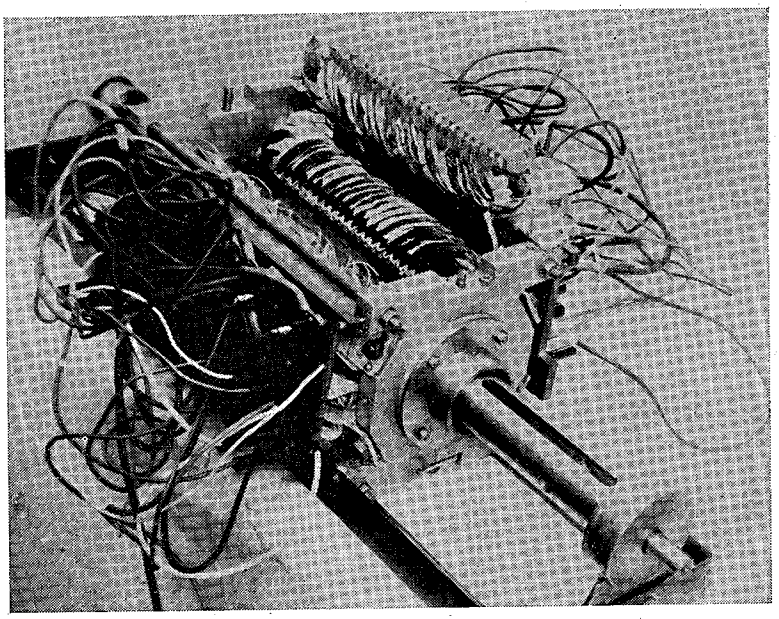
siadają czterobiegunowe, trójfazowe uzwojenie, eliminujące w znacznym stopniu składową pulsującą pola. Długość wirnika jest równa dwukrotnej długości podziałki biegunowej induktorów. Zmniejszono w ten sposób udział efektów krańcowych występujących podczas pracy silnika.

Wykonane badania obejmowały pomiar prądu twornika (I), siły liniowej (F_z) i momentu obrotowego (M_φ) na wale silnika w stanie zwarcia maszyny przy polach magnetycznych wirującym, biegnącym i wirująco-biegnącym. W przypadku pól wirująco-biegnącego i wirującego przeprowadzono również pomiary w stanie obciążenia przy stałych wartościach napięcia zasilania (U), częstotliwości (f) i prędkości liniowej ($v_z = 0$).



Rys. 7. Model silnika obrotowo-liniowego o danych: $r_1 = 36{,}25 \cdot 10^{-3}$m, $\delta = 1{,}8 \cdot 10^{-3}$m, $\tau_{1z} = 60 \cdot 10^{-3}$m, $q = 2$, $2p = 4$, $l = 2\tau_{1z}$, $A_{\varphi mm11} = 5827{,}2 \cdot \mathrm{I}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ (dla pola wirująco-biegnącego)

Pomiar momentu obrotowego wykonano metodą bezpośrednią. Siłę liniową wirnika mierzono dynamometrem przymocowanym do końca wału w sposób umożliwiający swobodny obrót wirnika. W celu wyznaczenia momentu elektromagnetycznego silnika pracującego przy $0 < s < 1$, wykonano pomiar jego strat mechanicznych przy różnych prędkościach wirnika przy wykorzystaniu cechowanego silnika dodatkowego. Moment elektromagnetyczny otrzymano jako sumę momentu obrotowego użytecznego ($M_{uż}$) i strat momentu (ΔM_m). Przykładowo przedstawiono wyniki badań silnika przy polu wirująco-biegnącym w postaci charakterystyk:

— dla stanu zwarcia ($s = 1$)

M_φ, $F_z = f(I)$ oraz $F_z = f(F_\varphi)$ przy $f = \mathrm{const}$, na rysunkach 8, 9,

— dla stanu obciążenia w zakresie poślizgów $0 < s < 1$

M_φ, $F_z = f(n)$ przy U, $f = \mathrm{const}$, $v_z = 0$, na rysunku 10.

Jednocześnie na tych samych rysunkach linią ciągłą narysowano charakterystyki teoretyczne otrzymane z obliczeń wykonanych przy wykorzystaniu przedstawionej teorii. W obliczeniach stosowano następujące uproszczenia.

Założono, że:

a) w stanie obciążenia silnika przy dużych poślizgach

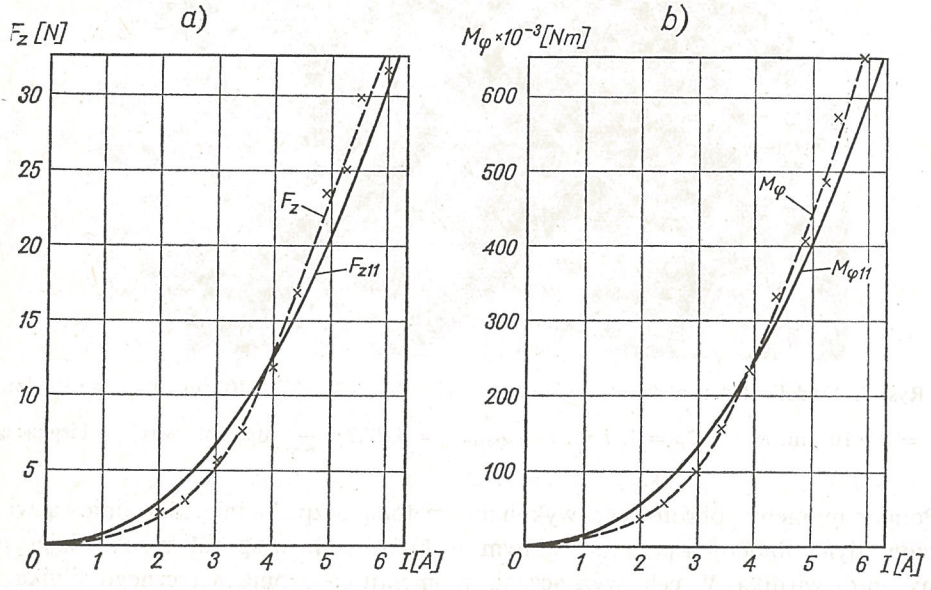
$$\left(\nu \frac{\pi}{\tau_{1z}}\right)^2 \ll \omega s_{\nu k} \gamma^{(1)} \mu^{(1)}, \text{ stąd}$$

$$\underline{\beta}_{\nu k}^{(1)} \approx \sqrt{j\omega s_{\nu k} \gamma^{(1)} \mu^{(1)}},$$

b) w stanie zwarcia maszyny oprócz uproszczenia a) przyjęto

$$\underline{N}_{\nu k} \approx \underline{\beta}_{\nu k}^{(1)} \text{ gdyż } \frac{I_{\varkappa k+1}(\underline{\beta}_{\nu k}^{(1)} r^1)}{I_{\varkappa k}(\underline{\beta}_{\nu k}^{(1)} r^1)} \approx 1.$$

Ponadto w obliczeniach wartości „siły liniowej" i momentu obrotowego uwzględniono jedynie pierwszą harmoniczną obciążenia liniowego stojana. Udział wyższych harmonicznych pola elektromagnetycznego w żelazie wirnika jest niewielki.



Rys. 8. Charakterystyki doświadczalne (— — —) i teoretyczne (———) a) siły liniowej (F_z) oraz b) momentu obrotowego (M_φ) w funkcji prądu twornika (I), wyznaczone w stanie zwarcia maszyny przy polu wirująco-biegnącym

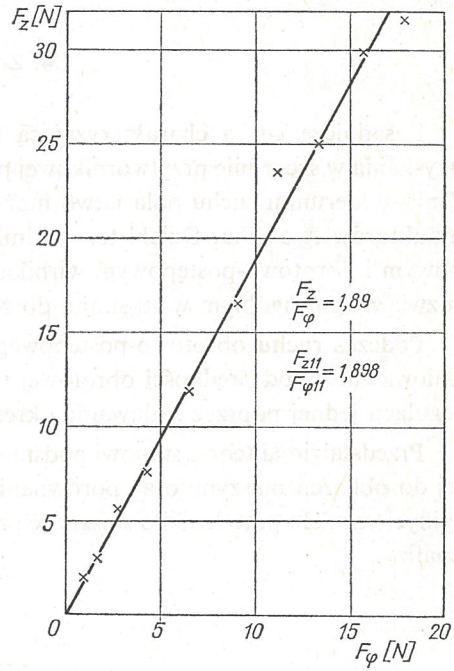
Porównując wyniki obliczeń z wynikami otrzymanymi z pomiarów można stwierdzić, że:

a) charakter krzywych teoretycznych nie odbiega zasadniczo od krzywych doświadczalnych,

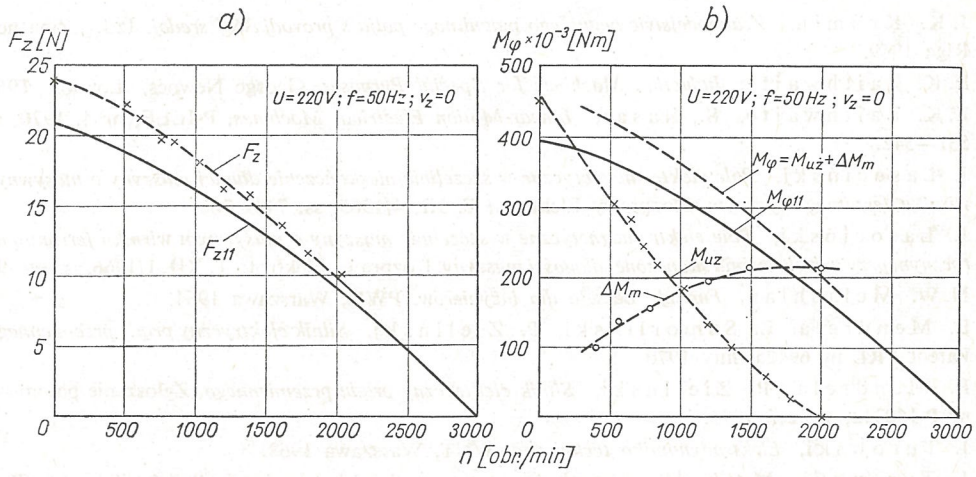
b) charakterystyki teoretyczne i doświadczalne w stanie zwarcia maszyny (F_z, $M_\varphi = f(I)$) wykazują mniejszą rozbieżność przy większych wartościach prądu twornika. W granicach od 4 A wzwyż, to znaczy przy wartości znamionowej prądu, rozbieżność ta jest

rzędu $\pm 13\%$ wartości maksymalnej. Większa rozbieżność przy mniejszych wartościach prądu wynika przede wszystkim z małej dokładności stosowanej metody pomiaru;

c) w stanie zwarcia dla pola wirująco-biegnącego stosunek wartości pomierzonych sił „liniowej" do „obrotowej" jest równy stosunkowi pierwszych harmonicznych tych sił. Wskazuje to na znikomy wpływ wyższych harmonicznych na pracę maszyny;



Rys. 9. Charakterystyka doświadczalna siły liniowej (F_z) w funkcji siły obrotowej ($F_\varphi = M_\varphi / r_1$) dla stanu zwarcia silnika przy polu wirująco-biegnącym



Rys. 10. Charakterystyki doświadczalne (— — —) i teoretyczne (———) a) siły liniowej (F_z) i b) momentu obrotowego (M_φ) w funkcji prędkości obrotowej (n) wyznaczone dla stanu obciążenia silnika przy polu wirująco-biegnącym

d) rozbieżność charakterystyk F_z, $M_\varphi = f(n)$ doświadczalnych i teoretycznych (rys. 10) jest rzędu $\pm 14\%$ wartości maksymalnej.

Biorąc pod uwagę powyższe wnioski można uznać, że przeprowadzone badania wykazały zadowalającą zgodność przedstawionej teorii z doświadczeniem.

4. ZAKOŃCZENIE

Zasadniczą cechą charakteryzującą opisany silnik obrotowo-liniowy jest możliwość uzyskania w szczelinie przytwornikowej pola wirującego, biegnącego i wirująco-biegnącego. Zmianę kierunku ruchu pola łatwo można zrealizować poprzez zmianę połączeń uzwojeń induktorów twornika. Dzięki temu silnik może pracować przy ruchu obrotowym, postępowym i obrotowo-postępowym wirnika. Pod tym względem silnik obrotowo-liniowy jest rozwiązaniem ogólnym w stosunku do znanych silników obrotowych i liniowych.

Podczas ruchu obrotowo-postępowego wirnika, dla danej wartości poślizgu prędkość liniowa zależy od prędkości obrotowej i przeciwnie. W związku z tym istnieje możliwość regulacji jednej poprzez zadawanie określonej wartości drugiej prędkości.

Przedstawiona teoria stanowi podstawę do obliczeń parametrów silnika. Wykorzystanie jej do obliczeń maszyny oraz porównanie wyników obliczeń z wynikami badań laboratoryjnych modelu potwierdziło słuszność przyjętych założeń i prawidłowość przeprowadzonej analizy.

LITERATURA

1. J. K. Krumiń, *Vzaimodejstvie beguščego magnitnogo polja s provodjaščej sredoj*, Izd. „Zinatne", Riga 1969.
2. E. K. Laithwaite, *Induction Machines for Special Purposes*, George Newnes, London 1966.
3. E. K. Laithwaite, S. Nasar, *Linear-Motion Electrical Machines*, P-IEEE, nr 4, 1970, ss. 531—542.
4. J. Lasociński, *Pole elektromagnetyczne w szczelinie nieskończenie długiej maszyny o masywnym wirniku ferromagnetycznym*, Rozprawy Elektrot., T. XI, 4/1965, ss. 743—766.
5. J. Lasociński, *Pole elektromagnetyczne w szczelinie maszyny o masywnym wirniku ferromagnetycznym przy uwzględnieniu skończonej długości maszyny*, Rozprawy Elektrot., T. XII, 1/1966, ss. 69—92.
6. N. W. Mclachlan, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN, Warszawa 1964.
7. E. Mendrela, Z. Szmorliński, P. Zieliński, *Silnik elektryczny prądu przemiennego*, Patent PRL nr 69425, luty 1970.
8. E. Mendrela, P. Zieliński, *Silnik elektryczny prądu przemiennego*, Zgłoszenie patentowe nr P-160342, styczeń 1973.
9. J. Turowski, *Elektrodynamika techniczna*, WNT, Warszawa 1968.
10. J. Turowski, *Metody obliczania pola i parametrów bieżni indukcyjnych silników liniowych*, Rozprawy Elektrot., T. XIX, 3/1973, ss. 371—396.
11. A. J. Woldek, *Indukcionnye magnitogidrodinamičeskije mašiny s židkomietalličeskim rabočim tielom*, Izd. „Energija", Leningrad 1970.

E. MENDRELA

A ROTATING-LINEAR INDUCTION MOTOR WITH A MASSIVE ROTOR

Summary

The paper presents the construction, theory and test results of an induction motor whose massive steel rotor is able to perform translational, rotary and rotary-translational motions. The forces which cause the above-mentioned kinds of motions of the rotor were obtained by generating a running, a revolving and a running-revolving magnetic field in the air-gap. Theoretical considerations of motor work were carried out in a cylindrical co-ordinate system assuming the machine to be infinitely long. A linear load distribution on the surface of the armature has been described as function A_φ; the slip by rotary-translational motion of the rotor has been determined. Using the Maxwell equations the dependences determining the electromagnetic field in the rotor were worked out. The losses of the active power in the rotor have been determined and the electromagnetic forces influencing the rotor have been fixed. The presented theory of the motor has been verified by laboratory examinations, performed on a motor model.

E. MENDRELA

MOTEUR À INDUCTION ROTATIF ET LINÉAIRE À ROTOR MASSIF

Résumé

L'ouvrage présente la construction, la théorie et les résultats des études portant sur un moteur à induction, possédant un rotor massif en acier apte à effectuer des mouvements de translation, de rotation et les deux, conjointement. Les forces qui entraînent ces mouvements sont dues au champ magnétique courant, tournant et les deux ensemble, qui a été produit dans la lame d'air de l'induit.

Les considérations théorétiques sur le fonctionnement du moteur ont été basées sur un système de coordonnées cylindriques en supposant la machine d'une longueur infinie. La fonction A_φ décrit la répartition de la charge linéaire sur la surface de l'induit et désigne le glissement pour le mouvement de rotation et de translation du rotor.

L'équation de Maxwell a permis de déduire les relations qui définissent les champs électromagnétiques dans le rotor. On a aussi déterminé les pertes de puissance active dans le rotor et désigné les forces électromagnétiques qui agissent sur celui-ci. La théorie présentée a été vérifiée par des études effectuées au laboratoire sur un modèle de ce moteur.

E. MENDRELA

DER DREHEND-FORTSCHREITENDE INDUKTIONSMOTOR MIT MASSIVEM LÄUFER

Zusammenfassung

In der Arbeit wurden Aufbau, Theorie und Untesuchungsergebnisse für den Induktionsmotor dargestellt, dessen massiver Stahlläufer fortschreitende, drehende und drehend-fortschreitende Bewegungen machen kann. Die genannten Bewegungsarten des Läufers verursachenden Kräfte wurden durch Erzeugung eines laufenden, drehenden und drehend-laufenden Magnetenfeldes im Nebenankerspalt gewonnen. Die theoretischen Überlegungen bezüglich der Arbeit des Motors wurden im zylindrischen Koordinatensystem unter Voraussetzung einer unendlich langen Maschine durchgeführt.

Mit A_φ wurde die Einteilung der Linienbelastung auf der Oberfläche des Ankers umschrieben; außerdem wurde die Gleichung für die drehend-fortschreitende Bewegung des Ankers bezeichnet. Mit Hilfe Maxwellscher Gleichung wurden die Beziehungen abgeleitet, die das elektromagnetische Feld im Anker

bestimmen. Es wurden auch Verluste der Wirkleistung im Anker und die der auf den Anker einwirkenden elektromagnetischen Kräfte bestimmt. Die hier dargestallte Theorie des Motors wurde mittels Laboruntersuchungen nachgeprüft, die anhand des Motormodells durchgeführt wurden.

Э. МЕНДРЕЛЯ

ИНДУКЦИОННЫЙ ВРАЩАТЕЛЬНО-ЛИНЕЙНЫЙ ДВИГАТЕЛЬ С МАССИВНЫМ РОТОРОМ

Р е з ю м е

В труде рассмотрены конструкция, теория и результаты исследований индукционного двигателя, массивный стальной ротор которого может совершать поступательное, вращательное и вращательно-поступательное движение. Силы, вызывающие указанные виды движения ротора достигнуты путем создания в приякорном зазоре бегущего, вращательного и вращательно-бегущего магнитных полей. Теоретические рассуждения работы двигателя проведены в системе цилиндрических координат при допущении наличия бесконечно длинной машины. Функцией A_φ описано распределение линейной нагрузки на поверхности якоря, а также определено скольжение при вращательно-поступательном движении ротора. На основании уравнений Максвелла выведены зависимости, определяющие электромагнитное поле в роторе. Определены потери активной мощности в роторе, а также электромагнитные силы, действующие на ротор. Предложенная теория двигателя проверена лабораторными исследованиями, произведенными на модели двигателя.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 2, ss. 407—419

621.313.323:621.313.333

Badania nowych modeli asynchronicznych i synchronicznych silników szybkobieżnych prądu przemiennego zwiększonej częstotliwości

TADEUSZ WRÓBEL (WARSZAWA), KAZIMIERZ KOZIEŁ (WARSZAWA), JAN SIENKIEWICZ (WARSZAWA)

Wojskowa Akademia Techniczna

Otrzymano 18.11.1974

Przedstawiono wyniki badań modeli silników szybkobieżnych o prędkości synchronicznej 30 000 obr/min: asynchronicznego klatkowego i synchronicznego histerezowego z uzwojeniem stojana symetrycznym i niesymetrycznym. Opisano specjalnie opracowaną hamownicę histerezową.

1. WSTĘP

W dziedzinie silników szybkobieżnych o prędkości obrotowej rzędu dziesiątek tysięcy obrotów na minutę powstaje szereg nowych problemów, wskazanych w pracach [1], [2], które nie występują w przypadku silników o prędkości obrotowej rzędu kilku tysięcy obrotów na minutę. Ta specyfika jest związana z zachowaniem się silnika przy zasilaniu ze zwiększoną częstotliwością (rzędu setek, a nawet tysięcy herców), jak również z mechanicznymi własnościami silnika przy tak dużej prędkości wirowania.

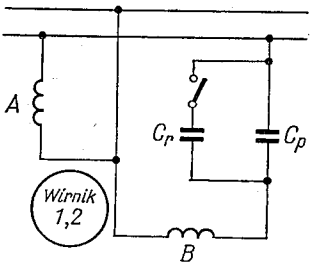
Specjalnego znaczenia nabiera tutaj odpowiednia konstrukcja, przystosowana do pracy przy dużej prędkości obrotowej oraz niektóre zagadnienia technologiczne, takie jak produkcja specjalnych pakietów i uzwojeń, mechaniczna obróbka, wyważanie, ograniczenie hałasu powstającego przy dużej prędkości wirowania.

Celem pracy było wykazanie możliwości wykonania w warunkach krajowych silników szybkobieżnych i opanowania metod ich badania oraz porównanie własności szybkobieżnych silników asynchronicznych klatkowych i synchronicznych histerezowych.

W celu przeprowadzenia badań porównawczych opracowano dwa modele silników szybkobieżnych o synchronicznej prędkości obrotowej $n_s = 30\,000$ obr/min i o identycznym stojanie, z których jeden miał wirnik asynchroniczny klatkowy, zaś drugi — wirnik synchroniczny histerezowy. Oba modele zasilano z indukcyjnej przetwornicy częstotliwości o $f = 500$ Hz. Badano i porównywano zachowanie się obu modeli przy pracy w stanie jałowym i pod obciążeniem. Aby umożliwić właściwy przebieg badań pod obciążeniem, opracowano specjalną hamownicę typu histerezowego o wahliwym stojanie, co okazało się koniecznym przy prędkości obrotowej rzędu 30 000 obr/min.

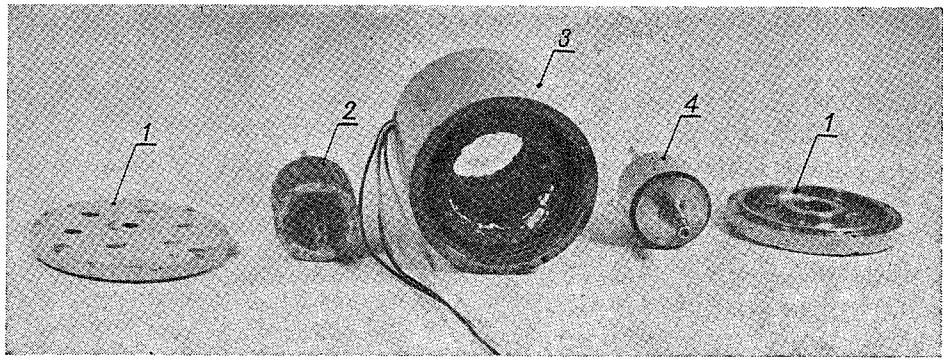
2. MODELE SPECJALNYCH SILNIKÓW SZYBKOBIEŻNYCH

W obu modelach zastosowano uzwojenie stojana dwufazowe, z dwoma kondensatorami w fazie pomocniczej (rys. 1). Potrzeba zastosowania dodatkowego kondensatora rozruchowego, pozwalającego na uzyskanie dużego momentu rozruchowego, przy zachowaniu korzystnych charakterystyk roboczych, wyłoniła się w trakcie badań. Budowę modeli przedstawiono na rys. 2.



Rys. 1. Schemat połączeń uzwojenia stojana modeli silników szybkobieżnych
A — uzwojenie fazy głównej, *B* – uzwojenie fazy pomocniczej

Obliczenia modeli prowadzono metodami konwencjonalnymi opierając się na [3], [4] dla silnika indukcyjnego i [5], [6] dla silnika histerezowego. Przy obliczaniu silnika histerezowego kierowano się również wnioskami wypływającymi z pracy [7].



Rys. 2. Budowa modeli silników szybkobieżnych
1 — tarcza łożyskowa, 2 — wirnik klatkowy, 3 — stojan z uzwojeniem dwufazowym, 4 — wirnik histerezowy

Zastosowany rdzeń stojana ma liczbę żłobków $\dot{Z}_s = 28$, zaś rdzeń wirnika asynchronicznego $\dot{Z}_w = 21$. Żłobki stojana nie mają skosu, natomiast skośne są żłobki wirnika silnika asynchronicznego. Rdzeń stojana i wirnika asynchronicznego wykonano z importowanej blachy wysokokrzemowej o grubości 0,35 mm marki ∋ 44. Przy występującej częstotliwości 500 Hz konieczne było zastosowanie cienkiej blachy wysokokrzemowej.

Podstawowe dane znamionowe przyjęte dla wszystkich modeli są następujące:
— synchroniczna prędkość obrotowa $n_s = 30\,000$ obr/min,
— częstotliwość sieci zasilającej $f = 500$ Hz,
— napięcie znamionowe $U_{zn} = 110$ V,
— praca ciągła.

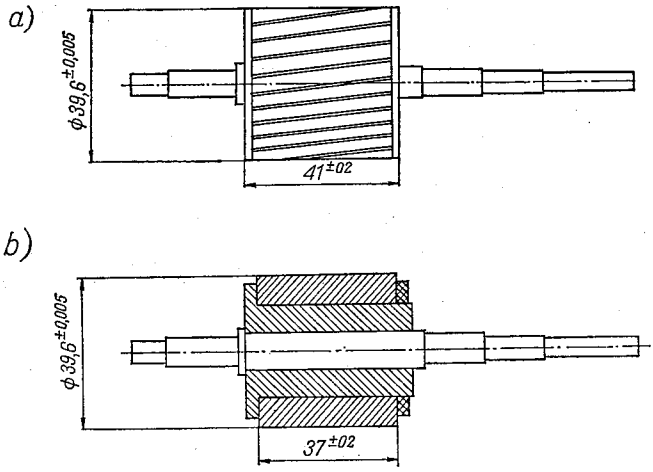
Moc znamionową dla czterech rozpatrzonych w dalszym ciągu wariantów, określoną w trakcie badań, podano w punkcie 4.

Zastosowano uzwojenie stojana dwuwarstwowe. W celu wyeliminowania trzeciej harmonicznej obrano poskok skrócony. Przyjęto poskok:

$$y_1 = \frac{2}{3}\tau_{z1},$$

gdzie τ_{z1} jest podziałką żłobkową stojana.

Liczba zwojów uzwojenia fazy głównej stojana $z_A = 150$, fazy pomocniczej $z_B = 350$; średnica drutu nawojowego fazy głównej $\phi = 0{,}8$ mm zaś fazy pomocniczej $\phi = 0{,}48$ mm. Średnica zewnętrzna stojana wynosi $D_z = 73$ mm, średnica wewnętrzna $D_w = 40$ mm. Ze względu na potrzebę ograniczenia prędkości obwodowej w silnikach szybkobieżnych stosuje się małą średnicę wytoczenia stojana, jednakże przy przesadnie ograniczonej średnicy w silniku dwubiegunowym (stosowanym w celu uzyskania dużej prędkości obrotowej) występowałyby nadmiernie wystające połączenia czołowe.



Rys. 3. Wirniki silników szybkobieżnych
a — klatkowy, b — histerezowy

Bardzo istotny w przypadku silnika szybkobieżnego jest dobór optymalnej wartości szczeliny powietrznej, gdyż ze względów mechanicznych i technologicznych byłaby pożądana duża szczelina powietrzna, która byłaby również korzystna przy półzamkniętych żłobkach w celu ograniczenia zębowych harmonicznych w krzywej pola. Jednakże przy dużej szczelinie powietrznej duży byłby prąd magnesujący i mały współczynnik mocy. Obrano szczelinę powietrzną $\delta = 0{,}2$ mm.

Zastosowano żłobek wirnika silnika asynchronicznego półzamknięty, gdyż przy prędkości obwodowej $v = 61{,}5$ m/s, która występowała przy $n_s = 30\,000$ obr/min jest on wystarczająco pewny wytrzymałościowo. Ponadto przy zastosowanym żłobku półzamkniętym reaktancja rozproszenia jest mniejsza w porównaniu ze żłobkiem zamkniętym i silnik ma lepsze charakterystyki elektromechaniczne. Jednakże ze względów wytrzymałościowych wysokość główki zęba przyjęto większą od stosowanej w konwencjonalnych

silnikach (h = 0,5 mm). Zastosowanie zbyt dużej wartości wysokości główki zęba miałoby niekorzystny wpływ na wartość momentu obrotowego silnika: im głębiej bowiem jest umieszczony pręt wirnika (większe h), tym mniejsza część strumienia głównego sprzężona jest ze żłobkiem, a tym samym mniejszy jest moment obrotowy.

Do badań użyto wirnika z klatką mosiężną o średnicy pręta 2,5 mm. Wyniki przeprowadzonych wcześniej badań silnika o klatce wirnika z konstantanu autorzy opublikowali w [8]. W modelu silnika histerezowego zastosowano wirnik pakietowany z Vicalloyu.

Szkice obu wirników: klatkowego i histerezowego zestawiono na rys. 3. Na rys. 3a widoczny jest skos żłobków wirnika klatkowego. Zastosowano skos żłobka o jedną podziałkę żłobkową wirnika.

3. HAMOWNICA HISTEREZOWA

Jednym z najważniejszych urządzeń wykorzystywanych przy badaniu silników jest urządzenie do ich obciążania. W warunkach laboratoryjnych funkcję tę spełniają w zależności od możliwości technicznych i potrzeb hamulce mechaniczne, elektromagnetyczne i elektrodynamiczne. Zastosowanie ich w badaniach silników elektrycznych jest uzależnione od wymaganej dokładności badań oraz od mocy i prędkości obrotowej. Liczne metody pomiarowe momentu obrotowego stosowane w badaniach maszyn elektrycznych małej mocy przeanalizowano w [9].

W badaniach maszyn elektrycznych o dużej prędkości obrotowej nie mogą być stosowane hamulce mechaniczne z uwagi na intensywne nagrzewanie się powierzchni trących, co powoduje ich zapiekanie i dużą zmienność współczynnika tarcia. Wskazania sił działających są bardzo niestabilne i praktycznie uniemożliwiają pomiary.

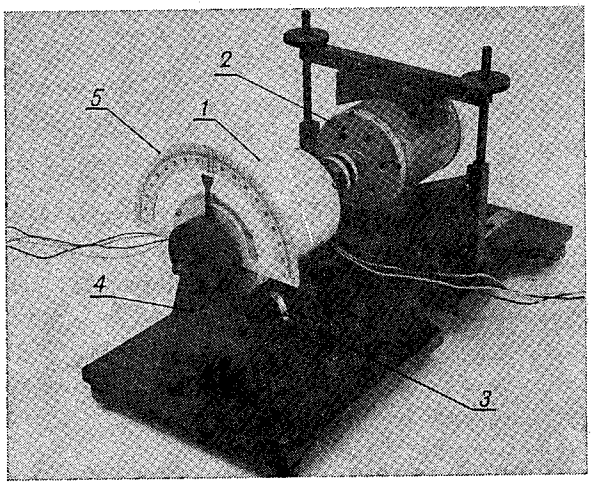
Przy zastosowaniu hamulca elektromagnetycznego kłopoty z odprowadzaniem ciepła nie występują, lecz pomiar siły lub momentu przy dużych prędkościach obrotowych jest bardzo niedokładny z uwagi na trudność określenia momentu wentylatorowego, wynikającego z tarcia wirującej tarczy o powietrze. Jeżeli tarcza jest niezbyt dokładnie wykonana i wyważona, wówczas przy prędkości obrotowej rzędu 30 000 obr/min hamulec zachowuje się jak syrena.

Najbardziej korzystny jest przy dużych prędkościach obrotowych hamulec elektrodynamiczny, przedstawiający sobą prądnicę prądu stałego z obracalnym stojanem. Energia wytwarzana w prądnicy nie zamienia się w niej na ciepło, lecz jest odprowadzana do odbiorników (sieć, rezystory itp.), co przy dużych prędkościach, a przy tym znacznych mocach, ma duże znaczenie. Jednak z uwagi na konstrukcję komutatora i twornika nie jest wskazane stosowanie ich przy prędkościach powyżej 20 000 obr/min. Zastosowanie hamulca asynchronicznego przy takiej prędkości — z uwagi na jego ograniczone możliwości regulacyjne — nie wchodzi w rachubę.

Wspólną wadą hamulca elektromagnetycznego i elektrodynamicznego, wykonanego w oparciu o prądnicę prądu stałego jest to, że przy prędkości równej zeru nie występuje moment hamujący.

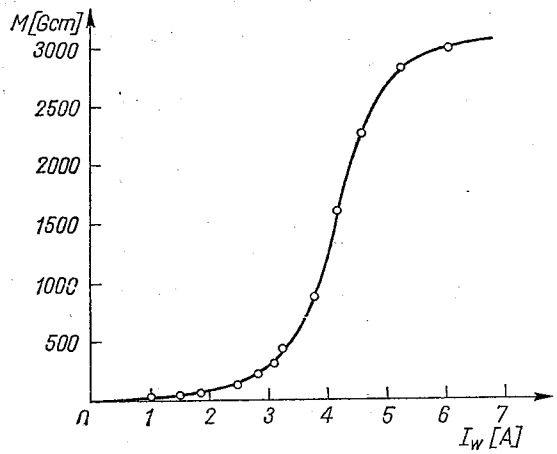
Z wymienionych przyczyn, w celu przeprowadzenia badań opracowanych silników szybkobieżnych o prędkości synchronicznej 30 000 obr/min opracowano nowy typ ha-

mulca elektrodynamicznego, działający w oparciu o zasadę maszyny histerezowej. Hamownicę histerezową pokazano na rys. 4. Ma ona obracalny stojan (1 na rys. 4); tarcze łożyskowe stojana osadzone są w łożyskach, które spoczywają na wspornikach (4 na rys. 4). Dzięki takiej konstrukcji stojan może się obracać, zaś moment hamownicy jest równoważony momentem wytworzonym przez ciężar równoważący 3.



Rys. 4. Hamownica histerezowa
1 — obracalny stojan hamownicy, 2 — silnik badany, 3 — ciężar równoważący, 4 — wspornik, 5 — podziałka

Wartość momentu odczytuje się na przytwierdzonej do tarczy łożyskowej podziałce, dzięki przymocowanej do wspornika wskazówce. Podziałkę wyskalowano w stopniach (60° — 0° — 60°). Wartość momentu określa się z charakterystyk hamownicy. Hamownica histerezowa ma stojan i wirnik identyczny jak silnik badany, zarówno pod względem



Rys. 5. Charakterystyka hamownicy histerezowej

wymiarów pakieru i zastosowanych materiałów konstrukcyjnych jak też i uzwojenia stojana.

Hamownica histerezowa ma tę poważną zaletę, że jej moment obrotowy zależy praktycznie od prądu wzbudzenia i dlatego można go łatwo w sposób ciągły regulować. Moment obrotowy histerezowy, wynikający z własności materiału histerezowego, nie zależy od zakre-

su zmian prędkości obrotowej. Oprócz momentu histerezowego w hamownicy występuje również moment indukcyjny, wywołany przez prądy wirowe, który jest jednak pomijalnie mały z uwagi na dużą rezystancję i cienkie blachy materiału histerezowego (o grubości 0,6 mm).

Zgodnie z [10], w przypadku zasilania uzwojenia stojana silnika histerezowego prądem stałym moment histerezowy określa się z zależności

$$M_h = \frac{1}{2\pi} p \Delta P_h V_h,$$

gdzie:

p — liczba par biegunów,

ΔP_h — stratność materiału histerezowego w Ws/cm^3,

V_h — objętość materiału histerezowego wirnika.

Na rys. 5 przedstawiono zdjętą doświadczalnie charakterystykę opracowanej hamownicy histerezowej $M = f(I_w)$. Uzyskana charakterystyka pokrywa się z obliczeniową. Przebieg momentu hamownicy M w funkcji prądu wzbudzenia I_w jest niezależny od prędkości obrotowej, gdyż w związku z zastosowaniem blachowanego wirnika hamownicy udział prądów wirowych jest nieznaczny.

4. WYNIKI BADAŃ PORÓWNAWCZYCH NOWYCH MODELI SILNIKÓW SZYBKOBIEŻNYCH ASYNCHRONICZNYCH I SYNCHRONICZNYCH

Silniki obciążano za pomocą wyżej opisanej hamownicy histerezowej; prędkość obrotową mierzono za pomocą impulsowego przetwornika fotoelektrycznego, który dzięki tarczy pomiarowej generuje impulsy proporcjonalne do prędkości obrotowej, zliczane przez licznik impulsów.

Przeprowadzono badania silnika asynchronicznego przy niesymetrycznym uzwojeniu stojana (wariant A) i przy symetrycznym uzwojeniu stojana (wariant B). Silnik synchroniczny histerezowy przebadano również przy uzwojeniu stojana symetrycznym (wariant C) i niesymetrycznym (wariant D).

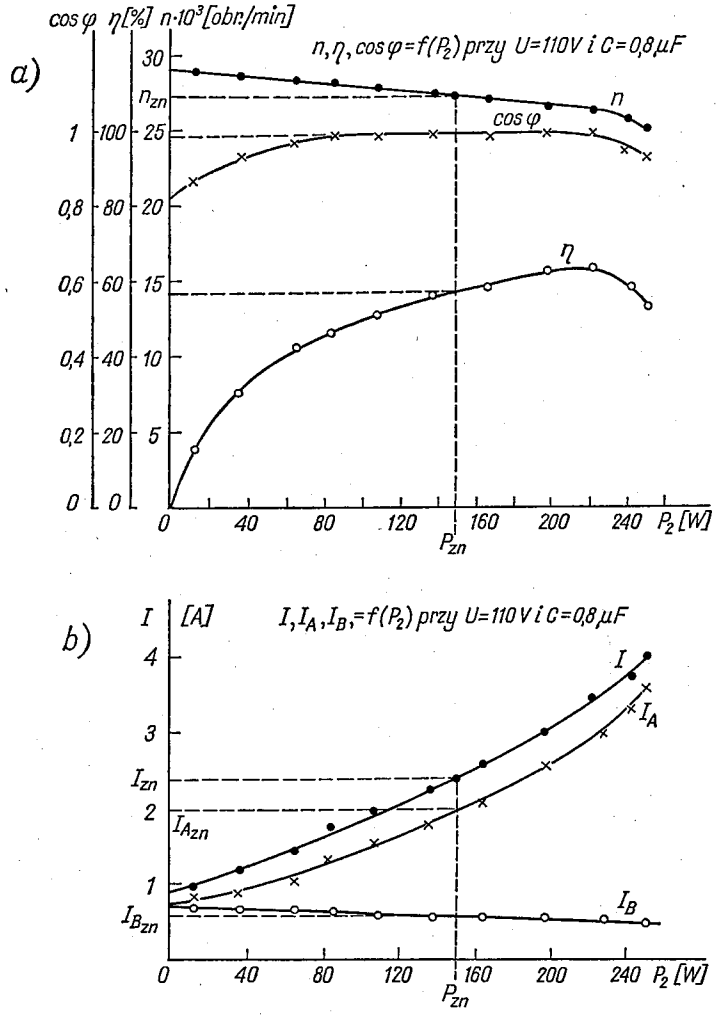
W celu uzyskania korzystnych charakterystyk roboczych a zarazem dużego momentu rozruchowego okazało się celowym zastosowanie dwu kondensatorów w fazie pomocniczej: roboczego i rozruchowego. Wartość pojemności kondensatora C_p dla każdego z wariantów dobierano doświadczalnie. Kierowano się przy tym warunkiem równości przepływów obu uzwojeń, zmieniając C_p skokowo w ten sposób, by uzyskać w każdym wariancie pole magnetyczne wirujące zbliżone do kołowego.

Ponieważ dysponowano dwumaszynową przetwornicą częstotliwości małej mocy z silnikiem asynchronicznym, więc przy obciążaniu silników synchronicznych dużym momentem obserwowano nieznaczne zmniejszanie się ich prędkości obrotowej, nie przekraczające jednak 1%, przy znamionowym obciążeniu.

Poniżej zostaną porównane wyniki badań silników szybkobieżnych we wszystkich czterech wariantach.

A) *Silnik asynchroniczny z niesymetrycznym uzwojeniem stojana*

Rezystancja uzwojenia fazy głównej wynosiła $R_A = 1{,}5\ \Omega$, zaś fazy pomocniczej $R_B = 6{,}9\ \Omega$. Badania przeprowadzono przy dwóch wartościach pojemności: $C_p = 0{,}6\ \mu F$ i $C_p = 0{,}8\ \mu F$. Korzystniejsze charakterystyki zaobserwowano przy $C_p = 0{,}8\ \mu F$ (rys. 6a,b).



Rys. 6. Charakterystyki silnika asynchronicznego z niesymetrycznym uzwojeniem stojana
a — robocze, b — zależności prądów od mocy P_2

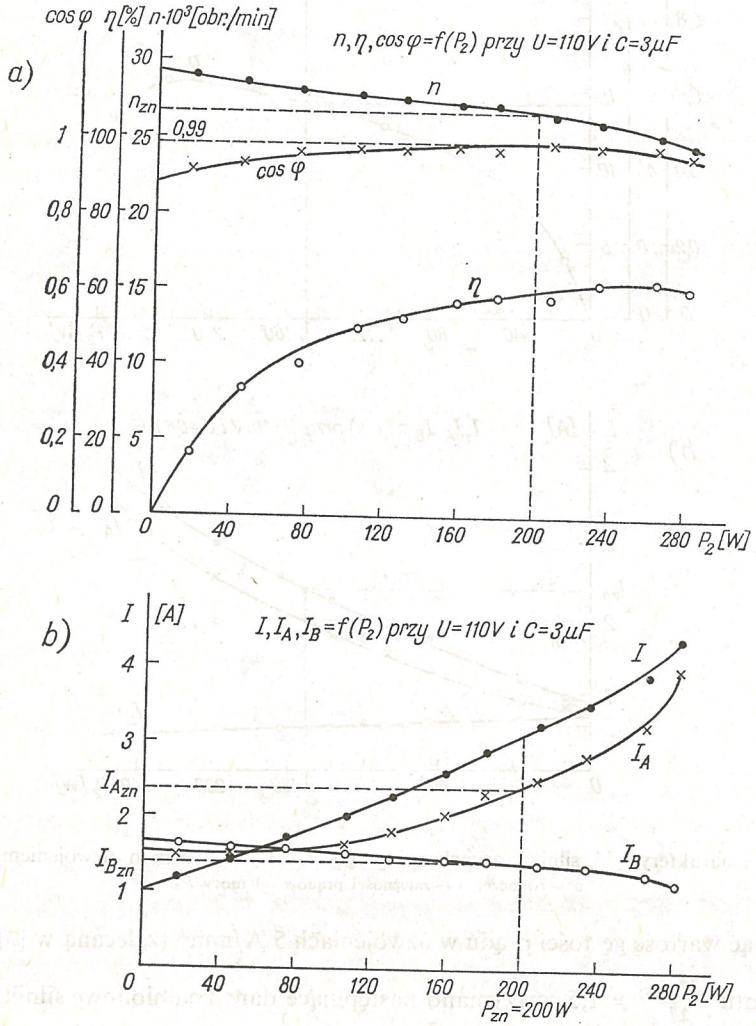
Zakładając wartość gęstości prądu w uzwojeniach 5 A/mm² (zalecaną w [3]) oraz krotność momentu $\frac{M_{max}}{M_{zn}} = 1{,}5$, otrzymano następujące dane znamionowe silnika przy $C_p = 0{,}8\ \mu F$:

— moc znamionowa $P_{zn} = 150$ W,

— znamionowa prędkość obrotowa $n_{zn} = 27\,200$ obr/min (przy częstotliwości zasilania $f = 490$ Hz),
— prąd znamionowy w fazie głównej $I_A = 2$ A,
— prąd znamionowy w fazie pomocniczej $I_B = 0{,}6$ A,
— współczynnik mocy $\cos\varphi = 0{,}99$.

B) *Silnik asynchroniczny z symetrycznym uzwojeniem stojana*

Rezystancja uzwojenia symetrycznego wynosiła: $R_A = R_B = 1{,}76\ \Omega$. Przeprowadzono badania przy pojemności $C_p = 1{,}8\ \mu$F, $C_p = 3\ \mu$F oraz $C_p = 4\ \mu$F. Najkorzystniejsze okazały się charakterystyki przy $C_p = 3\ \mu$F (rys. 7).



Rys. 7. Charakterystyki silnika asynchronicznego o klatce mosiężnej z symetrycznym uzwojeniem stojana
a — robocze, b — zależności prądów od mocy P_2

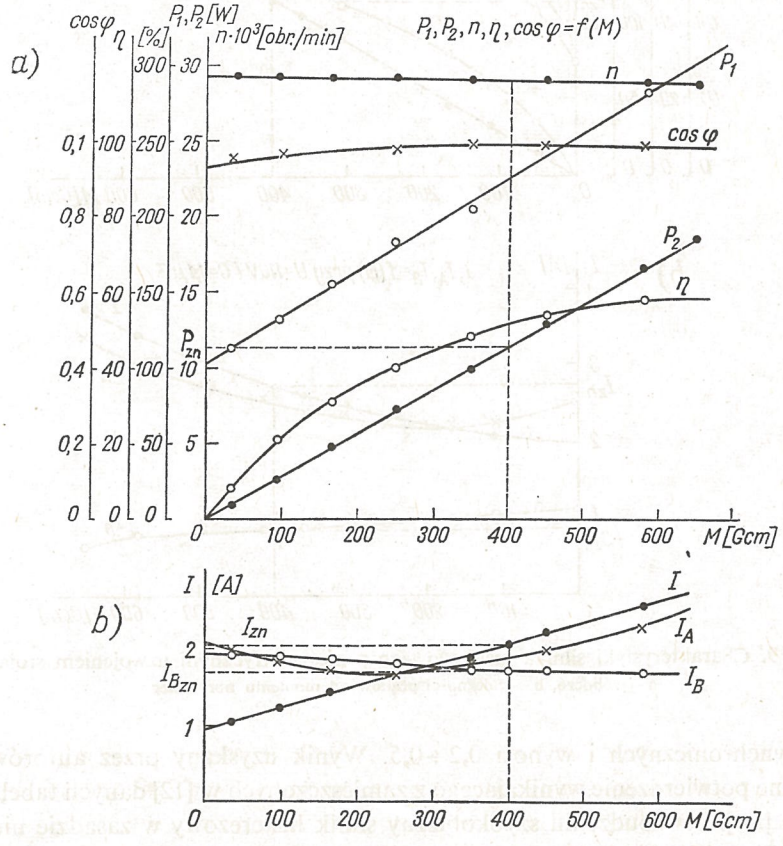
Porównując charakterystyki silnika asynchronicznego z uzwojeniem niesymetrycznym (rys. 6a) i symetrycznym (rys. 7a) można stwierdzić, że zasadnicze różnice nie występują. Sprawność η, współczynnik mocy $\cos\varphi$ oraz prędkość obrotowa n w funkcji mocy na wale P_2 mają zbliżony do siebie przebieg.

Dane znamionowe przy $C_p = 3$ μF: $P_{zn} = 200$ W, $n_{zn} = 27\,000$ obr/min (przy $f = 490$ Hz), $I_A = 2{,}5$ A, $I_B = 1{,}4$ A, $\cos\varphi = 0{,}99$.

C) *Silnik histerezowy z symetrycznym uzwojeniem stojana*

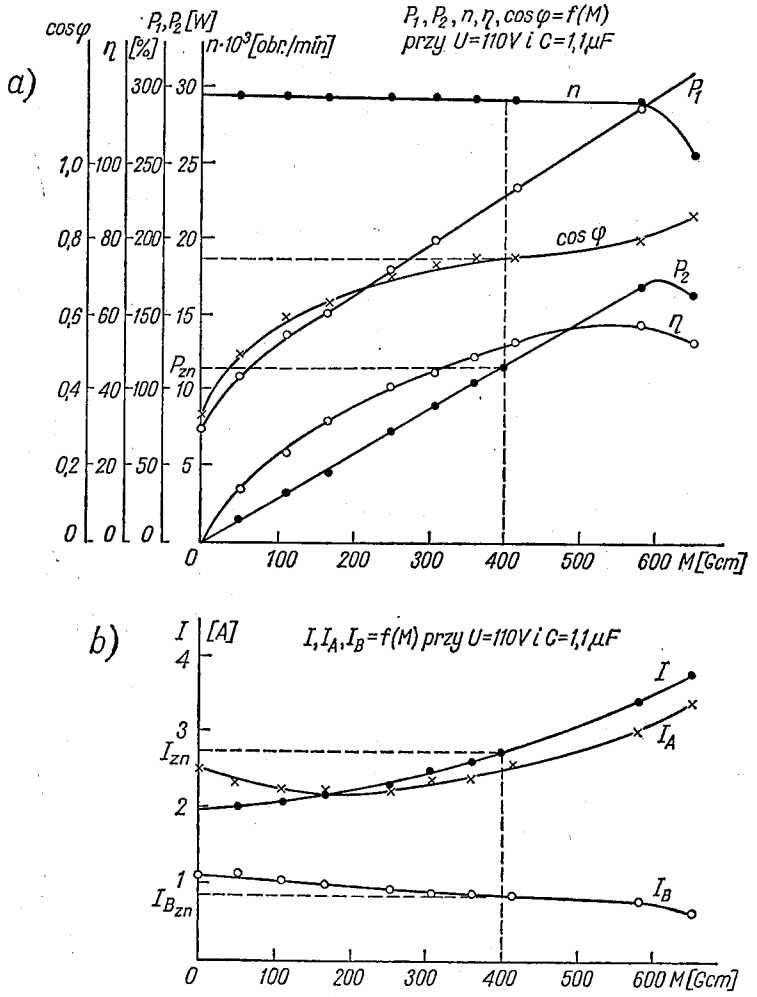
Badania przeprowadzono przy $C_p = 3{,}7$ μF. Charakterystyki robocze: n, P_1, P_2, $\cos\varphi$ oraz $\eta = f(M)$ zdjęte po przewzbudzeniu silnika przedstawiono na rys. 8a, zaś I, I_A oraz $I_B = f(M)$ na rys. 8b. Widoczne na rys. 8a nieznaczne zmniejszenie się prędkości obrotowej przy pracy synchronicznej zostało spowodowane maleniem częstotliwości przetwornicy ze wzrostem obciążenia.

Dane znamionowe silnika przy $C_p = 3{,}7$ μF: $P_{zn} = 115$ W, $I_A = 1{,}9$ A, $I_B = 1{,}7$ A, $\cos\varphi_{zn} = 0{,}99$.



Rys. 8. Charakterystyki silnika histerezowego z symetrycznym uzwojeniem stojana
a — robocze, b — zależności prądów od momentu obrotowego

Z otrzymanych wyników badań jest widoczne, że w przypadku przewzbudzonego szybkobieżnego silnika histerezowego z symetrycznym uzwojeniem stojana o mocy rzędu 100 W współczynnik mocy jest porównywalny z występującym w przypadku silnika asynchronicznego. W literaturze występuje pogląd [11], że wartość współczynnika mocy silników histerezowych o mocy rzędu 100 W dla $f = 50$ Hz jest zdecydowanie mniejsza niż



Rys. 9. Charakterystyki silnika histerezowego z niesymetrycznym uzwojeniem stojana
a — robocze, b — zależności prądów od momentu obrotowego

silników asynchronicznych i wynosi 0,2÷0,5. Wynik uzyskany przez autorów stanowi doświadczalne potwierdzenie wynikającego z zamieszczonych w [12] danych tabelarycznych wniosku, że po przewzbudzeniu szybkobieżny silnik histerezowy w zasadzie nie ustępuje pod względem współczynnika mocy i sprawności silnikowi indukcyjnemu o odpowiadających mu danych.

D) *Silnik histerezowy z niesymetrycznym uzwojeniem stojana*

W celu porównania własności przewzbudzonego silnika histerezowego z uzwojeniem stojana symetrycznym i niesymetrycznym zdjęto dla tego ostatniego przypadku charakterystyki robocze: $n, P_1, P_2, \cos\varphi$ oraz $\eta = f(M)$ (rys. 9), a także charakterystyki I, $I_A, I_B = f(M)$ (rys. 9b).

Przebieg charakterystyk roboczych przy symetrycznym i niesymetrycznym uzwojeniu stojana jest podobny. Silnik z uzwojeniem niesymetrycznym ma mniejszy $\cos\varphi$ i pobiera większy prąd z sieci przy jednakowym momencie na wale.

Dane znamionowe silnika przy $C_p = 1{,}1$ μF: $P_{zn} = 115$ W, $I_A = 2{,}5$ A, $I_B = 0{,}85$ A, $\cos\varphi_{zn} = 0{,}75$.

5. WNIOSKI

Na podstawie dokonanych obliczeń i przeprowadzonych badań można wysnuć następujące wnioski o znaczeniu praktycznym:

1. Badania potwierdziły możliwość produkowania w warunkach krajowych szybkobieżnych silników asynchronicznych — klatkowych i synchronicznych — histerezowych o prędkości synchronicznej 30 000 obr/min.

2. Istniejące metody obliczeniowe pozwalają na prawidłowe zaprojektowanie tych silników, czego dowiodła zgodność wyników pomiarów i obliczeń.

3. Do badania silników przy prędkości obrotowej rzędu 30 000 obr/min konieczne jest zastosowanie specjalnej aparatury pomiarowej przystosowanej do badań przy zwiększonej częstotliwości a w szczególności specjalnej hamownicy.

4. Uzyskane wyniki potwierdziły duże walory hamownicy histerezowej, która okazuje się przydatną do badania silników elektrycznych zarówno przy dużej jak i przy małej prędkości obrotowej, ze względu na występowanie hamującego momentu histerezowego, niezależnego od prędkości wirowania.

5. Stwierdzono, że aby produkować w Polsce szybkobieżne silniki histerezowe o parametrach uzyskanych w trakcie badań, konieczne jest opanowanie produkcji (lub import) materiałów magnetycznie twardych o specjalnych własnościach, gdyż według danych posiadanych przez autorów, w Polsce nie produkuje się stopów histerezowych typu Vicalloy, które powinny mieć zastosowanie w silnikach histerezowych o prędkościach rzędu 30 000 obr/min. Produkowane w kraju stopy typu Cunife mają mniejszy współczynnik wypukłości, stąd sprawność silników wykonanych przy użyciu tych stopów jest mniejsza.

6. W trakcie badań zostało stwierdzone, że przewzbudzony silnik histerezowy o mocy rzędu 100 W z symetrycznym uzwojeniem stojana zasilany z częstotliwością $f = 500$ Hz nie ustępuje w zasadzie pod względem współczynnika mocy i sprawności odpowiedniemu silnikowi asynchronicznemu klatkowemu.

LITERATURA

1. W. S. Szarow, *Swerchwysokoskorostnyje asinchronnyje elektrodwigateli*, G. I, Moskwa — Leningrad 1963.
2. W. S. Szarow, *Wysokoczastotnyje i swerchwysokoskorostnyje elektriczeskije masziny*, Energia, Moskwa 1973.

3. E.M. Łopuchina, G.S. Somichina, *Rasczet asinchronnych mikrodwigatelej odnofaznogo i trechfaznogo toka*, Gosenergoizdat, Moskwa — Leningrad 1961.
4. C.G. Veinott, *Theory and design of small induction motors*, Mc. Graw — Hill, New York — Toronto — London 1959.
5. B.A. Delektorskij, N.Z. Mastjajew, N.N. Orłow, *Projektirowanije giroskopiczeskich elektrodwigatelej*, Maszynostrojenije, Moskwa 1968.
6. H.E. Jeschke, *Der Hysteresemotor*, Elektrotechnik und Maschinenbau, cz. 1 zesz. 17/18 i cz. 2 zesz. 19/20, 1942.
7. J. Owczarek, *Mikrosilnik synchroniczny magnesowany podczas rozruchu*, PWN, Łódź 1968.
8. T. Wróbel, K. Kozieł, J. Sienkiewicz, *Badania porównawcze nowych modeli silników szybkobieżnych asynchronicznych i synchronicznych*, Skróty referatów na sympozjum naukowe „Nowe opracowania w mikromaszynach i napędach elektrycznych ułamkowej mocy", W.A.T., Warszawa 1972.
9. J. Owczarek, *Badania maszyn miniaturowych*, Rozprawy Elektrotechniczne, zesz. 2/1962, s. 207—274.
10. R. Hoffman, H. Jordan, G. Röder, *Die Hysteresekupplung, ein neues und vielseitiges Antriebselement*, ETZ Elektrotechnische Zeitschrift, A, 12/1965, s. 385—390.
11. F.D. Lăzăroiu, *Maşini Electrice de Mică Putere*, Editura Technică, Bucureşti 1965.
12. N.Z. Mastjajew, J.N. Orłow, *Gistierezisnyje dwigateli*, czast'I, Moskwa 1963.

T. WRÓBEL, K. KOZIEŁ, J. SIENKIEWICZ

INVESTIGATIONS OF NEW MODELS OF ASYNCHRONOUS AND SYNCHRONOUS HIGH-SPEED, HIGH FREQUENCY AC MOTORS

Summary

The results of investigations are given, of two models of high-speed motors with 30 000 rpm synchronous speed: asynchronous-squirrel-cage and synchronous-hysteresis with symmetrical and unsymmetrical stator winding. A specially treated hysteresis brake is described.

T. WRÓBEL, K. KOZIEŁ, J. SIENKIEWICZ

ESSAIS DE NOUVEAUX MODÈLES DE MOTEURS RAPIDES ASYNCHRONES ET SYNCHRONES À COURANT ALTERNATIF ET À HAUTE FRÉQUENCE

Résumé

On a présenté les résultats des essais des modèles des moteurs rapides à vitesse de synchronisme de 30 000 tr/min: du moteur asynchrone à cage d'écureil et du moteur synchrone hystérésis au bobinage du stator symétrique et asymétrique. On a donné la description du frein histérésis spécialement conçu.

T. WRÓBEL, K. KOZIEŁ, J. SIENKIEWICZ

UNTERSUCHUNGEN AN NEUEN MODELLEN VON ASYNCHRONISCHEN UND SYNCHRONISCHEN SCHNELLAUFENDEN DREHSTROM-HOCHFREQUENZ--MOTOREN

Zusammenfassung

Es wurden Versuchsergebnisse für schnellaufende Motoren mit synchroner Drehzahl von 30 000 Umdrehungen/min unterbreitet, und zwar für einen asynchronen Kurzschluß-und einen synchronen Hysteresemotor mit synchroner und asynchroner Statorwicklung. Im weiteren wurde eine speziell entwickelte Hysteresenbremse beschrieben.

Т. ВРУБЕЛЬ, К. КОЗЕЛ, Я. СЕНКЕВИЧ

ИСПЫТАНИЯ НОВЫХ МОДЕЛЕЙ АСИНХРОННЫХ И СИНХРОННЫХ СВЕРХВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА ПОВЫШЕННОЙ ЧАСТОТЫ

Р е з ю м е

Представлены результаты испытаний моделей сверхвысокоскоростных электродвигателей синхронной скоростью 30 000 об/мин: асинхронного-короткозамкнутого и синхронного-гистерезисного, с симметрической и несимметрической обмотками статора. Описан специально разработанный тормоз гистерезисного типа.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 2, ss. 421—434

621.317.311.8

Wyznaczanie odbić falowych w udarowym układzie probierczym

STANISŁAW WYDERKA (RZESZÓW)

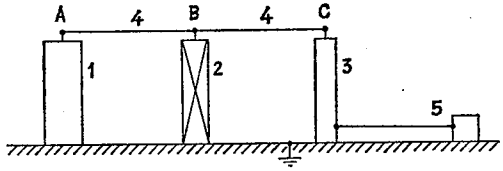
Instytut Elektrotechniki Politechniki Rzeszowskiej

Otrzymano 9.12.1974

W pracy przedstawiono metodę określania wpływu odbić falowych na wyniki pomiarów w udarowym układzie probierczym. Wyprowadzono równania opisujące odbicia falowe w przewodzie łączącym elementy układu probierczego. Podano wzory na obliczanie współczynników tych równań. Rozważania zilustrowano przykładem obliczeniowym.

1. WSTĘP

Spośród wielu problemów pomiarowych w technice prób udarowych jednym z poważniejszych jest problem pomiaru wartości szczytowej udarów (powyżej 1 MV) charakteryzujących się krótkimi czasami do ucięcia (poniżej 0,5 μs) [3], [4], [5]. Układ pomiarowy do przeprowadzania prób udarowych składa się zwykle z generatora udarów, obiektu badanego i dzielnika napięcia, połączonych przewodem doprowadzającym (rys. 1). Po stronie niskonapięciowej dzielnika przyłączona jest aparatura pomiarowa.



Rys. 1. Układ stosowany do prób udarowych *1* — generator udarów, *2* — obiekt badany, *3* — dzielnik napięcia, *4* — przewód doprowadzający, *5* — aparatura pomiarowa

W czasie pomiarów stromych udarów duże wymiary układu probierczego są przyczyną znacznych uchybów. Największy wpływ na dokładność pomiaru ma przewód doprowadzający oraz dzielnik napięcia. W kilkunastometrowym przewodzie doprowadzającym przedstawiającym dla krótkotrwałych udarów linię długą mają miejsce wielokrotne odbicia fal. Wpływ odbić falowych na wyniki pomiarów ujawnił się wyraźnie po wprowadzeniu doskonalszych dzielników napięć udarowych [1].

Przewód doprowadzający łączy ze sobą elementy układu (generator udarów z dzielnikiem napięcia) o innych wartościach impedancji niż jego własna impedancja falowa. Z powodu tych różnic fala napięciowa wytworzona w generatorze przejdzie przez przewód (przy założeniu, że impedancja obiektu badanego jest nieskończenie duża) i na jego końcu odbije się od dzielnika. Z kolei wracając odbije się od generatora i znowu po zmianie

kierunku odbije się od dzielnika itd. Powstające nowe fale po każdym kolejnym odbiciu nakładają się na siebie dając w rezultacie na dzielniku napięcia przebieg różniący się znacznie od przebiegów napięcia na wyjściu generatora i na obiekcie badanym. Dołączona do dzielnika aparatura pomiarowa rejestruje przebieg napięcia występujący na końcu przewodu doprowadzającego. Dla mierzącego natomiast interesujący jest przebieg napięcia w innych punktach tego przewodu (na obiekcie badanym lub na wyjściu generatora).

Coraz wyraźniejsze ujawnianie się wpływu odbić falowych w przewodzie doprowadzającym na wyniki pomiarów, spowodowane doskonaleniem konstrukcji dzielników udarowych, stwarza potrzebę podejmowania prób ich eliminacji. Punktem wyjścia przy opracowywaniu metod zmniejszania wpływu odbić jest ich znajomość tak od strony jakościowej, jak i ilościowej.

Zanim zostaną opracowane skuteczne metody eliminacji wpływu odbić falowych na wyniki pomiarów, znajomość wartości i charakteru zmian tych zakłóceń pozwoli na wyznaczanie odpowiednich poprawek.

2. METODY WYZNACZANIA ODBIĆ FALOWYCH W UKŁADZIE PRZEWÓD-ZIEMIA

Przez wyznaczenie odbić falowych w przewodzie o określonej długości zawieszonym równolegle nad ziemią należy rozumieć określenie zależności napięcia od czasu i odległości mierzonej od jednego z końców przewodu, albo uzyskanie wykresu tej zależności. Spośród możliwych metod realizacji tego zagadnienia na uwagę zasługuje metoda analityczna oraz metoda modelowania analogowego. Metoda modelowania fizycznego budzi pewne zastrzeżenia. Stosując ją należy liczyć się z trudnościami związanymi z ustaleniem wartości parametrów modelu oraz z wpływem elementów pasożytniczych. Konieczna jest zmiana skali wartości parametrów R, L i C oraz zmiana skali czasu.

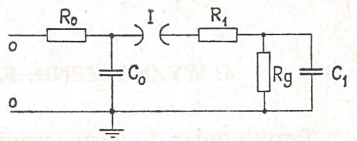
Zagadnienie analitycznego wyznaczania odbić falowych w układzie przewód-ziemia stwarza wiele problemów natury matematycznej. Oparcie rozważań na zasadach rachunku operatorowego wydaje się być w tym wypadku najlepszym wyjściem [6], [8], [9].

Zastosowanie maszyny analogowej (metoda modelowania analogowego) do rozwiązania tego rodzaju zagadnienia wydaje się nie nastręczać większych trudności przy założeniu, że maszyna posiada dostateczną ilość bloków operacyjnych.

3. SCHEMAT ZASTĘPCZY UDAROWEGO UKŁADU PROBIERCZEGO

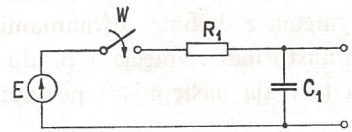
Punktem wyjścia do wyznaczenia zależności opisujących poszczególne odbicia falowe w przewodzie doprowadzającym jest schemat zastępczy udarowego układu probierczego przedstawionego na rys. 1. W schemacie tym można pominąć obiekt badany przy założeniu, że jego impedancja przed wystąpieniem na nim wyładowania zupełnego jest nieskończenie duża. Pominąć można również niskonapięciową aparaturę pomiarową, gdyż małe napięcie wyjściowe dzielnika nie oddziaływuje praktycznie na pracę części wysokonapięciowej układu [3].

Pełne schematy zastępcze generatorów udarów i dzielników napięć stosowanych obecnie są znacznie rozbudowane. Wyznaczenie odbić falowych na podstawie pełnego schematu układu probierczego byłoby bardzo trudne. Należy więc uprościć schematy zastępcze poszczególnych elementów układu do takiego stopnia, żeby można było wyznaczyć zależności charakteryzujące układ rzeczywisty z dopuszczalnym błędem.



Rys. 2. Uproszczony schemat generatora udarów
oo — obwód ładowania generatora, R_o — rezystancja ograniczająca prąd ładowania, C_o — bateria połączonych szeregowo kondensatorów, I — iskiernik kulowy, R_1 — sumaryczna rezystancja tłumiąca (czołowa), R_g — wynikowa rezystancja rozładowująca (grzbietowa), C_1 — wypadkowa pojemność czołowa

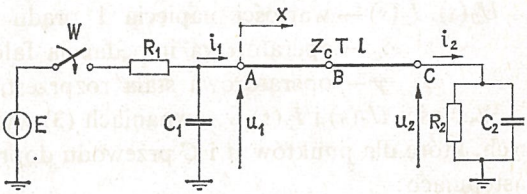
Schemat wielostopniowego generatora udarów można z pewnym uproszczeniem zastąpić schematem generatora jednostopniowego (rys. 2). Przy odpowiednio dobranych elementach C_0, R_1, R_g i C_1 po przeskoku na iskierniku I na rezystancji R_g i pojemności C_1 pojawia się napięcie udarowe o krótkim czasie narastania (rzędu 1 μs) i długim czasie opadania (rzędu dziesiątków mikrosekund). Ze względu na to, że interesują nas tylko udary ucięte na czole, można zastąpić generator udarów układem odtwarzającym tylko czoło udaru (rys. 3). W układzie tym pominięto rezystancję R_g, gdyż jej wartość jest na ogół



Rys. 3. Schemat układu kształtującego czoło udaru
E — bezimpedancyjne źródło napięcia stałego, W — wyłącznik migowy, R_1 i C_1 — elementy kształtujące czoło udaru

znacznie większa od wartości rezystancji R_1 i praktycznie nie ma wpływu na formowanie czoła udaru. Baterię kondensatorów C_0 zastąpiono bezimpedancyjnym źródłem napięcia stałego, a iskiernik wyłącznikiem zamykanym migowo. Takie uproszczenie nie wnosi istotnych zmian, gdyż pojemność baterii C_0 jest co najmniej o rząd wielkości większa od pojemności C_1.

Przewód doprowadzający o długości l zawieszony równolegle nad ziemią lub uziemioną podstawą można traktować jako linię jednorodną, linearną oraz bezstratną [4]. W linii takiej nie występują zniekształcenia impulsów, a jej impedancja falowa ma charakter rzeczywisty.



Rys. 4. Uproszczony schemat zastępczy udarowego układu probierczego
u_1, i_1, u_2, i_2 — wartości chwilowe napięcia i prądu na początku i końcu przewodu doprowadzającego, x — odległość od początku przewodu doprowadzającego, l — długość przewodu doprowadzającego, Z_c — impedancja falowa przewodu doprowadzającego, T — czas przejścia impulsu od punktu A do punktu C

Dzielniki napięć udarowych stosowane obecnie w technice pomiarowej są najczęściej elementami rezystancyjno-pojemnościowymi zbudowanymi w postaci kolumny. Dla wartości napięć rzędu kilku megawoltów wysokość ich wynosi od kilku do kilkunastu metrów. Schemat zastępczy takiego dzielnika przedstawiony jest niekiedy w postaci czwórnika drabinkowego [3], [5]. Ponieważ nie interesują nas uchyby wprowadzane przez sam dziel-

nik, przyjmujemy do rozważań uproszczony schemat zastępczy dzielnika w postaci równolegle połączonej rezystancji i pojemności, uwzględniający jedynie jego parametry wejściowe decydujące o współczynniku odbicia fali napięciowej.

Łącząc razem wszystkie omówione wyżej elementy otrzymamy schemat zastępczy części wysokonapięciowej układu (rys. 4).

4. WYZNACZENIE FAL SKŁADOWYCH W POSTACI OPERATOROWEJ

Przystępując do wyznaczania odbić falowych w przewodzie doprowadzającym bierzemy pod uwagę równania telegrafistów. Przyjmując, że odległość x danego punktu przewodu jest mierzona od początku przewodu (rys. 4), równania te można napisać w postaci:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= Ri(x,t)+L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t},\\ -\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} &= Gu(x,t)+C\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Stosując do obu stron każdego z tych równań przekształcenie Laplace'a, przy założeniu zerowych warunków początkowych, będziemy mieli do czynienia z dwoma równaniami różniczkowymi zwyczajnymi liniowymi odniesionymi do transformat napięcia i prądu, w których zmienną niezależną jest odległość x. Równania te mają następującą postać:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{dU(x,s)}{dx} &= (R+sL)I(x,s),\\ -\frac{dI(x,s)}{dx} &= (G+sC)U(x,s). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Rozwiązanie równań (2) jest ogólnie znane [6], [8], [9] i można przedstawić je następująco:

$$\begin{aligned} U(x,s) &= U_2(s)\operatorname{ch}\gamma(l-x)+Z_cI_2(s)\operatorname{sh}\gamma(l-x),\\ I(x,s) &= U_2(s)\frac{1}{Z_c}\operatorname{sh}\gamma(l-x)+I_2(s)\operatorname{ch}\gamma(l-x), \end{aligned} \tag{3}$$

gdzie:

$U_2(s), I_2(s)$ — wartości napięcia i prądu na końcu przewodu doprowadzającego,

Z_c — operatorowa impedancja falowa przewodu,

γ — operatorowa stała rozprzestrzeniania przewodu.

Wartości $U_2(s)$ i $I_2(s)$ w równaniach (3) wyznaczamy na podstawie warunków brzegowych, które dla punktów A i C przewodu doprowadzającego (rys. 4) można sformułować następująco:

w punkcie A

$$E\frac{\dfrac{1}{R_1C_1}}{s\left(s+\dfrac{1}{R_1C_1}\right)} = U_1(s)+\frac{R_1}{1+sR_1C_1}I_1(s), \tag{4}$$

w punkcie C

$$U_2(s) = \frac{R_2}{1+sR_2C_2} I_2(s). \tag{5}$$

Na podstawie warunków brzegowych (4) i (5) oraz równań (3), w których przyjęto $x = 0$, można wyznaczyć zależności na prąd $I_2(s)$ i napięcie $U_2(s)$. Podstawiając z kolei otrzymane zależności do równań (3) otrzymamy wyrażenia na wartość napięcia i prądu w punkcie x przewodu doprowadzającego. Pierwsze z tych wyrażeń można przedstawić następująco:

$$U(x,s) = E\frac{1}{R_1C_1} \cdot \frac{1}{s\left(s+\frac{1}{R_1C_1}\right)} \times$$
$$\times \frac{\frac{R_2}{1+sR_2C_2}\operatorname{ch}\gamma(l-x)+Z_c\operatorname{sh}\gamma(l-x)}{\left(\frac{R_1}{1+sR_1C_1}+\frac{R_2}{1+sR_2C_2}\right)\operatorname{ch}\gamma l+\left[Z_c+\frac{R_1R_2}{Z_c(1+sR_1C_1)(1+sR_2C_2)}\right]\operatorname{sh}\gamma l}. \tag{6}$$

Jedną z dróg prowadzących do znalezienia odpowiednika zależności (6) w polu rzeczywistym jest rozłożenie jej na wyrazy odpowiadające falom biegnącym wzdłuż przewodu [8].

Przedstawiając funkcje hiperboliczne przy pomocy funkcji wykładniczych można przekształcić zależność (6) do postaci:

$$U(x,s) = Ek_0\frac{1}{s(s+k_0)} \cdot \frac{k_0+s}{a_1+s} \cdot \frac{e^{-\gamma x}+\frac{b_2-s}{a_2+s}e^{-\gamma(2l-x)}}{1-\frac{(b_1-s)(b_2-s)}{(a_1+s)(a_2+s)}e^{-2\gamma l}}, \tag{7}$$

gdzie:

$$k_0 = \frac{1}{R_1C_1}, \quad a_1 = \frac{R_1+Z_c}{R_1C_1Z_c}, \quad a_2 = \frac{R_2+Z_c}{R_2C_2Z_c}, \quad b_1 = \frac{R_1-Z_c}{R_1C_1Z_c}, \quad b_2 = \frac{R_2-Z_c}{R_2C_2Z_c}.$$

Uwzględniając, że:

$$\gamma = s\sqrt{LC} = \frac{s}{\omega}, \quad T = \frac{l}{\omega}, \quad \frac{x}{l}T = \frac{x}{\omega}$$

i rozwijając ostatni czynnik wyrażenia (7) w szereg można otrzymać następującą postać operatorową równania napięcia w przewodzie doprowadzającym:

$$U(x,s) = Ek_0\frac{1}{s(a_1+s)}\left[e^{-sT\frac{x}{l}}+\frac{b_2-s}{a_2+s}e^{-sT\left(2-\frac{x}{l}\right)}+\frac{(b_1-s)(b_2-s)}{(a_1+s)(a_2+s)}e^{-sT\left(2+\frac{x}{l}\right)}+\right.$$
$$+\frac{(b_1-s)(b_2-s)^2}{(a_1+s)(a_2+s)^2}e^{-sT\left(4-\frac{x}{l}\right)}+\frac{(b_1-s)^2(b_2-s)^2}{(a_1+s)^2(a_2+s)^2}e^{-sT\left(4+\frac{x}{l}\right)}+$$
$$\left.+\frac{(b_1-s)^2(b_2-s)^3}{(a_1+s)^2(a_2+s)^3}e^{-sT\left(6-\frac{x}{l}\right)}+\ldots\right]. \tag{8}$$

Pierwszy składnik wyrażenia w nawiasie wraz z czynnikiem stojącym przed nawiasem stanowi równanie fali podstawowej. Następne składniki tego wyrażenia mnożone przez czynnik stojący przed nawiasem stanowią równania fal składowych wynikających z kolejnych odbić: pierwszego (w punkcie C), drugiego (w punkcie A), trzeciego (w punkcie C) itd.

5. POSTACIE CZASOWE FAL SKŁADOWYCH

Istnieje wiele metod poszukiwania oryginału funkcji na podstawie jej obrazu (postaci operatorowej), np. przez zastosowanie twierdzenia o przekształceniu odwrotnym lub pośrednio przez rozkład funkcji operatorowej na ułamki proste. Jedna z metod oparta jest na twierdzeniu mówiącym, że oryginał funkcji jest równy sumie residuów danej funkcji operatorowej [7].

