Obszar zakreskowany na wykresach obejmuje wszystkie etapy obróbki mechaniczno-termicznej izolacji transformatorów. Ponieważ wszystkie etapy mają wpływ na własności mechaniczne izolacji (moduł Younga), wskazane byłoby przeprowadzić kontrolę naprężeń naciskających przy poszczególnych etapach obróbki mechanicznej uzwojeń transformatora. W krajowym przemyśle transformatorowym tego rodzaju kontrola nie jest przeprowadzana, trudno więc jednoznacznie określić wartość stosowanych naprężeń przy prasowaniu uzwojeń. Przyjęto zgodnie z [8], [9] dwie wartości naprężeń prasujących: $3{,}5\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{m}^2}$ i $7{,}0\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{m}^2}$.

Dla tak przyjętych wartości naprężeń prasujących obszary częstotliwości, dla poszczególnych transformatorów, wynoszą:

1600 kVA	15 kV	$f_o = 315 \div 425$ Hz,
68 MVA	110 kV	$f_o = 72{,}3 \div 104$ Hz,
240 MVA	220 kV	$f_o = 70{,}5 \div 103$ Hz.

Również dla tych wartości naprężeń prasujących częstotliwości własne dużych jednostek (68 MVA i 240 MVA) obejmują pasmo rezonansu 100 Hz. Należy więc, szczególnie przy dużych jednostkach, zwracać uwagę na obróbkę mechaniczną izolacji przed montażem oraz na wartość naprężeń prasujących zarówno przed montażem jak i po montażu uzwojeń transformatora.

4. WNIOSKI

Z powyższych rozważań można wyciągnąć następujące wnioski.

O wartości amplitudy przemieszczeń, a więc i osiowych sił dynamicznych oraz naprężeń mechanicznych, decyduje stosunek częstotliwości własnej uzwojeń do częstotliwości siły wzbudzającej.

Z analizy rezonansowej wynika, że należy zwracać uwagę przy konstrukcji uzwojeń transformatorów, szczególnie dużych jednostek, na zakres stosunku częstotliwości niebezpieczny ze względu na wzrost amplitud osiowych sił dynamicznych. — Szczególnie duży wzrost amplitud przemieszczeń, a więc i naprężeń osiowych, może wystąpić (dla dużych jednostek) w przypadku $\frac{f_o}{f} = 1$, tzn. $f_o = 50$ Hz i $\frac{f_o}{f} = 2$, tzn. $f_o = 100$ Hz, przy czym zakres rezonansowy 50 Hz jest szerszy i mniej tłumiony, a więc może być bardziej niebezpieczny w praktyce.

Jak wynika z analizy rezonansowej, można wyróżnić kilka charakterystycznych zakresów drgań własnych transformatora.

a) Gdy częstotliwość drgań własnych jest mniejsza od 35 Hz, obliczenia statyczne osiowych sił zwarciowych dają wartości zawyżone, gdyż współczynnik wzmocnienia amplitudy $\delta = \frac{z}{z_{st}}$ jest mniejszy od 1.

b) Gdy częstotliwość drgań własnych uzwojenia jest większa od 120 Hz, można przyjąć, że obliczenia statyczne osiowych sił zwarciowych są wystarczające. Współczynnik wzmocnienia jest niewiele większy od 1, a ze wzrostem częstotliwosci dąży do 1.

c) Gdy częstotliwość drgań własnych zawarta jest w przedziałach (42,5÷70) Hz oraz (90÷112,5) Hz, występuje niebezpieczeństwo rezonansu mechanicznego.

d) Gdy częstotliwość drgań własnych zawarta jest w przedziale (70÷90) Hz, współczynnik wzmocnienia amplitudy wynosi (1÷2). W związku z tym wydaje się niezbędne przeprowadzenie dla takiego przypadku analizy dynamicznych sił zwarciowych.

LITERATURA

1. M. Boutteau, J. Verdon, P. Hofer, B. Hochart, Y. Tournier, G. Roge, *Short-Circuit-Behaviour of Large, Power Transformers*, CIGRE, 1972.
2. L. Byczkowska-Lipińska, *Wpływ częstotliwości mechanicznych drgań własnych na naprężenia występujące w uzwojeniach podczas zwarcia udarowego*, Praca doktorska, PŁ, 1973.
3. E. Jezierski, *Transformatory, Podstawy teoretyczne*, PWT, 1965.
4. S. Łurie, M. Sawaliew, *Dinamiczeskije osiewyje usilia w obmotkach transformatorow*, Elektriczestwo, 1972, z. 6, s. 26—31.
5. A.B. Madin, J.D. Whitaker, *The Dynamic Behaviour of a Transformer Winding Under Axial Short-Circuit Forces*, Proceedings IEE, 1963, nr 3, s. 535.
6. R.B. Steel, W.M. Johnson, J.J. Narbus, M.R. Patel, R.A. Nelson, *Dynamic Measurements in Power Transformer Under Short-Circuit Conditions*, CIGRE, 1972, ref. 12—01.
7. Y. Tournier, *Short-Circuits Behaviour of Large Transformers Transmission System Requirements-Manufacturing and Test Problems*, CIGRE, 1972.
8. Y. Tournier, M. Richard, A. Ciniero, S. Yakov, A.B. Madin, J.D. Whitaker, *A Study od the Dynamic Behaviour of Transformer Windings Under Short-Circuit Conditions* CIGRE, 1964, ref. 134 i 134a.
9. Y. Tournier, M. Richard, A. Ciniero, S. Yakov, A.B. Madin, J.D. Whittaker, *A Study of the Dynamic Behaviour of Transformer Windings Under Short-Circuit Conditions*, CIGRE, 1962, ref. 143 i 143a.
10. M. Waters, *The Short-Circuit Strength of Power Transformers*, Macdonald, 1966.
11. G.B. Watts, *A Mathematical Treatment of the Dynamic Behaviour of a Power Transformer Winding Under Axial Short-Circuit Forces*, Proceedings IEE, 1963, nr 3, s. 551.
12. *Materiały z drugiej Konferencji Transformatorowej w Łodzi*, 1970.

L. BYCZKOWSKA-LIPIŃSKA

RESONANCE FREQUENCY OF TRANSFORMER WINDINGS INFLUENCE ON AXIAL SHORT-CIRCUIT FORCES

Summary

In the paper a method for determining resonance curves of transformer windings in presented. An analysis of parameters influencing the displacement of the coil and resonant frequency is presented.

L. BYCZKOWSKA-LIPIŃSKA

INFLUENCE DE LA FREQUENCE DE RÉSONANCE DES ENROULEMENTS DU TRANSFORMATEUR SUR LES FORCES D'AXE SE PRODUISANTS AU MOMENT DU COURT-CIRCUIT

Résumé

On présente une méthode de calculer les caractéristiques de résonance des enroulements du transformateurs. On analyse les facteures décidants aux mouvements des enroulements et on détermine comment ils influencent le phénomène de la résonance.

L. BYCZKOWSKA-LIPIŃSKA

EINFLUß DER RESONANZFREQUENZ VON WICKLUNGEN AUF DIE ACHSENKRÄFTE BEIM KURZSCHLUß IN TRANSFORMATOREN

Zusammenfassung

Es wird eine Methode zur Berechnung der Resonanzkennlinie bei Transformatorwicklungen vorgeschlagen.

Der Finfluß der Wicklungsverschiebungen auf die Resonanzerscheinungen wird unter Berücksichticung der entscheidenden Faktoren beschrieben.

Л. БЫЧКОВСКА-ЛИПИНЬСКА

ВЛИЯНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТОТ ОБМОТОК ТРАНСФОРМАТОРА НА ОСЕВЫЕ УСИЛЯ ВЫСТУПАЮЩИЕ В УСЛОВИЯХ КОРОТКОГО ЗАМЫКАНИЯ

Резюме

Описан метод определения резонансных характеристик обмоток трансформатора. Проведен анализ параметров существенно влияющих на перемещения обмоток в случае резонанса.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 1, ss. 205—211

621.3.049.77

Analiza stałoprądowa układu scalonego metodą numeryczną

HENRYK BUDZISZ (KOSZALIN)

Wyższa Szkoła Inżynierska w Koszalinie

Otrzymano 23.7.1974

W pracy przedstawiono analizę stałoprądową układu scalonego przy zastosowaniu maszyny cyfrowej. Opracowano metodę automatycznego układania równań opisujących właściwości stałoprądowe układu. Podano metodę Newtona-Raphsona numerycznego rozwiązywania układu równań nieliniowych. Przedstawiono przykład analizy stopnia końcowego scalonego wzmacniacza mocy.

1. WSTĘP

W analizie stałoprądowej układu scalonego bierze się pod uwagę trzy rodzaje elementów: tranzystory, diody i rezystory. Dla każdego z tych elementów należy znaleźć zależność matematyczną opisującą możliwie dokładnie jego właściwości fizyczne, a na jej podstawie utworzyć schemat zastępczy elementu. Po zastąpieniu elementów układu ich schematami zastępczymi otrzymuje się schemat zastępczy całego układu.

Właściwości stałoprądowe diody idealnej opisane są równaniem Ebersa-Molla. W opisie diody rzeczywistej należy uwzględnić szeregową rezystancję obszarów p, n, kontaktów i doprowadzeń, a także upływność złącza. W podobny sposób opisuje się właściwości złącz tranzystora [1, 2, 5].

Do analizy komputerowej układów elektronicznych najbardziej przydatną metodą jest metoda napięć węzłowych [4]. Zastosowanie jej upraszcza organizację programu i umożliwia formułowanie równań bezpośrednio z danych wejściowych. W przypadku opisu układu zawierającego elementy nieliniowe, prowadzi do powstania układu równań nieliniowych:

$$\begin{aligned} &i_1(U_1, U_2, \ldots, U_k, \ldots, U_n) = 0,\\ &i_2(U_1, U_2, \ldots, U_k, \ldots, U_n) = 0,\\ &\vdots\\ &i_k(U_1, U_2, \ldots, U_k, \ldots, U_n) = 0,\\ &\vdots\\ &i_n(U_1, U_2, \ldots, U_k, \ldots, U_n) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

który wygodnie jest zapisać w postaci wektorowej:

$$\mathbf{I}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}, \tag{2}$$

gdzie:

n — liczba węzłów w układzie,

$\mathbf{U} = [U_1, U_2, \ldots, U_k, \ldots, U_n]^T$ — wektor napięć węzłowych,

$i_k(\mathbf{U})$ — funkcja nieliniowa, powstająca przez zastosowanie do węzła k pierwszego prawa Kirchhoffa.

Istnieje wiele metod rozwiązywania równań nieliniowych, a jedną z najbardziej efektywnych jest metoda Newtona-Raphsona [1, 2, 3, 5]. W metodzie tej, kolejne przybliżenie oblicza się z dwóch pierwszych wyrazów rozwinięcia równania (2) w szereg Taylora:

$$\mathbf{I}(\mathbf{U}^{k+1}) = \mathbf{I}(\mathbf{U}^k) + \mathbf{J}(\mathbf{I}(\mathbf{U}^k))[\mathbf{U}^{k+1} - \mathbf{U}^k] = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Macierz $\mathbf{J}$ jest jakobianem układu równań (1).

Podstawową wadą metody Newtona (jak również innych metod) jest możliwość rozbieżności procesu obliczeniowego. Jeżeli przybliżenie początkowe $\mathbf{U}^0$ jest dostatecznie bliskie rozwiązania, to zbieżność metody jest zapewniona.

W niniejszej pracy podano metodę określania początkowych, przybliżonych wartości wektora zmiennych.

2. UKŁADANIE RÓWNAŃ NIELINIOWYCH NA PODSTAWIE WYBRANEGO PRZEZ PROJEKTANTA DRZEWA GRAFU

Jako zmienne niezależne układu równań (1), projektant przyjmuje te napięcia międzywęzłowe, których wartości są w przybliżeniu znane, np. napięcia na przewodzących złączach. Będą to napięcia gałęziowe pewnego wybranego przez projektanta drzewa grafu topologicznego układu. Drzewo to będzie posiadać $w-1$ gałęzi, gdzie w oznacza liczbę węzłów w grafie. Na ogół do układu dołączonych jest h stałych napięć zasilających lub sterujących. Pozostaje więc do określenia $n = w-1-h$ napięć gałęziowych drzewa, które tym samym będą zmiennymi niezależnymi układu równań (1) i danymi wejściowymi do programu. Projektant dobiera ich wartości na podstawie znajomości parametrów występujących w układzie elementów. Program wyznacza wartości napięć węzłowych na podstawie równania:

$$U_i = U_{il} + U_l, \quad i = 1, 2, \ldots, w. \tag{4}$$

Węzeł l zawsze można dobrać tak, aby napięcia U_{il} i U_l były znane. Następnie, opierając się na opisie matematycznym elementów układu, program wyznacza prądy węzłowe kolejno dla wszystkich rezystorów, diod i tranzystorów. Zastosowanie pierwszego prawa Kirchhoffa do wszystkich węzłów układu pozwala na obliczenie wartości lewych stron układu równań (1). Do analizy wykorzystuje się spośród w równań n niezależnych. Można je wyodrębnić dzięki przyjętemu systemowi numeracji węzłów:

0 — węzeł odniesienia,

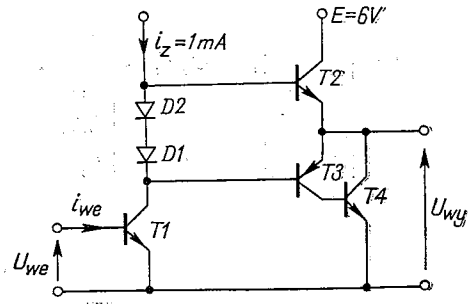
$1, 2, 3, \ldots, n$ — niezależne węzły sieci,

$n+1, n+2, \ldots, w-1$ — pozostałe węzły, do których dołączone są zewnętrzne źródła napięciowe.

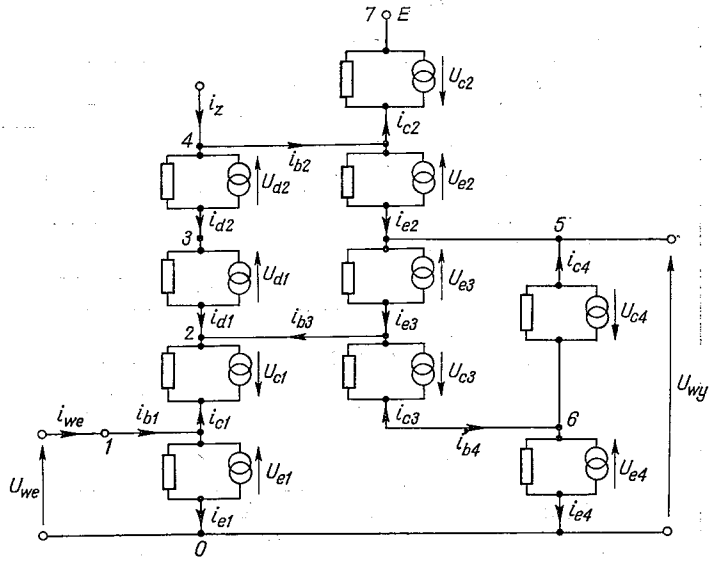
Sposób wprowadzania danych i numeracji węzłów zostanie podany na przykładzie.

3. PRZYKŁAD ANALIZY UKŁADU SCALONEGO

Na rys. 1 pokazany jest schemat końcówki mocy wzmacniacza scalonego, a na rys. 2 jej uproszczony schemat zastępczy. Parametry charakteryzujące graf topologiczny przyjmują dla tego układu następujące wartości: $w = 8$, $h = 1$, $n = 6$. Na podstawie sche-

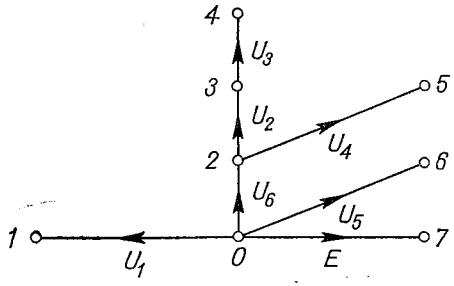


Rys. 1. Schemat końcówki mocy wzmacniacza scalonego



Rys. 2. Schemat zastępczy dla zakresu prądu stałego układu z rys. 1

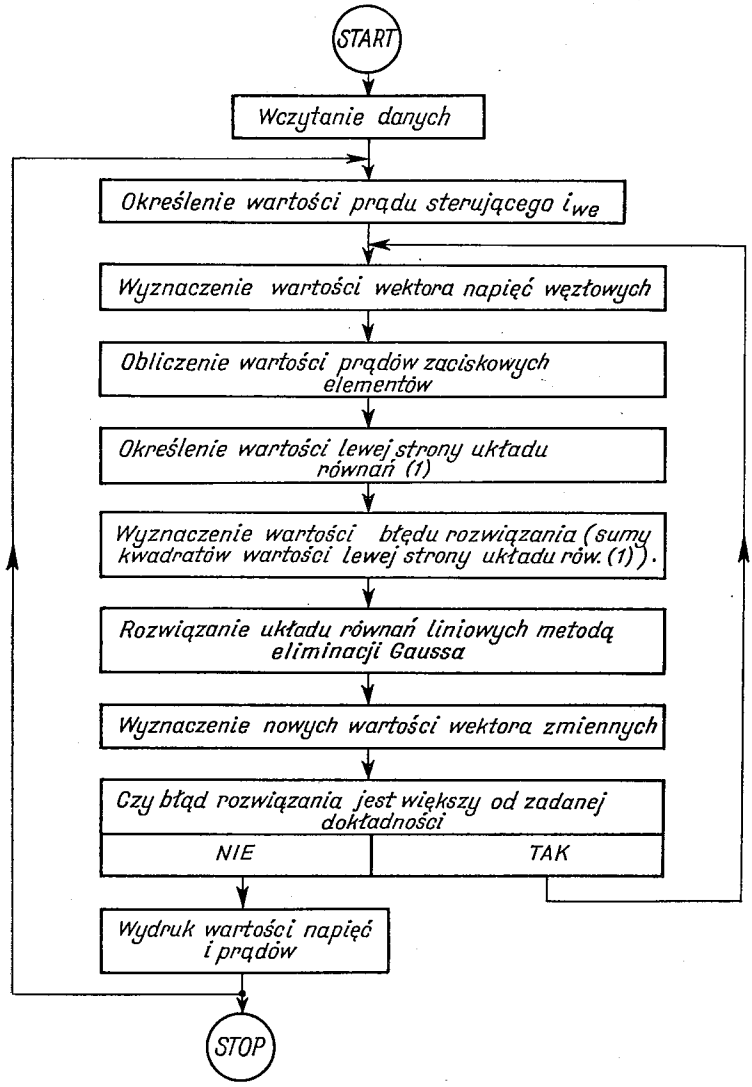
matu zastępczego wybiera się zgodnie z przyjętymi poprzednio zasadami napięcia niezależne, które tworzą drzewo pokazane na rys. 3.



Rys. 3. Drzewo grafu układu z rys. 2

Dane dotyczące parametrów elementów oraz topologii układu są wprowadzane do programu w następującej postaci:

$$WU = \begin{matrix} w^- & w^+ \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad U[V] = \begin{bmatrix} 0{,}7 \\ 0{,}7 \\ 0{,}7 \\ 0{,}7 \\ 0{,}7 \\ 0{,}7 \end{bmatrix}, \quad WT = \begin{matrix} e & b & k & \text{typ} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & -4 & 7 & 1 \\ 5 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{matrix} \beta_0 & A_e \end{matrix} \begin{bmatrix} 100 & 0{,}5 \\ 50 & 2 \\ 5 & 1 \\ 50 & 2 \end{bmatrix},$$



Rys. 4. Sieć działań programu analizy układów w zakresie prądu stałego

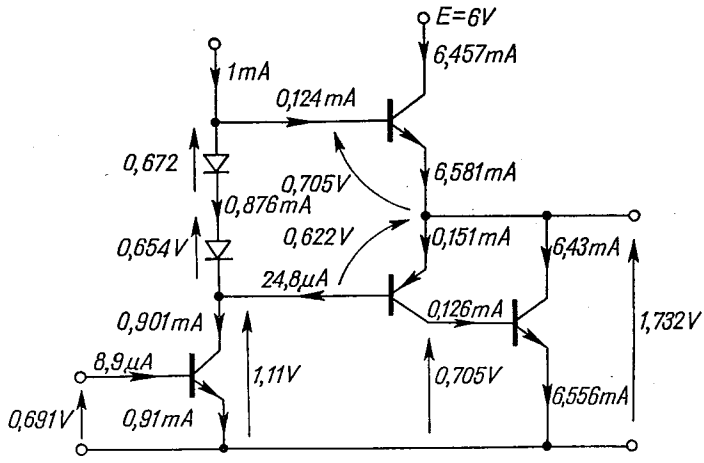
$$WUZ = [0\ 7], \quad UZ[V] = [6{,}0], \quad WD = \begin{matrix} A & K \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad p = 10^{-18},$$

$$iwe[\mathrm{A}] = [9{,}1 \cdot 10^{-6} \quad 9 \cdot 10^{-6} \quad 8{,}9 \cdot 10^{-6} \quad 8{,}85 \cdot 10^{-6} \quad 8{,}8 \cdot 10^{-6} \quad 8{,}7 \cdot 10^{-6} \quad 8{,}6 \cdot 10^{-6}],$$

gdzie:

U — tablica wartości początkowych zmiennych niezależnych,
UZ — tablica wartości napięć zewnętrznych,
T — tablica wartości parametrów tranzystorów: β_0 — współczynnik wzmocnienia prądowego, A_e — pole powierzchni emitera w odniesieniu do powierzchni emitera typowego tranzystora średniej mocy w układzie scalonym,
D — tablica względnej wartości pola powierzchni złącza diody,
iwe — tablica wartości prądu sterującego,
WU, WUZ, WT, WD — tablice węzłów napięć niezależnych, napięć zewnętrznych, tranzystorów i diod,
w^-, w^+ — węzeł niższego i wyższego potencjału napięcia gałęziowego,
e, b, k — węzeł emitera, bazy i kolektora tranzystora,
typ — typ tranzystora: *npn* (1) lub *pnp* (−1),
A, K — węzeł anody i katody diody,
p — dokładność rozwiązania.

Jako błąd rozwiązania przyjmuje się sumę kwadratów wartości lewych stron układu równań (1).



Rys. 5. Wyniki analizy końcówki mocy dla jednej wartości prądu sterującego naniesione na schemat układu

Program analizy, którego uproszczoną sieć działań pokazano na rys. 4, napisany został w języku ALGOL 1204. Program zajmuje około 15% pamięci operacyjnej m.c. ODRA 1204. Zadana dokładność rozwiązania odpowiada błędowi niezrównoważenia prądów w węźle, mniejszemu od 1 nA. Osiąga się ją po kilku (4÷7) krokach obliczenio-

wych. Czas obliczeń i wydruku dla ośmiu wartości prądu sterującego wynosi 90 s. Wyniki analizy dla jednej wartości prądu sterującego, naniesione na schemat układu, przedstawiono na rys. 5. Analiza przybliżona wskazuje na ich poprawność. Stwierdzono dużą zgodność wyników obliczeń z wynikami pomiarów. Porównanie przeprowadzono dla kilku prostych układów wykonanych z elementów dyskretnych.

4. WNIOSKI I SPOSTRZEŻENIA

W wyniku przeprowadzenia szeregu prób stwierdzono, że proces obliczania kolejnych przybliżeń nie we wszystkich przypadkach jest zbieżny do rozwiązania. Zbieżność procesu bardzo silnie zależy od przyjętego wektora wartości początkowych zmiennych niezależnych. Wpływ wyboru wartości początkowych zmiennych na zbieżność jest szczególnie duży w układach z silnym sprzężeniem zwrotnym. W celu kompensacji niewłaściwie zadanego rozwiązania początkowego stosuje się szereg metod [1]. Jedną z dróg pozwalających na zapobieżenie rozbieżności jest zmniejszenie przyrostu zmiennych, tzn.

$$\mathbf{U}^{k+1} = \mathbf{U}^k + \alpha \Delta \mathbf{U}^k, \quad \text{gdzie} \quad \alpha < 1. \tag{5}$$

Należy wyznaczyć taką wartość współczynnika α, aby funkcja błędu przyjęła wartość minimalną [1].

Zbieżność procesu obliczeniowego analizy układów zawierających pętle sprzężenia zwrotnego może być polepszona przez przyrównanie do zera niektórych elementów w pętli sprzężenia zwrotnego i późniejszym zwiększeniu ich do normalnych wartości. W przypadku analizy przy zmieniających się skokowo wielkościach sterujących konieczne jest zastosowanie w programie procedury umożliwiającej wyprowadzenie wyników w postaci wykresów.

LITERATURA

1. D. A. Calahan, *Computer-Aided Network Design*, New York 1968.
2. A. T. Rosiński, *Metoda numeryczna w analizie właściwości statycznych nieliniowych układów logicznych w oparciu o parametry fizyczne struktury scalonej*, Praca doktorska, W-wa 1972.
3. W. L. Zaguskin, *Przegląd metod numerycznych rozwiązywania równań*, W-wa 1965.
4. M. Grobelny, *Projektowanie układów elektronicznych za pomocą komputerów*, WKŁ, W-wa 1973.
5. W. J. McCalla, W. G. Howard, BIAS-3, *A Program for the Nonlinear DC Analysis of Bipolar Transistor Circuits*, IEEE J. Solid-State Circuits, February 1971.

H. BUDZISZ

DC ANALYSIS OF INTEGRATED CIRCUIT BY NUMERICAL METHOD

Summary

In the paper the d.c. analysis of integrated circuits with the use of computer is presented. A method of automatic composition of equations describing the d.c. properties of the network has been developed. Newton-Raphson's method of numerical solution of a nonlinear system of equations has been given. An example of analysis of an integrated power circuit's final stage is included.

H. BUDZISZ

ANALYSE DU CIRCUIT INTÉGRÉ À COURANT DIRECT PAR MÉTHODE NUMÉRIQUE

Résumé

Dans l'étude on a présenté l'analyse du circuit intégré à courant direct à l'aide d'un calculateur numérique. On a élaboré la méthode de dresser automatiquement les équations décrivant les propriétés à courant direct du circuit. On a cité la méthode de Newton-Raphson de la résolution par calculs numériques du système d'équations non linéaires. L'exemple illustre l'analyse de l'étage finale de l'amplificateur de puissance intégré.

H. BUDZISZ

GLEICHSTROMANALYSE EINES INTEGRIERTEN SYSTEMS MITTELS NUMERISCHER METHODE

Zusammenfassung

In vorliegender Arbeit wurde die Gleichstromanalyse eines integrierten Systems unter Anwendung eines Digitalrechners dargestellt. Es wurde eine automatische Methode für die Ableitung von Optimierungsgleichungen bearbeitet, die die Gleichstromeigenschaften des Systems beschreibt. Im weiteren wurde die Newton-Raphson-Methode für die numerische Lösung eines Systems nichtlinearer Gleichungen angeführt. Ein Beispiel für die Endstufenanalyse eines integrierten Leistungsverstärkers wurde gebracht.

Г. БУДЗИШ

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ РЕЖИМА ИНТЕГРАЛЬНОЙ СХЕМЫ ПО ПОСТОЯННОМУ ТОКУ

Резюме

В труде представлен анализ режима интегральной схемы по постоянному току с использованием ЭЦВМ. Разработан метод автоматического составления уравнений описывающих свойства схемы по постоянному току. Приведен метод Ньютона-Рафсона для численного решения системы нелинейных уравнений. Приведен пример анализа концевого звена каскада интегрального усилителя мощности.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 1, ss. 213—233

621.3.042.1

Analiza pola magnetycznego i indukcyjności rdzeni kubkowych

RYSZARD SIKORA (SZCZECIN), JAN PURCZYŃSKI (SZCZECIN), MODEST GRAMZ (SZCZECIN)

Instytut Automatyki Przemysłowej Politechniki Szczecińskiej

Otrzymano 3.9.1974

W pracy wyprowadzono wzory na całkowitą indukcyjność rdzeni kubkowych oraz obliczono granice regulacji.
Obliczenia prowadzono z uwzględnieniem osiowej symetrii zagadnienia. Wykorzystano metodę rozdzielenia zmiennych oraz metodę wariacyjną. Uzyskano proste wzory końcowe.

Wykaz oznaczeń

$\mathbf{A}$ — potencjał wektorowy,
A_φ — składowa potencjału wektorowego,
B_o, C_o, D_o, F_o;
B_n, C_n, F_n — stałe,
B_r, B_z — składowe wektora indukcji magnetycznej,
F — funkcjonał,
I — prąd,
$I_0(qr), I_1(qr)$ — zmodyfikowane funkcje Bessela pierwszego rodzaju, zerowego i pierwszego rzędu,
$\mathbf{J}$ — wektor gęstości prądu,
$K_0(qr), K_1(qr)$ — zmodyfikowane funkcje Bessela drugiego rodzaju, zerowego i pierwszego rzędu,
W_u — energia związana z obszarem uzwojenia,
r, φ, z — współrzędne układu walcowego,
W — energia magnetyczna,
L_{un} — indukcyjność związana z energią uzwojenia częściowo wypełniającego okno,
w — liczba zwojów,
Γ — brzeg obszaru D.

1. WSTĘP

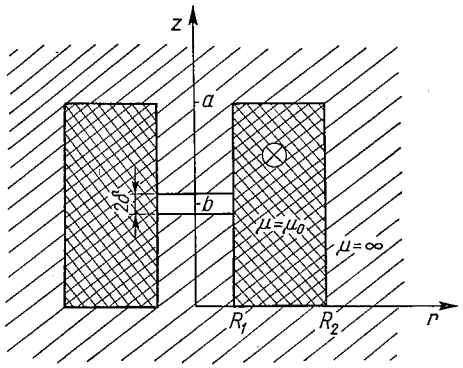
Cewki nawinięte na ferromagnetyczne rdzenie kubkowe znalazły duże zastosowanie w układach, dla których jest wymagany szeroki zakres regulacji indukcyjności. Pole magnetyczne rdzeni kubkowych posiada osiową symetrię. Zbliżone problemy osiowosyme-

tryczne były rozwiązywane w pracach [3] i [14]. W pracy [3] wyznaczono indukcyjność rozproszeniową transformatora płaszczowego posiadającego nieskończenie cienkie jednowarstwowe uzwojenie. Natomiast praca [14] jest poświęcona obliczaniu indukcyjności rozproszeniowej transformatora płaszczowego, przy uwzględnieniu skończonych wymiarów uzwojeń. Metody użyte w pracach [3] i [14] nie mogą być wykorzystane do obliczeń kubkowych ze względu na inną postać warunków brzegowych. Mianowicie, w transformatorze płaszczowym, rozpatrywanym w pracach [3] i [14], założono obwód magnetyczny bez szczeliny powietrznej. W typowych konstrukcjach kubkowych występuje szczelina powietrzna. Jedynym dostępnym dla autorów źródłem informacji o indukcyjności rdzeni kubkowych jest katalog [5]. Dane zawarte w tym katalogu zostały uzyskane na drodze eksperymentalnej. Z powyższych względów autorzy podjęli się analizy pola megnetycznego i indukcyjności rdzeni kubkowych. W pracy [12] autorzy przeprowadzili analizę rdzeni kubkowych w oparciu o metodę rozdzielenia zmiennych, a w pracy [13] wykorzystali metodę Ritza. W oparciu o prace [12], [13] i katalog [5] niżej przeprowadzono pełną analizę pola magnetycznego i indukcyjności rdzeni kubkowych. Po dokonaniu obliczeń uzyskano końcowe wzory w dogodnej postaci.

2. ANALIZA POLA MAGNETYCZNEGO METODĄ ROZDZIELENIA ZMIENNYCH

2.1. Rdzeń kubkowy całkowicie wypełniony uzwojeniem

Rdzenie ferromagnetyczne wykonuje się z Ferroxydu: F-1001, F-1501, F-2001 [5]. Materiały te charakteryzują się wysoką przenikalnością magnetyczną $\mu_{pocz} \geqslant 1000\ \mu_0$.



Rys. 1. Wyidealizowany model obwodu magnetycznego rdzenia kubkowego

W związku z tym można założyć, że $\mu \approx \infty$. Zgodnie z przyjętym założeniem obwód magnetyczny rdzenia kubkowego można przedstawić jak na rys. 1.

Pole magnetyczne, w obszarze zajętym przez uzwojenie, opisane jest wektorowym równaniem Poissona:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}. \tag{1}$$

Ze względu na osiową symetrię zagadnienia:

$$\mathbf{J} = \mathbf{1}_\varphi J \quad \text{i} \quad \mathbf{A} = \mathbf{1}_\varphi A$$

równanie (1) przyjmuje postać skalarną:

$$\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}A_\varphi + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} = -\mu_0 J. \tag{2}$$

Gęstość prądu jest stała w całym obszarze i wynosi:

$$J = \frac{Iw}{a(R_2 - R_1)}. \tag{3}$$

Składowe wektora indukcji oblicza się ze wzorów:

$$B_r = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \tag{4a}$$

$$B_z = \frac{A_\varphi}{r} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial r}. \tag{4b}$$

W wyniku przyjęcia nieskończenie dużej przenikalności magnetycznej rdzenia składowa styczna wektora indukcji magnetycznej przyjmuje wartość zero na ściankach rdzenia. Otrzymuje się więc warunki brzegowe:

$$-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\bigg|_{z=a} = 0, \qquad -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0, \tag{5a}$$

$$\left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r}\right)\bigg|_{r=R_2} = 0. \tag{5b}$$

W szczelinie zakłada się pole równomierne:

$$\left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r}\right)\bigg|_{r=R_1} = \begin{cases} 0 & z \in (0, b-\delta) \cup (b+\delta, a), \\ B_0 & z \in (b-\delta, b+\delta). \end{cases} \tag{5c}$$

Stałą B_0 wyznaczono z prawa Ampere'a:

$$\oint B_0 dl = \mu_0 Iw,$$

więc:

$$B_0 = \frac{\mu_0 wI}{2\delta}. \tag{5d}$$

Równanie (2) rozwiązuje się przez sprowadzenie go do postaci jednorodnej.

Rozwiązanie szczególne równania (2) przewiduje się w postaci:

$$A'_\varphi = Pr^2. \tag{6}$$

Po podstawieniu zależności (6) do równania (2) wyznaczono stałą P:

$$P = -\frac{\mu_0 J}{3},$$

zatem:

$$A'_\varphi = -\frac{\mu_0 J}{3} r^2. \tag{7}$$

Potencjał wektorowy ma postać:

$$A_\varphi = A'_\varphi + A''_\varphi, \tag{8}$$

gdzie A''_φ jest rozwiązaniem równania Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 A''_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A''_\varphi}{\partial r} - \frac{A''_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 A''_\varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{9}$$

przy warunkach brzegowych:

$$\left.\frac{\partial A''_\varphi}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial A''_\varphi}{\partial z}\right|_{z=a} = 0, \tag{10a}$$

$$\left(\frac{\partial A''_\varphi}{\partial r} + \frac{A''_\varphi}{r}\right)_{r=R_2} = -\left(\frac{\partial A'_\varphi}{\partial r} + \frac{A'_\varphi}{r}\right)_{r=R_2} = \mu_0 J R_2, \tag{10b}$$

$$\left.\left(\frac{\partial A''_\varphi}{\partial r} + \frac{A''_\varphi}{r}\right)\right|_{r=R_1} = \begin{cases} \mu_0 J R_1 & z \in (0, b-\delta) \cup (b+\delta, a), \\ \mu_0 J R_1 + \dfrac{\mu_0 J a (R_2 - R_1)}{2\delta} & z \in (b-\delta, b+\delta). \end{cases} \tag{10c}$$

Równanie (5) rozwiązuje się metodą Fouriera [8]. Rozwiązania szczególne mają postać:

$$\begin{pmatrix} B_{1q}\sin qz \\ B_{2q}\cos qz \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{1q} I_1(qr) \\ C_{2q} K_1(qr) \end{pmatrix} \quad \text{dla} \quad q \neq 0$$

oraz

$$(\alpha z + \beta)\left(\gamma r + \zeta \frac{1}{r}\right) \quad \text{dla} \quad q = 0.$$

Z warunku (10a) otrzymuje się wartości własne:

$$q_n = \frac{n\pi}{a}$$

oraz

$$B_{1q} = 0, \quad \alpha = 0.$$

Rozwiązanie równania (9) przyjmuje postać:

$$A''_\varphi = C_o r + D_o \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} [B_n I_1(q_n r) + C_n K_1(q_n r)] \cos q_n z. \tag{11}$$

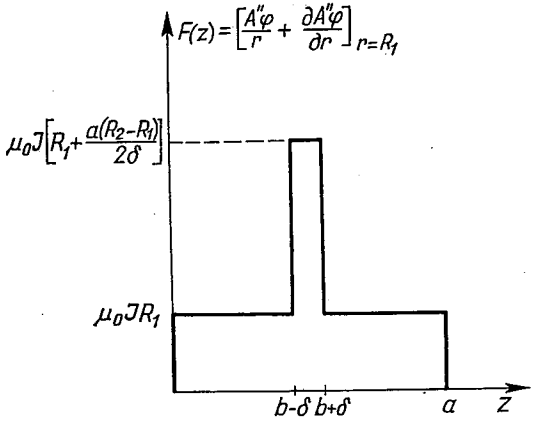
Składowa B_z wektora indukcji wyraża się wzorem [4], [8]:

$$\frac{\partial A''_\varphi}{\partial r} + \frac{A''_\varphi}{r} = 2C_o + \sum_{n=1}^{\infty} q_n [B_n I_0(q_n r) - C_n K_0(q_n r)] \cos q_n z. \tag{12}$$

Z warunku (10b) i równania (12) wynika:

$$C_o = \frac{1}{2}\mu_0 J R_2, \tag{13}$$

$$B_n I_0(q_n R_2) = C_n K_0(q_n R_2). \tag{14}$$



Rys. 2. Przebieg funkcji $F(z)$

Rozkład $\left(\frac{\partial A''_\varphi}{\partial r} + \frac{A''_\varphi}{r}\right)\Big|_{r=R_1}$ wzdłuż osi z określony wzorem (10c) przedstawiono na rys. 2.

Funkcję $F(z) = \left(\frac{\partial A''_\varphi}{\partial r} + \frac{A''_\varphi}{r}\right)\Big|_{r=R_1}$ rozwija się w szereg trygonometryczny:

$$F(z) = F_o + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos q_n z, \tag{15}$$

gdzie:

$$F_o = \frac{1}{a}\int_0^a F(z)\,dz, \tag{15a}$$

$$F_n = \frac{2}{a}\int_0^a F(z)\cos q_n z\,dz. \tag{15b}$$

Po obliczeniu współczynników F_o i F_n ze wzorów (15a) i (15b) otrzymuje się:

$$F(z) = \mu_0 J\left[R_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{\pi\delta}(R_2 - R_1)\sin q_n\delta \cos q_n b \cos q_n z\right]. \tag{16}$$

Z równań (12), (14) i (16) oblicza się stałe B_n i C_n. Po podstawieniu do wzoru (11) stałych B_o, B_n, C_o, C_n i D_o zostaje określony potencjał wektorowy A. Ze wzorów (7), (8) i (11) otrzymuje się:

$$A_\varphi = \mu_0 J\left\{\frac{1}{2}R_2 r - \frac{1}{3}r^2 + \frac{2}{\pi^2}\frac{a^2}{\delta}(R_2 - R_1)\times\right.$$

$$\left.\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin q_n\delta \cos q_n b}{n^2} \cdot \frac{I_1(q_n r)K_0(q_n R_2) + K_1(q_n r)I_0(q_n R_2)}{I_0(q_n R_1)K_0(q_n R_2) - K_0(q_n R_1)I_0(q_n R_2)} \cos q_n z\right\}, \tag{17}$$

gdzie:

$$q_n = \frac{n\pi}{a}.$$

Ze wzorów (4a), (4b) i (17) wynika:

$$B_r = \mu_0 J \frac{2}{\pi} \frac{a}{\delta} (R_2 - R_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin q_n \delta \cos q_n b}{n} \times$$

$$\times \frac{I_1(q_n r) K_0(q_n R_2) + K_1(q_n r) I_0(q_n R_2)}{I_0(q_n R_1) K_0(q_n R_2) - K_0(q_n R_1) I_0(q_n R_2)} \sin q_n z, \tag{18a}$$

$$B_z = \mu_0 J \left[R_2 - r + \frac{2}{\pi} \frac{a}{\delta} (R_2 - R_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin q_n \delta \cos q_n b}{n} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{I_0(q_n r) K_0(q_n R_2) + K_0(q_n r) I_0(q_n R_2)}{I_0(q_n R_1) K_0(q_n R_2) - K_0(q_n R_1) I_0(q_n R_2)} \cos q_n z \right]. \tag{18b}$$

Energię pola magnetycznego zgromadzoną w obszarze zajętym przez uzwojenie wyznacza się ze wzoru:

$$W_u = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dv = \frac{\pi}{\mu_0} \int_0^a \int_{R_1}^{R_2} (B_r^2 + B_z^2) r \, dz \, dr. \tag{19}$$

Ze względu na dużą pracochłonność obliczeń wykonywanych wg wzoru (19), energia pola magnetycznego zostanie obliczona z następującej zależności (dodatek — wzór D.10):

$$W_u = \pi J \int_0^a \int_{R_1}^{R_2} r A_\varphi \, dr \, dz - \frac{\pi R_1 I w}{2\delta} \int_{b-\delta}^{b+\delta} A_\varphi|_{r=R_1} dz. \tag{20}$$

Ze wzorów (17) i (20) oraz z zależności:

$$L = \frac{2W}{I^2} \tag{21}$$

oblicza się indukcyjność związaną z enegią magnetyczną zgromadzoną w obszarze zajętym przez uzwojenie:

$$L_u = \mu_0 w^2 \left\{ \frac{\pi}{6a} (R_2 - R_1)(R_2 + 3R_1) + \frac{4R_1}{\pi^2} \left(\frac{a}{\delta} \right)^2 \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 q_n \delta \cos^2 q_n b}{n^3} \cdot \frac{I_0(q_n R_2) K_1(q_n R_1) + K_0(q_n R_2) I_0(q_n R_1)}{I_0(q_n R_2) K_0(q_n R_1) - K_0(q_n R_2) I_0(q_n R_1)} \right\}, \tag{22}$$

gdzie:

$$q_n = \frac{n\pi}{a}.$$

Na ogół dla rdzeni kubkowych typu muszlowego zachodzi zależność $b = \frac{a}{2}$. Wówczas wzór (22) przyjmuje postać:

$$L_u = \mu_0 w^2 \left\{ \frac{\pi}{6a}(R_2 - R_1)(R_2 + 3R_1) + \frac{R_1}{2\pi^2}\left(\frac{a}{\delta}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 2q_n\delta}{n^3} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{I_0(2q_nR_2)K_1(2q_nR_1) + K_0(2q_nR_2)I_1(2q_nR_1)}{I_0(2q_nR_2)K_0(2q_nR_1) - K_0(2q_nR_2)I_0(2q_nR_1)} \right\}. \tag{23}$$

W szczególnym przypadku $b = \delta = \frac{a}{2}$ wzór (22) redukuje się do postaci:

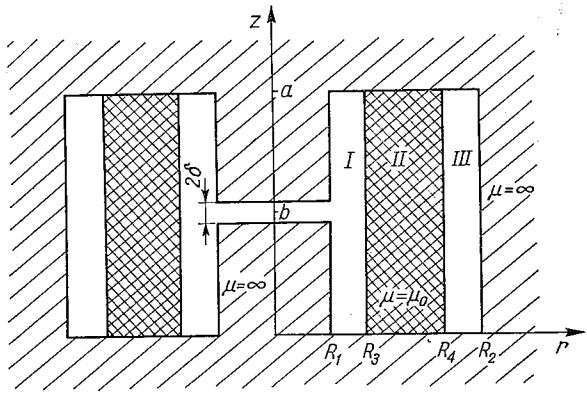
$$L_u = \frac{\mu_0 \pi w^2}{6a}(R_2^2 + 2R_1R_2 - 3R_1^2). \tag{24}$$

Zależność (24) można uzyskać w sposób elementarny, ponieważ w tym przypadku potencjał wektorowy jest funkcją tylko współrzędnej r.

2.2. Rdzeń kubkowy częściowo zapełniony uzwojeniem

Na rys. 3 przedstawiono rdzeń kubkowy częściowo zapełniony uzwojeniem. Pole magnetyczne w obszarze I i III opisuje równanie:

$$\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{25}$$



Rys. 3. Wyidealizowany model obwodu magnetycznego rdzenia kubkowego częściowo zapełnionego uzwojeniem

Warunki brzegowe pozostają identyczne jak w punkcie 2.1. Rozwiązanie dla obszarów I i III przewiduje się w postaci spełniającej warunki brzegowe wyrażone wzorem (5a):

$$A_i = C_{oi}r + D_{oi}\frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} [B_{ni}I_1(q_nr) + C_{ni}K_1(q_nr)]\cos q_nz, \tag{26}$$

gdzie:

$$i = \text{I} \quad \text{lub} \quad \text{III}.$$

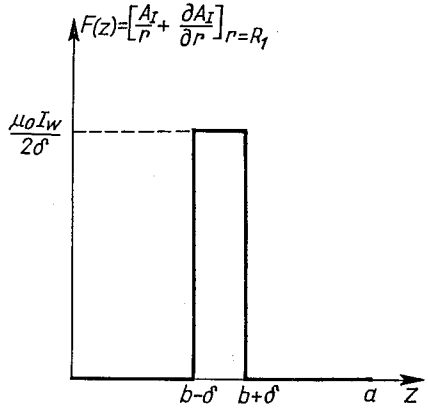
Warunek brzegowy w obszarze III wyraża się zależnością:

$$\left(\frac{A_{\text{III}}}{r} + \frac{\partial A_{\text{III}}}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=R_2} = 0. \tag{27}$$

Stąd:

$$C_{o\,\text{III}} = 0, \qquad B_{n\,\text{III}} = C_{n\,\text{III}} \frac{K_0(q_n R_2)}{I_0(q_n R_2)}. \tag{28}$$

W obszarze I warunek brzegowy opisany jest funkcją przedstawioną na rys. 4.



Rys. 4. Przebieg składowej stycznej wektora indukcji $B_z|_{r=R_1} = F(z)$ wzdłuż wewnętrznej ścianki rdzenia

Zgodnie ze wzorami (15), (15a) i (15b) funkcję $F(z)$ rozwija się w szereg Fouriera. W wyniku uzyskuje się:

$$F_o = \mu_0 J(R_4 - R_3), \tag{29a}$$

$$F_n = \mu_0 J \frac{2a}{\pi\delta}(R_4 - R_3)\frac{\sin q_n \delta}{n}\cos q_n b. \tag{29b}$$

Ze wzorów (26), (29a) i (29b) otrzymuje się:

$$C_{o\,\text{I}} = \frac{1}{2}\mu_0 J(R_4 - R_3), \tag{30a}$$

$$B_{n\,\text{I}} I_0(q_n R_1) - C_{n\,\text{I}} K_0(q_n R_1) = \frac{F_n}{q_n}. \tag{30b}$$

W obszarze II potencjał wektorowy spełnia równanie (2). Uwzględniając warunki brzegowe (5a) przyjmuje się następującą postać potencjału wektorowego:

$$A_{\text{II}} = -\frac{1}{3}\mu_0 J r^2 + C_{o\,\text{II}} r + D_{o\,\text{II}} \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} [B_{n\,\text{II}} I_1(q_n r) + C_{n\,\text{II}} K_1(q_n r)] \cos q_n z. \tag{31}$$

Na granicy obszarów ($r = R_3$ i $r = R_4$) muszą być spełnione warunki ciągłości potencjału wektorowego, składowej stycznej wektora natężenia pola magnetycznego oraz składowej normalnej wektora indukcji. Opisuje to układ równań:

$$A_{\mathrm{I}} = A_{\mathrm{II}}, \quad B_{z\mathrm{I}} = B_{z\mathrm{II}}, \quad B_{r\mathrm{I}} = B_{r\mathrm{II}}, \quad \text{dla} \quad r = R_3, \tag{32}$$

$$A_{\mathrm{II}} = A_{\mathrm{III}}, \quad B_{z\mathrm{II}} = B_{z\mathrm{III}}, \quad B_{r\mathrm{II}} = B_{r\mathrm{III}} \quad \text{dla} \quad r = R_4. \tag{33}$$

Z układu równań (28), (30a), (30b), (32) i (33) wyznacza się stałe: C_{oi}, D_{oi}, C_{ni}, B_{ni}, gdzie i = I, II, III. Ostatecznie potencjał wektorowy wyraża się wzorem:

$$A_\varphi = \mu_0 Jw\left[f(r) + \frac{2a^2}{\pi^2\delta}(R_4 - R_3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin q_n\delta\cos q_n b\cos q_n z}{n^2}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{I_1(q_nr)K_0(q_nR_2)+K_1(q_nr)I_0(q_nR_2)}{I_0(q_nR_1)K_0(q_nR_2)-I_0(q_nR_2)K_0(q_nR_1)}\right], \tag{34}$$

gdzie:

$$f(r) = \begin{cases} \dfrac{(R_4-R_3)r}{2} & \text{dla} \quad r\in\langle R_1, R_3\rangle, \\ -\dfrac{1}{3}r^2+\dfrac{1}{2}R_4r-\dfrac{1}{6}\dfrac{R_3^3}{r} & \text{dla} \quad r\in\langle R_3, R_4\rangle, \\ \dfrac{R_4^3-R_3^3}{6r} & \text{dla} \quad r\in\langle R_4, R_2\rangle. \end{cases}$$

Postępując analogicznie jak w punkcie 2.1 (wzory 20÷22) wyznacza się energię pola magnetycznego oraz indukcyjność rdzenia kubkowego przy niecałkowitym wypełnieniu uzwojeniem. Po dokonaniu obliczeń indukcyjność w przypadku niecałkowitego wypełnienia wyraża się wzorem:

$$L_{un} = \mu_0 w^2\left[\frac{\pi}{6a}(R_4-R_3)(R_4+3R_3)+\frac{\pi}{a}(R_3^2-R_1^2)+\right.$$

$$\left.+\frac{4R_1}{\pi^2}\left(\frac{a}{\delta}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 q_n\delta\cos^2 q_n b}{n^3}\cdot\frac{I_0(q_nR_2)K_1(q_nR_1)+K_0(q_nR_2)I_1(q_nR_1)}{I_0(q_nR_2)K_0(q_nR_1)-K_0(q_nR_2)I_0(q_nR_1)}\right]. \tag{35}$$

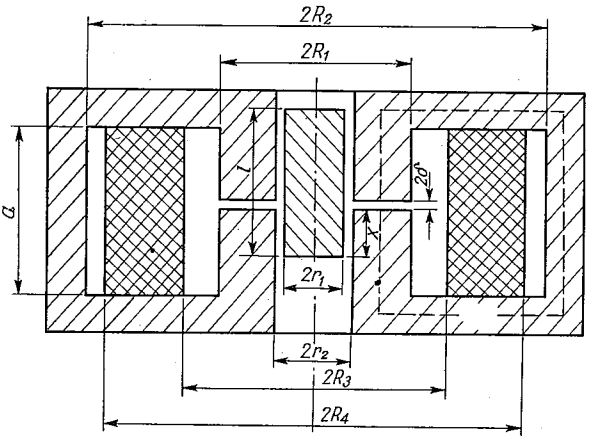
Po porównaniu wzoru (38) i (35) otrzymuje się związek:

$$L_{un} = \frac{\mu_0\pi w^2}{6a}[R_4^2+2R_3R_4+3R_3^2-R_2^2-2R_1R_2-3R_1^2]+L_u. \tag{36}$$

Dla $R_3 = R_1$ i $R_4 = R_2$ $L_{un} = L_u$, to znaczy, że wzór (35) przechodzi w (23).

2.3. Indukcyjność regulowanych rdzeni kubkowych

Rys. 1 i 3 przedstawiono idealizowany model bez rdzenia regulacyjnego. Na rys. 5 przekrój osiowy rzeczywistego rdzenia kubkowego. Obwód ten zawiera szczeliny regulacyjny. W dalszym ciągu zakłada się nieskończenie dużą przenikalność materiału. Indukcyjność rzeczywistego rdzenia kubkowego przedstawionego na



Rys. 5. Rzeczywisty obwód magnetyczny rdzenia kubkowego

rys. 5 składa się z trzech części: a) indukcyjności związanej z energią magnetyczną obszaru zajętego przez prąd (obliczoną w punktach 2.1 i 2.2), b) indukcyjności związanej z energią magnetyczną zawartą w szczelinie o grubości 2δ oraz c) indukcyjności związanej z energią magnetyczną zawartą w szczelinie między rdzeniem regulacyjnym a rdzeniem kubkowym.

Zakłada się, że pole magnetyczne w szczelinie jest równomierne. Energia tego pola wyraża się wzorem:

$$W_p = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot \mathrm{V} = \frac{\mu_0 \pi}{4\delta} I^2 w^2 (R_1^2 - r_2^2). \tag{37}$$

Ze wzorów (21) i (37) otrzymuje się indukcyjność związaną z energią magnetyczną zawartą w szczelinie powietrznej:

$$L_p = \frac{\mu_0 \pi}{2\delta} w^2 (R_1^2 - r_2^2). \tag{38}$$

Dla $\delta \to 0$ ze wzoru (38) wynika nieskończenie wielka indukcyjność L_p; jest to wynikiem przyjęcia nieskończenie dużej wartości przenikalności magnetycznej dla ferrytu. Dla uniknięcia tej sprzeczności zostanie wprowadzona zastępcza szczelina powietrzna $2\delta'$ uwzględniająca spadek napięcia magnetycznego w rzeczywistym ferrycie $\mu \neq \infty$. Z drugiego prawa Kirchhoffa dla obwodów magnetycznych wynika:

$$H_{Fe} l_{śr} + H_p 2\delta = Iz.$$

Przyjmując $B_p = B_{Fe}$ oraz $\mu = \text{const}$ otrzymuje się równanie:

$$H_p \left[2\delta + l_{śr} \frac{\mu_0}{\mu} \right] = Iz.$$

Wprowadza się zastępczą szczelinę powietrzną $2\delta'$;

$$2\delta' = 2\delta + l_{śr} \frac{\mu_0}{\mu} = 2\delta + \frac{l_{śr}}{\mu_w},$$

gdzie: $\mu_w = \dfrac{\mu}{\mu_0}$

Wzór (38) przyjmuje więc postać:

$$L_p = \frac{\mu_0 \pi w^2 (R_1^2 - r_2^2)}{2\delta + \frac{l_{śr}}{\mu_w}}. \tag{40}$$

We wzorach (22) i (35) należy również wprowadzić zastępczą szczelinę powietrzną, ponieważ dla $\delta = 0$ W_u i W_{un} przyjmują nieskończenie dużą wartość. Dla większych wartości szczeliny powietrznej człon $\frac{l_{śr}}{\mu_w}$ może być pominięty ($2\delta' \cong 2\delta$).

Indukcyjność związaną z energią magnetyczną zawartą w szczelinie między rdzeniem kubkowym a rdzeniem regulacyjnym wyznacza się przy założeniu jednostajności pola w szczelinie o grubości $r_2 - r_1$.

Strumień magnetyczny przenikający wzdłuż rdzenia regulacyjnego wyznacza się z przybliżonego wzoru:

$$\Phi = \frac{Iw}{R_{\mu_1} + R_{\mu_2}}, \tag{41}$$

gdzie:

$$R_{\mu_1} = \frac{r_2 - r_1}{\mu_0 \pi (r_2 + r_1)(l - 2\delta - x)}, \tag{41a}$$

$$R_{\mu_2} = \frac{r_2 - r_1}{\mu_0 \pi (r_2 + r_1) x}; \tag{41b}$$

R_{μ_1} i R_{μ_2} oznaczają odpowiednio oporność magnetyczną dla strumienia przenikającego w górnej części rdzenia regulacyjnego oraz w dolnej części tego rdzenia.

Ze wzorów (41), (41a) i (41b) otrzymuje się:

$$\Phi = \mu_0 \pi I w \frac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1} \frac{x(l - x - 2\delta)}{l - 2\delta}.$$

Z zależności:

$$L_r = \frac{\psi}{I} = \frac{w\Phi}{I}$$

uzyskuje się:

$$L_r = \mu_0 \pi w^2 \frac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1} \cdot \frac{x(l - 2\delta - x)}{l - 2\delta}. \tag{42}$$

Wartość maksymalna L_r występuje dla $x = \frac{1}{2}(l - 2\delta)$ i wynosi:

$$L_{r\max} = \frac{\mu_0 \pi}{4} w^2 \frac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1} (l - 2\delta). \tag{43}$$

Całkowita indukcyjność rdzenia kubkowego wyraża się wzorem:

$$L_c = L_{un} + L_p + L_r, \tag{44}$$

gdzie: L_{un}, L_p i L_r są określane wzorami (35), (40) i (42).

2.4. Wyniki obliczeń cyfrowych

Dla sprawdzenia proponowanej metody wykonano przykładowe obliczenia na maszynie cyfrowej Odra 1204. Obliczenia wykonano dla dwóch typów rdzeni o następujących parametrach:

Typ M-14/8 Typ M-47/32
$R_1 = 2{,}95$ mm, $R_1 = 9{,}40$ mm,
$R_2 = 5{,}90$ mm, $R_2 = 18{,}15$ mm,
$R_3 = 3{,}55$ mm, $R_3 = 10{,}50$ mm,
$R_4 = 5{,}00$ mm, $R_4 = 16{,}50$ mm,
$a = 5{,}6$ mm, $a = 20{,}0$ mm.

Indukcyjność wyznaczono ze wzoru (44) przy pominięciu indukcyjności rdzenia regulacyjnego ($L_r = 0$). Wartości L_{un} i L_p obliczono wg wzorów (35) i (39). Uzyskane wyniki przedstawiono na rys. 6 i rys. 7. Na tych wykresach przedstawiono indukcyjność przypadającą na jeden zwój $\frac{L_c}{w^2}$. Linią ciągłą oznaczono przebieg indukcyjności z katalogu [5] a przerywaną ze wzoru (44). Zgodność wyników obliczeń z danymi doświadczalnymi należy uznać za zadowalającą.

Interesującym parametrem rdzenia kubkowego jest wartość względna maksymalnej zmiany indukcyjności $\left(\frac{\Delta L}{L}\right)_{max}$. Po podstawieniach:

$$\left(\frac{\Delta L}{L}\right)_{max} = \frac{L_{r\,max}}{L_c}, \tag{45}$$

gdzie:

L_c jest określona wzorem (44) a $L_{r\,max}$ wzorem (43).

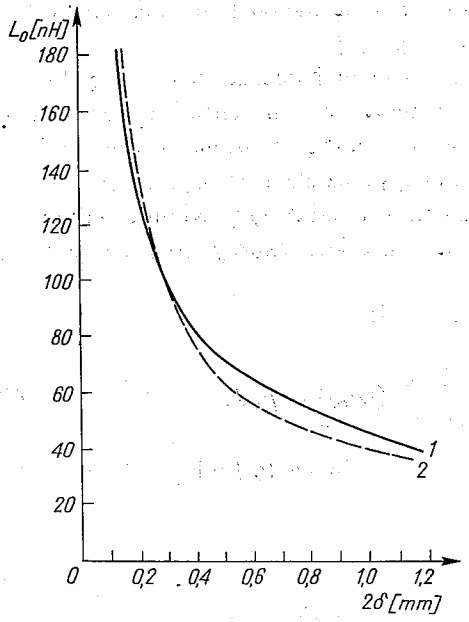
W tablicy 1 podano $\left(\frac{\Delta L}{L}\right)_{max}$ wyznaczoną ze wzoru (45) oraz odczytaną z katalogu [5] dla dwóch wartości 2δ.

Zaletą metody rozdzielenia zmiennych jest możliwość uzyskania dokładnych wyników, a wadą — skomplikowana postać końcowych wzorów. W celu uzyskania uproszczonych

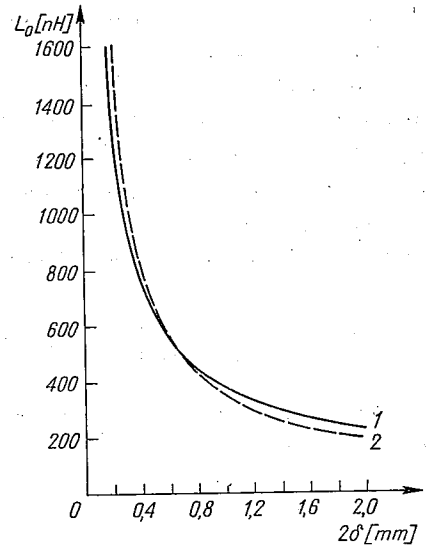
Tablica 1

Porównanie zakresu zmian regulacji uzyskanej na drodze obliczeń oraz z katalogów

Typ rdzenia	2δ [mm]	$\left(\frac{\Delta L}{L}\right)_{max}$ [%]	
		Obliczone	Odczytane
M-14/8	0,42	28	27
	1,14	41	43
M-47/32	1,0	20	18
	2,0	28	29



Rys. 6. Zależność indukcyjności rdzenia kubkowego M14/8 od wielkości szczeliny powietrznej 2δ



Rys. 7. Zależność indukcyjności rdzenia kubkowego M47/32 od wielkości szczeliny powietrznej 2δ

wzorów zostanie zastosowana metoda wariacyjna Ritza. Metoda wariacyjna daje wprawdzie przybliżone wyniki, lecz końcowe wzory są proste. Najbardziej skomplikowaną postać ma wzór (35) określający indukcyjność uzwojenia. W rozdziale 3 zostanie wyznaczona przybliżona wartość indukcyjności uzwojenia na drodze wariacyjnej.

3. WYKORZYSTANIE METODY WARIACYJNEJ RITZA DO OBLICZANIA INDUKCYJNOŚCI UZWOJENIA

3.1. Idea metody

U podstaw metody wariacyjnej leży twierdzenie o minimum funkcjonału [15]. Rozpatrujemy równanie w przestrzeni Hilberta:

$$Ax = y, \tag{46}$$

gdzie:

x, y — elementy przestrzeni Hilberta,

A — operator symetryczny dodatnio określony.

Twierdzenie. Aby przy danym $y \in H$ $x_0 \in H$ było rozwiązaniem równania $Ax = y$, potrzeba i wystarcza, by funkcjonał

$$F(x) = (Ax, x) - 2(x, y)$$

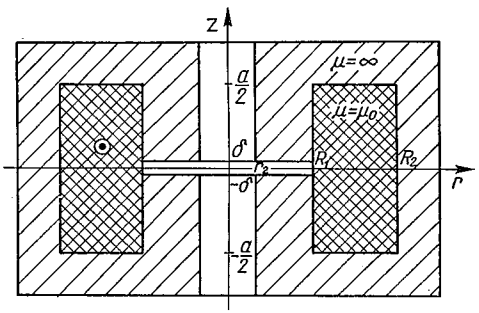
przyjmował dla $x = x_o$ wartość najmniejszą. Istnieje wiele metod minimalizacji funkcjonału $F(x)$. Niżej stosowana będzie metoda Ritza [9], [15].

W nieskończenie wymiarowej i ośrodkowej przestrzeni Hilberta wybiera się dowolny układ liniowo niezależnych elementów $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ zupełny w tym sensie, że jeżeli $x \in H$ i $x \perp \varphi_i$ dla każdego i, to $x \doteq \theta$. Zakładając dowolną liczbę naturalną n wprowadzamy skończenie wymiarową podprzestrzeń H_n wyznaczoną przez elementy $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. W przestrzeni H_n łatwo znaleźć element x_n, dla którego funkcjonał $F(x)$ przyjmuje najmniejszą wartość. Ciąg elementów x_n uzyskanych metodą Ritza jest zbieżny do rozwiązania x_o równania (46).

Równanie (1) można zapisać w następującej postaci:

$$-\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(rA_\varphi)\right] = \mu_0 J. \tag{47}$$

Wprowadza się pomocniczą funkcję $u = rA_\varphi$. Ze względu na tę funkcję równanie (47) jest równaniem eliptycznym.



Rys. 8. Rdzeń kubkowy z uzwojeniem całkowicie wypełniającym okno

Ze wzorów (5a), (5b, c i d) uzyskuje się następujący zapis warunków brzegowych Neumanna dla rdzenia z rys. 8:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \begin{cases} 0 & \text{na } \Gamma \text{ z wyjątkiem:} \\ -B_0 R_1 & r = R_1, \quad z \in [-\delta, \delta]. \end{cases} \tag{48}$$

Operator

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

jest przy zadanych warunkach brzegowych symetryczny i dodatnio określony [2]. Funkcjonał $F(u) = (Lu, u) - 2(u, f)$ przyjmuje postać:

$$F(u) = \int_G\int \left\{\frac{1}{r}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] - 2\mu_0 Ju\right\} dr\,dz - 2\int_\Gamma \frac{1}{r} u \frac{\partial u}{\partial n}\,ds. \tag{49}$$

3.2. Związek między energią a minimum funkcjonału

Energię pola magnetycznego oblicza się ze wzoru (dodatek — wzór D.4)

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\int_V B^2 dV = \frac{\pi}{\mu_0}\int_G \frac{1}{r}\left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial z}\right)^2\right] dr\,dz \tag{50}$$

Po skorzystaniu ze wzoru Greena i dokonaniu przekształceń, energia zgromadzona w obszarze uzwojenia wyraża się wzorem (dodatek — wzór D.4)

$$W = \pi J\int_G u^* dr\,dz + \frac{\pi}{\mu_0}\int_\Gamma \frac{1}{r}u^*\frac{du^*}{dn}ds. \tag{51}$$

Funkcja u^* jest rzeczywistym rozkładem wartości rA_φ w rozpatrywanym obszarze.

Po podstawieniu (50) i (51) do (49) otrzymano:

$$F_{min}(u^*) = \frac{\mu_0}{\pi}W - 2\frac{\mu_0}{\pi}W = -\frac{\mu_0}{\pi}W.$$

Stąd:

$$W = -\frac{\pi}{\mu_0}F_{min}. \tag{52}$$

Indukcyjność związana z polem magnetycznym zgromadzonym w obszarze uzwojenia wyraża się wzorem:

$$L_u = \frac{2W}{I^2} = -\frac{2\pi}{\mu_0}\frac{w^2}{\theta^2}F_{min} \tag{53}$$

gdzie:

θ — przepływ przez okno rdzenia kubkowego,

w — liczba zwojów.

3.3. Obliczenie indukcyjności uzwojenia całkowicie wypełniającego okno

Na rys. 8 przedstawiono rdzeń kubkowy z uzwojeniem całkowicie wypełniającym okno. Rys. 8 różni się od rys. 1 rozmieszczeniem osi współrzędnych. Ze względu na osiową symetrię pola magnetycznego funkcję u poszukuje się w postaci:

$$u = A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + A_3 z^2 + A_4 z^4 + A_5 r z^2 + A_6 r z^4 + A_7 r^2 z^2 + A_8 r^2 z^4 + \ldots \tag{54}$$

Na poszukiwaną funkcję nakłada się warunki:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=\pm\frac{a}{2}} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R_2} = 0. \tag{55}$$

W wyniku tego otrzymano:

$$u = C_1 r(r-2R_2) + C_2 z^2(z^2-a) + C_3 r z^2\left(z^2 + \frac{a^2 r}{4R_2} - \frac{a^2}{2} - \frac{rz^2}{2R_2}\right) + \ldots \tag{56}$$

Minimalizację funkcjonału przeprowadza się dla

$$u_2 = C_1 r(r-2R_2)+C_2 z^2(z^2-2a^2).$$

Po podstawieniu otrzymano:

$$F = 2aC_1^2\left[(R_2-R_1)(R_1-3R_2)+2R_2^2\ln\frac{R_2}{R_1}\right]+\frac{2}{105}a^7C_2^2\ln\frac{R_2}{R_1}+$$
$$+\frac{4}{3}a\mu_0 JC_1(R_3-R_1)^3+\frac{1}{120}\mu_0 a^5 JC_2(R_2-R_1)[7+\gamma^2(3\gamma^2-10)], \tag{57}$$

gdzie $\gamma = \frac{2\delta}{a}$.

Po zróżniczkowaniu F względem C_1 i C_2 i przyrównaniu pochodnych cząstkowych do zera otrzymano układ równań:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial C_1} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial C_2} = 0, \end{cases} \tag{58}$$

z którego obliczono C_1 i C_2.

Ostatecznie otrzymano:

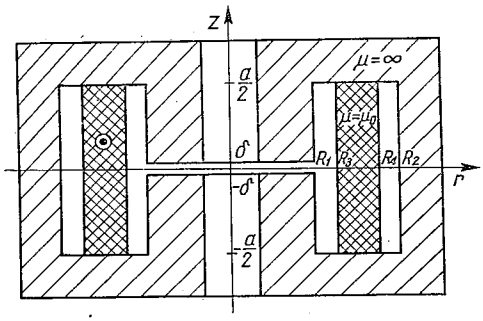
$$F_{min} = -\frac{1}{9}\frac{a^2(R_2-R_1)^2J^2}{a}\mu_0^2\frac{(R_2-R_1)^4}{2R_2^2\ln\frac{R_2}{R_1}-(R_2-R_1)(3R_2-R_1)}+$$
$$-\frac{7}{15\cdot 512}\mu_0^2J^2(R_2-R_1)^2a^3\frac{[7+\gamma^2(3\gamma^2-10)]^2}{\ln\frac{R_2}{R_1}} \tag{59}$$

oraz indukcyjność rdzenia

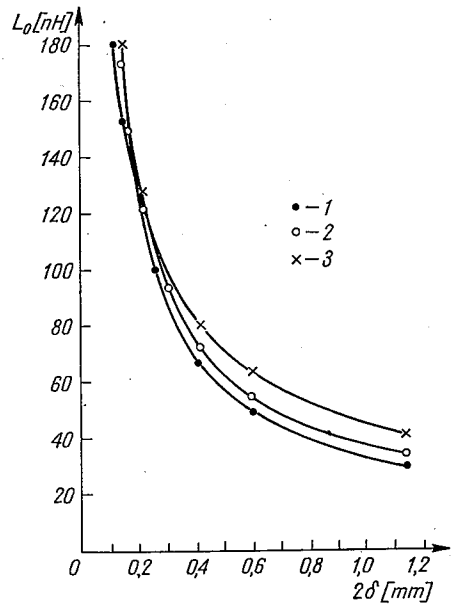
$$L_u = \left\{1{,}396\frac{(R_2-R_1)^4}{a\left[2R_2^2\ln\frac{R_2}{R_1}-(R_2-R_1)(3R_2-R_1)\right]}+\right.$$
$$\left.+0{,}572\cdot 10^{-2}a\frac{[7+\gamma^2(3\gamma^2-10)]^2}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\right\}\mu_0 w^2. \tag{60}$$

3.4. Obliczenie indukcyjności rdzenia z uzwojeniem częściowo wypełniającym okno

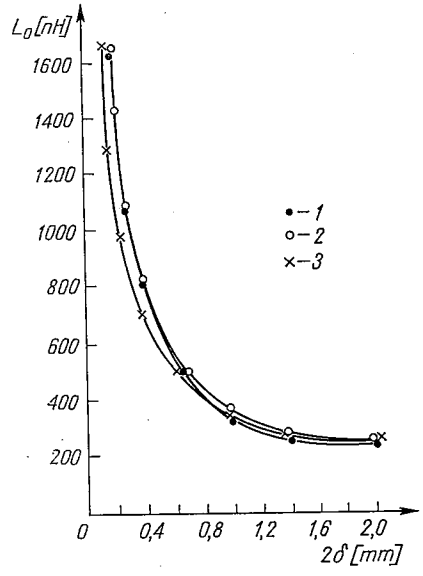
Rzeczywiste rdzenie kubkowe mają okno częściowo wypełnione uzwojeniem. Przekrój takiego rdzenia pokazano na rys. 9. Rys. 9 różni się od rys. 3 umieszczeniem osi r. Indukcyjność rdzenia kubkowego z uzwojeniem częściowo wypełniającym okno oblicza się po-



Rys. 9. Rdzeń kubkowy z uzwojeniem częściowo wypełniającym okno



Rys. 10. Porównanie wartości indukcyjności rdzenie M14/8 uzyskanych różnymi metodami



Rys. 11. Porównanie wartości indukcyjności rdzenia M47/32 uzyskanych różnymi metodami

dobnie jak rdzenia całkowicie uzwojonego (p. 3.3). Po dokonaniu obliczeń otrzymano wzór:

$$L_{un} = \left\{ 0{,}350 \frac{[3(R_2-R_1)^2-(R_4-R_3)^2-3(R_2-R_4)(R_2-R_3)]^2}{a\left[2R_3^2 \ln\frac{R_3}{R_1}-(R_3-R_1)(3R_3-R_1)\right]} + \right.$$

$$\left. +0{,}572\cdot 10^{-2} a \frac{[7+\gamma^2(3\gamma^2-10)]^2}{\ln\frac{R_2}{R_1}} \right\} \mu_0 w^2. \qquad (61)$$

Tablica 2

Porównanie wartości indukcyjności rdzenia M14/8 uzyskanych różnymi metodami

Lp.	δ	L z katalogu	L wyniki metody dokładnej	L wyniki metody wariacyjnej
	mm	10^{-9}H	10^{-9}H	10^{-9}H
1	1,14	40	34,3	29,3
2	0,60	63	54,7	49,1
3	0,42	80	72,6	66,9
4	0,22	125	126,6	120,8
5	0,15	160	179,4	173,6

Tablica 3

Porównanie wartości indukcyjności rdzenia M47/32 uzyskanych różnymi metodami

Lp.	δ	μ_e z katalogu	L z katalogu	L wyniki metody dokładnej	L wyniki metody wariacyjnej
	mm	—	10^{-9}H	10^{-9}H	10^{-9}H
1	0,2	166,0	1114,9	1651	1634
2	0,4	105,4	708,3	845	829
3	0,6	76,8	516,1	578	561
4	0,8	61,1	410,6	444	427
5	1,0	51,9	348,8	362	345
6	1,4	39,8	267,5	270	254
7	2,0	30,1	202,3	201	195

W celu określenia dokładności metody wariacyjnej porównuje się indukcyjność wyznaczoną na drodze wariacyjnej z indukcyjnością wyznaczoną w rozdziale 2. Obliczenia przeprowadzono dla rdzeni M 14/8 i M 47/32.

