetyki tego procesu. W przypadku adsorpcji zwykłej przebiega ona bardzo szybko, natomiast w przypadku adsorpcji aktywowanej równowaga ustala się powoli z mierzalną szybkością, określoną wzorem Arrheniusa

$$K_R = K_o \exp(-E/kT), \quad (48)$$

gdzie:

K_R — szybkość reakcji,

K_o — stała,

E — energia aktywacji,

k — stała Boltzmanna,

T — temperatura bezwzględna.

W odniesieniu do chemisorpcji należy przeprowadzić jeszcze następny podział, różniąc dwie jej formy: chemisorpcję słabą i silną. Chemisorpcja słaba występuje wtedy, gdy chemisorbowana cząsteczka rozpatrywana razem z odpowiadającym jej centrum adsorpcji pozostaje elektrycznie obojętna i gdy wiązanie pomiędzy cząsteczką a siecią pozostaje bez udziału swobodnego elektronu lub swobodnej dziury sieci krystalicznej. Z chemisorpcją silną mamy do czynienia wówczas, gdy cząsteczka zatrzymuje przy sobie swobodny elektron lub swobodną dziurę sieci krystalicznej i kiedy swobodny nośnik bierze bezpośredni udział w wiązaniu.

Przy silnej adsorpcji udział w wiązaniu bierze swobodny elektron lub swobodna dziura, wobec czego rozróżniamy dwa typy takiego wiązania, które nazwiemy:

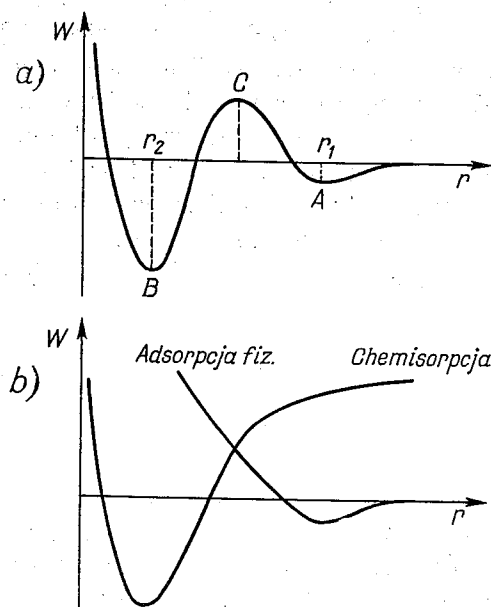
- silnym wiązaniem typu n (akceptorowym), jeśli bierze w nim udział swobodny elektron, wychwycony przez zaadsorbowaną cząsteczkę,
- silnym wiązaniem typu p (donorowym), jeśli w wiązaniu bierze udział dziura wychwycona przez cząsteczkę zaadsorbowaną.

Wiązanie akceptorowe, podobnie jak i wiązanie donorowe, może mieć naturę czysto jonową, czysto homeopolarną, lub też może być wiązaniem typu mieszanego. Zależy to od sposobu rozłożenia elektronu lub dziury, wychwyconych przez cząsteczkę i uczestni-

czących w reakcji, pomiędzy cząsteczkę zaadsorbowaną i centrum adsorpcyjne. Inaczej mówiąc zależy to od charakteru lokalizacji elektronu lub dziury, co określone jest przez naturę adsorbatu i adsorbenta.

6.2. Aktywowana silna chemisorpcja cząsteczek wodoru jako źródło szumów $1/f$

W pracy rozważony będzie przypadek próbki półprzewodnikowej zawierającej N_c centrów adsorpcji, do której energia aktywacji (potrzebna dla zachodzenia procesu chemisorpcji) dostarczana jest w postaci prądu stałego o gęstości J , przepływającego przez próbkę.



Rys. 8. Wykres energii dla adsorpcji fizycznej i chemisorpcji [27]

Przyjmuje się, że centra adsorpcji będące miejscami lokalizacji chemisorbowanych cząsteczek wodoru rozmieszczone są w całej objętości półprzewodnika. Centrami takimi są różne defekty strukturalne kryształu, jak np. dyslokacje.

Cząsteczki wodoru są na powierzchni półprzewodnika adsorbowane fizycznie i jest to adsorpcja nieaktywowana. Adsorbowane w ten sposób cząsteczki przemieszczają się ruchami Browna, zarówno po powierzchni jak i w głąb półprzewodnika.

Warunkiem powstania aktywowanego wiązania chemisorpcyjnego jest spełnienie dwóch warunków:

- 1) dostarczenie energii z zewnątrz,
- 2) znalezienie się cząsteczki wodoru w bezpośrednim sąsiedztwie centrum adsorpcji.

Krzywą adsorpcji $W = W(r)$, gdzie W — energia wiązania, r — odległość pomiędzy powierzchnią półprzewodnika i punktem w którym zachodzi adsorpcja, przedstawia się często jak na rys. 8a [27], uwidaczniając na niej dwa minima oddzielone barierą energe-

tyczną (aktywacyjną). Niezbyt głębokie minimum w przypadku $r = r_1$, traktowane jest jako związane z adsorpcją fizyczną, natomiast głębsze przy $r = r_2$ (gdzie $r_2 < r_1$) jako odpowiednik adsorpcji chemicznej. Przejście układu z punktu A do punktu B poprzez barierę energetyczną C oznacza przeprowadzenie cząsteczki ze stanu adsorpcji fizycznej w stan adsorpcji chemicznej. Krzywa adsorpcji przedstawiona na rys. 8a jest tylko poglądowa i w rzeczywistości nie może istnieć. Krzywa adsorpcji mająca dwa minima i odpowiadająca adsorpcji fizycznej nie może dotyczyć adsorpcji chemicznej i na odwrót. Tym dwom rodzajom adsorpcji muszą odpowiadać różne krzywe wyrażające dwa różne stany elektronowe układu. Bariera energetyczna, która rozdziela dwa minima adsorpcyjne, może powstać tylko w wyniku przecięcia się dwóch krzywych adsorpcji, jak to przedstawiono na rys. 8b.

Przyjmując występowanie silnej chemisorpcji aktywowanej możemy, korzystając z prawa Arrheniusa, napisać wzór na liczbę nośników wiązanych w jednostce czasu:

$$\frac{dn_s}{dt} = N_c \gamma \exp(-J^2 t / \beta), \quad (49)$$

gdzie:

n_s — liczba nośników wiązanych przez chemisorbowane cząsteczki,

N_c — liczba centrów adsorpcji,

J — gęstość prądu stałego przepływającego przez próbkę półprzewodnikową,

γ — stała zależna od masy zaadsorbowanej cząsteczki i od temperatury,

β — stała zależna od rezystywności próbki półprzewodnikowej oraz od temperatury.

Chemisorpcja cząsteczek wodoru, w efekcie której następuje wiązanie swobodnych nośników ładunku, powoduje gromadzenie energii. Stan taki nie jest stanem równowagi i po osiągnięciu pewnego poziomu W_e energii zgromadzonej w chemisorpcyjnych wiązaniach, nastąpi uwolnienie nośników poprzez przejście ze stanu adsorpcji chemicznej w stan adsorpcji fizycznej. Można przyjąć, że przejście takie następuje w sposób natychmiastowy po osiągnięciu wspomnianego poziomu energii W_e .

6.3. W i d m o s z u m ó w 1/f

Przy wyżej określonym fizyko-chemicznym modelu wolnozmiennych przebiegów pulspakowania swobodnych nośników ładunku, możliwe staje się zastosowanie przekształceń matematycznych przedstawionych w poprzedniej pracy autora [29], prowadzących do określenia gęstości widmowej mocy szumów.

Dla obliczenia widma przebiegu przedstawionego na rys. 9 posłużymy się przekształceniem Fouriera dla funkcji $f(t)$ o okresie T

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k e^{j 2\pi k t / T}, \quad (50)$$

gdzie:

$$S_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j 2\pi k t / T} dt. \quad (51)$$

W naszym przypadku obliczamy widmo kwadratu impulsów prądowych przedstawionych na rys. 9 i przyjmujemy:

$$f(t) = i_n^2(t) = A_m^2 e^{-2t/\alpha}, \quad (52)$$

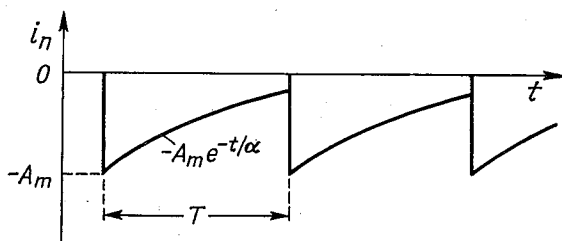
gdzie:

$$A_m = q \cdot N_c \cdot \gamma, \quad (53)$$

$$\alpha = \beta/J^2, \quad (54)$$

q — ładunek elektronu;

pozostałe oznaczenia jak we wzorze (49).



Rys. 9. Zmiany gęstości prądu przepływającego przez półprzewodnikową próbkę wywołane zjawiskiem chemisorpcji

Zgodnie z (51) otrzymujemy więc

$$S_k = \frac{A_m^2}{2T} \int_0^T e^{-2t/\alpha} e^{-j 2\pi k t/T} dt, \quad (55)$$

a po scałkowaniu:

$$S_k = \frac{A_m^2 \alpha}{2T} \frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2 f^2 \alpha^2}} e^{-j \arctg \pi f \alpha}, \quad (56)$$

gdzie:

$$f = k/T,$$

$$k = 1, 2, 3 \dots$$

Zatem

$$S_k = \frac{A_m^2 \alpha}{2T} \frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2 f^2 \alpha^2}} \quad (57)$$

i dla $f \gg 1/\pi\alpha$ otrzymamy

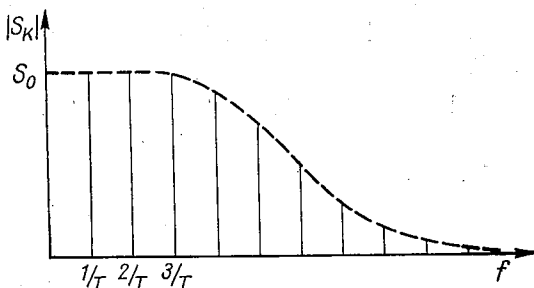
$$|S_k| = \frac{A_m^2}{2\pi f T}. \quad (58)$$

Okres T określający dolny próg widma szumów $f_{\min} = 1/T$ jest wielkością zależną od energii W_e oraz od gęstości prądu J .

Maksymalną energię nośników związanych dzięki chemisorpcji można wyrazić jako:

$$W_e = \eta \int_0^T i_n^2(t) dt = \eta A_m^2 \int_0^T e^{-2t/\alpha} dt, \quad (59)$$

gdzie η — współczynnik zależny od rezystywności próbki półprzewodnikowej oraz od geometrii i rozmieszczenia centrów adsorpcji.



Rys. 10. Widmo kwadratu prądu szumów

Po scałkowaniu mamy

$$W_e = \eta A_m^2 \frac{\alpha}{2} (1 - e^{-2T/\alpha}). \quad (60)$$

Stąd

$$T = \frac{\alpha}{2} \ln \frac{\eta A_m^2 \alpha}{\eta A_m^2 \alpha - 2W_e} \quad (61)$$

oraz

$$f_{min} = \frac{2}{\alpha} \left(\ln \frac{\eta A_m^2 \alpha}{\eta A_m^2 \alpha - 2W_e} \right)^{-1}. \quad (62)$$

Zależność (58) można więc napisać w postaci:

$$|S_k| = \frac{A_m^2}{\pi \alpha} \left(\ln \frac{\eta A_m^2 \alpha}{\eta A_m^2 \alpha - 2W_e} \right)^{-1} \frac{1}{f}. \quad (63)$$

Po podstawieniu oznaczeń (53) i (54) będzie:

$$|S_k| = \frac{q^2 N_c^2 J^2 \gamma^2}{\pi \beta} \left(\ln \frac{\eta q^2 N_c^2 J^2 \gamma^2}{\eta q^2 N_c^2 J^2 \gamma^2 - 2W_e} \right)^{-1} \frac{1}{f}. \quad (64)$$

Otrzymane częstotliwościowe widmo kwadratu prądu powolnych relaksacji, utożsamionych z szumami $1/f$ dla jednej pułapki, przedstawione na rys. 10, rozpoczyna się od częstotliwości $f_{min} = 1/T$ i ma postać widma prążkowego z prążkami w odstępach $1/T$. Prążki te mają początkowo stałą wysokość określoną wzorem:

$$S_0 = \frac{q^2 N_c^2 \gamma^2 f_{min}}{2\pi}, \quad (65)$$

zaś dla częstotliwości $f \gg 1/\pi\alpha$ wartość zmniejszającą się wg prawa $1/f$ ze wzrostem częstotliwości.

6.4. Dyskusja

Jeżeli założymy pomijalnie małą korelację pomiędzy pułapkami, to przy jakimś nie dającym się tutaj określić rozkładzie pułapek, kształt widma sumarycznego będzie zbliżony do widma pojedynczej pułapki.

Takie widmo sumaryczne zespołu pułapek znajdujących się w rozważanym elemencie będzie się rozpoczynało od dolnej częstotliwości określonej przez pułapkę o najdłuższym czasie ładowania T_{max} , a więc zgodnie z równaniem (61) również o największej energii gromadzonego ładunku W_e .

W widmie sumarycznym dominować będą składowe pochodzące od pułapek o mniejszej energii W_e (równanie 64). Jest to wytłumaczeniem dla obserwowanego przez autora [31] i innych [20] odchylenia od prawa $1/f$. Odchylenie to powinno się powiększać przy wzroście rozpiętości poziomu energii pułapek znajdujących się w rozpatrywanym elemencie, tzn. przy wzroście stosunku W_{max}/W_{min} .

Autor sądzi, że następne badania w celu sprawdzenia przedstawionej teorii powinny polegać na pomiarach w zakresie najniższych częstotliwości. Być może okaże się możliwym uchwycenie dolnej granicy szumów $1/f$ oraz stwierdzenia prążkowego charakteru tego widma. Jednakże dopiero mikroskopowe zbadanie istnienia i właściwości założonych chemisorbcyjnych pułapek może doprowadzić do końcowego rozwiązania problemu szumów $1/f$.

LITERATURA

1. A. L. Mc Whorter, *1/f Noise and Germanium Surface Properties*, Semiconductor Surface Physics, University of Pennsylvania Press, Philadelphia 1956.
2. A. L. Mc Whorter, *1/f Noise and Related Surface Effects in Germanium*, Sc. D. Thesis, MIT, 1955.
3. L. Bess, *Study of 1/f Noise in Semiconductor Filaments*, The Physical Review, vol. 103, No 1, 1956, 73—82.
4. O. Jäntschi, *A Theory of 1/f Noise at Semiconductor Surfaces*, Solid-State Electronics, vol. 11, 1968, 267—272.
5. O. Jäntschi, *Slow Surface States and Chemisorption*, J. Phys. Chem. Solids, vol. 26, 1965, 1233—1243.
6. I. Feigt, O. Jäntschi, *The Upper Frequency Limit of the 1/f Noise and the Surface Relaxation Time*, Solid-State Electronics, vol. 14, 1971, 391—396.
7. C. T. Sah, *Theory of Low Frequency Generation Noise in Junction-Gate Field-Effect Transistors*, Proc. of the IEEE, vol. 52, 1964, 795—814.
8. A. G. Jordan, N. A. Jordan, *Theory of Noise in Metal Oxide Semiconductor Devices*, IEEE Trans. on El. Dev., ED-12, 1965, 148—156.
9. S. Christensson, I. Lundström, C. Svenson, *Low Frequency Noise in MOS Transistors — I Theory*, Solid-State Electronics, vol. 11, 1968, 797—812.
10. S. Christensson, I. Lundström, *Low Frequency Noise in MOS Transistors — II Experiments*, Solid-State Electronics, vol. 11, 1968, 813—820.
11. F. Berz, *Theory of Low Frequency Noise in Si MOST's*, Solid-State Electronics, vol. 13, 1970, 631—647.
12. S. T. Hsu, *Low Frequency Excess Noise in Metal-Silicon Schottky Barrier Diodes*, IEEE Trans. on El. Dev., ED — 17, 1970, 496—506.

13. S. T. Hsu, *Surface State Related $1/f$ Noise in p - n Junction*, Solid-State Electronics, vol. 13, 1970, 843—855.
14. S. T. Hsu, *Surface State Related $1/f$ Noise in MOS Transistors*, Solid-State Electronics, vol. 13, 1970, 1451—1459.
15. R. Paul, *Physikalische Rauschursachen in MIS — Transistoren*, Nachrichtentechnik, vol. 20, 1970, 259—262 Teil I, 289—294 Teil II.
16. I. R. M. Mansour, R. J. Hawkins, G. G. Bloodworth, *Physical Model for Current Noise Spectrum of MOST's*, Brit. J. Appl. Phys., vol. 2, 1969, 1063—1082.
17. J. W. Haslett, F. N. Trofimenkoff, *Effects of the Substrate on Surface State Noise in Silicon MOS FET's*, Solid-State Electronics, vol. 15, 1972, 117—131.
18. A. van der Ziel, *Fluctuation Phenomena in Semiconductors*, BSP, London 1959.
19. F. P. Heiman, G. Warfield, *The Effects of Oxide Traps on the MOS Capacitance*, IEEE Trans. on El. Dev, ED—12, 1965, 167—178.
20. R. J. Hawkins, I. R. M. Mansour, G. G. Bloodworth, *The Spectrum of Current Noise in MOST's at Very Low Frequencies*, Brit. J. Appl. Phys., Vol. 2, 1969, 1059—1062.
21. A. U. Mc Rae, H. Levinstein, *Surface-Dependent $1/f$ Noise in Germanium*, The Physical Revue, vol. 119, 1960, 62—69.
22. S. M. Sze, *Physics of Semiconductor Devices*, Wiley — Interscience, 1969.
23. F. N. Hooge, *$1/f$ Noise is no Surface Effect*, Physics Letters, vol. 29A, 1969, 139—140.
24. F. N. Hooge, A. M. H. Hoopenbrouwers, *$1/f$ Noise in Continuous Thin Gold Films*, Physica, vol. 45, 1969, 386—392.
25. F. N. Hooge, H. J. A. van Dijk, A. M. H. Hoppenbrouwers, *$1/f$ Noise in Epitaxial Silicon*, Philips Res. Repts, vol. 25, 1970, 81—86.
26. D. Halford, *A General Mechanical Model for f^{α} Spectral Density Random Noise with Special Reference to Flicker Noise $1/f$* , Proc. of IEEE, vol. 56, 1968, 251—258.
27. F. F. Wolkensztejn, *Elektronowa teoria katalizy na półprzewodnikach*, PWN, Warszawa 1962.
28. N. B. Hannay, *Chemia ciała stałego*, PWN, Warszawa 1972.
29. A. Zaklikiewicz, *Contribution to $1/f$ Noise Theory*, Materiały z konferencji: Le Bruit de Fond des Composants Actifs Semi-conducteurs, Toulouse, 21—29.09.1971 oraz Electron Technology, vol. 6, No 1/2, 1973, 91—95.
30. J. Horiuti, *Chemisorbed Hydrogen*, rozdział I książki: *Solid State Surface Science*, vol. I, ed. M. Green, Marcel Dekker, New York 1969.
31. A. Zaklikiewicz, *Badanie szumów $1/f$ diod z barierą Schottky'ego w zakresie dużych prądów przewodzenia*, Arch. Elektrot., z. 2, 1969, 413—415.

A. ZAKLIKIEWICZ

THEORETICAL INVESTIGATIONS OF $1/f$ NOISE

Summary

Mathematical basis of previous investigations on $1/f$ noise theory has been given. The need of presence of trapping processes with very long time constants has been assumed to explain $1/f$ noise phenomena. Two models based on trapping duration have been described. Next, the method of $1/f$ noise spectrum calculation for MOS n -channel transistor has been reported. Special type distribution of free carriers transport times is required in this case. The proper distribution is likely to be present in the case of tunneling of carriers between semiconductor and traps in oxide layer.

Previous theoretical investigations have been analyzed. The new model for $1/f$ noise mechanism based on very long times of carriers accumulation in trap units has been presented. This accumulation process is related to strong active chemisorption of hydrogen molecules in semiconductor. General equations for $1/f$ noise spectrum have been deduced.

A. ZAKLIKIEWICZ

TENDANCES DES RECHERCHES THÉORIQUES SUR LES BRUITS $1/f$

Résumé

On a donné les principes mathématiques sur lesquels sont basées les recherches théoriques actuelles sur les bruits $1/f$. On a constaté que pour expliquer le phénomène des bruits $1/f$, il est indispensable de supposer l'existence des procédés de pièges, à très longues constantes de temps. On a présenté deux modèles, pour lesquels la durée de liaison des porteurs de charges libres par des pièges est décisive. Ensuite, se servant de l'exemple du transistor MOS au canal du type n , on a donné le mode de la détermination du spectre des bruits $1/f$, correspondant à la durée convenable de l'arrivée des porteurs aux pièges. Une telle durée est possible dans le cas de l'échange des charges entre les pièges situées dans la couche de l'oxyde et le semi-conducteur. Cette échange s'effectue par un tunnel de glissement.

Après avoir fait l'analyse des recherches théoriques, on a présenté le nouveau modèle de bruits $1/f$, basé sur le principe de l'admission de durées d'accumulation de porteurs, dans les ensembles de pièges, convenablement longues. Le mécanisme de cette accumulation consiste sur le phénomène de forte chimisorption activée de molécules d'hydrogène dans le semi-conducteur. On a déduit la formule générale du spectre des bruits $1/f$.

A. ZAKLIKIEWICZ

RICHTUNGEN THEORETISCHER UNTERSUCHUNGEN VON $1/f$ -GERÄUSCHEN

Zusammenfassung

Es wurden mathematische Grundlagen angeführt, worauf sich die bisherigen theoretischen Arbeiten über die $1/f$ -Geräusche stützten. Es wurde festgestellt, daß zur Klärung des $1/f$ -Geräuscheffekts die Voraussetzung getroffen werden muß, daß hier Auffängerprozesse mit sehr langen Zeitkonstanten auftreten. Zwei Modelle wurden beschrieben, bei denen die Bindezeit der freien Ladungsträger durch Auffänger entscheidend ist. Danach wurde anhand eines MOS-Transistors mit einem n -Kanal die Bestimmungsweise eines Spektrums von $1/f$ -Geräuschen angegeben, die mit einer entsprechenden Zeitverteilung des Ankommens von Ladungen an den Auffänger im Zusammenhang stehen. Eine solche Verteilung ist im Falle des Ladungsaustausches zwischen den sich in der Oxidschicht und dem Halbleiter befindenden Auffängern möglich; dieser Austausch wird auf dem Tunnelierungsweg vollbracht.

Nach Durchführung einer Analyse bisheriger theoretischer Untersuchungen wurde ein neues $1/f$ -Geräusch-Modell vorgetragen, dessen Wesen darin beruht, daß es die entsprechend langen Zeiten der Trägeranhäufung in den Auffängeraggregaten übernimmt. Der Anhäufungsmechanismus beruht wiederum auf dem Effekt stark aktivierter Chemisorption von Stickstoffteilchen im Halbleiter. Es wurde eine allgemeine Formel für das $1/f$ -Geräusch-Spektrum abgeleitet.

А. ЗАКЛИКЕВИЧ

ОБЛАСТИ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ШУМОВ $1/f$

Резюме

Приведены математические основы применяемые до сих пор в теоретических исследованиях шумов $1/f$. Констатируется, что для объяснения явления шумов $1/f$ необходима предпосылка существования процессов улавливания с очень большими постоянными времени. Представлены две модели, в которых решающим является время улавливания свободных носителей заряда ловушками. Далее на примере транзистора MOS с каналом типа n приведен метод определения спектра шумов $1/f$, зависящих от соответственного распределения времен достижения ловушек

носителями. Такое распределение возможно в случае обмена заряда между ловушками находящимися в слое окисла и полупроводником путем туннелирования.

После анализа проводимых до сих пор теоретических исследований предложена новая модель шумов $1/f$, сущность которой состоит в предпосылке соответственно длительного времени накопления зарядов в системах ловушек. Механизм этого накопления обоснован на явлении сильно активированной хемисорбции молекул водорода в полупроводнике. Выведена общая формула на спектр шумов $1/f$.

Telekomunikacja światłowodowa

ADAM SMOLIŃSKI (WARSZAWA)

Instytut Podstaw Elektroniki Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 11.3.1975

W referacie¹⁾ podano próbę opisanie wyników prac nad możliwością zrealizowania telekomunikacji światłowodowej. Przedstawiono sposoby rozchodzenia się fal świetlnych we włóknach szklanych w postaci jednego lub wielu modów, określono osiągalne szerokości pasm ze względu na zniekształcenia opóźnieniowe różnych typów światłowodów.

Prace nad obniżeniem zanieczyszczeń w szkłe doprowadziły do zmniejszenia tłumienia światłowodów do rekordowych wartości ok. 1 dB/km. Jednak znajdujące się w produkcji światłowody mają tłumienie $20 \div 30$ dB/km.

Rozważono możliwości zastosowania laserów półprzewodnikowych i jonowych ciała stałego oraz diod luminescencyjnych jako źródeł światła. Lasery półprzewodnikowe nie mają jeszcze dostatecznej trwałości, ale są łatwe do modulacji. Jako detektory stosuje się fotodiody krzemowe, często z powielaniem, wypróbowane elementy półprzewodnikowe.

Problem wzmacniania sygnałów nie jest jeszcze dostatecznie opanowany. Liczne badania wskazują, że długości odcinków wzmacniakowych — przy zastosowaniu laserów — powinny być rzędu kilku kilometrów przy szerokości pasma do jednego gigaherca. Natomiast diody luminescencyjne dają gorsze rezultaty ($B \approx 30$ MHz i $l \approx 2$ km).

1. WSTĘP

Telekomunikacja świetlna stosowana jest od dawna, lecz dopiero niedawno zastosowania światła spójnego, wytwarzanego przez lasery, pchnęło ją na nowe tory. Okazało się jednak szybko, że taka telekomunikacja w obrębie atmosfery ziemskiej jest ograniczona do niewielkich, kilkukilometrowych odległości, a szerszy jej rozwój może zapewnić jedynie zastosowanie włókien szklanych jako światłowodów.