Uzyskane przy zastosowaniu tej metody równania czasowe fali podstawowej oraz fal związanych z kolejnymi odbiciami przedstawiają się następująco:
dla fali podstawowej

$$u_0(x,t) = \left[D_o + G_{oo} e^{-a_1\left(t - T\frac{x}{l}\right)}\right] 1\left(t - T\frac{x}{l}\right),$$

dla fali związanej z pierwszym odbiciem

$$u_1(x,t) = \left\{D_1 + G_{10} e^{-a_1\left[t - T\left(2 - \frac{x}{l}\right)\right]} + H_{10} e^{-a_2\left[t - T\left(2 - \frac{x}{l}\right)\right]}\right\} 1\left[t - T\left(2 - \frac{x}{l}\right)\right],$$

dla fali związanej z drugim odbiciem

$$u_2(x,t) = \left\{D_2 + G_{20} e^{-a_1\left[t - T\left(2 + \frac{x}{l}\right)\right]} + G_{21}\left[t - T\left(2 + \frac{x}{l}\right)\right] e^{-a_1\left[t - T\left(2 + \frac{x}{l}\right)\right]} + \right.$$

$$\left. + H_{20} e^{-a_2\left[t - T\left(2 + \frac{x}{l}\right)\right]}\right\} 1\left[t - T\left(2 + \frac{x}{l}\right)\right]$$

itd. Ogólnie dla dowolnego kolejnego odbicia nieparzystego (od dzielnika) o numerze α zależność czasowa napięcia fali składowej związanej z tym odbiciem przedstawia się następująco:

$$u_\alpha(x,t) = \left\{D_\alpha + \sum_{i=0}^{\frac{\alpha-1}{2}} G_{\alpha i}\left[t - \left(\alpha + 1 - \frac{x}{l}\right)T\right]^i e^{-a_1\left[t - \left(\alpha+1-\frac{x}{l}\right)T\right]} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{\frac{\alpha-1}{2}} H_{\alpha i}\left[t - \left(\alpha + 1 - \frac{x}{l}\right)T\right]^i e^{-a_2\left[t - \left(\alpha+1-\frac{x}{l}\right)T\right]}\right\} 1\left[t - \left(\alpha + 1 - \frac{x}{l}\right)T\right], \qquad (9)$$

gdzie:

$$\alpha = 1, 3, 5, \ldots, \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Podobnie dla dowolnego kolejnego odbicia parzystego (od generatora) o numerze β:

$$u_\beta(x,t) = \left\{ D_\beta + \sum_{i=0}^{\frac{\beta}{2}} G_{\beta i}\left[t-\left(\beta+\frac{x}{l}\right)T\right]^i e^{-a_1\left[t-\left(\beta+\frac{x}{l}\right)T\right]} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{\frac{\beta}{2}-1} H_{\beta i}\left[t-\left(\beta+\frac{x}{l}\right)T\right]^i e^{-a_2\left[t-\left(\beta+\frac{x}{l}\right)T\right]} \right\} 1\left[t-\left(\beta+\frac{x}{l}\right)T\right], \qquad (10)$$

gdzie:

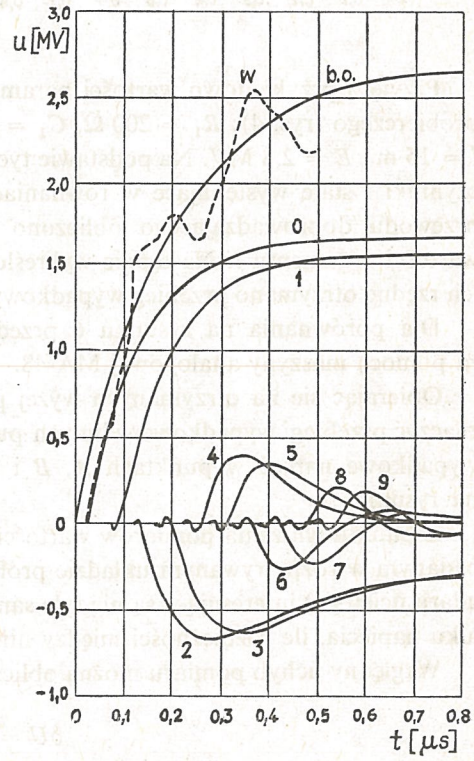
$$\beta = 0, 2, 4, 6, \ldots, \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Zależność (10) słuszna jest również dla fali podstawowej ($\beta = 0$).

Zależności na współczynniki: D_α, D_β, $G_{\alpha i}$, $H_{\alpha i}$, $G_{\beta i}$, $H_{\beta i}$ (patrz: Dodatek) są kombinacją parametrów rozważanego układu. Są one proste dla pierwszych odbić, natomiast dla dalszych komplikują się znacznie.

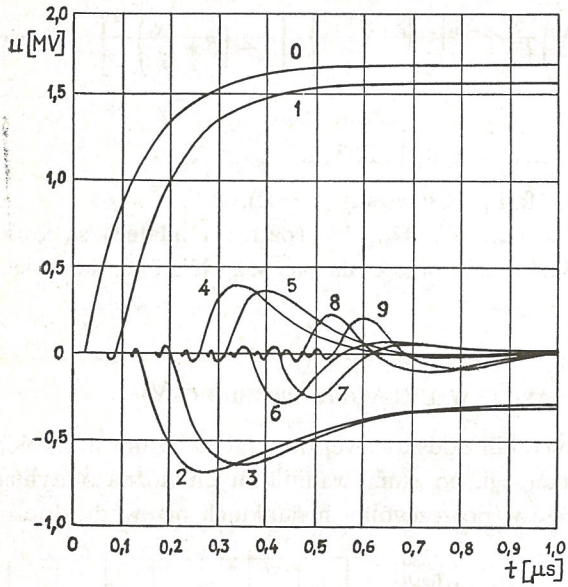
6. PRZEBIEGI WYNIKOWE NAPIĘĆ W UKŁADZIE PROBIERCZYM

W oparciu o zależności czasowe napięć fali podstawowej oraz fal związanych z kolejnymi odbiciami można wykreślić ich przebiegi, po zsumowaniu których można otrzymać wykresy wypadkowych przebiegów napięć w poszczególnych punktach przewodu doprowadzającego.



Rys. 5. Przebiegi fal składowych i przebieg wypadkowy w punkcie B przewodu doprowadzającego
0 — przebieg podstawowy, *1*, *2*, ..., *9* — przebiegi związane z kolejnymi odbiciami, *w* — przebieg wypadkowy, *b. o.* — przebieg bez odbić

wadzającego. W celu otrzymania wykresów przebiegów wypadkowych w dowolnym punkcie przewodu doprowadzającego, zawartych w interesującym nas przedziale czasu równym 0,5 μs licząc od momentu pojawienia się impulsu w punkcie A przewodu doprowadzającego o długości 15 m, wystarczy wyliczyć i zsumować razem przebieg podstawowy oraz przebiegi związane z dziewięcioma pierwszymi odbiciami.



Rys. 6. Przebiegi fal składowych w punkcie B przewodu doprowadzającego, wyznaczone za pomocą maszyny analogowej MA-48
0 — przebieg podstawowy, *1, 2, ..., 9* — przebiegi związane z kolejnymi odbiciami

Przyjęto przykładowo wartości parametrów schematu zastępczego udarowego układu probierczego (rys. 4): $R_1 = 200\ \Omega$, $C_1 = 1$ nF, $Z_c = 300\ \Omega$, $R_2 = 10$ kΩ, $C_2 = 0{,}03$ nF, $l = 15$ m i $E = 2{,}8$ MV. Na podstawie tych wartości parametrów układu obliczono współczynniki i stałe występujące w równaniach (9) i (10). Z kolei dla punktu $B(x = 0{,}5\ l)$ przewodu doprowadzającego obliczono wartości poszczególnych równań dla szeregu wartości argumentu t. Następnie wykreślono przebiegi napięć fal składowych, a sumując ich rzędne otrzymano przebieg wypadkowy napięcia w punkcie B (rys. 5).

Dla porównania na rysunku 6 przedstawiono przebiegi fal składowych otrzymane za pomocą maszyny analogowej MA-48.

Opierając się na otrzymanych wyżej przebiegach napięć fal składowych można wyznaczyć przebiegi wypadkowe w innych punktach przewodu doprowadzającego. Przebiegi wypadkowe napięć w punktach A, B i C przewodu doprowadzającego przedstawiono na rysunku 7.

Z punktu widzenia pomiarów wartości napięcia w określonej chwili czasu na obiekcie badanym w rozpatrywanym układzie probierczym (np. przy pomiarze wartości szczytowej udaru uciętego) interesujące są nie tyle same przebiegi napięć na obiekcie badanym i dzielniku napięcia, ile rozbieżności między nimi decydujące o wartości uchybu pomiarowego.

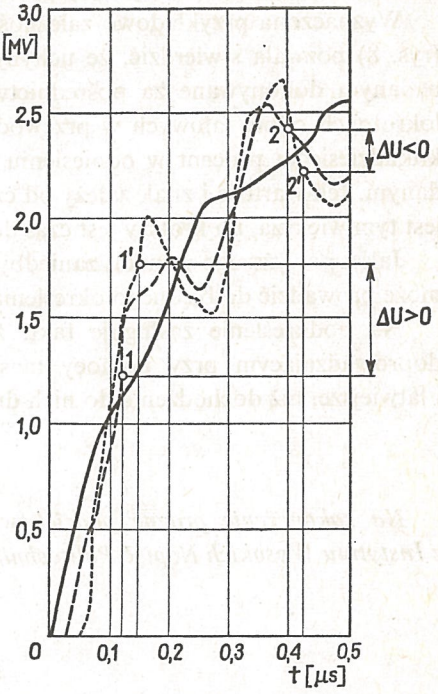
Względny uchyb pomiaru można obliczyć na podstawie następującej zależności:

$$\delta U = \frac{U_C - U_B}{U_B},$$

gdzie:

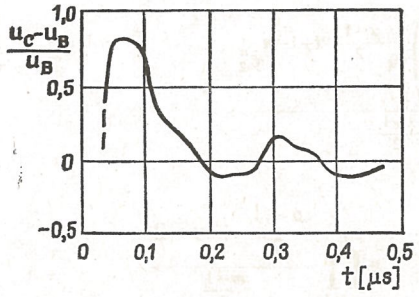
U_B — wartość szczytowa udaru uciętego na obiekcie badanym (wartość rzeczywista),

U_C — wartość szczytowa udaru uciętego na obiekcie badanym zmierzona na wejściu dzielnika.



Rys. 7. Przebiegi wypadkowe w przewodzie doprowadzającym
w punkcie *A* — linia ciągła, w punkcie *B* — linia przerywana, w punkcie *C* — linia kropkowa

Przy odczytywaniu wartości U_B i U_C z wykresów przebiegów napięć na obiekcie badanym i dzielniku należy uwzględnić opóźnienie czasowe między tymi przebiegami, np. punktom 1 i 2 przebiegu napięcia na obiekcie badanym (rys. 7) odpowiadają punkty odpowiednio 1′ i 2′ przebiegu napięcia na dzielniku.



Rys. 8. Przebieg uchybu pomiarowego w zależności od czasu do ucięcia udaru

Zależność względnego uchybu pomiaru od czasu do ucięcia dla powyższego przykładu podano na rysunku 8.

7. WNIOSKI

Analizowany układ probierczy napięć udarowych jest w stosunku do układu rzeczywistego znacznie uproszczony. Mimo tego otrzymane wyniki obliczeń charakteryzują układ rzeczywisty wystarczająco wiernie. Fakt ten potwierdzają obserwacje przebiegów na modelu fizycznym układu o takich samych wartościach parametrów jakie przyjęto do obliczeń.

Wyznaczona przykładowo zależność względnego uchybu pomiaru od czasu do ucięcia (rys. 8) pozwala stwierdzić, że uchyby jakimi obarczone są pomiary napięć na obiekcie badanym dokonywane za pośrednictwem dzielnika napięciowego, a wynikające z wielokrotnych odbić falowych w przewodzie doprowadzającym, są rzędu kilkunastu a nawet kilkudziesięciu procent w odniesieniu do rzeczywistych wartości napięć na obiekcie badanym. Ich wartość i znak zależy od czasu do ucięcia udaru. Wartość uchybu względnego jest tym większa, im krótszy jest czas do ucięcia.

Jak z powyższego wynika, zaniedbywanie wpływu odbić falowych na wyniki pomiarów może prowadzić do błędnego określenia wytrzymałości udarowej obiektu badanego.

Na podkreślenie zasługuje fakt, że wyznaczanie przebiegów napięć w przewodzie doprowadzającym przy pomocy maszyny analogowej jest nieporównywalnie prostsze i łatwiejsze, niż dochodzenie do nich drogą obliczeniową.

Na zakończenie pragnę podziękować Panu doc. drowi Ryszardowi Krawczyńskiemu z Instytutu Wysokich Napięć Politechniki Warszawskiej za udzielenie cennych uwag.

Dodatek

Zależności na współczynniki w równaniach fal składowych

Współczynniki $D_\alpha, G_{\alpha i}, H_{\alpha i}$ w równaniu (9):

$$D_\alpha = \frac{1}{b_1}\left(\frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}, \quad \text{gdzie: } \alpha = 1, 3, 5, \ldots;$$

$$G_{\alpha i} = (-1)^{\frac{\alpha+1}{2}+i} Ek_o \left\{ \frac{\sum_{n=i+1}^{\frac{\alpha+1}{2}} \binom{\frac{\alpha+1}{2}}{n} \binom{\frac{\alpha-1}{2}}{n-i-1} c_1^{\frac{\alpha-1}{2}+i+1-n} c_2^n}{i! a_1 (a_2-a_1)^{\frac{\alpha+1}{2}}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=3}^{\frac{\alpha+1}{2}} \frac{\sum_{n=j+i}^{\frac{\alpha+1}{2}} \binom{\frac{\alpha+1}{2}}{n} \binom{\frac{\alpha-1}{2}}{n-j-i} c_1^{\frac{\alpha-1}{2}+i+j-n} c_2^n \prod_{m=3}^{j} \frac{\frac{\alpha+1}{2}+m-2}{2^{\frac{m-1}{2}}}}{a_1^{\frac{j+1}{2}} (a_2-a_1)^{\frac{\alpha+j}{2}}} + \right.$$

$$+\sum_{k=2}^{\frac{\alpha+1}{2}}\frac{\sum_{n=k+i}^{\frac{\alpha+1}{2}}\binom{\frac{\alpha+1}{2}}{n}\binom{\frac{\alpha-1}{2}}{n-k-i}c_1^{\frac{\alpha-1}{2}+i+k-n}c_2^n\prod_{m=1}^{2k-3}\left[\left(\frac{\alpha+1}{2}+m\right)a_1-\frac{m+1}{2}a_2\right]}{i!(k-1)!a_1^k(a_2-a_1)^{\frac{\alpha-1}{2}+k}}+$$

$$+\left.\sum_{k=4}^{\frac{\alpha+1}{2}}\frac{\sum_{n=k+i}^{\frac{\alpha+1}{2}}\binom{\frac{\alpha+1}{2}}{n}\binom{\frac{\alpha-1}{2}}{n-k-i}c_1^{\frac{\alpha-1}{2}+i+k-n}c_2^n\sum_{j=1}^{2k-5}\frac{\left(\frac{\alpha+1}{2}+j\right)\left(k-\frac{j+3}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha+1}{2}+j\right)a_1-\frac{j+1}{2}a_2}\times\prod_{m=1}^{2k-5}\left[\left(\frac{\alpha+1}{2}+m\right)a_1-\frac{m+1}{2}a_2\right]}{i!(k-1)!a_1^{k-1}(a_2-a_1)^{\frac{\alpha-3}{2}+k}}\right\},$$

gdzie:

$c_1=b_1+a_1$, $c_2=b_2+a_1$, $\alpha=1, 3, 5, \ldots$, $i=0, 1, 2, 3, \ldots$,
$n=1, 2, 3, \ldots$, $j=1, 3, 5, \ldots$, $m=1, 3, 5, \ldots$, $k=1, 2, 3, \ldots$;

$$H_{\alpha i}=(-1)^{\frac{\alpha+1}{2}+i}Ek_o\left\{\frac{\sum_{n=i+1}^{\frac{\alpha+1}{2}}\binom{\frac{\alpha+1}{2}}{n}\binom{\frac{\alpha-1}{2}}{n-i-1}d_1^{\frac{\alpha-1}{2}+i+1-n}d_2^n}{i!a_2(a_1-a_2)^{\frac{\alpha+1}{2}}}+\right.$$

$$+\sum_{j=3}^{\frac{\alpha+1}{2}}\frac{\sum_{n=j+i}^{\frac{\alpha+1}{2}}\binom{\frac{\alpha+1}{2}}{n}\binom{\frac{\alpha-1}{2}}{n-j-i}d_1^{\frac{\alpha-1}{2}+i+j-n}d_2^n\prod_{m=3}^{j}\frac{\frac{\alpha+1}{2}+m-2}{2^{\frac{m-1}{2}}}}{a_2^{\frac{j+1}{2}}(a_1-a_2)^{\frac{\alpha+j}{2}}}+$$

$$+\sum_{k=2}^{\frac{\alpha+1}{2}}\frac{\sum_{n=k+i}^{\frac{\alpha+1}{2}}\binom{\frac{\alpha+1}{2}}{n}\binom{\frac{\alpha-1}{2}}{n-k-i}d_1^{\frac{\alpha-1}{2}+i+k-n}d_2^n\prod_{m=1}^{2k-3}\left[\left(\frac{\alpha+1}{2}+m\right)a_2-\frac{m+1}{2}a_1\right]}{i!(k-1)!a_2^k(a_1-a_2)^{\frac{\alpha-1}{2}+k}}+$$

$$+\left.\sum_{k=4}^{\frac{\alpha+1}{2}}\frac{\sum_{n=k+i}^{\frac{\alpha+1}{2}}\binom{\frac{\alpha+1}{2}}{n}\binom{\frac{\alpha-1}{2}}{n-k-i}d_1^{\frac{\alpha-1}{2}+i+k-n}d_2^n\sum_{j=1}^{2k-5}\frac{\left(\frac{\alpha+1}{2}+j\right)\left(k-\frac{j+3}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha+1}{2}+j\right)a_2-\frac{j+1}{2}a_1}\times\prod_{m=1}^{2k-5}\left[\left(\frac{\alpha+1}{2}+m\right)a_2-\frac{m+1}{2}a_1\right]}{i!(k-1)!a_2^{k-1}(a_1-a_2)^{\frac{\alpha-3}{2}+k}}\right\},$$

gdzie:

$d_1 = b_1 + a_2$, $d_2 = b_2 + a_2$, $\alpha = 1, 3, 5, \ldots$, $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$,
$n = 1, 2, 3, \ldots$, $j = 1, 3, 5, \ldots$, $m = 1, 3, 5, \ldots$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Współczynniki D_β, $G_{\beta i}$, $H_{\beta i}$ w równaniu (10):

$$D_\beta = \frac{1}{a_1}\left(\frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}\right)^{\frac{\beta}{2}}, \quad \text{gdzie: } \beta = 0, 2, 4, 6, \ldots;$$

$$G_{\beta i} = (-1)^{\frac{\beta}{2}+i+1} Ek_o \left\{ \frac{\sum_{n=i}^{\frac{\beta}{2}} \binom{\frac{\beta}{2}}{n}\binom{\frac{\beta}{2}}{n-i} c_1^{\frac{\beta}{2}+i-n} c_2^n}{i! a_1 (a_2-a_1)^{\frac{\beta}{2}}} + \right.$$

$$+ \sum_{j=2}^{\frac{\beta}{2}} \frac{\sum_{n=j+i}^{\frac{\beta}{2}} \binom{\frac{\beta}{2}}{n}\binom{\frac{\beta}{2}}{n-j-i} c_1^{\frac{\beta}{2}+i+j-n} c_2^n \prod_{m=2}^{j} \frac{\frac{\beta}{2}+m-1}{2^{\frac{m}{2}}}}{i! a_1^{\frac{j}{2}+1} (a_2-a_1)^{\frac{j}{2}+\frac{\beta}{2}}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\frac{\beta}{2}} \frac{\sum_{n=k+i}^{\frac{\beta}{2}} \binom{\frac{\beta}{2}}{n}\binom{\frac{\beta}{2}}{n-k+i} c_1^{\frac{\beta}{2}+k+i-n} c_2^n \prod_{r=1}^{2k-1} \left[\left(\frac{\beta}{2}+r\right)a_1 - \frac{r+1}{2}a_2\right]}{i! k! a_1^{k+1} (a_2-a_1)^{\frac{\beta}{2}+k}} +$$

$$\left. + \sum_{k=3}^{\frac{\beta}{2}} \frac{\sum_{n=k+i}^{\frac{\beta}{2}} \binom{\frac{\beta}{2}}{n}\binom{\frac{\beta}{2}}{n-k+i} c_1^{\frac{\beta}{2}+k+i-n} c_2^n \sum_{p=1}^{2k-3} \frac{\left(\frac{\beta}{2}+p\right)\left(k-\frac{p+1}{2}\right)}{\left(\frac{\beta}{2}+p\right)a_1 - \frac{p+1}{2}a_2} \times \prod_{r=1}^{2k-3} \left[\left(\frac{\beta}{2}+r\right)a_1 - \frac{r+1}{2}a_2\right]}{i! k! a_1^k (a_2-a_1)^{\frac{\beta}{2}+k-1}} \right\},$$

gdzie:

$c_1 = b_1 + a_1$, $c_2 = b_2 + a_1$, $\beta = 0, 2, 4, 6, \ldots$, $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$,
$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $j = 2, 4, 6, \ldots$, $m = 2, 4, 6, \ldots$, $k = 1, 2, 3, \ldots$,
$p = 1, 3, 5, \ldots$, $r = 1, 3, 5, \ldots$;

$$H_{\beta i} = (-1)^{\frac{\beta}{2}+i} Ek_o \left\{ \frac{\sum_{n=i+1}^{\frac{\beta}{2}} \binom{\frac{\beta}{2}}{n}\binom{\frac{\beta}{2}}{n-i-1} d_1^{\frac{\beta}{2}+i+1-n} d_2^n}{i! a_2 (a_1-a_2)^{\frac{\beta}{2}+1}} + \right.$$

$$+\sum_{j=2}^{\frac{\beta}{2}}\frac{\sum_{n=j+i+1}^{\frac{\beta}{2}}\binom{\frac{\beta}{2}}{n}\binom{\frac{\beta}{2}}{n-j-i-1}d_1^{\frac{\beta}{2}+i+j+1-n}d_2^n\prod_{m=2}^{j}\frac{\frac{\beta}{2}+m}{2^{\frac{m}{2}}}}{i!\,a_2^{\frac{j}{2}+1}(a_1-a_2)^{\frac{\beta+j}{2}+1}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\frac{\beta}{2}}\frac{\sum_{n=k+i+1}^{\frac{\beta}{2}}\binom{\frac{\beta}{2}}{n}\binom{\frac{\beta}{2}}{n-k+i+1}d_1^{\frac{\beta}{2}+k+i+1-n}d_2^n\prod_{r=1}^{2k-1}\left[\left(\frac{\beta}{2}+r+1\right)a_2-\frac{r+1}{2}a_1\right]}{i!\,k!\,a_2^{k+1}(a_1-a_2)^{\frac{\beta}{2}+k+1}}+$$

$$+\sum_{k=3}^{\frac{\beta}{2}}\frac{\sum_{n=k+i+1}^{\frac{\beta}{2}}\binom{\frac{\beta}{2}}{n}\binom{\frac{\beta}{2}}{n-k+i+1}d_1^{\frac{\beta}{2}+k+i+1-n}d_2^n\sum_{p=1}^{2k-3}\frac{\left(\frac{\beta}{2}+p+1\right)\left(k-\frac{p+1}{2}\right)}{\left(\frac{\beta}{2}+p+1\right)a_2-\frac{p+1}{2}a_1}\times\prod_{r=1}^{2k-3}\left[\left(\frac{\beta}{2}+r+1\right)a_2-\frac{r+1}{2}a_1\right]}{i!\,k!\,a_2^k(a_1-a_2)^{\frac{\beta}{2}+k}}\Bigg\},$$

gdzie:

$d_1 = b_1+a_2$, $d_2 = b_2+a_2$, $\beta = 0, 2, 4, 6, \ldots$, $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$,
$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $j = 2, 4, 6, \ldots$, $m = 2, 4, 6, \ldots$, $k = 1, 2, 3, \ldots$,
$p = 1, 3, 5, \ldots$, $r = 1, 3, 5, \ldots$

LITERATURA

1. F. C. Creed, M. M. C. Collins, *The measurement of short-duration impulse voltage*, IEEE Trans. (Communication and Electronics), Vol. 82, November 1963, s. 621—629.
2. F. C. Creed, M. M. C. Collins, *Transient impedance of high-voltage impulse generating systems*, IEEE Trans. (Power Apparatus and Systems), Vol. 89, September/October 1970, s. 1387—1393.
3. W. Zaengl, *Der Stosspannungsteiler mit Zuleitung*, Bull. SEV, Vol. 61, 1970, s. 1003—1017.
4. R. Krawczyński, *Korekcja zniekształceń powstających przy wielokrotnych odbiciach fal w linii długiej*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Elektryka, Nr 31, 1973, s. 23—40.
5. CIGRE IRR-IMS Group (1), *Facing UHV Measuring Problems*, Electra, No 35, July 1974, p. 157—255.
6. T. Cholewicki, *Elektryczne linie długie i układy drabinkowe niejednorodne*, PWN, Warszawa 1974.
7. J. Osiowski, *Zarys rachunku operatorowego — teoria i zastosowania w elektrotechnice*, WNT, Warszawa 1965.
8. K. W. Wagner, *Rachunek operatorowy i przekształcenie Laplace'a*, PWN, Warszawa 1960.
9. S. Węgrzyn, *Przebiegi nieustalone w elektrycznych liniach i układach łańcuchowych*, PWN, Warszawa 1958.
10. Z. Szopliński, *Elektroniczna technika analogowa*, WNT, Warszawa 1969.

S. WYDERKA

DETERMINATION OF WAVE REFLECTIONS IN AN IMPULSE TEST CIRCUIT

Summary

The article presents a method of determination of the influence of wave reflections on results of measurements in an impulse test circuit. Equations describing wave reflections in the conduit connecting elements of the test circuit are derived. General formulae for the computation of coefficients of these equations are given. The considerations were illustrated by a numerical example.

S. WYDERKA

DÉTERMINATION DES RÉFLEXIONS ONDULATOIRES EN CIRCUIT D'ESSAI DE CHOC

Résumé

Dans l'étude on a présenté la méthode de détermination de l'effet des réflexions ondulatoires sur les résultats de measurage dans le circuit d'essai de choc. On a déduit les équations décrivant les réflexions ondulatoires dans le conducteur de jonction des éléments du circuit d'essai. On a donné les formules pour calculer les coefficients de ces équations. Les considérations ont été illustrées par un exemple de calculs.

S. WYDERKA

ERMITTLUNG VON WELLENREFLEXIONEN IM STOßSPANNUNGS-MEßKREIS

Zusammenfassung

In der Bearbeitung wird eine Bestimmungs-methode des Einflusses von Wellenreflexionen auf die Meßergebnisse im Stoßspannungs-Meßkreis dargestellt. Es wurden hier Gleichungen gebracht, die die Wellenreflexionen in der die Meßkreiselemente verbindenden Leitung beschreiben. Es wurden weiterhin Formeln zur Berechnung der Koeffizienten dieser Gleichungen angegeben. Die Berechnungen werden mit einem numerischen Beispiel illustriert.

С. ВЫДЕРКА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ОТРАЖЕНИЙ В ИСПЫТАТЕЛЬНОЙ СХЕМЕ УДАРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Резюме

В статье предложен метод определения влияния волновых отражений на результаты измерений в испытательной схеме ударных напряжений. Выведены уравнения описывающие волновые отражения в проводе связывающим элементы испытательной схемы. Приведены общие формулы для расчета коэффициентов этих уравнений. Рассуждения иллюстрированы примером расчета.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 2, ss. 435—449

621.391.812.63

Obliczanie natężenia pola fali jonosferycznej w zakresie częstotliwości 0,5...1,6 MHz

DANIEL JÓZEF BEM (WROCŁAW)

Instytut Telekomunikacji i Akustyki Politechniki Wrocławskiej

RYSZARD BERNARDYN (WROCŁAW)

Centrum Obliczeniowe Politechniki Wrocławskiej

Otrzymano 17.12.1974

W pracy opisano algorytm oraz program do obliczania natężenia pola fali jonosferycznej w zakresie częstotliwości 0,5 ... 1,6 MHz. Do obliczeń przyjęto kulisto-warstwowy model jonosfery. Obliczenia wykonuje się niezależnie dla fali zwyczajnej i dla fali nadzwyczajnej. Natężenie pola przy antenie odbiorczej określa się jako iloczyn natężenia pola jakie występowałoby, gdyby antena nadawcza i odbiorcza były umieszczone na idealnej ziemi, przez współczynnik osłabienia uwzględniający następujące straty: straty w ziemi przy antenie nadawczej i odbiorczej, straty polaryzacyjne, absorpcję jonosferyczną, straty geometryczne. Główną częścią programu jest procedura określająca trajektorię fali w jonosferze. Program napisano w języku ALGOL 1900.

1. WSTĘP

Fale średnie mogą docierać do odbiornika dwoma drogami wzdłuż powierzchni ziemi: pod postacią fali powierzchniowej i poprzez jonosferę jako fala jonosferyczna. Propagacja fali powierzchniowej zależy od częstotliwości fali oraz od parametrów elektrycznych gruntu, nad którym fala się rozchodzi. Zasięg fali powierzchniowej w najlepszym przypadku nie przekracza 500 km. Warunki rozchodzenia się fali jonosferycznej zależą od częstotliwości oraz od stanu jonosfery. Ten ostatni jest funkcją pory doby, pory roku oraz fazy cyklu aktywności słonecznej. Fale elektromagnetyczne ulegają w jonosferze załamaniu i tłumieniu. Oba te efekty mogą być opisane przez wprowadzenie zespolonego współczynnika załamania jonosfery, zależnego od gęstości elektronowej, liczby zderzeń i częstotliwości. W ciągu dnia gęstość elektronowa i liczba zderzeń w dolnej warstwie jonosfery (warstwa *D*) są tak duże, że fale średnie są całkowicie wytłumione, tak że fala jonosferyczna nie występuje. W nocy warstwa *D* znika i fala jonosferyczna może rozchodzić się na duże odległości, dochodzące, przy kolejnych odbiciach od jonosfery i od ziemi, do kilku tysięcy kilometrów. Znajomość natężenia pola fali jonosferycznej ma znaczenie zarówno ze względu na możliwość wzajemnego zakłócania się stacji wspólnokanałowych, jak i ze względu na możliwość wykorzystania fali jonosferycznej jako nośnika informacji.

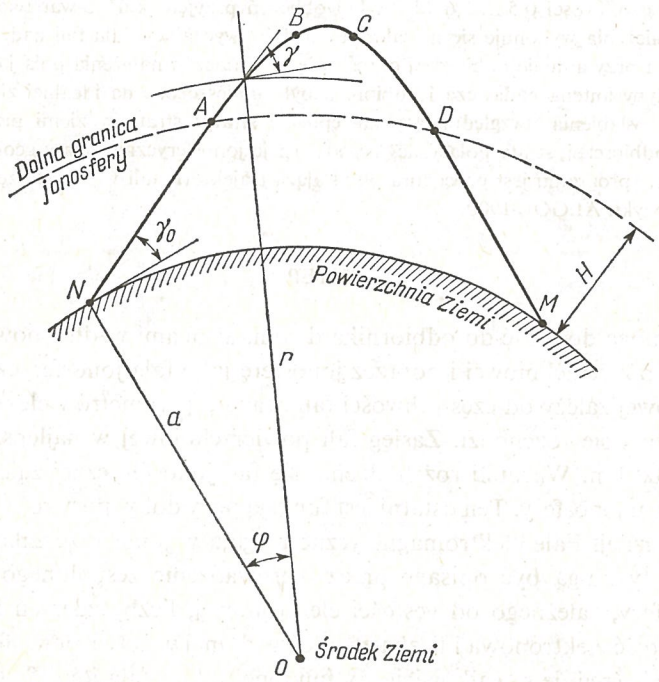
Do obliczania natężenia pola fali jonosferycznej dla potrzeb planowania sieci stosuje się metody opisane w dokumentach CCIR[1], opracowane na podstawie analizy statys-

tycznej dużej liczby pomiarów. Metody te nie zapewniają jednak dostatecznej dokładności przy wyznaczaniu natężenia pola w określonym punkcie. W takich przypadkach lepsze rezultaty otrzymuje się wyznaczając numerycznie trajektorię fali i obliczając całkowite tłumienie fali między anteną nadawczą a anteną odbiorczą [2].

Opisany dalej program *Sky-wave* służy do obliczania natężenia pola fali jonosferycznej w zakresie częstotliwości 500 ... 1600 kHz. Przy układaniu programu przyjęto kulisto-warstwowy model jonosfery oraz izotropową antenę nadawczą o pionowej polaryzacji.

2. TRAJEKTORIA FALI W JONOSFERZE

Zasadniczą sprawą dla obliczenia natężenia pola fali jonosferycznej jest wyznaczenie jej trajektorii. Załóżmy, że z punktu N leżącego na powierzchni ziemi została wypromieniowana pod kątem wzniesienia γ_0 fala elektromagnetyczna. Fala ta przecina dolną granicę jonosfery w punkcie A, następnie przebywa w jonosferze drogę $ABCD$ i powraca na ziemię w punkcie M (rys. 1). Pominiemy ugięcie fali w troposferze, tzn. przyjmiemy że na odcin-



Rys. 1. Trajektoria fali jonosferycznej

kach NA i DM fala rozchodzi się prostoliniowo. Drogę fali w jonosferze podzielimy na trzy części: część wznoszącą AB, obszar powrotu BC oraz część opadającą CD. Dla części wznoszącej i opadającej przyjmiemy kulisto-warstwowy model jonosfery, dla którego obowiązuje następujące równanie [3]

$$nr\cos\gamma = a\cos\gamma_0, \tag{1}$$

przy czym:

n — część rzeczywista zespolonego współczynnika załamania jonosfery,

a — promień ziemi,

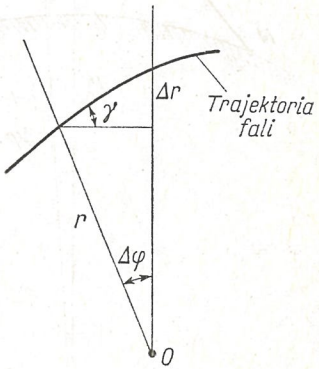
r — odległość punktu na trajektorii fali od środka ziemi,

γ — dopełnienie kąta padania.

Z prostych zależności geometrycznych (rys. 2) wynika, że:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm r \sqrt{\frac{1}{\cos^2\gamma} - 1}, \tag{2}$$

przy czym znak „+" obowiązuje dla części wznoszącej, natomiast znak „−" dla części opadającej.



Rys. 2. Rysunek pomocniczy do określenia pochodnej $dr/d\varphi$

Wyznaczmy wartość $\cos\gamma$ z równania (1) i podstawmy ją do równania (2); otrzymamy wówczas

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm r \sqrt{\left(\frac{nr}{a}\right)^2 \sec^2\gamma_0 - 1}. \tag{3}$$

Jest to równanie różniczkowe trajektorii fali. Rozwiążemy je metodą Taylora [4]. W tym celu rozwiniemy r w szereg Taylora w otoczeniu pewnej wartości r_k. Zachowując tylko pierwsze trzy wyrazy szeregu otrzymujemy następujące równanie na długość promienia r_{k+1} odpowiadającego przyrostowi kąta φ o $\Delta\varphi$ (rys. 3)

$$r_{k+1} = r_k + \Delta\varphi \left.\frac{dr}{d\varphi}\right|_k + \frac{\Delta\varphi^2}{2} \left.\frac{d^2r}{d\varphi^2}\right|_k. \tag{4}$$

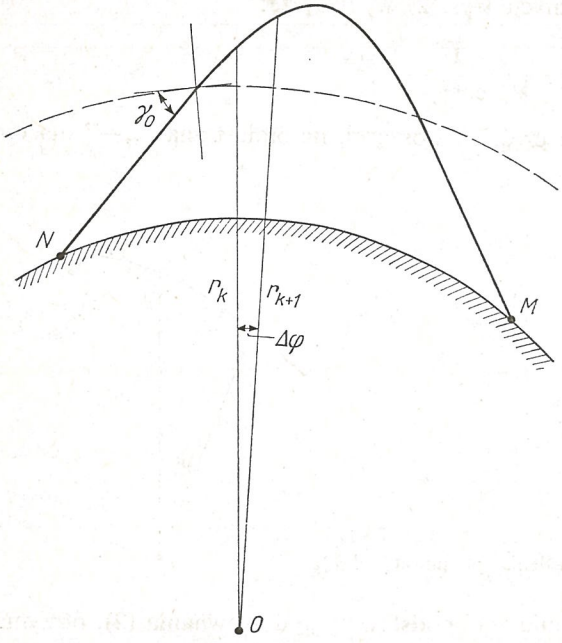
Różniczkując obustronnie równanie (3) względem φ znajdujemy:

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2} = r\left[\left(2 + \frac{r}{n}\frac{dn}{dr}\right)\left(\frac{nr}{a}\right)^2 \sec^2\gamma_0 - 1\right]. \tag{5}$$

Podstawiając do równania (4) zależności (3) i (5) na pierwszą i drugą pochodną r względem φ otrzymujemy:

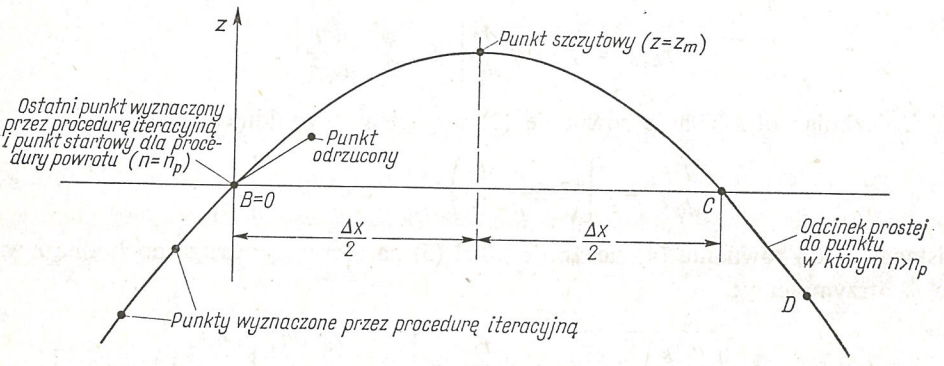
$$r_{k+1} = r_k \pm r_k \Delta\varphi \sqrt{\left(\frac{n_k r_k}{a}\right)^2 \sec^2\gamma_0 - 1} + \frac{r_k \Delta\varphi^2}{2}\left[\left(2 + \frac{r_k}{n_k}\left.\frac{dn}{dr}\right|_k\right)\left(\frac{n_k r_k}{a}\right)^2 \sec^2\gamma_0 - 1\right]. \tag{6}$$

Wyrażenie (6) pozwala na określenie odległości kolejnego punktu trajektorii fali od środka ziemi na podstawie znajomości odległości poprzedniego punktu oraz wartości współczynnika załamania i jego gradientu w tym punkcie. Zależność (6) posłużyła do ułożenia podprogramu obliczającego trajektorię fali w części opadającej i w części wznoszącej.



Rys. 3. Promienie r_k i r_{k+1}

Od doboru wartości przyrostu $\Delta\varphi$ zależy dokładność liczenia. Przy zbyt dużych wartościach $\Delta\varphi$ dokładność obliczeń maleje ze względu na wpływ pominiętych wyrazów wyższego rzędu w szeregu Taylora. Zbyt małe przyrosty powodują niepotrzebne wydłużenie czasu obliczeń. W drodze licznych prób ustalono, że optymalna wartość przyrostu jest zależna tylko od kąta wzniesienia γ_0. Długość łuku wyrażona w kilometrach powinna być liczbowo równa $\cos\gamma_0/\sqrt{0{,}02+\sin^2\gamma_0}$.



Rys. 4. Trajektoria fali w obszarze powrotu

Procedura iteracyjna opisana zależnością (6) zapewnia wystarczającą dokładność obliczeń w części wznoszącej i w części opadającej. Na ogół nie wystarcza ona jednak do prawidłowego wyznaczenia trajektorii fali w obszarze powrotu. W punkcie szczytowym trajektorii pochodna $dr/d\varphi$ jest równa zeru, co oznacza, że znika drugi wyraz w szeregu Taylora. Wpływ odrzuconych wyrazów wyższego rzędu może wówczas spowodować niewłaściwe śledzenie powrotnej części trajektorii. W celu uniknięca tych trudności trajektorię fali w obszarze powrotu wyznacza się za pomocą specjalnej procedury powrotu. W punkcie, w którym trzeci człon w wyrażeniu (6) przewyższa o 25% człon drugi, następuje zatrzymanie procedury iteracyjnej i rozpoczyna się procedura powrotu. Wartości początkowe dla punktu, w którym nastąpiło zatrzymanie procedury iteracyjnej, służą jako wartości startowe dla procedury powrotu.

Na rys. 4 przedstawiono trajektorię fali w obszarze powrotu. Współczynnik załamania oraz kierunek ruchu fali w punkcie startowym oznaczymy odpowiednio przez n_p i γ_p. Ponieważ długość obszaru powrotu jest mała, możemy pominąć krzywiznę ziemi i przyjąć płaski model jonosfery, dla którego obowiązuje prawo Snelliusa

$$\sec\gamma = \frac{n}{n_p}\sec\gamma_p. \tag{7}$$

Równanie różniczkowe trajektorii fali w obszarze powrotu zapiszemy w postaci

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\sec^2\gamma - 1}. \tag{8}$$

Podstawiając do równania (8) wyrażenie (7) otrzymujemy

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{n^2}{n_p^2}\sec^2\gamma_p - 1}, \tag{9}$$

przy czym n jest funkcją z.

Odległość $\Delta x/2$ mierzona w kierunku poziomym od punktu startowego do punktu szczytowego trajektorii fali jest równa

$$\frac{\Delta x}{2} = \int_{z=0}^{z=z_m} dx = \int_0^{z_m} \frac{dz}{\sqrt{\frac{n^2}{n_p^2}\sec^2\gamma_p - 1}}, \tag{10}$$

przy czym z_m jest wysokością punktu szczytowego w stosunku do punktu startowego.

Całkę w wyrażeniu (10) możemy obliczyć zakładając w obszarze powrotu stałą wartość gradientu współczynnika załamania $G = \frac{dn}{dz}$.

Biorąc pod uwagę, że w punkcie szczytowym współczynnik załamania przyjmuje wartość $n_p \cos\gamma_p$ oraz zmieniając zmienną całkowania otrzymujemy

$$\frac{\Delta x}{2} = \frac{1}{G}\int_{n_p}^{n_p\cos\gamma_p} \frac{dn}{\sqrt{\frac{n^2}{n_p^2}\sec^2\gamma_p - 1}} = \frac{n_p\cos\gamma_p}{G}\ln\left|\frac{\cos\gamma_p}{1+\sin\gamma_p}\right|. \tag{11}$$

Znajomość Δx pozwala na obliczenie współczynnika załamania w punkcie B. Jeśli wartość współczynnika załamania w punkcie B jest mniejsza od wartości n_p, następuje przedłużenie trajektorii fali odcinkiem prostej nachylonej pod kątem γ_p względem osi x aż do punktu C, w którym n jest większe od n_p.

3. NATĘŻENIE POLA FALI JONOSFERYCZNEJ

Natężenie pola fali jonosferycznej wyrazimy za pomocą następującego wzoru

$$E = 2E_i W, \tag{12}$$

w którym:

E_i — natężenie pola nad ziemią idealną,

W — współczynnik osłabienia.

Natężenie pola (w μV/m) wytwarzane nad idealną ziemią przez krótką pionową antenę zasilaną u podstawy, do której doprowadzono moc 1 kW, wyraża się zależnością [3]

$$E_i = \frac{3 \cdot 10^5}{d}, \tag{13}$$

przy czym d — odległość od anteny nadawczej w km.

Wzór (12) z uwzględnieniem wzoru (13) można przedstawić w postaci logarytmicznej

$$E = 115{,}6 - 20\lg d + W, \tag{14}$$

w której natężenie pola i współczynnik osłabienia są wyrażone w dB.

Współczynnik osłabienia W ujmuje tłumienie fali jonosferycznej związane z następującymi zjawiskami:

— straty w ziemi w otoczeniu nadajnika,
— straty polaryzacyjne przy wchodzeniu fali do jonosfery,
— absorpcja jonosferyczna,
— straty geometryczne,
— straty polaryzacyjne przy antenie odbiorczej,
— straty w ziemi przy antenie odbiorczej.

Współczynnik osłabienia W wyrażony w dB jest więc sumą sześciu współczynników cząstkowych odpowiadających wymienionym wyżej zjawiskom

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + W_6. \tag{15}$$

Współczynnik osłabienia wynikający ze strat w ziemi w otoczeniu nadajnika jest opisany zależnością [3]

$$W_1 = 20\lg|1 + R_V| - 6, \tag{16}$$

w której R_V — zespolony współczynnik odbicia dla polaryzacji pionowej.

Straty polaryzacyjne przy wchodzeniu fali do jonosfery są związane ze zjawiskiem rozszczepienia fali. Odpowiadający im współczynnik osłabienia wyraża się następującymi zależnościami [5]:

— dla fali zwyczajnej

$$W_2 = 10\lg F_0, \tag{17}$$

— dla fali nadzwyczajnej

$$W_2 = 10\lg(1 - F_0), \tag{18}$$

przy czym:

$$F_0 = \frac{\cos^2\psi + M^2 \sin\psi}{1+M^2} \tag{19}$$

M — stosunek długości osi elipsy polaryzacji,

ψ — kąt między dużą osią elipsy polaryzacji a kierunkiem pionowym, zmierzony przeciwnie do ruchu wskazówek zegara patrząc zgodnie z kierunkiem rozchodzenia się fali.

Kąt ψ jest związany z kątem θ między kierunkiem ruchu fali a normalną skierowaną ku górze ($0 \leqslant \theta < 90°$ na części wznoszącej, $90° \leqslant \theta < 180°$ na części opadającej) inklinacją magnetyczną I oraz namiarem magnetycznym na odbiornik następującą zależnością

$$\operatorname{ctg}\psi = -\sin\theta \operatorname{tg} I \operatorname{cosec}\alpha - \cos\theta \operatorname{ctg}\alpha, \tag{20}$$

przy czym $\alpha = \Phi - D$, gdzie: Φ — azymut, D — deklinacja magnetyczna.

Dla określenia stosunku długości osi elipsy polaryzacji trzeba najpierw wyznaczyć kąt ϑ między kierunkiem ruchu fali a kierunkiem ziemskiego pola magnetycznego

$$\cos\vartheta = \sin\theta \cos I \cos\alpha - \cos\theta \sin I. \tag{21}$$

Stosunek długości osi elipsy polaryzacji określa wzór

$$M = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2f}{f_z \sin\vartheta \operatorname{tg}\vartheta}\right), \tag{22}$$

w którym:

f — częstotliwość fali,

$f_z = 2{,}7992 \cdot 10^6 H_0$ — częstotliwość żyromagnetyczna,

H_0 — natężenie ziemskiego pola magnetycznego.

Wartości inklinacji magnetycznej oraz natężenia ziemskiego pola magnetycznego są przechowywane w pamięci maszyny pod postacią tablic.

Współczynnik osłabienia uwzględniający straty absorpcyjne związane ze zderzeniami elektronów z cząstkami obojętnymi jest określony wzorem [5]

$$W_3 = \frac{54{,}5}{\lambda} \int_{L_j} p\,dl, \tag{23}$$

w którym:

p — część urojona współczynnika załamania jonosfery,

L_j — długość drogi fali w jonosferze.

Zespolony współczynnik załamania $(n - jp)$ zależy od gęstości elektronowej, liczby zderzeń i natężenia ziemskiego pola magnetycznego [5]

$$(n-jp)^2 = 1 - \left(\frac{f_0}{f}\right)^2 \left\{ 1 - j\frac{\nu}{2\pi f} - \frac{\left(\frac{f_z}{f}\right)^2 \sin^2\vartheta}{2\left[1 - \left(\frac{f_0}{f}\right)^2 - j\frac{\nu}{2\pi f}\right]} \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{f_z}{f}\right)^4 \sin^4\vartheta}{4\left[1 - \left(\frac{f_0}{f}\right)^2 - j\frac{\nu}{2\pi f}\right]^2} + \left(\frac{f_z}{f}\right)^2 \cos^2\vartheta} \right\}^{-1}, \tag{24}$$

przy czym:

$f_0 = \sqrt{80{,}8\ N}$ — częstotliwość plazmowa,

N = gęstość elektronowa,

ν — skuteczna częstość zderzeń;

znak „+" odnosi się do fali zwyczajnej, znak „−" do fali nadzwyczajnej, zakładając, że $f_0/f < 1$ [1].

Straty geometryczne składają się z dwóch części. Pierwsza część uwzględnia różnicę całkowitej długości drogi L przebywanej przez falę przy propagacji między punktem nadawczym a punktem odbiorczym w stosunku do odległości d między tymi punktami, mierzonej wzdłuż powierzchni ziemi. Odpowiedni współczynnik osłabienia wyraża się zależnością

$$W_4' = 20 \lg \frac{d}{L}. \tag{25}$$

Druga część strat geometrycznych ujmuje zjawisko ogniskowania fali przez wklęsłą powierzchnię jonosfery. Efekt ogniskowania zależy od częstotliwości i długości trasy [5]. Wynikające stąd wartości współczynnika osłabienia W_4'' są przechowywane w pamięci maszyny w postaci tablicy. Sumaryczna wartość współczynnika osłabienia odpowiadająca stratom geometrycznym jest ujemna dla małych odległości, a dodatnia dla dużych odległości, dla których dominuje efekt ogniskowania.

Anteny odbiorcze w zakresie fal średnich są zwykle przystosowane do odbioru fal spolaryzowanych pionowo. Fala zwyczajna oraz fala nadzwyczajna mają natomiast polaryzację eliptyczną. Powstają więc straty polaryzacyjne W_5, które wyrażają się wzorami (17) i (18), przy czym za M i ψ należy podstawić wartości odpowiadające nowemu kierunkowi propagacji w stosunku do ziemskiego pola magnetycznego.

Przy antenie odbiorczej powstają również straty w ziemi W_6 określone zależnością (16).

4. WSPÓŁRZĘDNE GEOGRAFICZNE PUNKTU POWROTU FALI

W celu określenia współrzędnych geograficznych punktu, w którym fala odbita od jonosfery pada na powierzchnię ziemi, przy wyznaczaniu trajektorii fali oblicza się również współrzędne geograficzne każdego kroku iteracyjnego. Sposób poruszania się po powierzchni kuli ziemskiej jest wyznaczony przez rozwiązywanie trójkątów sferycznych. Jako punkt wyróżniony przyjęto biegun północny. Wszystkie łuki na sferze (odcinki kół wielkich) wyrażamy w mierze kątowej (kąt wycinka kołowego ograniczonego dwiema półprostymi wychodzącymi ze środka kuli oraz tym łukiem). Mając dane dwa boki (a, b) trójkąta sferycznego oraz kąt między nimi γ można obliczyć trzeci bok ze wzoru (rys. 5).

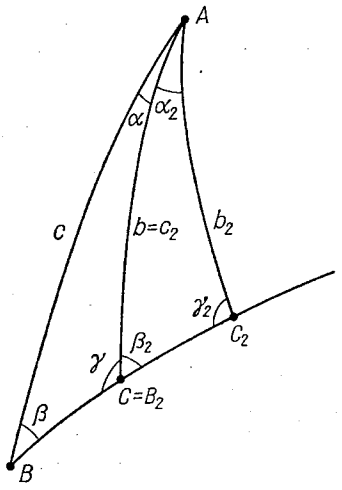
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma, \tag{26}$$

a następnie pozostałe kąty z twierdzenia sinusów

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}. \tag{27}$$

[1] Fala zwyczajna ulega odbiciu zawsze na wysokości mniejszej niż wysokość odpowiadająca $f_0 = f$; fala nadzwyczajna może jednak osiągnąć tę wysokość zanim nastąpi odbicie. W takim przypadku należy w równaniu (24) zmienić znak „−" na „+".

Wyruszając z punktu B, w którym znajduje się nadajnik, znamy współrzędne geograficzne tego punktu oraz azymut trasy, dla której należy obliczyć natężenia pola fali jonosferycznej. Dany jest więc kąt β, a bok c jest równy różnicy szerokości geograficznej bieguna północnego i punktu wyjściowego. W procesie iteracji poruszamy się po powierzchni



Rys. 5. Trójkąty sferyczne

ziemi za każdym krokiem o stały odcinek a. Dobór kroku iteracji został omówiony w p. 2. Po rozwiązaniu pierwszego trójkąta przyjmujemy $a_2 = a$, $c_2 = b$, $\beta_2 = 180° - \gamma$. Uzyskane dane wystarczają do rozwiązania następnego trójkąta i w ten sposób proces poruszania się po sferze może być kontynuowany dowolnie długo.

Szerokość geograficzna punktu C_i w kolejnym kroku jest równa $90° - b_i$, a długość geograficzna jest równa sumie długości geograficznej punktu B_i i kąta α_i.

5. PROGRAM *Sky-wave*

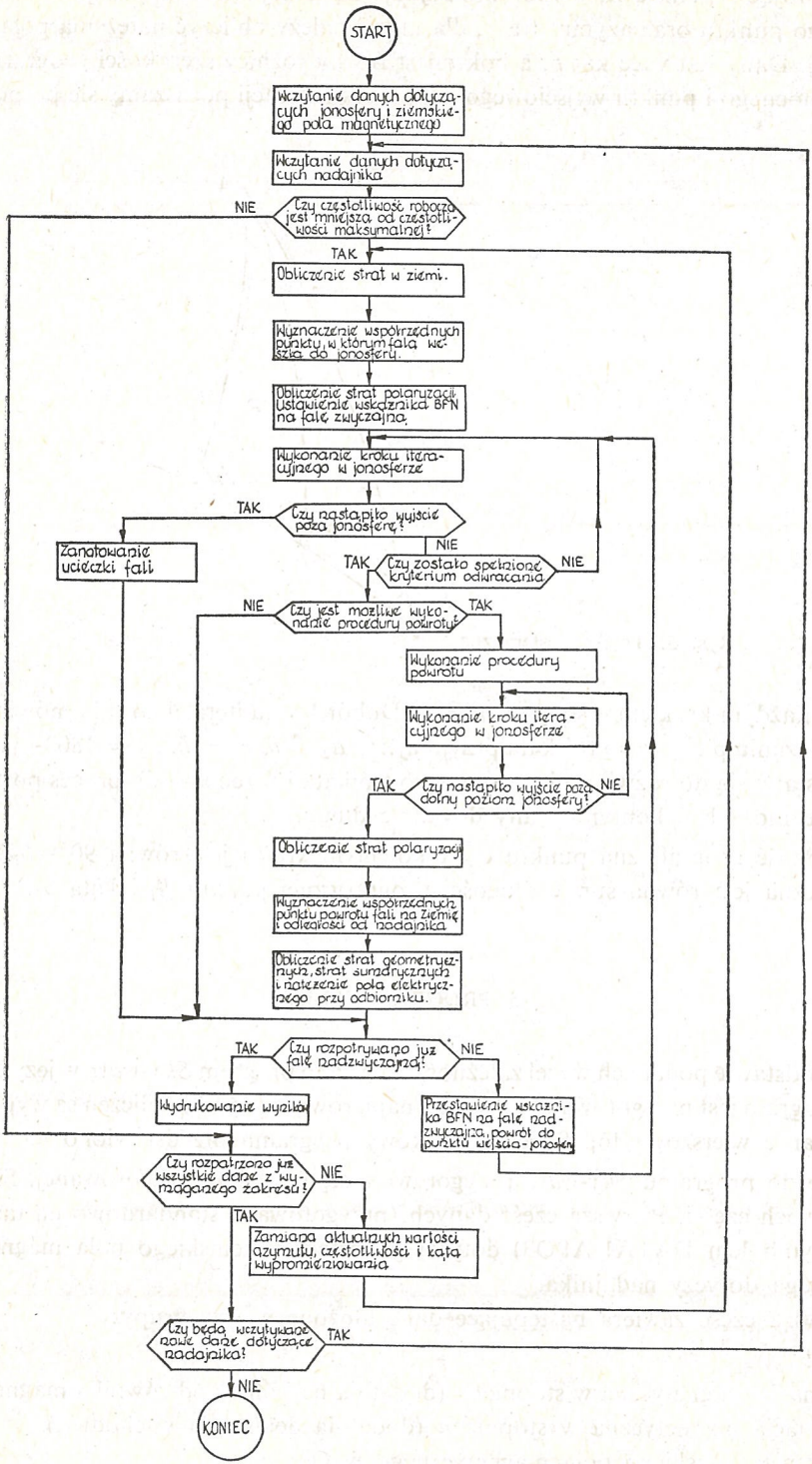
Na podstawie podanych wyżej zależności napisano program *Sky-wave* w języku ALGOL 1900. Program jest przygotowany na taśmie papierowej, a wyniki obliczeń są wyprowadzane na drukarkę wierszową [6]. Schemat blokowy programu przedstawiono na rys. 6.

Dane do programu *Sky-wave* przygotowuje się na taśmie perforowanej. Składają się one z dwóch części. Pierwsza część danych (przygotowana standardowo na taśmie oznaczonej symbolem DATA1/APO3) dotyczy jonosfery i ziemskiego pola magnetycznego; część druga dotyczy nadajnika.

Pierwsza część zawiera następujące dane ułożone w trzy grupy:

grupa 1:

— inklinacja magnetyczna w stopniach (dodatnia na północ od równika magnetycznego),
— deklinacja magnetyczna w stopniach (dodatnia deklinacja wschodnia),
— natężenie ziemskiego pola magnetycznego w Oe;



Rys. 6. Schemat blokowy programu *Sky-wave*

grupa 2:
— siatka wartości współczynnika ogniskowania;
grupa 3:
— początkowa i końcowa wysokość, dla której podaje się dane dotyczące gęstości elektronowej,
— gęstość elektronowa ($1/cm^3$),
— skuteczna częstość zderzeń podzielona przez 2π.

Gęstość elektronową i skuteczną częstość zderzeń podaje się w odstępach co 1 km począwszy od wysokości początkowej. Ostatnim elementem tablicy gęstości elektronowej jest wartość dotycząca wysokości końcowej, natomiast dane dotyczące częstości zderzeń muszą kończyć się zerem i może ich być mniej. Z chwilą pojawienia się zera przyjmuje się automatycznie częstość zderzeń równą zeru dla większych wysokości.

Wartości inklinacji magnetycznej, deklinacji magnetycznej i natężenia ziemskiego pola magnetycznego są podane co 15° długości geograficznej 0°, 15°E, 30°E ... 15°W, 0° i co 10° szerokości geograficznej 90°S, 80°S, ... 80°N, 90°N.

Współczynnik ogniskowania jest przechowywany pod postacią macierzy o wymiarach 11×6 zawierającej siatkę wartości współczynnika ogniskowania w zależności od drogi przebytej przez falę i od częstotliwości. Wartości siatki podane są co 200 km 0, 200, 400 ... ... 2000 i co 200 kHz (500, 700, 900, 1100, 1300, 1500).

Druga część zawiera następujące dane:
— nazwa nadajnika,
— szerokość (dodatnia na północ od równika) i długość geograficzna (mierzona na wschód od południka zerowego) nadajnika,
— azymut na odbiornik w stopniach mierzony na wschód od północy geograficznej,
— częstotliwość w MHz,
— kąt wypromieniowania w stopniach (w stosunku do poziomu),
— przenikalność elektryczna i konduktywność ziemi przy nadajniku,
— przenikalność elektryczna i konduktywność ziemi przy odbiorniku.

Dane dotyczące azymutu, częstotliwości i kąta wypromieniowania podaje się w postaci: wartość początkowa, przyrost, wartość końcowa. Maszyna przyjmuje po kolei jako dane wszystkie możliwe kombinacje azymutu, częstotliwości i kąta wypromieniowania.

Program oblicza straty powstałe przy propagacji fali oraz natężenie pola przy odbiorniku przyjmując w odległości 1 km na powierzchni ziemi iloczyn $Ed = 300$ V. Obliczane są współrzędne geograficzne punktu powrotu fali na ziemię oraz odległość punktu powrotu od nadajnika. Oprócz strat całkowitych podawane są straty składowe: straty w ziemi przy odbiorniku i nadajniku, straty polaryzacji, straty geometryczne i jonosferyczne. Warunkowo mogą być drukowane kolejne kroki w procesie śledzenia promienia. Jeśli fala osiągnie najwyższą wysokość, dla której podano dane dotyczące gęstości elektronowej i nie ulegnie odbiciu, wówczas przyjmuje się, że fala przenika przez jonosferę i drukuje słowo *ESCAPE*.

Rozpatrywane są osobno fala zwyczajna i nadzwyczajna, wyniki są drukowane dla każdej z tych fal niezależnie.

6. PRZYKŁAD OBLICZEŃ

Przykładowe obliczenia wykonamy dla następującego stanu jonosfery (pierwsza część danych, grupa 3):

		67	130		początkowa i końcowa wysokość, dla której podaje się dane dotyczące gęstości elektronowej
0	0	0	.65	.95	gęstość elektronowa (liczba elektronów w 1 cm^3) podawana w odstępach 1 km począwszy od wysokości podanej wyżej
1.2	1.5	2	2.6	3.2	
4.3	5.9	8.0	11	17	
25	50	70	110	160	
240	320	480	660	860	
1120	1430	1750	2200	2600	
3300	3800	4400	5000	5700	
6200	6800	7100	7500	7800	
8100	8300	8400	8500	8600	
8600	8500	8400	8200	7900	
7700	7400	7100	6800	6400	
6000	5700	5400	5100	4900	
4600	4300	4100	3900		
1400	1200	1000	920	800	skuteczna częstość zderzeń podzielona przez 2π (kHz) podawana w odstępach 1 km począwszy od wysokości podanej wyżej
720	600	500	440	380	
300	260	205	178	143	
117	95	75	60	49	
40.2	33.1	28.6	24.0	19.8	
16.4	13.9	11.9	10.6	18.4	
7.2	6.4	5.2	4.6	4.0	
3.4	3.0	2.6	2.2	2.0	
1.7	1.5	1.3	1.1	1.0	
.8	.7	.6	.5	.4	
.35	.3	.25	.2	.15	
.1	.50	.0			

Wykonamy obliczenia natężenia pola fali jonosferycznej o częstotliwości 1079 kHz wypromieniowanej pod kątem 20° z punktu o współrzędnych 50,42°N, 19,0°E w kierunku 270°.

Przyjmiemy, że konduktywność i przenikalność elektryczna ziemi w punkcie nadawania i w punkcie odbioru są jednakowe i wynoszą: $\varepsilon = 15$, $\sigma = 10$ mS/m.

Druga część danych dla naszego przykładu ma następującą postać:
„KATOWICE — KOSZECIN" nazwa nadajnika;

SKY WAVE PROPAGATION AT MEDIUM FREQUENCIES

TRANSMITTER
NAME: KATOWICE-KOSZECIN FREQUENCY: 1,079 MHZ
LATITUDE: 50,42 LONGITUDE: 19,00
PERMITTIVITY: 15,00 CONDUCTIVITY: ,010

PATH
AZIMUTH: 270,00 MAGNETIC VARIATION: 1,00 TAKE OF ANGLE: 20,00

RECEIVING POINT
PERMITTIVITY: 15,00 CONDUCTIVITY: ,010

STEP-BY-STEP OUTPUT

ORDINARY WAVE

RANGE/KM/	HEIGHT/KM/	IONOSPHERIC ABSORPTION LOSS/DB/	REFRACTIVE INDEX REAL PART	REFRACTIVE INDEX IMAGINARY PART	COS(FI)
177,96	68,011	,00	1,00000	,00000	,36802
180,49	69,024	,00	1,00000	,00000	,36856
183,02	70,038	,00	,99999	,00001	,36895
185,54	71,053	,01	,99998	,00001	,36948
188,07	72,069	,02	,99997	,00002	,36987
190,60	73,087	,03	,99996	,00002	,36980
193,13	74,105	,04	,99995	,00002	,37034
195,65	75,125	,05	,99993	,00003	,37042
198,18	76,147	,07	,99991	,00003	,37095
200,71	77,169	,09	,99987	,00004	,37118
203,23	78,193	,11	,99982	,00004	,37156
205,76	79,217	,13	,99974	,00005	,37165
208,29	80,242	,16	,99962	,00006	,37201
210,81	81,267	,20	,99942	,00007	,37194
213,34	82,291	,24	,99901	,00010	,37157
215,87	83,312	,31	,99827	,00014	,37051
218,39	84,330	,39	,99743	,00016	,36949
220,92	85,340	,49	,99607	,00020	,36700
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

EXTRAORDINARY WAVE

RANGE/KM/	HEIGHT/KM/	IONOSPHERIC ABSORPTION LOSS/DB/	REFRACTIVE INDEX REAL PART	REFRACTIVE INDEX IMAGINARY PART	COS(FI)
177,96	68,011	,00	1,00000	,00000	,36802
180,49	69,024	,00	1,00000	,00000	,36856
183,02	70,038	,00	1,00000	,00002	,36895
185,54	71,053	,02	1,00000	,00003	,36935
188,07	72,069	,03	1,00000	,00003	,36942
190,60	73,087	,05	1,00001	,00005	,37010
193,13	74,106	,09	1,00002	,00007	,37049
195,65	75,127	,13	1,00004	,00010	,37072
198,18	76,149	,20	1,00006	,00013	,37125
200,71	77,173	,28	1,00012	,00019	,37177
203,23	78,199	,41	1,00021	,00026	,37200
205,76	79,227	,57	1,00037	,00035	,37242
208,29	80,258	,79	1,00061	,00047	,37378
210,81	81,292	1,10	1,00107	,00065	,37489
213,34	82,332	1,54	1,00201	,00098	,37542
215,87	83,384	2,19	1,00370	,00142	,38025
218,39	84,459	3,05	1,00588	,00175	,38614
220,92	85,537	4,12	1,00935	,00218	,39385
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

TRANSMISSION LOSS

	ORDINARY WAVE	EXTRAORDINARY WAVE
GROUND LOSS AT TRANSMITTER/DB/	1,39	1,39
POLARISATION COUPLING LOSS AT TRANSMITTER/DB/	1,18	6,24
IONOSPHERIC ABSORPTION LOSS/DB/	9,60	ESCAPE
GEOMETRIC LOSS/DB/	,65	
POLARISATION COUPLING LOSS AT RECEIVER/DB/	1,19	
GROUND LOSS AT RECEIVER/DB/	1,39	
TOTAL LOSS/DB/	15,35	
FIELD STRENGTH FOR ED = 300 VOLTS/DB/	45,93	
DISTANCE FROM TRANSMITTER	517,44	
LATITUDE OF RECEIVING POINT	50,19	
LONGITUDE OF RECEIVING POINT	11,71	

END

Rys. 7. Przykładowe wyniki obliczeń

50.42	19.00		szerokość i długość geograficzna nadajnika;
270	1	270	azymut trasy;
1.079	1	1.079	częstotliwość w MHz;
20.0	1	20.0	kąt wypromieniowania w stopniach;
15	.01		przenikalność elektryczna i konduktywność (w S/m) ziemi w otoczeniu nadajnika;
15	.01		przenikalność elektryczna i konduktywność (w S/m) ziemi w otoczeniu odbiornika;
0			symbol końca obliczeń.

Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 7.

LITERATURA

1. CCIR, *Documents of the XIII-th Plenary Assembly*, Genewa 1974, UIT.
2. A.D. Olver, A.G. Lyner, P. Knight, *A Computer programme for calculating sky-wave field strengths at medium frequencies*, EBU Review, Part A-Technical, No. 125, February 1971, pp. 18—27.
3. D.J. Bem, *Anteny i rozchodzenie się fal radiowych*, WNT, Warszawa 1973.
4. K.S. Kunz, *Numerical Analysis*, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York 1957.
5. K. Davies, *Jonospheric radio-waves propagation*, NBS Monograph 80, Washington 1965.
6. D.J. Bem, L. Bernardyn, *Program „Sky-wave" do obliczenia natężenia pola fali jonosferycznej w zakresie częstotliwości* 0,5 ... 1,6 MHz, Politechnika Wrocławska, Instytut Telekomunikacji i Akustyki, Komunikat nr E-13, Wrocław 1974.

D. J. BEM, R. BERNARDYN

CALCULATION OF SKY-WAVE FIELD STRENGTHS IN THE FREQUENCY BAND 0,5 ... 1,6 MHz

Summary

An algorithm and a computer programme for calculating sky-wave field strengths in the frequency band 0,5 ... 1,6 MHz, assuming an idealised spherically-stratified ionosphere have been described in the paper. The field strength at the receiving antenna is calculated by multiplying the field strength which would be obtained if the transmitting and receiving antennae were situated on perfectly-conducting ground and the ionosphere were a perfect reflector by the attenuation coefficient. The attenuation coefficient takes account of the following losses: ground losses at the transmitter and the receiver, polarisation coupling losses, ionospheric absorption losses and geometric losses. The main part of the programme is the ray-tracing procedure which, using ray optics, plots the path of a ray through the ionosphere. The programme has been written in ALGOL 1900.

D. J. BEM, R. BERNARDYN

CALCUL D'INTENSITÉ DU CHAMP D'ONDE IONOSPHÈRIQUE DANS L'ÉTENDUE DE FRÉQUENCE 0,5 ... 1,6 MHz

Résumé

Dans l'étude on a donné la description de l'algorithme et le programme pour calculer l'intensité du champ d'onde ionosphèrique dans l'étendue de fréquence 0,5 ... 1,6 MHz. Dans les calculs on s'est servi de modèle à couches globulaires de l'ionosphère. Les calculs ont été faits indépendamment pour l'onde

ordinaire et pour l'onde extraordinaire. L'intensité du champ près de l'antenne de réception est déterminée comme produit d'intensité du champ, qui se formerait si l'antenne d'émission et de réception étaient installées sur la terre idéal, par le coefficient d'affaiblissement prenant en considération les pertes suivantes: pertes à la terre près de l'antenne d'émission et de réception, pertes par polarisation, l'absorption ionosphèrique, pertes géométrique. La partie principale du programme est la procédure déterminant la trajectoire de l'onde dans l'ionosphère. Le programme a été établi en langage ALGOL 1900.

D. J. BEM. R, BERNARDYN

BERECHNUNG DER FELDSTÄRKE EINER IONOSPHÄRISCHEN WELLE IM FREQUENZBEREICH 0,5 ... 1,6 MHz

Zusammenfassung

Im Aufsatz wurden der Algorithmus und das Programm für die Feldstärkenberechnung einer ionosphärischen Welle im Frequenzbereich 0,5 ... 1,6 MHz beschrieben. Zu den Berechnungen lag ein kugelschichtiges Ionosphärmodell zu Grunde. Die Berechnungen wurden gesondert für eine gewöhnliche und außergewöhnliche Welle ausgeführt. Die Feldstärke an der Empfangsantenne wird als Feldstärkeprodukt bezeichnet, das auftreten würde, wenn die Sende- und auch die Empfangsantenne auf idealer Erde angebracht wären, multizipliert mal Schwächungsfaktor, der die folgenden Verluste berücksichtigt: Erdverluste an der Sende- und der Empfangsantenne, Polarisationsverluste, ionosphärische Absorption, geometrische Verluste. Den Hauptteil des Programms stellt die Wellentrajektorie in der Ionosphäre dar. Das Programm wurde in der ALGOL-Sprache 1900 angefertigt.

Д. БЕМ, Р. БЕРНАРДИН

ВЫЧИСЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ ИОНОСФЕРНОЙ ВОЛНЫ В ДИАПАЗОНЕ ЧАСТОТ 0,5 ... 1,6 Мгц

Резюме

В труде приведен алгоритм и программа вычисления напряженности поля ионосферной волны в диапазоне частот 0,5 ... 1,6 Мгц. Для вычислений принята шарообразно-слоевая модель ионосферы. Вычисления проводятся независимо для обыкновенной и необыкновенной волны. Напряженность поля вблизи антенны приемника определяется как произведение напряженности поля, которое выступало бы в случае установки антенны передатчика и приемника на идеальной земле на коэффициент ослабления учитывающий следующие потери: потери в земле при антеннах передатчика и приемника, поляризационные потери, ионосферное поглощение, геометрические потери. Основной частью программы является процедура определяющая траекторию волны в ионосфере. Программа составлена на языке АЛГОЛ 1900.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 2, ss. 451—468

621.315.592

Wpływ silnego domieszkowania na pasmowy model energetyczny półprzewodnika — ogony pasm

WŁODZIMIERZ NAKWASKI (WARSZAWA)

Instytut Technologii Elektronowej przy Naukowo-Produkcyjnym Centrum Półprzewodników

Otrzymano 13.1.1975

W artykule przedstawiono istniejące obecnie wyjaśnienia przyczyn tworzenia ogonów pasm w półprzewodnikach silnie domieszkowanych, rozpatrując kolejno proces powstawania pasm domieszkowych oraz działanie potencjałów deformacyjnego i elektrostatycznego. Podano również zależności używane do opisu funkcji gęstości stanów w ogonach pasm; przedstawiono przy tym przyjęte założenia oraz — w skrócie — metodę stosowaną przy wyprowadzaniu tych zależności. W celu ich porównania wykonano wykresy funkcji gęstości stanów obliczonych według poszczególnych wzorów. Otrzymane krzywe różnią się znacznie.

1. WPROWADZENIE

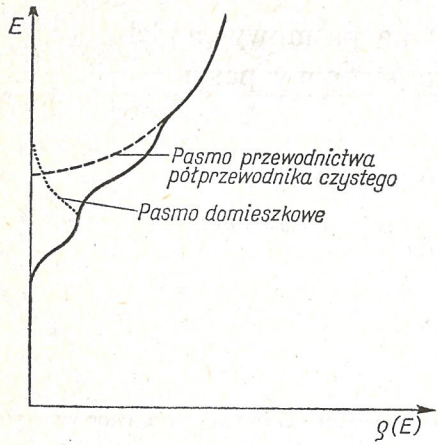
Wiele przyrządów półprzewodnikowych (np. lasery lub diody tunelowe) wymaga stosowania materiałów silnie domieszkowanych, których model pasmowy różni się od modelu czystego półprzewodnika obecnością tzw. *ogonów pasm* (*band tails*). Niniejszy artykuł jest poświęcony przeglądowi przyczyn tworzenia ogonów pasm oraz ich matematycznemu opisowi.

2. PRZYCZYNY POWSTAWANIA OGONÓW PASM

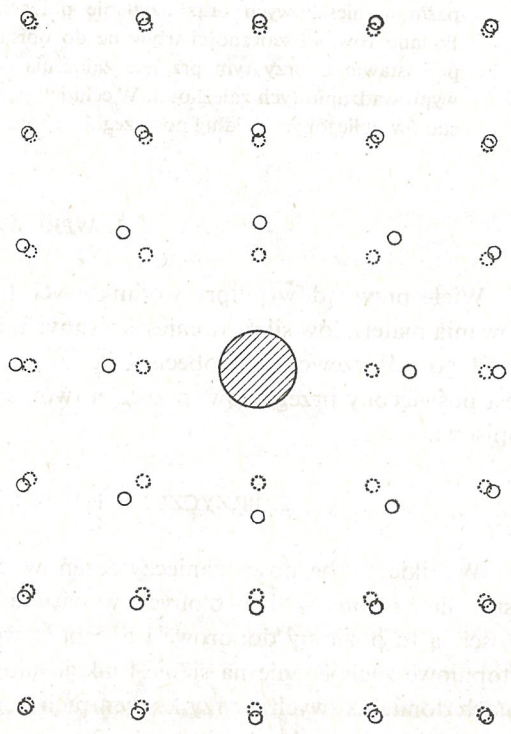
Wynikiem obecności zanieczyszczeń w czystym materiale półprzewodnikowym jest istnienie poziomów dozwolonych w pasmie zabronionym półprzewodnika. W szczególności są to poziomy donorowe i akceptorowe. Wzrost koncentracji domieszek powoduje stopniowe zachodzenie na siebie funkcji falowych elektronów znajdujących się na poziomach domieszkowych i, przy koncentracji domieszek rzędu a^{-3} [1], gdzie: a — stała sieci, powstanie pasma domieszkowego [2÷7].