Wyniki obliczeń zestawiono w tablicach 2 i 3 oraz na rys. 10 i 11. Przy wyznaczaniu indukcyjności metodą rozdzielenia zmiennych korzystano ze wzorów (44) (35) i (38), a w metodzie wariacyjnej ze wzorów (44), (38) i (61).

4. WNIOSKI KOŃCOWE

W pracy wyprowadzono wzory (35), (40), (42), i (44) określające indukcyjność rdzeni kubkowych. Przy obliczeniach uwzględniono osiową symetrię pola magnetycznego. Dla porównania wywodów teoretycznych z danymi doświadczalnymi sporządzono wykresy (rys. 6 i rys. 7).

W celu uproszczenia uzyskanych zależności zastosowano wariacyjną metodę Ritza do obliczania indukcyjności uzwojenia. Dzięki temu uzyskano końcowe wzory stosunkowo

proste, lecz przybliżone. Przeprowadzono porównanie wyników uzyskanych metodą wariacyjną z wynikami uzyskanymi metodą dokładną (metoda rozdzielenia zmiennych). Z porównania wynika duża zgodność obydwu metod, co potwierdza tezę o korzyściach praktycznego stosowania metody wariacyjnej ze względu na jej prostotę. Metoda wariacyjna zapewni tym dokładniejsze wyniki, im większa liczba wyrazów szeregu (56) zostanie uwzględniona przy obliczeniach.

DODATEK

ENERGIA POLA MAGNETYCZNEGO O OSIOWEJ SYMETRII

Przyjmuje się ortogonalny układ współrzędnych (u, φ, v). Zakłada się, że wektor gęstości prądu oraz potencjał wektorowy posiadają jedną składową

$$\mathbf{J} = J \cdot 1_\varphi; \quad \mathbf{A} = A_\varphi \cdot 1_\varphi.$$

Potencjał wektorowy spełnia równanie [8]

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{\alpha\gamma}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\gamma}{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial u}(\beta A_\varphi)\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\alpha}{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial v}(\beta A_\varphi)\right]\right\} 1_\varphi = -\mu_0 J 1_\varphi, \tag{D.1}$$

gdzie: α, β, γ oznaczają współczynniki Lamégo [1]:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ \beta^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2, \\ \gamma^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \end{aligned} \tag{D.2}$$

Dla układu współrzędnych o osiowej symetrii zachodzi [8]

$$\alpha = \gamma. \tag{D.3}$$

Uwzględniając zależność (D.3), wzór (D.2) zapisze się w postaci następującego równania eliptycznego

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial u}(\beta A_\varphi)\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial v}(\beta A_\varphi)\right] = -\alpha^2 \mu_0 J. \tag{D.4}$$

Wektor indukcji pola osiowosymetrycznego wyraża się wzorem

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{1}{\alpha\beta}\left[\frac{\partial}{\partial u}(\beta A_\varphi)\, 1_v - \frac{\partial}{\partial v}(\beta A_\varphi)\, 1_u\right], \tag{D.5}$$

Energia pola magnetycznego o osiowej symetrii określona jest wzorem

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\iiint_V |\mathbf{B}|^2 dV = \frac{\pi}{\mu_0}\iint_D |\mathbf{B}|^2 \alpha^2 \beta\, du\, dv.$$

Wykorzystując wzór (D.5), uzyskuje się

$$W = \frac{\pi}{\mu_0}\iint_D \frac{1}{\beta}\left\{\left[\frac{\partial(\beta A_\varphi)}{\partial u}\right]^2 + \left[\frac{\partial(\beta A_\varphi)}{\partial v}\right]^2\right\} du\, dv. \tag{D.6}$$

Uwzględniając zależności (D.4), (D.5), (D.6) oraz wzór Greena-Ostrogradzkiego [2], otrzymuje się

$$W = \pi J \int_D \int \beta A_\varphi \, du \, dv + \frac{\pi}{\mu_0} \int_\Gamma A_\varphi \frac{\partial(\beta A_\varphi)}{\partial u} ds. \tag{D.7}$$

Wzory (D.6) i (D.7) określają energię magnetyczną pola o osiowej symetrii. Zastosowanie wzoru (D.7) w miejsce (D.6) pozwala znacznie uprościć obliczenia.

Równanie (2) (punkt 2) można zapisać w następującej postaci

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(rA_\varphi)\right] = -\mu_0 J. \tag{D.8}$$

Porównując wzory (D.4) i (D.8) stwierdza się, że dla układu walcowego ($u = r$, $v = z$) zachodzi

$$\alpha = 1, \quad \beta = r. \tag{D.9}$$

Współczynniki α i β można było również wyznaczyć jako odpowiednie współczynniki Lamego dla układu walcowego [1], [7], [8].

Wykorzystując warunki brzegowe (5a), (5b), (5c), (5d) oraz wzory (D.7) i (D9), dla obwodu magnetycznego przedstawionego na rys. 1 uzyskuje się

$$W = \pi J \int_0^a \int_{R_1}^{R_2} rA_\varphi \, dr \, dz - \frac{\pi R_1 I w}{2\delta} \int_{b-\delta}^{b+\delta} A_\varphi|_{r=R_2} dz. \tag{D.10}$$

LITERATURA

1. W. M. Babicz i inni, *Równania liniowe fizyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1970.
2. J. S. Berezin, N. P. Żidkow, *Mietody wyczislenij*, t. II, Moskwa 1959.
3. H. Buchholz, *Elektrische und magnetische Potential-felder*, Springer-Verlag, 1957.
4. Janke, Emde, Lösch, *Tafeln höherer Funktionen*, B. G. Teubner Verlagsgesellscheft, Stuttgart, 1960.
5. Katalog 9-R, *Materiały i rdzenie ferrytowe*, WE MA, Warszawa 1971.
6. Ł. W. Kantorowicz, W. J. Kryłow, *Pribliżennyje mietody wysszewo analiza*, Moskwa 1950.
7. G. Korn, T. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, New York (Toronto), London, McGraw — Hill Book Company Inc., 1961.
8. P. Moon, D. E. Spencer, *Teoria pola*, PWN, Warszawa 1966.
9. J. Purczyński, *Wariacyjna metoda obliczania indukcyjności rozproszenia*, Praca doktorska, Gdańsk 1971.
10. J. Purczyński, *Metoda Ritza obliczania indukcyjności rozproszenia*, Arch. Elektr., z. 4, 1972.
11. J. Purczyński, R. Sikora, *Zastosowanie metody Ritza do obliczania pojemności* Arch. Elektr., z. 3, 1973.
12. J. Purczyński, R. Sikora, M. Gramz, *Einsatz der Methode der Variablentrennung zur Berechnung des Magnetfeldes und der Induktivität von Schalenkernen*, Zeitschrift für IET, 4 (1974) 6, s. 405-411.
13. J. Purczyński, M. Gramz, R. Sikora, *Wariacyjna metoda obliczania indukcyjności rdzeni kubkowych*, Arch. Elektr., z. 4/1974.
14. E. Roth, *Inductance due aux fuites magnetiques dans les transformateurs à bobines cylindriques et efforts exerés sur les enroulements*, R.G.d'E., 1936, s. 259—268, 291—303, 323—336.
15. B. Z. Wullich, *Wwiedynije w funkcjonalnyj analiz*, Moskwa 1960.

R. SIKORA, J. PURCZYŃSKI, M. GRAMZ

ANALYSIS OF MAGNETIC FIELD AND INDUCTANCE OF CUP CORES

Summary

In the paper formulas for total inductance of cup cores have been derived and boundary of inductance control has been calculated. Calculations have been done taking into consideration axial symmetry of the problem. The separation of variables and the variation method have been used. Simple final formulas have been obtained.

R. SIKORA, J. PURCZYŃSKI, M. GRAMZ

ANALYSE DU CHAMP MAGNÉTIQUE ET DE L'INDUCTANCE DES NOYAUX À GODETS

Résumé

Dans l'article on a prouvé des formules pour l'inductance complète des noyaux à godets et, en prennant, en consideration la symétrie d'axe du problème, on a calculé les limites de la régulation. La méthode de la séparation des variables et la méthode variationelle ont été utilisées. Les formules finales obtenues sont tout à fait simples.

R. SIKORA, J. PURCZYŃSKI, M. GRAMZ

ANALYSE EINES MAGNETFELDES UND DER INDUKTIVITÄT VON SCHALENKERNEN

Zusammenfassung

In der Arbeit wurden Formeln für die gesamte Induktivität der Schalenkerne abgeleitet und die Grenzen der Regulierung berechnet. Die Berechnungen wurden unter Berücksichtigung der Achsensymmetrie durchgeführt. Es sind hierzu die Methode der geteilten Variablen sowie die Variationenmethode benutzt worden. Es wurden einfache Endformeln erhalten.

Р. СИКОРА, Я. ПУРЧИНЬСКИ, М. ГРАМЗ

АНАЛИЗ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ИНДУКТИВНОСТИ БРОНЕВЫХ СЕРДЕЧНИКОВ

Резюме

В статье выведены формулы определяющие полную индуктивность и расчитаны пределы регуляции. Расчеты проведены с учетом осевой симметрии системы. Применены метод Фурье и вариационный метод. Получены простые конечные формулы.

TREŚĆ

W. Gąssowski, J. Kolasa: Wyznaczenie stałej bezwzględnego wzorca strumienia magnetycznego przez porównanie z wzorcem oporu 3
S. Apanasewicz, G. Miksa, D. Przybylak: Ocena wpływu krzywizny rdzenia, uzwojeń i ściany kadzi transformatora na rozkład pola elektromagnetycznego 27
F. Kamiński: Wyznacznikowe postacie elementów unormowanej macierzy łańcuchowej i transmisyjnej kaskadowego połączenia czwórników 41
R. Biernacki: Nowa algebraiczna metoda badania stabilności 69
K. Piwnicki: Analogowe syntetyzery częstotliwości 85
A. Zaklikiewicz: Kierunki badań teoretycznych nad szumami typu $1/f$ w półprzewodnikach 119
A. Smoliński: Telekomunikacja światłowodowa 143
J. Lubacz: Analiza możliwości określania przydatności łącza do transmisji cyfrowej na podstawie krótkotrwałego pomiaru 167
L. Byczkowska-Lipińska: Wpływ częstotliwości rezonansowej uzwojeń transformatora na siły osiowe występujące w czasie zwarcia 189
H. Budzisz: Analiza stałoprądowa układu scalonego metodą numeryczną 205
R. Sikora, J. Purczyński, M. Gramz: Analiza pola magnetycznego i indukcyjności rdzeni kubkowych 213

CONTENTS — TABLE DES MATIÉRES — INHALT

W. Gąssowski, J. Kolasa: Determination of Magnetic Flux Constant of Absolute Normal by Comparison with Normal Resistance 24
Désignation de la constante absolue de l'étalon du flux magnétique par comparaison avec l'étalon de la résistance 24
Bestimmung der Konstante des absoluten magnetischen Flussnormals mittels Vergleich mit dem Normalwiderstand 25
S. Apanasewicz, G. Miksa, D. Przybylak: Estimation of Influence of Transformer's Core, Windings and Tank Curvature on Electromagnetic Field Distribution 39
Estimation de l'influence de la courbure du noyau, des enroulements et de la cuve du transformateur sur la répartition du champ électromagnétique 39
Einschätzung des Einflusses von Kernwölbung, Wicklungen und der Pfannenwand eines Transformators auf die Verteilung des elektromagnetischen Feldes 39
F. Kamiński: Determinant Forms of Elements in a Standardized Chain and Transmission Matrix of a Cascade Connection in Four-Terminal Networks 65
Formes déterminantes des éléments de la matrice réglementée de transfert et de celle de transmission de la connexion en chaîne des quadripôles 66
Determinante Elementenformen einer normierten Kettenmatrix und übertragender Kaskadenverbindung von Vierpolen 66
R. Biernacki: New Algebraic Criterion for Stability 84
Nouvelle méthode algébrique d'examiner la stabilité 84
Neue algebraische Untersuchungsmethode der Stabilität 84

K. Piwnicki: Analog Frequency Synthesizers 117
Synthétiseurs analogues de fréquence 117
Analogfrequenzsynthesizer 118
A. Zaklikiewicz: Theoretical investigations of $1/f$ noise 139
Tendances des recherches théoriques sur les bruits $1/f$ 140
Richtungen theoretischer Untersuchungen von $1/f$-Geräuschen 140
A. Smoliński: Optical Fiber Communications 165
Transmission d'information par voies optiques 165
Glasfaser-Nachrichtenübertragung 165
J. Lubacz: Analysis of Ability to Determine the Quality of Digital Transmission Channels on the Basis of a Short Measurement 188
Analyse de la possibilité de déterminer l'utilité de liaison pour la transmission digitale à partir de la mesure de courte durée 188
Analyse der Bestimmungsmöglichkeit auf Grund einer kurzfristigen Messung der Brauchbarkeit einer Leitung für die digitale Transmission. 188
L. Byczkowska-Lipińska: Resonance Frequency of Transformer Windings Influence on Axial Short-circuit Forces 202
Influence de la frequence de resonance des enroulements du transformateur sur les forces d'axese produisants au mement du court-circuit 202
Einfluß der Resonanzfrequenz von Wicklungen auf die Achsenkräfte beim Kurzschluß in Transformatoren 203
H. Budzisz: DC Analysis of Integrated Circuit by Numerical Method 210
Analyse du circuit intégré à courant direct par méthode numérique 211
Gleichstromanalyse eines integrierten Systems mittels numerischer methode 211
R. Sikora, J. Purczyński, M. Gramz: Analysis of Magnetic Field and Inductance of Cup Cores 232
Analyse du champ magnétique et de l'inductance des noyaux à godets 233
Analyse eines Magnetfeldes und der induktivität von Schalenkernen 233

СОДЕРЖАНИЕ

В. Гонссовски, Ю. Коляса: Определение постоянной первичного эталона магнитного потока методом сравнения с эталоном сопротивления 25
С. Апанасевич, Г. Микса, Д. Пшибыляк: Оценка влияния кривизны сердечника, обмоток и бака трансформатора на распределение электромагнитного поля . 40
Ф. Каминьски: Детерминантный вид нормированной цепной и трансмиссионной матицы каскадного соединения четырехполюсников 66
Р. Бернацки: Новый алгебраический метод исследования стабильности 84
К. Пивницки: Аналоговые синтезаторы частот 118
А. Закликевич: Области теоретических исследований шумов $1/f$ 140
А. Смолиньски: Световодная связь 166
Ю. Любач: Анализ возможностей определения кратковременным измерением способности канала к передаче цифровых данных 188
Л. Бычковска-Липиньска: Влияние резонансных частот обмоток трансформатора на носевые усилия выступающие в условиях короткого замыкания 203
Х. Будиш: Численный анализ режима интегральной схемы по постоянному току . . 211
Р. Сикора, Я. Пурчиньски, М. Грамз: Анализ магнитного поля индуктивности броневых сердечников 233

7. *Streszczenia.* Do każdej nadsyłanej pracy należy dołączyć krótkie streszczenie (analizę) w języku polskim (w 5 egz.) oraz streszczenia w językach obcych: angielskim, francuskim, niemieckim i rosyjskim. W razie niemożności przygotowania streszczeń w językach obcych Autor powinien przynajmniej podać niezbędną do wykonania tłumaczenia obcojęzyczną terminologię.

8. *Literatura.* Po zakończeniu artykułu należy podać wykaz literatury, wymieniając w następującej kolejności: pierwsze litery imion, nazwisko autora, po czym po przecinku pełny tytuł dzieła lub artykułu; dalej, w przypadku książki — wydawcę, miejsce wydania i rok, a w przypadku artykułu — tytuł czasopisma, numer zeszytu, rok wydania i ewent. numer strony. Pozycje wykazu powinny być ponumerowane.

Uwagi

1. Niezastosowanie się Autora do podanych wyżej wytycznych pociągnie za sobą konieczność potrącenia z honorarium autorskiego kosztów związanych z doprowadzeniem dostarczonych materiałów do postaci wymaganej przez Redakcję.

2. Autorowi przysługuje bezpłatnie 5 egz. odbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze Autor może zamówić w Redakcji na własny koszt.

3. **Autora obowiązuje korekta autorska, którą należy zwracać w ciągu 3 dni** pod adresem Redakcji.

Cena zł 40.—

Rozprawy Elektrotechniczne

Kwartalnik

WARUNKI PRENUMERATY CZASOPISMA

Cena prenumeraty	rocznej	zł 160.—
„ „	półrocznej	zł 80.—

Prenumeratę przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch" oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:

— do dnia 25 listopada na styczeń, I-szy kwartał, I-sze półrocze i cały rok następny,

— do dnia 10 każdego miesiąca (z wyjątkiem grudnia) poprzedzającego okres prenumeraty.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne oraz wszelkiego rodzaju inne zakłady pracy, składają zamówienia w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch".

Zakłady pracy w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW oraz prenumeratorzy indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych RSW „Prasa—Książka—Ruch", ul. Wronia 23, 00-958 Warszawa.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Waarszwa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki".

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona-Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

Rozpr. Elektrot. T. 22 z. 1, s. 1 — 236 Warszawa 1976
Indeks 37483

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTROTECHNIKI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XXII · ZESZYT 2

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1976

Wytyczne dla Autorów

Komitet Redakcyjny prosi o przestrzeganie następujących wytycznych przy przygotowywaniu maszynopisów artykułów nadsyłanych do opublikowania.

1. *Tematyka i charakter artykułów.* Redakcja przyjmuje do druku prace przeglądowe, kompilacyjne i monograficzne, wchodzące w zakres szeroko pojętej elektrotechniki, które powinny jednak zawierać własny wkład twórczy Autora polegający na: oryginalnym ujęciu zagadnienia, własnej klasyfikacji, krytycznej ocenie (teorii lub metod), wyciągnięciu wniosków co do celowości takiego lub innego działania, prognostyce itp.

2. *Wymagania podstawowe.* Artykuły należy nadsyłać w maszynopisie, w dwóch egzemplarzach. Maszynopis powinien być napisany jednostronnie przez czarną taśmę, na maszynie do pisania z niezabrudzonymi i nieuszkodzonymi znakami. Dopuszcza się odręczne czytelne uzupełnianie lub pisanie atramentem albo długopisem kolorem czarnym lub ciemnoniebieskim znaków specjalnych oraz znaków w językach, których alfabetów nie ma na maszynach do pisania, np. znaków matematycznych, chemicznych, liter greckich. Maszynopis powinien być napisany na papierze do maszyn do pisania koloru białego, formatu A4; numeracja ciągła na wszystkich kartkach.

3. *Sposób pisania tekstu.* Tekst w maszynopisie powinien być pisany bez używania wyróżnień, a w szczególności nie dopuszcza się spacjowania (rozstrzelenia), podkreślania i pisania tekstów dużymi literami. Proponowane wyróżnienia Autor może wprowadzić do maszynopisu (zwykłym ołówkiem) za pomocą przyjętych znaków adiustacyjnych (podkreślenie linią przerywaną — spacjowanie, podkreślenie linią ciągłą — pogrubienie, podkreślenie wężykiem — kursywa itp.). Na jednej kartce maszynopisu powinno być 30 wierszy po około 60 znaków łącznie z odstępami. Marginesy każdej kartki powinny mieć następujące wymiary: górny — ok. 25 mm, lewy — ok. 35 mm. Tekst maszynopisu powinien być napisany z podwójnym odstępem między wierszami; tytuły i podtytuły małymi literami. Akapity należy rozpoczynać z wcięciem równym trzem uderzeniom maszyny do pisania.

4. *Sposób pisania tablic.* Tablice w maszynopisie powinny być napisane w układzie zbliżonym do układu zecerskiego. Tytuły rubryk pionowych i poziomych powinny być napisane małymi literami z podwójnym odstępem między wierszami. Przypisy (notki) dotyczące tablic należy pisać bezpośrednio pod tablicą. Tablice należy numerować kolejno liczbami arabskimi; u góry każdej tablicy podać tytuł.

5. *Sposób pisania wzorów matematycznych.* Rozmieszczenie znaków, cyfr, liter i odstępów powinno być zbliżone do rozmieszczenia elementów druku. Wskaźniki i wykładniki powinny być napisane wyraźnie i być prawidłowo obniżone lub podwyższone w stosunku do linii wiersza podstawowego. Znaki nad literami i cyframi: strzałki, linie, kropki, daszki itp. powinny być napisane dokładnie nad tymi elementami, do których się odnoszą. Numery wzorów należy umieszczać z prawej strony.

6. *Przygotowanie materiału ilustracyjnego.* Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonywać zgodnie z obowiązującymi normami, na oddzielnych arkuszach, z podaniem kolejnych numerów rysunków. W maszynopisie artykułu na marginesie, obok właściwego tekstu, należy podać jedynie odnośny numer rysunku, a na oddzielnym arkuszu wykaz podpisów pod rysunki. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót: rys.). U samego dołu rysunku (a przy fotografiach na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, tytuł pracy i nazwisko autora. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.

Dalszy ciąg wytycznych na 3 stronie okładki

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTROTECHNIKI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XXII · ZESZYT 2

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1976

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor naczelny
PROF. DR WITOLD NOWICKI

Zastępca redaktora naczelnego
PROF. DR HAB. TADEUSZ KACZOREK

Członkowie
PROF. DR LEONARD KNOCH PROF. DR WITOLD ROSIŃSKI
PROF. DR HAB. JANUSZ TUROWSKI

Sekretarz
JANINA MATHEISEL

ADRES REDAKCJI

00-661 Warszawa, Plac Jedności Robotniczej 1
Politechnika, Instytut Teleelektroniki, Gmach Elektroniki, pok. 471

Dyżury Redakcji: poniedziałki i czwartki, godz. 11-13
tel. 28 89 81 lub 210 07-737
Telefony domowe: redaktor naczelny – 17 37 03
zastępca redaktora naczelnego – 44 88 34
sekretarz – 33 84 97

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 710 (595+115)	Oddano do składania 22.II. 1975 r.
Ark. wyd. 19,5, ark. druk. 15,25	Podpisano do druku w marcu 1976 r.
Papier druk. sat. kl. III, 80 g. 70×100	Druk ukończono w marcu 1976 r.
Zamówienie nr 1514/75	Cena zł 40.— J-105

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 2, ss. 239—268

621.3.017.3

Eddy current losses in a shielded or unshielded ferromagnetic solid due to a.c. flowing through parallel conductors

MACIEJ KRAKOWSKI (Łódź)

Instytut Podstaw Elektrotechniki Politechniki Łódzkiej

The paper received 2.12.1974

A method of calculating of eddy current losses produced in an unshielded or shielded ferromagnetic solid by alternating currents flowing through parallel as well as ribbon conductors is presented. The eddy current losses are expressed in terms of mutual and external resistances of the conductors. These resistances are derived for conductors above unshielded as well as shielded ferromagnetic solid. The distribution of the eddy current losses on the boundary surface of an unshielded or shielded ferromagnetic solid is examined.

The considerations are based on the idealized assumption that the permeability of the ferromagnetic solid is constant. It is shown, however, that the effect of permeability variation is small even if it varies widely. Therefore the results obtained can be used in many technical problems

The considerations are illustrated by examples. The results of calculations are compared with experimental data.

1. INTRODUCTION

The conductors parallel to the surface of the ferromagnetic solid which is unshielded or shielded by a non-ferromagnetic plate occur in many electrical devices; e.g. the ribbon conductors above the unshielded or shielded ferromagnetic solid can be treated as a model of the transformer windings. The purpose of this paper is to determine the eddy current losses in the solid due to a.c. which flows through the conductors.

The calculation of eddy current losses is of great importance in many technical applications and is discussed in a number of publications [1÷7, 10÷15]. A general solution of the problem for the shielded or unshielded ferromagnetic solid in the electromagnetic field due to a.c. in parallel conductors is presented in the paper.

The considerations are based on the assumption that the permeability of the ferromagnetic solid is constant. It is shown, however, that the effect of even wide permeability variation is small. Then the system examined is linear on the assumption accepted. For this reason, it is assumed that all field quantities, currents and voltages vary with the time

as exp ($j\omega t$) and are represented in the complex form. Each vector quantity **R** can be regarded as an element in the Hilbert space with the norm

$$||\mathbf{R}|| = \sqrt{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^*}$$

where $\mathbf{R}^*$ is conjugate and $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^*$ is the scalar product. It is assumed that the norm of each vector is the root-mean-square value.

Furthermore, it is assumed that the ferromagnetic solid is semi-infinite. The results, however, are also valid for ferromagnetic plates with thickness of 5 mm or more, since the depth of penetration of the electromagnetic field is very small at low frequencies for ferromagnetic solids.

The remaining assumptions are:

1. All conductors are situated in the non-conducting medium parallel to the boundary surface of the ferromagnetic solid.

2. The distance from the boundary surface to each conductor is much greater than its radius.

3. The system considered is infinitely long in the direction of the conductors.

List of principal symbols

$\mathbf{A}$ — vector potential
a_{km} — horizontal distance between conductors k and m
b_k — abscissa of conductor k
$2d$ — width of ribbon conductor
$\mathbf{E}$ — electric intensity
$\mathbf{H}$ — magnetic intensity
h_k — height of conductor k above shield or ferromagnetic solid
I_k — current in conductor k
l — length of conductor
P — eddy current losses
R_{ek} — external resistance of conductor k
R_{km} — mutual resistance of conductors k and m
r_k — radius of conductor k
S — complex power
x, y, z — rectangular coordinates
Z_{ek} — external impedance of conductor k
Z_{km} — mutual impedance of conductors k and m
γ_1 — conductivity of shield
γ_2 — conductivity of ferromagnetic solid
Δ — thickness of shield
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m — permeability of vacuum
μ_r — relative permeability of ferromagnetic solid
$\mathbf{\Pi}$ — Poynting vector
ω — angular frequency

2. FUNDAMENTAL EQUATIONS

2.1. Cylindrical conductors

2.1.1. General relationships

An infinite conductor is placed in the semi-infinite non-conducting medium above the boundary surface of the semi-infinite solid which is shielded by a non-ferromagnetic plate, as shown in Fig. 1.

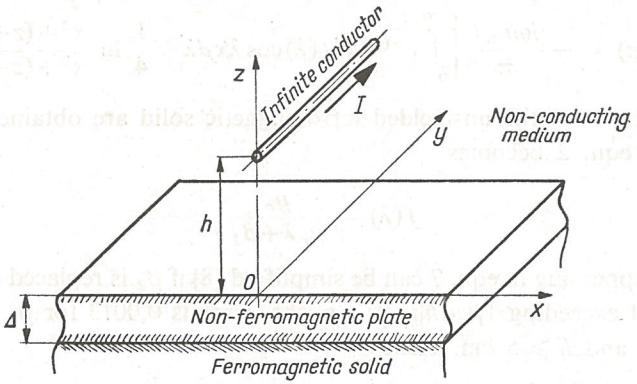


Fig. 1. An infinite conductor above the boundary surface of the shielded ferromagnetic solid

The rectangular coordinates x, y, z are employed in a such way as shown in Fig. 1. The conductor situated in the y, z plane carries the current which flows in the positive direction of the y-axis. The permeability of the non-conducting medium and of the shield is assumed to be μ_0.

The vector potential of the electromagnetic field is parallel to the y-axis. The vector potential in the non-conducting medium or on its boundary surface is given by

$$A_y(x,z) = \frac{\mu_0 I}{\pi}\left[\int_0^\infty e^{-(h+z)\lambda} f(\lambda)\cos\lambda x\, d\lambda + \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+(z+h)^2}{x^2+(z-h)^2}\right] \tag{1}$$

for $z \geqslant 0$, where

$$f(\lambda) = \frac{(\mu_r\beta_1+\beta_2)e^{2\Delta\beta_1}+(\mu_r\beta_1-\beta_2)}{(\beta_1+\lambda)(\mu_r\beta_1+\beta_2)e^{2\Delta\beta_1}-(\beta_1-\lambda)(\mu_r\beta_1-\beta_2)} \tag{2}$$

with

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \sqrt{\lambda^2+k_1^2}, \quad \mathrm{Re}(\beta_1) > 0, \\ \beta_2 &= \sqrt{\lambda^2+k_2^2}, \quad \mathrm{Re}(\beta_2) > 0 \end{aligned} \tag{3}$$

where

$$\begin{aligned} k_1 &= \sqrt{\omega\mu_0\gamma_1}\exp\left(j\frac{\pi}{4}\right), \\ k_2 &= \sqrt{\omega\mu_0\mu_r\gamma_2}\exp\left(j\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Eqn. 1 is derived in Appendix 9.1.

The intensity of the induced electric field is given by

$$E_{iy}(x, z) = -j\omega A_y(x, z), \tag{5}$$

whereas the magnetic intensity is derived from

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \tag{6}$$

Substitution of eqn. 1 for eqn. 5 yields

$$E_{iy}(x, z) = -\frac{j\omega\mu_0 I}{\pi}\left[\int_0^\infty e^{-(h+z)\lambda} f(\lambda)\cos\lambda x\, d\lambda + \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+(z+h)^2}{x^2+(z-h)^2}\right]. \tag{7}$$

The relationships for the unshielded ferromagnetic solid are obtained by substitution of $\Delta = 0$. Then eqn. 2 becomes

$$f(\lambda) = \frac{\mu_r}{\mu_r\lambda+\beta_2} \tag{8}$$

and the integral appearing in eqn. 7 can be simplified [8] if β_2 is replaced by k_2 from eqn. 4 with an error not exceeding $1/(\mu_r h|k_2|)$; e.g. the error is 0,0013 for $\mu_r \geqslant 50$, $f \geqslant 50$ Hz, $\gamma_2 \geqslant 5 \cdot 10^6$ S/m and $h \geqslant 5$ cm. Hence

$$f(\lambda) = \frac{\mu_r}{\mu_r\lambda+k_2}. \tag{9}$$

Then eqn. 7 is valid for the shielded or unshielded ferromagnetic solid if $f(\lambda)$ is taken from eqn. 2 or eqn. 9, respectively.

2.1.2. Unshielded ferromagnetic solid

The integral appearing in eqn. 7 with $f(\lambda)$ taken from eqn. 9 is transformed by substitution of $\lambda = |k_2|u/\mu_r$, giving

$$E_{iy}(x, z) = -\frac{j\omega\mu_0 I}{\pi}\left[F(h'+z', x') + \frac{1}{2}\ln\sqrt{\frac{x^2+(z+h)^2}{x^2+(z-h)^2}}\right] \tag{10}$$

where the function F is defined by

$$F(p, q) = \int_0^\infty \frac{e^{-pu}\cos qu}{u+c}\, du \tag{11}$$

with $p > 0$, real q and $c = \exp\left(j\frac{\pi}{4}\right)$. The dimensionless quantities appearing in eqn. 10 are given by

$$h' = \frac{|k_2|}{\mu_r}h, \quad x' = \frac{|k_2|}{\mu_r}x, \quad z' = \frac{|k_2|}{\mu_r}z. \tag{12}$$

The function F is discussed in sec. 3.

2.1.3. *Shielded ferromagnetic solid*

The integral appearing in eqn. 7 is denoted by

$$P(p, q) = \int_0^\infty e^{-\lambda p} f(\lambda) \cos \lambda q \, d\lambda \tag{13}$$

for $p > 0$ nad real q, where $f(\lambda)$ is taken from eqn. 2. The function P is even with respect to q; hence,

$$P(p, -q) = P(p, q).$$

An asymptotic formula

$$P(p, q) \sim \frac{m \cos\theta}{k_1 r} - \frac{m^2 \cos 2\theta}{k_1^2 r^2} + \ldots \tag{14}$$

is derived in Appendix 9.2, where

$$r = \sqrt{p^2+q^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{q}{p} \tag{15}$$

and

$$m = \frac{e^{2\Delta k_1} + \dfrac{\mu_r k_1 - k_2}{\mu_r k_1 + k_2}}{e^{2\Delta k_1} - \dfrac{\mu_r k_1 - k_2}{\mu_r k_1 + k_2}} \tag{16}$$

with k_1 and k_2 given by eqns. 4. Eqn. 14 can be used for $|k_1| r > 10$, which is a case of practical interest.

2.2. Ribbon conductors

A conductor of small thickness as compared with the width is situated in the non-conducting medium above the unshielded or shielded ferromagnetic solid, as shown in Fig. 2.

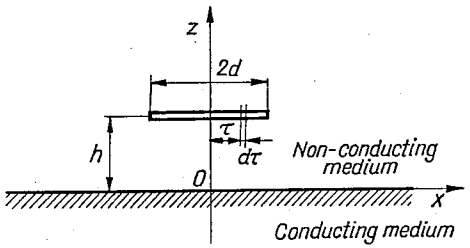


Fig. 2. A ribbon conductor above conducting medium

The current I flows through the conductor in the positive direction of the y-axis. It is assumed that the current is uniformly distributed within the conductor. Therefore the ribbon conductor may be regarded as a set of elements $d\tau$, each carrying the current $Id\tau/2d$. Hence, the electric intensity of the induced field due to an element $d\tau$ is

$$-\frac{j\omega\mu_0 I d\tau}{2\pi d}\left[\int_0^\infty e^{-(h+z)\lambda} f(\lambda) \cos \lambda(x-\tau) d\lambda + \frac{1}{4} \ln \frac{(x-\tau)^2+(z+h)^2}{(x-\tau)^2+(z-h)^2}\right],$$

according to eqn. 7. The electric intensity corresponding to the ribbon conductor is derived if the last expression is integrated between the limits from $-d$ to $+d$ with respect to τ. Hence,

$$E_{iy}(x, z) = -\frac{j\omega\mu_0 I}{2\pi d}\left[\int_{-d}^{d}\int_{0}^{\infty} e^{-(h+z)\lambda} f(\lambda)\cos\lambda(x-\tau)\,d\lambda\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\int_{-d}^{d} \ln\frac{(x-\tau)^2+(z+h)^2}{(x-\tau)^2+(z-h)^2}\,d\tau\right] \qquad (17)$$

for $z \geqslant 0$ with $f(\lambda)$ given by eqn. 2 or 9 for shielded or unshielded ferromagnetic solid, respectively.

The electric intensity on the boundary surface of the unshielded ferromagnetic solid is obtained from eqn. 17 with $f(\lambda)$ given by eqn. 9. Then the result takes the form

$$E_{iy}(x, 0) = -\frac{j\omega\mu_0\mu_r I}{2\pi k_2 d}\left[\operatorname{arctg}\frac{x+d}{h} - \operatorname{arctg}\frac{x-d}{h} - G(h', x'+d') + G(h', x'-d')\right] \qquad (18)$$

where the dimensionless quantities h', x' as well as d' are calculated from eqns. 12 and the function G is defined by

$$G(p, q) = \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-pu}\sin qu}{u+c}\,du \qquad (19)$$

with $p > 0$, real q and $c = \exp\left(j\frac{\pi}{4}\right)$. The function G is discussed in sec. 3.

The electric intensity on the upper surface of the shield is obtained by substitution $z = 0$ into eqn. 17. The integral appearing in this expression is derived in Appendix 9.2 and as a result we get

$$E_{iy}(x, 0) = -\frac{j\omega\mu_0 I}{2\pi d}\cdot\frac{m}{k_1}\left[Q(h, x+d) - Q(h, x-d)\right] \qquad (20)$$

where

$$Q(p, q) = \theta - \frac{m\sin\theta}{k_1 r} + \ldots \qquad (21)$$

with r, θ and m taken from eqns. 15 and 16. The function Q is odd with respect to q; hence,

$$Q(p, -q) = -Q(p, q).$$

Consider two parallel ribbon conductors 1 and 2, as shown in Fig. 3. The current flowing through conductor 1 is I, whereas the current in the conductor 2 is assumed to be zero. Then the average electric intensity of the induced field over the conductor 2 takes the form

$$E_{iy_{av}} = -\frac{j\omega\mu_0 I}{4\pi d_1 d_2}\left[\int_{-d_2}^{d_2}\int_{-d_1}^{d_1}\int_{0}^{\infty} e^{-(h_1+h_2)\lambda} f(\lambda)\cos\lambda(x-\tau)\,d\lambda\,d\tau\,dx + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\int_{-d_2}^{d_2}\int_{-d_1}^{d_1} \ln\frac{(x-\tau)^2+(h_1+h_2)^2}{(x-\tau)^2+(h_1-h_2)^2}\,d\tau\,dx\right] \qquad (22)$$

with $f(\lambda)$ taken from eqn. 2 or 9 for shielded or unshielded ferromagnetic solid, respectively.

The relationships for multi-conductor systems can be derived by use of the superposition principle.

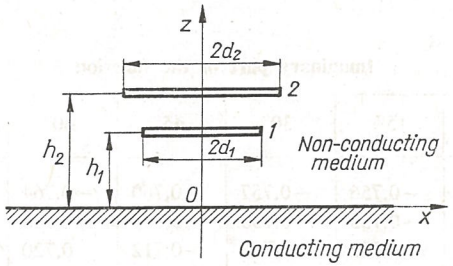


Fig. 3. Two ribbon conductors above conducting medium

Table 1

Real part of the function F

r \ θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0,01	4,069	4,068	4,065	4,061	4,055	4,048	4,039
0,02	3,407	3,406	3,401	3,394	3,384	3,371	3,357
0,04	2,767	2,765	2,758	2,746	2,730	2,709	2,685
0,06	2,408	2,405	2,396	2,380	2,359	2,333	2,301
0,08	2,162	2,158	2,147	2,129	2,104	2,073	2,035
0,1	1,977	1,973	1,961	1,940	1,911	1,876	1,833
0,2	1,444	1,439	1,422	1,394	1,354	1,303	1,240
0,4	0,990	0,983	0,962	0,927	0,877	0,812	0,730
0,6	0,767	0,760	0,738	0,701	0,647	0,577	0,487
0,8	0,630	0,623	0,601	0,563	0,508	0,437	0,346
1	0,536	0,529	0,507	0,470	0,417	0,346	0,255
1,2	0,467	0,460	0,439	0,402	0,351	0,281	0,193
1,4	0,414	0,407	0,386	0,351	0,301	0,234	0,149
1,6	0,372	0,365	0,345	0,311	0,263	0,199	0,117
1,8	0,337	0,331	0,312	0,279	0,233	0,171	0,093
2	0,309	0,303	0,284	0,253	0,208	0,150	0,075
2,5	0,255	0,249	0,233	0,204	0,164	0,111	0,046
3	0,217	0,212	0,197	0,171	0,134	0,087	0,029
3,5	0,189	0,184	0,170	0,146	0,113	0,071	0,019
4	0,167	0,163	0,150	0,128	0,098	0,059	0,013
4,5	0,150	0,146	0,134	0,114	0,086	0,051	0,009
5	0,136	0,132	0,121	0,102	0,077	0,044	0,007
5,5	0,124	0,121	0,110	0,093	0,069	0,039	0,005
6	0,114	0,111	0,101	0,084	0,063	0,035	0,004

3. FUNCTIONS F AND G

The functions F and G are defined by eqns. 11 and 19, respectively. The integrals appearing in eqns. 11 and 19 are convergent for each $p > 0$. The function F is even, whereas the function G is odd with respect to q. Hence,

$$F(p, -q) = F(p, q), \quad G(p, -q) = -G(p, q). \tag{23}$$

Table 2

Imaginary part of the function F

r \ θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0,01	−0,755	−0,756	−0,757	−0,760	−0,764	−0,769	−0,775
0,02	−0,734	−0,735	−0,738	−0,742	−0,748	−0,755	−0,764
0,04	−0,701	−0,702	−0,706	−0,712	−0,720	−0,731	−0,744
0,06	−0,675	−0,676	−0,680	−0,687	−0,697	−0,710	−0,726
0,08	−0,652	−0,653	−0,658	−0,665	−0,676	−0,690	−0,708
0,1	−0,632	−0,633	−0,638	−0,646	−0,656	−0,672	−0,691
0,2	−0,555	−0,556	−0,561	−0,568	−0,580	−0,595	−0,615
0,4	−0,459	−0,460	−0,462	−0,467	−0,474	−0,485	−0,499
0,6	−0,396	−0,396	−0,397	−0,399	−0,402	−0,407	−0,413
0,8	−0,351	−0,350	−0,350	−0,349	−0,348	−0,348	−0,347
1	−0,316	−0,315	−0,313	−0,311	−0,307	−0,302	−0,295
1,2	−0,287	−0,286	−0,284	−0,280	−0,273	−0,265	−0,253
1,4	−0,264	−0,263	−0,260	−0,254	−0,246	−0,235	−0,219
1,6	−0,245	−0,243	−0,240	−0,233	−0,223	−0,210	−0,191
1,8	−0,228	−0,226	−0,222	−0,215	−0,204	−0,189	−0,167
2	−0,214	−0,212	−0,208	−0,200	−0,188	−0,171	−0,148
2,5	−0,185	−0,183	−0,178	−0,169	−0,155	−0,136	−0,111
3	−0,163	−0,161	−0,156	−0,146	−0,132	−0,112	−0,085
3,5	−0,146	−0,144	−0,138	−0,128	−0,114	−0,094	−0,067
4	−0,132	−0,130	−0,124	−0,114	−0,100	−0,080	−0,054
4,5	−0,120	−0,118	−0,113	−0,103	−0,089	−0,070	−0,044
5	−0,111	−0,109	−0,104	−0,094	−0,080	−0,061	−0,037
5,5	−0,103	−0,101	−0,096	−0,086	−0,073	−0,055	−0,031
6	−0,096	−0,094	−0,089	−0,079	−0,066	−0,049	−0,026

The functions F and G are complex.

Inserting

$$\cos qu = \frac{1}{2}(e^{jqu} + e^{-jqu}) \quad \text{and} \quad \sin qu = \frac{1}{2j}(e^{jqu} - e^{-jqu})$$

into eqns. 11 and 19, respectively, we get

$$F(p, q) = \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty \frac{e^{-zu}du}{u+c} + \int_0^\infty \frac{e^{-z^*u}du}{u+c}\right],$$

$$G(p, q) = \frac{1}{2j}\left[\int_0^\infty \frac{e^{-z^*u}du}{u+c} - \int_0^\infty \frac{e^{-zu}du}{u+c}\right]$$

Table 3

Real part of the function G

r \ θ	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0,01	0,253	0,506	0,760	1,015	1,272	1,530
0,02	0,247	0,494	0,742	0,992	1,244	1,498
0,04	0,236	0,473	0,712	0,953	1,197	1,446
0,06	0,228	0,456	0,687	0,920	1,158	1,400
0,08	0,220	0,442	0,665	0,892	1,123	1,359
0,1	0,214	0,428	0,645	0,865	1,091	1,322
0,2	0,188	0,377	0,568	0,763	0,963	1,170
0,4	0,155	0,310	0,467	0,626	0,790	0,958
0,6	0,133	0,266	0,399	0,534	0,670	0,809
0,8	0,117	0,233	0,349	0,465	0,582	0,698
1	0,104	0,208	0,311	0,412	0,512	0,610
1,2	0,094	0,188	0,280	0,370	0,457	0,540
1,4	0,086	0,171	0,254	0,335	0,412	0,483
1,6	0,079	0,157	0,233	0,306	0,374	0,435
1,8	0,073	0,145	0,215	0,281	0,342	0,395
2	0,068	0,135	0,200	0,260	0,315	0,361
2,5	0,058	0,115	0,169	0,218	0,261	0,295
3	0,051	0,100	0,146	0,188	0,222	0,248
3,5	0,045	0,088	0,128	0,164	0,193	0,213
4	0,040	0,079	0,115	0,146	0,170	0,186
4,5	0,036	0,071	0,103	0,131	0,152	0,165
5	0,033	0,065	0,094	0,119	0,137	0,148
5,5	0,031	0,060	0,086	0,109	0,125	0,134
6	0,028	0,055	0,080	0,100	0,115	0,122

where $z = p+jq = re^{j\theta}$ and $z^* = p-jq = re^{-j\theta}$ with r and θ taken from eqns. 15. The integrals appearing in the last equations may be expressed in terms of the exponential integral function

$$Ei(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{e^{\tau}}{\tau} d\tau$$

for $\mathrm{Re}(z) > 0$, giving,

$$F(p, q) = \frac{1}{2}[-e^{cz}Ei(-cz) - e^{cz^*}Ei(-cz^*)],$$

$$G(p, q) = \frac{1}{2j}[e^{cz}Ei(-cz) - e^{cz^*}Ei(-cz^*)].$$

Using the last equations, the series expansions for the functions F and G can be derived [8], which permit to calculate the numerical values of the both functions. The real and imaginary part of the functions F and G are given in Tables $1 \div 4$.

The asymptotic formulae of the functions F and G are derived in Reference 8.

Table 4

Imaginary part of the function G

r \ θ	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0,01	−0,006	−0,012	−0,018	−0,023	−0,027	−0,030
0,02	−0,010	−0,019	−0,029	−0,037	−0,044	−0,050
0,04	−0,015	−0,030	−0,045	−0,058	−0,071	−0,082
0,06	−0,019	−0,038	−0,057	−0,075	−0,091	−0,107
0,08	−0,022	−0,045	−0,066	−0,088	−0,108	−0,127
0,1	−0,025	−0,050	−0,074	−0,098	−0,122	−0,145
0,2	−0,033	−0,066	−0,100	−0,134	−0,169	−0,204
0,4	−0,039	−0,079	−0,121	−0,164	−0,210	−0,260
0,6	−0,041	−0,083	−0,127	−0,174	−0,224	−0,280
0,8	−0,042	−0,084	−0,128	−0,175	−0,227	−0,284
1	−0,041	−0,083	−0,126	−0,173	−0,224	−0,281
1,2	−0,040	−0,081	−0,123	−0,169	−0,218	−0,274
1,4	−0,039	−0,079	−0,120	−0,164	−0,212	−0,265
1,6	−0,038	−0,076	−0,116	−0,158	−0,204	−0,255
1,8	−0,037	−0,074	−0,112	−0,153	−0,196	−0,244
2	−0,035	−0,071	−0,108	−0,147	−0,189	−0,234
2,5	−0,033	−0,066	−0,099	−0,134	−0,171	−0,209
3	−0,030	−0,061	−0,091	−0,123	−0,155	−0,188
3,5	−0,028	−0,056	−0,084	−0,113	−0,141	−0,170
4	−0,026	−0,052	−0,078	−0,104	−0,130	−0,154
4,5	−0,024	−0,049	−0,073	−0,097	−0,119	−0,141
5	−0,023	−0,046	−0,068	−0,090	−0,111	−0,129
5,5	−0,022	−0,043	−0,064	−0,084	−0,103	−0,119
6	−0,020	−0,041	−0,060	−0,080	−0,096	−0,111

4. MUTUAL AND EXTERNAL IMPEDANCES

Mutual and external impedances of the conductors above the shielded or unshielded ferromagnetic solid are encountered in calculations of eddy current losses, which will be discussed in sec. 5.

4.1. Cylindrical conductors

Consider a system of the parallel conductors 1, 2, ..., n with the currents $I_1, I_2, \ldots, I_n$, respectively.

The mutual impedance of two conductors is defined as the negative ratio of the electromotive force which is induced along a conductor by the current flowing in the other, to this current. Then the mutual impedance of the conductors k and m becomes

$$Z_{km} = -\frac{l \cdot E_{iy}}{I_k} \tag{24}$$

where lE_{iy} is the electromotive force induced along the conductor m by the current I_k.

In order to determine the mutual impedance of the conductors k and m, we assume that the conductor k is situated in the y, z plane. Substitution of eqn. 7 with $I = I_k$, $h = h_k$, $z = h_m$ and $x = a_{km}$ into eqn. 24 yields

$$Z_{km} = \frac{j\omega\mu_0 l}{\pi}\left[\int_0^\infty e^{-(h_k+h_m)\lambda} f(\lambda)\cos\lambda a_{km}\, d\lambda + \frac{1}{2}\ln\sqrt{\frac{(h_k+h_m)^2+a_{km}^2}{(h_k-h_m)^2+a_{km}^2}}\right]. \tag{25}$$

The function $f(\lambda)$ appearing in the last equation is given by eqn. 2 or 9 for the shielded or unshielded ferromagnetic solid, respectively.

The mutual impedance of conductors situated above the conducting medium is complex and satisfies the equation $Z_{km} = Z_{mk}$. The presence of the shielded or unshielded ferromagnetic solid is taken into account in eqn. 25.

The external impedance of a conductor is the negative ratio of the electromotive force which is induced along this conductor by the external magnetic flux, to the current which flows in the conductor considered. The external impedance of a conductor is equal to the mutual impedance between the conductor and an infinitely thin insulated wire situated at its surface. Then the external impedance Z_{ek} of the conductor k can be derived from eqn. 25 for $a_{km} = 0$ and $h_m = h_k - r_k$ if $h_k \gg r_k$.

The mutual and external impedance for the case of the unshielded ferromagnetic solid become

$$\begin{aligned} Z_{km} &= \frac{j\omega\mu_0 l}{\pi}\left[F(h'_k+h'_m, a'_{km}) + \frac{1}{2}\ln\sqrt{\frac{(h_k+h_m)^2+a_{km}^2}{(h_k-h_m)^2+a_{km}^2}}\right], \\ Z_{ek} &= \frac{j\omega\mu_0 l}{\pi}\left[F(2h'_k, 0) + \frac{1}{2}\ln\frac{2h_k}{r_k}\right]. \end{aligned} \tag{26}$$

The mutual as well as external resistance is the real part of the mutual and external impedance. Hence,

$$R_{km} = -\frac{\omega\mu_0 l}{\pi}\,\mathrm{Im}[F(h'_k+h'_m, a'_{km})], \tag{27}$$

$$R_{ek} = -\frac{\omega\mu_0 l}{\pi}\,\mathrm{Im}[F(2h'_k, 0)] \tag{28}$$

where the function F is defined by eqn. 11, whereas the dimensionless quantities h' and a' are calculated as in eqn. 12.

Example 1. Two conductors are placed at the heights $h_1 = 1{,}8$ cm and $h_2 = 8{,}3$ cm above the unshielded ferromagnetic solid, whereas the horizontal distance between the conductors is equal to zero. The conductivity of the solid is $\gamma_2 = 7 \cdot 10^6$ S/m and its relative permeability is taken to be $\mu_r = 700$. The mutual and external resistances should be found for the frequency of 50 Hz.

From eqn. 4 we obtain

$$\frac{|k_2|}{\mu_r} = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\gamma_2}{\mu_r}} \approx 2m^{-1},$$

whence, $h_1' = 0{,}036$ and $h_2' = 0{,}166$. From the tables of the function F, we get

$$\mathrm{Im}[F(2h_1', 0)] = -0{,}661,$$
$$\mathrm{Im}[F(2h_2', 0)] = -0{,}488,$$
$$\mathrm{Im}[F(h_1'+h_2', 0)] = -0{,}554.$$

Then the mutual and external resistances are $R_{12} = 69{,}5$ μΩ/m, $R_{e1} = 83{,}0$ μΩ/m, $R_{e2} = 61{,}3$ μΩ/m, according to eqns. 27 and 28.

The mutual and external impedance in the case of the shielded ferromagnetic solid are

$$Z_{km} = \frac{j\omega\mu_0 l}{\pi}\left[P(h_k+h_m, a_{km}) + \frac{1}{2}\ln\sqrt{\frac{(h_k+h_m)^2+a_{km}^2}{(h_k-h_m)^2+a_{km}^2}}\right],$$
$$Z_{ek} = \frac{j\omega\mu_0 l}{\pi}\left[P(2h_k, 0) + \frac{1}{2}\ln\frac{2h_k}{r_k}\right], \tag{29}$$

whereas the mutual and external resistance become

$$R_{km} = -\frac{\omega\mu_0 l}{\pi}\mathrm{Im}[P(h_k+h_m, a_{km})], \tag{30}$$

$$R_{ek} = -\frac{\omega\mu_0 l}{\pi}\mathrm{Im}[P(2h_k, 0)]. \tag{31}$$

Example 2. Two conductors are placed at the same height $h = 10$ cm above the shielded ferromagnetic solid and the horizontal distance between the conductors is $a = 74{,}6$ cm. The shield is a copper sheet of thickness $\Delta = 2$ mm and of the conductivity $\gamma_1 = 56 \cdot 10^6$ S/m. The conductivity of the ferromagnetic solid is $\gamma_2 = 7 \cdot 10^6$ S/m and its relative permeability is taken to be $\mu_r = 1000$. The mutual and external impedances are to be found for the frequency of 50 Hz.

From eqns. 4 and 16 we obtain $k_1 = 148{,}7 \exp\left(j\frac{\pi}{4}\right)m^{-1}$, $k_2 = 1662 \exp\left(j\frac{\pi}{4}\right)m^{-1}$ and $m = 2{,}45-j2{,}19$. Then inserting $r = 0{,}2$ and $\theta = 0$ into eqn. 14 we obtain $P(0{,}2;0) = 0{,}0182-j0{,}109$. The external resistance of each conductor is calculated from eqn. 31, and, as a result we get $R_{e1} = R_{e2} = 13{,}7$ μΩ/m.

Now inserting

$$r = \sqrt{0{,}2^2+0{,}746^2} = 0{,}773 \text{ m}, \quad \theta = \mathrm{arctg}\frac{0{,}746}{0{,}2} = 75°$$

into eqn. 14 we obtain $P(0{,}2;0{,}746) = (-0{,}0280-j0{,}745)\cdot 10^{-2}$. From eqn. 30 we derive $R_{12} = 0{,}935$ μΩ/m.

4.2. Ribbon conductors

Consider two parallel ribbon conductors 1 and 2 shown in Fig. 3. The mutual impedance of two ribbon conductors is defined as the negative ratio of the average electromotive force induced along a conductor by the current which flows in the other, to this current. Then the mutual impedance of the ribbon conductors becomes

$$Z_{12} = -\frac{lE_{iy_{av}}}{I}. \tag{32}$$

Hence, substitution of eqn. 22 into the last equation gives

$$Z_{12} = \frac{j\omega\mu_0 l}{4\pi d_1 d_2}\left[\int_{-d_2}^{d_2}\int_{-d_1}^{d_1}\int_{0}^{\infty} e^{-(h_1+h_2)\lambda} f(\lambda)\cos\lambda(x-\tau)\,\mathrm{d}\lambda\,d\tau dx + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\int_{-d_2}^{d_2}\int_{-d_1}^{d_1} \ln\frac{(x-\tau)^2+(h_1+h_2)^2}{(x-\tau)^2+(h_1-h_2)^2}\,d\tau dx\right]. \qquad (33)$$

The mutual resistance is the real part of the mutual impedance. Since the integral involving the logarithm is real, the mutual resistance of the ribbon conductors becomes

$$R_{12} = \mathrm{Re}\left[\frac{j\omega\mu_0 l}{4\pi d_1 d_2}\int_{-d_2}^{d_2}\int_{-d_1}^{d_1}\int_{0}^{\infty} e^{-(h_1+h_2)\lambda} f(\lambda)\cos\lambda(x-\tau)\,d\lambda d\tau dx\right]. \qquad (34)$$

After integration, the mutual resistance of the ribbon conductor takes the form

$$R_{12} = \mathrm{Re}\left[\frac{j\omega\mu_0 l}{4\pi d_1 d_2}\,M\right] \qquad (35)$$

where

$$M = 2\int_0^\infty e^{-(h_1+h_2)\lambda} f(\lambda)\,\frac{\cos\lambda(d_2-d_1)-\cos\lambda(d_1+d_2)}{\lambda^2}\,d\lambda. \qquad (36)$$

The external impedance of the ribbon conductor is defined as the negative ratio of the average electromotive force which is induced along the conductor by the external magnetic flux due to the current in the conductor, to this current. Eqn. 22 with $d_1 = d_2 = d$ and $h_1 = h_2 = h+b$ if $h \gg b$ represents the average electric intensity of the induced field in the conductor of the width $2d$ and the thickness $2b$, which is placed at the height h above the unshielded or shielded ferromagnetic solid. Then the external impedance or resistance of the ribbon conductor is given by eqn. 33 or 34 with $h_1 = h_2 = h+b$ and $d_1 = d_2 = d$.

For the unshielded ferromagnetic solid we obtain

$$\frac{1}{\lambda^2} f(\lambda) = \frac{\mu_r}{\lambda^2(\mu_r\lambda+k_2)} = \frac{\mu_r}{k_2^2}\left(\frac{k_2}{\lambda^2} - \frac{\mu_r}{\lambda} + \frac{\mu_r^2}{\mu_r\lambda+k_2}\right) \qquad (37)$$

and substitution of the last equation into eqn. 35 yields

$$R_{12} = \frac{\mu_r l}{2\pi d_1 d_2 \gamma_2}\left\{\frac{d_1'+d_2'}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{d_1+d_2}{h_1+h_2} - \frac{d_1'-d_2'}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{d_1-d_2}{h_1+h_2} - \right.$$

$$- \left(1+\frac{h_1'+h_2'}{\sqrt{2}}\right)\ln\sqrt{\frac{(h_1+h_2)^2+(d_1+d_2)^2}{(h_1+h_2)^2+(d_1-d_2)^2}} +$$

$$\left. + \mathrm{Re}[F(h_1'+h_2', d_1'-d_2') - F(h_1'+h_2', d_1'+d_2')]\right\} \qquad (38)$$

as a result. Then the external resistance of the ribbon conductor takes the form

$$R_e = \frac{\mu_r l}{2\pi d^2 \gamma_2}\left\{\sqrt{2}\, d' \operatorname{arctg}\frac{d}{h} - (1+\sqrt{2}h')\ln\sqrt{1+\left(\frac{d}{h}\right)^2} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{Re}[F(2h', 0) - F(2h', 2d')]\right\}. \qquad (39)$$

The function F appearing in the last equation is defined by eqn. 11, whereas the dimensionless quantities h' and a' are calculated as in eqn. 12.

Example 3. Two ribbon conductors, each of the width $2d = 1$ m are placed at the heights $h_1 = 10$ cm and $h_2 = 20$ cm above the unshielded ferromagnetic solid, as shown in Fig. 3. The remaining data are the same as in Example 1. The mutual and external resistances are to be found for the frequency of 50 Hz.

Similarly as in Example 1 we obtain $|k_2|/\mu_r = 2\ \mathrm{m}^{-1}$. Hence, $d' = 1$, $h_1' = 0{,}2$ and $h_2' = 0{,}4$. For $r = h_1' + h_2' = 0{,}6$, $\theta = 0$ and $r = \sqrt{(h_1'+h_2')^2 + (2d')^2} = 2{,}09$, $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{2d}{h_1+h_2} = 1{,}279$ rad, we obtain

$$\operatorname{Re}[F(h_1'+h_2', 0)] = 0{,}767 \text{ and } \operatorname{Re}[F(h_1'+h_2', 2d')] = 0{,}156,$$

respectively. Then the mutual resistance becomes $R_{12} = 40{,}9\ \mu\Omega/\mathrm{m}$, according to eqn. 38.

For $r = 2h_1' = 0{,}4$, $\theta = 0$ and $r = \sqrt{(2h')^2 + (2d')^2} = 2{,}04$, $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{2d}{2h_1} = 1{,}373$ rad, we have

$$\operatorname{Re}[F(2h_1', 0)] = 0{,}990 \text{ and } \operatorname{Re}[F(2h_1', 2d')] = 0{,}133,$$

respectively. Then the external resistance of the conductor situated at the height $h_1 = 10$ cm is $R_{e1} = 45{,}1\ \mu\Omega/\mathrm{m}$.

The external resistance of the conductor placed at the height $h_2 = 20$ cm is $R_{e2} = 37{,}8\ \mu\Omega/\mathrm{m}$.

In order to obtain the mutual as well as external resistance of the ribbon conductors above the shielded ferromagnetic solid, the asymptotic formula given by eqn. 73 in Appendix 9.2 is integrated with respect to q between limits from q_1 to q_2, giving

$$\int_0^\infty e^{-\lambda p} f(\lambda)\left[\int_{q_1}^{q_2} \frac{\sin\lambda q}{\lambda} dq\right] d\lambda = \frac{m}{k_1}\int_{q_1}^{q_2} \operatorname{arctg}\frac{q}{p}\, dq - \frac{m^2}{k_1^2}\int_{q_1}^{q_2} \frac{q}{p^2+q^2}\, dq + \ldots$$

with $f(\lambda)$ and m defined by eqns. 2 and 16, respectively, whence,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda p} f(\lambda)\,\frac{\cos\lambda q_1 - \cos\lambda q_2}{\lambda^2}\, d\lambda =$$

$$= \frac{m}{k_1}\left[q_2 \operatorname{arctg}\frac{q_2}{p} - q_1 \operatorname{arctg}\frac{q_1}{p} - \left(p + \frac{m}{k_1}\right)\ln\sqrt{\frac{p^2+q_2^2}{p^2+q_1^2}}\right]. \qquad (40)$$

Then from eqns. 35 and 36 we get

$$R_{12} = \frac{\omega\mu_0 l}{2\pi d_1 d_2} \operatorname{Re}\left\{\frac{jm}{k_1}\left[(d_1+d_2)\operatorname{arctg}\frac{d_1+d_2}{h_1+h_2} - (d_1-d_2)\operatorname{arctg}\frac{d_1-d_2}{h_1+h_2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(h_1+h_2+\frac{m}{k_1}\right)\ln\sqrt{\frac{(h_1+h_2)^2+(d_1+d_2)^2}{(h_1+h_2)^2+(d_1-d_2)^2}}\right]\right\}, \tag{41}$$

whence, the external resistance becomes

$$R_e = \frac{\omega\mu_0 l}{2\pi d^2} \operatorname{Re}\left\{\frac{jm}{k_1}\left[2d\operatorname{arctg}\frac{d}{h} - \left(2h+\frac{m}{k_1}\right)\ln\sqrt{1+\left(\frac{d}{h}\right)^2}\right]\right\}. \tag{42}$$

Example 4. Two ribbon conductors, each of the width $2d = 1$ m are situated at the heights $h_1 = 9{,}5$ cm and $h_2 = 19{,}5$ cm above the copper plate placed on the surface of the ferromagnetic solid, as shown in Fig. 3. The thickness and the conductivity of the copper plate are $\Delta = 0{,}5$ cm and $\gamma_1 = 57.10^6$ S/m, respectively. The conductivity of the ferromagnetic solid is $\gamma_2 = 7 \cdot 10^6$ S/m, whereas its relative permeability is taken to be $\mu_r = 700$. One is required to calculate the mutual and external resistances of the conductors at the frequency of 50 Hz.

From eqns. 4 we obtain $k_1 = 148{,}7 \exp\left(j\frac{\pi}{4}\right) m^{-1}$ and $k_2 = 1391 \exp\left(j\frac{\pi}{4}\right) m^{-1}$, whence, $m = 1{,}137 - j0{,}7593$. Then the mutual resistance $R_{12} = 2{,}07$ μΩ/m, whereas the external resistances are $R_{e1} = 2{,}39$ μΩ/m and $R_{e2} = 1{,}82$ μΩ/m for conductors situated at the heights $h_1 = 9{,}5$ cm and $h_2 = 19{,}5$ cm, respectively.

The relationship for mutual impedance of two ribbon conductors separated by a horizontal distance different from zero is derived in Reference 7.

5. EDDY CURRENT LOSSES

5.1. General considerations

Consider a system of the parallel conductors $1, 2, \ldots, n$ with the currents $I_1, I_2, \ldots, \ldots, I_n$, respectively, above the shielded or unshielded ferromagnetic solid, as shown in Fig. 4. A segment of the system between two vertical planes which are separated by the distance l will be discussed in the following work. The denotations accepted in the sequel are:

$s_1, s_2, \ldots, s_n$ — surfaces enclosing the conductors $1, 2, \ldots, n$, respectively, which are placed in the non-conducting medium in close proximity to each conductor;

s_f — surface in the non-conducting medium in close proximity to the shielded or unshielded ferromagnetic solid;

s_ϱ — a cylindrical surface in the non-conducting medium.

All surfaces discussed embrace a space volume Ω in the non-conducting medium.

According to the Poynting's theorem, the complex power S_Ω associated with the space volume Ω is the integral of the complex Poynting vector over a closed surface:

$$S_\Omega = \oint_{s(\Omega)} [\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*]\cdot d\mathbf{s} = -\int_\Omega \operatorname{div}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*]\,dv \tag{43}$$

where $\mathbf{H}$ is conjugate and $\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*$ is the vector product. Since the vector $d\mathbf{s}$ is taken to be along the inward normal, the sign minus appears on the right-hand side of eqn. 43.

At every point in the space volume Ω, including its boundary surface, the conductivity is equal to zero. Hence, the first Maxwell's equation becomes rot $\mathbf{H} = 0$ if the displacement currents are neglected, and, the identity

$$\operatorname{div}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*] = \mathbf{H}^*\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H}^*$$

takes the form

$$\operatorname{div}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*] = \mathbf{H}^*\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E}. \tag{44}$$

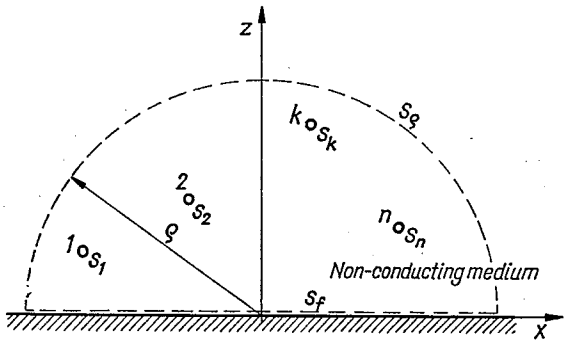


Fig. 4. A multi-conductor system above the shielded or unshielded ferromagnetic solid

Substitution of $\mathbf{E} = \mathbf{E}_i - \operatorname{grad} V$, where $\mathbf{E}_i$ is the electric intensity of the induced field and V is the scalar potential of the electromagnetic field, yields

$$\operatorname{div}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*] = \mathbf{H}^*\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E}_i, \tag{45}$$

whence,

$$\operatorname{div}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*] = \operatorname{div}[\mathbf{E}_i\times\mathbf{H}^*]. \tag{46}$$

Therefore the complex power associated with the space volume Ω becomes

$$S_\Omega = \int_{s(\Omega)} [\mathbf{E}_i\times\mathbf{H}^*]\cdot d\mathbf{s} \tag{47}$$

which is the complex power flux entering this space volume.

Substitution of the second Maxwell's equation rot $\mathbf{E}_i = -j\omega\mu_0\mathbf{H}$ into eqn. 45 gives

$$\operatorname{div}[\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*] = -j\omega\mu_0\|\mathbf{H}\|^2,$$

whence, eqn. 43 becomes

$$S_\Omega = j2\omega \int_{s(\Omega)} \frac{1}{2}\mu_0\|\mathbf{H}\|^2\, dv.$$

The complex power considered is purely imaginary, which is evident from the physical view-point.

When the radius ϱ of the cylindrical surface s_ϱ approaches infinity, the complex power

$$S_0 = \lim_{\varrho \to \infty} S_\Omega$$

is associated with the entire non-conducting medium. Obviously, the complex power S_0 is purely imaginary.

The integral of the Poynting vector over the closed surface $s(\Omega)$ may be written in the form

$$S_\Omega = \sum_{k=1}^{n} S_k - S_f + S_\varrho \tag{48}$$

where the complex power flux

$$S_k = \int_{s_k} [\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}^*] \cdot d\mathbf{s}, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{49}$$

is leaving the conductor k and entering the non-conducting medium, whereas the complex power flux

$$S_f = \int_{s_f} [\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}^*] \cdot d\mathbf{s}$$

is entering the shielded or unshielded ferromagnetic solid.

The last term on the right-hand side of eqn. 48 represents the complex power flux over the cylindrical surface s_ϱ, which is given by

$$S_\varrho = \int_{s_\varrho} [\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}^*] \cdot d\mathbf{s}.$$

It can be shown that the norm of the complex Poynting vector at every point on the surface s_ϱ decreases as $1/\varrho^2$ when ϱ approaches infinity. Hence,

$$\|\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}^*\| \leqslant \frac{\alpha}{\varrho^2}$$

where α is a positive number. The integral of the Poynting vector over the surface s_ϱ vanishes as ϱ approaches infinity, since

$$|S_\varrho| \leqslant \int_{s_\varrho} \|\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}^*\| ds \leqslant \frac{\alpha}{\varrho^2} \cdot \pi \varrho l \to 0$$

for $\varrho \to \infty$.

Then eqn. 48 becomes

$$S_0 = \sum_{k=1}^{n} S_k - S \tag{50}$$

when cylindrical surface s_ϱ approaches infinity, where $S = \lim_{\varrho \to \infty} S_f$ is the total complex power flux which enters the shielded or unshielded ferromagnetic solid. The eddy current

losses P in the shielded or unshielded ferromagnetic solid are equal to the real part of the complex power flux. Hence, the eddy current losses become

$$P = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} S_k\right), \tag{51}$$

according to eqn. 50, since the power S_0 is purely imaginary.

It can be shown that eqn. 51 derived for cylindrical conductors is also valid for ribbon conductors.

5.2. Relationships for eddy current losses

5.2.1. Cylindrical conductors

Consider an element of the conductor k carrying the current I_k and choose an elementary surface ds on the surface of the element, as shown in Fig. 5. The normal vector $d\mathbf{s}$ is given by

$$d\mathbf{s} = d\boldsymbol{\lambda} \times d\mathbf{l}$$

with $d\boldsymbol{\lambda} = 1_t d\lambda$ and $d\mathbf{l} = 1_y dl$ where 1_t and 1_y are the unit vectors. The vector 1_y is parallel to the y-axis, whereas 1_t is tangential to the curve enclosing a cross-section of the conductor.

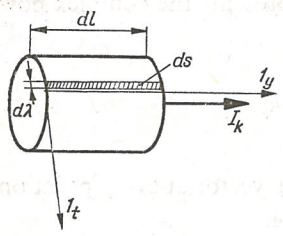


Fig. 5. An element of the cylindrical conductor k

According to eqn. 49, the power flux leaving the conductor k becomes

$$S_k = \int_{s_k} [\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}^*] \cdot [d\boldsymbol{\lambda} \times d\mathbf{l}], \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{52}$$

The scalar product of two vector products appearing in the last equation can be written in the form

$$(\mathbf{E}_i \cdot d\boldsymbol{\lambda})(\mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{l}) - (\mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l})(\mathbf{H}^* \cdot d\boldsymbol{\lambda}) = -(\mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l})(\mathbf{H}^* \cdot d\boldsymbol{\lambda}),$$

since $\mathbf{E}_i$ is perpendicular to $d\boldsymbol{\lambda}$. Hence,

$$S_k = -\int \left[\oint \mathbf{H}^* \cdot d\boldsymbol{\lambda}\right] \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l}$$

where the path of integration of the integral forming the bracket term is the curve enclosing a cross-section of the conductor, whereas the path of integration of the other integral is taken to be along this conductor.

