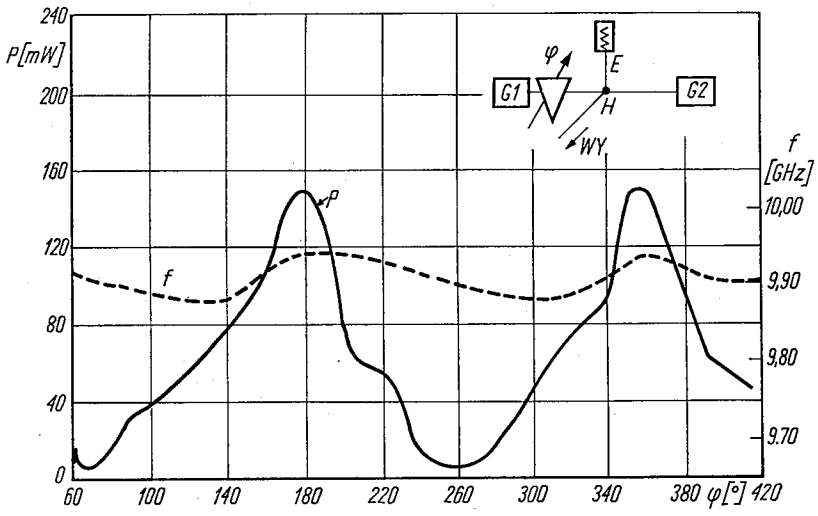
Wyniki pomiaru mocy wyjściowej i częstotliwości oscylacji w funkcji przesunięcia fazy przedstawiono na rys. 16.

Przedstawione na rys. 16 wyniki wskazują, że całkowite sumowanie mocy wyjściowych generatorów zachodzi tylko dla przesunięć fazy 0°, 180° i 360° pomiędzy sygnałami. Przy innych wartościach przesunięć fazy poziom mocy wyjściowej gwałtownie maleje, nawet



Rys. 16. Charakterystyki mocy wyjściowej i częstotliwości w funkcji przesunięcia fazy sygnału jednego z generatorów przy połączeniu przez obwód „magiczne T"

poniżej wartości, jaką można uzyskać z pojedynczego generatora. Obserwowane w trakcie pomiarów widmo sygnału wyjściowego było najwęższe w zakresie przesunięć fazy odpowiadających maksymalnej mocy, zaś najszersze z wyraźnym rozdwojeniem w punktach minimalnej mocy wyjściowej.

5. WNIOSKI

Całkowite opanowanie problemu zwiększenia mocy wyjściowej mikrofalowych generatorów półprzewodnikowych i wzmacniaczy (dotyczy to również diod Gunna i BARITT) poprzez łączenie struktur lub generatorów wymaga na obecnym etapie teorii obwodów mikrofalowych opracowania dokładnej metody analizy i projektowania układów wielodiodowych. Analiza taka uwzględniając wpływ nieliniowych procesów zachodzących w diodach obniży czasochłonność prac eksperymentalnych przy konstruowaniu tych układów, a ponadto pozwoli ustalić jednoznacznie kryterium selekcji diod stosowanych do współpracy z układem. Ważnym zagadnieniem, które nadal pozostaje nierozwiązane, jest problem przeciwdziałania awarii którejkolwiek diody w układzie. Wiadomo bowiem, że uszkodzenie chociażby jednej diody w układzie wielodiodowym może doprowadzić do gwałtownego obniżenia mocy wyjściowej lub nawet do zerwania drgań w układzie. W zakresie tego problemu występują więc dwa pytania:

— w jaki sposób zasilać diody: czy z odrębnych zasilaczy, czy stosować wspólne źródło zasilania?
— jak realizować dopasowanie poszczególnych diod do obciążenia, aby negatywne skutki zniszczenia którejkolwiek były z punktu widzenia parametrów wyjściowych układu jak najmniejsze?

Odrębnym problemem jest zapewnienie przestrajania częstotliwości. Większość opracowanych dotychczas układów wielodiodowych nie posiada takiej możliwości, przede wszystkim dlatego, że wiąże się to z istotną komplikacją układu. Należy przypuszczać zatem, że aktualnie tylko konwencjonalne układy generatorów jednodiodowych umożliwiają realizację szerokopasmowego przestrajania częstotliwości.

Reasumując przedstawione w pracy metody zwiększania mocy wyjściowych półprzewodnikowych generatorów mikrofalowych (problem ten dotyczy również wzmacniaczy mocy) należy zauważyć, że dalszy rozwój badań w tej dziedzinie będzie polegał na opracowaniu uniwersalnego układu wielodiodowego, który zapewni proste i niezawodne dopasowanie poszczególnych diod do wspólnej wnęki. Najnowsze publikacje [15], [16] z tej dziedziny wskazują, że najbardziej preferowanym układem jest układ K. Kurokawy [13], który w zmodyfikowanej wersji wzmacniacza z 16 diodami lawinowymi pozwolił uzyskać moc 20 W w paśmie *X* [15]. Należy jednak spodziewać się znacznie większych mocy wyjściowych otrzymywanych z układów wielodiodowych ze względu na nieustanne doskonalenie technologii półprzewodnikowych elementów generacyjnych, jak również modyfikacji tych układów.

LITERATURA

1. W. T. Read, *A Proposed High Frequency Negative Resistance Diode*, BSTJ, 37, 1958, ss. 1—46.
2. D. L. Scharfetter, H. K. Gummel, *Large-Signal Analysis of a Silicon Read Diode Oscillator*, IEEE Trans. on ED-16, ss. 64—77.
3. H. W. Thim, *Active Microwave Semiconductor Devices*, Proc. of 4th European Conf. of Microwave—Montreaux, 1974, ss. 1—15.
4. M. Kondo i współautorzy, *Effect of Junction Area of Silicon IMPATT Diodes on Microwave Output Power*, Proc. of the 1 st Conf. on Solid State Devices, Tokyo 1969, ss. 159—165.
5. M. Gilden, M. E. Hines, *Electronic Tuning Effects in the Read Microwave Avalanche Diode*, IEEE Trans. on ED-13, 1966, ss. 166—175.
6. Microwave Associates, Ltd., Bulletin L/0105, May, June 1972.
7. W. J. Getsinger, *The Packaged and Mounted Diode as a Microwave Circuit*, IEEE Trans. on MTT-14, 1966, ss. 58—69.
8. R. L. Eisehart, *Take the Trouble of Diode Mounting*, Microwaves, No 6, 1974, ss. 78—81.
9. J. F. White, *Simplified Theory for Post Coupling Gunn Diodes to Waveguide*, IEEE Trans. on MTT-20, 1972, ss. 372—378.
10. R. Adler, *A Study of Locking Phenomena in Oscillators*, Proc. IRE 34, 1946, ss. 351—357.
11. C. B. Swan i współautorzy, *Composite Avalanche Diode Structures for Increased Power Capability*, IEEE Trans. on ED-17, 1967, ss. 584—589.
12. S. G. Liu, J. J. Risko, *Fabrication and Performance of Kilowatt L-Band Avalanche Diodes*, RCA Review, March 1970, ss. 3—19.
13. K. Kurokwa, *The Single-Cavity Multiple-Devices Oscillator*, IEEE Trans. on MTT-19, 1971, ss. 793—801.

14. C. T. Rucker, *A Multiple-Diode High-Average Power Avalanche Diode Oscillator*, IEEE Trans. on MTT-17, 1969, ss. 1156—1158.
15. F. Ivanek, *Single-Stage, Multi-Diode Amplifier Design and Performance*, Microwave Journal, No 2, 1974, ss. 52—55.
16. R. S. Harp, K. J. Russell, *Improvements in Bandwidth and Frequency Capability of Microwave Power Combinatorial Techniques*, ISSCC, 1974, sec. 9, ss. 94—95.

M. MAJEWSKI

METHODS OF INCREASING OUTPUT POWER IN AVALANCHE DIODE OSCILLATORS

Summary

The limits of the output power of ATT oscillators are discussed in this paper. Possibility of increasing the output power by employing multichip diodes placed in one package is described.

Multidiode oscillators are reviewed and new constructions are proposed. Experimental verification of these new oscillators is presented.

A simplified analysis used for the design of such oscillators is given.

M. MAJEWSKI

MÉTHODE D'AUGMENTATION DE LA PUISSANCE DE SORTIE DES GÉNÉRATEURS AUX DIODES À AVALANCHE

Résumé

Dans l'étude on a conduit une discussion sur la limitation de la puissance générée par la diode à avalanche du genre IMPATT. Ensuite on a décrit la possibilité de joindre quelques structures sur le support commun de la châsse pour augmenter la puissance d'alimentation de la diode.

Dans la partie se rapportant aux systèmes multidiodes on a montré les propriétés des systèmes connus dans les publications et on a suggéré aussi l'idée des nouvelles solutions. La description de ces systèmes est completée par les résultats des mesures obtenus.

A la discussion sur les systèmes présentés dans l'étude on a ajouté une analyse simplifiée permettant de les projeter.

M. MAJEWSKI

VERGRÖßERUNGSMETHODE DER ANFANGSLEISTUNG VON GENERATOREN MIT LAWINENDIODEN

Zusammenfassung

In dem Artikel wurde über die Beschränkung der Generatorleistung durch die Lawinendiode der Art der IMPATT-Diode diskutiert. Danach wurde die Möglichkeit erörtert, mehrere Strukturen auf einem gemeinsamen Fassungssockel zu verbinden, um die Speiseleistung der Diode zu steigern.

In dem die Mehrdiodensysteme behandelnden Abschnitt wurden die in der Literatur bekannten Systeme besprochen, auch neue Lösungsvorschläge gebracht. Die gewonnenen Meßergebnisse ergänzen die Beschreibung dieser Systeme.

Die Diskussion über die im Artikel vorgeführten Systeme wird durch eine vereinfachte Projektierungsanalyse für diese Systeme vervollständigt.

М. МАЕВСКИ

МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ ВЫХОДНОЙ МОЩНОСТИ ГЕНЕРАТОРОВ НА ЛАВИННО-ПРОЛЕТНЫХ ДИОДАХ

Р е з ю м е

В статье рассматриваются ограничения выходной мощности лавинно-пролетного диода в генераторе. Описана также возможность соединения нескольких диодных структур в одном патроне, что приводит к увеличению выходной мощности.

Представлены способы увеличения выходной мощности путем соединения нескольких диодов в цепи одного генератора. Рассматривается несколько таких схем генераторов. В заключение представлены экспериментальные результаты.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 3, ss. 605—623

621.315.61:621,3.029.63/.66

Pomiary własności dielektryków mikrofalowych metodą rezonatora dielektrycznego

MARIAN POSPIESZALSKI (WARSZAWA)

Instytut Podstaw Elektroniki Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 16.9.1974

W pracy przedyskutowano przydatność metody pomiaru dielektryków mikrofalowych, znanej pod nazwą metody rezonatora dielektrycznego [3, 10, 11], do pomiaru dielektryków o dużych wartościach stałej dielektrycznej ε_r ($\varepsilon_r \geqslant 10$). Podano wykresy i wzory pozwalające na szybką identyfikację, pożądanego z punktu widzenia metody, rodzaju TE_{011} wzbudzanego w cylindrycznym rezonatorze dielektrycznym, zwartym na obu końcach. Przedstawiono wykresy i wzory pozwalające w prosty sposób obliczyć błędy pomiaru części rzeczywistej i urojonej przenikalności elektrycznej.

1. WPROWADZENIE

Materiały dielektryczne o dużych wartościach względnej przenikalności elektrycznej ε_r ($\varepsilon_r \geqslant 10$) coraz częściej znajdują zastosowanie w nowoczesnych konstrukcjach miniaturowych układów mikrofalowych. Opracowano wiele typów materiałów dielektrycznych o $\varepsilon_r \geqslant 10$ i o niewielkich stratach na częstotliwościach mikrofalowych. Duże wartości stałej dielektrycznej i małe wartości $\operatorname{tg}\delta$ narzucają pewne wymagania metodzie używanej do pomiarów tych wielkości.

Typowe dla mikrofal metody pomiaru własności dielektryków [1, 2] polegają na:

1) pomiarze parametrów czwórnika utworzonego przez odcinek prowadnicy falowej, który zawiera umieszczoną w określony sposób próbkę dielektryka (lub na pomiarze zmian tych parametrów bez i w obecności próbki dielektryka),
2) pomiarze zmiany parametrów rezonatora mikrofalowego pod wpływem umieszczenia w nim w określony sposób próbki dielektryka.

Przydatność danej metody do pomiaru dielektryków o dużych wartościach ε_r zależy od odpowiedzi na następujące pytania:

1) Czy słuszne są założenia będące podstawą wzorów obliczeniowych dla danej metody?
2) Jak istotny wpływ na dokładność pomiarów posiadają szczeliny powietrzne między płaszczyznami metalowymi układu pomiarowego a płaszczyznami próbki dielektryka?
3) Jaka jest dokładność pomiaru bezpośrednio mierzonej wielkości (np. współczynnika fali stojącej, dobroci nieobciążonej itp.)?
4) Jaka jest pracochłonność przygotowania próbek i przeprowadzenia pomiarów?