Dzisiaj nie ma już wątpliwości, że ten typ telekomunikacji znajdzie zastosowanie, lecz brak jest jedynie odpowiedzi na pytanie, kiedy to nastąpi. Dzisiaj panuje powszechne przekonanie, że telekomunikacja światłowodowa będzie wprowadzona do eksploatacji w latach osiemdziesiątych w krajach wysoko uprzemysłowionych i chyba w latach dwięćdziesiątych u nas w kraju.

Trzeba jeszcze dać odpowiedź na pytanie, dlaczego ten typ telekomunikacji ma rację bytu. Wiele argumentów za nim przemawia, a tutaj można odpowiedzieć w skrócie w sposób następujący. Względem ekonomiczne będą skłaniać do stosowania telekomunikacji światłowodowej nie tylko przy łączności dalekosiężnej i dużej liczbie łączy, lecz również w obrębie sieci lokalnych nawet przy niewielkiej liczbie odbiorców.

¹⁾ Tekst referatu wygłoszonego na posiedzeniu Komitetu Elektroniki i Telekomunikacji PAN w dn'u 14.11.1974 r., uzupełniony danymi z "Topical Meeting on Optical Fiber Transmission", Williamsburg, Virginia, 7—9 styczeń 1975.

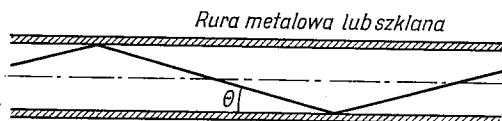
Telekomunikację światłowodową cechuje duża oszczędność materiałowa: jeden gram szkła na włókna zastępuje 10 kg miedzi, przy czym wytrzymałość włókna szklanego jest większa nie tylko od wytrzymałości miedzi, ale również i stali.

Wielka odporność na zakłócenia różnego rodzaju, łącznie z małym ciężarem światłowodów i współpracujących urządzeń uprzywilejowuje ten typ komunikacji w technice wojskowej również na niewielkie odległości. Znane są pomyślne próby zastosowań na samolotach i okrętach, wytrzymujących ciężkie warunki bojowe.

W dalszej części referatu postaram się dać odpowiedź również na pytanie, jak realizowana jest komunikacja światłowodowa i jak pracują jej urządzenia.

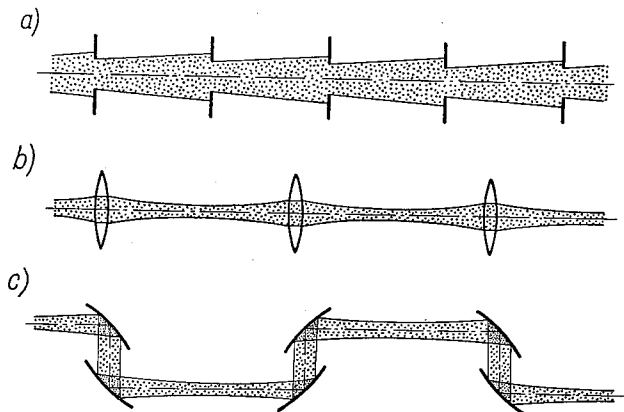
2. MOŻLIWOŚCI WYKORZYSTANIA ŚWIATŁA DLA CELÓW TELEKOMUNIKACJI

Częstotliwość promieniowania światła widzialnego wynosi od ok. 10^{14} do ok. 10^{15} Hz, czyli kilkaset trylionów drgań na sekundę. Jeśli założymy pasmo modulacyjne rzędu 10% częstotliwości fali, to otrzymamy olbrzymie dla dzisiejszej techniki szerokości pasm 10^4



Rys. 1. Światłowód powietrzny jednorodny z wewnętrznymi odbiciami

do 10^5 GHz. Bezpośrednie wykorzystanie tak szerokich pasm jest możliwe przy komunikacji optycznego zasięgu, jednak jej realizacja w atmosferze ziemskiej jest możliwa jedynie w obrębie stosunkowo krótkich, bo kilkukilometrowych odległości [1]. Jak wiadomo wywołane to jest małą i zmienną przezroczystością atmosfery ziemskiej. Powyższe ograni-

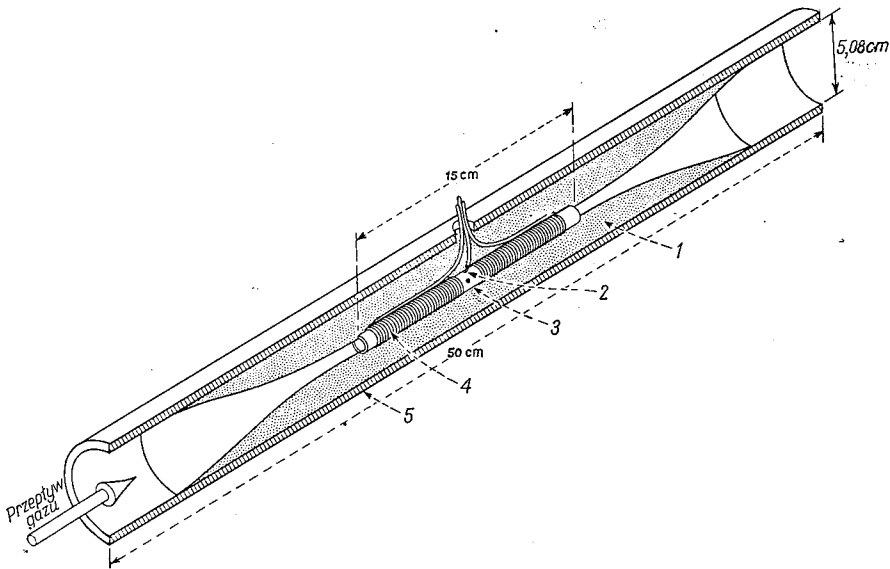


Rys. 2. Światłowody bez wewnętrznych odbić
a) z przesłonami, b) z soczewkami, c) z lustrami

czenia nie istnieją w przestrzeni kosmicznej, gdzie zasięg ograniczony jest jednak przez szumy śrutowe (przy mocy wypromieniowanej 1 mW szacuje się go na 10 lat świetlnych!).

W warunkach ziemskich komunikacja optyczna dalekosiężna może być stworzona jedynie drogą prowadzenia fal świetlnych w określonej przestrzeni światłowodu. Proponowano wiele typów światłowodów, lecz tylko kilka z nich wzbudza techniczne zainte-

resowania [2]. Najprostsze puste światłowody metalowe prowadzące fale za pomocą wewnętrznych odbić (rys. 1), cierpią na wielomodowość i poważne ograniczenia pasma. Wewnętrznych odbić można uniknąć przez zastosowanie odpowiednich przesłon periodycznie rozstawionych, jak również przez soczewkowanie promieniowania lub jego prowadzenie przez odbicia lustrami toroidalnymi (rys. 2). Można również stosować gazowe soczewki (rys. 3) [3]. Te systemy odznaczają się małymi stratami, rzędu 1 dB/km, lecz



Rys. 3. Soczewka gazowa

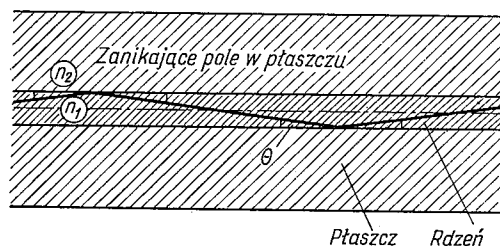
wysokie ich koszty, podatność na wpływy zewnętrzne, jak zmiany temperatury, drgania mechaniczne i trudności eksploatacyjne, praktycznie wyeliminowały je z dalszych rozważań. Natomiast światłowody dielektryczne, głównie szklane, rokują coraz większe nadzieje i nad możliwością ich zastosowania do celów telekomunikacji zajmujemy się w dalszej części referatu [4].

3. ŚWIATŁOWODY SZKLANE

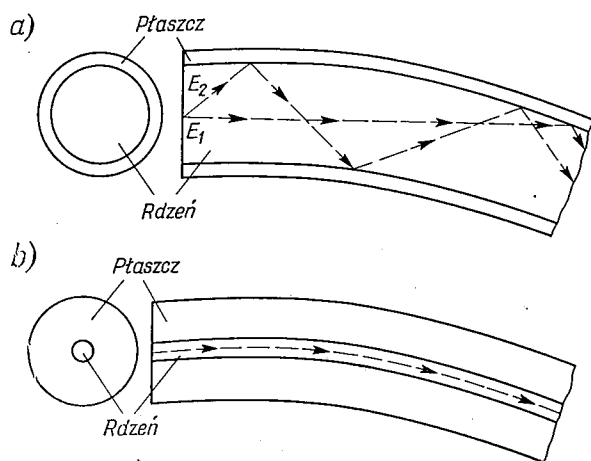
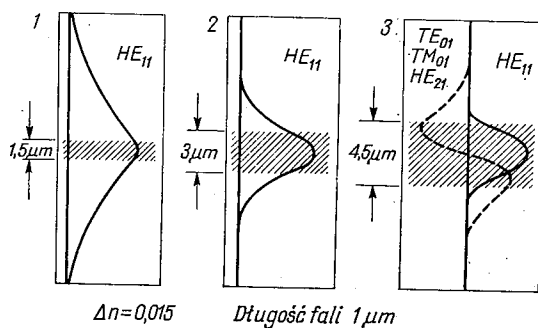
3.1. Fale elektromagnetyczne częstotliwości optycznych można prowadzić w światłowodach szklanych za pomocą całkowitych odbić od ścian szkła (rys. 4). Odpowiednie warunki do tego celu występują w cylindrycznym rdzeniu dielektrycznym, wykonanym z materiału o większym współczynniku załamania niż otaczający go płaszcz dielektryczny (rys. 5). Wewnątrz rdzenia rozprzestrzenia się fala elektromagnetyczna odbijająca się całkowicie od jego ścianek (rys. 5a). Warunkiem rozprzestrzeniania się fali jest, aby jej promienie odbijały się z kątem mniejszym od kąta krytycznego, wyznaczonego przez prawo Snelliusa:

$$\cos \theta_{kryt} = \frac{\text{współczynnik załamania płaszczka}}{\text{współczynnik załamania rdzenia}} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (1)$$

Pole elektromagnetyczne występuje zarówno w rdzeniu jak i w płaszczu (rys. 6). Zanikające pole płaszczu nie wywołuje promieniowania pod warunkiem, że granica obu dielektryków jest doskonałym cylindrem. Tłumienie fali elektromagnetycznej wywołane jest raczej stratami propagacyjnymi w rdzeniu i płaszczu.



Rys. 4. Światłowod dielektryczny

Rys. 5. Światłowody dielektryczne
a) wielomodowy, b) jednomodowy

Rys. 6. Rozkład energii w rdzeniu i płaszczu światłowodu dielektrycznego

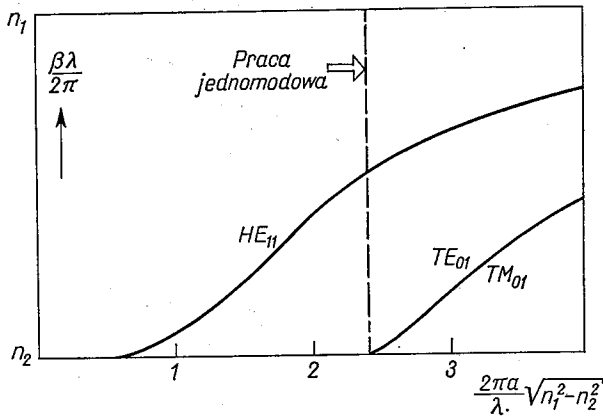
Płaszcz jest potrzebny nie tylko po to, aby stworzyć niezakłócone podparcie mechaniczne dla rdzenia, lecz służy również do doboru odpowiednich modów fali elektromagnetycznej rozprzestrzeniającej się w światłowodzie. Warunek powstawania jednego tylko

modu zależy od różnicy kwadratów współczynników załamania rdzenia (o promieniu a) i płaszczu i wynosi

$$\frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} < 2,4. \quad (2)$$

Przy częstotliwościach optycznych nierówność tę łatwo jest spełnić, gdyż można łatwo dobrać szkła na rdzeń np. $n_1 = 1,500$ i płaszcz (np. $n_2 = 1,485$).

Warunek jednomodowości jest spełniony, gdy średnica rdzenia ma rozmiar kilku długości fali, a więc parę mikrometrów. W przypadku bardzo małych różnic współczynników załamania rdzenia i płaszczu średnice rdzenia mogą przekroczyć $20 \mu\text{m}$ [9] [11]. Wówczas rozprzestrzenia się mod HE_{11} odznaczający się brakiem częstotliwości odcięcia (rys. 7 i 8).



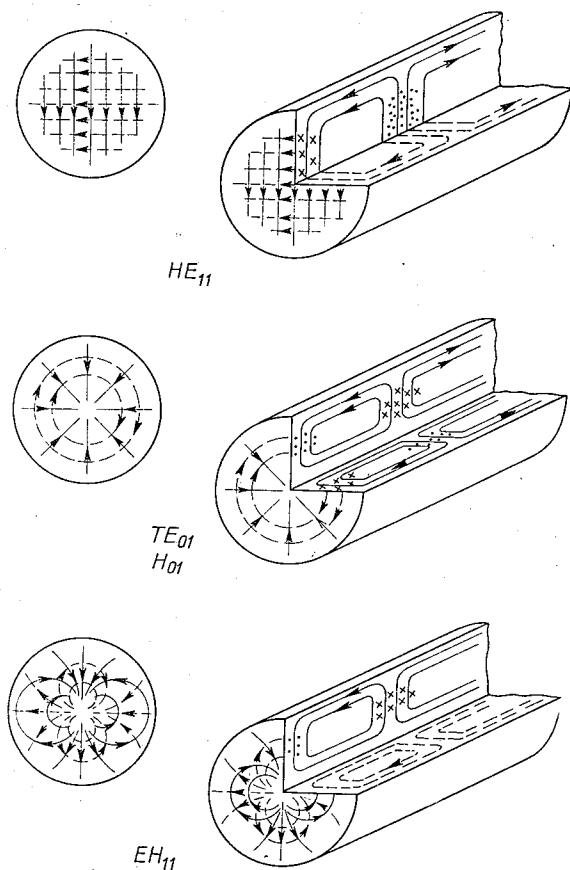
Rys. 7. Warunki powstawania modów najniższych rodzajów

Gruby płaszcz o średnicy setek długości fali (a więc setek mikrometrów) prowadzi poza rdzeniem część fali elektromagnetycznej, sprowadzając pole pozaświatłowodowe praktycznie do zera.

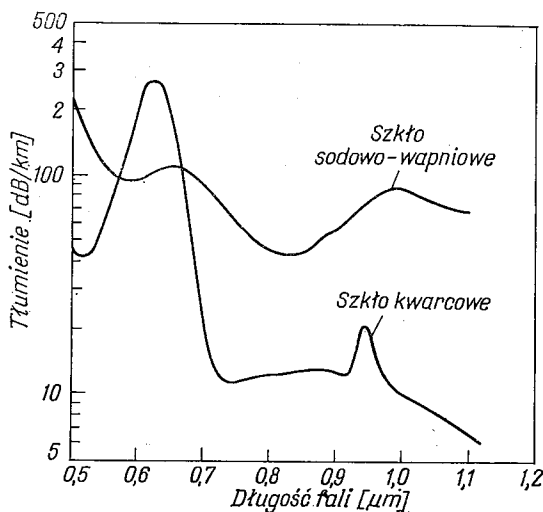
W przypadku niespełnienia nierówności (2) powstają w światłowodzie dodatkowe mody jak TE_{01} TM_{01} HE_{21} drugiego rodzaju, EH_{11} trzeciego rodzaju (rys. 6.8) [7]. Prowadzi to do światłowodów wielomodowych charakteryzujących się tym, że fala koncentruje się głównie w rdzeniu (zazwyczaj o średnicy ok. $100 \mu\text{m}$); wobec tego płaszcz może być stosunkowo cienki (rys. 5). Światłowodów wielomodowych odznaczają się mniejszym tłumieniem, lecz znacznie większymi zniekształceniami opóźnieniowymi [4], [5].

3.2. Tłumienie fali elektromagnetycznej w światłowodzie zależy nie tylko od rodzaju szkła, lecz głównie od jego zanieczyszczeń jonami OH i metalami przejściowymi. Światłowodów wykonanych ze szkła technicznego wykazują bardzo duże tłumienie fali (powyżej 1000 dB/km), wywołane głównie przez te zanieczyszczenia. Przy obniżaniu poziomu zanieczyszczeń uwidaczniają się właściwości rodzaju szkła; szkło kwarcowe wykazuje mniejsze wartości tłumienia fali niż np. popularne szkło sodowo-wapniowe (rys. 9); zaleta ta jest okupiona znacznie wyższą temperaturą topnienia [8].

Charakterystyki tłumienia (rys. 9) wykazują charakterystyczne maksimum w okolicy $1 \mu\text{m}$, wywołane absorpcją jonów OH. Na krzywych tych widać wyraźnie dwa „okna”



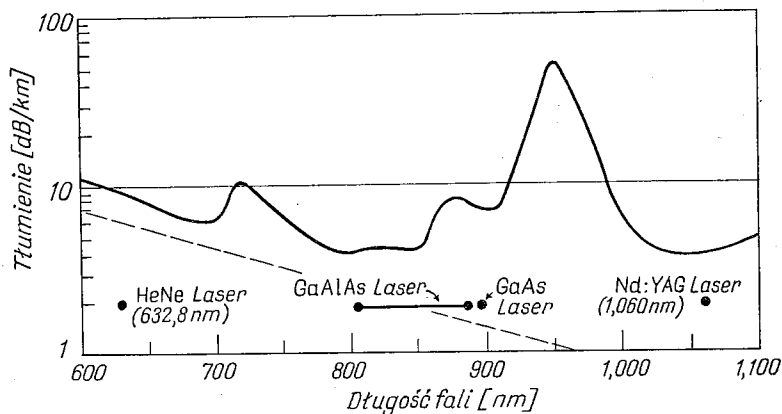
Rys. 8. Pola elektryczne i magnetyczne najniższych rodzajów w światłowodach dielektrycznych



Rys. 9. Tłumienie światłowodu w dwóch podstawowych rodzajach szkła: a) kwarcowego, b) sodowo-wapniowego, w zależności od długości fali

małego tłumienia, występujące w pasmach $0,8 \div 0,9 \mu\text{m}$ i ok. $1,1 \mu\text{m}$. To drugie okno ma z zasady niższą wartość tłumienia fali, gdyż tłumienie rozproszeniowe materiału maleje z czwartą potęgą częstotliwości i osiąga wartości mniejsze od 1 dB/km powyżej $1 \mu\text{m}$ (rys. 10) [9].

W ostatnich latach dokonano wielkiej pracy nad technologią światłowodów, poprawiając strukturę szkła i obniżając zanieczyszczenia do poziomu 10^{-9} przez zastosowanie metod i surowców stosowanych w technologii półprzewodników [10] [11]. Te skompliko-



Rys. 10. Tłumienie niskostratnego światłowodu z zaznaczeniem długości fal typów laserów
linia przerywana odnosi się do tłumienia rozproszeniowego samego materiału

wane zabiegi pozwoliły na opracowanie światłowodów jednomodowych o dużych średnicach rdzenia ($> 20 \mu\text{m}$) oraz na odpowiedni rozkład domieszek w kwarcowym rdzeniu (dwutlenek germanu) i w płaszczu (dwutlenek boru), w rezultacie czego otrzymano tłumienie przy $1,06 \mu\text{m}$ fali świetlnej poniżej 1 dB/km . Naturalnie w produkcji nawet laboratoryjnej tłumienia są kilka razy większe.

Ponieważ kwarc ma wysoką temperaturę topnienia, co utrudnia procesy technologiczne, więc robione są próby na wielką skalę z innymi rodzajami szkła niskotopliwego (np. sodowo-glinowego) [12]. Celem potania produkcji i ułatwienia eksploatacji stosuje się również płaszcz światłowodu z plastiku (teflon), co jednak prowadzi do zwiększenia tłumienia ze względu na większe straty w płaszczu [13]. Wymienione technologie są skomplikowane i drogie, a włókna szklane o b. małych tłumieniach wrażliwe na wilgoć, uszkodzenia mechaniczne i naprężenia i jeszcze nie są osiągalne na rynku. Oferowane przez nieliczne jeszcze firmy światłowody mają obecnie tłumienia $20 \div 30 \text{ dB/km}$.

3.3. Najważniejsze ograniczenia transmisji światłowodowej pochodzą od zniekształceń opóźnieniowych. Podtrzymywanie jednego modu w światłowodzie o dużej średnicy rdzenia jest niemożliwe ze względu na nieuniknione przetwarzanie się modów.

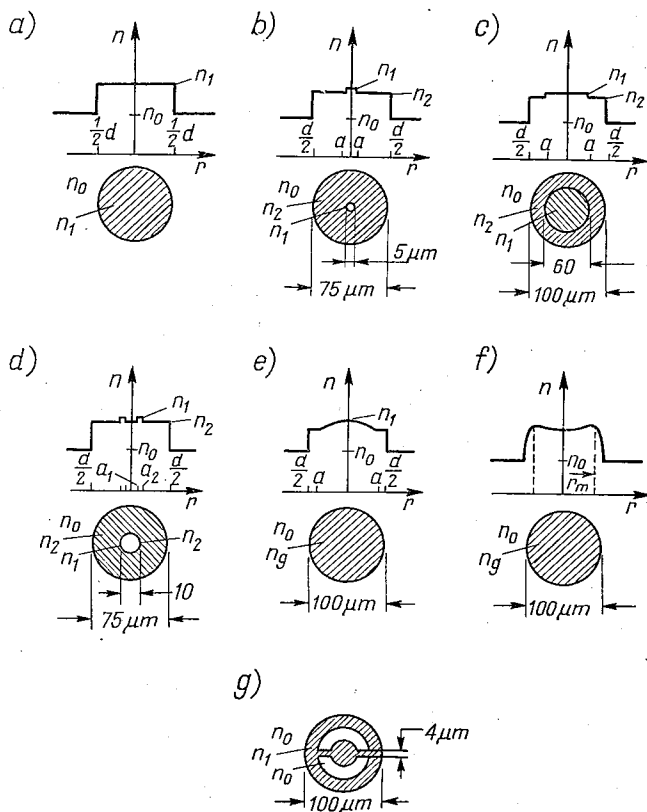
Zatem w takich światłowodach może się rozprzestrzeniać tylko fala wielomodowa, której opóźnienie między najdłuższą i najkrótszą drogą wynosi

$$\frac{t_w}{l} = \frac{1}{c} \frac{n_1}{n_2} (n_1 - n_2). \quad (3)$$

Zatem przy jednocentowej różnicy współczynników załamania otrzymujemy opóźnienie 50 ns/km, co prowadzi do dopuszczalnej szerokości pasma tylko ok. 10 MHz! Widzimy więc, jak silne ograniczenia stawiają zniekształcenia opóźnieniowe transmisji wielomodowej. Natomiast w jednomodowym światłowodzie o zniekształceniach opóźnieniowych decydują właściwości materiałowe rdzenia i płaszczka. Teoretycznie można je obliczyć z charakterystyk dyspersyjnych modu HE_{11} (rys. 7) jako rozszerzanie się impulsu gaussowskiego o szerokości t_0 do wartości

$$t_j = \left[t_0^2 + \left(\frac{l}{t_0} \cdot \frac{d\beta}{d\omega^2} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (4)$$

Dla 1 km odcinka wspomnianego światłowodu jednomodowego 8 ps szerokość impulsu rośnie do 12 ps, co odpowiada szerokości pasma ok. 50 GHz. Otrzymujemy 5000 razy szersze pasmo dopuszczalne niż dla światłowodu wielomodowego!



Rys. 11. Profile rozkładu współczynników załamania różnych typów światłowodów

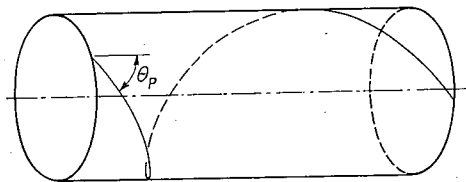
3.4. Szereg zalet światłowodów wielomodowych, jak mniejsze tłumienie fali, łatwość sprzęgania się z aparaturą nadawczą i odbiorczą itp. wywołały dalsze prace nad tymi typami światłowodu. Prace te doprowadziły do światłowodów samoogniskujących (np. japoński Selfoc itp.), których szkło ma zmienny kwadratowo współczynnik załamania

(rys. 11e). Najdłuższą drogę ma mod śrubowy (rys. 12) i różnica jego czasu transmisji i promienia osiowego wynosi

$$\frac{t_s}{l} \approx \frac{3}{2} \cdot \frac{n_2}{c} (n_2 - n_{10})^2 \quad (5)$$

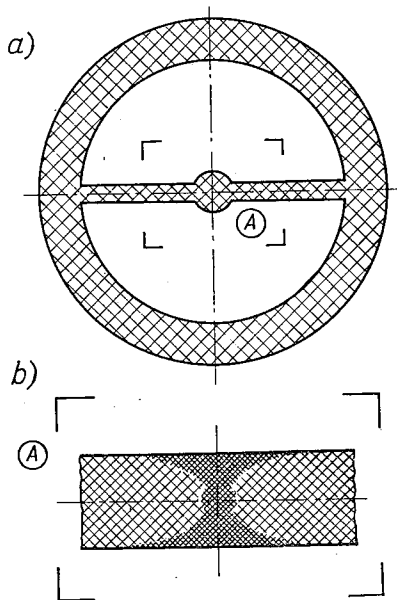
(gdzie indeks 2 odnosi się do modu śrubowego a indeks 10 do promienia osiowego).

Na przykład dla $n_2 = 1,5$ i $|n_2 - n_{10}| = 1\%$ n_2 otrzymujemy różnice opóźnień ok. 0,75 ns/km, co odpowiada dopuszczalnej szerokości pasma ok. 700 MHz, czyli 70 razy lepiej niż dla normalnego światłowodu wielomodowego.



Rys. 12. Mod śrubowy w światłowodzie samoogniskującym (Selfoc)

Kwadratowy rozkład współczynnika załamania uzyskuje się przez odpowiednie domieszkowanie szkła, co nie jest łatwą operacją technologiczną [9]. Efekt samoogniskowania można również uzyskać w światłowodzie z jednorodnego materiału, skonstruowanym w postaci rury z wewnętrznym prętem (rys. 11g powtórzony na rys. 13a). Równoważny



Rys. 13. Światłowod z jednego rodzaju szkła
geometria światłowodu zapewnia efekt samoogniskowania

światłowod, przedstawiony na rys. 13b, odznacza się nierównomiernym i rosnącym (przy zbliżaniu się do środka) współczynnikiem załamania, co wywołuje właśnie ten efekt samoogniskowania [14].