From the second Maxwell's equation the expression

$$\oint \mathbf{H}^* \cdot d\boldsymbol{\lambda} = I_k^*$$

arises, whence, the power flux becomes

$$S_k = -I_k^* E_{ik} l, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{53}$$

where E_{ik} is the electric intensity of the induced field at a point on the surface of the conductor k.

The term $E_{ik}l$ is the electromotive force induced along the conductor k by the currents flowing through all conductors. This term can be determined if the superposition principle is used. According to the definition of the mutual and external impedance, the electromotive force becomes

$$E_{ik} l = -Z_{ek} I_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} Z_{ki} I_i.$$

Substitution into eqn. 53 gives

$$S_k = Z_{ek} |I_k|^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} Z_{ki} I_i I_k^*, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{54}$$

whence,

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n} Z_{ek} |I_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{k} Z_{ki} I_i I_k^*$$

which can be represented in the matrix form

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = [I_1^*, I_2^*, \ldots, I_n^*] \begin{bmatrix} Z_{e1}, Z_{12}, \ldots, Z_{1n} \\ Z_{21}, Z_{e2}, \ldots, Z_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_{n1}, Z_{n2}, \ldots, Z_{en} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}.$$

The eddy current losses are given by

$$P = [I_1^*, I_2^*, \ldots, I_n^*] \begin{bmatrix} R_{e1}, R_{12}, \ldots, R_{1n} \\ R_{21}, R_{e2}, \ldots, R_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{n1}, R_{n2}, \ldots, R_{en} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \tag{55}$$

as the real part of the complex power. The mutual and external resistances are taken from eqns. 27 and 28 for the unshielded, and from eqns. 30 and 31 for shielded ferromagnetic solid.

It is easy to show that the eddy current losses are given by

$$P = (R_{e1}+R_{e2}+R_{e3}-R_{12}-R_{23}-R_{13})|I|^2 \tag{56}$$

for a symmetrical three-phase system, whereas

$$P = (R_{e1}+R_{e2}-2R_{12})|I|^2 \tag{57}$$

for a single-phase system and

$$P = R_e|I|^2 \tag{58}$$

for a single conductor.

Example 5. The eddy current losses in the systems considered in Examples 1 and 2 can be calculated from eqn. 57. Assuming $|I| = 7050$ A, we obtain for the unshielded ferromagnetic solid:

$$P = (83{,}0+61{,}3-2\cdot 69{,}5)\cdot 10^{-6}\cdot 7050^2 = 260 \text{ W/m}$$

if the results from Example 1 are applied.

Assuming $|I| = 5000$ A, the eddy current losses in the shielded ferromagnetic solid are

$$P = (2\cdot 13{,}7-2\cdot 0{,}935)\cdot 10^{-6}\cdot 5000^2 = 640 \text{ W/m}$$

if the results from Example 2 are applied.

Eddy current losses in a ferromagnetic solid unshielded or shielded by a copper plate of the thickness of 2 mm and 5 mm are given in Table 5.

Table 5

Eddy current losses in a system with two conductors for different shields

thickness of shield mm	eddy current losses W/m
0	1500
2	640
5	260

$h_1 = h_2 = 10$ cm, $a_{km} = 74{,}6$ cm, $f = 50$ Hz,
$\gamma_1 = 56\cdot 10^6$ S/m, $\gamma_2 = 7\cdot 10^6$ S/m, $\mu_r = 1000$

It follows from eqn. 16 that m equals unity as Δ approaches infinity. For sufficiently great Δ, m equals unity, approximately. Therefore the non-ferromagnetic shields with sufficiently great thickness can be treated as semi-infinite.

The shielding effect depends considerably on the thickness of the shield and becomes greater as it increases. However, the last conclusion is valid if the shield is not too thick, since the shielding effect is independent of the thickness if it becomes sufficiently great.

5.2.2. *Ribbon conductors*

Now we consider a segment of the ribbon conductor k, as shown in Fig. 6. It is assumed that the current is uniformly distributed within the ribbon conductor, which holds true if that is regarded as a mathematical model of a transformer winding. According to eqn. 49, the complex power flux leaving the ribbon conductor k can be expressed in terms of the Poynting vector whose z-component is $-E_{iy} H_x^*$.

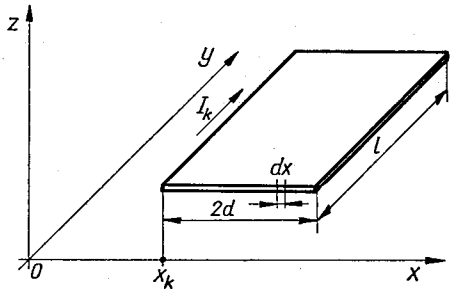


Fig. 6. A segment of the ribbon conductor k

The ribbon conductor is assumed to be very thin. Then the power flux leaving the conductor k takes the form

$$S_k = -l \int_{x_k}^{x_k+2d} E_{iy1} H_{x1}^* dx + l \int_{x_k}^{x_k+2d} E_{iy2} H_{x2}^* dx$$

where E_{iy1} and H_{x1} are the y- and x-component of the electric and magnetic intensity at the upper, and E_{iy2} and H_{x2} at the lower surface of the conductor. Since the tangential component of the electric intensity is continous, we have $E_{iy1} = E_{iy2}$. Hence,

$$S_k = -l \int_{x_k}^{x_k+2d} E_{iy1}(H_{x1}^* - H_{x2}^*) dx. \tag{59}$$

However, the tangential component of the magnetic intensity is discontinous:

$$H_{x1}^* - H_{x2}^* = \frac{I_k^*}{2d}$$

on the assumption accepted that the current I_k is uniformly ditributed within the ribbon conductor. Substitution of the last equation into eqn. 59 yields

$$S_k = -I_k^* l \cdot \frac{1}{2d} \int_{x_k}^{x_k+2d} E_{iy1} dx,$$

whence

$$S_k = -I_k^* E_{iyk_{av}} l \tag{60}$$

where $E_{iyk_{av}}$ is the average electric intensity of the induced field over the ribbon conductor k.

The term $E_{iyk_{av}} l$ appearing in eqn. 60 is the average electromotive force induced along the ribbon conductor k by the currents which flow through all conductors. This term can

be determined using the superposition principle. Hence, eqn. 54 is derived as the result, according to the definition of the mutual as well as external impedance given in sec. 4.2. Therefore the eddy current losses are given by eqn. 55 with mutual and external resistances taken from eqns. 38 and 39 for unshielded and from eqns. 41 and 42 for shielded ferromagnetic solid.

Example 6. Assuming $|I| = 5000$ A, we obtain from eqn. 57 for the unshielded ferromagnetic solid

$$P = (45{,}1 + 37{,}8 - 2 \cdot 40{,}9) \cdot 10^{-6} \cdot 5000^2 = 27{,}5 \text{ W/m}$$

if the results from Example 3 are applied.

The eddy current losses in the unshielded ferromagnetic solid are examined by Turowski [13, 14, 15] for ribbon conductors, and, the formula

$$P = 1{,}75 \cdot 10^{-11} \eta^2 2df \sqrt{f\gamma_2}\, |I|^2 (\varkappa_1 + 6{,}6 \cdot 10^{-9} \eta \varkappa_2 |I| \sqrt{f\gamma_2})$$

is derived and experimentally verified. The coefficients $\varkappa_1$ and $\varkappa_2$ are taken from plots or tables, whereas $\eta = 0{,}7 \div 0{,}8$ or less than 0,7 for strong fields [14]. For the system considered we obtain $\varkappa_1 = 0{,}111$ and $\varkappa_2 = 0{,}05$ from tables given in Reference 13. Assuming $\eta = 0{,}7$, we get $P = 26{,}6$ W/m. Both results are very close.

For the shielded ferromagnetic solid we obtain from eqn. 57

$$P = (2{,}39 + 1{,}82 - 2 \cdot 2{,}07) \cdot 10^{-6} \cdot 5000^2 \approx 2 \text{ W/m}$$

if the results derived in Example 4 are used. It follows that the shield considerably decreases eddy current losses.

It follows from calculations that the relationships derived lead to appreciable errors for narrow ribbon conductors. However, a ribbon conductor can be often replaced with an allowable error by a cylindrical conductor of a very small radius, which is situated along its axis if $2d/h < 5$.

As an example, we consider two ribbon conductors of the width $2d = 9{,}9$ cm which are placed at the heights $h_1 = 1{,}8$ cm and $h_2 = 8{,}3$ cm above the unshielded ferromagnetic solid as shown in Fig. 3. The ribbon conductors are replaced by the cylindrical conductors, and, a system is obtained as in Example 1. The mutual and external resistances of the cylindrical conductors are calculated in Example 1, whereas the eddy current losses are $P = 260$ W/m, according to Example 5. The eddy current losses obtained from experimental data are equal to 270 W/m. Both results differ very little.

6. ACTIVE POWER DISTRIBUTION ON BOUNDARY SURFACE

It follows from considerations given in sec. 5.1 that the complex Poynting vector

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{E}_i \times \mathbf{H}^* \tag{61}$$

represents the complex power flux density at every point in the non-conducting medium. The density Π_f of the complex power flux entering the unshielded or shielded ferromagnetic solid is the negative z-component of the Poynting vector on the boundary surface. Hence,

$$\Pi_f = -\Pi_z(x, 0) = E_{iy}(x, 0) H_x^*(x, 0). \tag{62}$$

The active power density on the boundary surface is the real part of Π_f. It is evident that Π_f determines the distribution of eddy current losses on the boundary surface.

It can be shown that the active power density in a multi-conductor system takes the form

$$\mathrm{Re}(\Pi_f) = \frac{\omega\mu_0|k_2|}{\pi^2\mu_r\sqrt{2}}\left|\sum_{k=1}^{n} I_k F(h'_k, x'-b'_k)\right|^2 \tag{63}$$

for the unshielded, whereas

$$\mathrm{Re}(\Pi_f) = \frac{\omega\mu_0}{\pi^2}\,\mathrm{Re}\left[j\left(\frac{k_1}{m}\right)^*\right]\cdot\left|\sum_{k=1}^{n} I_k P(h_k, x-b_k)\right|^2 \tag{64}$$

for the shielded ferromagnetic solid. Eqns. 63 and 64 concern the cylindrical conductors. Plots of the active power density on the boundary surface of the unshielded ferromagnetic solid for a single-phase and a symmetrical three-phase system are shown in Fig. 7a and b.

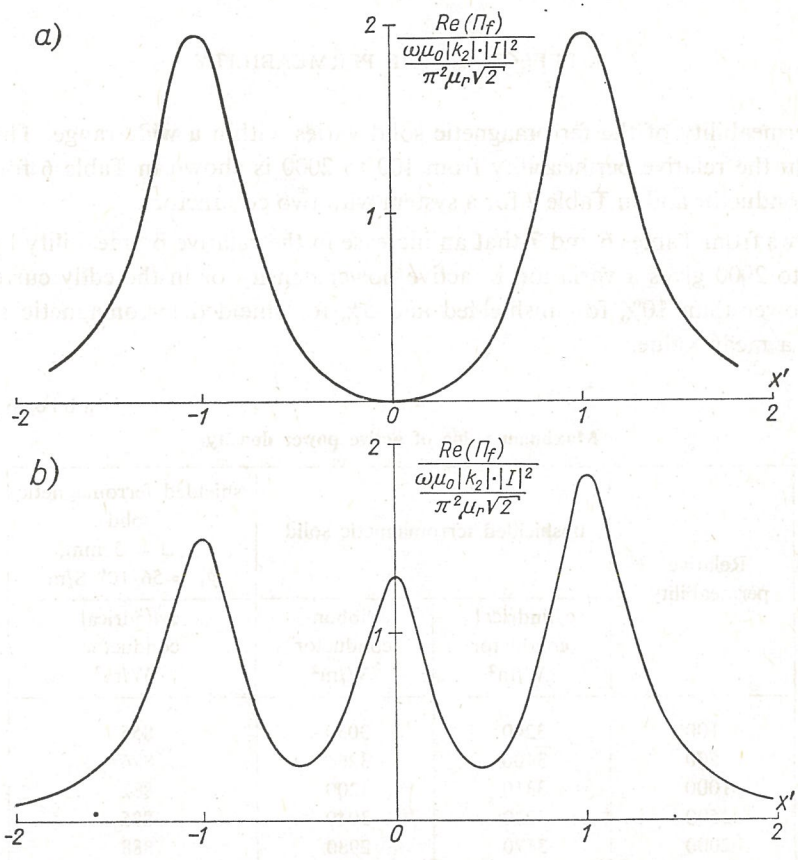


Fig. 7. Plots of the active power density on the boundary surface of the unshielded ferromagnetic solid
a — single-phase system, b — symmetrical three-phase system

The curve in Fig. 7b is asymmetrical. It can be shown that the place with the maximum power density depends on the sequence of the three-phase currents. The maximum power density appears in the neighbourhood of the point opposite to the outer conductor which carries the current delayed with respect to the middle wire. It is evident that local overheating can arise in this region.

It can be shown that the active power density for a system with one conductor takes the form

$$\mathrm{Re}(\Pi_f) = \frac{\omega\mu_0\mu_r|I|^2}{4\pi^2|k_2|d^2\sqrt{2}}\left|\mathrm{arctg}\frac{x+d}{h} - \mathrm{arctg}\frac{x-d}{h} - G(h', x'+d') + G(h', x'-d')\right|^2 \quad (65)$$

for the unshielded, whereas

$$\mathrm{Re}(\Pi_f) = \frac{\omega\mu_0|I|^2}{4\pi^2 d^2}\,\mathrm{Re}\left(j\frac{m}{k_1}\right)\cdot|Q(h, x+d) - Q(h, x-d)|^2 \quad (66)$$

for the shielded ferromagnetic solid.

7. EFFECT OF THE PERMEABILITY

The permeability of the ferromagnetic solid varies within a wide range. The effect of variation in the relative permeability from 100 to 2000 is shown in Table 6 for a system with one conductor and in Table 7 for a system with two conductors.

It follows from Tables 6 and 7 that an increase in the relative permeability by 20 times from 100 to 2000 gives a variation in active power density or in the eddy current losses, which is lower than 10% for unshielded and 5% for shielded ferromagnetic solid, with respect to a mean value.

Table 6

Maximum value of active power density

Relative permeability	unshielded ferromagnetic solid		shielded ferromagnetic solid $\Delta = 5$ mm, $\gamma_1 = 56\cdot10^6$ S/m
	cylindrical conductor W/m²	ribbon conductor W/m²	cylindrical conductor W/m²
100	3240	3050	855
500	3400	3260	876
1000	3310	3200	882
1500	3230	3040	885
2000	3170	2980	888
$h = 10$ cm, $\|I\| = 5000$ A, $f = 50$ Hz, $\gamma_2 = 7\cdot10^6$ S/m			

Table 7

Eddy current losses

Relative permeability	eddy current losses W/m
100	1440
500	1550
1000	1500
1500	1400
2000	1350
$h = 10$ cm, $a = 74{,}6$ cm, $\|I\| = 5000$ A, $f = 50$ Hz, $\gamma_2 = 7 \cdot 10^6$ S/m	

The little variation in the eddy current losses corresponding to permeability variation within a wide range is a favourable circumstance. It permits to calculate with an allowable error the eddy current losses on the idealized assumption that the permeability of the ferromagnetic solid is constant.

8. CONCLUSIONS

A method of calculating of the eddy current losses produced in an unshielded or shielded ferromagnetic solid by a.c. flowing through thin cylindrical or ribbon conductors is presented in the paper. The eddy current losses are expressed in terms of external and mutual resistances of the conductors, which permits to derive the result without integration of the Poynting vector. The results of calculations are in good agreement with the experimental data.

The considerations are based on the idealized assumption that the permeability of the ferromagnetic solid is constant. However, it follows from the calculations that the effect of variation in the relative permeability is small in many problems if it varies from 100 to 2000. The relative permeability of steel varies usually from 500 to 1000 in technical problems. Therefore the relative permeability of 700 or 1000 can be used in calculations.

The ferromagnetic solid is assumed to be semi-infinite. The results, however, are also valid for ferromagnetic plates of 5 mm or more thickness. Therefore such plates can be treated as semi-infinite.

The ribbon conductors of sufficiently small width can be replaced by very thin cylindrical conductors which are situated along their axes.

The results derived permit to examine the shielding effect of the non-ferromagnetic plates which are placed on the boundary surface of the ferromagnetic solid.

In the relationships derived, the special functions F and G appear. In order to obtain the results for the ribbon conductors with sufficient accuracy, accurate tables of these functions are necessary.

Some disadvantage of the method presented is that the relationships for the external and mutual resistance are complex, and because of this the calculations become rather laborious. The results, however, are of general meaning and can be used in many technical problems.

9. APPENDIXES

9.1. Vector potential of a conductor above shielded ferromagnetic solid

The vector potential **A** of the system from Fig. 1 is parallel to the y-axis. The y-component of the vector potential is denoted by A_y, A_{y1} and A_{y2} in the non-conducting medium, non-ferromagnetic plate and ferromagnetic solid, which satisfy the equations

$$\nabla^2 A_y = 0, \quad \nabla^2 A_{y1} = k_1^2 A_{y1}, \quad \nabla^2 A_{y2} = k_2^2 A_{y2},$$

respectively, where k_1 and k_2 are given by eqns. 4.

The electromagnetic field in the non-conducting medium is considered to be the sum of a primary and a secondary component:

$$A_y = A_y' + A_y''.$$

The primary field is caused by the currents in the conductor and in its image which are placed in the non-conducting medium of infinite extent. The vector potential of the primary field is

$$A_y' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{x^2+(z+h)^2}{x^2+(z-h)^2}$$

whereas the potential of the secondary field is assumed to be

$$A_y'' = \int_0^\infty A(\lambda) e^{-\lambda z} \cos \lambda x \, d\lambda$$

as the solution of the Laplace equation. Then the vector potential in the non-conducting medium becomes

$$A_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{x^2+(z+h)^2}{x^2+(z-h)^2} + \int_0^\infty A(\lambda) e^{-\lambda z} \cos \lambda x \, d\lambda, \quad z \geqslant 0. \tag{67}$$

The vector potential in the non-ferromagnetic plate and ferromagnetic solid is given by

$$\begin{aligned} A_{y1} &= \int_0^\infty B(\lambda) e^{\beta_1 z} \cos \lambda x \, d\lambda + \int_0^\infty C(\lambda) e^{-\beta_1 z} \cos \lambda x \, d\lambda, \quad -\Delta \leqslant z \leqslant 0, \\ A_{y2} &= \int_0^\infty D(\lambda) e^{\beta_2 z} \cos \lambda x \, d\lambda, \quad z \leqslant -\Delta \end{aligned} \tag{68}$$

as the solutions of the Helmholtz equation, where β_1 and β_2 are given by eqns. 3.

The boundary conditions are

$$A_y|_{z=0} = A_{y1}|_{z=0}, \quad A_{y1}|_{z=-\Delta} = A_{y2}|_{z=-\Delta},$$
$$\left.\frac{\partial A_y}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial A_{y1}}{\partial z}\right|_{z=0}, \quad \left.\frac{\partial A_{y1}}{\partial z}\right|_{z=-\Delta} = \frac{1}{\mu_r}\left.\frac{\partial A_{y2}}{\partial z}\right|_{z=-\Delta}. \tag{69}$$

Eqns. 69 state that the tangential components of the electric and magnetic intensities are continous at every point on each boundary surface.

Inserting eqns. 67 and 68 into eqns. 69, we obtain

$$\int_0^\infty A(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda = \int_0^\infty B(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda + \int_0^\infty C(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda,$$

$$\int_0^\infty B(\lambda)e^{-\Delta\beta_1}\cos\lambda x\,d\lambda + \int_0^\infty C(\lambda)e^{\Delta\beta_1}\cos\lambda x\,d\lambda = \int_0^\infty D(\lambda)e^{-\beta_2}\cos\lambda x\,d\lambda,$$

$$\frac{\mu_0 I}{\pi}\cdot\frac{h}{x^2+h^2} - \int_0^\infty \lambda A(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda = \int_0^\infty \beta_1 B(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda - \int_0^\infty \beta_1 C(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda,$$

$$\mu_r\int_0^\infty \beta_1 B(\lambda)e^{-\Delta\beta_1}\cos\lambda x\,d\lambda - \mu_r\int_0^\infty \beta_1 C(\lambda)e^{\beta_1}\cos\lambda x\,d\lambda = \int_0^\infty \beta_2 D(\lambda)e^{-\beta_2}\cos\lambda x\,d\lambda.$$

Substitution of

$$\frac{h}{x^2+h^2} = \int_0^\infty e^{-\lambda h}\cos\lambda x\,d\lambda$$

yields

$$A(\lambda) = B(\lambda)+C(\lambda),$$
$$B(\lambda)e^{-\Delta\beta_1} + C(\lambda)e^{\beta_1} = D(\lambda)e^{-\beta_2},$$
$$\frac{\mu_0 I}{\pi}e^{-\lambda h} - \lambda A(\lambda) = \beta_1 B(\lambda) - \beta_1 C(\lambda),$$
$$\mu_r\beta_1 B(\lambda)e^{-\Delta\beta_1} - \mu_r\beta_1 C(\lambda)e^{\beta_1} = \beta_2 D(\lambda)e^{-\beta_2}.$$

Hence,

$$A(\lambda) = \frac{\mu_0 I}{\pi}e^{-\lambda h}f(\lambda)$$

where $f(\lambda)$ is taken from eqn. 2.

Inserting the last expression into eqn. 67, we obtain eqn. 1 as a result.

9.2. Asymptotic formulae for integrals

The asymptotic formula for the Laplace integral takes the form

$$F(s) = \int_0^\infty f(\lambda)e^{-\lambda s}d\lambda \sim \frac{f(0)}{s} + \frac{f'(0)}{s^2} + \frac{f''(0)}{s^3} + \ldots \tag{70}$$

for $\mathrm{Re}(s) > 0$, which can be derived by integration by parts.

Consider the function P defined by eqn. 13. The function P can be represented in the form

$$P(p, q) = \frac{1}{2}[F(s)+F(s^*)] \tag{71}$$

where $s = p+jq$ and $s^* = p-jq$. It is easy to show that

$$f(0) = \frac{m}{k_1}, \quad f'(0) = -\frac{m^2}{k_1^2}$$

where k_1 and m are taken from eqns. 4 and 16, respectively. Hence,

$$F(s) \sim \frac{m}{k_1 s} - \frac{m^2}{k_1^2 s^2} + \ldots \tag{72}$$

and substitution into eqn. 71 gives eqn. 14 as the result.

Now we consider the function

$$Q(p, q) = \int_0^\infty e^{-\lambda p} f(\lambda) \frac{\sin \lambda q}{\lambda} d\lambda$$

appearing in eqn. 20, with $f(\lambda)$ taken from eqn. 2. We have

$$\frac{1}{2j}\int_{p-jq}^{p+jq} F(s)ds = \frac{1}{2j}\int_0^\infty f(\lambda)\left[\int_{p-jq}^{p+jq} e^{-\lambda s}ds\right]d\lambda,$$

according to the definition of the function F given by eqn. 70. Substitution of eqn. 72 and integration of each term yield

$$Q(p, q) \sim \frac{m}{k_1}\left(\theta - \frac{m\sin\theta}{k_1 r} + \ldots\right) = \frac{m}{k_1}\left(\operatorname{arctg}\frac{q}{p} - \frac{m}{k_1}\frac{q}{p^2+q^2} + \ldots\right) \tag{73}$$

as a result, where θ and r are given by eqns. 15.

REFERENCES

1. W. G. Deuring, *Induced losses in steel plates in the presence of an alternating current*, Trans. AIEE, vol. 76. pt. III, June 1957, pp. 166—171.
2. P. Jezierski, *Analiza skuteczności ekranowania elektromagnetycznego silnych przemiennych pól elektromagnetycznych*, Rozprawy Elektrotechn., vol. XVI, No. 1—2, 1970, pp. 45—60.
3. M. Krakowski, *Active power loss in the ferromagnetic medium due to currents in a multi-conductor system*, Archiwum Elektrotechn., vol. XIX, No. 1, 1970, pp. 85—105.
4. M. Krakowski, *Distribution of active power on surface of ferromagnetic medium due to currents in parallel conductors*, Archiwum Elektrotechn., vol. XIX, No. 3, 1970, pp. 525—538.
5. M. Krakowski, *Shielding effect in a system due to currents in parallel conductors*, Archiwum Elektrotechn. vol. XXI, No. 1, 1972 pp. 107—123.
6. M. Krakowski, *Active power in the ferromagnetic medium due to current in a cylindrical conductor*, Archiwum Elektrotechn. vol. XXI, No. 3, 1972, pp. 523—530.
7. M. Krakowski, *Eddy current losses in a shielded or unshielded ferromagnetic solid due to currents in ribbon conductors*, Archiwum Elektrotechn., vol. XXII, No. 2, 1973, pp. 333—350.

8. M. Krakowski, *On certain improper integrals*, Zastosowania Matematyki, vol. XII, No. 2, 1971, pp. 187—194.
9. M. Krakowski, *Impedancje liniowych obwodów elektrycznych*, Rozprawy Elektrotechn., vol. 18, No. 3, 1972, pp. 443—457.
10. A. N. Kravczenko, L. P. Niżnik, *Elektromagnitnoe pole i poteri sistemy pramolineinych beskonecznych dlinnych provodov s peremennym tokom*, Naukova dumka, Kiev, 1967, pp. 61—72.
11. H. Poritsky, R. P. Jerrard, *Eddy-current losses in a semi-infinite solid due to a nearby alternating current*, Trans. AIEE, vol. 73, pt. I, May 1954, pp. 97—106.
12. A. Timotin, A. Tugulea, C. Fluerasu, *Quasi-stationary field of straight conductors through which a.c. flows in the presence of a plane shield of finite thickness*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Electrotechn. et Energ., vol. 11, No. 3, 1966, pp. 307—327.
13. J. Turowski, *Straty i lokalne przegrzania wywołane strumieniami rozproszenia*, Zesz. Nauk. Polit. Łódzkiej Elektryka, No. 11, 1963, pp. 89—179.
14. J. Turowski, *Wzór na straty mocy w kadziach nieekranowanych wielkich transformatorów jednofazowych*, Rozprawy Elektrotechn., vol. 15, No. 1, 1969, pp. 149—176.
15. J. Turowski, *Elektrodynamika techniczna*, WNT, 1968.

M. KRAKOWSKI

STRATY WIROPRĄDOWE WYWOŁANE W EKRANOWANYCH LUB NIEEKRANOWANYCH CIAŁACH FERROMAGNETYCZNYCH PRZEZ PRĄDY SINUSOIDALNE W PRZEWODACH RÓWNOLEGŁYCH

Streszczenie

W pracy przedstawiono metodę obliczania strat wiroprądowych wywołanych w ekranowanych lub nieekranowanych ścianach ferromagnetycznych przez prądy sinusoidalne płynące w równoległych przewodach walcowych lub taśmowych. Straty wiroprądowe wyrażono w zależności od rezystancji zewnętrznych i wzajemnych przewodów i wyznaczono te rezystancje dla przewodów równoległych do ekranowanej lub nieekranowanej ściany ferromagnetycznej. Rozpatrzono również rozkład strat wiroprądowych na powierzchni ściany.

W rozważaniach przyjęto założenie upraszczające, że przenikalność magnetyczna ciał ferromagnetycznych jest wielkością stałą. Na podstawie otrzymanych wyników stwierdzono, że straty wiroprądowe w badanym układzie zależą nieznacznie od przenikalności magnetycznej, co usprawiedliwia przyjęcie tego założenia

Praca zawiera przykłady obliczeń, a niektóre wyniki porównano z danymi eksperymentalnymi.

M. KRAKOWSKI

PERTES DE COURANTS DE FOUCAULT DANS LES CORPS FERROMAGNÉTIQUES BLINDÉS OU NON BLINDÉS PROVOQUÉES PAR LES COURANTS SINUSOÏDAUX DANS LES CONDUCTEURS PARALLÈLES

Résumé

Dans l'étude on a présenté la méthode de calculer les pertes de courants de Foucault dans les parois ferromagnétiques blindés ou non blindés provoquées par les courants sinusoïdaux coulant dans les conducteurs parallèles cylindriques ou en bandes. Les pertes de courants de Foucault ont été exprimées par rapport aux résistances extérieures et mutuelles des conducteurs, et on a déterminé ces résistances pour les conducteurs parallèles à la paroi ferromagnétique blindée ou non blindée. On a etudié aussi la répartition des pertes de courants de Foucault sur la surface de la paroi.

Pour simplifier les délibérations on a admis l'hypothèse que la perméabilité magnétique des corps ferromagnétiques est constante. Les résultats obtenus nous ont amené à la conclusion que les pertes de courants de Foucault dans le système examiné dépendent un peu de la perméabilité magnétique, ce qui autorise a admettre cette hypothèse comme valable.

Dans l'étude on a cité les exemples des calculs et on a comparé certains résultats obtenus avec les données expérimentales.

M. KRAKOWSKI

WIRBELSTROMVERLUSTE HERVORGERUFENE IN VERSCHIRMTEN UND NICHTVERSCHIRMTEN FERROMAGNETSTOFFEN DURCH SINUSSTRÖME IN PARALLELLEITUNGEN

Zusammenfassung

In vorliegender Arbeit wird eine Berechnungsmethode der Wirbelstromverluste behandelt, die in verschirmten und nichtverschirmten ferromagnetischen Wänden zufolge der in parallelen Walz- und Bandleitungen durchfließenden Sinusströme entstehen. Die Wirbelstromverluste wurden in Abhängigkeit von äußeren Resistanzen und Gegenresistanzen der Leitungen ausgedrückt; sie wurden auch für die zu den verschirmten und nichtverschirmten Ferromagnetwänden parallel verlaufenden Leitungen bestimmt.

Bei den Erwägungen wurde zwecks Vereinfachung vorausgesetzt, daß die magnetische Permeabilität der Ferromagnetstoffe eine konstante Größe sei. Auf Grund der gewonnenen Ergebnisse wurde festgestellt, daß die Wirbelstromverluste im untersuchten System nur im geringen Maße von der ferromagnetischen Permeabilität abhängen, was die angenommene Voraussetzung rechtfertigt.

Die Arbeit enthält Berechnungsbeispiele, und manche Untersuchungsergebnisse wurden mit den empirisch gewinnenen Daten verglichen

М. КРАКОВСКИ

ПОТЕРИ ОТ ВИХРЕВЫХ ТОКОВ НАВЕДЕННЫХ В ЭКРАНИРОВАННЫХ ИЛИ НЕЭКРАНИРОВАННЫХ ФЕРРОМАГНЕТИКАХ СИНУСОИДАЛЬНЫМИ ТОКАМИ ПРОТЕКАЮЩИМИ В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОВОДАХ

Резюме

В труде приведен метод вычисления потерь от вихревых токов наведенных в экранированных или неэкранированных ферромагнитных стенках синусоидальными токами протекающими в параллельных проводах круглого или плоского сечения. Потери от вихревых токов выражены в зависимости от внешних и взаимных сопротивлений проводов, которые определены для проводов параллельных экранированной или неэкранированной ферромагнитной стенке. Рассмотрено также распределение потерь от вихревых токов на поверхности стенки.

При рассуждении принято упрощение, заключающееся в предпосылке постоянства магнитной проницаемости ферромагнетика. На основании полученных результатов констатировано, что потери от вихревых токов в исследуемой системе зависят незначительно от магнитной проницаемости. Принятие упомянутого упрощения является таким образом обоснованным.

В труде приведены примеры расчетов, а некоторые из результатов сравнены с полученными экспериментально.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 2, ss. 269—286

621.3—181.4

Współczynniki linearyzujące do obliczeń impedancji i strat mocy w ekranowanych płytach ferromagnetycznych

JACEK GIERAS (POZNAŃ)

Instytut Elektrotechniki Przemysłowej Politechniki Poznańskiej

WOJCIECH JÓZEFOWICZ (POZNAŃ)

Środowiskowy Ośrodek Informatyki Politechniki Poznańskiej

Otrzymano 29.6.1974

Wyznaczono analityczny opis rozkładu jednowymiarowego pola elektromagnetycznego w ekranowanej półprzestrzeni ferromagnetycznej. Nieliniową przenikalność magnetyczną oraz straty na okresowe przemagnesowywanie uwzględniono metodą zbliżoną do metody Nejmana, podając jednocześnie koncepcję zastąpienia masywnego środowiska ferromagnetycznego, przy powierzchniowym natężeniu pola magnetycznego większym od natężenia krytycznego, dwoma umyślonymi warstwami przewodzącymi o monotonicznie rosnącej oraz monotonicznie malejącej przenikalności magnetycznej. Na podstawie rozkładu pola elektromagnetycznego wyprowadzono ogólne zależności na wypadkową impedancję i straty mocy w ekranowanych płytach ferromagnetycznych. Podano ilustrację graficzną — rys. 6 oraz rys. 7 — wpływu nieliniowych własności półprzestrzeni ferromagnetycznej na wartości współczynników linearyzujących k_R — dla rezystancji i strat mocy czynnej oraz k_x — dla reaktancji i strat mocy biernej przy różnych grubościach ekranu.

1. WPROWADZENIE

Analiza pola elektromagnetycznego w środowisku ferromagnetycznym pokrytym przewodzącą prąd warstwą para- lub diamagnetyczną jest głównym zagadnieniem w obliczeniach ekranów elektromagnetycznych, między innymi w przypadkach:

— ekranowania kadzi transformatorów dużej mocy [8];
— pokrywania warstwą miedzi masywnych ferromagnetycznych obwodów wtórnych indukcyjnych silników wirujących oraz liniowych;
— nagrzewania indukcyjnego elementów stalowych, kiedy silnie nagrzana warstwa powierzchniowa traci własności ferromagnetyczne [7];
— projektowania indukcyjnych mierników grubości powłok galwanicznych pokrywających elementy ferromagnetyczne.

Dokładne zarówno pod względem matematycznym jak i fizycznym rozwiązanie równań Maxwella dla środowiska dwuwarstwowego złożonego z warstwy nieferromagnetycznej oraz półprzestrzeni ferromagnetycznej nawet w przypadku fali płaskiej jest praktycznie niewykonalne [8]. Problem upraszcza się, jeżeli założyć, że półprzestrzeń ferromagne-

tyczna, podobnie jak i warstwa zewnętrzna, ma stałą przenikalność magnetyczną [5, 6]. Przybliżone zależności na wypadkową impedancję przewodnika dwuwarstwowego przy założeniu zmiennej przenikalności magnetycznej półprzestrzeni ferromagnetycznej można uzyskać opierając się na wynikach np. metody Nejmana [2, 4]. W pracy niniejszej wyznaczono parametry zastępcze ekranowanych płyt ferromagnetycznych umieszczonych w jednowymiarowym polu elektromagnetycznym uwzględniając nieliniowość za pomocą założeń metody Nejmana [5], po wprowadzeniu pewnych modyfikacji.

WYKAZ OZNACZEŃ

a — stosunek maksymalnego kąta strat histerezowych do maksymalnej przenikalności magnetycznej [rad]; szerokość ekranowanej płyty ferromagnetycznej [m];

a_R, a_X — współczynniki rezystancji i strat mocy czynnej oraz reaktancji i strat mocy biernej uwzględniające zmienną przenikalność magnetyczną i straty na okresowe przemagnesowywanie w środowisku ferromagnetycznym;

d — grubość ekranu [m];

$\underline{E}_{m\mathrm{Fe}}, \underline{E}_m$ — natężenie pola elektrycznego w ferromagnetyku oraz w ekranie (wartości maksymalne w czasie) [V/m];

$\underline{E}_{ms\mathrm{Fe}}, \underline{E}_{ms}$ — natężenie pola elektrycznego na powierzchni środowiska ferromagnetycznego oraz ekranu [V/m];

$\underline{H}_{m\mathrm{Fe}}, \underline{H}_m$ — natężenie pola magnetycznego w środowisku ferromagnetycznym oraz w ekranie [A/m];

$\underline{H}_{ms\mathrm{Fe}}, \underline{H}_{ms}$ — natężenie pola magnetycznego na powierzchni środowiska ferromagnetycznego oraz ekranu [A/m];

$k_{\mathrm{Cu}} = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\gamma_{\mathrm{Cu}}}{2}}$ — współczynnik tłumienia fali elektromagnetycznej w ekranie $\left[\frac{1}{\mathrm{m}}\right]$;

$k_s = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\mu_{rs}\gamma}{2}}$ — współczynnik tłumienia fali elektromagnetycznej w środowisku ferromagnetycznym dla powierzchniowej przenikalności magnetycznej $\left[\frac{1}{\mathrm{m}}\right]$;

k_R, k_X — współczynniki rezystancji i strat mocy czynnej oraz reaktancji i strat mocy biernej w środowisku ferromagnetycznym ekranowanym;

l — długość ekranowanej płyty ferromagnetycznej [m];

m_1, m_2 — współczynniki w równaniu aproksymującym charakterystykę magnesowania dla silnych $H_{ms\mathrm{Fe}} > H_{mkr}$ oraz słabych $H_{ms\mathrm{Fe}} \leqslant H_{mkr}$ natężeń pola magnetycznego;

$\underline{r}_{1,2}$ — pierwiastki równania charakterystycznego dla umyślonego środowiska I;

$\underline{S}_z = \Delta p + j\Delta q$ — składowa normalna wektora Poyntinga $\left[\frac{\text{VA}}{\text{m}^2}\right]$;

t_1, t_2, t_{2max} — współczynniki w równaniach aproksymujących przebiegi $\mu_r = f(z)$ oraz $\Psi = f(z)$;

$\underline{v}_{1,2}$ — pierwiastki równania charakterystycznego dla umyślonego środowiska II;

$\underline{Z} = R + jX$ — impedancja ekranowanej płyty ferromagnetycznej [Ω];

$\underline{z} = r + jx$ — jednostkowa impedancja [Ω];

z_m, z_p, z_{pmax} — grubości umyślonych środowisk I oraz II [m];

$\underline{\alpha}_{Cu} = \sqrt{j\omega\mu_0\gamma_{Cu}}$ — zespolony współczynnik tłumienia fali elektromagnetycznej w ekranie $\left[\frac{1}{\text{m}}\right]$;

γ_{Cu}, γ — konduktywności ekranu oraz środowiska ferromagnetycznego $\left[\frac{\text{S}}{\text{m}}\right]$;

μ_0 — przenikalność magnetyczna próżni $\left(0{,}4\pi \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{H}}{\text{m}}\right)$;

μ_r — względna przenikalność magnetyczna (μ_{rmax} — maksymalna, μ_{rs} — powierzchniowa, μ_{rp} — początkowa);

Ψ — kąt wyrażający straty na okresowe przemagnesowywanie, nazywany również kątem strat histerezowych (Ψ_{max} — maksymalny, Ψ_s — powierzchniowy, Ψ_p — początkowy);

ω — pulsacja przebiegów elektrycznych i magnetycznych.

2. CHARAKTERYSTYKI MAGNESOWANIA STALI KONSTRUKCYJNYCH I ICH APROKSYMACJA

Ekranowaniu podlegają z reguły elementy wykonane ze stali konstrukcyjnych zwykłej oraz podwyższonej jakości. Dla zbadania własności magnetycznych różnych gatunków stali konstrukcyjnych wykonano pomiary ich charakterystyk magnesowania $\mu_r = f(H_{mFe})$ oraz $\Psi = f(H_{mFe})$ [1]. Charakterystyki magnesowania kilku gatunków badanych stali przedstawiono na rys. 1 oraz rys. 2. Jak widać, przebiegi względnej przenikalności magnetycznej μ_r oraz kąta strat histerezowych Ψ w funkcji natężenia pola magnetycznego H_{mFe} są zbliżone do siebie i przyjmując za wielkość odniesienia μ_r, można w przybliżeniu uważać, że dla kąta Ψ istnieje tylko inna skala na osi rzędnych. Współczynnik skali można wyrazić jako:

$$a = \frac{\Psi_{max}}{\mu_{rmax}} \text{ [rad]}. \tag{1}$$

Aproksymacja charakterystyk magnesowania powinna odznaczać się możliwie dużą dokładnością w szerokim zakresie zmian natężenia pola magnetycznego, prostą postacią równania aproksymującego oraz szybkim i łatwym sposobem wyznaczenia stałych współczynników w równaniach aproksymujących.

Wymagania te spełnia prostoliniowa aproksymacja przeliczonych charakterystyk magnesowania $\mu_r H_{mFe}^2 = f(H_{mFe})$ — rys. 1 o równaniu:

$$\mu_r H_{mFe}^2 = a_\mu (H_{mFe} - b_\mu).$$

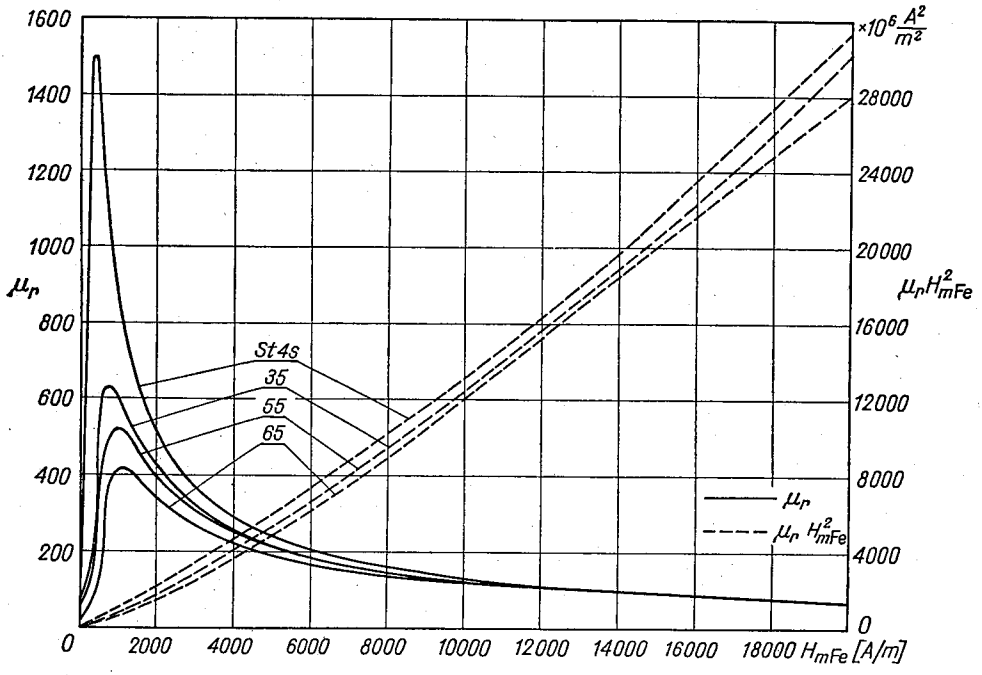
Względna przenikalność magnetyczna wynosi zatem

$$\mu_r = a_\mu \frac{1}{H_{mFe}} \left(1 - \frac{b_\mu}{H_{mFe}}\right) \approx a_\mu c_\mu H_{mFe}^{\frac{b_\mu}{b_\mu + d_\mu} - 1} = a_\mu c_\mu H_{mFe}^{-m_1}, \tag{2}$$

gdzie

$$m_1 = 1 - \frac{b_\mu}{b_\mu + d_\mu},$$

przy czym stałe a_μ, c_μ, d_μ spełniają nierówności: $a_\mu \cdot c_\mu < 1$, $d_\mu > b_\mu$. Parametr m_1 dla stali konstrukcyjnej zwykłej jakości przyjmuje wartość 0,9...0,95, natomiast dla stali podwyższonej jakości — około 0,8...0,9.



Rys. 1. Charakterystyki magnesowania $\mu_r = f(H_{mFe})$ oraz $\mu_r H_{mFe}^2 = f(H_{mFe})$ stali konstrukcyjnych

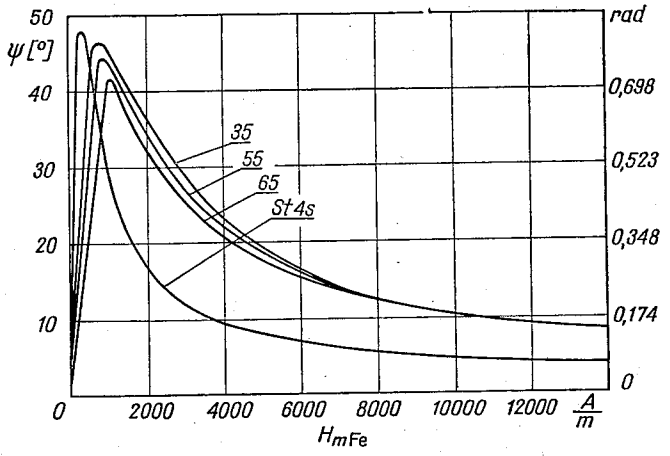
Zależność (2) jest słuszna — jak wynika z prostoliniowej aproksymacji przeliczonych charakterystyk magnesowania zamieszczonych na rys. 1 — dopiero powyżej krytycznej wartości natężenia pola magnetycznego $H_{mFe} > H_{mkr}$. W zakresie pól słabych $H_{mFe} \leqslant H_{mkr}$ natomiast — z uwagi na punkt przegięcia charakterystyki magnesowania $\mu_r = f(H_{mFe})$ —

do dobrych wyników prowadzi aproksymacja linią prostą przechodzącą przez początek układu współrzędnych:

$$\mu_r = e_\mu H_{mFe}^{-m_2}, \tag{3}$$

przy czym parametr $m_2 = -1$ dla wszystkich ferromagnetyków.

Analogiczną budowę mają równania aproksymujące dla kąta Ψ wyrażającego straty na okresowe przemagnesowywanie; można również uzyskać je z równań (2) i (3) dla względnej przenikalności magnetycznej wykorzystując związek (1).



Rys. 2. Zależność kąta ψ, wyrażającego straty na okresowe przemagnesowywanie, od natężenia pola magnetycznego

3. ZMIANY PRZENIKALNOŚCI MAGNETYCZNEJ, KĄTA STRAT HISTEREZOWYCH ORAZ NATĘŻENIA POLA MAGNETYCZNEGO W GŁĄB EKRANOWANEGO ŚRODOWISKA FERROMAGNETYCZNEGO

Szeroko spotykany w praktyce przypadek ekranowania płyt ferromagnetycznych o grubości równej co najmniej około 2...3-krotnej równoważnej głębokości wnikania pola elektromagnetycznego można sprowadzić do półprzestrzeni ferromagnetycznej pokrytej warstwą dobrze przewodzącego para- lub diamagnetyka. Przyjmuje się, że natężenie jednowymiarowego pola magnetycznego H_{ms} na powierzchni ekranu jest wielkością znaną.

Przenikalność magnetyczna w ekranie, będącym ośrodkiem liniowym, wzdłuż współrzędnej z jest stała i praktycznie równa przenikalności magnetycznej próżni.

W środowisku ferromagnetycznym natężenie pola magnetycznego H_{mFe} będzie wraz ze współrzędną z monotonicznie malało, przyjmując na pewnej głębokości wartość zerową. Zmienność względnej przenikalności magnetycznej μ_r oraz kąta Ψ można przewidzieć na podstawie charakterystyk magnesowania $\mu_r = f(H_{mFe})$ oraz $\Psi = f(H_{mFe})$.

Dla silnych pól magnetycznych $H_{msFe} > H_{mkr}$ środowisko ferromagnetyczne celowo jest zastąpić dwoma fikcyjnymi środowiskami nieliniowymi o skończonych grubościach, takimi aby:

— w środowisku zewnętrznym I o grubości z_m (rys. 3a) względna przenikalność magnetyczna μ_r oraz kąt Ψ monotonicznie rosły od wartości powierzchniowych do wartości maksymalnych przy $H_{mFe} = H_{mkr}$, tzn.:

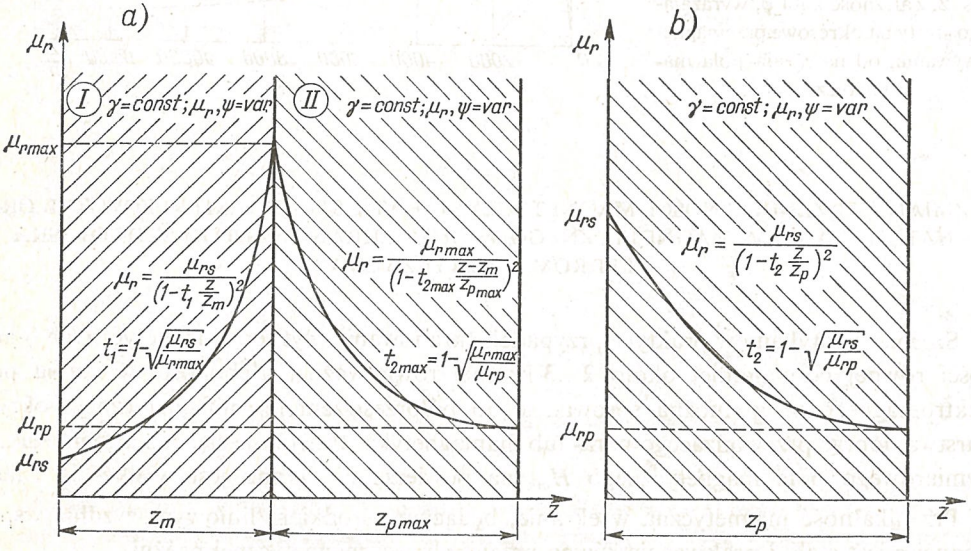
$$\mu_{rI}(z) = \frac{\mu_{rs}}{\left(1 - t_1 \frac{z-d}{z_m}\right)^2}, \tag{4}$$

$$\Psi_I(z) = \frac{\Psi_s}{\left(1 - t_1 \frac{z-d}{z_m}\right)^2}, \tag{5}$$

— w środowisku wewnętrznym II o grubości z_{pmax} (rys. 3b) względna przenikalność magnetyczna μ_r oraz kąt Ψ monotonicznie malały od wartości maksymalnych do wartości początkowych przy $H_{mFe} = 0$, tzn.

$$\mu_{rII}(z) = \frac{\mu_{rmax}}{\left(1 - t_{2max} \frac{z - z_m - d}{z_{pmax}}\right)^2}, \tag{6}$$

$$\Psi_{II}(z) = \frac{\Psi_{max}}{\left(1 - t_{2max} \frac{z - z_m - d}{z_{pmax}}\right)^2}. \tag{7}$$



Rys. 3. Przewidywana zmienność względnej przenikalności magnetycznej w głąb środowiska ferromagnetycznego: a) dla pól silnych $H_{msFe} > H_{mkr}$, b) dla pól słabych $H_{msFe} \leqslant H_{mkr}$

Umyślona grubość z_m środowiska I będzie oczywiście zależała od wartości natężenia pola magnetycznego na powierzchni H_{msFe}.
Współczynnik

$$t_1 = 1 - \sqrt{\frac{\mu_{rs}}{\mu_{rmax}}} \approx 1 - \sqrt{\frac{\Psi_s}{\Psi_{max}}} \tag{8}$$

musi być zawarty w przedziale $0 < t_1 < 1$ i nie może przyjmować wartości $t_1 = 1$, gdyż w takim przypadku wielkości μ_{rI} i Ψ_I dla $z = z_m + d$ dążyłyby do nieskończoności. Współczynnik

$$t_{2max} = 1 - \sqrt{\frac{\mu_{rmax}}{\mu_{rp}}} \approx 1 - \sqrt{\frac{\Psi_{max}}{\Psi_p}} \tag{9}$$

jest mniejszy od zera, gdyż stosunek $\frac{\mu_{rmax}}{\mu_{rp}}$ np. dla stali konstrukcyjnych wynosi od 5 do 20, dla żelaza technicznie czystego natomiast — od 15 do 30.

Zespolona względna przenikalność magnetyczna $\mu_r = f(z)$ oraz natężenie pola magnetycznego $H_{mFe} = f(z)$ — w oparciu o równania (2) i (3) — wyrażają się zależnościami:
— dla $d \leqslant z \leqslant d + z_m$

$$\mu_{rI}(z) e^{-j\psi_I(z)} = \frac{\mu_{rs}}{\left(1 - t_1 \frac{z-d}{z_m}\right)^2} \left[\cos \frac{\Psi_s}{\left(1 - t_1 \frac{z-d}{z_m}\right)^2} - j \sin \frac{\Psi_s}{\left(1 - t_1 \frac{z-d}{z_m}\right)^2} \right], \tag{10}$$

$$H_{mFeI}(z) = H_{msFe} \left(1 - t_1 \frac{z-d}{z_m}\right)^{\frac{2}{m_1}}; \tag{11}$$

— dla $d + z_m \leqslant z \leqslant d + z_m + z_{pmax}$

$$\mu_{rII}(z) e^{-j\psi_{II}(z)} = \frac{\mu_{rmax}}{\left(1 - t_{2max} \frac{z - z_m - d}{z_{pmax}}\right)^2} \left[\cos \frac{\Psi_{max}}{\left(1 - t_{2max} \frac{z - z_m - d}{z_{pmax}}\right)^2} + \right.$$

$$\left. - j \sin \frac{\Psi_{max}}{\left(1 - t_{2max} \frac{z - z_m - d}{z_{pmax}}\right)^2} \right]; \tag{12}$$

$$H_{mFeII}(z) = H_{mkr} \left(1 - t_{2max} \frac{z - z_m - d}{z_{pmax}}\right)^{\frac{2}{m_2}}. \tag{13}$$

Dla słabych pól magnetycznych $H_{msFe} \leqslant H_{mkr}$ środowisko ferromagnetyczne można zastąpić pojedynczą warstwą o grubości z_p, w której przenikalność magnetyczna oraz kąt strat histerezowych monotonicznie maleją do wartości początkowych, tzn.:

$$\mu_r(z) = \frac{\mu_{rs}}{\left(1 - t_2 \frac{z-d}{z_p}\right)^2}, \tag{14}$$

$$\Psi(z) = \frac{\Psi_s}{\left(1 - t_2 \frac{z-d}{z_p}\right)^2}, \tag{15}$$

gdzie

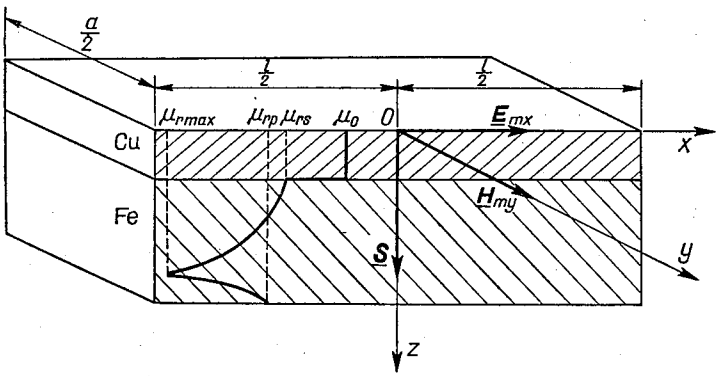
$$t_2 = 1 - \sqrt{\frac{\mu_{rs}}{\mu_{rp}}} \approx 1 - \sqrt{\frac{\Psi_s}{\Psi_p}}. \tag{16}$$

4. ANALITYCZNE ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ FALI PŁASKIEJ W ŚRODOWISKU FERROMAGNETYCZNYM EKRANOWANYM

Równania pola elektromagnetycznego w ekranowanej półprzestrzeni ferromagnetycznej zostaną rozwiązane przy następujących założeniach:

a) promień krzywizny półprzestrzeni jest na tyle duży w porównaniu z grubością ekranu oraz głębokością wnikania pola elektromagnetycznego, że rozważania można prowadzić w prostokątnym układzie współrzędnych 0, x, y, z,

b) fala elektromagnetyczna padająca jest falą płaską spolaryzowaną, tzn. posiada tylko składową magnetyczną H_{msy}, elektryczną $\underline{E}_{msx}$ oraz zwrot wektora Poyntinga $\vec{\underline{S}}$ jest zgodny ze współrzędną z — rys. 4,



Rys. 4. Ferromagnetyczna płyta ekranowana w jednowymiarowym polu elektromagnetycznym

c) konduktywność ekranu i półprzestrzeni ferromagnetycznej nie zależy od rozkładu temperatury wzdłuż współrzędnej z,

d) anizotropia ekranu i półprzestrzeni ferromagnetycznej jest pomijalnie mała,

e) zmienność czasowa wszystkich wielkości jest sinusoidalna,

f) zespolona przenikalność magnetyczna wzdłuż współrzędnej z zmienia się według zależności (10) i (12).

Dla ogólnego przypadku zarówno pól silnych jak i słabych, półprzestrzeń ferromagnetyczną rozważa się jako dwie warstwy nieliniowe o grubościach z_m i z_p, z tym, że dla pól silnych $z_p = z_{pmax}$, $t_2 = t_{2max}$, $\mu_{rsII} = \mu_{rsmax}$, $\Psi_{sII} = \Psi_{max}$, $k_{sII} = k_{smax}$, $H_{msFeII} = H_{mkr}$, dla pól słabych natomiast — $z_m = 0$, $\mu_{rsII} = \mu_{rs}$, $\Psi_{sII} = \Psi_s$, $k_{sII} = k_s$, $H_{msFeII} = H_{msFe}$. Pozwala to na wprowadzenie jednakowych równań rozkładu pola elektromagnetycznego dla dowolnej wartości natężenia pola magnetycznego na powierzchni półprzestrzeni ferromagnetycznej.

Dodatkowo przyjmuje się, że straty na okresowe przemagnesowywanie w środowisku ferromagnetycznym przy zmieniającym się kącie Ψ wzdłuż współrzędnej z są w przybli-

żeniu równe stratom dla średniego kąta Ψ w przedziałach $\langle d, d+z_m\rangle$, $\langle d+z_m, d+z_m+z_{pmax}\rangle$ lub $\langle d, d+z_p\rangle$, który odpowiednio wynosi:

$$\frac{1}{z_m}\int_d^{d+z_p}\frac{\Psi_s}{\left(1-t_1\frac{z-d}{z_m}\right)^2}dz=\frac{\Psi_s}{1-t_1},\qquad \frac{1}{z_{pmax}}\int_{d+z_m}^{d+z_m+z_{pmax}}\frac{\Psi_{max}}{\left(1-t_{2max}\frac{z-z_m-d}{z_{pmax}}\right)^2}dz=$$

$$=\frac{\Psi_{max}}{1-t_{2max}},\qquad \frac{1}{z_p}\int_d^{d+z_p}\frac{\Psi_s}{\left(1-t_2\frac{z-d}{z_p}\right)^2}dz=\frac{\Psi_s}{1-t_2}.$$

Równania opisujące płaskie pole elektromagnetyczne w ekranowanym przewodniku ferromagnetycznym są następujące:

— dla $0\leqslant z\leqslant d$

$$\frac{\partial^2\underline{H}_{my}}{\partial z^2}=\underline{\alpha}_{Cu}^2\underline{H}_{my}, \tag{17a}$$

$$\underline{E}_{mx}=-\frac{1}{\gamma_{Cu}}\frac{\partial\underline{H}_{my}}{\partial z}, \tag{17b}$$

— dla $d\leqslant z\leqslant d+z_m$

$$\frac{\partial^2\underline{H}_{myFeI}}{\partial z^2}=j\omega\mu_0\gamma\frac{\mu_{rs}}{\left(1-t_1\frac{z-d}{z_m}\right)^2}\left(\cos\frac{\Psi_s}{1-t_1}-j\sin\frac{\Psi_s}{1-t_1}\right)\underline{H}_{myFeI}, \tag{18a}$$

$$\underline{E}_{mxFeI}=-\frac{1}{\gamma}\frac{\underline{H}_{myFeI}}{\partial z}, \tag{18b}$$

— dla $d+z_m\leqslant z\leqslant d+z_m+z_p$

$$\frac{\partial^2\underline{H}_{myFeII}}{\partial z^2}=j\omega\mu_0\gamma\frac{\mu_{rsII}}{\left(1-t_2\frac{z-z_m-d}{z_p}\right)^2}\left(\cos\frac{\Psi_{sII}}{1-t_2}-j\sin\frac{\Psi_{sII}}{1-t_2}\right)\underline{H}_{myFeII}, \tag{19a}$$

$$\underline{E}_{mxFeII}=-\frac{1}{\gamma}\frac{\underline{H}_{myFeII}}{\partial z}. \tag{19b}$$

Stosując podstawienia

$$\zeta_1=\ln\left(1-t_1\frac{z-d}{z_m}\right)\quad\text{oraz}\quad\zeta_2=\ln\left(1-t_2\frac{z-d-z_m}{z_p}\right),$$

równania (18a) i (19a) można doprowadzić do postaci równań liniowych niezupełnych o stałych współczynnikach, posiadających następujące równania charakterystyczne:

— dla $d\leqslant z\leqslant d+z_m$

$$\underline{r}^2-\underline{r}-2k_s^2\left(\sin\frac{\Psi_s}{1-t_1}+j\cos\frac{\Psi_s}{1-t_1}\right)\left(\frac{z_m}{t_1}\right)^2=0, \tag{20}$$

— dla $d+z_m \leqslant z \leqslant d+z_m+z_p$

$$\underline{v}^2-\underline{v}-2k_{sII}^2\left(\sin\frac{\Psi_{sII}}{1-t_2}+j\cos\frac{\Psi_{sII}}{1-t_2}\right)\left(\frac{z_p}{t_2}\right)^2=0, \tag{21}$$

o pierwiastkach zespolonych

$$\underline{r}_{1,2}=\frac{1}{2}\left[1\pm\sqrt{1+8k_s^2\left(\frac{z_m}{t_1}\right)^2\sin\frac{\Psi_s}{1-t_1}+j8k_s^2\left(\frac{z_m}{t_1}\right)^2\cos\frac{\Psi_s}{1-t_1}}\right]=r'_{1,2}+jr''_{1,2}, \tag{22}$$

$$\underline{v}_{1,2}=\frac{1}{2}\left[1\pm\sqrt{1+8k_{sII}^2\left(\frac{z_p}{t_2}\right)^2\sin\frac{\Psi_{sII}}{1-t_2}+j8k_{s\,\mathrm{FeII}}^2\left(\frac{z_p}{t_2}\right)^2\cos\frac{\Psi_{sII}}{1-t_2}}\right]=v'_{1,2}+jv''_{1,2}. \tag{23}$$

Rozwiązania ogólne równań rozkładu pola elektromagnetycznego (17a), (17b), (18a), (18b), (19a), (19b) odpowiednio wynoszą:

— dla $0 \leqslant z \leqslant d$

$$\underline{H}_{my}=\underline{A}_{1y}e^{-\underline{\alpha}_{\mathrm{Cu}}z}+\underline{A}_{2y}e^{\underline{\alpha}_{\mathrm{Cu}}z},$$

$$\underline{E}_{mx}=\frac{\underline{\alpha}_{\mathrm{Cu}}}{\gamma_{\mathrm{Cu}}}(\underline{A}_{1y}e^{-\underline{\alpha}_{\mathrm{Cu}}z}-\underline{A}_{2y}e^{\underline{\alpha}_{\mathrm{Cu}}z}),$$

— dla $d \leqslant z \leqslant d+z_m$

$$\underline{H}_{my\mathrm{FeI}}=\underline{B}_{1y\mathrm{I}}e^{\underline{r}_1\varsigma_1}+\underline{B}_{2y\mathrm{I}}e^{\underline{r}_2\varsigma_1},$$

$$\underline{E}_{mx\mathrm{FeI}}=\frac{1}{z_m\gamma}[\underline{r}_1\underline{B}_{1y\mathrm{I}}e^{(\underline{r}_1-1)\varsigma_1}+\underline{r}_2\underline{B}_{2y\mathrm{I}}e^{(\underline{r}_2-1)\varsigma_1}],$$

— dla $d+z_m \leqslant z \leqslant d+z_m+z_p$

$$\underline{H}_{my\mathrm{FeII}}=\underline{B}_{1y\mathrm{II}}e^{\underline{v}_1\varsigma_2}+\underline{B}_{2y\mathrm{II}}e^{\underline{v}_2\varsigma_2},$$

$$\underline{E}_{mx\mathrm{FeII}}=\frac{t_2}{z_p\gamma}[\underline{v}_1\underline{B}_{1y\mathrm{II}}e^{(\underline{v}_1-1)\varsigma_2}+\underline{v}_2\underline{B}_{2y\mathrm{II}}e^{(\underline{v}_2-1)\varsigma_2}].$$

Ponieważ w środowisku ferromagnetycznym II pole elektromagnetyczne wraz ze współrzędną z musi zanikać, więc stała $\underline{B}_{1y\mathrm{II}}=0$. Pozostałe stałe całkowe $\underline{A}_{1y}$, $\underline{A}_{2y}$, $\underline{B}_{1y\mathrm{I}}$, $\underline{B}_{2y\mathrm{I}}$, $\underline{B}_{2y\mathrm{II}}$ w myśl teorii fali płaskiej w środowisku warstwowym muszą być różne od zera i wyznaczyć je można z warunków brzegowych na granicy poszczególnych środowisk. Jednak w klasycznych rozważaniach Nejmana środowisko ferromagnetyczne zostało potraktowane jako jednowarstwowe, w którym:

— dla $H_{ms\mathrm{Fe}} > H_{mkr}$

$$\mu_r(z)=\frac{\mu_{rs}}{\left(1-\dfrac{z-d}{z_m}\right)^2} \quad \text{oraz} \quad \underline{B}_{2y\mathrm{I}}=0,$$

— dla $H_{ms\mathrm{Fe}} \leqslant H_{mkr}$

$$\mu_r(z)=\frac{\mu_{rs}}{\left(1+\dfrac{z-d}{z_m}\right)^2} \quad \text{oraz} \quad \underline{B}_{1y\mathrm{II}}=0$$

Celem wykazania, że mimo przyjęcia zmian zespolonej przenikalności magnetycznej w głąb ferromagnetyka według równań (10) i (12), metoda Nejmana w pewnym zakresie natężenia pola magnetycznego jest i tak obarczona znacznym błędem, przyjęto również, że stała $\underline{B}_{2y1} = 0$. Rozwiązania szczególne równań rozkładu pola elektromagnetycznego w ekranowanym środowisku ferromagnetycznym mają zatem postać:

— dla $0 \leqslant z \leqslant d$

$$\underline{H}_{my} = \frac{1}{\underline{M}_{Cu}}\left[\frac{\underline{\alpha}_{Cu}}{\gamma_{Cu}}\operatorname{ch}\underline{\alpha}_{Cu}(z-d) - \frac{t_1 r_1}{z_m \gamma}\operatorname{sh}\underline{\alpha}_{Cu}(z-d)\right]\underline{H}_{msy}, \tag{24a}$$

$$\underline{E}_{mx} = \frac{1}{\underline{M}_{Cu}}\frac{\underline{\alpha}_{Cu}}{\gamma_{Cu}}\left[\frac{t_1 r_1}{z_m \gamma}\operatorname{ch}\underline{\alpha}_{Cu}(z-d) - \frac{\underline{\alpha}_{Cu}}{\gamma_{Cu}}\operatorname{sh}\underline{\alpha}_{Cu}(z-d)\right]\underline{H}_{msy}, \tag{24b}$$

— dla $d \leqslant z \leqslant d+z_m \quad (H_{msFe} > H_{mkr})$

$$\underline{H}_{myFeI} = \frac{1}{\underline{M}_{Cu}}\frac{\underline{\alpha}_{Cu}}{\gamma_{Cu}}\underline{H}_{msy}\left(1 - t_1\frac{z-d}{z_m}\right)^{r_1} = \underline{H}_{msyFe}\left(1 - t_1\frac{z-d}{z_m}\right)^{r_1}, \tag{25a}$$

$$\underline{E}_{mxFeI} = \frac{t_1 r_1}{z_m \gamma}\frac{1}{\underline{M}_{Cu}}\underline{H}_{msy}\left(1 - t_1\frac{z-d}{z_m}\right)^{r_1-1}, \tag{25b}$$

— dla $d \leqslant z \leqslant d+z_p \quad (H_{msFe} \leqslant H_{mkr})$

$$\underline{H}_{mFeII} = \frac{1}{\underline{M}_{Cu}}\frac{\underline{\alpha}_{Cu}}{\gamma_{Cu}}\underline{H}_{msy}\left(1 - t_2\frac{z-d}{z_p}\right)^{v_2} = \underline{H}_{msyFe}\left(1 - t_2\frac{z-d}{z_p}\right)^{v_2}, \tag{26a}$$

$$\underline{E}_{mxFeII} = \frac{t_2 v_2}{z_p \gamma}\frac{1}{\underline{M}_{Cu}}\frac{\underline{\alpha}_{Cu}}{\gamma_{Cu}}\underline{H}_{msy}\left(1 - t_2\frac{z-d}{z_p}\right)^{v_2-1}, \tag{26b}$$

gdzie:

$$\underline{M}_{Cu} = \frac{\underline{\alpha}_{Cu}}{\gamma_{Cu}}\operatorname{ch}\underline{\alpha}_{Cu}d + \frac{t_1 r_1}{z_m \gamma}\operatorname{sh}\underline{\alpha}_{Cu}d \text{ — w przypadku } H_{msFe} > H_{mkr},$$

$$\underline{M}_{Cu} = \frac{\underline{\alpha}_{Cu}}{\gamma_{Cu}}\operatorname{ch}\underline{\alpha}_{Cu}d + \frac{t_2 v_2}{z_p \gamma}\operatorname{sh}\underline{\alpha}_{Cu}d; \quad \frac{t_1 r_1}{z_m} = \frac{t_2 v_2}{z_p} \text{ — w przypadku } H_{msFe} \leqslant H_{mkr}.$$

Rozkład wartości bezwzględnej składowej stycznej natężenia pola magnetycznego w głąb środowiska ferromagnetycznego wyznaczony z równań (25a) i (26a) musi być zgodny z rozkładem przewidywanym na podstawie charakterystyki magnesowania — równania (12) i (13). Na tej podstawie wyznacza się części rzeczywiste pierwiastków równań charakterystycznych (20) i (21), które wynoszą:

$$r_1' = \frac{2}{m_1}, \tag{27}$$

$$v_2' = \frac{2}{m_2}. \tag{28}$$

Części urojone pierwiastków równań charakterystycznych oraz grubości środowisk I oraz II oblicza się na podstawie zależności (20), (22), (27) lub (21), (23), (28). Po wykonaniu przekształceń otrzymuje się:

$$r_1'' = \frac{4-m_1}{2m_1}\sqrt{1-\left(\frac{m_1}{4-m_1}\right)^2\left[1+8\left(k_s\frac{z_m}{t_1}\right)^2\sin\frac{\Psi_s}{1-t_1}\right]}, \tag{29}$$

$$v_2'' = \frac{4-m_2}{2m_2}\sqrt{1-\left(\frac{m_2}{4-m_2}\right)^2\left[1+8\left(k_{sII}\frac{z_p}{t_2}\right)^2\sin\frac{\Psi_{sII}}{1-t_2}\right]}, \tag{30}$$

$$z_m = \frac{t_1}{k_s}\frac{4-m_1}{2m_1\cos\dfrac{\Psi_s}{1-t_1}}\sqrt{\sqrt{1-\left(\frac{m_1}{4-m_1}\right)^2\cos^2\frac{\Psi_s}{1-t_1}}-\sin\frac{\Psi_s}{1-t_1}}, \tag{31}$$

$$z_p = \frac{t_2}{k_{sII}}\frac{4-m_2}{2m_2\cos\dfrac{\Psi_{sII}}{1-t_2}}\sqrt{\sqrt{1-\left(\frac{m_2}{4-m_2}\right)^2\cos^2\frac{\Psi_{sII}}{1-t_2}}-\sin\frac{\Psi_{sII}}{1-t_2}}. \tag{32}$$

Na podstawie równań (24a), (24b) można wyznaczyć zmianę amplitud oraz kątów przesunięć fazowych natężeń pól magnetycznego i elektrycznego po przejściu przez ekran. Przykładowo, dla ekranu miedzianego o grubości $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ m i płyty ze stali gatunku 55, przy częstotliwościach 50...60 Hz natężenie pola magnetycznego maleje do około 15...30% wartości powierzchniowej, dla ekranu o grubości $0{,}1 \cdot 10^{-3}$ m zaś — tylko do około 45...65% (zależnie od wartości powierzchniowego natężenia pola magnetycznego). W przypadku natężenia pola elektrycznego, zmiany jego amplitudy oraz kąta przesunięcia fazowego dla ekranów o grubości do $1 \cdot 10^{-3}$ m są pomijalnie małe.