W praktyce wzajemne zachodzenie na siebie funkcji falowych występuje już dla znacznie mniejszej koncentracji domieszek. Przy dalszym jej wzroście następuje rozszerzanie się tego pasma i w końcu połączenie się z najbliższym pasmem dozwolonym (przewodnictwa w przypadku pasma donorowego lub walencyjnym — dla pasma akceptorowego) [7÷9].

Dla arsenku galu typu n pasmo donorowe powstaje przy koncentracji donorów $N_D \simeq 3 \cdot 10^{16}\text{cm}^{-3}$, a łączy się z pasmem przewodnictwa przy $N_D \simeq 1{,}5 \cdot 10^{17}\text{cm}^{-3}$ [5]. W przypadku arsenku galu typu p zjawiska te zachodzą odpowiednio przy $N_A \simeq 10^{18}\text{cm}^{-3}$ [5] i $N_A \simeq 6 \cdot 10^{18}\text{cm}^{-3}$ [10]. Prowadzi to do efektywnego zmniejszenia przerwy energetycznej



Rys. 1. Wykres rozkładu gęstości stanów dla silnie domieszkowanego półprzewodnika typu n [8]

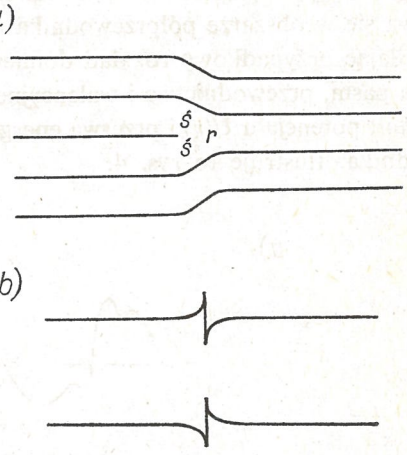


Rys. 2. Proces ściskania, powstający w przypadku wprowadzenia do kryształu bardzo dużego atomu domieszki [1]

[11]. Pasmo przewodnictwa w półprzewodniku typu n (lub pasmo walencyjne w półprzewodniku typu p) wnika w przerwę energetyczną w postaci tzw. ogona. Ogon ten może powstać w powyższym procesie tylko przy jednym z pasm dozwolonych. Wykres gęstości stanów dla tego przypadku pokazano na rys. 1.

Na tworzenie się ogonów pasm mają wpływ także inne zjawiska. Wiążą się one z pojęciem potencjału deformacyjnego, który opisuje wpływ naprężeń w sieci krystalicznej na dozwolone wartości energii elektronów w pasmach. Naprężenia te są spowodowane niedoskonałością sieci. Typowe przyczyny tej niedoskonałości są pokrótce opisane poniżej.

Atomy sieci różnią się wielkością od zastępujących ich atomów domieszek. W krysztale powstają dlatego lokalne mechaniczne naprężenia, których wynikiem jest pewien potencjał deformacyjny. Powoduje on miejscowe rozszerzenie lub zwężenie pasma zabronionego [1, 12]. Sumaryczny efekt zależy oczywiście od poziomu domieszkowania. Zjawisko ściskania w przypadku bardzo dużego atomu domieszki tłumaczy rys. 2. Odwrotny skutek wywołuje obecność w sieci luki.



Rys. 3. Wpływ dyslokacji na szerokość przerwy energetycznej: a) naprężenia ściskania (*ś*) i rozciągania (*r*), powstające w miejscu dyslokacji; b) potencjał deformacyjny, będący efektem tych procesów [1]

Inną przyczyną istnienia potencjału deformacyjnego jest obecność w krysztale dyslokacji. Ich wpływ na kształt pasma zabronionego pokazano na rys. 3. Miejscowe zwężenia przerwy energetycznej prowadzą do jednoczesnego powstania ogonów obu pasm — przewodnictwa i walencyjnego.

Atomy zjonizowanych domieszek oddziaływują na elektrony w pasmie przewodnictwa i na dziury w pasmie walencyjnym siłami Coulomba. Ponieważ domieszki są w krysztale rozmieszczone w sposób nieuporządkowany, potencjał oddziaływania elektrostatycznego $U(r)$ zmienia się w obszarze półprzewodnika chaotycznie. Powstają lokalne jamy potencjału. Średni rozrzut pędów przy lokalizacji cząstki w takiej jamie jest rzędu $\sqrt{2m^*\Delta}$, gdzie: Δ — głębokość jamy potencjału, m^* — masa efektywna lokalizowanej cząstki. Z zasady nieoznaczoności wynika więc pewien warunek, jaki muszą spełnić wymiary jamy potencjału aby cząstka o masie efektywnej m^* mogła być w niej zlokalizowana [13, 14]:

$$\Delta \gtrsim \frac{h^2}{2m^*L^2}, \tag{1}$$

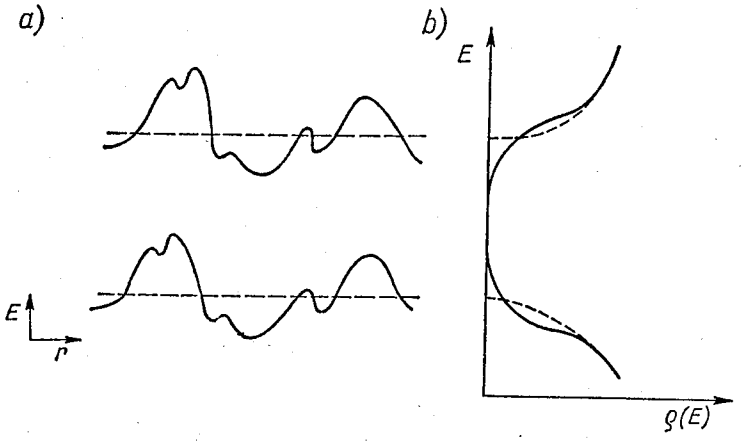
gdzie: L — rozmiar liniowy jamy potencjału.

Energia $h^2/2m^*L^2$ nazywana jest często kinetyczną energią lokalizacji.

Jeżeli średnia głębokość jam potencjału Δ jest znacznie większa od prawej strony nierówności (1):

$$\Delta \gg \frac{h^2}{2m^*L^2}, \tag{1a}$$

można przyjąć, że znajdujące się w nich poziomy energetyczne są rozłożone bardzo gęsto, a najniższy z nich prawie się pokrywa z dnem jamy. Przy takim założeniu można już stosować tzw. *metodę pofałdowanych pasm* (*iskrivlennych zon*) [13, 14]. Dozwolone poziomy energetyczne w jamach potencjału są wtedy rozłożone w sposób quasiciągły, nośniki prądu w pasmach półprzewodnika silnie domieszkowanego mogą przybierać wartości energii, odpowiadające przerwie energetycznej półprzewodnika czystego. Krawędź pasma przesuwa się w obszarze półprzewodnika o wartość potencjału oddziaływania $U(r)$, odzwierciedlając przypadkowy rozkład domieszek [13, 17]. Jeśli warunek (1a) jest spełniony dla obu pasm, przewodnictwa i walencyjnego, krawędzie tych pasm odtwarzają przypadkowy kształt potencjału $U(r)$ i przerwa energetyczna pozostaje stała w każdym punkcie półprzewodnika. Ilustruje to rys. 4.



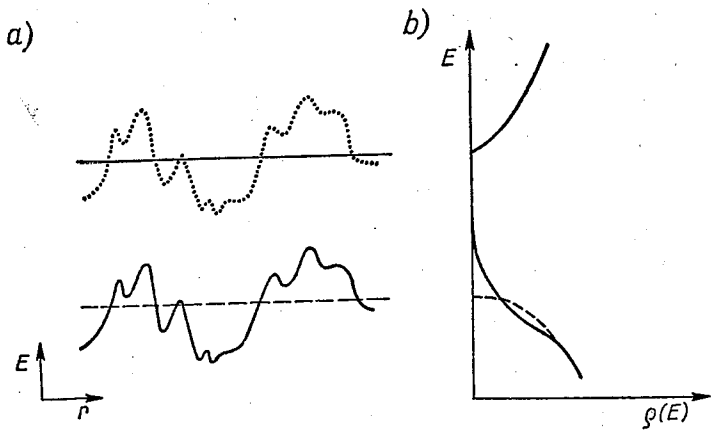
Rys. 4. Zaburzenia w usytuowaniu krawędzi pasm w obszarze półprzewodnika, spowodowane oddziaływaniem potencjału elektrostatycznego (a) i będący tego efektem wykres rozkładu gęstości stanów (b)
Krzywe kreskowe odpowiadają półprzewodnikowi czystemu [1]

Dość często, np. w związkach $A^{III}B^{V}$, masa efektywna elektronu różni się znacznie od masy efektywnej dziury. Dla GaAs wielkości te są odpowiednio równe $m_e \simeq 0{,}07\ m_0$ i $m_h \simeq 0{,}5\ m_0$ [1], gdzie m_0 — masa spoczynkowa elektronu. Wówczas dla typowej koncentracji domieszek $N = 10^{18}$ cm^{-3} kryterium (1) jest spełnione dla dziur w paśmie walencyjnym, a nie jest wypełnione dla elektronów w pasmie przewodnictwa. W jamach potencjału pasma przewodnictwa nie powstają więc poziomy dozwolone, ponieważ kinetyczna energia lokalizacji bardzo lekkich elektronów przewyższa głębokość tych jam. Nie pojawiają się więc dozwolone poziomy energetyczne leżące poniżej krawędzi pasma w czystym półprzewodniku. Wytworzone bariery potencjału nie przeszkadzają praktycznie ruchowi

elektronu o energii równej energii skraju pasma, ponieważ prawdopodobieństwo tunelowania W przez te bariery [18]:

$$W \simeq \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m^*U(r)}\,L\right] \simeq \exp\left[-2\sqrt{\frac{2\Delta}{\hbar^2}\,\overline{m^*L^2}}\right]$$

jest stosunkowo duże. Krawędź pasma przewodnictwa nie będzie więc odtwarzała zmian potencjału oddziaływania — pozostanie stała w całym obszarze półprzewodnika. W stosunku do swego położenia w czystym półprzewodniku będzie ona jedynie przesunięta o nieznaczny odcinek (równy uśrednionemu oddziaływaniu wszystkich domieszek) w nowe położenie, zwane *nominalnym skrajem pasma*. W tym przypadku szerokość przerwy energetycznej w obszarze półprzewodnika będzie się zmieniać. Ilustruje to rys. 5.



Rys. 5. Schemat zniekształconej struktury pasmowej GaAs dla koncentracji domieszek $N \simeq 10^{18}$ cm^{-3} (a) oraz wykres rozkładu gęstości stanów (b)
Linia punktowa obrazuje kształt barier potencjału dla elektronów w pasmie przewodnictwa, linia kreskowa — rozkład gęstości stanów półprzewodnika czystego [41]

Doświadczalnymi dowodami istnienia ogonów pasm są wyniki pomiarów widm absorpcyjnych, krawędzi absorpcji, przesunięć pasm w widmach emisyjnych przy wzrastającym domieszkowaniu i innych [11, 19÷28]. Np. J. I. Pankove [23] podczas badania katodoluminescencji GaAs typu p zaobserwował ze wzrostem koncentracji akceptorów N_A przesunięcie pasma emisyjnego w stronę niższych energii. Efekt ten był widoczny począwszy od koncentracji $N_A \simeq 6 \cdot 10^{18}$ cm^{-3}. Fakt ten cytowany autor tłumaczył możliwością udziału w luminescencji stanów w ogonach pasm.

Przesunięcie pasma emisyjnego ze wzrostem koncentracji domieszek, obserwowane podczas badań elektroluminescencji GaAs [29], może być wytłumaczone bez uwzględniania ogonów pasm [30]. Nie należy więc traktować występowania tego przesunięcia jako dowodu ich obecności.

3. ROZKŁAD GĘSTOŚCI STANÓW W PÓŁPRZEWODNIKU SILNIE DOMIESZKOWANYM

Obecność ogonów pasm w półprzewodniku silnie domieszkowanym w zasadniczy sposób zmieniła nasze wyobrażenie o zachodzących w nim procesach rekombinacyjnych. Aby wyprowadzić nowe zależności, opisujące działanie przyrządów zbudowanych z takiego materiału, niezbędna jest znajomość funkcji rozkładu stanów w ogonie pasma. Zajmowano się tym już dość dawno [31÷35]. Otrzymane wyniki były najczęściej następującej postaci:

$$\varrho(E) \sim \exp(-|E|^n), \tag{2}$$

gdzie: $\varrho(E)$ — funkcja gęstości stanów, a E — energia liczona od dna pasma.

Wzór (2) zawiera dwa, najczęściej stosowane do obliczeń, wyrażenia opisujące gęstość stanów w ogonie pasma:

— Gaussa (dla $n = 2$),

— exponencjalne (dla $n = 1$).

W przypadku pierwszego rodzaju funkcji rozkładu stanów najczęściej powoływano się na zależności E. O. Kane'a [36÷37]. Rozpatrzył on pełny hamiltonian, opisujący elektron (dziurę) w półprzewodniku silnie domieszkowanym, który w przybliżeniu masy efektywnej może być przedstawiony w sposób następujący:

$$H = H_0 + U(r) = -\left(\frac{\hbar^2}{2m^*}\right)\nabla^2 + E_c + U(r), \tag{3}$$

gdzie: H_0 — hamiltonian półprzewodnika czystego.

Potencjał $U(r)$ można podzielić na część stałą i zmienną:

$$U(r) = U_0 + U_z(r). \tag{4}$$

Stała część potencjału U_0, opisująca uśrednione oddziaływanie atomów domieszek w krysztale, powoduje przesunięcie skraju pasma w nowe położenie E_p:

$$E_p = E_c + U_0, \tag{5}$$

zwane *nominalnym* skrajem pasma.

Wartość oczekiwana zmiennej części potencjału $U_z(r)$ wynosi zero; $U_z(r)$ opisuje przypadkowy rozkład atomów domieszek w całej objętości kryształu. Prawdopodobieństwo znalezienia elektronu o energii potencjalnej w przedziale $U, U+dU$ jest równe $P(U)dU$, gdzie:

$$\int P(U)dU = 1.$$

Wysoka koncentracja swobodnych nośników w nieskompensowanym półprzewodniku powoduje wystąpienie zjawiska ekranowania przez te nośniki zjonizowanych jonów domieszek. W przypadku, gdy liczba jonów wewnątrz tzw. *kuli Debye'a*, tj. kuli o promieniu równym promieniowi ekranowania Debye'a r_D, jest dużo większa od 1:

$$\frac{4}{3}\pi r_D^3 N^* \gg 1, \tag{6}$$

energię potencjalną elektronu w polu pojedynczego dodatniego jonu opisuje się funkcją:

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{\varepsilon r}\exp\left(-\frac{r}{r_D}\right), \tag{7}$$

gdzie: e — ładunek elektronu, Ze — ładunek jonu, a ε — współczynnik przenikalności dielektrycznej.

Przez N^* oznaczono koncentrację zjonizowanych domieszek. Przyjmuje się ją równą koncentracji swobodnych nośników ładunku — elektronów w pasmie przewodnictwa (dla materiału typu n) lub dziur w pasmie walencyjnym (dla materiału typu p).

E. O. Kane założył, że w rzeczywistym krysztale energia potencjalna elektronu jest sumą niezależnych wkładów od poszczególnych jonów domieszek. Dalszym założeniem E. O. Kane'a było przyjęcie, że potencjał $U(r)$ zmienia się wystarczająco wolno, by móc określić lokalną gęstość stanów $\varrho_{lok}(E)$ (w objętości rzędu *kuli Debye'a*) w taki sposób, jakby ten potencjał był stały $U(r) = U_{lok}$:

$$\varrho_{lok}(E) = \frac{\sqrt{2}m^{*3/2}}{\pi^2\hbar^3}(E-U_{lok})^{1/2}. \tag{8}$$

Szukana gęstość stanów $\varrho(E)$ będzie uśrednioną wartością $\varrho_{lok}(E)$:

$$\varrho(E) = \frac{\sqrt{2}m^{*3/2}}{\pi^2\hbar^3}\int_{-\infty}^{E}(E-U)^{1/2}P(U)\,dU. \tag{9}$$

Podstawowym założeniem E. O. Kane'a było przyjęcie funkcji rozkładu $P(U)$ jako funkcji Gaussa:

$$P(U) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{U^2}{2\sigma^2}\right), \tag{10}$$

gdzie: $\sigma^2 = \langle U_z^2(r)\rangle$.

Ostateczna zależność otrzymana przez E. O. Kane'a [36] ma następującą postać:

$$\varrho(E) = y(E/\eta)m^{*3/2}(2\eta)^{1/2}\pi^{-2}\hbar^{-3}, \tag{11}$$

w której:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x}(x-\xi)^{1/2}\exp(-\xi^2)\,d\xi, \tag{12}$$

$$\eta = \frac{e^2}{\varepsilon}(4\pi N^* r_D)^{1/2}, \tag{13}$$

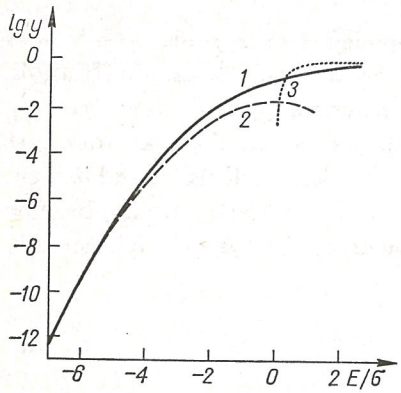
gdzie: E — energia liczona od nominalnego skraju pasma, N^* — koncentracja zjonizowanych domieszek.

Potwierdzeniem słuszności opisu gęstości stanów w ogonie pasma przez funkcję Gaussa jest fakt, iż zależność (11) dla energii charakterystycznej η dążącej do zera redukuje się do standardowego wyrażenia na gęstość stanów w pasmie, ponieważ

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = x^{1/2},$$

co wyraźnie widać na rys. 6.

F. Stern [38] stosując wzór (11) obliczył zależności progowe dla emisji stymulowanej w laserach złączowych, otrzymując dobrą zgodność z eksperymentami. G. Lucovsky [39], korzystając z zależności (11), wyznaczył teoretycznie kształt widma emisyjnego elektroluminescencji GaAs, otrzymując dobrą zgodność z wynikami doświadczeń.



Rys. 6. Wykres funkcji $y(x)$ (12), opisującej rozkład gęstości stanów w pobliżu nominalnego skraju pasma ($E = 0$) — — krzywa *1*. Krzywa *2* obrazuje funkcję Gaussa z dyspersją *6*, a krzywa *3* — funkcję $E^{1/2}$ (dla $E > 0$) [14]

A. G. Aleksanjan i in. [40], stosując funkcję Gaussa rozkładu gęstości stanów pasma akceptorowego, obliczyli dla lasera półprzewodnikowego współczynnik wzmocnienia i szybkość rekombinacji spontanicznej oraz wyprowadzili wzory na prąd progowy, quasi-poziomy Fermiego i częstotliwość generacji w zależności od koncentracji domieszek i temperatury.

H. R. Wittmann [40a] wyznaczył z pomiarów absorpcyjnych i elektroluminescencyjnych zależność parametru η od koncentracji domieszek, otrzymując

$$\eta \sim N^{0,39}.$$

Ponieważ promień ekranowania Debye'a dla nieskompensowanego półprzewodnika zdegenerowanego ma postać [13]:

$$r_D = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi a_0^3}{3N^*}\right)^{1/6},$$

gdzie: a_0 — efektywny promień Bobra dla wodoropodobnego atomu domieszki, wzór E. O. Kane'a (13) daje zależność

$$\eta \sim N^{5/12} \approx N^{0,4167},$$

która dobrze się zgadza z wynikiem eksperymentalnym H. R. Wittmanna.

Dla półprzewodnika skompensowanego analogiczne z pracą Kane'a obliczenia, przeprowadzone przez V. S. Bagaeva i in. [41], dały wzór następujący:

$$\varrho(E) = \sqrt{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{2}{\pi^2}\frac{m^*\Delta^2}{\hbar^2 E}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{E}{\Delta}\right)^2\right]. \tag{14}$$

Zależność tę wykorzystali B. M. Vul i in. [42] do wyjaśnienia charakterystyki prądowo-napięciowej diod z GaAs.

M. I. Dyakonov i in. [43] wyznaczyli funkcję gęstości stanów półprzewodnika skompensowanego silnie domieszkowanego w zewnętrznym polu magnetycznym. Zależność ta, dla przypadku zanikającego pola magnetycznego, jest identyczna ze wzorem (11), wyprowadzonym przez E. O. Kane'a.

Dużo wygodniejsza od funkcji Gaussa jest jednak postać exponencjalna [44]:

$$\varrho(E) \sim \exp\left(-\frac{|E|}{E_0}\right), \tag{15}$$

gdzie: E_0 — parametr zależny od materiału i domieszkowania, zmieniający się dla GaAs w zakresie 0,006÷0,020 eV [12].

J. I. Pankove [12] stosował powyższą zależność do teoretycznego opisu pomiarów absorpcyjnych w GaAs. B. Tuck [9] obliczył przy pomocy tego wzoru kształt widma emisyjnego dla GaAs, otrzymując bardzo dobrą zgodność z wynikami eksperymentalnymi. Podobną pracę wykonali również G. Lasher i F. Stern [45]. W obu pracach przyjęto $E_0 = 0{,}015$ eV. M. J. Adams [46] stosując zależność (15) wyprowadził dla laserów złączowych GaAs wzory na prąd progowy, częstotliwość promieniowania, charakterystyki prądowo-napięciowe oraz świetlną moc wyjściową poniżej i powyżej progu.

Najogólniejszą zależność, obejmującą wszystkie podane powyżej wzory, wyprowadzili w 1966 r. B. I. Halperin i M. Lax [47÷49], stosując metodę wariacyjną. Podstawowym stosowanym przez nich założeniem jest przyjęcie, że dla danej energii E w ogonie pasma prawie wszystkie funkcje własne mają tę samą postać. W szczególności dla $E_i \approx E$:

$$\Psi_i(r) \approx f(r-r_0), \tag{16}$$

gdzie: f jest stałą funkcją dla każdego E, a r_0 jest pewnym punktem w krysztale, który może być różny dla różnych i. Funkcja f musi oczywiście spełniać warunek unormowania

$$\int |f(r)|^2 dr = 1.$$

Wartość średnia energii potencjalnej $U_z(r)$ w obszarze wokół punktu $r = r_0$ jest wtedy równa

$$U_s(r_0) = \int |f(r-r_0)|^2 U_z(r) dr. \tag{17}$$

Obliczenie gęstości stanów bardzo się upraszcza w przypadku wystarczająco wysokiej koncentracji domieszek, gdy funkcja $U_s(r_0)$ będzie opisana rozkładem Gaussa.

W tym miejscu, podobnie jak poprzednio E. O. Kane [36, 37] oraz V. S. Bagaer i in. [41], B. I. Halperin i M. Lax przedstawili potencjał $U_z(r)$ jako potencjał ekranujący (7). Założyli też, że optymalną postacią funkcji f jest funkcja sferycznie symetryczna:

$$f(r) = \frac{s(r)}{\sqrt{4\pi r}}, \tag{18}$$

gdzie $s(r)$ zanika dla $r = 0$ i $r = \infty$.

Wynik obliczeń wyrażono przez uniwersalne funkcje $a(v)$ i $b(v)$:

$$\varrho(v) = \frac{2m^* a(v)}{r_D \hbar^2 \xi^2} \exp\left[-\frac{b(v)}{2\xi}\right], \tag{19}$$

gdzie:

$$\nu = \frac{2m^* r_D^2 E}{\hbar^2} - \frac{8\pi m^* e^2 r_D^4 N^*}{\hbar^2 \varepsilon}, \tag{20}$$

$$\xi = \frac{8\pi m^{*2} e^4 N^* r_D^5}{\varepsilon^2 \hbar^4}, \tag{21}$$

E — energia liczona od skraju pasma.

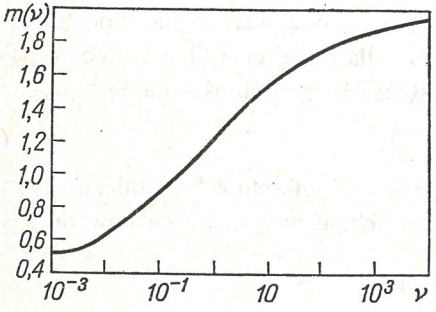
Funkcje $a(\nu)$ i $b(\nu)$ zostały stabelowane w pracy [47].

Przedstawmy $b(E)$ w postaci potęgowej:

$$b(E) = AE^m. \tag{22}$$

Wykres $m(\nu)$ został pokazany na rys. 7. Widać z niego, że daleko w głębi pasma zabronionego, czyli dla dużych wartości $|E|$, zależność (19) sprowadza się do postaci Gaussa:

$$\varrho(E) \sim \exp\left(-\frac{E^2}{2\sigma^2}\right),$$



Rys. 7. Wykres wartości wykładnika m zależności potęgowej (22) w funkcji bezwymiarowej energii ν [47]

podczas gdy blisko nominalnego skraju pasma, czyli dla $|E|$ małych, funkcja rozkładu gęstości stanów wyraża się wzorem:

$$\varrho(E) \sim \exp\left[-\left(\frac{|E|}{\zeta}\right)^{1/2}\right],$$

gdzie:

$$\zeta = \frac{2}{9}\frac{\xi^2 \hbar^2}{m^* r_D^2}.$$

W zakresie pośrednich energii obowiązuje w przybliżeniu zależność eksponencjalna:

$$\varrho(E) \sim \exp\left(-\frac{|E|}{\varepsilon_0}\right)$$

gdzie:

$$\varepsilon_0 \approx 0{,}1\xi.$$

M. Saitoh i S. F. Edwards [50], wyprowadzając wzór na funkcję gęstości stanów metodą funkcji Greena, otrzymali przy tych samych założeniach potwierdzenie wyników B. I. Halperina i M. Laxa.

V. L. Bonch-Bruyevich [7, 51] korzystał również z metody funkcji Greena. Otrzymał jednak na gęstość stanów zupełnie inną zależność. Rozpatrując energię potencjalną elektronu uwzględnił on, oprócz potencjału ekranowania, także inne oddziaływania, z których szczególnie ważnym okazało się oddziaływanie wymienne w gazie zwyrodniałym. Dla $|E| \gg E_r$, gdzie

$$E_r = \frac{2m^{*1/2}e^3N^{*1/6}}{\varepsilon^{3/2}\hbar}, \tag{23}$$

funkcja gęstości stanów w ogonie pasma według V. L. Bonch-Bruyevicha wyraża się w sposób następujący:

$$\varrho(E) \sim \exp\left[-\frac{|E|}{E_r}\ln\frac{|E|}{E_r}\right]. \tag{24}$$

Cytowany autor określił też wpływ obecności jonów domieszek na kształt pasm dozwolonych. Przy spełnieniu nierówności:

$$\mu \gg a \equiv \left(\frac{\pi N^* e^4 r_D}{\varepsilon^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\eta,$$

gdzie: μ — poziom Fermiego, gęstość stanów w zakresie energii $E \approx \mu$ jest według niego opisana wzorem

$$\varrho(E) \sim \sqrt{E}\left(1-\frac{a^2}{4E^2}\right).$$

Zależność ta dla półprzewodnika czystego ($N^* = a = 0$) redukuje się do znanej postaci dla gazu idealnego

$$\varrho(E) \sim \sqrt{E},$$

co jest potwierdzeniem prawidłowości obliczeń.

Wszystkie powyższe wzory: (11), (14), (19) i (24) przestają być prawdziwe dostatecznie głęboko w paśmie zabronionym, gdzie główną rolę zaczynają odgrywać małe co do wielkości (w porównaniu z promieniem ekranowania r_D) fluktuacje potencjału.

Zagadnienie to rozpatrzyli B. I. Šklovskij i A. L. Èfros [52÷53], otrzymując dla poziomów energii znajdujących się głęboko w pasmie zabronionym w przypadku nieuporządkowanego rozkładu domieszek funkcję gęstości stanów w następującej postaci:

$$\varrho(E) \sim \exp\left(-\sqrt{|E|}\ln|E|\right). \tag{25}$$

Poziomy dozwolone, leżące głęboko w przerwie energetycznej, powstają w obszarach półprzewodnika, w których lokalna koncentracja jonów domieszek jest dużo większa od przeciętnej. Podczas procesów technologicznych w wysokiej temperaturze jony domieszek w takich obszarach oddziaływują ze sobą, co prowadzi do powstania pewnych korelacji w ich przestrzennym rozkładzie. Rozkład ten zostaje potem „zamrożony" podczas chło-

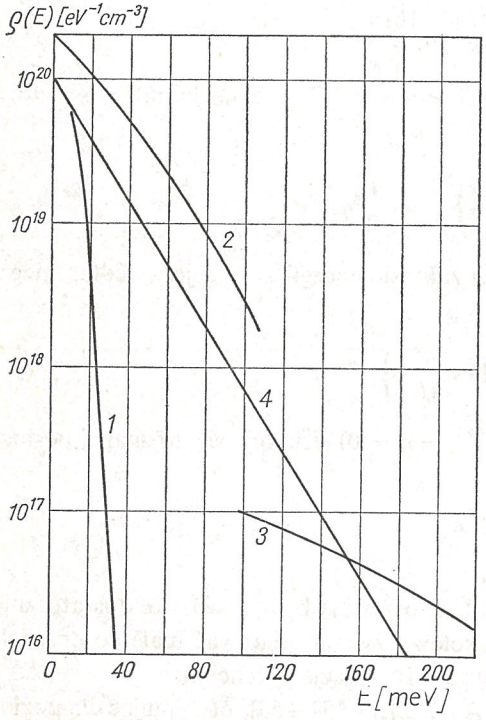
dzenia próbki. Nie jest więc to rozkład całkowicie przypadkowy i do jego opisu nie może już być stosowana funkcja Gaussa.

B. I. Šklovskij i A. L. Èfros [53] obliczyli funkcję gęstości stanów z uwzględnieniem tych korelacji, otrzymując następujący wynik:

$$\varrho(E) \sim \exp(-E^{3/2}).$$

W celu porównania powyższych zależności podano na rys. 8 wykresy funkcji gęstości stanów opisywanych przez wzory (11), (15), (19) i (24) dla ogona pasma walencyjnego GaAs typu p domieszkowanego cynkiem o koncentracji $N_A = 10^{20}$ cm^{-3}. Obliczenia przedstawiono w Dodatku.

Poszczególne krzywe na wykresie wykazują spore rozbieżności. Wynikają one z przyjętych założeń oraz stosowanych metod obliczeń. Doświadczalne dowody prawdziwości poszczególnych wzorów potwierdzają je jedynie od strony jakościowej.



Rys. 8. Wykres rozkładu gęstości stanów dla ogona pasma walencyjnego GaAs typu p domieszkowanego cynkiem o koncentracji $N_A = 10^{20}$ cm^{-3} w temperaturze pokojowej

1 — zależność B. I. Halperina i M. Laxa [47], wzór (19), 2 — zależność E. O. Kane'a [36], wzór (11), *3* — zależność V. L. Bonch-Bruyevicha [7], wzór (24), *4* — zależność eksponencjalna, wzór (15); krzywe 3 i 4 zostały dopasowane do pozostałych

Problem dokładnego określenia funkcji gęstości stanów w ogonie pasma nie został jeszcze definitywnie rozstrzygnięty i stosuje się do obliczeń zarówno zależność Gaussa — wzory (11) i (14), jak i eksponencjalną — wzór (15) [54].

Na podstawie wyników B. I. Halperina i M. Laxa [47] należy sądzić, że wybór jednego z tych wzorów powinien być uzależniony od rozpatrywanego zagadnienia. W przypadku, gdy dominującą rolę w opisywanym procesie odgrywają stany, leżące stosunkowo daleko w głębi pasma zabronionego, należy stosować postać Gaussa, natomiast gdy najbardziej istotne są stany, leżące bliżej nominalnego skraju pasma — bardziej stosowna jest postać eksponencjalna [55 ÷ 56].

Dodatek

Obliczenia funkcji rozkładu gęstości stanów, podanych według wzorów (11), (15), (19) i (24)

1) *Założenia*

Materiał GaAs typu p domieszkowany cynkiem $-N_A = 10^{20}$ cm^{-3}. Ogon pasma walencyjnego. Temperatura pokojowa $-T = 300$°K.

2) *Obliczenia wstępne*

a) Koncentracja krytyczna [57]

$$N_A^{kr}[\text{cm}^{-3}] = 10^{22,5}\left(\frac{m_h^*}{m_0}\right)^{3/2}(\Delta E_A[\text{eV}])^{3/2} \simeq 5{,}8 \cdot 10^{19},$$

gdzie: $\Delta E_A = 0{,}03$ eV [1] — energia aktywacji akceptorów, $m_h^* = 0{,}5\ m_0$ [1]. Ponieważ $N_A = 10^{20}$ cm^{-3} > $N_A^{kr} \simeq 5{,}8 \cdot 10^{19}$ cm^{-3}, uznajemy półprzewodnik za zdegenerowany.

b) Koncentracja dziur w temperaturze $T = 300$°K wynosi według [58]

$$p \simeq 2 \cdot 10^{19}\ \text{cm}^{-3}.$$

Przyjmujemy, że koncentracja zjonizowanych domieszek jest równa koncentracji dziur.

c) Efektywny promień Bohra dla wodoropodobnego atomu akceptora [59]

$$a_0 = \frac{a_B \varepsilon}{\left(\frac{m_h^*}{m_0}\right)} \simeq 1{,}393 \cdot 10^{-7}\ \text{cm},$$

gdzie:

a_B — promień Bohra,

ε — stała dielektryczna, dla GaAs [60] $\varepsilon = 13{,}13$.

d) Promień ekranowania Debye'a dla nieskompensowanego półprzewodnika zdegenerowanego [13]:

$$r_D = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi a_0^3}{3N^*}\right)^{1/6} \simeq 1{,}14 \cdot 10^{-7}\ \text{cm}.$$

e) Średnia głębokość jam potencjału [14]:

$$\Delta = \left(\frac{2\pi e^4 r_D N^*}{\varepsilon^2}\right)^{1/2} \simeq 41{,}6\ \text{meV}.$$

3) *Obliczenie zależności E. O. Kane'a* [36]

a) Energia charakterystyczna [36]

$$\eta = \left(\frac{4\pi e^4 r_D N^*}{\varepsilon^2}\right)^{1/2} = \sqrt{2}\,\Delta \simeq 58{,}9 \text{ meV}.$$

b) Współczynnik przy funkcji $y(E/\eta)$

$$\frac{m_h^{*3/2}(2\eta)^{1/2}}{\pi^2\hbar^3} \simeq 5{,}86 \cdot 10^{20} \text{ eV}^{-1} \text{ cm}^{-3}.$$

c) Ostateczna postać wzoru

$$\varrho_k(E) \simeq 5{,}86 \cdot 10^{20} y\left(\frac{E[\text{meV}]}{58{,}9}\right) \text{eV}^{-1} \text{ cm}^{-3}.$$

Zależność $y(x)$ została podana w postaci wykresu przez E. O. Kane'a w publikacji [36].

4) *Obliczenie zależności B. I. Halperina i M. Laxa* [47]

a) Obliczenie współczynnika ξ [47]

$$\xi = \frac{8\pi m_h^{*2} e^4 N^* \nu_D^5}{\varepsilon^2 \hbar^4} \simeq 0{,}504.$$

b) Obliczenie współczynnika przy funkcji $a(\nu)$:

$$\frac{2m_h^*}{r_D \hbar^2 \xi^2} \simeq 5{,}72 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3} \text{ eV}^{-1}.$$

c) Obliczenie bezwymiarowej energii ν

$$\nu = \frac{2m_h^* r_D^2 E}{\hbar^2} - \frac{8\pi m_h^* e^2 r_D^4 N^*}{\varepsilon \hbar^2} \simeq 0{,}123 \cdot E \text{ [meV]} - 3 \cdot 10^{-20} \simeq 0{,}123 \cdot E \text{ [meV]}.$$

d) Ostateczna postać wzoru:

$$(\varrho)_{HL}^{(\nu)} \simeq 5{,}72 \cdot 10^{22} a(\nu) \exp\left[-\frac{b(\nu)}{1{,}008}\right],$$

gdzie $\nu \simeq 0{,}123 \cdot E$ [meV]. Uniwersalne funkcje $a(\nu)$ i $b(\nu)$ zostały podane w postaci tabeli w pracy [47].

5) *Obliczenie zależności V. L. Bonch-Bruyevicha* [7]

a) Obliczenie energii granicznej

$$E_r = \frac{2m_h^{*1/2} e^3 N^{*1/6}}{\varepsilon^{3/2}\hbar} \simeq 97{,}6 \text{ meV}.$$

b) Ostateczna postać wzoru

$$\varrho_B(E) \sim \exp\left(-\frac{|E[\text{meV}]|}{97{,}6} \ln \frac{|E[\text{meV}]|}{97{,}6}\right).$$

6) *Obliczenie zależności eksponencjalnej*

a) Obliczenie parametru E_0. Według wykresu podanego przez J. I. Pankove'a [12] dla koncentracji akceptorów $N_A = 10^{20}$ cm^{-3}

$$E_0 \simeq 20 \text{ meV}.$$

b) Ostateczna postać wzoru

$$\varrho_e(E) \sim \exp\left(-\frac{|E[\text{meV}]|}{20}\right).$$

W przypadku funkcji V. L. Bonch-Bruyevicha i eksponencjalnej współczynniki proporcjonalności dobieramy na wykresie dopasowując je do pozostałych.

Podziękowanie. Autor chciałby podziękować doc. dr hab. B. Mroziewiczowi za cenne uwagi i sugestie podczas opracowywania treści artykułu oraz mgr inż. E Gawrońskiej za pomoc w obliczeniach.

LITERATURA

1. J. I. Pankove, *Optical Processes in Semiconductors*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1971.
2. P. Aigrain, *Theory of impurity bands with randomly distributed centeres*, Physica, Vol. 20, No. 11, 1954, pp. 978—982.
3. F. Stern, R. M. Talley, *Impurity band in semiconductors with small effective mass*, Phys. Rev., Vol. 100, No. 6, 1955, pp. 1638—1643.
4. M. Lax, J. C. Phillips, *One-dimensional impurity bands*, Phys. Rev., Vol. 110, No. 1, 1958, pp. 41—49.
5. G. Lucovsky, C. J. Repper, *Radiative recombination through impurity levels in GaAs p-n junctions*, Appl. Phys. Lett., Vol. 3, No. 5, 1963, pp. 71—72.
6. T. N. Morgan, *Broadening of impurity bands in heavily doped semiconductors*, Phys. Rev., Vol. 139, No. 1A, 1965, pp. 343—348.
7. V. L. Bonch-Bruyevich, *The Electronic Theory of Heavily Doped Semiconductors*, American Elsevier Publishing Company Inc., New York 1966.
8. J. I. Pankove, *Influence of degeneracy on recombination radiation in germanium*, Phys. Rev. Lett., Vol. 4, No. 1, 1960, pp. 20—21.
9. B. Tuck, *Conduction band density of states in impure GaAs*, J. Phys. Chem. Solids, Vol. 29, No. 4, 1968, pp. 615—622.
10. J. I. Pankove, *Cathodoluminescence of n-type GaAs*, J. Appl. Phys., Vol. 39, No. 12, 1968, pp. 5368—5371.
11. D. E. Hill, *Infrared transmission and fluorescence of doped gallium arsenide*, Phys. Rev., Vol. 133, No. 3A, 1964, pp. 866—872.
12. J. I. Pankove, *Absorption edge of impure gallium arsenide*, Phys. Rev., Vol. 140, No. 6A, 1965 pp. 2059—2065.
13. L. V. Keldyš, G. P. Prošk o, *Infrakrasnoe pogloščenie v sil'no legirovannom germanii*, Fiz. Tverd. Tela, Vol. 5, No. 12, 1963, pp. 3378—3389.
14. P. G. Eliseev, *Issledovanie inžekcionnych kvantovych generatorov*, Kvantovaja Radiofizika, Vol. 52, 1970, pp. 3—117.

15. E. M. Conwell, B. W. Levinger, *Band structure of heavily doped semiconductors*, Proc. Int. Conf. Phys. Semicond., Exeter 1962, pp. 227—233.
16. P. A. Wolf, *Theory of the band structure of very degenerate semiconductors*, Proc. Int. Conf. Phys. Semicond., Exeter 1962, pp. 220—226.
17. P. A. Wolf, *Theory of the band structure of very degenerate semiconductors*, Phys. Rev., Vol. 126, No. 2, 1962, pp. 405—412.
18. A. S. Dawydow, *Mechanika kwantowa*, PWN, Warszawa 1969, s. 89.
19. I. Kudman, L. Vieland, *Absorption edge in degenerate n-type gallium arsenide*, J. Phys. Chem. Solids, Vol. 24, No. 7, 1963, pp. 967—969.
20. R. Braunstein, J. I. Pankove, H. Nelson, *Effect of doping on the emission peak and the absorption edge of GaAs*, Appl. Phys. Lett., Vol, 3, No. 2, 1963, pp. 31—33.
21. C. Benoit a'la Guillaume, J. Cernogora, *Recombinaison radiative dans le germanium fortement dopé et compensé*, Phys. St. Sol., Vol. 11, No. 1, 1965, pp. 295—302.
22. G. Lucovsky, A. J. Varga, R. F. Schwarz, *Edge absorption and photoluminescence in closely compensated GaAs*, Solid State Communications, Vol. 3., No. 1, 1965, pp. 9—13.
23. J. I. Pankove, *Cathodoluminescence of p-type GaAs*, J. Phys. Soc. Jap., Vol. 21, Suppl, 1966, pp. 298—301.
24. M. A. Afromowitz, D. Redfield, *Temperature dependence of the absorption edge of GaAs*, Proc. of the IX Int. Conf. on the Physics of Semiconductors, Moscow 1968, Vol. 1, pp. 98—102.
25. C. Benoit a'la Guillaume, J. Cernogora, *Radiative recombination from band tail) in highly doped and compensated germanium*, jw., Vol. 1, pp. 103—108.
26. T. Arizumi, A. Yoshidla, N. Sawaki, *Density of states and band tail of* (000) *and* (100) *valleys of heavily doped germanium*, jw. Vol. 1, pp. 108—113.
27. D. N. Nasledov, B. V. Tsarenkov, *Radiative recombination in GaAs*, jw. Vol. 1, pp. 476—481.
28. C. Benoit a'la Guillaume, J. Cernogora, *Radiative recombination in highly doped germanium*, Phys. St. Sol., Vol. 35, No. 2, 1969, pp. 599—612.
29. G. C. Dousmanis, C. W. Mueller, H. Nelson, *Effect of doping on frequency of stimulated and incoherent emission in GaAs diodes*, Appl. Phys. Lett., Vol. 3, No. 8, 1963, pp. 133—135.
30. W. Nakwaski, *Rekombinacja promienista w półprzewodnikach silnie domieszkowanych*, w przygotowaniu.
31. R. H. Paramenter, *Energy levels of disordered alloy*, Phys. Rev., Vol. 97, No. 3, 1955, pp. 587—598.
32. R. H. Paramenter, *Energy levels of disordered alloy*, Phys. Rev., Vol. 104, No. 1, 1956, pp. 22—32.
33. H. L. Frisch, S. P. Lloyd, *Electron levels in a one-dimensional random lattice*, Phys. Rev., Vol. 120, No. 4, 1960, pp. 1175—1189.
34. B. I. Halperin, *Green's functions for a particle in a one-dimensional random potential*, Phys. Rev., Vol 139, No. 1A, 1965, pp. 104—117.
35. J. Zittartz, J. S. Langer, *Theory of bound states in a random potential*, Phys. Rev., Vol. 148, No. 2, 1966, pp. 741—747.
36. E. O. Kane, *Thomas-Fermi approach to impure semiconductor band structure*, Phys. Rev., Vol. 131, No. 1, 1963, pp. 79—88.
37. E. O. Kane, *Energy bands in impure semiconductors*, Proc. Int. Conf. Phys. Semicond., Exeter 1962, pp. 252—258.
38. F. Stern, *Effect of band tails on stimulated emission of light in semiconductors*, Phys. Rev., Vol. 148, No. 1, 1966, pp. 186—194.
39. G. Lucovsky, *Mechanism for radiative recombination in GaAs p-n juctions*, Physics of Quantum Electronics, ed. by P. L. Kelley, B. Lax, P. E. Tannenwald, Mc Graw-Hill Book Company, New York /San Francisco/Toronto/London/Sydney, 1966.
40. A. G. Aleksanjan, I. A. Poluèktov, Ju. M. Popov, *O vlijanii koncentracii primesej na porogovye charakteristiki poluprovodnikovych kvantovych generatorov*, Kvantovaja èlektronika, No. 3, 1971, pp. 15—22.

40a. H. R. Wittmann, The shape parameter of donor band tails in gallium arsenide, Phys. St. Sol., Vol. 35, No. 2, 1969, pp. 865-869.
41. V. S. Bagaev, J. N. Berozašvili, B. M. Vul, E. I. Zavarickaja, L. V. Keldyš, A. P. Šotov, *Ob energetičeskom spektre silno legirovannogo arsenida gallija*, Fiz. Tverd. Tela, Vol. 6, No. 5, 1964, pp. 1399—1405.
42. B. M. Vul., E. I. Zavarickaja, A. P. Šotov, *Vol'tampernye charakteristiki p-n-perechodov v silno legirovannom arsenide gallija*, Fiz. Tverd. Tela, Vol. 6, No. 5, 1964, pp. 1465—1471.
43. M. I. Dyakonov, A. L. Efros, D. L. Mitchell, *Magnetic freeze-out of electrons in extrinsic semiconductors*, Phys. Rev., Vol. 180, No. 3, 1969, pp. 813—818.
44. Yu. M. Popov, *Semiconductor lasers*, Applied Optics, Vol. 6, No. 11, 1967, pp. 1818—1824.
45. G. Lasher, F. Stern, *Spontaneous and stimulated recombination radiation in semiconductors*, Phys. Rev., Vol. 133, No. 2A, 1964, pp. 553—563.
46. M. J. Adams, *Theoretical effects of exponential band tails on the properties of the injection laser*, Solid State Electronics, Vol. 12, No. 8, 1969, pp. 661—669.
47. B. I. Halperin, M. Lax, *Impurity-band tails in the high-density limit*. I. *Minimum counting methods*, Phys. Rev., Vol. 148, No. 2, 1966, pp. 722—740.
48. M. Lax, B. I. Halperin, *Impurity band tails in degenerate semiconductors*, J. Phys. Soc. Jap., Vol. 21, Suppl., 1966, pp. 218—223.
49. B. I. Halperin, M. Lax, *Impurity-band tails in the high-density limit*. II. *Higher order corrections*, Phys. Rev., Vol. 153, No. 3, 1967, pp. 802—814.
50. M. Saitoh, S. F. Edwards, *A note on the density of states of a disordered system with Gaussian random potentials*, J. Phys. C: Solid State Physics, Vol. 7, No. 21, 1974, pp. 3937—3940.
51. V. L. Bonch-Bruyevich, *On the theory of degenerate semiconductors*, Proc. Int. Conf. Phys. Semicond., Exeter 1962, pp. 216—219.
52. B. I. Šklovskij, A. L. Èfros, *Chvosty plotnosti sostojanij v sil'no legirovannych poluprovodnikach*, Fiz. Tech. Poluprovod., Vol 4, No. 2, 1970, pp. 305—316.
53. B. I. Šklovskij, A. L. Èfros, *Glubokie chvosty plotnosti sostojanij i pogloščenie sveta v poluprovodnikach-Žurnal èksperimental'noj i teoretičeskoj fiziki*, Vol. 58, No. 2, 1970, pp. 657—665.
54. M. J. Adams, P. T. Landsberg, *The theory of the injection laser*, *Gallium Arsenide Lasers*, ed. by C. H. Gooch, Wiley-Interscience, London/New York/Sydney/Toronto 1969.
55. P. G. Eliseev, M. A. Manko, *The energy spectrum of the heavily doped gallium arsenide from the data of the electroluminescent p-n junction*, Proc. of. the IX Int. Conf. on the Physics of semiconductors, Moscow 1968, Vol. 1, pp. 113—118.
56. P. G. Eliseev, I. Ismailov, A. I. Krasilnikov, M. A. Manko, I. Z. Pinsker, V. P. Strakhov, *About the threshold phenomena in the injection lasers*, jw. Vol. 1, pp. 519—523.
57. P. S. Kiriejew, *Fizyka półprzewodników*, PWN, Warszawa 1971, s. 229.
58. *Arsenid Gallija. Polučenie, svojstva i primenenie*, Pod red. F. P. Kesamanly i D. N. Nasledova, Izdatel'stvo „Nauka", Moskva 1973, s. 52.
59. A. I. Anselm, *Wstęp do teorii półprzewodników*, PWN, Warszawa 1967.
60. *American Institute of Physics Handbook*, Dwight E. Gray, Coordinating Ed. Mc-Graw-Hill Book Company, 1972, s. 9—110.

W. NAKWASKI

INFLUENCE OF HEAVY DOPING ON BAND ENERGY MODEL OF SEMICONDUCTOR: BAND-TAILING

Summary

Explanations of the reasons for band-tailing in heavily doped semiconductors existing at present are discussed by taking into consideration the process of forming the impurity bands as well as the influences of deformation and electrostatic potentials successively.

The equations describing the functions of density of states in the band tails are also shown; assuptions and shortly the method used for deriving these equations are presented.

In order to find the comparison between them, plots of density of states were made, that were calculated according to suitable equations. Obtained curves differ from each other.

W. NAKWASKI

EFFET DE NOMBREUSES IMPURETÉS SUR LE MODÈLE ÉNERGÉTIQUE À BANDE DE SEMI-CONDUCTEUR — QUEUSES DE BANDES

Résumé

Dans l'article on tâche d'expliquer les causes, actuellement connues, de la formation des queues de bandes dans les semi-conducteurs à fortes impuretés. On a examiné successivement le procédé de la formation de bandes d'impuretés ainsi que l'action des potentiels de déformation et d'électrostatique.

On a donné aussi les dépendeances utilisées pour la description des fonctions de densité des états dans les queues de bandes. On a présenté aussi les hypothèses admises et, en abréviation, la méthode appliquée pour l'établissement de ces dépendances. Afin de pouvoir les comparer, on a fait les graphiques de la fonction de densité des états, calculés à partir des formules particulières. Les courbes obtenues diffèrent beaucoup l'une de l'autre.

W. NAKWASKI

EINFLUß STARKER DOTIERUNG AUF EIN BANDMODELL EINES ENERGETISCHEN HALBLEITERS — BANDSCHWÄNZE

Zusammenfassung

In dem Artikel wurden die Ursachen der Bandschwanzbildung in stark dotierten Halbleitern nach dem neuesten Stand der Wissenschaft geschildert. Man prüfte kontinuierlich den Entstehungsprozeß von Dotierungsbänden sowie das Wirken von Mißbildungs — und Coulombpotentialen.

Es wurden auch die Zusammenhänge angeführt, die zur Beschreibung der Zustanddichtigkeitsfunktion in den Bandschwänzen angewandt wurden. Hierbei wurden die angenommenen Voraussetzungen sowie die in den Rechnungen angewandten Methoden kurz beschrieben.

Zwecks Vergleichs dieser Ausdrücke wurden Diagramme der nach diesen Formeln berechneten Zustanddichtigkeitsfunktionen aufgezeichnet. Die Kurven dieser Diagramme differieren bedeutend.

В. НАКВАСКИ

ВЛИЯНИЕ СИЛЬНЫХ ПРИМЕСЕЙ НА ЗОННУЮ МОДЕЛЬ ПОЛУПРОВОДНИКА — ХВОСТЫ ЗОН

Резюме

В труде приведено современное объяснение причин образования хвостов зон в сильнолегированных полупроводниках, путем поочередного рассматривания процесса возникновения примесных зон и взаимодействий деформационного и кулоновского потенциалов с соответствующими зонами. Полученные соотношения использованы для описания плотностей состояния в хвостах зон; приведены принятые предпосылки и — в сокращенном виде — метод вычисления этих соотношений. Для сопоставления изготовлены диаграммы плотностей состояний вычисленных по отдельным приведенным формулам. Получены кривые со значительными взаимными различиями.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 2, ss. 469-477

621.3.049.77

Odwzorowanie schematu elektrycznego w graf jako podstawowe zagadnienie rozmieszczenia elementów na podłożu

ZBIGNIEW FELENDZER (GDAŃSK)

Instytut Technologii Elektronicznej Politechniki Gdańskiej

Otrzymano 17.12.1974

Artykuł poświęcony jest zagadnieniu modelu matematycznego układów scalonych z uwzględnieniem ich niektórych własności topologicznych. Przedstawiono różne sposoby przeprowadzania schematu elektrycznego w graf oraz podano właściwy sposób odwzorowania.

1. WPROWADZENIE

Poprawna praca układu scalonego uwarunkowana jest głównie trzema czynnikami: poprawnością projektu elektrycznego układu, poprawnością projektu topologicznego i wykonaniem masek oraz poziomem technologii wytwarzania. Układy scalone mają strukturę topologiczną (inaczej jest w przypadku układów funkcjonalnych o strukturze morfologicznej), tzn. można w nich wyróżnić obszary elementów układu i połączenia między nimi. Ogół zagadnień związanych z projektowaniem geometrii elementów układu, rozmieszczeniem ich na podłożu i prowadzeniem połączeń między nimi stanowi przedmiot topologii układów scalonych.

Optymalny projekt topologiczny układu uwzględnia w rozmieszczeniu elementów co najmniej 3 następujące kryteria:

— równomierny rozkład temperatury w pracującym układzie,

— eliminację lub co najmniej minimalizację liczby skrzyżowań ścieżek przewodzących łączących elementy układu,

— minimalizację długości połączeń wewnątrz układu.

Spełnienie tych kryteriów gwarantuje nie tylko poprawną pracę układu, ale wpływa również na koszt produkcji.

W rozwiązaniu drugiego i trzeciego problemu pomocną okazuje się teoria grafów. Zakłada się, że Czytelnikowi znane są podstawowe pojęcia tej teorii. Rozwiązanie to polega m. in. na znalezieniu właściwego odwzorowania schematu elektrycznego w graf, w ten sposób aby zachowywał on własności topologiczne układu.

Poszukiwanie scharakteryzowanego wyżej rozmieszczenia elementów układu na podłożu i sposobu prowadzenia połączeń między nimi jest równoważne zagadnieniu badania planarności grafu i znalezienia jego płaskiej postaci. Zatem powstaje drugi problem do rozwiązania — opracowanie efektywnych metod badania planarności grafów. Ze względu

na to, że w grafie istotne są jedynie wzajemne relacje pomiędzy węzłami (tzn. istnienie lub nieistnienie krawędzi incydentnej z dowolną parą węzłów) a nie ich dokładne położenie na płaszczyźnie, uzyskiwane w ten sposób rozwiązanie jest dostatecznie elastyczne aby w następnej kolejności uwzględnić kryterium cieplne i kryterium minimalnej długości połączeń. Jest to szczególnie silny argument, jeśli chodzi o kolejność stosowania kryteriów, bowiem dotychczas nie sformułowano funkcji optymalizującej postać rozwiązania problemu rozmieszczenia elementów na podłożu. Wymaga to bowiem prac doświadczalnych nad wagą poszczególnych kryteriów z punktu widzenia układowego i kosztów wytwarzania.

Potrzeba minimalizacji liczby skrzyżowań ścieżek przewodzących w układzie wynika z ich szkodliwego wpływu na pracę układu a także na koszt wytwarzania układu: skrzyżowania te są bowiem praktycznie wykonywane w postaci kanałów dyfuzyjnych (w technologii planarnej) czy oddzielonych warstwą izolatora ścieżek przewodzących (w technologii warstwowej), co wnosi pojemność pasożytniczą. Zrealizowane zaś w postaci mostka drutowego w istotny sposób wpływają na niezawodność układu.

2. ODWZOROWANIE UKŁADU ELEKTRYCZNEGO W GRAF

2.1. Wymagania

Jak wspomniano wyżej problem pierwszy, któremu poświęcony jest niniejszy artykuł, polega na utworzeniu grafu układu elektronicznego, który ma takie same własności topologiczne jak układ. Należy pokazać, że układ stanowi wycinek płaszczyzny, na granicy którego znajduje się pewna liczba punktów odpowiadających wyprowadzeniom zewnętrznym układu. Zwykle żąda się, aby wyprowadzenia te rozmieszczone były w ściśle określonej kolejności wzdłuż brzegu obszaru. Tak więc należy pokazać, że układ składa się z *wnętrza* posiadającego pewne punkty wspólne z *zewnętrzem* układu. Najpierw należy więc właściwie odwzorować *wnętrze* układu i tu podstawowym elementom grafu — krawędziom i węzłom — przyporządkować pewne twory fizyczne istniejące, a następnie graf tak powstały uzupełnić pewnym grafem, w którym krawędzie i węzły nie będą miały takich odpowiedników.

Wydaje się oczywiste sformułowanie następujących dwu wymagań nakładanych na funkcję odwzorowującą schemat elektryczny układu w graf:

1. wzajemną jednoznaczność,
2. planarność grafu układu, która winna być konieczna i wystarczająca na to, aby istniało takie rozmieszczenie elementów układu, przy którym można poprowadzić połączenia tych elementów bez skrzyżowań.

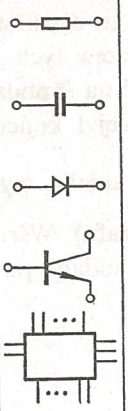
Poniżej przedstawiono kilka przykładów odwzorowań stosowanych w literaturze poświęconej omawianemu zagadnieniu [1, 2, 3, 4].

2.2. Graf ścieżek przewodzących

Jeżeli każdemu elementowi układu przyporządkować węzeł grafu, natomiast ścieżce przewodzącej pomiędzy dwoma elementami — krawędź, wówczas otrzymuje się tzw. graf ścieżek przewodzących. Przykład grafu otrzymanego w ten sposób podany jest w tablicy 1, kolumna 1.

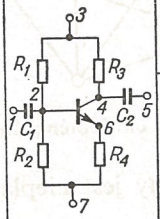
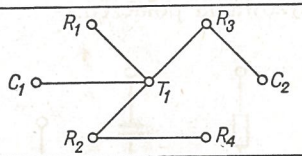
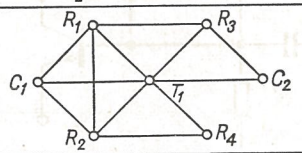
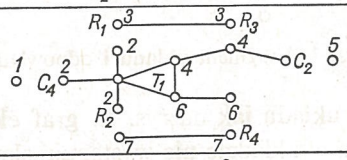
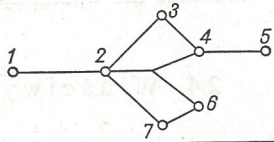
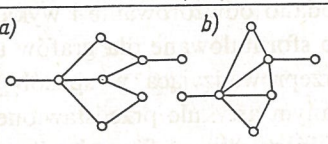
Tablica 1

Elementy układów scalonych i ich modele geometryczne

Odwzorow. / Element	1	2	3 [3]	4 [4]	E-M [1]	E-M zmodyfikow.
						

Tablica 2

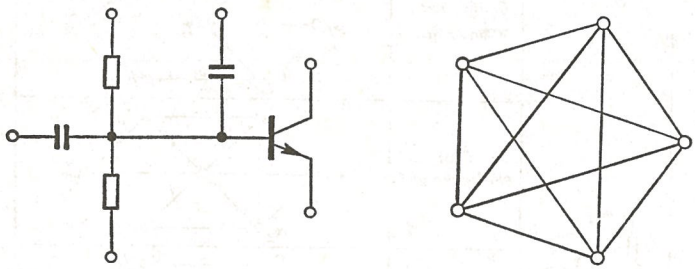
Grafy prostego układu elektrycznego przy odwzorowaniach według tablicy 1

UKŁAD	Odwzorowanie	Graf układu
	Graf ścieżek przewodzących	
	Graf ekwipotencjalny	
	Graf wg pracy [3]	
	Engla-Mlynski'ego dla grafów uogólnionych [1]	
	Zmodyfik. E-M	

Nietrudno wykazać, że odwzorowanie to prowadzi do grafu nie spełniającego drugiego wymagania. Nie jest to również odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne. Postać grafu zależy bowiem przy tej definicji odwzorowania od sposobu połączeń elementów mających pewne końcówki na tym samym potencjale. W teorii grafów jest to równoważne problemowi utworzenia drzewa na n-elementowym zbiorze węzłów. Drzew tych jak wiadomo [6] można utworzyć n^{n-2}, jeśli zbiór węzłów grafu da się rozłożyć na k podzbiorów, których elementy znajdują się na jednakowym potencjale (co najmniej 1 końcówka takiego elementu), to liczba grafów jaką można otrzymać dla danego układu wynosi $\prod_{i=1}^{k} v_i^{v_i-2}$ gdzie v_i jest mocą i-tego podzbioru elementów układu (węzłów grafu). Wśród nich znajduje się być może pewna liczba grafów planarnych, jednak już dla układu podanego w tablicy 2 liczba takich grafów wynosi 48.

2.3. Graf ekwipotencjalny

Jeżeli każdemu elementowi układu przyporządkować węzeł grafu a istnienie połączenia łcieżką przewodzącą pomiędzy dwoma elementami oznaczyć krawędzią incydentną z węzłami odpowiadającymi tym elementom, to tak otrzymany graf nazywa się grafem ekwipotencjalnym. Graf ten spełnia wprawdzie wymaganie 1, jego planarność jest również dostateczna, ale nie jest konieczna na to, aby istniał rozkład elementów układu, przy którym nie występują skrzyżowania połączeń.



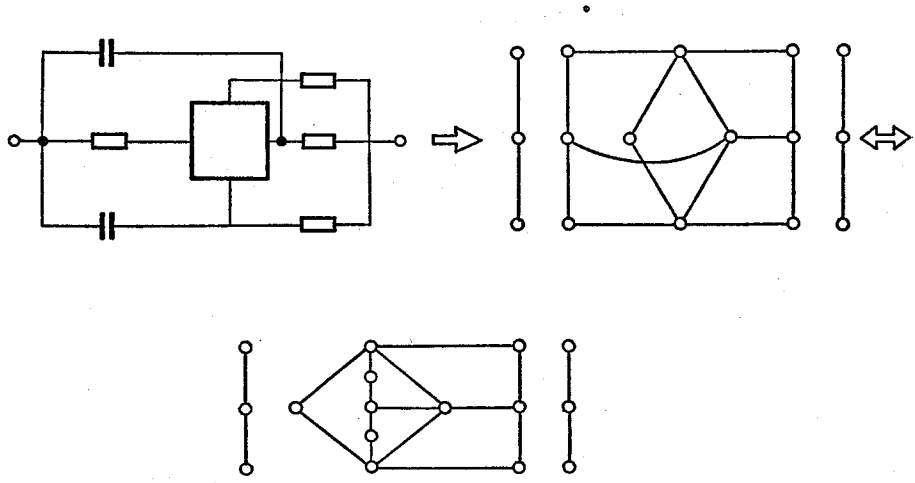
Rys. 1. Fragment układu i odpowiadający mu graf ekwipotencjalny

W przypadku układu jak na rys. 1a graf ekwipotencjalny jest nieplanarny (graf K_5 Kuratowskiego), a w układzie nie występują skrzyżowania.

2.4. Właściwy model układu

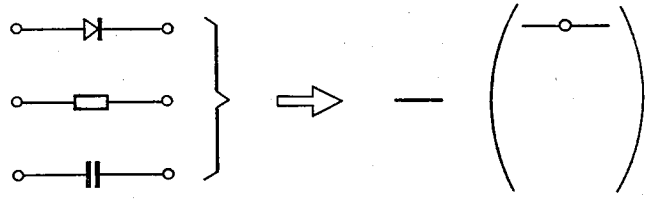
W pracy [1] podano odwzorowanie i wykazano, że spełnia ono oba wymagania. Ponieważ zostało ono sformułowane dla grafów uogólnionych, a jak pokazano w pracy [5] istnieje funkcja przeprowadzająca w sposób jednoznaczny graf uogólniony w zwykły graf, w prezentowanym artykule przedstawione zostanie nieco zmodyfikowane odwzorowanie Engla-Mlyńskiego dla grafów określanych tradycyjnie. Wcześniej przedstawione zostanie odwzorowanie zaproponowane w pracy [3].

Każdemu elementowi n-końcówkowemu przyporządkowuje się cykl pusty stopnia n (oczko), przy czym $n \geqslant 2$, a element jest elementem aktywnym lub diodą. Elementom pasywnym dwukońcówkowym przyporządkowuje się parę węzłów izolowanych. Końcówkom elementów aktywnych lub diodom odpowiadają węzły grafu .



Rys. 2. Dowód niepoprawności odwzorowania z pracy [3]

Istnieniu połączenia ścieżką pomiędzy dowolną parą końcówek odpowiada krawędź pomiędzy odpowiednimi węzłami. Odwzorowanie to oddaje pewne usługi przy projektowaniu rozmieszczenia elementów układów składających się z dużej ilości tranzystorów. Pokazane w tablicy 1 nie spełnia warunku dostateczności, bowiem cykl pusty stopnia n nie ma tak silnych własności jak element n-końcówkowy. Ilustruje to rysunek 2.

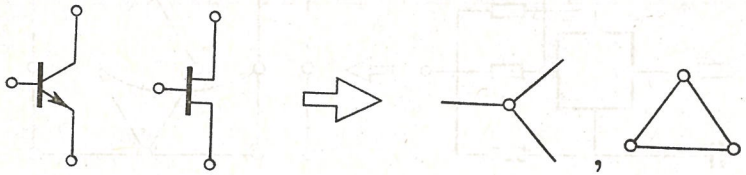


Rys. 3. Odwzorowanie $E - M$ elementów pasywnych i model diody z pracy [4]

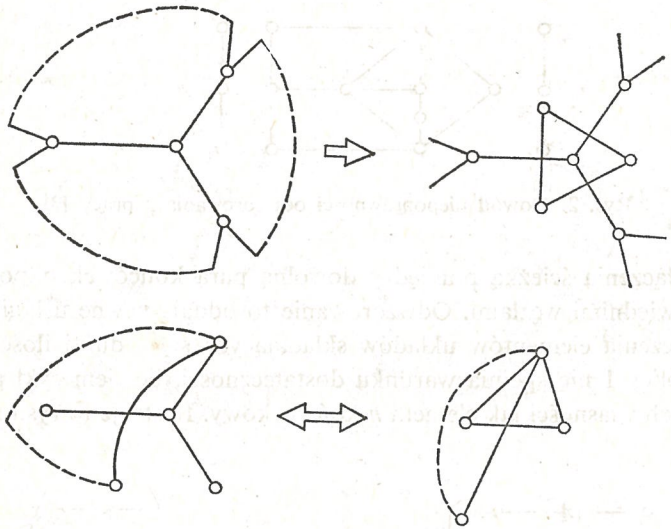
Odwzorowanie układu zachowujące własności topologiczne układu jest następujące. Elementy układu:

a) dwukońcówkowe: diodę, rezystor, kondensator przeprowadza się w krawędź grafu (rys. 3). Zaproponowane w pracy [4] przyporządkowanie diodzie dwu krawędzi przedzielonych węzłem jest równoważne podanemu wyżej. Własności topologiczne obu tworów są jednakowe a węzeł może być usunięty (przykład operacji redukcji grafu nie zmieniającej planarności grafu).

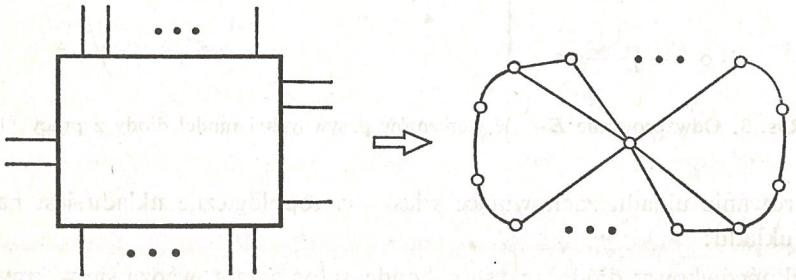
b) trójkońcówkowe: tranzystory przeprowadza się w struktury pokazane niżej (rys. 4). Jeżeli uwzględnić, że elementy te podłączone są wszystkimi końcówkami do pozostałej części układu, wówczas dla podgrafu układu pokazanego na rys. 5 model prawy jest grafem dualnym modelu lewego. Tak więc model prawy zastosowany w pracy [3] do tranzystorów jako elementów 3-końcówkowych jest poprawny, nie może być jednak rozszerzony na elementy o większej liczbie końcówek.



Rys. 4. Właściwe modele tranzystorów



Rys. 5. Dowód równoważności topologicznej obu modeli tranzystorów

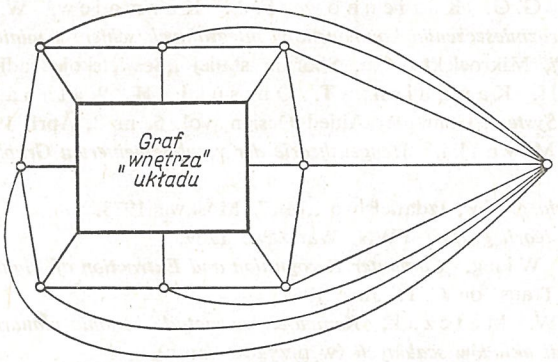


Rys. 6. Właściwy model elementu n-końcówkowego, $n > 3$

c) elementy n-końcówkowe, $n > 3$. Właściwy model elementu n-końcówkowego, $n > 3$, pokazany jest na rysunku 6.

d) punkty potencjału — przechodzą w węzły grafu. Przez punkt potencjału rozumie się punkt w układzie, do którego dochodzi końcówka co najmniej 1 elementu (wyprowadzenie).

Tablica 2 zawiera opisane wyżej przykłady odwzorowań prostego układu wzmacniacza.



Rys. 7. Pełny graf układu elektrycznego

3. UWZGLĘDNIENIE WARUNKÓW BRZEGOWYCH

Jak wspomniano już w rozdziale 2, przy przekształceniu układu elektrycznego w graf uwzględnić należy fakt, że układ scalony poprzez wyprowadzenia podłączony jest do zasilania i innych układów współpracujących. Fakt ten należy uwzględnić przez uzupełnienie grafu *wnętrza* układu pewnym podgrafem, którego krawędzie i węzły nie odpowiadają już punktom potencjału czy elementom.

W. L. Engl i D. A. Mlynski zaproponowali w pracy [1] uzupełnienie grafu układu n-końcówkowego, $n > 3$, podgrafem pokazanym na rysunku 7. Dorysowany cykl zawierający węzły odpowiadające wyprowadzeniom zewnętrznym nazywa się oczkiem zaciskowym [1]. Natomiast węzeł stopnia równego liczbie wyprowadzeń zewnętrznych układu wraz z krawędziami z nimi incydentnymi tworzy w teorii grafów uogólnionych [5] pająk zaciskowy. Można wykazać [1], że tak utworzony graf spełnia oba wymagania nakładane na obraz układu oraz że planarność grafu z rys. 7 zależy tylko od planarności grafu *wnętrza* układu.

4. PODSUMOWANIE

Kolejny problem rozmieszczenia elementów układu z minimalną liczbą przecięć tkwi w znalezieniu efektywnych (umożliwiających wykorzystanie maszyn cyfrowych) metod badania planarności grafów i znajdowania postaci grafu nieplanarnego z minimalną liczbą przecięć.

W ostatnich latach podano szereg takich metod, szczególnie dobre rezultaty uzyskuje się przez wykorzystanie metody Fishera-Winga. Zagadnienia te stanowią przedmiot artykułu [9].

LITERATURA

1. W. L. Engl, D. A. Mlyński, *Die Schaltungsintegration als graphentheoretisches Syntheseproblem*, Archiv für Elektrotechnik, 54/1972.
2. A. J. Goldstein, D. G. Schweikert, *A Proper Model for Testing the Planarity of Electrical Circuits*, The Bell System Technical Journal, vol. 52, No 1, Jan. 1973.
3. B. W. Batałow, G. G. Kaziennow, F. A. Kurmajew, W. M. Szczemielin, *Algoritm wzaimnogo rozmieszczenija komponentow integralnych schiem s minimalnym czisłom wnutrischiemnych sojedinienij*, Mikroelektronika, Sbornik stałiej „Sowietskoje radio", Moskwa 1969.
4. N. Sugiyama, H. Kawanishi, T. Ohtsuki, H. Watanabe, *An Integrated Circuits Layout Design System*, Computer Aided Design, vol. 6, nr 2, April 1974.
5. W. L. Engl, D. Mlyński, *Mengentheorie der verallgemeinerten Graphen*, Archiv für Elektrotechnik, 54/1972.
6. F. Harary, *Tieoria grafow*, Izdatielstwo „Mir", Moskwa 1973.
7. O. Ore, *Wstęp do teorii grafów*, PWN, Warszawa 1969.
8. G. I. Fisher, O. Wing, *Computer Recognition and Extraction of Planar Graphs from the Incidence Matrix*, IEEE Trans. on C. T., June 1966.
9. Z. Felendzer, W. Matczak, *Komputerowa metoda badania planarności grafów dla potrzeb projektowania topologii układów scalonych* (w przygotowaniu).

Z. FELENDZER

TRANSFORMATION OF ELECTRICAL DIAGRAM INTO GRAPH AS BASIC PROBLEM OF DISTRIBUTING ELEMENTS ON BASE

Summary

The paper deals with the problem of a mathematical model of an integrated circuits topology.

The various methods of transformation of an electrical diagram of the circuit into a graph, as well as proper model of this mapping, is given.

Z. FELENDZER

APPLICATION DU SCHÉMA ÉLECTRIQUE EN GRAPHE COMME PROBLÈME PRINCIPAL DE LA RÉPARTITION DES ÉLÉMENTS SUR LA BASE

Résumé

Cet article est consacré au problème du modèle mathématique des circuits intégrés vu leurs certaines propriétés topologiques.

On a présenté les diverses méthodes de réalisation du schéma électrique en graphe et on a donné: la manière adéquate d'application.

Z. FELENDZER

ABBILDUNG EINES ELEKTRISCHEN SCHEMAS ZU EINEM DIAGRAMM ALS HAUPTPROBLEM FÜR DIE ELEMENTENVERTEILUNG AUF DEM GRUND

Zusammenfassung

Der Artikel betrifft das Problem eines mathematischen Modells von kommassierten Systemen in Bezug auf ihre manchen topologischen Eigenschaften.

Es wurden verschiedene Umwandlungsmöglichkeiten des elektrischen Schemas in ein Diagramm dargestellt, und die richtige Abbildungsweise angegeben.

З. ФЕЛЕНДЗЕР

ОТОБРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СХЕМЫ ГРАФОМ КАК ОСНОВНОЙ ВОПРОС РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ НА ПОДЛОЖКЕ

Р е з ю м е

Статья посвящена проблеме математической модели интегральных схем с точки зрения их топологических свойств. Представлены различные способы преобразования электрической схемы в граф, а также приведен способ преобразования, удовлетворяющий всем требованиям однозначного соответствия электрической схемы и графа.