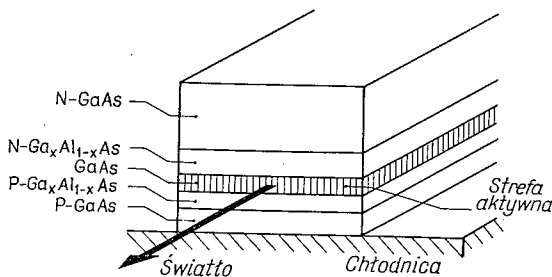
3.5. Technologia włókien szklanych jest znana od czasów egipskich, jednak wysokie i precyzyjne wymagania stawiane przez światłowody zmusiły do poważniejszych prac w tej dziedzinie. Zagadnieniom materiałowym należy poświęcić też sporo uwagi, gdyż — jak już wspomniano — zanieczyszczenia w szkłe nie mogą przekraczać 10^{-9} ! [5] [15].

Na tym miejscu chciałbym jeszcze wspomnieć, że dobór odpowiednich dielektryków (małe i dokładnie kontrolowane różnice współczynników załamania płaszcza i rdzenia) może być ułatwiony przez zastosowanie cieczy jako rdzenia. Stąd wiele prac nad światłowodami cieczowymi (np. z CCl_4 — czterochlorek węgla), prowadzonych zwłaszcza w uczelniach technicznych ze względu na łatwość eksperymentowania [16].

4. ŹRÓDŁA I ODBIORNIKI ŚWIATŁA

4.1. Dwa typy źródeł światła nadają się do celów telekomunikacji światłowodowej; są to lasery półprzewodnikowe i jonowe ciała stałego wykazujące promieniowanie spójne oraz diody luminescencyjne o niespójnym promieniowaniu. Oba te typy odznaczają się konkretnymi zaletami i wadami, które decydują o możliwości ich zastosowań.

4.2. Najpierw trzeba zająć się laserami półprzewodnikowymi heterozłączowymi GaAs—GaAlAs (rys. 14 i rys. 15) dostarczającymi mocy w temperaturze pokojowej

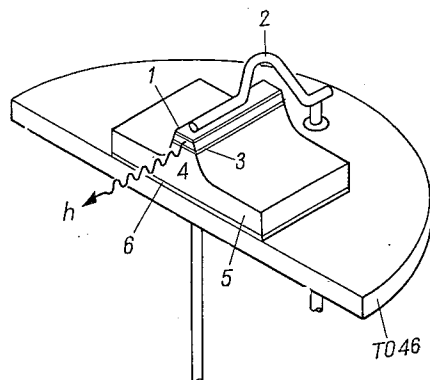


Rys. 14. Półprzewodnikowy laser heterozłączowy — element czynny

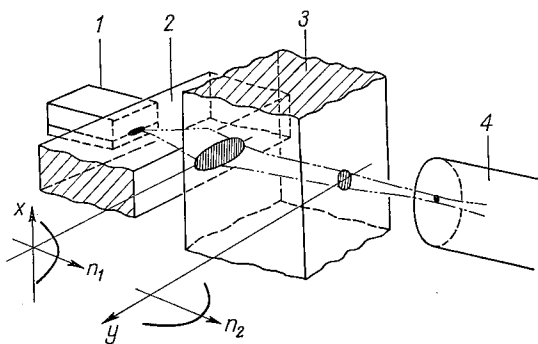
ok. 10 mW w zakresie długości fal $\lambda = 0,75 \div 0,4 \mu\text{m}$ w zależności od ilościowego doboru składników [17] [18] [19]. Pozwala to na jednoczesną transmisję kilku fal nośnych jednym włóknem. Ponieważ w „oknie” $1,0 \div 1,1 \mu\text{m}$ światłowody wykazują mniejsze tłumienie, więc prowadzi się intensywne prace nad laserami, które mogłyby pracować w tym zakresie fal [20]. Do zalet laserów półprzewodnikowych należy zaliczyć małe rozmiary i możliwość łatwej modulacji prądu diody bardzo szybkimi impulsami (max. 2,3 Gbit/s) [21] [22] [23], natomiast bardzo poważną wadą — uniemożliwiającą dzisiejsze zastosowanie tych laserów w telekomunikacji — jest zbyt krótka ich trwałość, sięgająca zaledwie 3000 godzin, choć wkrótce należy się spodziewać jej powiększenia do 10000 godzin [24].

Pewien kłopot sprawia trudność sprzęgnięcia lasera z kilkumikronowym rdzeniem światłowodu jednomodowego [25]; sprawność bezpośredniego sprzężenia nie przekracza zazwyczaj 25% [26]. Żeby zaradzić tej trudności stosuje się specjalne soczewki sprzęgające laser ze światłowodem, dopasowujące równocześnie eliptyczną polaryzację wiązki wychodzącej z lasera do kołowej światłowodu (rys. 16) [27].

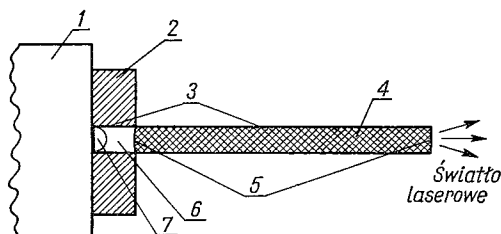
4.3. Do drugiej grupy źródeł światła należy zaliczyć lasery jonowe ciała stałego. Do celów telekomunikacji światłowodowej mogą służyć lasery neodymowe na bazie granatu glinowo itrowego (Nd:YAG) [17]. Wytwarzają one światło o długości fali $\lambda = 1,06 \mu\text{m}$ z mocą ok. 2 mW przy pracy ciągłej jednomodowej. Wzbudzenia tego typu laserów można dokonać za pomocą diody luminescencyjnej zmniejszając w ten sposób rozmiary lasera (rys. 17). Sprawność takiego zespołu nie przekracza jednak 1%, a jego czas pracy zależy od trwałości diody luminescencyjnej i, jak przekonamy się dalej, przekracza 10 000 godzin.



Rys. 15. Półprzewodnikowy laser heterozłączowy w oprawce



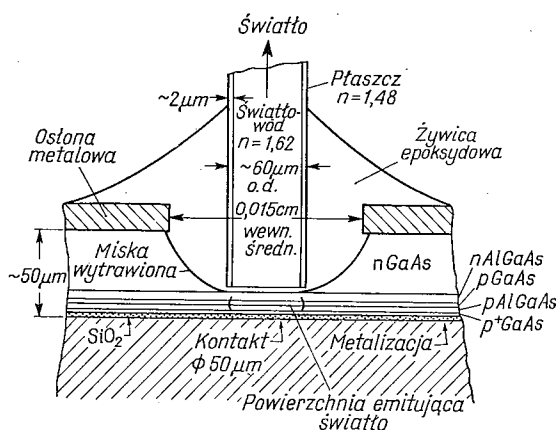
Rys. 16. Soczewki sprzęgające laser półprzewodnikowy ze światłowodem (szkła o zmiennym rozkładzie współczynnika załamania światła)



Rys. 17. Miniaturowy laser jonowy ciała stałego Nd:YAG pompowany na jednym końcu diodą luminescencyjną

Większe nadzieje budzi laser oparty na kryształach pentafosforanu neodymu [28]. Materiał ten jest mechanicznie i chemicznie stabilny do temperatur rzędu 400°C . Koncentracja jonów czynnych może być 30 razy większa niż w innych kryształach jonowych, co prowadzi do zmniejszenia rozmiarów lasera a pobór mocy jest rzędu 1 mW przy początku akcji laserowej. Długość fali wynosi $\lambda = 1,05 \mu\text{m}$ a sprawności sięgają 3% i 30% przy pracy ciągłej i impulsowej.

Lasery jonowe ciała stałego nie nadają się do bezpośredniej modulacji prądowej; zatem zewnętrzny modulator optyczny jest tutaj koniecznością. Modulator taki może służyć również jako szybki przełącznik do zwielokrotnienia czasowego. Istnieje wiele



Rys. 18. Bezpośrednie sprzężenie diody luminescencyjnej z wielomodowym światłowodem

typów modulatorów światła [17], lecz jedynie modulator elektrooptyczny ma odpowiednią szerokość pasma wyrażającą się gigahercami. Zwykle wykonuje się go na kryształach niobianu litu (LiNbO_3) lub tantalanu litu (LiTaO_3) dla zakresu fal świetlnych $0,4$ do $4 \mu\text{m}$. Jako przykład takiego modulatora może służyć modulator dolnoprzepustowy z częstotliwością graniczną $1,3 \text{ GHz}$. Dla 100% głębokości modulacji wymagana moc modulująca jest rzędu paru mW/MHz.

Zmniejszenie mocy modulacji można otrzymać w modulatorach o fali bieżącej, w których ponadto łatwiej jest uzyskać dopasowanie impedancji w szerokim zakresie częstotliwości modulującej.

4.4. W przeciwieństwie do laserów półprzewodnikowych luminescencyjne diody półprzewodnikowe osiągnęły już dzisiaj trwałość powyżej 10 000 godzin, wymaganą przez telekomunikację. Jednak ich promieniowanie nie jest spójne a moc optyczna nie przekracza 5 mW. Długość fali świetlnej diod z arsenku glinu i galu ($\text{AlGa}_{1-x}\text{As}$) daje się ustalić przez dobór składników w zakresie od $0,75$ do $0,9 \mu\text{m}$, natomiast diody z arsenku indy i galu ($\text{InGa}_{1-x}\text{As}$) emitują dłuższe fale (np. $1,5 \mu\text{m}$) [17] [20] [29].

W celu uzyskania możliwie dużej mocy w światłowodzie trzeba stosować odpowiednie sprzężenie diody ze światłowodem [17] [25] [30]. Na rys. 18 podana jest prosta i skuteczna konstrukcja sprzężenia diody luminescencyjnej ze światłowodem wielomodowym prostopadle ustawionym do płaszczyzny emitującej światło. Dla jaskrawości 100 W/Sr/cm^2 moc

pobrana przez światłowód przekracza 1 mW; jest ona proporcjonalna do różnicy współczynników załamania rdzenia i płaszczu, co stanowi zaletę światłowodów wielomodowych.

Należy dodać, że szerokość spektralna promieniowania diody luminescencyjnej podanej na rys. 18 wynosi ok. 165 Å, co odpowiada różnicy czasu opóźnienia wywołanego przez światłowód ok. 1,7 ns/km, a więc dopuszczalnej szerokości pasma do ok. 30 MHz, z drugiej strony szybkość zmian emisji w diodzie dopuszcza szerokości pasma kilkuset megaherców, co może być wykorzystane przy zawężeniu szerokości spektralnej diody za pomocą odpowiednich filtrów [17].

4.5. Z powyższych rozważań można wysnuć następujące wnioski.

1) Lasery półprzewodnikowe wytwarzające światło spójne nadają się przede wszystkim do współpracy ze światłowodami jednomodowymi pozwalając uzyskać przy modulacji prądowej szerokie pasma rzędu gigaherca. Na przeszkodzie zastosowaniu takich laserów już dzisiaj stoi zbyt krótka ich trwałość.

2) Lasery jonowe ciała stałego neodymowe, wytwarzające również światło spójne, wzbudzane diodami luminescencyjnymi, zapewniają odpowiedni czas pracy; wymagają jednak stosowania modulatorów optycznych, ograniczających szerokość pasma modulacyjnego do gigaherca — przyrządów skomplikowanych i drogich. Głównie ich zastosowanie, to współpraca ze światłowodami jednomodowymi.

3) Diody luminescencyjne są tanimi i długotrwałymi elementami dostarczającymi jednak mniejszej mocy światła niespójnego; współpracują poprawnie ze światłowodami wielomodowymi wprowadzając ograniczenia pasma modulującego do ok. 30 MHz.

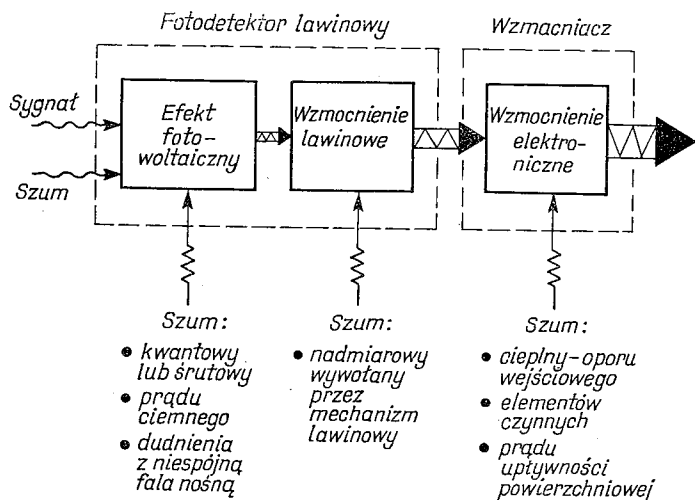
4) Promieniowanie świetlne wytwarzane przez wymienione źródła może być wykorzystane przez zastosowanie modulacji analogowej lub impulsowej; stąd wynika częsta dwistość w opisie właściwości omawianych elementów. Szerszemu rozpowszechnieniu modulacji analogowej stają na przeszkodzie nieliniowości elementów czynnych i dlatego raczej można się spodziewać wykorzystywania różnego typu modulacji impulsowych, o których będzie mowa w dalszej części referatu.

4.6. Do detekcji sygnałów świetlnych pobieranych ze światłowodów nadają się najlepiej fotodiody krzemowe [17] [31] [31a]; współczynnik absorpcji krzemu maleje z długością fali, co pozwala na optymalizowanie diod grubością warstwy pozbawionej ładunków w zakresie od 0,4 do 1,1 μm na maksimum szybkości pracy. Sprawność kwantowa diod luminescencyjnych jest bardzo duża ($\sim 90\%$), a czas narastania impulsu poniżej nanosekundy. Zazwyczaj stosuje się diody lawinowe, które łączą detekcję sygnału optycznego z wewnętrznym wzmocnieniem prądu; wzmocnienie to wywołane jest przez powielanie lawinowe ładunków w strefie silnego pola diody spolaryzowanej zaporowo. Ze wzrostem wzmocnienia pogarsza się jednak liniowość charakterystyki diody i przedłuża się czas zanikania impulsu.

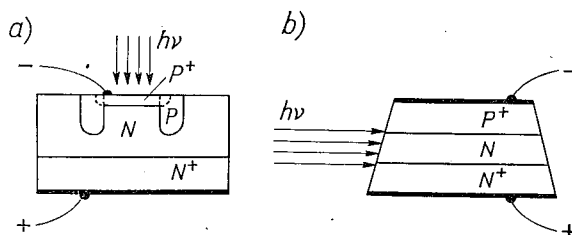
Iloczyn wzmocnienia przez szerokość pasma takich diod waha się w granicach od 20 do 100 GHz. Pozwala to na osiągnięcie wzmocnienia rzędu kilkudziesięciu decybeli.

Głównym źródłem szumów są szумы śrutowe pochodzące z prądu „ciemnego” i szумы kwantowe. Proces powielania lawinowego wprowadza dodatkowe szумы rosnące ze wzmocnieniem diody; szумы śrutowe łącznie z szumami cieplnymi układu detekcyjnego (rys. 19) decydują o dopuszczalnej odległości między wzmacniakami [17] [32].

Zależnie od zastosowania rozróżniamy dwie konstrukcje fotodiody (rys. 20). Na rys. 20a podana jest konstrukcja planarna z czołową płaszczyzną czułą na promieniowanie, nadająca się dobrze do sprzężenia ze światłowodem o większej średnicy, a więc wielomodowym. Natomiast pokazana na rys. 20b konstrukcja mesa z boczną płaszczyzną czułą na promieniowanie o rozmiarach kilkunastu mikrometrów nadaje się lepiej do współpracy ze światłowodem jednomodowym [33].



Rys. 19. Rozkład szumów w fotodiodzie



Rys. 20. Fotodiody planarna a) z czołową i b) z boczną płaszczyzną czułą na promieniowanie

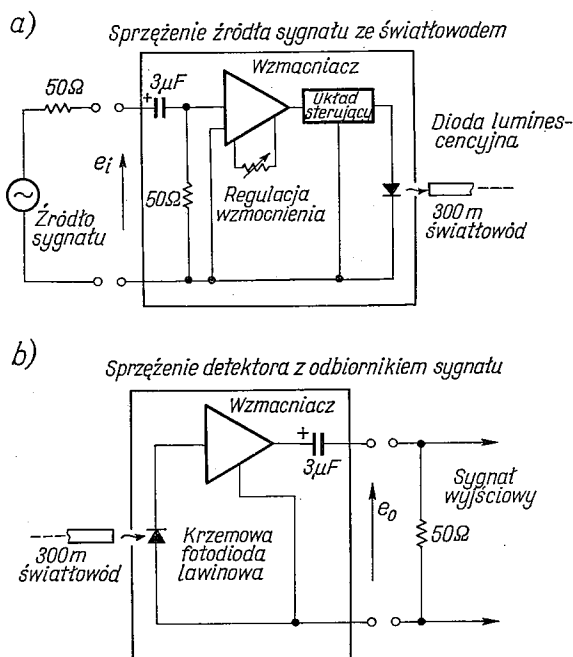
Fotodiody lawinowe wymagają dosyć dużych i stabilizowanych napięć zasilających (mesa przeszło 200 V), jak również stabilizacji temperatury pracy. Odnznaczają się za to długim czasem pracy, wystarczającym dla celów telekomunikacji światłowodowej.

4.7. Po omówieniu podstawowych postaci źródeł i detektorów światła, których przykład zastosowania w prostych układach elektronicznych podany jest na rys. 21, należy zastanowić się nad możliwością wzmacniania fali świetlnej tłumionej w światłowodzie.

Istnieją dwie znane metody wzmacniania; pierwsza z nich zwana pośrednią, polega na detekcji modulowanej fali świetlnej, na wzmacnianiu sygnału podstawowego i na powtórnej modulacji źródła lokalnego fali świetlnej. Ta metoda, wymagająca stosunkowo dużej liczby elementów, napotyka na trudności szerokopasmowego wzmacniania sygnału pod-

stawowego, zwłaszcza gdy zajmuje pasmo do gigaherca włącznie. Stosować ją jest łatwiej przy wąskim widmie sygnału niewiele przekraczającym 10 MHz i wówczas wykorzystuje się z powodzeniem odpowiednio zaadaptowane układy z rys. 21 [34].

Druga metoda stosuje odłumienie światłowodu bezpośrednio za pomocą wzmacniaczy laserowych ciała stałego [35] [36] [37]. Pozwalają one w dzisiejszym stanie techniki na wzmacnianie pasm rzędu kilkudziesięciu gigaherców. Do tego celu stosować można poprzednio wspomniane półprzewodnikowe lasery heterozłączone z arsenku galu, uzyskując



Rys. 21. Proste układy: a) nadawczy (z diodą luminescencyjną LED) i b) odbiorczy (z fotodiodą lawinową)

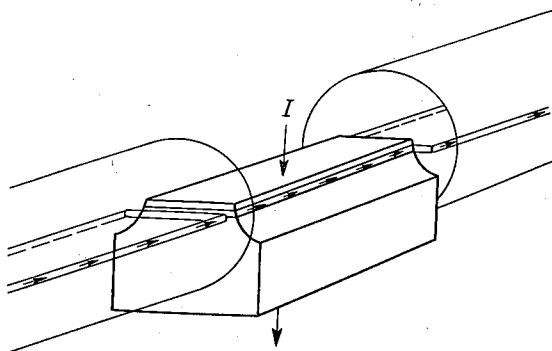
stabilne wzmocnienia kilkunastu decybeli i moc wyjściową szumów rzędu kilkudziesięciu mikrowatów. Układy te pozwalają na pracę ciągłą i impulsową. Zasady konstrukcji takiego lasera i jego sprzężenie ze światłowodami o rdzeniu prostokątnym pokazane są na rys. 22 [35]. Naturalnie półprzewodnikowe wzmacniacze laserowe mają ograniczoną i jeszcze niedostateczną trwałość.

Inny typ lasera ciała stałego, a mianowicie jonowego (Nd:YAG) był również badany z powodzeniem jako wzmacniacz wykonany w postaci zminiaturyzowanej i wykorzystującej konstrukcje optyki zintegrowanej [38]. Jego trwałość zależy od trwałości lampy pompującej. Odkryto również możliwości wykorzystania zjawiska Ramana w światłowodach cieczowych do wzmacniania fali świetlnej [39].

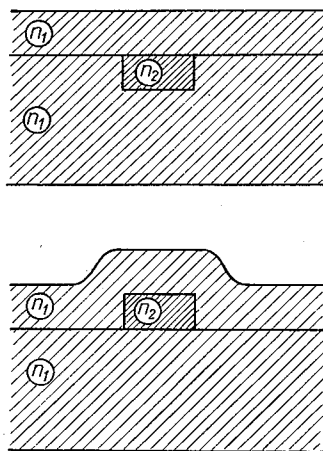
Na tym miejscu należy podkreślić, że wzmacniacze laserowe nie osiągnęły jeszcze dostatecznego poziomu technicznego i w porównaniu z innymi elementami telekomunikacji światłowodowej pozostają znacznie w tyle.

4.8. Wymienione uprzednio elementy optyczne jak lasery i fotodiody, zaopatrzone w układy pomocnicze, tworzą aparaturę optyczną. Klasyczny kształt aparatury optycznej,

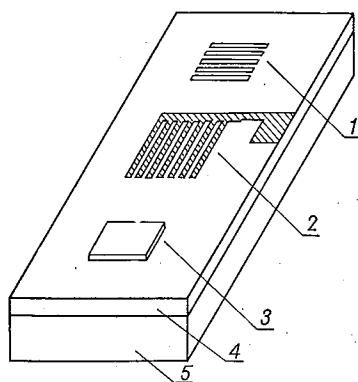
znany nam z fizyki, odznacza się dużą objętością i dużą wrażliwością na mechaniczne zakłócenia. Regulacja optyczna takiej aparatury jest w warunkach pozalaboratoryjnych wielce utrudniona. Dlatego dzisiaj dąży się do scalenia elementów optycznych, łącząc je określonymi drogami na materiale wsporczym, zazwyczaj na płaskim podłożu z materiału, z którego można wykonać czynne i bierne elementy optyczne (np. $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$) [17].



Rys. 22. Zasada pracy lasera jako wzmacniacza odłamującego tor światłowodowy



Rys. 23. Cienkowarstwowe światłowody stosowane w technice optyki zintegrowanej



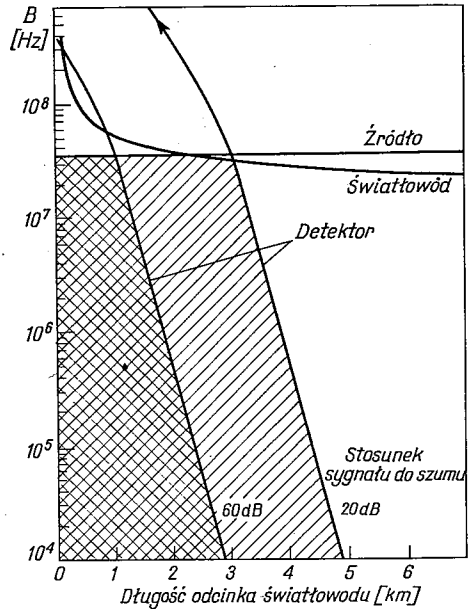
Rys. 24. Nadajnik optyczny złożony z lasera, modulatora elektrooptycznego i sprzęgacza wykonany w technice optyki zintegrowanej

Falę świetlną prowadzi się cienkowarstwowymi światłowodami dielektrycznymi (rys. 23). Stosując znaną technikę maskowania można tworzyć na podłożu szklanym drogi świetlne za pomocą dyfuzji czy implantacji jonów, można wytwarzać elementy czynne jak lasery czy też bierne jak modulatory, przełączniki, sprzęgacze kierunkowe, filtry itp. (rys. 24) [41]. Opisana technika, analogiczna do mikrofalowych układów scalonych, objęta jest nazwą optyki zintegrowanej [40] [42].

5. ZASTOSOWANIA

5.1. Telekomunikacja światłowodowa nie wyszła dzisiaj poza obręb prób i doświadczeń. W literaturze światowej znajdujemy szereg prac na temat możliwości jej szerszego zastosowania. O paru z nich trzeba tutaj wspomnieć.

5.2. Przede wszystkim wzbudzają zainteresowanie obliczenia ograniczeń wprowadzanych przez modulację źródła, światłowód i detektor [6]. Na rys. 25 podano zależności trzynaściu decybelowej szerokości pasma B od dopuszczalnej długości światłowodu l . Pierwsza



Rys. 25. Zależność szerokości pasma od długości odcinka światłowodu wzbudzanego diodą luminescencyjną

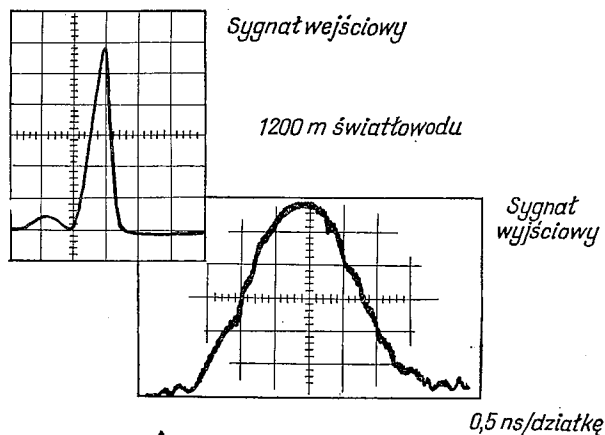
linia (źródło) przedstawia ograniczenia szerokości pasma $B = 35$ MHz możliwościami modulacyjnymi najlepszej dzisiaj handlowej diody luminescencyjnej. Druga krzywa (światłowód) pokazuje ograniczenie szerokości pasma wynikające z właściwości światłowodu; założono tutaj rozszerzanie się impulsu wynoszące 1,5 ns/km (prostoliniowe do 0,5 km a potem pierwiastkowe). Przykład takiego rozszerzania impulsu podany jest na rys. 26. Trzecia i czwarta krzywa podają ograniczenia wynikające ze stosunku sygnału do szumu w fotodiodzie (20 i 60 dB). Z danych rysunku 25 wynika, że dla bardzo krótkich linii istotne jest ograniczenie modulacyjne diody luminescencyjnej, a dla dłuższych decydują właściwości światłowodu i detektora.