5. IMPEDANCJA FALOWA I JEDNOSTKOWE STRATY MOCY

Impedancja ekranowanej płyty ferromagnetycznej o długości l oraz szerokości a wynosi:

$$\underline{Z} = \frac{\int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l}\underline{E}_{msx}\,dx}{\int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a}\underline{H}_{msy}\,dy} = \frac{l}{a}\frac{\underline{E}_{msx}}{\underline{H}_{msy}}. \tag{33}$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$a_R = \frac{r_1' t_1}{z_m k_s} \tag{34a}$$

lub

$$a_R = \frac{v_2' t_2}{z_p k_s} \tag{34b}$$

oraz

$$a_X = \frac{r_1'' t_1}{z_m k_s} \tag{35a}$$

lub

$$a_X = \frac{v_2'' t_2}{z_p k_s} \tag{35b}$$

na podstawie równań (24a), (24b), (33) otrzymuje się ogólny wzór na jednostkową impedancję ($a = l = 1$) środowiska ferromagnetycznego ekranowanego:

$$\underline{z} = \frac{\underline{E}_{msx}}{\underline{H}_{msy}} = (a_R + ja_x)\frac{k_s}{\gamma}\,\frac{\operatorname{ch}\underline{\alpha}_{Cu}d + \dfrac{\underline{\alpha}_{Cu}}{(a_R+ja_X)k_s}\dfrac{\gamma}{\gamma_{Cu}}\operatorname{sh}\underline{\alpha}_{Cu}d}{\operatorname{ch}\underline{\alpha}_{Cu}d + \dfrac{(a_R+ja_X)k_s}{\underline{\alpha}_{Cu}}\dfrac{\gamma_{Cu}}{\gamma}\operatorname{sh}\underline{\alpha}_{Cu}d}.$$

Jeżeli grubość ekranu d jest rzędu dziesiątych części milimetra, co ma miejsce w przeważającej części przypadków praktycznych, funkcje hiperboliczne w równaniach rozkładu pola elektromagnetycznego (24a), (24b), (25a), (25b), (26a), (26b) po rozwinięciu na szeregi Maclaurina w przybliżeniu wynoszą:

$$\operatorname{sh}\underline{\alpha}_{Cu}d \approx (1+j)k_{Cu}d, \tag{36a}$$

$$\operatorname{ch}\underline{\alpha}_{Cu}d \approx 1 + jk_{Cu}^2 d^2. \tag{36b}$$

Uwzględniając uproszczenia (36a), (36b), wyrażenia na jednostkową impedancję falową można doprowadzić do postaci:

$$\underline{z} = r + jx = (k_R + jk_x)\frac{k_s}{\gamma}, \tag{37}$$

gdzie

$$k_R \approx \frac{a_R + (a_R^2 + a_x^2)dk_s\dfrac{\gamma_{Cu}}{\gamma}}{1 + 2a_R dk_s\dfrac{\gamma_{Cu}}{\gamma} + (a_R^2+a_x^2)d^2k_s^2\left(\dfrac{\gamma_{Cu}}{\gamma}\right)^2}, \tag{38}$$

$$k_x \approx \frac{a_x}{1 + 2a_R dk_s\dfrac{\gamma_{Cu}}{\gamma} + (a_R^2+a_x^2)d^2k_s^2\left(\dfrac{\gamma_{Cu}}{\gamma}\right)^2}. \tag{39}$$

W przypadku jednorodnego środowiska ferromagnetycznego, tzn. jeżeli grubość ekranu $d = 0$, wyrażenie (37) przyjmuje postać:

$$\underline{z} = r + jx = (a_R + ja_x)\frac{k_s}{\gamma}, \tag{40}$$

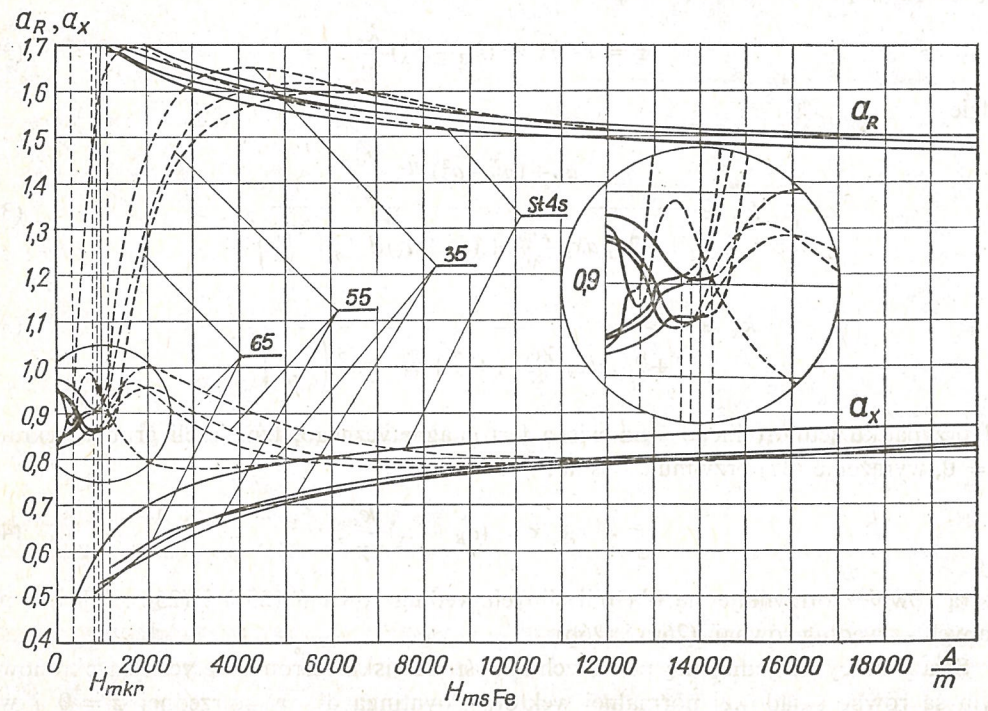
którą również otrzymuje się dla pól silnych według równań (25a) i (25b), lub dla pól słabych — według równań (26a) i (26b).

Straty mocy na jednostkę powierzchni w środowisku ferromagnetycznym ekranowanym są równe składowej normalnej wektora Poyntinga dla współrzędnej $z = 0$ i wynoszą:

$$S_z = \Delta p + j\Delta q = (k_R + jk_x)\frac{H_{ms}^2}{2}\frac{k_s}{\gamma}. \tag{41}$$

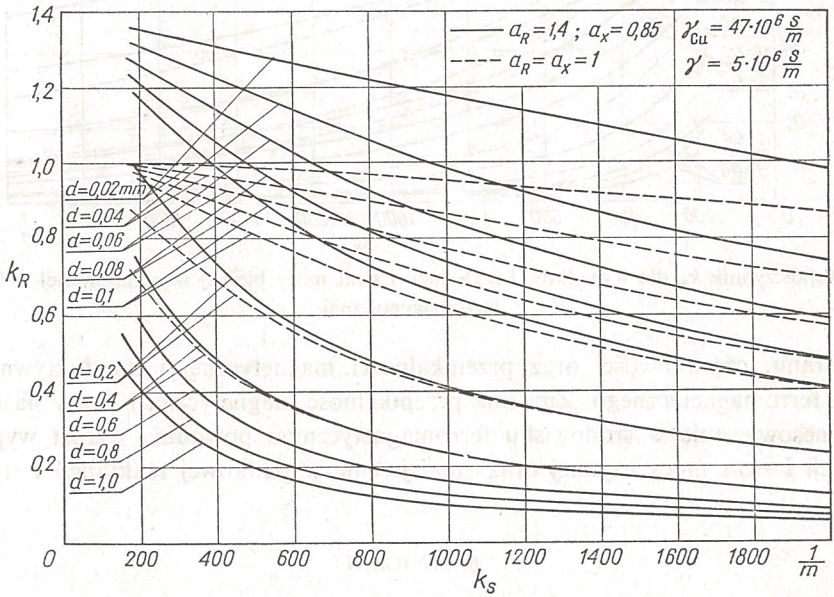
Wartości liczbowe współczynników a_R i a_x uwzględniających zmienną przenikalność magnetyczną oraz straty na okresowe przemagnesowywanie w ferromagnetyku i wnoszących poprawkę do teorii liniowej fali płaskiej wyznaczono na podstawie wyrażeń (34a), (34b), (35a), (35b), (27), (28), (29), (30), (31), (32) dla czterech gatunków stali konstrukcyjnej: 65 — o konduktywności w 293,2 K wynoszącej $4{,}57 \cdot 10^6 \frac{S}{m}$, 55 — o konduktywności $4{,}64 \cdot 10^6 \frac{S}{m}$, 35 — o konduktywności $4{,}5 \cdot 10^6 \frac{S}{m}$ oraz St4s — o konduktywności $6{,}2 \cdot 10^6 \frac{S}{m}$. Obliczenia wykonano dla natężenia pola magnetycznego na powierzchni półprzestrzeni ferromagnetycznej w przedziale $0 \leqslant H_{msFe} \leqslant 20\,000 \frac{A}{m}$ przyjmując w przypadku $H_{msFe} > H_{mkr}$ parametry $m_1 = 0{,}85$ dla stali 65 i 55, $m_1 = 0{,}90$ dla stali 35, $m_1 = 0{,}94$ dla stali St4s oraz w przypadku $H_{msFe} \leqslant H_{mkr}$ parametr $m_2 = -1$ dla wszystkich wymienionych gatunków stali. Wyniki w formie wykresów przedstawiono na rys. 5 (linia ciągła).

Przebiegi funkcji $a_R = f(H_{msFe})$ oraz $a_x = f(H_{msFe})$ charakteryzują się punktami nieciągłości dla natężenia krytycznego H_{mkr}. Nieciągłość ta oczywiście nie ma fizycznego uzasadnienia i wynika z poczynionych uproszczeń matematycznych, głównie z przyjęcia



Rys. 5. Zależność współczynników a_R — dla rezystancji i strat mocy czynnej oraz a_x — dla reaktancji i strat mocy biernej od natężenia pola magnetycznego H_{msFe} na powierzchni środowiska ferromagnetycznego: linia ciągła — według metody Nejmana i po uwzględnieniu zależności (10), (11); linia przerywana — rzeczywiste teoretyczne przebiegi [10]

stałej $\underline{B}_{2yI} = 0$. Dla natężeń pola magnetycznego $H_{msFe} > H_{mkr}$, przy obliczeniu wypadkowej impedancji środowiska ferromagnetycznego nie jest bowiem uwzględniona obecność środowiska II. Błąd ten jest pomijalnie mały, jeżeli $H_{msFe} \gg H_{mkr}$. Natomiast prawidłowe wyniki otrzymuje się dla natężeń pól $H_{msFe} \leqslant H_{mkr}$ (środowisko ferromagnetyczne jednowarstwowe), co potwierdzają pomiary dokonane w pracach [3, 5]. Zatem wyznaczając impedancję środowiska ferromagnetycznego na podstawie rozumowania Nejmana, należy w polach silnych przy zmianach zespolonej przenikalności magnetycznej według równań (10) i (12) konsekwentnie traktować ferromagnetyk jako środowisko dwuwarstwowe ($\underline{B}_{2yI} \neq 0$). Jako środowisko jednowarstwowe w polach silnych można natomiast traktować tylko pod warunkiem, że przebieg przenikalności magnetycznej $\mu_r = f(z)$ jest opisany jednym równaniem w całym zakresie jej zmian od wartości powierzchniowej poprzez



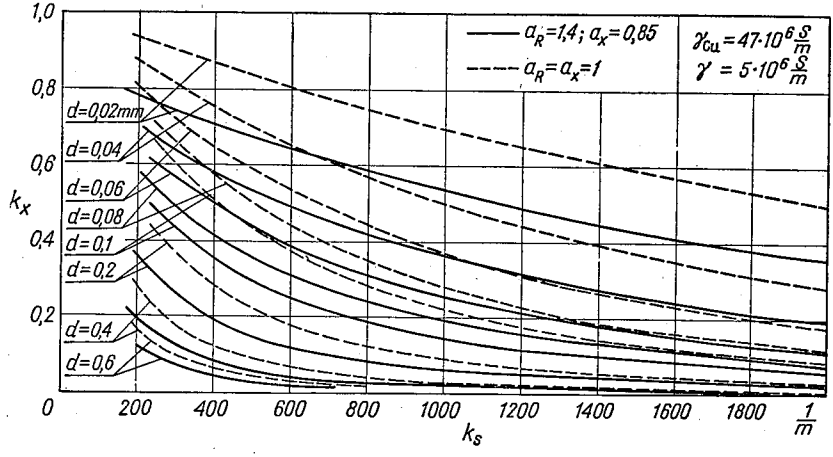
Rys. 6. Współczynnik k_R dla wypadkowej rezystancji i strat mocy czynnej w ekranowanej półprzestrzeni ferromagnetycznej

maksymalną do początkowej, np. równaniem o budowie analogicznej do równania Klossa w teorii maszyn indukcyjnych. Należy zaznaczyć, że przedstawienie przebiegów współczynników a_R, $a_x = f(m_{1,2})$, tzn. jako funkcji wykładnika potęgi $m_{1,2}$ w równaniach aproksymujących charakterystyki magnesowania różnych materiałów ferromagnetycznych — np. w pracy [5], a także innych — nie ujawnia ich nieciągłości dla $H_{msFe} = H_{mkr}$.

Rzeczywiste teoretyczne przebiegi współczynników a_R, $a_x = f(H_{msFe})$ wyznaczone na podstawie sprowadzenia środowiska ferromagnetycznego do dwóch warstw umyślonych środowisk nieliniowych ($\underline{B}_{2yI} \neq 0$) zaznaczono na rys. 5 linią przerywaną [10].

Współczynniki linearyzujące dla wypadkowej rezystancji i strat mocy czynnej k_R — wzór (38) oraz reaktancji i strat mocy biernej k_x — wzór (39) półprzestrzeni ferromagne-

tycznej ekranowanej, w zależności od współczynnika tłumienia k_s przy $d = \text{const}$, $f = 50...60$ Hz, $\gamma = 5 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}}$, $\gamma_{\text{Cu}} = 47 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}}$, przedstawiono na rys. 6 oraz 7. Obliczenia wykonano z uwzględnieniem nieliniowych własności półprzestrzeni ferromagnetycznej przyjmując współczynniki $a_R = 1{,}45$, $a_x = 0{,}85$ oraz bez ich uwzględnienia — przyjmując $a_R = a_x = 1$. Jak widać, współczynniki k_R, k_x maleją wraz ze wzrostem gru-



Rys. 7. Współczynnik k_x dla wypadkowej reaktancji i strat mocy biernej w ekranowanej półprzestrzeni ferromagnetycznej

bości ekranu, częstotliwości oraz przenikalności magnetycznej i konduktywności środowiska ferromagnetycznego. Zmienna przenikalność magnetyczna i straty na okresowe przemagnesowywanie w środowisku ferromagnetycznym powodują wzrost wypadkowej rezystancji i strat mocy czynnej oraz zmniejszenie wypadkowej reaktancji i strat mocy biernej.

6. WNIOSKI

Przy wyznaczaniu parametrów zastępczych środowisk ferromagnetycznych, metoda uwzględnienia zmiennej przenikalności magnetycznej i strat na okresowe przemagnesowywanie oparta o założenia Nejmana [5] może być stosowana dla powierzchniowych natężeń pola magnetycznego nie większych od natężenia krytycznego $H_{ms\text{Fe}} \leqslant H_{mkr}$ lub dużo większych od natężenia krytycznego $H_{ms\text{Fe}} \gg H_{mkr}$. W zastosowaniu do analizy obiektów elektrodynamicznych, w których powierzchniowe natężenie pola magnetycznego zmienia się w szerokim zakresie, w szczególności od zera do wartości większej od natężenia krytycznego, dokładność metody Nejmana jest zbyt mała.

W obliczeniach impedancji i strat mocy w ekranowanych płytach ferromagnetycznych — zależności (37) i (41) — przy częstotliwościach energetycznych i ekranach miedzianych nieliniowość przenikalności magnetycznej i straty na okresowe przemagnesowywanie trzeba uwzględniać w następujących przypadkach:

— w obliczeniach rezystancji i strat mocy czynnej, jeżeli grubość ekranu jest mniejsza niż $0{,}2 \cdot 10^{-3}$ m,

— w obliczeniach reaktancji i strat mocy biernej, jeżeli grubość ekranu jest mniejsza niż $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ m.

Przy wyższych częstotliwościach wymienione grubości graniczne będą mniejsze.

LITERATURA

1. M. Dąbrowski, J. Cichy, *Własności magnetyczne stali konstrukcyjnych zwykłej oraz podwyższonej jakości*, Archiwum Elektrotechniki (w druku).
2. G.I. Dorofiejew, *Powierchnostnyj effiekt w dwuchsłojnom prowodnikie*, Elektriczestwo, 1956, No 8, ss. 31—32.
3. J. Lasociński, *Przybliżone metody analizy jednowymiarowego pola elektromagnetycznego w masywnym żelazie*, Rozprawy Elektrotechniczne, t. XII, z. 3, 1967, ss. 555—577.
4. I.D. Maergojz, *Rascziet powierchnostnogo effiekta w ferromagnitnych tiełach pokrytych prowodiaszczim słojem*, Elektriczestwo, 1970, No 2, ss. 83—86.
5. L.R. Nejman, *Powierchnostnyj effiekt w ferromagnitnych tiełach*, GEI, Leningrad—Moskwa 1949.
6. K. Simonyi, *Theoretische Elektrotechnik*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956.
7. A.E. Słuchockij, S.E. Ryskin, *Induktory dla indukcjonnogo nagriewa*, Energia, Leningradskoje otdielienije, 1974.
8. J. Turowski, *Elektrodynamika techniczna*, WNT, Warszawa 1968, a także Techniczeskaja elektrodynamika, Energia, Moskwa 1974.
9. K. Zakrzewski, *Pole elektromagnetyczne w ciałach ferromagnetycznych przewodzących*, Zesz. Nauk. Politechniki Łódzkiej „Elektryka", 160, 1972, z. 38.
10. J. Gieras, *Impedance and power loss in ferromagnetic conductive half-space*, Proceedings IEE, 1976, Vol. 123 (w druku).

J. GIERAS, W. JÓZEFOWICZ

FACTORS OF LINEARIZATION FOR CALCULATIONS OF IMPEDANCE AND LOSS OF POWER IN SCREENED FERROMAGNETIC PLATES

Summary

An analytical description of a one-dimensional electromagnetic field distribution in a screened ferromagnetic semi-space has been determined in the paper. Nonlinear permeability and magnetic hysteresis loss of power have been taken into account using a method similar to Nejman's [5]. At the same time, the conception of substituting two fictitious conductive layers with continuously increasing or continuously decreasing magnetic permeability for a solid ferromagnetic medium, the surface magnetic field intensity exceeding the critical intensity, has been given. On the basis of the distribution of the electromagnetic field, universal formulas concerning impedance and loss of power in screened ferromagnetic plates have been derived. Fig. 6 and Fig. 7 illustrate the influence of nonlinear properties of the ferromagnetic semi-space on the value of factors of linearization k_R — for resistance and loss of active power and k_X — for reactance and loss of wattless power at various screen thicknesses.

J. GIERAS, W. JÓZEFOWICZ

COEFFICIENTS LINÉARISANTS POUR CALCULER L'IMPÉDANCE ET LES PERTES DE PUISSANCE DANS LES PLAQUES BLINDÉES FERROMAGNÉTIQUES

Résumé

On a donné une description analytique de la répartition d'un champ électromagnétique unidimensionnel dans un semi-espace ferromagnétique blindé. La perméabilité magnétique non linéaire ainsi que les pertes par hystérésis ont été prises en considération à l'aide de la méthode proche à la méthode de Nejman. On

a suggéré à la fois la conception du remplacement du milieu ferromagnétique solide — pour l'intensité superficielle du champ magnétique plus élevée que l'intensité critique — par deux couches conducteurs fictives à perméabilité magnétique monotoniquement ascendante et monotoniquement descendante.

A partir de la répartition du champ électromagnétique, on a introduit les dépendances générales pour l'impédance résultante et les pertes de puissance dans les plaques ferromagnétiques blindées. On a donné une illustration graphique — fig. 6 et 7 — de l'influence des propriétés non linéaires du semi-espace ferromagnétique sur les grandeurs des coefficients linéarisants k_R — pour la résistance et les pertes actives et k_X — pour la réactance et les pertes réactives pour les diverses épaisseurs de l'écran.

J. GIERAS, W. JÓZEFOWICZ

LINEARISIERENDE KOEFFIZIENTEN FÜR DIE BERECHNUNG VON IMPEDANZ UND STÄRKEVERLUSTEN IN ABGESCHIRMTEN FERROMAGNETISCHEN PLATTEN

Zusammenfassung

Der Artikel beinhaltet eine analytische Beschreibung der Auflösung eines eindimensionalen elektromagnetischen Feldes im abgeschirmten ferromagnetischen Halbraum. Die nichtlineare magnetische Permeabilität und die Hystereseverluste wurden unter Anwendung einer der Nejmans-Methode [5] angenäherten Methode berücksichtigt. Gleichzeitig ist eine Konzeption angeführt worden, das massive ferromagnetische Medium bei überkritischen Oberflächenstärken des magnetischen Feldes durch zwei absichtlich angebrachte Leitschichten mit monoton wachsender und monoton abfallender Magnetpermeabilität zu ersetzen. In Anlehnung an die Zersetzung des elektromagnetischen Feldes sind allgemeine Abhängigkeiten für die resultierende Impedanz und die Lastverluste in abgeschirmten ferromagnetischen Platten abgeleitet worden. Auf Bild 6 und 7 sind graphische Darstellungen über die Einwirkung nichtlinearer Eigenschaften des ferromagnetischen Halbraumes auf die Werte der linearisierenden Koeffizienten k_R — für Resistanz und Verluste der Wirkleistung, und k_X — für Reaktanz und Verluste der Blindleistung bei verschiedenen Schirmstärken eingezeichnet worden.

Я. ГЕРАС, В. ЮЗЕФОВИЧ

КОЭФФИЦИЕНТЫ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИМПЕДАНСА И ПОТЕРЬ МОЩНОСТИ В ЭКРАНИРОВАННЫХ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ПЛАСТИНАХ

Резюме

Проведено аналитическое описание распределения одномерного электромагнитного поля в экранированном ферромагнитном полупространстве. Нелинейная магнитная проницаемость и потери мощности на гистерезис учтены методом сходным с методом Неймана [5] с предложением концепции замещения массивной ферромагнитной среды, в случае сверхкритического поверхностного напряжения магнитного поля, двумя фиктивными проводящими слоями с монотонично возрастающей или монотонично уменьшающейся магнитной проницаемостью. На основании распределения электромагнитного поля, найдено эквивалентное комплексное сопротивление и потери мощности в экранированных ферромагнитных пластинах. Представлены графики — рис. 6 и рис. 7 — на которых показано влияние нелинейных свойств ферромагнитного полупространства на значения коэффициентов линеаризации: k_R — для активного сопротивления и потерь активной мощности, k_X — для реактивного сопротивления и потерь реактивной мощности при различных толщинах экрана.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 2, ss. 287—301

621.318.132

Przenikalność zastępcza ferromagnetyków ekranowanych

MARCELI KAŹMIERSKI (ŁÓDŹ)

Instytut Elektrotechniki, Oddział w Łodzi

Otrzymano 27.9.1974

W pracy [3] wprowadzono pojęcie przenikalności zastępczej masywnego żelaza, która to przenikalność, od strony fizycznej, jest powierzchniowym reprezentantem środowiska nieliniowego magnetycznie. W ogólnym przypadku pojęcie to można rozszerzyć na układy wielowarstwowe o różnych własnościach elektrycznych i magnetycznych poszczególnych warstw, przy czym efekt wprowadzenia przenikalności zastępczej polega na tym, że przy analizie pola elektromagnetycznego na powierzchni granicznej środowisk układ wielowarstwowy można traktować jako środowisko ciągłe.

W pracy wyznaczono przenikalność zastępczą dla układu dwóch środowisk przewodzących — ekranu przewodzącego (miedź, aluminium) o skończonej grubości i masywnego żelaza, leżących bezpośrednio na sobie. Przenikalność ta ma postać zespoloną i dla analizowanego układu jej moduł i argument są funkcjami zarówno grubości ekranu jak i amplitudy stycznej składowej natężenia pola magnetycznego na jego powierzchni, przy czym obecność ekranu powoduje, że zmiana funkcji $\mu_z = \mu_z(H)$ i $\psi = \psi(H)$ jest znacznie mniejsza niż dla przypadku nieekranowanego, tak że w praktyce dla ekranów o grubości większej niż 2...3 mm przyjmować można, że funkcje te są stałe.

Jako przykład zastosowania wyznaczonej przenikalności zastępczej układu uwarstwionego określono wartości współczynników ekranowania w analizowanym układzie, które to współczynniki w odróżnieniu od dotychczasowych analiz przy $\mu = \text{const}$ [1], [2] są funkcją nie tylko grubości ekranu, ale i natężenia pola magnetycznego na jego powierzchni.

1. WSTĘP

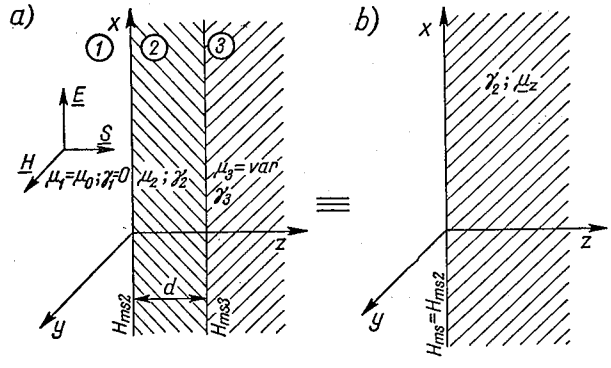
W pracy [3] opisano i podano interpretację fizyczną przenikalności zastępczej dla masywnego żelaza. Linearyzuje ona niejako nieliniowe magnetycznie środowisko przewodzące „w głąb" metalu i jest w pewnym sensie reprezentantem powierzchniowym tego środowiska, tak dobranym, aby impedancja powierzchniowa i straty przypadające na jednostkę powierzchni w układzie rzeczywistym i zastępczym były sobie równe. Podobne postępowanie można również zastosować do układów wielowarstwowych o różnych liniowych lub nieliniowych parametrach poszczególnych środowisk, w szczególności do układu dwuwarstwowego, przedstawiającego ekranowany ferromagnetyk.

2. DEFINICJA I ZALEŻNOŚCI PODSTAWOWE

Jak wykazano w pracy [3], jeśli wymiary powierzchni analizowanego obiektu przekraczają kilka centymetrów, to ze względu na małą głębokość wnikania wolnozmiennego pola elektromagnetycznego do metalu, do lokalnej analizy tego pola w układach wielowymiaro-

wych można stosować, z wystarczającą do celów praktycznych dokładnością, zależności jak dla pola jednowymiarowego.

Rozważania ograniczymy do przypadku dwóch środowisk przewodzących, leżących bezpośrednio na sobie (rys. 1). Zakładamy, że na powierzchnię ekranu pada płaska fala spolaryzowana, w której istnieje tylko jedna składowa pola magnetycznego — wzdłuż osi y, stała co do wartości w całej płaszczyźnie 0 xy. Środowisko, na które pada fala, dalej nazywane ekranem, jest liniowe i posiada skończoną grubość d. Przypisano mu indeks 2. Drugie środowisko przewodzące (indeks 3) jest ferromagnetykiem i zajmuje półprzestrzeń $z \geqslant d$.



Rys. 1.a) Układ trójwarstwowy — dielektryka 1 i środowisk przewodzących — liniowego 2 i nieliniowego — 3 i b) równoważny układ dwuwarstwowy z przewodzącym środowiskiem zastępczym o przenikalności $\underline{\mu}_z$

Analogicznie do definicji przenikalności zastępczej masywnego żelaza [3], przez przenikalność zastępczą układu ekran-ferromagnetyk będziemy rozumieć przenikalność takiego fikcyjnego środowiska liniowego o przewodności właściwej równej przewodności ekranu, które umieszczone w przemiennym polu elektromagnetycznym o dowolnej konfiguracji zamiast rozpatrywanego układu ekran-ferromagnetyk nie spowoduje istotnej zmiany rozkładu i amplitud składowych tego pola. Impedancja powierzchniowa w dowolnym punkcie na powierzchni takiego zastępczego środowiska liniowego i straty jednostkowe na jego powierzchni będą wówczas równe impedancji powierzchniowej i stratom jednostkowym, występującym w odpowiadającym punkcie na powierzchni ekranu układu rzeczywistego.

W porównaniu z przenikalnością zastępczą masywnego żelaza [3], gdzie drugi podstawowy parametr środowiska — przewodność właściwa — był jednoznacznie określony, w omawianym przypadku (dwa środowiska o różnych przewodnościach właściwych) jednoznaczność taka nie występuje. Stąd dodatkowe założenie w powyższej definicji.

W środowisku 2 i 3 z rys. 1 spełnione są zależności:

$$\frac{d^2\underline{H}_{m2}(z)}{dz^2} - \underline{\alpha}_2^2 \underline{H}_{m2}(z) = 0 \tag{1}$$

dla $0 \leqslant z \leqslant d$,

$$\frac{d^2\underline{H}_{m3}(z)}{dz^2} - \underline{\alpha}_3^2 \underline{H}_{m3}(z) = 0 \tag{2}$$

dla $d \leqslant z \leqslant \infty$,

gdzie:

$$\underline{\alpha}_2 = \sqrt{\omega\mu_2\gamma_2}\, e^{j\pi/4} = (1+j)k_2, \tag{3}$$

$$\underline{\alpha}_3 = \sqrt{\omega\underline{\mu}_{z3}\gamma_3}\, e^{j\pi/4} = \sqrt{\omega\mu_{z3}\gamma_3}\, e^{j(\pi/4-\psi/2)} =$$

$$= [\cos\psi/2+\sin\psi/2+j(\cos\psi/2-\sin\psi/2)]k_3, \tag{4}$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{\omega\mu_2\gamma_2}{2}}, \tag{5}$$

$$k_3 = \sqrt{\frac{\omega\mu_{z3}\gamma_3}{2}} = f(H_{ms3}). \tag{6}$$

Poszczególne symbole występujące w równaniach (1)...(6) oznaczają:

$\underline{H}_{m2}$, $\underline{H}_{m3}$ — zespolone amplitudy natężenia pola magnetycznego, odpowiednio w środowiskach 2 i 3,

$\omega = 2\pi f$ — pulsacja pola elektromagnetycznego,

μ_2 — przenikalność magnetyczna ekranu,

$\underline{\mu}_{z3} = \mu_{z3}e^{-j\psi}$ — zespolona przenikalność zastępcza masywnego żelaza [3],

γ_2, γ_3 — przewodności właściwe ekranu i masywnego ferromagnetyku.

Rozwiązanie układu równań (1) i (2) podano w pracach [4] i [1], a następnie [2]. Interesujące w dalszych rozważaniach wielkości na powierzchniach granicznych można wyrazić przez $\underline{H}_{ms2}$. Są one równe:

— natężenie pola magnetycznego na powierzchni masywnego ferromagnetyku

$$\underline{H}_{ms3} = \frac{1}{\operatorname{ch}\underline{\alpha}_2 d + \dfrac{\underline{\alpha}_3}{\underline{\alpha}_2}\dfrac{\gamma_2}{\gamma_3}\operatorname{sh}\underline{\alpha}_2 d}\,\underline{H}_{ms2}, \tag{7}$$

— natężenie pola elektrycznego na powierzchni ekranu

$$\underline{E}_{ms2} = \frac{\underline{\alpha}_2}{\gamma_2}\,\frac{\operatorname{sh}\underline{\alpha}_2 d + \dfrac{\underline{\alpha}_3}{\underline{\alpha}_2}\dfrac{\gamma_2}{\gamma_3}\operatorname{ch}\underline{\alpha}_2 d}{\operatorname{ch}\underline{\alpha}_2 d + \dfrac{\underline{\alpha}_3}{\underline{\alpha}_2}\dfrac{\gamma_2}{\gamma_3}\operatorname{sh}\underline{\alpha}_2 d}\,\underline{H}_{ms2}, \tag{8}$$

— natężenie pola elektrycznego na powierzchni ferromagnetyku

$$\underline{E}_{ms3} = \frac{\underline{\alpha}_2}{\gamma_2}\,\frac{1}{\dfrac{\underline{\alpha}_2}{\underline{\alpha}_3}\dfrac{\gamma_3}{\gamma_2}\operatorname{ch}\underline{\alpha}_2 d + \operatorname{sh}\underline{\alpha}_2 d}\,\underline{H}_{ms2}. \tag{9}$$

Impedancja powierzchniowa układu ekran-ferromagnetyk jest równa:

$$\underline{Z}_s = \frac{\underline{E}_{ms2}}{\underline{H}_{ms2}} = \frac{\underline{\alpha}_2}{\gamma_2}\,\frac{\operatorname{sh}\underline{\alpha}_2 d + \dfrac{\underline{\alpha}_3}{\underline{\alpha}_2}\dfrac{\gamma_2}{\gamma_3}\operatorname{ch}\underline{\alpha}_2 d}{\operatorname{ch}\underline{\alpha}_2 d + \dfrac{\underline{\alpha}_3}{\underline{\alpha}_2}\dfrac{\gamma_2}{\gamma_3}\operatorname{sh}\underline{\alpha}_2 d}, \tag{10}$$

a jednostkowa powierzchniowa moc pozorna:

$$\underline{S}_s = \frac{1}{2}\underline{E}_{ms2}\cdot\underline{H}^*_{ms2} = \frac{\underline{\alpha}_2}{\gamma_2}\frac{\operatorname{sh}\underline{\alpha}_2 d + \frac{\underline{\alpha}_3}{\underline{\alpha}_2}\frac{\gamma_2}{\gamma_3}\operatorname{ch}\underline{\alpha}_2 d}{\operatorname{ch}\underline{\alpha}_2 d + \frac{\underline{\alpha}_3}{\underline{\alpha}_2}\frac{\gamma_2}{\gamma_3}\operatorname{sh}\underline{\alpha}_2 d}\frac{H^2_{ms2}}{2}. \tag{11}$$

Zależność (10) po uwzględnieniu (3)...(6) można zapisać w postaci:

$$\underline{Z}_s = \sqrt{\frac{\omega\mu_2}{2\gamma_2}}\cdot\left(\frac{K_r}{2N} + j\frac{K_i}{2N}\right), \tag{12}$$

gdzie:

$$K_r = \operatorname{sh}2k_2 d - \sin 2k_2 d + 2\frac{k_3\gamma_3}{k_2\gamma_3}(\cos\psi/2\operatorname{ch}2k_2 d + \\ + \sin\psi/2\cos 2k_2 d) + \left(\frac{k_3\gamma_2}{k_2\gamma_3}\right)^2(\operatorname{sh}2k_2 d + \sin 2k_2 d), \tag{13}$$

$$K_i = \operatorname{sh}2k_2 d + \sin 2k_2 d + 2\frac{k_3\gamma_2}{k_2\gamma_3}(\cos\psi/2\operatorname{sh}2k_2 d - \\ - \sin\psi/2\cos 2k_2 d) + \left(\frac{k_3\gamma_2}{k_2\gamma_3}\right)^2(\operatorname{sh}2k_2 d - \sin 2k_2 d), \tag{14}$$

$$N = \operatorname{ch}^2 k_2 d - \sin^2 k_2 d + \frac{k_3\gamma_2}{k_2\gamma_3}(\operatorname{sh}2k_2 d\cos\psi/2 + \sin 2k_2 d\sin\psi/2) + \\ + \left(\frac{k_3\gamma_2}{k_2\gamma_3}\right)^2(\operatorname{sh}^2 k_2 d + \sin^2 k_2 d), \tag{15}$$

przy czym zarówno k_3 (wzór (16)) jak i ψ są funkcjami amplitudy natężenia pola magnetycznego na powierzchni granicznej ekranu i ferromagnetyka — H_{ms3}.

3. WYZNACZENIE PRZENIKALNOŚCI ZASTĘPCZEJ

Podobnie jak dla masywnego ferromagnetyku [3], przenikalność zastępczą układu ekran-ferromagnetyk określimy zależnością o postaci:

$$\underline{\mu}_z = \mu_z e^{-j\psi}. \tag{16}$$

Dla zastępczego środowiska liniowego impedancję powierzchniową można zapisać wzorem:

$$\underline{Z}_s = \sqrt{\frac{\omega\underline{\mu}_z}{2\gamma_2}} = \sqrt{\frac{\omega\mu_{zR}}{2\gamma_2}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu_{zX}}{2\gamma_2}}, \tag{17}$$

przy czym μ_{zR} i μ_{zX} oznaczają tutaj przenikalności zastępcze odpowiednio dla rezystancji (strat mocy czynnej) i reaktancji (strat mocy biernej) układu ekran-ferromagnetyk.

Z porównania (12) i (17) otrzymuje się:

$$\mu_{zR} = \mu_z \left(\frac{K_r}{2N} \right)^2, \tag{18}$$

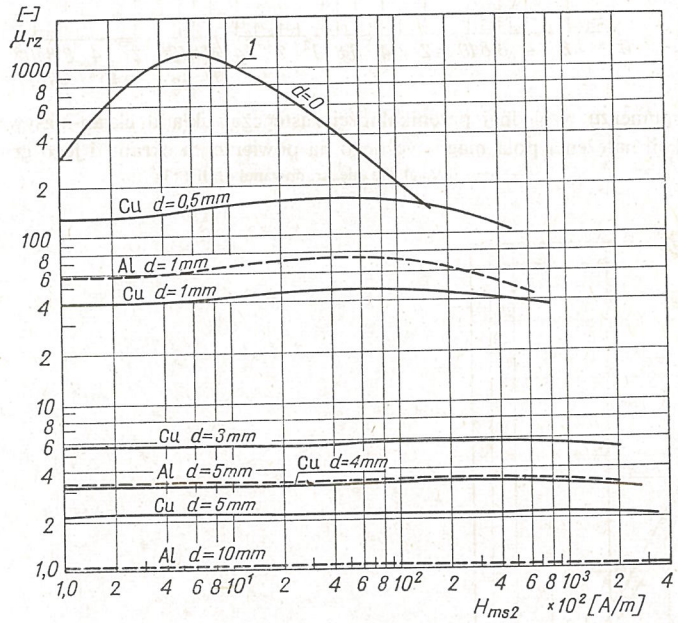
$$\mu_{zX} = \mu_z \left(\frac{K_i}{2N} \right)^2, \tag{18a}$$

a korzystając z zależności podanych w pracy [3]:

$$\mu_z = \frac{\mu_{zR} + \mu_{zX}}{2}, \tag{19}$$

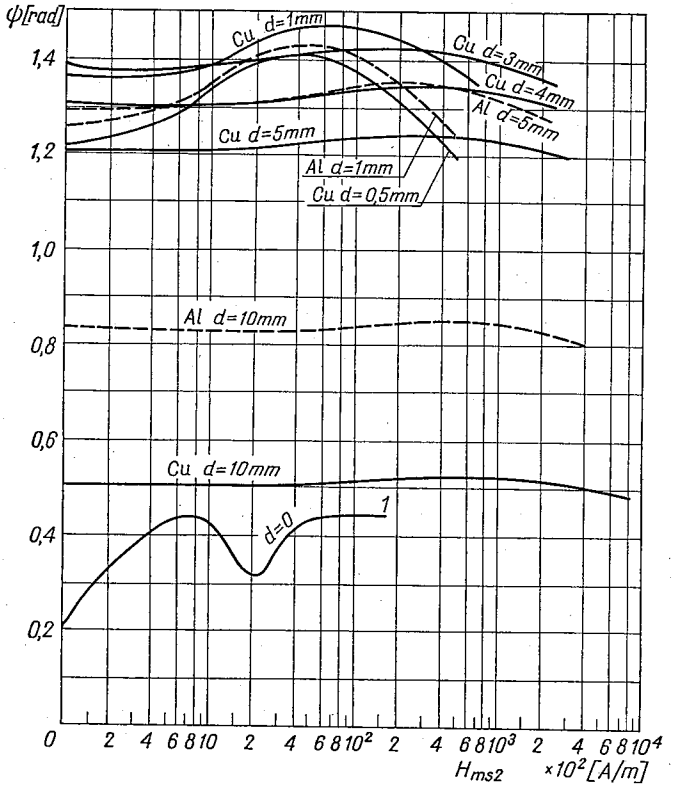
$$\psi = \arcsin \frac{\mu_{zR} - \mu_{zX}}{\mu_{zR} + \mu_{zX}}. \tag{20}$$

Obliczenia wartości $\mu_z = f(H_{ms2};\ d)$ i $\psi = f(H_{ms2};\ d)$ przeprowadzono na maszynie cyfrowej dla różnych grubości ekranu miedzianego i aluminiowego. Do obliczeń przyjęto: $\gamma_{Cu} = 47 \cdot 10^6 \frac{1}{\Omega m}$; $\gamma_{Al} = 28{,}5 \cdot 10^6 \frac{1}{\Omega m}$; γ_3, μ_{z3}, ψ — jak dla stali St3s [3]. Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunkach 2 i 3 oraz 4 i 5. Wynika z nich szereg istotnych z praktycznego punktu widzenia wniosków.

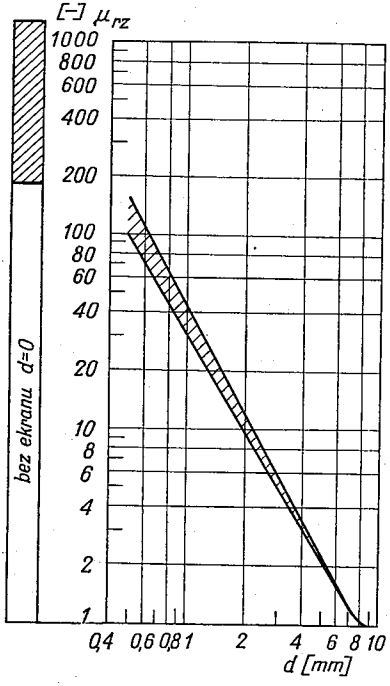


Rys. 2. Zmiana modułu względnej przenikalności zastępczej układu ekran-masywny ferromagnetyk w funkcji natężenia pola magnetycznego powierzchni ekranu i jego grubości
1 — $\mu_z = f(H_{ms})$ dla nieekranowanej stali St3s

1) Wartość modułu przenikalności zastępczej w funkcji natężenia pola magnetycznego na powierzchni metalu, w przypadku obecności ekranu i w zakresie spotykanych w praktyce jego grubości i natężeń pól magnetycznych jest wartością w przybliżeniu stałą — $\mu_z \approx$ $\approx$ const.



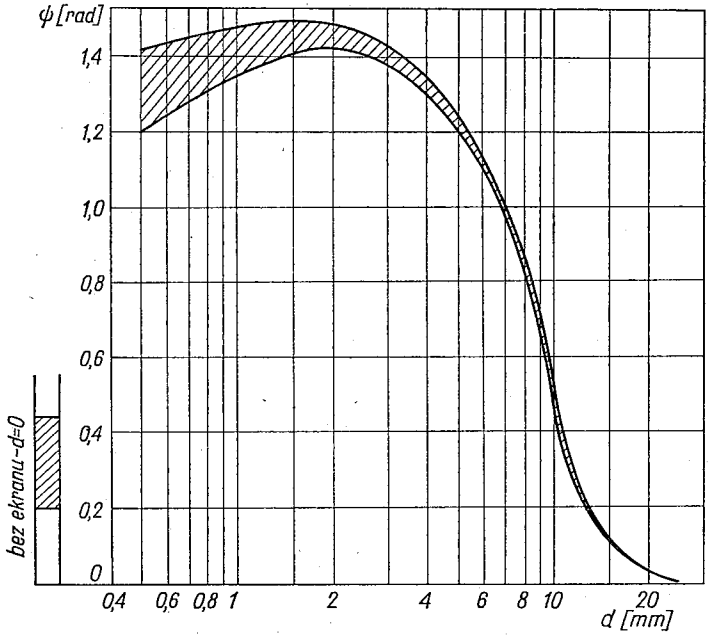
Rys. 3. Zmiana argumentu względnej przenikalności zastępczej układu ekran-masywny ferromagnetyk w funkcji natężenia pola magnetycznego na powierzchni ekranu i jego grubości
1 — $\psi = f(H_{ms})$ dla nieekranowanej stali St3s



Rys. 4. Zmiana modułu względnej przenikalności zastępczej układu ekran-masywny ferromagnetyk w funkcji grubości ekranu miedzianego dla zakresu $H_{ms3} = 0...160 \cdot 10^2$ A/m ($H_{ms2} = 0...\sim 10^5$ A/m)

2) Moduł względnej przenikalności zastępczej układu uwarstwionego ekran-ferromagnetyk zależy od grubości ekranu malejąc z jej wzrostem do jedności. Wartość tę osiąga dla miedzi przy grubości ekranu $d = 0{,}008$ m, dla aluminium $d = 0{,}01$ m — rys. 4.

3) Argument przenikalności zastępczej układu uwarstwionego ekran-ferromagnetyk wykazuje większą zmienność w funkcji natężenia pola magnetycznego na powierzchni ekranu niż moduł. Zwiększenie grubości ekranu powoduje początkowo wzrost argumentu ψ do wartości bliskiej $\pi/2$, a następnie jego malenie do zera — rys. 5.



Rys. 5. Zmiana argumentu przenikalności zastępczej układu ekran-masywny ferromagnetyk w funkcji grubości ekranu miedzianego dla zakresu $H_{ms3} = 0...160 \cdot 10^2$ A/m ($H_{ms2} = 0... \sim 10^5$ A/m)

4) Wpływ obecności ferromagnetyku na pole elektromagnetyczne na powierzchni ekranu można pominąć przy grubościach ekranu (miedź, aluminium) rzędu 20...30 mm.

4. WSPÓŁCZYNNIKI EKRANOWANIA

Uwzględnienie zmiennej przenikalności magnetycznej masywnego żelaza przy analizie przemiennego pola elektromagnetycznego w układzie ekran-ferromagnetyk pozwala rzucić nowe światło na współczynniki ekranowania, które do tej pory wyznaczano przy założeniu stałej przenikalności magnetycznej żelaza [1], [2]. Z praktycznego punktu widzenia istotne są trzy wielkości:

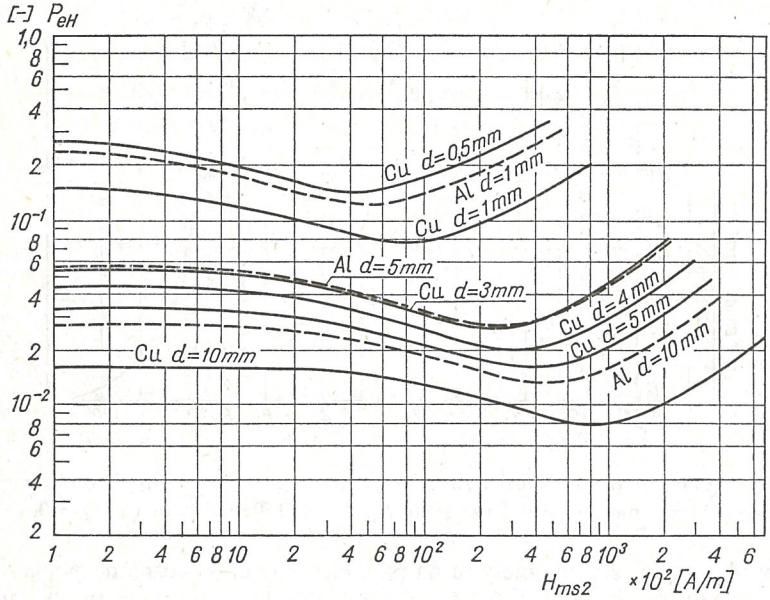
— współczynnik ekranowania dla stycznej składowej natężenia pola magnetycznego — p_{eH},
— współczynnik ekranowania dla jednostkowych strat mocy czynnej — p_{ep},
— współczynnik zmiany jednostkowych strat mocy czynnej na skutek wprowadzenia ekranu — p^*_{ep}.

4.1. Współczynnik ekranowania dla stycznej składowej natężenia pola magnetycznego

Współczynnik ekranowania dla stycznej składowej natężenia pola magnetycznego p_{eH} można zdefiniować jako stosunek amplitudy tej składowej na powierzchni żelaza (pod ekranem) do jej amplitudy na powierzchni ekranu

$$p_{eH} = \frac{H_{ms3}}{H_{ms2}}. \tag{21}$$

Współczynnik ten uwzględnia tłumiące działanie ekranu i charakteryzuje zmniejszenie amplitudy stycznej składowej natężenia pola magnetycznego na powierzchni żelaza na skutek obecności ekranu.



Rys. 6. Zmiana współczynnika ekranowania p_{eH} dla stycznej składowej natężenia pola magnetycznego w funkcji amplitudy tej składowej na powierzchni ekranu

Uwzględniając (7) i (21) otrzymuje się:

$$p_{eH} = \frac{1}{\left| \operatorname{ch}\underline{\alpha}_2 d + \frac{\underline{\alpha}_3}{\underline{\alpha}_2} \operatorname{sh}\underline{\alpha}_2 d \right|}, \tag{22}$$

skąd:

$$p_{eH} = \frac{1}{\sqrt{N}}, \tag{23}$$

gdzie N wyraża się wzorem (15).

4.2. Współczynnik ekranowania dla jednostkowych strat mocy czynnej

Współczynnik ekranowania dla jednostkowych strat mocy czynnej p_{ep} definiuje się jako stosunek strat jednostkowych przedostających się z ekranu do części ekranowanej, do strat jednostkowych pozostających w ekranie. Charakteryzuje on, w jaki sposób straty wydzielające się w układzie ekran-ferromagnetyk dzielą się na masywną stal za ekranem ($p_{ep} \cdot P_2$) oraz na tę część, która pozostaje w ekranie $(1-p_{ep})P_2$

$$p_{ep} = \frac{P_3}{P_2}, \tag{24}$$

gdzie:

$$P_2 = \mathrm{Re}[1/2 \underline{E}_{ms2} \cdot H^*_{ms2}],$$
$$P_3 = \mathrm{Re}[1/2 \underline{E}_{ms3} \cdot H^*_{ms3}].$$

Uwzględniając zależności (7)...(9) otrzymuje się:

$$p_{ep} = 2\frac{k_3 \cdot \gamma_2}{k_2 \cdot \gamma_3} \frac{C_1 C_2 + C_3 C_4}{K_r N}, \tag{25}$$

gdzie:

$$C_1 = [\mathrm{ch}k_2 d \cdot \cos k_2 d + \mathrm{sh}k_2 d \cdot \sin k_2 d]\cos\psi/2 + [\mathrm{ch}k_2 d \cdot \cos k_2 d - \mathrm{sh}k_2 d \cdot \sin k_2 d]\sin\psi/2 + \frac{k_3\gamma_2}{k_2\gamma_3}[\mathrm{sh}k_2 d \cdot \cos k_2 d + \mathrm{ch}k_2 d \cdot \sin k_2 d], \tag{26}$$

$$C_2 = \mathrm{ch}k_2 d \cdot \cos k_2 d + \frac{k_3\gamma_2}{k_2\gamma_3}[\mathrm{sh}k_2 d \cdot \cos k_2 d \cdot \cos\psi/2 + \mathrm{ch}k_2 d \cdot \sin k_2 d \cdot \sin\psi/2], \tag{27}$$

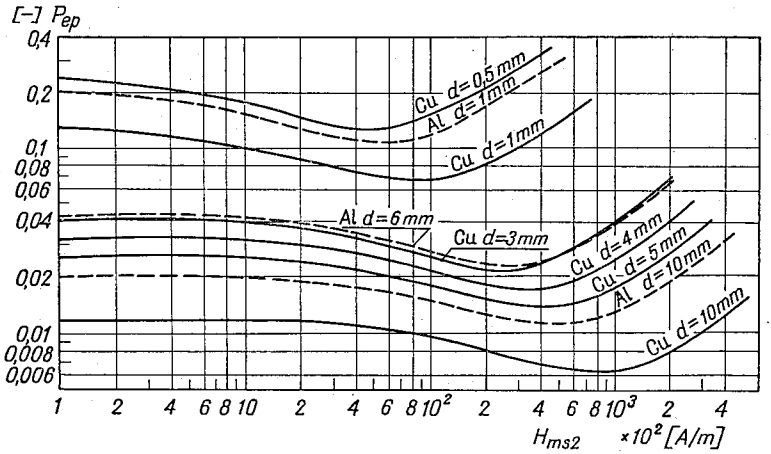
$$C_3 = [\mathrm{ch}k_2 d \cdot \cos k_2 d + \mathrm{sh}k_2 d \cdot \sin k_2 d]\sin\psi/2 - [\mathrm{ch}k_2 d \cdot \cos k_2 d - \mathrm{sh}k_2 d \cdot \sin k_2 d]\cos\psi/2 + \frac{k_3\gamma_2}{k_2\gamma_3}[\mathrm{ch}k_2 d \cdot \sin k_2 d - \mathrm{sh}k_2 d \cdot \cos k_2 d], \tag{28}$$

$$C_4 = \mathrm{sh}k_2 d - \sin k_2 d + \frac{k_3\gamma_2}{k_2\gamma_3}[\mathrm{ch}k_2 d \cdot \sin k_2 d \cdot \cos\psi/2 - \mathrm{sh}k_2 d \cdot \cos k_2 d \cdot \sin\psi/2]. \tag{29}$$

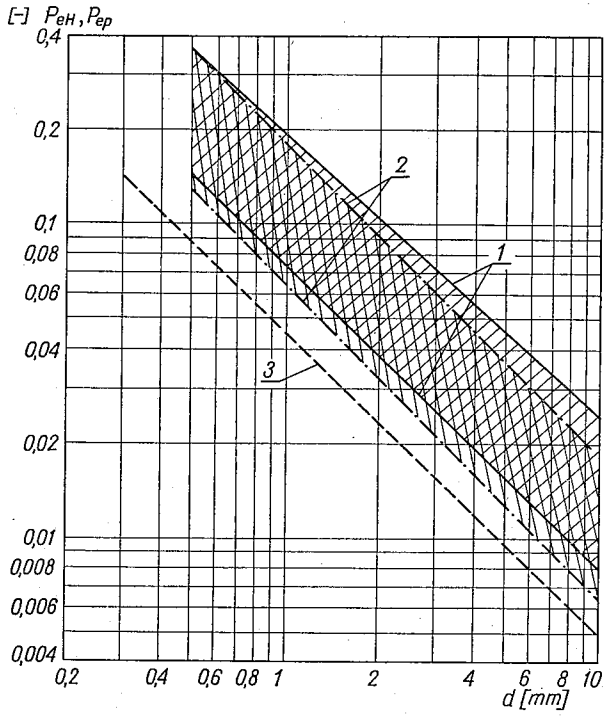
4.3. Współczynnik zmiany jednostkowych strat mocy czynnej na skutek wprowadzenia ekranu

Współczynnik zmiany jednostkowych strat mocy czynnej w układzie ekran-ferromagnetyk na skutek obecności ekranu, w pracy [1] określany jako współczynnik zaekranowania, definiowany jest jako stosunek jednostkowych strat mocy czynnej w układzie ekran-ferromagnetyk do jednostkowych strat mocy czynnej w przypadku ferromagnetyku nieekranowanego:

$$p^*_{ep} = \frac{P_2}{P_{ne}}, \tag{30}$$



Rys. 7. Zmiana współczynnika ekranowania p_{ep} dla jednostkowych strat mocy czynnej w funkcji amplitudy stycznej składowej natężenia pola magnetycznego na powierzchni ekranu dla różnych grubości ekranu miedzianego i aluminiowego



Rys. 8. Zmiana współczynników ekranowania p_{eH} i p_{ep} w funkcji grubości ekranu miedzianego

1 — Zakres zmienności p_{eH} (dla różnych wartości H_{ms2}),
2 — Zakres zmienności p_{ep} (dla różnych wartości H_{ms2}),
3 — $p_{ep} = f(d)$ przy μ = const (według [2])

przy czym

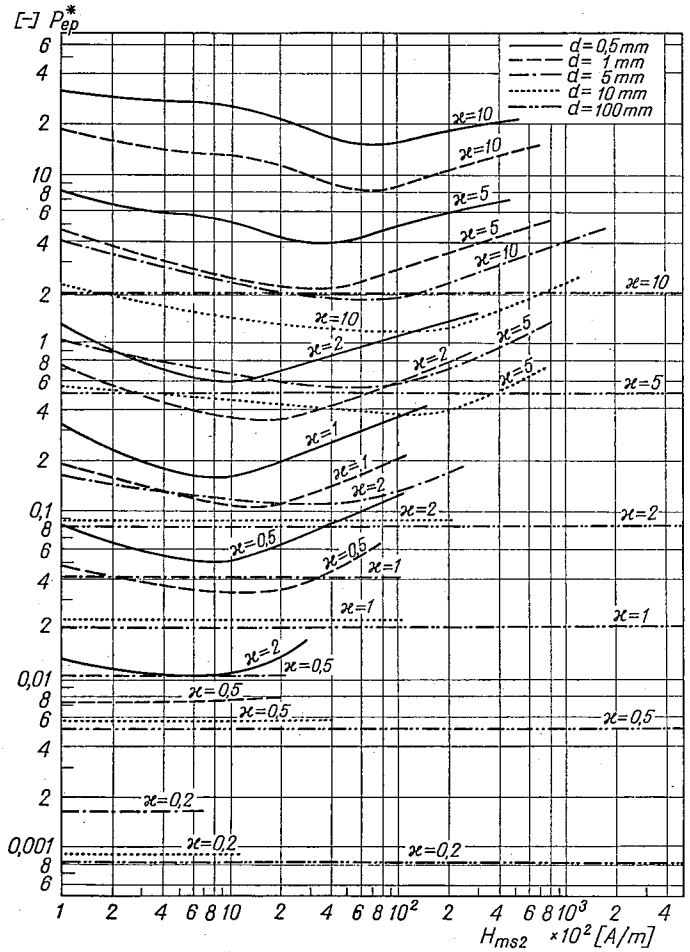
$$P_2 = \mathrm{Re}[1/2\underline{E}_{ms2} \cdot \underline{H}^*_{ms2}],$$

$$P_{ne} = \frac{H^2_{msne}}{2}\sqrt{\frac{\omega\mu_{z3}}{\gamma_3}}\,(\cos\psi/2+\sin\psi/2), \tag{31}$$

gdzie H_{msne} — amplituda stycznej składowej natężenia pola magnetycznego na powierzchni żelaza w układzie nieekranowanym.

Wprowadzając wielkość

$$\varkappa = \frac{H_{ms2}}{H_{msne}}, \tag{32}$$



Rys. 9. Zmiana współczynnika p^*_p w funkcji amplitudy stycznej składowej natężenia pola magnetycznego na powierzchni ekranu dla różnych grubości ekranu miedzianego i różnych wartości $\varkappa$

z równań (7)...(9) otrzymuje się:

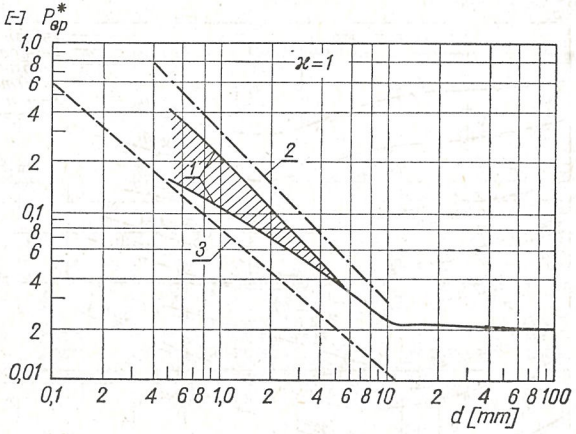
$$p_{ep}^{*} = \frac{K_r}{N} \frac{\varkappa^2}{\sqrt{\mu_{rz}} \frac{k_3\gamma_2}{k_2\gamma_3}(\cos\psi/2 + \sin\psi/2)}, \tag{33}$$

K_r, N — wg (13) i (14).

Wartości współczynników $p_{eH} = p_{eH}(H_{ms2}; d)$ i $p_{ep} = p_{ep}(H_{ms2}; d)$, $p_{ep}^{*} = p_{ep}^{*}(H_{ms2}; d, \varkappa)$ obliczone według zależności (23), (25), (33), przedstawiono na rysunkach 6, 7, 8, 9, 10.

Konfrontacja wykresów uzyskanych na podstawie przytoczonych wyżej wzorów przy uwzględnieniu zmiennej przenikalności masywnego żelaza z wykresami otrzymanymi przy założeniu $\mu_3 = \text{const}$ [1], [2] prowadzi do następujących wniosków.

1) Uwzględnienie zmiennej przenikalności masywnego żelaza powoduje, że wartości współczynników ekranowania dla danej grubości ekranu nie są stałe, a dość silnie zależą od amplitudy stycznej składowej natężenia pola magnetycznego na powierzchni ekranu.



Rys. 10. Zmiana współczynnika p_{ep}^{*} w funkcji grubości ekranu miedzianego przy $\varkappa = 1$
1 — przy μ = var (wzór (33)),
2 — przy μ_{rFe} = 150 = const (według [1]),
3 — przy μ_{rFe} = 1000 = const (według [2])

2) Charakter zmian współczynników ekranowania p_{ep} i p_{ep}^{*} w funkcji grubości ekranu jest podobny w obydwu przypadkach $\mu_3 = \text{var}$ i $\mu_3 = \text{const}$. Na wartość tych współczynników w sposób istotny rzutuje przyjęta do obliczeń (dla $\mu_3 = \mu_{Fe} = \text{const}$) wartość przenikalności magnetycznej żelaza. Przykładowo, na rysunku 10 przedstawiono zmianę $p_{ep} = f(d)$ dla $\mu_{Fe} = \mu_z$, $\mu_{Fe} = 150 \cdot \mu_0 = \text{const}$ (według [1]) i $\mu_{Fe} = 1000 \cdot \mu_0 = \text{const}$ (według [2]). Są to wartości przenikalności magnetycznej w pewnym sensie graniczne. Najodpowiedniejszą byłaby wartość pośrednia, np. $\mu_{rFe} = 400$.

5. PODSUMOWANIE

Pojęcie przenikalności zastępczej może być stosowane nie tylko w przypadku masywnego ferromagnetyku, lecz również i w przypadku innych układów nieliniowych, a w szczególności w przypadku układów, gdzie przenikalność magnetyczna środowiska zmienia się

skokowo (układy wielowarstwowe). W pracy przedstawiono wyznaczenie przenikalności zastępczej dla układu ekran przewodzący (miedź, aluminium) — masywny ferromagnetyk, a także wyznaczono współczynniki ekranowania z uwzględnieniem zmiennej przenikalności magnetycznej zaekranowanej stali.

Z przytoczonej analizy wynikają następujące wnioski.

1) Zarówno moduł jak i argument przenikalności zastępczej układu ekranowanego są funkcją natężenia pola magnetycznego na powierzchni ekranu, grubości ekranu i jego przewodności właściwej.

2) W porównaniu ze zmiennością modułu i argumentu przenikalności zastępczej nieekranowanego masywnego ferromagnetyku na jej powierzchni [3], zmienność ta w przypadku istnienia ekranu przewodzącego jest dużo mniejsza. Dla celów praktycznych, dla ekranów aluminiowych i miedzianych o grubości rzędu 3 mm i więcej przyjąć można, że wartości μ_z i ψ są stałe.

3) Wpływ obecności ferromagnetyku na pole elektromagnetyczne na powierzchni ekranu można pominąć przy grubościach tego ekranu rzędu 20...30 mm.

4) Określone w p. 4 współczynniki ekranowania w ogólnym przypadku są funkcją nie tylko grubości ekranu (jak przy założeniu stałej przenikalności magnetycznej żelaza), alei natężenia pola magnetycznego na jego powierzchni.

LITERATURA

1. J. Turowski, *Elektrodynamika techniczna*, WNT, Warszawa 1968.
2. P. Jezierski, *Analiza skuteczności ekranowania elektromagnetycznego silnych przemiennych pól magnetycznych*, Rozprawy Elektrot., 16, 1970, z. 1, s. 45—60.
3. M. Kaźmierski, *Przenikalność zastępcza masywnego żelaza przy częstotliwości technicznej*, Rozprawy Elektrot., z. 2, 1975, s. 435—453.
4. J. Turowski, *Straty i lokalne przegrzania wywołane strumieniami rozproszenia*. Zesz. Nauk. Politechniki Łódzkiej, Elektryka, 1963, s. 11.

M. KAŹMIERSKI

EQUIVALENT MAGNETIC PERMEABILITY OF SCREENED FERROMAGNETIC MATERIALS

Summary

There has been introduced in the paper [3] the conception of equivalent magnetic permeability of solid iron, as a surface representation of a magnetically non-linear medium. In general, this conception may be also applied to multi-layer systems with different electric and magnetic properties of the individual layer. Introduction of equivalent permeability permits a real multi-layer system te be considered a continous medium in electromagnetic field analysis on the boundary surface. There has been determined in the paper equivalent permeability of two conducting media, viz. a conducting screen (copper, aluminium) with finite thickness and solid iron, laying directly on each other. This permeability has a complex form and its modulus and argument are, for the system being analysed, a function of screen thickness and amplitude of the tangential component of the magnetic field strength. The presence of the screen causes the changes of the functions $\mu_z = \mu_z(H)$ and $\psi = \psi(H)$ to be smaller than those for an unscreened system. In practice, for screen thickness above 2...3 mm the values of these functions may be assumed as constant.

As an example for the application of such defined equivalent permeability of a layer system, the values of the screening coefficients are determined for the analysed system. In contradistinction to the analysis carried out till now (μ = const — [1], [2]) these coefficients are the function not only of the screen thickness but also of the magnetic field strength on the screen surface.

M. KAŹMIERSKI

PERMÉABILITÉ ÉQUIVALENTE DES SUBSTANCES FERROMAGNÉTIQUES BLINDÉES

Résumé

Dans cette étude [3] on a introduit le terme de perméabilité équivalente du fer solide qui, du point de vue de physique, est une représentante superficielle du milieu magnétiquement non linéaire.

En général, ce terme peut être élargi sur les systèmes multi-couches aux diverses propriétés électriques et magnétiques des couches composantes. En analysant le champ électrique sur l'interface des milieux, on peut admettre que l'effet de l'introduction de la perméabilité équivalente consiste à la possibilité de traiter le système multi-couches comme un milieu continu. Au cours des recherches, on a déterminé la perméabilité équivalente pour l'ensemble des deux milieux conducteurs: l'écran conducteur (le cuivre, l' aluminium) à épaisseur finie et le fer solide situés en contact direct l'un sur l'autre. Cette perméabilité a une forme complexe et, pour le système analysé, son module et son argument sont les fonctions d'une part de l'épaisseur de l'écran, et d'autre part, de l'amplitude de composante tangentielle de l'intensité du champ magnétique sur la surface de l'écran. La présence du blindage influe sur le changement des fonctions $\mu_z = \mu_z(H)$ et $\psi = \psi(H)$ de la sorte qu'elles sont considérablement plus petites que pour le cas sans écran, ce qui fait que pratiquement, pour les écrans à l'épaisseur de plus de 2...3 mm, on peut admettre que ces fonctions ne changent pas.

Comme exemple de l'application de la perméabilité équivalente du système déterminée, on a défini dans le système analysé les valeurs des coefficients du blindage. Ces coefficients, contrairement à ceux des analyses précédentes où $\mu = \text{const}$ [1], [2], sont une fonction non seulement de l'épaisseur mais encore de l'intensité du champ magnétique sur la surface du système.

M. KAŹMIERSKI

ERSATZ-PERMEABILITÄT ABGESCHIRMTER FERROMAGNETISCHER KÖRPER

Zusammenfassung

In Arbeit [3] wird der Begriff der Ersatz-Permeabilität massiven Eisens eingeführt, die ein Oberflächenrepräsentant des magnetischen nichtlinearen Mediums ist. Im allgemeinen kann dieser Begriff auf Mehrschichtsysteme mit unterschiedlichen elektrischen und magnetischen Eigenschaften einzelner Schichten erstreckt werden, wobei das Phänomen der Einführung der Ersatz-Permeabilität darauf beruht, daß bei der Analyse des elektromagnetischen Feldes auf der Mediumgrenzfläche eines Mehrschichtsystems als ein kontinuierliches Medium betrachtet werden kann.

In der Arbeit wurde die Ersatz-Permeabilität für ein System zweier Leitmedien bestimmt: einer leitenden Abschirmung (Kupfer, Aluminium) endlicher Stärke und massiven Eisens, die unmittelbar aufeinander liegen. Diese Perneabilität hat eine komplexe Form, wobei im allgemeinen ihr Modul und Argument Funktionen sowohl der Abschirmstärke, als auch der Tangentialkomponente magnetischer Feldstärke auf der Oberfläche der Abschirmung sind. Bei einer Abschirmstärke, die größer als 2...3 mm ist, können diese Funktionen als konstant angesehen werden.

Als Anwendungsbeispiel für diese Ersatz-Permeabilität wurden die Werte der Abschirmkoeffizienten des analysierten Systems bestimmt, die im Gegensatz zu den bisherigen Annäherungsanalysen bei $\mu = \text{const}$ [1] und [2] nicht nur Funktionen der Schirmstärke, sondern auch der magnetischen Feldstärke an der Oberfläche der Abschirmung sind.

М. КАЗЬМЕРСКИ

ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ ЭКРАНИРОВАННЫХ ФЕРРОМАГНЕТИКОВ

Резюме

В труде [3] было введено понятие эквивалентной проницаемости массивного железа. Эта проницаемость с физической точки зрения является поверхностным представителем нелинейной среды. В общем случае это понятие можно расширить на многослойные системы с разными электри-

ческими и магнитными свойствами отдельных слоев, причем эффект введения эквивалентной проницаемости проявляется в том, что при анализе электромагнитного поля на граничной поверхности сред, многослойная система может быть анализирована как непрерывная. В труде была определена эквивалентная проницаемость для системы двух проводящих сред — проводящего экрана (медь, алюминий) конечной толщины и массивного железа, лежащих непосредственно друг на друге. Эта проницаемость имеет комплексную форму и для анализированной системы ее модуль и аргумент являются функциями так толщины экрана, как и амплитуды тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля на ее поверхности, причем в следствие присутствия экрана изменение функций $\mu_z = \mu_z(H)$ и $\psi = \psi(H)$ на много меньше чем в случае незкранированного ферромагнетика. В практических случаях, для экранов толщиной порядка 2 ... 3 мм эти функции можно считать постоянными.

В качестве применения эквивалентной проницаемости многослойной системы были определены величины коэффициентов экранирования. В отличие от существующих анализ при $\mu =$ $=$ const [1], [2] в настоящем анализе эти коэффициенты являются функциями не только толщины экрана, но и напряженности магнитного поля на его поверхности.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 2, ss. 303-318

621.317.08

Zastosowanie informacyjnej teorii pomiarów do badania dokładności przyrządów pomiarowych

STANISŁAW JANKOWSKI (WARSZAWA), MAREK LEPA (WARSZAWA)

Instytut Podstaw Elektroniki Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 7.1.1975

W pracy omówiono podstawowe pojęcia informacyjnej teorii pomiaru. Podejście to pozwala na powiązanie teorii pomiaru z ogólną teorią sygnału i systemów. Przedstawiono procedurę określania dokładności przyrządów pomiarowych na podstawie entropijnej miary błędów. Na przykładzie dużej liczby doświadczeń, z których część wyników umieszczono w artykule, pokazano zastosowanie informacyjnej teorii pomiaru do badania przyrządów wychyłowych. Wykazano w ten sposób celowość szerszego wykorzystania entropijnej miary błędu w praktyce, w szczególności do automatycznej kontroli przyrządów pomiarowych.

1. WIADOMOŚCI WSTĘPNE

Rozwój techniki pomiarowej powoduje coraz większe jej zróżnicowanie zarówno w dziedzinie zastosowań, jak metod i środków. Każda z tych dziedzin ma opracowaną własną teorię, natomiast brak jest do tej pory ogólnych opracowań teoretycznych obejmujących całość techniki pomiarowej. Uzasadnione nadzieje na rozwiązanie tego problemu wiążą się z zastosowaniem w metrologii teorii informacji. Pozwala ona na uogólnienie i powiązanie klasycznej teorii metrologii z ideą i metodami współczesnej teorii sygnałów i systemów. Prace nad wykorzystaniem zasad teorii informacji w metrologii są prowadzone już od wielu lat [3, 5, 6, 7, 8], mimo to niewiele opublikowano wyników jej praktycznego zastosowania. W pracy omówiono podstawowe pojęcia informacyjnej teorii pomiarów w celu ich przypomnienia i ujednolicenia oznaczeń. Podano również przykład praktycznego zastosowania teorii informacji do badania przyrządów pomiarowych, na przykładzie badania woltomierzy LM-3 produkcji Zakładów ERA.