U podstaw metod grupy pierwszej leży założenie, że próbkę dielektryka umieszczoną w prowadnicy falowej można traktować jako czwórnik, co jest równoznaczne z założeniem istnienia w układzie tylko jednego rodzaju fali elektromagnetycznej (jest to zazwyczaj rodzaj podstawowy). Próbka dielektryka całkowicie wypełniająca falowód obniża $\sqrt{\varepsilon_r}$-krotnie częstotliwości odcięcia dla poszczególnych rodzajów. Przy dostatecznie dużych wartościach ε_r mogą więc zaistnieć dla częstotliwości pomiarowych warunki propagacji wyższych rodzajów wewnątrz próbki dielektryka. Wzbudzenie tych rodzajów, spowodowane na przykład niejednorodnością próbki czy istnieniem szczelin powietrznych, może w trudny do przewidzenia sposób zakłócić pomiar. Nawet gdy można przyjąć założenie o jednomodowej propagacji wewnątrz próbki dielektryka, przy pomiarach próbek o dużych wartościach ε_r olbrzymi wpływ na dokładność pomiarów posiadają szczeliny powietrzne istniejące między dielektrykiem a metalem tam, gdzie istnieje składowa pola elektrycznego normalna do powierzchni rozdziału [3]. Powyższe względy wraz z trudnościami pomiarowymi, które mogą wystąpić (np. dokładny pomiar bardzo dużych wartości współczynnika odbicia), wykluczają szersze stosowanie metod falowodowych przy pomiarach dielektryków o stałej dielektrycznej większej od kilkunastu na częstotliwościach pasma X i wyższych.

Metody grupy drugiej, zwane metodami rezonansowymi, można dalej podzielić na:

1) metody perturbacyjne,

2) metody opierające się na dokładnym rozwiązaniu rezonatora z umieszczoną w nim próbką dielektryka.

Metody perturbacyjne są metodami przybliżonymi i opierają się na następujących założeniach [2, 4]: mała względem objętości całego rezonatora objętość próbki, jednoznaczne określenie pola elektrycznego w próbce na podstawie rozkładu pola w niezaburzonym rezonatorze. Konsekwencją pierwszego założenia jest określenie dla danej dokładności pomiaru maksymalnego dopuszczalnego przestrojenia rezonatora zawierającego próbkę względem rezonatora pustego [2, 4]. Konsekwencją drugiego założenia są wymagania dotyczące kształtu, dopuszczalnych wymiarów próbek, lub także dotyczące jednorodności pola elektrycznego w obszarze, w którym ma zostać umieszczona próbka. Założenia te prowadzą do bardzo małych wymiarów próbek w przypadku dielektryków o dużych wartościach przenikalności elektrycznej. Dla przykładu: próbka w kształcie kuli o $\varepsilon_r \geqslant 10$ umieszczona w środku geometrycznym typowego rezonatora prostopadłościennego na pasmo X pracującego w rodzaju H_{101} przy dopuszczalnym przestrojeniu wnęki $\approx 0{,}1\%$ powinna mieć średnicę $\lesssim 1{,}2$ mm [2].

Metody pomiarowe opierające się na dokładnych rozwiązaniach rezonatora zawierającego próbkę nie posiadają powyższych ograniczeń. Jednak to dokładne rozwiązanie dotyczy jedynie wybranego rozkładu pola w rezonatorze [2, 5, 6]. Umieszczenie w rezonatorze próbki o objętości porównywalnej z objętością rezonatora może w istotny sposób zmienić własności wzbudzanych w nim rodzajów, np. wzajemne położenie częstotliwości własnych, relacje ortogonalności [7]. Mogą pojawić się rodzaje wynikające z istnienia fal powierzchniowych [2] związanych z próbką dielektryka. Biorąc pod uwagę, że umieszczenie próbki dielektryka o dużej przenikalności elektrycznej zmienia częstotliwość własną właściwego rodzaju nawet o kilkadziesiąt procent, powyższe efekty mogą istotnie utrudniać jego identyfikację, a w szczególnych przypadkach (rodzaje zdegenerowane, sprzężenie

między rodzajami) uniemożliwić pomiar. Należy także dodać, że większość spośród metod rezonansowych jest wrażliwa na wpływ szczelin powietrznych.

Powyższe względy zadecydowały, że coraz szerszym zainteresowaniem cieszą się metody wykorzytujące fakt, że sama próbka dielektryka może być rezonatorem mikrofalowym [3, 8, 9, 10, 11]. Bell i Rupprecht [8] wykorzystali to zjawisko do pomiaru tangensa kąta strat tytanianu strontu w pasmach mikrofalowych. Gerritsen i Sabinsky [9] zmierzyli stałą dielektryczną dwutlenku tytanu określając gęstość rodzajów w danym przedziale częstotliwości dla dostatecznie dużej próbki dielektryka i wykorzystując statystyczną zależność Rayleigh-Jeans'a.

Najwięcej uwagi w literaturze poświęcono metodzie, w której rezonator pomiarowy tworzy badana próbka dielektryka w kształcie walca i dwie płaszczyzny metalowe równoległe do płaszczyzn podstaw próbki i do nich przylegające [3, 10, 11]. Metoda ta pozwala na określenie zarówno części rzeczywistej jak i urojonej przenikalności elektrycznej dielektryków. Zasada tej metody podana po raz pierwszy w pracy [10] polega na określeniu częstotliwości rezonansowej i dobroci nieobciążonej rezonatora pracującego w rodzaju TE_{011}. Wybór rodzaju TE_{011} jest związany z niewielkim wpływem istnienia szczelin powietrznych między próbką a płaszczyznami metalowymi na częstotliwość rezonansową tego rodzaju, a tym samym na dokładność pomiaru części rzeczywistej przenikalności elektrycznej. Courtney [11] wskazał na możliwość zastosowania tej metody do pomiarów mikrofalowych materiałów magnetycznych. Posługując się tą metodą, zmierzył także ε_r i $\operatorname{tg}\delta$ wielu dielektryków mikrofalowych o $\varepsilon_r \geqslant 10$ w zakresie częstotliwości $2 \div 14$ GHz. Określił, że typowa względna dokładność pomiaru ε_r wyniosła $\pm 0{,}3\%$ przy dokładności pomiaru wymiarów próbki $\pm 0{,}01$ mm i dokładności pomiaru częstotliwości ± 1 MHz. Dopuszczając 30% błąd określenia oporności powierzchniowej złota, którym pokryte zostały płyty metalowe oraz mierząc szerokość krzywej rezonansowej z dokładnością $\pm 0{,}1$ MHz podał, że bezwzględny błąd pomiaru $\operatorname{tg}\delta$ jest mniejszy od $4 \cdot 10^{-5}$. Powyższe stwierdzenia oparte na analizie wybranych przykładów pomiarowych nie mają jednak charakteru ogólnego. Krótko mówiąc, nie dają odpowiedzi na pytania, z jaką dokładnością należy wykonać próbkę, zmierzyć wymiary próbki i częstotliwość utworzonego przez nią rezonatora dla oczekiwanej dokładności pomiaru. Także nie dają odpowiedzi na pytanie w jakim stopniu dokładność pomiaru $\operatorname{tg}\delta$ dla próbek o różnych wymiarach i stałych dielektrycznych jest określona przez dokładność pomiaru dobroci nieobciążonej, a w jakim stopniu przez nieznajomość oporności powierzchniowej metalu.

W niniejszym artykule udzielono odpowiedzi na powyższe pytania. Przedstawiono także kartę rodzajów rezonatora dielektrycznego będącego przedmiotem rozważań, która jest słuszna w szerokim zakresie zmian stałej dielektrycznej próbki, co pozwala na względnie łatwą identyfikację pożądanego rodzaju TE_{011}.

2. WŁASNOŚCI CYLINDRYCZNEGO REZONATORA DIELEKTRYCZNEGO — ZASADA POMIARU

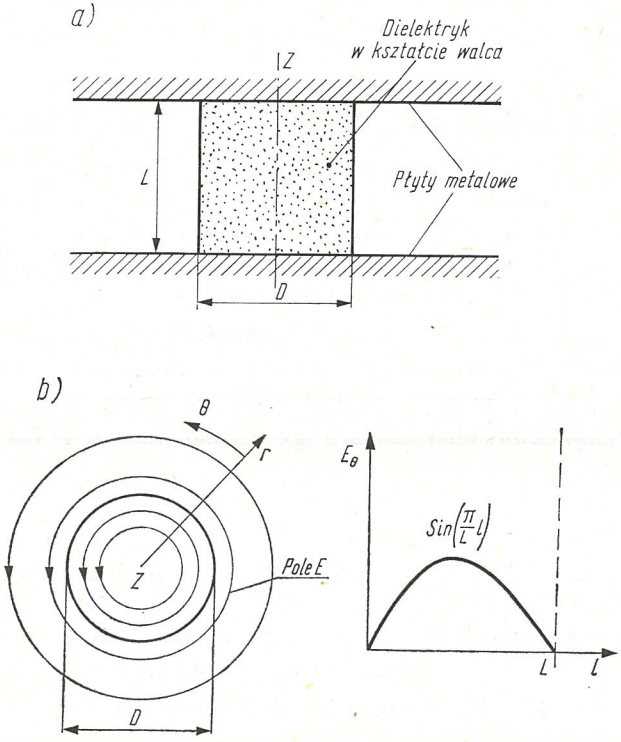
Rozpatrzmy próbkę dielektryka w kształcie walca umieszczoną pomiędzy dwoma nieskończonymi płaszczyznami metalowymi (rys. 1a). Stanowi ona odcinek cylindrycznej dielektrycznej prowadnicy falowej zwarty na obu końcach, a więc jest rezonatorem mikro-

falowym, którego częstotliwości własne są zależne od średnicy cylindra D, długości L oraz względnej przenikalności elektrycznej próbki ε_r. Związki pomiędzy tymi wielkościami są opisane układem równań [11], który przedstawiono w następującej wygodnej do dalszych rozważań postaci:

$$(J^+ + K^+)\left(J^- - \frac{K^-}{\varepsilon_r}\right) + (J^- - K^-)\left(J^+ + \frac{K^+}{\varepsilon_r}\right) = 0, \tag{1}$$

$$\left(\frac{\pi D}{\lambda_0}\right)^2 \varepsilon_r = u^2 + \left(\frac{\pi D l}{2L}\right)^2, \tag{2}$$

$$w^2 = \left(\frac{\pi D l}{2L}\right)^2 - \left(\frac{\pi D}{\lambda_0}\right)^2, \tag{3}$$



Rys. 1. a) Cylindryczny rezonator dielektryczny zwarty na obu końcach, b) Rozkład pola elektrycznego w rezonatorze

przy czym

$$J^- = \frac{J_{n-1}(u)}{uJ_n(u)}, \quad J^+ = \frac{J_{n+1}(u)}{uJ_n(u)}, \quad K^- = \frac{K_{n-1}(w)}{wK_n(w)}, \quad K^+ = \frac{K_{n+1}(w)}{wK_n(w)},$$

gdzie:

J_n — zwyczajna funkcja Bessela n-tego rzędu,

K_n — zmodyfikowana funkcja Hankela n-tego rzędu,

λ_0 — długość fali w wolnej przestrzeni odpowiadająca częstotliwości własnej f_0 rezonatora.

Równania (1), (2), (3) wynikają z równań opisujących rozchodzenie się fal elektromagnetycznych wzdłuż dielektrycznego pręta o przekroju cylindrycznym [12, 13]. O ile $n = 0$, zbiór rozwiązań układu równań (1), (2), (3) stanowią rodzaje TE_{0ml} i TM_{0ml}, dla $n \geqslant 1$ zbiór ten stanowią rodzaje HE_{nml} i EH_{nml}. Wskaźnik m oznacza numer kolejnego rozwiązania równań (1), (2), (3) dla danych n i l poczynając od najmniejszych wartości argumentu funkcji Bessela, wskaźnik l natomiast — ilość połówek fali odkładających się wzdłuż osi rezonatora.