Drugi zespół krzywych (rys. 27) dotyczy lasera półprzewodnikowego. Tutaj ograniczenie modulacyjne założono przy 1 GHz, pozostawiając właściwości światłowodu i detektora bez zmian. Dopuszczalna długość światłowodu rośnie około trzykrotnie, jednak właściwości światłowodu ograniczają szerokość pasma do ok. 100 MHz!

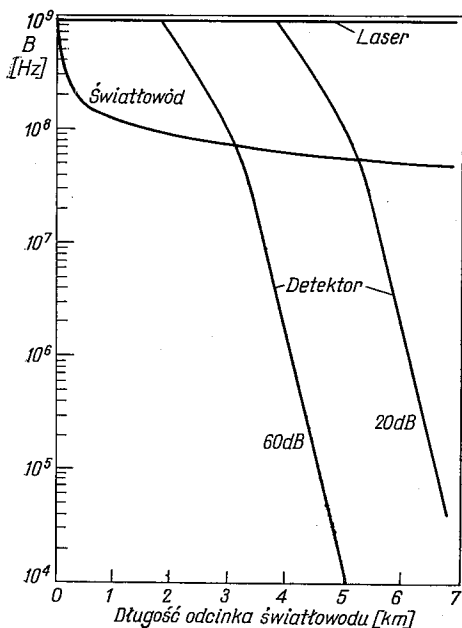
5.3. Inne obliczenia dla światłowodów o mniejszych zniekształceniach opóźnieniowych wykazują możliwość przekazywania informacji z szybkością 300 Mb/s przy tłumieniu fali 30÷40 dB między wzmacniakami. Przy tłumieniu światłowodu 5 dB/km wymaga to

stosowania $6 \div 8$ km odstepu między wzmacniakami [17]. W dalszej przyszłości można się spodziewać gigabitowych szybkości przesyłania informacji.

5.4. W celu zbadania realności zamierzeń, np. wymienionych uprzednio, prowadzi się w wielu laboratoriach prace eksperymentalne nad próbnymi liniami światłowodowymi różnych typów. Niektóre z tych prac przeniesiono już w teren, jak np. próby eksploatacji linii światłowodowej wykonanej przez Bella kanadyjskiego [34].



Rys. 26. Przykład rozszerzania impulsu przez światłowód

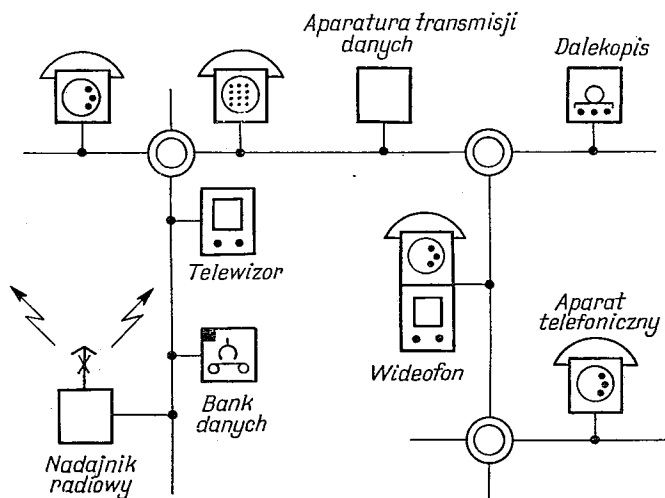


Rys. 27. Zależność szerokości pasma od długości odcinka światłowodu wzbudzonego laserem

W linii tej o długości 20 km i o szerokości pasma 15 MHz stosuje się modulację analogową. Linia zawiera kanał telewizyjny $0 \div 5$ MHz, jednomegahercowe pasmo kanałów telefonicznych przy 7 MHz oraz kanały transmisji danych w paśmie $11 \div 14$ MHz. Źródła

światła są w postaci słabo wykorzystywanych (ze względu na wymagania niezawodności) diod luminescencyjnych, modulowanych prądowo, a dostarczających ok. 0,2 mW mocy do światłowodu. Jako detektor służy fotodioda o paśmie dopuszczalnym przeszło 20 MHz, optymalizowana na minimum zniekształceń nieliniowych (ok. — 50 dB). Tłumienie optyczne fal między wzmacniakami wynosi 14 dB. Wzmacniaki pracują z podwójną przemianą częstotliwości; pogorszenie stosunku sygnału do szumów, wprowadzane przez wzmacniaki, równa się 16 dB, przez co zmniejsza się początkowy stosunek sygnału do szumów równy 56 dB do wartości 40 dB na końcu linii. Obecnie linia ta poddana jest badaniom eksploatacyjnym.

5.5. Telekomunikacja światłowodowa to nie tylko domena łączności dalekosiężnej; prowadzi się szereg prac nad wykorzystaniem jej do sieci lokalnych, co pozwoli na daleko idącą integrację różnego typu informacji [43] [44] [45] [46] [47]. Na rys. 28 podany jest przykład takiej sieci; wnikanie jednak w szczegóły tych propozycji przekracza ramy tego referatu.



Rys. 28. Przykład szerokopasmowej wielodostępnej sieci lokalnej

5.6. Wielkie zainteresowanie budzi możliwość przekazywania za pomocą światłowodów różnego typu informacji w obrębie samolotów i statków zarówno cywilnych (Concorde) jak i wojskowych [48] [49]. Odporność na zakłócenia jest podstawowym atutem tych urządzeń. Coraz więcej informacji na ten temat zjawia się już obecnie w literaturze [50] [51].

5.7. W wielu krajach prowadzi się intensywne prace nad telekomunikacją światłowodową. W Stanach Zjednoczonych A.P. prace te koncentrują się głównie w Bell Laboratories i Corning Glass Works Laboratories [52]. Daleko posunięto już teorię i metody projektowania [53], opracowano wiele konstrukcji elementów aparatury; prowadzi się prace nad zastosowaniem światłowodów do różnych systemów telekomunikacyjnych [49] [47] [51].

Poważniejsze zainteresowania omawianą tematyką wykazuje również telekomunikacja japońska [54] [55]; opracowano szereg oryginalnych konstrukcji elementów aparatury,

przeprowadzono studia nad możliwościami systemowymi, wykonano próby z kablami zawierającymi światłowody i przeprowadzono badania próbnych linii światłowodowych [56] [57].

W mniejszej skali prowadzi się prace w innych państwach; wśród nich przoduje Anglia [58] [59].

6. ZAKOŃCZENIE

Na podstawie danych z literatury i wypowiedzi na licznych konferencjach naukowych można stwierdzić, że obecnie istnieją trzy główne zastosowania światłowodów dla celów telekomunikacji:

- a) telekomunikacja dalekosieżna oparta na światłowodach o bardzo małym tłumieniu i bardzo małych zniekształceniach fazowych oraz na laserowych źródłach i wzmacniaczach światła (szerokości pasma sięgające setek MHz),
- b) telekomunikacja bliskiego zasięgu (kablowe sieci lokalne, telewizyjne, transmisji danych itp.) stosująca światłowody o tłumieniu rzędu 30 dB/km i diody luminescencyjne jako źródła światła (szerokości pasma dziesiątek MHz) oraz
- c) telekomunikacja w obrębie pojedynczych obiektów (duże budynki, statki, samoloty itp.) wykorzystująca światłowody o większych tłumieniach, np. rzędu 100 dB/km i diody luminescencyjne.

Pierwszy typ telekomunikacji jeszcze nie dojrzał do powszechnego zastosowania, głównie ze względu na wspomniane kłopoty z laserami, natomiast pozostałe dwa typy nie przedstawiają już poważniejszych trudności technicznych. O ich zastosowaniu w najbliższej przyszłości decydować będą względy ekonomiczne i specyficzne warunki pracy.

Wydaje się, że powyższy podział tematyki światłowodowej powinien ułatwić wybór głównego kierunku tematyki prac krajowych.

LITERATURA

1. F. F. Godwin, *Optical communications in atmosphere and space*, 1974 IEEE Intercon Technical Papers, Session 12 Optical Communications, Paper 12/1.
2. D. Gloge, *Optical waveguide transmission*, IEEE, vol. 58, No 10, October 1970, p. 1513.
3. P. Kaiser, *An improved thermal gas lens for optical beam waveguides*, Bell System Technical Journal, 1970, vol. 49, No 1, p. 137.
4. D. Gloge, *Wave propagation in optical fibers*, 1974 IEEE Intercon Technical Papers, Session 12 Optical Communications, Paper 12/2.
5. R. M. Maurer, *Glass fibers for optical communications*, IEEE, vol. 61, No 4, April 1973, p. 452.
6. F. L. Thiel, W. B. Bielawski, *Optical waveguides look brighter than ever*, Electronics, March 21, 1974, p. 89.
7. O. Krumpholz, *Modenreine Glasfaser — Lichtwellenleiter*, Wiss. Ber. AEG-Telefunken, vol. 44, No 2, 1971, p. 64.
8. D. Marcuse, *Optical fibres for communications*, Radio and Electronic Engineer, 1973, vol. 43, No 11, p. 655.
9. L. G. Cohen, P. Kaiser, H. M. Presby, *Transmission characteristics of large-core, low-loss, single-mode fibers*, Optical Fiber Transmission Technical Digest, Williamsburg, Virginia, January 7—9, 1975, Paper TuD2.
10. G. W. Tasker, W. G. French, *Low-loss optical waveguides with pure fused SiO₂ cores*, Proc. IEEE, vol. 62, No 9, September 1974, p. 1281.

11. W. G. French, G. W. Tasker, *Fabrication of graded index and single mode fibers with silica cores*, Optical Fiber Transmission Technical Digest, Williamsburg, Virginia, January 7—9, 1975, Paper TuA2.
12. D. A. Pinnow, L. G. Van Uitert, T. C. Rich, F. W. Ostermayer, W. H. Grodkiewicz, *Investigation of the soda aluminosilicate glass system for application to fiber optical waveguides*, Optical Fiber Transmission Technical Digest, Williamsburg, Virginia, January 7—9, 1975, Paper TuA3.
13. L. L. Blyler, A. C. Hart, R. E. Jaeger, P. Kaiser, T. J. Miller, *Low-loss polymer-clad silica fibers produced by laser drawing*, Optical Fiber Transmission Technical Digest, Williamsburg, Virginia, January 7—9, 1975, Paper TuA5.
14. H. Unger, *Millimeter and optical waveguides*, 1973 European Microwave Conference Proceedings, vol. I, paper B.5.1.
15. R. M. Maurer, *Fabrication of optical fibers*, 1974 IEEE Intercon Technical Papers, Session 12 Optical Communication Paper 12/3.
16. W. A. Gambling, *Glass fibres for communication show promise*, Electronic and Power, December 1972, p. 446.
17. S. E. Miller, E. A. J. Marcatili, T. Li, *Research toward optical fiber transmission systems*, Proc. IEEE, vol. 61, No 12, December 1973, p. 1703.
18. H. Gottsman, *Halbleiterlaser bei Raumtemperatur*, Wissenschaftliche Berichte AEG Telefunken, Bd 44, 1971, No 2, p. 45.
19. D. Pawlik, H. Meixner, *Doppelheterostrukturlaser für optische Nachrichtenerübertragung*, Siemens Forschungen und Entwicklungsberichte, Bd 2, 1973, Nr 4, p. 210.
20. J. Galt, *Lasers and LED's for optical fiber transmission*, Optical Fiber Transmission Technical Digest, Williamsburg, Virginia, January 7—9, 1975, Paper WC1.
21. P. Russer, S. Schulz, *Direkte Modulation eines Doppelheterostrukturlasers mit einer Bitrate von 2,3 GBit/s*, Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik, Bd 27, 1973, p. 193.
22. M. Chow, R. E. Epworth, *Direct modulation on semiconductor injection lasers*, Proc. Technical Programme Electrooptics International 74 Conference, Brighton, March 1974, p. 82.
23. D. Schicketanz, *Modulation von Galliumarsenid-Laser*, Siemens Forschungen und Entwicklungsberichte, Bd 2, 1973, Nr 4, p. 218.
24. —, *Semiconductor laser passes 3000 hours of operation*, Electronics, June 21, 1973, p. 5E.
25. E. Weidel, *Light coupling problems in optical communication systems*, Proc. Technical Programme Electrooptics International 74 Conference, Brighton, March 1974, p. 90.
26. L. G. Cohen, *Power coupling from GaAs injection lasers into optical fibers*, B.S.T.J. vol. 51, March 1972, p. 573.
27. S. Sugimoto, K. Kobayashi, K. Nishizawa, A. Ueki, *Light coupling from a DH laser into a Selfoc fiber using slab Selfoc lenses*, Optical Fiber Transmission Technical Digest, Williamsburg, Virginia, January 7—9, 1975, Paper WD1.
28. —, *Laser seems ideal for communications*, Electronics, September 19, 1974, p. 10 E.
29. A. R. Clawson, H. H. Wieder, *Liquid-phase epitaxially grown InAs_xP_{1-x} LED*, Optical Fiber Transmission Technical Digest, Williamsburg, Virginia, January 7—9, 1975, Paper WC3.
30. D. C. Johnson, B. S. Kawasaki, *The coupling of light emitting diodes to bulb-ended optical fiber*, Proc. Technical Programme Electrooptics International 74 Conference, Brighton, March 1974, p. 95.
31. R. J. McIntyre, *Detectors for fiber application*, Optical Fiber Transmission Technical Digest, Williamsburg, Virginia, January 7—9, 1975, Paper WD3.
- 31a. P. P. Webb, R. J. McIntyre, J. Conradi, *Properties of avalanche photodiodes*, RCA Review, vol. 35, June 1974, p. 234.
32. O. Krumpholz, *Signal/Rausch Verhältnis bei Avalanche-Photodioden*, Wissenschaftliche Berichte AEG Telefunken, Bd 44, 1971, No 2, p. 80.
33. O. Krumpholz, S. Maslowski, *Avalanche Meraphotodioden mit Quereinstrahlung*, Wissenschaftliche Berichte AEG Telefunken, Bd 44, 1971, No 2, p. 73.

34. A. M. Prabhu, A. J. Szanto, J. W. C. Taylor, *An optical fiber system for wideband transmission*, Eurocon 74 Conference Digest, Paper C4-21.
35. G. Zeidler, D. Schicketanz, *Use of laser amplifiers in a glassfiber communication system*, Siemens Forschungs und Entwicklungsberichte, Bd 2, 1973, Nr 4, p. 227.
36. J. W. Crowe, W. E. Ahearn, *Semiconductor laser amplifier*, IEEE Journal of Quantum Electronics, vol. QE-2, No 8, August 1966, p. 283.
37. W. F. Konosocky, R. H. Cornely, *GaAs laser amplifier*, IEEE Journal of Quantum Electronics, vol. QE-4, No 4, April 1968, p. 125.
38. R. T. Kersten, P. Möckel, R. Oberbacher, *Ein neodymiumdotierter Yttrium-Aluminium-Granat-Laserverstärker in integrierter Bauform*, Siemens Forschungs und Entwicklungsberichte, Bd 2, 1973, Nr 4, p. 239.
39. J. Stone, *CW Raman fiber amplifier*, Optical Fiber Transmission Technical Digest, Williamsburg, Virginia, January 7-9, 1975, Paper WC5.
40. W. S. C. Chang, M. W. Muller, F. J. Rosenbaum, *Integrated optics*, Laser Applications, vol. 2, Academic Press, New York 1974, p. 227.
41. —, *GaAs injection laser utilizes ion implantation*, IEEE Spectrum, July 1974, p. 20.
42. H. P. Taylor, A. Yariv, *Guided wave optics*, Proc. IEEE, vol. 62, No 8, August 1974, p. 1044.
43. K. D. Schenkel, *Anwendung der Glasfaser in einem Breitbandnachrichtensystem für ein lokales Netz*, Tijdschrift van het Nederlands Elektronica — en Radiogenootschap, deel 38, nr 35, 1973, p. 123.
44. K. D. Schenkel, *Entwurf eines integrierten digitalen Nachrichtensystems mit Vielfachzugriff für ein beliebig verzweigtes Breitbandnetz*, Archiv für Elektronik und Uebertragungstechnik, Bd 27, 1973, p. 168.
45. R. Hildebrand, *Codemultiplexverfahren für verzweigtes Glasfasernetz*, Archiv für Elektronik und Uebertragungstechnik, Bd 27, 1973, p. 177.
46. R. Hoss, F. Weigl, *Fiber-optically linked 100-channel voice intercom*, Optical Fiber Transmission Technical Digest, Williamsburg, Virginia, January 7-9, 1975, Paper ThA5.
47. J. J. Pan, *High frequency wideband fiber-optic link*, Optical Fiber Transmission Technical Digest, Williamsburg, Virginia, January 7-9, 1975, Paper ThB4.
48. R. A. Andrews, A. F. Milton, T. G. Giallorenzi, *Military applications of fiber optics and integrated optics*, IEEE Trans. on MTT, vol. 21, No 12, December 1973, p. 763.
49. D. J. Albares, L. U. Dworkin, K. C. Trumble, *Prospective applications for fiber transmission in the military*, Optical Fiber Transmission Technical Digest, Williamsburg, Virginia, January 7-9, 1975, Paper ThA1.
50. J. N. Kessler, *Fiber-optics excites the military*, Electronics, August 22, 1974, p. 69.
51. —, *Army developing fiber optic cable for front-line use*, Electronics, January 9, 1975, No 1, p. 29.
52. M. D. Rigerink, *Materials systems and fiber fabrication processes in the USA*, Optical Fiber Transmission Technical Digest, Williamsburg, Virginia, January 7-9, 1975, Paper TuA1.
53. E. A. J. Marcatili, *Theory and design of fibers for transmission*, Optical Fiber Transmission Technical Digest, Williamsburg, Virginia, January 7-9, 1975, Paper TuC4.
54. H. Kashiwagi, *Progress of optical fibers for communication in Japan*, Optical Fiber Transmission Technical Digest, Williamsburg, Virginia, January 7-9, 1975, Paper TuB2.
55. S. Ohara, *Status of fiber transmission system research in Japan*, Optical Fiber Transmission Technical Digest, Williamsburg, Virginia, January 7-9, 1975, Paper ThA2.
56. T. Sakoshita, K. Okura, J. Yagamata, Y. Inamura, *Application of fiber-cable transmission systems to telecommunication networks*, Optical Fiber Transmission Technical Digest, Williamsburg, Virginia, January 7-9, 1975, Paper ThA3.
57. T. Uchida, S. Sugimoto, A. Ueki, T. Usui, S. Ishihara, I. Kitano, *Experimental 123 Mb/s fiber-optic communication system*, Optical Fiber Transmission Technical Digest, Williamsburg, Virginia, January 7-9, 1975, Paper ThA4.
58. C. P. Sandback, *Fiber-transmission-system-research in the United Kingdom*, Optical Fiber Transmission Technical Digest, Williamsburg, Virginia, January 7-9, 1975, Paper ThB1.
59. G. R. News, *Materials, systems and fiber fabrication processes in the U.K.*, Optical Fiber Transmission Technical Digest, Williamsburg, Virginia, January 7-9, 1975, Paper TuB1.

A. SMOLIŃSKI

OPTICAL FIBER COMMUNICATIONS

Summary

In the paper an attempt is made to summarize the results of efforts to realize optical fiber communications. At first it is described how optical waves propagate in glass fibers in single mode or multi mode manner; delay distortion fixes the admissible bandwidth of various types of fibers.

More than ten years of efforts to reduce impurity level in the glass and improved technology of pulling the fiber reduced the attenuation of optical fibers to extremely small figures (about 1 dB/km). However the fibers now produced are more lossy (20–30 dB/km).

In the second part of the paper the possibilities of the use of semiconductor and solid state ion lasers as well as luminescence diodes are considered. Semiconductor lasers can be very easily modulated, but their time of life is not sufficient for communication purposes. On the contrary, silicon photodiodes, PIN or avalanche, are on a proper exploitation level. The problem of the regeneration of the amplification has not yet been properly solved.

Many calculations and experiments show that lasers are able to provide a gigahertz communication without regeneration in a few kilometers of fibers; luminescent diodes do not provide such good results ($B \approx 30$ MHz and $l \approx 2$ km).

A. SMOLIŃSKI

TRANSMISSION D'INFORMATION PAR VOIES OPTIQUES

Résumé

L'étude s'est posé pour but de décrire les résultats des recherches sur la possibilité de réaliser la transmission d'information par voies optiques. On a présenté les manières de la propagation des ondes de lumière dans les fibres optiques de verre sous la forme d'un ou de plusieurs modes: on a déterminé la largeur des bandes, possible à obtenir à cause des déformations retardantes de divers types de voies optiques.

Les recherches sur la réduction d'impuretés dans le verre ont mené à diminuer l'atténuation dans les voies optiques jusqu'aux valeurs de 1 dB/km à peu près. Pourtant l'atténuation dans les fibres optiques que l'on trouve en production est de 20 ÷ 30 dB/km.

On a envisagé la possibilité d'appliquer, comme source de lumière, les lasers semi-conducteurs et ioniques du corps solide ainsi que les diodes électroluminescentes. Les lasers semi-conducteurs ne sont pas assez durables, mais sont faciles à moduler.

On utilise, comme détecteurs, les photodiodes au silicium, souvent avec amplification et les éléments semi-conducteurs, déjà expérimentés.

Le problème de l'amplification des signaux n'est pas encore mis à point. Les nombreuses expériences démontrent que la longueur des sections amplificantes—en appliquant les lasers—doit être de rang de quelques kilomètres pour la largeur de bande d'un gigahertz. Les diodes luminescentes donnent des résultats plus faibles ($B \approx 30$ MHz et $l \approx 2$ km).

A. SMOLIŃSKI

GLASFASER-NACHRICHTENÜBERTRAGUNG

Zusammenfassung

In diesem Aufsatz wurde ein Versuch unternommen, die Arbeitsergebnisse der Realisationsuntersuchungen bei der Anwendung einer Glasfaser-Nachrichtenübertragung zu beschreiben. Es wurden die Arten der Lichtwellenbeförderung in Glasfasern in Form von einem Grundmodus bzw. von Multimoden angegeben, und auch die erreichbaren Bandbreiten unter Berücksichtigung der Laufzeitverzerrung verschiedener Lichtleitertypen.

Die Arbeiten, die zwecks Verringerung von Verunreinigungen im Glas geführt worden waren, ergaben eine Dämpfungsabnahme der Lichtleiter bis zu einem Rekordwert von etwa 1 dB/km. Die handelsüblichen Lichtleiter weisen jedoch eine Dämpfung von 20—30 dB/km auf.

Es wurden die Anwendungsmöglichkeiten von Diodenlasern sowie von Ionlasern der Festkörper, als auch Doppel-Heterostrukturdioden als Lichtquelle erwogen. Den Diodenlasern fehlt noch die genügende Dauerhaftigkeit, sie können jedoch leicht moduliert werden.

Als Detektoren werden Halbleiterphotodioden (Silizium), oft mit Lavineneffekten benutzt, die erprobte Halbleiterelemente sind.

Das Problem eines Signalverstärkers ist noch nicht in zufriedenstellender Weise bearbeitet worden. Zahlreiche Versuche deuten darauf hin, daß die Verstärkerabschnittlängen — unter Anwendung von Lasern — einige Kilometer betragen sollten bei einer Bandbreite bis zu 1 Gigahertz. Dagegen ergeben Doppel-Heterostrukturdioden schlechtere Resultate ($B \approx 30$ MHz und $l \approx 2$ km).

А. СМОЛИНСКИ

СВЕТОВОДНАЯ СВЯЗЬ

Р е з ю м е

В статье приведено описание результатов работ в области реализации связи на стекловолоконно-проводах. Описаны явления при прохождении световых волн в одномодовых и многомодовых стекловолоконках, определены достижимые ширины полос лимитированные искажениями сигнала от изменения группового времени.

Опыты по снижению степени загрязнения стекла привели к уменьшению коэффициента затухания для стекловолокна до рекордных значений порядка 1 дБ/км. Следует заметить, что изготавливаемые серийно стекловолокна имеют значение этого коэффициента порядка 20—30 дБ/км.

Обсуждены возможности применения полупроводниковых и ионных лазеров, как и люминисцентных диодов в качестве источников света. Полупроводниковые лазеры не обладают еще в настоящее время достаточной долговечностью, но они легко модулируемы.

В качестве детекторов применяются кремниевые фотодиоды, зачастую мультиплицирующие, являющиеся практически проверенными надежными полупроводниковыми элементами.

Проблема усиления сигналов освоена еще не полностью. Многочисленные опыты указывают, что — при применении лазеров — промежуточные отрезки линии между регенераторами должны быть порядка нескольких километров при ширине полосы до одного гигагерца. В то же время люминисценционные диоды имеют менее благоприятные показатели ($B \approx 30$ мГц и $l \approx 2$ км).

Analiza możliwości określania przydatności łącza do transmisji cyfrowej na podstawie krótkotrwałego pomiaru

JÓZEF LUBACZ (WARSZAWA)

Instytut Teleelektroniki Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 31.8.1974

W pracy rozważa się możliwości wykorzystania metod teorii weryfikacji hipotez statystycznych do określania przydatności łącza do transmisji cyfrowej. Najbardziej przydatne z punktu widzenia rozważanego w pracy problemu okazują się być ilorazowe testy sekwencyjne weryfikacji hipotez i z tego względu analizie ich własności poświęcono najwięcej miejsca. Rozważona została możliwość zastosowania ilorazowego testu sekwencyjnego z ograniczoną wielkością próby.

1. WSTĘP

Rozpowszechnienie transmisji cyfrowej wymaga stworzenia sieci łączy transmisyjnych gwarantujących zgodną z ustalonymi standardami wierność transmisji. Jednocześnie konieczne jest wypracowanie metod kontroli jakości poszczególnych fragmentów sieci, w tym metod pozwalających na bieżąco oceniać przydatność łączy wybranych do transmisji. W pracy tej rozważane są możliwości wypracowania efektywnej metody, pozwalającej oceniać przydatność łącza do transmisji w określonym przedziale czasowym T , na podstawie krótkotrwałej analizy wybranych parametrów łącza w przedziale czasu bezpośrednio poprzedzającym T .