1.1. Podstawowe pojęcia z teorii informacji

Niech X, Y, Z oznaczają zmienne losowe, x_i, y_i, z_i — ich realizację. Dla zmiennej losowej dyskretnej X o wartościach x_i, $i = 1, \ldots, N$, definiuje się entropię jako:

$$H(X) = \sum_{i=1}^{N} \{-\log_a P[X = x_i]\} P[X = x_i], \quad a > 1, \tag{1}$$

gdzie $P[X = x_i]$ — prawdopodobieństwo, że zmienna losowa X przyjmuje wartość x_i.

Tak określona wielkość jest nieujemna $H(X) \geqslant 0$, przy czym $H(X) = 0$ dla zmiennej losowej jednopunktowej, natomiast osiąga maksimum dla zmiennej losowej o równomiernym rozkładzie prawdopodobieństwa. Wówczas:

$$H_{max}(X) = \log N. \tag{2}$$

Wprowadza się również pojęcie redundancji, czyli rozwlekłości dyskretnej zmiennej losowej N-punktowej względem zmiennej losowej N-punktowej o rozkładzie równomiernym, jako:

$$R = 1 - \frac{H(X)}{H_{max}(X)}. \tag{3}$$

Dla zmiennych losowych ciągłych entropię określa się wzorem:

$$H(X) = \int_a^b [-\log_a p(x)]p(x)dx, \quad a > 1, \tag{4}$$

gdzie $p(x)$ — gęstość prawdopodobieństwa ciągłej zmiennej losowej X.

Jak wiadomo tak określona wartość entropii może się zmieniać w przedziale $(-\infty, +\infty)$. Własności ekstremalne mogą wystąpić jedynie po dodaniu pewnych warunków. Np.:

A. Gęstość prawdopodobieństwa $p(x)$ równa się zero poza przedziałem $\langle a, b\rangle$. Wtedy entropia osiąga maksimum dla zmiennej losowej o rozkładzie równomiernym w danym przedziale i wynosi:

$$H(X) = \log_a(b-a). \tag{5}$$

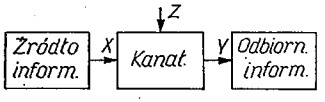
B. Dany jest drugi moment centralny $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx = \sigma^2 < +\infty$. W tym przypadku maksimum entropii występuje dla rozkładu normalnego

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{6}$$

i równa się

$$H(X) = \frac{1}{2}\log_a(2\pi e\sigma^2). \tag{7}$$

Dowody przytoczonych właściwości są zamieszczone w [1].



Rys. 1. Schemat procesu przekazywania informacji
X — sygnał nadawany, Y — sygnał odebrany, Z — sygnał zakłócający

Proces przekazywania informacji najogólniej można przedstawić w postaci jak na rys. 1.

Uwzględniając powyższe definiuje się entropię warunkową a posteriori np. dla zmiennych losowych dyskretnych jako:

$$H(X|Y) = -\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{N} P_{XY}(x_i y_k)\cdot \log_a[P_{XY}(x_i|y_k)], \quad a > 1, \tag{8}$$

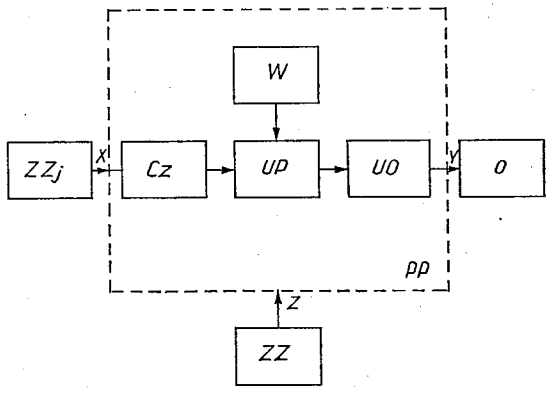
gdzie $P_{XY}(x_i, y_k)$ — prawdopodobieństwo łączne, że zmienna losowa X przyjmuje wartość x_i a zmienna losowa Y przyjmuje wartość y_k.

Powyższą wielkość można interpretować jako ilość informacji traconą w kanale. Ilość informacji przekazaną przez kanał z zakłóceniami, czyli transinformację można wyrazić jako [2]:

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y). \tag{9}$$

1.2. Przyrząd pomiarowy jako informacyjny kanał przesyłowy

W informacyjnej teorii pomiarów jako punkt wyjścia przyjęto, że dowolny proces pomiarowy należy rozpatrywać jako ciąg kolejnych przetworzeń, a sam pomiar jako przetworzenie wielkości mierzonej w celu dogodnego jej oszacowania, rejestracji lub przekazywania na odległość. Schemat blokowy procesu pomiarowego analogiczny do podstawowego schematu przekazywania informacji obrazuje rys. 2.



Rys. 2. Schemat blokowy procesu pomiarowego

ZZj — źródło zjawiska, źródło informacji, *ZZ* — źródło zakłóceń, *O* — obserwator, odbiornik informacji, *PP* — przyrząd pomiarowy, kanał przesyłania informacji, *X* — wielkość mierzona, *Y* — wynik pomiaru, *Z* — zakłócenia, *Cz* — czujnik, *UP* — układ porównawczy, *W* — wzorzec, *UO* — układ odczytu

Przetworzenie wielkości mierzonej X, występującej w procesie pomiarowym, realizowane jest jako przetworzenie informacji pomiarowej o tej wielkości na wynik pomiaru Y. Przyrząd pomiarowy natomiast stanowi łańcuch przetworników tworzących kanał przesyłania informacji.

1.3. Pomiar jako proces zmniejszenia nieoznaczoności

Jeśli przyrząd pomiarowy ma zakres od A do B, tzn. można nim zmierzyć wartość należącą do tego przedziału z błędem bezwzględnym $\pm\Delta$ niezależnym od aktualnej wartości x mierzonej wielkości, to otrzymany wynik pomiaru w postaci wskazania y_p można zapisać jako:

$$y_p \pm \Delta.$$

Niech X oznacza zmienną losową ciągłą odpowiadającą wielkości mierzonej przed dokonaniem pomiaru, natomiast Y oznacza zmienną losową ciągłą reprezentującą wielkość mierzoną po dokonaniu pomiaru. Jeżeli wiadomo, że wartość wielkości mierzonej x za-

wiera się w całym zakresie przyrządu od A do B, to znaczy, że prawdopodobieństwo otrzymania wyników w całym zakresie równa się 1, natomiast poza nim jest równe 0. Przyjmijmy, że gęstość prawdopodobieństwa wielkości mierzonej X wzdłuż skali przyrządu ma rozkład równomierny o gęstości:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \langle A, B \rangle \\ \dfrac{1}{B-A} & x \in \langle A, B \rangle \end{cases} \tag{10}$$

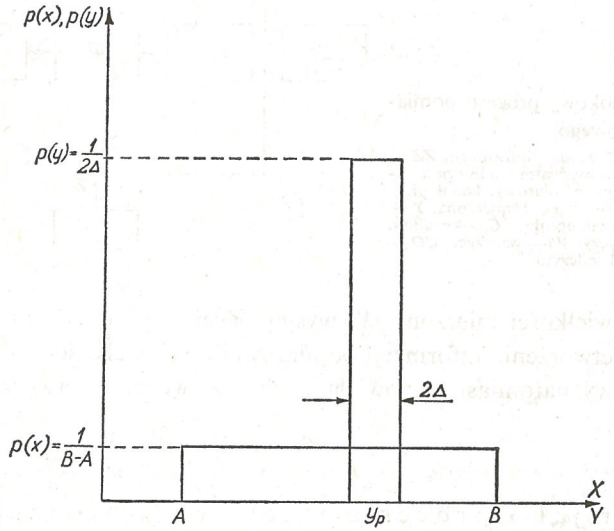
$$H(X) = \log(B-A). \tag{10a}$$

Po dokonaniu pomiaru otrzymujemy wskazanie przyrządu y_p. Znając dokładność pomiaru Δ można przyjąć, że rzeczywista wartość wielkości mierzonej z prawdopodobieństwem 1 leży w przedziale $\langle y_p-\Delta, y_p+\Delta \rangle$, przy czym załóżmy, że rozkład prawdopodobieństwa błędu jest w tym przedziale równomierny:

$$p(y) = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{1}{2\Delta} \end{cases} \tag{11}$$

$$H(Y) = \log 2\Delta. \tag{11a}$$

Powyższe rozważania ilustruje rys. 3.



Rys. 3. Pomiar jako proces zmniejszenia nieoznaczoności

Entropia $H(X)$ charakteryzuje nieokreśloność wielkości mierzonej przed pomiarem, natomiast entropia błędu $H(Y)$ jest entropią warunkową zmiennej losowej Y pod warunkiem występowania wyniku pomiaru $Y = y_p$

$$H(Y) = H(X|y_p); \tag{12}$$

jest ona miarą nieokreśloności po otrzymaniu wskazania przyrządu y_p. Ilość informacji uzyskana w wyniku procesu pomiarowego

$$I(X; Y) = H(X)-H(X|y_p) \tag{13}$$

przy poczynionych założeniach równa się:

$$I(X; Y) = \log \frac{B-A}{2\Delta}. \tag{14}$$

Ponieważ w wyniku pomiaru następuje zmniejszenie nieokreśloności wielkości mierzonej, ilość informacji z punktu widzenia metrologii jest miarą przyrostu informacji, a nie straty informacji w kanale przesyłowym, jak to jest interpretowane w ogólnej teorii informacji.

1.4. Entropijna miara błędu i jej związek z błędem średniokwadratowym

W klasycznej teorii metrologii dokładność pomiaru jest określona na podstawie błędu maksymalnego lub średniokwadratowego. Posługiwanie się błędem maksymalnym ma sens tylko szacunkowy.

Określenie dokładności za pomocą błędu średniokwadratowego jest wygodne z praktycznego punktu widzenia, ponieważ znane są dobre estymatory z próby dla wariancji oraz inne właściwości statystyczne. Jednak nie istnieją obiektywne kryteria, opisujące wpływ zakłóceń o różnych rozkładach prawdopodobieństwa przy tym samym błędzie średniokwadratowym.

W celu ominięcia wymienionych trudności wygodnie jest wprowadzić pojęcie entropijnej miary błędu [3].

Dla rozkładu równomiernego o gęstości (11) i entropii (11a) wariancja oraz błąd średniokwadratowy wynoszą:

$$\sigma^2 = \frac{\Delta^2}{3}; \quad \sigma = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}. \tag{15}$$

Entropijna miara błędu jest określona w [3] w postaci:

$$\Delta \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \exp[H(X)]. \tag{16}$$

Entropijna miara błędu pozwala zastąpić błąd o dowolnym rozkładzie prawdopodobieństwa błędem o rozkładzie równomiernym, lecz o takim samym wpływie zakłócającym wynik pomiaru pod względem ilości informacji.

Związek między entropijną miarą błędu a błędem średniokwadratowym jest następujący:

$$\Delta = K \cdot \sigma, \tag{17}$$

gdzie K — współczynnik entropii [3].

Współczynnik entropii K osiąga wartość maksymalną dla rozkładu normalnego o gęstości (6) i entropii (7) i wynosi:

$$K = \frac{\Delta}{\sigma} = \frac{\sqrt{2\pi e}\,\sigma}{\sigma} = 2{,}07,$$

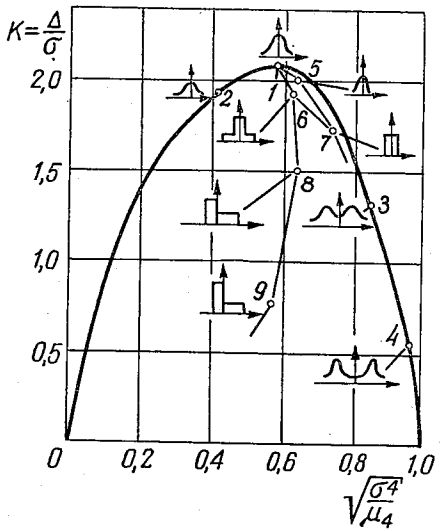
co wynika z przytoczonych rozważań o maksymalnej entropii dla ciągłych zmiennych losowych — warunek B z punktu 1.1, natomiast dla rozkładu równomiernego $K = \sqrt{3}$. Stąd wynika, że współczynnik entropii K może charakteryzować typ rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej błędu.

W pracy [3] podano zależność analityczną na współczynnik entropii K w funkcji zmodyfikowanego współczynnika spłaszczenia:

$$\gamma = \sqrt{\frac{\sigma^4}{\mu_4}} \tag{18}$$

dla szerokiej klasy rozkładów typu:

$$p(x, a) = \frac{a}{2\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)} \exp(-|x|^a). \tag{19}$$



Rys. 4. Wykres zależności $K = f\left(\sqrt{\frac{\sigma_4}{\mu_4}}\right)$ dla rozkładów typu

$$p(x, a) = \frac{a}{2 \cdot \Gamma\left(\frac{1}{a}\right)} \exp(-|x|^a)$$

W tym wypadku:

$$\gamma = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{a}\right)}{\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{a}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{5}{a}\right)}}, \tag{20}$$

$$K = \frac{\Delta}{\sigma} = \frac{\exp\left(\frac{1}{a}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{a}\right)}{a\sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{3}{a}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)}}}. \tag{21}$$

Ponadto podano zależności analityczne $K = f(\gamma)$ dla sumy dwóch rozkładów normalnych przesuniętych względem $x = 0$ o $+c$ i $-c$.

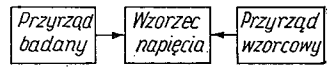
Na rys. 4. podano wykres $K = f(\gamma)$ dla założeń (20) i (21). W pracy [4] podano analityczne zależności $K = f(\gamma)$ dla sumy dwóch niezależnych rozkładów, z których pierwszy ma gęstość (19), a drugi jest rozkładem równomiernym. W wypadku sumowania różnych rozkładów można otrzymać zależności leżące poza krzywą z rys. 4, jednakże nie przekraczających wartości $K_{max} = 2{,}07$.

2. POMIARY I OBLICZENIA ENTROPIJNEJ MIARY BŁĘDÓW DLA PRZYRZĄDÓW TYPU LM-3 PRODUKCJI ZAKŁADÓW ERA

Celem badań autorów było sprawdzenie i zastosowanie entropijnej miary błędów jako kryterium oceny przyrządów wychyłowych na przykładzie woltomierzy LM-3 produkcji Zakładów ERA. Doświadczenie nie pretenduje do pełnych badań przyrządów, a ma za zadanie jedynie dostarczenie szeregu danych, umożliwiających zastosowanie informacyjnej teorii pomiarów w praktyce.

2.1. Organizacja procesu pomiarowego

Do pomiaru wybrano 12 egzemplarzy wymienionych przyrządów magnetoelektrycznych wyprodukowanych w roku 1973. Ustalono, że badania będą przeprowadzone w układzie, którego schemat przedstawia rys. 5.



Rys. 5. Schemat blokowy układu do badania przyrządów LM-3

Badania przyrządów LM-3 przeprowadzono na różnych zakresach pomiarowych i przy różnych poziomach napięcia, co wymieniono w tablicy 1.

Tablica 1

Zakresy i poziomy napięć badanych przyrządów

Zakres [V]	Ilość przyrządów	Poziom napięcia [V]
0—0,75	3	0,5 0,75
0—15	6	5 10 15
0—30	3	25 30

2.2. Schemat obliczeń

Obliczenie wykonano na maszynie cyfrowej CDC 3170 według programu ENT 10, zrealizowanego w języku FORTRAN IV, którego schemat blokowy przedstawia rysunek 6.

Rys. 6. Schemat blokowy programu ENT-10

W każdej serii wykonano minimum 100 pomiarów. Liczbę ugrupowań dla histogramu błędu zmieniono od 10 co 10 do 100.

2.3. Omówienie wyników doświadczenia

Główną trudność przy opracowywaniu wyników pomiarów stanowi estymacja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu błędów z próby, ponieważ występuje tu dyskretyzacja ciągłej zmiennej losowej. W danym wypadku uznano za estymator funkcji gęstości histogram z próby [9, 10].

Tablica 2

Zależności obliczane w programie ENT 10

Lp.	Nazwa	Oznaczenia i wzory
1	wartość wzorcowa	W
2	i-ty pomiar	$A(i)$
3	błąd i-tego pomiaru	$S(i) = A(i) - W$
4	liczba pomiarów	N
5	liczba ugrupowań	L
6	liczba pomiarów w i-tej grupie	N_j
7	przedział kwantowania	$d = \frac{S_{max} - S_{min}}{L}$
8	estymator prawdopodobieństwa	$p_j = \frac{N_j}{N}$
9	wartość średnia błędu	$\hat{m} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} S(i)$
10	wariancja błędu	$\hat{o} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} [S(i) - m]^2$
11	3-ci moment centralny	$\mu_3 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} [S(i) - m]^3$
12	4-ty moment centralny	$\mu_4 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} [S(i) - m]^4$
13	współczynnik symetrii	$G_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$
14	współczynnik spłaszczenia	$G_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$
15	współczynnik spłaszczenia zmodyfikowany	$G_3 = \sqrt{\frac{\sigma^4}{\mu_4}}$
16	entropia histogramu	$H_1 = \sum_{j=1}^{L} [-\ln(p_j)] p_j$
17	estymator entropii błędu	$H_2 = H_1 + \ln d$
18	błąd entropijny	$\Delta = \frac{1}{2} \exp(H_2)$
19	współczynnik entropii	$K = \frac{\Delta}{\sigma}$
20	redundancja	$R = 1 - \frac{H_1}{H_{max}}$; $H_{max} = \ln L$

Tablica 3

Wybrane wyniki doświadczenia

Lp.	Zakres	Poziom	Błąd system.	σ	Δ	H_2	K	G_1	G_2	G_3	Uwagi
	V	V	V	10^{-2}V	10^{-2}V	Nity	—	—	—	—	
1		0,5	−0,0005	0,05997	0,09	−6,2745	1,5704	−0,7295	9,7923	0,2796	
2	0,75	0,75	0,0113	0,4988	0,08	−6,3899	1,6821	1,5056	3,8671	0,3816	
3		5	0,0147	0,8936	1,43	−3,5569	1,5963	1,2389	2,4000	0,4303	
4		10	0,0407	0,5912	1,17	−3,7570	1,9750	0,3128	0,4861	0,5356	
5	15,0	10	−0,0067	0,7566	1,36	−3,6017	1,8025	0,9824	0,9437	0,5036	
6		15	0,0130	0,4740	0,97	−3,5365	1,8862	0,1868	0,4282	0,5400	
7		15	−0,0339	0,5796	1,43	−3,5569	2,0201	0,1308	0,4992	0,5346	
8		15	0,0037	1,3176	2,62	−2,9475	1,9911	0,1969	−0,3908	0,6191	$L = 10$ $N = 700$
9		20	−0,300	1,419	2,62	−2,9471	1,8495	0,4491	−0,6955	0,6587	
10	30,0	25	−0,0083	1,132	2,19	−3,1266	1,9371	−0,1036	−0,6700	0,5842	
11		25	0,0119	1,0841	3,68	−2,6099	1,9965	0,1995	−0,1047	0,5877	

Krok kwantowania i liczbę ugrupowań histogramu, jak w większości praktycznych przypadków, przyjęto arbitralnie. Zestawienie wzorów na obliczane wielkości zawiera tablica 2, natomiast wybrane wyniki doświadczenia są umieszczone w tablicy 3.

Zależność między entropią ciągłej zmiennej losowej X i zmienną losową równomiernie skwantowaną X', tzn. przy stałym przedziale kwantyzacji d, określa się wzorem [1]:

$$H(X) \leqslant \sum_i [-\log_a P(X = x_i)]P(X = x_i) + \log_a d = H(X'). \tag{22}$$

Wynika z tego, że w zależności od sposobu kwantowania i ugrupowania danych otrzymuje się różne wartości entropii $H(X')$, tzn. estymator entropii nie jest dobrze określony z punktu widzenia statystyki.

Pierwszy składnik sumy w zależności (22) odpowiada entropii dyskretnej zmiennej losowej i zależy od liczby ugrupowań i typu rozkładu. Jest zatem wielkością dodatnią, w programie jest on oznaczony przez H_1. Składnik ten przyjmuje wartość maksymalną dla rozkładu równomiernego.

Drugi składnik wyrażenia (22) może przyjmować wartości dodatnie lub ujemne w zależności od wielkości d. W doświadczeniu przyjmowano:

$$d = \frac{s_{max} - s_{min}}{L}, \tag{23}$$

oznaczenie — w tablicy 2. Ponieważ rząd wielkości d jest $10^{-3} \div 10^{-5}$, więc $\ln d$ jest dużą liczbą ujemną w porównaniu z H_1 i ma decydujący wpływ na wynikową entropię H_2. Poza histogramem obliczono szereg wielkości statystycznych w celu lepszego sklasyfikowania typu rozkładu prawdopodobieństwa błędu:

— redundancja R, dotycząca tylko histogramu, a więc entropii H_1, która jest wskaźnikiem równomierności rozkładu,

— współczynnik symetrii G_1, w przypadku rozkładu symetrycznego $G_1 = 0$; w związku z tym można mówić o asymetrii dodatniej lub ujemnej,

— współczynnik spłaszczenia G_2, w przypadku rozkładu normalnego $G_2 = 0$,

— współczynnik spłaszczenia G_3 — modyfikacja współczynnika G_2 prowadząca do otrzymania zakresu zmienności G_3 w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$; dla rozkładu normalnego $G_3 = 0{,}575$.

Jako test normalności rozkładu zastosowano test chi kwadrat. W celu sprawdzenia hipotezy o statystycznej niezależności kolejnych pomiarów obliczono funkcję autokorelacji dla danej serii pomiarów. Dla przyrządów badanych okazało się, że istnieją różne współczynniki entropii błędów wzdłuż skali pomiarowej. Na przykład dla przyrządu LM-3 nr 3996 na zakresie $0 \div 15$ V otrzymano następujące wyniki:

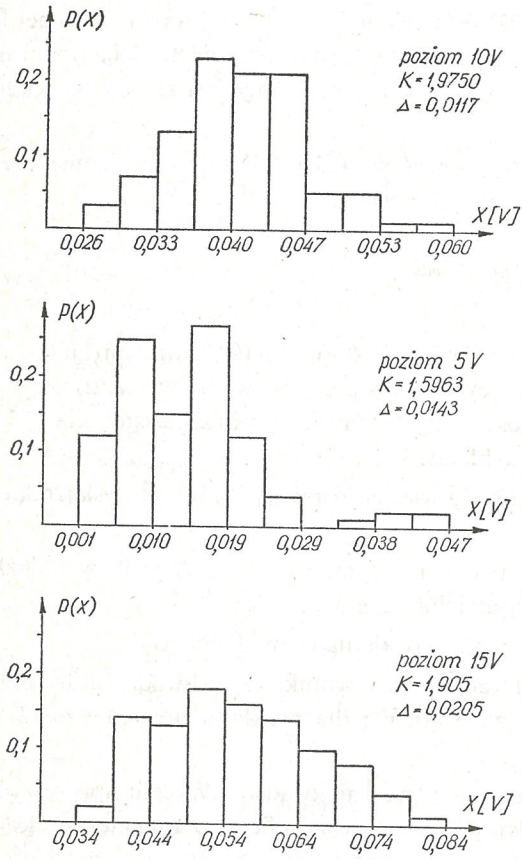
dla 5 V $K = 1{,}5963$ przy $G_3 = 0{,}4306$,
dla 10 V $K = 1{,}9750$ przy $G_3 = 0{,}5356$,
dla 15 V $K = 1{,}9052$ przy $G_3 = 0{,}6492$.

Histogramy błędu dla tego przyrządu przedstawia rys. 7.

Badano również wpływ liczby pomiarów w próbie dla tego samego przyrządu LM-3 nr 3994. Okazało się, że ze wzrostem liczby pomiarów rośnie współczynnik entropii K, tzn. rozkład zbliża się do rozkładu normalnego, zgodnie z prawami wielkich liczb:

$N = 200 \quad K = 1{,}8310,$
$N = 400 \quad K = 1{,}9538,$
$N = 700 \quad K = 1{,}9911.$

Przy sprawdzaniu, czy przyjęta liczba ugrupowań $L = 10$ jest wystarczająca stwierdzono, że zwiększenie jej do 50 lub 100 nieznacznie wpływa na wyniki obliczeń przy dużej liczbie pomiarów $N = 700$. Współczynnik entropii K ma tendencję malejącą ze wzrostem liczby ugrupowań L.



Rys. 7. Histogramy rozkładu błędu dla przyrządu LM-3 nr 3996

W trakcie doświadczenia badano również wartość współczynnika entropii K dla różnych zakresów pomiarowych przyrządów LM-3. I tak np. dla zakresu 0,75 V uzyskano wyniki:

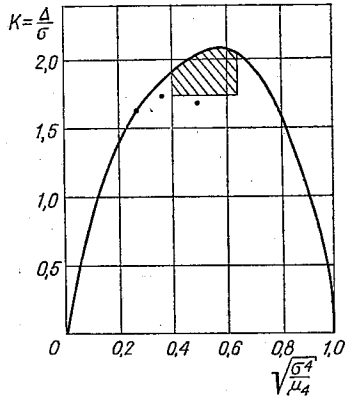
dla 0,5 V $K = 1{,}5704$ przy $G_3 = 0{,}2796,$
dla 0,75 V $K = 1{,}6821$ przy $G_3 = 0{,}3816,$
dla 0,75 V $K = 1{,}6181$ przy $G_3 = 0{,}5396.$

Natomiast dla zakresu 30 V wyniki są następujące:

dla 20 V $K = 1{,}8495$ przy $G_3 = 0{,}6587$,
dla 25 V $K = 1{,}9371$ przy $G_3 = 0{,}5842$,
dla 25 V $K = 1{,}9965$ przy $G_3 = 0{,}5877$.

W wyniku doświadczenia otrzymano około 20% współczynników entropii K o wartościach mniejszych od 1,73 ($K = 1{,}73$ dla rozkładu równomiernego), natomiast pozostałe wartości K zawierały się w granicach $1{,}8 \div 2{,}02$. Współczynnik $K < 1{,}73$ wystąpił dla zakresu 0,75 V i poziomu 5 V na zakresie 15 V. Zmodyfikowany współczynnik spłaszczenia G_3 zawiera się w granicach $0{,}39 \div 0{,}66$.

Wymienione wielkości wyznaczają nam obszar występowania współczynnika entropii K dla przebadanych przyrządów, przedstawiony na rys. 8.



Rys. 8. Obszar występowania współczynnika entropii dla przyrządów LM-3 obszar zakreskowany; kropki — wyniki dla zakresu 0,75 V

2.4. Wnioski

Małe wartości K dla poziomu 0,5 V, 0,75 V, 5 V wynikają z faktu, że histogramy błędów w tych przypadkach mają wyraźne i bardzo ostre maksimum, stąd duże wartości redundancji — rys. 9. Jest to spowodowane przede wszystkim występowaniem kilku błędów przypadkowych o dużych wartościach, co jest związane z dokładnością rejestracji wskazań oraz z błędem odczytu wskazania miernika badanego. Dlatego wyniki te są mało reprezentatywne dla przyrządów użytych w doświadczeniu.

Większość uzyskanych współczynników entropii zmienia się od 1,8 do 2,02, co jest zgodne z wzorem (17) i świadczy to, że do badań i atestacji tych przyrządów należy przyjmować przedział co najwyżej 2σ, który najwłaściwiej charakteryzuje błędy przypadkowe dla woltomierzy LM-3.

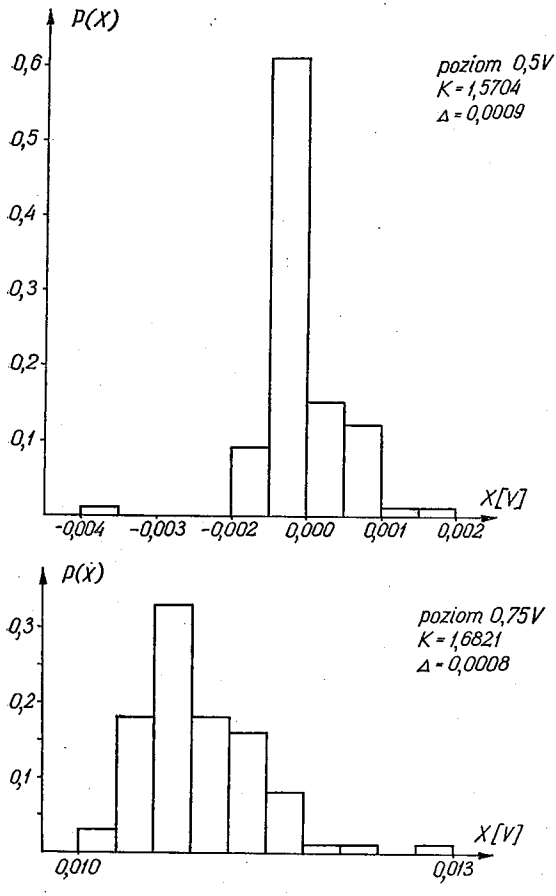
Wynik testu chi kwadrat nie daje podstaw do odrzucenia hipotezy, że rozkłady błędu nie są gaussowskie, nawet przy dużych poziomach ufności.

Redundancja przyjmująca wartości do 0,33 (wyjątek 0,48 dla poziomu 0,5 V, co jest nietypowym wynikiem) świadczy, że rozkłady można uważać za równomierne.

Powyższe testy wskazują, że otrzymane rozkłady błędów są pośrednie między rozkładami równomiernym i gaussowskim, tzn. dla tych rozkładów test chi kwadrat jest mało precyzyjny.

Obliczone funkcje autokorelacji dla poszczególnych serii pomiarów wykazały w zasadzie statystyczną niezależność pomiarów, tzn. zgodnie z założeniem badano próby proste.

We wszystkich przypadkach otrzymano wyniki, potwierdzające podaną przez wytwórcę klasę przyrządów.



Rys. 9. Histogramy rozkładu błędu na zakresie 0,75 V

2.5. Podsumowanie

Autorzy stwierdzili możliwość i potrzebę zastosowania informacyjnej teorii pomiarów do badania błędów przypadkowych przyrządów pomiarowych. Z analizy wyników można wysnuć wniosek, że przy udoskonaleniu organizacji pomiarów i opracowaniu wyników zastosowana metoda może być użyteczna w pracy działów kontroli technicznej i placówek metrologicznych.

Wprowadzony w pracy [3] współczynnik K ma jednak niedostatecznie zbadane własności statystyczne, stąd celowym wydaje się opracowanie dodatkowych założeń, aby uwzględnić m.in. określanie przedziałów ufności.

Ponieważ maksymalny współczynnik K równa się 2,07 (rozkład normalny) a w praktyce okazało się, że wyniki grupują się poniżej tej wartości, więc właściwym wydaje się przyjęcie przedziału 2σ jako standardowego przedziału, charakteryzującego błąd przypadkowy przyrządów pomiarowych.

LITERATURA

1. J. Seidler, *Teoria kodów*, PWN, Wrocław — Warszawa 1965.
2. St. Dymowski, *Elementy teorii informacji*, Wydawnictwa PW, Warszawa 1971.
3. P. W. Nowickij, *Osnowy informacjonnoj tieorii izmieritielnych ustrojstw*, Energia, Leningrad 1968
4. M. Pryweewa-Iwanowa, E. J. Korol. *Sumirowanie słučajnych pogreš'nostej z eksponencialnymi i rownomiernymi raspriedielenijami*, Metrologija 2/1973.
5. C. Hibner, *Teoria informacji w metrologii*, PAK 1/1972.
6. C. Hibner, *Ocena błędu pomiaru z uwzględnieniem wpływu rozkładu mierzonej wielkości*, PAK 2/1972.
7. K. Kumunziew, V. Stojanow, *Primenenie informacionnogo kriterija dlia optimizacji izmeritialnych ustrojstw*, TR. UFIM. AVIAC JN-TA, 1973 wyp. 62.
8. St. Orzepowski, *O informacyjnej teorii pomiaru*, PAK 2/1973.
9. M. Fisz, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa 1970.
10. R. Deutsch, *Teoria estymacji*, PWN, Warszawa 1969.

S. JANKOWSKI, M. LEPA

MEASUREMENT INFORMATION THEORY APPLIED TO MEASUREMENT INSTRUMENT ACCURACY INVESTIGATION

Summary

This paper describes the basic ideas of the measurement information theory. This approach permits to unify measurement theory and general system and signal theory. The measurement instrument accuracy determination procedure based on the enthropy error measure is presented. The application of the measurement information theory to deflection instruments accuracy investigation is illustrated by the results of numerous experiments. Some of the experimental results are also included. Thus the appropriateness of the extension of the enthropy error measure application in practice is proved, particularly for automatic checking of measurement instruments.

S. JANKOWSKI, M. LEPA

APPLICATION DE LA THÉORIE INFORMATIQUE DE MESURAGE POUR EXAMINER LA PRÉCISION DE APPAREILS DE MESURE

Résumé

Dans cet article on a donné les principes de la théorie informatique de mesurage.

Cette méthode permet de lier la théorie de mesurage à la théorie générale des signaux et des systèmes. On a présenté le procédé de la définition de la précision des appareils de mesure à partir de la mesure de l'entropie de l'erreur. Se basant sur les résultats de nombreuses expériences, dont une partie a été citée dans l'article, on a démontré l'application de la théorie informatique de mesurage à l'examen des appareils à déviation. De cette manière on a prouvé l'utilité de l'application générale de la mesure de l'entropie de l'erreur, surtout pour le contrôle automatique des appareils de mesure.

S. JANKOWSKI, M. LEPA

ANWENDUNG DER INFORMATIVEN MEßTHEORIE ZUR GENAUIGKEITSPRÜFUNG VON MEßGERÄTEN

Zusammenfassung

In obiger Arbeit wurden die Hauptbegriffe der informativen Meßtheorie diskutiert. Es wurde das Bestimmungverfahren für die Genauigkeit der Meßgeräte auf Grund entropen Fehlermaßes dargestellt. Anhand einer großen Anzahl von Versuchen, deren Ergebnisse teilweise im Aufsatz angeführt werden, wurde die Anwendung der informativen Meßtheorie bei der Prüfung von Auslenkmeßgeräten gezeigt. Hiermit wurde die Zweckmäßigkeit einer breiteren praktischen Nutzung des entropen Fehlermaßes nachgewiesen, insbesondere betrifft dieses die automatische Kontrolle von Meßgeräten.

С. ЯНКОВСКИ, М. ЛЕПА

ПРИМЕНЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННОЙ ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

Резюме

В статье описаны основные понятия информационной теории измерений. Такой подход разрешает связать теорию измерений с общей теорией систем и сигналов. Представлена процедура определения точности измерительных приборов на основании энтропийного значения погрешности. На примере большого числа экспериментов, часть результатов которых приведено в статье, показано применение информационной теории измерений для исследования электромеханических приборов. Таким образом доказана целесообразность более широкого использования энтропийного значения погрешности в практике, особенно для автоматического контроля измерительных приборов.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 2, ss. 319-337

621.317.08

Wybrane zagadnienia struktury systemów pomiarowych

JÓZEF TRZEŚNIOWSKI (WARSZAWA)

Ministerstwo Nauki, Szkolnictwa Wyższego i Techniki

Otrzymano 24.10.1974

W artykule omówiono ogólne wymagania stawiane systemom. Rozpatrzono niektóre problemy dotyczące ogólnej struktury, podano przykłady zastosowań systemów wraz z ich opisem. Poruszono niektóre zagadnienia niezawodności, jako funkcji użytych elementów i złożoności systemu.

1. WSTĘP

Zjawiska życia i pracy ludzi z końca XX wieku wymagają nowych środków zapewniających możliwość poznawania zachodzących zdarzeń. Od ludzi nauki wymaga się wciąż nowych wniosków, zapewniających coraz szybszy rozwój. Od przemysłu wymaga się wyrobów coraz nowocześniejszych, lepszych jakościowo, otrzymywanych ekonomiczniej i przy wydajniejszych procesach technologicznych. Wszystko zaś, co jest tworzone wymaga ciągłej kontroli czy dobrze służyć będzie wymogom stawianym przez człowieka, czy zjawiska towarzyszące zachodzącym procesom nie naruszają naturalnego otoczenia, czy nie zagrażają istnieniu ludzkiemu.

Dla poznania zjawisk nas otaczających, a zwłaszcza poznania rzeczy nowych trzeba badać otaczający świat. Po to, by coś poznać trzeba mierzyć. Mierzymy dziś niemal wszystko, a czego nie mierzymy, to albo tego nie znamy, albo jeszcze nie posiedliśmy wiedzy o metodach pomiaru. Fizyk Kelwin powiedział: „Jeśli nie potrafisz czegoś zmierzyć czy wyrazić w cyfrach, wiedza twoja jest skąpa, niezadawalająca". Decyzje współczesnego człowieka oparte są lub być powinny na wiedzy i praktyce, stanowić wybór dokonywany w wyniku interpretacji zjawisk, które się widzi lub zna.

Temu celowi winno służyć wyposażenie warsztatu pracy naukowca, badacza, inżyniera i technika czy ekonomisty. W ostatnich dziesięcioleciach wynaleziono lampę elektronową, radio, telewizję, odkryto bioprądy w organizmie ludzkim, dokonano rozbicia atomu itd. Zjawiska towarzyszące tym faktom wymagają nowych i wciąż nowych technik poznawczych. Głównym przedmiotem zainteresowań nauki i techniki minionego okresu były pojedyncze zjawiska. Zainteresowanie uczonych czy techników koncentrowało się na obserwacji jednej lub niewielu charakterystycznych wartości jednej czy kilku wielkości fizycznych. Zainteresowania te dotyczyły głównie jednego punktu obserwacji.

Dziś interesują badaczy zjawiska grupowe (kompleksowe) złożone z wielu zjawisk elementarnych. Dla identyfikacji tych zjawisk konieczne jest równoczesne dokonywanie obserwacji w wielu punktach rozłożonych przestrzennie, w każdym z tych punktów interesujące są przebiegi czasowe dużej ilości wielkości fizycznych. Nowe procesy technologiczne wymagające nowych metod sterowania zrodziły zapotrzebowanie na nowy rodzaj techniki pomiarowej. Omówione w dalszej części artykułu przykłady systemów pomiarów składu chemicznego stali i bilansowania czynników energetycznych ilustrują te tendencje.

Kilkanaście lat wstecz nie było jeszcze stalowni konwertorowo-tlenowych i był czas kilku godzin na analizy składu stali, obecnie proces technologiczny wymaga aby analizy te wykonywano w ciągu kilku minut. Dziś w przemyśle trzeba mierzyć wiele wielkości jednocześnie, oceniać poszczególne wartości i wyciągać wnioski wynikające ze wzajemnych związków między nimi. Kilkadziesiąt, a nawet kilkanaście lat temu dla pomiarów wielkości fizycznych zestawiano układy pomiarowe zawierające kilka obwodów z prostymi miernikami, dokonywano odczytów wartości, szacowano błędy, sporządzano wykresy i wyliczenia. Niektórych zjawisk nie obserwowano w ogóle, bo ich nie znano lub nie było takich potrzeb. Nie mierzono ich wartości, np. nie mierzono bioprądów serca, mózgu, nie mierzono zjawisk zachodzących w reaktorach atomowych.

Prowadzenie działalności badawczej lub technicznej wymaga dysponowania skomplikowanymi, bardzo rozbudowanymi zespołami urządzeń pomiarowych. Ich mnogość, złożoność obsługi, miejsce potrzebne na zainstalowanie, skłoniły producentów do szukania rozwiązań, które dawałyby możliwość pomiarów wielu parametrów lub obmiaru całych obiektów w najbardziej efektywny i ekonomiczny sposób. Pojawiły się więc tzw. *systemy pomiarowe.*

Przy pomocy dość dużego zestawu funkcjonalnych jednostek aparatury pomiarowej i urządzeń pomocniczych tworzy się zautomatyzowane systemy pomiarowe. System winien zawierać przyrządy, za pomocą których mogą być mierzone i automatycznie rejestrowane następujące znormalizowane wielkości: napięcie elektryczne, natężenie prądu, oporność, częstotliwość, odcinki czasu. Pomiar innych wielkości fizycznych wymaga wstępnego przetworzenia ich w te wielkości znormalizowane.

2. POJĘCIE SYSTEMU POMIAROWEGO

Pojęcie *system* jest tak szeroko stosowane, że zdefiniowanie go w odniesieniu do pomiarów ma bardzo istotne znaczenie. Mówimy powszechnie o różnych systemach, np. system gospodarczy, system płac, system wodny, system energetyczny, system informatyki, system monetarny, itd.

W dalszej części pojęcie *system pomiarowy* będzie używane w znaczeniu *zbioru funkcjonalnych przyrządów objętych wspólnym sterowaniem zewnętrznym lub wewnętrznym, tworzących jedną organizacyjną całość, przeznaczoną dla pomiaru, zbierania, przetwarzania, zapisu mierzonych wielkości w celu określenia stanu badanego obiektu.*

Z podanego wyżej określenia systemu pomiarowego wynika, że głównym *ośrodkiem*, dla którego tworzymy dany system jest obiekt obserwowany. Takie podejście nasuwa wymaganie dokładnego sformułowania celu badań.

3. STRUKTURA SYSTEMÓW — PRZYKŁADY ROZWIĄZAŃ

3.1. Uwagi ogólne

Zadanie systemu pomiarowego polega na realizacji następującej funkcji:

$$Y_m(X_n) = F_m[X_n(t)], \tag{1}$$

gdzie:

$Y_m(X)$ — wielkości wyjściowe będące funkcją X, $m = 1, 2 \ldots k$,

$X_n(t)$ — funkcje wejściowe, $n = 1, 2 \ldots l$.

Sformułowanie to nie daje odpowiedzi na temat realizacji konstrukcyjnej systemu. Opracowywanie aparatury przeznaczonej do zastosowania w różnych systemach pomiarowych musi uwzględniać realizację funkcji cząstkowych systemów i zapewniać uzyskanie obniżenia kosztów budowy w stosunku do realizacji pojedynczych przyrządów. Przyrządy stanowiące części składowe systemów pomiarowych spełniają określone funkcje — pomiarowe, przekształcające, przełączające, zapisujące, przeliczające itp. oraz powinny odpowiadać pewnym wymogom konstrukcyjnym np. pod względem wymiarów, urządzeń połączeń oraz sygnałów pomiarowych.

Zestaw aparatury i urządzeń pomocniczych wchodzących w skład systemu będzie zależał od jego przeznaczenia i rodzaju. Ogólnie systemy można podzielić:

a) ze względu na charakter realizowanego zadania pomiarowego na:
   - systemy obserwacyjne, w których źródłem sygnałów jest obiekt obserwowany,
   - systemy identyfikacyjne, w których zwykle bada się odpowiedź obiektu na sygnały wymuszenia, np. testery układów scalonych,
   - systemy dostarczające informacji dla procesów sterowania,

b) ze względu na charakter powiązań z otoczeniem na:
   - systemy autonomiczne, np. system pomiarów meteorologicznych, system pomiaru składu chemicznego stali,
   - systemy sprzężone, np. system bilansowania czynników energetycznych współpracujący z systemem przetwarzania danych,

c) ze względu na sposób realizacji pomiaru na systemy:
   - z równoczesną realizacją wszystkich pomiarów,
   - z kolejną realizacją pomiarów,
   - mieszane, tzn. że punkty pomiarów zostały pogrupowane i pomiary są realizowane w grupach równocześnie, ale grupami kolejno,

d) ze względu na mierzone wielkości:
   - dla pomiaru jednej wielkości fizycznej,
   - dla pomiaru wielu wielkości fizycznych,

e) ze względu na operacje realizowane na mierzonych wielkościach:
   - z próbkowaniem,
   - z dyskretyzacją,
   - z realizacją działań arytmetycznych,
   - z określeniem charakterystyk statycznych,
   - z określeniem funkcji analitycznych.

Często od systemu wymaga się by był zbudowany w taki sposób, by zapewniał wysoki

stopień automatyzacji pomiarów, sterowanie z pulpitu operatora, dowolne programowanie, automatyczne przełączanie punktów pomiarowych i zakresów pomiarów.

Powyższe osiąga się w systemach przez stosowanie programowanych urządzeń sterujących i przełączających lub bezpośrednią współpracę z komputerem.

3.2. Struktura systemu

Ilość aparatury wchodzącej w skład systemów zależy od funkcji, jakie system ma spełniać. Budowany system dla rozwiązania danego zadania pomiarowego winien być najbardziej optymalny. Przeprowadzono analizę systemów pomiarowych oferowanych w ostatnich latach do sprzedaży przez dziewięć zagranicznych firm o prestiżu światowym. Są to firmy: Ferranti, Hewlett-Packard, Dynamco, Solartron, Fairchild, Digitec, Tekelec-Airtronic, Vidar, Hilger i Watts. Podsumowano własne doświadczenia, dokonano przeglądu krajowych opracowań w OBR przy „Mera-Elmat" we Wrocławiu i w Przemysłowym Instytucie Elektroniki przy CEMI w Warszawie.

Analiza oferowanych przez różne firmy systemów wykazuje, że w skład każdego systemu pomiarowego wchodzą następujące zespoły:

— przełączania kanałów,
— sterowania i programowania pracy,
— zegar, przeważnie cyfrowy,
— woltomierz cyfrowy lub częstościomierz,
— drukarka — wierszowa, kolumnowa lub maszyna do pisania,
— zespoły zasilające.

W drugiej kolejności systemy są wyposażone w układy wybierania poziomu i układy ręcznego nastawiania, kontroli i wprowadzania komentarza w procesie pomiarów.

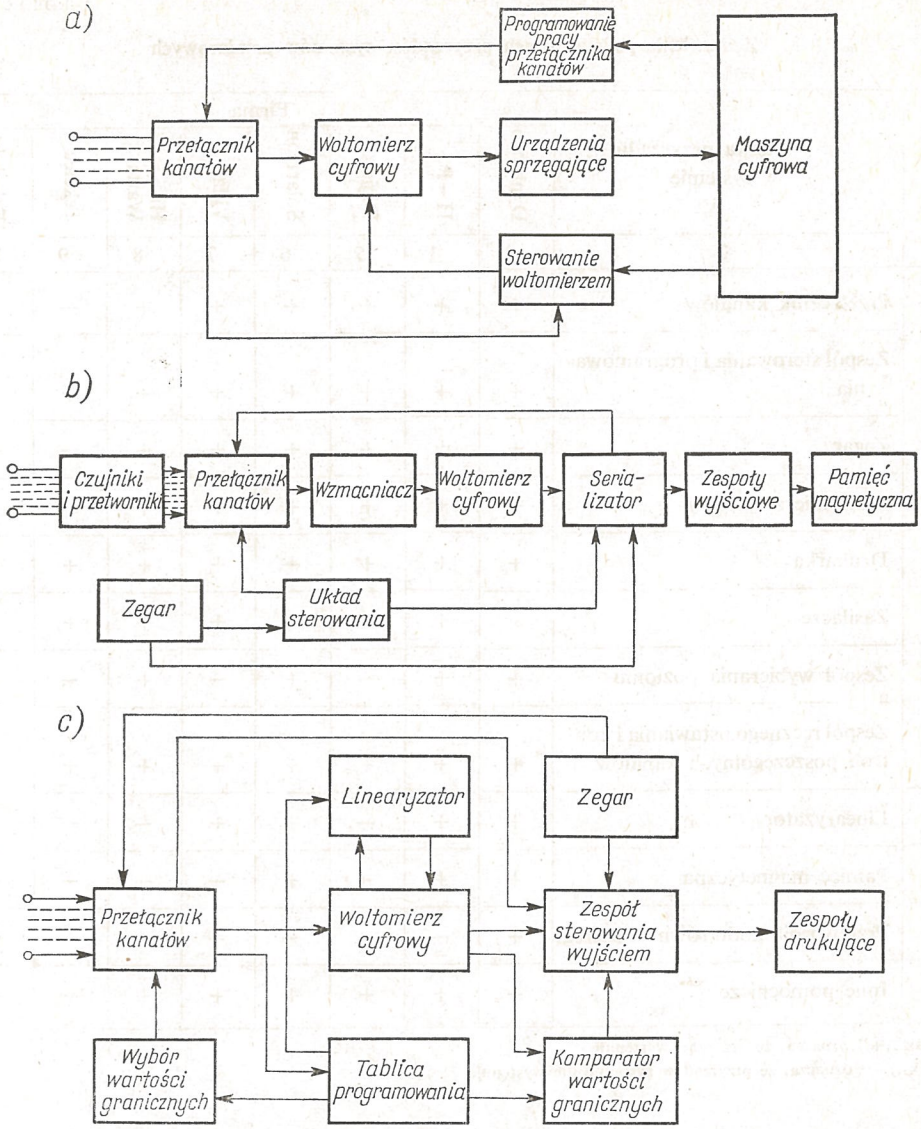
Część firm oferuje systemy z zapisem wyników w pamięci magnetycznej, z odczytem na display'ach, rejestratorach x-y wyposażonych w linearyzatory wielkości mierzonych oraz inne urządzenia pomocnicze. Przykładowe schematy blokowe systemów firm Hewlett-Packard, Dynamco, Solartron podaje rysunek 1 a,b,c. Tablica 1 podaje przegląd ogólny użytych rodzajów przyrządów i zespołów w systemach ośmiu przodujących w tym zakresie firm światowych. Tablica sporządzona została na podstawie katalogów z lat 1972—1973.

Na wejście systemu pomiarowego może być włączone $1 \div n$ sygnałów z punktów pomiarowych. W najprostszym przypadku będą to sygnały analogowe, takie jak napięcie, prąd, oporność, które zostają przetworzone na informację cyfrową w woltomierzu cyfrowym i zapisane przez urządzenia rejestrujące.

Schemat blokowy systemu pomiarowego o takim algorytmie działania przedstawia nr 2.

System taki może być rozbudowywany o nowe urządzenia, zgodnie z ogólną tendencją doboru systemu w zależności od postawionego zadania pomiarowego. Rozbudowa może być dość duża, a system pomiarowy może osiągnąć strukturę jak na rys. 3.

W tym systemie sygnały analogowe i cyfrowe są podawane w liczbie od 1 ... n z czujników bezpośrednio lub w liczbie od 1 ... k za pośrednictwem przetworników do komutatora punktów pomiarowych. Komutator łączy kolejno lub zgodnie z programem punkty



Rys. 1. Schematy blokowe systemów: a) HP-9600, b) typu 6500 f-my Dynamco, c) typu LY 1987 Compact 2 f-my Solartron

pomiarowe z przyrządem pomiarowym. Równanie wg którego pracuje komutator ma postać:

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t) & \text{dla} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \\ y_2(t) & \text{dla} \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n(t) & \text{dla} \quad t_{n-1} \leqslant t \leqslant t_n \end{cases} \tag{2}$$

Tablica 1

Zestawienie podstawowych przyrządów systemów pomiarowych

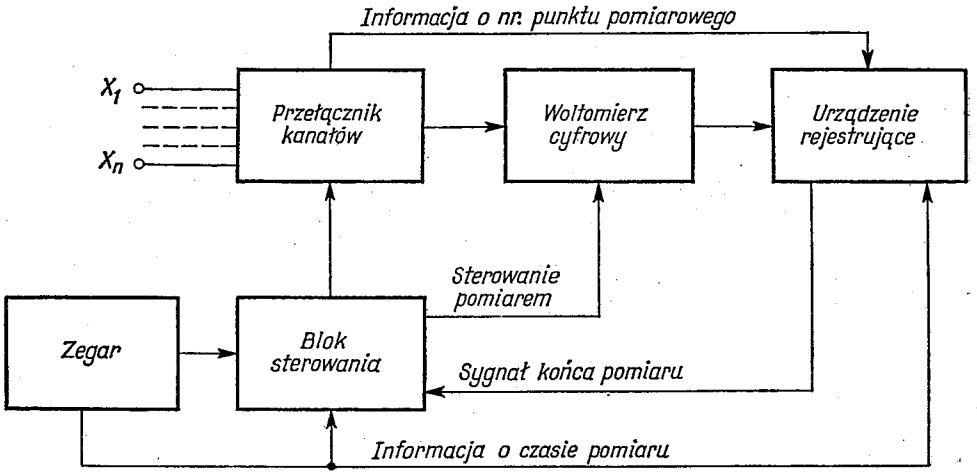
Lp.	Nazwa przyrządu w systemie	Firma							
		Dynamco	H—P	Digitac	Solartron	Vidar	Hil. Watts	Tekelec	Fairchild
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Przełącznik kanałów	+	+	+	+	+	+	—	+
2	Zespół sterowania i programowania	+	+	+	+	+	+	+	+
3	Zegar	+	+	+	+	+	+	—	+
4	Woltomierz cyfrowy	+	+	+	+	+	+	+	+
5	Drukarka	+	+	+	+	+	+	+	+
6	Zasilacze	+	+	+	+	+	+	+	+
7	Zespół wybierania poziomu	+	+	—	+	—	+	—	+
8	Zespół ręcznego ustawiania i kontroli poszczególnych kanałów	+	+	+	+	+	+	+	+
9	Linearyzator	+	+	—	+	+	—	—	—
10	Pamięć magnetyczna	+	+	—	+	—	—	—	—
11	Przetwornik kodu równ. w szereg.	+	—	—	—	—	—	—	—
12	Inne pomocnicze	+	+	+	+	+	+	+	+

Znak „+" oznacza, że przyrząd występuje,
znak „—" oznacza, że przyrząd w systemie nie występuje

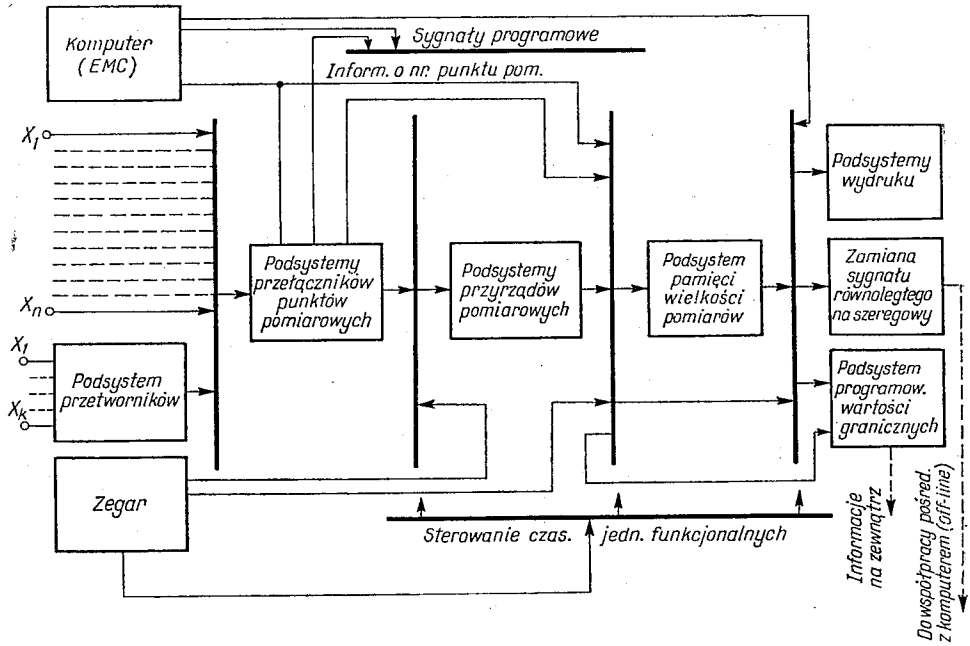
gdzie:

$y(t)$ — funkcja na wyjściu komutatora,
$y_1(t) \ldots y_n(t)$ — wielkości wejściowe komutatora,
t — czas.

Omawiając warunki pracy komutatora można powiedzieć, że stosunkowo łatwo jest przełączać sygnały analogowe „wysokonapięciowe". Rozumie się tu takie sygnały, dla których spadki napięć na urządzeniach łączących, zakłócenia w liniach przesyłowych są do pominięcia w stosunku do sygnału mierzonego. Komutacja sygnałów o niskim poziomie, tj. o wartościach porównywalnych z sygnałami zakłócającymi, stwarza wiele trudności i stawia dodatkowe wymagania. Zachodzi tu potrzeba budowy urządzeń filtrujących i wzmacniaczy sygnałów.



Rys. 2. Schemat ogólny prostego systemu pomiarowego



Rys. 3. Schemat blokowy rozbudowanego systemu pomiarowego

Dla uzyskania dobrych warunków komutacji sygnałów analogowych powinny być zapewnione przez komutator:

— duża impedancja w stanie rozwarcia.,
— mała i stała impedancja w stanie zwarcia,
— duża niezawodność,
— duża szybkość.

Obecnie w technice stosuje się rozwiązania komutatorów oparte na systemach stykowych i bezstykowych — półprzewodnikowych. Pojawiają się pierwsze próby z komutatorami opartymi na zjawiskach optoelektroniki z zastosowaniem transoptorów.

Analizy pracy budowanych obecnie komutatorów wykazują, że w komutacji analogowej najlepsze warunki przełączania uzyskuje się dla 8 ... 256 punktów pomiarowych na odległościach do 1000 m, przy czasie przełączania rzędu 1 ms.

Oprócz sygnałów analogowych na wejście systemu mogą być podawane sygnały cyfrowe. Źródłami sygnałów cyfrowych mogą być:
— wyłączniki,
— silniki,
— przetworniki położenia,
— przetworniki A/C.
Sygnały te mogą występować w postaci:
— statycznych sygnałów dwuwartościowych,
— sygnałów o wartościach przypadkowych,
— sygnałów cyfrowych w kodzie unitarnym.

Komutacja tych sygnałów może odbywać się w układach tranzystorowych. Przekazywanie sygnałów może mieć miejsce na znacznie większe odległości. Są one mniej wrażliwe na sygnały zakłócające.

Ogólnie można stwierdzić, że dobór komutatora zależy od:
— szybkości komutacji,
— poziomu i rodzaju sygnałów wejściowych,
— dopuszczalnych kosztów realizacji.

Sygnały pomiarowe z komutatora są podawane do podsystemów pomiarowych. Najczęściej stosowanymi przyrządami pomiarowymi są woltomierz cyfrowy lub częstościomierz. Rozwiązania woltomierza i częstościomierza w postaci najbardziej uniwersalnej pozwalają poprzez układy sterowania na elastyczne wybieranie wariantów rodzaju pomiarów.

3.2.1. Woltomierz cyfrowy

W ostatnich latach najczęściej stosowanym woltomierzem jest woltomierz całkujący oparty o zasadę podwójnego całkowania. Ten rodzaj przyrządu ma wiele zalet; z punktu widzenia zastosowań przemysłowych główną zaletą jest niezależność wskazań od zakłóceń zewnętrznych.

Schemat blokowy woltomierza cyfrowego przedstawia rys. 4.

Przy pewnych założeniach idealizujących przebieg cyklu pomiarowego będzie miał charakterystyki jak na rys. 5.

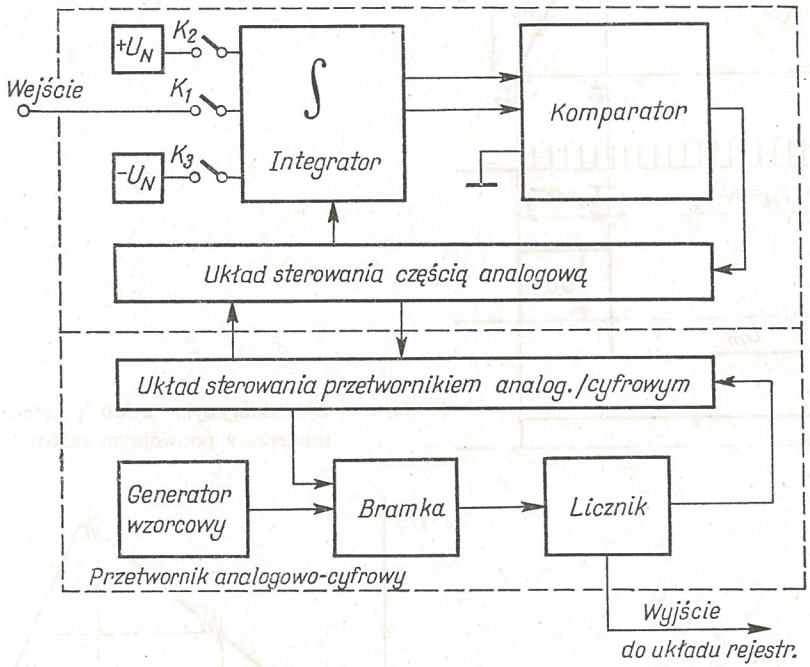
Założenia idealizujące:
a) integrator posiada idealną charakterystykę,
b) przełączniki K_1, K_2, K_3 działają idealnie i bez opóźnień,
c) komparator posiada poziom porównania „Zero",
d) $+U_N$, $-U_N$ mają stałe SEM,

e) układy sterowania działają bez opóźnień,
f) generator wzorcowy ma stałość częstotliwości nieskończenie wielką,
g) bramka działa bez opóźnień.

Cykl pomiarowy rozpoczyna się po przyłożeniu na wejście napięcia U_x i zamknięciu klucza K_1. Po scałkowaniu napięcia wzorcowego i napięcia mierzonego oraz dokonaniu niezbędnych operacji matematycznych na wyjściu woltomierza otrzymujemy:

$$n_m \approx B \cdot U_x, \tag{3}$$

gdzie:
n_m — ilość impulsów wskazana przez wskaźnik woltomierza,
B — stała proporcjonalności,
U_x — mierzone napięcie.



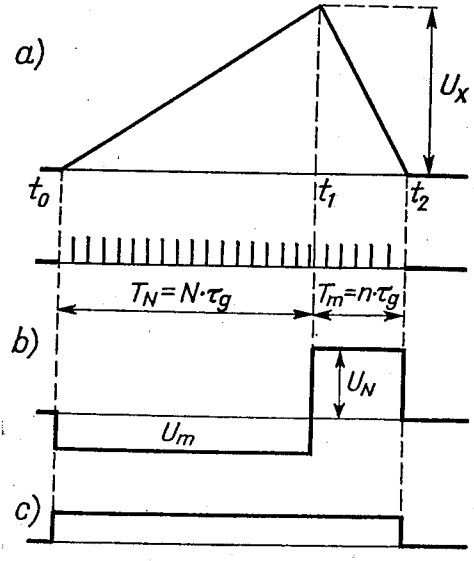
Rys. 4. Schemat blokowy woltomierza cyfrowego całkującego

Jest to przybliżony wynik pomiaru. Przybliżenie wynika stąd, że okres całkowania napięcia mierzonego może być określony z dokładnością do jednego τ (gdzie τ — okres drgań generatora wzorcowego). Oprócz wynikającego z określenia dokładności całkowania błędu, każdy integrator posiada stany nieustalone, które powodują, że mogą występować i występują uchyby poziomu i przesunięcia.

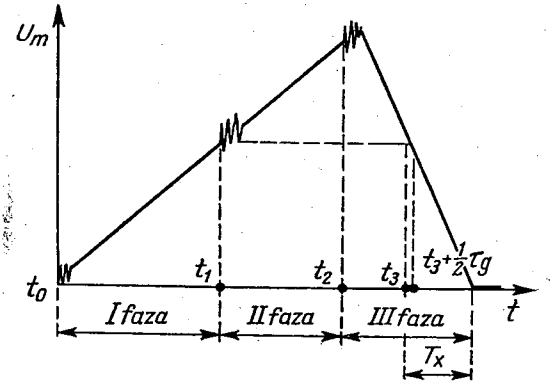
Podczas prowadzonych w „Meratronik" w Warszawie prac badawczych zostały opracowane układy woltomierzy, w których zmieniono organizację przetwarzania wraz z zastosowaniem oryginalnej metody potrójnego całkowania. Metoda ta została przez firmę opatentowana w kraju i za granicą.

Cykl potrójnego całkowania składa się z:
a) fazy całkowania napięcia przetwarzanego,
b) fazy całkowania napięcia odniesienia o tej samej co napięcie mierzone polaryzacji,
c) fazy całkowania napięcia odniesienia o przeciwnej niż napięcie mierzone polaryzacji.

Rys. 6 przedstawia przebieg napięcia na wyjściu integratora przy potrójnym całkowaniu. Moment t_3 jest dobrany tak, aby był początkiem przetwarzania napięcia mierzonego na odcinek czasu, a ten z kolei, na wartość cyfrową. Dla określenia odpowiednich czasów przełączania i wielkości tej nowej metody napięć przełączanych przeprowadzono odpowiednie analizy w czasie opracowywania.



Rys. 5. Charakterystyka cyklu pomiarowego woltomierza z podwójnym całkowaniem

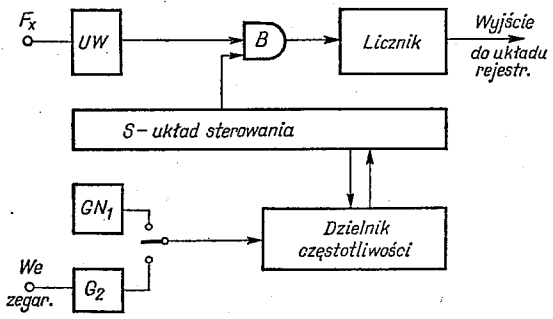


Rys. 6. Charakterystyka cyklu pomiarowego przy potrójnym całkowaniu

3.2.2. Częstościomierz

Jeśli postać mierzonego sygnału ma charakter częstotliwości f_x, to stosuje się wówczas częstościomierz-czasomierz, którego strukturę przedstawia rys. 7.

Dokładność pomiaru częstotliwości zależy od stałości źródła sygnałów wzorcowych oraz jakości pracy układu formowania *UW* i bramki *B*. Przy pomocy częstościomierzy-czasomierzy mierzy się częstotliwość, czas i stosunek częstotliwości.



Rys. 7. Struktura blokowa częstościomierza

3.2.3. Rejestratory

Zapis wartości pomiarowych realizowany jest przez:
— podsystemy drukujące na taśmie lub arkuszu,
— dziurkarki taśmowe z rejestracją danych na taśmie perforowanej lub karcie obrzeżnie dziurkowanej,
— rejestrację na taśmach pamięci magnetycznych.

Oprócz wymienionych mogą być stosowane wyświetlacze ekranowe, rejestratory $x-y$ oraz wyświetlacze z dużymi wskaźnikami cyfrowymi.

Podsystemy drukujące determinowane są przez następujące parametry:
— zasadę druku,
— pojemność druku,
— szybkość druku,
— liczbę kolumn,
— przyporządkowanie kolumn informacji wejściowej,
— kolejność druku kolumn,
— szerokość zapisu
— szybkość biegu mechanizmu druku.

Podsystemy pamięci wartości pomiarowych cechują:
— pojemność pamięci,
— rodzaj kodowania wartości wejściowych,
— czas przejmowania informacji zwykle w μs,
— rodzaj kodowania wartości wyjściowych.

3.2.4. Komparatory

Na wyjściu systemów stosuje się czasem komparatory wartości granicznych, dla których określa się:
— ilość wartości granicznych,

— ilość maksymalnie ocenianych miejsc informacji,
— biegunowość,
— sposób podawania wyceny wartości granicznych.

Komparator wartości granicznych winien umożliwiać: ręczne nastawianie wartości granicznych, zdalne sterowanie i wyprowadzanie wyników.

3.2.5. Urządzenia sterowania

Całością pracy systemu mogą sterować:
— urządzenia do sterowania przebiegiem pomiarów, tzw. urządzenie sterujące,
— specjalnie zaprojektowany procesor,
— elektroniczna maszyna cyfrowa w bezpośredniej współpracy.

3.2.6. Zegar cyfrowy

Do podsystemu sterowania zaliczyć należy zegar cyfrowy, którego zadaniem jest:
— podawanie czasu: rok, miesiąc, dzień, godzina, minuta, sekunda, itd.,
— wprowadzanie specjalnych sygnałów sterujących do programowanego wyboru punktów pomiarowych,
— wprowadzanie sygnałów taktujących,
— wprowadzanie sygnałów wysterowania zewnętrznego: start, stop, czas zerowy, itp.

3.2.7. Współpraca z maszynami cyfrowymi

Systemy pomiarowe, w których do bezpośredniej współpracy włączono elektroniczne maszyny cyfrowe, dokonują:
— zbierania, oceny i korekty wartości mierzonych,
— obliczania parametrów technicznych, technologicznych i ekonomicznych,
— nadzoru nad wartościami przewidzianymi do sygnalizacji, rejestracji i obróbki przekroczeń wartości granicznych,
— zmiany algorytmu zapisu danych pomiarowych.

Wyniki pomiarów wybranych wielkości fizycznych mogą być rejestrowane w urządzeniach umożliwiających pośrednią współpracę z maszynami cyfrowymi lub mogą być za pośrednictwem systemów telekomunikacyjnych przekazywane do nadrzędnych systemów obróbki danych.

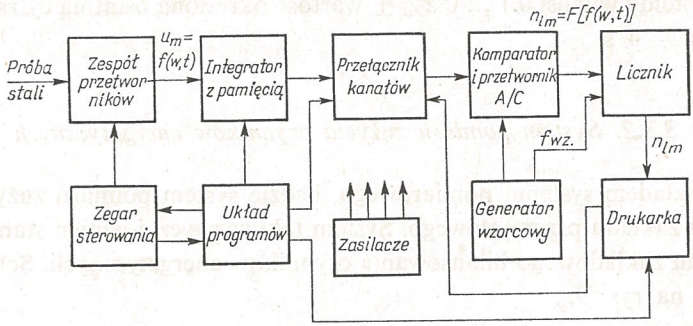
3.3. Przykłady

3.3.1. System pomiaru składu chemicznego stali

System pomiarowy angielskiej firmy Hilger i Watts przeznaczony do analizy składu chemicznego stali jest klasycznym przykładem zastosowań w procesach technologicznych, gdzie szybkość pomiaru decyduje o jakości stali czy żeliwa oraz o szybkości wytopu, co z kolei ma ogromne znaczenie w procesie wzrostu wydajności pracy.

Czas potrzebny na wykonanie analizy składu chemicznego stali, w zakresie trzech podstawowych pierwiastków, kontrolowanych tradycyjnymi metodami analizy mokrej wynosi ca 40 min. Czas analizy w omawianym systemie pomiarowym ca 1 min dla siedmiu pierwiastków z dokładnością wiele razy większą.

Schemat blokowy przedstawia rys. 8.



Rys. 8. Schemat blokowy systemu automatycznej analizy składu chemicznego stali

Próbka stali zostaje poddana iskrzeniu w specjalnym układzie generatora iskry. Wytworzone w czasie iskrzenia promienie świetle są rozszczepiane na siatce dyfrakcyjnej i poprzez zespół luster skierowywane do fotopowielaczy rozmieszczonych na łuku Rolanda w zależności od długości fali świetlnej, która jest funkcją rodzaju pierwiastka. Tu są przetwarzane na prąd elektryczny ładujący kondensatory o wysokiej stabilności.

Można napisać:

$$i = f(w, t), \tag{4}$$

gdzie:

w — zawartość % m-tego pierwiastka w stali,

t — czas.

Ponieważ mamy m pierwiastków, będziemy mieli:

$$i_m = f_m(w, t). \tag{5}$$

Po zakończeniu procesu iskrzenia, kondensatory uzyskują stan naładowania; mówimy wówczas o napięciu na kondensatorach

$$U_m = f_m(w, t). \tag{6}$$

Należy szybko mierzyć napięcie kondensatorów, gdyż w funkcji czasu zmieniają swoją wartość przez rozładowania w obwodach zewnętrznych.

Układ programowania i sterowania uruchamia przełącznik kanałów, a następnie pozostałe zespoły, odbywają się pomiary napięć kondensatorów dla poszczególnych pierwiastków w stosunku do wzorcowej wartości napięcia ustalonego dla żelaza.