Z postaci równania (2) wynika, że wygodnie jest podać rozwiązania układu równań (1), (2), (3) w układzie współrzędnych $F_0^2 = \left(\frac{\pi D}{\lambda_0}\right)^2 \varepsilon_r = f\left[\left(\frac{D}{L}\right)^2\right]$, przy czym F_0 może być traktowane jako zastępcza częstotliwość rezonansowa. Warto także zauważyć, że dla dostatecznie dużych wartości stałej dielektrycznej ε_r częstotliwość zastępcza F_0 jest jedynie funkcją $\frac{D}{L}$, bowiem dla wartości $\frac{D}{L}$ większych od 0 i $\varepsilon_r \to \infty$ układ równań (1), (2), (3) uprości się do postaci:

$$(J^+ + K^+)J^- + (J^- - K^-)J^+ = 0, \tag{4}$$

$$F_0^2 = u^2 + w^2, \tag{5}$$

$$w = \frac{\pi D l}{2L}. \tag{6}$$

Dyskusję innych własności takiego rezonatora autor podał w pracy [14]. Dla interesującego z punktu widzenia omawianej metody pomiarowej rodzaju TE_{011} [10] układ równań (1), (2), (3), przyjmie postać:

$$\frac{J_1(u)}{uJ_0(u)} = -\frac{K_1(w)}{wK_0(w)}, \tag{7}$$

$$F_0^2 = \left(\frac{\pi D}{\lambda_0}\right)^2 \varepsilon_r = u^2 + \left(\frac{\pi D}{2L}\right)^2, \tag{8}$$

$$w^2 = \left(\frac{\pi D}{2L}\right)^2 - \left(\frac{\pi D}{\lambda_0}\right)^2. \tag{9}$$

Pole elektryczne rodzaju TE_{011} posiada jedynie składową E_Θ (rys. 1b), która znika na płaszczyznach przewodzących. Z tego wynika, że powstanie szczeliny powietrznej pomiędzy płaszyzną podstawy próbki a płaszczyzną metalową może tylko w nieznacznym stopniu wpłynąć na częstotliwość rezonansową rodzaju TE_{011}, a tym samym na dokładność pomiaru części rzeczywistej przenikalności elektrycznej.

Dobroć nieobciążona Q_0 rezonatora, pracującego w rodzaju TE_{011}, jest związana z tangensem kąta strat $\operatorname{tg}\delta$ próbki dielektryka zależnością [10]:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{A}{Q_0} - B, \tag{10}$$

przy czym:

$$A = 1 + \frac{1}{\varepsilon_r} F(u_1) G(w_1), \tag{11}$$

$$B = \frac{R_s}{2\pi f_0^3 \mu_0^2 \varepsilon_0 L^3 \varepsilon_r} [1 + F(u_1) G(w_1)], \tag{12}$$

$$F(u_1) = \frac{J_1^2(u_1)}{[J_1^2(u_1) - J_0(u_1) J_2(u_1)]}, \tag{13}$$

$$G(w_1) \equiv \frac{[K_0(w_1) K_2(w_1) - K_1^2(w_1)]}{K_1^2(w_1)}, \tag{14}$$

gdzie:

μ_0, ε_0 — przenikalność elektryczna i magnetyczna próżni,

u_1, w_1 — argumenty funkcji Bessela o najmniejszych wartościach spełniające układ równań (7), (8), (9),

$J_2(u_1)$, $K_2(w_1)$ — wartości odpowiednich funkcji Bessela drugiego rzędu,

R_s — rezystywność powierzchniowa metalu, z którego są wykonane płyty przewodzące, określona dla częstotliwości rezonansowej rodzaju TE_{011}.

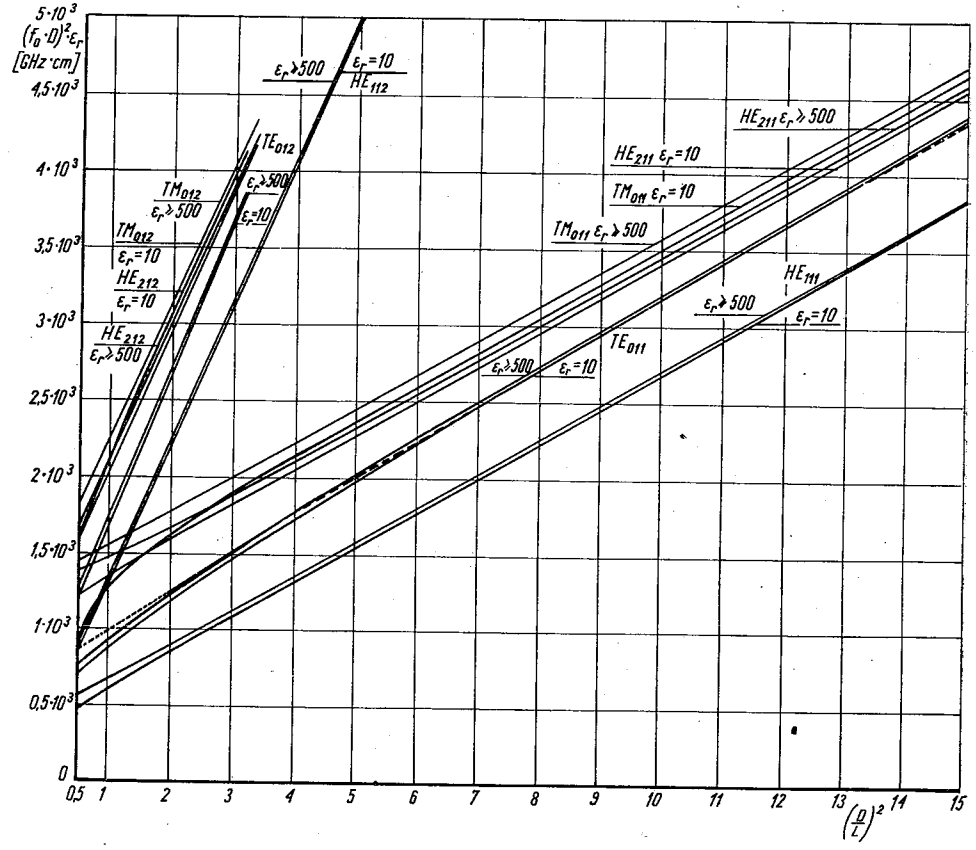
Powyższe wzory pozwalają obliczyć przenikalność elektryczną ε_r i tg δ próbki dielektryka, o ile znamy wymiary próbki, częstotliwość rezonansową f_0 i dobroć nieobciążoną Q_0 rezonatora pracującego w rodzaju TE_{011}, a także wartość rezystywności powierzchniowej R_s. Zagadnieniem pierwszoplanowym jest poprawna identyfikacja rodzaju TE_{011}.

3. ZAGADNIENIE IDENTYFIKACJI RODZAJU TE_{011}

Warunkiem nieodzownym poprawnej identyfikacji rodzaju TE_{011} jest znajomość karty rodzajów takiego rezonatora. W tym celu rozwiązano numerycznie układ równań (1), (2), (3) dla $\varepsilon_r = 10$ i $\varepsilon_r = 500$ oraz układ równań (4), (5), (6) odpowiadający warunkowi $\varepsilon_r \to \infty$. Wzięto pod uwagę jedynie te rodzaje, które mogą mieć znaczenie z punktu widzenia omawianej metody. Wyniki przedstawiono na rys. 2. W przyjętym układzie współrzędnych rozwiązania dla $\varepsilon_r = 500$ i $\varepsilon_r \to \infty$ z dokładnością wykonania wykresów pokrywają się. Największa względna różnica pomiędzy wykresami dla $\varepsilon_r = 500$ i $\varepsilon_r \to \infty$ wynosi 0,46% $\left(\text{rodzaj } TE_{011}, \left(\frac{D}{L}\right)^2 = 0{,}5\right)$. Ponieważ różnice pomiędzy wykresami dla $\varepsilon_r = 10$ i $\varepsilon_r \geqslant 500$ są niewielkie, przedstawiona karta rodzajów może służyć do przybliżonego określania częstotliwości rezonansowych różnych rodzajów dla dowolnej wartości $\varepsilon_r \geqslant 10$.

Z przedstawionych wykresów wynika, że rodzaj TE_{011} jest drugim co do częstotliwości rodzajem wzbudzanym w takim rezonatorze. Prawdopodobieństwo jego wadliwej identyfikacji jest duże zarówno dla bardzo dużych wartości stosunku średnicy próbki do jej długości (tutaj największe zagrożenie stanowi rodzaj HE_{211}), jak i dla małych wartości tego stosunku (wtedy zagrożenie stanowią rodzaje HE_{211}, TM_{011}, HE_{112}). Z punktu widzenia łatwości identyfikacji pożądanego rodzaju TE_{011} istnieje pewien optymalny przedział wartości stosunku średnicy próbki do jej długości; można przyjąć, że jest to: $1 \leqslant \left(\frac{D}{L}\right)^2 \leqslant 10$. W poprawnej identyfikacji rodzaju TE_{011} może być pomocny fakt, że

częstotliwości wszystkich rodzajów sąsiednich (tzn. HE_{111}, HE_{211}, TM_{011}, HE_{112}) znacznie silniej zależą od małych zmian wielkości szczelin powietrznych pomiędzy dielektrykiem a metalem, niż to ma miejsce w przypadku rodzaju TE_{011}. Wynika to z faktu, że wszystkie rodzaje sąsiednie posiadają składową pola elektrycznego normalną do powierzchni płyt metalowych, w przeciwieństwie do rodzaju TE_{011}. Dodatkowe ułatwienie może stanowić



Rys. 2. Częstotliwości własne rezonatora utworzonego przez odcinek cylindrycznej dielektrycznej prowadnicy falowej zwarty na obu końcach

obliczenie oczekiwanej częstotliwości rezonansowej rodzaju TE_{011} dla oszacowanej na podstawie innych pomiarów wartości ε_r. Wygodnie jest tutaj skorzystać z przybliżonego wzoru określającego częstotliwość rodzaju TE_{011} o postaci:

$$F_0^2 = \left(\frac{\pi D}{\lambda_0}\right)^2 \varepsilon_r = \varrho_{11}^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\varrho_{11}^2 + \left(\frac{\pi D}{2L}\right)^2}}\right)^2 + \left(\frac{\pi D}{2L}\right)^2, \tag{15}$$

gdzie ϱ_{11} jest pierwszym większym od zera pierwiastkiem zwyczajnej funkcji Bessela pierwszego rzędu ($\varrho_{11} = 3.83171$). Sposób wyprowadzenia tego wzoru został podany przez autora w pracy [14], a jego interpretacja graficzna została przedstawiona linią kropkowaną na rys. 2.

Wzór ten może być stosowany także do obliczenia wartości przenikalności elektrycznej ε_r dla danych D, L i f_0, o ile wymagana dokładność nie jest zbyt duża. Dla przykładu maksymalny błąd obliczenia ε_r wprowadzany przez wzór (15) dla $5 \leqslant \left(\frac{D}{L}\right)^2 \leqslant 15$ i $\varepsilon_r \geqslant 10$ jest mniejszy od 0,7%.

Powyższe informacje pozwalają na poprawną identyfikację rodzaju TE_{011}. Dalej odpowiedziano na pytanie, jakie wyniki i w jakim stopniu decydują o dokładności pomiarów ε_r i $\operatorname{tg}\delta$.

4. DOKŁADNOŚĆ POMIARÓW

Przedstawione w rozdziale 2 zależności określają ε_r i $\operatorname{tg}\delta$ dielektryka w funkcji mierzalnych parametrów „idealnego" rezonatora dielektrycznego pracującego w rodzaju TE_{011}. Przez „idealny" należy rozumieć rezonator utworzony przez próbkę w kształcie idealnego cylindra i nieskończenie duże płyty metalowe o znanej i niewielkiej rezystywności powierzchniowej. Dokładność pomiaru ε_r i $\operatorname{tg}\delta$ zależy więc od dokładności pomiarów wymiarów próbki, dokładności pomiaru częstotliwości rezonansowej i dobroci nieobciążonej takiego rezonatora. Można znaleźć, jak to pokazano poniżej, proste przybliżone wyrażenia określające powyższe zależności. W praktycznym układzie pomiarowym pojawiają się jednak dodatkowe źródła błędów, spośród których należy wymienić; istnienie szczelin powietrznych, skończone wymiary płyt metalowych, odchylenia kształtu próbki od kształtu idealnego cylindra, nieznajomość wartości rezystywności powierzchniowej, straty energii na promieniowanie w układzie pomiarowym. Poniżej pokazano, jak można oszacować wpływ niektórych spośród wyżej wymienionych efektów na dokładność pomiarów i w jakich warunkach można pominąć pozostałe.