Zasadniczym parametrem określającym przydatność łącza do transmisji cyfrowej jest prawdopodobieństwo wystąpienia błędu w transmisji $P(b)$. Łącze określa się jako przydatne do transmisji, jeżeli $P(b)$ nie przekracza ustalonej umownej wartości P^* , tj. jeżeli $P(b) \leq P^*$. Przykładowo, według zaleceń CCITT $P^* = 10^{-3}$ dla łączy komutowanych¹⁾. Problem określania przydatności łącza do transmisji sprowadza się zatem do wyboru jednej z hipotez: hipotezy $H_0: P(b) \leq P^*$, lub hipotezy $H_1: P(b) > P^*$. Wybór hipotezy H_0 równoważny jest uznaniu łącza jako przydatnego do transmisji, natomiast wybór hipotezy H_1 (tj. odrzucenie hipotezy H_0) równoważny jest uznaniu łącza jako nieprzydatnego do transmisji. Ze względu na losowy charakter zjawiska powstawania błędów, hipotezy H_0 i H_1 są hipotezami statystycznymi.

W ogólnej teorii weryfikacji hipotez rozważa się cały szereg kryteriów wyboru hipotez. W pracy tej uznano za najlepsze z punktu widzenia rozważanego problemu te kryteria, które prowadzą do wyboru hipotezy w najkrótszym czasie.

¹⁾ CCITT ustala progowe wartości dla stopy błędów, która jest estymatorem $P(b)$.

Podstawą do rozważań nad możliwością opracowania metod weryfikacji hipotezy H_0 względem hipotezy H_1 jest analiza parametrów ciągów błędów powstających w trakcie transmisji cyfrowej.

2. CIĄG PAKIETÓW BŁĘDÓW

Dobrze znany jest fakt, że ilości błędów pojawiających się w rozłącznych przedziałach czasu nie są niezależne statystycznie, co jest wynikiem tendencji do grupowania się błędów. Ponadto średnia liczba błędów pojawiających się w jednostce czasu jest zależna od czasu. Oba te fakty powodują, iż ciąg pojawiających się błędów nie może być opisany procesem Poissona. Z punktu widzenia rozważanego w tej pracy problemu dokładny opis prawideł grupowania się błędów nie jest konieczny. Konieczne jest natomiast znalezienie opisu niestacjonarności średniej ilości błędów w jednostce czasu. Z powyższych względów wygodne jest dokonanie pewnego przetworzenia ciągu błędów w myśl zasad podanych niżej.

Ciąg błędów można jednoznacznie określić przez podanie ciągu odległości (mierzonych w jednostkach czasu) między kolejnymi błędami (d_i), gdzie d_i oznacza odległość między błędami o numerach i i $i+1$. Rozkład odległości między błędami można z dobrą dokładnością (por. [4]) opisać następującą gęstością prawdopodobieństwa:

$$f_d(x) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \exp(-\lambda_i x). \quad (1)$$

Dla x nie mniejszego od pewnego d_0 ($x \geq d_0$) można napisać

$$f_d(x) \cong \varepsilon_n \exp(-\lambda_n x); \quad (2)$$

tak więc począwszy od pewnego d_0 rozkład odległości między błędami jest w przybliżeniu wykładniczy.

Ciąg błędów można przetworzyć w ciąg pakietów błędów kierując się zasadą: do tego samego pakietu błędów należy zaliczyć każde dwa kolejne błędy, odległość między którymi jest nie większa niż d_0 przyjmując ponadto, że każdy pakiet błędów zaczyna i kończy się błędem. W tak utworzonym ciągu pakietów błędów odległości między pakietami są nie mniejsze niż d_0 , a ponadto rozkład odległości między pakietami można opisać zależnością (2). Gdyby średnia liczba pakietów pojawiających się w jednostce czasu była niezależna od czasu, wówczas ciąg pakietów można by było opisać stacjonarnym procesem Poissona²⁾. Wiadomo jednak [3], [4], że liczba pakietów w jednostce czasu nie jest niezależna od czasu, a zatem ciąg pakietów błędów należy opisać niestacjonarnym procesem Poissona:

$$P_\tau(k, \bar{\lambda}) = \frac{(\bar{\lambda})^k}{k!} \exp(-\bar{\lambda}), \quad (3)$$

gdzie $P_\tau(k, \bar{\lambda})$ oznacza prawdopodobieństwo wystąpienia k pakietów błędów w przedziale czasu $[t_0, t_0 + \tau]$, $\bar{\lambda} = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \lambda(t) dt$, $\lambda(t)$ — funkcję czasu określającą średnią liczbę pakietów w jednostce czasu.

²⁾ Stacjonarność, pojedynczość i brak pamięci są warunkami koniecznymi i dostatecznymi tego, aby ciąg zdarzeń można było opisać stacjonarnym procesem Poissona — por. np. [1].

[illegible]
$$P_{\tau}(k, \lambda_i) = \frac{(\lambda_i \tau)^k}{k!} \exp(-\lambda_i \tau), \quad (5)$$
$$f_2(x) = c^2 x \cdot \exp(-cx).$$
$$P(b) = \lambda \frac{\bar{N}}{g}, \quad (6)$$
$$P^* = \lambda^* \frac{\bar{N}}{\eta}. \quad (7)$$

⁴⁾ Zakładamy, że $\bar{N}$ jest stałe dla różnych realizacji ciągów pakietów błędów.

3. WERYFIKACJA HIPOTEZ STATYSTYCZNYCH — UWAGI OGÓLNE

W ogólnej teorii weryfikacji hipotez statystycznych rozróżnia się dwa typy testów w zależności od sposobu pobierania próby:

1) testy, w których wielkość próby (tj. liczba elementów pobieranych do próby) jest stała,

2) testy, w których wielkość próby jest zmienna — tzw. testy sekwencyjne.

Teoria budowy testów o stałej wielkości próby opiera się na lemacie Neymana-Pearsona (zob. np. [2], [5]). Teoria testów sekwencyjnych, powstała później, jest znacznie mniej rozbudowana i sprowadza się w zasadzie do rozważań nad sposobami budowy tzw. testów ilorazowych.

Wadą testów o stałej wielkości próby jest fakt, iż w testach tych zazwyczaj nie wykorzystuje się wszystkich informacji zawartych w próbce, bowiem liczba elementów pobieranych do próby (wielkość próby) nie zależy od tego jakie były elementy próby pobrane przed pobraniem ostatniego elementu do próby. W przypadku testów sekwencyjnych próba pobierana jest stopniowo — po pobraniu każdego elementu do próby analizowana jest informacja zawarta w elementach próby dotychczas pobranych. Jeżeli informacja uzyskana po pobraniu i -tego ($i = 1, 2, \dots$) elementu do próby nie jest wystarczająca do podjęcia decyzji o wyborze którejś z alternatywnych hipotez, wówczas do próby pobierany jest następny element; w przeciwnym wypadku proces pobierania próby zostaje zakończony i przyjęta zostaje jedna z alternatywnych hipotez. W efekcie, średnia wielkość próby, którą należy pobrać w celu zakończenia testu sekwencyjnego podjęciem decyzji, jest zazwyczaj mniejsza (czasem znacznie mniejsza) od wielkości próby, którą należy pobrać w przypadku testu o stałej wielkości próby.

Z punktu widzenia problemu rozważanego w tej pracy, minimalizacja wielkości próby jest rzeczą bardzo istotną, gdyż wielkość próby wiąże się bezpośrednio z czasem pomiaru koniecznym do weryfikacji hipotezy H_0 względem hipotezy H_1 . Pożądane jest, aby czas ten był jak najkrótszy, znacznie krótszy od długości przedziału czasu, w którym ciąg pakietów błędów opisany jest stacjonarnym procesem Poissona. Z tego względu celowe jest budowanie testów sekwencyjnych pozwalających minimalizować ten czas.

Przy weryfikacji hipotez statystycznych na podstawie testu można popełnić błędy dwóch rodzajów: popełnić błąd I-go rodzaju przyjmując hipotezę H_1 (tj. odrzucić hipotezę H_0) podczas gdy prawdziwa jest hipoteza H_0 ; popełnić błąd II-go rodzaju, przyjmując hipotezę H_0 (tj. odrzucić hipotezę H_1) podczas gdy prawdziwa jest hipoteza H_1 . Niech $P(H_1|H_0)$ i $P(H_0|H_1)$ oznaczają prawdopodobieństwa popełnienia błędu odpowiednio I-go i II-go rodzaju. Niech ponadto $E[n|H_0]$ i $E[n|H_1]$ oznaczają średnią wielkość próby, którą należy pobrać w przypadku, gdy prawdziwe są hipotezy odpowiednio H_0 i H_1 .

Prawdziwe jest następujące twierdzenie (por. [2]): ze wszystkich testów (sekwencyjnych i niesekwencyjnych), dla których

$$P(H_1|H_0) \leq \alpha, \quad P(H_0|H_1) \leq \beta$$

a średnie wielkości próby $E[n|H_0]$ i $E[n|H_1]$ są skończone, sekwencyjny test ilorazowy, dla którego $P(H_1|H_0) = \alpha$ i $P(H_0|H_1) = \beta$, minimalizuje zarówno $E[n|H_0]$ jak i $E[n|H_1]$. Z twierdzenia tego wynika w szczególności, że ilorazowy test sekwencyjny wymaga prze-

ciężnie mniejszej wielkości próby niż test o stałej wielkości próby o takich samych prawdopodobieństwach popełnienia błędów I-go i II-go rodzaju.

Wobec powyższego i wobec uwag poczynionych wcześniej, będziemy zajmowali się budowaniem ilorazowych testów sekwencyjnych.

4. ILORAZOWE TESTY SEKWENCYJNE

4.1. Uwagi wstępne

Zgodnie z uwagami zawartymi w rozdz. 2 problem rozważany w tej pracy sprowadza się do zbudowania testu pozwalającego weryfikować hipotezę $H_0: \lambda \leq \lambda^*$ wobec hipotezy $H_1: \lambda > \lambda^*$. Zarówno hipoteza H_0 jak i hipoteza H_1 są hipotezami złożonymi. Weryfikację hipotez powyższego typu w oparciu o ilorazowy test sekwencyjny można sprowadzić do weryfikacji hipotez prostych, co znacznie upraszcza budowę testu. Zajmijmy się zatem najpierw weryfikacją hipotez prostych.

W tym punkcie pracy podane będą fakty ogólne dotyczące weryfikacji hipotez, nie będą więc używane oznaczenia związane ściślej z rozważanym w tej pracy problemem.

4.2. Weryfikacja hipotez prostych

Niech $\xi: \Omega \rightarrow R$ będzie zmienną losową, gdzie Ω jest zbiorem zdarzeń elementarnych, natomiast R zbiorem liczb rzeczywistych. Niech ponadto $f_\xi(x, \theta)$ oznacza jednoparametrową gęstość prawdopodobieństwa zmiennej ξ , z parametrem $\theta \in R$. W przypadku, gdy ξ jest zmienną dyskretną, $f_\xi(x, \theta)$ można zastąpić prawdopodobieństwem.

Chcemy zbudować ilorazowy test sekwencyjny pozwalający weryfikować hipotezę prostą $H_0: \theta = \theta_0$ wobec hipotezy prostej $H_1: \theta = \theta_1$ ($\theta_0, \theta_1 \in R$), gwarantujący $P(H_1|H_0) = \alpha$ i $P(H_0|H_1) = \beta$.

Opiszemy najpierw ogólną zasadę budowy testów sekwencyjnych, w tym ilorazowych. Oznaczmy przez W^m m -wymiarową przestrzeń próby:

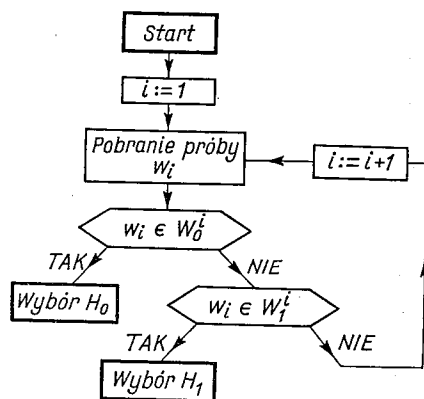
$$W^m = \{w_m: w_m = (x_1, x_2, \dots, x_m), x_i \in R, i = 0, 1, \dots, m\},$$

gdzie w_m oznacza próbę o wielkości m , natomiast x_i jest i -tym elementem próby. Budowa testu sekwencyjnego polega na rozbiciu przestrzeni W^m (dla każdego $m = 1, 2, \dots$) na trzy parami rozłączne obszary W_0^m, W_1^m, W_2^m ($W_0^m \cup W_1^m \cup W_2^m = W^m$) takie, że jeżeli

- 1) $w_m \in W_0^m$, to przyjmujemy hipotezę H_0 , jeżeli
- 2) $w_m \in W_1^m$, to przyjmujemy hipotezę H_1 , jeżeli
- 3) $w_m \in W_2^m$, to nie przyjmujemy żadnej z hipotez H_0, H_1 i pobieramy $(m+1)$ -wszy element do próby. Obszary W_0^m, W_1^m, W_2^m muszą być tak dobrane, aby $P(H_1|H_0) = \alpha$ i $P(H_0|H_1) = \beta$.

Realizacja testu w oparciu o obszary W_0^m, W_1^m, W_2^m wygląda następująco. Po pobraniu pierwszego elementu do próby sprawdzamy warunki 1), 2), 3) dla $w_1 = (x_1)$: jeżeli $w_1 \in W_0^1$, to przyjmujemy hipotezę H_0 , jeżeli $w_1 \in W_1^1$, to przyjmujemy hipotezę H_1 , jeżeli $w_1 \in W_2^1$ wówczas nie podejmujemy decyzji o wyborze hipotezy i pobieramy drugi element do próby. Następnie sprawdzamy warunki 1), 2), 3) dla $w_2 = (x_1, x_2)$: jeżeli $w_2 \in W_0^2$, to

przyjmujemy hipotezę H_0 , jeżeli $w_2 \in W_1^2$, to przyjmujemy hipotezę H_1 , jeżeli $w_2 \in W_2^0$, to nie podejmujemy decyzji o wyborze hipotezy i pobieramy trzeci element do próby. Następnie sprawdzamy warunki 1), 2), 3) dla $w_3 = (x_1, x_2, x_3)$ itd. Proces pobierania próby i podejmowania decyzji można opisać schematem zamieszczonym na rys. 1.



Rys. 1. Schemat funkcjonalny sekwencyjnego testu weryfikacji hipotez

Można wykazać (zob. [5]), że proces ten z prawdopodobieństwem równym jedności kończy się po skończonej ilości kroków.

Niech $f_\xi(x, \Theta_i)$ oznacza gęstość rozkładu prawdopodobieństwa w przypadku, gdy prawdziwa jest hipoteza H_i , $i \in \{0, 1\}$. Wprowadźmy oznaczenia:

$$p_{0m} = \prod_{i=1}^m f_\xi(x_i, \Theta_0) \quad \text{ i } \quad p_{1m} = \prod_{i=1}^m f_\xi(x_i, \Theta_1).$$

Ilorazowym testem sekwencyjnym o mocy (α, β) nazywamy test spełniający warunki:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_{1m}}{p_{0m}} &\leq B & \text{ dla } w_m \in W_0^m, \\ A &\leq \frac{p_{1m}}{p_{0m}} & \text{ dla } w_m \in W_1^m, \\ A &> \frac{p_{1m}}{p_{0m}} > B & \text{ dla } w_m \in W_2^m, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

gdzie A i B ($A > B$) są liczbami rzeczywistymi dobranymi tak, aby $P(H_1|H_0) = \alpha$ i $P(H_0|H_1) = \beta$.

Budowa ilorazowego testu sekwencyjnego o mocy (α, β) sprowadza się zatem do wyznaczenia A i B jako funkcji α i β . Znaleźcie dokładnych zależności wiążących A i B z α i β okazuje się być zadaniem bardzo trudnym. Łatwo natomiast można znaleźć oszacowania A i B za pomocą α i β .

Niech n oznacza wielkość próby, pobranie której prowadzi do wyboru hipotezy, tzn. $w_n \in W_0^n$ lub $w_n \in W_1^n$. W obszarze W_0^n $\frac{p_{1n}}{p_{0n}} \leq B$, czyli $p_{1n} \leq B p_{0n}$. Całkując ostatnią nierówność po wszystkich $w_n \in W_0^n$ otrzymujemy:

$$P(w_n \in W_0^n | H_1) \leq B P(w_n \in W_0^n | H_0).$$

Powyższa nierówność jest równoważna nierówności $\beta \leq B(1-\alpha)$, a stąd

$$B \leq \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

Analogicznie: w obszarze W_1^n $p_{1n} \geq Ap_{0n}$, a po scałkowaniu po $w_n \in W_1^n$ otrzymujemy

$$P(w_n \in W_1^n | H_1) \geq AP(w_n \in W_1^n | H_0),$$

lub równoważnie

$$(1-\beta) \geq A\alpha, \quad \text{skąd} \quad A \leq \frac{1-\beta}{\alpha}.$$

Powstaje pytanie: jakie są konsekwencje zastąpienia rzeczywistych wielkości A i B wartościami $\frac{1-\beta}{\alpha}$ (oszacowanie A z góry) i $\frac{\alpha}{1-\beta}$ (oszacowanie B z dołu)? Konsekwencje te są dwójakiego rodzaju. Po pierwsze, ulegają zmianie $P(H_1|H_0)$ i $P(H_0|H_1)$; oznaczmy te zmienione wartości odpowiednio przez α^1 i β^1 . Łatwo pokazać opierając się na wyżej wprowadzonych nierównościach, że

$$\alpha^1 \leq \frac{\alpha}{1-\beta}, \quad \beta^1 \leq \frac{\beta}{1-\alpha} \quad \text{i} \quad \alpha^1 + \beta^1 \leq \alpha + \beta.$$

Ponieważ w praktyce α i β są małymi liczbami, więc różnice między (α, β) i (α^1, β^1) są niewielkie, tym mniejsze im mniejsze są α i β . Po drugie wzrastają $E[n|H_0]$ i $E[n|H_1]$ (por. oznaczenia wprowadzone w 3). Można wykazać, że wzrost ten jest niewielki i w praktyce pomijalny.

Dokładną analizę konsekwencji przyjęcia

$$A = \frac{1-\beta}{\alpha} \quad \text{i} \quad B = \frac{\beta}{1-\alpha} \quad (9)$$

można znaleźć w [5]. Generalny wniosek jest taki, że budowanie testów na podstawie zależności (9) jest w praktyce w pełni uzasadnione.

W praktyce wygodniej jest posługiwać się wielkością $Z_m = \ln \frac{p_{1m}}{p_{0m}}$ niż wielkością

$\frac{p_{1m}}{p_{0m}}$. Wykorzystując zależności (9), możemy teraz warunki (8) określające ilorazowy test sekwencyjny napisać w postaci:

$$\left. \begin{aligned} Z_m &\leq \ln \frac{\beta}{1-\alpha} && \text{dla} && w_m \in W_0^m, \\ \ln \frac{1-\beta}{\alpha} &\leq Z_m && \text{dla} && w_m \in W_1^m, \\ \ln \frac{1-\beta}{\alpha} &> Z_m > \ln \frac{\beta}{1-\alpha} && \text{dla} && w_m \in W_2^m. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

W celu wyznaczenia $E[n|H_0]$ i $E[n|H_1]$ również wygodnie jest posługiwać się wielkością Z_m . Jeżeli posłużymy się oznaczeniem

$$z_i = \ln \frac{f_\xi(x_i, \Theta_1)}{f_\xi(x_i, \Theta_0)},$$

wówczas

$$Z_m = \ln \frac{p_{1m}}{p_{0m}} = z_1 + z_2 + \dots + z_m,$$

a w szczególności $Z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$, gdzie n oznacza wielkość próby, pobranie której prowadzi do wyboru hipotezy. Wielkości $z_i (i = 1, 2, \dots, n)$ i n są zmiennymi losowymi, zatem Z_n jest sumą losową. Korzystając z własności sum losowych, a także z faktu, że $z_1 = \dots = z_n = z$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, można pokazać (zob. np. [5]), że

$$E[n|\Theta] = \frac{E[Z_n|\Theta]}{E[z|\Theta]}. \quad (11)$$

Wielkość $E[z|\Theta]$ można w konkretnych przypadkach wyznaczyć bez trudności. Problem wyliczenia $E[n|\Theta]$ sprowadza się więc do wyliczenia $E[Z_n|\Theta]$. Ogólnie rzecz biorąc

$$E[Z_n|\Theta] = P(Z_n \leq \ln B|\Theta)E[Z_n|Z_n \leq \ln B] + P(Z_n \geq \ln A|\Theta)E[Z_n|Z_n \geq \ln A]. \quad (12)$$

Zauważmy, że

$$P(Z_n \leq \ln B|\Theta) = \begin{cases} 1 - \alpha, & \text{dla } \Theta = \Theta_0 \\ \beta, & \text{dla } \Theta = \Theta_1 \end{cases}$$

oraz

$$P(Z_n \geq \ln A|\Theta) = \begin{cases} \alpha, & \text{dla } \Theta = \Theta_0 \\ 1 - \beta, & \text{dla } \Theta = \Theta_1 \end{cases}. \quad (13)$$

Okazuje się, że dokładne wyznaczenie wielkości $E[Z_n|Z_n \leq \ln B]$ i $E[Z_n|Z_n \geq \ln A]$ jest trudne, w związku z czym w praktyce przyjmuje się oszacowania tych wielkości. Jeżeli wielkość z ma małą wartość średnią i odchylenie standardowe, to można przyjąć

$$E[Z_n|Z_n \leq \ln B] \cong \ln B \quad \text{i} \quad E[Z_n|Z_n \geq \ln A] \cong \ln A.$$

Powyżej można by było napisać równości, gdyby warunek $Z_n \leq \ln B$ zastąpić warunkiem $Z_n = \ln B$, natomiast warunek $Z_n \geq \ln A$ warunkiem $Z_n = \ln A$.

Powyższe oszacowania są tym lepsze, im mniejsze są wartość średnia i odchylenie standardowe wielkości z . Dokładną analizę tego faktu można znaleźć w [5].

Ostatecznie, kładąc w zależności (11) kolejno $\Theta = \Theta_0$, $\Theta = \Theta_1$ i wykorzystując zależności (12), (13) i (9), otrzymujemy:

$$E[n|H_0] \cong \frac{(1 - \alpha) \ln \frac{\beta}{1 - \alpha} + \alpha \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}}{E[z|H_0]}, \quad (14)$$

$$E[n|H_1] \cong \frac{\beta \ln \frac{\beta}{1 - \alpha} + (1 - \beta) \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}}{E[z|H_1]}. \quad (15)$$

W większości praktycznych przypadków zależności powyższe mogą być z powodzeniem wykorzystane.

4.3. Weryfikacja hipotezy złożonej $H_0: \Theta \leq \Theta^1$ względem hipotezy złożonej $H_1: \Theta > \Theta^1$

Problem budowy ilorazowego testu sekwencyjnego o mocy (α, β) , który pozwalałby weryfikować hipotezę $H_0: \Theta \leq \Theta^1$ względem hipotezy $H_1: \Theta > \Theta^1$ nie został dotychczas ściśle rozwiązany. Można jednak, godząc się na pewne założenia, sprowadzić ten problem do problemu weryfikacji hipotez prostych opisanego w 4.2. Założenia jakie należy przyjąć omówimy na przykładzie rozważanego w tej pracy problemu weryfikacji hipotezy $H_0: P(b) \leq P^*$ wobec hipotezy $H_1: P(b) > P^*$.

Na podstawie pomiaru mamy rozstrzygnąć, czy $P(b) \leq P^*$, czy $P(b) > P^*$. W przypadku $P(b) \leq P^*$ kwalifikujemy łącze jako przydatne do transmisji w przedziale czasu $[t_{i-1}, t_i]$, w przypadku $P(b) > P^*$ kwalifikujemy łącze jako nieprzydatne do transmisji w tym przedziale czasu. Przy kwalifikacji możemy popełnić błąd I-go rodzaju (zdyskwalifikować sprawne łącze) i błąd II-go rodzaju (zakwalifikować do transmisji łącze niesprawne). Podjęcie błędnej decyzji wiąże się zazwyczaj z określoną stratą, np. finansową, czasu itp. Im bardziej rzeczywiste $P(b)$ różni się od P^* , tym niebezpieczniejsze jest podjęcie błędnej decyzji, gdyż tym większa jest zazwyczaj strata. Im bliższe jest rzeczywiste $P(b)$ wartości P^* , tym mniejsze jest niebezpieczeństwo podjęcia złej decyzji. W związku z powyższym można przyjąć, że istnieje przedział (P_0, P_1) zawierający P^* taki, że jeśli $P(b) \in (P_0, P_1)$, to niebezpieczeństwo podjęcia złej decyzji jest pomijalne z praktycznego punktu widzenia. Przedział ten można przyjąć arbitralnie, np: $P_0 = P^* - 0,1P^*$ i $P_1 = P^* + 0,1P^*$. W efekcie nieinteresującymi są prawdopodobieństwa błędów I-go i II-go rodzaju, gdy $P(b) \in (P_0, P_1)$. Ważne jest natomiast, aby prawdopodobieństwo błędu I-go rodzaju było nie większe od α dla $P(b) \leq P_0$ i prawdopodobieństwo błędu II-go rodzaju było nie większe od β dla $P(b) \geq P_1$.

Jeżeli przyjąć powyższe wymagania, to okazuje się, że zamiast weryfikować hipotezę $H'_0: P(b) \leq P^*$ wobec hipotezy $H'_0: P(b) > P^*$, można dokonywać weryfikacji hipotezy $H_0: P(b) = P_0$ wobec hipotezy $H_1: P(b) = P_1$. Ściślej mówiąc, można tak zrobić dla pewnej szerokiej klasy przypadków weryfikacji hipotez typu $H_0: \Theta \leq \Theta^1$ wobec $H_1: \Theta > \Theta^1$ obejmującej rozważany w tej pracy przypadek. Dzieje się tak dlatego, że dla tej klasy przypadków weryfikacja hipotezy $H'_0: \Theta = \Theta_0$ wobec hipotezy $H'_0: \Theta = \Theta_1$, ($\Theta_0 < \Theta^1 < \Theta_1$) gwarantuje, iż dla $\Theta \leq \Theta_0$ zachodzi $P(H_1|H_0) \leq \alpha$ i dla $\Theta \geq \Theta_1$ zachodzi $P(H_0|H_1) \leq \beta$, jeżeli przyjmować hipotezę H_0 , gdy prawdziwa jest hipoteza H'_0 i hipotezę H_1 , gdy prawdziwa jest hipoteza H'_0 .