TREŚĆ

M. Krakowski: Eddy Current Losses in a Shielded or Unshielded Ferromagnetic Solid Du to A. C. Flowing Through Parallel Conductors 239
J. Gieras, W. Józefowicz: Współczynniki linearyzujące do obliczeń impedancji i strat mocy w ekranowanych płytach ferromagnetycznych 269
M. Kaźmierski: Przenikalność zastępcza ferromagnetyków ekranowanych 287
S. Jankowski, M. Lepa: Zastosowanie informacyjnej teorii pomiarów do badania dokładności przyrządów pomiarowych 303
J. Trześniowski: Wybrane zagadnienia struktury systemów pomiarowych 319
Z. Głowacz, J. Król: Identyfikacja parametrów maszyny synchronicznej metodą nastrajalnego modelu 339
K. Balińska: Model numeryczny do rozpatrywania stanów pracy silnika synchronicznego przy obciążeniach udarowych 355
E. Mendrela: Silnik indukcyjny obrotowo-liniowy z masywnym wirnikiem 383
T. Wróbel, K. Kozieł, J. Sienkiewicz: Badania nowych modeli asynchronicznych i synchronicznych silników szybkobieżnych prądu przemiennego zwiększonej częstotliwości 407
S. Wyderka: Wyznaczanie odbić falowych w udarowym układzie probierczym 421
D. J. Bem, R. Bernardyn: Obliczanie natężenia pola fali jonosferycznej w zakresie częstotliwości 0,5 ... 1,6 MHz 435
W. Nakwaski: Wpływ silnego domieszkowania na pasmowy model energetyczny półprzewodnika — ogony pasm 451
Z. Felendzer: Odwzorowanie schematu elektrycznego w graf jako podstawowe zagadnienie rozmieszczenia elementów na podłożu 469

CONTENTS — TABLE DES MATIÉRES — INHALT

M. Krakowski: Straty wiroprądowe wywołane w ekranowanych lub nieekranowanych ciałach ferromagnetycznych przez prądy sinusoidalne w przewodach równoległych 267
Pertes de courants de Foucault dans les corps ferromagnétiques blindésou non blindés provoquées par les courants sinusoïdaux dans les conducteurs parallèles 267
Durch Sinusströmungen in verschirmten und nichtverschirmten Ferromagnetstoffen in Parallelleitungen hervorgerufene Wirbelstromverluste 268
J. Gieras, W. Józefowicz: Factors of Linearization for Calculations of Impedance and Loss of Power in Screened Ferromagnetic Plates 285
Coefficients linéarisants pour calculer l'impédence et les pertes de puissance dans les plaques blindées ferromagnétiques 285
Linearisierende Koeffizienten für die Berechnung von Impedanz und Stärkeverlusten in abgeschirmten ferromagnetischen Platten 286
M. Kaźmierski: Equivalent Magnetic Permeability of Screened Ferromagnetic Materials 299
Perméabilité équivalents des substances ferromagnétiques blindées 299
Ersatz-Permeabilität abgeschirmter ferromagnetischer Körper 300
S. Jankowski, M. Lepa: Measurement Information Theory Applied to Measurement Instrument Accuracy Investigation 317

Application de la théorie informatique de mesurage pour examiner la précision des appareils de mesure . . . 317
Anwendung der informativen Messtheorie zur Genauigkeitsprüfung von Messgeräten 318
J. Trześniowski: Structure of Measuring Systems: Selected Problems 337
Problèmes de la structure des systèmes de mesure choisis 337
Gewählte Probleme der Struktur von Messystemen 337
Z. Głowacz, J. Król: Identification of Synchronous Machine Parameters by the Method of Adjustable Model 352
Identification des paramètres de la machine asynchrone à l'aide de la méthode du modèle variable 353
Identifikation von Parametern einer Synchronmaschine mittels Methode eines adjustierbaren Models 353
K. Balińska: A Numerical Model for Prediction of Synchronous Motor Behavior Under Large Dynamical Loads 381
Modèle numérique pour examiner des régimes de travail du moteur synchrone pour les charges de choc 381
Ein numerisches Modell zur Erwägung von Arbeitszuständen eines Synchronmotors bei Stossbelastungen 381
E. Mendrela: A Rotating-linear Induction Motor with a Massive Rotor 405
Moteur à induction rotatif et linéaire à rotor massif 405
Der drehend-fortschreitende Induktionsmotor mit massivem Läufer 405
T. Wróbel, K. Kozieł, J. Sienkiewicz: Investigations of New Models of Asynchronous and Synchronous High-Speed, High Frequency AC Motors 418
Essais de nouveaux modèles de moteurs rapides asynchrones et synchrones à courant alternatif et à haute fréquence 418
Untersuchungen an neuen Modellen von asynchronischen und synchronischen schnellaufenden Drehstrom-Hochfrequenz-Motoren 418
S. Wyderka: Determination of Wave Reflections in an Impulse Test Circuit 434
Détermination des réflexions ondulatoires en circuit d'essai de choc 434
Ermittlung von Wellenreflexionen im Stosspannungs-Messkreis 434
D. J. Bem, R. Bernardyn: Calculation of Sky-Wave Field Strengths in the Frequency Band 0,5 ... 1,6 MHz 448
Calcul d'intensité du champ d'onde ionosphèrique dans l'étendue de fréquence 0,5 ... 1,6 MHz 448
Berechnung der Feldstärke einer ionosphärischen Welle im Frequenzbereich 0,5 ... 1,6 MHz 449
W. Nakwaski: Influence of Heavy Doping on Band Energy Model of Semiconductor Band-Tailing 467
Effet de nombreuses impuretés sur le modèle énergétique à bande de semi-conducteur — queues de bandes 468
Einfluss starker Dotierung auf ein Bandmodell eines energetischen Halbleiters — Bandschwänze 468
Z. Felendzer: Transformation of Electrical Diagram into Graph as Basic Problem of Distributing Elements on Base 476
Application du schéma électrique en graphe comme problème principal de la répartition des éléments sur la base 476
Abbildung eines elektrischen Schemas zu einem Diagramm als Hauptproblem für die Elementenverteilung auf dem Grund 476

СОДЕРЖАНИЕ

М. Краковски: Потери от вихревых токов наведенных в экранированных или неэкранированных ферромагнетиках синусоидальными токами протекающими в параллельных проводниках 268

Я. Герас, В. Юзефович: Коэффициенты линеаризации для вычисления импеданса и потерь мощности в экранированных ферромагнитных пластинах 286
М. Казьмерски: Эквивалентная проницаемость массивной стали при технической частоте 300
С. Янковски, М. Лепа: Применение информационной теории измерений для исследования точности измерительных приборов 318
Ю. Тржесьниовски: Избранные проблемы структуры измерительных систем . . 337
З. Глова ч, И. Круль: Идентификация параметров синхронной машины при помощи метода настраиваемой модели 353
К. Балиньска: Математическая модель работы синхронного двигателя при ударной нагрузке 382
Э. Мендреля: Индукционный вращательно-линейный двигатель с массивным ротором 406
Т. Врубель, К. Козел, Я. Сенкевич: Испытания новых моделей асинхронных и синхронных сверхвысокоскоростных двигателей переменного тока повышенной частоты 419
С. Выдерка: Определение волновых отражений в испытательной схеме ударных напряжений 434
Д. Бем, Р. Бернардин: Вычисление напряженности поля ионосферной волны в диапазоне частот 0,5 ... 1,6 Мгц 449
В. Накваски: Влияние сильных примесей на зонную модель полупроводника — хвосты зон 468
З. Фелендзер: Отображение электрической схемы графом, как основной вопрос распределения элементов на основе 477

7. *Streszczenia.* Do każdej nadsyłanej pracy należy dołączyć krótkie streszczenie (analizę) w języku polskim (w 5 egz.) oraz streszczenia w językach obcych: angielskim, francuskim, niemieckim i rosyjskim. W razie niemożności przygotowania streszczeń w językach obcych Autor powinien przynajmniej podać niezbędną do wykonania tłumaczenia obcojęzyczną terminologię.

8. *Literatura.* Po zakończeniu artykułu należy podać wykaz literatury, wymieniając w następującej kolejności: pierwsze litery imion, nazwisko autora, po czym po przecinku pełny tytuł dzieła lub artykułu; dalej, w przypadku książki — wydawcę, miejsce wydania i rok, a w przypadku artykułu — tytuł czasopisma, numer zeszytu, rok wydania i ewent. numer strony. Pozycje wykazu powinny być ponumerowane.

Uwagi

1. Niezastosowanie się Autora do podanych wyżej wytycznych pociągnie za sobą konieczność potrącenia z honorarium autorskiego kosztów związanych z doprowadzeniem dostarczonych materiałów do postaci wymaganej przez Redakcję.

2. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egz. odbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze Autor może zamówić w Redakcji na własny koszt.

3. **Autora obowiązuje korekta autorska, którą należy zwracać w ciągu 3 dni** pod adresem Redakcji.

Cena zł 40.—

Rozprawy Elektrotechniczne

Kwartalnik

WARUNKI PRENUMERATY CZASOPISMA

Cena prenumeraty rocznej zł 160.—
„ „ półrocznej zł 80.—

Prenumeratę przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch" oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:
— do dnia 25 listopada na styczeń, I-szy kwartał, I-sze półrocze i cały rok następny,
— do dnia 10 każdego miesiąca (z wyjątkiem grudnia) poprzedzającego okres prenumeraty.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne oraz wszelkiego rodzaju inne zakłady pracy, składają zamówienia w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch".

Zakłady pracy w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW oraz prenumeratorzy indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 — w terminach podanych dla prenumeraty krajowej. Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki".

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona-Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

Rozpr. Elektrot. T. 22 z. 2, s. 237—480 Warszawa 1976

Index 37483

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTROTECHNIKI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XXII • ZESZYT 3

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1976

Wytyczne dla Autorów

Komitet Redakcyjny prosi o przestrzeganie następujących wytycznych przy opracowywaniu maszynopisów artykułów nadsyłanych do opublikowania.

1. *Tematyka, charakter i oryginalność artykułów.* „Rozprawy Elektrotechniczne" są przeznaczone do ogłaszania prac naukowych wchodzących w zakres szeroko pojętej elektrotechniki, zwłaszcza jeżeli traktują one omawiane zagadnienia w sposób możliwie kompletny i zmierzają do osiągnięcia celu informacyjno-dydaktycznego. W związku z tym publikowane prace mogą być w mniejszym lub większym stopniu pracami nieoryginalnymi, jeśli chodzi o treść w nich zawartą, co nie zwalnia Autorów od obowiązku ujęcia tematu w sposób oryginalny. Twórczy wkład Autora może polegać wówczas np. na: porównaniu opisywanych teorii, metod lub systemów, krytycznej ich ocenie, wyciągnięciu własnych wniosków co do celowości takiego lub innego działania, zastosowaniu własnej klasyfikacji zagadnień, prognostyce itp. W szczególności „Rozprawy" ogłaszają takie prace naukowe, które zawierają: analizę porównawczą teorii, metod lub systemów, syntetyczne ujęcia określonego zagadnienia naukowego, omówienie obecnego stanu wybranego działu elektrotechniki, omówienie jego postępów lub tendencji rozwojowych itp.

2. *Wymagania ogólne.* Artykuły należy nadsyłać w maszynopisie, w dwóch egzemplarzach. Maszynopis powinien być napisany jednostronnie przez czarną taśmę, na maszynie do pisania z niezabrudzonymi i nieuszkodzonymi znakami. Dopuszcza się odręczne czytelne uzupełnianie lub pisanie atramentem albo długopisem kolorem czarnym lub ciemnoniebieskim znaków specjalnych oraz znaków w językach, których alfabetów nie ma na maszynach do pisania, np. znaków matematycznych, chemicznych, liter greckich. Maszynopis powinien być napisany na papierze do maszyn do pisania koloru białego, formatu A4; numeracja ciągła na wszystkich kartkach.

3. *Sposób pisania tekstu.* Tekst w maszynopisie powinien być pisany bez używania wyróżnień, a w szczególności nie dopuszcza się spacjowania (rozstrzelenia), podkreślania i pisania tekstów dużymi literami. Proponowane wyróżnienia Autor może wprowadzić do maszynopisu (zwykłym ołówkiem) za pomocą przyjętych znaków adiustacyjnych (podkreślenie linią przerywaną — spacjowanie, podkreślenie linią ciągłą — pogrubienie, podkreślenie wężykiem — kursywa itp.). Na jednej kartce maszynopisu powinno być 30 wierszy po około 60 znaków łącznie z odstępami. Marginesy każdej kartki powinny mieć następujące wymiary: górny — ok. 25 mm, lewy — ok. 35 mm. Tekst maszynopisu powinien być napisany z podwójnym odstępem między wierszami; tytuły i podtytuły małymi literami. Akapity należy rozpoczynać z wcięciem równym trzem uderzeniom maszyny do pisania.

4. *Sposób pisania tablic.* Tablice w maszynopisie powinny być napisane w układzie zbliżonym do układu zecerskiego. Tytuły rubryk pionowych i poziomych powinny być napisane małymi literami z podwójnym odstępem między wierszami. Przypisy (notki) dotyczące tablic należy pisać bezpośrednio pod tablicą. Tablice należy numerować kolejno liczbami arabskimi; u góry każdej tablicy podać tytuł.

5. *Sposób pisania wzorów matematycznych.* Rozmieszczenie znaków, cyfr, liter i odstępów powinno być zbliżone do rozmieszczenia elementów druku. Wskaźniki i wykładniki powinny być napisane wyraźnie i być prawidłowo obniżone lub podwyższone w stosunku do linii wiersza podstawowego. Znaki nad literami i cyframi: strzałki, linie, kropki, daszki itp. powinny być napisane dokładnie nad tymi elementami, do których się odnoszą. Numery wzorów należy umieszczać z prawej strony.

6. *Przygotowanie materiału ilustracyjnego.* Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonywać zgodnie z obowiązującymi normami, na oddzielnych arkuszach, z podaniem kolejnych numerów rysunków. W maszynopisie artykułu na marginesie, obok właściwego tekstu, należy podać jedynie odnośny numer rysunku, a na oddzielnym arkuszu wykaz podpisów pod rysunki. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót: rys.). U samego dołu rysunku (a przy fotografiach na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, tytuł pracy i nazwisko autora. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.

Dalszy ciąg wytycznych na 3 stronie okładki

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTROTECHNIKI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XXII · ZESZYT 3

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1976

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny
PROF. DR WITOLD NOWICKI

Zastępca redaktora naczelnego
PROF. Dr HAB. TADEUSZ KACZOREK

Członkowie
PROF. DR LEONARD KNOCH PROF. DR WITOLD ROSIŃSKI
PROF. DR HAB. JANUSZ TUROWSKI

Sekretarz
JANINA MATHEISEL

ADRES REDAKCJI

00-661 Warszawa, Plac Jedności Robotniczej 1
Politechnika, Instytut Teleelektroniki, Gmach Elektroniki, pok. 471

Dyżury Redakcji: poniedziałki i czwartki, godz. 11-13
tel. 28 89 81 lub 210 07-737
Telefony domowe: redaktor naczelny–17 37 03,
zastępca redaktora naczelnego–44 88 34
sekretarz–33 84 97

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 700 (590+110)	Oddano do składania 21.II. 1976 r.
Ark. wyd. 21,5 ark. druk. 17,0	Podpisano do druku w czerwcu 1976 r.
Papier druk. sat. kl. III, 80 g. 70×100	Druk ukończono w lipcu 1976 r.
Zamówienie nr 273/76	Cena zł 40.— J-105

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 3, ss. 483—497

621.372.57:621.375

Topologiczna analiza liniowych układów czynnych

CZESŁAW SYC (WARSZAWA)

Instytut Teleelektroniki Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 19.12.1974

W pracy przedstawiono problemy dotyczące aktualnych zagadnień topologicznej analizy układów elektronicznych w zakresie porządkowania spraw związanych z modelami unistorowymi, generowaniem drzew zorientowanych grafów unistorowych, wyznaczaniem funkcji charakterystycznych układu elektronicznego metodą liczb strukturalnych Bellerta i liczb strukturalnych sprzężonych.

Przedstawiona metoda analizy i sposób sformalizowanego jej opisu stanowią oryginalne podejście przydatne szczególnie do realizacji komputerowej.

1. WPROWADZENIE

Topologiczna analiza liniowych układów czynnych wg Masona oraz Chena [1, 4] oparta jest na związkach jakie występują między wyznacznikiem głównym i podwyznacznikami macierzy admitancyjnej opisującej dany układ elektroniczny a sumą wartości wszystkich drzew i sumą wartości odpowiednich dwudrzew grafu unistorowego odpowiadającego danej macierzy admitancyjnej. Korzystając z tych związków można problem obliczania odpowiednich wyznaczników i podwyznaczników sprowadzić do wyznaczania odpowiednich drzew grafu unistorowego, a następnie obliczania ich wartości.

Na podstawie powyższych związków S. Bellert skonstruował algebrę liczb strukturalnych [8], a wielu innych autorów napisało dziesiątki prac o charakterze receptur na wyznaczanie drzew grafu. W niniejszej pracy, Autor opierając się na koncepcji H. Woźniackiego [8] podjął próbę przedstawienia metody topologicznej analizy liniowych układów czynnych stacjonarnych, dla których istnieje macierz admitancyjna. Metoda ta w odróżnieniu od propozycji H. Woźniackiego różni się odmiennym podejściem do modelowania układu oraz generowania drzew. W tym przypadku modelem układu jest graf unistorowy, zaś metoda generowania drzew opiera się na procedurze sukcesywnego wyznaczania drzew opisanej w pracy [10] autora. Takie podejście umożliwia wyznaczanie dowolnych funkcji charakteryzujących układ poprzez sukcesywne generowanie drzew jego grafu unistorowego, ich obróbkę, a następnie obliczanie wartości tych drzew i dodawanie do częściowych wartości odpowiednich współczynników wielomianów funkcji wymiernej. W tym przypadku (jeśli tego nie wymagają inne względy) nie ma konieczności pamiętania wszystkich drzew,

co znacznie upraszcza proces obliczeń. Obróbka i wyznaczanie wartości każdego drzewa odbywa się według określonych procedur wynikających ze wzorów na obliczanie odpowiednich funkcji charakterystycznych. Wzory te dla niektórych funkcji podane są w rozdz. 2.

2. FUNKCJE CHARAKTERYSTYCZNE UKŁADU ELEKTRONICZNEGO DLA ANALIZY TOPOLOGICZNEJ

Niech U będzie $(n+1)$-węzłowym układem elektronicznym złożonym z dowolnej liczby biernych i czynnych elementów połączonych w określony sposób. Niech $\{V_i | i = 1, 2, \ldots, n\}$ będzie zbiorem potencjałów węzłowych względem węzła odniesienia, który w dalszym ciągu oznaczać będziemy przez 0. Jeżeli przyjmiemy, że $\{I_i | i = 1, 2, \ldots, n\}$ jest zbiorem prądów źródłowych wpływających do węzłów $1, 2, \ldots, n$, to mamy równanie

$$\mathbf{YV} = \mathbf{I}, \tag{1}$$

gdzie: $\mathbf{I}$ jest wektorem kolumnowym prądów źródłowych,

$\mathbf{V}$ jest wektorem kolumnowym potencjałów węzłowych,

$\mathbf{Y}$ jest macierzą admitancyjną danego układu i wyraża się znanym wzorem

$$\mathbf{Y} = AY_gA^T, \tag{2}$$

w którym: A jest macierzą incydencyjną układu,

A^T jest macierzą incydencyjną transponowaną układu,

Y_g jest macierzą admitancyjną gałęzi układu.

Macierz admitancyjna $\mathbf{Y}$ jest nieosobliwą macierzą kwadratową rzędu $n \times n$, której suma elementów w każdym wierszu i w każdej kolumnie jest różna od zera. Macierz tę otrzymujemy z macierzy osobliwej przez usunięcie z niej wiersza oznaczonego numerem 0 i kolumny oznaczonej numerem 0. Macierz admitancyjna osobliwa Y_0 jest to taka macierz rzędu $(n+1) \times (n+1)$, której suma elementów w każdej kolumnie i w każdym wierszu jest równa zeru.

Macierz admitancyjną $\mathbf{Y}$ opisać możemy również jak następuje:

$$\mathbf{Y}: \underset{(i,j)}{J \times J} \to \underset{w}{|W|} = \left\{ \sum_{\gamma \in w} \gamma \,|\, w \in W \right\}$$

$$(i,j) \to |w| = |\{g, \pm S, +pC, +p^{-1}L^{-1}\}| = g \pm S + pC + p^{-1}L^{-1}. \tag{3}$$

Wzór (3) określa, że na przecięciu się i-tego wiersza oraz j-tej kolumny $(i \neq j)$ macierzy $\mathbf{Y}$ znajduje się element $|w|$ będący wielomianem określającym admitancję gałęzi układu włączoną między węzłami i oraz j, a złożoną z sumy admitancji biernych typu: y (rezystancyjnego), C (pojemnościowego), L (indukcyjnego) i czynnych typu S (pochodzących od źródeł sterujących).

W przypadku $i = j$, element leżący na głównej przekątnej o współrzędnych (i, i) jest również wielomianem $|w|$ stanowiącym sumę przewodności pozostałych elementów znajdujących się w danym wierszu lub kolumnie wziętych ze znakiem przeciwnym. We wzorze tym $|W|$ jest zbiorem wielomianów opisujących poszczególne gałęzie; $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ jest zbiorem numerów węzłów układu z wyjątkiem węzła odniesienia, zaś $J^* = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ jest zbiorem wszystkich numerów węzłów układu.

Niech dla układu elektronicznego U dany będzie graf unistorowy $G = (J^*, R, \Psi)$ związany z macierzą admitancyjną $\mathbf{Y}$ tego układu jak następuje:

$$\Psi: R \to \{w_{ij} | i, j \in J^*\}, \tag{4}$$

gdzie:

$$|w_{ij}| = y_{ij} = -\mathbf{Y}((j, i)) \quad \text{dla} \quad i \neq j \quad (i, j \in J),$$

$$|w_{i0}| = y_{i0} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{Y}((k, i)) \quad \text{dla} \quad i \in J.$$

Parę uporządkowaną (J^*, R_0) nazywać będziemy szkieletem grafu unistorowego, przy czym

$$R_0 \subset J^* \times J^* \text{ jest relacją.}$$

Dodatkowo wprowadzimy pojęcie grafu unistorowego G_0 charakteryzującego równanie (1)

$$G_0 = (J^*, R_0, \Psi_0),$$

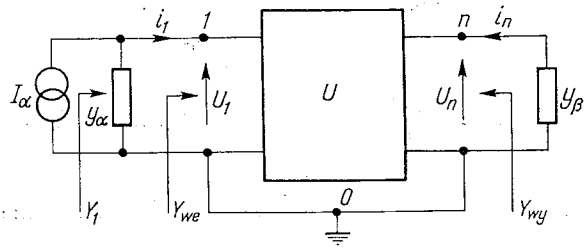
gdzie:

$$R_0 \subset J^* \times J^*,$$

$$\Psi_0: R_0 \to \{w_{ij} \mid i, j \in J^*\}; \quad \Psi_0 = \Psi \cup \{w_{0i}\},$$

$$|w_{0i}| = y_{0i} = I_i \quad i\text{-ty element wektora } \mathbf{I}.$$

Nietrudno zauważyć, że jest to graf unistorowy rozszerzony, który oprócz gałęzi o kierunkach wyznaczonych przez elementy ze zbioru R o wartościach określonych przez funkcję Ψ zawiera dodatkowo gałęzie o kierunkach określonych przez elementy ze zbioru $R_0 \setminus R$ o wartościach określonych przez funkcję Ψ_0.



Rys. 1. Schemat zastępczy układu elektronicznego

Niech dany będzie układ elektroniczny, którego schemat zastępczy pokazano na rys. 1. Załóżmy na początku, że układ ten posiada jedno źródło prądowe I_α oraz N^* źródeł sterujących. Źródło I_α można zawsze zamienić na źródło napięciowe

$$E_\alpha = \frac{I_\alpha}{y_\alpha}.$$

Dla układu, którego schemat zastępczy pokazano na rys. 1, odpowiednie funkcje charakterystyczne wyrażają się wzorami (5)÷(10).

Admitancja wejściowa układu z dołączoną gałęzią y wynosi:

$$Y_1 = \frac{\sum_{t=1}^{T} D_t}{\sum_{t=1}^{T'} D'_t}, \tag{5}$$

gdzie:

D_t — wartość drzewa d_t zorientowanego względem wierzchołka 0 grafu unistorowego G_0.

$$D_t = \prod_{\sigma \in d_t} \sum \Psi(\sigma), \quad (\sigma \in R_0),$$

T — liczba drzew d_t zorientowanych względem wierzchołka odniesienia 0,

D'_t — wartość drzewa d'_t otrzymanego z drzewa d_t przez usunięcie z niego gałęzi α

$$D'_t = \prod_{\sigma \in d'_t} \sum \Psi(\sigma)$$

T' — liczba drzew $d'_t = \dfrac{\partial d_t}{\partial \alpha}$.

Admitancja układu z odłączoną gałęzią ($y_\alpha = 0$) wynosi

$$Y_{we} = \frac{\sum_{t=1}^{T} D_t|_{y_\alpha = 0}}{\sum_{t=1}^{T'} D'_t}. \tag{6}$$

Podobnie można określić admitancję Y_{wy} układu lub dowolną inną admitancję Y_{0i} ($i \in J$). Na przykład w naszym konkretnym przypadku

$$Y_{wy} = Y_{0n} = \frac{\sum_{t=1}^{T} D_t|_{y_\beta = 0}}{\sum_{t=1}^{T'} D'_t}, \tag{7}$$

gdzie D'_t — wartość drzewa $d'_t = \dfrac{\partial d_t}{\partial \beta}$ otrzymanego z drzewa d_t przez wyeliminowanie z niego gałęzi β włączonej między węzłami n oraz 0.

Dowolny potencjał V_i węzła $i \in J$ względem węzła odniesienia 0 układu obliczyć można wg następującego wzoru

$$V_i = \frac{\sum_{t=1}^{T'} D_t^i}{\sum_{t=1}^{T} D_t}, \tag{8}$$

gdzie:

D_t^i — wartość drzewa d_t^i zorientowanego względem węzła i grafu unistorowego G_0

$$D_t^i = \prod_{\sigma \in d_t^i} \sum \Psi_0(\sigma),$$

T' — liczba drzew d_t^i grafu unistorowego G_0 zorientowanych względem węzła i.

Transmitancja napięciowa K_u układu U może być wyrażona za pomocą następującego wzoru

$$K_u = \frac{V_n}{V_1} = \frac{\sum_{t=1}^{T_n} D_t^n}{\sum_{t=1}^{T_1} D_t^1}, \tag{9}$$

gdzie:

D_t^n — wartość drzewa d_t^n zorientowanego względem węzła n grafu unistorowego G_0,

D_t^0 — wartość drzewa d_t^1 zorientowanego względem węzła 1 grafu unistorowego G_0.

Transmitancja prądowa K_i układu przy założeniu, że w układzie występuje tylko jedno źródło prądowe w gałęzi α może być wyrażona jak następuje

$$K_i = \frac{i_n}{i_1} = \frac{\sum_{t=1}^{T'} D_t'}{\sum_{t=1}^{T} D_t|_{y_\beta=0}} \cdot y_\beta, \tag{10}$$

gdzie: i_1, i_n — prądy gałęziowe oznaczone odpowiednio na rys. 1.

Postacie wzorów określających funkcje charakterystyczne układu elektronicznego zostały tak spreparowane, aby w oparciu o generowane kolejno drzewa można było sukcesywnie obliczać wartość danej funkcji charakterystycznej układu bez konieczności pamiętania zbioru wszystkich drzew.

3. SPOSÓB SUKCESYWNEGO WYZNACZANIA DRZEW ZORIENTOWANYCH SZKIELETU (J^*, R_0) GRAFU UNISTOROWEGO G_0

W pracy [10] autora opisany został sposób sukcesywnego wyznaczania drzew zorientowanych grafu zorientowanego (X, R) metodą liczb strukturalnych sprzężonych. W tej pracy podana będzie metoda zupełnie inna, lecz oparta o ideę obcinania gałęzi wolnych opisaną w pracy [10].

Niech dany będzie graf zorientowany (X, R) oraz niech dane będą otoczenia dodatnie wszystkich jego wierzchołków $i \in X$. Przez otoczenie dodatnie R_i^+ wierzchołka $i \in X$ nazywać będziemy zbiór wszystkich łuków wychodzących z danego wierzchołka

$$R_i^+ = \{(i,j) \mid \exists j \in X[(i,j) \in R]\}.$$

Drogą z wierzchołka i do wierzchołka j nazywać będziemy ciąg łuków $r_1, r_2, \ldots, r_k$ spełniających warunek

$$\{r_1\} \circ \{r_2\} \circ \ldots \circ \{r_k\} = \{(i,j)\},$$

gdzie operacja „$\circ$" oznacza złożenie relacji.

Jeśli z dowolnego wierzchołka $j \in X$ istnieje droga do wierzchołka $i \in X$, to mówimy, że graf jest spójny względem danego wierzchołka. Jeśli graf jest spójny względem każdego wierzchołka, to mówimy, że graf jest mocno spójny.

Drzewem zorientowanym względem wierzchołka $i \in X$ grafu (X, R) nazywać będziemy jego podgraf częściowy (X, R_1), taki że:

1° $R_1 \subset R$,

2° card $(R_1) = n$ (gdzie $n+1$ jest liczbą wierzchołków card $(X) = n+1$ grafu (X, R)),

3° podgraf częściowy (X, R_1) jest spójny względem wierzchołka $i \in X$.

Algorytm wyznaczania sukcesywnego drzew zorientowanych względem wierzchołka odniesienia grafu zorientowanego (X, R) składa się z następujących kroków.

K r o k 1: Ponumerowanie wierzchołków X danego grafu $p: X \to J^*$.

K r o k 2: Wyznaczenie relacji $R^* = \{(p(i), p(j)) \mid (i, j) \in R_0\}$.

K r o k 3: Wyznaczenie otoczeń R_i^+ dla $i \in J$.

K r o k 4: Generowanie kolejnego elementu R_t° iloczynu kartezjańskiego

$$R_t^\circ \in \prod_{x \in J} R_x^+$$

i następnie sprawdzenie, czy obraz geometryczny elementu R_t° jest drzewem zorientowanym względem wierzchołka odniesienia 0 przez przejście do kroku 5. W przypadku zakończenia generowania elementów należy przejść do kroku 9.

K r o k 5: Utworzenie ciągu $\langle l_x \mid x \in J^* \rangle$ wyzerowanych liczników l_x dla $x \in J^*$ w kolejności numeracji 1, 2, ..., n, 0.

K r o k 6: Określenie wartości liczbowych każdego licznika na podstawie danych każdej pary $r \in R_t^\circ$ w następujący sposób

$l_{q_1(r)} := l_{q_1(r)} + 1$,

$l_{q_2(r)} := l_{q_2(r)} + 1$,

gdzie: $r = (i, j) \Rightarrow q_1(r) = i \wedge q_2(r) = j$.

K r o k 7: Badanie czy zawartość któregoś z liczników l_x jest równa 1. Jeśli tak, to następuje przejście do kroku 8. W przeciwnym przypadku badamy czy istnieje chociażby jeden z liczników o zawartości różnej od zera. Jeśli tak, to stwierdzamy, że obraz geometryczny elementu R_t° nie jest drzewem i przechodzimy do kroku 4. Jeśli natomiast wszystkie zawartości liczników są zerami, to dany obraz geometryczny elementu R_t° jest drzewem. Zatem element ten przekazujemy do dalszej obróbki przez procedurę wyznaczania wartości funkcji charakterystycznych układu i przechodzimy do kroku 4.

K r o k 8: Poszukujemy elementu $r \in R_t^\circ$, którego poprzednik lub następnik wyznaczony jest przez numer licznika. Odnaleziony element usuwamy z R_t° i jednocześnie uzupełniamy zawartości liczników odpowiednio

$l_{q_1(r)} := l_{q_1(r)} - 1$,

$l_{q_2(r)} := l_{q_2(r)} - 1$

oraz przechodzimy do kroku 7.

K r o k 9: Koniec.

4. MODELE UNISTOROWE UKŁADÓW ELEKTRONICZNYCH

W pracy rozróżnia się dwa rodzaje grafów unistorowych: $G = (J, R, \Psi)$ oraz $G_0 = (J^*, R_0, \Psi_0)$. Odpowiednio wprowadzono pojęcia szkieletów grafu unistorowego (J, R) oraz (J^*, R_0). Wprowadzono również funkcję p numerującą wierzchołki szkieletu grafu

(J^*, R_0) w ten sposób, że $p: X \to J^*$. Ponadto wprowadzono dla grafu unistorowego G_0 następujące funkcje:

$$g: \mathbf{N} \to \bigcup_{r \in R} \Psi(r), \tag{11}$$

gdzie $|\mathbf{N}$ jest podzbiorem liczb naturalnych. Funkcja g jest bijekcją, która każdemu z elementów typu R, C, L, S występującemu w gałęzi $r \in R$, dla której $\Psi(r) = w = \{y, \pm S, pC, p^{-1}L^{-1}\}$, przyporządkowuje krawędź grafu oznaczoną odpowiednim numerem ze zbioru liczb naturalnych $|N$

$$h: \mathbf{N} \to R. \tag{12}$$

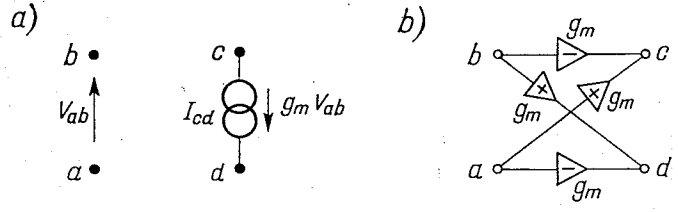
Funkcja h jest surjekcją i spełnia następujący warunek $(\forall k \in \mathbf{N})[h(k) = r \Rightarrow \Psi(r) = g(k) \wedge r \in R]$

$$f: \mathbf{N} \to |\mathbf{R}. \tag{13}$$

Funkcja f przyporządkowuje każdej krawędzi ze zbioru $\mathbf{N}$ odpowiednią wartość liczbową ze zbioru liczb całkowitych $|\mathbf{R}$.

Graf unistorowy G_0 może być również skonstruowany bezpośrednio ze schematu zastępczego układu elektronicznego. W tym przypadku węzły X układu elektronicznego numerujemy liczbami całkowitymi dodatnimi ze zbioru J^* przy pomocy funkcji p. Następnie tworzymy relację $R_0 \subset J^* \times J^*$ oraz konstruujemy odpowiednio funkcje g, h oraz f.

W celu utworzenia funkcji g niezbędna jest znajomość (oprócz części biernej układu) źródeł prądowych sterowanych napięciowo, którymi to źródłami zastąpić można prawie



Rys. 2. Schemat zastępczy źródła prądowego sterowanego napięciowo
a) schemat ideowy — $y: V_{ab} \to \{(a, b)\}$, $Z: I_{cd} \to \{(c, d)\}$, b) graf unistorowy określony przez zbiór kierunków unistorów S^* oraz zbiór ich znaków określonych przez Sign(s), gdzie $s \in S^*$

wszystkie elementy czynne oraz transformatory, cewki indukcyjne itp. W najogólniejszym przypadku źródło prądowe sterowane napięciowo opisać można przez podanie numerów węzłów, między którymi włączone jest źródło prądowe sterowane napięciowo i napięcie sterujące danym źródłem prądowym.

Na rys. 2 podano opis źródła sterującego i podano jego graf unistorowy.

Aby opisać dane źródło sterujące tworzymy iloczyn kartezjański

$S^* = \{q_1(y(Vab)),\ q_2(y(Vab))\} \times \{q_1(Z(Icd)), q_2(Z(Icd))\} = \{a, b\} \times \{c, d\} =$
$= \{(a, c), (a, d)\ (b, c), (b, d)\}$

$$\underset{s \in S^*}{\text{Sign}}\ (s) = \begin{cases} 1 \text{ gdy } q_1(s) = q_1(Z(Icd)) \vee q_2(s) = q_2(Z(Icd)), \\ -1 \text{ w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

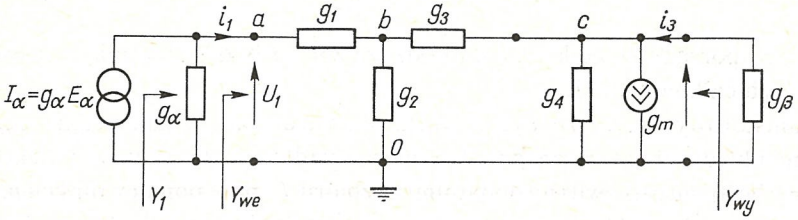
Dopuszcza się również użycie grafu unistorowego inwersyjnego do pokazanego na rys. 2b,

to znaczy grafu z zamienioną orientacją gałęzi na przeciwną lecz z tymi samymi wartościami znaków i współczynników amplifikacji.

W przypadku gdy dwa węzły a i b są zwarte, tzn. $a = b = x$, graf unistorowy źródła sterującego znacznie się upraszcza, gdyż powstałą w ten sposób pętlę eliminujemy z grafu. Nietrudno zauważyć, że jeśli naniesiemy (rozepniemy) grafy unistorowe typu pokazanego na rys. 2b na graf unistorowy części biernej układu elektronicznego, to otrzymamy graf unistorowy układu elektronicznego.

Przykład

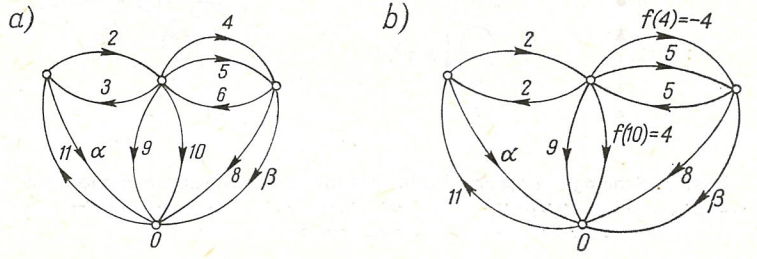
Niech dany będzie schemat zastępczy układu elektronicznego jak pokazano na rys. 3. Należy wyznaczyć funkcje charakterystyczne Y_{we}, Y_{wy} oraz potencjały V_1 i V_3, a także transmitancję napięciową K_u.



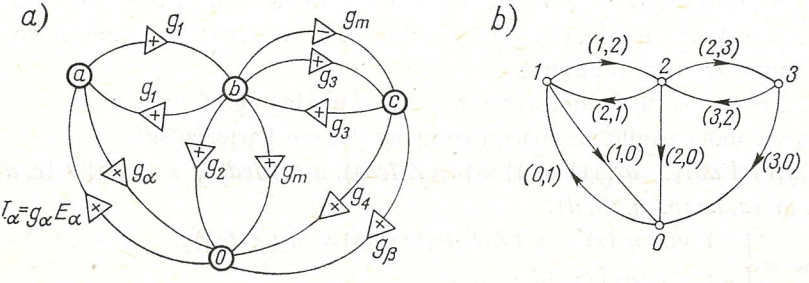
Rys. 3. Schemat zastępczy prostego układu elektronicznego

Rozwiązanie

Dla układu, którego schemat zastępczy pokazano na rys. 3 zaś jego grafy unistorowe na rys. 4 oraz na rys. 5, poszczególne zbiory X, J, J^*, R oraz funkcje P, Ψ, g, h, f mają



Rys. 4. Model unistorowy układu elektronicznego
graf unistorowy G_0 określony przez (X, p, R, ψ), szkielet grafu unistorowego określony przez (X, p, R)



Rys. 5. Model grafowy układu elektronicznego
a) graf zorientowany określony przez (J^*, R, h), b) graf ważony określony przez (J^*, R, h, f)

następującą postać:

$$X = \{a, b, c, 0\}$$
$$J = \{1, 2, 3\},$$
$$J^* = \{1, 2, 3, 0\},$$
$$p = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (0, 0)\},$$
$$R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (2, 0), (3, 0), (1, 0), (0, 1)\},$$
$$\Psi = \{\langle(1, 2, g_1\rangle, \langle(2, 1), g_1\rangle, \langle(2, 3), \{g_3, -g_m\}\rangle, \langle(3, 2), g_3\rangle, \langle(2, 0), \{g_2, g_m\}\rangle, \langle(3, 0), \{g_4, g\}\rangle, \langle(1, 0), g\rangle, \langle(0, 1), g_\alpha E_\alpha\rangle\},$$
$$g = \{(\alpha, g_\alpha), (2, g_1), (3, g_2), (4, g_m), (5, g_3), (6, g_3), (\beta, g_\beta), (8, g_4), (9, g_2), (10, g_m), (11, g_\alpha E_\alpha),$$
$$h = \{\langle\alpha, (1, 0)\rangle, \langle2, (1, 2)\rangle, \langle3, (2, 1)\rangle, \langle4, (2, 3)\rangle, \langle5, (2, 3)\rangle, \langle6, (3, 2)\rangle, \langle7, (3, 0)\rangle, \langle8, (3, 0)\rangle, \langle9, (2, 0)\rangle, \langle10, (2, 0)\rangle, \langle11, (0, 1)\rangle\},$$
$$f = \{(\alpha, \alpha), (2, 2), (3, 2), (4, -4), (5, 5), (6, 5), (\beta, \beta), (8, 8), (9, 9), (10, 4), (11, 11)\}.$$

Niech na przykład naszym celem będzie wyznaczenie funkcji charakterystycznych Y_{we}, Y_{wy} oraz K_u. Zgodnie ze wzorami (6), (7) oraz (9) określającymi poszczególne funkcje charakterystyczne należy wyznaczyć odpowiednie zbiory drzew zorientowanych odpowiednio do wierzchołka odniesienia 0 oraz do wierzchołków 1 i 3. Drzewa te wyznaczamy sukcesywnie zgodnie z procedurą opisaną w punkcie 3. Zgodnie z tą procedurą elementy, których obrazami geometrycznymi są drzewa zorientowane do wierzchołków odpowiednio 0, 1 i 3 należą odpowiednio do iloczynów kartezjańskich:

1) $R_1^+ \times R_2^+ \times R_3^+$,

2) $R_0^+ \times R_2^+ \times R_3^+$,

3) $R_0^+ \times R_1^+ \times R_2^+$,

gdzie:

$$R_1^+ = \{(1, 2), (1, 0)\},$$
$$R_2^+ = \{(2, 0), (2, 3)\},$$
$$R_3^+ = \{(3, 0), (3, 2)\},$$
$$R_0^+ = \{(0, 1)\}.$$

Na przykład zbiór wszystkich elementów będących kandydatami na drzewa zorientowane względem wierzchołka 0 ma następującą postać:

$$R_1^+ \times R_2^+ \times R_3^+ = \{\langle(1, 2), (2, 0), (3, 0)\rangle, \langle(1, 2), (2, 0), (3, 2)\rangle,$$
$$\langle(1,2), (2/\lceil, 1), (3, 0)\rangle, \langle(1, 2), (2/\lceil, 1), (3, 2)\rangle,$$
$$\langle(1, 2), (2, 3), (3. 0)\rangle, \langle(1, 2), (2/\lceil, 3), (3, 2)\rangle,$$
$$\langle(1, 0), (2, 0), (3, 0)\rangle, \langle(1, 0), (2, 0), (3, 2)\rangle,$$
$$\langle(1, 0), (2, 1), (3, 0)\rangle, \langle(1, 0), (2, 1), (3, 2)\rangle,$$
$$\langle(1, 0), (2, 3), (3, 0)\rangle, \langle(1, 0), (2/\lceil, 3), (3, 2)\rangle\}.$$

W wyniku sprawdzenia przez procedurę opisaną w punkcie 3, które z kandydatów mają obrazy drzew zorientowanych do wierzchołka 0, otrzymano zbiór, który w postaci tablicy pokazano poniżej:

$$\vec{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & d_7 & d_8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} (1,2) & (1,2) & (1,2) & (1,0) & (1,0) & (1,0) & (1,0) & (1,0) \\ (2,0) & (2,0) & (2,3) & (2,0) & (2,0) & (2,1) & (2,1) & (2,3) \\ (3,0) & (3,2) & (3,0) & (3,0) & (3,2) & (3,0) & (3,2) & (3,0) \end{bmatrix} \end{array}.$$

Kolumny tej tablicy są elementami nieskreślonymi iloczynu kartezjańskiego $R_1^+ \times R_2^+ \times R_3^+$.

Do poszczególnych kolumn tablicy $\vec{A}$ zastosować możemy kolejno funkcje Ψ, h, f oraz g; wówczas np. dla funkcji charakterystycznej Y_{we} otrzymamy

$$Y_{we} = \frac{\sum_{t=1}^{8} D_t \Big| g_\alpha = 0}{\sum_{t=1}^{5} D_t'}, \tag{14}$$

gdzie:

$$D_t = \prod_{\gamma \in d_t} \sum \Psi(\gamma),$$

$$D_t' = \prod_{\gamma \in d_t'} \sum \Psi(\gamma),$$

$$d_t' = \frac{\partial d_t}{\partial (1,0)},$$

$$\begin{aligned} D_1 &= g_1(g_2+g_m)(g_4+g_\beta) & D_1' &= 0 \\ D_2 &= g_1(g_2+g_m)g_3 & D_2' &= 0 \\ D_3 &= g_1(g_3-g_m)(g_4+g_\beta) & D_3' &= 0 \\ D_4 &= g_\alpha(g_2+g_m)(g_4+g_\beta) & D_4' &= (g_2+g_m)(g_4+g_\beta) \\ D_5 &= g_\alpha(g_2+g_m)g_3 & D_5' &= (g_2+g_m)g_3 \\ D_6 &= g_\alpha g_1(g_4+g_\beta) & D_6' &= g_1(g_4+g_\beta) \\ D_7 &= g_\alpha g_1 g_3 & D_7' &= g_1 g_3 \\ D_8 &= g_\alpha(g_3-g_m)(g_4+g_\beta) & D_8' &= (g_3-g_m)(g_4+g_\beta) \end{aligned}$$

Po podstawieniu do wzoru (14) i po dokonanych uproszczeniach otrzymamy

$$Y_{we} = \frac{g_3 g_\beta + g_3 g_4 + g_2 g_\beta + g_2 g_4 + g_2 g_3 + g_3 g_m}{g_1 g_\beta + g_1 g_4 + g_1 g_3 + g_3 g_\beta + g_3 g_4 + g_2 g_\beta + g_2 g_4 + g_2 g_3 + g_3 g_m} \cdot g_1$$

Podobnie postępując można wyznaczyć pozostałe funkcje charakterystyczne.

5. METODA LICZB STRUKTURALNYCH SPRZĘŻONYCH

Opisana metoda topologicznej analizy liniowych układów elektronicznych może być rozszerzona również na analizę za pomocą liczb strukturalnych. W tym przypadku opis części biernej układu reprezentowany jest przez liczbę strukturalną Bellerta, zaś opis części czynnej przez liczbę strukturalną, której elementy zawierają gałęzie unistorowe źródeł sterujących, odpowiednio zdefiniowane w grafie unistorowym.

Ogólnie liczbę strukturalną sprzężoną otrzymujemy z tablicy $\vec{A}$ przez zastosowanie odpowiednio do jej kolumn funkcji g, h, f. Niech dana będzie tablica

$\vec{A} = \{d_t \mid Ob(d_t)$ jest drzewem zorientowanym względem wierzchołka odniesienia $0\}$.

Korzystając z tej tablicy utworzyć można kolejno liczby strukturalne typu

$\tilde{A} = \{h^{-1}(d_t) \mid d_t \in \vec{A}\}$,

$A = \{f(h^{-1}(d_t) \mid d_t \in \vec{A} \wedge h^{-1}(d_t) \in \tilde{A})\}$.

Mając liczbę strukturalną A możemy utworzyć liczbę strukturalną sprzężoną

$$A = A_b + A_c,$$

gdzie:

$A_b = \dfrac{\delta A}{\delta \mathbf{X}}$ jest liczbą strukturalną części biernej,

$A_c = A + A_b$ jest liczbą strukturalną części czynnej,

$\mathbf{X}$ – wektor numerów elementów określających gałęzie źródeł sterujących.

Przykład

Dla tablicy $\vec{A}$ z poprzedniego przykładu nietrudno zauważyć, że

$$\tilde{A} = \{h^{-1}(d_1), h^{-1}(d_2), h^{-1}(d_3), h^{-1}(d_4), h^{-1}(d_6), h^{-1}(d_7), h^{-1}(d_8)\} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & 2 & 2 & 2 & \alpha \\ 3 & 3 & \{4,5\} & \{9,10\} & \{4,5\} & \{9,10\} & \{9,10\} & \{9,10\} \\ \{\beta,8\} & 6 & \{\beta,8\} & \{\beta,8\} & \{\beta,8\} & \{\beta,8\} & 6 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 9 & 9 & 10 & 10 & 9 & 10 & 4 & 4 & 5 & 5 & 9 & 9 & 10 & 10 & 9 & 10 \\ \beta & 8 & 6 & \beta & 8 & \beta & 8 & \beta & 8 & \beta & 8 & 6 & 6 & \beta & 8 & \beta & 8 & \beta & 8 & \beta & 8 & 6 & 6 \end{bmatrix},$$

$$A = \{f(d) \mid d \in \tilde{A}\} =$$

$$= \begin{bmatrix} + & + & + & - & - & + & + & + & + & - & + & + & + & - & - & + & + & + & + & + & + & + & + \\ \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 5 & 5 & 9 & 9 & 4 & 4 & 9 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 9 & 9 & 4 & 4 & 9 & 4 \\ \beta & 8 & 5 & \beta & 8 & \beta & 8 & \beta & 8 & \beta & 8 & 5 & 5 & \beta & 8 & \beta & 8 & \beta & 8 & \beta & 8 & 5 & 5 \end{bmatrix},$$

$$A_b = \frac{\delta A}{\delta 4} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 9 & 9 & 9 & 5 & 5 & 9 & 9 & 9 \\ \beta & 8 & 5 & \beta & 8 & \beta & 8 & 5 & \beta & 8 & \beta & 8 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{matrix} & & & & & & & & & & & & + & + \end{matrix}$$

$$A_c = A + A_b = \begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Mając liczbę strukturalną sprzężoną

$$A = A_b + A_c = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & \alpha & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 9 & 9 & 9 & 5 & 5 & 9 & 9 & 9 \\ \beta & 8 & 5 & \beta & 8 & \beta & 8 & \beta & 8 & 5 & \beta & 8 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix},$$

można wyznaczyć wszystkie interesujące nas funkcje charakterystyczne admitancji, jak np.

$$Y_1 = \frac{\det\limits_g [A]}{\det\limits_g \left[\frac{\partial A}{\partial \alpha}\right]},$$

gdzie:

$$\det_g [A] = \sum_{a \in A} \prod_{\sigma \in a} g(\sigma),$$

$$\det_g \left[\frac{\partial A}{\partial \alpha}\right] = \sum_{a, \in \frac{\partial A}{\partial \alpha}} \prod_{\sigma \in a} g(\sigma),$$

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 9 & 9 & 9 \\ \beta & 8 & 5 & \beta & 8 & \beta & 8 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$Y_{we} = \frac{\det\limits_g [A]\Big|_{y_\alpha = 0}}{\det\limits_g \left[\frac{\partial A}{\partial \alpha}\right]},$$

$$Y_{wy} = \frac{\det\limits_g [A]\Big|_{y_\beta = 0}}{\det\limits_g \left[\frac{\partial A}{\partial \beta}\right]}.$$

Dla wyznaczenia jednak potencjałów węzłowych oraz transmitancji należy wyznaczyć wartości drzew zorientowanych do odpowiednich wierzchołków.

Na przykład dla obliczenia transmitancji napięciowej

$$K_u = \frac{\sum\limits_{t=1}^{T_3} D_t^3}{\sum\limits_{t=1}^{T_1} D_t^1} = \frac{\det\limits_\psi [\vec{A}^3]}{\det\limits_\psi [\vec{A}^1]} = \frac{\det\limits_g [A^3]}{\det\limits_g [A^1]},$$

gdzie:

$$\det_\psi [\vec{A}^i] = \sum_{d \in A^i} \prod_{\gamma \in d} \Psi(\gamma),$$

$$\det_g \left[\vec{A}^i\right] = \sum_{d \in A^i} \cdot \operatorname{sign}(d) \cdot \prod_{\sigma \in d} \cdot g(\sigma),$$

sign (d) określa znak drzewa d,

postąpić można dwojako, tzn. obliczyć wartości drzew lub też wyznaczniki odpowiednich liczb strukturalnych A^3 i A^1

$$\vec{A}^3 \subset \{(0, 1)\} \times \{(1, 2)\} \times \{2, 1)\}, (2, 3), (2, 0)\},$$

czyli

$$\vec{A}^3 = \begin{bmatrix} (0,1) \\ (1,2) \\ (2,3) \end{bmatrix};$$

$$\vec{A}^1 \subset \{(2,1),(2,3),(2,0)\} \times \{(3,2),(3,0) \times (0,1)\},$$

czyli

$$\vec{A}^1 = \begin{bmatrix} (2,1) & (2,1) & (2,3) & (2,0) & (2,0) \\ (3,2) & (3,0) & (3,0) & (3,2) & (3,0) \\ (0,1) & (0,1) & (0,1) & (1,1) & (0,1) \end{bmatrix}.$$

Następnie podobnie jak poprzednio tworzymy liczby strukturalne sprzężone

$$\tilde{A}^3 = \{h^{-1}(d) \mid d \in \vec{A}^3\} = h^{-1}\left(\begin{bmatrix} 11 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \\ \{4,5\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 11 \\ 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\overset{-}{} \quad \overset{+}{} \quad \overset{+}{} \quad \overset{-}{}$$

$$A^3 = \{f(d) \mid d \in \tilde{A}^3\} = \begin{bmatrix} 11 & 11 \\ 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}^1 = \{h^{-1}(d) \mid d \in \vec{A}^1\} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & \{4,5\} & \{9,10\} & \{9,10\} \\ 6 & \{\beta,8\} & \{\beta,8\} & 6 & \{\beta,8\} \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 9 & 10 & 9 & 9 & 10 & 10 \\ 6 & \beta & 8 & \beta & 8 & \beta & 8 & 6 & 6 & \beta & 8 & \beta & 8 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \end{bmatrix},$$

$$\overset{+}{} \; \overset{+}{} \; \overset{+}{} \; \overset{-}{} \; \overset{-}{} \; \overset{+}{} \; \overset{+}{} \; \overset{+}{} \; \overset{+}{} \; \overset{+}{} \; \overset{+}{} \; \overset{+}{} \; \overset{+}{}$$

$$A^1 = \{f(d) \mid d \in \tilde{A}^1\} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 5 & 5 & 9 & 4 & 9 & 9 & 4 & 4 \\ 5 & \beta & 8 & \beta & 8 & \beta & 8 & 5 & 5 & \beta & 8 & \beta & 8 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \end{bmatrix} =$$

$$\overset{+}{}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 9 & 9 & 9 \\ 5 & \beta & 8 & \beta & 8 & 5 & \beta & 8 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Podstawiając liczby strukturalne A^3 i A^1 do wzoru na obliczenie K_u otrzymamy

$$K_u = \frac{\det\limits_g \left(\overset{+}{\begin{bmatrix} 11 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}} + \overset{-}{\begin{bmatrix} 11 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}} \right)}{\det\limits_g \left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 9 & 9 & 9 \\ 5 & \beta & 8 & \beta & 8 & 5 & \beta & 8 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix} \right)} =$$

$$= \frac{\det_g \left(\begin{bmatrix} + & - \\ 2 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \right)}{\det_g \left(\begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + & + \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 9 & 9 & 9 & 4 \\ 5 & \beta & 8 & \beta & 8 & 5 & \beta & 8 & 5 \end{bmatrix} \right)} =$$

$$= \frac{g_1 g_3 - g_1 g_m}{g_1 g_3 + g_1 g_\beta + g_1 g_4 + g_3 g_\beta + g_3 g_4 + g_2 g_3 + g_2 g_\beta + g_2 g_4 + g_3 g_m}.$$

6. WNIOSKI

Przedstawiona metoda analizy liniowych układów elektronicznych w stosunku do znanych prac [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] w tym zakresie zawiera pewne nowe podejście polegające na ujednoliceniu analizy zarówno czynnych jak i biernych układów; nie wymaga specjalnych procedur do wyznaczania znaków drzew; umożliwia łatwe generowanie drzew; jest przejrzysta i łatwa; porządkuje sprawę modeli unistorowych dzięki wprowadzeniu funkcji: Ψ, h, f oraz g; nadaje się wybitnie do realizacji komputerowej, w szczególności dla systemów komputerowych z WE/WY graficznym.

Artykuł ten autor poświęca pamięci swojego nauczyciela i promotora, przedwcześnie zmarłego w pełni sił twórczych prof. dra hab. Stanisława Bellerta, twórcy algebry liczb strukturalnych.

LITERATURA

1. S. J. Mason, *Topological Analysis of Linear Nonreciprocal Networks*, Proc. IRE, tom 45, s. 829—838, 1957.
2. C. L. Coates, *General Topological Formulas for Linear Network Functions*, IRE Trans. Circuit Theory, tom CT-5, s. 30—42, 1958.
3. W. Mayeda, *Topological Formulas for Nonreciprocal Networks and Networks With Transformers*, Proc. Natl. Electronics Conf., tom 14, s. 631—643, 1958.
4. W. K. Chen, *Topological Analysis for Active Networks*, IEEE Trans. Circuit Theory, tom CT-12, s. 85—91, 1965.
5. A. Nathan, *Topological Rules for Linear Networks*, IEEE Trans. Circuit Theory, tom CT-12, s. 344—358, 1965.
6. A. Talbot, *Topological Analysis of General Linear Networks*, IEEE Trans. Circuit Theory, tom CT-12, s. 170—180, 1965.
7. D. P. Brown, *Topological Formulas for Linear Networks*, IEEE Trans. Circuit Theory, tom CT-12, s. 358—365, 1965.

8. S. Bellert, H. Woźniacki, *Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych*, WNT, Warszawa 1968.
9. W. P. Sigorski, J. M. Kałnibołotski, *Matriczno-topołogiczeskij analiz elektronnych schiem*, Elektroswiaź, No 12, 1968.
10. Cz. Syc, *Sposób sukcesywnego wyznaczania drzew zorientowanych grafu zorientowanego metodą liczb strukturalnych sprzężonych za pomocą maszyn cyfrowych*, Archiwum Elektrotechniki, z. 2, 1973.

C. SYC

TOPOLOGICAL ANALYSIS OF LINEAR ACTIVE CIRCUIT

Summary

In this paper the problems concerning the present day questions of topological analysis of electronic circuits are presented. Such themes as the ordering of problems connected with unistor models, generating of oriented trees of unistor graph, determining of the characteristic function of electronic circuit by Bellert's method of structural numbers and conjugate structural number are discussed.

Reference analysis method and the way of its formalized description present an original approach specially effective when a computer is used.

C. SYC

ANALYSE TOPOLOGIQUE DES CIRCUITS LINÉAIRES ACTIFS

Résumé

Dans l'étude on a présenté les problèmes liés à l'analyse topologique des circuits électroniques du domaine de la mise en ordre des problèmes se rapportant aux modèles d'unistors, à la génération des arbres des graphes d'unistors orientés, et à la détermination des fonctions caractéristiques du circuit électronique par méthode des chiffres structuraux de Bellert et des nombres structuraux couplés.

La méthode de l'analyse présentée et la manière de sa description formalisée ne sont pas privées d'originalité et sont utiles surtout pour la construction d'un ordinateur.

C. SYC

TOPOLOGISCHE ANALYSE LINEARER AKTIVER SCHALTUNGEN

Zusammenfassung

Es werden Probleme behandelt, die aktuelle Fragen einer topologischen Analyse elektronischer Schaltungen umfassen. Unter anderem erörtert man das Einordnen der mit Unistormodellen verbundenen Problematik, als auch derjenigen der Generierung von orientierten Bäumen der Unistorflußdiagrammen, der Bestimmung charakteristischer Funktionen einer elektronischen Schaltung auf Grund von Bellertschen und konjugierten Strukturzahlen.

Die hier dargelegte Analyse und deren formalisierte Darstellung ergeben einen eigenen Arbeitserwerb, der ganz besonders bei einer Komputerrealisierung nützlich ist.

Ч. СЫЦ

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ АКТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

Р е з ю м е

В статье представлены проблемы касающиеся принципов топологического анализа электронных схем. Этими проблемами являются: упорядочение модели унисторных схем, генерирование ориентированных деревьев унисторных графов, определение характеристических функций электронных схем методом структурных чисел Беллерта и методом сопряженных структурных чисел.

Представленный способ сформализованного описания анализа является оригинальным подходом к реализации метода с помощью ЭЦВМ.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 3, ss. 499—541

621.3.019.3

Metody obliczania niezawodności systemów o strukturach złożonych

JANUSZ MIGDALSKI (WARSZAWA)

Politechnika Świętokrzyska, Ośrodek w Radomiu

Otrzymano 28.1.1975

W pracy podano dokładne i efektywne metody obliczania niezawodności systemów o strukturach złożonych, które nazwano metodami dekompozycyjnymi. W zależności od sposobu przeprowadzania dekompozycji struktury niezawodnościowej systemu złożonego omówiono trzy wzajemnie uzupełniające się metody dekompozycyjne, a mianowicie:

— metodę dekompozycji prostej,
— metodę dekompozycji złożonej,
— metodę dekompozycji zupełnej.

W odróżnieniu od stosowanych obecnie metod obliczeniowych, takich jak metoda stanów zdatności i niezdatności bądź też metoda minimalnych ścieżek zdatności i niezdatności, proponowane metody są prostsze, dokładniejsze i bardziej uniwersalne. Omawiane w pracy metody dekompozycyjne mogą być również zastosowane do obliczania niezawodności systemów o elementach zależnych, np. systemów „k z n" oraz systemów o elementach stochastycznie zależnych.

Dla ilustracji rozważań teoretycznych podanych w pracy rozpatrzono odpowiedni przykład liczbowy.

1. WPROWADZENIE

Problemem centralnym w procesie analizy i syntezy niezawodnościowej systemów o strukturach złożonych (systemów złożonych) jest problem obliczania niezawodności tychże systemów[1]. W przypadku systemów małych, tj. zawierających niewielką liczbę elementów $n \leqslant 10$, obliczanie niezawodności systemu złożonego wykonuje się zwykle w ten sposób, iż po wyznaczeniu wszystkich stanów zdatności (niezdatności) oblicza się wartości prawdopodobieństw poszczególnych stanów, które po zsumowaniu dają nam poszukiwaną niezawodność systemu złożonego. Opisana metoda obliczania niezawodności systemów — nazywana niekiedy *metodą stanów zdatności i niezdatności* — jest bardzo rzadko stosowana w praktyce z uwagi na wielką czasochłonność obliczeń i małe prawdopodobieństwo otrzymania bezbłędnego wyniku końcowego. Drugą, dość rozpowszechnioną metodą obliczania niezawodności systemów złożonych jest metoda, którą przyjęto nazywać *metodą minimalnych ścieżek zdatności i niezdatności* [1, 2, 3]. Zgodnie z tą metodą system o strukturze złożonej należy przekształcić w równoważny mu system szeregowo-równoległy, utworzony z odpowiedniej liczby minimalnych ścieżek zdatności (niezdatności), a następnie przeprowadzić obliczenia rachunkowe właściwe dla systemów szeregowo-równoległych. Oczy-

[1] Systemami o strukturach złożonych przyjęto w teorii niezawodności nazywać systemy nie należące do klasy struktur szeregowo-równoległych.

wiście tego rodzaju postępowanie obarczone jest znacznymi błędami rachunkowymi, spowodowanymi błędami metody, bowiem jeden i ten sam element systemu tkwi zazwyczaj równocześnie w kilku gałęziach (ścieżkach) systemu, a co za tym idzie, brany jest wielokrotnie pod uwagę w obliczeniach rachunkowych. Dość istotną wadą rozważanej metody jest konieczność użycia elektronicznych maszyn cyfrowych do wyznaczania pełnego zbioru minimalnych ścieżek zdatności (niezdatności) właściwych rozważanemu systemowi złożonemu.

Wymienionych powyżej wad nie posiadają omawiane w pracy *metody dekompozycyjne*, zaś dodatkową zaletą ich jest to, iż mogą być zastosowane do wyznaczania niezawodności systemów o elementach zależnych i stochastycznie zależnych.

2. FORMY OPISU STRUKTURY NIEZAWODNOŚCIOWEJ SYSTEMU

Spotykane przypadki opisu bądź też zapisu struktury niezawodnościowej systemu można podzielić na trzy wzajemnie uzupełniające się formy, a mianowicie:

1. opis werbalny,
2. opis logiczny,
3. opis matematyczny.

Z *opisem werbalnym*, albo inaczej słownym, struktury niezawodnościowej systemu spotykamy się na każdym poziomie rozważań niezawodnościowych. Fakt ten wynika stąd, iż każdy opis logiczny bądź matematyczny struktury niezawodnościowej systemu jest odzwierciedleniem odpowiedniego opisu werbalnego, i przeciwnie, każdemu opisowi werbalnemu możemy przyporządkować odpowiadający mu opis logiczny bądź matematyczny.

Oczywiście opis werbalny struktury niezawodnościowej systemu powinien być tak wykonany, ażeby umożliwiał jednoznaczne przeprowadzenie odpowiedniego opisu logicznego bądź matematycznego. Dla ilustracji poruszonych powyżej kwestii rozpatrzmy najprostszy system złożony o strukturze mostkowej, przedstawiony na rys. 1a. Rozważanemu systemowi można przyporządkować następujący opis werbalny struktury niezawodnościowej, charakteryzujący odpowiednio jego poprawne i wadliwe funkcjonowanie.

System przedstawiony na rys. 1a znajduje się w stanie zdatności jedynie wówczas, kiedy w stanie zdatności znajdują się przynajmniej elementy *1* i *2*, bądź *1*, *3* i *5*, bądź *3* i *4*, bądź też elementy *2*, *4* i *5*.

System przedstawiony na rys. 1a znajduje się w stanie niezdatności jedynie wówczas, kiedy w stanie niezdatności znajdują się przynajmniej elementy *1* i *4*, bądź *2* i *3*, bądź *1*, *3* i *5*, bądź też elementy *2*, *4* i *5*.

Z podanego opisu werbalnego wynika, iż rozważany system 5-elementowy może funkcjonować poprawnie nawet przy dwóch elementach zdatnych (elementy *1* i *2*, bądź *3* i *4*) oraz utracić posiadaną zdolność funkcjonowania poprawnego z chwilą uszkodzenia się przynajmniej dwóch jego elementów składowych (elementy *1* i *4*, bądź *2* i *3*).

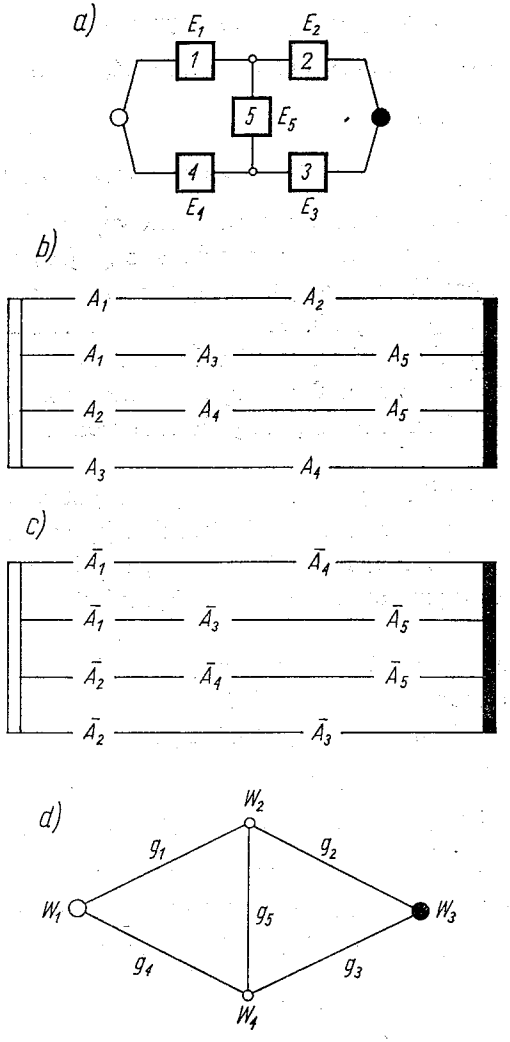
Kolejną wyższą formą opisu struktury niezawodnościowej systemu jest *opis logiczny* oparty o elementy logiki formalnej, a w szczególności o tzw. rachunek zdań[2], oraz algebrę

[2] Rachunek zdań zajmuje się związkami międzyzdaniowymi, w których oprócz stałych logicznych typu: negacji, koniunkcji, alternatywy, implikacji i równoważności występują odpowiednie zmienne zda-

Boole'a. Należy podkreślić, iż algebra Boole'a, ze względu na dwuwartościowość występujących w niej zmiennych logicznych jak również liczne interpretacje (np. w teorii sieci elektrycznych), nadaje się szczególnie dobrze do opisu strukturalnego systemów zbudowanych z elementów dwustanowych.

W odniesieniu do teorii niezawodności systemów stosowana jest zwykle następująca interpretacja algebry Boole'a:

1. stan zdatności systemu oznacza się symbolem A, zaś stany zdatności jego elementów składowych $(E_1, ..., E_i, ..., E_n)$ oznacza się odpowiednio symbolami A_i, gdzie $i = 1, 2, ..., n$ są kolejnymi numerami (indeksami) elementów systemu,



Rys. 1. Geometryczna reprezentacja różnych form opisu struktury niezawodnościowej systemu złożonego

niowe. Wymienione stałe logiczne zapisuje się przy użyciu odpowiednich symboli: „—", „∧", „∨", „→", „≡", które odczytuje się jako „nie", „i", „lub", „jeżeli to", „wtedy i tylko, gdy".

2. stan niezdatności systemu oznacza się symbolem $\bar{A}$ (nie A), zaś stany niezdatności jego elementów składowych $(E_1, \ldots, E_i, \ldots, E_n)$ oznacza się odpowiednio symbolami $\bar{A}_i$ (nie A_i),
3. koniunkcję stanów A_i oraz A_j $(A_i \cap A_j)$ traktuje się jako zdatność najprostszego systemu (podsystemu) dwuelementowego o strukturze szeregowej, tj. systemu o szeregowym połączeniu elementów E_i oraz E_j,
4. alternatywę stanów A_i oraz A_j $(A_i \cup A_j)$ traktuje się jako zdatność najprostszego systemu (podsystemu) dwuelementowego o strukturze równoległej, tj. systemu o równoległym połączeniu elementów E_i oraz E_j.

Na podstawie podanej interpretacji algebry Boole'a strukturę niezawodnościową systemu podanego na rys. 1a możemy zapisać w postaci wyrażenia:

$$A = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3 \cap A_5) \cup (A_3 \cap A_4) \cup (A_2 \cap A_4 \cap A_5), \tag{1}$$

bądź też wyrażenia przeciwnego:

$$\bar{A} = (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_4) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_5) \cup (\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_2 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5). \tag{2}$$

Wyrażeniom logicznym algebry Boole'a przyporządkowuje się zwykle odpowiadające im sieci logiczne, będące geometryczną interpretacją występujących związków logicznych.

W interesującym nas przykładzie związkom logicznym zapisanym w postaci wyrażenia (1) i (2) odpowiadają sieci logiczne podane na rys. 1b oraz 1c. Podane sieci logiczne są graficzną ilustracją struktury niezawodnościowej systemu z rys. 1a.

Oczywiście najbardziej precyzyjną formą opisu struktury niezawodnościowej systemu jest *opis matematyczny*. Wykorzystuje się tutaj głównie rachunek macierzowy oraz teorię grafów.

Pojęcie grafu opiera się na pojęciu zbioru, stąd też jest ono pojęciem pierwotnym. Najczęściej pod pojęciem grafu rozumie się obiekt składający się z dwóch zbiorów, a mianowicie: zbioru wierzchołków oraz gałęzi, które łączą ze sobą niektóre wierzchołki. Graf może być przedstawiony w postaci geometrycznej (rysunku) i/lub w postaci analitycznej (macierzy).

Przyjmuje się, że graf jest w pełni scharakteryzowany, jeżeli znamy odpowiadającą mu macierz sąsiedztwa S oraz macierz incydentności J.

Macierz $S = ||w_{ij}||$ rzędu n nazywamy *macierzą sąsiedztwa grafu*, wówczas, kiedy jej elementy wyznaczone zostały według zasady:

$$w_{ij} = \begin{cases} m, \text{ jeżeli węzły } x_i, x_j \text{ połączono } m \text{ gałęziami,} \\ 0, \text{ jeżeli węzły } x_i, x_j \text{ są izolowane.} \end{cases} \tag{3}$$

Przykładowo dla grafu podanego na rys. 1d, będącego odpowiednikiem struktury niezawodnościowej systemu z rys. 1a, macierz sąsiedztwa przyjmuje postać:

$$\begin{array}{c|cccc} & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ w_1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ w_2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ w_3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ w_4 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} = S \tag{4}$$

Odpowiednio macierz $J = ||i_{kl}||_{n,w}$ grafu, zawierającego n gałęzi oraz w węzłów, nazywamy *macierzą incydentności* (przynależności) w przypadku, kiedy:

$$i_{kl} = \begin{cases} 1, \text{ jeżeli wierzchołek } w_k \text{ jest incydentny gałęzi } g_l, \\ 0, \text{ w przypadku przeciwnym.} \end{cases} \tag{5}$$

Przykładowo dla grafu podanego na rys. 1d macierz sąsiedztwa przyjmuje postać

$$\begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\| \end{array} = J. \tag{6}$$

Przy charakteryzowaniu struktur niezawodnościowych systemów będziemy posługiwać się również pojęciem rzędu węzła grafu oraz pojęciem regularności grafu. Pod pojęciem *lokalnego rzędu węzła grafu* rozumie się liczbę gałęzi schodzących się w danym węźle, natomiast przez *regularność grafu* rzędu r rozumie się graf, którego wszystkie węzły lokalne tą tego samego rzędu r.