Dokładność pomiaru ε_r

Jak to wynika z rys. 2, zastępcza częstotliwość rezonatora $F_0 = \left(\frac{\pi D}{\lambda_0}\right)\sqrt{\varepsilon_r}$ jest dla dużych wartości ε_r jedynie funkcją stosunku średnicy próbki D do jego długości L. W szczególności dla rodzaju TE_{011} względne różnice pomiędzy wykresem dla $\varepsilon_r = 10$ i wykresem dla $\varepsilon_r \to \infty$ wynoszą odpowiednio: dla $\left(\frac{D}{L}\right)^2 = 0{,}5 - 3{,}7\%$, dla $\left(\frac{D}{L}\right)^2 = 1{,}0 - 2{,}3\%$, dla $\left(\frac{D}{L}\right)^2 = 2{,}0 - 1{,}3\%$, dla $\left(\frac{D}{L}\right)^2 \geqslant 3{,}0$ różnice te są mniejsze od 1%. Przyjmując za słuszną zależność:

$$F_0^2 = \left(\frac{\pi D}{\lambda_0}\right)^2 \varepsilon_r = f_1\left(\frac{D}{L}\right) \tag{16}$$

można — obliczając różniczkę zupełną obustronnie zlogarytmowanego wyrażenia (16) i zastępując nieskończenie małe przyrosty $d\varepsilon_r$, df_0, dD i dL odpowiednio małymi skończonymi

przyrostami $\Delta\varepsilon_r$, Δf_0, ΔD i ΔL — otrzymać, że

$$\left|\frac{\Delta\varepsilon_r}{\varepsilon_r}\right| = 2\left|\frac{\Delta f_0}{f_0}\right| + f_2\left(\frac{D}{L}\right)\left|\frac{\Delta L}{L}\right| + \left[2 - f_2\left(\frac{D}{L}\right)\right]\left|\frac{\Delta D}{D}\right|, \tag{17}$$

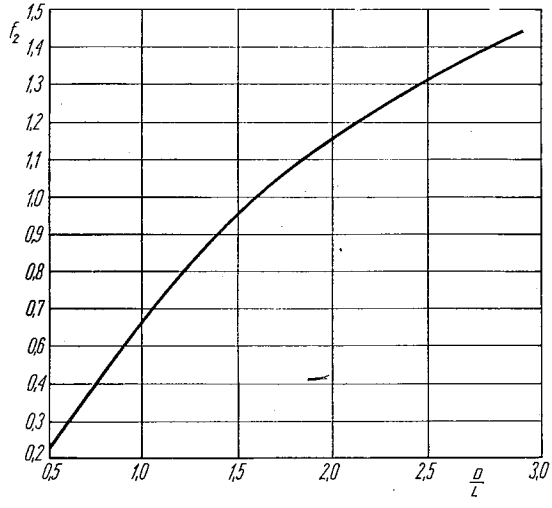
przy czym

$$f_2\left(\frac{D}{L}\right) = \frac{f_1'\left(\frac{D}{L}\right)\cdot\frac{D}{L}}{f_1\left(\frac{D}{L}\right)},$$

a $f_1'\left(\frac{D}{L}\right)$ jest pochodną funkcji $f_1\left(\frac{D}{L}\right)$ względem argumentu.

Wyrażenie (17) wiąże bezpośrednio zależność błędu względnego pomiaru przenikalności elektrycznej $\frac{\Delta\varepsilon_r}{\varepsilon_r}$ z względnymi błędami pomiarów częstotliwości rezonansowej $\frac{\Delta f_0}{f_0}$, średnicy próbki $\frac{\Delta D}{D}$ i jej długości $\frac{\Delta L}{L}$.

Wykres funkcji $f_2\left(\frac{D}{L}\right)$, wynikający z numerycznego rozwiązania układu równań (7), (8) przy założeniu $w = \frac{\pi D}{2L}$, przedstawiono na rys. 3. Warto zauważyć, że dla parametru $\frac{D}{L}$ przyjmującego wartości w przedziale $(0, \infty)$, funkcja $f_2\left(\frac{D}{L}\right)$ może przyjmować wartości w przedziale (0, 2). Jak to wynika z zależności (9), powyższe założenie jest tym gorzej



Rys. 3. Wykres funkcji $f_2\left(\frac{D}{L}\right)$ określającej transformacje względnych błędów pomiaru wymiarów próbki $\frac{\Delta D}{D}$ i $\frac{\Delta L}{L}$ na względny błąd pomiaru stałej dielektrycznej $\frac{\Delta\varepsilon_r}{\varepsilon_r}$

(definicja podana zależnością (17))

spełnione, im mniejsze są wartości ε_r i $\frac{D}{L}$. Warto więc sprawdzić, na ile wzór (17) jest słuszny dla granicznego spośród omawianych tutaj przypadków, a mianowicie dla $\varepsilon_r = 10$ i $\left(\frac{D}{L}\right)^2 = 0{,}5$.

Z wzoru (17) otrzymuje się:

$$\left|\frac{\Delta\varepsilon_r}{\varepsilon_r}\right| = 2\left|\frac{\Delta f_0}{f_0}\right| + 0{,}47\left|\frac{\Delta L}{L}\right| + 1{,}53\left|\frac{\Delta D}{D}\right|.$$

Natomiast numeryczna analiza układu równań (7, 8, 9) daje:

$$\left|\frac{\Delta\varepsilon_r}{\varepsilon_r}\right| = 2{,}21\left|\frac{\Delta f_0}{f_0}\right| + 0{,}65\left|\frac{\Delta L}{L}\right| + 1{,}56\left|\frac{\Delta D}{D}\right|.$$

Porównanie powyższych zależności wskazuje, że przy $\varepsilon_r \geqslant 10$ wzór (17) pozwala dostatecznie dobrze określić błąd względny pomiaru stałej dielektrycznej dla wszystkich spotkanych w praktyce przypadków.

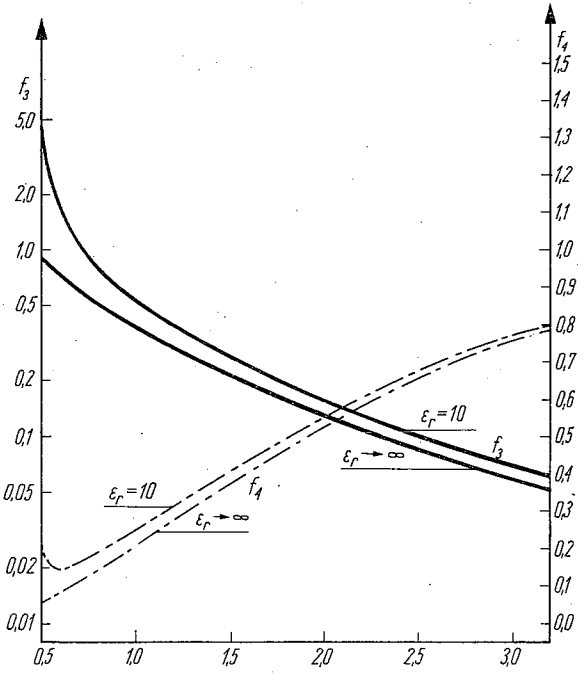
W rzeczywistości próbka dielektryka będąca przedmiotem pomiarów może posiadać kształt nieco różny od kształtu idealnego cylindra. Niedoskonałość kształtu geometrycznego próbki zakłóca zasadę ortogonalności rodzajów wzbudzonych w takim rezonatorze. Może to być przyczyną sprzęgania się rodzajów o nieznacznie różniących się częstotliwościach rezonansowych. Jednak dla prawidłowo wybranych wymiarów próbki, różnice częstotliwości pomiędzy sąsiednimi rodzajami a rodzajem TE_{011} są na tyle duże, że dla małych, wynikających z obróbki mechanicznej, odchyleń kształtu próbki od kształtu idealnego cylindra zjawisko powyższe nie zachodzi. Tym samym można uważać, że małym zmianom kształtu próbki towarzyszą małe zmiany częstotliwości rezonansowej rodzaju TE_{011}. Jeśli więc przy danej dokładności pomiarów wymiarów geometrycznych próbki można odkryć niedoskonałość jej kształtu (nierównoległość płaszczyzn podstawy, niejednakowe i różniące się od koła przekroje), to spowodowany tym maksymalny błąd względny pomiaru przenikalności elektrycznej $\frac{\Delta\varepsilon_r}{\varepsilon_r}$ może być obliczony ze wzoru (17). Pod ΔL i ΔD należy wtedy podstawić maksymalną różnicę pomiędzy dwoma pomiarami odpowiednich wymiarów. W podobny sposób można obliczyć maksymalny błąd wprowadzony przez szczelinę powietrzną, wynikającą z niedoskonałości obróbki powierzchni podstaw próbki czy płaszczyzn metalowych.

Skończone wymiary płyt metalowych zakłócając rozkład pola w rezonatorze mogą wprowadzić dodatkowy błąd pomiaru przenikalności elektrycznej. Jednak uważa się [3], że wpływ ten jest pomijalny, o ile najmniejsza średnica płyt metalowych jest większa od $(4L+D)$.

Dokładność pomiaru $\operatorname{tg}\delta$

Skomplikowana postać wzorów (10÷14) nie sprzyja dyskusji dokładności pomiarów $\operatorname{tg}\delta$. Jednak zagadnienie to istotnie się upraszcza w przypadku dielektryków o dostatecznie dużych wartościach stałej dielektrycznej ε_r. Wtedy, jak to wynika z rys. 2, zastępcza czę-

stotliwość rezonansowa F_0 zależy przede wszystkim od stosunku średnicy próbki D do jej długości L, a jedynie w nieznacznym stopniu od przenikalności ε_r. Nasuwa to wniosek, że również funkcje $F(u_1)$ i $G(u_1)$ występujące w zależnościach (10÷14) w nieznacznym stopniu zależą od stałej dielektrycznej ε_r, o ile $\varepsilon_r \geqslant 10$. Dla ułatwienia dyskusji wzorów (10÷14) wygodnie jest wprowadzić nową funkcję $f_3\left(\frac{D}{L}, \varepsilon_r\right)$ będącą iloczynem funkcji $F(u_1)$ i $G(w_1)$. Wykresy tej funkcji dla $\varepsilon_r \to \infty$ i $\varepsilon_r = 10$ przedstawiono na rys. 4. Wykresy te pozwalają natychmiast oszacować dla dowolnej wartości $\varepsilon_r \geqslant 10$ wielkość A (wzór (11)),



Rys. 4. Wykres funkcji $f_3\left(\frac{D}{L}, \varepsilon_r\right)$ określającej stosunek energii magazynowanej w rezonatorze do energii magazynowanej jedynie wewnątrz próbki dielektryka oraz funkcji $f_4\left(\frac{D}{L}, \varepsilon_r\right)$ określającej wpływ oporności powierzchniowej R_s na wynik pomiaru $\operatorname{tg}\delta$
(wykresy dla $\varepsilon_r \to \infty$ są z dokładnością lepszą od 1% słuszne dla wszystkich $\varepsilon_r \geqslant 500$)

która jest stosunkiem energii magazynowanej w całym rezonatorze do energii magazynowanej jedynie wewnątrz próbki dielektryka. Jak to wynika z przedstawionych wykresów dla rozpatrywanych tutaj przypadków wielkość A jest bardzo bliska jedności.

W dalszym ciągu warto zauważyć, że wzór (12) daje się w prosty sposób przekształcić do postaci:

$$B = \frac{R_s}{z_f} f_4\left(\frac{D}{L}, \varepsilon_r\right), \tag{18}$$

przy czym

$$f_4\left(\frac{D}{L}, \varepsilon_r\right) = \frac{\pi^2 \left(\frac{D}{L}\right)^3 (1+f_3)}{2F_0^3}, \tag{19}$$

a z_f jest impedancją falową badanego dielektryka, czyli

$$z_f = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}}. \tag{20}$$

Funkcja $f_4\left(\frac{D}{L}, \varepsilon_r\right)$ jest określona przez parametr $\frac{D}{L}$ próbki i wprowadzone uprzednie funkcje $f_3\left(\frac{D}{L}, \varepsilon_r\right)$ i $F_0\left(\frac{D}{L}, \varepsilon_r\right)$. Obie wspomniane funkcje dla $\varepsilon_r \geqslant 10$ w nieznacznym stopniu zależą od ε_r, tę samą cechę posiada więc funkcja f_4 określona wyrażeniem (19). Potwierdzające ten wniosek wykresy funkcji f_4 dla $\varepsilon_r \to \infty$ i $\varepsilon_r = 10$ zostały przedstawione na rys. 4. Powyższe uproszczenia pozwalają na zapisanie wzoru (10) w następującej, wygodnej do dalszej dyskusji postaci:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{1+\frac{1}{\varepsilon_r} f_3}{Q_0} - \frac{R_s}{z_f} \cdot f_4. \tag{21}$$

Jak to wynika ze wzoru (21), dokładność pomiaru $\operatorname{tg}\delta$ jest określona przez dokładność pomiaru dobroci nieobciążonej rezonatora Q_0 i dokładność określenia rezystywności powierzchniowej R_s. Zagadnienie dokładności różnych metod pomiaru dobroci nieobciążonej jest szeroko dyskutowane w literaturze (np. [2]) i nie będzie przedmiotem dalszych rozważań. Rezystywność powierzchniową R_s płaszczyzn metalowych dla danej częstotliwości rezonansowej f_0 teoretycznie można wyznaczyć znając jedynie konduktywność właściwą metalu σ. Wtedy [7]:

$$R_s = \sqrt{\frac{\pi f_0 \mu}{\sigma}}. \tag{22}$$

Wiadomo jednak, że w praktyce ogromny wpływ na wartość rezystywności powierzchniowej ma sposób i dokładność obróbki danej powierzchni. Stąd wartość rezystywności powierzchniowej obliczona za pomocą wzoru (22) może być obarczona bardzo dużym błędem. Wzór (21) wraz z wykresami przedstawionymi na rys. 4 pozwala natychmiast oznaczyć wpływ błędu określenia rezystywności powierzchniowej R_s na błąd pomiaru $\operatorname{tg}\delta$. Wpływ ten będzie tym mniejszy, im mniejszy jest stosunek rezystywności powierzchniowej R_s do impedancji falowej z_f badanego dielektryka oraz im mniejsza jest wartość stosunku średnicy próbki D do jej długości L. Dla przykładu, zmiana parametru $\frac{D}{L}$ z 3,2 do 0,7 pozwala w przybliżeniu ośmiokrotnie zmniejszyć wpływ błędu określenia oporności powierzchniowej R_s na błąd pomiaru $\operatorname{tg}\delta$. Jednak wybór zbyt małych wartości parametru $\frac{D}{L}$ może utrudnić poprawną identyfikację rodzaju TE_{011}. Także przy pomiarach próbek

o bardzo małych wartościach parametru $\frac{D}{L}$ pojawia się niebezpieczeństwo sprzężenia rodzaju TE_{011} z innym rodzajem wzbudzanym w rezonatorze, co może powodować duże i praktycznie niemożliwe do oszacowania błędy pomiaru $\operatorname{tg}\delta$. W takim przypadku wszystkie podane wyżej zależności tracą swoją ważność.