Dokładniejsze omówienie tego zagadnienia można znaleźć w [2].

Ostatecznie zatem, jeśli przyjąć założenia, o których była mowa wyżej, a które z praktycznego punktu widzenia nie budzą poważniejszych zastrzeżeń, to weryfikację hipotezy złożonej $H_0: \Theta \leq \Theta^1$ wobec hipotezy złożonej $H_1: \Theta > \Theta^1$ można przeprowadzić za pomocą testu zbudowanego według zasad opisanych w 4.2.

5. WERYFIKACJA HIPOTEZY $H_0: P(b) \leq P^*$ WOBEC HIPOTEZY $H_1: P(b) > P^*$

5.1. Uwagi wstępne

Wykorzystamy teraz informacje z rozdz. 4 do budowy ilorazowego testu sekwencyjnego pozwalającego weryfikować hipotezę $H_0: P(b) \leq P^*$ wobec hipotezy $H_1: P(b) > P^*$, czyli (por. rozdz. 2) hipotezę $H_0: \lambda \leq \lambda^*$ wobec hipotezy $H_1: \lambda > \lambda^*$.

Zgodnie z uwagami z 4.3 będziemy zakładali istnienie przedziału $(P_0, P_1) \ni P^*$, co jest równoważne istnieniu przedziału $(\lambda_0, \lambda_1) \ni \lambda^*$ (por. zależność (6)) mającego te same własności co przedział (P_0, P_1) .

Zbudujemy dwa testy, między którymi różnice wynikają z przyjęcia odmiennych definicji zmiennej losowej ξ .

5.2. Test I

Podzielmy oś czas począwszy od pewnego $t = t_0$ na przylegające do siebie przedziały o stałej długości równej τ . Ponumerujmy tak powstałe przedziały kolejnymi liczbami naturalnymi. Niech przedział i -ty zaczyna się w chwili $t = t_0 + (i-1)\tau$ natomiast kończy w chwili $t = t_0 + i\tau$.

Niech zmienna losowa ξ określa liczbę pakietów błędów pojawiających się w przedziale czasu o długości τ . Zgodnie z uwagami z rozdz. 2 zmienna ta ma rozkład Poissona:

$$P_\tau(k, \lambda) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} \exp(-\lambda\tau).$$

Niech pobieranie próby polega na pomiarze, począwszy od pewnego $t = t_0$, liczby pakietów błędów w kolejnych przedziałach czasu o długości τ . Zatem próba o wielkości m określona jest następująco:

$w_m = (k_1, k_2, \dots, k_m)$, gdzie k_i ($i = 1, 2, \dots, m$) oznacza liczbę pakietów błędów, które zaobserwowano w i -tym przedziale czasu. Z własności procesu Poissona wynika, że zmienne $k_1, k_2, \dots, k_m$ są niezależne statystycznie.

Możemy teraz przystąpić do budowy testu wykorzystując zależności (10). W rozważanym przez nas przypadku

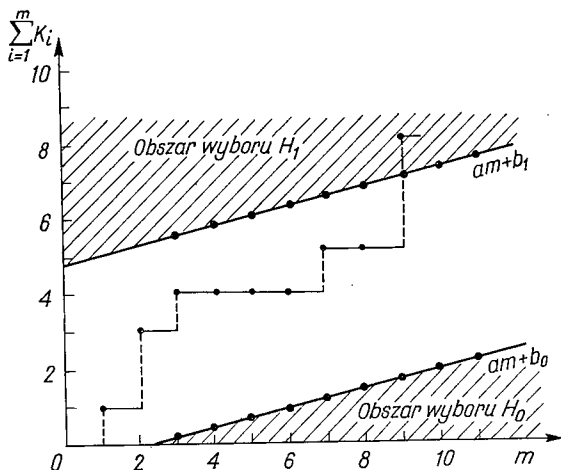
$$Z_m = \ln \frac{\prod_{i=1}^m f_\xi(x_i, \theta_1)}{\prod_{i=1}^m f_\xi(x_i, \theta_0)}$$

przyjmuje postać:

$$Z_m = \ln \frac{\prod_{i=1}^m \frac{(\lambda_1 \tau)^{k_i}}{k_i!} \exp(-\lambda_1 \tau)}{\prod_{i=1}^m \frac{(\lambda_0 \tau)^{k_i}}{k_i!} \exp(-\lambda_0 \tau)} = \ln \left[\exp(\lambda_0 - \lambda_1) \tau \prod_{i=1}^m \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{k_i} \right].$$

W związku z tym nierówność $\ln \frac{1-\beta}{\alpha} > Z_m > \ln \frac{\beta}{1-\alpha}$ przyjmuje po elementarnych przekształceniach postać:

$$\frac{(\lambda_1 - \lambda_0)\tau}{\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}} m + \frac{\ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}} > \sum_{i=1}^m k_i > \frac{(\lambda_1 - \lambda_0)\tau}{\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}} m + \frac{\ln \frac{\beta}{1-\alpha}}{\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}}. \quad (16)$$



Rys. 2. Zobrazowanie funkcjonowania testu I

Wprowadźmy oznaczenia:

$$a = \frac{(\lambda_1 - \lambda_0)\tau}{\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}}, \quad b_1 = \frac{\ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}}, \quad b_0 = \frac{\ln \frac{\beta}{1-\alpha}}{\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}}. \quad (17)$$

Ponieważ τ , λ_0 , λ_1 ($\lambda_0 < \lambda_1$) są ustalonymi liczbami, więc a , b_0 i b_1 są stałe, przy czym $a > 0$ i $b_0 < 0$, $b_1 > 0$, gdyż oczywiście $\alpha < 0,5$ i $\beta < 0,5$.

Z zależności (10), (16) i (17) wynika, że:

$$W_0^m = \{w_m = (k_1, \dots, k_m) : \sum_{i=1}^m k_i \leq am + b_0\},$$

$$W_1^m = \{w_m = (k_1, \dots, k_m) : \sum_{i=1}^m k_i \geq am + b_1\},$$

$$W_2^m = \{w_m = (k_1, \dots, k_m) : am + b_1 > \sum_{i=1}^m k_i > am + b_0\}.$$

Wyzaczyliśmy obszary W_0^m , W_1^m , W_2^m , tak więc budowa testu została zakończona. Funkcjonowanie testu łatwo można zobrazować za pomocą rys. 2. Linia schodkowa na

rysunku odpowiada $\sum_i k_i$ dla przykładowej próby. Proces pobierania próby kończy się wyborem hipotezy, gdy linia schodkowa przecina prostą $am+b_0$, lub prostą $am+b_1$ — w pierwszym przypadku wybieramy hipotezę H_0 , w drugim przypadku hipotezę H_1 .

Wyznamy teraz $E[n|\lambda]$, $\lambda \in [0, \infty)$ ($E[n|\lambda_0] = E[n|H_0]$, $E[n|\lambda_1] = E[n|H_1]$). W tym celu należy wprowadzić funkcję $L(\lambda)$, która określa prawdopodobieństwo przyjęcia H_0 , gdy wartość parametru testowanego rozkładu równa jest λ . Łatwo określić wartości funkcji $L(\lambda)$ dla pewnych szczególnych wartości: $L(0) = 1$, $L(\lambda_0) = 1 - \alpha$, $L(\lambda_1) = \beta$, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} L(\lambda) = 0$. Wartości $L(\lambda)$ dla pozostałych λ można wyznaczyć z następującej zależności (por. [5]):

$$L(\lambda) = \frac{A^{h(\lambda)} - 1}{A^{h(\lambda)} - B^{h(\lambda)}}, \quad (18)$$

gdzie A i B określone są zależnością (9), natomiast $h(\lambda)$ określone jest wyrażeniem:

$$\int_0^\infty \left[\frac{f_\xi(x, \lambda_1)}{f_\xi(x, \lambda_0)} \right]^{h(\lambda)} f_\xi(x, \lambda) dx = 1.$$

W rozważanym przez nas przypadku ostatnie wyrażenie można napisać w postaci:

$$\lambda = \frac{h(\lambda)(\lambda_1 - \lambda_0)}{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{h(\lambda)} - 1}. \quad (19)$$

Zależności (18) i (19) jednoznacznie wyznaczają $L(\lambda)$. Za pomocą $L(\lambda)$ można wyrazić $E[n|\lambda]$ (por. (14), (15)):

$$E[n|\lambda] \cong \frac{L(\lambda) \ln \frac{\beta}{1-\alpha} + (1-L(\lambda)) \ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{E[z|\lambda]}.$$

Ponieważ dla testu I

$$z = \ln \frac{\frac{(\lambda_1 \tau)^k}{k!} \exp(-\lambda_1 \tau)}{\frac{(\lambda_0 \tau)^k}{k!} \exp(-\lambda_0 \tau)} = k \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} + (\lambda_0 - \lambda_1) \tau,$$

więc $E[z|\lambda] = E[k|\lambda] \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} + (\lambda_0 - \lambda_1) \tau$, a skoro $E[k|\lambda] = \lambda \cdot \tau$, zatem:

$$E[n|\lambda] \cong \frac{L(\lambda) \ln \frac{\beta}{1-\alpha} + (1-L(\lambda)) \ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{\left(\lambda \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} + \lambda_0 - \lambda_1 \right) \tau}. \quad (20)$$

Możemy teraz określić średni czas, po którym test I prowadzi do wyboru hipotezy, gdy wartość parametru testowanego rozkładu równa jest λ :

$$T_1(\lambda) \cong E[n|\lambda] \cdot \tau.$$

Jeżeli znany jest rozkład a priori $f_\lambda(x)$ parametru λ , wówczas średni czas, po którym test I prowadzi do wyboru hipotezy

$$T_1 \cong \tau \int_0^\infty E[n|x] f_\lambda(x) dx.$$

Zgodnie z uwagami poprzedzającymi zależności (14) i (15), oszacowanie poprzez zależność (20) jest tym lepsze, im mniejsze są wartość średnia i odchylenie standardowe wielkości z . Wartość średnia wielkości z proporcjonalna jest do τ (por. wyprowadzenie). Jak łatwo pokazać, odchylenie standardowe wielkości z równe jest $\sqrt{\lambda \tau \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}}$, a więc proporcjonalne jest do $\sqrt{\tau}$. Tak więc, oszacowanie określone zależnością (20) jest tym lepsze, im mniejsze jest τ . Dla dużych τ oszacowanie to może być bardzo złe. Zauważmy bowiem, że dla dostatecznie dużych τ $E[n|\lambda]$ może być znacznie mniejsze od jedności, a co za tym idzie $T_1(\lambda)$ może być znacznie mniejsze od τ . Z założenia wiemy jednak, że decyzja o wyborze hipotezy może być podjęta nie wcześniej, niż po pobraniu pierwszego elementu do próby, tj. po czasie τ .

Oczywistym jest, że zmniejszenie τ nie powoduje zwiększenia średniego czasu oczekiwania na wybór hipotezy, tj. jeżeli $\tau_1 < \tau_2$, to $T_1(\lambda)|_{\tau=\tau_1} \leq T_1(\lambda)|_{\tau=\tau_2}$.

W związku z tym i z uwagami poczynionymi wcześniej, należy się spodziewać, że $E[n|\lambda]\tau$ jest dobrym oszacowaniem wielkości $T_1(\lambda)$ przy $\tau \rightarrow 0$, tj. dolnej granicy wielkości $T_1(\lambda)$. Problem znalezienia dokładnej zależności $T_1(\lambda)$ od τ nie jest łatwy, w związku z czym nie jest łatwe znalezienie takiej wartości $\tau = \tau_0$, przy której $T_1(\lambda)$ jest bliskie dolnej granicy. Im mniejsze jest τ , tym większa jest (średnio rzecz biorąc) liczba elementów, którą należy pobrać do próby, aby test zakończył się wyborem hipotezy. Z różnych względów praktycznych może być wskazane, aby liczba ta była możliwie mała, tj. aby τ było możliwie duże. W tych przypadkach istotne jest znalezienie τ_0 .

Niżej opiszemy test oparty o inną niż w przypadku testu I definicję zmiennej ξ , który pozwala uwolnić się od problemów związanych z wyznaczaniem τ_0 .

5.3. Test II

Oznaczmy na osi czasu począwszy od pewnego $t = t_0$ momenty pojawiania się kolejnych pakietów błędów: $t_1, t_2, t_3, \dots$, gdzie $t_0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \dots$. Oznaczmy przez $d_1, d_2, d_3, \dots$ czasy oczekiwania na kolejne pakiety błędów, tzn. $d_1 = t_1 - t_0, d_2 = t_2 - t_1, d_3 = t_3 - t_2, \dots$

Niech zmienna losowa ξ określa czas oczekiwania na pakiet błędów. Ciąg pakietów błędów opisany jest (w pewnym przedziale czasu) procesem Poissona o parametrze λ , zatem zmienna losowa ξ ma (w tym przedziale) rozkład wykładniczy o gęstości prawdopodobieństwa

$$f_\xi(d, \lambda) = \lambda \exp(-\lambda d). \quad (21)$$

Z własności procesu Poissona wynika, że zmienne $d_1, d_2, d_3, \dots$ są niezależne statystycznie i mają wspólną gęstość prawdopodobieństwa określoną zależnością (21).

Niech pobieranie próby polega na pomiarze (począwszy od pewnego $t = t_0$) czasów oczekiwania na kolejne pakiety. Próba o wielkości m określona jest zatem następująco: $w_m = (d_1, d_2, \dots, d_m)$, gdzie d_1 oznacza czas jaki upłynął od momentu rozpoczęcia pomiaru do momentu pojawienia się pierwszego pakietu błędów, natomiast d_i ($i = 2, \dots, m$) oznacza czas, który upłynął od momentu pojawienia się $(i-1)$ -go pakietu błędów do momentu pojawienia się i -tego pakietu błędów.

Zbudujmy ilorazowy test sekwencyjny wykorzystując zależności (10). Wykorzystując wprowadzoną wyżej definicję w_m , otrzymujemy

$$Z_m = \ln \frac{\prod_{i=1}^m f_{\xi}(d_i, \lambda_1)}{\prod_{i=1}^m f_{\xi}(d_i, \lambda_0)} = \ln \frac{\prod_{i=1}^m \lambda_1 \exp(-\lambda_1 d_i)}{\prod_{i=1}^m \lambda_0 \exp(-\lambda_0 d_i)},$$

zatem nierówność $\ln \frac{1-\beta}{\alpha} > Z_m > \ln \frac{\beta}{1-\alpha}$ przybiera po prostych przekształceniach postać:

$$\frac{\ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{\lambda_0 - \lambda_1} - m \frac{\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}}{\lambda_0 - \lambda_1} < \sum_{i=1}^m d_i < \frac{\ln \frac{\beta}{1-\alpha}}{\lambda_0 - \lambda_1} - m \frac{\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}}{\lambda_0 - \lambda_1}. \quad (22)$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$a^1 = \frac{\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}}{\lambda_0 - \lambda_1}, \quad b_1^1 = \frac{\ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{\lambda_0 - \lambda_1} \quad \text{ i } \quad b_0^1 = \frac{\ln \frac{\beta}{1-\alpha}}{\lambda_0 - \lambda_1}. \quad (23)$$

Z założenia $\lambda_0 - \lambda_1 < 0$, więc $a^1 < 0$, $b_1^1 < 0$, $b_0^1 > 0$, gdyż z oczywistych względów przyjmuje się $\alpha < 0,5$ i $\beta < 0,5$.

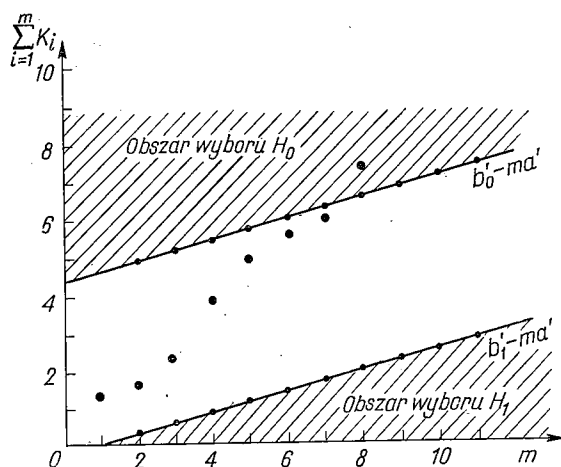
Korzystając z zależności (10), (22) i (23) można wyznaczyć W_0^m , W_1^m i W_2^m :

$$W_0^m = \left\{ w_m = (d_1, d_2, \dots, d_m) : \sum_{i=1}^m d_i \geq b_0^1 - ma^1 \right\},$$

$$W_1^m = \left\{ w_m = (d_1, d_2, \dots, d_m) : \sum_{i=1}^m d_i \leq b_1^1 - ma^1 \right\},$$

$$W_2^m = \left\{ w_m = (d_1, d_2, \dots, d_m) : b_1^1 - ma^1 > \sum_{i=1}^m d_i > b_0^1 - ma^1 \right\}.$$

Obszary W_0^m , W_1^m , W_2^m określają test jednoznacznie, tak więc budowa testu została zakończona. Funkcjonowanie testu można zobrazować za pomocą rys. 3. Oś odciętych jest z natury rzeczy dyskretna, nie ma bowiem sensu rozpatrywanie czasu oczekiwania na niecałkowitą ilość pakietów błędów. Punktami oznaczono na rysunku $\sum_{i=1}^m d_i$ dla przykładowej próby. Proces pobierania próby kończy się podjęciem decyzji, gdy któryś z punktów przekroczy (lub osiągnie) prostą $b_0^1 - ma^1$, lub prostą $b_1^1 - ma^1$; w pierwszym przypadku wybieramy hipotezę H_0 , w drugim przypadku hipotezę H_1 .



Rys. 3. Zobrażenie funkcjonowania testu II

Postępując analogicznie jak w przypadku testu I można podać oszacowanie na $E[n|\lambda]$. Funkcja $L(\lambda)$ jest tak jak w przypadku testu I określona zależnościami (18) i (19). Ponieważ

$$z = \ln \frac{\lambda_1 \exp(-\lambda_1 d)}{\lambda_0 \exp(-\lambda_0 d)} = (\lambda_0 - \lambda_1)d + \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}, \quad (24)$$

$$E[z|\lambda] = (\lambda_0 - \lambda_1)E[d|\lambda] + \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \quad \text{i} \quad E[d|\lambda] = \frac{1}{\lambda},$$

zatem

$$E[n|\lambda] \cong \frac{L(\lambda) \ln \frac{\beta}{1-\alpha} + (1-L(\lambda)) \ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{\frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_0} + \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}}. \quad (25)$$

Wyrażenie $E[n|\lambda]$ określa średnią wielkość próby, której pobranie prowadzi do wyboru hipotezy, gdy wartość parametru testowanego rozkładu równa jest λ . Innymi słowy, $E[n|\lambda]$ określa liczbę pakietów błędów, na które należy średnio rzecz biorąc oczekiwać (mierząc czas do ich przybycia, tj. $\sum_i d_i$), aby test zakończył się wyborem hipotezy, gdy wartość parametru testowanego rozkładu równa jest λ .

Wyliczenie średniego czasu $T_2(\lambda)$, po którym zastosowanie testu II prowadzi do wyboru hipotezy, gdy wartość parametru testowanego rozkładu równa jest λ , jest trudniejsze niż w przypadku testu I.

Wiąże się to z tym, że $E[n|\lambda]$ nie musi być liczbą naturalną. Ogólnie rzecz biorąc $E[n|\lambda]$ spełnia nierówność

$$[E[n|\lambda]] \leq E[n|\lambda] < [E[n|\lambda]] + 1, \quad (26)$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą x . Średnie czasy oczekiwania na $[E[n|\lambda]]$ i $[E[n|\lambda]] + 1$ pakietów impulsów można wyliczyć w sposób następujący.

Wielkość $d_1, d_2, \dots, d_m$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tej samej, wykładniczej gęstości prawdopodobieństwa z parametrem λ . Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej $\sum_{i=1}^m d_i$ równa jest zatem splotowi m wykładniczych gęstości prawdopodobieństwa o parametrze λ . Można pokazać, że splot ten określony jest wzorem

$$f\left(\sum_{i=1}^m d_i, \lambda\right) = \lambda \frac{(\lambda \sum_{i=1}^m d_i)^{m-1}}{(m-1)!} \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^m d_i\right).$$

Korzystając z powyższej zależności można wykazać, że średnia wartość zmiennej losowej $\sum_{i=1}^m d_i$ równa jest m/λ .

W takim razie kładąc $m = [E[n|\lambda]]$ otrzymujemy średni czas oczekiwania na $[E[n|\lambda]]$ pakietów błędów równy

$$\frac{[E[n|\lambda]]}{\lambda}. \quad (27)$$

Postępując analogicznie, otrzymujemy średni czas oczekiwania na $[E[n|\lambda]] + 1$ pakietów błędów:

$$\frac{[E[n|\lambda]] + 1}{\lambda}. \quad (28)$$

Uwzględniając zależności (26), (27) i (28) otrzymujemy:

$$T' \stackrel{\text{ozn.}}{=} \frac{[E[n|\lambda]]}{\lambda} \leq T_2(\lambda) < \frac{[E[n|\lambda]] + 1}{\lambda} \stackrel{\text{ozn.}}{=} T''.$$

Można pokazać, że (por. test I) $T_1(\lambda) \in [T', T'']$.

Powyższe oszacowanie wielkości $T_2(\lambda)$ może okazać się w praktyce zbyt grube, gdyż długość przedziału $[T', T'']$ może być w praktyce tego samego rzędu co $T_2(\lambda)$.

Trudność dokładnego wyliczenia $T_2(\lambda)$ wynika z trudności interpretacji określenia: „czas oczekiwania na niecałkowitą ilość pakietów błędów”. Przyjmijmy heurystyczną, lecz jak się wydaje nie będącą w sprzeczności z intuicją interpretację tego pojęcia. Niech średni czas oczekiwania $T(x)$ na x pakietów błędów, będzie określony następująco:

$$T(x) = \frac{T(x \cdot y)}{y},$$

gdzie y jest taką liczbą, że $x \cdot y$ jest liczbą naturalną, natomiast $T(x \cdot y)$ jest średnim czasem oczekiwania na $x \cdot y$ pakietów błędów. Łatwo można sprawdzić, że podana definicja jest dobrze określona (w przypadku, gdy ciąg pakietów błędów opisany jest procesem Poissona), tzn. nie zależy od wyboru y . W myśl podanej definicji, średni czas oczekiwania na 1,5 pakietów błędów można interpretować jako jedną drugą średniego czasu oczekiwania na 3 pakiety błędów, lub jedną dziesiątą czasu oczekiwania na 15 pakietów błędów, itp.

Opierając się na powyższej definicji, otrzymujemy (por. wprowadzenie T' i T''):

$$T_2(\lambda) = \frac{\frac{E[n|\lambda]y}{\lambda}}{y} = \frac{E[n|\lambda]}{\lambda}.$$

Porównując zależności (20) i (25) z uwzględnieniem zależności powyższej, łatwo zobaczyć, że $T_2(\lambda) = T_1(\lambda)$.

Jeżeli przez T_2 oznaczyć średni czas, po którym zastosowanie testu II prowadzi do wyboru jednej z hipotez H_0, H_1 , wówczas

$$T_2 = T_1.$$

Tak więc, pod względem „szybkości działania” test I można uważać za równoważny testowi II, dla dostatecznie małych τ (por. uwagi kończące punkt 5.2).

6. ILORAZOWY TEST SEKWENCYJNY Z OGRANICZONĄ WIELKOŚCIĄ PRÓBY

Test sekwencyjny, z prawdopodobieństwem równym jedności, kończy się wyborem hipotezy H_0 lub H_1 , po pobraniu skończonej ilości elementów do próby. Daje to gwarancję, że wcześniej lub później wybór hipotezy nastąpi. W wielu praktycznych przypadkach jednak, liczba elementów, którą można pobrać do analizy jest ograniczona. W rozważanym w tej pracy przypadku, wielkość próby jest ściśle związana z czasem pomiaru. Jest oczywiste, że z różnych względów maksymalny dopuszczalny czas pomiaru może być z góry ograniczony. Oznaczmy ten czas przez T_p . W czasie T_p test sekwencyjny może nie doprowadzić do wyboru hipotezy. W takich przypadkach konieczne jest przyjęcie jakiejś nowej reguły decyzyjnej pozwalającej wybrać jedną z hipotez H_0, H_1 w chwili kończącej przedział czas T_p . Fakt, że w przedziale czasu T_p test sekwencyjny nie zakończył się wyborem hipotezy oznacza, że dla wszystkich elementów pobranych do próby w tym przedziale spełniony był warunek (por. zał. (10)) $\ln \frac{1-\beta}{\alpha} > Z_m > \ln \frac{\beta}{1-\alpha}$. Wydaje się rozsądnym przyjęcie następujących kryteriów wyboru hipotez w chwili czasu t_p kończącej przedział T_p :

- 1) jeżeli w chwili t_p zachodzi $\ln \frac{\beta}{1-\alpha} < Z_m \leq 0$, to należy przyjąć hipotezę H_0 ,
- 2) jeżeli w chwili t_p zachodzi $0 < Z_m < \ln \frac{1-\beta}{\alpha}$, to należy przyjąć hipotezę H_1 .

(29)

Tak więc, dla $t < t_0$ należy stosować kryteria wyboru hipotez określone przez zależności (10), natomiast dla $t = t_0$ kryteria określone przez zależności (29). Jest jasne, że przy tak określonych kryteriach wyboru hipotez, zmienia się (wzrosną) prawdopodobieństwa błędów I-go i II-go rodzaju, tj. α i β .