Na wejście licznika podana jest liczba impulsów n_L będąca funkcją zależną od: zawartości pierwiastka w stali. Można to wyrazić:

$$n_{Lm} = F_m[f_m(w, t)]. \tag{7}$$

Jeśli założymy liniową zależność ilości impulsów od napięcia na kondensatorze, to:

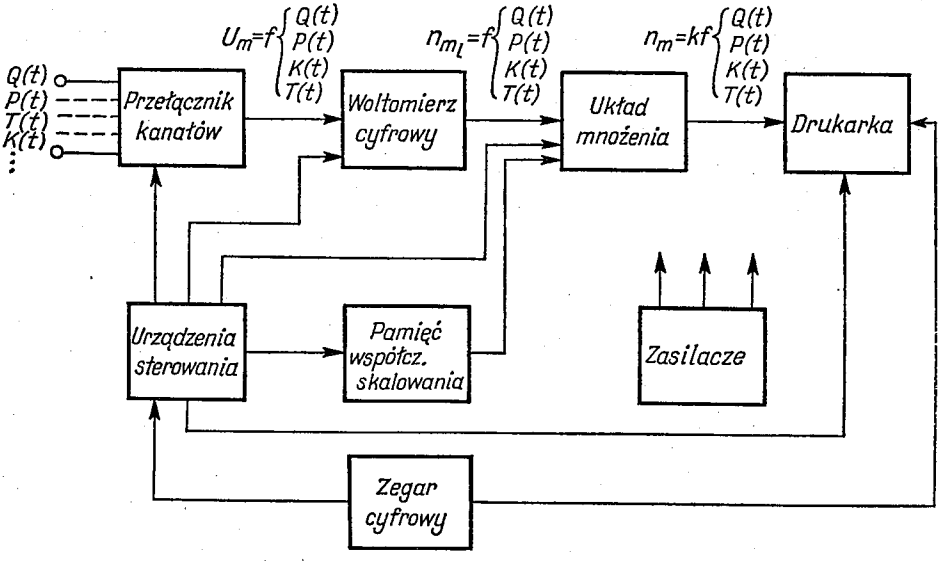
$$n_{Lm} = K_m \cdot w_m, \tag{8}$$

gdzie:
w_m — procentowa zawartość pierwiastka,
K_m — stała proporcjonalności.

Wskazania licznika są drukowane drukarką wierszową. Następnie ze specjalnie wcześniej sporządzonych krzywych wzorcowych są znajdywane przez obsługę wartości pierwiastków. Dokładność systemu wynosi 0.1 ... 0.2% ± wartość określona ostatnią cyfrą, czas pomiaru jednego kanału — 4 s.

3.3.2. System pomiaru zużycia czynników energetycznych

Innym przykładem systemu pomiarowego, będzie system pomiaru zużycia czynników energetycznych zakładu przemysłowego. System taki zazwyczaj winien stanowić podstawę budowy systemu zakładowego bilansowania czynników energetycznych. Schemat blokowy przedstawiono na rys. 9.



Rys. 9. Schemat blokowy systemu automatycznego bilansowania czynników energetycznych

System pomiarowy obejmuje w tym schemacie przyrządy począwszy od przełącznika kanałów, poprzez woltomierz cyfrowy jednozakresowy, do urządzeń drukujących. Przetworniki pomiarowe dostarczają sygnałów elektrycznych na wejście przełącznika kanałów.

System powyższy może mierzyć ilość parametrów w przedziale przełączeń przełącznika kanałów od 1 ... m.

System przeznaczony jest do pomiaru:
— przepływu gazu $Q(t)$,
— ciśnienia gazu $P(t)$,
— temperatury gazu $T(t)$,
— kaloryczności $K(t)$.

Fakt zastosowania podsystemów dostarczających na wejście przełącznika kanałów sygnału elektrycznego pozwala na zastosowanie jednozakresowego woltomierza cyfrowego.

Wcześniej przeprowadzone badania i obliczenia pozwoliły na opracowanie współczynników skalowania dla każdego punktu pomiarowego.

Wielkość wskazana przez woltomierz jest automatycznie mnożona przez współczynnik skalowania w przyrządzie mnożenia cyfrowego i rejestrowana w urządzeniu drukującym z równoległym dziurkowaniem taśmy w odpowiednim kodzie maszyny cyfrowej. System pracuje w sposób ciągły. Bez przerwy przełącznik kanałów obiega punkty pomiarowe. Wartość chwilowa przepływu:

$$q(t) = f(\Delta p, p, T), \tag{9}$$

gdzie:

Δp — spadek ciśnienia na zwężce,

p — ciśnienie statyczne gazu,

T — temperatura gazu.

Wszystkie te wielkości są funkcjami czasu, a więc można zapisać:

$$Q(t) = F[\Delta P(t), P(t), T(t)]. \tag{10}$$

Uzyskane wyniki przetwarza się w systemie informatycznym przedsiębiorstwa, uwzględniającym opracowane przy sporządzaniu programów przetwarzania odpowiedniości zachodzące pomiędzy poszczególnymi kanałami pomiarowymi — temperatury, ciśnienia, przepływu i kaloryczności.

Mierzymy wartości wielkości fizycznych w czasie t_x, w przedziałach czasu wynoszących $t_x + n\Delta t$, gdzie Δt — czas pracy urządzenia w jednym cyklu pomiarowym. Zatem od długości czasu Δt zależeć będzie częstotliwość pomiarów dokonywanych w tym samym punkcie dla tej samej wielkości fizycznej. Dobór więc czasu próbkowania dla poszczególnych punktów, opracowanie programu sterowania przełącznikiem kanałów jest najważniejszą czynnością, poprzedzającą dobór systemu pomiarowego i programu jego pracy.

Dokonując przygotowań do zbudowania systemu pomiarów parametrów gazu i jego bilansowania przeprowadziliśmy w dużym zakładzie przemysłowym — jakim jest huta stali — badania przebiegów zapisów o charakterze stochastycznym i przebiegów deterministycznych na ponad 100 wykresach z przyrządów zużycia gazu, wahań ciśnienia, temperatury i kaloryczności. Przeprowadzona interpolacja wykresów w celu ustalenia minimalnych odstępów czasu pomiaru w ponad 50 punktach wykazała, że odstęp między momentami próbkowania może dla dużego zakładu wynosić 3 ... 5 minut.

Błędy aproksymacji nie będą w tym wypadku większe niż 5%, a błędy względne sumowania zużycia lub średniej wartości ciśnienia czy temperatury nie większe niż 0,5 %.

4. STRUKTURA SYSTEMU A NIEZAWODNOŚĆ

Doświadczenia w budowie systemów potwierdzają, że w procesie projektowania wymagane jest posiadanie odpowiedzi na następujące pytania:

— co ma być mierzone?

— jaka dokładność pomiaru ma być zapewniona?

— jak wiele kanałów ma mieć system?
— jak często ma być realizowany pomiar?
— jakie metody zapisu są potrzebne?
Użytkownika interesować będą dodatkowo odpowiedzi na pytania:
— jaka będzie efektywność systemu z punktu widzenia ekonomiki?
— jaką niezawodność będzie mieć system?
Te pytania wymagają od projektanta i wykonawcy przeprowadzenia rachunku optymalizacji. Systemy pomiarowe mogą być przeznaczone do pomiarów wielkości rozłożonych w przestrzeni. Elementami takiego systemu są: nadajniki N wielkości mierzonych lub przetworniki, mierniki M, urządzenia sterowania, przełączania i zapisu, o czym mówiono wyżej.

Projektant może rozpatrzyć dwa rodzaje systemów:
a) system multiplikatywny — posiadający jeden miernik i po n przyrządów pozostałych,
b) system z komutatorem posiadający n nadajników sygnałów pomiarowych, a pozostałych przyrządów po jednym.

Najczęściej spotykanym systemem jest system z komutatorem. Temu rodzajowi systemu poświęcone były głównie powyższe rozważania. Przy ocenie niezawodności systemu uwzględnia się niezawodność poszczególnych przyrządów i zespołów. Projektant systemu może mieć postawione dwa zadania z punktu widzenia niezawodności:
— zaprojektowanie systemu pomiarowego o określonej niezawodności ogólnej, przy czym wybrane i ściśle określone zespoły i aparatura nie będzie stanowiła o dyskwalifikacji systemu,
— zaprojektowanie systemu pomiarowego o pełnej niezawodności niezależnie od kosztów realizacji.

Sposób postawienia zadania zależy od przeznaczenia systemu pomiarowego. Tak np. system bilansowania czynników energetycznych może pracować mimo uszkodzenia jednego z nadajników wielkości mierzonych. Uszkodzenie takie nie będzie miało natychmiastowego wpływu na zużycie czynników energetycznych. Inaczej będzie przy analizatorze składu chemicznego stali, tu bowiem każde uszkodzenie decyduje o jakości wytapianej stali. System musi mieć bardzo wysoki stopień pewności pracy. Niezawodność systemów powinna być rozpatrywana z punktu widzenia projektowania, realizacji i późniejszej eksploatacji.

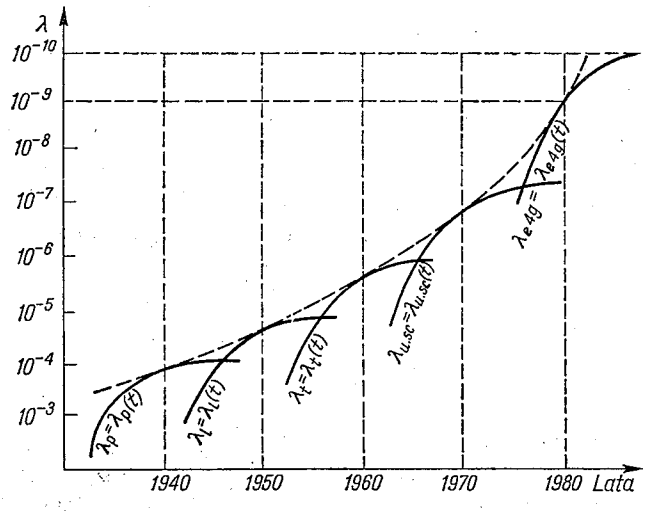
Oznaczając:
P_i — prawdopodobieństwo poprawnej pracy i-tego przyrządu lub zespołu wchodzącego w system,
λ_i — wskaźnik niezawodności i-tego przyrządu lub zespołu,
T — czas bezawaryjnej pracy,
T^* — wymagany czas bezawaryjnej pracy,
t — czas,
można dla i-tego przyrządu zapisać

$$T = \int_0^t P_i(t)dt \geqslant T^*, \tag{11}$$

przy czym dla ekwipotencjalnego rozkładu prawdopodobieństwa otrzymujemy:

$$P_i(t) = e^{-\lambda_i t}. \tag{12}$$

Na podstawie badań sprzętu pomiarowego i informatycznego ostatnich trzydziestu lat ustalono, że istotne zmiany w niezawodności następują po każdym nowym odkryciu w zakresie elementów (rys. 10). Dla wielu technik, w tym dla obrony, techniki kosmicznej i niektórych zagadnień ekonomiki zakłada się, że przy ilości elementów wynoszącej 10^6, średni czas bezawaryjnej pracy winien wynosić $10^4 \div 10^6$ godzin. Na podstawie wzorów (11) i (12) można wyliczyć, że współczynnik λ_i winien wynosić $1 \cdot 10^{-11}$/godz. Obecne prognozy przewidują osiągnięcie tego stopnia intensywności uszkodzeń na lata 80-te. Aktualne dane mówią, że osiągnięty jest współczynnik uszkodzeń 10^{-9}/godz.



Rys. 10. Rozkład niezawodności sprzętu pomiarowego w okresie ostatniego 50-lecia
Współczynniki niezawodności: λ_p — przekaźników, λ_L — lamp, λ_t — tranzystorów, $\lambda_{u.sc}$ — układów scalonych, λ_{e4g} — elementów czwartej generacji

Ilość przyrządów i zespołów w systemie, wzajemne powiązania między zespołami będą miały wpływ na ogólną niezawodność systemu.

Prawdopodobieństwo poprawnej pracy systemu będzie zależeć od prawdopodobieństwa poprawnej pracy poszczególnych zespołów i jego struktury.

Jeżeli oznaczymy:

S — ogólna ilość przyrządów i zespołów w systemie, zależna od struktury,

n — ilość zespołów w części, która determinuje niezawodność całego systemu (ilość bloków, spośród której uszkodzenie chociaż jednego dyskwalifikuje system),

to możemy napisać, że dla „centralnej części" systemu

$$P(t) \geqslant \prod_{i=1}^{S-n} P_i(t). \tag{13}$$

Rozpatrywanie prawdopodobieństwa dla pozostałych zespołów powinno być prowadzone oddzielnie. Są przypadki, gdy trzeba określać ogólną niezawodność systemu, gdyż będzie ona mieć wpływ np. na dokładność pomiarów w dłuższych odcinkach czasu.

W systemie bilansowania czynników energetycznych uszkodzenie przyrządu pomiaru temperatury nie zakłóci bezpośrednio operacji sumowania zużycia gazu i system będzie

działał, ale sumowanie to będzie obarczone dużym błędem. Od sposobu sygnalizacji uszkodzenia i sprawności służb eksploatacyjnych zależeć będzie szybkość usunięcia uszkodzenia.

Ogólnie można napisać, że prawdopodobieństwo poprawnej pracy jest funkcją wielu zmiennych, które muszą być przeanalizowane przez projektanta

$$P_S = f(S, \lambda_i, E, N), \tag{14}$$

gdzie:

S — struktura systemu,

λ_i — niezawodność poszczególnych przyrządów i zespołów,

E — warunki eksploatacji,

N — nakłady na realizację.

Rozpatrywanie niezawodności ogólnej systemu powinno odbywać się z uwzględnieniem wszystkich wymienionych czynników, przy czym najtrudniejszym dla określenia jest czynnik dotyczący eksploatacji. Na warunki eksploatacji składają się wymagania dotyczące obiektu mierzonego, warunków klimatycznych otoczenia, sprawności służb eksploatacyjnych itp. Są to trudne do matematycznego ujęcia zagadnienia.

LITERATURA

1. A. Sowiński, *Cyfrowa technika pomiarowa*, Wyd. Kom. i Łącz. 1970.
2. J. Pienkos, *Struktury cyfrowych systemów automatyki. Podstawowe zespoły funkcjonalne, wchodzące w skład tych systemów*, Przemysłowy Instytut Elektroniki, wyd. nr 1/73 pt. „Studia, Informacje, Przyczynki".
3. B. Schmidt, K. Eckert, K. Schleiffer, H.I. Schwarz, *Generation des Erzeugnissystems Digitale Messung und Messwertausgabe — Grundgeräte*, Wyd. „Radio, Fernsehen, Elektronik", nr 4/74.
4. *Gerätesystem zur Automatischen Messung Elektrischer Grössen und zur Messwertverarbeitung*, informacja RFT Messelektronik, Drezno, marzec 1974.
5. *Elektroniczne Wyposażenie Pomiarowe*, Wyd. Komitetu Technicznego Międzynarodowej Komisji Elektrotechnicznej, sierpień 1973.
6. A.M. Znamienskaja, J.E. Machonkin, A.J. Salkow, *Izmieritielnyje informacjonnyje sistiemy dlia statisticzeskich isledowanii pri słożnom naturnom eksperimentie*, Pribory i sistiemy uprawlienia, nr 7/1973.
7. G.A. Szastowa, A.J. Kajekin, *Wybór i optimizacja struktury informacjonnych sistiem*, Wyd. „Energia", 1972.
8. M. Orzyłowski, *Wpływ czynników dynamicznych na działanie przetwornika integracyjnego z wielokrotnym całkowaniem*, praca doktorska, 1973.
9. J. Trześniowski, *Zagadnienia elektroniki w Hucie Warszawa*, Wyd. zakładowe, 1961.
10. Z. Karkowski., *Cyfrowe przyrządy i systemy pomiarowe*, (koreferat) Wyd. SEP pt. „Rozwój przemysłowej i laboratoryjnej elektronicznej aparatury pomiarowej".
11. Z. Zieliński, *Automatyzacja pomiarów technologicznych w przemyśle radioelektronicznym*, wyd. jak w [10].
12. A. Libura, *Metody przetwarzania analogowo-cyfrowego*, Biuletyn Przemysłowego Instytutu Automatyki i Pomiarów, nr 3/35, 1972.
13. Praca zespołowa, *System centralnego bilansowania czynników energetycznych dla Huty Warszawa*, PIT, 1964.

14. J. Trześniowski, *Polichromator, zasada działania, zastosowanie i eksploatacja*, Techniczny Biuletyn Informacyjny Huty Warszawa w Budowie, nr 2/1960.
15. Donald C. Loughry, *A common digital interface for programmable instruments: The evolution of a system*, Hewlett-Packard Journal, October 1972.

J. TRZEŚNIOWSKI

STRUCTURE OF MEASURING SYSTEMS: SELECTED PROBLEMS

Summary

The article discusses the general requirements that should be met by systems. Some problems concerning general structure are investigated, examples of the applications of systems as well as their description are presented. Some problems of reliability, such as the function of the employed elements and the complexity of the system are discussed.

J. TRZEŚNIOWSKI

PROBLÈMES DE LA STRUCTURE DES SYSTÈMES DE MESURE CHOISIS

Résumé

Dans l'article on a présenté les conditions générales auxquelles les systèmes doivent être soumis. On a étudié certains problèmes se rapportant à la structure générale, on a cité les exemples de l'application de ces systèmes ainsi que leur description. On a discuté certains problèmes de fiabilité comme fonction d'éléments employés et de complexité du système.

J. TRZEŚNIOWSKI

GEWÄHLTE PROBLEME DER STRUKTUR VON MEßSYSTEMEN

Zusammenfassung

Im Artikel wurden die allgemeinen, an diese Systeme gestellten Anforderungen geschildert. Es wurden manche Probleme erwogen, die allgemeine Struktur betreffen; Anwendungsbeispiele für diese Systeme und ihre Beschreibungen wurden gebracht. Es wurden einige Zuverlässigkeitsprobleme als Funktion der angewandten Elemente und der Kompliziertheit des Systems diskutiert.

Ю. ТРЖЕСЬНИОВСКИ

ИЗБРАННЫЕ ПРОБЛЕМЫ СТРУКТУРЫ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Резюме

В статье обсуждаются общие требования для систем. Рассматриваются некоторые проблемы касающиеся общей структуры, приводятся примеры применения систем и их описания.

Затронуты некоторые проблемы надежности действия как функции примененных элементов и сложности системы.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 2, ss. 339-353

621.313.32

Identyfikacja parametrów maszyny synchronicznej metodą nastrajalnego modelu

ZYGFRYD GŁOWACZ (KRAKÓW),
Instytut Maszyn i Sterowania Układów Elektroenergetycznych Akademii Górniczo-Hutniczej
JERZY KRÓL (KRAKÓW)
Instytut Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego

Otrzymano 6.10.1974

Klasyczne metody identyfikacji parametrów modelu matematycznego maszyny synchronicznej stosowane są od wielu lat i weszły już do praktyki inżynierskiej. Metody te nie pozwalają jednak na oszacowanie dokładności uzyskanych wyników i zdecydowanie zawodzą, dając sprzeczne wartości parametrów, w przypadku maszyn z litym żelazem w wirniku i przyjęcia klasycznego modelu obwodowego.

Proponowana w pracy metoda identyfikacji, oparta jest na idei nastrajalnego modelu, którym przybliża się charakterystykę ruchową maszyny w stanach quasiustalonych, jest stosunkowo prosta i nie posiada wspomnianych powyżej wad. Istotną jej zaletą jest fakt, że w części eksperymentalnej wymaga jedynie pomiarów w normalnych warunkach eksploatacyjnych.

1. WPROWADZENIE

Klasyczne metody identyfikacji parametrów modelu matematycznego maszyny synchronicznej, polegające na dokonywaniu kilku pomiarów w szczególnych stanach elektrycznych i wyznaczaniu na ich podstawie potrzebnych parametrów, stosowane są od wielu lat i weszły już do praktyki inżynierskiej. Metody te nie pozwalają jednak na oszacowanie dokładności uzyskanych wyników i zdecydowanie zawodzą, dając sprzeczne wartości parametrów w przypadku maszyn z litym żelazem w wirniku i przyjęcia klasycznego modelu obwodowego. Wydaje się, że zaproponowana w pracy metoda identyfikacji, polegająca na poszukiwaniu parametrów modelu optymalnego, w sensie przybliżenia modelem właściwości obiektu, jest stosunkowo prosta i nie ma wspomnianych wyżej wad.

2. MODEL MATEMATYCZNY MASZYNY SYNCHRONICZNEJ

Model matematyczny rozpatrywanego przetwornika elektromechanicznego utworzono na podstawie wariacyjnej zasady najmniejszego działania. Przy zastosowaniu tej zasady równania modelu uzyskać można szybko i w sposób dobrze sformalizowany, w postaci równań Lagrange'a lub Hamiltona [3].

Przy konstrukcji tego modelu przyjęto, że:

1. uzwojenia stojana są symetryczne i symetrycznie rozłożone,
2. twornik jest gładki (nie uwzględnia się żłobków),
3. trójwymiarowe pole magnetyczne w szczelinie jest jednorodne,
4. indukcja w szczelinie jest harmoniczną funkcją położenia wirnika,
5. wirnik ma dwie ortogonalne osie symetrii (oznaczone dalej literami d i q),
6. klatki rozruchowe równoważne są dwom uzwojeniom skupionym, usytuowanym w osiach d i q,
7. nie uwzględnia się zjawiska nasycenia w żelazie, histerezy magnetycznej i wpływu prądów wirowych.

Należy podkreślić, że próba osłabienia podanych wyżej założeń zasadniczo komplikuje model matematyczny i jedynie w niewielkim stopniu (z wyjątkiem założenia 7) poprawia dokładność odwzorowania własności maszyny.

Przy powyższych założeniach równania Eulera-Lagrange'a, będące równaniami modelu maszyny synchronicznej, mają postać:

$$\dot{\boldsymbol{\Psi}} + \mathbf{R}\mathbf{i} = \mathbf{u}, \tag{2.1}$$

$$\mathfrak{M}_e = \frac{p}{\sqrt{3}}\left(\Psi_a(i_c - i_b) + \Psi_b(i_a - i_c) + \Psi_c(i_b - i_a)\right), \tag{2.2}$$

$$J\ddot{\varphi} = \mathfrak{M}_e + \mathfrak{M}_m, \tag{2.3}$$

gdzie:

$\boldsymbol{\Psi}^T = [\Psi_a, \Psi_b, \Psi_c, \Psi_f, \Psi_D, \Psi_Q]$ — wektor strumieni, sprzężonych,
$\mathbf{i}^T = [i_a, i_b, i_c, i_f, i_D, i_Q]$ — wektor prądów,
$\mathbf{u}^T = [\mu_a, \mu_b, \mu_c, \mu_f, 0, 0]$ — wektor napięć,
$\mathbf{R} = \operatorname{diag}(R, R, R, R_f, R_D, R_Q)$ — macierz rezystancji,

przy czym subskrypty D i Q oznaczają odpowiednio uzwojenia klatek w osiach d i q.

Nadmienić przy tym należy, że $\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{L}(p\varphi)\mathbf{i}$, gdzie $\mathbf{L}(p\varphi)$ jest macierzą postaci:

$$L(p\varphi) = \begin{bmatrix} L_6 + M + \Delta M\cos(2p\varphi) & -\frac{1}{2}M + \Delta M\cos\left(2p\varphi - \frac{4}{3}\pi\right) \\ -\frac{1}{2}M + \Delta M\cos\left(2p\varphi - \frac{4}{3}\pi\right) & L_6 + M + \Delta M\cos\left(2p\varphi - \frac{2}{3}\pi\right) \\ -\frac{1}{2}M + \Delta M\cos\left(2p\varphi - \frac{2}{3}\pi\right) & -\frac{1}{2}M + \Delta M\cos(2p\varphi) \\ M_f\cos(p\varphi) & M_f\cos\left(p\varphi - \frac{4}{3}\pi\right) \\ M_D\cos(p\varphi) & M_D\cos\left(p\varphi - \frac{4}{3}\pi\right) \\ -M_Q\sin(p\varphi) & -M_Q\sin\left(p\varphi - \frac{4}{3}\pi\right) \end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix}
-\frac{1}{2}M+\Delta M\cos\left(2p\varphi-\frac{2}{3}\pi\right) & M_f\cos(p\varphi) \\
-\frac{1}{2}M+\Delta M\cos(2p\varphi) & M_f\cos\left(p\varphi-\frac{4}{3}\pi\right) \\
L_6+M+\Delta M\cos\left(2p\varphi-\frac{4}{3}\pi\right) & M_f\cos\left(p\varphi-\frac{2}{3}\pi\right) \\
M_f\cos\left(p\varphi-\frac{2}{3}\pi\right) & L_f \\
M_D\cos\left(p\varphi-\frac{2}{3}\pi\right) & M_D^f \\
-M_Q\sin\left(p\varphi-\frac{2}{3}\pi\right) & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
M_D\cos(p\varphi) & -M_Q\sin(p\varphi) \\
M_D\cos\left(p\varphi-\frac{4}{3}\pi\right) & -M_Q\sin\left(p\varphi-\frac{4}{3}\pi\right) \\
M_D\cos\left(p\varphi-\frac{2}{3}\pi\right) & -M_Q\sin\left(p\varphi-\frac{2}{3}\pi\right) \\
M_f^D & 0 \\
L_D & 0 \\
0 & L_Q
\end{bmatrix}
$$

Równania (2.1) do (2.3) można zapisać w postaci układu równań różniczkowo-algebraicznych:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{u}-\mathbf{R}\mathbf{i},$$

$$\mathbf{L}(p\varphi)\,\mathbf{i}=\boldsymbol{\Psi},$$

$$\frac{d}{dt}\dot{\varphi}=\frac{1}{J}(\mathfrak{M}_e+\mathfrak{M}_m),$$

$$\frac{d}{dt}\varphi=\dot{\varphi}.$$

W celu sprowadzenia powyższego układu do układu równań różniczkowych o współczynnikach stałych tradycyjnie stosuje się transformację Parka [6]. Transformacja ta prowadzi do równań o prostej strukturze i łatwej interpretacji fizykalnej.

Równania modelu matematycznego maszyny synchronicznej we współrzędnych Parka $(0, d, q)$, zapisane przy użyciu parametrów Laible'a [4], mają postać:

$$\frac{d}{dt}\Psi_0 = U_0 - Ri_0,$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \Psi_d \\ \frac{\Psi_f}{v} \\ \frac{\Psi_D}{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_d \\ \frac{U_f}{v} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R & 0 & \\ 0 & \frac{R_f}{v^2} & 0 \\ & 0 & \frac{R_D}{w^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_f \cdot v \\ i_D \cdot w \end{bmatrix} + p\dot{\varphi} \begin{bmatrix} \Psi_q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \Psi_q \\ \frac{\Psi_Q}{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_q \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & \frac{R_Q}{k^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_q \\ i_Q \cdot k \end{bmatrix} - p\dot{\varphi} \begin{bmatrix} \Psi_d \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

$$L_d \begin{bmatrix} 1 & , & 1-\mu_d, & 1-\mu_d \\ 1-\mu_d, & & \frac{1-\mu_d}{1-\mu_f}, & 1-\mu_d \\ 1-\mu_d, & & 1-\mu_d & \frac{1-\mu_d}{1-\mu_D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_f \cdot v \\ i_D \cdot w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_d \\ \frac{\Psi_f}{v} \\ \frac{\Psi_D}{w} \end{bmatrix},$$

$$L_q \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 1, & \frac{1}{1-\sigma_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_q \\ i_Q \cdot k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_q \\ \frac{\Psi_Q}{k} \end{bmatrix},$$

$$\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{1}{J}(\mathfrak{M}_e + \mathfrak{M}_m), \tag{2.6}$$

gdzie

$$\mathfrak{M}_e = p(\Psi_d i_q - \Psi_q i_d).$$

Przedstawiony powyżej model matematyczny zawiera trzynaście parametrów, z których część (na przykład rezystancje uzwojeń dostępnych pomiarowo) wyznacza się w sposób elementarny. Identyfikacja pozostałych (na przykład współczynników rozproszenia, ekranowania i rezystancji klatek) jest procesem bardziej złożonym. W literaturze [2], [7] opisano szereg metod eksperymentalnego wyznaczania parametrów modelu maszyny synchronicznej, które to metody będziemy w dalszym ciągu nazywać klasycznymi. Wśród metod tych wyróżnia się

a. metody prądu stałego,

b. metody prądu zmiennego.

W obydwu wspomnianych grupach metod parametry określa się na podstawie wyników pomiarów prądów i napięć w szczególnych stanach pracy maszyny. Przykładowo indukcyjności L_d i L_q wyznacza się często metodą małego poślizgu, natomiast pozostałe parametry

z pomiarów przy zatrzymanym wirniku. W szczególności z pomiarów przy ustawieniu wirnika w osi podłużnej (d) wyznacza się parametry $(1-\mu_d)$, $(1-\mu_D)$, R_D/w^2, zaś przy ustawieniu wirnika w osi poprzecznej (q) parametry $(1-\sigma_q)$. R_Q/k^2. Parametr $(1-\mu_f)$ wyznacza się z pomiarów przy dowolnym położeniu wirnika. Powyższe badania uzupełnia się pomiarami rezystancji uzwojeń stojana i wzbudzenia oraz przekładni zwojowych. Przekładnia v wyznaczana jest z reguły z próby symetrycznego zwarcia ustalonego. Przekładnie w i k wyznaczyć można jedynie z danych konstrukcyjnych (prądy klatek są pomiarowo niedostępne), jednak w przypadku analizy pracy maszyny w systemie parametry te są nieistotne.

Przy klasycznych sposobach identyfikacji parametrów modelu maszyny synchronicznej często zdarza się, że wartości parametrów uzyskane różnymi metodami są rozbieżne. Przyjmuje się przy tym, że metody pierwszej grupy dają poprawne wyniki przy określaniu parametrów obwodu wzbudzenia, metody drugiej grupy — przy wyznaczaniu parametrów klatek. Największe trudności sprawia identyfikacja parametrów maszyn z litym żelazem w wirniku, dla których przedstawiony model matematyczny nie jest w pełni adekwatny, jednak chętnie stosowany, gdyż odzwierciedla podstawowe ich własności.

W celu weryfikacji wyników uzyskanych przy użyciu klasycznych metod identyfikacji oraz wyznaczenia parametrów przybliżonego modelu maszyny z litymi nabiegunnikami, korzystnym wydaje się równoległe, obok metod klasycznych, stosowanie metody identyfikacji w przestrzeni parametrów modelu [10]. Model matematyczny obiektu rozpatrywanej klasy w ogólnym przypadku ma postać;

$$\mathbf{y} = F(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \tag{2.7}$$

gdzie:

$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{p}$ — odpowiednio wektory zmiennych wejściowych, zmiennych wyjściowych i parametrów modelu,

F — operacja określona na podstawie studiów fizycznych rozpatrywanego obiektu.

Załóżmy obecnie, że możemy bezpośrednio mierzyć wartości $\mathbf{x}$ i odpowiadające im wartości $\mathbf{y}$. Po serii pomiarów dysponujemy dwoma zbiorami:

$E(\mathbf{y})$ — wartości $\mathbf{y}$ zmierzonych bezpośrednio,

$E(\hat{\mathbf{y}}) = E(F(\mathbf{x}, \mathbf{p}))$ — wartości $\mathbf{y}$ obliczonych ze wzoru (2.7), z dokładnością do parametrów $\mathbf{p}$.

Identyfikacja parametrów modelu polega na znalezieniu wartości optymalnych w sensie przybliżania modelem obiektu. Oznacza to, że poszukuje się takich wartości parametrów $\mathbf{p}^*$, które minimalizują odległość między zbiorami $E(\mathbf{y})$ i $E(\hat{\mathbf{y}}) = E(F(\mathbf{x}, \mathbf{p}))$:

$$\varrho(E(\mathbf{y}), E(\hat{\mathbf{y}})).$$

W przypadku modeli liniowych względem parametrów oraz miary kwadratowej, do identyfikacji stosowana jest metoda najmniejszych kwadratów lub regresji [10]. W przypadku modeli nieliniowych względem parametrów identyfikacja prowadzi do problemu poszukiwania minimum funkcji wielu zmiennych

$$\varrho\big(E(\mathbf{y}), E(F(\mathbf{x}, \mathbf{p}))\big) = f(\mathbf{p}),$$

przy czym należy się liczyć z tym, że może to być funkcja nieciągła i nieróżniczkowalna, ale mająca w interesującym obszarze parametrów określone minimum.

Bezpośrednie zastosowanie powyższej metody do identyfikacji parametrów modelu maszyny synchronicznej jest bardzo kłopotliwe i kosztowne. Wynika to z trudności rejestracji zmiennych wyjściowych modelu (prądy klatek są niedostępne pomiarowo) i z dużego nakładu obliczeń potrzebnego na rozwiązanie układu równań różniczkowych modelu. Trudności te ominąć można przy użyciu przedstawionej poniżej metody przybliżonej.

3. PROPONOWANA METODA IDENTYFIKACJI

Metoda to bazuje na dwóch zasadniczych założeniach:

1) w maszynie synchronicznej zjawiska elektromagnetyczne przebiegają znacznie szybciej od zjawisk mechanicznych (stała czasowa mechaniczna jest znacznie większa od stałych czasowych obwodów elektrycznych),
2) własności ruchowe maszyny są w pełni określone przez zależność momentu asynchronicznego i wartości skutecznej prądu fazowego od prędkości.

Spełnienie założenia (1) pozwala na rozważanie zjawisk elektromagnetycznych w maszynie przy ustalonej prędkości obrotowej, co zasadniczo upraszcza rozwiązanie układu równań modelu matematycznego. Założenie $\dot{\varphi} = \text{const}$ prowadzi bowiem do zlinearyzowania równań napięciowych (2.4) i (2.5), a jednocześnie równanie mechaniczne (2.6) przestaje być różniczkowym i jedynie określa zależność momentu od prędkości.

Przyjęcie założenia $\dot{\varphi} = \text{const}$ pozwala w trakcie analizy pracy maszyny wyróżnić dwie grupy zagadnień określane jako stany elektryczne nieustalone i ustalone. Jakakolwiek zmiana wymuszeń zewnętrznych (przełączenia w układzie zasilania twornika lub wzbudzenia, włączanie w obwód rezystancji lub reaktancji itp.) jest zakłóceniem powodującym przebiegi przejściowe (stany elektryczne nieustalone) z tym, że z założenia wyklucza się wpływ tych przebiegów na zmianę prędkości. Natomiast odpowiedzi ustalone układu na wymuszenia napięciowe ustalone — periodyczne lub stałe — określa się jako stan elektryczny ustalony.

W stanach ustalonych przy $\dot{\varphi} < \dot{\varphi}_0$ w momencie elektrycznym można wyróżnić dwie składowe: moment asynchroniczny $\mathfrak{M}_a$, stały dla danej wartości prędkości, i moment tętniący $\mathfrak{M}_t$, powodujący nierównomierny ruch silnika oraz wahania prędkości wokół pewnej wartości średniej. Jednak im większa jest bezwładność mechaniczna wirnika, tym mniejsze są wahania prędkości i tym bliższe prawdy jest założenie $\dot{\varphi} = \text{const}$. Wartość momentu asynchronicznego $\mathfrak{M}_a$ otrzymana z analizy stanu ustalonego przy określonym φ wykorzystana może być również w równaniu mechanicznym. Zmienność prędkości w czasie jest bowiem zwykle na tyle powolna, że cały przebieg mechaniczny nieustalony może być rozpatrywany jako suma nieskończenie wielu stanów ustalonych, z których każdy zachodzi przy różnej, ale stałej, wartości prędkości. Mówimy wtedy o stanach quasiustalonych.

Korzystając z powyższych uwag oraz uwzględniając założenie (2) proponuje się przyjąć, dla potrzeb identyfikacji, następujące zmienne wyjściowe:

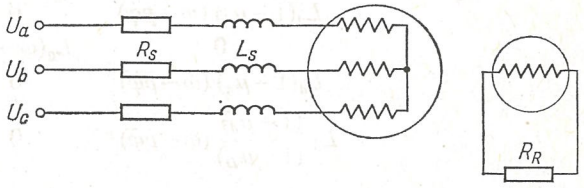
— moment asynchroniczny $\mathfrak{M}_a$,
— wartość skuteczną prądu fazowego I_{sk},
— prędkość obrotową $\dot{\varphi}$,

a w szczególności, z uwagi na wysoką informatywność, zależności $\mathfrak{M}_a(\dot{\varphi})$ i $I_{sk}(\dot{\varphi})$ w stanach quasiustalonych, przy czym $\dot{\varphi} \in [0, \dot{\varphi}_0]$.

W dalszym ciągu przyjmiemy, że rozpatrywana maszyna zasilana jest w układzie jak na rys. 1. Zakładamy przy tym, że trójfazowe napięcie zasilające jest praktycznie symetryczne, a uzwojenie wzbudzenia zwarte przez opór rozruchowy R_R. W tym przypadku napięcia zasilające we współrzędnych Parka mają postać:

$$e_0 = 0,$$

$$\begin{bmatrix} e_d \\ e_q \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, E_m \begin{bmatrix} \cos\left((\omega - p\dot{\varphi})t + \delta\right) \\ \sin\left((\omega - p\dot{\varphi})t + \delta\right) \end{bmatrix},$$



Rys. 1. Układ zasilania badanej maszyny

co pozwala na wyeliminowanie z dalszych rozważań równania dla składowej zerowej oraz na zastosowanie do wyznaczania składowych ustalonych rozwiązania układu (2.4) i (2.5) (tzw. rozwiązania szczególnego) metody symbolicznej. W metodzie tej zakłada się, że wszystkie prądy i strumienie sprzężone w stanie ustalonym opisywane są zależnościami typu

$$x(t) = X\cos\left((\omega - p\dot{\varphi})t + \alpha\right)$$

oraz wprowadza się przyporządkowanie

$$\tilde{\mathbf{X}} \Leftrightarrow x(t) = X\cos\left((\omega - p\dot{\varphi})t + \alpha\right)$$

takie, że

$$x(t) = \mathrm{Re}(\tilde{\mathbf{X}}).$$

Oznacza to, że

$$\tilde{\mathbf{X}} = Xe^{j\alpha} \cdot e^{j(\omega - p\dot{\varphi})t} = \mathbf{X}e^{j(\omega - p\dot{\varphi})t}$$

oraz że

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\mathrm{Re}(\tilde{\mathbf{X}}) = \mathrm{Re}\left(j(\omega - p\dot{\varphi})Xe^{j\alpha}e^{j(\omega - p\dot{\varphi})t}\right) = \mathrm{Re}\left(j(\omega - p\dot{\varphi})\mathbf{X}e^{j(\omega - p\dot{\varphi})t}\right).$$

Przy użyciu metody symbolicznej równania modelu matematycznego maszyny synchronicznej pracującej w układzie jak na rys. 1 można zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_d \\ \mathbf{E}_q \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R+R_s) & -(L_q+L_s)p\dot{\varphi} & 0 & 0 & -L_q p\dot{\varphi} \\ (L_d+L_s)p\dot{\varphi} & (R+R_s) & L_d(1-\mu_d)p\dot{\varphi} & L_d(1-\mu_d)p\dot{\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & (R_f+R_R)/v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_D/w^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_Q/k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_d \\ \mathbf{I}_q \\ \mathbf{I}_f \cdot v \\ \mathbf{I}_D \cdot w \\ \mathbf{I}_Q \cdot k \end{bmatrix} +$$

$$+j\begin{bmatrix} (L_d+L_s)(\omega-p\dot{\varphi}) & 0 & L_d(1-\mu_d)(\omega-p\dot{\varphi}) \\ 0 & (L_q+L_s)(\omega-p\dot{\varphi}) & 0 \\ L_d(1-\mu_d)(\omega-p\dot{\varphi}) & 0 & L_d\dfrac{(1-\mu_d)}{(1-\mu_f)}(\omega-p\dot{\varphi}) \\ L_d(1-\mu_d)(\omega-p\dot{\varphi}) & 0 & L_d(1-\mu_d)(\omega-p\dot{\varphi}) \\ 0 & L_q(\omega-p\dot{\varphi}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L_d(1-\mu_d)(\omega-p\dot{\varphi}) & 0 \\ 0 & L_q(\omega-p\dot{\varphi}) \\ L_d(1-\mu_d)(\omega-p\dot{\varphi}) & 0 \\ L_d\dfrac{(1-\mu_d)}{(1-\mu_D)}(\omega-p\dot{\varphi}) & 0 \\ 0 & L_q\dfrac{(\omega-p\dot{\varphi})}{(1-\sigma_q)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_d \\ \mathbf{I}_q \\ \mathbf{I}_f\cdot v \\ \mathbf{I}_D\cdot w \\ \mathbf{I}_Q\cdot k \end{bmatrix},$$

gdzie

$$\begin{bmatrix}\mathbf{E}_d \\ \mathbf{E}_q\end{bmatrix} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,U_m\begin{bmatrix}1 \\ -j\end{bmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{\Psi}_d = L_d(1-\mu_d)\left(\frac{1}{1-\mu_d}\mathbf{I}_d+\mathbf{I}_f\cdot v+\mathbf{I}_D\cdot w\right),$$

$$\mathbf{\Psi}_q = L_q(\mathbf{I}_q+\mathbf{I}_Q\cdot k).$$

W dalszym ciągu, biorąc pod uwagę fakt, że

$$\Psi_d = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{\Psi}}_d+\tilde{\mathbf{\Psi}}_d^*), \qquad \Psi_q = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{\Psi}}_q+\tilde{\mathbf{\Psi}}_q^*),$$

$$i_d = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{I}}_d+\tilde{\mathbf{I}}_d^*), \qquad i_q = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{I}}_q+\tilde{\mathbf{I}}_q^*)$$

oraz że

$$\mathfrak{M}_e = p(\psi_d i_q-\psi_q i_d)$$

otrzymamy

$$\mathfrak{M}_e = \frac{p}{4}(\tilde{\mathbf{\Psi}}_d\tilde{\mathbf{I}}_q+\tilde{\mathbf{\Psi}}_d^*\tilde{\mathbf{I}}_q^*+\tilde{\mathbf{\Psi}}_d\tilde{\mathbf{I}}_q^*+\tilde{\mathbf{\Psi}}_d^*\tilde{\mathbf{I}}_q-\tilde{\mathbf{\Psi}}_q\tilde{\mathbf{I}}_d-\tilde{\mathbf{\Psi}}_q\tilde{\mathbf{I}}_d^*-\tilde{\mathbf{\Psi}}_q^*\tilde{\mathbf{I}}_d-\tilde{\mathbf{\Psi}}_q^*\tilde{\mathbf{I}}_d^* =$$

$$= \frac{p}{2}\operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{\Psi}}_d\tilde{\mathbf{I}}_q+\tilde{\mathbf{\Psi}}_d\tilde{\mathbf{I}}_q^*-\tilde{\mathbf{\Psi}}_q\tilde{\mathbf{I}}_d-\tilde{\mathbf{\Psi}}_q\tilde{\mathbf{I}}_d^*).$$

W powyższym wyrażeniu występują dwa człony, z których jeden nie zależy od czasu i reprezentuje moment asynchroniczny

$$\mathfrak{M}_a = \frac{p}{2}\operatorname{Re}(\tilde{\mathbf{\Psi}}_d\tilde{\mathbf{I}}_q^*-\tilde{\mathbf{\Psi}}_q\tilde{\mathbf{I}}_d^*) = \frac{p}{2}\operatorname{Re}(\mathbf{\Psi}_d\mathbf{I}_q^*-\mathbf{\Psi}_q\mathbf{I}_d^*)$$

a drugi jest kosinusoidalną funkcją czasu o częstotliwości $2(\omega - p\dot{\varphi})$ i reprezentuje moment tętniący

$$\mathfrak{M}_t = \frac{p}{2}\operatorname{Re}(\tilde{\Psi}_d\tilde{I}_q - \tilde{\Psi}_q\tilde{I}_d) = \frac{p}{2}\operatorname{Re}\left((\Psi_d I_q - \Psi_q I_d)e^{j2(\omega - p\dot{\varphi})t}\right).$$

Przeprowadzając podobne rozważania można też pokazać, że wartość skuteczna prądu fazowego równa jest

$$I_{sk} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{|\mathbf{I}_d|^2 + |\mathbf{I}_q|^2}\,.$$

Z powyższych wzorów wynika, że przy przyjętej hipotezie przebiegów quasiustalonych w maszynie, wyznaczenie momentu asynchronicznego dla określonej wartości prędkości wymaga rozwiązania układu równań algebraicznych liniowych o współczynnikach zespolonych. Rozwiązywanie takiego układu równań jest, w odróżnieniu od procesu całkowania układu równań różniczkowych, zadaniem zdecydowanie mniej czasochłonnym. Pozwala to na realizację następującego algorytmu identyfikacji parametrów modelu maszyny synchronicznej.

Załóżmy, że dana jest zależność momentu asynchronicznego maszyny od prędkości $\mathfrak{M}_a(\dot{\varphi})$, gdzie $\dot{\varphi} \in [0, \dot{\varphi}_0]$, uzyskana w drodze pomiarów. Celem identyfikacji jest wyznaczenie takich wartości parametrów maszyny, by obliczona z równań funkcja $\hat{\mathfrak{M}}_a(\dot{\varphi})$ najlepiej aproksymowała funkcję $\mathfrak{M}_a(\dot{\varphi})$. Aproksymacja polega tu na takim doborze funkcji przybliżającej, z danej klasy funkcji, aby odległość między funkcjami, w sensie danej metryki, była możliwie mała, to znaczy by zachodziło $\min \varrho(\mathfrak{M}_a, \hat{\mathfrak{M}}_a)$.

Przy wyborze dokładności aproksymacji funkcji $\mathfrak{M}_a$ funkcją $\hat{\mathfrak{M}}_a$ można kierować się wieloma względami, głównie konsekwencjami, wynikającymi z niedokładności przybliżenia. Największą rolę odgrywają tu dwa typy kryteriów dokładności:

(i) metryka Czebyszewa:

$$\varrho(\mathfrak{M}_a, \hat{\mathfrak{M}}_a) = \max_{\dot{\varphi}} |\mathfrak{M}_a(\dot{\varphi}) - \hat{\mathfrak{M}}_a(\dot{\varphi})|,$$

(ii) metryka przestrzeni L^p

$$\varrho(\mathfrak{M}_a, \hat{\mathfrak{M}}_a) = \left(\frac{1}{\dot{\varphi}_0}\right)\int_0^{\dot{\varphi}_0} |\mathfrak{M}_a(\dot{\varphi}) - \hat{\mathfrak{M}}_a(\dot{\varphi})|^p d\dot{\varphi})^{\frac{1}{p}};$$

p jest najczęściej równe dwa.

Tak sformułowane zadanie identyfikacji sprowadza się więc do problemu minimalizacji funkcji wielu zmiennych $f(\mathbf{p}) = \varrho(\mathfrak{M}_a, \hat{\mathfrak{M}}_a)$.

Literatura [1] podaje szereg metod numerycznego poszukiwania minimum funkcji wielu zmiennych, z których w interesującym nas przypadku wykorzystać można jedynie metody deterministyczne, bezgradientowe, a to z uwagi na brak możliwości analitycznego obliczenia gradientu. Wśród metod tej klasy wyróżnia się metody liniowe (Rosenbrock, SIMPLEX, DSC) wymagające przyjęcia jedynie słabego założenia ciągłości badanej funkcji, oraz kwadratowe (Powell, Zangwill), w których zakłada się, że badaną funkcję można dobrze przybliżyć formą kwadratową.

Przeprowadzone przez autorów eksperymenty obliczeniowe z różnymi metodami pokazały, że w rozważanym przypadku należy ograniczyć się wyłącznie do metod liniowych,

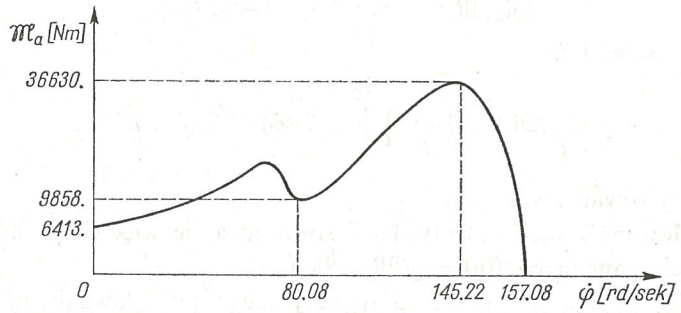
które jednak z uwagi na stosunkowo duży nakład obliczeń i wymóg ich efektywności muszą być odpowiednio zmodyfikowane. Modyfikacja ta ma na celu uwzględnienie dodatkowych informacji o minimalizowanej funkcji i położeniu minimum, a tym samym zwiększenie efektywności. Z kilku przebadanych metod, w praktyce sprawdziła się metoda będąca rozwinięciem zaproponowanej przez Daviesa, Swanna i Campey'a [1]. Istota metody DSC polega na poszukiwaniu minimum funkcji wzdłuż kolejnych kierunków ortogonalnej bazy. W metodzie zmodyfikowanej wprowadzono specjalny algorytm poszukiwania minimum w kierunku (patrz dodatek 5.1), uwzględniający ograniczenia typu

$$\mathbf{p}_d \leqslant p \leqslant \mathbf{p}_g,$$

przy czym zakłada się, że ograniczenia te lokalizują położenie punktu minimalnego, oraz zastosowano odmienny algorytm obrotu układu współrzędnych [8]. Ponadto uwzględniono fakt, że $\varrho(\mathfrak{M}_a, \hat{\mathfrak{M}}_a)$ jest nieujemne.

W oparciu o przedstawioną powyżej koncepcję opracowany został program identyfikacji parametrów maszyny synchronicznej. Program ten pozwala na określenie sześciu lub siedmiu parametrów, stosunkowo trudno i mało dokładnie wyznaczalnych metodami klasycznymi. Parametrami tymi są współczynniki ekranowania, rozproszenia, rezystancje klatek rozruchowych oraz ewentualnie przekładnia zwojowa v. Na podkreślenie zasługuje fakt, że względnie łatwo można oszacować przedział, w którym znajdują się optymalne wartości wspomnianych parametrów.

W opracowanym programie charakterystyki wzorcowa i aproksymująca porównywane są na dyskretnym zbiorze punktów. Przy przyjętej ilości punktów (101) i stosowanych komputerach (ODRA 1304 i 1325) obliczenie wartości funkcji $f(\mathbf{p}) = \varrho(\mathfrak{M}_a, \hat{\mathfrak{M}}_a)$ trwało około jednej minuty, a uzyskanie zadowalającej wartości metryki ($\varrho(\mathfrak{M}_a, \hat{\mathfrak{M}}_a) < \varepsilon \leqslant 0.01\ \mathfrak{M}_N$, gdzie $\mathfrak{M}_N$ jest momentem znamionowym maszyny) wymagało od 150 do 250 minut.



Rys. 2. Charakterystyka mechaniczna badanej maszyny

Program ten zastosowano, dla celów kontrolnych, do identyfikacji parametrów modelu matematycznego silnika synchronicznego typu 1 EB 136-74-4 produkcji ČKD Praha. Dane znamionowe silnika:

$P_N = 3500$ kW, $U_N = 6$ kV/Y, $I_N = 373$ A,
$n_0 = 1500$ obr/min, $\cos\varphi_N = 0.95$, $U_W = 57$ V, $I_f = 290$ A,
$P_{mech} = 0.66\%\ P_N$, $D = 0.94$ W sek, $J = 360$ kgm^2.

Producent podał następujące wartości parametrów modelu matematycznego maszyny:

$L_d = 0.0492$ H, $L_q = 0.0305$ H, $R = 0.0492\ \Omega$,
$R_f = 0.196\ \Omega$, $\mu_d = 0.0570$, $\mu_f = 0.126$, $\mu_D = 0.0758$,
$\sigma_q = 0.239$, $R_D/w^2 = 0.2404\ \Omega$, $R_Q/k^2 = 0.321\ \Omega$, $v = 2.683$.

Charakterystykę wzorcową $\mathfrak{M}_a(\dot{\varphi})$ (rys. 2) uzyskano różniczkując numerycznie (patrz dodatek 5.2) przebieg prędkości przy rozruchu asynchronicznym bez obciążenia ($R_R = 0.79\ \Omega$) i uwzględniając moment tarcia uzyskany z krzywej wybiegu. Parametry przyjętego schematu zastępczego sieci oszacowano z mocy zwarciowej ($L_s = 0.001\ H$, $R_s = 0$). Uzyskane w wyniku realizacji programu wyniki ilustruje tablica 1.

Tablica 1

Wyniki identyfikacji parametrów maszyny synchronicznej

Parametry	μ_d	μ_f	μ_D	σ_q	R_D/w^2 [Ω]	R_Q/k^2 [Ω]	Odchylenie średnio kwadratowe [Nm]	Odchylenie maksymalne [Nm]
ograniczenie dolne	0.01	0.01	0.01	0.01	0.1	0.1	—	—
ograniczenie górne	0.20	0.50	0.50	0.50	5.0	5.0	—	—
wartość początkowa	0.18	0.20	0.25	0.10	2.0	0.5	22050.0	31890.0
wartość uzyskana	0.0573	0.1239	0.0777	0.2411	0.2407	0.3219	283.2	450.0
wartość podana przez producenta	0.0570	0.126	0.0758	0.239	0.2404	0.3210	—	—

4. WNIOSKI

Proponowana w pracy metoda identyfikacji parametrów maszyny synchronicznej pozwala na ich wyznaczenie z zadowalającą dokładnością, wymagając przy tym, w części eksperymentalnej, jedynie pomiarów w normalnych warunkach eksploatacyjnych. Jest to szczególnie ważne, gdyż klasyczne metody identyfikacji wymagają z reguły stworzenia w trakcie pomiarów warunków specjalnych, często możliwych do uzyskania jedynie na stacji prób.

O dokładności przedstawionej metody decydują zasadniczo dwa czynniki:

1. stosunek stałych czasowych obwodów elektrycznych (T_e) do stałej czasowej mechanicznej (T_m), przy czym z uwagi na założenie o stacjonarności przebiegów elektrycznych, wymaga się, by $T_e \ll T_m$;
2. dokładność określenia charakterystyki wzorcowej.

W przypadku maszyn dużej mocy warunek (1) jest z reguły spełniony. Odpowiednią dokładność określania charakterystyki wzorcowej (zależności momentu asynchronicznego lub wartości skutecznej prądu fazowego od prędkości) można zapewnić wykonując rozruch maszyny z dużym momentem bezwładności lub przeprowadzając hamowanie dynamiczne. W przypadku, gdy charakterystyką wzorcową jest zależność $\mathfrak{M}_a(\dot{\varphi})$, o dokładności jej wyznaczania decyduje dokładność, z jaką określono moment bezwładności.

W zakończeniu podkreślić trzeba, że przedstawiona metoda identyfikacji jest szczególnie przydatna w przypadku maszyn z litym żelazem w wirniku oraz że może być też zastosowana do identyfikacji parametrów przybliżonego modelu maszyny asynchronicznej dwuklatkowej i głębokożłobkowej, trudnych do określenia jakąkolwiek inną metodą.

5. DODATEK

5.1. Algorytm poszukiwania minimum funkcji wielu zmiennych

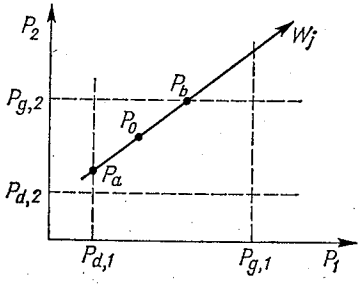
Niech będzie dana funkcja $f(\mathbf{p})$ określona i nieujemna w obszarze domkniętym $P \subseteq E^n$, gdzie

$$P = \{p : p_i \in [p_{i,d}, p_{i,g}], \quad i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Należy znaleźć punkt $\mathbf{p}^* \in P$ stanowiący estymator punktu minimalnego, dla którego

$$f(\mathbf{p}^*) \leqslant \varepsilon > 0.$$

Algorytm poszukiwania tego punktu stanowi modyfikację algorytmu DSC [1] i składa się z sekwencji minimalizacji jednowymiarowych wzdłuż poszczególnych kierunków $\mathbf{w}_j$ aktualnie obowiązującej bazy przestrzeni E^n. Minimum funkcji $f(\mathbf{p})$ w kierunku $\mathbf{w}_j$ poszukuje się w sposób następujący.



Rys. 3. Poszukiwanie minimum w kierunku $\mathbf{w}_j$

W pierwszym etapie wyznacza się, na podstawie ograniczeń $\mathbf{p}_d, \mathbf{p}_g$, przedział poszukiwań $[\lambda_a, \lambda_b]$ (patrz rys. 3), gdzie

$$\mathbf{p}_a = \mathbf{p}_0 + \lambda_a \mathbf{w}_j,$$

$$\mathbf{p}_b = \mathbf{p}_0 + \lambda_b \mathbf{w}_j.$$

W drugim wyznacza się położenie punktu minimalnego $\lambda^* \in [\lambda_a, \lambda_b]$ poprzez stopniowe zawężanie przedziału $[\lambda_a, \lambda_b]$.

Do zawężania przedziału $[\lambda_a, \lambda_b]$ stosowana jest metoda złotego podziału [1], a w przypadku, gdy w trzech kolejnych punktach $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ wartości funkcji spełniają równocześnie nierówności

$$f_2 < f_1 \text{ i } f_2 < f_3,$$

stosowana jest metoda interpolacji kwadratowej Lagrange'a [8].

Bazę wyjściową kierunków poszukiwań stanowi zbiór wersorów jednostkowych układu kartezjańskiego. Po wykonaniu minimalizacji wzdłuż wszystkich kierunków aktualnie obowiązującej bazy, wykonuje się obrót układu współrzędnych, stosując algorytm uwzględniający zerowe przesunięcia estymatora punktu minimalnego wzdłuż kolejnych kierunków [8], a następnie powtarza proces minimalizacji w kierunkach nowej bazy.

Algorytm poszukiwania punktu minimalnego kontynuowany jest do chwili, w której $f(\mathbf{p}) \leqslant \varepsilon$, gdzie $\varepsilon > 0$ jest zadaną dokładnością.

5.2. Różniczkowanie krzywej eksperymentalnej

Niech dana będzie funkcja $x(t)$ zadana numerycznie. Rozważmy ciąg funkcji rzeczywistych i różniczkowalnych w przedziale $[a, b]$: $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)$, na przykład wielomianów Legendre'a ($\varphi_j(t)$ są wtedy ortogonalne).

Zadaniem jest aproksymacja nieznanej funkcji $\frac{dx}{dt}$ kombinacją liniową wybranych funkcji φ_j tak, aby

$$\int_a^b \left(\frac{dx}{dt} - \sum_{j=0}^{m} c_j \varphi_j(t) \right)^2 dt = \min. \tag{5.1}$$

Można wykazać, że w przypadku wielomianów ortogonalnych optymalne współczynniki równe są

$$c_j = \alpha_j \int_a^b \frac{dx}{dt} \varphi_j(t) dt,$$

gdzie

$$\alpha_j = \left(\int_a^b \varphi_j^2(t) dt \right)^{-1}.$$

Eliminując $\frac{dx}{dt}$ w równaniu (5.1) drogą całkowania przez części, otrzymujemy

$$c_j = \alpha_j \left([x(t)\varphi_j]_a^b - \int_a^b \frac{d\varphi_j}{dt} x(t) dt \right).$$

Powyższe wzory dogodnie jest stosować lokalnie, rozbijając przedział, w którym określona jest badana funkcja, na podprzedziały. Wzory te umożliwiają oszacowanie błędu

różniczkowania [9]. W wielu przypadkach możliwe jest też uzyskanie, z wystarczającą dokładnością, wartości pochodnej w odmienny sposób. Aproksymuje się wtedy funkcję $x(t)$, na przykład kombinację liniową wielomianów ortogonalnych, a następnie różniczkuje aproksymację. W przypadku, gdy funkcja $x(t)$ określona jest w równoodległych punktach szczególnie dogodne są dyskretne wielomiany Legendre'a [5]. Wielomiany te zastosować można też do lokalnego wygładzenia krzywej eksperymentalnej.

Niech $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ są wartościami funkcji w równoodległych punktach. W przypadku dyskretnych wielomianów Legendre'a rzędu trzeciego, rozpiętych na dziewięciu punktach, wartość wygładzona $\hat{x}_4$ równa jest

$$\hat{x}_4 = \frac{1}{231}(-21x_0+14x_1+39x_2+54x_3+59x_4+54x_5+39x_6+14x_7-21x_8),$$

a wartość pochodnej

$$\frac{d\hat{x}_4}{dt} = \frac{1}{1188}(86x_0-142x_1-193x_2-126x_3+126x_5+193x_6+142x_7-86x_8).$$

LITERATURA

1. W. Findeisen, J. Szymanowski, A. Wierzbicki, *Metody obliczeniowe optymalizacji*, Wydawnictwo PW, Warszawa 1973.
2. G. Hoseman, *Grossenrichtiges Ersatzschaltbild des Synchronmaschinenlaufers und seine experimentelle Ermittlung*, ETZ, 14, 1967, s. 333.
3. W. Kołek, A. Puchała, *Syntetyczna teoria przetwarzania energii elektromechanicznej*, Zeszyty Naukowe AGH, Automatyka, 3, 1969, 19—34.
4. Th. Laible, *Die Theorie der Synchronmaschine im nichtstationären Betrieb*, Springer-Verlag, Berlin-Götingen-Heidelberg 1952.
5. W. E. Milne, *Numerical Calculus. Approximation, Interpolation, Finite Differences, Numerical Integration and Curve Fitting*, Princetown Univ. Press, Princetown New Jersey 1949.
6. R. H. Park, *Two-Reaction Theory of Synchronous Machines*, Part I, Trans. AIEE, 1929, p. 716, Part II, Trans. AIEE, 1933, p. 352.
7. K. Pawluk, S. Bednarek, *Rozruch i stany asynchroniczne silników synchronicznych*, WNT, Warszawa 1968.
8. M. J. D. Powell, *On the Calculation of Ortogonal Vectors*, Comp. Journ., 1968, pp. 302—304.
9. G. Varhegi, *Numerical Differentiation of Experimental Data*, Inf. Proc. Letters, 2, 1973, pp. 24—25.
10. S. Węgrzyn, *Podstawy automatyki*, PWN, Warszawa 1972.

Z. GŁOWACZ, J. KRÓL

IDENTIFICATION OF SYNCHRONOUS MACHINE PARAMETERS BY THE METHOD OF ADJUSTABLE MODEL

Summary

The method of identification proposed in this paper is founded on the idea of an adjustable model which approximate some operational characteristics of the machine in a quasistationary state, in particular the asynchronous torque/speed characteristic. A real advantage of the method is the fact that it requires only the measurements in normal operational conditions.

Z. GŁOWACZ, J. KRÓL

IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES DE LA MACHINE ASYNCHRONE À L'AIDE DE LA MÉTHODE DU MODÈLE VARIABLE

Résumé

Dans l'article on présente une méthode de l'identification des paramètres d'un modèle mathématique de la machine asynchrone, basée sur une idée du modèle variable, qui constitue une approximation des caractéristiques de la machine, surtout de la rélation entre le moment asynchrone et la vitesse de rotation. La qualité importante de cette méthode répose sur le fait, que tous les mésurages peuvent être éffectuer pendent l'exploitation normale de la machine.

Z. GŁOWACZ, J. KRÓL

IDENTIFIKATION VON PARAMETERN EINER SYNCHRONMASCHINE MITTELS METHODE EINES ADJUSTIERBAREN MODELLS

Zusammenfassung

Die in der Arbeit vorgeschlagene Identifikationsmethode wird auf der Idee eines adjustierbaren Modells basiert, das gewisse Betriebseigenschaften der Maschine annäherungsweise darstellt, insbesonders die Abhängigkeit des asynchronen Momentes, von der Geschwindigkeit. Ein wesentlicher Vorteil der Methode beruht darin, daß experimentelle Messungen lediglich in normalen Betriebsbedingungen erforderlich sind.

З. ГЛОВАЧ, Е. КРУЛЬ

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СИНХРОННОЙ МАШИНЫ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА НАСТРАИВАЕМОЙ МОДЕЛИ

Резюме

Предлагаемый в работе метод идентификации обоснован на идее настраиваемой модели, при помощи которой аппроксимируются некоторые характеристики движения, а в частности зависимость асинхронного момента от скорости. Существенным достоинством метода является факт, что в экспериментальной части требуются лишь измерения в нормальных эксплуатационных условиях.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 2, ss. 355—382

621.313.323

Model numeryczny do rozpatrywania stanów pracy silnika synchronicznego przy obciążeniach udarowych

KRYSTYNA BALIŃSKA (POZNAŃ)

Politechnika Poznańska, Środowiskowy Ośrodek Informatyki

Otrzymano 20.9.1974

W pracy przedstawiono model numeryczny silnika synchronicznego przeznaczony do rozpatrywania udarowych stanów pracy za pomocą maszyny cyfrowej. Za podstawę modelu przyjęto układ równań Parka-Goriewa uwzględniając wpływ stopnia nasycenia obwodu magnetycznego silnika na wartości jego parametrów. Podano wyniki obliczeń wykonanych dla sprawdzenia działania modelu oraz jego przydatności do analizy wpływu różnych czynników na zachowanie się silnika w stanach udarowych.

1. WPROWADZENIE

Jednym z najważniejszych zagadnień w teorii maszyny synchronicznej jest analiza jej zachowania pod wpływem nagłych wymuszeń. Wirnik maszyny może wówczas zostać pobudzony do kołysań o znacznej amplitudzie, które kończą się nowym stanem pracy ustalonej lub zakłóceniem synchronizmu.

W publikacjach na ten temat [5, 6, 11, 12] wykorzystuje się podstawowe prace teoretyczne R. H. Parka [9], A. A. Goriewa [4], Th. Laible'a [8], E. J. Kazowskiego [7] do analizy ilościowej zjawisk zachodzących w generatorach oraz w silnikach synchronicznych w warunkach gwałtownych zmian obciążenia.

W niniejszym artykule przedstawiono uniwersalny algorytm wyznaczania stanów pracy silnika synchronicznego obciążanego udarowo o biegunach jawnych, z obwodami tłumiącymi w wirniku. Ze względu na to, że dla silników o dużych mocach nie zawsze można założyć sztywność sieci zasilającej, rozpatrzono przypadek bardziej ogólny, pracy silnika zasilanego z sieci o mocy ograniczonej, tj. charakteryzującej się pewną reaktancją wewnętrzną. Uwzględniono również możliwość zmiany napięcia wzbudzenia silnika wraz z forsowaniem tego napięcia oraz, z pewnymi ograniczeniami, nieliniowość charakterystyki magnesowania silnika.

Oznaczenia stosowane w treści artykułu

$B_0 \div B_4$ — współczynniki równania (5.1),
C — inercyjna stała czasowa układu silnik-urządzenie napędzane,
$D_1 \div D_5$ — wyznaczniki w układzie równań (3.3),

e_d, e_f, e_{kd} — siły elektromotoryczne w odpowiednich uzwojeniach w osi podłużnej d,
e_q, e_{kq} — siły elektromotoryczne w uzwojeniach w osi poprzecznej q,
e_{do}, e_{qo} — wartości początkowe sił elektromotorycznych e_d, e_q,
e_{wd} — wypadkowa siła elektromotoryczna „szczelinowa" w osi podłużnej d, zależność (7.3),
$F_1 \div F_4$ — pomocnicze oznaczenia (3.4) w układzie równań (3.5),
GD^2 — moment zamachowy,
g_1, g_2 — współczynniki układu równań (2.2), określone w p. 4,
h — krok całkowania równań różniczkowych metodą Rungego-Kutty,
$H_1 \div H_5$ — oznaczenia prawych stron układu równań (3.2),
I_1 — jednostka prądu w układzie jednostek względnych,
I_n — wartość skuteczna prądu fazowego przy znamionowym obciążeniu,
I_{fo} — prąd wzbudzenia przy biegu jałowym,
I_{fn} — wartość znamionowa prądu wzbudzenia,
i_a, i_b, i_c — wartości chwilowe prądów fazowych,
i_d, i_q — wartości chwilowe prądów w uzwojeniach d, q,
i_{fd} — wartość chwilowa prądu w uzwojeniu wzbudzenia f,
i_{kd}, i_{kq} — wartości chwilowe prądów w uzwojeniach kd, kq,
i_{wd} — prąd odpowiadający wypadkowemu przepływowi w osi d,
i_o — prąd wypadkowy w osi d, odpowiadający początkowi nieliniowej części charakterystyki (7.1),
J — moment bezwładności,
$K_1 \div K_{13}$ — współczynniki układu równań (3.5),
M_1 — jednostka momentu obrotowego w układzie jednostek względnych,
M_e — wartość chwilowa momentu elektromagnetycznego silnika,
M_h — wartość chwilowa momentu hamującego obciążeniowego,
M_o — wartość początkowa momentu M_h,
M_A — amplituda momentu M_h obliczana od poziomu M_o,
n — prędkość obrotowa wirnika,
n_s — synchroniczna prędkość obrotowa,
P_n — znamionowa moc czynna,
p — liczba par biegunów silnika,
r, r_f — rezystancje uzwojeń: fazowego oraz wzbudzenia,
r_{kd}, r_{kq} — rezystancje obwodów tłumiących w osi d oraz q w wirniku,
S_1 — jednostka mocy w układzie jednostek względnych,
S_n — znamionowa moc pozorna silnika,
s — poślizg,
T — czas jaki upływa od chwili $t = 0$ do chwili wystąpienia następnego udaru obciążenia,
T_1 — jednostka czasu w układzie jednostek względnych,
T'_d — stała czasowa uzwojenia wzbudzenia przy zwartym uzwojeniu stojana,
T'_{do} — stała czasowa uzwojenia wzbudzenia przy rozwartym uzwojeniu stojana,
T''_d — stała czasowa nadprzejściowa,
T_{kd} — stała czasowa klatki w osi d przy rozwartych pozostałych uzwojeniach,

t — czas mierzony w jednostkach względnych,
t_1 — czas trwania czoła forsowanego napięcia wzbudzenia u_f,
t_f — czas opóźnienia forsowania wzbudzenia w stosunku do chwili wystąpienia udaru momentu na wale silnika,
t_M — czas trwania czoła udaru obciążenia M_h,
U_1 — jednostka napięcia twornika w układzie jednostek względnych,
U_f — jednostka napięcia wzbudzenia w układzie jednostek względnych,
$U_{faz\,n}$ — wartość skuteczna napięcia fazowego,
U_n — napięcie znamionowe silnika,
u_f — wartość chwilowa napięcia wzbudzenia,
u_{fo} — początkowa wartość napięcia wzbudzenia,
u_{fA} — przyrost forsowanego napięcia wzbudzenia obliczany od poziomu u_{fo},
x_d, x_q — reaktancje synchroniczne: podłużna oraz poprzeczna,
x_{do} — reaktancja synchroniczna podłużna maszyny nienasyconej,
x'_d — reaktancja przejściowa w osi podłużnej d,
x''_d, x''_q — reaktancje nadprzejściowe w osi podłużnej i poprzecznej,
x_r — reaktancja rozproszenia uzwojenia twornika,
x_{td} — reaktancja reakcji twornika,
Z_1 — jednostka impedancji w układzie jednostek względnych,
$z_1 \div z_5$ — oznaczenia pomocnicze w p. 3,
α_M, β_M — współczynniki funkcji udaru obciążenia M_h,
α_f, β_f — współczynniki funkcji forsowania napięcia wzbudzenia u_f,
γ_M, γ_f — połowa czasu trwania wymuszeń M_h oraz u_f,
Δ — współczynnik rozproszenia magnetycznego uzwojeń w osi d,
Δ' — współczynnik rozproszenia magnetycznego uzwojeń w osi q,
ε, σ — błąd bezwzględny oraz względny rozwiązania równań różniczkowych metodą Rungego-Kutty,
ξ_1, ξ_2, ξ_3 — współczynniki funkcji aproksymującej charakterystykę biegu jałowego silnika,
ϑ — kąt obciążenia silnika,
θ_{wd} — wypadkowy przepływ w osi podłużnej d,
$\varkappa$ — dokładność obliczenia reaktancji x_d z uwzględnieniem nasycenia,
ν_f — współczynnik sprzężenia magnetycznego uzwojeń d oraz f,
ν_{kd} — współczynnik sprzężenia magnetycznego uzwojeń d oraz kd,
ν_a — współczynnik sprzężenia magnetycznego uzwojeń f oraz kd,
ν_{kq} — współczynnik sprzężenia magnetycznego uzwojeń q oraz kq,
$\varrho_d, \varrho_f, \varrho_{kd}$ — dekrementy tłumienia odpowiednich uzwojeń w osi d,
ϱ_q, ϱ_{kq} — dekrementy tłumienia odpowiednich uzwojeń w osi q,
τ — czas mierzony w sekundach,
$\Psi_d, \Psi_f, \Psi_{kd}$ — wartości chwilowe strumieni magnetycznych skojarzonych z uzwojeniami w osi d,
Ψ_q, Ψ_{kq} — wartości chwilowe strumieni magnetycznych skojarzonych z uzwojeniami w osi q,
ω — prędkość kątowa wirnika,
ω_1 — synchroniczna prędkość kątowa maszyny zastępczej dwubiegunowej; jednostka prędkości kątowej w układzie jednostek względnych,

ω_s — synchroniczna prędkość kątowa silnika,

ϑ_M, ϑ_f — współczynniki występujące w opisie analitycznym wymuszeń: obciążenia udarowego na wale oraz forsowanego napięcia wzbudzenia (6.7)÷(6.9).