Graniczną dokładność pomiaru $\operatorname{tg}\delta$ wynikającą z danego względnego błędu określenia rezystywności powierzchniowej $\frac{\Delta R_s}{R_s}$ jest określona przez minimalną wartość parametru $\frac{D}{L}$ próbki i maksymalną konduktywność właściwą płyt metalowych. Przyjmując $\left(\frac{D}{L}\right)_{min} = 0{,}7$ (ze względu na identyfikację rodzaju TE_{011}) i $\sigma = 6{,}14 \cdot 10^7$ $[\Omega \cdot \mathrm{m}]^{-1}$ (przewodność właściwa czystego srebra) otrzymamy na podstawie zależności (18) i (22) następujący wzór:

$$\Delta \operatorname{tg}\delta = 0{,}76 \cdot 10^{-10} \sqrt{f_0}\, \sqrt{\varepsilon_r}\, \frac{\Delta R_s}{R_s}. \tag{23}$$

Wzór ten pozwala określić maksymalną możliwą do uzyskania w tej metodzie dokładność pomiaru $\operatorname{tg}\delta$, o ile nie jest ona wcześniej ograniczona przez dokładność pomiaru dobroci nieobciążonej Q_0 (por. wzór (21)).

Warto podkreślić, że wzory (21) i (23) przeczą stwierdzeniom zawartym w pracy [10], że dla dużych wartości stałej dielektrycznej ε_r można pominąć wpływ ścianek metalowych na dokładność pomiaru $\operatorname{tg}\delta$. W uzupełnieniu powyższej dyskusji należy jeszcze odpowiedzieć na pytanie, czy w takim rezonatorze dielektrycznym mogą występować straty energii powodowane promieniowaniem. Wprowadzałoby to dodatkowy, trudny do określenia błąd pomiaru $\operatorname{tg}\delta$. Osiowa symetria omawianego układu upoważnia do następującego sformułowania powyższego zagadnienia: czy rodzaj TE_{011} może być źródłem fali elektromagnetycznej rozchodzącej się w falowodzie radialnym (powierzchniami stałej fazy w takim falowodzie są pobocznice walca [15]). Rodzajem podstawowym w falowodzie radialnym jest rodzaj E_{00}. Rodzaj ten nie posiada częstotliwości odcięcia, a jego pola magnetyczne i elektryczne posiadają odpowiednio jedynie składowe H_Θ i E_z [15]. Jest to więc z punktu widzenia kierunku propagacji, określonego przez wektor $\vec{r}$, rodzaj TEM [15]. Łatwo zauważyć, że odpowiednie składowe pól rodzaju TE_{011} i rodzaju E_{00} leżą w płaszczyznach wzajemnie prostopadłych, tym samym rezonator pracujący w rodzaju TE_{011} nie może pobudzić rodzaju E_{00} w falowodzie radialnym. Wszystkie wyższe rodzaje E i H, które mogą rozchodzić się w falowodzie radialnym, posiadają częstotliwości odcięcia, a odpowiadająca im długość fali w wolnej przestrzeni zawsze spełnia nierówność: $\lambda_c \leqslant 2L$ [15]. Tymczasem, jak to wynika ze wzoru (9), w omawianym rezonatorze dielektrycznym długości fali λ_0 odpowiadające częstotliwościom rezonansowym rodzaju TE_{011} zawsze spełniają nierówność: $\lambda_0 \geqslant 2L$, a w praktyce dla $\varepsilon_r \gg 1$, $\lambda_0 \gg 2L$. Tym samym rodzaj TE_{011} nie może wzbudzić także wyższych rodzajów pola w falowodzie radialnym. Należy podkreślić, że wniosek ten nie zawsze musi być słuszny w przypadku rodzajów TE_{0ml} o $m \geqslant 1$ i $l > 1$. Tak więc propozycja wykorzystania tych rodzajów do dokładniejszych pomiarów $\operatorname{tg}\delta$ [11], uzasadniona mniejszym w tym wypadku wpływem błędu określenia rezystywności powierzchniowej R_s, jest w praktyce nieprzydatna.

W tym miejscu także należy zwrócić uwagę na trudność poprawnej identyfikacji wyższych rodzajów TE (por. wykresy na rys. 2).

Podniesienie dokładności pomiarów $\operatorname{tg}\delta$ można uzyskać zwracając uwagę na następujące własności rezonatora dielektrycznego:

1) funkcja f_4 określająca wpływ oporności powierzchniowej R_s na wynik pomiaru $\operatorname{tg}\delta$ znacznie silniej zależy od parametru $\frac{D}{L}$ próbki niż częstotliwość rezonansowa F_0,
2) próbki o różnych wartościach parametru $\frac{D}{L}$ mogą posiadać tę samą częstotliwość rezonansową.

Każda z powyższych własności przy wykonaniu co najmniej dwóch pomiarów pozwala określić $\operatorname{tg}\delta$ bez znajomości konduktywności właściwej σ, czy rezystywności powierzchniowej R_s. W pierwszym przypadku konieczne jest założenie, że $\operatorname{tg}\delta$ nie zmienia się w danym, wąskim zakresie częstotliwości. Można mierzyć wtedy kilkakrotnie tę samą próbkę dielektryka zmieniając nieco jej wymiary geometryczne. W drugim przypadku trzeba mieć pewność, że różne próbki dielektryka posiadają dokładnie tę samą wartość $\operatorname{tg}\delta$.

5. PRZYKŁAD

Użyteczność podanych w tej pracy wykresów i wzorów warto zilustrować przykładem pomiarowym. Załóżmy, że interesuje nas pomiar ε_r i $\operatorname{tg}\delta$ dielektryka na częstotliwości $f_0 \approx 9{,}7$ GHz. Przypuszczamy na podstawie pomiarów na niskich częstotliwościach, że $\varepsilon_r \approx 37$ i $\operatorname{tg}\delta \approx 5 \cdot 10^{-4}$. Jako kryterium wyboru parametru $\frac{D}{L}$ próbki przyjmijmy łatwość identyfikacji rodzaju TE_{011}. Niech więc $\left(\frac{D}{L}\right)^2 = 2{,}25$. Wtedy na podstawie wykresu podanego na rys. 2 otrzymamy: $F_0^2 = 1{,}3 \cdot 10^3$ [GHz · cm]^2. Z tego wynika, że próbka powinna mieć wymiary: $D = 6{,}1$ mm, $L = 4{,}1$ mm. A więc minimalna średnica zwierających płyt metalowych powinna być większa od 22 mm. Wartość funkcji f_2 odczytana z wykresu na rys. 3 dla $\frac{D}{L} = 1{,}5$ wynosi $f_2 = 0{,}95$. Wzór (17) przyjmie w tym wypadku postać:

$$\left|\frac{\Delta\varepsilon_r}{\varepsilon_r}\right| = 2\left|\frac{\Delta f_0}{f_0}\right| + 0{,}95\left|\frac{\Delta L}{L}\right| + 1{,}05\left|\frac{\Delta D}{D}\right|.$$

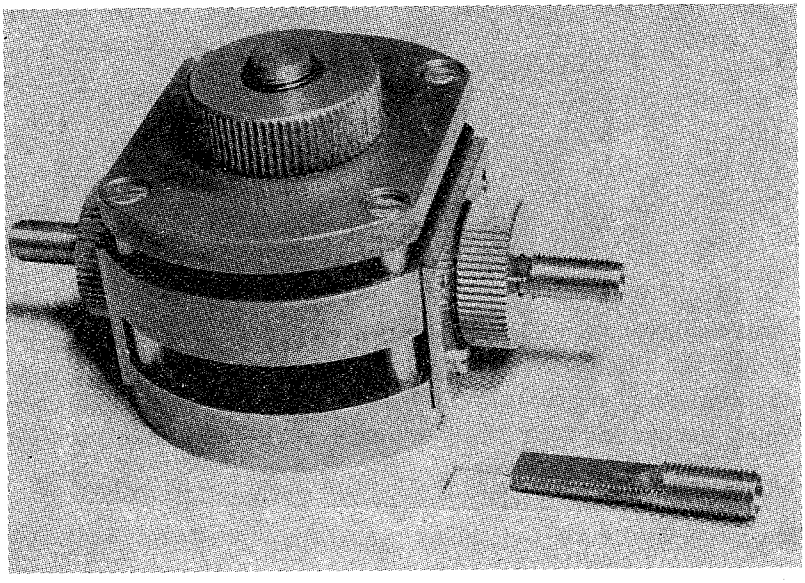
Załóżmy, że możemy mierzyć częstotliwość z względną dokładnością $5 \cdot 10^{-4}$. Jeśli teraz żądamy, aby względna dokładność pomiaru ε_r była rzędu $\pm 1\%$, to tolerancje wykonania próbek przy założeniu $\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta L}{L}$ wynoszą: $\Delta D \leqslant 0{,}027$ mm, $\Delta L \leqslant 0{,}018$ mm. Oczywiście podane w ten sposób tolerancje zawierają w sobie także odchylenia kształtu próbki od kształtu idealnego cylindra.

Przejdźmy teraz do oszacowania wpływu błędu określenia rezystywności powierzchniowej R_s. Korzystając z wzorów (18), (19), (20), (22) i z wykresu na rys. 4 otrzymamy:

— dla mosiądzu: $\sigma = 1{,}25 \cdot 10^7$ $[\Omega m]^{-1}$, $R_s = 55{,}4 \cdot 10^{-3}$ Ω, $B = 3{,}3 \cdot 10^{-4}$,
— dla aluminium: $\sigma = 3{,}54 \cdot 10^7$ $[\Omega m]^{-1}$, $R_s = 32{,}9 \cdot 10^{-3}$ Ω, $B = 2{,}0 \cdot 10^{-4}$,
— dla srebra: $\sigma = 6{,}14 \cdot 10^7$ $[\Omega m]^{-1}$, $R_s = 24{,}9 \cdot 10^{-3}$ Ω, $B = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$.

Jeśli teraz przyjmiemy 30%-owy błąd określenia rezystywności powierzchniowej R_s (jest to założenie dość pesymistyczne), to wynikający z tego bezwzględny błąd pomiaru $\operatorname{tg}\delta$ wynosi odpowiednio: $1 \cdot 10^{-4}$, $6 \cdot 10^{-5}$, $4{,}5 \cdot 10^{-5}$. Warto zwrócić uwagę, że zmniejszeniu parametru $\frac{D}{L}$ próbki z 1,5 do 1,0 odpowiadałoby zmniejszenie powyższych błędów w przybliżeniu o połowę.

Powyższy przykład zrealizowano praktycznie. Konstrukcję dielektrometru pokazano na rys. 5 [11]. Próbkę dielektryka umieszcza się pomiędzy dwiema polerowanymi płytami



Rys. 5. Przykład konstrukcji dielektrometru na pasmo X

mosiężnymi o średnicy 50 mm, których odległość od siebie można regulować w zależności od długości próbki. Utworzony w ten sposób rezonator jest włączany transmisyjnie w tor mikrofalowy. Sprzężenie rezonatora z torem uzyskuje się za pomocą antenek kończących odcinki miniaturowej linii współosiowej. Położenie antenek względem próbki można regulować, zmieniając tym samym wielkość sprzężenia rezonatora. Badany dielektryk stanowiła ceramika kondensatora oznaczona symbolem NPO produkcji Zakładu Doświadczalno-Badawczego Ceramiki Elektronicznej w Warszawie. Kilka przykładowych kompletów wyników pomiarowych zebrano w tablicy 1.