3. KLASYFIKACJA SYSTEMÓW O STRUKTURACH ZŁOŻONYCH

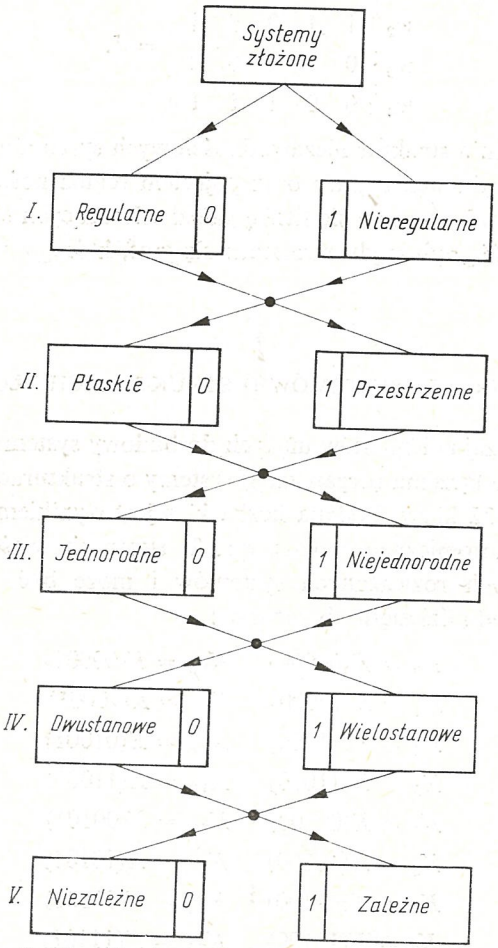
W zależności od rodzaju elementów użytych do budowy systemu oraz ich wzajemnego oddziaływania i sposobu łączenia (organizacji) systemy o strukturach złożonych[3)] możemy podzielić na $K = 2^5 = 32$ klasy. Podana liczba klas jest wynikiem przyjęcia pięcioszczeblowego podziału dychotomicznego (patrz rys. 2) istotnych właściwości strukturalnych oraz niezawodnościowych rozważanych systemów i może być zapisana symbolicznie w postaci poniższego kodu dziesiętno-binarnego:

$$\begin{aligned} K_0 &= K(00000) & K_{16} &= K(00001) \\ K_1 &= K(10000) & K_{17} &= K(10001) \\ K_2 &= K(01000) & K_{18} &= K(01001) \\ K_3 &= K(11000) & K_{19} &= K(11001) \\ K_4 &= K(00100) & K_{20} &= K(00101) \\ K_5 &= K(10100) & K_{21} &= K(10101) \\ K_6 &= K(01100) & K_{22} &= K(01101) \\ K_7 &= K(11100) & K_{23} &= K(11101) \\ K_8 &= K(00010) & K_{24} &= K(00011) \\ K_9 &= K(10010) & K_{25} &= K(10011) \\ K_{10} &= K(01010) & K_{26} &= K(01011) \\ K_{11} &= K(11010) & K_{27} &= K(11011) \\ K_{12} &= K(00110) & K_{28} &= K(00111) \end{aligned}$$

[3)] Zaproponowana klasyfikacja systemów złożonych jest klasyfikacją otwartą, tj. taką, którą można kontynuować dalej w zależności od konkretnych potrzeb.

$$K_{13} = K(10110) \quad K_{29} = K(10111)$$
$$K_{14} = K(01110) \quad K_{30} = K(01111)$$
$$K_{15} = K(11110) \quad K_{31} = K(11111)$$

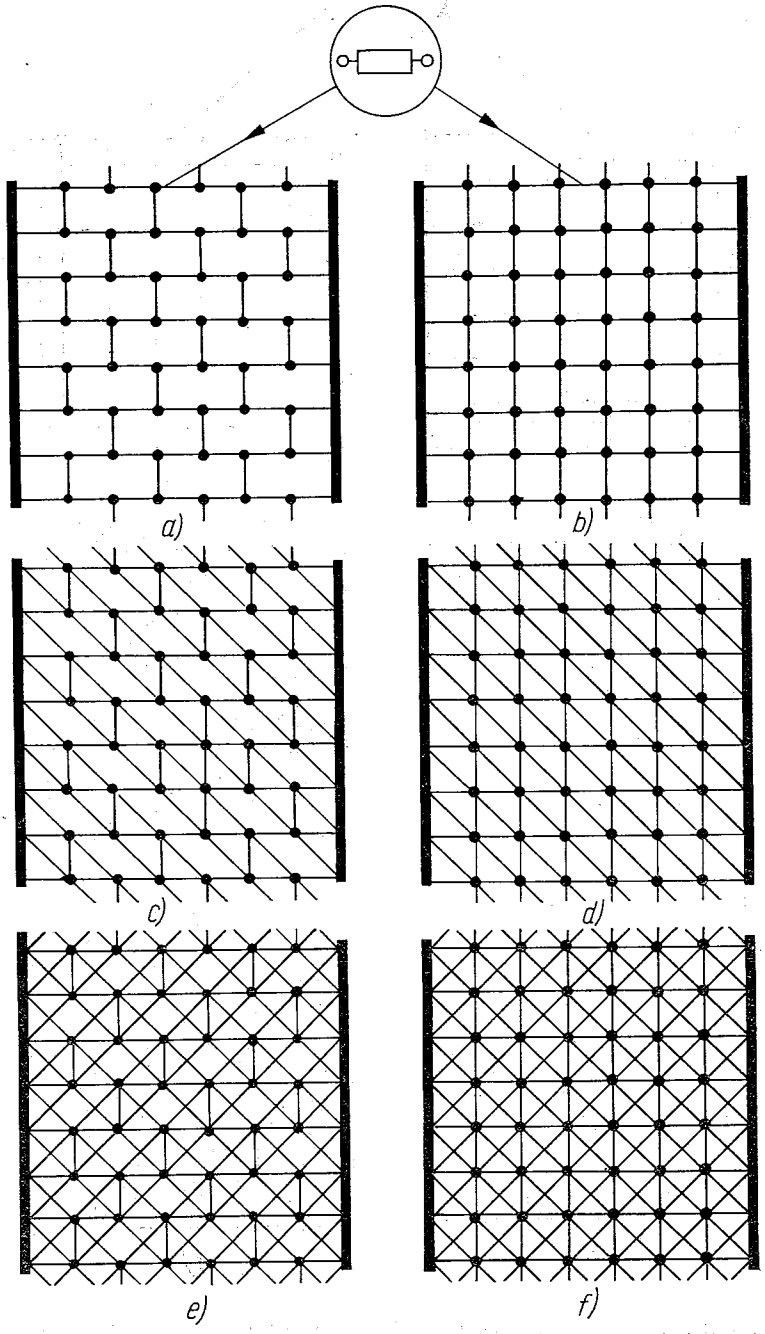
W przyjętym zapisie binarnym kolejne cyfry odpowiadają występowaniu odpowiednich właściwości systemu na poszczególnych stopniach podziału, podanym na rys. 2. W ten sposób system zaliczony do klasy $K_0 = K(00000)$ będzie systemem: o strukturze regularnej



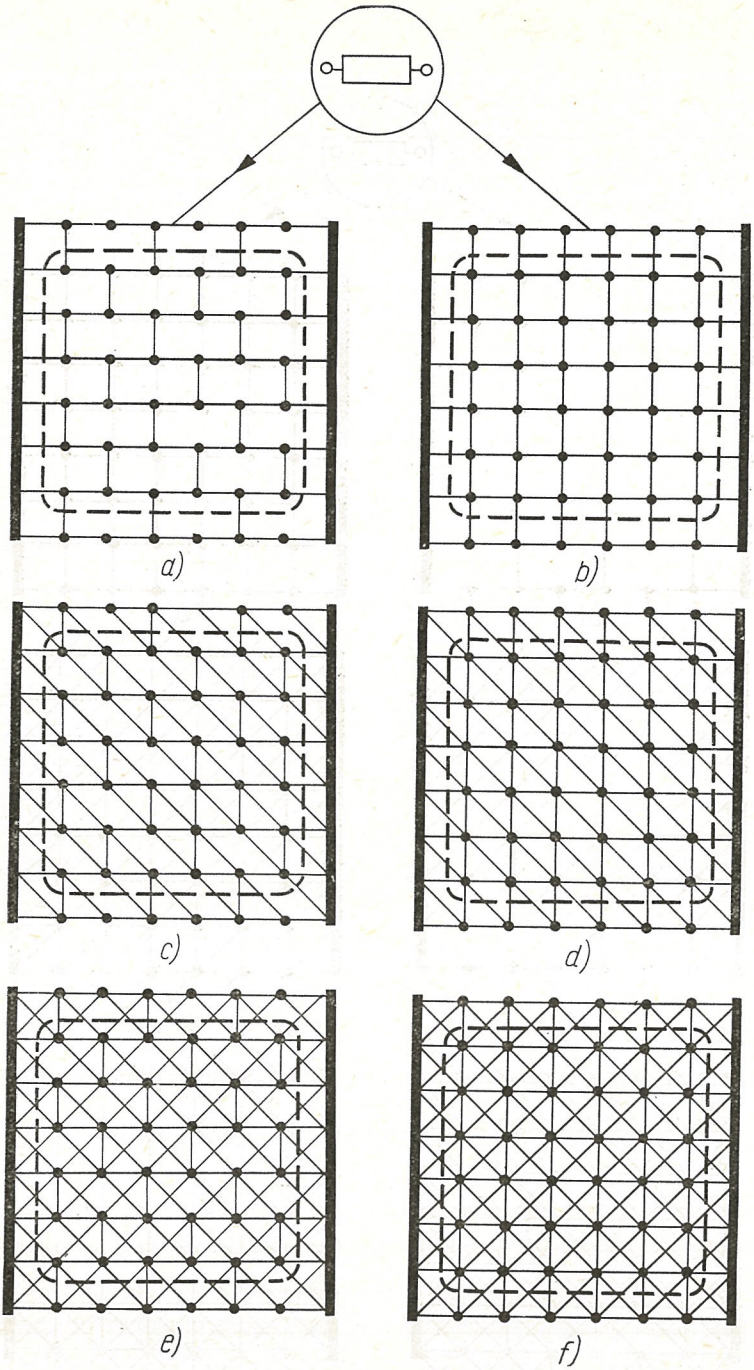
Rys. 2. Klasyfikacja systemów o strukturach złożonych

i płaskiej oraz elementach jednorodnych, dwustanowych i niezależnych, natomiast system zaliczony do klasy $K_{31} = K(11111)$ będzie systemem: o strukturze nieregularnej i przestrzennej oraz elementach niejednorodnych, wielostanowych i zależnych.

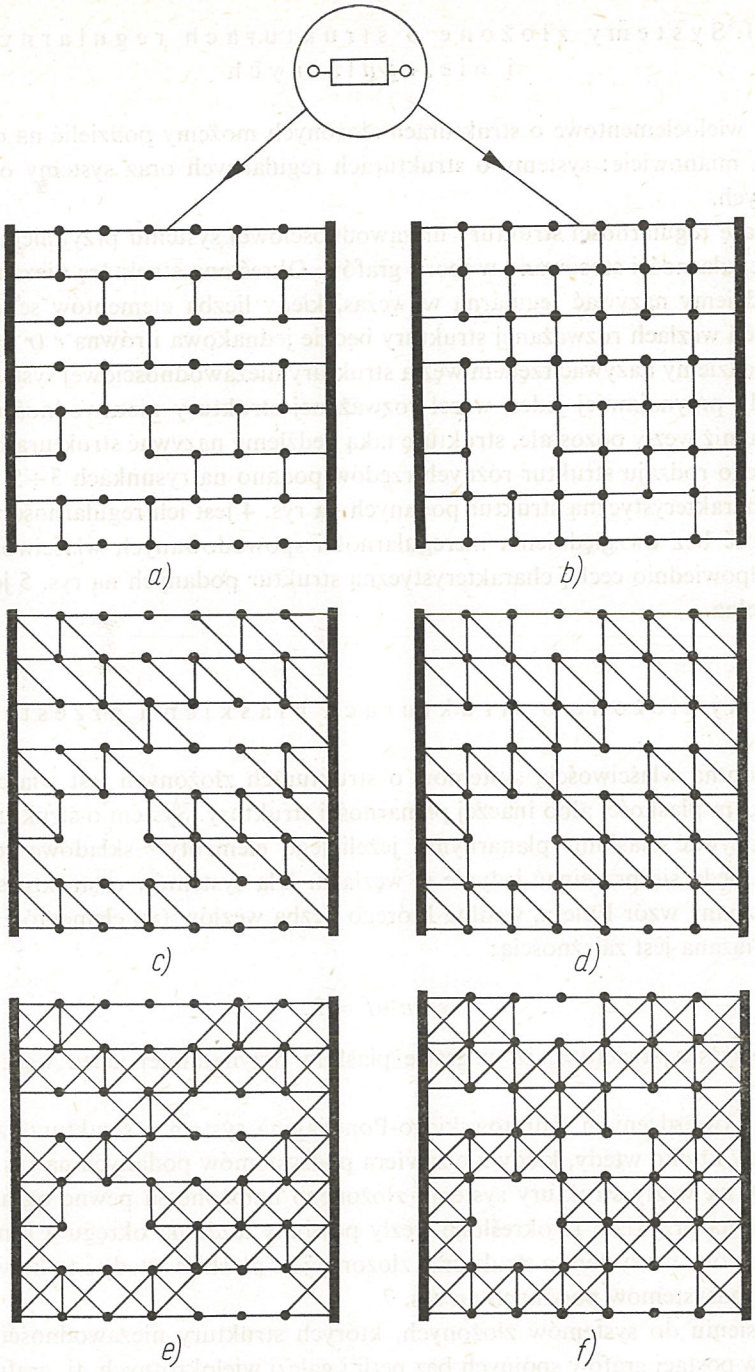
W celu pełniejszego scharakteryzowania systemów o strukturach złożonych omówimy kolejno ich właściwości, stanowiące odpowiednie szczeble podziału dychotomicznego (patrz rys. 2).



Rys. 3. Przykłady struktur nieregularnych rzędu $r = 2 \div 8$



Rys. 4. Przykłady struktur wewnętrznie regularnych rzędu: a) trzeciego ($r = 3$), b) czwartego ($r = 4$), c) piątego ($r = 5$), d) szóstego ($r = 6$), e) siódmego ($r = 7$), f) ósmego ($r = 8$)



Rys. 5. Przykłady struktur regularnych rzędu: a) trzeciego ($r = 3$), b) czwartego ($r = 4$), c) piątego ($r = 5$), d) szóstego ($r = 6$), e) siódmego ($r = 7$), f) ósmego ($r = 8$)

3.1. Systemy złożone o strukturach regularnych i nieregularnych

Systemy wieloelementowe o strukturach złożonych możemy podzielić na dwie rozłączne grupy, a mianowicie: systemy o strukturach regularnych oraz systemy o strukturach nieregularnych.

Jako miarę regularności struktury niezawodnościowej systemu przyjmiemy odpowiednią miarę regularności stosowaną w teorii grafów. Określoną strukturę niezawodnościową systemu będziemy nazywać regularną wówczas, kiedy liczba elementów schodzących się we wszystkich węzłach rozważanej struktury będzie jednakowa i równa r ($r = 1, 2, \ldots, k$). Wartość r będziemy nazywać rzędem węzła struktury niezawodnościowej systemu. W przypadku, kiedy przynajmniej jeden węzeł rozważanej struktury niezawodnościowej będzie innego rzędu niż węzły pozostałe, strukturę taką będziemy nazywać strukturą nieregularną. Przykłady tego rodzaju struktur różnych rzędów podano na rysunkach 3 ÷ 5.

Cechą charakterystyczną struktur podanych na rys. 4 jest ich regularność wewnętrzna, tj. regularność bez uwzględnienia nieregularności spowodowanych właściwościami brzegowymi. Odpowiednio cechą charakterystyczną struktur podanych na rys. 5 jest ich regularność zupełna.

3.2. Systemy złożone o strukturach płaskich i przestrzennych

Drugą istotną właściwością systemów o strukturach złożonych jest właściwość związana z pojęciem płaskości albo inaczej planarności struktury. System o strukturze złożonej będziemy nazywać płaskim (planarnym), jeżeli jego elementy[4] składowe rozłożone na płaszczyźnie będą się przecinać jedynie w węzłach. Dla systemów o strukturach płaskich obowiązuje znany wzór Eulera, według którego liczba węzłów (w) elementów (n) i obszarów[5] (f) związana jest zależnością:

$$w - n + f = 2. \tag{7}$$

Formuła powyższa stwierdza, iż w grafie płaskim przynajmniej jeden węzeł jest rzędu $r \leqslant 5$.

Zgodnie z twierdzeniem Kuratowskiego-Pontriagina system o strukturze złożonej jest płaskim wtedy i tylko wtedy, kiedy nie zawiera podsystemów podanych na rys. 6. W przypadku, kiedy na węzły struktury systemu złożonego nałożone są pewne ograniczenia [4] stwierdzające na przykład, iż określone węzły powinny leżeć na okręgu a inne wewnątrz tego okręgu, wówczas system o strukturze złożonej jest płaskim wtedy i tylko wtedy, kiedy nie zawiera podsystemów podanych na rys. 7.

W odniesieniu do systemów złożonych, których struktury niezawodnościowe można przedstawić w postaci grafów spójnych bez pętli i gałęzi wielokrotnych, tj. grafów, dla któ-

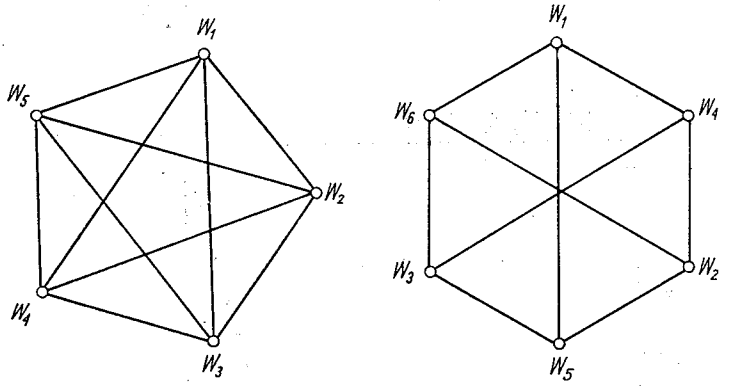
[4] W dalszych rozważaniach takie pojęcia jak „element" i „gałąź" będą używane zamiennie jako synonimy.

[5] Obszarem grafu nazywa się płaszczyznę, ograniczoną gałęziami grafu płaskiego, nie posiadającą wewnątrz węzłów i gałęzi (elementów).

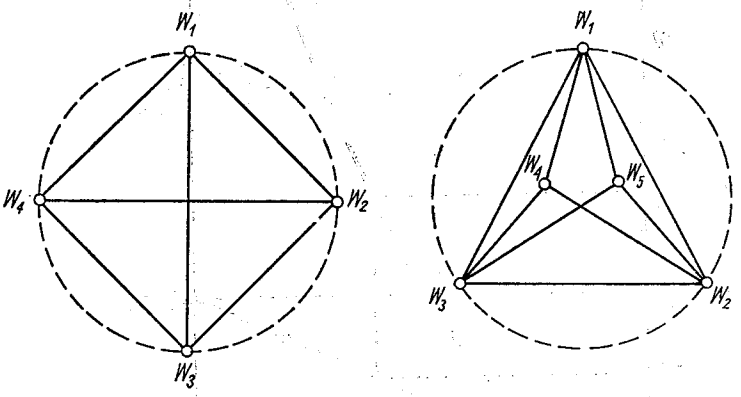
rych dwa dowolnie wyróżnione węzły połączone są tylko jedną gałęzią, można podać odpowiednie liczebności tych systemów ze wzoru:

$$L_w = L_w^{M_1} + L_w^{M_2} + L_w^{M_3} = 2\frac{w^2 - w}{2}, \tag{8}$$

gdzie w oznacza liczbę węzłów.



Rys. 6. Grafy przestrzenne Kuratowskiego-Pontriagina



Rys. 7. Grafy przestrzenne na okręgu według [4]

Składowa $L_w^{M_1}$ wyrażona zależnością:

$$L_w^{M_1} = C^{w+2}_{\frac{w^2-w}{2}} + C^{w+1}_{\frac{w^2-w}{2}} + \ldots + C^{1}_{\frac{w^2-w}{2}} \tag{9}$$

wyznacza liczebność grafów płaskich, dla których liczba węzłów i gałęzi związana jest nierównością:

$$g \leqslant w+2. \tag{10}$$

Odpowiednio składowa $L_w^{M_2}$ wyrażona zależnością:

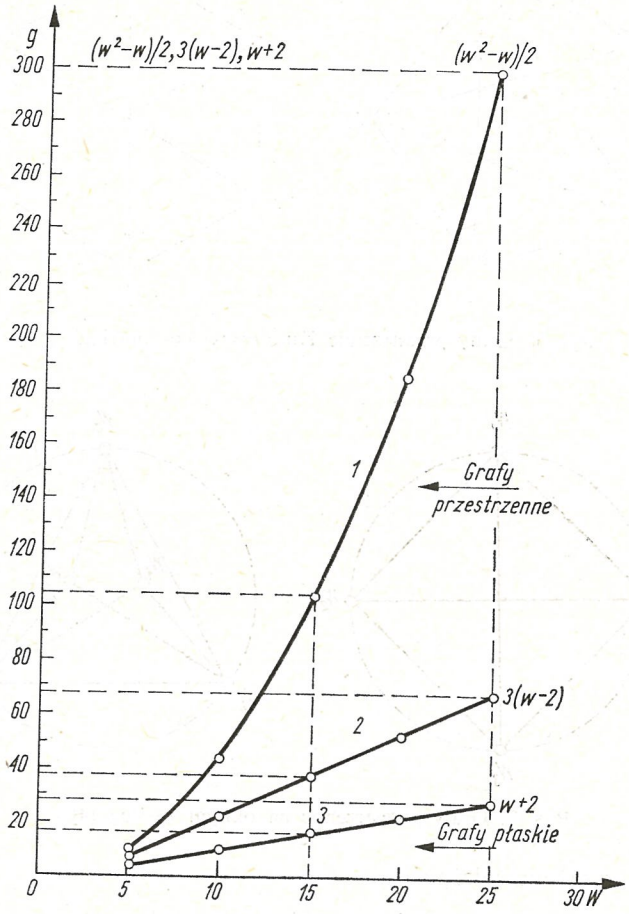
$$L_w^{M_2} = C^{3w-5}_{\frac{w^2-w}{2}} + C^{3w-4}_{\frac{w^2-w}{2}} + \ldots + C^{\frac{w^2-w}{2}-1}_{\frac{w^2-w}{2}} + C^{\frac{w^2-w}{2}}_{\frac{w^2-w}{2}} \tag{11}$$

wyznacza liczebność grafów przestrzennych, dla których liczba węzłów i gałęzi związana jest nierównością:

$$g < 3(w-2). \tag{12}$$

Natomiast składowa $L_w^{M_3}$ wyrażona zależnością:

$$L_w^{M_3} = C^{w+3}_{\frac{w^2-w}{2}} + C^{w+4}_{\frac{w^2-w}{2}} + \ldots + C^{3w-6}_{\frac{w^2-w}{2}} \tag{13}$$



Rys. 8. Liczba gałęzi (g) i węzłów (w) właściwa grafom płaskim i przestrzennym według [8]

wyznacza liczebność grafów płaskich i przestrzennych, dla których liczba węzłów i gałęzi związana jest nierównością:

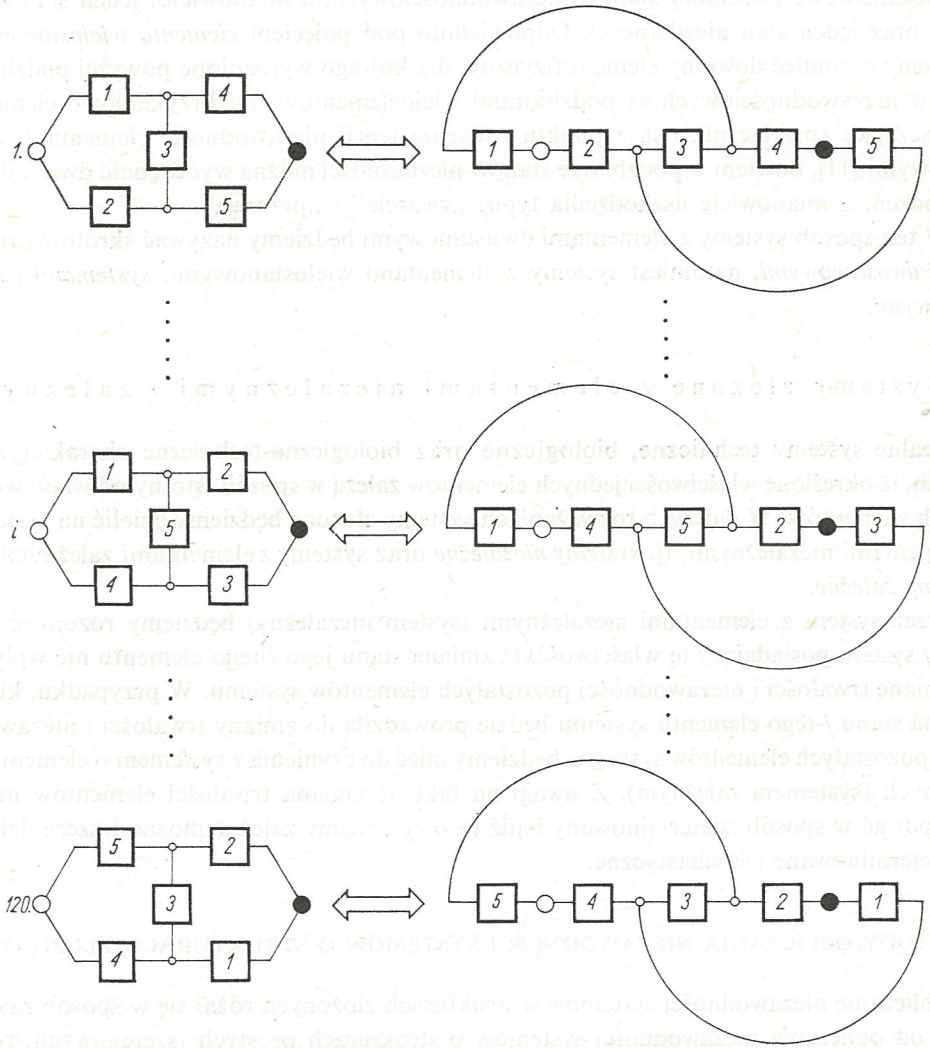
$$(w+2) < g \leqslant 3(w-2). \tag{14}$$

Na rysunku 8 podano odpowiednie wykresy, które dla ustalonej liczby węzłów i gałęzi pozwalają ustalić, czy interesujący nas graf jest grafem płaskim czy przestrzennym. Z rysunku 8 wynika, iż wszystkie grafy, których liczba gałęzi zawiera się między krzywymi *1* i *2*

są grafami przestrzennymi, między osią odciętych i krzywą *3* są grafami płaskimi, natomiast grafy, których liczba gałęzi zawiera się między krzywymi *2* i *3* wymagają dalszych uzupełniających badań.

3.3. Systemy złożone o elementach jednorodnych i niejednorodnych

System złożony zbudowany z elementów o jednakowej niezawodności ($R_i = R$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$) będziemy nazywać systemem o elementach jednorodnych, albo krótko, *systemem jednorodnym*. W przypadku, kiedy chociażby jeden element systemu będzie posiadał inną niezawodność niż elementy pozostałe, system taki nazywać będziemy systemem o elementach niejednorodnych, albo krótko *systemem niejednorodnym*.



Rys. 9. Zbiór systemów niejednorodnych o strukturze mostkowej

W ogólnym przypadku liczba systemów, o tej samej strukturze, jakie można utworzyć z n elementów niejednorodnych wynosi $n!$ Przykładowo dysponując pięcioma elementami niejednorodnymi można utworzyć $5! = 120$ niezawodnościowo różnych systemów złożonych o strukturze mostkowej (patrz rys. 9).

3.4. Systemy złożone z elementami dwustanowymi i wielostanowymi

Elementy, z których zbudowane są systemy, mogą być elementami dwustanowymi i wielostanowymi. W teorii niezawodności pod pojęciem *elementu dwustanowego* rozumie się dowolny element fizyczny, dla którego wyróżniono dwa wzajemnie wykluczające się jednoelementowe podzbiory stanów niezawodnościowych, a mianowicie: jeden stan zdatności oraz jeden stan niezdatności. Odpowiednio pod pojęciem *elementu wielostanowego* będziemy rozumieć dowolny element fizyczny, dla którego wyróżnione powyżej podzbiory stanów niezawodnościowych są podzbiorami wieloelementowymi. Przykładowo elementy przełączające (przełączniki) są z punktu widzenia teorii niezawodności elementami trójstanowymi [11], bowiem w podzbiorze stanów niezdatności można wyodrębnić dwa rodzaje uszkodzeń, a mianowicie uszkodzenia typu: „zwarcie" i „przerwa".

W ten sposób systemy z elementami dwustanowymi będziemy nazywać skrótowo *systemami dwustanowymi*, natomiast systemy z elementami wielostanowymi, *systemami wielostanowymi*.

3.5. Systemy złożone z elementami niezależnymi i zależnymi

Realne systemy techniczne, biologiczne oraz biologiczno-techniczne charakteryzują się tym, iż określone właściwości jednych elementów zależą w sposób istotny od właściwości innych elementów. W dalszych rozważaniach systemy złożone będziemy dzielić na systemy z elementami niezależnymi, tj. *systemy niezależne* oraz systemy z elementami zależnymi, tj. *systemy zależne*.

Przez system z elementami niezależnymi (system niezależny) będziemy rozumieć dowolny system posiadający tę właściwość, iż zmiana stanu jego i-tego elementu nie wpływa na zmianę trwałości i niezawodności pozostałych elementów systemu. W przypadku, kiedy zmiana stanu i-tego elementu systemu będzie prowadziła do zmiany trwałości i niezawodności pozostałych elementów systemu, będziemy mieć do czynienia z systemem o elementach zależnych (systemem zależnym). Z uwagi na fakt, iż zmiana trwałości elementów może następować w sposób zdeterminowany bądź losowy systemy zależne można jeszcze dzielić na zdeterminowane i stochastyczne.

4. METODY OBLICZANIA NIEZAWODNOŚCI SYSTEMÓW O STRUKTURACH ZŁOŻONYCH

Obliczanie niezawodności systemów o strukturach złożonych różni się w sposób zasadniczy od obliczania niezawodności systemów o strukturach prostych (szeregowych, równoległych, szeregowo-równoległych i równoległo-szeregowych).

Tradycyjnie najstarszą, a równocześnie najbardziej czasochłonną metodą obliczania niezawodności systemów złożonych jest tzw. „metoda stanów zdatności i niezdatności", nazwana w pracy *metodą dekompozycji zupełnej*. Jej szczegółowe omówienie podano w p. 4.3.

Drugą dość rozpowszechnioną w literaturze metodą obliczania niezawodności systemów złożonych jest *metoda minimalnych ścieżek zdatności i niezdatności*. Metoda ta w odróżnieniu od omawianych tutaj metod dekompozycyjnych pozwala jedynie na wyznaczenie odpowiednich kresów (dolnego i górnego) w jakich zawiera się rzeczywista niezawodność systemu złożonego. Podstawowe idee tej metody podano w p. 4.4.

Pozostałe metody obliczeniowe, które nazwano umownie metodami dekompozycyjnymi, są konsekwentnym rozwinięciem metod omawianych w pracach [9, 10, 12, 13, 15].

4.1. Metoda dekompozycji prostej

Metoda dekompozycji prostej należy niewątpliwie do efektywniejszych metod obliczania niezawodności systemów złożonych. Idea tej metody polega na tym, że system o strukturze złożonej zostaje drogą kolejnych operacji strukturalnych przekształcony na pewną liczbę podsystemów prostych, tj. podsystemów o strukturach szeregowo-równoległych, a więc systemów, których niezawodność można wyznaczać znanymi metodami obliczeniowymi. Cechą charakterystyczną omawianej metody jest to, iż dekompozycję n-elementowego systemu złożonego wykonuje się zawsze względem jednego, odpowiednio wybranego i-tego elementu systemu, w wyniku czego otrzymuje się dwa podsystemy $(n-1)$-elementowe nie zawierające i-tego elementu.

W przypadku, kiedy struktury otrzymanych podsystemów są dalej strukturami złożonymi, przeprowadza się ich kolejne dekompozycje, przy czym czynności te powtarza się tak długo, dopóki nie otrzyma się podsystemów o strukturach szeregowo-równoległych (prostych). Oczywiście liczba niezbędnych dekompozycji analizowanego systemu jest funkcją jego złożoności oraz sposobu przeprowadzania samej dekompozycji.

W celu sformalizowania procedury obliczeniowej, właściwej metodzie dekompozycji prostej, przyjmijmy następujące oznaczenia zdarzeń i ich prawdopodobieństw:

A — niech oznacza poprawne funkcjonowanie systemu,

$\bar{A}$ — niech oznacza uszkodzenie systemu,

A_i — niech oznacza poprawne funkcjonowania i-tego elementu,

$\bar{A}_i$ — niech oznacza uszkodzenie i-tego elementu,

$A|A_i$ — niech oznacza poprawne funkcjonowanie systemu pod warunkiem, że i-ty element systemu jest zdatny,

$A|\bar{A}_i$ — niech oznacza poprawne funkcjonowanie systemu pod warunkiem, że i-ty element systemu jest uszkodzony,

$\bar{A}|A_i$ — niech oznacza uszkodzenie systemu pod warunkiem, że i-ty element systemu jest zdatny,

$\bar{A}|\bar{A}_i$ — niech oznacza uszkodzenie systemu pod warunkiem, że i-ty element systemu jest uszkodzony,

$A_i|A_i$ — niech oznacza poprawne funkcjonowanie systemu jednoelementowego pod warunkiem, że jego element (i-ty) jest zdatny,

$A_i|\overline{A}_i$ — niech oznacza poprawne funkcjonowanie systemu jednoelementowego pod warunkiem, że jego element (i-ty) jest uszkodzony,

$\overline{A}_i|A_i$ — niech oznacza uszkodzenie systemu jednoelementowego pod warunkiem, że jego element (i-ty) jest zdatny,

$\overline{A}_i|\overline{A}_i$ — niech oznacza uszkodzenie systemu jednoelementowego pod warunkiem, że jego element (i-ty) jest uszkodzony.

Zapisane powyżej zdarzenia warunkowe, odnoszące się zarówno do najprostszego systemu, jakim niewątpliwie jest system jednoelementowy, jak również do dowolnie złożonego systemu wieloelementowego, możemy przedstawić w formie tabelarycznej (patrz tablice 1 i 2).

Tablica 1

Zbiór zdarzeń warunkowych dla systemu jednoelementowego

	A_i	$\overline{A}_i$
A_i	$A_i\|A_i$	$A_i\|\overline{A}_i$
$\overline{A}_i$	$\overline{A}_i\|A_i$	$\overline{A}_i\|\overline{A}_i$

Tablica 2

Zbiór zdarzeń warunkowych dla systemu wieloelementowego

	A_i	$\overline{A}_i$
A	$A\|A_i$	$A\|\overline{A}_i$
$\overline{A}$	$\overline{A}\|A_i$	$\overline{A}\|\overline{A}_i$

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A, tzn. wyrażenie:

$$0 < R = P(A) < 1, \tag{15}$$

będziemy nazywać niezawodnością systemu, natomiast prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia przeciwnego, tzn. wyrażenie:

$$0 < Q = P(\overline{A}) < 1, \tag{16}$$

będziemy nazywać prawdopodobieństwem uszkodzenia się systemu. Ponieważ zachodzi związek:

$$P(A)+P(\overline{A}) = R+Q = 1, \tag{17}$$

zatem mamy:

$$R = 1-Q \tag{18}$$

oraz

$$Q = 1-R. \tag{19}$$

Odpowiednio prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A_i, tzn. wyrażenie:

$$0 < R_i = P(A_i) < 1, \tag{20}$$

będziemy nazywać niezawodnścią i-tego elementu systemu, natomiast prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia przeciwnego, tzn. wyrażenie:

$$0 < Q_i = P(\overline{A}_i) < 1, \tag{21}$$

będziemy nazywać prawdopodobieństwem uszkodzenia się i-tego elementu systemu.

Analogicznie do zależności (17), (18) oraz (19) możemy napisać związki:

$$P(A_i)+P(\bar{A}_i) = R_i+Q_i = 1 \tag{22}$$

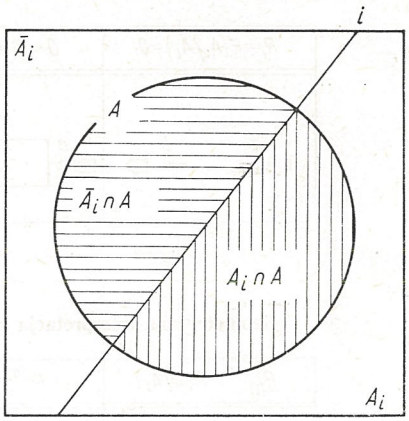
oraz

$$R_i = 1-Q_i; \quad Q_i = 1-R_i. \tag{23}$$

W celu otrzymania dalszych związków rozważmy następującą tożsamość:

$$A = (A_i \cup \bar{A}_i) \cap A = (A_i \cap A) \cup (\bar{A}_i \cap A) \tag{24}$$

wiążącą poprawne funkcjonowanie systemu z funkcjonowaniem jego i-tego elementu. Podanemu powyżej wyrażeniu (24) można nadać prostą interpretację geometryczną w sposób, jak to pokazano na rys. 10.



Rys. 10. Geometryczne przedstawienie tożsamości (24)

Ze względu na fakt, iż zdarzenia złożone $(A_i \cap A)$ oraz $(\bar{A}_i \cap A)$ wykluczają się wzajemnie, niezawodność systemu n-elementowego o strukturze złożonej możemy wyrazić wzorem:

$$R^{(n)} = P(A) = P(A_i)P(A|A_i)+P(\bar{A}_i)P(A|\bar{A}_i). \tag{25}$$

W szczególnym przypadku, a mianowicie wówczas, kiedy rozważany system jest systemem jednoelementowym $n = 1$ wyrażenie (25) przyjmuje postać:

$$R^{(1)} = P(A) = P(A_i)P(A_i|A_i)+P(\bar{A}_i)P(A_i|\bar{A}_i), \tag{26}$$

przy czym ze względu na to, iż $P(A_i|A_i) = 1$ oraz $P(A_i|\bar{A}_i) = 0$ otrzymujemy:

$$R^{(1)} = P(A) = P(A_i) = R_i. \tag{27}$$

Dla uproszczenia zapisu przyjmijmy następujące oznaczenia prawdopodobieństw warunkowych:

$$\bar{R}_{(i)}^{(n-1)} = P(A|A_i) \tag{28}$$

oraz

$$\underline{R}_{(i)}^{(n-1)} = P(A|\bar{A}_i). \tag{29}$$

Korzystając z podanych uprzednio zależności oraz wprowadzonych powyżej oznaczeń, wzór (25) możemy przedstawić w postaci wyrażenia:

$$R^{(n)} = R_i \bar{R}_{(i)}^{(n-1)}+(1-R_i)\underline{R}_{(i)}^{(n-1)}, \tag{30}$$

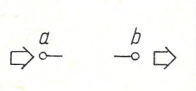
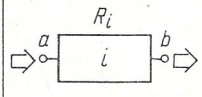
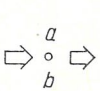
gdzie:

$$R^{(n)} = R^{(n)}(R_1, \ldots, R_{i-1}, R_i, R_{i+1}, \ldots, R_n),$$
$$\overline{R}_{(i)}^{(n-1)} = \overline{R}_{(i)}^{(n-1)}(R_1, \ldots, R_{i-1}, R_i = 1, R_{i+1}, \ldots, R_n), \tag{31}$$
$$\underline{R}_{(i)}^{(n-1)} = \underline{R}_{(i)}^{(n-1)}(R_1, \ldots, R_{i-1}, R_i = 0, R_{i+1}, \ldots, R_n).$$

Podanym powyżej wyrażeniom analitycznym będziemy nadawać odpowiednią interpretację geometryczną przedstawioną w tablicy 3 i 4. W myśl przyjętej interpretacji element

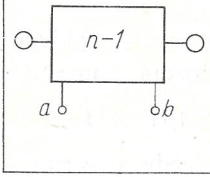
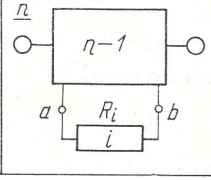
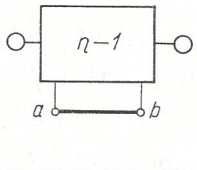
Tablica 3

Geometryczna interpretacja zdarzeń dla systemu jednoelementowego

$R_i = P(A_i/\bar{A}_i) = 0$	$0 < R_i = P(A_i) < 1$	$R_i = P(A_i/A_i) = 1$
		

Tablica 4

Geometryczna interpretacja zdarzeń dla systemu złożonego

$\underline{R}_{(i)}^{(n-1)} = P(A/\bar{A}_i)$	$R^{(n)} = P(A)$	$\overline{R}_{(i)}^{(n-1)} = P(A/A_i)$
		

(lub system) uszkodzony, tj. taki, dla którego $R_i = 0$, przedstawia sobą „przerwę" dla ewentualnego przepływu strumienia informacji bądź energii, natomiast element (lub system) absolutnie niezawodny, tj. taki, dla którego $R_i = 1$, przedstawia sobą „zwarcie" dla ewentualnego przepływu strumienia informacji bądź energii. W pozostałych przypadkach dowolny realny element (lub system) przedstawia sobą pewną „rezystancję" dla przepływu strumienia informacji bądź energii.

Dla ilustracji omawianej metody obliczeniowej wyznaczono niezawodność najprostszego systemu złożonego o strukturze mostkowej (patrz Dodatek).

4.2. Metoda dekompozycji złożonej

Najbardziej ogólną metodą obliczania niezawodności systemów złożonych, należącą do metod dekompozycyjnych, jest metoda dekompozycji złożonej. W odróżnieniu od metody dekompozycji prostej cechą charakterystyczną tej metody jest to, iż dekompozycję n-ele-

mentowego systemu złożonego wykonuje się nie ze względu na jego pojedynczy element, lecz odpowiednio wybraną grupę elementów o liczebności $1 < g < n$. W wyniku otrzymuje się 2^g różnych podsystemów $(n-g)$-elementowych nie zawierających elementów wchodzących w skład „grupy dekompozycyjnej", tj. elementów, względem których przeprowadzana jest dekompozycja systemu. Fakt ten oznacza, że omawiana uprzednio metoda dekompozycji prostej jest szczególnym przypadkiem metody dekompozycji złożonej, kiedy $g = 1$. Analogicznie jak w metodzie dekompozycji prostej, liczba niezbędnych dekompozycji analizowanego systemu jest funkcją jego złożoności oraz sposobu przeprowadzania dekompozycji. Należy podkreślić, iż umiejętne stosowanie rozważanej metody obliczeniowej pozwala znacznie uprościć proces obliczania niezawodności systemów złożonych, przy równoczesnym ograniczeniu do minimum ewentualnych błędów rachunkowych.

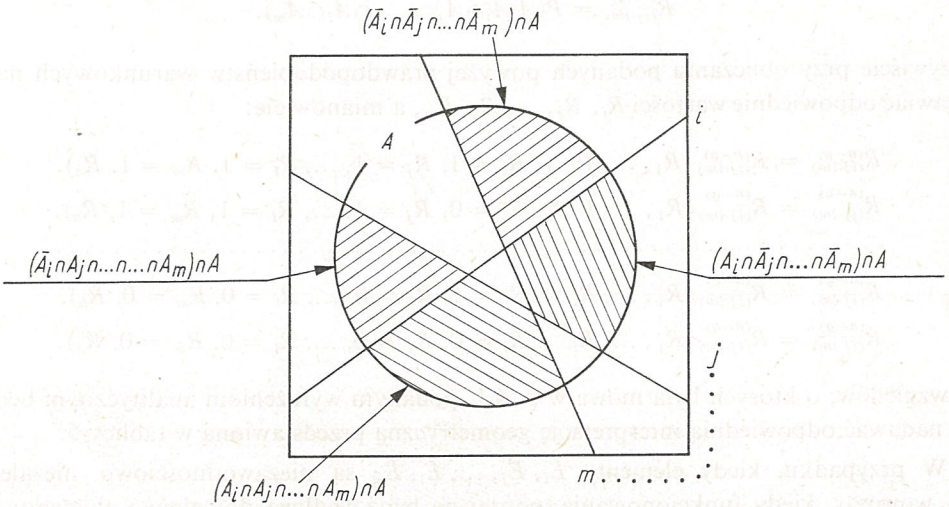
W celu sformalizowania procedury obliczeniowej, właściwej metodzie dekompozycji złożonej, rozważmy następującą tożsamość złożoną:

$$A = I \cap A = [(A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_l \cap A_m) \cup (\bar{A}_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_l \cap A_m) \cup \ldots$$
$$\ldots \cup (A_i \cap \bar{A}_j \cap \ldots \cap A_l \cap \bar{A}_m) \cup (\bar{A}_i \cap \bar{A}_j \cap \ldots \cap \bar{A}_l \cap \bar{A}_m)] \cap A, \tag{32}$$

wiążącą poprawne funkcjonowanie systemu (zdarzenie A) z funkcjonowaniem interesującej nas grupy elementów $E_i, E_j, \ldots, E_l, E_m$. Zachowując oznaczenia podane w p. 4.1 oraz przekształcając wyrażenie (32), możemy napisać tożsamość rozwiniętą:

$$A = [(A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_l \cap A_m) \cap A] \cup [(\bar{A}_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_l \cap A_m) \cap A] \cup \ldots$$
$$\ldots \cup [(A_i \cap \bar{A}_j \cap \ldots \cap \bar{A}_l \cap \bar{A}_m) \cap A] \cup [(\bar{A}_i \cap \bar{A}_j \cap \ldots \cap \bar{A}_l \cap \bar{A}_m) \cap A]. \tag{33}$$

Wyrażeniom (32) i (33) można nadać prostą interpretację geometryczną, pokazaną poglądowo na rys. 11.



Rys. 11. Geometryczne przedstawienie tożsamości (32) i (33)

Ze względu na fakt, iż zdarzenia złożone:

$$\begin{aligned}
&(A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_l \cap A_m) \cap A,\\
&(\bar{A}_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_l \cap A_m) \cap A,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(A_i \cap \bar{A}_j \cap \ldots \cap \bar{A}_l \cap \bar{A}_m) \cap A,\\
&(\bar{A}_i \cap \bar{A}_j \cap \ldots \cap \bar{A}_l \cap \bar{A}_m) \cap A
\end{aligned} \tag{34}$$

wykluczają się wzajemnie, niezawodność $R^{(n)}$ systemu n-elementowego o strukturze złożonej możemy wyrazić wzorem:

$$R^{(n)} = R^{(g)}_{ij\cdot lm} R^{(n-g)}_{(ij\cdot lm)} + R^{(g)}_{ij\cdot lm} R^{(n-g)}_{(ij\cdot lm)} + \ldots + R^{(g)}_{ij\cdot \bar{l}\bar{m}} R^{(n-g)}_{(ij\cdot \bar{l}\bar{m})} + R^{(g)}_{ij\cdot \bar{l}\bar{m}} R^{(n-g)}_{(\bar{i}\bar{j}\cdot \bar{l}\bar{m})}, \tag{35}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
R^{(g)}_{ij\cdot lm} &= P(A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_l \cap A_m),\\
R^{(g)}_{\bar{i}j\cdot lm} &= P(\bar{A}_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_l \cap A_m),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
R^{(g)}_{ij\cdot \bar{l}\bar{m}} &= P(A_i \cap \bar{A}_j \cap \ldots \cap \bar{A}_l \cap \bar{A}_m),\\
R^{(g)}_{\bar{i}j\cdot \bar{l}\bar{m}} &= P(\bar{A}_i \cap \bar{A}_j \cap \ldots \cap \bar{A}_l \cap \bar{A}_m),
\end{aligned} \tag{36}$$

natomiast

$$\begin{aligned}
R^{(n-g)}_{(ij\cdot lm)} &= P(A | A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_l \cap A_m),\\
R^{(n-g)}_{(\bar{i}j\cdot lm)} &= P(A | \bar{A}_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_l \cap A_m),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
R^{(n-g)}_{(ij\cdot \bar{l}\bar{m})} &= P(A | A_i \cap \bar{A}_j \cap \ldots \cap \bar{A}_l \cap \bar{A}_m),\\
R^{(n-g)}_{(\bar{i}\bar{j}\cdot \bar{l}\bar{m})} &= P(A | \bar{A}_i \cap \bar{A}_j \cap \ldots \cap \bar{A}_l \cap \bar{A}_m).
\end{aligned} \tag{37}$$

Oczywiście przy obliczaniu podanych powyżej prawdopodobieństw warunkowych należy wstawiać odpowiednie wartości R_i, R_j, ..., R_l, R_m, a mianowicie:

$$\begin{aligned}
R^{(n-g)}_{(ij\cdot lm)} &= R^{(n-g)}_{(ij\cdot lm)}(R_1, \ldots, R_{i-1}, R_i = 1, R_j = 1, \ldots, R_l = 1, R_m = 1, R_n),\\
R^{(n-g)}_{(\bar{i}j\cdot lm)} &= R^{(n-g)}_{(\bar{i}j\cdot lm)}(R_1, \ldots, R_{i-1}, R_i = 0, R_j = 1, \ldots, R_l = 1, R_m = 1, R_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
R^{(n-g)}_{(ij\cdot \bar{l}\bar{m})} &= R^{(n-g)}_{(ij\cdot \bar{l}\bar{m})}(R_1, \ldots, R_{i-1}, R_i = 1, R_j = 0, \ldots, R_l = 0, R_m = 0, R_n),\\
R^{(n-g)}_{(\bar{i}\bar{j}\cdot \bar{l}\bar{m})} &= R^{(n-g)}_{(\bar{i}\bar{j}\cdot \bar{l}\bar{m})}(R_1, \ldots, R_{i-1}, R_i = 0, R_j = 0, \ldots, R_l = 0, R_m = 0, R_n).
\end{aligned} \tag{38}$$

Ze względów, o których była mowa w p. 4.1, podanym wyrażeniom analitycznym będziemy nadawać odpowiednią interpretację geometryczną przedstawioną w tablicy 5.

W przypadku, kiedy elementy $E_i, E_j, \ldots, E_l, E_m$ są niezawodnościowo niezależne, tzn. wówczas, kiedy funkcjonowanie (poprawne bądź wadliwe) dowolnego elementu rozważanej grupy nie zależy od funkcjonowania elementów pozostałych, wyrażenie (36)

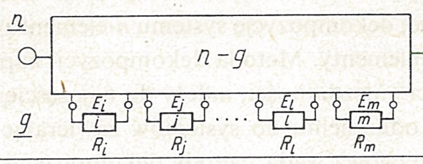
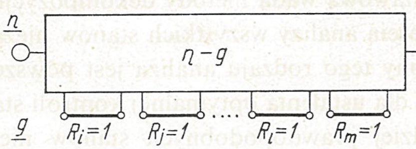
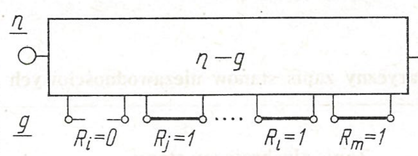
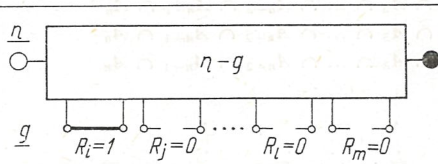
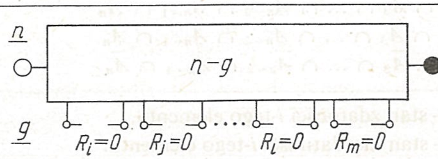
możemy zapisać w postaci:

$$
\begin{aligned}
R^{(g)}_{ij\cdot lm} &= P(A_i)P(A_j)\ldots P(A_l)P(A_m) = R_iR_j\ldots R_lR_m,\\
R^{(g)}_{\bar{i}j\cdot lm} &= P(\bar{A}_i)P(A_j)\ldots P(A_l)P(A_m) = Q_iR_j\ldots R_lR_m,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
R^{(g)}_{i\bar{j}\cdot\bar{l}\bar{m}} &= P(A_i)P(\bar{A}_j)\ldots P(\bar{A}_l)P(\bar{A}_m) = R_iQ_j\ldots Q_lQ_m,\\
R^{(g)}_{\bar{i}\bar{j}\cdot\bar{l}\bar{m}} &= P(\bar{A}_i)P(\bar{A}_j)\ldots P(\bar{A}_l)P(\bar{A}_m) = Q_iQ_j\ldots Q_lQ_m.
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Natomiast w przypadku, kiedy rozważany system jest ponadto systemem jednorodnym, tj. systemem, dla którego $R_1 = R_2 = \ldots = R_i = \ldots = R_n = R$, jego niezawodność $R^{(n)}$ możemy wyrazić wzorem:

Tablica 5

Geometryczna interpretacja zdarzeń warunkowych według zależności (37)

L. p.	Zapis algebraiczny zdarzenia	Interpretacja geometryczna zdarzenia
—	$R^{(n)}$	
1	$R^{(n-g)}_{(ij\cdot lm)}$	
2	$R^{(n-g)}_{(\bar{i}j\cdot lm)}$	
⋮	⋮	. . . .
2^{g-1}	$R^{(n-g)}_{(i\bar{j}\cdot\bar{l}\bar{m})}$	
2^g	$R^{(n-g)}_{(\bar{i}\bar{j}\cdot\bar{l}\bar{m})}$	

$$R^{(n)} = C_0 R^g R^{(n-g)}_{(G=0)} + C_1 R^{(g-1)} Q R^{(n-g)}_{(G=1)} + \ldots + C_{g-1} R Q^{(g-1)} R^{(n-g)}_{(G=g-1)} + C_g Q^g R^{(n-g)}_{(G=g)}, \quad (40)$$

gdzie:

$$1 \leqslant C_c \leqslant \left[\binom{g}{c} = \frac{g!}{c!(g-c)!} \right]; \quad (0 \leqslant c \leqslant g), \quad (41)$$

natomiast: $R^{(n-g)}_{(G=0)}$, $R^{(n-g)}_{(G=1)}$, ..., $R^{(n-g)}_{(G=g-1)}$, $R^{(n-g)}_{(G=g)}$ oznaczają odpowiednie niezawodności systemu $(n-g)$-elementowego dla przypadku, kiedy w wydzielonej „grupie dekompozycyjnej" elementów jednorodnych wszystkie elementy są zdatne ($G = 0$), tylko jeden element jest niezdatny ($G = 1$), ..., tylko jeden element jest zdatny ($G = g-1$), wszystkie elementy są niezdatne ($G = g$).

W oparciu o zaprezentowaną metodę dekompozycji złożonej wyznaczono niezawodność najprostszego systemu złożonego o strukturze mostkowej (patrz Dodatek).

4.3. Metoda dekompozycji zupełnej

Szczególnym przypadkiem metody dekompozycji złożonej jest metoda dekompozycji zupełnej, według której dekompozycję systemu n-elementowego przeprowadza się ze względu na wszystkie jego elementy. Metoda dekompozycji zupełnej, nazywana tradycyjnie metodą stanów zdatności i niezdatności, należy do najczęściej stosowanych metod obliczeniowych, szczególnie w odniesieniu do systemów zawierających niewielką liczbę elementów (podsystemów). Podstawową wadą metody dekompozycji zupełnej jest jej czasochłonność związana z koniecznością analizy wszystkich stanów niezawodnościowych systemu w liczbie 2^n. Z drugiej strony tego rodzaju analiza jest powszechnie stosowana w diagnostyce technicznej systemów dla ustalenia optymalnej kontroli stanów, lokalizacji uszkodzeń oraz wyznaczania najbardziej prawdopodobnych stanów niezawodnościowych systemu złożonego.

Tablica 6

Tabelaryczny zapis stanów niezawodnościowych systemu złożonego

Numer stanu	Zapis algebraiczny stanu	Oznaczenie stanu	Wartość $R^{(n)}$ $(A\|A_i)$
0	$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n$	S_0	1
1	$\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n$	S_1	1 lub 0
2	$A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n$	S_2	1 lub 0
3	$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n$	S_3	1 lub 0
.	. . . .	.	.
.	. . . .	.	.
.	. . . .	.	.
2^{n-3}	$A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap \ldots \cap \overline{A}_{n-2} \cap \overline{A}_{n-1} \cap \overline{A}_n$	S_{n-3}	1 lub 0
2^{n-2}	$A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \ldots \cap \overline{A}_{n-2} \cap \overline{A}_{n-1} \cap \overline{A}_n$	S_{n-2}	1 lub 0
2^{n-1}	$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \ldots \cap \overline{A}_{n-2} \cap \overline{A}_{n-1} \cap \overline{A}_n$	S_{n-1}	0

Oznaczenia: A_i — stan zdatności i-tego elementu,
$\overline{A}_i$ — stan niezdatności i-tego elementu.

Typowy proces obliczeniowy, realizowany według omawianej metody, można przedstawić w postaci następującego algorytmu:

1. wyznacza się liczbę możliwych stanów niezawodnościowych systemu n-elementowego ze wzoru: $L = 2^n$,
2. każdemu stanowi niezawodnościowemu systemu przyporządkowuje się odpowiadający mu numer, np. 0, 1, 2, ..., 2^{n-3}, 2^{n-2}, 2^{n-1}, (patrz tablica 6),
3. na podstawie struktury niezawodnościowej systemu wyznacza się wszystkie jego stany zdatności bądź niezdatności (patrz Dodatek),
4. Wyznacza się wartości prawdopodobieństw poszczególnych stanów zdatności bądź niezdatności,
5. wyznacza się niezawodność systemu, sumując wartości prawdopodobieństw wszystkich stanów zdatności bądź niezdatności[6].

W celu sformalizowania procedury obliczeniowej, właściwej metodzie dekompozycji zupełnej, rozważmy następującą tożsamość:

$$\begin{aligned} A = I \cap A = [&(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_m \cap A_n) \cup \\ &(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_m \cap A_n) \cup \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_i \cap \overline{A}_j \cap \ldots \cap \overline{A}_m \cap \overline{A}_n) \cup \\ &(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_i \cap \overline{A}_j \cap \ldots \cap \overline{A}_m \cap \overline{A}_n)] \cup A, \end{aligned} \tag{42}$$

wiążącą poprawne funkcjonowanie systemu (zdarzenie A) z funkcjonowaniem wszystkich jego elementów $E_1, E_2, \ldots, E_i, E_j, \ldots, E_m, E_n$. W celu podania interesujących nas związków formalnych przedstawmy tożsamość (42) w postaci rozwiniętej:

$$\begin{aligned} A = [&(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_m \cap A_n) \cap A] \cup \\ \cup [&(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_m \cap A_n) \cap A] \cup \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cup [&(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_i \cap \overline{A}_j \cap \ldots \cap \overline{A}_m \cap \overline{A}_n) \cap A] \cup \\ \cup [&(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_i \cap \overline{A}_j \cap \ldots \cap \overline{A}_m \cap \overline{A}_n) \cap A]. \end{aligned} \tag{43}$$

Podobnie jak to uczyniono w p. 4.1 i 4.2, wyrażeniom (42) i (43) można nadać prostą interpretację geometryczną, pokazaną poglądowo na rys. 12.

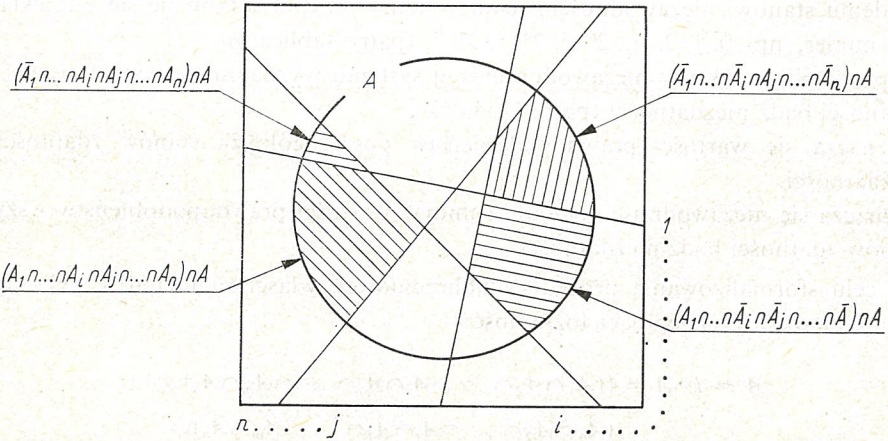
Ze względu na fakt, iż zdarzenia złożone:

$$\begin{aligned} &(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_m \cap A_n) \cap A, \\ &(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_m \cap A_n) \cap A, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_i \cap \overline{A}_j \cap \ldots \cap \overline{A}_m \cap \overline{A}_n) \cap A, \\ &(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_i \cap \overline{A}_j \cap \ldots \cap \overline{A}_m \cap \overline{A}_n) \cap A \end{aligned} \tag{44}$$

[6] W przypadku sumowania prawdopodobieństw stanów niezdatności otrzymuje się wartość $Q^{(n)}$.

wykluczają się wzajemnie, niezawodność $R^{(n)}$ systemu n-elementowego o strukturze złożonej możemy wyrazić wzorem:

$$R^{(n)} = R^{(n)}_{S_0} R^{(n)}_{(A|S_0)} + R^{(n)}_{S_1} R^{(n)}_{(A|S_1)} + \ldots + R^{(n)}_{S_{2^n-2}} R^{(n)}_{(A|S_{2^n-2})} + R^{(n)}_{S_{2^n-1}} R^{(n)}_{(A|S_{2^n-1})}, \tag{45}$$



Rys. 12. Geometryczne przedstawienie tożsamości (42) i (43)

gdzie:

$$\begin{aligned} S_0 &= A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_m \cap A_n, \\ S_1 &= \bar{A}_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_m \cap A_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{2^n-1} &= A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_i \cap \bar{A}_j \cap \ldots \cap \bar{A}_m \cap \bar{A}_n, \\ S_{2^n-1} &= \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_i \cap \bar{A}_j \cap \ldots \cap \bar{A}_m \cap \bar{A}_n \end{aligned} \tag{46}$$

oznaczają stany niezawodnościowe systemu złożonego, natomiast:

$$\begin{aligned} R^{(n)}_{S_0} &= P(S_0), \\ R^{(n)}_{S_1} &= P(S_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R^{(n)}_{S_{2^n-2}} &= P(S_{2^n-2}) \\ R^{(n)}_{S_{2^n-1}} &= P(S_{2^n-1}) \end{aligned} \tag{47}$$

oraz

$$\begin{aligned} R^{(n)}_{(A|S_0)} &= P(A|S_0), \\ R^{(n)}_{(A|S_1)} &= P(A|S_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R^{(n)}_{(A|S_{2^n-2})} &= P(A|S_{2^n-2}) \\ R^{(n)}_{(A|S_{2^n-1})} &= P(A|S_{2^n-1}) \end{aligned} \tag{48}$$

są prawdopodobieństwami bezwarunkowymi i warunkowymi znajdowania się systemu w poszczególnych stanach niezawodnościowych.

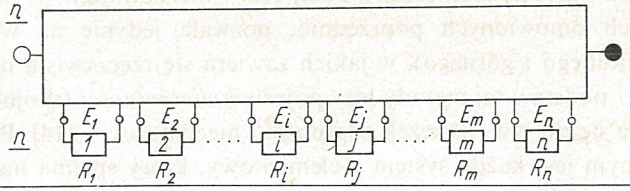
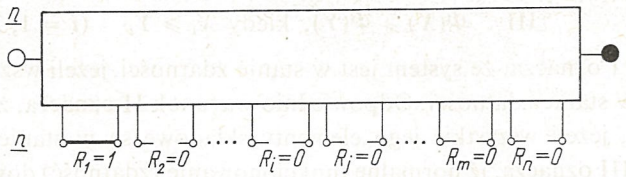
Ponieważ prawdopodobieństwa warunkowe $(PA|S_0)$, $P(A|S_1)$, ..., $P(A|S_{2^n-2})$, $P(A|S_{2^n-1})$ — w zależności od struktury niezawodnościowej analizowanego systemu — mogą przyjmować wyłącznie wartości 1 bądź 0, wyrażenie (45) upraszcza się i zamiast 2^n składników zawiera ich tylko 2^{n-1}, gdzie $n > 1$. Wartość liczbowa prawdopodobieństwa warunkowego $R^{(n)}_{(A|S_i)}$ dla dowolnego stanu systemu S_i wyznacza się z zależności:

$$R^{(n)}_{(A|S_i)} = P(A|S_i) = \begin{cases} 1, \text{ jeżeli } S_i \text{ jest stanem zdatności systemu,} \\ 0 \text{ w przypadku przeciwnym.} \end{cases} \tag{49}$$

Podobnie jak w p. 4.1 i 4.2, podanym wyrażeniom analitycznym będziemy nadawać odpowiednią interpretację geometryczną przedstawioną w tablicy 7.

Tablica 7

Geometryczna interpretacja zdarzeń warunkowych według zależności (48)

L.p.	Zapis algebraiczny zdarzenia	Geometryczna interpretacja zdarzenia
—	$R^{(n)}$	
2^{n-1}	$R^{(n)}_{(A/S_{2^{n-1}})}$	

W przypadku, kiedy wszystkie elementy rozważanego systemu są niezawodnościowo niezależne, tzn. wówczas, kiedy funkcjonowanie dowolnego elementu systemu nie zależy od funkcjonowania elementów pozostałych, wyrażenia (47) możemy zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} R^{(n)}_{S_0} &= P(S_0) = P(A_1)P(A_2) \ldots P(A_m)P(A_n) = R_1 R_2 \ldots R_m R_n, \\ R^{(n)}_{S_1} &= P(S_1) = P(\bar{A}_1)P(A_2) \ldots P(A_m)P(A_n) = Q_1 R_1 \ldots R_m R_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R^{(n)}_{S_{2^n-2}} &= P(S_{2^n-1}) = P(A_1)P(\bar{A}_2) \ldots P(\bar{A}_m)P(\bar{A}_n) = R_1 Q_2 \ldots Q_m Q_n, \\ R^{(n)}_{2^n-1} &= P(S_{2^n}) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \ldots P(\bar{A}_m)P(\bar{A}_n) = Q_1 Q_2 \ldots Q_m Q_n. \end{aligned} \tag{50}$$

Natomiast w przypadku, kiedy rozważany system jest systemem jednorodnym, jego

niezawodność $R^{(n)}$ możemy wyrazić wzorem:

$$R^{(n)} = C_0 R^n + C_1 R^{n-1} Q + C_2 R^{n-2} Q^2 + \ldots + C_k R^{n-k} Q^k + \\ + C_l R^{n-l} Q^l + C_m R^{n-m} Q_m, \tag{51}$$

gdzie $C_0, C_1, C_2, \ldots C_k, C_l, C_m$ są współczynnikami przyjmującymi wartości całkowite z przedziału:

$$0 \leqslant C_i \leqslant \binom{n}{i}; \quad (0 \leqslant i \leqslant n). \tag{52}$$

W oparciu o omówioną powyżej metodę dekompozycji zupełnej przeprowadzono analizę niezawodnościową systemu złożonego o strukturze mostkowej (patrz Dodatek).

4.4 Metoda minimalnych ścieżek zdatności i niezdatności

Metoda minimalnych ścieżek zdatności i niezdatności, w odróżnieniu od metod obliczeniowych omówionych poprzednio, pozwala jedynie na wyznaczenie odpowiednich kresów (dolnego i górnego), w jakich zawiera się rzeczywista niezawodność systemu złożonego. U podstaw tej metody leży pojęcie *koherentności* (spójności) systemu oraz pojęcia odnoszące się do tzw. „ścieżek zdatności i niezdatności" [14]. Przyjmuje się, że systemem koherentnym jest każdy system n-elementowy, który spełnia następujące warunki:

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad \Phi(\underline{1}) = 1, \text{ gdzie } \underline{1} = (1, 1, \ldots, 1), \\ &\text{II} \quad \Phi(\underline{0}) = 0, \text{ gdzie } \underline{0} = (0, 0, \ldots, 0), \\ &\text{III} \quad \Phi(\underline{X}) \geqslant \Phi(\underline{Y}), \text{ kiedy } X_i \geqslant Y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned} \tag{53}$$

Warunek I oznacza, że system jest w stanie zdatności, jeżeli wszystkie jego elementy składowe są w stanie zdatności. Odpowiednio warunek II oznacza, że system jest w stanie niezdatności, jeżeli wszystkie jego elementy składowe są w stanie niezdatności. Natomiast warunek III oznacza, iż normalne funkcjonowanie (zdatność) dowolnego elementu systemu nie może prowadzić do obniżenia zdatności systemu.

Pod pojęciem ścieżki zdatności rozumie się taki wektor $\underline{X}$, dla którego funkcja $\Phi(\underline{X}) = 1$, przy czym jeżeli $\underline{X}$ jest ścieżką zdatności i $\underline{Y} \geqslant \underline{X}$, to również i wektor $\underline{Y}$ jest ścieżką zdatności. Odpowiednio pod pojęciem ścieżki niezdatności rozumie się taki wektor $\underline{X}$, dla którego funkcja $\Phi(\underline{X}) = 0$, przy czym jeżeli $\underline{X}$ jest ścieżką niezdatności i $\underline{Y} \leqslant \underline{X}$, to również i wektor $\underline{Y}$ jest ścieżką niezdatności. Przez minimalną ścieżkę zdatności rozumie się taki wektor $\underline{X}$, dla którego $\Phi(\underline{X}) = 1$, zaś dla $\underline{Y} < \underline{X}$ zachodzi $\Phi(\underline{Y}) = 0$. Odpowiednio przez minimalną ścieżkę niezdatności rozumie się taki wektor $\underline{X}$, dla którego $\Phi(\underline{X}) = 0$, zaś dla $\underline{Y} > \underline{X}$ zachodzi $\Phi(\underline{Y}) = 1$. W systemach złożonych mamy zwykle do czynienia z całymi zbiorami minimalnych ścieżek zdatności i niezdatności.

Każdej minimalnej ścieżce zdatności $(A_1, A_2, \ldots, A_r)$ można przyporządkować odpowiadającą jej funkcję binarną:

$$\alpha_j(\underline{X}) = \prod_{i \in A_j} X_i, \tag{54}$$

która przyjmuje wartość 1 dla przypadku, kiedy wszystkie jej elementy składowe są zdatne, i wartość 0 w przypadkach pozostałych. W ten sposób j-ta minimalna ścieżka zdatności jest równoważna pewnemu podsystemowi o szeregowym połączeniu elementów. Analogicznie każdej minimalnej ścieżce niezdatności $(B_1, B_2, \ldots, B_s)$ można przyporządkować odpowiadającą jej funkcję binarną:

$$\beta_k(\underline{X}) = 1 - \prod_{i \in B_k} (1 - X_i), \tag{55}$$

która przyjmuje wartość 0 dla przypadku, kiedy wszystkie elementy k-tej minimalnej ścieżki niezdatności są niezdatne, i wartość 1 w przypadkach pozostałych. W ten sposób k-ta minimalna ścieżka niezdatności jest równoważna pewnemu podsystemowi o równoległym połączeniu elementów.

W ten sposób system o strukturze złożonej można scharakteryzować parametrami α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_r$, bądź też parametrami $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$, stosując następujące związki:

$$\Phi(\underline{X}) = 1 - \prod_{j=1}^{r} [1 - \alpha_j(\underline{X})] \tag{56}$$

oraz

$$\Phi(\underline{X}) = \prod_{k=1}^{s} \beta_k(\underline{X}), \tag{57}$$

tj. przedstawić w postaci systemu o równoległym połączeniu odpowiednich minimalnych ścieżek zdatności, bądź też w postaci systemu o szeregowym połączeniu odpowiednich minimalnych ścieżek niezdatności. Zatem niezawodność systemu złożonego, a dokładniej mówiąc dolną i górną granicę tej niezawodności, można wyrazić wzorem:

$$\prod_{k=1}^{s} P[\beta_k(\underline{X}) = 1] \leqslant P[\Phi(\underline{X}) = 1] \leqslant 1 - \prod_{j=i}^{r} \{1 - P[\alpha_j(\underline{X}) = 1]\}. \tag{58}$$

Oznaczając przez $R_i = P(X_i = 1)$ niezawodność i-tego elementu otrzymujemy wzory:

$$\overline{R} = P[\alpha_j(\underline{X}) = 1] = \prod_{i \in A_j} R_i \tag{59}$$

oraz

$$\underline{R} = P[\beta_k(\underline{X}) = 1] = 1 - \prod_{i \in B_k} (1 - R_i); \tag{60}$$

stąd:

$$\underline{R} \leqslant R_z = P[\Phi(\underline{X}) = 1] \leqslant \overline{R}. \tag{61}$$

Dla ilustracji podanej metodyki obliczeniowej wyznaczono dolną i górną granicę niezawodności jednorodnego systemu złożonego o strukturze mostkowej (patrz Dodatek).

5. ZASTOSOWANIE METOD DEKOMPOZYCYJNYCH DO OBLICZANIA NIEZAWODNOŚCI SYSTEMÓW O ELEMENTACH ZALEŻNYCH

Realne systemy fizyczne (techniczne, biologiczne oraz biologiczno-techniczne) są zwykle systemami o elementach zależnych, tj. takimi systemami, dla których określone właściwości jednych elementów zależą w sposób istotny od właściwości innych elementów. Cechą charakterystyczną systemów o elementach zależnych jest to, iż na podstawie zmian właściwości zachodzących w jednych elementach systemu możemy w sposób zdeterminowany bądź losowy wnioskować o odpowiednich zmianach właściwości w innych elementach systemu.

W odniesieniu do teorii i praktyki niezawodności systemów, systemem o elementach zależnych będziemy nazywać każdy system, dla którego stan niezawodnościowy określonego elementu (np. j-tego) może być jednoznacznie wyznaczony na podstawie stanu niezawodnościowego innego (np. i-tego) elementu systemu. Przykładowo system, dla którego stwierdziliśmy, że uszkodzenie i-tego elementu pociąga za sobą uszkodzenie j-tego elementu, bądź też zdatność k-tego elementu wyklucza możliwość uszkodzenia l-tego elementu, będziemy traktować jako system o elementach zależnych.

Mechanizm zależności, właściwy danemu systemowi o elementach zależnych, może być przedstawiony w postaci tzw. *macierzy zależności*, bądź też w postaci odpowiedniej struktury niezawodnościowej, zawierającej pewną liczbę elementów o identycznym oznakowaniu.

Jeżeli określony system n-elementowy jest systemem o elementach zależnych, wówczas odpowiadającą mu macierz zależności:

$$Z = ||z_{ij}|| = \begin{Vmatrix} z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{1n} \\ z_{21}, z_{22}, \ldots, z_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z_{n1}, z_{n2}, \ldots, z_{nn} \end{Vmatrix} \tag{62}$$

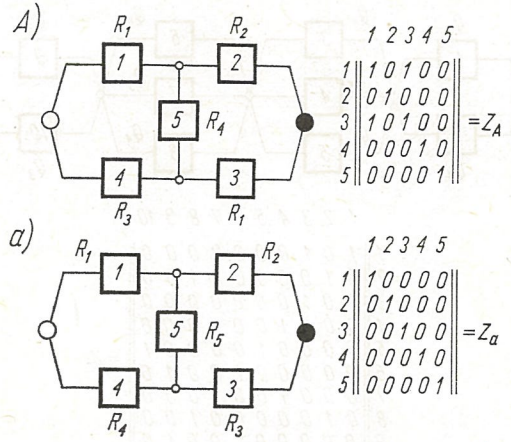
będziemy rozważać jako macierz kwadratową n-tego stopnia, złożoną z zer i jedynek, przy czym elementowi z_{ij} macierzy, znajdującemu się na przecięciu i-tego wiersza oraz j-tej kolumny, będziemy przypisywać umownie wartość 1, jeżeli stan niezawodnościowy i-tego elementu systemu może być jednoznacznie wyznaczony na podstawie stanu niezawodnościowego j-tego elementu systemu, oraz wartość 0 w przypadku przeciwnym. Zatem będziemy stosować następujący zapis formalny omawianej zależności:

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ jeżeli stan niezawodnościowy } i\text{-tego elementu systemu jest zdeterminowany} \\ \quad \text{stanem niezawodnościowym } j\text{-tego elementu systemu,} \\ 0, \text{ w przypadku przeciwnym.} \end{cases} \tag{63}$$

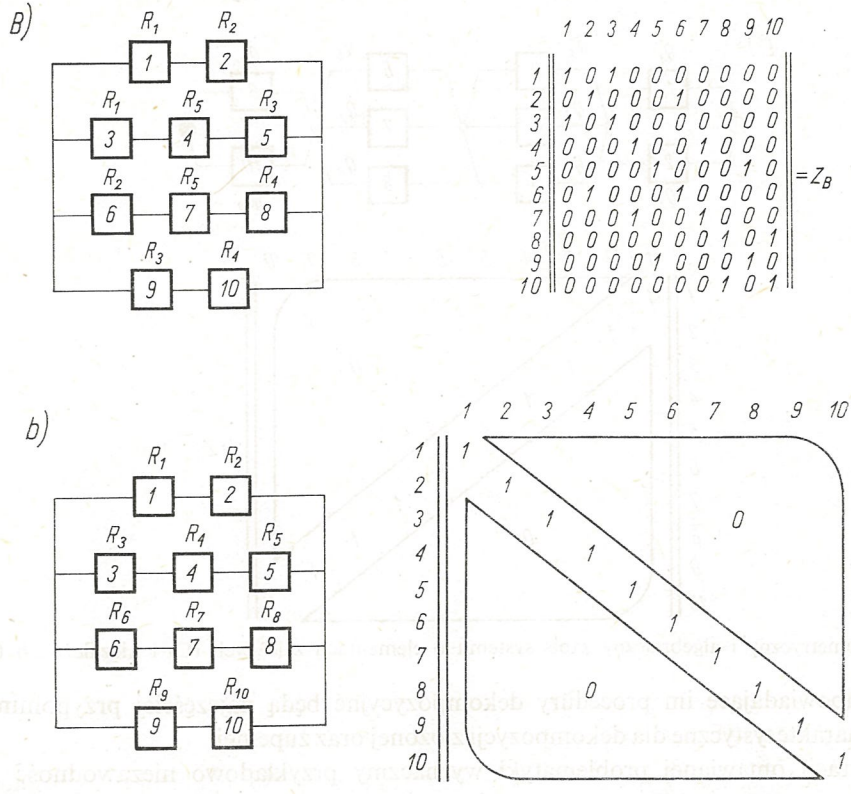
Inny sposób przedstawiania systemu o elementach zależnych polega na odpowiednim oznakowaniu jego elementów. Można tutaj stosować zasadę, w myśl której systemem o elementach zależnych jest każdy system, w którym przynajmniej dwa jego elementy posiadają identyczne oznakowania, tj. są niezawodnościowo nierozróżnialne. Oczywiście w przypadku,

kiedy warunek powyższy nie jest spełniony, rozważany system traktujemy jak system o elementach niezależnych.

Dla ilustracji powyższych stwierdzeń na rys. 13÷15 podano odpowiednie przykłady systemów o elementach zależnych (rysunki A, B, C) i niezależnych (rysunki a, b, c), wraz z odpowiadającymi im macierzami zależności.