2. RÓWNANIA STANÓW PRACY

Maszyna synchroniczna jest złożonym układem trójwymiarowych obwodów elektrycznych i magnetycznych, składających się z obszarów, w których przenikalność dielektryczna i magnetyczna przybierają różne wartości. Dokładny opis zjawisk w maszynie za pomocą równań Maxwella jest praktycznie niemożliwy. Równania stanów pracy formułuje się na podstawie uproszczonego obrazu pól magnetycznych, przyjmując następujące założenia:

1 — maszyna jest symetryczna pod względem magnetycznym, tj. jej obwód magnetyczny ma $2p$ osi symetrii (p — liczba par biegunów maszyny),

2 — maszyna jest symetryczna pod względem elektrycznym, tj. uzwojenia fazowe stojana są identyczne a ich osie rozmieszczone symetrycznie,

3 — pomija się wyższe harmoniczne rozkładu siły magnetomotorycznej uzwojenia stojana,

4 — nie uwzględnia się wpływu użłobkowania stojana na kształt strumienia magnetycznego w szczelinie.

Wykorzystując wprowadzone przez R. H. Parka [9] przekształcenie wielkości fazowych (a, b, c) na wielkości związane z układem współrzędnych (d, q) nieruchomych względem wirnika maszyny, otrzymuje się równania stanów pracy w postaci układu równań różniczkowych zwyczajnych o współczynnikach stałych.

Na rys. 1 przedstawiono układ połączeń silnika oznaczając przyjęte dodatnie zwroty prądów i napięć fazowych oraz prądu i napięcia wzbudzenia. Dodatnie zwroty momentu elektromagnetycznego silnika oraz momentu hamującego od urządzenia napędzanego wybrano zgodne. Układ równań różniczkowych opisujący zachowanie się silnika w stanach nieustalonych został wyprowadzony z równań równowagi sił elektromotorycznych w obwodach maszyny i równania momentów działających na wirnik:

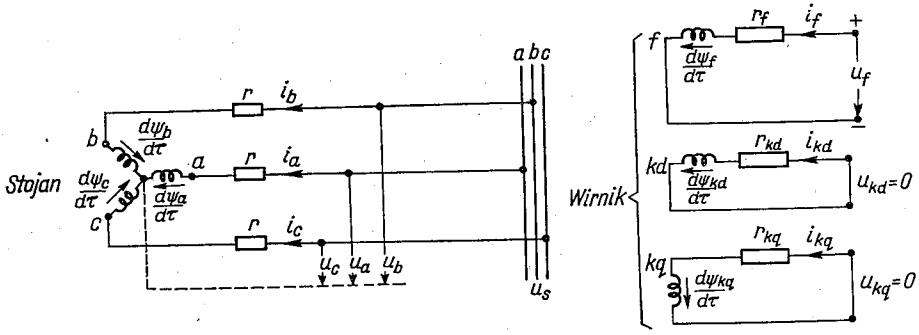
$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\Psi_k}{d\tau} + r_k \cdot i_k = u_k \qquad (k = a, b, c, f), \\ &\frac{d\Psi_j}{d\tau} + r_j \cdot i_j = 0 \qquad (j = kd, kq), \\ &M_e - M_h = J \cdot \frac{d\omega}{d\tau} \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

wg prac R. H. Parka [9] i A. A. Goriewa [4] przy założeniu, że punkty: zerowy sieci i gwiazdowy silnika nie są połączone.

Wprowadzono zapis wszystkich wielkości w wartościach względnych, odniesionych do następujących wartości bazowych (przy założeniu, że silnik posiada uzwojenia połączone w gwiazdę):

1 — jednostka napięcia lub siły elektromotorycznej uzwojeń z wyjątkiem uzwojenia wzbudzenia: amplituda napięcia fazowego stojana, w V, $U_1 = \sqrt{2} \cdot U_{fazn}$,

2 — jednostka prądu, $I_1 = \sqrt{2} \cdot I_n$ — amplituda prądu fazowego przy obciążeniu znamionowym, w A,



Rys. 1. Układ połączeń silnika

3 — jednostka impedancji, $Z_1 = U_1/I_1$, w Ω,

4 — jednostka mocy, $S_1 = \frac{3}{2} \cdot U_1 \cdot I_1$ — znamionowa moc pozorna maszyny, w VA,

5 — jednostka czasu, $T_1 = 1/\omega_1$ — sekunda synchroniczna, tj. czas, w którym wirnik zastępczej maszyny 2-biegunowej obróci się w stanie ustalonym o 1 radian przy znamionowej częstotliwości napięcia stojana,

6 — jednostka prędkości kątowej, $\omega_1 = p \cdot \omega_s = 100\,\pi$, w s^{-1}, (przy $f = 50$ Hz),

7 — jednostka momentu obrotowego, $M_1 = p \cdot S_1/\omega_1$, w Nm,

8 — jednostka napięcia wzbudzenia, U_f — wartość napięcia wzbudzenia, w V, przy której w silniku nagrzanym, zasilanym od strony stojana napięciem znamionowym i nieobciążonym na wale, uzyskuje się minimalną wartość prądu w uzwojeniu stojana.

Przyjmując układ współrzędnych wirujących razem z wirnikiem taki, że oś podłużna d wyprzedza oś poprzeczną q otrzymano równania stanów pracy silnika (2.2), wyrażone w jednostkach względnych. Zmiennymi w tych równaniach są siły elektromotoryczne e indukowane w uzwojeniach zastępczych stojana przez prądy w poszczególnych uzwojeniach, kąt obciążenia ϑ silnika oraz poślizg s pola względem wirnika. Wielkościami wymuszającymi są: napięcie u zasilające uzwojenia fazowe, napięcie wzbudzenia u_f oraz moment hamujący M_h. Otrzymano:

$$
\begin{aligned}
&\frac{de_d}{dt} + \frac{de_f}{dt} + \frac{de_{kd}}{dt} + (s+1)\cdot(e_q + e_{kq}) + \varrho_d \cdot e_d = u \cdot \sin\vartheta,\\
&\nu_f \cdot \frac{de_d}{dt} + \frac{de_f}{dt} + g_1 \cdot \frac{de_{kd}}{dt} + \varrho_f \cdot e_f = \varrho_f \cdot u_f,\\
&\nu_{kd} \cdot \frac{de_d}{dt} + g_2 \cdot \frac{de_f}{dt} + \frac{de_{kd}}{dt} + \varrho_{kd} \cdot e_{kd} = 0,\\
&\frac{de_q}{dt} + \frac{de_{kq}}{dt} - (s+1)\cdot(e_d + e_f + e_{kd}) + \varrho_q \cdot e_q = u \cdot \cos\vartheta,\\
&\nu_{kq} \cdot \frac{de_q}{dt} + \frac{de_{kq}}{dt} + \varrho_{kq} \cdot e_{kq} = 0,\\
&C \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{e_q}{x_q} \cdot (e_d + e_f + e_{kd}) - \frac{e_d}{x_d} \cdot (e_q + e_{kq}) = -M_h,\\
&s = -\frac{d\vartheta}{dt}.
\end{aligned}
\qquad (2.2)
$$

3. SPROWADZENIE RÓWNAŃ DO POSTACI NORMALNEJ CAUCHY'EGO

Układ równań (2.2) jest modelem matematycznym zachowania się silnika synchronicznego przy dowolnym obciążeniu $M_h(t)$ i zasilaniu $u(t)$ oraz $u_f(t)$. Analityczne rozwiązanie tego układu nastręcza duże trudności (i wymaga poczynienia dalszych założeń upraszczających) już przy prostych funkcjach opisujących przebieg w czasie wielkości wymuszonych od strony sieci oraz od strony wału, tj. przy prostych funkcjach $u(t)$, $u_f(t)$ oraz $M_h(t)$. Ogólne rozwiązanie układu (2.2) przy dowolnych wymuszeniach nie jest możliwe.

W tej pracy analizowany jest przypadek, w którym wymuszenie od strony stojana jest stałe w czasie a od strony uzwojenia wzbudzenia może następować forsowanie napięcia wzbudzenia w celu polepszenia własności dynamicznych silnika podczas trwania udarowego obciążenia na wale. Do badania stanów nieustalonych silnika pracującego w takich warunkach opracowano model numeryczny rozwiązania układu równań (2.2) w postaci zespołu algorytmów i sprawdzono jego działanie za pomocą maszyny cyfrowej.

Spośród znanych metod numerycznych rozwiązywania układów równań różniczkowych zwyczajnych wybrano metodę Rungego-Kutty [3] ze względu na jej niezawodność oraz prostotę algorytmu w stosunku do uzyskiwanej dokładności obliczeń. Stosowanie tej metody wymaga sprowadzenia danego układu równań różniczkowych do postaci normalnej Cauchy'ego:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

Przekształcając układ równań (2.2) tak, żeby pochodne zmiennych występowały po lewej stronie znaku równości, łatwo można zauważyć, że pochodne zmiennych dotyczących danej osi, np. podłużnej d, nie występują w równaniach wiążących wielkości dotyczące osi poprzecznej q oraz w równaniu momentów obrotowych. Posłużono się, w związku z tym, metodą wyznaczników (analogiczną do stosowanej przy rozwiązywaniu układów równań algebraicznych liniowych) oddzielnie rozpatrując równania zawierające wielkości związane z osią podłużną d oraz z osią poprzeczną q. Równanie momentów nie wymaga przekształcenia, gdyż ma już potrzebną postać.

Po wprowadzeniu pomocniczych oznaczeń:

$$z_1 = \frac{de_d}{dt}, \quad z_2 = \frac{de_f}{dt}, \quad z_3 = \frac{de_{kd}}{dt}, \quad z_4 = \frac{de_q}{dt}, \quad z_5 = \frac{de_{kq}}{dt},$$

$$H_1 = u \cdot \sin\vartheta - (s+1) \cdot (e_q + e_{kq}) - \varrho_d \cdot e_d,$$

$$H_2 = \varrho_f \cdot (u_f - e_f),$$

$$H_3 = -\varrho_{kd} \cdot e_{kd},$$

$$H_4 = u \cdot \cos\vartheta + (s+1) \cdot (e_d + e_f + e_{kd}) - \varrho_q \cdot e_q,$$

$$H_5 = -\varrho_{kq} \cdot e_{kq},$$

układ (2.2) przybiera postać:

$$\left.\begin{aligned} &z_1+z_2+z_3 = H_1,\\ &\nu_f\cdot z_1+z_2+g_1\cdot z_3 = H_2,\\ &\nu_{kd}\cdot z_1+g_2\cdot z_2+z_3 = H_3,\\ &z_4+z_5 = H_4,\\ &\nu_{kq}\cdot z_4+z_5 = H_5. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Jako rozwiązanie otrzymuje się następujący układ:

$$z_1 = \frac{D_1}{\Delta},\quad z_2 = \frac{D_2}{\Delta},\quad z_3 = \frac{D_3}{\Delta},\quad z_4 = \frac{D_4}{\Delta'},\quad z_5 = \frac{D_5}{\Delta'}, \tag{3.3}$$

przy czym:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ \nu_f & 1 & g_1\\ \nu_{kd} & g_2 & 1 \end{vmatrix} = (1-g_1\cdot g_2)+\nu_f\cdot(g_2-1)+\nu_{kd}\cdot(g_1-1), \tag{3.3a}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} H_1 & 1 & 1\\ H_2 & 1 & g_1\\ H_3 & g_2 & 1 \end{vmatrix} = H_1\cdot(1-g_1\cdot g_2)+H_2\cdot(g_2-1)+H_3\cdot(g_1-1),$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & H_1 & 1\\ \nu_f & H_2 & g_1\\ \nu_{kd} & H_3 & 1 \end{vmatrix} = H_1\cdot(g_1\cdot\nu_{kd}-\nu_f)+H_2\cdot(1-\nu_{kd})+H_3\cdot(\nu_f-g_1),$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & H_1\\ \nu_f & 1 & H_2\\ \nu_{kd} & g_2 & H_3 \end{vmatrix} = H_1\cdot(\nu_f\cdot g_2-\nu_{kd})+H_2\cdot(\nu_{kd}-g_2)+H_3\cdot(1-\nu_f),$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 1\\ \nu_{kq} & 1 \end{vmatrix} = 1-\nu_{kq}, \tag{3.3b}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} H_4 & 1\\ H_5 & 1 \end{vmatrix} = H_4-H_5,$$

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & H_4\\ \nu_{kq} & H_5 \end{vmatrix} = H_4\cdot(-\nu_{kq})+H_5.$$

Jak można w prosty sposób sprawdzić, wartości wyznaczników Δ oraz Δ' są różne od zera (są dodatnie).

Dla przejrzystości zapisu i ułatwienia obliczeń za pomocą maszyny cyfrowej należy w otrzymanym układzie równań (3.3) wyraźnie oddzielić parametry układu od wielkości zmiennych.

Wprowadzając oznaczenia:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= e_d+e_f+e_{kd},\\ F_2 &= e_q+e_{kq},\\ F_3 &= u\cdot\sin\vartheta-(s+1)\cdot F_2-\varrho_d\cdot e_d,\\ F_4 &= u\cdot\cos\vartheta+(s+1)\cdot F_1-\varrho_q\cdot e_q, \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

otrzymuje się równania stanów pracy silnika synchronicznego sprowadzone do postaci normalnej Cauchy'ego:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\vartheta}{dt} &= -s,\\
\frac{ds}{dt} &= \frac{1}{C}\cdot\left[\frac{e_d}{x_d}\cdot F_2-\frac{e_q}{x_q}\cdot F_1-M_h\right],\\
\frac{de_d}{dt} &= K_1\cdot F_3+K_2\cdot(u_f-e_f)+K_3\cdot e_{kd},\\
\frac{de_f}{dt} &= K_4\cdot F_3+K_5\cdot(u_f-e_f)+K_6\cdot e_{kd},\\
\frac{de_{kd}}{dt} &= K_7\cdot F_3+K_8\cdot(u_f-e_f)+K_9\cdot e_{kd},\\
\frac{de_q}{dt} &= K_{10}\cdot F_4+K_{11}\cdot e_{kq},\\
\frac{de_{kq}}{dt} &= K_{12}\cdot K_4+K_{13}\cdot e_{kq}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Współczynniki $K_1 \div K_{13}$ wyrażają się wzorami:

$$\left.\begin{aligned}
K_1 &= (1-g_1\cdot g_2)/\Delta,\\
K_2 &= (g_2-1)\cdot\varrho_f/\Delta,\\
K_3 &= (1-g_1)\cdot\varrho_{kd}/\Delta,\\
K_4 &= (g_1\cdot\nu_{kd}-\nu_f)/\Delta,\\
K_5 &= (1-\nu_{kd})\cdot\varrho_f/\Delta,\\
K_6 &= (g_1-\nu_f)\cdot\varrho_{kd}/\Delta,\\
K_7 &= (\nu_f\cdot g_2-\nu_{kd})/\Delta,\\
K_8 &= (\nu_{kd}-g_2)\cdot\varrho_f/\Delta,\\
K_9 &= (\nu_f-1)\cdot\varrho_{kd}/\Delta,\\
K_{10} &= 1/\Delta',\\
K_{11} &= \varrho_{kq}/\Delta',\\
K_{12} &= -\nu_{kq}/\Delta',\\
K_{13} &= -\varrho_{kq}/\Delta'.
\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

4. ALGORYTM OBLICZENIA WSPÓŁCZYNNIKÓW

Algorytm obliczenia współczynników układu równań (3.5) przygotowano w taki sposób, żeby danymi wejściowymi były podstawowe parametry silnika synchronicznego, podawane zwykle przez wytwórcę; posłużono się przy tym wzorami stosowanymi w literaturze [4]. Parametrami tymi są:

S_n (kVA) — moc pozorna,
I_{fn} (A) — znamionowy prąd wzbudzenia,
I_{fo} (A) — prąd wzbudzenia przy biegu jałowym,
n_s (obr/min) — synchroniczna prędkość obrotowa,
GD^2 (tm^2) — moment zamachowy wirnika,
x_d (j.w.) — reaktancja synchroniczna podłużna,
x'_d (j.w.) — reaktancja przejściowa podłużna,
x_q (j.w.) — reaktancja synchroniczna poprzeczna,
x''_d (j.w.) — reaktancja nadprzejściowa podłużna,
x''_q (j.w.) — reaktancja nadprzejściowa poprzeczna,
r (j.w.) — rezystancja uzwojenia fazowego stojana,
T_{kd} (s) — stała czasowa klatki podłużnej przy otwartych pozostałych uzwojeniach,
T'_d (s) — stała czasowa uzwojenia wzbudzenia przy zwartym uzwojeniu stojana,
T'_{do} (s) — stała czasowa uzwojenia wzbudzenia przy rozwartym uzwojeniu stojana,
T''_d (s) — stała czasowa uzwojenia rozruchowego w osi podłużnej,
T''_q (s) — stała czasowa uzwojenia rozruchowego w osi poprzecznej.

Współczynnik sprzężenia magnetycznego ν_f, między uzwojeniem stojana w osi podłużnej i uzwojeniem wzbudzenia, związany jest z parametrami silnika zależnością:

$$\nu_f = 1 - \frac{x'_d}{x_d}, \tag{4.1}$$

natomiast współczynnik sprzężenia ν_a, między uzwojeniem wzbudzenia a uzwojeniem klatki w osi podłużnej — zależnością:

$$\nu_a = 1 - \frac{T''_d}{T_{kd}} \cdot \frac{x'_d}{x''_d}. \tag{4.2}$$

Wprowadzona w p. 3 wielkość Δ jest całkowitym współczynnikiem rozproszenia dla trzech uzwojeń sprzężonych, których osie magnetyczne pokrywają się z osią podłużną d. Wartość tego współczynnika można obliczyć z zależności dla reaktancji nadprzejściowej x''_d uzwojenia stojana w osi d, sprzęgniętego z dwoma uzwojeniami, które są zwarte:

$$x''_d = \frac{\Delta}{1-\nu_a} \cdot x_d,$$

stąd

$$\Delta = (1-\nu_a) \cdot \frac{x''_d}{x_d}.$$

Podstawiając:

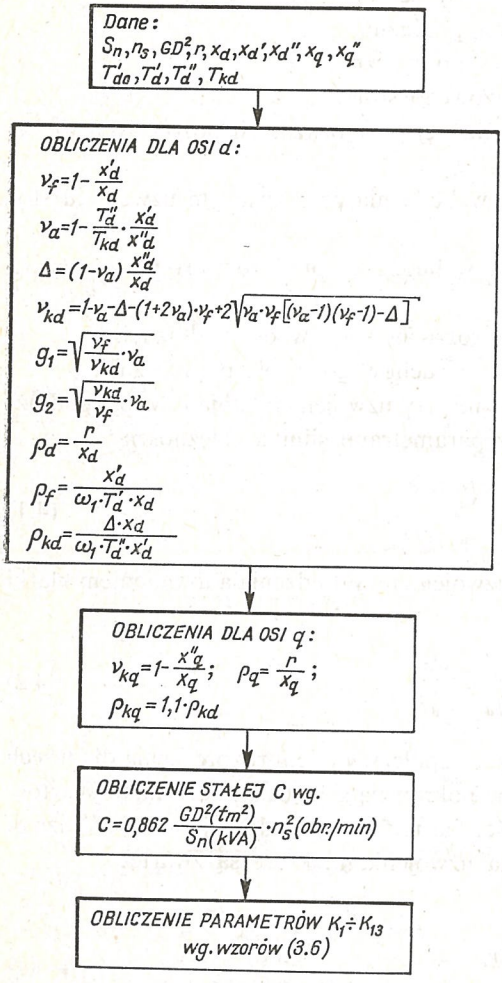
$$g_1 = \sqrt{\frac{\nu_f}{\nu_{kd}} \cdot \nu_a}, \qquad g_2 = \sqrt{\frac{\nu_{kd}}{\nu_f} \cdot \nu_a}$$

do (3.3a) otrzymuje się zależność:

$$\Delta = 1-\nu_a-\nu_f-\nu_{kd}+2\sqrt{\nu_a\cdot\nu_f\cdot\nu_{kd}}\,,$$

dzięki czemu można obliczyć wartość współczynnika sprzężenia ν_{kd}, między uzwojeniem stojana w osi podłużnej a uzwojeniem klatki w tej osi

$$\nu_{kd} = 1-\nu_a-\Delta-(1+2\cdot\nu_a)\cdot\nu_f+2\sqrt{\nu_a\cdot\nu_f[(\nu_a-1)\cdot(\nu_f-1)-\Delta]}\,.$$



Rys. 2. Algorytm obliczenia współczynników równań (3.5)

Wprowadzona w p. 3 wielkość $\Delta' = 1-\nu_{kq}$ jest współczynnikiem rozproszenia dla dwóch uzwojeń sprzężonych, których osie magnetyczne pokrywają się z osią poprzeczną q. Wartość tego współczynnika mierzy się stosunkiem reaktancji x_q''/x_q, więc współczynnik sprzężenia magnetycznego ν_{kq} tych uzwojeń oblicza się z zależności

$$\nu_{kq} = 1-\frac{x_q''}{x_q}\,.$$

Dekrementy tłumienia obwodów poszczególnych uzwojeń przy rozwartych pozostałych uzwojeniach można obliczyć z następujących zależności:

$$\varrho_d = \frac{r}{x_d}, \qquad \varrho_f = \frac{x'_d}{\omega_1 \cdot T'_d \cdot x_d}, \qquad \varrho_{kd} = \frac{\Delta}{\omega_1 \cdot T''_d \cdot x'_d},$$

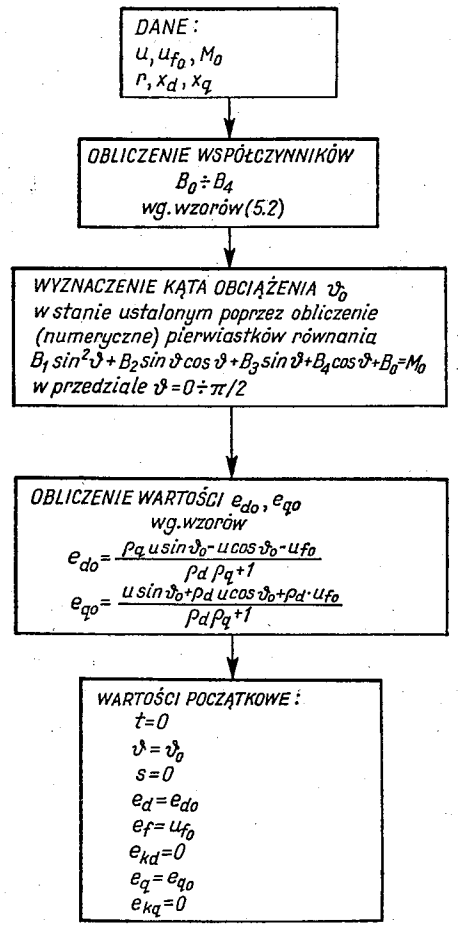
$$\varrho_q = \frac{r}{x_q}, \qquad \varrho_{kq} \cong 1{,}1 \cdot \varrho_{kq}.$$

Stałą czasową inercyjną C oblicza się ze wzoru: $C = 0{,}862 \frac{GD^2}{S_n} n_s^2$.

Algorytm obliczenia współczynników równań (3.5) przedstawiono na rys. 2.

5. ALGORYTM WYZNACZENIA WARUNKÓW POCZĄTKOWYCH

Dla ogólności rozważań przyjęto, że przed wystąpieniem obciążenia udarowego na wale silnik jest obciążony momentem hamującym M_o, uzwojenie stojana zasilane napięciem znamionowym a uzwojenie wzbudzenia napięciem o wartości równej u_{fo}.



Rys. 3. Algorytm wyznaczenia warunków początkowych

W tych warunkach układ równań różniczkowych (2.2) redukuje się do układu czterech równań algebraicznych, z których po przekształceniach otrzymuje się:

$$e_f = u_{fo},$$

$$e_d = \frac{\varrho_q \cdot u \cdot \sin\vartheta - u \cdot \cos\vartheta - u_{fo}}{\varrho_d \cdot \varrho_q + 1},$$

$$e_q = \frac{u \cdot \sin\vartheta + \varrho_d \cdot u \cdot \cos\vartheta + \varrho_d \cdot u_{fo}}{\varrho_d \cdot \varrho_q + 1},$$

$$B_1 \cdot \sin^2\vartheta + B_2 \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta + B_3 \cdot \sin\vartheta + B_4 \cdot \cos\vartheta + B_o = M_o. \tag{5.1}$$

Współczynniki występujące w równaniu (5.1) wyrażają się wzorami:

$$\left.\begin{aligned}
B_1 &= -u^2 \cdot (x_d - x_q) \cdot (\varrho_d + \varrho_q)/B_5,\\
B_2 &= -u^2 \cdot (x_d - x_q) \cdot (\varrho_d \cdot \varrho_q - 1)/B_5,\\
B_3 &= -u \cdot u_{fo} \cdot [(x_d - x_q) \cdot (\varrho_d \cdot \varrho_q - 1) + x_d \cdot (\varrho_d \cdot \varrho_q + 1)]/B_5,\\
B_4 &= -u \cdot u_{fo} \cdot [r(\varrho_d \varrho_q + 1) - 2 \cdot \varrho_d \cdot (x_d - x_q)]/B_5,\\
B_0 &= \{u^2 \cdot \varrho_d \cdot (x_d - x_q) - u_{fo}^2 \cdot [r(\varrho_d \cdot \varrho_q + 1) - \varrho_d \cdot (x_d - x_q)]\}/B_5,\\
B_5 &= x_d \cdot x_q \cdot (\varrho_d \cdot \varrho_q + 1)^2.
\end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

Równanie trygonometryczne kąta obciążenia ϑ silnika (5.1) rozwiązuje się w opisywanym modelu jedną z metod numerycznych wyznaczania miejsc zerowych funkcji ciągłej, określonej w przedziale domkniętym (metodą połowienia przedziału). Jako wynik otrzymuje się kąt ϑ_o, odpowiadający obciążeniu M_o i danym warunkom zasilania silnika. Podstawiając otrzymaną wartość ϑ_o do wyrażeń dla e_d i e_q uzyskuje się wartości e_{do}, e_{qo} odpowiadające temu punktowi pracy silnika. Na rys. 3 przedstawiono algorytm obliczenia wartości początkowych wynikających z ustalonego obciążenia silnika przed wystąpieniem obciążenia udarowego.

6. ALGORYTM OBLICZENIA WYMUSZEŃ NA WALE ORAZ NA ZACISKACH UZWOJENIA WZBUDZENIA

Istotną trudność w spełnieniu wymagań wynikających z zastosowania maszyny cyfrowej stanowiło dobranie odpowiedniego opisu analitycznego dla przebiegu obciążenia udarowego na wale silnika. Stwierdzono, że dobre wyniki daje posłużenie się funkcją typu wykładniczego o kilku parametrach, dogodną ze względu na jej ciągłość i różniczkowalność do dowolnego rzędu oraz łatwe modelowanie dowolnych udarów:

$$M_h(t) = M_o + M_A \cdot e^{-\alpha_M \cdot \left(\frac{t}{\gamma} - 1\right)^{2 \cdot \beta_M}}. \tag{6.1}$$

Dla celów obliczeniowych funkcję tę przedstawiono w postaci:

$$M_h(t) = M_o + M_A \cdot \exp\left\{-\alpha_M \cdot \exp\left[\beta_M \cdot \ln\left(\frac{t}{\gamma} - 1\right)^2\right]\right\}. \tag{6.2}$$

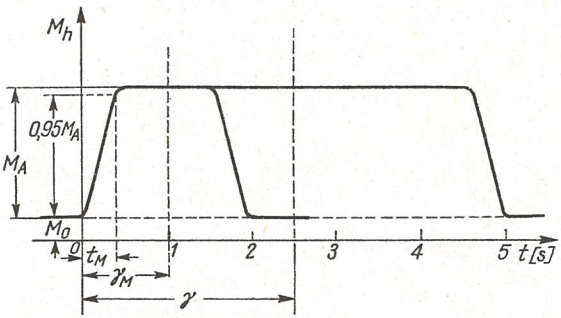
W praktyce, na podstawie zadanego przebiegu udarowego momentu na wale, określa się wartość współczynnika α_M oraz czas t_M narastania momentu od wartości $M_h = M_o$ do wartości np.

$$M_h = M_o + 0{,}95 M_A.$$

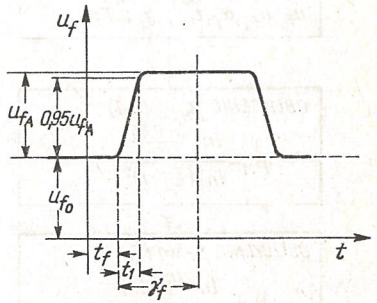
Wartość współczynnika β_M wynika wtedy z zależności:

$$M_h(t_M) = M_o + 0{,}95\, M_A = M_o + M_A \cdot e^{-\alpha_M \left(\frac{t_M}{\gamma} - 1\right)^{2\beta_M}},$$

$$\beta_M = \frac{\ln\left(\frac{\ln 0{,}95}{-\alpha_M}\right)}{\ln[(t_M - 1)^2]}. \tag{6.3}$$



Rys. 4. Obciążenie udarowe na wale



Rys. 5. Forsowanie napięcia wzbudzenia

Aby jednak niezależnie od czasu trwania udaru utrzymywać podczas trwania obliczeń taką samą stromość krzywej $M_h(t)$, czyli aby $t_M = \text{const}$, musi być spełniony warunek (patrz rys. 4)

$$0{,}95 M_A \cdot e^{-\alpha_M \left(\frac{t_M}{\gamma_M} - 1\right)^{2\beta_M}} = 0{,}95 M_A \cdot e^{-\alpha \left(\frac{t_M}{\gamma} - 1\right)^{2\beta'_M}}.$$

Przyjmując $\gamma_M = 1$, $\alpha = \alpha_M$ otrzymuje się:

$$\beta'_M = \beta_M \cdot \frac{\ln[(t_M - 1)^2]}{\ln\left[\left(\frac{t_M}{\gamma} - 1\right)^2\right]}.$$

Ostatecznie uwzględniając (6.3)

$$\beta'_M = \frac{\ln\left(\frac{\ln 0{,}95}{-\alpha_M}\right)}{\ln\left[\left(\frac{t_M}{\gamma} - 1\right)^2\right]}. \tag{6.4}$$

Do opisu analitycznego drugiego wymuszenia, forsowania napięcia wzbudzenia przyjęto funkcję analogiczną do (6.1), uzupełnioną jedynie o parametr określający opóźnienie zadziałania forsowania wzbudzenia w stosunku do chwili wystąpienia udaru momentu:

$$u_f(t) = u_{fo} + u_{fA} \cdot e^{-\alpha_f \cdot \left(\frac{t - t_f}{\gamma_f} - 1\right)^{2\beta_f}},$$

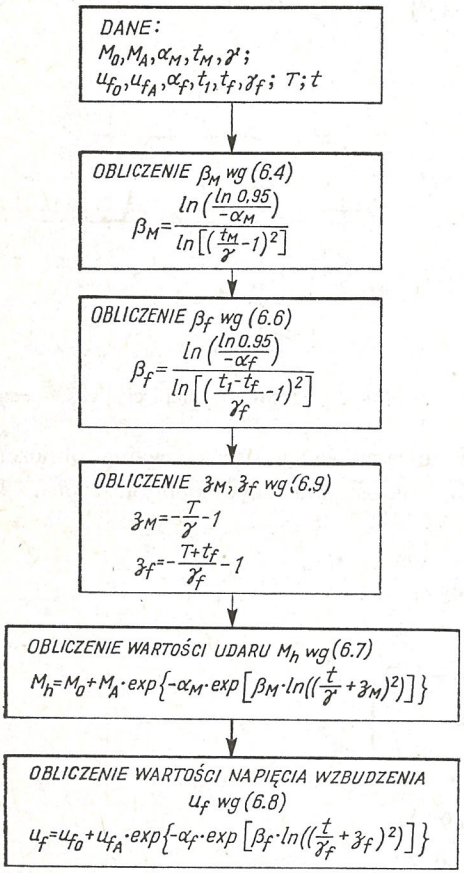
$$u_{fo} = k_o \cdot u_{fn}. \tag{6.5}$$

Podobnie jak β_M oblicza się współczynnik β_f:

$$\beta_f = \frac{\ln\left(\frac{\ln 0{,}95}{-\alpha_f}\right)}{\ln\left[\left(\frac{t_1 - t_f}{\gamma_f} - 1\right)^2\right]} \tag{6.6}$$

(t_f, t_1, γ_f — w sekundach),

przy czym t_1 — czas trwania narastania napięcia u_f od poziomu u_{fo} (chwila $t = t_f$) do poziomu $u_{fo} + 0{,}95\ u_{fA}$ (rys. 5).



Rys. 6. Algorytm obliczenia $M_h(t)$ oraz $u_f(t)$

Za pomocą opracowanego modelu można analizować zjawiska również w przypadku udarów wielokrotnych (wraz z wielokrotnym forsowaniem wzbudzenia). Należy w tym celu funkcje $M_h(t)$ oraz $u_f(t)$ wyrazić wzorami:

$$M_h(t) = M_o + M_A \cdot \exp\left\{-\alpha_M \cdot \exp\left[\beta_M \cdot \ln\left(\frac{t}{\gamma} + \vartheta_M\right)^2\right]\right\}, \tag{6.7}$$

$$u_f(t) = u_{fo} + u_{fA} \cdot \exp\left\{-\alpha_f \cdot \exp\left[\beta_f \cdot \ln\left(\frac{t}{\gamma_f} + \vartheta_f\right)^2\right]\right\}, \tag{6.8}$$

w których:

$$\vartheta_M = -\frac{T}{\gamma} - 1,$$
$$\vartheta_f = -\frac{T+t_f}{\gamma_f} - 1, \tag{6.9}$$

przy czym przez T oznaczono czas, jaki upływa od chwili $t = 0$ do chwili, w której wystąpi następny udar (dla pierwszego udaru $T = 0$, dla następnych $T = t_{(t=0 \text{ nowego udaru})}$).

Na rys. 6 przedstawiono algorytm obliczenia wymuszeń M_h oraz u_f dla danej chwili t.

7. MODEL NUMERYCZNY UWZGLĘDNIAJĄCY NASYCENIE OBWODU MAGNETYCZNEGO SILNIKA

Mimo niewątpliwych komplikacji w budowie modelu oraz wydłużenia czasu trwania obliczenia stanu nieustalonego silnika za pomocą maszyny cyfrowej okazało się celowe, wobec wykorzystywania silnego forsowania wzbudzenia, uwzględnienie nieliniowości charakterystyki biegu jałowego silnika i jej wpływu na wartości parametrów modelu.

W pracy tej uwzględniono wpływ stopnia nasycenia w sposób przybliżony. Posłużono się metodą dwóch osi, która jest teoretycznie słuszna tylko w maszynie o liniowym obwodzie magnetycznym. Założono przy tym, że pod wpływem nasycenia zmieniają się wielkości tylko w osi podłużnej d. Ilościowy wpływ nasycenia obliczono na podstawie charakterystyki biegu jałowego, gdyż przy użyciu jednostek względnych pokrywa się ona z charakterystyką magnesowania w osi podłużnej d. Charakterystykę magnesowania w osi poprzecznej q silnika przyjęto, w całym zakresie zmian strumienia w tej osi, za praktycznie prostoliniową. W związku z tym reaktancję synchroniczną x_q uważa się za niezmienną — niezależną od stanu pracy silnika. Pominięto również wpływ nasycenia na wartość reaktancji rozproszenia x_r.

Ostatecznie uwzględniono wpływ nasycenia tylko na wartość reaktancji reakcji twornika x_{td}, która zależy od wypadkowego przepływu θ_{wd} w osi podłużnej d w sposób określony przez charakterystykę biegu jałowego (rys. 7):

$$e_{wd} = f(\theta_{wd}). \tag{7.1}$$

W jednostkach względnych przepływ wypadkowy θ_{wd} jest równy sumie odpowiednich prądów płynących w uzwojeniach, leżących w osi podłużnej d:

$$\theta_{wd} = i_{wd} = i_d + i_f + i_{kd}.$$

W pracy posłużono się następującą funkcją analityczną, aproksymującą charakterystykę biegu jałowego [1]:

$$e_{wd} = \xi_3 \cdot i_o + \frac{i_{wd} - i_o}{\xi_1 + \xi_2 \cdot (i_{wd} - i_o)}, \tag{7.2}$$

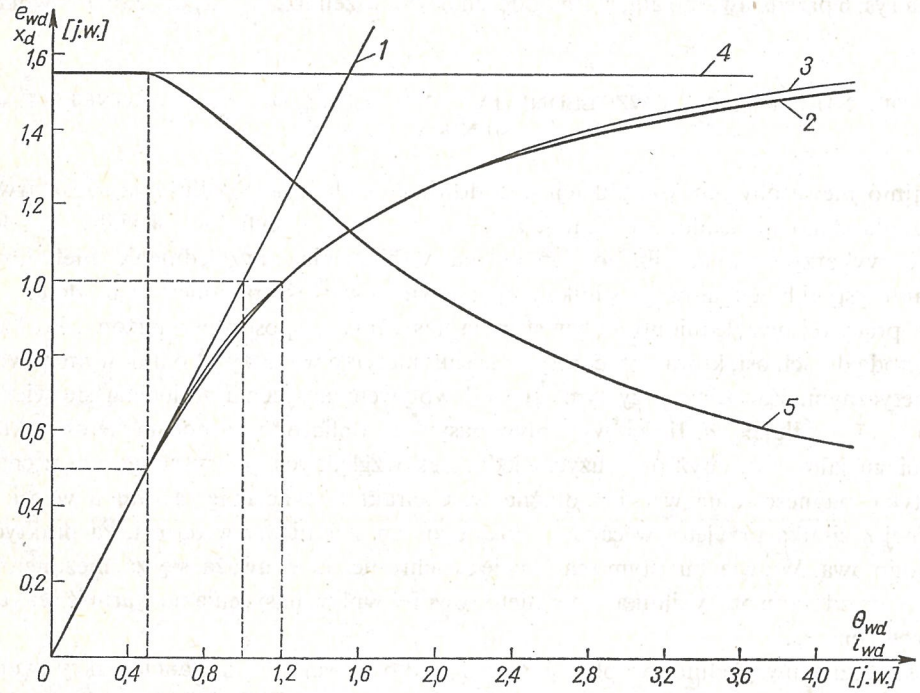
przy czym:

i_o — prąd (przepływ) wypadkowy w osi d, odpowiadający początkowi nieliniowej części charakterystyki (7.1) $i_o = 0{,}5$,

ξ_1, ξ_2 — współczynniki określone na podstawie wartości współrzędnych dwóch punktów „normalnej" charakterystyki biegu jałowego,

ξ_3 — tangens kąta nachylenia prostoliniowego odcinka charakterystyki (7.1) do osi przepływu.

Wartości tych współczynników można łatwo wyznaczyć dla zadanej charakterystyki magnesowania silnika, wyznaczonej w jednostkach względnych. Jeżeli taka charakterystyka nie jest znana, to można posłużyć się charakterystyką typową, dla której otrzymuje się: $\xi_1 = 0{,}895$, $\xi_2 = 0{,}722$, $\xi_3 = 1{,}0$.



Rys. 7. Charakterystyki: $e_{wd} = f(i_{wd})$ (1 — liniowa, 2 — normalna, 3 — według (7.2)) oraz $x_d = f(i_{wd})$ (4 — liniowa, 5 — z uwzględnieniem nasycenia)

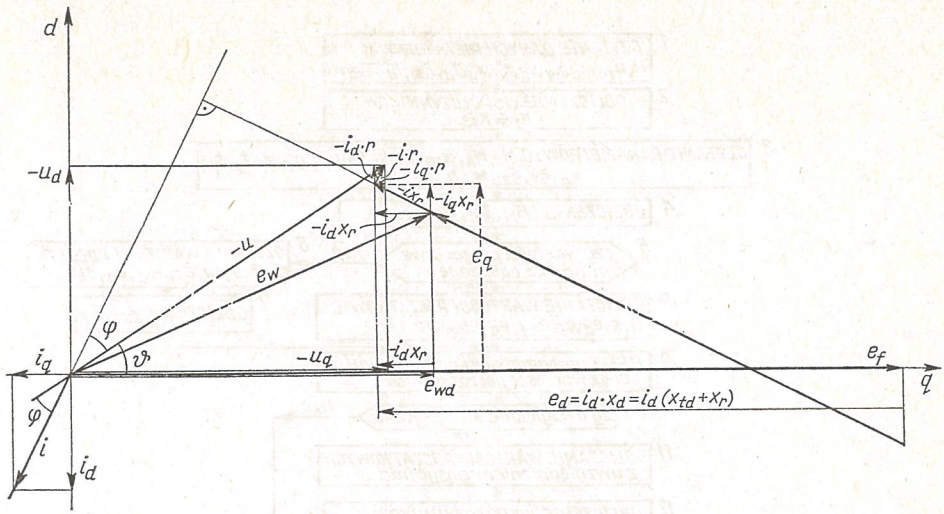
Zależność (7.2) stosuje się tylko dla $i_{wd} \geqslant i_o$; gdy $i_{wd} < i_o$, to $e_{wd} = i_o$. Błąd aproksymacji za pomocą tej zależności nie przekracza 0,5% na całym nieliniowym odcinku charakterystyki (7.1). Przeprowadzone próby zastosowania innych funkcji aproksymujących, np. wielomianu 9-tego stopnia wykazały, że błąd jest znacznie większy.

Kolejność obliczeń zmierzających do uwzględnienia nasycenia jest więc następująca: 1) oblicza się wypadkową siłę elektromotoryczną e_{wd} („szczelinową") w osi podłużnej d (rys. 8)

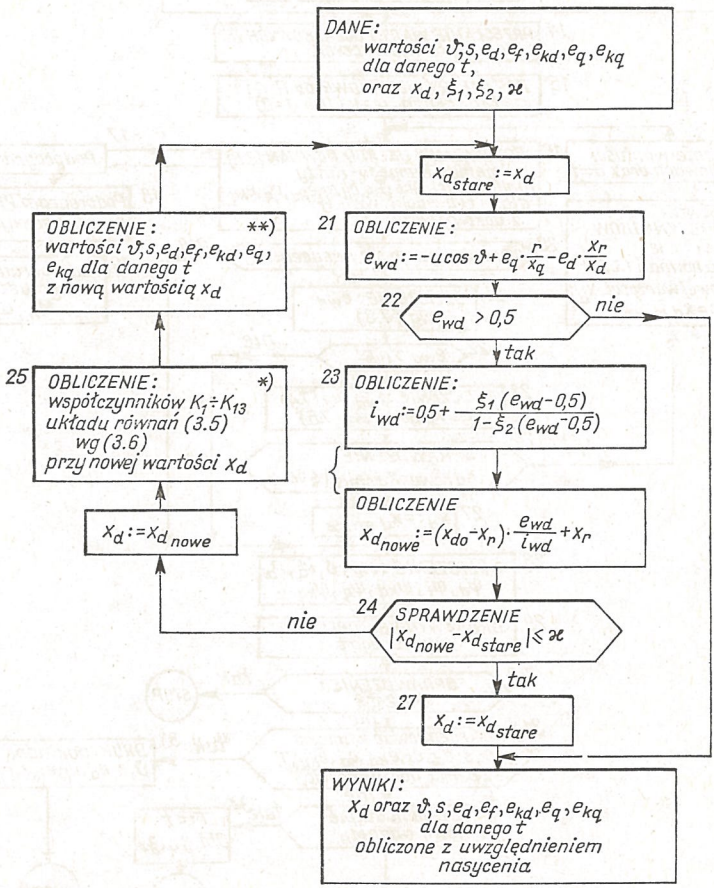
$$e_{wd} = -u \cdot \cos\vartheta + e_q \cdot \frac{r}{x_q} - e_d \cdot \frac{x_r}{x_d} \tag{7.3}$$

albo

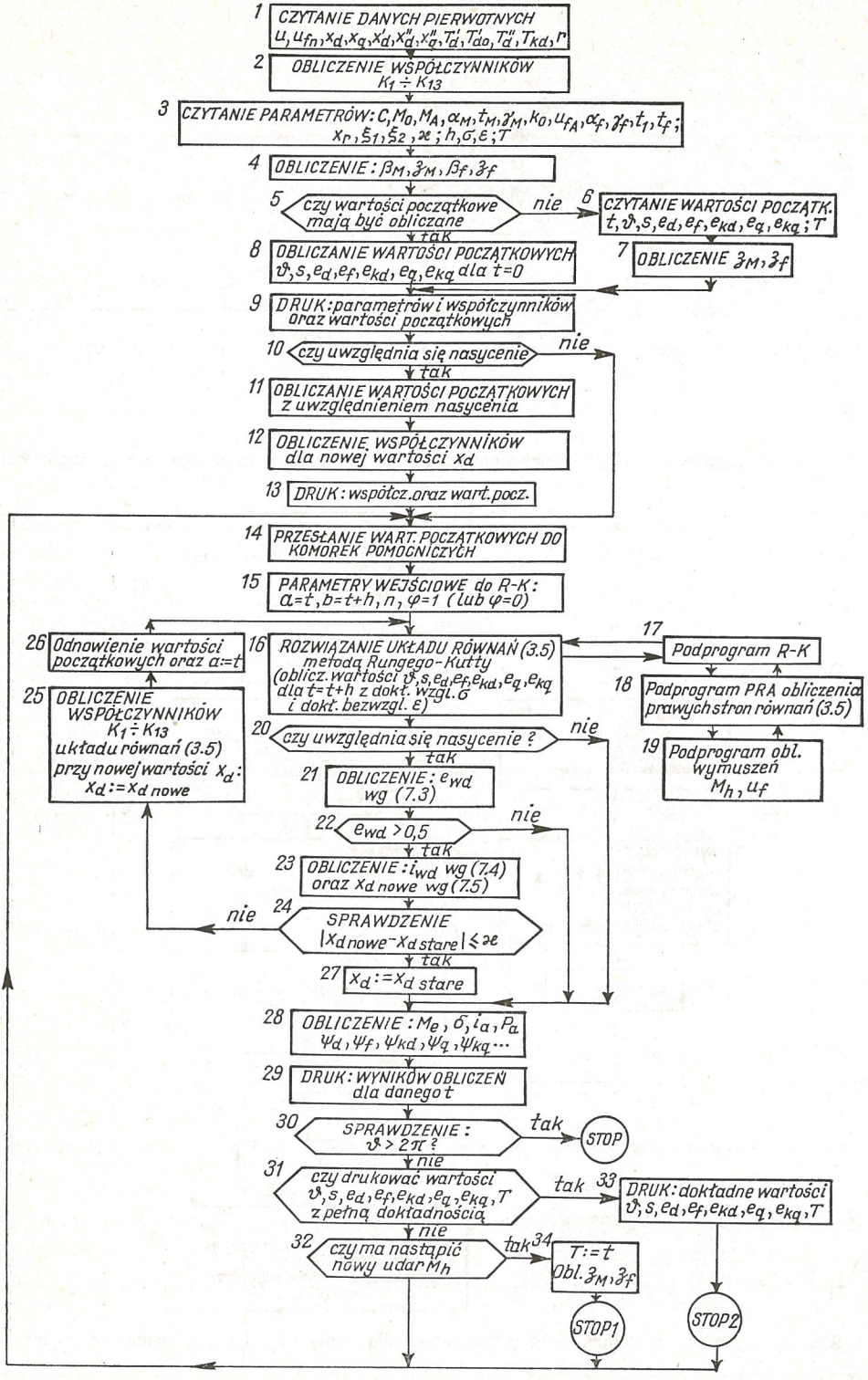
$$e_{wd} = e_d \cdot \left(1 - \frac{x_r}{x_d}\right) + e_f + e_{kd},$$



Rys. 8. Wykres wektorowy silnika synchronicznego z oznaczeniami do uwzględnienia nasycenia



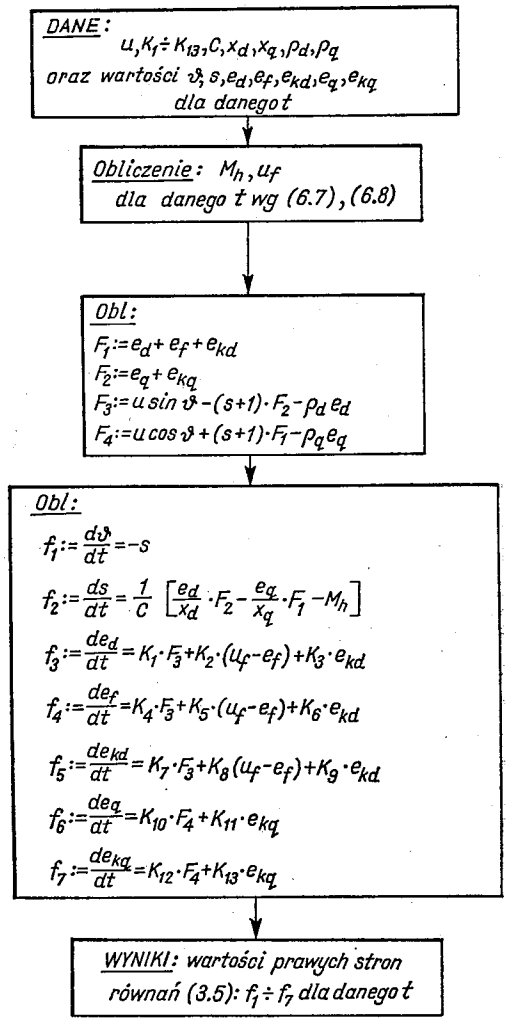
Rys. 9. Algorytm obliczenia stanu pracy silnika dla danego t z uwzględnieniem nasycenia



Rys. 10. Model numeryczny uwzględniający stopień nasycenia obwodu magnetycznego silnika

2) z zależności (7.2) oblicza się wartość prądu i_{wd};
jeżeli $e_{wd} > 0{,}5$, to

$$i_{wd} = 0{,}5 + \frac{\xi_1 \cdot (e_{wd} - 0{,}5)}{1 - \xi_2 \cdot (e_{wd} - 0{,}5)}, \tag{7.4}$$



Rys. 11. Algorytm obliczenia wartości prawych stron równań (3.5) dla danego t

3) reaktancja synchroniczna podłużna x_d obliczona z uwzględnieniem nasycenia $x_{d_{nas}}$ jest równa:

$$x_{d_{nas}} = (x_{do} - x_r) \cdot \frac{e_{wd}}{i_{wd}} + x_r, \tag{7.5}$$

przy czym przez x_{do} oznaczono reaktancję podłużną nienasyconą.

Algorytm obliczenia parametrów stanu pracy (ϑ, s, e_d, e_f, e_{kd}, e_q, e_{kq}) silnika dla danego t, z uwzględnieniem nasycenia przedstawiono na rys. 9, przy czym:

$\varkappa$ — założona dokładność obliczenia x_d z uwzględnieniem nasycenia,

blok*) — zbędny przy obliczeniach dla $t = 0$,

blok**) — dla $t = 0$ oblicza nowe wartości początkowe według algorytmu z rys. 3; dla $t \neq 0$ ($t > 0$) oblicza nowe wartości zmiennych ϑ, s, e_d, e_f, e_{kd}, e_q, e_{kq} dla danego t i nowych współczynników $K_1 \div K_{13}$ (z bloku*)) za pomocą algorytmu metody Runge'go-Kutty (oraz algorytmu PRA — obliczenia prawych stron równań (3.5) — rys. 11).

Model numeryczny wyznaczania stanów pracy silnika synchronicznego przy obciążeniach udarowych, uwzględniający stopień nasycenia obwodu magnetycznego, przedstawiono na rys. 10. Pełny program obliczeniowy podano w załączniku do [2].

Cechą charakterystyczną modelu jest jego elastyczność obliczeniowa, rozumiana jako możliwość przystosowania do różnych przypadków szczególnych, zachodzących podczas prowadzenia obliczeń za pomocą maszyny cyfrowej. Na przykład: można w dowolnej chwili przerwać obliczenia (blok 31) i wyprowadzić z pamięci maszyny cyfrowej na urządzenie zewnętrzne (perforator taśmy lub drukarkę wierszową) wartości wszystkich zmiennych rozwiązywanego układu równań (blok 33), tak aby można było wprowadzić do maszyny zmienione wartości niektórych parametrów (np. czasu trwania udaru) i prowadzić obliczenia dalej, bez potrzeby powtarzania poprzedniego fragmentu. Można w sposób dowolny przedłużać czas trwania przerwy po zakończeniu udaru i w wybranej chwili narzucić następny udar, który może mieć inne parametry niż poprzedni.

W modelu przewidziano również prowadzenie obliczeń według uproszczonego algorytmu, w którym nie uwzględnia się nieliniowości charakterystyki magnesowania silnika (zastąpiona jest linią prostą, nachyloną pod kątem 45° do osi przepływu w przyjętym układzie jednostek względnych). W tym przypadku predykaty 10 i 20 kierują obliczenia do dalszych fragmentów modelu (bloki 14 i 28, odpowiednio), aby nie zmieniać współczynników rozwiązywanego układu równań.

8. PRZYKŁAD

W celu sprawdzenia funkcjonowania opracowanego modelu oraz jego przydatności do analizy wpływu różnych czynników na stany pracy silnika synchronicznego przy obciążeniach udarowych przygotowano program dla maszyny cyfrowej i wykonano obliczenia dla przykładowego silnika o następujących danych:

$U_n = 6$ kV, $S_n = 540$ kVA, $P_n = 401$ kW, $I_n = 52$ A, $I_{fn} = 168$ A,
$I_{fo} = 76{,}6$ A, $x_d = 1{,}55$ j.w., $x_q = 0{,}895$ j.w., $x'_d = 0{,}24$ j.w.,
$x''_d = 0{,}168$ j.w., $x_r = 0{,}14$ j.w., $r = 0{,}0124$ j.w.,
$r_f = 0{,}176\ \Omega$, $T'_d = 0{,}27$ s, $T'_{do} = 1{,}74$ s, $T''_d = 0{,}00236$ s,
$T_{kd} = 0{,}136$ s, $n_s = 750$ obr/min, $GD^2 = 0{,}445$ tm^2.

Wartości bazowe układu jednostek względnych są następujące:

$U_1 = 4910$ V, $I_1 = 73{,}6$ A, $Z_1 = 66{,}7\ \Omega$, $S_1 = 540000$ VA,
$T_1 = 1/(100 \cdot \pi)$ s, $\omega_1 = 100\ \pi$ rad/s, $M_1 = 6880{,}9$ Nm,
$U_f = 13{,}45$ V.

Obliczone współczynniki układu równań (2.2) mają następujące wartości:

$v_f = 0{,}84516$, $v_{kd} = 0{,}88665$, $g_1 = 0{,}96452$,
$g_2 = 1{,}01187$, $\varrho_d = 0{,}00800$, $\varrho_f = 0{,}00187$,
$\varrho_{kd} = 0{,}023276$, $v_{kq} = 0{,}81229$, $\varrho_q = 0{,}0138547$,
$\varrho_{kq} = 0{,}02597817$ (w j.w.),

natomiast współczynniki układu równań (3.5):

$K_1 = 9{,}226$, $K_2 = 0{,}00129$, $K_3 = 0{,}3171$, $K_4 = 3{,}8534$,
$K_5 = 0{,}0123$, $K_6 = 1{,}06680$, $K_7 = -12{,}0796$, $K_8 = -0{,}01362$,
$K_9 = -1{,}3839$, $K_{10} = 5{,}327$, $K_{11} = 0{,}136$, $K_{12} = -4{,}327$,
$K_{13} = -0{,}1364$, $C = 400$ (w j.w.).

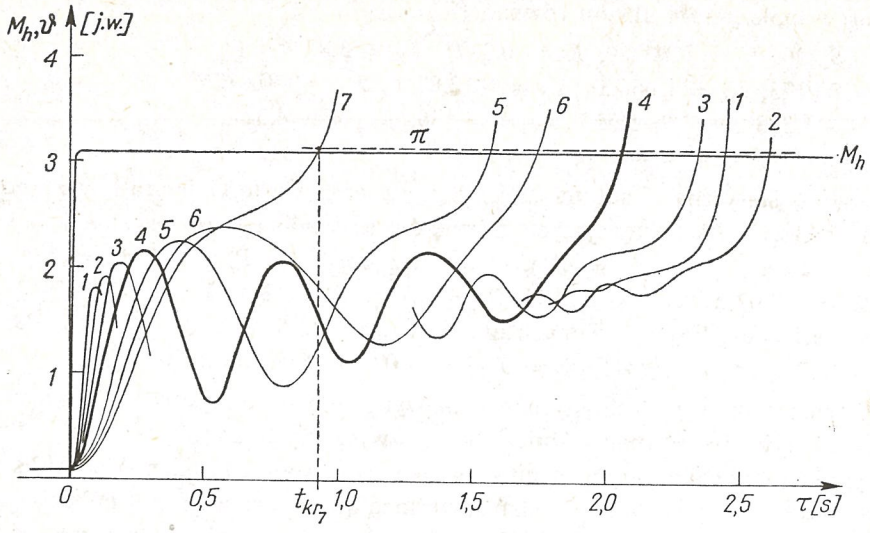
Określono statyczną charakterystykę kątową oraz wartości początkowe według algorytmu z rys. 3 dla następujących warunków zasilania i obciążenia: $u = -1.0$ j.w., $u_f = u_{fn} = 2.19321$ j.w., $M_o = 0{,}1$ j.w.; współczynniki $B_o \div B_4$ obliczone według wzorów (5.2): $B_o = -0{,}0211$, $B_1 = -0{,}0103$, $B_2 = 0{,}4720$, $B_3 = 1{,}4151$, $B_4 = 0{,}0030$ (w j.w.), oraz wartości początkowe zmiennych układu równań (3.5): $t = 0$, $\vartheta = 0{,}062634$, $s = 0$, $e_d = -1{,}195906$, $e_f = 2{,}19321$, $e_{kd} = 0$, $e_q = -0{,}053026$, $e_{kq} = 0$ (w j.w.).

Obliczenia stanów nieustalonych silnika wykonano wykorzystując podprogram rozwiązywania układów równań różniczkowych zwyczajnych metodą Runge'go-Kutty ze zmiennym krokiem całkowania. Wyniki obliczeń drukowano z krokiem $h = 0{,}02$ s .Przyjęto dokładność rozwiązywania równań określoną przez wartości błędu bezwzględnego ε oraz względnego σ równe $\varepsilon = \sigma = 10^{-5}$, sprawdzając uprzednio dopuszczalność takiego wyboru. Rozwiązanie jednego punktu pracy dla danego t otrzymywano (maszyna cyfrowa MINSK-22) po upływie $1 \div 3$ s bez uwzględnienia nasycenia oraz po $5 \div 50$ s wg pełnego modelu rys. 10 z uwzględnieniem stopnia nasycenia obwodu magnetycznego silnika. Należy jednak podkreślić, że wpływ nasycenia uwidaczniał się z reguły w dwóch-trzech początkowych cyklach kołysań kąta obciążenia ϑ silnika, po czym czas obliczeń dalszych punktów malał do $1 \div 3$ s.

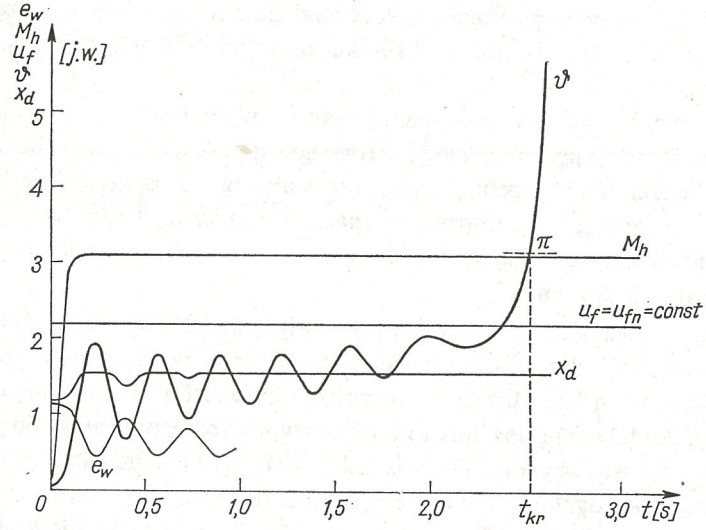
Wykonując różne warianty obliczeń zbadano wpływ bezwładności układu: wirnik silnika — urządzenie napędzane, parametrów udaru momentu na wale, intensywności forsowania wzbudzenia na przebieg stanu nieustalonego. Posługując się opracowanym modelem numerycznym silnika można wyznaczyć graniczne wartości amplitudy udaru momentu, dopuszczalne ze względu na pokonywanie przez silnik narzuconego obciążenia, w danych warunkach zasilania.

Analiza stanu nieustalonego silnika przy obciążeniu udarowym wykazuje, że może on zachować stabilność dynamiczną nawet wówczas, gdy podczas pierwszego lub kilku początkowych wychyleń kąt obciążenia ϑ przekroczy wartość odpowiadającą przeciążalności statycznej. Zachowanie się silnika po pierwszym wychyleniu zależy od tego, czy udar obciążenia jeszcze trwa, czy nie. Dopuszczalny czas trwania udaru z punktu widzenia zachowania stabilności dynamicznej może być dla danych warunków obciążenia i zasilania każdorazowo obliczony. Jednak dla porównania różnych przebiegów nieustalonych wydaje się celowe wprowadzenie pomocniczej wielkości, umownie nazwanej „czas krytyczny trwania udaru obciążenia", po upływie którego kąt obciążenia ϑ wirnika wynosi π rad. el. Przy takiej wartości kąta obciążenia silnik traci stabilność dynamiczną. Tak określony czas krytyczny trwania udaru jest pewną miarą własności dynamicznych układu napędowego w danych warunkach.

Na rys. 12 przedstawiono wyniki obliczeń (wykresy kąta obciążenia ϑ) dla obciążenia udarowego ($M_o = 0{,}1$, $M_A = 3$, $t_M = 0{,}01$ s) przy stałym wzbudzeniu ($u_f = u_{fn} = \text{const}$) i różnych wartościach inercyjnej stałej czasowej $C = 200 \div 6400$ j.w. Jak widać z uzyskanych



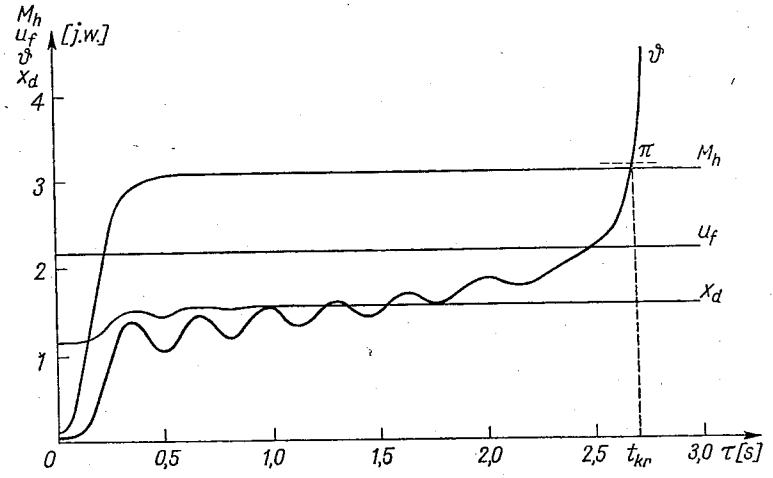
Rys. 12. Przebieg kąta obciążenia ϑ silnika podczas obciążenia udarowego ($M_o = 0.1$, $M_A = 3$, $t_M = 0.01$ s) przy stałym wzbudzeniu ($u_f = u_{fn}$ = const) dla różnych wartości C
1 — $C = 200$, 2 — $C = 400$, 3 — $C = 800$, 4 — $C = 1600$, 5 — $C = 3200$, 6 — $C = 4800$, 7 — $C = 6400$ j.w.



Rys. 13. Wykresy zmian kąta ϑ, reaktancji x_d oraz siły elektromotorycznej wypadkowej e_w podczas obciążenia udarowego ($M_o = 0.1$, $M_A = 3$, $t_M = 0.1$ s) przy $C = 800$ oraz stałym wzbudzeniu ($u_f = u_{fn}$ = const)

wyników — ze wzrostem wartości C wzrasta maksymalna wartość kąta obciążenia ϑ w pierwszym cyklu kołysań $\vartheta_{1-\max}$ i czas, jaki upływa od chwili $t = 0$ do chwili jego wystąpienia $t_{1-\max}$. Wykonano również te same obliczenia według uproszczonego algorytmu bez uwzględnienia nasycenia. Otrzymano mniejsze wartości $\vartheta_{1-\max}$, $t_{1-\max}$ oraz większe wartości $t_{kr(\vartheta=\pi)}$ niż podczas obliczeń z uwzględnieniem nasycenia.

Z porównania wykresów zamieszczonych na rys. 13 oraz 14 można wnioskować o wpływie stromości udaru obciążenia na przebieg stanu nieustalonego. Na rys. 13 przedstawiono wykresy zmian kąta ϑ, reaktancji x_d oraz siły elektromotorycznej wypadkowej e_w podczas obciążenia: $M_o = 0{,}1$, $M_A = 3$, $t_M = 0{,}1$ s, przy $C = 800$ j.w. oraz stałym wzbudzeniu ($u_f = u_{fn} = \text{const}$), natomiast na rys. 14 — dla tych samych danych, z wyjątkiem $t_M = 0{,}35$ s. Uzyskane wyniki wskazują, że maksymalna wartość kąta obciążenia w pierwszym cyklu kołysań $\vartheta_{1-\max}$ maleje wraz ze zwiększaniem t_M, natomiast czas $t_{1-\max}$ oraz czas krytyczny $t_{kr(\vartheta=\pi)}$ rośnie.



Rys. 14. Wykresy zmian kąta ϑ oraz reaktancji x_d dla danych jak na rys. 13 z wyjątkiem $t_M = 0.35$ s

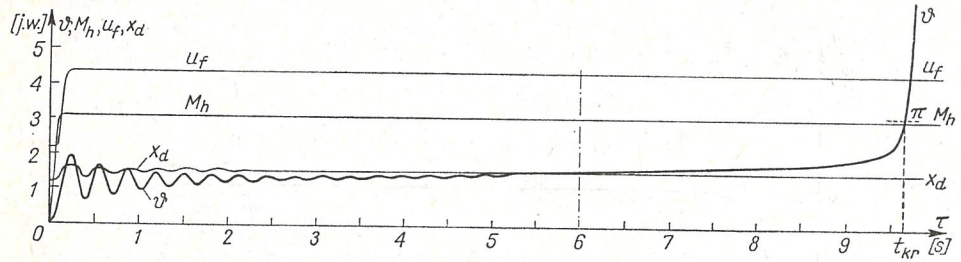
Wyraźny jest wpływ uwzględnienia nasycenia na wartości tych parametrów, a mianowicie — nie uwzględnienie stopnia nasycenia prowadzi do obliczenia zbyt małych wartości $\vartheta_{1-\max}$, $t_{1-\max}$ oraz zbyt dużych wartości $t_{kr(\vartheta=\pi)}$, podobnie jak w poprzedniej serii obliczeń. Ponadto z podanych wykresów kąta można wnioskować o wpływie stromości udaru na cały przebieg kołysań kąta ϑ aż do utraty równowagi dynamicznej. Charakterystyczna jest przy tym zmiana wartości reaktancji x_d podczas trwania stanu nieustalonego. Przy malejących chwilowych wartościach kąta ϑ reaktancja ta również się zmniejsza. Wynika to stąd, że chwilowa wartość siły elektromotorycznej wewnętrznej — decydującej o stopniu nasycenia — zwiększa się przy malejącym ϑ podczas kołysań wirnika.

W celu ilościowego sprawdzenia wpływu forsowania wzbudzenia na przebieg stanu nieustalonego silnika przy obciążeniu udarowym wykonano obliczenia dla danych: $C = 800$ j.w., $M_o = 0{,}1$ j.w., $M_A = 3$ j.w., $t_M = 0{,}1$ s dla trzech wariantów zasilania uzwojenia wzbudzenia:

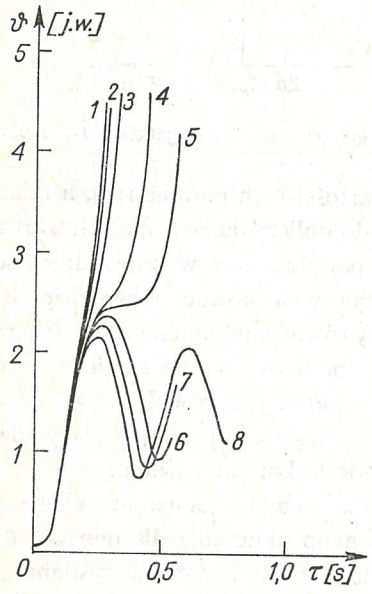
a) napięciem o wartości stałej $u_f = u_{fn} = 2{,}19321$ j.w.,
b) z forsowaniem napięcia od wartości $u_{fo} = u_{fn}$ do wartości $u_f = 2 \cdot u_{fn}$ przy opóźnieniu forsowania w stosunku do chwili wystąpienia udaru momentu $t_1 = 0{,}15$ s oraz czasie trwania czoła impulsu $t_f = 0{,}05$ s,
c) z forsowaniem napięcia od wartości $u_{fo} = u_{fn}$ do wartości $u_f = 3 \cdot u_{fn}$ (t_1 oraz t_f jak wyżej).

Obliczenia przeprowadzono z uwzględnieniem nasycenia. Wyniki dla a) zawiera rys. 13, dla b) — rys. 15. Z porównania tych wykresów wynika, że długotrwałe forsowanie wzbudzenia ma znaczny wpływ na t_{kr}, tzn. na czas znajdowania się silnika w stanie równowagi dynamicznej:

a) $t_{kr} = 2{,}52$ s, b) $t_{kr} = 9{,}65$ s. Jednocześnie należy podkreślić, że w powyższych przypadkach forsowanie wzbudzenia nieznacznie tylko wpływa na zmniejszenie wartości pierwszego maksimum $\vartheta_{1-\max}$.



Rys. 15. Wykresy zmian kąta ϑ oraz reaktancji x_d dla danych jak na rys. 13 lecz z forsowaniem napięcia wzbudzenia ($u_{fo} = u_{fn}$, $u_{fA} = u_{fn}$, $t_1 = 0.15$ s, $t_f = 0.05$ s, $\alpha_f = 10$)



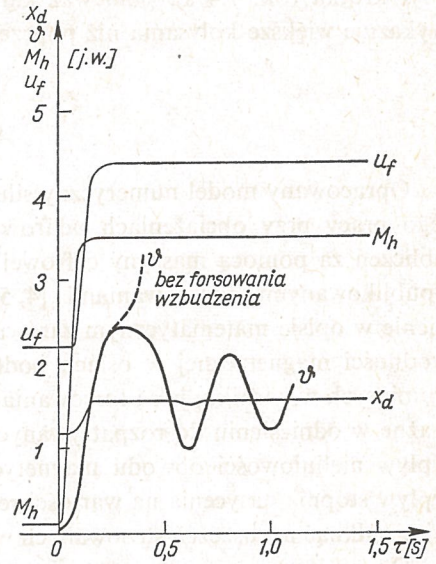
Rys. 16. Wykresy kąta ϑ dla wyznaczenia obciążenia odpowiadającego granicy stabilności dynamicznej — dane jak na rys. 13 z wyjątkiem M_A

1 — $M_A = 4.00$, 2 — $M_A = 3.80$, 3 — $M_A = 3.60$, 4 — $M_A = 3.40$, 5 — $M_A = 3.38$, 6 — $M_A = 3.35$, 7 — $M_A = 3.30$, 8 — $M_A = 3.20$

Dla oceny zapasu stabilności dynamicznej przy zadanych parametrach obciążenia silnika należy określić największe dopuszczalne obciążenie, odpowiadające granicy stabilności dynamicznej w danych warunkach zasilania silnika.