Wymiary i kształt próbek oraz dokładność pomiaru częstotliwości rezonansowej f_0 spełniały założenia powyższego przykładu, dając tym samym dokładność pomiaru stałej dielektrycznej $\frac{\Delta\varepsilon_r}{\varepsilon_r} = \pm 1\%$. Dokładność pomiaru dobroci nieobciążonej w powyższym ilustracyjnym eksperymencie wynosiła $\pm 20\%$. Ponieważ $A = 1.006$ (na podstawie wy-

kresu na rys. 4 i wzoru (21)), to maksymalny błąd bezwzględny pomiaru $\operatorname{tg}\delta$ uwzględniający błąd pomiaru dobroci nieobciążonej Q_0 i błąd określenia rezystywności powierzchniowej $\left(\frac{\Delta R_s}{R_s} = 30\%\right)$ wynosi: $\Delta \operatorname{tg}\delta = \pm 3 \cdot 10^{-4}$.

Warto zwrócić uwagę, że ceramika ta posiada mały współczynnik zmian przenikalności elektrycznej w funkcji temperatury $\left(\text{wg danych producenta } \frac{\Delta \varepsilon_r}{\varepsilon_r \Delta t} = \pm 6 \cdot 10^{-6}\right)$, a więc

Tablica 1

Pomiary ceramiki NPO

Nr	$D_{[mm]}$	$L_{[mm]}$	$f_{0\,[GHz]}$	Q_0	ε_r	$\operatorname{tg}\delta \cdot 10^4$
1	6,01	4,18	9,751	1010	36,00	6,7
2	6,02	4,21	9,737	1040	35,86	6,5
3	6,02	4,21	9,721	1440	35,98	3,8
4	6,06	4,19	9,718	1310	35,91	4,5
5	6,01	4,17	9,738	1400	36,20	3,9

może być bardzo dobrym materiałem do konstrukcji rezonatorów dielektrycznych o dużej stałości częstotliwości rezonansowej w funkcji temperatury. Przykład wykorzystania tej ceramiki do konstrukcji mikrofalowych filtrów pasmowo-zaporowych przedstawiono w pracy [16]. Z szeregu innych pomiarów przeprowadzonych w zakresie częstotliwości (9,5÷11,5) GHz, dla próbek o parametrze $\frac{D}{L}$ zmieniającym się od 0,65 do 7,1 wynika, że typowe parametry tej ceramiki w paśmie X wynoszą: $\varepsilon_r = 36{,}2 \pm 0{,}4$, $\operatorname{tg}\delta = (6 \pm 3) \cdot 10^{-4}$.

6. WNIOSKI

W pracy wszechstronnie przedyskutowano przydatność metody rezonatora dielektrycznego do pomiarów dielektryków o dużych wartościach względnej przenikalności elektrycznej ($\varepsilon_r \geqslant 10$), a w szczególności:

1) Wskazano na trudności, jakie mogą pojawić się przy pomiarach dielektryków o dużych wartościach stałej dielektrycznej metodami konwencjonalnymi.
2) Przedstawiono pokrótce teorię rezonatora dielektrycznego utworzonego przez odcinek cylindrycznej dielektrycznej prowadnicy falowej oraz uniwersalną kartę rodzajów takiego rezonatora dla $\varepsilon_r \geqslant 10$ i $\left(\frac{D}{L}\right)^2 \geqslant 0{,}5$.
3) Pokazano, że identyfikacja pożądanego rodzaju TE_{011} może być utrudniona zarówno dla małych jak i dla dużych wartości stosunku średnicy próbki D do jej długości L.

4) Stwierdzono, że dla $\varepsilon_r \geqslant 10$ dokładność pomiaru stałej dielektrycznej zależy jedynie od dokładności wykonania i pomiaru wymiarów próbki i dokładności pomiaru częstotliwości rezonansowej. Podano wzory i wykresy pozwalające określić względny błąd pomiaru przenikalności elektrycznej dla wszystkich przypadków, dla których $\left(\frac{D}{L}\right)^2 \geqslant 0{,}5$ i $\varepsilon_r \geqslant 10$.
5) Wykazano, że błąd pomiaru $\operatorname{tg}\delta$ wynikający z błędu określenia rezystywności powierzchniowej R_s płyt metalowych jest tym mniejszy, im mniejszy jest parametr $\frac{D}{L}$ próbki i im mniejszy jest stosunek rezystywności powierzchniowej R_s do impedancji falowej z_f badanego dielektryka. Podano wykresy i wzory pozwalające określić zależności liczbowe pomiędzy tymi wielkościami.

Metoda rezonatora dielektrycznego posiada kilka zalet w porównaniu z innymi metodami rezonansowymi:

1) Możliwość szerokich zmian przenikalności elektrycznej próbek, ich wymiarów, czy częstotliwości pomiaru w danym układzie pomiarowym.
2) Wpływ tolerancji wymiarów i kształtu próbek oraz wpływ szczelin powietrznych na wynik pomiaru jest łatwy do przewidzenia i mniej krytyczny niż w innych metodach rezonansowych.
3) Cała energia magazynowana w rezonatorze jest praktycznie skupiona wewnątrz próbki dielektryka, co pozwala na łatwą rejestrację takich efektów jak: zmiany ε_r i $\operatorname{tg}\delta$ przy zmianach parametrów otoczenia (temperatura, wilgotność), zmiany napięcia przyłożonego do próbki w przypadku ferroelektryków itp.

Podstawową wadą tej metody były skomplikowane postaci opisujących ją wzorów. Przedstawione w tej pracy wykresy i wzory w znacznym stopniu usuwają tę trudność. Można wyrazić nadzieję, że przyczynią się do szerszego spopularyzowania tej metody w miernictwie mikrofalowym.

Autor chciałby wyrazić serdeczne podziękowanie prof. dr A. Smolińskiemu za cenne uwagi podczas pracy nad niniejszym zagadnieniem, mgr inż. J. Rowińskiemu z ZDCE za okazaną pomoc, a także mgr inż. J. Błaszczykowi za wykonanie wielu pomiarów.

LITERATURA

1. A. F. Harvey, *Microwave Engineering*, Academic Press, London, New York 1963.
2. M. Sucher, J. Fox, *Handbook of microwave measurements*, V. II, Polytechnic Press of the Polytechnic Institute of Brooklyn, New York 1963.
3. S. B. Cohn, K. C. Kelly, *Microwave measurement of high-dielectric-constant materials*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT — 14, 9, 406—410, 1966.
4. L. Badian, A. Milewski, *Metoda perturbacyjna w zastosowaniu do badania dielektryków w paśmie mikrofalowym*, Elektronika, 3, 1971.
5. A. Milewski, *Układy pomiarowe do badania dielektryków w paśmie mikrofalowym*, Przegląd Elektroniki, 6, 1968.

6. L. Badian, A. Milewski, *Mikrofalowy miernik dielektryków w paśmie X*, Elektronika, 7—8, 1970.
7. R.E. Collin, *Prowadzenie fal elektromagnetycznych*, WNT, Warszawa 1966.
8. R.O. Bell, G. Rupprecht, *Measurement of small dielectric losses in material with a large dielectric constant at microwave frequencies*, IEEE Trans., Microwave Theory Tech., vol. MTT — 9, 5, 239—242, 1961.
9. J.I. Gerritsen, E.S. Sabinsky, *Measurement of the dielectric constant of rutile* (TiO_2) *at microwave frequencies between* 42° *and* 300°K, Journal of Applied Physics, 33, 4, 1450—1453, 1962.
10. B.W. Hakki, P.D. Coleman, *A dielectric resonator method of measuring inductive capacities in the millimeter range*, IRE Trans. Microwave Theory Tech. MTT — 8, s. 402—410, July 1960.
11. W.E. Courtney, *Analysis and evaluation of a method of measuring the complex permittivity and permeability of microwave insulators*, IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT — 18, 8, 476—485, August 1970.
12. E. Snitzer, *Cylindrical dielectric waveguide modes*, J. Optic. Soc. of America, 51, 5, 491—498, 1961.
13. S.P. Schlesinger, P. Diament, A. Vigants, *On higher order hybrid modes of dielectric cylinders*, IRE Trans. Theory Tech. MTT — 18, 2, 252—253, 1960.
14. M. Pospieszalski, *Rezonator mikrofalowy utworzony przez odcinek cylindrycznej dielektrycznej prowadnicy falowej*, Arch. Elektrotechniki (w druku).
15. N. Marcuvitz, *Waveguide Handbook*, MIT Radiation Laboratory Series, Mc Graw-Hill, New York 1951.
16. M. Pospieszalski, J. Błaszczyk, *Mikrofalowe własności oraz zastosowanie ceramik produkcji krajowej*, Mat. III Konf. MECS, 1, 42—49, Zakopane, wrzesień 1974.

M. POSPIESZALSKI

MEASUREMENT OF COMPLEX PERMITTIVITY OF MICROWAVE INSULATORS BY THE DIELECTRIC RESONATOR METHOD

Summary

The dielectric resonator method of measuring the complex permittivity of dielectrics at microwave frequencies is discussed. The mode chart of the dielectric post resonator for values of $\varepsilon_r \geqslant 10$ is presented. Curves and equations for rapid and simple determination of the accuracy of measurements are given.

M. POSPIESZALSKI

MESURES DES PROPRIÉTÉS DES DIÉLECTRIQUES MICRO-ONDES AVEC LA MÉTHODE DU RÉSONATEUR DIÉLECTRIQUE

Résumé

Dans l'étude on a discuté l'utilité de la méthode de mesure des diélectriques micro-ondes, connue sous le nom de la méthode du résonateur diélectrique [3, 10, 11], pour la mesure des diélectriques aux valeurs de la constante diélectrique ε_r élevées ($\varepsilon_r \geqslant 10$). On a donné les graphiques et les formules permettant une rapide identification du désiré, du point de vue de la méthode, genre TE_{011} excité dans le résonateur diélectrique cylindrique, court-circuité à deux bouts. On a montré les graphiques et les formules permettant de calculer d'une manière simple les erreurs de mesure de la partie réelle et imaginaire de la perméabilité électrique.

M. POSPIESZALSKI

BEMESSUNG DER EIGENSCHAFTEN VON MIKROWELLENDIELEKTRIKEN MITTELS DER METHODE EINES DIELEKTRISCHEN RESONATORS

Zusammenfassung

In dieser Bearbeitung wurde die Anwendbarkeit der Bemessungsmethode von Mikrowellendielektriken für die Bemessung von Dielektriken mit großen Werten der dielektrischen Konstanten ε_r ($\varepsilon_r \geqslant 10$) diskutiert. Diese Methode ist unter dem Namen der Methode des dielektrischen Resonators bekannt [3, 10, 11]. Diegramme und Formeln wurden angegeben, die die schnelle Identifizierung der vom Gesichtspunkt der Methode gewünschten TE_{011} Art gestatten, der im zylindrischen, an beiden Enden geschlossenen dielektrischen Resonators erregt wird. Es wurden auch Diagramme und Formeln zur einfachen Berechnung von Meßfehlern des wirklichen und imaginären Teils der elektrischen Durchlässigkeit dargestellt.