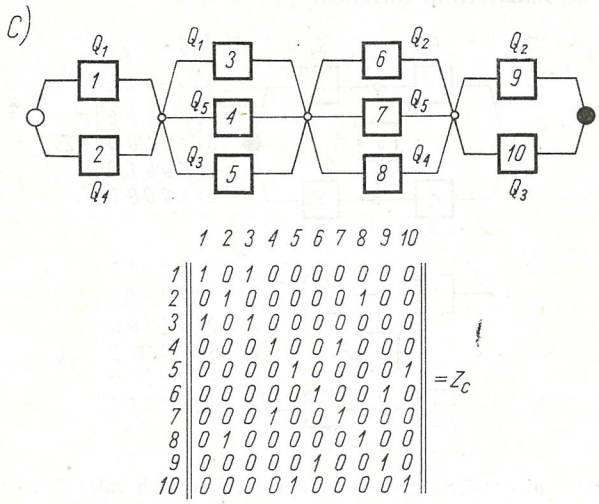


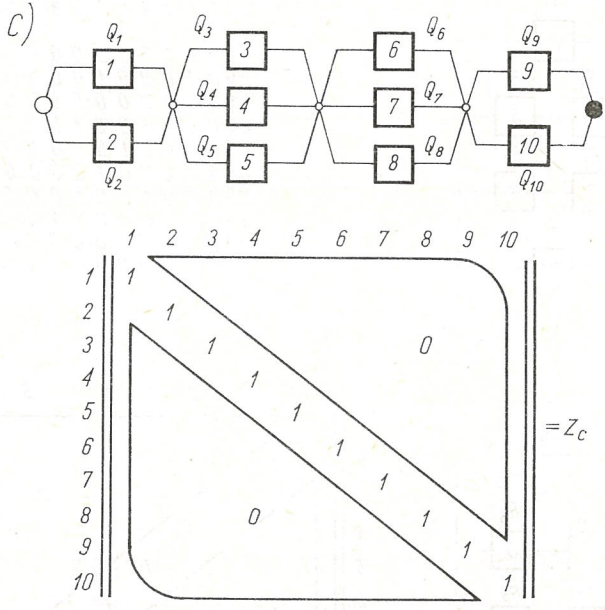
Rys. 13. Geometryczny i algebraiczny zapis systemu o elementach zależnych (A) i niezależnych (a)



Rys. 14. Geometryczny i algebraiczny zapis systemu o elementach zależnych (B) i niezależnych (b)

Mając te dane, a w szczególności właściwie oznakowaną strukturę niezawodnościową systemu, możemy — w oparciu o omówione metody dekompozycyjne — przystąpić do obliczania niezawodności systemów o elementach zależnych. Ponieważ omawiane tutaj systemy o elementach zależnych zdefiniowaliśmy jako systemy z powtarzającymi się ele-



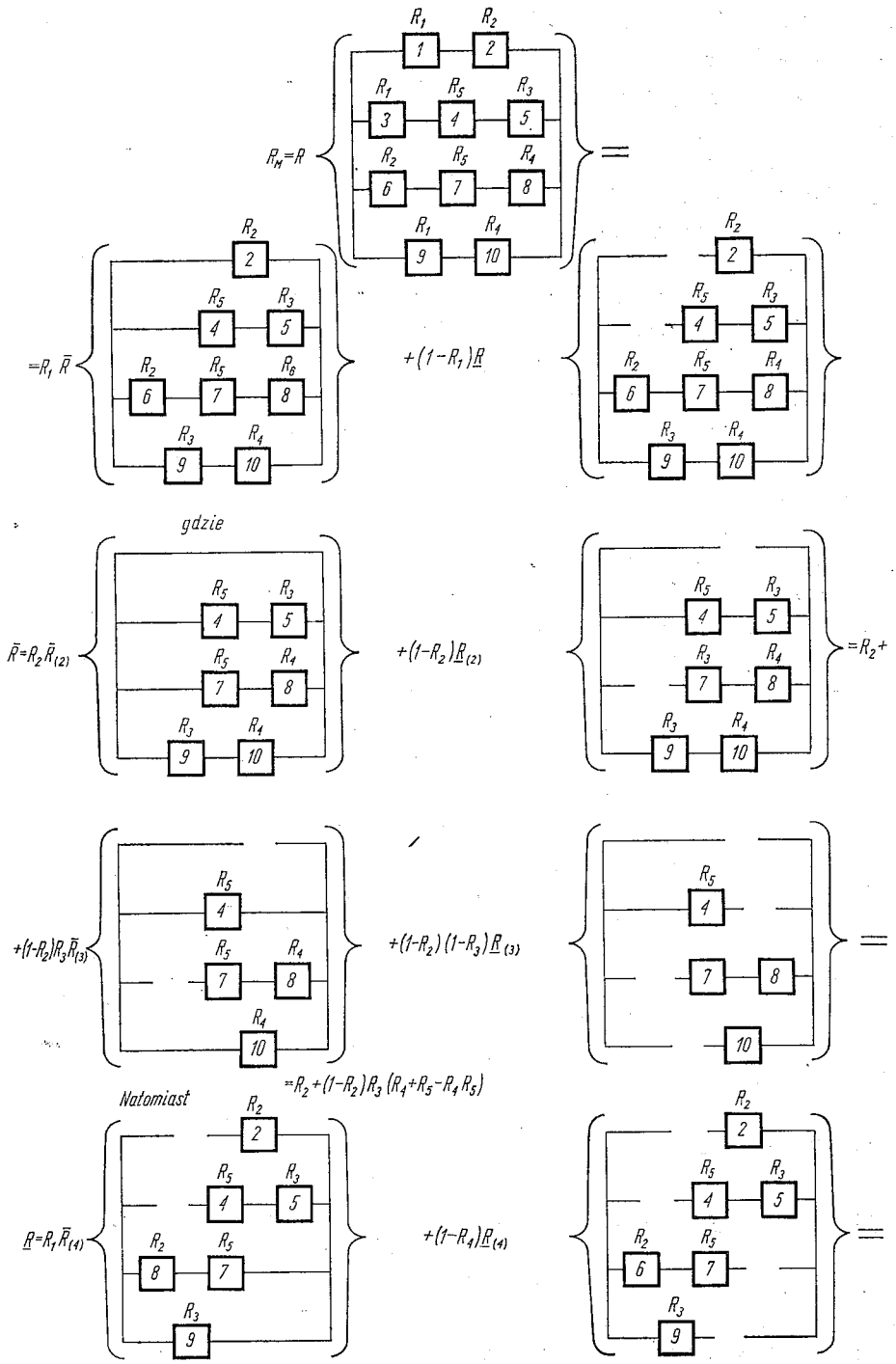


Rys. 15. Geometryczny i algebraiczny zapis systemu o elementach zależnych (C) i niezależnych (c)

mentami, odpowiadające im procedury dekompozycyjne będą najczęściej przypominały procedury charakterystyczne dla dekompozycji złożonej oraz zupełnej.

Dla ilustracji omawianej problematyki wyznaczmy przykładowo niezawodność R_M systemu podanego na rys. 14B.

W celu wyznaczenia wartości R_M skorzystajmy z procedur obliczeniowych właściwych metodzie dekompozycji prostej:



$$= R_4(R_3 + R_2 R_5 - R_2 R_3 R_5).$$

Ostatecznie otrzymujemy wyrażenie:

$$\begin{aligned} R_M &= R_1[R_2 + (1-R_2)R_3(R_4 + R_5 - R_4 R_5)] + (1-R_1)R_4(R_3 + R_2 R_5 - R_2 R_3 R_5) = \\ &= R_1 R_2 + R_3 R_4 + R_1 R_3 R_5 + R_2 R_4 R_5 - R_1 R_2 R_3 R_4 - R_1 R_2 R_3 R_5 + \\ &- R_1 R_2 R_4 R_5 - R_1 R_3 R_4 R_5 - R_2 R_3 R_4 R_5 + 2R_1 R_2 R_3 R_4 R_5. \end{aligned}$$

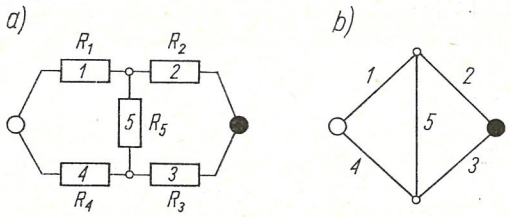
Otrzymany rezultat jest identyczny z odpowiednim wyrażeniem (patrz Dodatek) na niezawodność systemu o strukturze mostkowej dla przypadku, kiedy zbudowany jest on z elementów wzajemnie niezależnych. Ponieważ rozważany system jest niczym innym jak mostkiem przedstawionym w postaci ścieżek zdatności, zatem można wnioskować, iż metody dekompozycyjne mogą być również zastosowane do obliczania niezawodności tego rodzaju systemów, tj. systemów, których struktury niezawodnościowe przedstawiane są w postaci minimalnych ścieżek zdatności bądź minimalnych ścieżek niezdatności.

Dodatek

PRZYKŁAD OBLICZANIA NIEZAWODNOŚCI NAJPROSTSZEGO SYSTEMU ZŁOŻONEGO O STRUKTURZE MOSTKOWEJ KLASY $K_0 = K(00000)$

Stosując metody obliczeniowe podane w pracy, należy wyznaczyć niezawodność R_M najprostszego systemu złożonego o strukturze mostkowej, przedstawionego na rys. D1, jeżeli wiadomo, że jest on systemem klasy $K_0 = K(00000)$.

System przedstawiony na rys. D1 jest najprostszym systemem złożonym, znanym powszechnie w literaturze jako system o strukturze mostkowej. Zgodnie z treścią zadania ob-



Rys. D1. Geometryczna reprezentacja systemu: a) struktura niezawodnościowa, b) graf systemu

liczanie niezawodności R_M rozważanego systemu wykonamy czterokrotnie, stosując za każdym razem inną metodę obliczeniową właściwą metodzie: a) dekompozycji prostej, b) dekompozycji złożonej, c) dekompozycji zupełnej oraz d) minimalnych ścieżek zdatności i niezdatności.

Obliczanie R_M na podstawie metody dekompozycji prostej

Zgodnie z procedurą obliczeniową, właściwą omawianej metodzie, dekompozycję rozważanego systemu możemy wykonać tylko ze względu na jeden ściśle określony element. Ponieważ wybór elementu dekompozycyjnego, tj. elementu, względem którego przeprowa-

Tablica D1.

Wartości liczbowe funkcji $R_M(R)$ według zależności (D6)

R	R_M
.01	.000201950200
.02	.000815206400
.03	.001849998600
.04	.003315404800
.05	.005219375000
.06	.007568755200
.07	.010369311400
.08	.013625753600
.09	.017341759800
.10	.021520000000
.11	.026162160199
.12	.031268966399
.13	.036840208599
.14	.042874764798
.15	.049370624998
.16	.056324915197
.17	.063733921396
.18	.071593113595
.19	.079897169795
.20	.088639999994
.21	.097814770195
.22	.107413926392
.23	.117429218591
.24	.127851724789
.25	.138671874989
.26	.149879475187
.27	.161463731385
.28	.173413273583
.29	.185716179781
.30	.198359999978
.31	.211331780175
.32	.224618086372
.33	.238205028570
.34	.252078284766
.35	.266223124963
.36	.280624435160
.37	.295266741357
.38	.310134233554
.39	.325210789752
.40	.340479999948
.41	.355925190146
.42	.371529446344
.43	.387275638541
.44	.403146444736
.45	.419124374934
.46	.435191795130
.47	.451330951328
.48	.467523993526
.49	.483752999722
.50	.499999999920

R	R_M
.51	.516247000112
.52	.532476006312
.53	.548669048509
.54	.564808204705
.55	.580875524903
.56	.596853555104
.57	.612724351301
.58	.628470553496
.59	.644074809697
.60	.659519999896
.61	.674789210094
.62	.689865766293
.63	.704733258495
.64	.719375564695
.65	.733774874888
.66	.747921715090
.67	.761794971288
.68	.775381713492
.69	.788668219691
.70	.801639999896
.71	.814283320091
.72	.826585726289
.73	.838532685500
.74	.850120524694
.75	.861328124902
.76	.872148275095
.77	.882570781305
.78	.892585373514
.79	.902185229712
.80	.911359999911
.81	.920102830110
.82	.928406886320
.83	.936266078519
.84	.943675084724
.85	.950629374929
.86	.957125351138
.87	.963159721325
.88	.968731033543
.89	.973837339738
.90	.978479999954
.91	.982658240158
.92	.986374246364
.93	.989630588557
.94	.992431244762
.95	.994780524964
.96	.996684595179
.97	.998150001382
.98	.999184723582
.99	.999798049816
1.00	1.000000000000

dzana jest dekompozycja systemu, jest zupełnie dowolny przyjmijmy, że rozważany system będziemy dekomponować ze względu na element 5. Zatem zgodnie ze wzorami (28), (29) i (30) oraz ich interpretacją, podaną w tablicy 4, możemy napisać wyrażenie:

$$R_M = R_M^{(5)} = R_5 \overline{R}_{(5)}^{(4)} + (1 - R_5) \underline{R}_{(5)}^{(4)}, \tag{D1}$$

gdzie

$$\overline{R}_{(5)} = \overline{R}_{(5)}^{(4)} = (R_1 + R_4 - R_1 R_4)(R_2 + R_3 - R_2 R_3), \tag{D2}$$

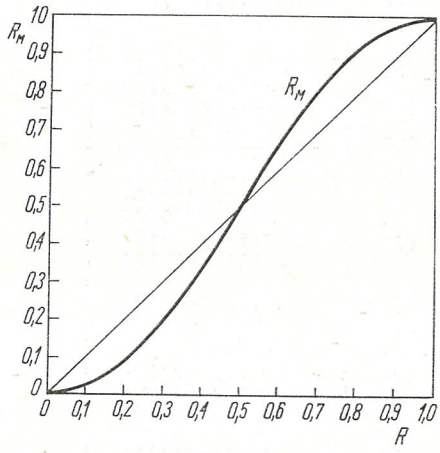
$$\underline{R}_{(5)} = \underline{R}_{(5)}^{(4)} = R_1 R_2 + R_3 R_4 - R_1 R_2 R_3 R_4; \tag{D3}$$

stąd:

$$R_M = R_5(R_1 + R_4 - R_1 R_4)(R_2 + R_3 - R_2 R_3) + \\ + (1 - R_5)(R_1 R_2 + R_3 R_4 - R_1 R_2 R_3 R_4). \tag{D4}$$

Przeprowadzając redukcję wyrażenia (D4) otrzymujemy:

$$R_M = R_M(R_1, \ldots, R_5) = R_1 R_2 + R_3 R_4 + R_1 R_3 R_5 + R_2 R_4 R_5 + \\ - R_1 R_2 R_3 R_4 - R_1 R_2 R_3 R_5 - R_1 R_2 R_4 R_5 - R_1 R_3 R_4 R_5 + \\ - R_2 R_3 R_4 R_5 + 2 R_1 R_2 R_3 R_4 R_5. \tag{D5}$$



Rys. D2. Przebieg funkcji $R_M = R_M(R)$ wg zależności (D6)

Ponieważ rozważany system jest systemem klasy $K_0 = K(00000)$, otrzymujemy wzór:

$$R_M = R_M(R) = 2R^2 + 2R^3 - 5R^4 + 2R^5. \tag{D6}$$

Wyrażenie (D6) stablicowano (patrz Tablica D1), a w oparciu o uzyskane dane liczbowe wykonano wykres funkcji $R_M(R)$, który przedstawiono na rys. D2.

Obliczanie R_M na podstawie metody dekompozycji złożonej

Zgodnie z procedurą obliczeniową, właściwą tej metodzie, przyjmijmy, że w skład grupy dekompozycyjnej elementów wchodzą elementy 1 i 2, tzn. że liczebność grupy dekompozycyjnej wynosi $g = 2$.

Stosując wzór (35) możemy napisać wyrażenie:

$$R_M = R_M^{(5)} = R_{12}^{(2)} R_{(12)}^{(3)} + R_{\bar{1}2}^{(2)} R_{(\bar{1}2)}^{(3)} + R_{1\bar{2}}^{(2)} R_{(1\bar{2})}^{(3)} + R_{\bar{1}\bar{2}}^{(2)} R_{(\bar{1}\bar{2})}^{(3)}, \tag{D7}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} R_{12}^{(2)} &= P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = R_1 R_2, \\ R_{\bar{1}2}^{(2)} &= P(\bar{A}_1 \cap A_2) = P(\bar{A}_1)P(A_2) = (1-R_1)R_2, \\ R_{1\bar{2}}^{(2)} &= P(A_1 \cap \bar{A}_2) = P(A_1)P(\bar{A}_2) = R_1(1-R_2), \\ R_{\bar{1}\bar{2}}^{(2)} &= P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) = (1-R_1)(1-R_2). \end{aligned} \tag{D8}$$

Natomiast $R_{(12)}^{(3)}$, $R_{(\bar{1}2)}^{(3)}$, $R_{(1\bar{2})}^{(3)}$ oraz $R_{(\bar{1}\bar{2})}^{(3)}$ wynoszą odpowiednio:

$$R_{(12)}^{(3)} = P(A/A_1 \cap A_2) = P\{R_1=1,\ R_2=1,\ 5,\ R_5,\ 4,\ 3,\ R_4,\ R_3\} = 1$$

$$R_{(\bar{1}2)}^{(3)} = P(A/\bar{A}_1 \cap A_2) = P\{R_1=0,\ R_2=1,\ 5,\ R_5,\ 4,\ 3,\ R_4,\ R_3\} = R_4(R_3+R_5-R_3R_5)$$

$$R_{(1\bar{2})}^{(3)} = P(A/A_1 \cap \bar{A}_2) = P\{R_1=0,\ R_2=1,\ 5,\ R_5,\ 4,\ 3,\ R_4,\ R_3\} = R_3(R_4+R_5-R_4R_5) \tag{D9}$$

$$R_{(\bar{1}\bar{2})}^{(3)} = P(A/\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = P\{R_1=1,\ R_0=2,\ 5,\ 4,\ 3,\ R_4,\ R_3\} = R_3R_4$$

Wstawiając do wzoru (D7) otrzymane wartości, podane w wyrażeniach (D8) i (D9), mamy:

$$\begin{aligned} R_M = R_M^{(5)} = {} & R_1R_2 + (1-R_1)R_2R_4(R_3+R_5-R_3R_5) + \\ & + R_1(1-R_2)R_3(R_4+R_5-R_4R_5) + (1-R_1)(1-R_2)R_3R_4. \end{aligned} \tag{D10}$$

Przeprowadzając redukcję wyrażenia (D10) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} R_M = R_M(R_1, \ldots, R_5) = {} & R_1R_2 + R_3R_4 + R_1R_3R_5 + R_2R_4R_5 + \\ & - R_1R_2R_3R_4 - R_1R_2R_3R_5 - R_1R_2R_4R_5 - R_1R_3R_4R_5 + \\ & - R_2R_3R_4R_5 + 2R_1R_2R_3R_4R_5. \end{aligned} \tag{D11}$$

Ponieważ rozważany system jest systemem klasy $K_0 = K(00000)$, otrzymujemy wzór:

$$R_M = R_M(R) = 2R^2 + 2R^3 - 5R^4 + 2R^5. \tag{D12}$$

Analizując uzyskane wyniki możemy stwierdzić, że są one identyczne z odpowiednimi wynikami uzyskanymi metodą dekompozycji prostej.

Stany niezawodnościowe systemu mostkowego

1	2	3	4
Nr stanu	Zapis algebraiczny stanu S_i	Zapis graficzny stanu S_i	Wartość $\Phi(x_i)$
0	$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$		1
1	$\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$		1
2	$A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$		1
3	$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$		1
4	$A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4 \cap A_5$		1
5	$\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4 \cap A_5$		1
6	$A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4 \cap A_5$		0
7	$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4 \cap A_5$		0
8	$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4 \cap A_5$		1
9	$\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4 \cap A_5$		0
10	$A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4 \cap A_5$		1
11	$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4 \cap A_5$		0
12	$A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap A_5$		1
13	$\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap A_5$		0
14	$A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap A_5$		0
15	$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap A_5$		0
16	$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \bar{A}_5$		1
17	$\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \bar{A}_5$		1
18	$A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \bar{A}_5$		1
19	$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \bar{A}_5$		1
20	$A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4 \cap \bar{A}_5$		1
21	$\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4 \cap \bar{A}_5$		0
22	$A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4 \cap \bar{A}_5$		0
23	$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4 \cap \bar{A}_5$		0
24	$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5$		1
25	$\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5$		0
26	$A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5$		0
27	$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5$		0
28	$A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5$		1
29	$\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5$		0
30	$A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5$		0
31	$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5$		0

Obliczanie R_M na podstawie metody dekompozycji zupełnej

Zgodnie z procedurą obliczeniową, właściwą metodzie dekompozycji zupełnej, chcąc wyznaczyć wartość R_M musimy przeanalizować wszystkie możliwe stany niezawodnościowe rozważanego systemu w liczbie $L = 2^5 = 32$. W oparciu o sporządzoną tablicę D2 oraz wzór (45) niezawodność R_M rozważanego systemu możemy wyrazić wzorem:

$$\begin{aligned} R_M = R_M^{(5)} = {} & R_1R_2R_3R_4R_5 + (1-R_1)R_2R_3R_4R_5 + R_1(1-R_2)R_3R_4R_5 + \\ & + (1-R_1)(1-R_2)R_3R_4R_5 + R_1R_2(1-R_3)R_4R_5 + \\ & + (1-R_1)R_2(1-R_3)R_4R_5 + R_1R_2R_3(1-R_4)R_5 + \\ & + R_1(1-R_2)R_3(1-R_4)R_5 + R_1R_2(1-R_3)(1-R_4)R_5 + \\ & + R_1R_2R_3R_4(1-R_5) + (1-R_2)R_2R_3R_4(1-R_5) + \\ & + R_1(1-R_2)R_3R_4(1-R_5) + (1-R_1)(1-R_2)R_3R_4(1-R_5) + \\ & + R_1R_2(1-R_3)R_4(1-R_5) + R_1R_2R_3(1-R_4)(1-R_5) + \\ & + R_1R_2(1-R_3)(1-R_4)(1-R_5). \end{aligned} \tag{D13}$$

Przeprowadzając redukcję wyrażenia (D13) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} R_M = R_M(R_1, \ldots, R_5) = {} & R_1R_2 + R_3R_4 + R_1R_3R_5 + R_2R_4R_5 - R_1R_2R_3R_4 + \\ & - R_1R_2R_3R_5 - R_1R_2R_4R_5 - R_1R_3R_4R_5 - R_2R_3R_4R_5 + 2R_1R_2R_3R_4R_5. \end{aligned} \tag{D14}$$

Z uwagi na fakt, iż rozważany system jest systemem klasy $K_0 = K(00000)$, otrzymujemy wzór:

$$R_M = R_M(R) = 2R^2 + 2R^3 - 5R^4 + 2R^5. \tag{D15}$$

W oparciu o wyrażenie (D13) możemy również podać wzór zmodyfikowany:

$$R_M = R_M(R) = R^5 + 5R^4(1-R) + 8R^3(1-R)^2 + 2R^2(1-R)^3 \tag{D16}$$

odpowiadający wyrażeniu (51), w którym współczynniki C_0, C_1, C_2, C_3 przyjmują wartości: $C_0 = 1$, $C_1 = 5$, $C_2 = 8$ oraz $C_3 = 2$. Analizując otrzymane wyniki widzimy, iż są one identyczne z odpowiednimi wynikami uzyskanymi pozostałymi metodami dekompozycyjnymi.

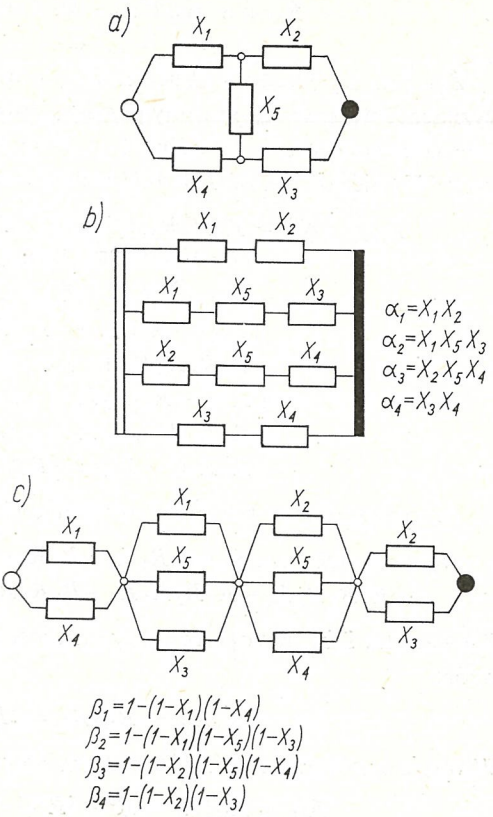
Obliczanie R_M na podstawie metody minimalnych ścieżek zdatności i niezdatności

W myśl procedury obliczeniowej, właściwej metodzie minimalnych ścieżek zdatności i niezdatności, możemy jedynie wyznaczyć przedział w jakim zawiera się rzeczywista niezawodność R_M rozważanego systemu (rys. D3a). Ponieważ analizowany system posiada cztery minimalne ścieżki zdatności (rys. D3b), scharakteryzowane parametrami α_1, α_2, α_3, α_4 oraz cztery minimalne ścieżki niezdatności (rys. D3c), scharakteryzowane odpowiednio parametrami β_1, β_2, β_3, β_4, odpowiadające mu wartości $\overline{R}_M$ oraz $\underline{R}_M$, na mocy zależności (59) i (60) wynoszą:

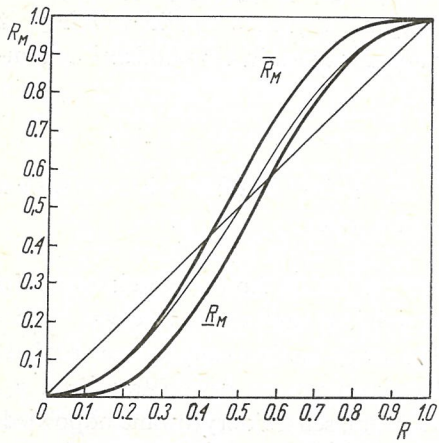
$$\overline{R}_M = \overline{R}_M(R) = 1 - (1-R^2)^2(1-R^3)^2 \tag{D17}$$

oraz

$$\underline{R}_M = \underline{R}_M(R) = [1-(1-R)^2]^2[1-(1-R)^3]^2. \tag{D18}$$



Rys. D3. Geometryczna reprezentacja systemu (rys. a), jego minimalnych ścieżek zdatności (rys. b) i minimalnych ścieżek niezdatności (rys. c)



Rys. D4. Przebieg funkcji $\overline{R}_M$ oraz $\underline{R}_M$ wg zależności (D17) i (D18)

Wyrażenia (D17) i (D18) stablicowano (patrz tablica D3 i D4), a opierając się na uzyskanych danych liczbowych wykonano wykresy funkcji $\overline{R}_M(R)$ oraz $\underline{R}_M(R)$, które przedstawiono na rys. D4. Ponadto dla porównania otrzymanych wyników podano, na tym samym rysunku, rzeczywisty przebieg funkcji $R_M(R)$, wykonany w oparciu o metody dekompozycyjne.

Tablica D3.

Wartości liczbowe funkcji $\bar{R}_M(R)$ według zależności (D17)

R	$\bar{R}_M$	R	$\bar{R}_M$
.01	.000201989591	.51	.588154979934
.02	.000815827138	.52	.606855446131
.03	.001853092115	.53	.625403917744
.04	.003325026646	.54	.643767090278
.05	.005242486011	.55	.661911899912
.06	.007615888870	.57	.677805554454
.07	.010455167176	.57	.697416167815
.08	.013769715941	.58	.714711397770
.09	.017568343195	.59	.731662086335
.10	.021859219894	.60	.748236902287
.11	.026649830390	.61	.764407585335
.12	.031946923224	.62	.780146591092
.13	.037756462723	.63	.795427736401
.14	.044083581390	.64	.810224344078
.15	.050932533362	.65	.824513986319
.16	.058306649080	.66	.838285525949
.17	.066208291391	.67	.851505754501
.18	.074638813257	.68	.864162526173
.19	.083598517347	.69	.876240886555
.20	.093086617591	.70	.887728095087
.21	.103101203007	.71	.898613839498
.22	.113639204021	.72	.908891342533
.23	.124696361341	.73	.918552456893
.24	.136267197863	.74	.927597749676
.25	.148344993573	.75	.935926573198
.26	.160921763749	.76	.943542120550
.27	.173988240749	.77	.950450455967
.28	.187533859476	.78	.956660584958
.29	.201546746790	.79	.963584355792
.30	.216013715075	.80	.969136537551
.31	.230920260099	.81	.974034725354
.32	.246250563439	.82	.978399277265
.33	.261987499583	.83	.982253213744
.34	.278112647953	.84	.985622085318
.35	.294606309872	.85	.988533306649
.36	.311447530894	.86	.991018454199
.37	.328614128332	.87	.993108024824
.38	.346082724322	.88	.994836152342
.39	.363828784506	.89	.996237779178
.40	.381826662338	.90	.997348779839
.41	.400049649223	.91	.998205533378
.42	.418470030469	.92	.998844440375
.43	.437059147134	.93	.999301382715
.44	.455787463772	.94	.999611120715
.45	.474624642149	.95	.999806624903
.46	.493539620733	.96	.999918338097
.47	.512500700203	.97	.999973363814
.48	.531475634562	.98	.999994576709
.49	.550431728014	.99	.999999550663
.50	.569335937402	1.00	1.000000000000

Tablica D4.

Wartości liczbowe funkcji $R_M(R)$ według zależności (D18)

R	R_M
.01	.000000349340
.02	.000005423295
.03	.000026636186
.04	.000081661904
.05	.000193375098
.06	.000388879285
.07	.000698617283
.08	.001155559620
.09	.001794466614
.10	.002651220100
.11	.003762220809
.12	.005163847642
.13	.006891975157
.14	.008981545776
.15	.011466193324
.16	.014377914650
.17	.017746786219
.18	.021600722691
.19	.025965274598
.20	.030863462397
.21	.036315644239
.22	.042339414975
.23	.048949533961
.24	.056157879367
.25	.063973426811
.26	.072402250239
.27	.081447543013
.28	.091109657367
.29	.101386160396
.30	.112271904879
.31	.123759113326
.32	.135837473700
.33	.148494245365
.34	.161714373918
.35	.175480613541
.36	.189773655778
.37	.204572263448
.38	.219853408753
.39	.235592414506
.40	.251763097544
.41	.268337913498
.42	.285288102054
.43	.302583832010
.44	.320194345370
.45	.338088099907
.46	.356232909540
.47	.374596082071
.48	.393144553680
.49	.411845019875
.50	.430664062404

R	R_M
.51	.449568271795
.52	.468524365255
.53	.487499299606
.54	.506460379074
.55	.525375357662
.56	.544212536031
.57	.562940852684
.58	.581529969350
.59	.599950350592
.60	.618173337483
.61	.636171215319
.62	.653917275500
.63	.671385371497
.64	.688552468935
.65	.705393589961
.66	.721887351890
.67	.738012500256
.68	.753749436404
.69	.769079739748
.70	.783986284783
.71	.798453253065
.72	.812466140389
.73	.826011759116
.74	.839078236117
.75	.851655006300
.76	.863732802016
.77	.875303538546
.78	.886360795874
.79	.896898796884
.80	.906913382314
.81	.916401482555
.82	.925361186644
.83	.933791708521
.84	.941693350826
.85	.949067466558
.86	.955916418534
.87	.962243537204
.88	.968053076715
.89	.973350169552
.90	.978140780058
.91	.982431656761
.92	.986230284023
.93	.989544832795
.94	.992384111087
.95	.994757513967
.96	.996674973339
.97	.998146907870
.98	.999184172848
.99	.999798010402
1.00	1.000000000000

Analizując otrzymane wyniki możemy powiedzieć, iż metoda minimalnych ścieżek zdatności dokładniej aproksymuje wartość R_M dla systemów o małej niezawodności, natomiast metoda minimalnych ścieżek niezdatności dokładniej aproksymuje wartość R_M dla systemów o dużej niezawodności.

LITERATURA

1. R. E. Barlow, F. Proschan, *Mathematical Theory of Reliability*, John Wiley, New York 1965 (tłum. ros. Moskwa 1969).
2. Z. W. Birnbaum, J. D. Esary, S. C. Saunders, *Multicomponent System and Structures and Their Reliability*, Technometrics, 1961, z. 1.
3. J. D. Esary, F. Proschan, *Coherent Structures of Non-identical Components*, Technometrics, 1963, z. 2.
4. W. Feldman, *Tieorema o płaskich sietiach*, „Kibernetika", 1973, Nr 6, Kijów.
5. J. Jaroń, *Cybernetyczne systemy złożone*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Łódzkiego, Nauki matematyczno-przyrodnicze, Seria II, 1973, z. 50.
6. J. Jaźwiński, *Studium nad metodami oceny niezawodności pewnej klasy obiektów technicznych*, Instytut Techniczny Wojsk Lotniczych, Warszawa 1973.
7. Z. Kościuczyk, *Definicja i podstawowe własności niezawodności pewnych klas układów cybernetycznych*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Łódzkiego, Nauki matematyczno-przyrodnicze, Seria II, 1967, z. 26.
8. A. Melichow, L. Bersztein, W. Kureiczik, *Primienienie grafow dlia projektirowania diskrietnych ustroistw*, „Nauka", Moskwa 1974.
9. E. Midzuta, *On a New Calculation Method for the Over-all System Reliability*, Proc. JEEE (Correspondence), vol. 52, September 1964.
10. J. Migdalski, *Niezawodność sieci informacyjnych o strukturze złożonej*, Pomiary — Automatyka — Kontrola, 1967, z. 2.
11. J. Migdalski, *Niezawodność przełączników wieloprzerwowych*, Rozprawy Elektrotechniczne, 1972, z. 1.
12. J. Migdalski, *Niezawodność systemów o strukturach złożonych*, Zagadnienia Eksploatacji Maszyn, 1973, z. 1.
13. F. Moskowitz, *The Analysis of Redundancy Networks*, Communications and Electronics, AJEE, 1958, November.
14. *Redundancy Techniques for Computing Systems*, Edited by Wilcox R. H. and Mann W. C., Spartan Books, N.Y. 1962.
15. G. D. Weinstock, *Topological Analysis of non Series-parallel Redundant Networks*, JEEE Internat. Convent. Rec. 11, 1963, Nr 6.
16. S. Ziemba, *Niezawodność urządzeń mechanicznych*, Wykłady na Wszechnicy PAN, Warszawa 1970.

J. MIGDALSKI

EVALUATION METHODS OF RELIABLE SYSTEMS WITH COMPLEX STRUCTURES

Summary

This paper contains precise and effective evaluation methods of reliable systems with complex structure which have been called decomposition methods here. According to the way of realizing the decomposition three complementary decomposition methods have been considered, namely:

— method of simple decomposition,

— method of complex decomposition,
— method of total decomposition.

As the opposed to evaluation methods used at present, such as the method of fault state of the object and the method of satisfactory performance state of object or methods of min path vector of system and min cut vector of system the proposed methods are simpler, more precise and more universal. Decomposition methods considered in this paper may be applied as well to reliable systems with dependent elements evaluation e.g. systems of the „k from n" and systems with stochastically dependent elements.

As illustration of these theoretical considerations a suitable example has been given.

J. MIGDALSKI

MÉTHODES DE CALCUL DE LA FIABILITÉ DE SYSTÈMES À STRUCTURES COMPLEXES

Résumé

Le travail présent propose les méthodes précises et efficaces de calcul de la fiabilité des systèmes à structures complexes, méthodes que l'auteur appelle „méthodes par décomposition". En fonction du procédé suivant lequel on effectue la décomposition de la structure de fiabilité du système complexe, on distingue ici trois méthodes mutuellement complémentaires de décomposition, à savoir:

— méthode de décomposition simple,
— méthode de décomposition composée,
— méthode de décomposition totale.

Les méthodes proposées ci-dessus sont plus simples, plus précises et plus universelles que les méthodes de calcul utilisées jusqu'ici. Les méthodes de calcul proposées peuvent être utilisées dans le calcul de la fiabilité de systèmes type „k parmi n" et les systèmes à éléments stochastiquement dépendants.

Un exemple numérique illustre la méthode proposée par l'auteur.

J. MIGDALSKI

BERECHNUNGSMETHODEN DER ZUVERLÄSSIGKEIT VON SYSTEMEN MIT ZUSAMMENGESETZTEN STRUKTUREN

Zusammenfassung

Im vorliegenden Aufsatz wurden genaue und effektive Berechnungsmethoden der Zuverlässigkeit von Systemen mit zusammengesetzten Strukturen angeführt, die Dekompositionsmethoden benannt wurden. In Abhängigkeit von der Durchführungsweise der Dekomposition von Zuverlässigkeitsstrukturen wurden drei einander ergänzende Dekompositionsmethoden erwogen, und zwar:

— die Methode der einfachen Dekomposition,
— die Methode der zusammengesetzten Dekomposition,
— die Methode der vollen Dekomposition.

Unterschiedlich als die bisher angewandten Berechnungsmethoden, wie z.B. die Methode der Tauglichkeits- und Untauglichkeitszustände oder auch die Methode minimaler Anwendbarkeits- und Unanwendbarkeitswege, sind die vorgeschlagenen Methoden einfacher, genauer und universaler. Die hier erwogenen Dekompositionsmethoden können auch zur Berechnung der Zuverlässigkeit von Systemen mit abhängigen Elementen angewandt werden, z.B. der Systeme „k von n" oder auch stochastisch abhängiger Systeme.

In Ergänzung der theoretischen Erwägungen wurde auch ein entsprechendes Zahlenbeispiel analysiert.

Я. МИГДАЛЬСКИ

МЕТОДЫ РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ СО СЛОЖНЫМИ СТРУКТУРАМИ

Р е з ю м е

В работе представлены точные и эффективные методы расчета надежности систем со сложными структурами, названные декомпозиционными методами. В зависимости от способа проведения декомпозиции надежностной структуры сложной системы рассмотрены три взаимно дополняющиеся методы декомпозиции, а именно:

— метод простой декомпозиции,

— метод сложной декомпозиции,

— метод полной декомпозиции.

В отличие от применяемых в настоящее время расчетных методов, таких как метод состояний работоспособности и состояний отказов или метод минимальных путей и минимальных сечений, предлагаемые методы более просты, точны и универсальны.

Рассматриваемые в работе методы декомпозиции могут также применяться для расчета надежности систем с зависимыми элементами, например систем типа „k с n", а также систем со стохатически зависимыми элементами.

Для иллюстрации теоретических рассуждений представленных в работе рассмотрен соответствующий числовой пример.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 3, ss. 543—554

621.315.592

Stała czasowa dyfuzji pola magnetycznego do obszaru przewodzącego

WOJCIECH LIPIŃSKI (SZCZECIN)

Instytut Automatyki Przemysłowej Politechniki Szczecińskiej

Otrzymano 14.4.1975

W pracy podano prosty algorytm określania czasu trwania stanu nieustalonego w zagadnieniach wiroprądowych. Przeprowadzono praktyczne obliczenia dla ekranu cylindrycznego cewki walcowej, cylindra przewodzącego i kuli przewodzącej. Otrzymane zależności opracowano numerycznie i przedstawiono wykreślnie.

1. WSTĘP

Analiza stanów nieustalonych prądów wirowych i związanych z nimi pól magnetycznych należy do zagadnień, których badanie w aspekcie zastosowań praktycznych w urządzeniach i aparatach elektrycznych związane jest z dalszą optymalizacją dotychczasowych rozwiązań. W pracy niniejszej przeprowadzono obliczenia uśrednionej stałej czasowej dla przebiegów nieustalonych w zagadnieniach wiroprądowych. Dla określenia czasu trwania przebiegów dyfuzyjnych (wypieranie prądu, dyfuzja pola magnetycznego do przewodnika, prądy wirowe, procesy cieplne, dyfuzja w roztworach) wprowadzona została według znanego kryterium uśredniona stała czasowa [1, 9]

$$T = \int_0^\infty \frac{B(t)-B(\infty)}{B(0)-B(\infty)} \cdot dt = \lim_{s\to 0} |s \cdot B(s)|' / B(0) - B(\infty), \tag{1}$$

gdzie $B(s)$ jest transformatą Laplace'a przebiegu $B(t)$ w danym punkcie przestrzeni.

W dotychczasowych opracowaniach dotyczących przebiegów dyfuzyjnych w ograniczonym obszarze przestrzeni przy braku źródeł wewnętrznych przeprowadzono obliczenia dla szeregu układów rozwiązując równanie różniczkowe dyfuzji przy danych warunkach początkowych i brzegowych i podstawiając rozwiązanie dla danego punktu przestrzeni do równania (1). Dla określenia warunków brzegowych przyjęto wielkość wejściową w postaci skoku jednostkowego na brzegu rozpatrywanego obszaru (np. gwałtowna zmiana temperatury).

Wielkością wyjściową był zmienny w czasie przebieg nieustalony wewnątrz danego obszaru. W ten sposób przeprowadzone zostały:

a) jednowymiarowa analiza płyty nieskończenie długiej i szerokiej, cylindra nieskończenie długiego i kuli [9],

b) dwuwymiarowa analiza cylindra o skończonej długości [12],
c) trójwymiarowa analiza dla obszaru prostopadłościanu [14].

Poważne trudności obliczeniowe występują przy przeprowadzaniu analizy w stanie nieustalonym w zagadnieniach związanych z prądami wirowymi.

Jedną z metod otrzymania dogodnych dla praktyki rozwiązań jest wprowadzenie zastępczych biernych układów elektrycznych RL [11, 13]. W wielu problemach bardziej celowe jest jednak określenie zastępczych stałych czasowych przebiegów w wybranym punkcie przestrzeni.

Celem pracy jest obliczenie stałych czasowych dyfuzji pola magnetycznego do obszarów przewodzących w układach podanych na rys. 1, rys. 3, rys. 5. Jako podstawę obliczeń przyjęto zależności podane w rozprawach [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 15, 16].

Wartość uśrednionej stałej czasowej zależy od położenia punktu obserwacji. W każdym z omawianych w pracy przypadków przyjęto pewien szczególny punkt, dla którego wykonano obliczenia numeryczne. Przykładowo dla ekranu walcowego przyjęto $r = R_2$, $z = 0$ a w przypadku walca i kuli przewodzącej początek układu współrzędnych. Pole magnetyczne w danym punkcie przestrzeni jest superpozycyjnie wzbudzone przez wszystkie prądy. Stała czasowa stanu nieustalonego pola magnetycznego związana jest z czasem trwania przebiegów przejściowych prądów wirowych w całym badanym obszarze. Podane zależności pozwalają określić uśrednione stałe czasowe w dowolnym punkcie przestrzeni.

W przedstawionych obliczeniach przyjęto przenikalność magnetyczną stałą w całym obszarze.

2. STAŁA CZASOWA DLA EKRANU CYLINDRYCZNEGO

Nawinięta cienkim drutem cewka znajduje się wewnątrz cylindrycznego ekranu wykonanego z materiału o przewodności γ (rys. 1). W przypadku zmian w czasie pola magnetycznego wzbudzonego przez prąd płynący w cewce, prądy wirowe indukowane w ekranie osłabią pole wewnątrz ekranu i w przestrzeni zewnętrznej $r \geqslant R_2$. Stała czasowa zmiany pola magnetycznego w stanie nieustalonym obliczona zostanie dla punktu przestrzeni $r = R_2$, $z = 0$.

Uwzględniając symetrię zagadnienia najwygodniej można opisać pole magnetyczne układu obliczając rozkład przestrzenny potencjału wektorowego, posiadającego tylko jedną składową w kierunku φ. W przypadku braku przewodzącego ekranu pole magnetyczne wzbudzenia określone zostało w pracach [3, 15]:

$$A_0 = \frac{\mu w I R}{\pi h} \int_0^{\infty} \frac{\sin uh}{u} \cdot \cos uz \cdot \begin{cases} K_1(uR) \cdot I_1(ur) \cdot du & \text{dla} \quad r \leqslant R \\ I_1(uR) \cdot K_1(ur) \cdot du & \text{dla} \quad r \geqslant R \end{cases}, \tag{2}$$

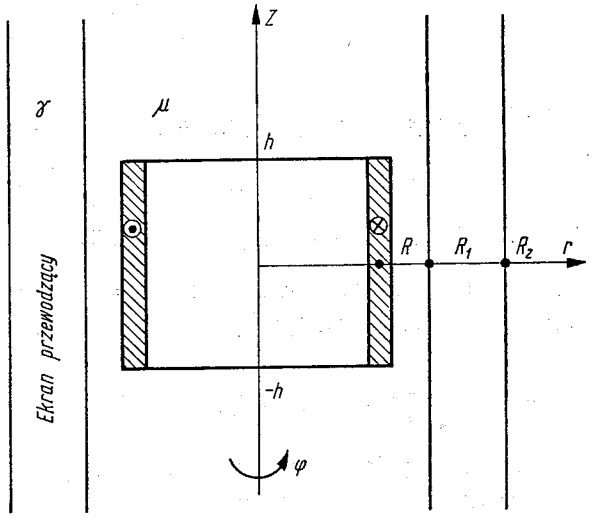
gdzie:

$I_1(x)$, $K_1(x)$ — zmodyfikowane funkcje Bessela pierwszego rzędu i pierwszego względnie drugiego rodzaju,
w — liczba zwojów cewki.

Pole magnetyczne wytworzone przez prądy wirowe opisane jest równaniem różniczkowym Laplace'a w przestrzeni nieprzewodzącej i Helmholtza wewnątrz ekranu

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r}+\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}-\frac{A}{r^2}=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad r\leqslant R_1 \text{ i } r\geqslant R_2\\ s\mu\gamma A & \text{dla} \quad R_1\leqslant r\leqslant R_2\end{cases}, \tag{3}$$

gdzie γ – przewodność właściwa.



Rys. 1. Wymiary geometryczne cienkiej cewki walcowej i ekranu przewodzącego

Warunkiem brzegowym jest zanikanie potencjału wektorowego w nieskończoności i wzdłuż osi z dla $r = 0$. Zanikanie potencjału wektorowego wzdłuż osi z wynika z symetrii osiowej, która powoduje, że linia pola magnetycznego $r = 0$ biegnie od $-\infty$ do $+\infty$. Zależność (2) spełnia powyższy warunek brzegowy, a rozwiązania (3) dane są jako [3]:

$$\beta=\sqrt{u^2+s\mu\gamma},$$

$$\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}=\int_0^\infty \cos uz\cdot\begin{pmatrix}C_1(u)\cdot I_1(ur)\cdot du\\ [C_2(u)\cdot I_1(\beta r)+C_4(u)\cdot K_1(\beta r)]\cdot du\\ C_3(u)\cdot K_1(ur)\cdot du\end{pmatrix}\quad\begin{matrix}\text{dla } r\leqslant R_1,\\ \text{dla } R_1\leqslant r\leqslant R_2,\\ \text{dla } r\geqslant R_2.\end{matrix} \tag{4}$$

Całkowite pole magnetyczne spełniające równanie Helmholtza w przestrzeni przewodzącej, równanie Poissona w obszarze uzwojeń cewki i równanie Laplace'a w pozostałej części przestrzeni określone jest podobnie jak w pracach [4, 5] jako:
$A = A_0+A_1$ dla $r\leqslant R_1$, $A = A_2$ dla $R_1\leqslant r\leqslant R_2$ i $A = A_0+A_3$ dla $r\geqslant R_2$. Nieznane funkcje C_1, C_2, C_3 obliczone zostaną z warunków granicznych dla $r = R_1$ i $r = R_2$.

$$\left.\begin{aligned}&A_0+A_1=A_2\\ &\frac{\partial(rA_0+rA_1)}{\partial r}=\frac{\partial(rA_2)}{\partial r}\end{aligned}\right\}r=R_1,\qquad \left.\begin{aligned}&A_0+A_3=A_2\\ &\frac{\partial(rA_0+rA_3)}{\partial r}=\frac{\partial(rA_2)}{\partial r}\end{aligned}\right\}r=R_2. \tag{5}$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań otrzymuje się dla pola magnetycznego na zewnątrz ekranu następującą zależność, $r \geqslant R_2$

$$A = A_0 + A_3 = \int_0^\infty \left[\frac{\mu w I R \cdot \sin uh}{\pi h u} \cdot I_1(uR) + C_3(u) \right] \cdot K_1(ur) \cdot \cos uz \cdot du =$$

$$= \int_0^\infty C(u) \cdot K_1(ur) \cdot \cos uz \cdot du, \qquad (6)$$

gdzie

$$C(u) = \frac{\mu w I R}{\pi h R_1 R_2} \cdot \frac{\sin uh}{u} \cdot I_1(uR) \Big/ [u \cdot I_1(\beta R_2) \cdot K_0(uR_2) +$$

$$+ \beta \cdot I_0(\beta R_2) \cdot K_1(uR_2)] \cdot [u \cdot K_1(\beta R_1) \cdot I_0(uR_1) + \beta \cdot K_0(\beta R_1) \cdot I_1(uR_1)] -$$

$$- [u \cdot I_1(\beta R_1) \cdot I_0(uR_1) - \beta \cdot I_0(\beta R_1) \cdot I_1(uR_1)] \cdot [u \cdot K_1(\beta R_2) \cdot K_0(uR_2) - \beta \cdot K_0(\beta R_2) \cdot K_1(uR_2)].$$

Wektor indukcji magnetycznej w wybranym punkcie $r = R_2$ i $z = 0$ posiada tylko składową w kierunku z, która dana jest następującym wyrażeniem:

$$B = \frac{1}{r} \frac{\partial (rA)}{\partial r} = - \int_0^\infty u \cdot C(u) \cdot K_0(uR_2) \cdot du. \qquad (7)$$

Powyższa zależność (7) określa związek pomiędzy prądem płynącym w cewce $I(t)$ a polem magnetycznym na zewnątrz ekranu w punkcie $r = R_2$ i $z = 0$. Przyjmując

$$I(t) = I_0 \left[1 - \exp\left(- \frac{t}{T_0} \right) \right], \qquad I(s) = I_0 / s(1 + sT_0), \qquad (8)$$

co w przypadku $T_0 = 0$ odpowiada skokowej zmianie prądu, można wyznaczyć zgodnie z (1) uśrednioną stałą czasową $T - T_0$ zmian pola magnetycznego. Po obliczeniach otrzymuje się następujące zależności: $B(0) = \lim_{s \to \infty} s \cdot B(s) = 0$,

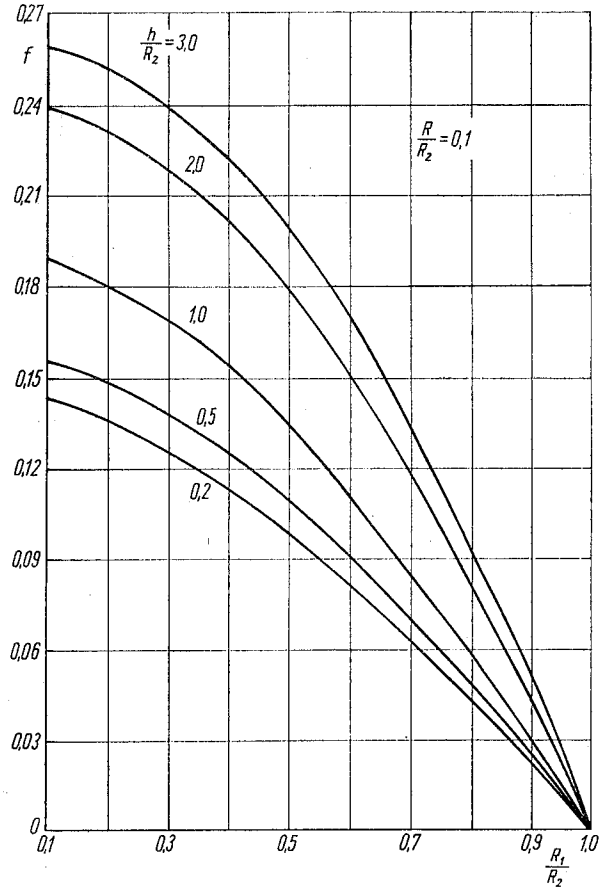
$$B(\infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot B(s) = - \frac{\mu w I_0 R}{\pi h} \int_0^\infty \sin uh \cdot I_1(uR) \cdot K_0(uR_2) \cdot du,$$

$$\lim_{s \to 0} |s \cdot B(s)|' = - T_0 B(\infty) + \frac{\mu^2 \gamma I_0 R R_1 R_2}{2\pi h} \int_0^\infty \sin uh \cdot I_1(uR) \cdot K_0(uR_2) \times \qquad (9)$$

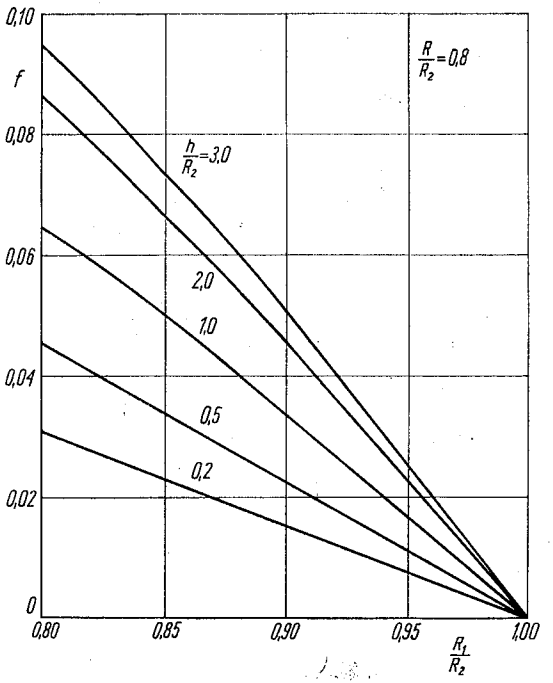
$$\times \left\{ \frac{R_2}{R_1} [I_2(uR_2) \cdot K_0(uR_2) + I_1(uR_2) \cdot K_1(uR_2)] - \frac{R_1}{R_2} [I_2(uR_1) \cdot K_0(uR_1) + I_1(uR_1) \cdot K_1(uR_1)] \right\}.$$

Podstawiając zależności (9) do wzoru (1) i przyjmując dla uproszczenia zapisu $uR_2 = x$ otrzymano:

$$T - T_0 = \mu \gamma \cdot R_2^2 \cdot f\left(\frac{h}{R_2}, \frac{R}{R_2}, \frac{R_1}{R_2} \right), \qquad (10)$$



Rys. 2a. Przebieg funkcji f w zależności (10) dla $R/R_2 = 0{,}1$



Rys. 2b. Przebieg funkcji f w zależności (10) dla $R/R_2 = 0{,}8$

$$f=\int_0^{\infty}\sin\frac{xh}{R_2}\cdot I_1\left(\frac{xR}{R_2}\right)\cdot K_0(x)\cdot\left\{I_1(x)\cdot K_1(x)+I_2(x)\cdot K_0(x)-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\cdot\left[I_1\left(\frac{xR_1}{R_2}\right)\cdot K_1\left(\frac{xR_1}{R_2}\right)+\right.\right.$$

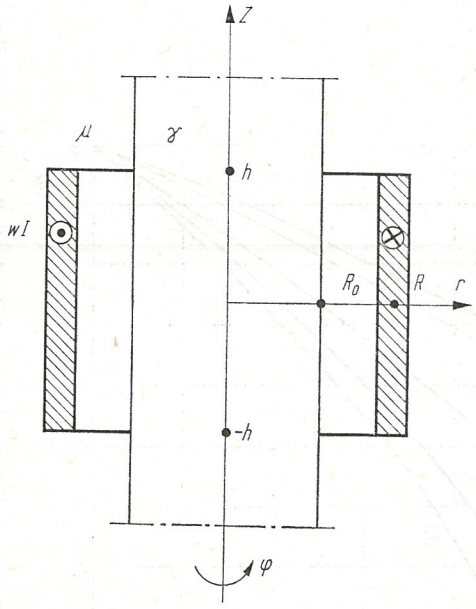
$$\left.\left.+I_2\left(\frac{xR_1}{R_2}\right)\cdot K_0\left(\frac{xR_1}{R_2}\right)\right]\right\}\cdot dx\Big/2\cdot\int_0^{\infty}\sin\frac{xh}{R_2}\cdot I_1\left(\frac{xR}{R_2}\right)\cdot K_0(x)\cdot dx.$$

Funkcja f została obliczona numerycznie i przedstawiona na rys. 2. Przykładowo dla miedzianego ekranu o wymiarach $R_2 = 0{,}10$ m, $h/R_2 = 2{,}0$, $R/R_2 = 0{,}5$ i $R_1/R_2 = 0{,}6$ otrzymuje się $T-T_0 = 0{,}11$ s.

3. DYFUZJA POLA MAGNETYCZNEGO W WALCU PRZEWODZĄCYM

Wymiary geometryczne układu i przyjęty układ współrzędnych walcowych podano na rys. 3. Pole magnetyczne wzbudzenia określone jest zależnością (2) opisującą rozkład przestrzenny składowej φ potencjału wektorowego A_0.

Warunkiem brzegowym zagadnienia jest, tak jak w poprzednim przypadku, zerowanie

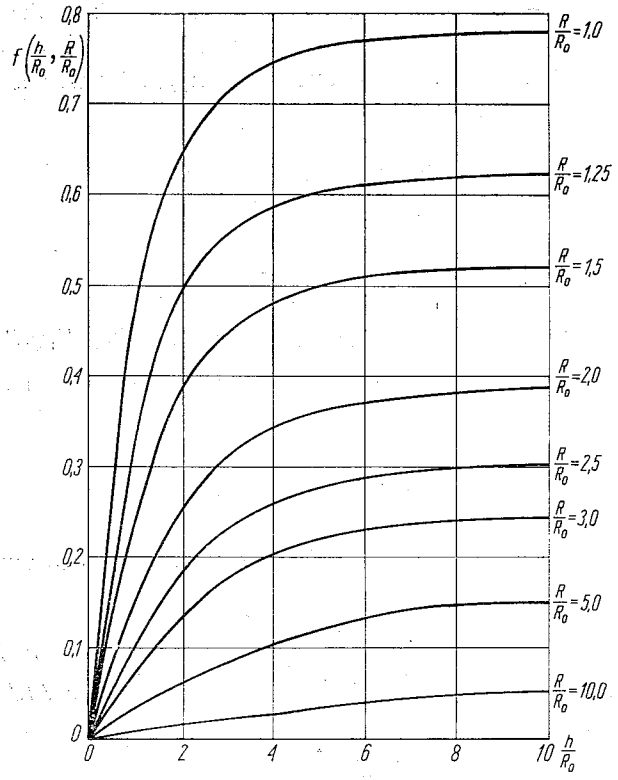


Rys. 3. Przewodzący rdzeń cylindryczny umieszczony wewnątrz cewki wzbudzającej pole magnetyczne

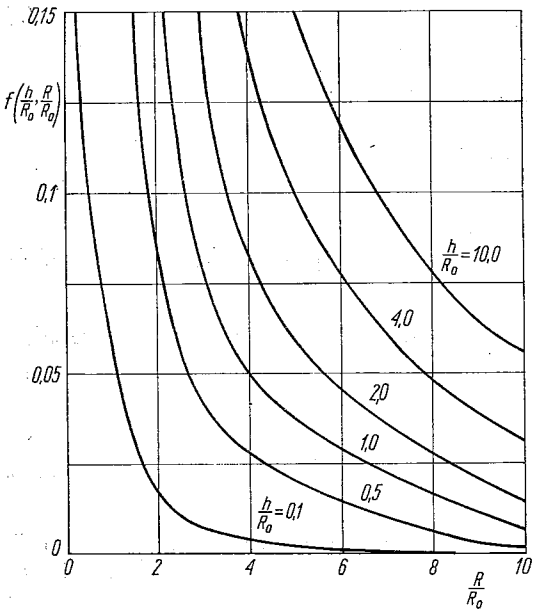
się potencjału wektorowego w nieskończoności i wzdłuż osi z. Spełniające ten warunek rozwiązania równania Helmholtza wewnątrz walca i równania Laplace'a na zewnątrz (3) mają następującą postać:

$$\beta=\sqrt{u^2+s\mu\gamma},$$

$$\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}=\int_0^{\infty}\cos uz\cdot\begin{pmatrix}C_1(u)\cdot I_1(\beta r)\cdot du & \text{dla } r\leqslant R_0,\\ C_2(u)\cdot K_1(ur)\cdot du & \text{dla } r\geqslant R_0.\end{pmatrix}\tag{11}$$



Rys. 4a. Przebieg funkcji f (wzór 16) w zależności od h/R_0



Rys. 4b. Przebieg funkcji f (wzór 16) w zależności od R/R_0

Pole magnetyczne prądów wirowych (11) określone zostało jako całka rozwiązań elementarnych otrzymanych metodą rozdzielenia zmiennych. Nieznane funkcje C_1 i C_2 zostaną obliczone z warunku granicznego na powierzchni $r = R_0$, podobnie jak w pracy [4]:

$$A_1 = A_0 + A_2,$$
$$\frac{\partial(rA_1)}{\partial r} = \frac{\partial(rA_0 + rA_2)}{\partial r}. \tag{12}$$

Po obliczeniach otrzymano

$$C_1 = \frac{\mu w I R}{\pi h R_0} \cdot \frac{\sin uh \cdot K_1(uR)}{u[u \cdot I_1(\beta R_0) \cdot K_0(uR_0) + \beta \cdot I_0(\beta R_0) \cdot K_1(uR_0)]}. \tag{13}$$

Wektor indukcji magnetycznej w wybranym punkcie przestrzeni $z = 0$ i $r = 0$ jest określony jako:

$$B = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA)}{\partial r} = \int_0^\infty \beta \cdot C_1(u) \cdot du. \tag{14}$$

Przyjmując prąd płynący w uzwojeniach wzbudzenia jako (8) otrzymuje się następujące zależności:

$$B(\infty) = \lim_{s\to 0} s \cdot B(s) = \frac{\mu w I_0 R}{\pi h} \int_0^\infty \sin uh \cdot K_1(uR) \cdot du = \frac{\mu w I_0}{2\sqrt{R^2 + h^2}},$$

$$\lim_{s\to 0} |s \cdot B(s)|' = -T_0 \cdot B(\infty) - \frac{\mu^2 \gamma I_0 R R_0^2}{2\pi h} \int_0^\infty \sin uh \cdot K_1(uR) \cdot [I_2(uR_0) \cdot K_0(uR_0) + \tag{15}$$
$$+ I_1(uR_0) \cdot K_1(uR_0)] \cdot du.$$

Podstawiając zależności (15) do wzoru (1) i przyjmując $uR_0 = x$ otrzymano ostateczny wzór dla uśrednionej stałej czasowej

$$T - T_0 = \frac{\mu \gamma R R_0 \sqrt{R^2 + h^2}}{\pi h} \cdot f\left(\frac{h}{R_0}, \frac{R}{R_0}\right), \tag{16}$$

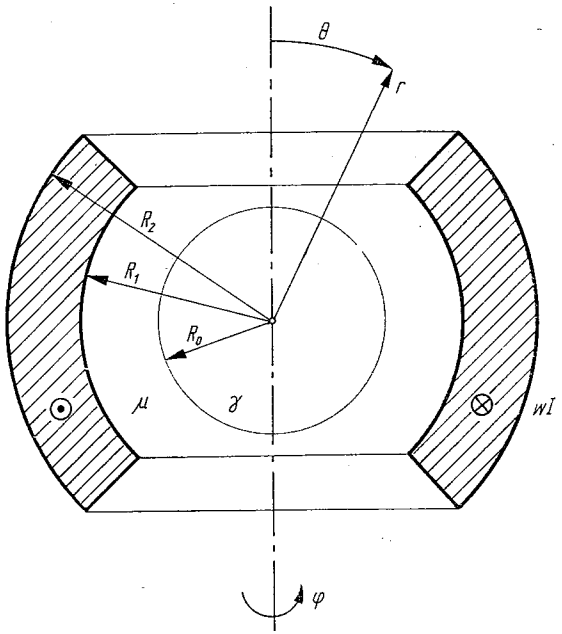
$$f = \int_0^\infty \sin\frac{xh}{R_0} \cdot K_1\left(\frac{xR}{R_0}\right) \cdot [I_1(x) \cdot K_1(x) + I_2(x) \cdot K_0(x)] \cdot dx.$$

Przebieg funkcji f podano po numerycznym przeprowadzeniu całkowania na rys. 4. Przykładowo dla miedzi i $h/R_0 = 0{,}5$, $R/R_0 = 1{,}5$ i $R = 0{,}1$ otrzymuje się $T - T_0 = 0{,}067$ s.

4. STAŁA CZASOWA PRĄDÓW WIROWYCH W KULI PRZEWODZĄCEJ

Wewnątrz podanej na rys. 5 cewki kulistej znajduje się kula przewodząca o promieniu R_0. W przypadku załączenia cewki w chwili czasu przyjętej jako $t = 0$ do źródła energii, zmienne pole magnetyczne indukuje w kuli prądy wirowe. Dla określenia uśrednionej stałej czasowej przebiegów nieustalonych można przyjąć zmianę prądu w cewce według zależności

(8) i przeprowadzić obliczenia zgodnie z wzorem (1) w środku kuli $r = 0$. W chwili czasu $t = 0$ indukcja magnetyczna wewnątrz kuli przewodzącej jest równa zeru. Zachodzi to również w przypadku skokowej zmiany prądu $T_0 = 0$, gdyż zaindukowane prądy wirowe całkowicie ekranują wnętrze dla $t = 0$. W stanie ustalonym prądy wirowe zanikają i pole magnetyczne układu jest równe polu wzbudzającemu cewki.



Rys. 5. Przewodząca kula umieszczona w cewce kulistej o skończonej długości

Dyfuzja pola magnetycznego do wnętrza kuli przewodzącej przebiega najwolniej w środku $r = 0$.

Pole magnetyczne wzbudzenia w przypadku usunięcia kuli przewodzącej obliczone zostało w pracy [6]. Dla $r \leqslant R_1$ otrzymano:

$$A_0 = \frac{\mu w I}{\alpha(R_2^2 - R_1^2)} \cdot \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{C_n \cdot r^n}{(2n+1)(2-n)} \cdot (R_2^{2-n} - R_1^{2-n}) \cdot P_n^1(\cos\Theta), \tag{17}$$

gdzie:

$P_n^1(\cos\Theta)$ — stowarzyszona funkcja Legendre'a,

$$C_n = \frac{2n+1}{2n(n+1)} \int_{\cos(90-\alpha)}^{\cos(90+\alpha)} P_n^1(\cos\Theta) \cdot \mathrm{d}(\cos\Theta),$$

$$C_1 = \frac{3}{4}(\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \alpha).$$

Pole magnetyczne prądów wirowych opisane jest również składową φ potencjału wektorowego, która spełnia następujące równanie różniczkowe cząstkowe

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial A}{\partial r}-\frac{A}{r^2\sin^2\Theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \Theta^2}+\frac{\operatorname{ctg}\Theta}{r^2}\frac{\partial A}{\partial \Theta}=\begin{cases} s\mu\gamma A & \text{dla } r\leqslant R_0 \\ 0 & \text{dla } r\geqslant R_0 \end{cases}. \tag{18}$$

Rozwiązanie spełniające warunek brzegowy w nieskończoności $A(\infty)=0$ i wynikające z symetrii zerowanie się potencjału wektorowego wzdłuż osi symetrii mają następującą postać [10]

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} D_1(n)\cdot r^{-0,5}\cdot J_{n+0,5}(\beta r)\cdot P_n^1(\cos\Theta) \qquad \text{dla } r\leqslant R_0, \\ A_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} D_2(n)\cdot r^{-n}\cdot P_n^1(\cos\Theta), \qquad\qquad \text{dla } r\geqslant R_0 \end{aligned} \tag{19}$$

gdzie $\beta=\sqrt{-s\mu\gamma}$.

Nieznane funkcje $D_1(n)$ i $D_2(n)$ wyznaczono z warunków brzegowych dla całkowitego pola magnetycznego na granicy obu obszarów $r=R_0$ podobnie jak w pracy [4]

$$A_1=A_0+A_2, \qquad \frac{\partial(rA_1)}{\partial r}=\frac{\partial(rA_0+rA_2)}{\partial r}. \tag{20}$$

Po obliczeniach otrzymano:

$$D_1=\frac{2\mu w I\cdot C_n\cdot n\cdot R_0^{n+0,5}\cdot(R_2^{2-n}-R_1^{2-n})}{\alpha(R_2^2-R_1^2)(2n+1)(2-n)\left[\beta R_0\cdot J_{n-0,5}(\beta R_0)-J_{n+0,5}(\beta R_0)\right]}. \tag{21}$$

Dla pola magnetycznego w środku kuli $r=0$ otrzymuje się następujące zależności

$$B=\frac{1}{r\cdot\sin\Theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\Theta}(A\cdot\sin\Theta)_{\substack{r=0\\ \Theta=0}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\beta^{1,5}\cdot D_1(1). \tag{22}$$

Przyjmując prąd wzbudzenia zgodnie z równaniem (8) obliczono:

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0} s\cdot B(s) &= \frac{\mu w I_0(\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\alpha)}{2\alpha(R_2+R_1)}, \\ \lim_{s\to 0}|s\cdot B(s)|' &= -T_0\cdot B(\infty)-\frac{\mu^2\gamma I_0 w(\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\alpha)\cdot R_0^2}{10\alpha(R_2+R_1)}. \end{aligned} \tag{23}$$

Podstawiając zależności (23) do równania (1) otrzymuje się dla uśrednionej stałej czasowej następujące wyrażenie:

$$T-T_0=0{,}2\,\mu\gamma R_0^2. \tag{24}$$

Przykładowo dla miedzi i $R_0=0{,}1$ m otrzymuje się $T-T_0=0{,}14$ s.

5. ZAKOŃCZENIE

W przedstawionej pracy obliczono czas trwania nieustalonych przebiegów wiroprądowych w konfiguracjach geometrycznych podanych na rysunkach 1, 3, 5. Przebieg $B(t)$ w danym punkcie przestrzeni, dany jako oryginał tranformaty Laplace'a $B(s)$, zmienia się przy przyjęciu wielkości wejściowej jako (8) od zera do wielkości ustalonej. Wyznaczona zgodnie z zależnością (1) stała czasowa określa czas trwania stanu nieustalonego w układzie.

LITERATURA

1. A. Avramescu, *Über die Zeitkonstante des Skineffektes*, ETZ-A, Bd 80 (1959), s. 78—82.
2. F. Fraunberger, *Schaltvorgänge an Magnetspulen mit massivem Eisenkern*, Archiv für Elektrotechnik, 41 (1953—55), s. 27—39.
3. L. Hannakam, *Abschirmung von Zylinderspulen*, ETZ-A, Bd. 87 (1966), s. 227—232.
4. L. Hannakam, *Beitrag zur Berechnung transienter Wirbelströme in einer massiven Hohlkugel*, Archiv für Elektrotechnik, 54 (1970), s. 1—7.
5. L. Hannakam, *Wirbelströme im leitenden Halbraum bei beliebiger Form der erregenden Leiterschleife*, Archiv für Elektrotechnik, 54 (1972), s. 251—261.
6. W. Lipiński, R. Sikora, J. Purczyński, *Przykłady obliczenia rozkładu pola magnetycznego cewek kulistych*, Archiwum Elektrotechniki, 23 (1974), s. 689—694.
7. W. Lipiński, R. Sikora, J. Purczyński, *Berechnung des Magnetfeldes gleichstromdurchflossener gerader Leiter mittels der Bessel — und Fourier-Transformationen*, Archiv für Elektrotechnik, 55 (1973), s. 312—319.
8. K.W. Miller, *Diffusion of electric currents into rods, tubes and flat surfaces*, Trans. AIEE, Bd. 66 (1947), s. 1496—1502.
9. C.I. Mocanau, *Über die Zeitkonstante des Skineffektes*, ETZ-A, Bd. 92 (1971), s. 156—161.
10. P. Moon, D.E. Spencer, *Field theory for engineers*, New York 1961.
11. R. Sikora, W. Lipiński, *Die Ersatzschaltungen der zweidimensionalen nichtstationären Stromverdrängung in einer Maschinennut*, Archiv für Elektrotechnik, 56 (1974), s. 252—254.
12. R. Sikora, W. Lipiński, *Stała czasowa procesów dyfuzyjnych w walcu o skończonej długości*, Pomiary, Automatyka, Kontrola, 1975, Z. 3.
13. R. Sikora, W. Lipiński, *Schemat zastępczy impedancji żłobkowej uwzględniający dwuwymiarowe wypieranie prądu*, Archiwum Elektrotechniki, 24 (1975), Z. 1.
14. R. Sikora, W. Lipiński, *Trójwymiarowa analiza stałej czasowej przebiegów dyfuzyjnych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Szczecińskiej Elektryka, 1975.
15. W.R. Smythe, *Static and dynamic elektricity*, New York 1950.
16. M.J.O. Strutt, *Magnetische Feldverdrängung und Eigenzeitkonstanten*, Ann. Phys., Bd 85 (1928), s. 866—880.

W. LIPIŃSKI

TIME PARAMETER OF MAGNETIC FIELD DIFFUSION INTO CONDUCTING REGION

Summary

In the paper a simple algorithm is given for determination of duration of transients in eddy-current problems. Practical calculations are executed for a cylindrical shield of cylindrical coil, as well as for a conducting cylinder and sphere. Results are computed and given as graphs.

W. LIPIŃSKI

CONSTANTE DE TEMPS DE LA DIFFUSION DU CHAMP MAGNÉTIQUE VERS LA RÉGION CONDUCTRICE

Résumé

Dans ce travail on a donné le simple algorythme de définition de la durée de l'état non permanent dans les problemes des courants de Foucault. On a fait les calculs pratiques pour l'écran cylindrique de la bobine cylindrique, le cylindre conducteur et la boule conductrice. On a élaboré les relations obtenues et on les a présentées sur les graphiques.

W. LIPIŃSKI

ÜBER DIE ZEITKONSTANTE DER DIFFUSION DES ELEKTROMAGNETISCHEN FELDES IM LEITENDEN RAUM

Zusammenfassung

In der Arbei wurde ein einfacher Algorithmus zur Bestimmung der Zeitdauer von Ausgleichvorgängen in den Wirbelstromproblemen angegeben. Es wurden praktische Berechnungen für die zylindrische Abschirmung von Zylinderspulen, den leitenden zylindrischen Kern un die leitende Kugel durchgeführt. Die erhaltenen Beziehungen wurden numerisch bearbeitet und graphisch dargestellt.

В. ЛИПИНЬСКИ

ПОСТОЯННАЯ ВРЕМЕНИ ДИФФУЗИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПРОВОДЯЩУЮ ЗОНУ

Резюме

В труде приведен простой алгоритм определения времени выступания неустановившегося режима явлений связанных с вихревыми токами. Проведены практические расчеты для цилиндрического экрана цилиндрической катушки, проводящего цилиндра и проводящего шара. Полученные результаты обработаны цифровым методом и представлены в форме графиков.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 3, ss. 555—582

621.315.592

Rekombinacja promienista w silnie domieszkowanych półprzewodnikach

WŁODZIMIERZ NAKWASKI (WARSZAWA)

Instytut Technologii Elektronowej
przy Naukowo-Produkcyjnym Centrum Półprzewodników

Otrzymano 17.4.1975

Artykuł omawia procesy rekombinacji promienistej w materiałach półprzewodnikowych. Przedstawiono dowody eksperymentalne na dominujący udział przejść typu donor-akceptor w przypadku średniego poziomu domieszkowania. Rozpatrzono również wpływ silnego domieszkowania na zjawiska rekombinacyjne, szczególnie w diodach elektroluminescencyjnych GaAs. Podano dwa najczęściej cytowane modele tych zjawisk: R. J. Archera i in. oraz H. C. Casey'a, Jr i D. J. Silversmitha.

Za pomocą powyższych modeli dokonano próby interpretacji wyników eksperymentalnych. Prawdopodobnie istnieje w DEL równolegle kilka kanałów rekombinacji promienistej, z których najbardziej wydajnymi są tunelowanie z udziałem fotonu, wypełnianie ogonów pasm oraz rekombinacja promienista elektronów wstrzykiwanych termicznie do obszaru *p*. Względny udział poszczególnych procesów zależy od warunków zewnętrznych: napięcia na złączu, temperatury i poziomu domieszkowania.