Dotychczas nie udało się w sposób zadowalający rozwiązać problemu znalezienia dobrych oszacowań tych zmienionych prawdopodobieństw. W związku z tym proponu-

jemy określenie prawdopodobieństw błędów I-go i II-go rodzaju w następujący, nieciągły sposób:

$$P_{T_p}(H_1|H_0) = \begin{cases} \alpha, & \text{jeżeli wybór hipotezy nastąpił według kryteriów (10),} \\ \alpha(T_p), & \text{jeżeli wybór hipotezy nastąpił według kryteriów (29) w chwili } t_p; \end{cases}$$

$$P_{T_p}(H_0|H_1) = \begin{cases} \beta, & \text{jeżeli wybór hipotezy nastąpił według kryteriów (10),} \\ \beta(T_p), & \text{jeżeli wybór hipotezy nastąpił według kryteriów (29) w chwili } t_p. \end{cases}$$

Wydaje się, że dla celów praktycznych określenie prawdopodobieństw I-go i II-go rodzaju w sposób powyższy jest wystarczające.

Wyprowadzimy zależności pozwalające określać $\alpha(T_0)$ i $\beta(T_0)$ w przypadku testów I i II.

Zajmijmy się testem I. Przyjmijmy, że T_p i τ są tak dobrane, że $\frac{T_p}{\tau} = n_0$ jest liczbą naturalną. Praktycznie rzecz biorąc założenie to tylko w niewielkim stopniu ogranicza ogólność rozważań.

Wielkość $\alpha(T_0)$ można określić następująco:

$$\alpha(T_0) = P\left(0 < Z_{n_0} < \ln \frac{1-\beta}{\alpha} \mid \lambda \leq \lambda^*\right).$$

Nierówność $0 < Z_{n_0} < \ln \frac{1-\beta}{\alpha}$ jest równoważna nierówności

$$an_0 < \sum_{i=1}^{n_0} k_i < an_0 + b_1,$$

zatem

$$\begin{aligned} \alpha(T_0) &= P\left(an_0 < \sum_{i=1}^{n_0} k_i < an_0 + b_1 \mid \lambda \leq \lambda^*\right) = \\ &= \int_0^{\lambda^*} P\left(an_0 < \sum_{i=1}^{n_0} k_i < na_0 + b_1 \mid \lambda = x\right) f_\lambda(x) dx, \end{aligned} \quad (30)$$

gdzie $f_\lambda(x)$ jest gęstością prawdopodobieństwa zmiennej λ a priori (por. 2). Zauważmy, że

$$P\left(an_0 < \sum_{i=1}^{n_0} k_i < an_0 + b_1 \mid x\right) = \sum_{k=[an_0]+1}^{[an_0+b_1]} \frac{(xT_p)^k}{k!} \exp(-xT_p),$$

gdzie $[y]$ oznacza część całkowitą z y . Uwzględniając oznaczenie $n_0 = \frac{T_p}{\tau}$ i powyższą równość w zależności (30) otrzymujemy:

$$\alpha(T_p) = \sum_{k=\left[\frac{a}{\tau}T_p\right]+1}^{\left[\frac{a}{\tau}T_p+b_1\right]} \frac{(T_p)^k}{k!} \int_0^{\lambda^*} x^k \exp(-xT_p) f_\lambda(x) dx. \quad (31)$$

Jeżeli przyjąć, że $f_\lambda(x) = c^2 x \exp(-cx)$ (por. 2), wówczas po wyliczeniu całki w zależności (31) otrzymujemy:

$$\alpha(T_p) = c^2 \exp[-\lambda^*(T_p + c)](A - B) - C,$$

gdzie:

$$A = \sum_{k=\left[\frac{a}{\tau} T_p\right]+1}^{\left[\frac{a}{\tau} T_p + b_1\right]} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{(T_p)^k (k+1)k \dots (k-i+2)}{k! (T_p + c)^{i+1}} (\lambda^*)^{k-i+1},$$

$$B = \sum_{k=\left[\frac{a}{\tau} T_p\right]+1}^{\left[\frac{a}{\tau} T_p + b_1\right]} \frac{(T_p)^k (\lambda^*)^{k+1}}{(T_p + c)k!},$$

$$C = c^2 \sum_{k=\left[\frac{a}{\tau} T_p\right]+1}^{\left[\frac{a}{\tau} T_p + b_1\right]} \frac{(T_p)^k (k+1)}{(T_p + c)^{k+2}}.$$

Postępując podobnie jak w przypadku wyprowadzenia $\alpha(T_p)$, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \beta(T_p) &= P\left(\ln \frac{\beta}{1-\alpha} < Z_{n_0} \leq 0 \mid \lambda > \lambda^*\right) = \\ &= \sum_{k=\left[\frac{a}{\tau} T_p + b_0\right]+1}^{\left[\frac{a}{\tau} T_p\right]} \frac{(T_p)^k}{k!} \int_{\lambda^*}^{\infty} x^k \exp(-x T_p) f_\lambda(x) dx. \end{aligned} \quad (32)$$

Jeżeli przyjąć $f_\lambda(x) = c^2 x \exp(-cx)$, wówczas

$$\beta(T_p) = c^2 \exp[-\lambda^*(T_p + c)](B - A).$$

Pokażemy teraz, że $\alpha(T_p)$ i $\beta(T_p)$, dla testu II, wyrażają się tymi samymi zależnościami co w przypadku testu I, tj. zależnościami (31) i (32).

W przypadku testu II, $\alpha(T_p)$ można określić zależnością:

$$\alpha(T_p) = P\left(0 < Z_m < \ln \frac{1-\beta}{\alpha} \mid \lambda \leq \lambda^*, \sum_{i=1}^m d_i = T_p\right). \quad (33)$$

Nierówność $0 < Z_m < \ln \frac{1-\beta}{\alpha}$ równoważna jest nierówności

$$b_1^1 - m a^1 < \sum_{i=1}^m d_i < -m a^1.$$

Ze względu na to, że $\sum_{i=1}^m d_i = T_p$, więc ostatnia nierówność równoważna jest nierówności

$$-\frac{T_p}{a_1^1} < m < \frac{b_1^1}{a_1^1} - \frac{T_p}{a_1^1}. \quad (34)$$

Zauważmy, że $m = \sum_{i=1}^{n_0} k_i$ (por. wyprowadzenie $\alpha(T_0)$ dla testu I). Porównując zależności (17) i (23), łatwo pokazać, że

$$\frac{-T_p}{a_1^1} = an_0 \quad \text{i} \quad \frac{b_1^1}{a_1^1} - \frac{T_p}{a_1^1} = an_0 + b_1.$$

Ostatecznie nierówność (34) równoważna jest nierówności

$$an_0 < \sum_{i=1}^{n_0} k_i < an_0 + b_1,$$

natomiast określenie (33) określeniu

$$\alpha(T_p) = P\left(an_0 < \sum_{i=1}^{n_0} k_i < an_0 + b_1 \mid \lambda \leq \lambda^*\right),$$

co zważywszy na zależność (30) kończy dowód. Zatem $\alpha(T_p)$, dla testu II, wyraża się zależnością (31).

Przeprowadzając rozumowanie podobne do powyższego, można wykazać, że $\beta(T_p)$ dla testu II wyraża się zależnością (32).

Powyżej zakładaliśmy, że T_p jest ustalone. Można również rozważać problem doboru minimalnej wartości T_p , dla której $\alpha(T_p)$ i $\beta(T_p)$ nie przekraczają z góry ustalonych wartości. Problem ten można rozwiązać wykorzystując zależności (31) i (32).

7. UWAGI KOŃCOWE

Można sprawdzić (wykorzystując zależności określające T_1 i T_2), że jeżeli przyjąć iż prawdopodobieństwa podjęcia błędnej decyzji nie przekraczają 0,1 (tzn. $\alpha = \beta = 0,1$), $P_0 = P^* - 0,1P^*$ i $P_1 = P^* + 0,1P^*$, to ilorazowe testy sekwencyjne rozważone w tej pracy prowadzą do wyboru hipotezy średnio po czasie rzędu pół godziny. Zważywszy na to, że średnia długość przedziału stacjonarności ciągu pakietów błędów jest rzędu kilku godzin⁵⁾ (por. rozdz. 2 pracy), należy sądzić, że testy te znajdą zastosowanie w praktyce. Można bowiem przy ich pomocy oceniać stan łącza transmisyjnego w przedziale czasu średnio rzecz biorąc znacznie dłuższym, niż przedział czasu potrzebny do wydania oceny.

Powróćmy jeszcze do kwestii (poruszanej w rozdz. 2), dotyczącej podziału przedziału czasu o długości T na rozłączne przedziały czasu, w których ciąg pakietów błędów można opisać stacjonarnym procesem Poissona. Ogólnie rzecz biorąc momenty rozpoczynające i kończące przedziały stacjonarności rozłożone są na osi czasu w sposób losowy. Aby

⁵⁾ Potwierdzają to uwagi zawarte w pracy [3].

można było efektywnie wykorzystać zbudowane w tej pracy testy do oceny przydatności łącza do transmisji cyfrowej w odcinku czasu bezpośrednio następującym po odcinku czasu, w którym łącze było testowane, należy zbadać prawa rządzące tą losowością. Będzie bowiem wówczas można udzielać odpowiedzi na pytanie, które z praktycznego punktu widzenia wydaje się być najistotniejszym: jakie jest prawdopodobieństwo, że w przedziale czasu o określonej długości bezpośrednio następującym po przedziale czasu, w którym łącze było testowane, będzie ono przydatne lub nieprzydatne do transmisji cyfrowej?

Proces pobierania elementów do próby i podejmowania decyzji o wyborze hipotezy można zautomatyzować zarówno w przypadku testu I jak i w przypadku testu II. W obu przypadkach odpowiednie urządzenie pomiarowe może być zrealizowane w oparciu o technikę układów cyfrowych. Trudno z góry przesądzać, który z testów jest łatwiejszy do zautomatyzowania, wiele bowiem zależy od koncepcji realizacji odpowiedniego urządzenia pomiarowego.

W przypadku automatyzacji testu bez ograniczenia na wielkość próby największą trudność stanowi realizacja funkcji o postaci $x + my$ i $x - my$, gdzie $m = 1, 2, \dots, x$ i y są ustalonymi liczbami rzeczywistymi (por. określenie W_0^m, W_1^m, W_2^m z 5.2 i 5.3).

W testach z ograniczoną wielkością próby zmienna m może przyjmować jedynie z góry określoną ilość wartości: $m = 1, 2, \dots, N$. W tym przypadku można zrezygnować z realizacji funkcji $x + my$ i $x - my$ ($m = 1, 2, \dots$) i ograniczyć się do realizacji ściśle określonej ilości progów komparacji odpowiadających wartościom $x \pm y, x \pm 2y, \dots, x \pm Ny$. Dla testu I N jest zależne od $\tau, \alpha, \beta, \Theta_0$ i Θ_1 , natomiast dla testu II N zależy tylko od α, β, Θ_0 i Θ_1 . Wartość N maleje, gdy α i β wzrastają i maleje $(\Theta_1 - \Theta_0)$, ponadto (w przypadku testu I) N maleje, gdy wzrasta τ . Wielkość $2N$ określa liczbę progów komparacji, które należy zrealizować w urządzeniu pomiarowym, a więc należy dążyć do minimalizacji N . Z tego względu istotny jest odpowiedni dobór τ_0 (por. uwagi z 5.2).

W [4] rozważony został pewien szczególny przypadek testu I. Przyjęto (nie podając uzasadnienia) $\tau = 5$ min. Jeżeli przyjąć, że maksymalny dopuszczalny czas pomiaru T_p równy jest przykładowo 60 min, to $N = 12$, zatem w urządzeniu pomiarowym należy zrealizować 24 progi komparacji. Można wykazać, że test II wymaga w rozważanym w [4] przypadku (tj. dla przyjętych w [4] α, β, Θ_0 i Θ_1) realizacji zaledwie pięciu progów komparacji, stąd wypływa niewątpliwa zaleta testu II w stosunku do testu I. Celowe jest zatem zbadanie w jakim stopniu powyższa własność testu II przenosi się na przypadek ogólny.

LITERATURA

1. B. W. Gniedenko, I. N. Kowalenko, *Wstęp do teorii obsługi masowej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1971.
2. E. L. Lehmann, *Testowanie hipotez statystycznych*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1968.
3. M. Rydel, *O pewnych statystycznych charakterystykach błędów transmisji binarnej*, Rozprawy Elektrotechniczne, 1971, 17, z. 3.
4. W. O. Szwarzman, *Kanały pieriadaci danych*, Izdatielstwo „Swiaz”, Moskwa 1970.
5. A. Wald, *Posledowatielnyj analiz*, Gosudarstwiennoe Izdatielstwo Fizyko-Matematicheskoy Literatury, Moskwa 1960.

J. LUBACZ

ANALYSIS OF ABILITY TO DETERMINE THE QUALITY OF DIGITAL TRANSMISSION CHANNELS ON THE BASIS OF A SHORT MEASUREMENT

Summary

The work analyses the possibility of using statistical hypotheses testing theory methods to predict the quality of transmission channels used for digital transmission. The sequential probability ratio test proves to be the most useful, and therefore it is mainly analysed. The possibility of using a truncated sequential probability ratio test is also considered.

J. LUBACZ

ANALYSE DE LA POSSIBILITÉ DE DÉTERMINER L'UTILITÉ DE LIAISON POUR LA TRANSMISSION DIGITALE À PARTIR DE LA MESURE DE COURTE DURÉE

Résumé

Dans l'article on a considéré la possibilité d'utiliser les méthodes de la théorie de vérification des hypothèses statistiques pour la définition de l'utilité de l'application de la liaison dans la transmission digitale. Les plus utiles, du point de vue du problème examiné, se sont montrées les séquences tests à quotient de vérification des hypothèses et pour cette raison on s'est occupé surtout de l'analyse de leurs propriétés. On a discuté la possibilité de l'application de la séquence test à quotient limitée.

J. LUBACZ

ANALYSE DER BESTIMMUNGSMÖGLICHKEIT AUF GRUND EINER KURZFRISTIGEN MESSUNG DER BRAUCHBARKEIT EINER LEITUNG FÜR DIE DIGITALE TRANSMISSION

Zusammenfassung

In vorstehender Bearbeitung wurden die Möglichkeiten erwogen, die Verifikationsmethoden der statistischen Hypothesen für die Brauchbarkeitsbestimmung einer Leitung für die digitale Transmission zu verwerten. Es zeigte sich, daß vom Gesichtspunkt des in dieser Arbeit erwogenen Problems aus die Sequenzquotientteste der Verifikationshypothesen am günstigsten seien, und deshalb wurde deren Analyse die größte Aufmerksamkeit geschenkt. Es wurde die Möglichkeit erörtert, den Sequenzquotienttest mit beschränkter Probengröße anzuwenden.

Ю. ЛЮБАЧ

АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРАТКОВРЕМЕННЫМ ИЗМЕРЕНИЕМ СПОСОБНОСТИ КАНАЛА К ПЕРЕДАЧЕ ЦИФРОВЫХ ДАННЫХ

Резюме

В работе анализируются возможности использования метода теории проверки статистических гипотез к проблеме определения способности канала к передаче цифровых данных. Показано, что наиболее соответствующими для этой цели являются методы последовательного анализа и поэтому им посвящено преобладающее внимание. Проанализированы также возможности создания усеченной процедуры последовательного анализа, для рассматриваемой проблемы.

Wpływ częstotliwości rezonansowej uzwojeń transformatora na siły osiowe występujące w czasie zwarcia

LILIANA BYCZKOWSKA-LIPIŃSKA (ŁÓDŹ)

Instytut Transformatorów, Maszyn i Aparatów Elektrycznych Politechniki Łódzkiej

Otrzymano 10.7.1974

Podano metodę wyznaczania charakterystyk rezonansowych uzwojeń transformatora. Dokonano analizy czynników decydujących o przemieszczeniach uzwojeń oraz podano, w jaki sposób i w jakich zakresach wpływają one na zjawisko rezonansu.

1. OGÓLNY PRZEGLĄD ZAGADNIENIA

Podczas pracy transformatora występuje wzajemne oddziaływanie mechaniczne uzwojeń na siebie za pośrednictwem strumienia rozproszenia. Siły oddziaływania uzwojeń zależą od natężenia pola strumienia rozproszenia oraz od wartości prądu płynącego w uzwojeniach, dlatego podczas pracy transformatora w warunkach znamionowych są one niewielkie. Osiągają natomiast duże wartości podczas zwarcia udarowego, gdy prądy wzrastają kilkanaście lub czasami kilkadziesiąt razy (przy mniejszych transformatorach) ponad wartość prądu znamionowego.

Jak wiadomo, klasyczna teoria transformatora rozpatruje oddzielnie zwarciove siły osiowe i siły promieniowe. Siły promieniowe i wywołane przez nie naprężenia, przyczyną których jest składowa podłużna strumienia rozproszenia, w chwili obecnej mogą być stosunkowo dokładnie i łatwo obliczone. Natomiast przy wyznaczaniu sił osiowych wywołanych przez składową poprzeczną pola rozproszenia występuje jeszcze wiele problemów, które dotychczas nie zostały jednoznacznie rozwiązane.

Składową poprzeczną strumienia rozproszenia i osiowe siły zwarciove można wyznaczyć następującymi metodami:

1. metodą potencjału wektorowego,
2. metodą sił cząstkowych,
3. metodą amperozwojów poprzecznych.

Bardzo przejrzyste i syntetyczne zestawienie metod obliczania sił zwarciowych zarówno promieniowych jak i osiowych przedstawia M. Waters [10].

Wszystkie powyższe metody zakładają statyczny charakter działania sił zwarciowych, przedstawiając uzwojenie jako sztywną i nieruchomą konstrukcję. Do obliczania sił zakładają stałą wartość prądu w uzwojeniach równą udarowej wartości prądu zwarciowego.

Stały wzrost mocy zwarciowych w sieciach energetycznych powoduje, że coraz większego znaczenia nabiera zagadnienie elektrodynamicznej wytrzymałości transformatorów mocy, zwłaszcza że wraz ze wzrostem mocy transformatora maleje jego częstotliwość drgań

własnych i zachodzi niebezpieczeństwo rezonansu z częstotliwością zasilania zwarcia (50 lub 100 Hz).

Zdaniem wielu specjalistów wymiarowanie uzwojenia jedynie z punktu widzenia statycznych sił zwarciovych, zwłaszcza dla dużych jednostek, staje się niewystarczające. Zagadnienie zachowania się uzwojeń w stanie dynamicznym w warunkach zwarciovych wymaga szczególnego zbadania, nie wiadomo bowiem, czy niektóre uszkodzenia i deformacje uzwojeń podczas zwarcia nie są spowodowane wystąpieniem rezonansu.

W roku 1963 A. Madin, D. Whitaker [5] i G. Watts [11] opublikowali prace, z których pierwsza omawia fizyczną stronę zagadnienia dynamiki uzwojeń, natomiast druga podaje sposób rozwiązania problemu (metoda Cramera) na drodze matematycznej. Problemowi elektrodynamicznej wytrzymałości uzwojeń transformatorów poświęcono kilka referatów na kolejne sesje CIGRE, w latach 1962 i 1964 [8] [9], zgłoszonych przez zespół sześciu autorów z trzech firm: francuskiej, włoskiej i angielskiej.

Na II Konferencji Transformatorowej w 1970 r. [12] w dyskusji poddane zostały w wątpliwość dotychczasowe kryteria wytrzymałości oparte na obliczeniach o charakterze statycznym.

Na sesję CIGRE w 1972 r. zgłoszono także kilka referatów [1], [6], [7] poświęconych zagadnieniu wytrzymałości dynamicznej transformatorów.

Mimo dość bogatej literatury, nie ma na temat występowania rezonansu w transformatorach jednoznacznego poglądu. Nadal w dyskusjach przewija się pytanie, czy przy rozpatrywaniu osiowych sił zwarciovych można pominąć problem rezonansu mechanicznego. Jakkolwiek dotychczas wykonywane próby zwarciove nie stwierdziły w sposób niezbity występowania rezonansu, to zdarzały się przypadki, że dla transformatorów zaprojektowanych w oparciu o obliczenia statycznych sił osiowych, wyniki prób zwarciovych były ujemne. Można więc było sądzić, że drgania własne uzwojeń transformatora o częstotliwości własnej równej lub bliskiej częstotliwości siły wzbudzającej mogą wywołać znacznie większe przemieszczenie części uzwojeń niż obliczone przy założeniu sił statycznych, a więc i odpowiednio większy wzrost naprężeń mechanicznych.

2. WYZNACZENIE PRZEMIESZCZEŃ WYSTĘPUJĄCYCH W UZWOJENIACH W CZASIE ZWARĆ

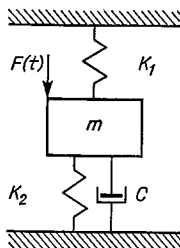
Jak wynika z dotychczasowych badań i prac poświęconych zagadnieniom stanu dynamicznego transformatorów podczas zwarcia udarowego, ważne jest wyodrębnienie podstawowych czynników decydujących o przemieszczeniach uzwojeń oraz zbadanie, w jaki sposób wpływają one na zjawisko rezonansu.

Jako model uzwojenia transformatora przyjęty został układ mechaniczny z rys. 1. Uzwojenie zostało potraktowane jako skupiona nieodkształcalna masa m znajdująca się między dwoma elementami sprężystymi o współczynnikach sztywności K_1 i K_2 i o tłumieniu mechanicznym C .

W celu przeprowadzenia analizy ruchu uzwojenia transformatora przyjęto następujące założenia:

1. ruch układu odbywa się tylko w osi podłużnej,
2. rozpatruje się ruch jednego z uzwojeń przy drugim uzwojeniu nieruchomym,

3. rozkład sił elektromagnetycznych i mechanicznych parametrów uzwojenia jest równomierny na obwodzie uzwojenia,
4. odkształceniu ulega tylko materiał izolacyjny,
5. tłumienie mechaniczne jest wiskotyczne; oznacza to, że wszystkie straty zachodzące w układzie są proporcjonalne do prędkości.



Rys. 1. Zastępczy model mechaniczny uzwojenia transformatora

Wykorzystując rachunek wariacyjny można wyprowadzić wzory ruchu układu mechanicznego. Metoda wariacyjna, zwana także metodą minimalnego działania, oparta na zasadzie Hamiltona, polega na znalezieniu ekstremum funkcji opisujących stany energetyczne układów mechanicznych.

Dla rozpatrywanego liniowego układu mechanicznego z rys. 1 można napisać: energia kinetyczna

$$T = \frac{1}{2} m \dot{z}^2, \quad (1)$$

energia potencjalna

$$V = \frac{1}{2} K_1 z^2 + \frac{1}{2} K_2 z^2. \quad (2)$$

Funkcja dyssypacji Rayleigha dająca miarę rozproszenia energii mechanicznej

$$T_F = \frac{1}{2} C \dot{z}^2. \quad (3)$$

Wymuszenie w układzie V_Q wynosi

$$V_Q = F(t) + mg. \quad (4)$$

Równanie Eulera-Langrange'a dla układu z tłumieniem i wymuszeniem ma postać

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) + \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial T_F}{\partial \dot{z}} - V_Q = 0. \quad (5)$$

Podstawiając do równania (5) zależności (1), (2), (3) i (4) otrzymano równanie ruchu układu mechanicznego z rys. 1

$$m\ddot{z} + C\dot{z} + (K_1 + K_2)z = F(t) + mg, \quad (6)$$

gdzie:

- m — całkowita masa uzwojenia,
 C — tłumienie mechaniczne układu,
 $K = K_1 + K_2$ — wypadkowy współczynnik sztywności,
 $F(t)$ — wymuszająca osiowa siła elektromagnetyczna,
 g — przyspieszenie ziemskie,
 z — całkowite przemieszczenie uzwojenia,

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt},$$

$$\ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

2.1. Wyznaczenie siły elektromagnetycznej występującej w transformatorze podczas zwarcia udarowego

W celu określenia siły elektromagnetycznej występującej w transformatorze w warunkach zwarcia udarowego należy wyznaczyć zgodnie z zależnością (7) funkcję $i(t)$

$$F(t) = A[i(t)]^2. \quad (7)$$

Przebieg prądu $i(t)$ w stanie zwarcia jest możliwy do określenia po rozwiązaniu układu równań (8) opisujących przebiegi prądów w uzwojeniach w czasie trwania zwarcia [3]

$$\begin{aligned}
 U_1 \sqrt{2} (\omega t - \varphi) &= i_1 R_1 + L_{r1} \frac{di_1}{dt} + z_1 \frac{d\varphi}{dt}, \\
 0 &= i_2 R_2 + L_{r2} \frac{di_2}{dt} + z_2 \frac{d\varphi}{dt}.
 \end{aligned} \quad (8)$$

W wyniku przekształceń otrzymujemy

$$U \sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi) = R_z i + L \frac{di}{dt}, \quad (9)$$

gdzie:

ω — pulsacja napięcia

$i_1 R_1, i_2 R_2$ — spadki napięć na rezystancjach,

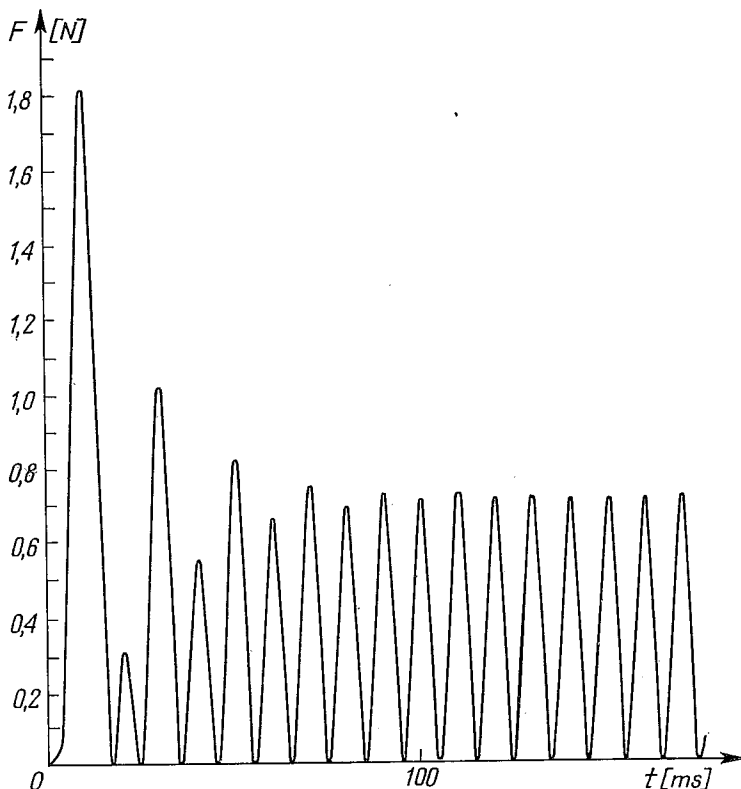
$\frac{di_1}{dt}, \frac{di_2}{dt}$ — sem wzniecona przez strumienie rozproszenia,