М. ПОСПЕШАЛЬСКИ

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ МИКРОВОЛНОВЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ МЕТОДОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА

Резюме

В труде продискутирована пригодность метода исследования диэлектриков известного под названием метода диэлектрического резонатора [3, 10, 11] для измерения диэлектриков с большим значением диэлектрической постоянной ε_r ($\varepsilon_r \geqslant 10$). Приведены графики и формулы позволяющие быстро идентифицировать желательный, с точки зрения метода, вид TE_{001} возбуждаемого в цилиндрическом диэлектрическом резонаторе, короткозамкнутом с обоих концов. Представлены графики и формулы позволяющие просто вычислить ошибку измерения вещественной и мнимой составляющей диэлектрической постоянной.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 3, ss. 625—644

621.396.96

Radar dopplerowski wyróżniający kierunek ruchu

ANDRZEJ LIZOŃ (WARSZAWA)

Instytut Radioelektroniki Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 27.1.1975

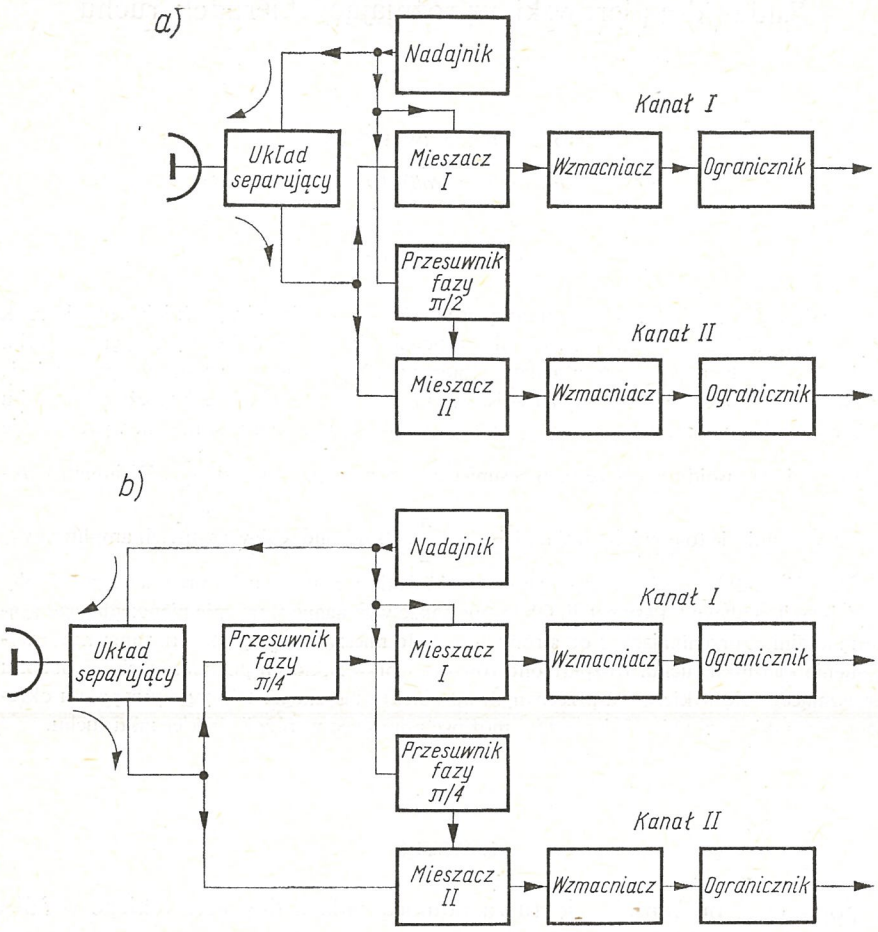
Omówiono zasadę pracy radaru dopplerowskiego o fali ciągłej wyróżniającego kierunek ruchu obiektu. Kierunek ten wyznacza się na podstawie zależności fazowych sygnałów echa odbieranych w dwukanałowym układzie odbiorczym. Wykazano, że wymagane przesunięcie fazy między sygnałami heterodyny na wejściach mieszaczy w obu kanałach zależy od sposobu określania przesunięcia fazy między sygnałami odbieranymi. Jeśli w tym celu wykorzystuje się przyjście sinusoidy przez zero, przesunięcie fazy powinno wynosić $\frac{\pi}{2}$. W innym przypadku przesunięcie to powinno być mniejsze od $\frac{\pi}{2}$. Określono wpływ asymetrii amplitudowej obu kanałów odbiorczych na poprawność wyróżnienia kierunku ruchu oraz podano sposoby zmniejszenia wpływu tej asymetrii. Obliczono także wymagane tłumienie niepożądanego sygnału nadajnika przenikającego od strony anteny do mieszaczy, przy którym zapewni się wyróżnienie kierunku ruchu. Rozpatrzono również wpływ zakłóceń pochodzących od obiektu poruszającego się w kierunku przeciwnym do obiektu badanego. Dla tego przypadku określono warunki, przy których jest nadal możliwe poprawne wyróżnienie kierunku ruchu.

1. WSTĘP

Przy pomiarach prędkości obiektu za pomocą radaru dopplerowskiego o fali ciągłej konieczne jest często stwierdzenie, czy badany obiekt zbliża się, czy też oddala od radaru. Informacja o prędkości obiektu względem radaru zawarta jest w zmianie częstotliwości sygnału odbieranego odbitego od obiektu w porównaniu z częstotliwością sygnału wysyłanego z radaru. Jeśli obiekt zbliża się, częstotliwość sygnału odbieranego jest większa od częstotliwości sygnału wysyłanego, jeśli natomiast oddala się, częstotliwość ta jest mniejsza. Ponieważ trudno jest mierzyć bezpośrednio częstotliwość sygnału odbieranego, określa się różnicę częstotliwości sygnału odbieranego i wysyłanego. Traci się jednak wówczas informację o kierunku ruchu obiektu.

Kierunek ruchu można jednak wyznaczyć tą metodą uwzględniając zależności fazowe sygnału odbieranego [1]. Sygnał ten wprowadza się wówczas do dwóch kanałów odbiorczych, w których znajdują się dwa mieszacze. Do mieszaczy tych dochodzą także sygnały nadajnika spełniające funkcję sygnałów heterodyny. Zależności fazowe sygnałów odbie-

ranych i sygnałów heterodyny na wejściach obu mieszaczy są tak dobrane, by wzajemne przesunięcia fazy sygnałów na wyjściach mieszaczy były równe 90°. Przykładowe rozwiązania takich radarów pokazane są na rys. 1 [1], [2], [3]. Sygnały na wyjściach mieszaczy są wówczas przesunięte względem siebie w fazie o $+90°$ lub $-90°$, zależnie od kierunku



Rys. 1. Schematy blokowe radaru dopplerowskiego wyróżniającego kierunek ruchu: a) z przesunięciem fazy sygnału „heterodyny", b) z przesunięciem fazy sygnału „heterodyny" i sygnału odbieranego

ruchu obiektu. Wyznaczając znak przesunięcia fazy można określić kierunek ruchu. W tym celu sygnały otrzymane na wyjściach mieszaczy po wzmocnieniu przekształca się w ogranicznikach w przebiegi prostokątne. Znak przesunięcia fazy wyznacza się wówczas badając zgodność położenia wybranego zbocza jednego z przebiegów prostokątnych z dodatnią wartością drugiego przebiegu prostokątnego.

Przedstawiona powyżej zasada pracy radaru wyznaczającego kierunek ruchu obiektu jest stosunkowo prosta. Szereg przyjętych jednak uproszczeń nie uwydatnia trudności związanych z realizacją takiego radaru. Pierwsze z nich zakłada, że przetwarzanie sygnałów sinusoidalnych w prostokątne zachodzi w momentach przejścia sinusoidy przez zero.

Zazwyczaj jednak ograniczniki posiadają próg działania powodujący, że sygnał sinusoidalny jest przekształcany w przebieg prostokątny tylko wtedy, gdy amplituda jego jest wystarczająco duża. Stosuje się to w celu wyeliminowania wpływu szumów układu odbiorczego na wskazanie mierzonej prędkości, gdy amplituda sygnału odbieranego jest zbyt mała. Zastosowanie ograniczników z progiem działania wymaga wówczas pełnej zgodności amplitud sygnałów na wejściach ograniczników w obu kanałach. W przeciwnym wypadku wystąpią inne przesunięcia w czasie przebiegów prostokątnych na wyjściu ograniczników, niż wynikałoby to z przesunięcia fazowego sygnałów sinusoidalnych. Szczególnie krytycznie występuje to, gdy zmianie amplitudy sygnału odbieranego odpowiada zmiana współczynnika wypełnienia przebiegu prostokątnego na wyjściu ogranicznika.

Drugie istotne uproszczenie polega na założeniu, że sygnał nadajnika dochodzi do mieszaczy tylko jedną drogą z kontrolowanym przesunięciem fazy. Sygnał ten dochodzi jednak do mieszaczy także od strony anteny wraz z sygnałem odbieranym w wyniku niewystarczającej separacji odbiornika od nadajnika. Wypadkowe sygnały nadajnika na wejściach mieszaczy mają wówczas inne wzajemne przesunięcia fazy, niż wynikałoby to z uwzględnienia tylko wprowadzonego w układzie przesuwnika fazy. Nieznajomość amplitudy, a szczególnie i fazy sygnału nadajnika przenikającego do mieszaczy poprzez układ separujący powoduje niekontrolowane zmiany fazy sygnałów na wyjściu mieszaczy, co może utrudnić lub nawet uniemożliwić poprawne wyróżnienie kierunku ruchu obiektu.

Poniżej rozpatrzone zostaną te zagadnienia w celu wyjaśnienia własności fazowej metody wyróżnienia kierunku ruchu obiektu oraz oceny wyboru niektórych parametrów układu.

Rozpatrzone będzie także zagadnienie wpływu zakłóceń pochodzących od drugiego obiektu poruszającego się w obszarze obejmowanym przez charakterystykę kierunkową anteny. Zagadnienie to jest szczególnie istotne, gdy obiekt zakłócający porusza się w kierunku przeciwnym, niż obiekt badany. Zależnie wówczas od stosunku amplitudy sygnału zakłócającego do amplitudy sygnału użytecznego zmieniają się zależności fazowe sygnałów wypadkowych, co może wprowadzać błędną ocenę kierunku ruchu badanego obiektu.

2. ZASADA WYRÓŻNIANIA KIERUNKU RUCHU

Zasadę wyróżniania kierunku ruchu obiektu metodą dopplerowską można przedstawić analizując układ pokazany na rys. 2. W układzie tym przesunięcie fazy wprowadzane jest między sygnałami heterodyny podawanymi na wejścia mieszaczy. Inne sposoby rozwiązań, wprowadzające przesunięcie fazy między sygnałami odbieranymi lub jednocześnie między sygnałami odbieranymi i sygnałami heterodyny, mają identyczne własności.

Jeśli założyć, że sygnał odbierany na wejściach obu mieszaczy ma postać

$$u_0 = U_0 \cos[(\Omega_n \pm \Omega_d)t + \varphi_0], \tag{1}$$

gdzie:

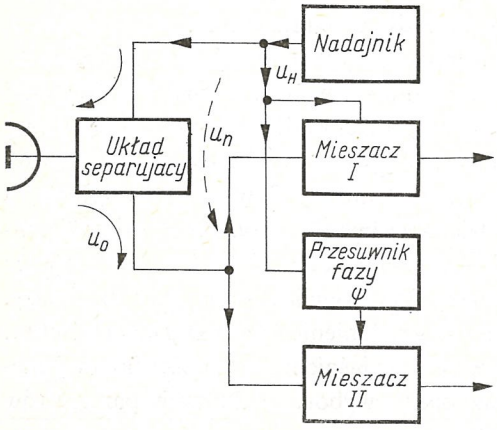
$\frac{\Omega_n}{2\pi}$ — częstotliwość sygnału nadajnika,

$\frac{\Omega_d}{2\pi}$ — częstotliwość dopplerowska sygnału odbieranego (znak „+" odpowiada zbliżaniu się, znak „−" oddalaniu się obiektu),

oraz że sygnał nadajnika podawany na wejścia mieszaczy jako sygnał heterodyny ma odpowiednio postać

$$u_{H1} = U_H \cos \Omega_n t, \tag{2}$$

$$u_{H2} = U_H \cos (\Omega_n t - \psi), \tag{3}$$



Rys. 2 Schemat blokowy układów wejściowych radaru dopplerowskiego wyróżniającego kierunek ruchu

gdzie:

ψ — przesunięcie fazy wnoszone przez przesuwnik fazy,

to sygnały o częstotliwości różnicowej na wyjściu tych mieszaczy można wyrazić jako

$$u_1 = U \cos (\pm \Omega_d t + \varphi_0), \tag{4}$$

$$u_2 = U \cos (\pm \Omega_d t + \varphi_0 + \psi). \tag{5}$$

Oznacza to, że dla obiektu zbliżającego się otrzymuje się

$$u_1 = U \cos (\Omega_d t + \varphi_0) = U \cos (\Omega_d t + \varphi_1), \tag{6}$$

$$u_2 = U \cos (\Omega_d t + \varphi_0 + \psi) = U \cos (\Omega_d t + \varphi_2), \tag{7}$$

natomiast dla obiektu oddalającego się

$$u_1 = U \cos (\Omega_d t - \varphi_0) = U \cos (\Omega_d t + \varphi_1), \tag{8}$$

$$u_2 = U \cos (\Omega_d t - \varphi_0 - \psi) = U \cos (\Omega_d t + \varphi_2). \tag{9}$$