1. WPROWADZENIE

Silne domieszkowanie półprzewodników prowadzi, na skutek oddziaływania pomiędzy sąsiednimi atomami domieszek, do rozmywania się poziomów donorowych i akceptorowych w odpowiednie pasma, które przy dostatecznej koncentracji domieszek mogą się połączyć z pasmem przewodnictwa (w przypadku donorów) lub walencyjnym (w przypadku akceptorów).

W półprzewodniku silnie domieszkowanym istotny wpływ na kształt pasm wywiera potencjał deformacyjny, powstający na skutek zaburzeń doskonałości sieci krystalicznej, wywołanych obecnością domieszek, oraz potencjał elektrostatyczny, opisujący oddziaływanie zjonizowanych atomów domieszek z elektronami w pasmach.

Powyższe zjawiska powodują powstanie w modelu pasmowym silnie domieszkowanego półprzewodnika, tzw. *ogonów pasm* (*band tails*) [1], dzięki czemu zostaje zmniejszona efektywna szerokość przerwy energetycznej.

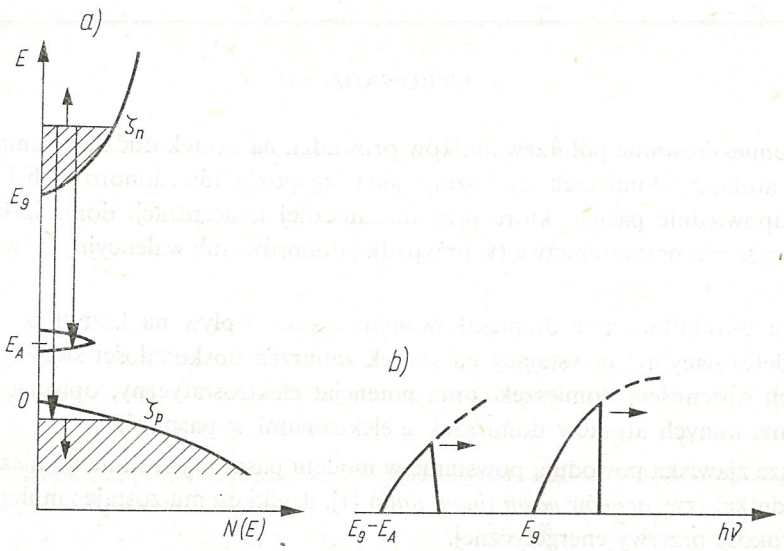
Zaburzenia w periodyczności sieci krystalicznej powodują też zachwianie zasady zachowania quasi-pędu [2]. W wyniku oddziaływania domieszek rozkład gęstości stanów w pobliżu $\vec{k} = 0$ ($\vec{k}$ — wektor falowy) przestaje być paraboliczny [3].

Wszystkie te zjawiska wpływają na przebieg rekombinacji promienistej w półprzewodnikach silnie domieszkowanych. Niniejszy artykuł jest poświęcony analizie tego procesu, ze szczególnym uwzględnieniem rekombinacji promienistej w diodach elektroluminescencyjnych GaAs

2. REKOMBINACJA PROMIENISTA W ŚREDNIO DOMIESZKOWANYCH PÓŁPRZEWODNIKACH

Początkowo sądzono, że podstawowym mechanizmem rekombinacji promienistej w półprzewodnikach są przejścia typu pasmo przewodnictwa — pasmo walencyjne [4]. Jednakże pewne różnice między wynikami obliczeń teoretycznych i eksperymentami (np. [5-11]) spowodowały konieczność uwzględnienia w strukturze pasmowej półprzewodnika obecności pasm domieszkowych [12—38]. Dopiero pomiary J. I. Pankove'a [39—40] oraz badania wpływu pola magnetycznego na widmo emisyjne [41] pozwoliły dokładnie wyjaśnić te zjawiska.

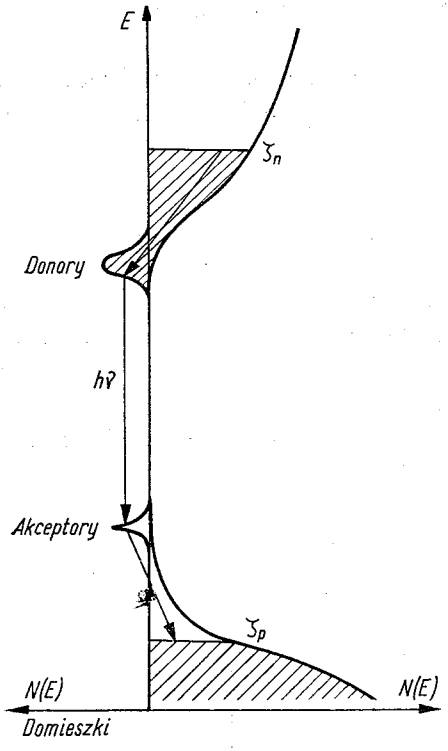
J. I. Pankove [39—40] badał w niskich temperaturach zależność widma katodoluminescencji średnio domieszkowanego GaAs od intensywności pobudzenia. Przez średnio domieszkowany półprzewodnik rozumiemy materiał, w którym w wyniku obecności domieszek powstały już pasma domieszkowe, lecz nie połączyły się jeszcze z najbliższym pasmem dozwolonym (przewodnictwa lub walencyjnym). Gdyby proces rekombinacji promienistej zachodził między pasmami przewodnictwa i walencyjnym lub przewodnictwa i akceptorowym, ze wzrostem pobudzenia przesuwającym quasi-poziomy Fermiego (rys. 1a), maksimum widma emisyjnego przesuwałoby się w stronę wyższych energii (rys. 1b). Jed-



Rys. 1. Przejścia: pasmo przewodnictwa — pasmo walencyjne i pasmo przewodnictwa — pasmo akceptorowe (a) oraz przewidywane widmo emisyjne (b) dla GaAs typu *p*

Krótkie strzałki wskazują przesuwanie się quasi-poziomów Fermiego i wierzchołków widma emisyjnego ze wzrostem pobudzenia; ζ_n i ζ_p — quasi-poziomy Fermiego odpowiednio dla elektronów i dziur. Stany zajęte przez elektrony zostały zakreskowane [50]

nakże J. I. Pankove żadnego przesunięcia nie zaobserwował. Jedynym mechanizmem rekombinacji promienistej tłumaczącym to zjawisko są przejścia typu poziom donorowy — poziom akceptorowy. Cały proces rekombinacji składa się więc z trzech etapów: bezpromienistego przejścia pasmo przewodnictwa — poziom donorowy, promienistej rekombinacji poziom donorowy — poziom akceptorowy i znowu bezpromienistego przejścia poziom akceptorowy — pasmo walencyjne. Ilustruje to dla GaAs typu *n* rys. 2. Aby powyższy



Rys. 2. Zjawisko rekombinacji w średnio domieszkowanym GaAs typu *n* [39]

proces był dominującym mechanizmem rekombinacji, oba przejścia bezpromieniste muszą zachodzić dużo szybciej od konkurencyjnego przejścia pasmo przewodnictwa — pasmo walencyjne.

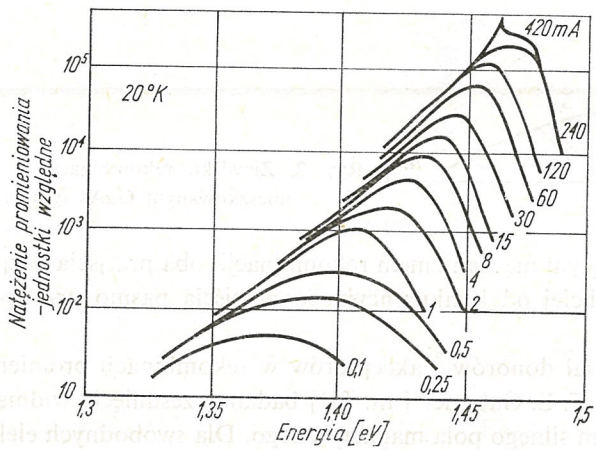
Dominujący udział donorów i akceptorów w rekombinacji promienistej potwierdziły również inne prace. F. L. Galeener i in. [41] badali przesunięcie widma emisyjnego diod GaAs pod działaniem silnego pola magnetycznego. Dla swobodnych elektronów zależność tego przesunięcia od natężenia pola magnetycznego powinna być liniowa. Obserwowano jednak zależność kwadratową. Identyczny wynik otrzymano badając wpływ pola magnetycznego na widmo emisyjne laserów złączowych GaAs [42]. Z pomiaru przesunięcia obliczono masę efektywną zlokalizowanego nośnika ładunku. Otrzymana wartość była bardzo bliska masie efektywnej elektronu. Stąd wyjaśniono przesunięcie widma w polu magnetycznym przez przesunięcie poziomów płytkich donorów. Analogicznych pomiarów wpływu pola magnetycznego na widmo absorpcyjne GaAs dokonali R. V. Emlin i in. [43], otrzymując ten sam efekt. Wyniki te są eksperymentalnymi dowodami udziału poziomów

donorowych w rekombinacji promienistej w półprzewodnikach. O udziale akceptorów świadczy porównanie widm elektroluminescencji i fotoluminescencji próbek GaAs [44]. Widmo elektroluminescencji jest przesunięte względem widma fotoluminescencji GaAs typu *n* w stronę niskich energii o ca 0,03 eV, która to wartość zgadza się bardzo dobrze z odległością w skali energii płytkiego poziomu akceptorowego od krawędzi pasma walencyjnego [9, 45]. Z drugiej strony wiadomo, że promieniowanie w diodach GaAs jest generowane w przyzłączowym obszarze typu *p* [9, 17, 46—48]. Można więc przyjąć, że wyżej wymienione przesunięcie jest spowodowane udziałem w rekombinacji pasma akceptorowego.

Jeszcze inny dowód eksperymentalny, oparty na obserwacji temperaturowej zależności widma fotoluminescencji słabo domieszkowanego GaAs, przytoczyli R. C. C. Leite i in. [49].

3. WPŁYW SILNEGO DOMIESZKOWANIA NA REKOMBINACJĘ PROMIENISTĄ

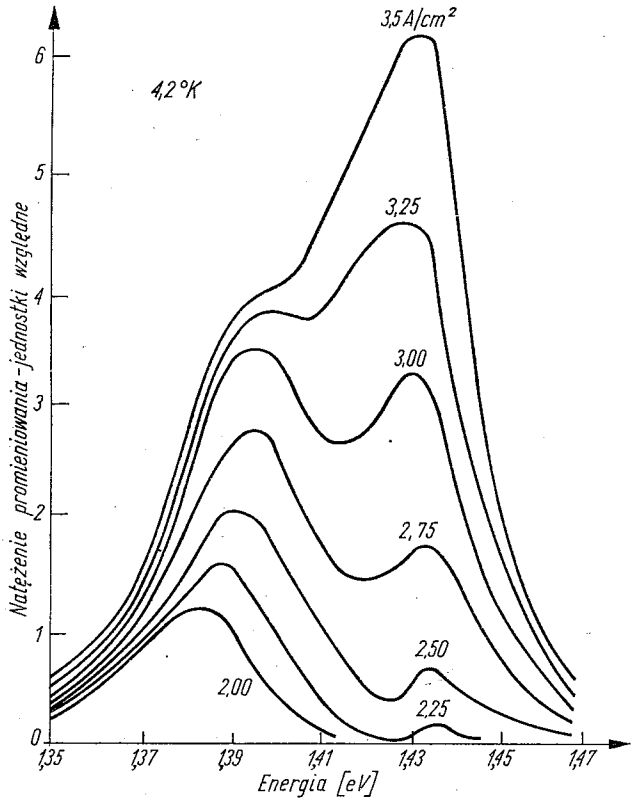
Znacznie więcej rozbieżności, niż to było dla przypadku średnio domieszkowanych półprzewodników, można znaleźć w pracach analizujących rekombinację promienistą w półprzewodnikach silnie domieszkowanych. Część autorów [39, 50—51] twierdzi, że w dalszym ciągu nie zachodzi przesunięcie położenia maksimum widma emisyjnego ze wzrostem pobudzenia, lub że takie przesunięcie zależy od stopnia kompensacji. Większość jednakże obserwowała to przesunięcie [9, 34, 46, 52—55], przeważnie nie uzależniając go



Rys. 3. Widma emisyjne diody GaAs dla różnych prądów zasilania w temperaturze 20°K [52]

od dodatkowych czynników. Wyniki typowego pomiaru elektroluminescencji dokonanego przez D. F. Nelsona i in. [52] pokazano na rys. 3. Nie rozpatrując na razie istoty zjawiska zauważmy jeszcze, że dokładniejsze pomiary [56] pozwoliły wykryć w charakterystyce widmowej fluorescencji silnie domieszkowanych półprzewodników obecność dwóch wierzchołków, przesuwających się z różną szybkością, o względnych wysokościach zależnych od stopnia pobudzenia (rys. 4). Problem ten rozpatrzono dokładniej w rozdziale 4.

Charakterystyki widmowe GaAs w temperaturze 77°K, otrzymane w pomiarze elektroluminescencji (EL) [3, 45, 57—60], fotoluminescencji (FL) [57, 61—62] i katodoluminescencji (KL) [63] składały się z kilku pasm, z których najbardziej intensywne odpowiadało zwykle energii nieco mniejszej od szerokości przerwy energetycznej, równej Eg (77°K) ≃ ≃ 1,51 eV [64]. W tej samej temperaturze pik charakterystyki widmowej laserów homo-

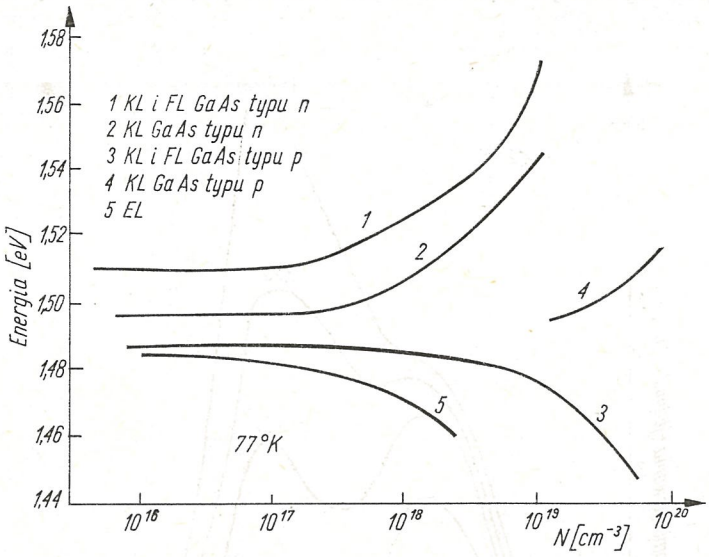


Rys. 4. Zmiana widma emisyjnego diody GaAs w temperaturze 4,2°K spowodowana wzrostem gęstości prądu [56]

złączowych [65—67], jak również laserów pobudzanych strumieniem elektronów [68—69] wypadał mniej więcej dla energii 1,47 eV. Świadczy to, że w procesie rekombinacji, przynajmniej dla KL i FL, musiał brać udział co najmniej jeden poziom domieszkowy. W przypadku EL można wyjaśnić ten fakt, jak się później okaże, w inny sposób.

Dalszym potwierdzeniem udziału poziomów domieszkowych w rekombinacji jest zależność położenia wierzchołka charakterystyki widmowej GaAs od poziomu domieszkowania, otrzymana dla pomiarów elektroluminescencji przez M. I. Nathana i G. Burnsa [57], B. H. Ahna i in. [70], V. S. Bagaeva i in. [71] oraz I. Ladany [72], fotoluminescencji przez M. I. Nathana i G. Burnsa [57] oraz katodoluminescencji przez D. A. Cusano [63]. Wyniki tych pomiarów ilustruje rys. 5.

Linie *1* i *2*, przedstawione na tym rysunku, odpowiadają materiałowi typu *n*. Ze wzrostem koncentracji, wierzchołek charakterystyki widmowej dla tego materiału przesuwa się w stronę wyższych energii. Podobny efekt stwierdzono również w przypadku absorpcji i przypisano go faktowi przesuwania się poziomu Fermiego w stronę wyższych energii



Rys. 5. Zależność położenia wierzchołków charakterystyki widmowej GaAs w temperaturze 77°K od poziomu domieszkowania otrzymana w wyniku pomiarów foto-, katodo- i elektroluminescencji [46]

w miarę wypełniania pasma przewodnictwa elektronami (przesunięcie Bursteina [73]). Linia *1* jest interpretowana jako rekombinacja pasmo-pasmo, natomiast linia *2* jako przejście typu pasmo przewodnictwa — poziom akceptorowy.

Linia *3*, która odpowiada dominującemu pasmu emisyjnemu materiału typu *p*, jest przypisywana przejściom typu poziom donorowy — poziom akceptorowy. Dla niskich koncentracji domieszek leży ona około 30 meV poniżej energii równej przerwie energetycznej. Ze wzrostem poziomu domieszkowania obserwuje się przesuwanie tego wierzchołka emisyjnego w stronę niższych energii, co przypisuje się faktowi rozszerzania się pasm domieszkowych i w efekcie zwężaniu przerwy energetycznej (*shrinkage of the gap*) [46].

Linia *4* występuje tylko przy pomiarach katodoluminescencji i jest interpretowana jako przejścia typu poziom donorowy — pasmo walencyjne.

Linia *5* odpowiada zjawiskom elektroluminescencyjnym. Jest ona zbliżona kształtem, choć nieco przesunięta, do linii *3*. Było to powodem przypisywania jej przejściom typu poziom donorowy — poziom akceptorowy [3, 26, 74]. Jak się jednak okaże w rozdziałach następnych, proces ten jest znacznie bardziej skomplikowany.

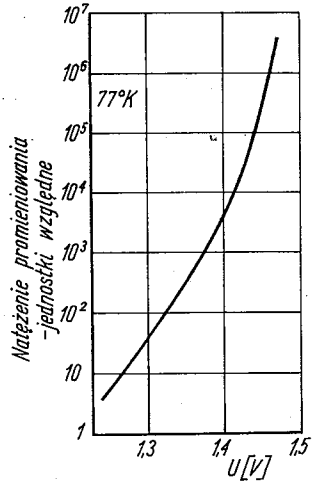
Obecność kilku wierzchołków w charakterystykach widmowych GaAs świadczy o istnieniu różnych mechanizmów rekombinacji promienistej. Wyjaśnia się je przeważnie jako przejścia typu pasmo przewodnictwa (lub ogon pasma przewodnictwa) — różne poziomy akceptorowe (np. [70]).

Ostatnio B. Darek i M. Bugajski [75] opublikowali wyniki badań wpływu obróbki ter-

micznej na widmo FL GaAs typu *n* w temperaturze 77°K. Dominujące pasmo luminescencji otrzymane w niewygrzewanych kryształach przypisali głębokim centrom, tworzonym przez lukę po galu z donorem, podstawiającym się w miejsce galu lub arsenu. Podobnie interpretowali to zjawisko również H. Kressel i in. [37, 62] oraz E. W. Williams [76]. Wygrzewanie w próżni powoduje powstawanie nowych typów centrów, za które jest odpowiedzialna obecność luk galowych oraz atomów miedzi, pochodzących z rury kwarcowej, w której przeprowadzano wygrzewanie. Obróbka termiczna była wykonywana w identycznych warunkach, w jakich przeprowadza się dyfuzję cynku w celu wytworzenia złącza *n-p* w GaAs. Centra defektorowe, formujące się w tym procesie, mogą więc mieć istotny wpływ na przebieg procesów rekombinacyjnych w złączu.

4. REKOMBINACJA PROMIENISTA W ZŁĄCZU *n-p* WYKONANYM W SILNIE DOMIESZKOWANYM PÓŁPRZEWODNIKU — MODEL R. J. ARCHERA I IN. [53]

Wyjaśnienie obecności dwóch wierzchołków charakterystyki z rys. 4 dała analiza zależności (pokazanej na rys. 6) natężenia wierzchołka widma emisyjnego diody elektroluminescencyjnej z GaAs od przyłożonego do niej napięcia. Na wykresie tym można odróżnić dwa wyraźne odcinki prostoliniowe o różnym nachyleniu. W pierwszym zakresie napięć, dla



Rys. 6. Zależność natężenia promieniowania DEL GaAs od napięcia na diodzie w temperaturze 77°K [53]

1,23 V $< U <$ 1,37 V (gdzie U — spadek napięcia na diodzie), natężenie promieniowania jest dane związkiem [53]:

$$J = J_0 \exp(S_A U), \tag{1}$$

gdzie: J_0 — stały współczynnik, a $S_A = 42\ \mathrm{V}^{-1}$.

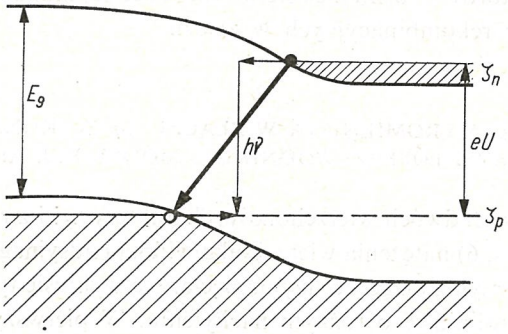
W analogicznym związku dla drugiego zakresu, czyli dla $U >$ 1,37 V, nachylenie drugiego odcinka prostoliniowego z rys. 6 wynosi $S_B = 100\ \mathrm{V}^{-1}$. Niezwykle istotnym było spostrzeżenie, że wartości współczynników S_A i S_B są niezależne od temperatury. Wyklucza to udział dyfuzji w omawianym procesie, ponieważ dla niej nachylenie S powinno być odwrotnie proporcjonalne do temperatury. Z drugiej strony wyraźny podział charakte-

rystyki na dwa odcinki prostoliniowe sugeruje, że istnieją dwa różne mechanizmy przenoszenia nośników przez złącze. Modele obu tych procesów, zaproponowane po raz pierwszy przez R. J. Archera i in. [53], są przedstawione poniżej.

a) Tunelowanie z udziałem fotonu

the photon-assisted tunneling [46, 50, 51, 53, 56, 77—82]

W procesie tym zachodzi zjawisko równoczesnego tunelowania elektronu z pasma przewodnictwa obszaru *n* i dziury z pasma walencyjnego obszaru *p* na poziomy wirtualne w obszarze złącza, gdzie następuje proces rekombinacji promienistej. Ilustruje to rys. 7. Ze



Rys. 7. Tunelowanie elektronu i dziury z udziałem fotonu

ζ_n i ζ_p — quasi-poziomy Fermiego odpowiednio dla elektronów i dziur, E_g — szerokość przerwy energetycznej, $h\nu$ — energia emitowanego kwantu promieniowania, U — napięcie polaryzujące złącze, e — ładunek elektronu. Stany zajęte przez elektrony zostały zakreskowane [56]

względu na kierunek ruchu elektronu na modelu pasmowym złącza podczas rekombinacji zjawisko to nosi też nazwę tunelowania skośnego (*the diagonal tunneling*). Słuszność tego modelu została potwierdzona obliczeniami teoretycznymi przy zastosowaniu teorii L. V. Keldyša [83—84], z pomocą której obliczono nachylenie charakterystyki z rys. 6 w tym zakresie napięć. Otrzymana wartość $S_A^{obl} = 47\ V^{-1}$ zgadza się dobrze z wynikiem eksperymentu. Powyższy proces jest odpowiedzialny za mniej pochylony, prostoliniowy odcinek charakterystyki na rys. 6 oraz za pierwszy, szybko przesuwający się wierzchołek charakterystyki z rys. 4.

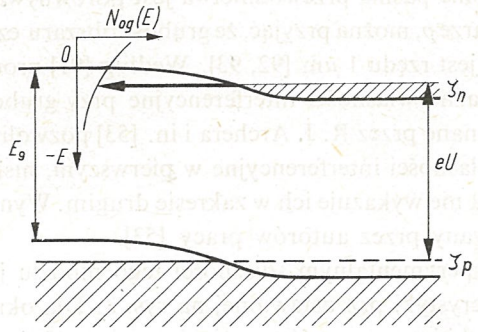
Wzrost pobudzenia oddala od siebie quasi-poziomy Fermiego. Zwiększa się więc (statystycznie) odległość w skali energii między rekombinującymi nośnikami i wierzchołek charakterystyki ze zmianą napięcia szybko się przesuwa.

b) Wypełnianie ogonów pasm

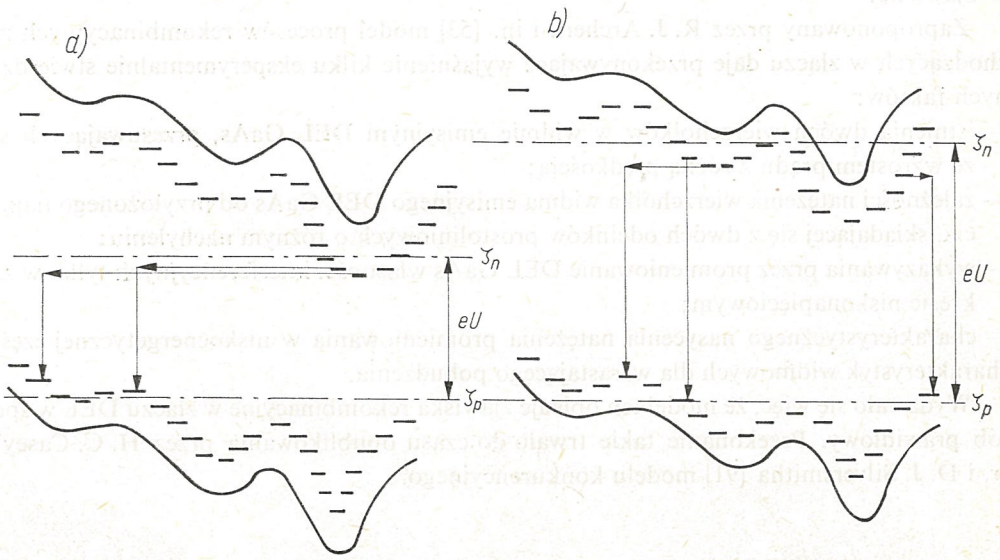
(*the band-filling model*) [46, 50, 51, 53, 56, 78, 79, 81, 82, 85—88]

Rekombinacja promienista przez wypełnianie ogonów pasm składa się z dwóch procesów: poziomego tunelowania elektronu z pasma przewodnictwa materiału typu *n* do stanów w ogonie pasma przewodnictwa materiału typu *p* i następnie rekombinacji z udziałem fotonu elektronu i dziury z ogonów obu pasm dozwolonych półprzewodnika typu *p*. Dzięki temu pierwszemu procesowi, przedstawionemu na rys. 8, zjawisko to nosi też nazwę tunelowania poziomego (*the horizontal tunneling*). Wierzchołki potencjału pasma walencyjnego nie pokrywają się w obszarze półprzewodnika z dolinami potencjału pasma przewodnictwa [1]. Dlatego przy małym stopniu pobudzenia (rys. 9a) tunelowanie z udziałem fotonu musi zachodzić na stosunkowo duże odległości. Jest więc ono mało prawdopodobne

i wysokość wierzchołka charakterystyki z rys. 4, odpowiadającego temu typowi rekombinacji, jest znikoma. Ze wzrostem pobudzenia zwiększa się ilość poziomów w ogonach pasm, mogących wziąć udział w rekombinacji, proces tunelowania zachodzi na mniejszych odległościach (rys. 9b) (możliwa staje się nawet rekombinacja zlokalizowana) i odpowiedni wierz-



Rys. 8. Tunelowanie poziome elektronu z pasma przewodnictwa materiału typu *n* do stanów w ogonie pasma przewodnictwa materiału typu *p*
$N_{og}(E)$ — rozkład gęstości stanów w ogonie pasma przewodnictwa [56]



Rys. 9. Tunelowanie elektronu z udziałem fotonu w obszarze półprzewodnika (a) słabo i (b) silnie pobudzonego
Krótkimi kreskami oznaczono poziomy domieszkowe [50]

chołek charakterystyki szybko rośnie. Jednocześnie następuje też jego przesunięcie w stronę wyższych energii.

Niektórzy autorzy [82, 89, 90] zakładają, że wypełnianie ogonów pasm przez tunelowanie poziome zachodzi tylko w niskich temperaturach, w wysokich natomiast przeważa wstrzykiwanie termiczne. Hipoteza ta została między innymi potwierdzona pomiarami wykonanymi przez B. Darka [82].

Głównym czynnikiem różniącym oba powyższe procesy a) i b) jest obszar, w którym zachodzi rekombinacja promienista. W przypadku tunelowania z udziałem fotonu obszar ten pokrywa się z warstwą zubożoną, podczas gdy dla procesu wypełniania ogonów pasm rekombinacja występuje po stronie p złącza. Typowa grubość warstwy zubożonej diody elektroluminescencyjnej (DEL) wynosi mniej niż 1000 Å [91]. Jeśli długość przejścia elektronów do stanów w ogonie pasma przewodnictwa jest porównywalna z elektronową drogą dyfuzji mierzoną w obszarze p, można przyjąć, że grubość obszaru czynnego dla procesu wypełniania ogonów pasm jest rzędu 1 μm [92, 93]. Według [91] promieniowanie emitowane przez DEL posiada wyraźne własności interferencyjne przy grubości warstwy czynnej do ca 600 Å. Pomiary wykonane przez R. J. Archera i in. [53] pozwoliły stwierdzić, że promieniowanie to wykazuje własności interferencyjne w pierwszym, niskonapięciowym zakresie charakterystyki z rys. 4, a nie wykazuje ich w zakresie drugim. Wynik ten potwierdza model teoretyczny zaproponowany przez autorów pracy [53].

Innym dowodem eksperymentalnym słuszności tego modelu jest kształt niskoenergetycznego ogona charakterystyki przedstawionej na rys. 3. Dla określonej wartości energii w tej części charakterystyki intensywność promieniowania praktycznie nie zależy od pobudzenia, wykazując nasycenie. Odzwierciedla to kształt funkcji gęstości stanów w ogonach pasm materiału typu p. Proces wypełniania ogonów pasm tłumaczy więc w prosty sposób to zjawisko.

Zaproponowany przez R. J. Archera i in. [53] model procesów rekombinacyjnych zachodzących w złączu daje przekonywające wyjaśnienie kilku eksperymentalnie stwierdzonych faktów:

— istnienia dwóch wierzchołków w widmie emisyjnym DEL GaAs, przesuwających się ze wzrostem prądu z różną prędkością;

— zależności natężenia wierzchołka widma emisyjnego DEL GaAs od przyłożonego napięcia, składającej się z dwóch odcinków prostoliniowych o różnym nachyleniu;

— wykazywania przez promieniowanie DEL GaAs własności interferencyjnych tylko w zakresie niskonapięciowym;

— charakterystycznego nasycenia natężenia promieniowania w niskoenergetycznej części charakterystyk widmowych dla wzrastającego pobudzenia.

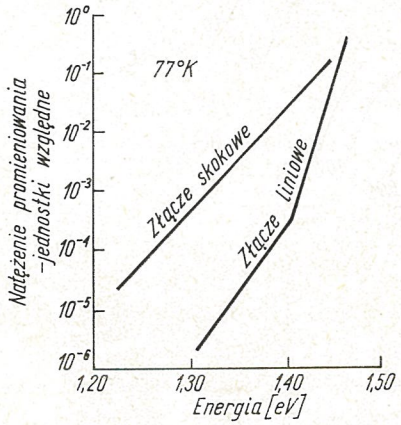
Wydawało się więc, że model ten opisuje zjawiska rekombinacyjne w złączu DEL w sposób prawidłowy. Przekonanie takie trwało do czasu opublikowania przez H. C. Casey'a Jr. i D. J. Silversmitha [91] modelu konkurencyjnego.

5. WYJAŚNIENIE ZJAWISK REKOMBINACYJNYCH WYSTĘPUJĄCYCH W DIODZIE ELEKTROLUMINESCENCYJNEJ GaAs WYŁĄCZNIE ZA POMOCĄ PROCESU TUNELOWANIA Z UDZIAŁEM FOTONU — MODEL H. C. CASEY'A, JR. I D. J. SILVERSMITHA [91]

a) DEL GaAs ze złączem skokowym

H. C. Casey, Jr. i D. J. Silversmith badali widma emisyjne DEL GaAs ze złączem skokowym i liniowym. Na rys. 10 przedstawiono otrzymaną przez nich zależność natężenia maksimów widm emisyjnych od energii fotonów, dla której one występują w obu tych

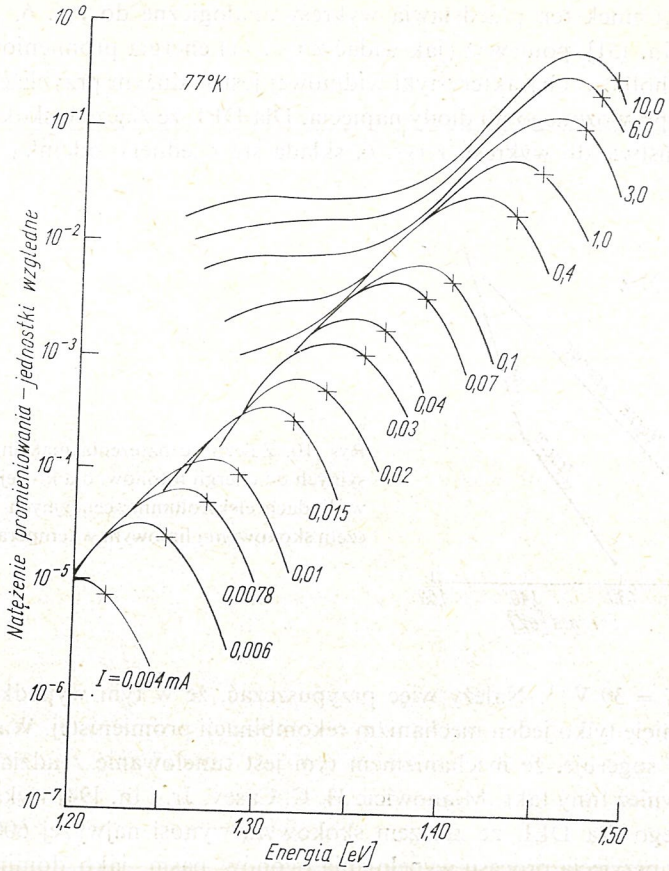
przypadkach. Rysunek ten przedstawia wykresy analogiczne do rys. 6, podanego przez R. J. Archera i in. [51], ponieważ (jak widać z rys. 11) energia promieniowania odpowiadającego wierzchołkowi charakterystyki widmowej jest w dużym przybliżeniu wprost proporcjonalna do przyłożonego do diody napięcia. Dla DEL ze złączem skokowym zależność ta, w przeciwieństwie do wykresu z rys. 6, składa się z jednego odcinka prostoliniowego



Rys. 10. Zależność natężenia maksimów widm emisyjnych od energii fotonów, dla której one występują, w diodach elektroluminescencyjnych z GaAs ze złączem skokowym i liniowym w temperaturze 77°K [91]

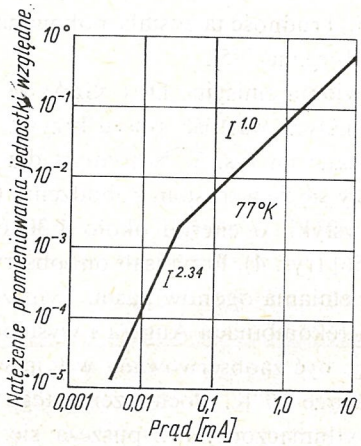
o nachyleniu $S = 39\ V^{-1}$. Należy więc przypuszczać, że w tym wypadku w całym zakresie napięć istnieje tylko jeden mechanizm rekombinacji promienistej. Wartość nachylenia charakterystyki sugeruje, że mechanizmem tym jest tunelowanie z udziałem fotonu. Potwierdza to również inny fakt. Mianowicie H. C. Casey, Jr. i in. [94] wykazali, że grubość obszaru czynnego dla DEL ze złączem skokowym wynosi najwyżej 600 Å, co wyklucza możliwość przyjęcia procesu wypełniania ogonów pasm, jako dominującego mechanizmu rekombinacji. Jednakże przyjęcie tunelowania z udziałem fotonu jako jedynego zjawiska odpowiedzialnego za rekombinację promienistą w tych diodach nie pozwalało na wytłumaczenie szeregu faktów eksperymentalnych, tak przekonywująco wyjaśnionych przez model R. J. Archera i in. Trudność ta została pokonana za pomocą analizy teoretycznej opartej na teorii T. N. Morgana [95].

Na rys. 11 przedstawiono widma emisyjne DEL GaAs ze złączem skokowym dla różnych stopni pobudzenia. Dla małych wartości prądu krzywe posiadają jeden wierzchołek i przypominają zależności podane na rys. 3. Natomiast dla dużych prądów zaczyna się wyłaniać drugi nie przesuwający się ze wzrostem pobudzenia (lub przesuwający się bardzo wolno) wierzchołek charakterystyki, o energii około 1,30 eV. Podobne krzywe zarejestrowali R. C. C. Leite i in. [56] (rys. 4). Przypisali oni obserwowany wolno przesuwający się wierzchołek procesowi wypełniania ogonów pasm. Tymczasem M. I. Nathan i in. [96] wyjaśnili, że jest on wynikiem rekombinacji Augera i występuje tylko dla temperatur poniżej 30°K [91]. Nie mógł więc być zaobserwowany w tym wypadku, ponieważ pomiary były dokonywane w temperaturze 77°K. Pochodzenie tego rozmytego wierzchołka nie zostało dotąd definitywnie wytłumaczone. Przypuszcza się, że może on być wynikiem udziału w rekombinacji promienistej stanów w ogonach pasm. Zagadnienie to zostało rozpatrzone dokładniej w rozdziale 6.



Rys. 11. Widma emisyjne diody elektroluminescencyjnej z GaAs ze złączem skokowym w temperaturze 77°K dla różnych prądów. Koncentracja elektronów $n = 1{,}74 \cdot 10^{18}$ cm^{-3}

Krzyżykami oznaczono wartości eU, gdzie U — napięcie przyłożone do diody [91]

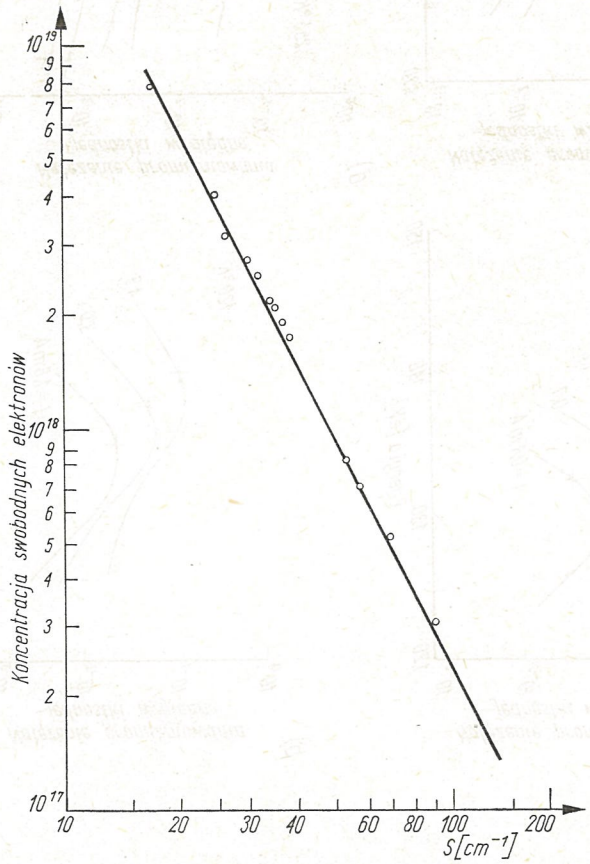


Rys. 12. Zależność natężenia maksimów widm emisyjnych DEL GaAs ze złączem skokowym od przepływającego przez diodę prądu [91]

Kolejnym potwierdzeniem prawidłowości opisu procesów rekombinacyjnych w DEL GaAs ze złączem skokowym jest fakt, że wytwarzane promieniowanie wykazuje własności interferencyjne w całym zakresie napięć, co eliminuje proces wypełniania ogonów pasm.

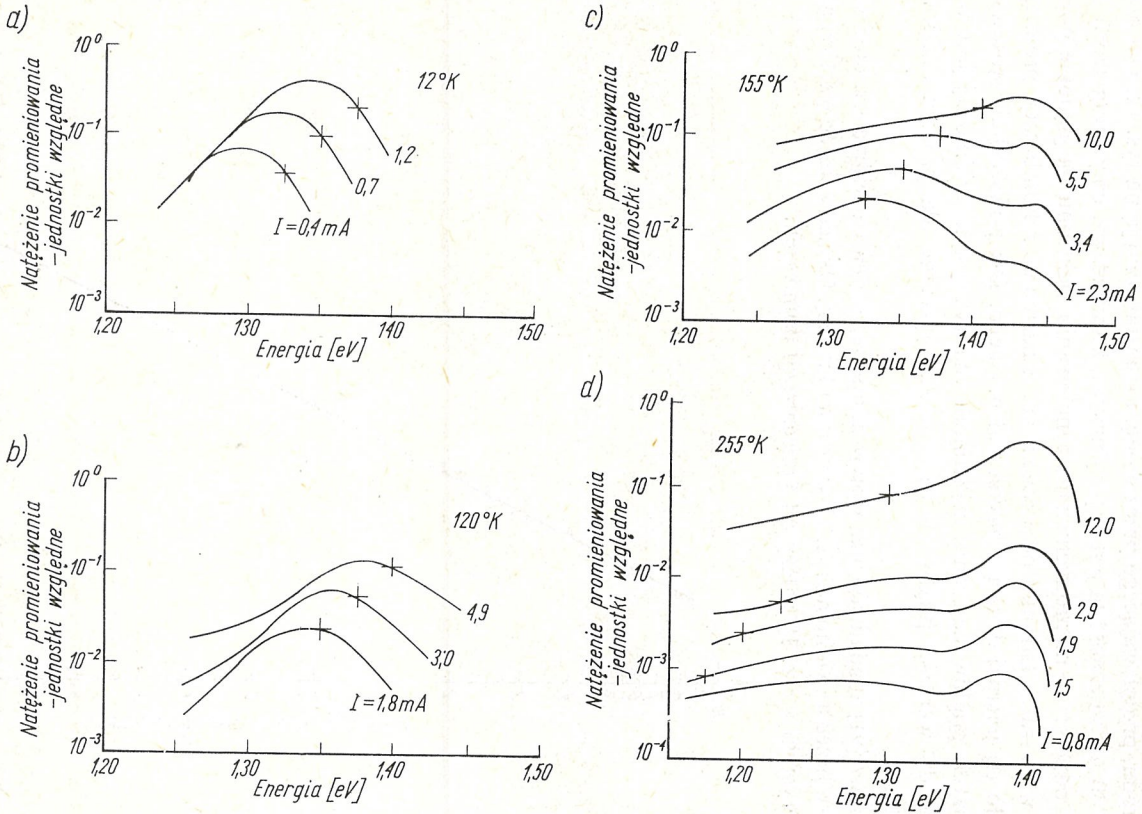
Innym dowodem słuszności modelu cytowanych autorów dla interesującego nas zakresu prądów może być kształt zależności maksimum natężenia charakterystyki widmowej od wartości prądu, przepływającego przez diodę. Przedstawiono ją na rys. 12. Dla prądów w zakresie $4 \div 40$ μA zależność ta jest w przybliżeniu kwadratowa, co według teorii T. N. Morgana [95] odpowiada niepromienistemu tunelowaniu elektronu na głębokie poziomy domieszkowe w obszarze ładunku przestrzennego, a następnie rekombinacji promienistej z tunelującą do tej pułapki dziurą z pasma walencyjnego. Dla powszechnie stosowanego zakresu większych prądów natężenie maksimum charakterystyki widmowej jest wprost proporcjonalne do wartości prądu, co jest charakterystyczne dla procesu tunelowania z udziałem fotonu.

Autorzy pracy [91] zbadali również wpływ domieszkowania na widma EL diod GaAs. Wynik pomiaru przedstawiono na rys. 13 w postaci kropek. Okazało się, że wartość nachylenia charakterystyki z rys. 10 zależy od koncentracji domieszek.



Rys. 13. Nachylenie prostoliniowego wykresu z rys. 10 dla DEL GaAs ze złączem skokowym w funkcji koncentracji swobodnych elektronów

Kropkami oznaczono wyniki pomiarów, linia prosta odpowiada zależności teoretycznej [91]

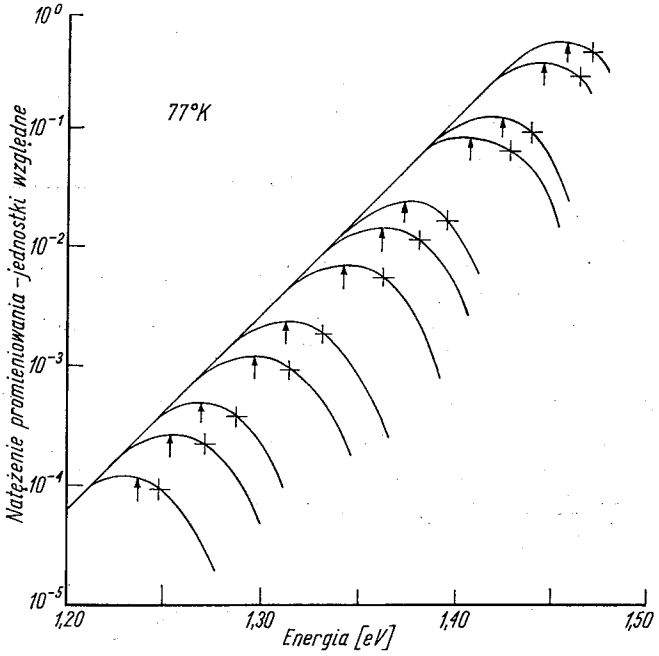


Rys. 14. Widma emisyjne diody elektroluminescencyjnej z GaAs ze złączem skokowym dla różnych prądów i w różnych temperaturach. Koncentracja elektronów $n = 1{,}74 \cdot 10^{18}$ cm^{-3}

Krzyżykami oznaczono wartości eU, gdzie U — napięcie przyłożone do diody [91]

Badano też wpływ temperatury otoczenia na chyrakterystyki widmowe. Wyniki pomiarów przedstawiono na rys. 14. Dla niskich temperatur do około 120°K, energia wierzchołka widma emisyjnego $h\nu_p$ jest zawsze mniejsza od eU, gdzie U — przyłożone napięcie. Począwszy od 155°K zaczyna się pojawiać wysokoenergetyczny, nieprzesuwający się wierzchołek charakterystyki, dla którego $h\nu_p > eU$. Wierzchołek ten jest wynikiem termicznego wstrzykiwania nośników przez złącze, co potwierdziły prace [82, 89, 90].

H. C. Casey, Jr. i D. J. Silversmith, stosując wzory podane przez T. N. Morgana, obliczyli zgodnie ze swoim modelem widma emisyjne DEL ze złączem skokowym dla różnych koncentracji domieszek, temperatur i przyłożonych napięć. Wyniki tych obliczeń dla $n = 1{,}74 \cdot 10^{18}$ elektronów/cm^3 w 77°K i napięć takich samych, jak na rys. 11 przedstawiono na rys. 15. Strzałki wskazują pozycję odpowiednich wierzchołków otrzymanych w wyniku pomiarów (rys. 11), a krzyżyki wartości eU. Porównanie rys. 11 z rys. 15 pozwala stwierdzić



Rys. 15. Obliczone teoretycznie widma emisyjne DEL GaAs ze złączem skokowym w temperaturze 77°K dla koncentracji elektronów $n = 1{,}74 \cdot 10^{18}$ cm^{-3}

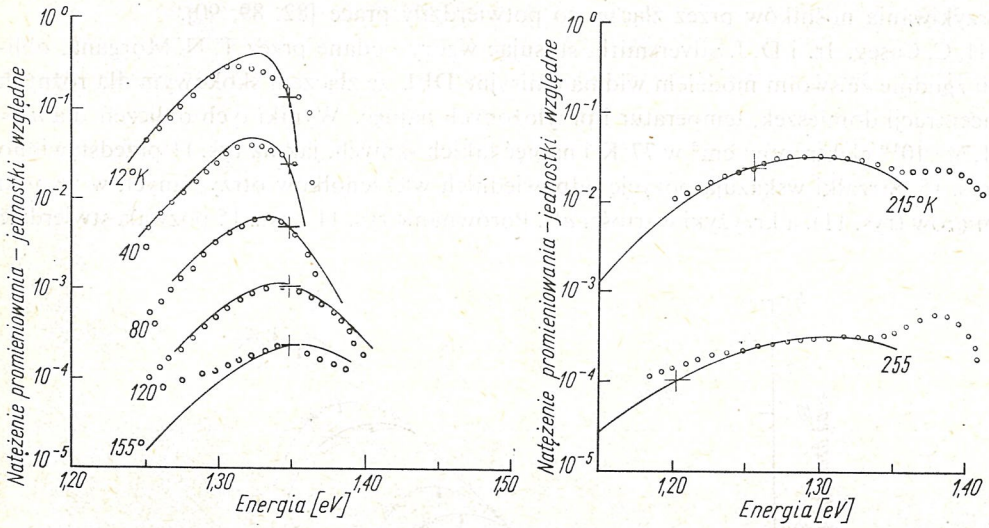
Spadki napięcia U na diodzie przyjęto takie same, jakie uzyskano w pomiarach, których wyniki przedstawiono na rys. 11. Krzyżykami oznaczono wartości eU, a strzałkami położenie odpowiednich wierzchołków charakterystyki eksperymentalnej [91]

zadziwiającą zgodność obliczeń teoretycznych z danymi eksperymentalnymi. Jedyną różnicę stanowi niskoenergetyczny wierzchołek charakterystyki eksperymentalnej, pojawiający się dla dużych stopni pobudzenia. Jak już wspomniano, pochodzenie tego wierzchołka nie zostało jeszcze ostatecznie wyjaśnione.

Takie same obliczenia wykonali wcześniej A. È. Junovič i A. B. Ortmont [97]. Otrzymali oni wyniki analogiczne, z wyjątkiem nasycenia w niskoenergetycznej części widma. Spowodowane to było przyjęciem przez nich dla warstwy zubożonej liniowej zależności

potencjału od przesunięcia, podczas gdy T. N. Morgan [95] stosował zależność paraboliczną.

Podobną zgodność otrzymano również w przypadku obliczeń dla innych wartości temperatury otoczenia (rys. 16). W tym wypadku jedyną istotną różnicą był fakt występowania w charakterystykach eksperymentalnych dla dużych temperatur nieprzewidzianego teoretycznie wierzchołka wysokoenergetycznego, o czym już wspominano.



Rys. 16. Widma emisyjne DEL GaAs ze złączem skokowym w różnych temperaturach dla koncentracji elektronów $n = 1{,}74 \cdot 10^{18}$ cm^{-3}

Kropkami oznaczono charakterystyki eksperymentalne, natomiast linie ciągłe odpowiadają zależnościom teoretycznym. Krzyżykami zaznaczono wartości eU [91]

Obliczono też zależność nachylenia charakterystyki z rys. 10 od koncentracji. Przedstawiono ją wraz z wynikami eksperymentalnymi na rys. 13. Otrzymana zgodność nie wymaga dodatkowego omówienia.

b) DEL GaAs ze złączem liniowym

Na rys. 10 podano wykres wartości natężenia wierzchołka widma emisyjnego w funkcji przyłożonego napięcia dla DEL ze złączem liniowym. Wykres ten składa się z dwóch odcinków prostoliniowych o nachyleniu 48 V^{-1} dla napięć poniżej 1,37 V i 110 V^{-1} powyżej tej granicy. Przypomina to bardzo zależność przewidywaną w modelu R. J. Archera i in. [53], a przedstawioną na rys. 6. Wykresy te można z pewnymi zastrzeżeniami porównywać, ponieważ, o czym już wspominano, energia fotonów, dla których występuje maksimum widma emisyjnego, jest w dużym przybliżeniu wprost proporcjonalna do przyłożonego do diody napięcia. Zgodnie z modelem R. J. Archera i in. promieniowanie DEL ze złączem liniowym wykazywało własności interferencyjne tylko w zakresie niskonapięciowym. Jednakże również w tym przypadku H. C. Casey, Jr. i D. J. Silversmith potrafili wyjaśnić te fakty bez uwzględniania procesu wypełniania ogonów pasm.

Mianowicie założyli oni zgodnie z sugestiami T. N. Morgana, że w zakresie niskonapięciowym zachodzi rekombinacja promienista typu pasmo-domieszka, natomiast w wysokonapięciowym, podobnie jak dla DEL ze złączem skokowym — pasmo-pasmo. Widma emisyjne, obliczone teoretycznie przy tym założeniu, zgadzają się w przybliżeniu z otrzymanymi eksperymentalnie dla obu zakresów napięć.

Dodatkowym potwierdzeniem opisywanego modelu jest teoretyczne obliczenie stosunku nachyleń obu prostych z rys. 10. Otrzymana wartość $\gamma_{obl} = 0{,}455$ dobrze zgadza się z wartością doświadczalną $\gamma_{dos} = 48/110 \simeq 0{,}435$.

Pozostało jeszcze wyjaśnienie, dlaczego promieniowanie wykazuje dla tego przypadku własności interferencyjne tylko w zakresie niskonapięciowym. Pomocna okazała się znowu teoria T. N. Morgana [95]. Według wyprowadzonych w pracy [95] wzorów szerokość obszaru czynnego dla przejść pasmo-pasmo w przypadku złącza liniowego jest ponad dwukrotnie większa od tej szerokości dla przejść pasmo-domieszka. Obszar czynny dla pierwszego rodzaju przejść może więc rozszerzać się w głąb warstw typu n i p [91]. Z drugiej strony wiadomo, że dla szerokości tego obszaru powyżej 1000 Å [91] promieniowanie przestaje wykazywać własności interferencyjne. Proponowany model tłumaczy więc również to zjawisko.

6. INTERPRETACJA WYNIKÓW EKSPERYMENTALNYCH

Teoria H. C. Casye'a i D. J. Silversmitha wyklucza w rekombinacji promienistej w DEL GaAs udział procesu wypełniania ogonów pasm; tak więc przewidywane przez nią charakterystyki widmowe pozornie powinny być niezależne od poziomu domieszkowania, co jest w sprzeczności z wykresem z rys. 5. Zależność taka jednak istnieje, ponieważ występuje ścisły związek pomiędzy wysokością bariery potencjału w złączu a napięciem dyfuzyjnym [98], które jest funkcją poziomu domieszkowania [99, 100].

Natężenie promieniowania spontanicznego, emitowanego w procesie tunelowania z udziałem fotonu, można przedstawić w funkcji energii w sposób następujący [4]:

$$J(E) = CB_{np}(E) \int N_n(E_p) N_p(E_p - E) dE_p, \tag{2}$$

gdzie:

$N_n(E)$ — rozkład koncentracji elektronów w pasmie przewodnictwa materiału typu n,

$N_p(E)$ — rozkład koncentracji dziur w pasmie walencyjnym materiału typu p,

$B_{np}(E)$ — prawdopodobieństwo przejścia,

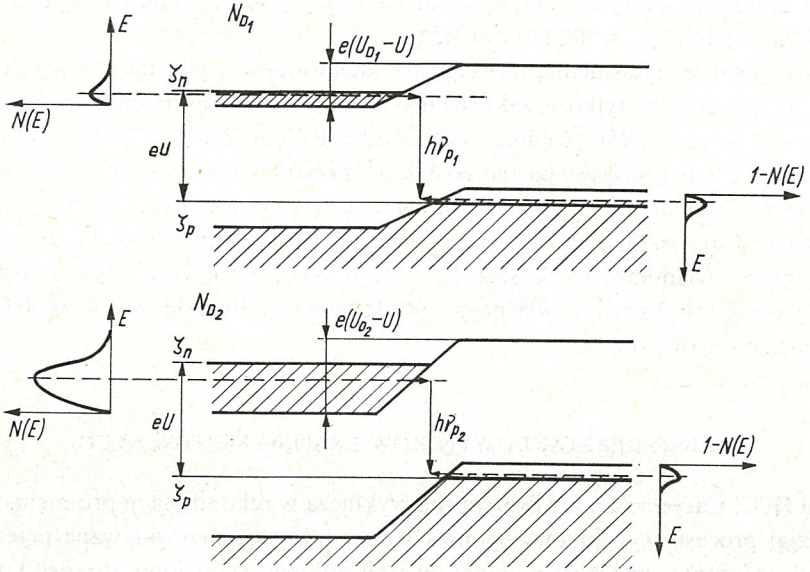
E_p — energia stanu początkowego,

C — współczynnik proporcjonalności.

Wierzchołek charakterystyki widmowej promieniowania będzie odpowiadał w przybliżeniu odległości w skali energii między maksymalnymi wartościami w rozkładach elektronów w pasmie przewodnictwa materiału typu n i dziur w pasmie walencyjnym materiału typu p. Wzrost koncentracji donorów w obszarze n powoduje zwiększenie napięcia dyfuzyjnego [99], a więc zmianę wysokości i kształtu bariery potencjału. Wynikiem tego jest zmiana rozkładu elektronów w pasmie przewodnictwa obszaru n i w efekcie zmniejszenie

energii $h\nu_p$, odpowiadającej wierzchołkowi charakterystyki widmowej promieniowania (rys. 17). Sumaryczny efekt jest minimalny, wyjaśnia jednak kształt zależności z rys. 5.

Jak już wspomniano, model H. C. Casey'a, Jr. i D. J. Silversmitha [91] nie przewiduje eksperymentalnie obserwowanych wierzchołków wysoko- i niskoenergetycznego. Nie mogą być więc one wynikiem procesu tunelowania z udziałem fotonu.



Rys. 17. Wpływ zmiany koncentracji donorów N_D w materiale typu n diody elektroluminescencyjnej z GaAs na proces tunelowania elektronu i dziury z udziałem fotonu

U_{D_1} i U_{D_2} — napięcia dyfuzyjne odpowiednio dla koncentracji donorów N_{D_1} i N_{D_2}, gdzie $N_{D_1} \ll N_{D_2}$

Wierzchołek wysokoenergetyczny został przypisany klasycznemu ponadbarierowemu wstrzykiwaniu elektronów do pasma przewodnictwa materiału typu p [82, 89, 90] i ich rekombinacji w pobliżu warstwy zubożonej.

Pojawienie się wierzchołka niskoenergetycznego można wyjaśnić za pomocą zarzuconego przez autorów pracy [91] procesu wypełniania ogonów pasm. Względna intensywność tego wierzchołka na otrzymanych doświadczalnie charakterystykach widmowych rośnie:

a) ze wzrostem przyłożonego napięcia,

b) ze zmniejszaniem koncentracji domieszek materiału typu n,

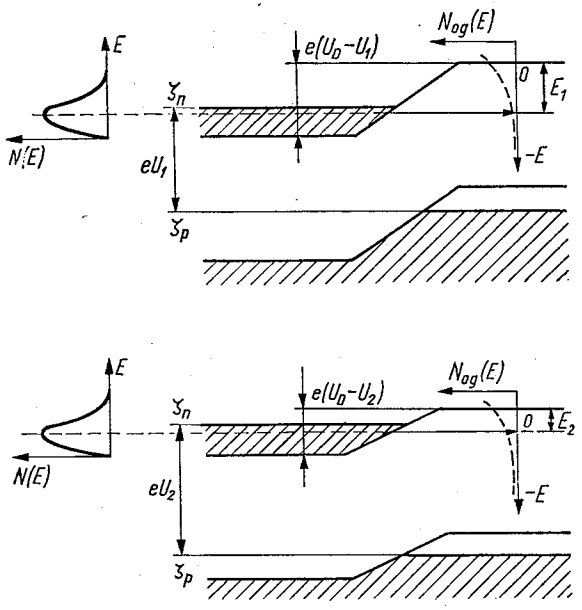
c) ze wzrostem temperatury.

ad a) Ilość tunelowych przejść R_{np} elektronów o energii E w jednostce czasu na stany w ogonie pasma przewodnictwa materiału typu p jest w przybliżeniu wprost proporcjonalna do iloczynu funkcji $N(E)$ rozkładu elektronów w pasmie przewodnictwa materiału typu n, funkcji $N_{og}(E)$ rozkładu stanów w ogonie pasma przewodnictwa materiału typu p i funkcji $X(E)$ prawdopodobieństwa nieobsadzenia tych stanów:

$$R_{np}(E) \simeq C'N(E)N_{og}(E)X(E), \tag{3}$$

gdzie C' — współczynnik proporcjonalności.

Gęstość stanów w ogonie pasma maleje bardzo szybko ze wzrostem odległości w skali energii w głąb przerwy energetycznej [1]. Wzrost napięcia, przyłożonego do diody elektroluminescencyjnej, przy pozostałych parametrach stałych, powoduje zmniejszenie wysokości bariery potencjału dla elektronów w pasmie przewodnictwa materiału typu n. W związku z tym maksymalna wartość koncentracji elektronów w tym pasmie odpowiada stanom w ogonie pasma przewodnictwa materiału typu p leżącym w mniejszej odległości w skali energii od krawędzi pasma. Gęstość tych stanów jest więc znacznie większa, większe jest też prawdopodobieństwo, że stany te są nieobsadzone. Stąd rośnie ilość tunelowych przejść na stany w ogonie i w efekcie wzrasta natężenie wierzchołka niskoenergetycznego. Zjawisko to ilustruje rys. 18.



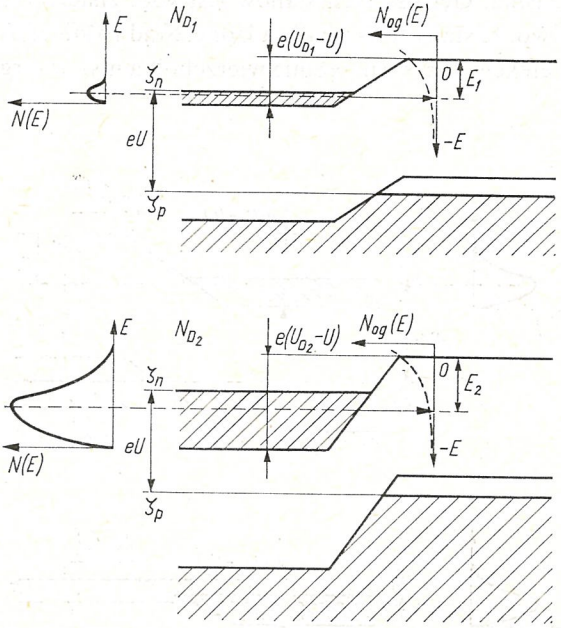
Rys. 18. Wpływ wzrostu przyłożonego do diody napięcia na proces wypełniania ogonów pasm
Przez $N_{og}(E)$ oznaczono rozkład gęstości stanów w ogonie pasma przewodnictwa materiału typu p

ad b) Zmiana koncentracji domieszek powoduje zmianę wartości napięcia dyfuzyjnego, a co za tym idzie zmianę wysokości bariery potencjału. Sumaryczny efekt jest więc podobny do przypadku zmiany przyłożonego do diody napięcia, z tym, że teraz wzrost koncentracji powoduje względne zmniejszenie w jednostce czasu ilości przejść tunelowych na stany w ogonie, tym bardziej, że jednocześnie bardzo zwiększa się ilość przejść tunelowych z udziałem fotonu — wzór (2). Wyjaśnia to rys. 19.

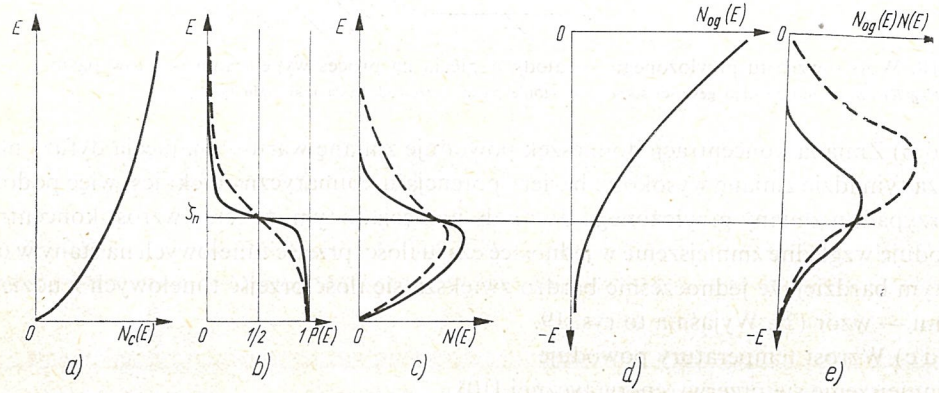
ad c) Wzrost temperatury powoduje
— zmniejszenie się przerwy energetycznej [101],
— zmianę napięcia dyfuzyjnego [102, 103],
— zmianę rozkładu nośników w pasmach [104].
Pierwsze dwa efekty będą w dalszych rozważaniach pominięte — zmniejszenie się przerwy energetycznej jest stosunkowo małe, około $5 \cdot 10^{-4}$ eV/°K [105, 106], natomiast zmiana

napięcia dyfuzyjnego zależy od zakresu temperatury, stopnia kompensacji i poziomu domieszkowania [102, 103]. Sumarycznie dla interesującego nas przypadku zmiany powodowane przez te oba czynniki będą zachodziły w tym samym kierunku, co wywołane przez trzeci, którego wpływ będzie jednak znacznie większy.

Wzrost temperatury powoduje „rozmycie" funkcji rozkładu elektronów w pasmie



Rys. 19. Wpływ wzrostu koncentracji donorów N_D w materiale typu n diody elektroluminescencyjnej z GaAs na proces wypełniania ogonów pasm, $N_{D_2} \gg N_{D_1}$



Rys. 20. Wpływ temperatury otoczenia na wartość iloczynu $N(E)N_{og}(E)$ — (*e*) w diodzie elektroluminescencyjnej z GaAs

(a) — rozkład gęstości stanów $N_C(E)$ w pasmie przewodnictwa materiału typu n, (b) — prawdopodobieństwo $P(E)$ obsadzenia przez elektrony stanów w pasmie przewodnictwa, (c) — funkcja rozkładu $N(E)$ koncentracji elektronów, (*d*) — rozkład gęstości stanów $N_{og}(E)$ w ogonie pasma przewodnictwa materiału typu p. ζ_n — quasi-poziom Fermiego dla elektronów w pasmie przewodnictwa materiału typu n. Krzywe kreskowe odpowiadają wyższej temperaturze.

przewodnictwa materiału typu n — więcej elektronów będzie posiadać stosunkowo duże energie kinetyczne (rys. 20c). Po drugiej stronie złącza, w materiale typu p, energiom tym będzie odpowiadała znacznie większa gęstość stanów w ogonie pasma przewodnictwa (rys. 20d), szybko rosnąca w miarę zbliżania się do krawędzi pasma. Ilość przejść tunelowych na stany w ogonie pasma jest zgodnie ze wzorem (3) proporcjonalna do iloczynu $N(E)N_{og}(E)$, który dla energii nieco większej od quasi-poziomu Fermiego dla elektronów znacznie wzrośnie (rys. 20e). Jeszcze większy wzrost R_{np} daje uwzględnienie rozkładu funkcji prawdopodobieństwa $X(E)$. W efekcie obserwuje się ze zwiększeniem temperatury wzrost wysokości wierzchołka niskoenergetycznego. Kształt wykresu z rys. 20e tłumaczy też rozmycie charakterystyki widmowej po stronie niskoenergetycznej, uwidaczniające się przy wysokich temperaturach (rys. 14d).

7. PODSUMOWANIE

Opierając się na wynikach eksperymentalnych oraz modelach R. J. Archera i in. [53] i H. C. Casey'a, Jr. i D. J. Silversmitha [91] można stwierdzić, że najprawdopodobniej w diodach elektroluminescencyjnych istnieje równolegle kilka kanałów rekombinacyjnych, z których najbardziej wydajnymi są tunelowanie z udziałem fotonu (rys. 17), wypełnianie ogonów pasm (rys. 18) oraz rekombinacja promienista elektronów wstrzykiwanych termicznie do obszaru p. W niskich temperaturach otoczenia dominuje pierwszy z tych procesów, a udział pozostałych zależy od temperatury, koncentracji domieszek i przyłożonego napięcia. Natomiast w zakresie wysokich temperatur (np. pokojowej) najbardziej intensywny staje się proces rekombinacji elektronów wstrzykiwanych termicznie.

Istnieją również inne mechanizmy rekombinacji promienistej w DEL. Dla prądów w zakresie $4 \div 40$ μA H. C. Casey i D. J. Silversmith [91] obserwowali proces niepromienistego tunelowania elektronu na głębokie poziomy domieszkowe w obszarze ładunku przestrzennego, a następnie rekombinację promienistą z tunelującą do tej pułapki dziurą z pasma walencyjnego.

W przypadku diod ze złączem liniowym cytowani autorzy przypisywali promieniowanie obserwowane w zakresie niskonapięciowym promienistemu tunelowaniu elektronu na poziomy domieszkowe, co potwierdziły obliczenia dokonane za pomocą teorii T. N. Morgana.

B. I. Gladky i in. [107] zarejestrowali, obok normalnego pasma promieniowania o energii fotonu nieco mniejszej od E_g (szerokość przerwy energetycznej), pasmo o energii większej od E_g i intensywności $10^9 \div 10^{10}$ razy mniejszej. Przypisali je rekombinacji dziur, wstrzykiwanych termicznie do pasma walencyjnego materiału typu n, z elektronami z pasma przewodnictwa.

Duży wpływ na przebieg rekombinacji mogą mieć też głębokie centra defektowe, formowane w obszarze złącza w wyniku obróbki termicznej, o czym informowali B. Darek i M. Bugajski [75].

Powyższe, jak również i inne możliwe zjawiska rekombinacyjne mają tylko charakter uzupełniający dla trzech głównych mechanizmów rekombinacji, omówionych w tym artykule i mogą być zarejestrowane jedynie w sporadycznych przypadkach.

Zagadnieniem rekombinacji promienistej w półprzewodnikach silnie domieszkowanych zajmowano się od dawna w wielu laboratoriach. Szczególnie dużo prac dotyczyło elektroluminescencji diod GaAs. Proponowane interpretacje obserwowanych zjawisk wykazywały zwykle dobrą zgodność z wynikami eksperymentów. Trzeba jednak stwierdzić, że nie jest to zagadnienie łatwe do jednoznacznego opisu z powodu nakładania się wielu równolegle zachodzących zjawisk rekombinacyjnych o trudnym do oszacowania względnym udziale.

Podziękowanie

Autor pragnie gorąco podziękować doc. dr hab. Bohdanowi Mroziewiczowi za właściwe ukierunkowanie pracy oraz konsultacje w trakcie przygotowywania publikacji, mgr inż. Bohdanowi Darkowi za wnikliwe uwagi i sugestie dotyczące omawianych zagadnień oraz mgr inż. Ewie Gawrońskiej i mgr Maciejowi Bugajskiemu za pomoc w opracowaniu ostatecznej wersji rękopisu.

LITERATURA

1. W. Nakwaski, *Wpływ silnego domieszkowania na pasmowy model energetyczny półprzewodnika — ogony pasm*, Rozprawy Elektrotechniczne, 1976, z. 2.
2. M. J. Adams, P. T. Landsberg, *The theory of the injection laser-Gallium Arsenide Lasers* ed. by C. H. Gooch, Wiley-Interscience, London/New York/Sydney/Toronto 1969, str. 38.
3. M. I. Nathan, *Recombination radiation and stimulated emission in* GaAs, Solid State Electronics, Vol. 6, No 5 (1963), pp. 425—434.
4. G. Lasher, F. Stern, *Spontaneous and stimulated recombination radiation in semiconductors*, Phys. Rev., Vol. 133, No 2A (1964), pp. 553—563.
5. R. Braunstein, *Radiative transitions in semiconductors*, Phys. Rev., Vol. 99, No 6 (1955), pp. 1892—1893.
6. J. I. Pankove, *Influence of degeneracy on recombination radiation in germanium*, Phys. Rev.Lett. Vol. 4, No 1 (1960), pp. 20—21.
7. R. Braunstein, J. I. Pankove, H. Nelson, *Effect of doping on the emission peak and the absorption edge of* GaAs, Appl. Phys. Lett., Vol. 3, No 2 (1963), pp. 31—33.
8. D. E. Hill, *Fluorescence and optical-transmission measurements in doped* GaAs, Bull. Amer. Phys. Soc. Vol. 8, No 3 (1963), p. 202.
9. D. E. Hill, *Infrared transmission and fluorescence of doped gallium arsenide*, Phys. Rev., Vol. 133, No3A (1964), pp. 866—872.
10. M. A. Afromowitz, D. Redfield, *Temperature dependence of the absorption edge of* GaAs, Proc. IX Int. Conf. on the Physics of Semiconductors, Moscow 1968, Vol. 1, pp. 98—102.
11. D. N. Nasledov, B. V. Tsarenkov, *Radiative recombination in* GaAs, jw., pp. 476—481.
12. F. E. Williams, *Theory of the energy levels of donor-acceptor pairs*, J. Phys. Chem. Solids, Vol. 12, No 3/4 (1960), pp. 265—275.
13. D. N. Nasledov, A. A. Rogačev, S. M. Ryvkin, V. E. Charcev, B. V. Carenkov, *Struktura spektra sobstvennogo rekombinacionnogo izlučenija arsenida gallija*, Fiz. Tverd. Tela, Vol. 4, No 11 (1962), pp. 3346—3348.
14. R. J. Keyes, T. M. Quist, *Recombination radiation emitted by gallium arsenide*, Proc. IRE, Vol. 50, No 8 (1962), pp. 1822—1823.
15. J. Callaway, *Transition processes in semiconductor lasers*, J. Phys. Chem. Solids, Vol. 24, No 8, (1963), pp. 1063—1064.
16. W. P. Dumke, *Optical transitions involving impurities in semiconductors*, Phys. Rev., Vol. 132 (1963), p. 1998.
    W. P. Dumke, *Optical transitions involving impurities in semiconductors*, Bull. Am. Phys. Soc., Vol. 8, No 3 (1963), p. 201.