$z_1 \frac{d\varphi}{dt}, z_2 \frac{d\varphi}{dt}$ — sem wzniecona przez strumień główny,

U — wartość skuteczna napięcia,

φ — kąt określający chwilę, w której nastąpiło zwarcie,

$$\begin{aligned}
 R_z &= R_1 + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 R_2; \quad L_r = L_{r1} + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 L_{r2}, \\
 i(t) &= I_z \sqrt{2} [\sin(\omega t - \varphi - \varphi_z) + \sin(\varphi + \varphi_z) e^{-\alpha t}], \\
 I_z \sqrt{2} &= \frac{U}{\sqrt{R_z^2 + (\omega L_r)^2}}; \quad \varphi_z = \arctg \frac{\omega L_r}{R_z}; \quad \alpha = \frac{R_z}{L_r}.
 \end{aligned} \quad (10)$$



Rys. 2. Przebieg wymuszającej siły elektromagnetycznej w funkcji czasu dla transformatora 1,6 MVA

Przyjmując, że zwarcie nastąpiło w najbardziej niekorzystnym momencie, gdy chwilowa wartość napięcia jest równa zero, otrzymuje się

$$i(t) = \sqrt{2} I_z (e^{-\alpha t} - \cos \omega t), \quad (11)$$

a elektromagnetyczna siła wymuszająca ma postać zgodnie z (7)

$$F(t) = F_o (e^{-\alpha t} - \cos \omega t)^2, \quad (12)$$

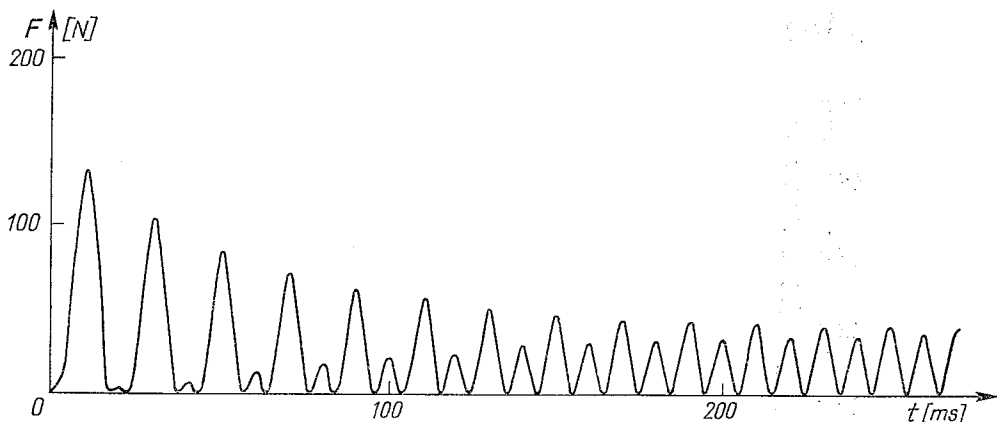
czyli

$$F(t) = F_o \left(e^{-2\alpha t} + \frac{1}{2} \right) - 2F_o e^{-\alpha t} \cos \omega t + \frac{1}{2} F_o \cos 2\omega t; \quad (13)$$

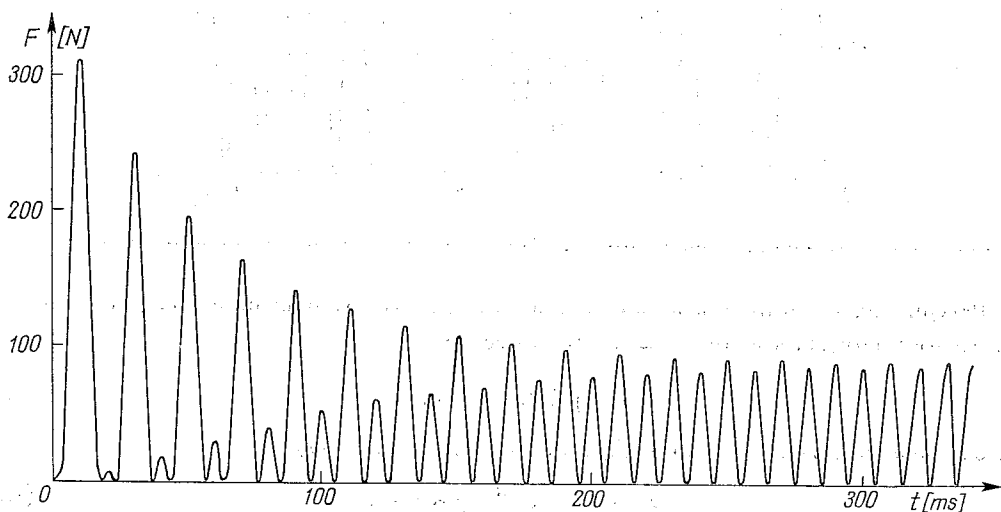
$F_o = \sqrt{2} A I_z^2$ — siła elektromagnetyczna obliczona statycznie, wynikająca z asymetrii uzwojeń.

Jak wynika z (13), w warunkach zwarcia udarowego występują trzy składowe wymuszającej siły elektromagnetycznej:

— składowa jednokierunkowa, zmniejszająca bardzo szybko swą wartość do wartości ustalonej równej $\frac{F_o}{2}$,



Rys. 3. Przebieg wymuszającej siły elektromagnetycznej w funkcji czasu dla transformatora 68 000 kVA



Rys. 4. Przebieg wymuszającej siły elektromagnetycznej w funkcji czasu dla transformatora 240 MVA

— zanikająca składowa zmienna o częstotliwości równej częstotliwości prądu zwarcio-
wego, której wartość wynosi $2F_0 e^{-\alpha t} \cos \omega t$; składowa ta odgrywa zasadniczą rolę
w początkowej fazie zwarcia ze względu na dużą wartość amplitudy początkowej,
— składowa zmienna o podwójnej częstotliwości odpowiadającej warunkom stanu usta-
łego.

Na rys. 2, 3, 4 podano przebiegi wymuszających osiowych sił elektromagnetycznych transformatorów, dla których przeprowadzono analizę rezonansową.

Z postaci wzoru (13) i otrzymanych przebiegów widać, że siły elektromagnetyczne pobudzają uzwojenie transformatora do drgań zarówno z częstotliwością 50 Hz jak i 100 Hz.

2.2. Wyznaczenie przemieszczeń uzwojenia transformatora

Znając wyrażenie na wymuszającą siłę elektromagnetyczną (13) można równanie (6) napisać w postaci

$$m\ddot{z} + C\dot{z} + Kz = \frac{F_0}{2} + mg + \frac{F_0}{2} e^{-2\alpha t} - 2F_0 e^{-\alpha t} \cos \omega t + \frac{F_0}{2} \cos 2\omega t. \quad (14)$$

Dla jednoznacznego wyznaczenia rozwiązania równania (14) należy zadać warunki początkowe;

— początkowe przemieszczenie masy

$$z(t)_{t=0} = 0, \quad (15)$$

— oraz jej początkową prędkość

$$\dot{z}(t)_{t=0} = 0. \quad (16)$$

W liniowym układzie sprężystym skutek ogólny wymuszenia jest sumą skutków elementarnych, odpowiadającym poszczególnym członom wymuszenia.

Rozwiązanie równania (14) można przedstawić w postaci pięciu składników

$$z(t) = z_0(t) + z_1(t) + z_2(t) + z_3(t) + z_4(t), \quad (17)$$

gdzie:

$z(t)$ — całkowite przemieszczenie elementu m ,

$z_0(t)$ — przemieszczenia odpowiadające tłumionym drganiom swobodnym,

$z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$, $z_4(t)$ — przemieszczenia składowe odpowiadające poszczególnym członom wymuszenia (wyrazy prawej strony równania (14)).

Rozwiązanie analityczne równania (14) przedstawione jest w postaci (18)

$$z(t) = Be^{-\frac{C}{2m}t} \sin(\omega t + \psi) + \frac{F_0 + 2mg}{2K} - \frac{F_0}{4\alpha^2 m - 2\alpha C + K} e^{-2\alpha t} - \\ - \frac{2F_0}{m\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}} e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \mu) + \frac{F_0}{2m\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}} \cos(2\omega t + \nu), \quad (18)$$

gdzie

$$\alpha = \frac{R_z}{L_r}.$$

Wartość stałych B i ψ wyznacza się z równania (18) w oparciu o warunki początkowe (15), (16)

$$z(t)_{t=0} = B \sin \psi + \frac{F_0 + 2mg}{2K} + \frac{F_0}{4\alpha^2 m - 2\alpha C + K} - \\ - \frac{2F_0}{m\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}} \cos \mu + \frac{F_0}{2m\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}} \cos \nu = 0, \\ \dot{z}(t)_{t=0} = \frac{BC}{2m} \sin \psi + B\alpha \cos \psi - \frac{2F_0\alpha}{4\alpha^2 m - 2\alpha C + K} - \\ - \frac{2F_0\alpha}{m\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}} \cos \mu - \frac{2F_0\omega}{m\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}} \sin \mu - \frac{2F_0\omega}{2m\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}} \sin \nu = 0,$$

$$B = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\psi = \operatorname{artg}\left(\frac{x}{y}\right),$$

gdzie:

$$\begin{aligned} x = & - \left(\frac{F_o + 2mg}{2K} + \frac{F_o}{4\alpha^2 m - 2\alpha C + K} - \frac{2F_o}{m\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}} \cos \mu + \frac{F_o}{2m\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}} \sin \nu \right), \\ \gamma = & \frac{1}{q} \left(\frac{2F_o \alpha}{4\alpha^2 m - 2\alpha C + K} + \frac{2\omega F_o}{m\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}} \sin \mu + \frac{2F_o \alpha}{m\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}} \cos \mu + \right. \\ & + \frac{2F_o \omega}{2m\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}} \sin \nu \left. \right) - \frac{C}{2m} \left(\frac{F_o + mg}{2K} + \frac{F_o}{4\alpha^2 m - 2\alpha C + K} - \right. \\ & \left. - \frac{2F_o}{m\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}} \cos \mu + \frac{F_o}{2m\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}} \cos \nu \right). \end{aligned}$$

Pierwszy człon równania (18) opisuje tłumione wskutek oporu mechanicznego drgania własne o pulsacji ω . Człony dwa i trzy są składowymi jednokierunkowymi przemieszczenia zmniejszającymi swą wartość do wartości ustalonej. Człon czwarty przedstawia tłumione wskutek oporu elektrycznego drgania wymuszone przebiegające z pulsacją równą pulsacji prądu zwarcowego, natomiast człon ostatni przedstawia drgania wymuszone nietłumione o podwójnej pulsacji i odpowiada warunkom stanu ustalonego.

3. WYZNACZENIE CHARAKTERYSTYK UKŁADU DRGAJĄCEGO

Dla układu mechanicznego z rys. 1 można wprowadzić następujące oznaczenia:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad (19)$$

$$\varrho = \frac{C}{2m}, \quad (20)$$

gdzie:

ω_0 — pulsacja drgań własnych masy układu z rys. 1 przy współczynniku tłumienia mechanicznego równym zero,

ϱ — współczynnik tłumienia mechanicznego.

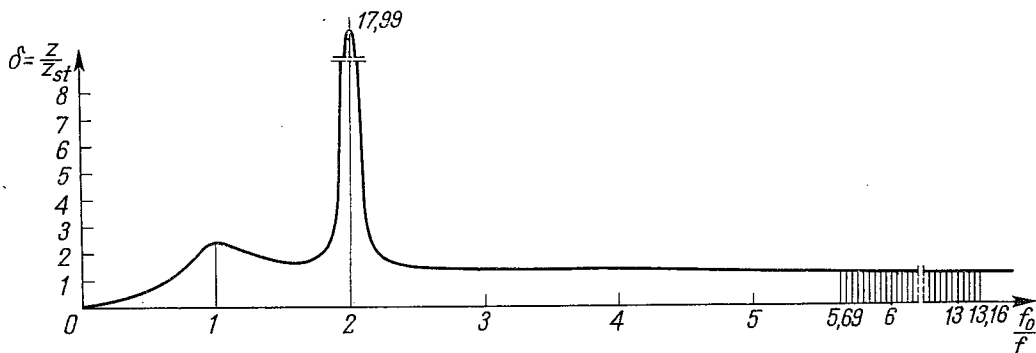
Wyrażenie (18) przedstawia przemieszczenie uzwojenia transformatora w wyniku działania na nie siły wymuszającej $F(t)$. Do analizy wprowadzono wielkość z_{st} wykazującą przemieszczenie dolnego końca uzwojenia, jakie wywołałaby siła wymuszająca F_o działając statycznie

$$z_{st} = \frac{F_o k_u^2}{K},$$

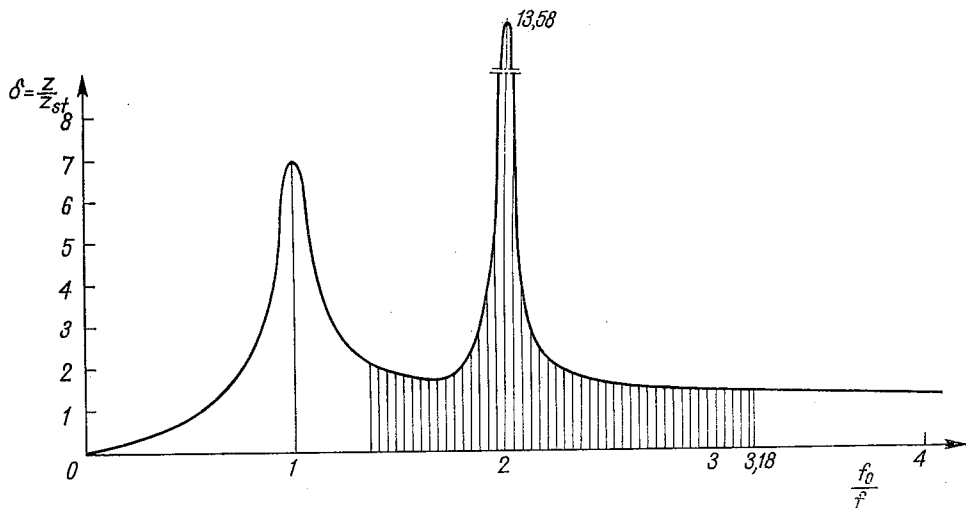
F_o — amplituda siły wymuszającej przy ustalonej wartości prądu zwarcowego,

k_u — współczynnik uderu,

K — współczynnik sztywności.



Rys. 5. Charakterystyka rezonansowa dla transformatora 1,6 MVA $\varrho = 0,72 \frac{1}{s}$

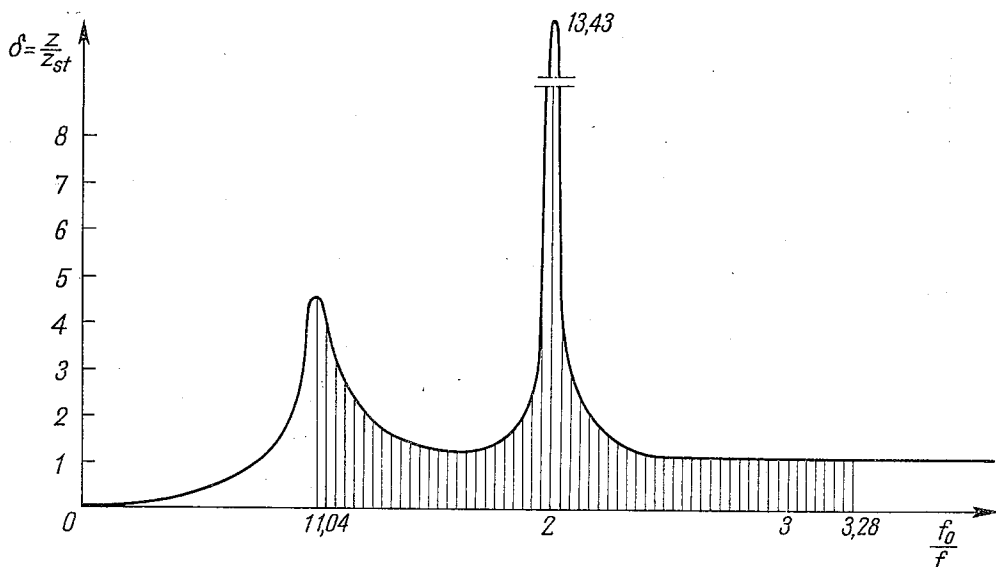


Rys. 6. Charakterystyka rezonansowa dla transformatora 68 MVA $\varrho = 0,72 \frac{1}{s}$

Według równania (18) wyznaczono maksymalną wartość przemieszczenia występującą w czasie zwarcia udarowego. Czas zwarcia zależy od mocy transformatora. Przyjęto go według projektu normy dla analizowanych transformatorów

1600 kVA	1,0 s,
68 MVA, 240 MVA	2,0 s,

Dzieląc maksymalne przemieszczenie wyznaczone ze wzoru (18) przez z_{st} wprowadzono pojęcie czynnika zwiększającego $\delta = \frac{z}{z_{st}}$. Wykresy zależności wzmocnienia amplitudy w funkcji stosunku częstotliwości własnej uzwojenia do częstotliwości siły wymuszającej $\left[\delta = \frac{z}{z_{st}} = f\left(\frac{f_0}{f}\right) \right]$ nazywamy charakterystykami układu drgającego. Charakterystyki te można



Rys. 7. Charakterystyka rezonansowa dla transformatora 240 MVA $q = 0,72 \frac{1}{s}$

otrzymać zmieniając częstotliwość własną uzwojeń badanego typu transformatora. W stosunkowo niewielkim zakresie można to uzyskać zmieniając wartość współczynnika sztywności K przez zmianę sprasowania wstępnego i przez obróbkę mechaniczno-termiczną elementów izolacyjnych uzwojeń przed ich montażem. Takie zmiany K mogą być niekiedy wykorzystane przy budowie transformatorów dla uniknięcia rezonansu mechanicznego częstotliwości drgań własnych uzwojeń z częstotliwością prądu zasilającego. Jednakże tak szerokiego zakresu zmian częstotliwości własnej, jak to podano na załączonych w pracy charakterystykach, praktycznie nie udałoby się uzyskać. Charakterystyki w tak szerokim zakresie obliczono tylko dla celów teoretycznych, głównie dla zorientowania się, w której części charakterystyki ogólnej znajduje się zakres częstotliwości odpowiadający praktyce.

Analiza charakterystyk rezonansowych pozwala ocenić, w jaki sposób i jakie podstawowe wielkości układu drgającego wpływają na maksymalną amplitudę przemieszczeń. Charakterystyki rezonansowe wykonano dla kilku rzeczywistych transformatorów o różnych mocach i napięciach. Na rys. 5, 6, 7 zostały przedstawione charakterystyki rezonansowe obliczone odpowiednio dla transformatorów 1,6 MVA, 15 kV, 68 MVA, 110 kV, 240 MVA, 220 kV, przy czym obliczeń dokonano dla rzeczywistych wartości współczynników tłumienia, wyznaczonych na podstawie badań mechanicznych materiałów izolacyjnych, stosowanych w tych transformatorach.

Wartość maksymalnego przemieszczenia uzwojenia zależy, jak widać z wykresów, od stosunku $\frac{f_0}{f}$, wartości tłumienia w układzie drgającym, zmiany siły wymuszającej w czasie oraz od czasu trwania zwarcia.

Na podstawie przebiegów rezonansowych można wyodrębnić kilka charakterystycznych przypadków ruchu układu drgającego.

a) $\frac{f_o}{f} \rightarrow 0$, czyli $f \gg f_o$; zmiany siły wymuszającej są szybkie w stosunku do częstotliwości własnej uzwojenia i jego masa nie jest w stanie za nimi nadążyć, wskutek czego amplitudy przemieszczeń są niewielkie.

b) $\frac{f_o}{f} \rightarrow \infty$, $f_o \gg f$; częstotliwość siły wzbudzającej jest mała w stosunku do częstotliwości własnej uzwojenia, wobec czego masa powoli wychyla się z położenia równowagi i amplitudy przemieszczeń są niewielkie.

c) $\frac{f_o}{f} = 1$; jest to przypadek, dla którego częstotliwości wymuszenia $f = 50$ Hz, częstotliwość drgań własnych wynosi także $f_o = 50$ Hz. W przypadku tym dominujące znaczenie dla układu ma składowa pięćdziesięciohercowa siły wymuszającej. Dlatego dla transformatora 1,6 MVA, w którym składowa pięćdziesięciohercowa zanika już w pierwszym okresie (rys. 2) występuje tylko nieznaczne wzmocnienie amplitudy przemieszczeń. Natomiast dla transformatorów większych (68 MVA, 240 MVA) składowa pięćdziesięciohercowa trwa znacznie dłużej (kilkanaście okresów), co pociąga za sobą kilkakrotny wzrost przemieszczeń maksymalnych. Dla wszystkich transformatorów maksymalne przemieszczenie występuje w początkowym okresie zwarcia.

d) $\frac{f_o}{f} = 2$, jest to przypadek, dla którego częstotliwości wymuszenia $f = 50$ Hz, częstotliwość drgań własnych układu wynosi $f_o = 100$ Hz. Przy tym stosunku częstotliwości najgroźniejsza dla uzwojenia jest składowa stuhercowa siły wymuszającej, ponieważ dla niej występuje rezonans mechaniczny. Składowa 100 Hz nie jest tłumiona i maksymalne przemieszczenia wzrastają w sposób ciągły w funkcji czasu. Wartość maksymalnych przemieszczeń podczas zwarcia zależy od czasu jego trwania.

Z rys. 5, 6, 7 wynika, że rezonans 50 Hz jest mniej groźny dla transformatorów małych, w których względne wzmocnienie maksymalnego przemieszczenia nie przekracza 200 %, natomiast przy większych jednostkach wzmocnienia sięga 600%, przy czym pasmo tego rezonansu jest szersze niż pasmo rezonansu stuhercowego.

Rezonans 100 Hz jest groźny dla wszystkich rozpatrywanych transformatorów, a względne wzmocnienie maksymalnych przemieszczeń zawiera się w granicach 1500 % do 2400%.

W związku z tym ważne w praktyce konstruktorskiej staje się zagadnienie przesunięcia częstotliwości własnej uzwojenia poza niebezpieczny przedział. Zakładając (patrz rys. 6, 7), że wzmocnienie maksymalnych przemieszczeń uzwojeń transformatora nie powinno przekraczać 150%, można przyjąć, że zakres częstotliwości własnej niebezpiecznej ze względu na rezonans wynosi

$$0,85 < \frac{f_o}{f} < 1,4, \quad 1,8 < \frac{f_o}{f} < 2,25. \quad (21)$$

Przy częstotliwości sieci energetycznej wynoszącej 50 Hz otrzymuje się następujące zakresy częstotliwości własnej $f_o = (42,5 \div 70)$ Hz oraz $f_o = (90 \div 112,5)$ Hz.

Z otrzymanych krzywych wynika, że dla wszystkich transformatorów w zakresie częstotliwości $(0 \div 35)$ Hz wzmocnienie maksymalnych przemieszczeń zawiera się w granicach od $0 \div 1$; oznacza to, że dla tego przedziału częstotliwości własnej nawet obliczenia sta-

tyczne są wykonywane z dużym zapasem. Dla wszystkich transformatorów o częstotliwości własnej powyżej 120 Hz wzmocnienie przemieszczeń maksymalnych nie przekracza 1,50 i ze wzrostem częstotliwości maleje do 1. Dla takich zakresów częstotliwości drgań własnych uzwojeń, przy których wzmocnienie maksymalnych przemieszczeń nie przekracza 1,1, wystarczające są obliczenia statyczne.

W zakresie częstotliwości od 70 do 90 Hz dla rozpatrywanych transformatorów wzmocnienie maksymalnych przemieszczeń wynosi od 1 ÷ 2 i przeprowadzenie analizy dynamicznych zjawisk w uzwojeniu dla tego przypadku wydaje się być niezbędne.

Jak wynika z przeprowadzonej analizy, częstotliwość drgań własnych powinna być różna od częstotliwości siły wymuszającej zgodnie z nierównościami (21).

Częstotliwość własna układu z rys. 1 bez tłumienia, zgodnie ze wzorem (19), wynosi:

$$f_o = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}.$$

Wielkość ta jest powiązana z parametrami geometrycznymi układu poprzez współczynnik sztywności K , wyrażony zależnością:

$$K = \frac{E \cdot A}{L},$$

gdzie:

E — moduł Younga,

A — przekrój poprzeczny izolacji,

L — wysokość izolacji.

Współczynnik sztywności K zależy więc od parametrów geometrycznych i własności materiałów izolacyjnych, używanych w konstrukcji transformatorów. Do jego określenia konieczna jest znajomość modułu Younga (E).

Na rys. 5, 6, 7 przedstawiono teoretyczne charakterystyki rezonansowe dla poszczególnych transformatorów, z zaznaczeniem zakresów zmian częstotliwości własnych, obejmujących zmiany modułu Younga od $260 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$ do $1420 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}$.

Z przebiegów wynika, że dla małych transformatorów (np. 1600 kVA) pasmo częstotliwości możliwej do otrzymania, w wyniku odpowiedniej obróbki mechanicznej izolacji, leży daleko poza niebezpiecznym obszarem, ze względu na rezonans mechaniczny. Dla transformatora 1600 kVA 15 kV obszar ten zawiera się w granicach $\frac{f_o}{f} = 5,6 \div 13$. Natomiast dla większych jednostek (np. 68 MVA) zakres ten obejmuje pasmo 100 Hz rezonansu mechanicznego, a dla transformatora 240 MVA 220 kV zbliża się do rezonansu 50 Hz.

Podane na krzywych obszary zmian modułu Younga $\left(\text{od } 260 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \text{ do } 1420 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \right)$, a więc i częstotliwości własnej uzwojeń, obejmują duży zakres. Przy wykonywaniu transformatorów są dwa a niekiedy trzy etapy, w czasie których zmieniają się własności mechaniczne uzwojeń. Są to: 1) obróbka mechaniczno-termiczna samej izolacji (u nas nie stosowana), 2) prasowanie (lub cykle prasowania) uzwojeń przed montażem, 3) sprasowanie uzwojeń po montażu.