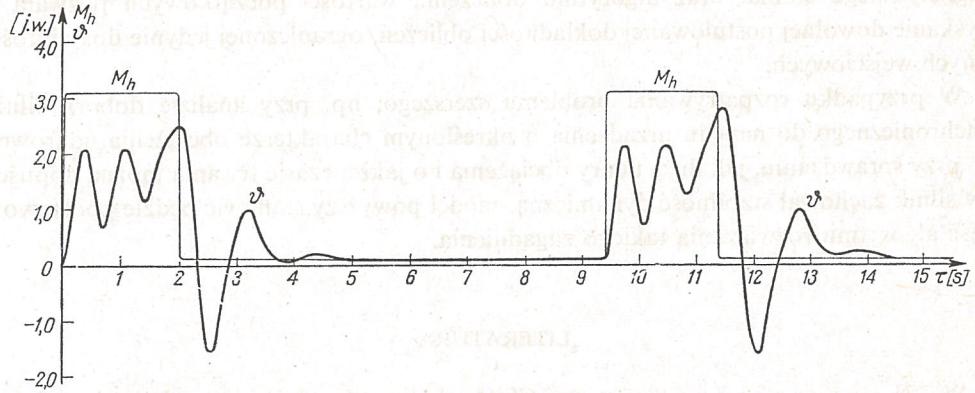
Na rys. 16 przedstawiono wyniki obliczeń granicznej wartości amplitudy M_A udaru obciążenia M_h w przypadku, gdy: $C = 800$ j.w., $M_o = 0{,}1$ j.w., $t_M = 0{,}1$ s, $u_f = u_{fn} =$ = const, z uwzględnieniem nasycenia.

Przy $M_A = 3{,}38$ j.w. czas utrzymywania równowagi dynamicznej przez silnik wynosi zaledwie 0,5 s, natomiast przy wartości amplitudy $M_A = 3{,}35$ j.w. czas ten jest większy i silnik nie traci „synchronizmu" podczas pierwszego cyklu kołysań.



Rys. 17. Wykresy kąta ϑ dla wyznaczenia obciążenia odpowiadającego granicy stabilności dynamicznej silnika z forsowaniem wzbudzenia jak na rys. 15
(obciążenie udarowe: $M_o = 0.1$, $M_A = 3.4$, $t_M = 0.1$ s)

Jeśli zastosuje się forsowanie wzbudzenia o parametrach: $u_{fo} = u_{fA} = u_{fn}$, $t_1 = 0{,}15$ s, $t_f = 0{,}05$ s, to przy $M_A = 3{,}6$ j.w. $t_{kr} = 0{,}2$ s, natomiast przy $M_A = 3{,}4$ j.w. silnik pracuje w stanie równowagi dynamicznej przez kilka cykli kołysań (rys. 17). Przy silniejszym lub wcześniejszym forsowaniu wzbudzenia graniczna wartość M_A może być jeszcze większa.



Rys. 18. Wielokrotne obciążenie udarowe ($M_o = 0.1$, $M_A = 3$, $t_M = 0.01$ s, $C = 3200$ j.w., $u_f = u_{fn} =$ = const)
(obliczenia bez uwzględnienia nasycenia; $T = 9.4$ s)

Jeszcze bardziej złożone niż przy udarze pojedynczym są przebiegi kąta obciążenia ϑ oraz momentu elektromagnetycznego przy udarach wielokrotnych, zwłaszcza w przypadku, gdy następny udar pojawia się zanim przywrócony zostanie stan ustalony po zaniknięciu poprzedniego udaru. Na rys. 18 przedstawiono wyniki obliczeń dla przypadku wielo-

krotnego występowania udarów o tych samych parametrach: $M_o = 0{,}1$ j.w., $M_A = 3{,}0$ j.w., $t_M = 0{,}01$ s, przy $C = 3200$ j.w., $u_f = u_{fn} = \text{const}$, bez uwzględnienia nasycenia. Czas trwania udaru wynosił 2 s. Jak wynika z tego rysunku, przerwa po pierwszym udarze była zbyt krótka (ok. 7,4 s), ponieważ kąt obciążenia ϑ podczas trwania następnego udaru wykazuje większe kołysania niż poprzednio.

9. WNIOSKI

Opracowany model numeryczny silnika synchronicznego w pełni nadaje się do analizy jego pracy przy obciążeniach udarowych. Jest on przystosowany do przeprowadzania obliczeń za pomocą maszyny cyfrowej. Elementem nowości w porównaniu z dotychczas opublikowanymi opracowaniami [4, 5, 12] tego zagadnienia jest jednoczesne uwzględnienie w opisie matematycznym zarówno rezystancji uzwojenia stojana, niesymetrii przewodności magnetycznej w osiach podłużnej i poprzecznej wirnika, działania obwodów tłumiących w wirniku, jak i forsowania napięcia wzbudzenia. Ponadto, co jest szczególnie ważne w odniesieniu do rozpatrywanych stanów pracy, przedstawiony model uwzględnia wpływ nieliniowości obwodu magnetycznego silnika na jego parametry, to jest ujmuje wpływ stopnia nasycenia na wartości reaktancji w osi podłużnej. W modelu tym udało się więc uniknąć uproszczeń stosowanych w innych publikacjach na ten temat.

Do praktycznego wykorzystania modelu potrzebna jest jedynie znajomość katalogowych parametrów silnika synchronicznego oraz warunków jego zasilania i obciążenia.

Rozwiązanie uzyskuje się wprawdzie na drodze numerycznej, lecz wybranie metody Runge'go-Kutty o zmiennym kroku całkowania układu równań różniczkowych, opracowanie odpowiedniego iteracyjnego algorytmu dla uwzględnienia stopnia nasycenia obwodu magnetycznego silnika oraz algorytmu obliczenia wartości początkowych pozwala na uzyskanie dowolnej postulowanej dokładności obliczeń, ograniczonej jedynie dokładnością danych wejściowych.

W przypadku rozpatrywania problemu szerszego, np. przy analizie doboru silnika synchronicznego do napędu urządzenia o określonym charakterze obciążenia udarowego lub przy sprawdzaniu, jak duże udary obciążenia i o jakim czasie trwania można dopuścić, aby silnik zachował stabilność dynamiczną, model powyższy stanowić będzie podstawową część algorytmu rozwiązania takiego zagadnienia.

LITERATURA

1. W. N. Awramenko, *Rasčet na CWM elektromechaničeskich perechodnych processow ènergosistemy s učetom ARW i nasyščenija*, Modelirowanije i awtomatizacija èlektričeskich sistem, Izd. N. D., Kijew 1966.
2. K. Balińska, *Modele numeryczne stanów nieustalonych silnika synchronicznego przy obciążeniach udarowych*, rozpr. dokt., Politechnika Poznańska, 1970.
3. L. Collatz, *Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych*, PWN, Warszawa 1960.
4. A. A. Goriew, *Perechodnyje processy sinchronnoj mašiny*, GEI, Leningrad 1950.
5. A. A. Janko-Trinickij, *Nowyj metod analiza raboty sinchronnych dwigatelej pri rezkoperemennych nagruzkach*, GEI, Moskwa 1958.

6. B.M. Kagan, E.L. Urman, *Wybor differencialnych urawnienij perechodnych processow sinchronnogo generatora pri issledowanii dinamičeskoj ustojčiwosti na wyčislitelnych mašinach*, Èlektričestwo, 1960, 4, s. 37—42.
7. E.J. Kazowskij, *Perechodnyje processy w èlektričeskich mašinach peremennogo toka*, Izd. AN SSSR, Moskwa 1962.
8. Th. Laible, *Die Theorie der Synchronmaschine in nichtstationären Betrieb*, Springer, Berlin 1952.
9. R.H. Park *Two-Reaction Theory of Synchronous Machines*, Trans. AIEE, 1933,6.
10. K. Pawluk, S. Bednarek, *Rozruch i stany asynchroniczne silników synchronicznych*, WNT, Warszawa 1968.
11. N.A. Poljak, *Učet nasyščenija sinchronnych mašin s jawno wyražennymi poljusami pri rasčetach dinamičeskoj ustojčiwosti*, Èlektričestwo, 1954, 10, s. 16—19.
12. J.M. Tolmač, *Perechodnyje processy w sinchronnych èlektrodwigateljach priudarnoj nagruzke*, Èlektričestwo, 1959, 4.

K. BALIŃSKA

A NUMERICAL MODEL FOR PREDICTION OF SYNCHRONOUS MOTOR BEHAVIOR UNDER LARGE DYNAMICAL LOADS

Summary

The paper presents a numerical model of synchronous motor dynamical states for calculations with a digital computer. The model was based on Park-Gorev equations, assuming the affect of saturation on the values of parametres. The results of calculations presenting the influence of various factors on the motor's dynamical states are given.

K. BALIŃSKA

MODÈLE NUMÉRIQUE POUR EXAMINER DES RÉGIMES DE TRAVAIL DU MOTEUR SYNCHRONE POUR LES CHARGES DE CHOC

Résumé

On a présenté le modèle numérique du moteur synchrone destiné pour examiner les régimes de travail de choc à l'aide d'un calculateur numérique. Ce modèle est basé sur le système d'équations de Park-Gorev tenant compte de l'effet du degré de la saturation du circuit magnétique du moteur sur les valeurs de ses paramètres. On a cité les résultats des calculs effectués pour contrôler le fonctionnement du modèle et pour son utilité à l'analyse de l'effet de divers facteurs sur le comportement du moteur au régimes de choc.

K. BALIŃSKA

EIN NUMERISCHES MODELL ZUR ERWÄGUNG VON ARBEITSZUSTÄNDEN EINES SYNCHRONMOTORS BEI STOßBELASTUNGEN

Zusammenfassung

In diesem Artikel wurde ein numerisches Modell zur Erwägung der Arbeitszustände eines Synchronmotors bei Stoßbelastungen unter Anwendung einer Rechenmaschine dargestellt. Als Modellgrundlage wurde das Park-Goriev-Gleichungssystem unter Berücksichtigung der Einwirkung des Sättigungsgrades des Magnetkreises des Motors auf den Wert seiner Parameter angenommen. Außerdem werden die zwecks Überprüfung des Modells durchgeführten Berechnungen nebst Ergebnissen angegeben.

К. БАЛИНЬСКА

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАБОТЫ СИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ ПРИ УДАРНОЙ НАГРУЗКЕ

Р е з ю м е

Дано описание модели в виде алгоритмов для расчета на ЦВМ работы явнополюсного синхронного двигателя при ударной нагрузке с форсированием возбуждения.

Модель основана на решении уравнений Парка-Горева с учетом влияния степени насыщения магнитной цепи двигателя на его параметры.

Приведены результаты расчетов проведенных для проверки модели и возможности ее использования при анализе влияния различных факторов на работу двигателя в режиме ударной нагрузки.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 2, ss. 383—406

621.313.333

Silnik indukcyjny obrotowo-liniowy z masywnym wirnikiem

ERNEST MENDRELA (WROCŁAW)

Instytut Układów Elektromaszynowych Politechniki Wrocławskiej

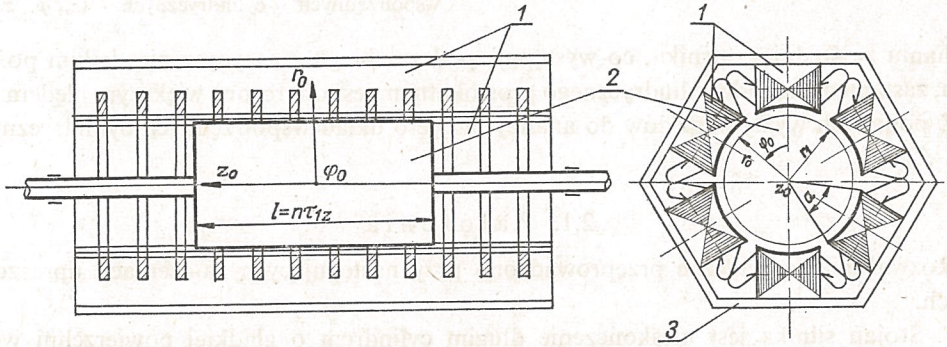
Otrzymano 27.11.1974

W pracy przedstawiono budowę, teorię i wyniki badań silnika indukcyjnego, którego masywny stalowy wirnik może wykonywać ruch postępowy, obrotowy i obrotowo-postępowy. Siły powodujące wymienione rodzaje ruchu wirnika uzyskano przez wytworzenie w szczelinie przytwornikowej pola magnetycznego biegnącego, wirującego i wirująco-biegnącego. Rozważania teoretyczne pracy silnika przeprowadzono w układzie współrzędnych cylindrycznych przy założeniu nieskończenie długiej maszyny. Opisano funkcją A_φ rozkład obciążenia liniowego na powierzchni twornika oraz wyznaczono poślizg przy ruchu obrotowo-postępowym wirnika. Korzystając z równań Maxwella wyprowadzono zależności określające pole elektromagnetyczne w wirniku. Określono straty mocy czynnej w wirniku oraz wyznaczono siły elektromagnetyczne działające na wirnik. Przedstawioną teorię silnika sprawdzono badaniami laboratoryjnymi wykonanymi na modelu silnika.

1. WSTĘP

W układach automatyki i napędu istnieje niejednokrotnie potrzeba uzyskania ruchu obrotowo-postępowego napędzanego elementu.

Problem ten można rozwiązać stosując przekładnię mechaniczną łącznie ze znanymi silnikami obrotowymi lub liniowymi. Alternatywnym rozwiązaniem może być bezprzekładniowy napęd za pomocą silnika o specjalnej konstrukcji.



Rys. 1. Schemat budowy silnika

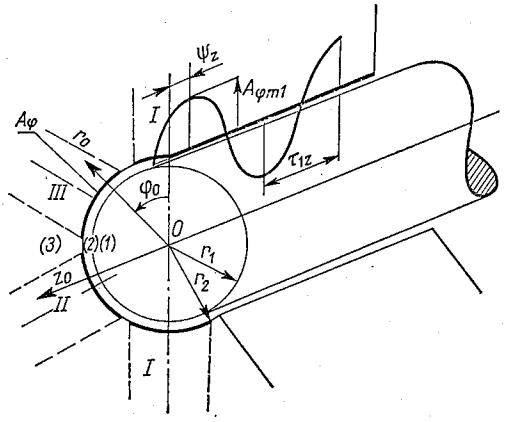
W opisach patentowych [7, 8] podano kilka koncepcji budowy silnika, którego wirnik może poruszać się ruchem obrotowo-postępowym. Ruch ten wywołany jest działaniem na wirnik siły elektromagnetycznej będącej wypadkową dwóch sił składowych: stycznej do obwodu wirnika i równoległej do osi wzdłużnej silnika. Jeden z wariantów budowy takiego silnika, zwanego w artykule silnikiem obrotowo-liniowym, posiada w stojanie induktory, dzięki którym w szczelinie przytwornikowej można uzyskać pole magnetyczne wirujące, biegnące i wirująco-biegnące.

Twornik silnika pokazanego schematycznie na rysunku 1 składa się z sześciu induktorów symetrycznie rozmieszczonych na obwodzie stojana. Każdy z induktorów, zbudowany podobnie jak induktory płaskiego silnika liniowego [2, 3], posiada niezależne od pozostałych uzwojenie symetryczne trójfazowe o takiej samej liczbie biegunów równej $2p$.

Wirnik silnika jest masywnym stalowym walcem. Jego wał osadzony jest na łożyskach w sposób umożliwiający ruch obrotowo-postępowy. Długość wirnika l może być większa lub mniejsza od długości czynnej induktorów. W rozpatrywanym przypadku długość wirnika jest krotnością podziałki biegunowej induktorów.

2. ANALIZA TEORETYCZNA PRACY SILNIKA

Przeprowadzenie rozważań w układzie współrzędnych prostokątnych daje proste zależności końcowe. Stosuje się go w przypadku niewielkiej głębokości wnikania pola elektromagnetycznego w masywny stalowy wirnik. Przy dużej głębokości wnikania w porównaniu ze średnicą wirnika, co występuje podczas biegu maszyny z niewielkim poślizgiem, zastąpienie układu cylindrycznego prostokątnym jest obarczone większym błędem [9].



Rys. 2. Idealny silnik obrotowo-liniowy we współrzędnych cylindrycznych (r_o, φ_o, z_o)

Z podanych wyżej względów do analizy przyjęto układ współrzędnych cylindrycznych (rys. 2).

2.1. Założenia

Rozważania teoretyczne przeprowadzono przy następujących założeniach upraszczających.

a. Stojan silnika jest nieskończenie długim cylindrem o gładkiej powierzchni wewnętrznej (nie uwzględnia się żłobków ani szczelin pomiędzy induktorami), wykonanym

z materiału o przenikalności magnetycznej $\mu^{(3)} = \infty$ i przewodności elektrycznej właściwej $\gamma^{(3)} = 0$.

b. Uzwojenie stojana jest nieskończenie cienką warstwą prądową rozłożoną na powierzchni wewnętrznej stojana. Kierunek prądu w uzwojeniu stojana jest zgodny z kierunkiem osi φ.

c. Rozkład obciążenia liniowego na powierzchni stojana jest okresowy wzdłuż obwodu (oś φ) i w kierunku osi wzdłużnej silnika (oś z).

d. Wirnik jest nieskończenie długim walcem współosiowym ze stojanem, wykonanym z materiału izotropowego i jednorodnego o stałej przenikalności magnetycznej $\mu^{(1)}$ i stałej przewodności elektrycznej właściwej $\gamma^{(1)}$.

e. Uzwojenie silnika zasilane jest napięciem sinusoidalnie zmiennym. W związku z tym obciążenie liniowe oraz składowe natężenia pola elektromagnetycznego zmieniają się sinusoidalnie w czasie.

W początkowej fazie rozważań wyprowadzono zależność określającą obciążenie liniowe w nieruchomym względem stojana układzie współrzędnych r_o, φ_o, z_o. Następnie w celu uwzględnienia wpływu ruchu wirnika na wartość parametrów pola elektromagnetycznego wprowadzono ruchomy układ współrzędnych r, φ, z związany z powierzchnią wirnika.

2.2. Rozkład obciążenia liniowego

Każdy z induktorów twornika posiada niezależne uzwojenie trójfazowe, co pozwala na dowolność w łączeniu uzwojeń między sobą. Od sposobu połączenia uzwojeń zależy rozkład obciążenia liniowego na powierzchni stojana. Rozpatrzone zostaną trzy warianty połączeń. Każdemu z nich odpowiada inne pole magnetyczne wytworzone w szczelinie przytwornikowej silnika, a mianowicie: pole biegnące, pole wirujące i pole wirująco-biegnące.

2.2.1 Pole biegnące

Zasilając uzwojenia poszczególnych induktorów napięciem trójfazowym, obciążenie liniowe A_φ na powierzchni każdego z induktorów można opisać funkcją

$$A_\varphi(t, z_o) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_{\varphi mm\nu} \exp\left[j\omega t + j\nu\left(\frac{\pi}{\tau_{1z}} z_o + \psi_z\right)\right], \tag{1}$$

w której:

$A_{\varphi mm\nu}$ — amplituda ν-tej harmonicznej obciążenia liniowego,

τ_{1z} — podziałka biegunowa 1-ej harmonicznej rozkładu A_φ wzdłuż osi z,

ψ_z — kąt przesunięcia 1-ej harmonicznej A_φ względem początku układu (rys. 2),

natomiast $\nu = -1, 5, -7, 11, -13, \ldots, (6n-1), -(6n+1)$, przy czym $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

W ogólności pierwsza harmoniczna rozkładu obciążenia liniowego może być przesunięta względem początku układu o dowolny kąt ψ_z w każdym induktorze. Różne będzie

zatem wzajemne przesunięcie kątowe $\Delta\psi_z$ pierwszych harmonicznych A_φ poszczególnych induktorów.

W przypadku kiedy między sąsiednimi induktorami $\Delta\psi_z = \pi$ rozkład obciążenia liniowego na powierzchni stojana jest opisany zależnością

$$A_\varphi(t, \varphi_o, z_o) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} A_{\varphi mm\nu} \frac{1}{k} \sin k\frac{a\pi}{2\tau_{1\varphi}} \exp\left[j\left(\omega t + \nu\frac{\pi}{\tau_{1z}} z_o\right)\right] \cos k\frac{\pi}{\tau_{1\varphi}}\varphi_o, \qquad (2)$$

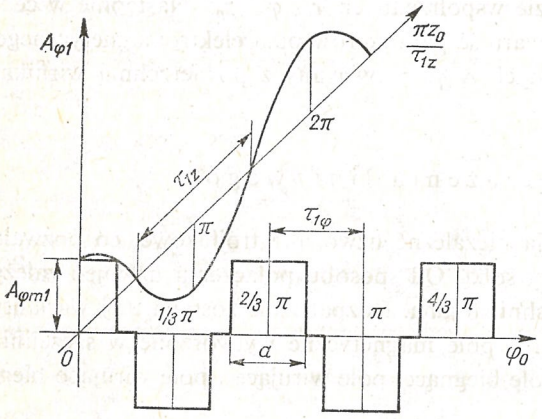
w której:

$\tau_{1\varphi}$ — podziałka biegunowa A_φ wzdłuż obwodu (oś φ_o) równa $\frac{\pi}{3}$,

a — szerokość induktorów w radianach,

zaś $k = 1, 3, 5, 7, \ldots, (2n+1)$.

Chwilowy rozkład obciążenia liniowego wzdłuż osi φ_o i z_o dla $\nu = 1$ i przy $\Delta\psi_z = \pi$ pokazano na rysunku 3.



Rys. 3. Chwilowy rozkład obciążenia liniowego $A_{\varphi 1}$ na powierzchni stojana w przypadku pola biegnącego

Amplituda νk-tej harmonicznej obciążenia liniowego opisanego zależnością (2) porusza się wzdłuż osi z_o z prędkością

$$v_{z\nu} = -\frac{1}{\nu} 2\tau_{1z} f, \qquad (3)$$

przy czym f jest częstotliwością napięcia zasilania.

Pole magnetyczne w szczelinie silnika jest w tym przypadku polem biegnącym podobnie jak w silnikach liniowych.

Siła działająca na wirnik, odpowiadająca polu biegnącemu, jest „siłą liniową" skierowaną wzdłuż osi silnika. Wywołany jej działaniem ruch postępowy wirnika charakteryzuje się poślizgiem $s_{z\nu}$ wirnika względem νk-tej harmonicznej pola równym

$$s_{z\nu} = 1 + \nu(1 - s_{z1}), \qquad (4)$$

natomiast

$$s_{z1} = \frac{v_{z1} - v_z}{v_{z1}}, \qquad (5)$$

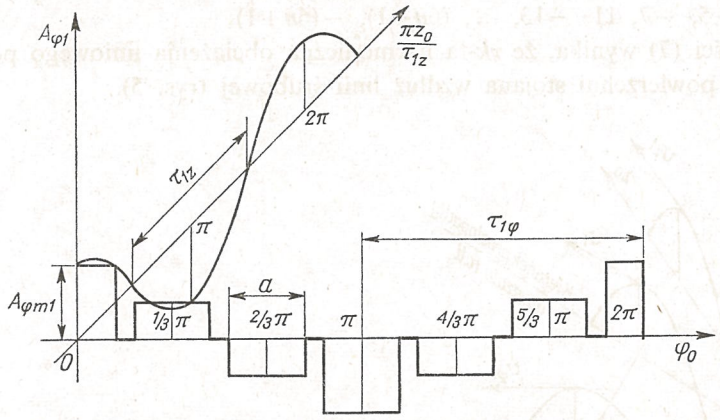
a

$$v_{z1} = 2\tau_{1z} f, \qquad (6)$$

przy czym v_z — prędkość liniowa wirnika.

2.2.2. *Pole wirująco-biegnące*

Jeżeli uzwojenia każdego z induktorów zasilić napięciem trójfazowym i połączyć ze sobą w ten sposób, że kąt $\Delta\psi_z$ wzajemnego przesunięcia obciążenia liniowego sąsiednich induktorów będzie równy $\frac{1}{3}\pi$, rozkład obciążenia liniowego na powierzchni stojana dla 1-ej harmonicznej rozkładu wzdłuż osi z_o będzie taki, jak to pokazano na rysunku 4.



Rys. 4. Chwilowy rozkład obciążenia liniowego $A_{\varphi 1}$ na powierzchni stojana w przypadku pola wirująco-biegnącego

Jeżeli jako parę przyjąć dwa naprzeciw siebie leżące induktory (rys. 2), to obciążenie liniowe poszczególnych par induktorów można opisać zależnościami w postaci szeregów Fouriera:

I para

$$\underline{A}_{\varphi}^{\mathrm{I}}(t, \varphi_o, z_o) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}A_{\varphi mm\nu}\frac{1}{k}\sin k\frac{\pi a}{2\tau_{1\varphi}}\exp\left[j\left(\omega t+\nu\frac{\pi}{\tau_{1z}}z_o\right)\right]\cos k\frac{\pi}{\tau_{1\varphi}}\varphi_o,$$

II para

$$\underline{A}_{\varphi}^{\mathrm{II}}(t, \varphi_o, z_o) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}A_{\varphi mm\nu}\frac{1}{k}\sin k\frac{\pi a}{2\tau_{1\varphi}}\exp\left[j\omega t+j\nu\left(\frac{\pi}{\tau_{1z}}z_o+\frac{2}{3}\pi\right)\right]\times$$
$$\times\cos k\left(\frac{\pi}{\tau_{1\varphi}}\varphi_o-\frac{2}{3}\pi\right),$$

III para

$$\underline{A}_{\varphi}^{\mathrm{III}}(t, \varphi_o, z_o) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}A_{\varphi mm\nu}\frac{1}{k}\sin k\frac{\pi a}{2\tau_{1\varphi}}\exp\left[j\omega t+j\nu\left(\frac{\pi}{\tau_{1z}}z_o+\frac{4}{3}\pi\right)\right]\times$$
$$\times\cos k\left(\frac{\pi}{\tau_{1\varphi}}\varphi_o-\frac{4}{3}\pi\right).$$

Całkowite obciążenie liniowe jest sumą:

$$\underline{A}_\varphi(t, \varphi_o, z_o) = \underline{A}_\varphi^{\mathrm{I}}(t, \varphi_o, z_o) + \underline{A}_\varphi^{\mathrm{II}}(t, \varphi_o, z_o) + \underline{A}_\varphi^{\mathrm{III}}(t, \varphi_o, z_o) =$$

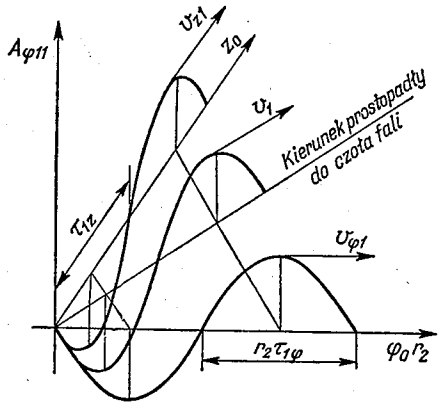
$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2} \frac{4}{\pi} A_{\varphi mm\nu} \frac{1}{k} \sin k \frac{\pi a}{2\tau_{1\varphi}} \exp\left[j\left(\omega t + \nu \frac{\pi}{\tau_{1z}} z_o + k \frac{\pi}{\tau_{1\varphi}} \varphi_o \right) \right], \qquad (7)$$

a $\tau_{1\varphi} = \pi$,

$\nu = -1, 5, -7, 11, -13, \ldots, (6n-1), -(6n+1)$,

$k = -1, 5, -7, 11, -13, \ldots, (6n-1), -(6n+1)$.

Z zależności (7) wynika, że νk-ta harmoniczna obciążenia liniowego porusza się po cylindrycznej powierzchni stojana wzdłuż linii śrubowej (rys. 5).



Rys. 5. Chwilowy rozkład fali obciążenia liniowego $A_{\varphi 11}$ ($\nu = 1$, $k = 1$) poruszającej się po cylindrycznej powierzchni stojana wzdłuż linii śrubowej

Siła działająca na wirnik, odpowiadająca temu obciążeniu liniowemu jest wypadkową dwu sił składowych: „siły liniowej" równoległej do osi wzdłużnej silnika i „siły obrotowej" stycznej do obwodu wirnika. Dzięki istnieniu tych sił wirnik może wykonywać ruch obrotowo-postępowy.

Prędkość wypadkowa v wirnika jest w tym przypadku sumą geometryczną prędkości liniowej v_z i prędkości obwodowej wirnika v_φ i wynosi

$$v = \sqrt{v_z^2 + v_\varphi^2}, \qquad (8)$$

przy czym:

$$v_\varphi = \omega_\varphi r_1, \qquad (9)$$

gdzie:

ω_φ — prędkość kątowa wirnika,

r_1 — promień wirnika.

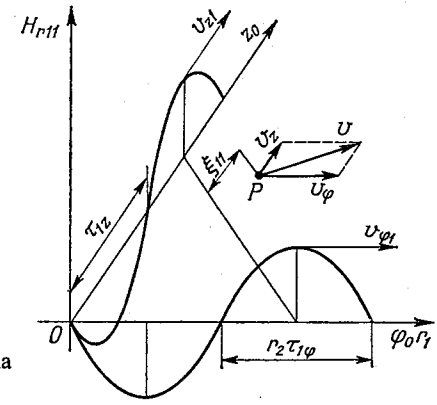
W celu wyprowadzenia zależności określającej poślizg wirnika można początkowo założyć, że wirnik porusza się synchronicznie względem νk-tej harmonicznej pola, to znaczy, że wartość natężenia pola magnetycznego νk-tej harmonicznej ($H_{\nu k}$) w dowolnym punkcie na powierzchni wirnika jest stała. Wtedy

$$H_{\nu k}(t, \varphi_o, z_o) = H_{mm\nu k} \exp\left[j\left(\omega t + \nu \frac{\pi}{\tau_{1z}} z_o + k \frac{\pi}{\tau_{1\varphi}} \varphi_o \right) \right] = \text{const}. \qquad (10)$$

Stąd:

$$\omega t+\nu\frac{\pi}{\tau_{1z}}z_o+k\frac{\pi}{\tau_{1\varphi}}\varphi_o=\xi_{\nu k}=\text{const}, \tag{11}$$

gdzie $\xi_{\nu k}$ — kąt określający położenie wybranego punktu na powierzchni wirnika względem czoła fali νk-tej harmonicznej pola (rys. 6).



Rys. 6. Chwilowy rozkład składowej H_{r11} natężenia pola magnetycznego na powierzchni wirnika

Różniczkując obydwie strony równania (11) względem czasu otrzymuje się

$$\omega+\nu\frac{\pi}{\tau_{1z}}v_z+k\frac{\pi}{\tau_{1\varphi}}=0. \tag{12}$$

Stąd po podzieleniu przez ω

$$1=-\nu\frac{v_z}{v_{z1}}-k\frac{\omega_\varphi}{\omega_{\varphi 1}}, \tag{13}$$

gdzie:

$v_{z1}=2\tau_{1z}f$ — prędkość poruszania się 1-ej harmonicznej pola wzdłuż osi z_o,

$\omega_{\varphi 1}=2\tau_{1\varphi}f$ — prędkość kątowa 1-ej harmonicznej pola.

Przy ruchu asynchronicznym wirnika kąt $\xi_{\nu k}$ nie jest stały lecz jest funkcją czasu. Różniczkując względem czasu równanie (11) dla $\xi_{\nu k}(t)$ otrzymuje się

$$\omega+\nu\frac{\pi}{\tau_{1z}}v_z+k\frac{\pi}{\tau_{1\varphi}}\omega_\varphi=\frac{d\xi_{\nu k}(t)}{dt}=\omega_{2\nu k}, \tag{14}$$

gdzie $\omega_{2\nu k}$ — prędkość kątowa wybranego punktu na powierzchni wirnika względem νk-tej harmonicznej pola.

Analogicznie jak w silnikach obrotowych gdzie:

$$n_2=n_1 s,$$

można napisać

$$\omega_{2\nu k}=\omega s_{\nu k}, \tag{15}$$

gdzie $s_{\nu k}$ — poślizg wirnika przy ruchu obrotowo-postępowym względem νk-tej harmonicznej pola.

Po podstawieniu zależności (15) do (14) i podzieleniu przez ω otrzymuje się

$$s_{\nu k}=1+\nu\frac{v_z}{v_{z1}}+k\frac{\omega_\varphi}{\omega_{\varphi 1}}. \tag{16}$$

Jak wynika ze wzoru (16), poślizg wirnika przy ruchu obrotowo-postępowym jest zależny od prędkości liniowej v_z i kątowej ω_φ, które z kolei zależą od wartości sił obciążających wirnik: „liniowej" i „obrotowej".

Istnieją dwa szczególne przypadki pracy silnika przy wirująco-biegnącym polu, a mianowicie:

a) Praca przy ruchu wyłącznie obrotowym wirnika. Przypadek ten ma miejsce wtedy gdy uniemożliwione zostanie przesunięcie poosiowe wirnika. Wtedy prędkość $v_z = 0$, a z zależności (16) wynika, że

$$s_{\nu k} = 1 + k\frac{\omega_\varphi}{\omega_{\varphi 1}} = s_{\varphi k}.$$

b) Praca przy ruchu wirnika wyłącznie postępowym. Poślizg wirnika jest w tym przypadku równy

$$s_{\nu k} = 1 + \nu\frac{v_z}{v_{z1}} = s_{z\nu}.$$

Podczas ruchu obrotowo-postępowego wirnika przy określonej wartości poślizgu $s_{\nu k}$ prędkość liniową można regulować poprzez zadawanie określonej wartości prędkości obrotowej. W przypadku silnika obrotowo-liniowego synchronicznego dla $\nu = 1$ i $k = 1$ ze wzoru (13) otrzymuje się

$$v_z = 2\tau_{1z} f - \frac{\tau_{1z}}{\tau_{1\varphi}}\omega_\varphi. \tag{17}$$

Wynika stąd możliwość „transformacji" prędkości obrotowej na prędkość liniową. Pozwala to między innymi na uzyskanie małych prędkości liniowych co pozwala uzyskać dużą dokładność przesuwu.

2.2.3. *Pole wirujące*

Jeżeli uzwojenia każdej pary induktorów zasilić jedną i to różną fazą napięcia trójfazowego, wówczas obciążenie liniowe poszczególnych par induktorów opisują funkcje:

$$A_\varphi^{\mathrm{I}}(t, \varphi_o, z_o) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}A_{\varphi m m \nu}\frac{1}{k}\sin k\frac{a\pi}{2\tau_{1\varphi}}\sin\nu\frac{\pi}{\tau_{1z}}z_o\cos k\frac{\pi}{\tau_{1\varphi}}\varphi_o\exp[j\omega t],$$

$$A_\varphi^{\mathrm{II}}(t, \varphi_o, z_o) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}A_{\varphi m m \nu}\frac{1}{k}\sin k\frac{a\pi}{2\tau_{1\varphi}}\sin\nu\frac{\pi}{\tau_{1z}}z_o\cos k\left[\frac{\pi}{\tau_{1\varphi}}\varphi_o - \frac{2}{3}\pi\right]\times$$
$$\times\exp\left[j\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right)\right],$$

$$A_\varphi^{\mathrm{III}}(t, \varphi_o, z_o) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}A_{\varphi m m \nu}\frac{1}{k}\sin k\frac{a\pi}{2\tau_{1\varphi}}\sin\nu\frac{\pi}{\tau_{1z}}z_o\cos k\left[\frac{\pi}{\tau_{1\varphi}}\varphi_o - \frac{4}{3}\pi\right]\times$$
$$\times\exp\left[j\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right)\right].$$

Całkowite obciążenie liniowe jest sumą obciążeń poszczególnych par induktorów

$$A_\varphi(t, \varphi_o, z_o) = A_\varphi^{\mathrm{I}}(t, \varphi_o, z_o) + A_\varphi^{\mathrm{II}}(t, \varphi_o, z_o) + A_\varphi^{\mathrm{III}}(t, \varphi_o, z_o) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2} \frac{4}{\pi} A_{\varphi m m \nu} \frac{1}{k} \sin k \frac{a\pi}{2\tau_{1\varphi}} \sin \nu \frac{\pi}{\tau_{1z}} z_o \exp\left[j\left(\omega t + k \frac{\pi}{\tau_{1\varphi}} \varphi_o \right) \right], \tag{18}$$

gdzie:

$\tau_{1\varphi} = \pi$,

$\nu = 1, 3, 5, 7, \ldots, (2n+1)$,

$k = -1, 5, -7, 11, -13, \ldots, (6n-1), -(6n+1)$.

Obciążenie liniowe νk-tej harmonicznej opisane funkcją (18) wiruje z prędkością kątową

$$\omega_{\varphi k} = -\frac{1}{k} 2\tau_{1\varphi} f. \tag{19}$$

Siła działająca na wirnik jest styczna do jego obwodu i daje moment obrotowy. Wirnik wiruje wskutek działania momentu obrotowego z poślizgiem $s_{\varphi k}$ względem νk-tej harmonicznej pola, a

$$s_{\varphi k} = 1 + k(1 - s_{\varphi 1}), \tag{20}$$

gdzie:

$$s_{\varphi 1} = \frac{\omega_{\varphi 1} - \omega_\varphi}{\omega_{\varphi 1}},$$

$$\omega_{\varphi 1} = 2\tau_{1\varphi} f,$$

przy czym:

ω_φ — prędkość kątowa wirnika.

W tym przypadku praca silnika odpowiada pracy silnika obrotowego.

Zależności (2), (7) i (18), opisujące obciążenie liniowe w nieruchomym układzie współrzędnych (r_o, φ_o, z_o), z uwagi na analizę pola elektromagnetycznego w wirniku korzystniej jest zapisać w ruchomym układzie (r, φ, z) związanym z powierzchnią wirnika.

Wzajemną zależność współrzędnych obu układów określają równania:

$$\left.\begin{aligned} r &= r_o, \\ \varphi &= \varphi_o - \omega_\varphi t, \\ z &= z_o - v_z t. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Podstawiając do równań (21) wyprowadzone ze wzoru (16) zależności na ω_φ i v_z dla ruchu obrotowo-postępowego wirnika otrzymuje się

$$\left.\begin{aligned} r_o &= r, \\ \varphi_o &= \varphi + \frac{\omega_{\varphi 1}}{k} \left(s_{\nu k} - 1 - \nu \frac{v_z}{v_{z1}} \right) t, \\ z_o &= z + \frac{v_{z1}}{\nu} \left(s_{\nu k} - 1 - k \frac{\omega_\varphi}{\omega_{\varphi 1}} \right) t. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

W przypadku ruchu obrotowego ($v_z = 0$) lub postępowego ($\omega_\varphi = 0$) $s_{\nu k} = s_{\varphi k}$ lub $s_{\nu k} = s_{z\nu}$.

Zapisując obciążenie liniowe w nowym układzie współrzędnych, zależności (2), (7), (18) przyjmują postać:

— dla pola biegnącego

$$\underline{A}_\varphi(t, \varphi, z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{\varphi m m \nu k} \cos k \frac{\pi}{\tau_{1\varphi}} \varphi \exp\left[j\left(\omega s_{z\nu} t + \nu \frac{\pi}{\tau_{1z}} z \right) \right], \tag{23}$$

gdzie:

$$A_{\varphi m m \nu k} = \frac{4}{\pi} A_{\varphi m m \nu} \frac{1}{k} \sin k \frac{a\pi}{2\tau_{1\varphi}}, \tag{24}$$

$$k = 1, 3, 5, \ldots, (2n+1),$$

$$\nu = -1, 5, -7, 11, -13, \ldots, (6n-1), -(6n+1);$$

— dla pola wirująco-biegnącego

$$\underline{A}_\varphi(t, \varphi, z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{\varphi m m \nu k} \exp\left[j\left(\omega s_{\nu k} t + \nu \frac{\pi}{\tau_{1z}} z + k \frac{\pi}{\tau_{1\varphi}} \varphi \right) \right], \tag{25}$$

gdzie:

$$A_{\varphi m m \nu k} = \frac{3}{2} \frac{4}{\pi} A_{\varphi m m \nu} \frac{1}{k} \sin k \frac{a\pi}{2\tau_{1\varphi}}, \tag{26}$$

$$k = \nu = -1, 5, -7, 11, -13, \ldots, (6n-1), -(6n+1);$$

— dla pola wirującego

$$\underline{A}_\varphi(t, \varphi, z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{\varphi m m \nu k} \sin \nu \frac{\pi}{\tau_{1z}} z \exp\left[j\left(\omega s_{\nu k} t + k \frac{\pi \varphi}{\tau_{1\varphi}} \right) \right], \tag{27}$$

gdzie:

$$A_{\varphi m m \nu k} = \frac{3}{2} \frac{4}{\pi} A_{\varphi m m \nu} \frac{1}{k} \frac{a\pi}{2\tau_{1\varphi}}, \tag{28}$$

$$k = -1, 5, -7, 11, -13, \ldots, (6n-1), -(6n+1),$$

$$\nu = 1, 3, 5, 7, \ldots, (2n+1).$$

2.3. Pole elektromagnetyczne w wirniku

Pole elektromagnetyczne, przy pominięciu prądów przesunięcia $\left(\frac{\partial D}{\partial t} = 0\right)$ i braku swobodnych ładunków ($\varrho = 0$), opisują równania Maxwella w postaci:

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}, \tag{29}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{30}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{D} = 0, \tag{31}$$

$$\mathbf{J} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{ob} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{32}$$

Ponadto, w myśl przyjętych założeń (p. 2.1), dla środowiska izotropowego i jednorodnego, przy $\mu = \text{const}$ i $\varepsilon = \text{const}$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \tag{33}$$

Równania (29) i (30) zapisane w ruchomym układzie współrzędnych (r, φ, z) dla środowiska, w którym brak składowej obcej pola elektrycznego ($\mathbf{E}_{ob} = 0$), przy sinusoidalnej zmianie pola w czasie przyjmują postać

$$\operatorname{rot} \underline{\mathbf{H}}_m = \gamma \underline{\mathbf{E}}_m, \tag{34}$$

$$\operatorname{rot} \underline{\mathbf{E}}_m = -j\omega s \mu \underline{\mathbf{H}}_m, \tag{35}$$

przy czym dla środowisk (2) i (3) (rys. 2) $\gamma = 0$.

Obliczając rotację obu stron równania (35)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{\mathbf{E}}_m = -j\omega s \mu \operatorname{rot} \underline{\mathbf{H}}_m,$$

przy uwzględnieniu tożsamości:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{\mathbf{E}}_m \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{\mathbf{E}}_m - \nabla^2 \underline{\mathbf{E}}_m$$

oraz zależności (31) i (34) otrzymuje się równanie:

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{E}}_m = \underline{\alpha}^2 \underline{\mathbf{E}}_m, \tag{36}$$

gdzie $\underline{\alpha}^2 = j\gamma\mu\omega s$. (37)

Zależność (36) we współrzędnych cylindrycznych ma postać:

$$\mathbf{1}_r \left(\nabla^2 \underline{E}_{rm} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \underline{E}_{\varphi m}}{\partial \varphi} - \frac{\underline{E}_{rm}}{r^2} \right) + \mathbf{1}_\varphi \left(\nabla^2 \underline{E}_{\varphi m} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \underline{E}_{rm}}{\partial \varphi} - \frac{\underline{E}_{\varphi m}}{r^2} \right) + \mathbf{1}_z \nabla^2 \underline{E}_{zm} =$$

$$= \underline{\alpha}^2 (\mathbf{1}_r \underline{E}_{rm} + \mathbf{1}_\varphi \underline{E}_{\varphi m} + \mathbf{1}_z \underline{E}_{zm}). \tag{38}$$

Zakładając, że w przyjętym do analizy silniku $\underline{E}_{rm} = 0$, po podstawieniu do zależności (38) Laplasjanu skalarnego zapisanego w cylindrycznym układzie w postaci

$$\nabla^2 E = \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}, \tag{39}$$

uzyskuje się układ równań:

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_{\varphi m}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{E}_{\varphi m}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_{\varphi m}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_{\varphi m}}{\partial z^2} - \underline{E}_{\varphi m} \left(\frac{1}{r^2} + \underline{\alpha}^2 \right) = 0, \tag{40}$$

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_{zm}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{E}_{zm}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \underline{E}_{zm}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_{zm}}{\partial z^2} - \underline{E}_{zm} \underline{\alpha}^2 = 0. \tag{41}$$

Ponieważ rozkład obciążenia liniowego wzdłuż osi φ i z jest okresowy, poszukuje się rozwiązania równania (40) dla vk-tej harmonicznej pola w postaci:

$$\underline{E}_{\varphi m \nu k}(r, \varphi, z) = \underline{E}_{\varphi m m \nu k}(r) \cdot \underline{D}_{\varphi \nu k}(\varphi, z), \tag{42}$$

przy czym:

— dla pola biegnącego

$$\underline{D}_{\varphi \nu k}(\varphi, z) = \cos\left(k \frac{\pi}{\tau_{1\varphi}} \varphi \right) \exp\left[j\nu \frac{\pi}{\tau_{1z}} z \right],$$

— dla pola wirująco-biegnącego

$$\underline{D}_{\varphi\nu k}(\varphi, z) = \exp\left[j\left(\nu\frac{\pi}{\tau_{1z}}z + k\frac{\pi}{\tau_{1\varphi}}\varphi\right)\right],$$

— dla pola wirującego

$$\underline{D}_{\varphi\nu k}(\varphi, z) = \exp\left[jk\frac{\pi}{\tau_{1\varphi}}\varphi\right]\sin\left(\nu\frac{\pi}{\tau_{1z}}z\right).$$

Po podstawieniu zależności (42) do równania (40) otrzymuje się:

$$\frac{\partial^2\underline{E}_{\varphi m\nu k}(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\underline{E}_{\varphi m\nu k}(r)}{\partial r} - \left[\underline{\beta}^2_{\nu k} + \frac{\varkappa_k^2}{r^2}\right]\underline{E}_{\varphi m\nu k}(r) = 0, \tag{43}$$

gdzie:

$$\underline{\beta}^2_{\nu k} = \left(\nu\frac{\pi}{\tau_{1z}}\right)^2 + \underline{\alpha}^2_{\nu k}, \tag{44}$$

$$\varkappa_k^2 = 1 + \left(k\frac{\pi}{\tau_{1\varphi}}\right)^2, \tag{45}$$

$$\underline{\alpha}^2_{\nu k} = j\gamma\mu\omega s_{\nu k}. \tag{46}$$

Ogólne rozwiązanie równania (43) można zapisać w postaci

$$\underline{E}_{\varphi m\nu k}(r) = C_1 I_{\varkappa_k}(\underline{\beta}_{\nu k} r) + C_2 K_{\varkappa_k}(\underline{\beta}_{\nu k} r), \tag{47}$$

gdzie:

C_1, C_2 — stałe całkowania,

$I_{\varkappa_k}, K_{\varkappa_k}$ — zmodyfikowane funkcje Bessela pierwszego i drugiego rodzaju $\varkappa_k$-tego rzędu.

Składową $\underline{E}_{zm}$ natężenia pola elektrycznego można obliczyć z zależności (31) zapisanej we współrzędnych cylindrycznych równaniem:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\underline{E}_{\varphi m}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\underline{E}_{zm}}{\partial z} = 0, \tag{48}$$

skąd

$$\underline{E}_{zm} = -\frac{1}{r}\int\frac{\partial\underline{E}_{\varphi m}}{\partial\varphi}\partial z + E_{ob}. \tag{49}$$

Po scałkowaniu równania (49), przy założeniu, że $E_{ob} = 0$ otrzymuje się dla νk-tej harmonicznej pola:

$$\underline{E}_{zm\nu k}(r, \varphi, z) = \frac{h_{\nu k}}{r}\underline{E}_{\varphi m\nu k}(r)\underline{D}_{z\nu k}(\varphi, z), \tag{50}$$

gdzie

$$h_{\nu k} = -\frac{k}{\nu}\frac{\tau_{1z}}{\tau_{1\varphi}}, \tag{51}$$

natomiast $\underline{D}_{z\nu k}(\varphi, z)$

— dla pola biegnącego:

$$\underline{D}_{z\nu k}(\varphi, z) = j\sin\left(k\frac{\pi}{\tau_{1\varphi}}\varphi\right)\exp\left[j\nu\frac{\pi}{\tau_{1z}}z\right],$$

— dla pola wirująco-biegnącego

$$\underline{D}_{zvk}(\varphi, z) = \exp\left[j\left(v\frac{\pi}{\tau_{1z}}z + k\frac{\pi}{\tau_{1\varphi}}\varphi\right)\right],$$

— dla pola wirującego

$$\underline{D}_{zvk}(\varphi, z) = -j\exp\left[jk\frac{\pi}{\tau_{1\varphi}}\varphi\right]\cos\left(v\frac{\pi}{\tau_{1z}}z\right).$$

Składowe natężenia pola magnetycznego wyznacza się z równania (35). Zapisując równania te w postaci rozwiniętej w układzie cylindrycznym otrzymuje się układ trzech równań

$$\left.\begin{aligned}
\underline{H}_{rm} &= \frac{-1}{j\omega s\mu}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial \underline{E}_{zm}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \underline{E}_{\varphi m}}{\partial z}\right],\\
\underline{H}_{\varphi m} &= \frac{1}{j\omega s\mu}\frac{\partial \underline{E}_{zm}}{\partial r},\\
\underline{H}_{zm} &= \frac{-1}{j\omega s\mu}\left[\frac{\underline{E}_{\varphi m}}{r} + \frac{\partial \underline{E}_{\varphi m}}{\partial r}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Rozwiązania powyższych równań można otrzymać po podstawieniu w miejsce $\underline{E}_{zm}$ i $\underline{E}_{\varphi m}$ zależności (47) i (50).

Przy rozwiązywaniu korzysta się z zależności [6]

$$\frac{d}{dz}[K_\nu(kz)] = kK'_\nu(kz), \qquad \frac{d}{dz}[I_\nu(kz)] = kI'_\nu(kz),$$

oraz

$$I'_\nu(z) = \frac{1}{z}[\nu I_\nu(z) + zI_{\nu+1}(z)],$$

$$K'_\nu(z) = \frac{1}{z}[\nu K_\nu(z) - zK_{\nu+1}(z)].$$

Ogólne rozwiązania składowych pola elektromagnetycznego i-tego środowiska (to jest (1), (2), (3) — rys. 2), dla νk-tej harmonicznej pola mają postać

$$\left.\begin{aligned}
\underline{E}^{(i)}_{\varphi m\nu k} &= [C^{(i)}_1 I_{\varkappa_k}(\underline{\beta}^{(i)}_{\nu k} r) + C^{(i)}_2 K_{\varkappa_k}(\underline{\beta}^{(i)}_{\nu k} r)]\,\underline{D}_{\varphi\nu k}(\varphi, z),\\
\underline{E}^{(i)}_{zm\nu k} &= \frac{h_{\nu k}}{r}[C^{(i)}_1 I_{\varkappa_k}(\underline{\beta}^{(i)}_{\nu k} r) + C^{(i)}_2 K_{\varkappa_k}(\underline{\beta}^{(i)}_{\nu k} r)]\,\underline{D}_{z\nu k}(\varphi, z),\\
\underline{H}^{(i)}_{rm\nu k} &= \frac{\pi}{\omega s_{\nu k}\mu^{(i)}}\left[\frac{\nu}{\tau_{1z}} - \frac{h_{\nu k}}{r^2}\frac{k}{\tau_{1\varphi}}\right][C^{(i)}_1 I_{\varkappa_k}(\underline{\beta}^{(i)}_{\nu k} r) + C^{(i)}_2 K_{\varkappa_k}(\underline{\beta}^{(i)}_{\nu k} r)]\,\underline{D}_{r\nu k}(\varphi, z),\\
\underline{H}^{(i)}_{\varphi m\nu k} &= \frac{1}{j\omega s_{\nu k}\mu^{(i)}}\frac{h_{\nu k}}{r}\left\{\frac{\varkappa_k - 1}{r}[C^{(i)}_1 I_{\varkappa_k}(\underline{\beta}^{(i)}_{\nu k} r) + C^{(i)}_2 K_{\varkappa_k}(\underline{\beta}^{(i)}_{\nu k} r)] + \right.\\
&\quad \left. + \underline{\beta}^{(i)}_{\nu k}[C^{(i)}_1 I_{\varkappa_k+1}(\underline{\beta}^{(i)}_{\nu k} r) - C^{(i)}_2 K_{\varkappa_k+1}(\underline{\beta}^{(i)}_{\nu k} r)]\right\}\underline{D}_{z\nu k}(\varphi, z),\\
\underline{H}^{(i)}_{zm\nu k} &= \frac{-1}{j\omega s_{\nu k}\mu^{(i)}}\left\{\frac{\varkappa_k + 1}{r}[C^{(i)}_1 I_{\varkappa_k}(\underline{\beta}^{(i)}_{\nu k} r) + C^{(i)}_2 K_{\varkappa_k}(\underline{\beta}^{(i)}_{\nu k} r)] + \right.\\
&\quad \left. + \underline{\beta}^{(i)}_{\nu k}[C^{(i)}_1 I_{\varkappa_k+1}(\underline{\beta}^{(i)}_{\nu k} r) - C^{(i)}_2 K_{\varkappa_k+1}(\underline{\beta}^{(i)}_{\nu k} r)]\right\}\underline{D}_{\varphi\nu k}(\varphi, z),
\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

przy czym:

— dla pola biegnącego

$$\underline{D}_{rvk}(\varphi, z) = \cos\left(k\frac{\pi}{\tau_{1\varphi}}\right)\exp\left[jv\frac{\pi}{\tau_{1z}}z\right],$$

— dla pola wirująco-biegnącego

$$\underline{D}_{rvk}(\varphi, z) = \exp\left[j\left(v\frac{\pi}{\tau_{1z}}z + k\frac{\pi}{\tau_{1\varphi}}\varphi\right)\right],$$

— dla pola wirującego

$$\underline{D}_{rvk}(\varphi, z) = -j\exp\left[jk\frac{\pi}{\tau_{1\varphi}}\varphi\right]\cos\left(v\frac{\pi}{\tau_{1z}}z\right).$$

W równaniach (53) składowe natężenia pola magnetycznego powinny spełniać zależność

$$\operatorname{div}\underline{\mathbf{H}}_m = \frac{\partial \underline{H}_{rm}}{\partial r} + \frac{\underline{H}_{rm}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \underline{H}_{\varphi m}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \underline{H}_{zm}}{\partial z} = 0,$$

co pozwala sprawdzić poprawność wyprowadzonych równań.

Stałe $C_1^{(i)}$ i $C_2^{(i)}$ wyznacza się z warunków brzegowych na granicy dwóch środowisk. Przyrównując do siebie składowe promieniowe indukcji B_r i składowe styczne H_z natężenia pola magnetycznego oraz biorąc pod uwagę warstwę prądową przy $r = r_2$ otrzymuje się układy równań

a) dla $r = r_1$

$$\left.\begin{aligned} &\underline{H}^{(1)}_{zmvk}(r_1, \varphi, z) = \underline{H}^{(2)}_{zmvk}(r_1, \varphi, z),\\ &\mu^{(1)}\underline{H}^{(1)}_{rmvk}(r_1, \varphi, z) = \mu^{(2)}\underline{H}^{(2)}_{rmvk}(r_1, \varphi, z),\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

b) dla $r = r_2$

$$\left.\begin{aligned} &\underline{H}^{(2)}_{zmvk}(r_2, \varphi, z) - \underline{H}^{(3)}_{zmvk}(r_2, \varphi, z) = \underline{A}_{\varphi mvk}(\varphi, z),\\ &\mu^{(2)}H^{(2)}_{rmvk}(r_2, \varphi, z) = \mu^{(3)}H^{(3)}_{rmvk}(r_2, \varphi, z),\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

gdzie:

$$\mu^{(3)} \approx \infty.$$

Biorąc pod uwagę to, że dla $r \to 0$ $\underline{H}^{(1)}_{mvk} < \infty$ oraz dla $r \to \infty$ $\underline{H}^{(3)}_{mvk} < \infty$, stałe $C_2^{(1)}$ i $C_1^{(3)}$ muszą być równe zeru. Z układów równań (54) i (55) wyznacza się interesującą ze względu na określenie pola elektromagnetycznego w żelazie wirnika stałą $C_1^{(1)}$ równą:

$$\underline{C}_1^{(1)} = \frac{-j\omega s_{vk}\mu^{(2)}}{r_1 I_{\varkappa_k}(\underline{\beta}^{(1)}_{vk} r_1)\,\underline{M}_{vk}} A_{\varphi mmvk}, \tag{56}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\underline{M}_{vk} = \frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(1)}}&\left[\frac{\varkappa_k+1}{r_1} + \underline{N}_{vk}\right]\left\{I_{\varkappa_k}(\beta^{(2)}_{vk} r_1)\left[\beta^{(2)}_{vk} K_{\varkappa_k+1}(\beta^{(2)}_{vk} r_2) - \frac{\varkappa_k+1}{r_2}K_{\varkappa_k}(\beta^{(2)}_{vk} r_2)\right] + \right.\\ &+ K_{\varkappa_k}(\beta^{(2)}_{vk} r_1)\left[\frac{\varkappa_k+1}{r_2} I_{\varkappa_k}(\beta^{(2)}_{vk} r_2) + \beta^{(2)}_{vk} I_{\varkappa_k+1}(\beta^{(2)}_{vk} r_2)\right]\Big\} - \Big\{\Big[\frac{\varkappa_k+1}{r_1} I_{\varkappa_k}(\beta^{(2)}_{vk} r_1) + \\ &+ \beta^{(2)}_{vk} I_{\varkappa_k+1}(\beta^{(2)}_{vk} r_1)\Big]\Big[\beta^{(2)}_{vk} K_{\varkappa_k+1}(\beta^{(2)}_{vk} r_2) - \frac{\varkappa_k+1}{r_2}K_{\varkappa_k}(\beta^{(2)}_{vk} r_2)\Big] + \Big[\frac{\varkappa_k+1}{r_1} K_{\varkappa_k}(\beta^{(2)}_{vk} r_1) + \\ &\left. - \beta^{(2)}_{vk} K_{\varkappa_k+1}(\beta^{(2)}_{vk} r_1)\right]\left[\frac{\varkappa_k+1}{r_2} I_{\varkappa_k}(\beta^{(2)}_{vk} r_2) + \beta^{(2)}_{vk} I_{\varkappa_k+1}(\beta^{(2)}_{vk} r_2)\right]\Big\},\end{aligned} \tag{57}$$

$$\underline{N}_{\nu k} = \underline{\beta}_{\nu k}^{(1)} \frac{I_{\varkappa k+1}(\underline{\beta}_{\nu k}^{(1)} r_1)}{I_{\varkappa k}(\underline{\beta}_{\nu k}^{(1)} r_1)}, \tag{58}$$

$$\underline{\beta}_{\nu k}^{(1)} = \sqrt{\left(\nu \frac{\pi}{\tau_{1z}}\right)^2 + j\gamma^{(1)}\mu^{(1)}\omega s_{\nu k}}, \tag{59}$$

$$\beta_{\nu k}^{(2)} = \sqrt{\left(\nu \frac{\pi}{\tau_{1z}}\right)^2}. \tag{60}$$

Wstawiając zależność (56) do układu równań (53), wiedząc, że $C_2^{(1)} = 0$, otrzymuje się składowe natężenia νk-tej harmonicznej pola elektromagnetycznego w wirniku wyrażone wzorami

$$\left.\begin{aligned}
\underline{E}_{\varphi m\nu k}^{(1)} &= \frac{-j\omega s_{\nu k}\mu^{(2)}}{r_1 I_{\varkappa k}(\underline{\beta}_{\nu k}^{(1)} r_1)\underline{M}_{\nu k}} A_{\varphi mm\nu k} I_{\varkappa k}(\underline{\beta}_{\nu k}^{(1)} r)\underline{D}_{\varphi\nu k}(\varphi, z),\\
\underline{E}_{zm\nu k}^{(1)} &= \frac{-j\omega s_{\nu k}\mu^{(2)}}{r_1 I_{\varkappa k}(\underline{\beta}_{\nu k}^{(1)} r_1)\underline{M}_{\nu k}} A_{\varphi mm\nu k} \frac{h_{\nu k}}{r} I_{\varkappa k}(\underline{\beta}_{\nu k}^{(1)} r)\underline{D}_{z\nu k}(\varphi, z),\\
\underline{H}_{rm\nu k}^{(1)} &= \frac{-j\pi\mu^{(2)}}{r_1 I_{\varkappa k}(\underline{\beta}_{\nu k}^{(1)} r_1)\underline{M}_{\nu k}\mu^{(1)}} A_{\varphi mm\nu k}\left[\frac{\nu}{\tau_{1z}} - \frac{k}{\tau_{1\varphi}}\frac{h_{\nu k}}{r^2}\right] I_{\varkappa k}(\underline{\beta}_{\nu k}^{(1)} r)\underline{D}_{r\nu k}(\varphi, z),\\
\underline{H}_{\varphi m\nu k}^{(1)} &= \frac{-\mu^{(2)}}{r_1 I_{\varkappa k}(\underline{\beta}_{\nu k}^{(1)} r_1)\underline{M}_{\nu k}\mu^{(1)}} A_{\varphi mm\nu k}\frac{h_{\nu k}}{r}\left[\frac{\varkappa_k - 1}{r} I_{\varkappa k}(\underline{\beta}_{\nu k}^{(1)} r) + \underline{\beta}_{\nu k}^{(1)} I_{\varkappa k+1}(\underline{\beta}_{\nu k}^{(1)} r)\right] \times\\
&\qquad \times \underline{D}_{z\nu k}(\varphi, z),\\
\underline{H}_{zm\nu k}^{(1)} &= \frac{\mu^{(2)}}{r_1 I_{\varkappa k}(\underline{\beta}_{\nu k}^{(1)} r_1)\underline{M}_{\nu k}\mu^{(1)}} A_{\varphi mm\nu k}\left[\frac{\varkappa_k + 1}{r} I_{\varkappa k}(\underline{\beta}_{\nu k}^{(1)} r) + \underline{\beta}_{\nu k}^{(1)} I_{\varkappa k+1}(\underline{\beta}_{\nu k}^{(1)} r)\right]\underline{D}_{\varphi\nu k}(\varphi, z).
\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Powyższe równania, wyprowadzone przy założeniu stałej wartości przenikalności magnetycznej w żelazie wirnika ($\mu^{(1)}$), nie opisują rzeczywistego rozkładu pola w wirniku. Stanowią one jednak podstawę do obliczeń parametrów silnika.

Analiza pola w szczelinie maszyny z masywnym wirnikiem ferromagnetycznym przy uwzględnieniu zmian przenikalności magnetycznej żelaza wirnika została przeprowadzona w pracach [4, 5].

2.4. Siły działające na wirnik

Do analizy pracy silnika przyjęto maszynę idealną, której wirnik jest nieskończenie długim walcem koncentrycznym ze stojanem, w którym rzeczywisty rozkład uzwojenia w żłobkach zastępuje nieskończenie cienka warstwa prądu rozłożona na idealnie gładkiej powierzchni wewnętrznej stojana.

W takim silniku nie będą występować siły promieniowa i wzdłużna reluktancyjna wynikające z niesymetrii obwodu magnetycznego. Rozpatrywane zatem będą jedynie siły wynikające z oddziaływania składowej promieniowej indukcji magnetycznej na składowe podłużną i kątową prądu wirnika.

Wartości tych sił można obliczyć korzystając z wektora Poyntinga, który w przypadku sinusoidalnej zmiany pola elektromagnetycznego opisuje [9] zależność

$$\underline{S}_s = S_p + jS_q = \frac{1}{2}[\underline{E}_m x \underline{H}_m^*], \tag{62}$$

gdzie:

$S_p = \mathrm{Re}\{\underline{S}_s\}$ — moc czynna pola elektromagnetycznego przenikająca przez jednostkę powierzchni,

$S_q = \mathrm{Im}\{\underline{S}_s\}$ — moc bierna pola przenikająca przez jednostkę powierzchni,

$\underline{H}_m^*$ — sprzężona postać zespolonego wektora $\underline{H}_m$.

Moc pozorna ($\underline{S}_{svk}$) vk-tej harmonicznej pola wnikająca do wirnika przez jednostkę powierzchni jest w rozpatrywanym przypadku równa

$$\underline{S}_{svk} = \frac{1}{2}[\underline{E}^{(1)}_{\varphi mvk}\underline{H}^{(1)*}_{zmvk} - \underline{E}^{(1)}_{zmvk}\underline{H}^{(1)*}_{\varphi mvk}]_{r=r_1}. \tag{63}$$

Wstawiając do powyższego równania interesujące zależności (61) wyznacza się część rzeczywistą i urojoną

$$S_{pvk} = -\frac{\omega s_{vk}(\mu^{(2)})^2}{2r_1^2|\underline{M}_{vk}|^2\mu^{(1)}}\left[\left(\frac{h_{vk}}{r_1}\right)^2 W_1 + W_2\right]\mathrm{Im}\{\underline{N}_{vk}\}A^2_{\varphi mmvk}, \tag{64}$$

$$S_{qvk} = \frac{-\omega s_{vk}(\mu^{(2)})^2}{2r_1^2|\underline{M}_{vk}|^2\mu^{(1)}}\left\{\frac{(\varkappa_k - 1)h_{vk}^2 W_1 + r_1^2(\varkappa_k + 1)W_2}{r_1^3} + \left[\left(\frac{h_{vk}}{r_1}\right)^2 W_1 + W_2\right]\mathrm{Re}\{\underline{N}_{vk}\}\right\} \times$$
$$\times A^2_{\varphi mmvk}, \tag{65}$$

gdzie:

— dla pola biegnącego

$$W_1 = \sin^2\left(k\frac{\pi}{\tau_{1\varphi}}\varphi\right), \quad W_2 = \cos^2\left(k\frac{\pi}{\tau_{1\varphi}}\varphi\right),$$

— dla pola wirująco-biegnącego

$$W_1 = W_2 = 1,$$

— dla pola wirującego

$$W_1 = \cos^2\left(\nu\frac{\pi}{\tau_{1z}}z\right), \quad W_2 = \sin^2\left(\nu\frac{\pi}{\tau_{1z}}z\right).$$

Wzory (64) i (65) określają moc pola przy założeniu $\mu^{(1)} = \mathrm{const}$. Wpływ zmiennej przenikalności i strat histerezowych w stali można uwzględnić z wystarczającą dla celów technicznych dokładnością mnożąc straty mocy czynnej przez współczynnik $a_p = 1{,}4$ i mocy biernej przez $a_q = 0{,}85$ [9].

W ten sposób całkowite straty mocy czynnej wirnika pochodzące od vk-tej harmonicznej pola przy $\mu^{(2)} = \mu_o$ i $\mu^{(1)} = \mu_s$ są w przybliżeniu równe

$$P_{elvk} = \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{n\tau_{1z}}\int_0^{l=n\tau_{1z}} a_p S_{pvk}\,d\varphi\,dz\right]2\pi r_1 \cdot n\tau_{1z} =$$

$$= -a_p\frac{\omega s_{vk}\mu_o^2 T}{2r_1|\underline{M}_{vk}|^2\mu_s}\left[\left(\frac{h_{vk}}{r_1}\right)^2 + 1\right]\mathrm{Im}\{\underline{N}_{vk}\}A^2_{\varphi mmvk}, \tag{66}$$

a pobierana moc bierna

$$Q_{elvk} = \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{n\tau_{1z}}\int_0^{l=n\tau_{1z}} a_q S_{qvk}\,d\varphi\,dz\right] 2\pi r_1 n\tau_{1z} =$$

$$= -a_q \frac{\omega s_{vk}\mu_0^2 T}{2r_1|\underline{M}_{vk}|^2\mu_s}\left\{\frac{(\varkappa_k-1)h_{vk}+(\varkappa_k+1)r_1^2}{r_1^3}+\left[\left(\frac{h_{vk}}{r_1}\right)^2+1\right]\mathrm{Re}\{\underline{N}_{vk}\}\right\}A^2_{\varphi mmvk}, \qquad (67)$$

przy czym μ_s — przenikalność magnetyczna stali na powierzchni wirnika, wyznaczona na podstawie krzywej magnesowania $\mu = f(H)$ dla wartości skutecznej składowej stycznej H na powierzchni wirnika, obliczonej ze wzoru (61). Ponadto we wzorach (66) i (67) stała T jest równa

— dla pola biegnącego i wirującego

$$T = \pi \cdot n\tau_{1z},$$

— dla pola wirująco-biegnącego

$$T = 2\pi \cdot n\tau_{1z}.$$

Siłę F_{vk} działającą na wirnik wyznacza się podobnie jak w silnikach indukcyjnych obrotowych z zależności

$$P_{emvk} = F_{vk} \cdot v_{pvk}, \qquad (68)$$

gdzie:

P_{emvk} — moc elektromagnetyczna pola,

v_{pvk} — prędkość pola względem twornika.

Ponieważ straty mocy czynnej w wirniku $P_{elvk} = s_{vk}P_{emvk}$, to korzystając ze wzoru (68) można napisać:

$$F_{vk} = \frac{P_{elvk}}{v_{pvk}s_{vk}}. \qquad (69)$$

Kierunek działania siły F_{vk} zależy od kierunku poruszania się vk-tej harmonicznej pola. Stąd dla

— pola biegnącego:

$$F_{vk} = F_{zvk}, \quad v_{pvk} = v_{zv}, \quad s_{vk} = s_{zv},$$

przy czym v_{zv} i s_{zv} określone są wzorami (3) i (4),

— pola wirującego:

$$F_{vk} = F_{\varphi vk}, \quad v_{pvk} = r_1\omega_{\varphi k}, \quad s_{vk} = s_{\varphi k},$$

gdzie: $\omega_{\varphi k}$ i $s_{\varphi k}$ opisane są zależnościami (19) i (20).

W przypadku pola wirująco-biegnącego na wirnik działa siła F_{vk} będąca wypadkową siły liniowej F_{zvk} i obrotowej $F_{\varphi vk}$ określonych wzorami:

$$F_{zvk} = \frac{P_{elvk}}{v_{zv} \cdot s_{vk}}, \qquad F_{\varphi vk} = \frac{P_{elvk}}{v_{\varphi k} \cdot s_{vk}}, \qquad (70)$$

przy czym s_{vk} określa wzór (16).

Stosunek sił składowych jest stały i równy

$$\frac{F_{zvk}}{F_{\varphi vk}} = \frac{\nu}{k} \frac{\tau_{1\varphi} r_1}{\tau_{1z}}. \tag{71}$$

Zależy więc jedynie od konstrukcji silnika.

Moment obrotowy M_{vk} będący wynikiem działania na wirnik siły $F_{\varphi vk}$ jest równy

$$M_{vk} = \frac{P_{elvk}}{\omega_{\varphi k} S_{vk}}. \tag{72}$$

Całkowita siła działająca na wirnik jest sumą sił pochodzących od poszczególnych harmonicznych pola.

2.5. Uwagi

Przedstawiona teoria silnika obrotowo-liniowego, z uwagi na przyjęte założenia upraszczające, nie uwzględnia wszystkich zjawisk zachodzących podczas pracy w rzeczywistej maszynie.

Dodatkowe zjawiska wynikające ze skończonej długości stojana i wirnika posiadają ten sam charakter, co zjawiska krańcowe w silnikach liniowych tubowych [2, 3]. W przypadku kiedy wirnik jest krótszy od stojana, występujące zjawiska krańcowe przy ruchu obrotowo-postępowym i postępowym wirnika reprezentowane są zazwyczaj przez wzrost oporności elektrycznej właściwej obwodu wirnika. Zjawiska te są ledwo dostrzegalne, kiedy długość wirnika jest co najmniej równa podwójnej długości podziałki biegunowej induktorów [1, 3].

Ponadto skończona długość induktorów jest przyczyną występowania w szczelinie przytwornikowej dodatkowego pola pulsującego. Udział składowej pulsującej pola można jednak w znacznym stopniu ograniczyć przez zastosowanie odpowiedniego uzwojenia i konstrukcji induktorów [10, 11].

Na ferromagnetyczny wirnik o długości mniejszej od długości induktorów oprócz siły liniowej F_z działa dodatkowa siła wzdłużna reluktancyjna. Jest ona wynikiem żłobkowania induktorów oraz udziału składowej pulsującej pola. Podczas przesuwu wirnika jej wartość zmienia się periodycznie.

Żłobkowanie induktorów oraz szczeliny powietrza występujące pomiędzy nimi wpływają na wartość składowych pola elektromagnetycznego w wirniku. Wpływ ten można uwzględnić wykorzystując współczynnik Cartera.

3. DOŚWIADCZALNE SPRAWDZENIE TEORII

W celu sprawdzenia poprawności przedstawionej teorii wykonano model silnika, na którym przeprowadzono badania laboratoryjne.

Konstrukcja wykonanego i przebadanego przez autora modelu (rys. 7) odpowiada schematowi budowy przedstawionemu na rysunku 1. W modelu induktory twornika po-