17. A. E. Michel, E. J. Walker, M. I. Nathan, *Determination of the active region in light-emitting* GaAs *diodes*, IBM J. Res. Develop., Vol. 7, No 1 (1963), pp. 70—75.
18. G. Lucovsky, C. J. Repper, *Radiative recombination through impurity levels in* GaAs *p-n junctions*, Appl. Phys. Lett., Vol. 3, No 5 (1963), pp. 71—72.
19. R. W. Keyes, *Doping of semiconductors for injection lasers*, Proc. IEEE, Vol. 51 (1963), p. 602.
20. A. A. Gutkin, M. M. Kozlov, D. N. Nasledov, V. E. Sedov, *Dlinnovol'novyj kraj fotoeffekta i rekombinacionnoe izlučenie* GaAs-*p-n-perechodov*, Fiz. Tverd. Tela, Vol. 5, No 12 (1963), pp. 3617—3620.
21. K. Unger, *Inkohärente und kohärente Rekombinationsstrahlung in Hableiterdioden*, Fortschritte der Physik, Vol. 13, No 11 (1965).
22. O. Ohtsuki, T. Kotani, V. Iwai, I. Tsurumi, *The emission process through donor states in* GaAs *laser diodes*, Japan. J. Appl. Phys., Vol. 4, No 4 (1965), pp. 314—315.
23. G. Lucovsky, A. J. Varga, R. F. Schwarz, *Edge absorption and FL in closely compensated* GaAs, Solid State Communications, Vol. 3, No 1 (1965), pp. 9—13.
24. T. N. Morgan, *Broadening of impurity bands in heavily doped semiconductors*, Phys. Rev., Vol. 139, No 1A (1965), pp. 343—348.
25. G. Lucovsky, *Mechanism for radiative recombination in* GaAs *p-n junctions*, Physics of Quantum Electronics, ed. by P. L. Kelley, B. Lax, P. E. Tannenwald, Mc Graw-Hill Book Company, New York 1966.
26. L. W. Aukerman, M. F. Millea, *Steady-state recombination via donor-acceptor pairs*, Phys. Rev., Vol. 148, No 2 (1966), pp. 759—765.
27. F. Stern, *Effect of band tails on stimulated emission of light in semiconductors*, Phys. Rev., Vol. 148, No 1 (1966), p. 186.
28. Yu. M. Popov, *Semiconductor lasers*, Applied Optics, Vol. 6, No 11 (1967), pp. 1818—1824.
29. P. G. Eliseev, M. A. Manko, *The energy spectrum of the heavily doped gallium arsenide from the data of the electroluminescent p-n junction*, Proc. IX Int. Conf. on the Physics of Semiconductors, Moscow 1968, Vol. 1, pp. 98—102.
30. C. Benoit à la Guillaume, J. Cernogora, *Radiative recombination in highly doped germanium*, Phys. St. Sol., Vol. 35, No 2 (1969), pp. 599—612.
31. P. D. Southgate, *Radiative recombination and equilibrium between near-band-edge tail states in n-type* GaAs, J. Appl. Phys., Vol. 40, No 13 (1969), pp. 5333—5342.
32. D. Redfield, J. P. Wittke, J. I. Pankove, *Luminescent properties of energy-band-tail states in* GaAs: Si, Phys. Rev. B., Vol. 2, No 6 (1970), pp. 1830—1839.
33. I. P. Varšni, *Sobstvennaja izlučatel'naja rekombinacija v poluprovodnikach, Izlučatel'naja rekombinacija v poluprovodnikach*, Nauka, Moskva 1972, pp. 9—124.
34. Dž. Garlik, *Rekombinacionnoe izlučenie poluprovodnikov*, jw., pp. 125—223.
35. A. Š. Gorelenok, V. V. Karataev, M. G. Mil'vibskij, D. N. Nasledov, V. V. Negreskul, B. V. Carenkov, I. N. Šeršakova, *Izlučatel'naja rekombinacija v* GaAs *legirovannom kremniem, Fizičeskie svojstva složnych poluprovodnikov*, Štiinca, Kisinev 1973, pp. 3—15.
36. C. J. Nuese, H. Kressel, I. Ladany, *The future for LEDs*, IEEE Spectrum, Vol. 9, No 5 (1972), pp. 28—38.
37. H. Kressel, H. Nelson, *Properties and applications of* III—V *compound films deposited by liquid phase epitaxy*, Physics of thin films, Vol. 7, Academic Press, New York 1973.
38. A. Miller, *Radiative transitions involving impurities*, J. Phys. Chem. Solids, Vol. 35, No 5 (1974). pp. 641—651.
39. J. I. Pankove, *Cathodoluminescence of n-type* GaAs, J. Appl. Phys., Vol. 39, No 1? (1968), pp. 5368—5371.
40. J. I. Pankove, *Cathodoluminescence of p-type* GaAs, J. Phys. Soc. Jap., Vol. 21, Suppl. (1966), pp. 298—301.
41. F. L. Galeener, G. B. Wright, W. E. Krag, T. M. Quist, H. J. Zeiger, *Evidence for the role of donor states in* GaAs *electroluminescence*, Phys. Rev. Lett., Vol. 10, No 11 (1963), p. 472—474.

42. L. P. Zverev, V. P. Bykov, G. M. Minkov, S. A. Negashev, S. S. Khomutova, V. Y. Shur, *Magnetic field effect on* GaAs *injection laser emission*, Proc. IX. Int. Conf. on the Physics of Semiconductors, Moscow 1968, Vol. 1, pp. 528—531.
43. R. V. Emlin, L. P. Zverev, O. I. Malych, S. A. Negašev, *Vlijanie magnitnogo polja na pogloščenie v arsenide gallija*, Fiz. Tech. Poluprovod., Vol. 1, No 10 (1967), pp. 1453—1455.
44. P. G. Eliseev, *Issledovanie inžekcionnych kvantovych generatorov*, Kvantovaja Radiofizika, Vol. 52 (1970), pp. 3—117.
45. M. I. Nathan, G. Burns, S. E. Blum, J. C. Marinace, *Elektroluminescence and photoluminescence of* GaAs *at* 77°K, Phys. Rev., Vol. 132, No 4 (1963), pp. 1482—1485.
46. M. H. Pilkuhn, *The injection laser*, Phys. St. Sol., Vol. 25, No 1 (1968), pp. 9—62.
47. C. H. Gooch, *The properties of gallium arsenide p-n junction lasers, Gallium arsenide lasers*, Ed. by C. H. Gooch, Wiley, Interscience, London 1969.
48. P. A. Askarov, V. V. Gutov, A. G. Dmitriev, A. N. Imenkov, B. V. Carenkov, Ju. P. Jakovlev, *Koordinatnoe izmenenie ljuminescencji v varizonnoj* $Ga_{1-x}Al_xAs$:Si *p-n-strukture*, Fiz. Tech. Poluprovod. Vol. 8, No 10 (1974), pp. 1913—1917.
49. R. C. C. Leite, A. E. Di Giovani, *Frequency shift with temperature as evidence for donor-acceptor pair recombination in relatively pure n-type* GaAs, Phys. Rev. Vol. 153, No 3(1967), pp. 841—843.
50. Ž. Pankov, *Optičeskie processy v poluprovodnikach*, Mir, Moskva 1973, pp. 161—166.
51. Ž. I. Alferov, V. M. Andreev, D. Z. Garbuzov, E. P. Morozov, V. G. Trofim, *Vlijanie kompensacii na izlučatel'nuju rekombinaciju v n- i p-*GaAs Fiz. Tech. Poluprovod. Vol. 4, No 7 (1970), pp. 1282—1288.
52. D. F. Nelson, M. Gershenzon, A. Ashkin, L. A. D'Asaro, J. C. Sarace, *Band-filling model for* GaAs *injection luminescence*, Appl. Phys. Lett., Vol. 2, No 9 (1963), pp. 182—184.
53. R. J. Archer, R. C. C. Leite, A. Yariv, S. P. S. Porto, J. M. Whelan, *Electron-hole and electron-impurity band tunneling in* GaAs *luminescent junctions*, Phys. Rev. Lett., Vol. 10, No 11 (1963), pp. 483—484.
54. V. S. Bagaev, Ju. N. Berozašvili, B. M. Vul, È. I. Zavarickaja, L. V. Keldyš, A. P. Šotov, *Ob energetičeskom spektre sil'no legirovannogo arsenida gallija*, Fiz. Tverd. Tela, Vol. 6, No 5 (1964), pp. 1399—1405.
55. C. Benoit à la Guillaume, J. Cernogora, *Radiative recombination from band tails in highly doped and compensated germanium*, Proc. IX. Int. Conf. on the Physics of Semiconductors, Moscov 1968, Vol. 1, pp. 103—108.
56. R. C. C. Leite, J. C. Sarace, D. H. Olson, B. G. Cohen, J. M. Whelan, A. Yariv, *Injection mechanisms in* GaAs *diffused electroluminescent junctions*, Phys. Rev., Vol. 137, No 5A (1965), pp. 1583—1590.
57. M. I. Nathan, G. Burns, *Recombination radiation in* GaAs *by optical and electrical injection*, Appl. Phys. Lett., Vol. 1, No 4 (1962), pp. 89—90.
58. J. I. Pankove, M. J. Massoulie, *Injection luminescence from gallium arsenide*, Bull. Amer. Phys. Soc., Vol. 7, No 1 (1962), p. 88.
59. D. N. Nasledov, A. A. Rogačev, S. M. Ryvkin, B. Y. Carenkov, *Rekombinacionnoe izlučenie arsenida gallija*, Fiz. Tverd. Tela, Vol. 4, No 4 (1962), pp. 1062—1065.
60. J. Black, H. Lockwood, S. Mayburg, *Recombination radiation in* GaAs, J. Appl. Phys., Vol. 34, No 1 (1963), pp. 178—180.
61. M. I. Nathan, G. Burns, *Fluorescence of* GaAs, Bull. Amer. Phys. Soc., Vol. 8, No 3 (1963), pp. 201 -202.
62. H. Kressel, J. U. Dunse, H. Nelson, F. Z. Hawrylo, *Luminescence in silicon-doped* GaAs *grown by liquid-phase epitaxy*, J. Appl. Phys., Vol. 39, No 4 (1968), pp. 2006—2011.
63. D. A. Cusano, *Radiative recombination from* GaAs *directly excited by electron beams*, Solid State Communications, Vol. 2, No 11 (1964), pp. 353—358.
64. M. D. Sturge, *Optical absorption of gallium arsenide between* 0,6 and 2,75 eV, Phys. Rev., Vol. 127, No 3 (1962), pp. 768—773.

65. M. I. Nathan, W. P. Dumke, G. Burns, F. H. Dill, Jr. G. Lasher, *Stimulated emission of radiation from* GaAs *p-n junctions*, Appl. Phys. Lett., Vol. 1, No 3 (1962), pp. 62—64.
66. T. M. Quist, R. H. Rediker, R. J. Keyes, W. E. Krag, B. Lax, A. L. McWhorter, H. J. Zeigler, *Semiconductor maser of* GaAs, Appl. Phys. Lett. Vol. 1, No 4 (1962), pp. 91—92.
67. R. N. Hall, G. E. Fenner, J. D. Kingsley, T. J. Soltys, R. O. Carlson, *Coherent light emission from* GaAs *junctions*, Phys. Rev. Lett., Vol. 9, No 9 (1962), pp. 366—368.
68. D. A. Cusano, S. J. Lubowsky, J. D. Kingsley, *Laser emission from n- and p-type* GaAs *excited by fast electrons*, Bull. Amer. Phys. Soc., Vol. 10, No 1 (1965), p. 73.
69. D. A. Cusano, *Identyfication of laser transitions in electron-beam-pumped* GaAs, Appl. Phys. Lett., Vol. 7, No 6 (1965), pp. 151—152.
70. B. H. Ahn, R. R. Shurtz, C. W Trussell, *The dependence of emission spectrum and efficiency of* GaAs:Si *diodes on the silicon concentration*, J. Electrochem. Soc., Vol. 118, No 6 (1971), pp. 1015—1016.
71. V. S. Bagaev, Yu. N. Berozašvili, B. M. Vul, È. I. Zavarickaja, A. P. Šotov, *O mechanizme rekobinacionnogo izlučenija arsenida gallija*, Fiz. Tverd. Tela, Vol. 6, No 4 (1964), pp. 1235—1238.
72. I. Ladany, *Electroluminescence characteristics and efficiency of* GaAs:Si *diodes*, J. Appl. Phys., Vol. 42, No 2 (1971), pp. 654—656.
73. E. Burstein, *Anomalous optical absorption limit in* InSb, Phys. Rev., Vol. 93, No 3 (1954), 632—633.
74. A. L. McWhorter, H. J. Zeiger, B. Lax, *Theory of semiconductor maser of* GaAs, J. Appl. Phys., Vol. 34, No 1 (1963), pp. 235—236.
75. B. Darek, M. Bugajski, *Wpływ obróbki termicznej na widmo fotoluminescencji* GaAs, II Ogólnopolska Konferencja Luminescencyjna, B-Luminescencja Substancji Nieorganicznych, Toruń 1974, pp. 129—139.
76. E. W. Williams, *Evidence for self-activated luminescence in* GaAs: *The gallium vacancy-donor center*, Phys. Rev., Vol. 168, No 3 (1968), pp. 922—928.
77. J. I. Pankove, *Tunneling-assisted photom emission in gallium arsenide pn junctions*, Phys. Rev. Lett., Vol. 9, No 7 (1962), pp. 283—285.
78. G. C. Dousmanis, C. W. Mueller, H. Nelson, *Effect of doping on frequency of stimulated and incoherent emission in* GaAs *diodes*, Appl. Phys. Lett., Vol. 3, No 8 (1963), pp. 133—135.
79. B. Mroziewicz, *Lasery półprzewodnikowe*, WNT, Warszawa 1967.
80. Ž. I. Alferov, D. Z. Garbuzov, E. P. Morozov, E. L. Portnoj, *Diagonol'noe tunnelirovanie i polaryzacja izlučenia v geteroperechodach* $Al_xGa_{1-x}As$-GaAs *i p-n perechodach v* GaAs, Fiz. Tech. Poluprovod., Vol. 3, No 7 (1969), pp. 1054—1057.
81. Ž. I. Alferov, D. Z. Garbuzov, E. P. Morozov, D. N. Tret'jakov, *Izlučatel'naja rekombinacija v arsenidgallevych p-n-strukturach s p-oblastju, legirovannoj germaniem*, Fiz. Tech. Poluprovod., Vol. 3, No 5 (1969), pp. 706—711.
82. B. Darek, *Mechanizm promieniowania rekombinacyjnego w diodach elektroluminescencyjnych z arsenku galu*, Prace ITE IV/21 (1971).
83. L. V. Keldyš, *O povedenii nemetallićeskich kristalov v sil'nych élektričeskich poljach*, Ž.È.T.F., Vol. 33, No 4 (1957), pp. 994—1003.
84. L. V. Keldyš, *O vlijanii kolebanij rešetki na roždenie elektronno-dyročnych par v sil'nom električeskom pole*, Ž.È.T.F., Vol. 34, No 4 (1958), pp. 962—968.
85. M. Gershenzon, D. F. Nelson, A. Ashkin, L. A. D'Asaro, J. C. Sarace, *Band-filling model for* GaAs *injection luminescence*, Bull. Amer. Phys. Soc., Vol. 8, No 3 (1963), p. 202.
86. L. W. Aukerman, M. F. Millea, *Band-filling current in haavily doped* GaAs *diodes*, J. Appl. Phys., Vol. 36, No 8 (1965), pp. 2585—2586.
87. P. G. Eliseev, A. I. Krasilnikov, M. A. Manko, I. Z. Pinsker, *Band-filling model for injection luminescence at higher temperatures*, Phys. St. Sol., Vol. 23, No 2 (1967), pp. 587—597.
88. A. A. Bergh, P. J. Dean, *Light-emitting diodes*, Proc. IEEE, Vol. 60, No 2 (1972), pp. 156—223.

89. D. J. Dumin, G. L. Pearson, *Properties of gallium arsenide diodes between* 4,2° and 300°K, J. Appl. Phys., Vol. 36, No 11 (1965), pp. 3418—3426.
90. P. G. Eliseev, M. A. Man'ko, *O prirode termoaktivacionnogo toka i izlučenija v sil'no legirovannych p-n perechodach*, Fiz. Tech. Poluprovod., Vol. 2, No 1 (1968), pp. 3—10.
91. H. C. Casey, Jr., D. J. Silversmith, *Radiative tunneling in* GaAs *abrupt asymmetrical junctions*, J. Appl. Phys., Vol. 40, No 1 (1969), pp. 241—256.
92. D. B. Wittry, D. F. Kyser, *Cathodoluminescence at p-n junctions in* GaAs, J. Appl. Phys., Vol. 36, No 4 (1965), pp. 1387—1389.
93. D. B. Wittry, D. F. Kyser, *Surface recombination velocities and diffusion lengths in* GaAs, Proc. Int. Conf. Phys. Semicond., Kyoto 1966, J. Phys. Soc. Japan, Vol. 21, Suppl., (1966), pp. 312—316.
94. H. C. Casey, Jr., R. J. Archer, R. H. Kaiser, J. C. Sarace, *Width of the spontaneous emission region in degenerate* GaAs *p-n junctions*, J. Appl. Phys., Vol. 37, No 2 (1966), pp. 893—898.
95. T. N. Morgan, *Recombination by tunneling in electroluminescent diodes*, Phys. Rev., Vol. 148, No 2 (1966), pp. 890—903.
96. M. I. Nathan, T. N. Morgan, G. Burns, A. E. Michel, *High-energy emission in* GaAs *electroluminescent diodes*, Phys. Rev., Vol. 146, No 2 (1966), pp. 570—574.
97. A. È. Junovič, A. B. Ormont, *O tunnel'noj izlučatel'noj rekombinacii v p-n-perechodach*, Ž.È.T.F., Vol. 51, No 5 (1966), pp. 1292—1305.
98. A. Świt, *Przyrządy półprzewodnikowe*, WNT, Warszawa 1968, pp. 83—94.
99. A. K. Jonscher, *Podstawy działania przyrządów półprzewodnikowych*, WNT, Warszawa 1962, p. 38.
100. R. A. Smith, *Półprzewodniki*, PWN, Warszawa 1966, p. 272.
101. Z. Pankov, *Optičeskie processy v poluprovodnikach*, Mir, Moskva 1973, p. 36.
102. G. J. Pikus, *Podstawy teorii przyrządów półprzewodnikowych*, WKŁ, Warszawa 1968, pp. 37 i 150.
103. P. S. Kiriejew, *Fizyka półprzewodników*, PWN, Warszawa 1971, pp. 218 i 554.
104. I. P. Stepanenko, *Osnovy teorii tranzistorov i tranzistornych schem*, Energija, Moskva 1973, rozdz. 1—5.
105. D. I. Bilenko, V. D. Ciporucha, *Optičeskoe pogloščenie arsenida gallija vblizi osnovnoj polosy pri vysokich temperaturach*, Fiz. Tech. Poluprovod., Vol. 8, No 6 (1974), pp. 1235—1237.
106. *American Institute of Physics Handbook*, Dwight E. Gray, Coordinating Ed., Mc Graw-Hill Book Company, 1972, p. 9—63.
107. B. I. Gladky, D. N. Nasledov, B. V. Carenkov, *Korotkovolnovoe izlučenie* GaAs-*diodnogo kvantovogo generatora*, Fiz. Tech. Poluprowod., Vol. 2, No 5 (1968), pp. 635—638.

W. NAKWASKI

RADIATIVE RECOMBINATION IN HIGHLY DOPED SEMICONDUCTORS

Summary

The processes of radiative recombination in semiconducting materials are described in this paper. In case of medium doping level experimental proof is presented for donor-acceptor transitions taking the dominant part in the recombination process. The influence of high doping level on recombination phenomena is discussed, in particular taking into consideration GaAs electroluminescent diodes.

The two most often cited models of those phenomena are presented: the one by R. J. Archer et al. as well as by H. C. Casey Jr. and D. J. Silversmith.

On the basis of the above models an attempt was made to interpret the experimental data. Most probably there exist simultaneously several channels of radiative recombination in LEDs, the most efficient of them being: photon-assisted tunneling, band-tails filling and radiative recombination of electrons thermally injected into the material of *p*-type. The relative part of individual processes depends on external conditions — the bias on *p-n* junction, temperature and doping level.

W. NAKWASKI

RECOMBINAISON RADIANTE DANS LES SEMI-CONDUCTEURS À FORTES IMPURETÉS

Résumé

Dans l'article sont traités les procédés de la recombinaison radiante dans les matériaux semi-conducteurs. On a présenté les preuves expérimentales, que, dans le cas de la teneur moyenne en impuretés, la part des transitions du type donneur-accepteur est prédominante. On a examiné aussi l'influence de plus fortes impuretés sur les phénomenes de recombinaison, particulièrement dans les diodes électroluminescentes GaAs. On a donné deux modèles de ces phénomènes le plus souvent cités: de R. J. Archer et autres et de H. C. Casey, J. et D. J. Silversmith.

A l'aide des modèles ci-dessus mentionnés on a effectué les essais d'interpréter les résultats expérimentaux. Il existe probablement dans DEL parallèlement quelques canaux de recombinaison radiante, dont les plus efficaces sont des tunnels sous l'action de photon, le remplissage de queues des bandes et la recombinaison radiante des électrons injectés termiquement à la région *p*. La part relative des procédés particuliers dépend des conditions extérieurs, à savoir: tension à la connexion, température et teneur en impureté.

W. NAKWASKI

STRAHLUNGSREKOMBINATION BEI STARK DOTIERTEN HALBLEITERN

Zusammenfassung

Der Artikel behandelt strahlende Rekombinationsprozesse in Halbleitermaterialen.

Für das mittlere Dotierungsniveau werden experimentelle Beweise für den vorherrschenden Anteil des Typs der Durchgänge: Donator-Akzeptor gebracht. Es wird auch der Einfluß starker Dotierung auf die Rekombinationserscheinungen geprüft, besonders in den Elektrolumineszenzdioden GaAs (LED).

Es werden zwei oft zitierte Modelle dieser Erscheinungen angeführt — von R. J. Archer und anderen, ebenso wie von H. C. Casey, Jr. und D. J. Silversmith.

Mittels vorstehender Modelle wird die Interpretationsprobe der experimentellen Ergebnisse durchgeführt. Wahrscheinlich existieren im LED gleichzeitig mehrere Strahlungsrekombinationskanäle, wovon am ergiebigsten die folgenden sind: photonanteilige Tunnelung, Bandschwänze-Ausfüllung sowie Strahlenkombination von thermischen, in den *p*-Raum eingespritzten Elektronen. Der relative Anteil der einzelnen Prozesse hängt von den äußerlichen Bedingungen ab: der Spannung an der *pn*-Verbindung, der Temperatur und dem Dotierungsniveau.

В. НАКВАСКИ

ИЗЛУЧАТЕЛЬНАЯ РЕКОМБИНАЦИЯ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ С БОЛЬШИМ СОДЕРЖАНИЕМ ПРИМЕСЕЙ

Резюме

В статье рассмотрены процессы излучательной рекомбинации в полупроводниковых материалах.

В случае умеренного легирования приведены экспериментальные доказательства доминирующего участия переходов донор-акцептор. Рассмотрено тоже влияние сильного легирования на рекомбинационные явления, особенно в электролюминесценционных диодах из GaAs (LED).

Применены два чаще всего цитированные модели этих явлений — Р. И. Архера и др., а также Х. Ц. Касея Младшего и Д. И. Сильверсмиса.

Используя указанные выше модели сделана попытка интерпретации экспериментальных данных. Следует предполагать, что в LED'ах существует одновременно несколько каналов излучательной рекомбинации, из которых самыми эффективными являются: туннелирование при участии фотона, заполнение хвостов зон и рекомбинация электронов инжектируемых термически в область *p*-типа. Относительное участие отдельных явлений зависит от внешних условий — напряжения на *p-n*-переходе, температуры и уровня легирования.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 3, ss. 583—604

621.373.5

Metody zwiększania mocy wyjściowej generatorów z diodami lawinowymi

MARIAN MAJEWSKI (WARSZAWA)

Instytut Podstaw Elektroniki Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 10.4.1975

W artykule przeprowadzono dyskusję ograniczenia mocy generowanej przez diodę lawinową w rodzaju IMPATT. Następnie opisano możliwość łączenia kilku struktur na wspólnej podstawce oprawki w celu zwiększenia mocy zasilania diody.

W części dotyczącej układów wielodiodowych omówiono właściwości znanych w literaturze układów, jak również przedstawiono propozycje nowych rozwiązań. Opis tych układów uzupełniają uzyskane wyniki pomiarowe.

Dyskusję prezentowanych w artykule układów uzupełniono uproszczoną analizą umożliwiającą ich projektowanie.

1. WPROWADZENIE

Nieustanny rozwój technologii wytwarzania mikrofalowych przyrządów półprzewodnikowych przyczynia się do rozszerzenia zakresu częstotliwości pracy oraz mocy wyjściowej tych przyrządów. Dotyczy to w szczególności diod lawinowych. Obserwowany w ostatnich latach postęp w tej dziedzinie polega nie tylko na udoskonalaniu znanych struktur z pojedynczą i podwójną strefami przelotu nośników, lecz również na opracowaniu technologii wytwarzania diod z GaAs. Okazuje się jednak, że uzyskiwane moce wyjściowe współczesnych diod lawinowych są w pewnych zastosowaniach zbyt małe, dlatego też w celu zwiększenia mocy prowadzone są obecnie w wielu laboratoriach badania nad układami wielodiodowymi (dotyczy to zarówno generatorów jak i wzmacniaczy).

Analiza procesów fizycznych jakie zachodzą w diodzie lawinowej w warunkach pracy rodzaju podstawowego, zwanego także rodzajem IMPATT [1] wskazuje, że sprawność zdefiniowana jako stosunek mocy mikrofalowej do mocy zasilania jest wyrażona w sposób przybliżony przez zależność [2]

$$\eta_e \simeq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{V}{V_0}. \tag{1}$$

Zależność (1) wskazuje, że wartość sprawności determinuje stosunek amplitudy napięcia wielkiej częstotliwości na diodzie do napięcia zasilania. Ograniczenie amplitudy V przy określonym zasilaniu wiąże się z zapewnieniem prawidłowej pracy diody w rozpatrywanym dalej rodzaju podstawowym.

Prawidłowa praca diody w rodzaju IMPATT wymaga, aby maksymalna wartość chwilowego napięcia na diodzie nie przekroczyła poziomu, przy którym nastąpiłoby zahamowanie procesu powielania lawinowego wskutek wstecznego oddziaływania ładunku przestrzennego na rozkład pola elektrycznego. Ponadto minimalne napięcie nie może przekroczyć poziomu, przy którym prędkość nośników w strefie unoszenia przestaje być już nacysona, tzn. niezależna od natężenia pola elektrycznego. Biorąc pod uwagę fakt, że dla GaAs graniczne natężenie pola, przy którym prędkość nośników pozostaje jeszcze nasycona, wynosi około 3 kV/cm, zaś dla Si jest ono trzykrotnie większe, zatem maksymalna amplituda napięcia wielkiej częstotliwości (przy założeniu, że $V_0 \simeq V_B$) w przypadku GaAs osiąga $V_B/2$, natomiast dla Si tylko $V_B/3$ [3] (V_B — napięcie przebicia lawinowego).

Wynika stąd, że sprawność diod lawinowych o strukturze z pojedynczą strefą przelotową (np. p^+nn^+) wykonanych z GaAs może dochodzić do 33%, natomiast diod wykonanych z Si do około 20%. Wymienione wartości sprawności w przypadku struktury z podwójną strefą przelotową (np $p^+ n p n^+$) wzrastają około 1,33 razy. Warto dodać, że niewielki wzrost sprawności ponad 33% jest możliwy w przypadku struktur z barierą Schottky'ego.

Podane powyżej wartości sprawności są określone teoretycznie na podstawie analizy mechanizmu pracy diody lawinowej. W praktyce są one jednak dużo niższe. Różnice są spowodowane ograniczonymi możliwościami odprowadzania ciepła wytwarzanego w obszarze strefy powielania lawinowego diody (złącze p-n). Możliwości te determinują konstrukcja i materiał, z którego jest wykonana dioda.

Maksymalna moc tracona w postaci ciepła w diodzie jest ograniczona wartością temperatury T_{max}, przy której następuje trwałe uszkodzenie termiczne diody. Zatem maksymalna moc zasilania diody jest ograniczona przez

$$P_o \leqslant \frac{\Delta T}{R_T}, \tag{2}$$

gdzie:

$\Delta T = T_{max} - T_0$ ($T_0 = 25°C$, T_{max} dla Si jest zawarte w granicach $200° \div 300°C$),

$R_T = \dfrac{W_t}{\sigma_d A} + \dfrac{\sqrt{\pi}}{4\sigma_p \sqrt{A}}$ (°C/W) — oporność cieplna diody,

σ_d — przewodność cieplna materiału półprzewodnikowego (np. dla Si jest ona równa 0,8 W/°C),

σ_p — przewodność cieplna podstawki, na której jest umieszczona struktura (np. dla Cu wynosi ona 4,0 W/°C),

W_t — efektywna długość drogi przewodzenia ciepła w diodzie,

A — powierzchnia przekroju poprzecznego diody (w przypadku przekroju kołowego jest ona równa $\pi d^2/4$).

Wpływ parametrów technologicznych na wielkość oporności cieplnej R_T można rozpatrywać na przykładzie określonej struktury.

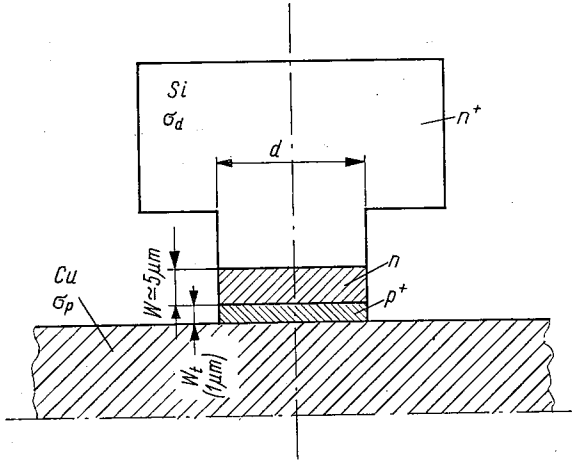
Typowa dioda lawinowa $p^+ n n^+$ — *mesa* jest przedstawiona na rys. 1 (montaż diody na podstawce jest typu odwrotnego).

Z ograniczeniem mocy zasilania P_o wiąże się ograniczenie mocy wielkiej częstotliwości jaką można otrzymać z diody, ponieważ $P = P_o \eta_e$. Wiadomo jednak, że dla danej struk-

tury zarówno η_e jak i ΔT są ustalone, zatem możliwość zwiększenia mocy P_o wynika tylko z obniżenia rezystancji cieplnej R_T.

Obniżenie tej rezystancji można uzyskać przez:

— skrócenie odległości W_t przy równoczesnym odwrotnym montażu struktury na podstawce, tak aby strefa powielania lawinowego znalazła się możliwie blisko chłodnicy,



Rys. 1. Struktura diody lawinowej p^+nn^+ typu „mesa"

— zwiększenie przewodności cieplnej σ_d podstawki, np. przez zastosowanie pierścienia diamentowego pomiędzy strukturą półprzewodnikową a podstawką miedzianą diody (σ_d diamentu jest kilkakrotnie większa niż miedzi),

— zwiększenie powierzchni przekroju A diody.

Pierwsze dwa z wymienionych sposobów minimalizacji oporności R_T determinują aktualne możliwości technologiczne. Natomiast ostatni polegający na zwiększaniu powierzchni A podlega ograniczeniom. Ograniczenia te wynikają z faktu, że wraz ze wzrostem powierzchni następuje wzrost pojemności C_o diody, która w istotny sposób ogranicza górną częstotliwość pracy diody oraz poziom mocy wyjściowej przy danej impedancji obciążenia diody.

Na podstawie przybliżonej analizy można wykazać, że w określonym zakresie gęstości prądu zasilania diody i częstotliwości pracy istnieje optymalna powierzchnia przekroju diody, przy której moc wyjściowa generatora jest największa [4]. Zakładając, że obecnie produkowane diody charakteryzują się małą odległością W_t, o wartości rezystancji R_T decyduje w zasadzie przewodność podstawki σ_p, czyli

$$P_0 \simeq \Delta T \cdot 2\sigma_p \cdot d; \tag{3}$$

d — średnica kołowego przekroju diody.

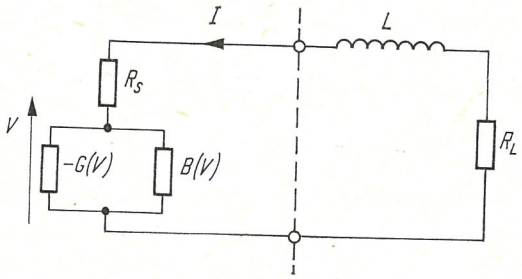
Maksymalna gęstość prądu zasilania diody wynosić będzie zatem

$$J \simeq \frac{4}{\pi d^2} \cdot \frac{P_0}{V_0} = \frac{8\sigma_p}{\pi d V_0} \Delta T \tag{4}$$

V_0 — stałe napięcie na diodzie, odpowiadające prądowo ustalonemu punktowi pracy.

W celu ustalenia związku pomiędzy mocą wyjściową generatora a admitancją diody, uwzględniając równocześnie obecność szeregowej rezystancji strat R_s diody, rozpatruje się uproszczony schemat zastępczy generatora w postaci jak na rys. 2.

Założono dalej, że przewodność i susceptancja diody lawinowej są tylko funkcjami amplitudy oscylacji V w określonym przedziale częstotliwości, przy ustalonym prądzie zasi-



Rys. 2. Schemat zastępczy generatora z diodą lawinową
Linia przerywana określa płaszczyznę dołączenia obwodu zewnętrznego

lania. Przyjęta najprostsza postać aproksymacji tych zależności jest uzasadniona tylko w zakresie częstotliwości pracy diody znacznie większych od częstotliwości rezonansu lawinowego diody i zbliżonych do częstotliwości określonych czasem przelotu. Pełną dyskusję tego założenia można przeprowadzić na bazie analizy wielkosygnałowej diody lawinowej [2].

Przyjmuje się, że

$$|G(V)| = |G_0|(1-\alpha V), \tag{5}$$

$$B(V) = \omega C = \frac{\omega \cdot \varepsilon}{W}\frac{\pi d^2}{4} = \omega C_0 \frac{\pi d^2}{4}, \tag{6}$$

gdzie:

G_0 — małosygnałowa przewodność diody,

$\alpha = \dfrac{1}{V_m}$, V_m — maksymalna amplituda oscylacji napięcia na diodzie,

$\omega = 2\pi f$ — pulsacja,

V — amplituda oscylacji na diodzie,

W — obszar aktywny diody (równy sumie szerokości stref powielania i przelotu nośników na diodzie),

C_0 — pojemność złącza diody na jednostkę powierzchni.

Rozpatrując analityczną zależność na admitancję małosygnałową diody lawinowej, np. w postaci podanej przez Gildena i Hinesa [5] można stwierdzić, że ujemna konduktancja diody w zakresie częstotliwości większych od rezonansu lawinowego jest wprost proporcjonalna do gęstości stałego prądu zasilania diody, to znaczy

$$G_0 = \frac{G_{m0}}{J_0}\cdot\frac{\pi d^2}{4}\cdot J, \tag{7}$$

gdzie G_{m0} jest małosygnałową konduktancją diody unormowaną przez powierzchnię przy pewnej gęstości prądu zasilania J_0.

Maksymalną amplitudę napięcia oscylacji V_m w zależności od sprawności η_e diody można określić na podstawie zależności na moc maksymalną

$$P_{max} \cong \frac{1}{2} V_m^2 |G_m| \tag{8}$$

oraz

$$\eta_e = P_{max}/P_0, \tag{9}$$

czyli

$$V_m = \sqrt{2\eta_e P_o/|G_m|}\,. \tag{10}$$

Biorąc pod uwagę postać schematu generatora przedstawioną na rys. 2, moc wyjściowa sygnału wydzielonego w obciążeniu R_L jest równa

$$P_L = \frac{1}{2}|I|^2 R_L = \frac{1}{2} V^2\left(|G(V)| - R_s G^2(V) - R_s B^2\right) \cong \frac{1}{2} V^2\left(|G(V)| - G_s\right), \tag{11}$$

gdzie $G_s = R_s B^2$.

W celu wyznaczenia optymalnej ze względu na moc wyjściową amplitudy oscylacji należy obliczyć pochodną $dP_L/dV = 0$ przy uwzględnieniu zależności (10) oraz (11), skąd

$$V_{opt} = \frac{2}{3} \frac{|G_0| - G_s}{|G_0|} \sqrt{\frac{2P_0 \eta_e}{|G_0|}}\,. \tag{12}$$

Zatem zależność na moc maksymalną ma postać

$$P_{L\,max} = \frac{8}{27}(1-g)^3 P_0 \eta_e, \tag{13}$$

gdzie:

$$g = \frac{G_s}{|G_0|} = \frac{R_s \omega^2 C_0 \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 d^3}{\frac{G_{m0}}{J_0} \frac{2\cdot\sigma}{V_0} p \cdot \Delta T} = \left(\frac{d}{d_0}\right)^3 \tag{14}$$

oraz

$$d_0 = \left(\frac{R_s \omega^2 C_0 \left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{\frac{G_{m0}}{J_0} \cdot \frac{2\sigma}{V_0} p \cdot \Delta T} \right)^{-1/3}.$$

Analiza równań (13) i (14) wskazuje, że moc wyjściowa generatora rośnie wraz z obniżeniem wartości przewodności G_s. Podstawiając zależność (14) do równania (3) otrzymuje się związek pomiędzy maksymalną mocą wyjściową generatora a średnicą diody d

$$P_{l\,max} = \frac{16}{27} \eta_e \delta_p \Delta T \cdot d \cdot [1 - (d/d_0)^3]^3. \tag{15}$$

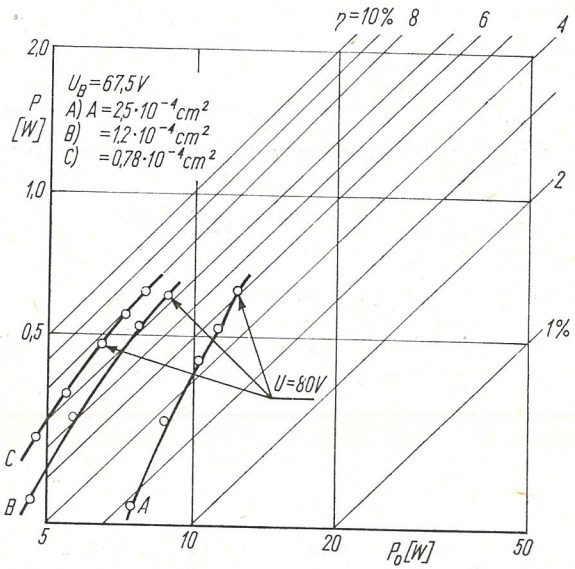
Optymalną, ze względu na moc wyjściową, średnicę diody d_{opt} można wyznaczyć oblicza-

jąc $dP_{L\,max}/d(d) = 0$, skąd

$$d_{opt} = \frac{1{,}6}{\pi^2} \frac{\frac{G_{m0}}{J_0} \frac{2\sigma p}{V_0}}{R_s \omega^2 C_0^2} \Delta T. \tag{16}$$

Zależność [16] potwierdzają rezultaty doświadczalne opisane w literaturze [4].

Znaczną wrażliwość mocy wyjściowej generatora na zmiany powierzchni przekroju diody determinuje szkodliwy wpływ przewodności G. Wniosek ten znajduje potwierdzenie w rezultatach prac doświadczalnych C. B. Swana i współautorów [11]. Wyniki tych prac, dotyczące zależności mocy wyjściowej generatora w zakresie częstotliwości pasma X przy zastosowaniu w nim diod krzemowych typu $p^+ n n^+$ o identycznych parametrach technologicznych lecz o różnych przekrojach, są przedstawione na rys. 3.



Rys. 3. Charakterystyki mocy wyjściowej P generatora na pasmo X w funkcji mocy zasilanie P_0 przy trzech różnych powierzchniach przekroju diody A

Na rysunku zaznaczone linie stałej sprawności

Należy jednak mieć na uwadze fakt, iż poziom mocy wyjściowej diody posiadającej optymalną powierzchnię przekroju dla danego zakresu częstotliwości może okazać się w pewnych zastosowaniach niewystarczający. Warto więc rozpatrzyć inne metody zwiększania mocy wyjściowej generatora. Istnieją obecnie dwie podstawowe metody zwiększenia mocy wyjściowej generatorów:

— technologiczna, polegająca na łączeniu kilku struktur w jednej oprawce,

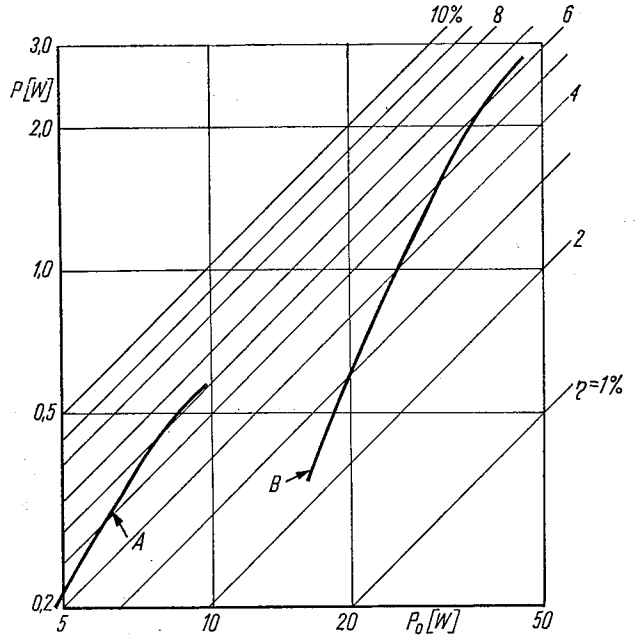
— układowa, polegająca na łączeniu kilku diod w obwodzie rezonatora wielowejściowego lub łączeniu kilku generatorów jednodiodowych przez mikrofalowe układy odwracalne, takie jak mostki, sprzęgacze i cyrkulatory.

Druga z wymienionych metod wymaga realizacji złożonych układów rezonatorów wielo-

wejściowych, spełniających szereg wymagań w porównaniu z układem jednodiodowym. Ponieważ problem analizy i projektowania takich układów nie jest obecnie całkowicie rozwiązany, zatem ich realizacja praktyczna w dużym stopniu wymaga przeprowadzenia licznych badań doświadczalnych w celu optymalizacji parametrów użytkowych.

2. ŁĄCZENIE STRUKTUR W JEDNEJ OPRAWCE MIKROFALOWEJ

S. G. Liu i J. J. Risko [12] połączyli szeregowo pięć struktur krzemowych typu p^+ np^+ w jednej dużej oprawce mikrofalowej. Wykonany w ten sposób element zastosowali następnie w generatorze na pasmo L (1,11 GHz) w rodzaju TRAPATT, uzyskując przy sprawności 25,6% moc wyjściową około 1,2 kW. Całkowity spadek napięcia na tak wykonanej diodzie wynosił 680 V w momencie wzbudzenia oscylacji, natomiast w warunkach ustalonych około 460 V. Generator zasilano impulsami o szerokości 0,5 μs i czasie powtarzania 400 Hz. Konieczność zasilania impulsowego układu wynikała z faktu, że tylko jedna dioda miała bezpośredni kontakt cieplny z obudową, zaś pozostałe diody posiadały znacznie gorsze warunki odprowadzania ciepła. Ograniczenie wartości mocy zasilania diod przy połączeniu szeregowym jest zasadniczą wadą takiego rozwiązania. Ponadto przy szeregowym połączeniu uszkodzenie którejkolwiek diody prowadzi do zniszczenia pozostałych. Dodatkowym utrudnieniem układowym jest konieczność stosowania do zasilania generatora zasilacza wysokonapięciowego, który musi być dodatkowo stabilizowany prądowo.



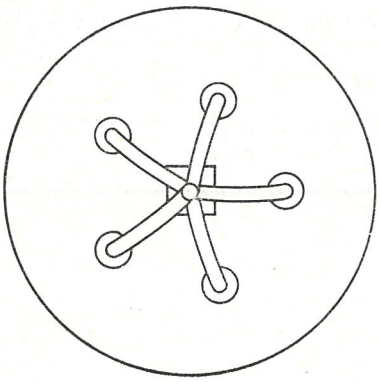
Rys. 4. Porównanie charakterystyk $P(P_0)$ diody z pojedynczą strukturą p^+nn^+. (A) — o powierzchni przekroju równej $1{,}6 \cdot 10^{-4}$ cm^2 oraz diody zawierającej pięć połączonych równolegle struktur, (B) — o wypadkowej powierzchni przekroju $8 \cdot 10^{-4}$ cm^2

Istotną zaletą rozpatrywanego połączenia szeregowego jest stosunkowo duża wartość wielkosygnałowej ujemnej rezystancji, której wypadkowa wartość jest w przybliżeniu proporcjonalna do liczby łączonych diod. Duża wartość ujemnej rezystancji diody znacznie ułatwia realizację optymalnego, ze względu na moc wyjściową, dopasowania obciążenia układu do diody.

Problem równoległego łączenia struktur w jednej oprawce był rozpatrywany przez wymienionych autorów jak również przez C. B. Swana i współpracowników [11]. Stwierdzono, że o ile przy równoległym połączeniu wszystkie struktury mają identyczne warunki odprowadzania ciepła, to połączenie to jednak charakteryzuje się małą wartością ujemnej rezystancji wielkosygnałowej. Rezystancja ta jest w przybliżeniu tylokrotnie niższa od rezystancji pojedyńczej diody, im większą liczbę diod zastosowano do połączenia. Utrudnia to w rezultacie praktyczną realizację optymalnego dopasowania takiej wielostrukturowej diody do obciążenia. Wymieniona przyczyna powoduje ograniczenie liczby łączonych struktur do kilku.

Na rys. 4 jest przedstawione porównanie mocy wyjściowych generatora z diodą jednostrukturową (A) typu p^+ n n^+ oraz z diodą pięciostrukturową (B) [11].

Rezultaty doświadczalne przedstawione na rys. 4 wskazują, że maksymalne wartości sprawności w obu rozpatrywanych przypadkach są identyczne, jednak maksymalne moce wyjściowe różnią się pięciokrotnie, natomiast wartości mocy startowych (moc zasilania,



Rys. 5. Przykład montażu pięciu połączonych równolegle struktur na wspólnej podstawce
W części środkowej znajduje się wspornik kwarcowy

Tablica 1

Podstawowe parametry diod lawinowych f-my Microwave Associates

	ML 4803	ML 4804	ML 4805
Zakres częstotliwości (GHz)	5÷8	8÷10	10÷12
Minim. moc generowana na fali ciągłej (W)	1,5	1,25	1,0
Typowe napięcie przebicia (V)	100	80	68
Typowa pojemność $C(V_B)$, (pF)	1,4	1,0	0,8
Rezystancja termiczna (°C/W)	6	7,5	9
Napięcie pracy V_0	135	100	90
Prąd zasilania I_0, (mA)	200	220	220
Sprawność (%)	5,5÷6,5	5,5÷6,5	5÷6

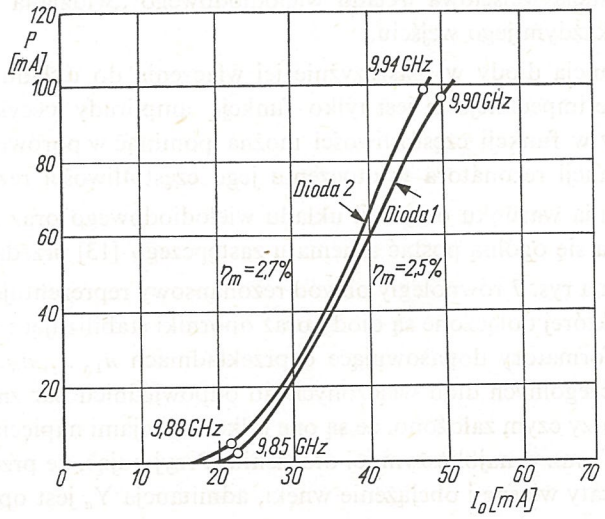
przy której następuje wzbudzenie oscylacji) różnią się ze względu na poziom impedancji wielkosygnałowej. Szkic połączenia pięciu struktur na miedzianej podstawce oprawki jest pokazany na rys. 5.

Diody wielostrukturowe (z połączeniem równoległym) są obecnie wytwarzane na skalę przemysłową. W tablicy 1 zestawiono podstawowe parametry takich diod, produkowanych przez firmę Microwave Associates [6].

3. UKŁADY GENERATORÓW WIELODIODOWYCH

Stosowane do połączenia w układzie generatora wielodiodowego diody lawinowe powinny być w zasadzie dobrane pod względem zgodności charakterystyk wielosygnałowych. Problem ten jednak nie jest w pełni opracowany, ponieważ nie sprecyzowano do tej pory dopuszczalnego rozrzutu parametrów poszczególnych diod łączonych w jednym rezonatorze oraz jego wpływu na parametry użytkowe układu. Istniejąca obecnie bardzo uproszczona analiza K. Kurokawy [13] nie pozwala wyjaśnić tego zagadnienia. Analiza ta, pomimo iż w znacznym stopniu ułatwia zrozumienie działania układu wielodiodowego, nie uwzględnia efektów parametrycznych jakie mogą w nim występować, zwłaszcza w warunkach dużego rozrzutu parametrów poszczególnych diod.

Prezentowane dalej wyniki doświadczalne otrzymane dla układów dwudiodowych dotyczą układów, w których zastosowano diody dobrane według dwóch kryteriów:
— przebiegu charakterystyk mocy wyjściowej $P(I_0)$,
— parametrów statycznych.
Charakterystyki mocy wyjściowej wybranych diod są przedstawione na rys. 6.



Rys. 6. Charakterystyki mocy wyjściowej w funkcji prądu zasilania diod wyselekcjonowanych do łączenia w generatorach dwudiodowych

Tablica 2

Zestawienie parametrów statycznych diod f-my Varian do układu dwudiodowego

	$C(V_B)$	R_T	V_B	V_0	$I_{0\,max}$
Dioda 1	0,32 pF	28°C/W	52 V	78÷80 V	54 mA
Dioda 2	0,309 pF	33°C/W	52 V	78÷80 V	54 mA

Parametry statyczne wybranych diod są zestawione w tablicy 2.

Układ generatora wielodiodowego powinien spełniać następujące warunki:

— symetryczne rozmieszczenie diod względem wspólnego obciążenia (warunek synfazowości sygnałów),

— realizację odpowiednich sprzężeń pomiędzy poszczególnymi diodami (powinny być minimalne) oraz pomiędzy diodami a obciążeniem, które na częstotliwości podstawowej układu powinno być optymalne ze względu na moc wyjściową i szumy.

W celu przeciwdziałania wzbudzaniu się układu wielodiodowego na częstotliwościach wyższych rodzajów stosowane są często oporniki stabilizujące, które jednak powodują pewną stratę mocy generowanej w układzie na częstotliwości podstawowej. W warunkach ustalonych oscylacji układu wielodiodowego wymienione powyżej warunki można zapisać następująco:

$|Z_{we\,0}| = |\overline{Z}(A)|$ — dla rodzaju podstawowego,

$|Z_{we\,m}| \gg |\overline{Z}(A)|$ — dla pozostałych rodzajów,

gdzie:

Z_{we} — impedancja wejściowa układu wielodiodowego „widziana" przez każdą diodę na każdym jego wejściu,

$\overline{Z}(A)$ — impedancja diody w płaszczyźnie jej włączenia do układu (zakłada się przy tym, że impedancja ta jest tylko funkcją amplitudy oscylacji, natomiast jej zmiany w funkcji częstotliwości można pominąć w porównaniu ze zmianami impedancji rezonatora w otoczeniu jego częstotliwości rezonansowej).

W celu określenia warunku oscylacji układu wielodiodowego oraz zależności na moc wyjściową, rozważa się ogólną postać schematu zastępczego [13] przedstawioną na rys. 7.

Przedstawiony na rys. 7 równoległy obwód rezonansowy reprezentuje obciążoną wnękę o N wejściach, do której dołączone są diody oraz oporniki stabilizujące szeregowo z każdą diodą przez transformatory dopasowujące o przekładniach $n_1, \ldots, n_N$. Admitancje wielkosygnałowe poszczególnych diod włączonych do odpowiednich par zacisków oznaczono przez $\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_N$, przy czym założono, że są one tylko funkcjami napięcia oscylacji na pewnej częstotliwości f oraz w najbliższym jej otoczeniu. Przyjmując, że przewodności G_c oraz G_L reprezentują straty własne i obciążenie wnęki, admitancja Y_a jest opisana przez

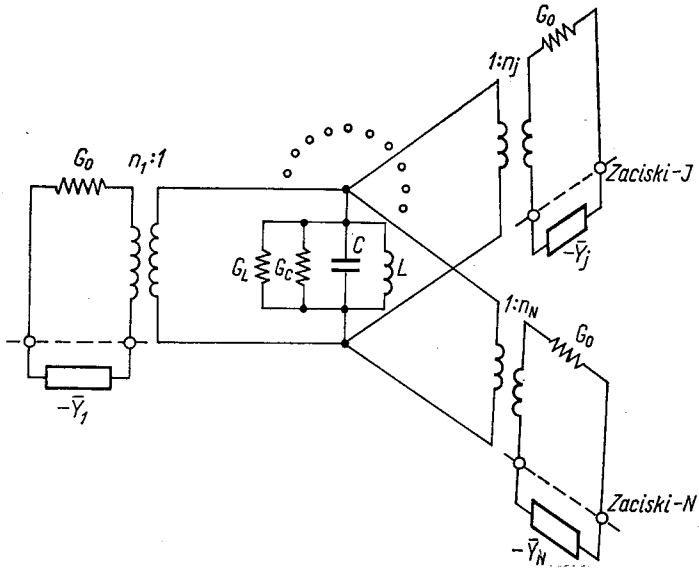
$$Y_a = \sqrt{\frac{L}{C}}\left\{j\left(\frac{\omega}{\omega_a} - \frac{\omega_a}{\omega}\right) + \frac{1}{Q_a} + \frac{1}{Q_{ext}}\right\}, \tag{17}$$

gdzie

$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}, \quad \frac{1}{Q_a} = \frac{G_c}{\omega_a C}, \quad \frac{1}{Q_{ext}} = \frac{G_L}{G_a C}.$$

Wymienione wyżej warunki prawidłowej pracy układu wielodiodowego w przypadku układu przedstawionego na rys. 7 mają postać

$$Z_{we0} = \frac{1}{G_0} + \frac{c}{Y_a} \quad \text{— dla rodzaju podstawowego,} \tag{18}$$



Rys. 7. Schemat zastępczy generatora wielodiodowego

gdzie $c = n_1^2 + n_2^2 + \ldots n_N^2$,

$$Z_{wem} = \frac{1}{G_0} \quad \text{— dla wyższych, niepożądanych rodzajów,} \tag{19}$$

gdzie $m = 1, 2, \ldots, N-1$.

W warunkach ustalonych oscylacji dla rodzaju podstawowego powinien być spełniony warunek zerowania się admitancji diod i wnęki, czyli

$$Y_a = \frac{n_1^2 G_0 \bar{Y}_1}{G_0 - Y_1} + \frac{n_1^2 G_0 \bar{Y}_2}{G_0 - Y_2} + \ldots + \frac{n_N^2 G_0 \bar{Y}_N}{G_0 - Y_N}. \tag{20}$$

W przypadku identycznych diod, tzn. $\bar{Y}_1 = \bar{Y}_2 = \ldots = \bar{Y}_N$, oraz identycznych przekładni $n_1^2 = n_2^2 = \ldots = n_N^2 = n^2$, równanie (20) przyjmuje postać

$$Y_a = \frac{n^2 N G_0 \bar{Y}(A_0)}{G_0 - Y(A_0)}$$

lub

$$\overline{Y}(A_0) = \frac{1}{(1/G_0)-(n^2N/Y_a)},$$

gdzie A_0 — amplituda oscylacji w warunkach ustalonych.

Moc wyjściowa wydzielana w obciążeniu zewnętrznym układu jest równa

$$P_L = P_d N\left(1-\frac{Q_{ext}}{Q_{ext}+Q_a}\right)\cdot\left(1-\frac{\overline{G}}{G_0}\right), \tag{21}$$

gdzie:

$$\overline{G} = \frac{1}{1/G_0+n^2N/(G_c+G_L)},$$

P_d — moc wydzielana z pojedynczej diody;

ponadto założono, że częstotliwość oscylacji generatora jest w przybliżeniu identyczna jak częstotliwość rezonansowa wnęki.

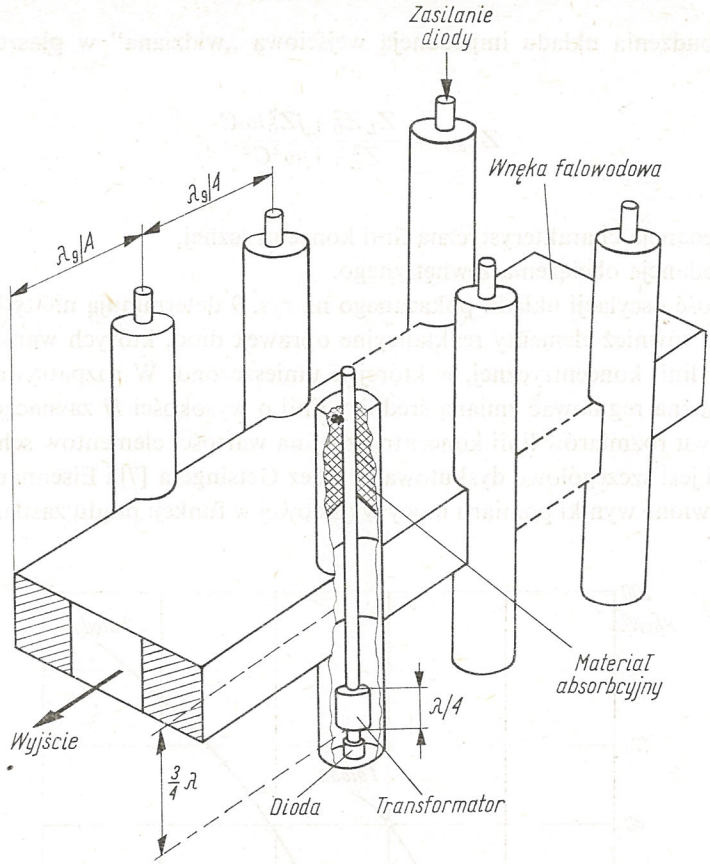
Zależność (21) wskazuje, że moc wyjściowa jest tym większa, im większą dobroć własną Q_a posiada wnęka oraz im większą wartość posiada przewodność G_0. Należy jednak dodać, że całkowita eliminacja opornika stabilizującego może spowodować pojawienie się oscylacji o częstotliwościach wyższych rodzajów.

Jedną z możliwych realizacji generatora wielodiodowego spełniającą założenia przedstawionego na rys. 7 układu jest konstrukcja F. M. Magalhaesa i K. Kurokawy [13]. Szkic tego generatora jest pokazany na rys. 8.

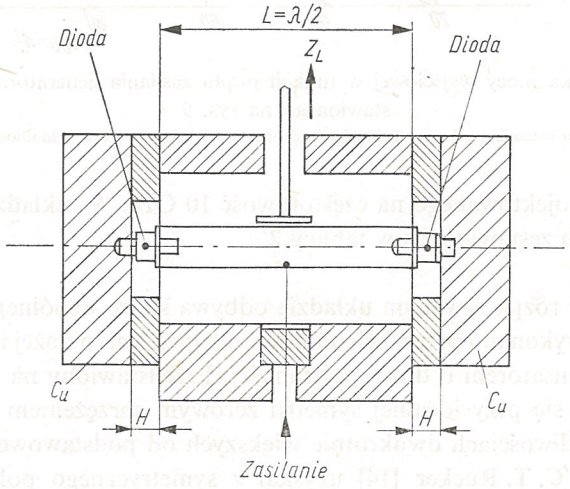
W układzie pokazanym na rys. 8 diody lawinowe są umieszczone na końcach linii koncentrycznych sprzężonych z rezonatorem falowodowym przez szczeliny w bocznych jego ściankach. Diody te mogą być w zasadzie dopasowywane indywidualnie ćwierćfalowymi transformatorami o przekładni impedancyjnej n, tak że problem dokładnej selekcji diod nie jest w tym układzie krytyczny. Na przeciwległych diodom końcach każdej linii koncentrycznej są umieszczone oporniki stabilizujące wykonane w postaci stożków z materiału absorpcyjnego. Przy odpowiednim zestrojeniu układu na częstotliwości podstawowej, minimum rozkładu fali TEM w każdej linii koncentrycznej wystąpi w płaszczyźnie warstwy absorpcyjnej tak, że wnoszone przez nią tłumienie powinno być najmniejsze. W zakresie częstotliwości wyższych rodzajów występuje inny rozkład fali, przy którym warstwa absorpcyjna wnosi duże straty przeciwdziałające wzbudzeniu oscylacji w układzie. Prawidłowemu zestrojeniu układu odpowiada równocześnie rozkład podstawowy w rezonatorze prostokątnym, przy którym w płaszczyznach szczelin sprzęgających występują maksima składowych magnetycznych tego rozkładu. Przedstawiony na rys. 8 układ skonstruowano w 1970 r. uzyskując moc wyjściową 10,5 W przy połączeniu 12 diod lawinowych. Sprawność tego generatora przy częstotliwości 9,1 GHz wynosiła 6,2%.

Znacznie prostszą wersję układu wielodiodowego zaproponował Rucker [14]; jego zmodyfikowaną wersją jest układ nie zawierający opornika stabilizującego (przez co problem właściwej selekcji diod jest bardzo istotny) przedstawiony na rys. 9.

W pokazanym na rys. 9 układzie sprzężenie rezonatora z obciążeniem zewnętrznym zapewnia regulowany kondensator sprzęgający w postaci dysku, umieszczony w części środkowej. W płaszczyźnie tej występuje maksimum rozkładu TEM. W warunkach syme-



Rys. 8. Realizacja praktyczna generatora wielodiodowego [13]



Rys. 9. Realizacja praktyczna generatora dwudiodowego w układzie rezonatora koncentrycznego

trycznego wzbudzenia układu impedancja wejściowa „widziana" w płaszczyźnie każdej diody wynosi

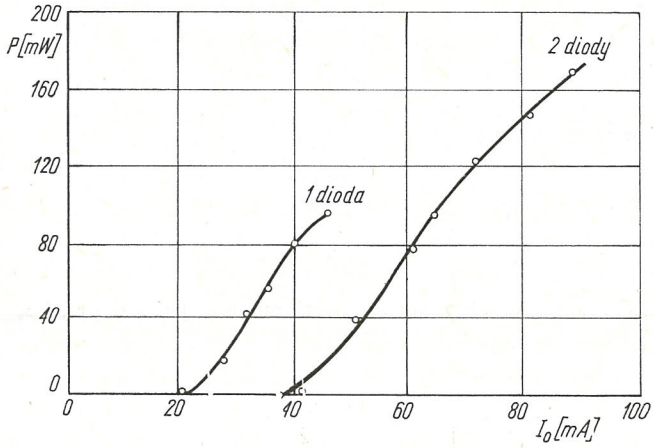
$$Z_{we\,0} = \frac{Z_L Z_0^2 + jZ_0^2/\omega C}{Z_L^2 + 1/\omega^2 C^2}, \tag{22}$$

gdzie:

Z_0 — impedancja charakterystyczna linii koncentrycznej,

Z_L — impedancja obciążenia zewnętrznego.

Częstotliwość oscylacji układu pokazanego na rys. 9 determinują nie tylko długość rezonatora, pecz również elementy reaktancyjne oprawek diod, których wartości są zależne od rozmiarów linii koncentrycznej, w której je umieszczono. W rozpatrywanym układzie elementy te można regulować zmianą średnicy linii o wysokości H zaznaczonej na rys. 9. Problem wpływu rozmiarów linii koncentrycznej na wartości elementów schematu zastępczego oprawki jest szczegółowo dyskutowany przez Getsingera [7] i Eisenharta [8]. Na rys. 10 są przedstawione wyniki pomiaru mocy wyjściowej w funkcji prądu zasilania dla układu

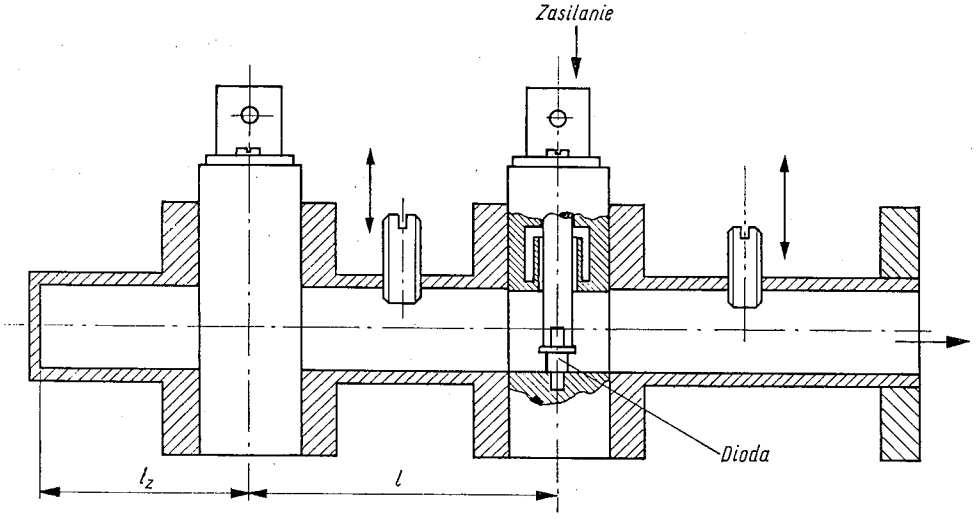


Rys. 10. Charakterystyka mocy wyjściowej w funkcji prądu zasilania generatora dwudiodowego przedstawionego na rys. 9
(dla porównania pokazano analogiczną charakterystykę generatora jednodiodowego)

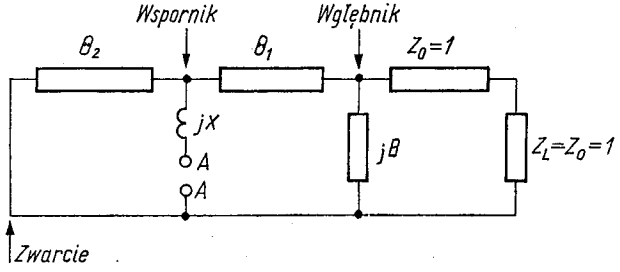
dwudiodowego zaprojektowanego na częstotliwość 10 GHz. W układzie tym zastosowano diody o parametrach zestawionych w tablicy 2.

Zasilanie diod w rozpatrywanym układzie odbywa się ze wspólnego zasilacza. Doprowadzenie zasilania wykonano przez ćwierćfalowy odcinek linii o dużej impedancji ($Z \gg Z_0$) zablokowany kondensatorem o dużej pojemności. Przedstawiony na rys. 9 układ generatora charakteryzuje się przy idealnej symetrii zerowym sprzężeniem z obciążeniem zewnętrznym na częstotliwościach dwukrotnie większych od podstawowej. W układzie o podobnej konstrukcji C. T. Rucker [14] uzyskał z symetrycznego połączenia pięciu diod moc wyjściową 4 W przy sprawności 5% na częstotliwości 7 GHz oraz 3 W przy częstotliwości 9,1 GHz.

Warto również rozpatrzyć możliwość sprzężenia diod z linią transmisyjną przez kaskadowe łączenie odpowiednich głowic zawierających diody, ponieważ rozwiązanie to jest konstrukcyjnie bardzo proste i daje dobre rezultaty. Na rys. 11 pokazano układ połączenia kaskadowego identycznych dwóch głowic w torze falowodowym na pasmo X.



Rys. 11. Generator dwudiodowy zrealizowany przez kaskadowe połączenie głowic falowodowych



Rys. 12. Schemat zastępczy pojedynczej głowicy falowodowej zawierającej wspornik do mocowania diody lawinowej

Dioda lawinowa jest dołączona do zacisków A-A. Pomiędzy obciążeniem a głowicą jest umieszczony wgłębnik, głowica jest zamknięta regulowanym zwieraczem

Schemat zastępczy pojedynczej głowicy, w której rolę transformatora impedancji spełnia wspornik metalowy, jest określony na bazie uproszczonej analizy J. F. White'a [9]. Schemat ten pokazano na rys. 12.

Zakładając, że układ jest bezstratny, impedancja Z_{AA} występująca na zaciskach dołączenia diody jest równa

$$Z_{AA} = R_{AA} + jX_{AA}, \tag{23}$$

gdzie:

$$R_{AA} = \frac{Z_g X_{AA}^2 (1+\operatorname{tg}\Theta_1)}{(1-B_g \operatorname{tg}\Theta_1)^2 + \operatorname{tg}^2\Theta_1},$$

$$X_{AA} = X + \frac{Z_g\{(1-B\operatorname{tg}\Theta_1)^2 + \operatorname{tg}^2\Theta_1\}}{\operatorname{tg}\Theta_1(2-B^2)+B^2(1-\operatorname{tg}^2\Theta_1)},$$

przy czym:

Z_g — impedancja falowodu prostokątnego odniesiona do obszaru metalowego,

$$Z_g = 2\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{\lambda_g}{\lambda_0}\cdot\frac{b}{a}.$$

Jeżeli wgłębnik dopasowujący znajduje się w odległości około $\pi/2$, tzn. $\lambda_f/4$ na częstotliwości oscylacji, co w praktyce jest spełnione, to

$$R_{AA} \simeq \frac{Z_g \cdot X^2}{B^2} \tag{24}$$

oraz

$$X_{AA} \simeq X, \quad \text{ponieważ } |B| \gg 1.$$

Jeżeli impedancja diody jest równa $Z_d = -R_d - jX_d$, to warunek oscylacji ma postać

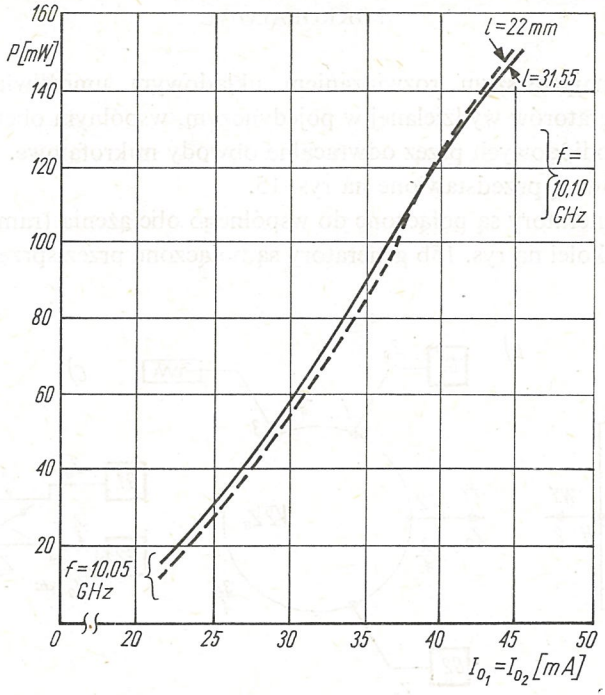
$$-R_d + R_{AA} = 0, \tag{25}$$

$$-\frac{1}{X-X_d} = \operatorname{cot}\Theta_1 + \operatorname{cot}\Theta_2.$$

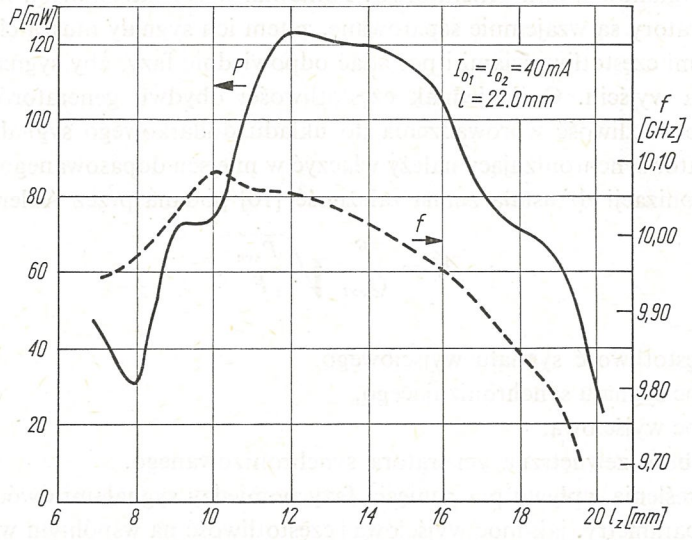
Przedstawione powyżej zależności pozwalają wstępnie zaprojektować układ pojedynczej głowicy. Możliwość regulacji wgłębnikiem zastosowanym na wejściu głowicy ułatwia dopasowanie części rzeczywistej impedancji obciążenia do diody. Reaktancję X wspornika dobiera się zazwyczaj eksperymentalnie. Częstotliwość pracy układu jest określona przez wartość reaktancji X i położenie zwieracza Θ_2 ustalone względem płaszczyzny umocowania diody. W oparciu o powyższe zależności wykonano dwie identyczne pod względem częstotliwości generowanej głowice z diodami lawinowymi. Uwzględniając możliwość dopasowania każdej diody do obciążenia wynikającą z dużego zakresu regulacji susceptancji B na wejściu, dokonano połączenia tych głowic przez odcinek falowodu o długości $\Theta \simeq \pi$, umieszczając za drugą głowicą regulowany zwieracz. W sekcji łączącej obydwie głowice zastosowano dodatkowy wgłębnik, który pozwala zestroić stabilnie układ. Dodatkową zaletą wynikającą z zastosowania tego wgłębnika jest możliwość wyboru długości odcinka łączącego L w sposób przybliżony.

Przedstawione na rys. 13 wyniki pomiaru mocy wyjściowej układu dwudiodowego wskazują, że niewielka zmiana długości odcinka łączącego obydwie głowice nie wpływa decydująco na wartość parametrów użytkowych układu.

W badanym układzie dwudiodowym (rys. 11) istnieje możliwość mechanicznego przestrojenia częstotliwości. Możliwości tej nie posiadają układy poprzednio rozpatrywane. Przedstawione na rys. 14 wyniki pomiaru mocy wyjściowej i częstotliwości w funkcji położenia zwieracza wskazują, że zakres mechanicznego przestrojenia jest jednak stosunkowo wąski. Wynosi on około 300 MHz. Wąskopasmowość rozpatrywanego układu wiąże się z jego dużą dobrocią własną.



Rys. 13. Charakterystyki mocy wyjściowej generatora przedstawionego na rys. 11 przy dwóch różnych długościach linii falowodowej łączącej głowice

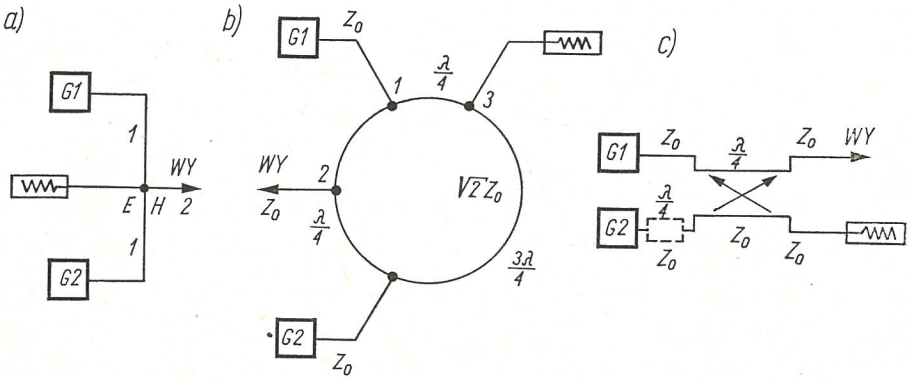


Rys. 14. Charakterystyki przestrajania generatora dwudiodowego (rys. 11) w funkcji zmiany położenia zwieracza

4. ŁĄCZENIE GENERATORÓW JEDNODIODOWYCH PRZEZ OBWODY MIKROFALOWE

Stosunkowo najprostszym rozwiązaniem układowym umożliwiającym sumowanie mocy z kilku generatorów wydzielanej w pojedynczym, wspólnym obciążeniu jest łączenie generatorów jednodiodowych przez odwracalne obwody mikrofalowe. Przykłady połączeń dwóch generatorów są przedstawione na rys. 15.

Na rys. 15a generatory są połączone do wspólnego obciążenia (ramię H) przez mostek „magiczne T". Z kolei na rys. 15b generatory są połączone przez sprzęgacz pierścieniowy,



Rys. 15. Przykłady łączenia generatorów przez mikrofalowe układy sprzęgające

natomiast na rys. 15c przez ćwierćfalowy sprzęgacz kierunkowy. Odcinek $\lambda/4$ włączony dodatkowo pomiędzy wejściem drugiego generatora a sprzęgaczem kierunkowym zapewnia synfazowość sygnałów z obu generatorów. Ponieważ w rozpatrywanych na rys. 15 połączeniach generatory są wzajemnie separowane, zatem ich sygnały muszą charakteryzować się identycznymi częstotliwościami i posiadać odpowiednie fazy, aby sygnały te podlegały sumowaniu na wyjściu. O ile jednak częstotliwości obydwu generatorów niewiele się różnią, istnieje możliwość wprowadzenia do układu dodatkowego sygnału synchronizującego. Generator synchronizujący należy włączyć w miejscu dopasowanego obciążenia Z_0. Zakres synchronizacji Δf ustala znana zależność [10] podana przez Adlera

$$\Delta f = \frac{F}{Q_{ext}} \sqrt{\frac{P_{syn}}{P}}, \tag{26}$$

gdzie:

F — częstotliwość sygnału wyjściowego,

P_{syn} — moc sygnału synchronizującego,

P — moc wyjściowa,

Q_{ext} — dobroć zewnętrzna generatora synchronizowanego.

W celu określenia wpływu przesunięcia fazy pomiędzy sygnałami dwóch generatorów badano takie parametry, jak moc wyjściowa i częstotliwość na wspólnym wyjściu połączonych generatorów przez mostek „magiczne T". W układzie tym pomiędzy jednym z generatorów a wejściem mostka umieszczono przesuwnik fazy o regulowanym przesunięciu.