Różnica faz tych sygnałów dla obiektu zbliżającego się wynosi

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\psi, \tag{10}$$

a dla obiektu oddalającego się

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \psi. \tag{11}$$

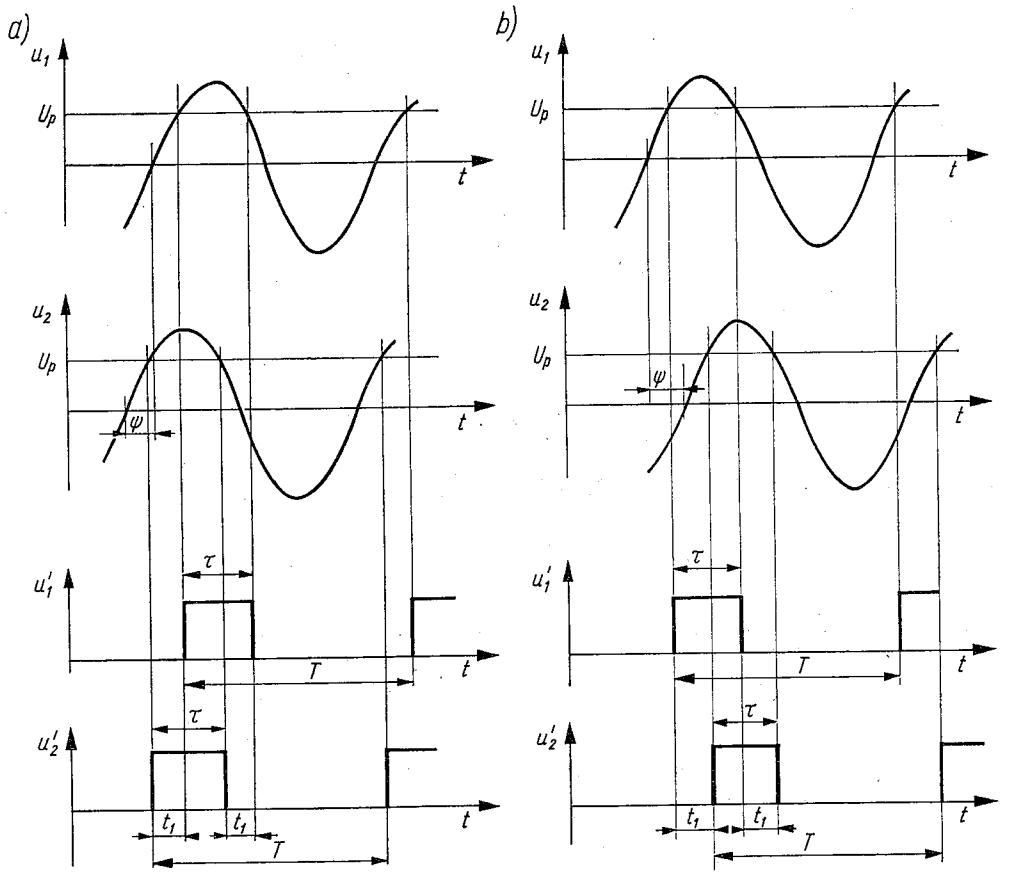
Sygnały te, o ile amplitudy ich przekroczą wartość progu U_p, przekształcane są w dalszej części układu w przebiegi prostokątne o tej samej częstotliwości powtarzania. Pokazano to na rys. 3. Z rysunku tego wynika, że kierunek prędkości można wyróżnić na podstawie

wzajemnego przesunięcia w czasie przednich lub tylnych zboczy przebiegów prostokątnych. Przesunięcia te dla identycznych obu kanałów wynoszą

$$t_1 = \frac{\psi}{\Omega_d} = \frac{\psi}{2\pi} T. \tag{12}$$

Dla stwierdzenia kierunku ruchu wystarczy wówczas, by (por. rys. 3)

$$0 < t_1 < \tau \quad \text{dla} \quad \tau < 0{,}5\,T \tag{13}$$



Rys. 3. Sygnały otrzymywane w radarze dopplerowskim na wejściach (u_1, u_2) oraz na wyjściach (u_1', u_2') ograniczników dla: a) obiektu zbliżającego się, b) obiektu oddalającego się

lub

$$0 < t_1 < T - \tau \quad \text{dla} \quad 0{,}5\,T < \tau < T, \tag{14}$$

tzn. by przesunięcie fazy ψ było wybrane w zakresie

$$0 < \psi < 2\pi \frac{\tau}{T} \quad \text{dla} \quad \tau < 0{,}5\,T \tag{15}$$

lub

$$0 < \psi < 2\pi\left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \quad \text{dla} \quad 0{,}5\,T < \tau < T. \tag{16}$$

Przy zmiennym współczynniku wypełniania $\frac{\tau}{T}$ wybrana wartość przesunięcia fazy musi spełniać jednocześnie obie nierówności

$$0 < \psi < 2\pi\frac{\tau_{min}}{T} \quad \text{dla} \quad \tau_{min} < 0{,}5\,T, \tag{17}$$

$$0 < \psi < 2\pi\left(1 - \frac{\tau_{max}}{T}\right) \quad \text{dla} \quad 0{,}5\,T < \tau_{max} < T. \tag{18}$$

W rzeczywistym układzie wzajemne przesunięcie zboczy przebiegów prostokątnych zależy nie tylko od wzajemnego przesunięcia w fazie sygnałów heterodyny na wejściach mieszaczy. Nieidentyczność obu kanałów przenoszących sygnał odbierany, zmienność amplitudy tego sygnału oraz przenikanie sygnału nadajnika na wejścia mieszaczy poprzez układ separujący wprowadzają niekontrolowane przesunięcia wzajemne w czasie przebiegów prostokątnych. Aby nadal jednak wyróżniać kierunek, najlepiej zażądać, by przesunięcie w czasie tych przebiegów wyznaczone dla idealnego układu było równe mniejszej z dwu wartości

$$t_1 = \min\left[\frac{\tau_{min}}{2};\quad \frac{1}{2}(T - \tau_{max})\right], \tag{19}$$

tzn. by optymalna wartość przesunięcia fazy ψ była równa

$$\psi_{opt} = \min\left[\pi\frac{\tau_{min}}{T};\quad \pi\left(1 - \frac{\tau_{max}}{T}\right)\right]. \tag{20}$$

Zapewni to w najgorszym przypadku jednakowe w obie strony dopuszczalne zakresy niekontrolowanego wzajemnego przesunięcia w czasie przebiegów prostokątnych równe t_1, określone zależnością (19) lub odpowiadające mu zakresy niekontrolowanego wzajemnego przesunięcia w fazie tych przebiegów równe ψ_{opt}, określone zależnością (20). Wynika stąd, że najkorzystniej byłoby dążyć do zapewnienia stałego współczynnika wypełnienia przebiegu prostokątnego, równego

$$\frac{\tau}{T} = \text{const} = 0{,}5. \tag{21}$$

Wówczas optymalna wartość przesunięcia fazowego między sygnałami heterodyny na wejściach mieszaczy wynosi

$$\psi_{opt} = \frac{\pi}{2}. \tag{22}$$

Dopuszczalne niekontrolowane zmiany wzajemnego przesunięcia w czasie przebiegów prostokątnych i odpowiadające im zmiany wzajemnego przesunięcia w fazie mogą być wtedy największe.

3. WPŁYW NIEIDENTYCZNOŚCI KANAŁÓW ODBIORCZYCH

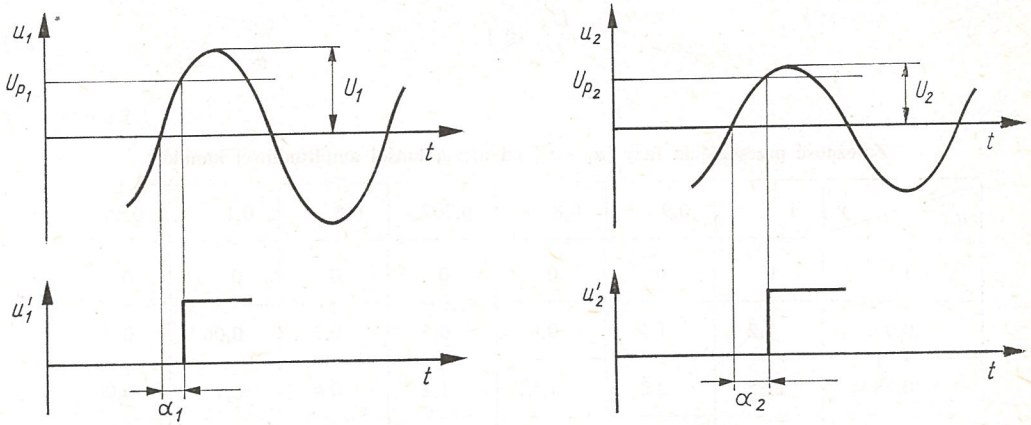
Wpływ nieidentyczności kanałów odbiorczych można ocenić rozpatrując oddzielnie charakterystyki fazowe i amplitudowe tych kanałów.

Różnica przesunięć fazowych wnoszonych przez poszczególne kanały przenosi się bezpośrednio jako różnica przesunięć w fazie obu sygnałów. Dla zapewnienia zatem rozróżniania kierunku ruchu różnica przesunięć fazowych obu kanałów dla każdej częstotliwości w paśmie przenoszenia musi spełniać zależność

$$|\Delta\varphi| \leqslant \psi_1 < \psi_{opt}, \tag{23}$$

gdzie ψ_1 — maksymalne dopuszczalne wzajemne przesunięcie w fazie sygnałów spowodowane niezgodnością charakterystyk fazowych obu kanałów.

Wpływ asymetrii amplitudowej obu kanałów wprowadzanej przez wszystkie stopnie można ocenić przyjmując różne amplitudy sygnałów sinusoidalnych na wejściach ograniczników oraz różne wartości napięć progowych U_p w ogranicznikach. Pokazano to na rys. 4. Niezgodność tych napięć w obu kanałach wprowadza niejednakowe przesunięcie



Rys. 4. Sygnały na wejściach (u_1, u_2) oraz na wyjściach (u'_1, u'_2) ograniczników przy asymetrii amplitudowej obu kanałów

w czasie przebiegów prostokątnych będące miarą niejednakowych przesunięć w fazie. Powstającą w ten sposób różnicę w fazie można wyznaczyć korzystając z oznaczeń przyjętych na rys. 4. Wynosi ona

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \arcsin\frac{U_{p1}}{U_1} - \arcsin\frac{U_{p2}}{U_2}. \tag{24}$$

Oznaczając ponadto

$$\frac{U_{p1}}{U_1} = x, \quad \frac{U_{p2}}{U_2} = y, \quad x = ay \tag{25}$$

oraz przyjmując $a < 1$, otrzymuje się dla $0 < x < 1$, $0 < y < 1$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \arcsin\left(ay\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-a^2y^2}\right). \tag{26}$$

Współczynnik a charakteryzuje tu niezgodność amplitudową obu kanałów, współczynnik y — stosunek napięcia progowego ogranicznika do amplitudy sygnału sinusoidalnego na wejściu ogranicznika. Dla zapewnienia zatem rozróżniania kierunku ruchu różnica tych przesunięć w fazie dla każdej częstotliwości w paśmie przenoszenia musi spełniać zależność

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant \psi_2 < \psi_{opt}, \tag{27}$$

gdzie ψ_2 — maksymalne dopuszczalne wzajemne przesunięcie w fazie sygnałów spowodowane niezgodnością amplitudową obu kanałów.

Wartość $\alpha_1 - \alpha_2$ może być równa zeru tylko w przypadku, gdy $a = 1$, tzn. gdy

$$\frac{U_{p1}}{U_1} = \frac{U_{p2}}{U_2}. \tag{28}$$

Jeśli warunek ten nie jest spełniony, największa różnica faz $|\alpha_1 - \alpha_2|$ wystąpi dla $y = 1$. W miarę zmniejszania się jednak wartości y wartość $|\alpha_1 - \alpha_2|$ maleje asymptotycznie do zera. Wynika stąd wniosek, że dla uniknięcia wpływu asymetrii amplitudowej obu kanałów powinno zapewnić się, by zawsze w obu kanałach było spełnione

$$\frac{U_p}{U} \ll 1. \tag{29}$$

Tablica 1

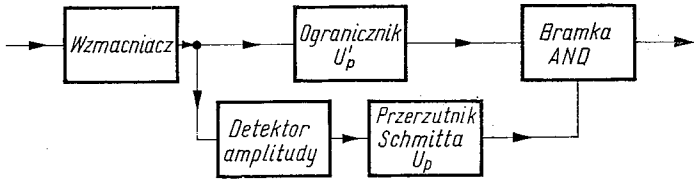
Zależność przesunięcia fazy $|\alpha_1 - \alpha_2|$ od niezgodności amplitudowej kanałów

a \ y	1	0,9	0,8	0,707	0,5	0,1	0,05
1	0	0	0	0	0	0	0
0,99	8,2	1,1	0,6	0,5	0,3	0,06	0,03
0,98	11,5	2,2	1,5	1,2	0,6	0,1	0,06
0,95	18,2	5,4	3,6	2,9	1,9	0,3	0,14
0,90	25,8	10	7,0	5,5	3,0	0,6	0,3
0,80	37	18	13	10	6,5	1,2	0,6
0,707	45	25	19	15	9,3	1,8	0,8
0,50	60	37	29	24	15	2,9	1,5

Potwierdza to tablica 1, w której zestawione są wartości przesunięcia w fazie $|\alpha_1 - \alpha_2|$ wyrażone w stopniach obliczone z zależności (26), w funkcji stosunku napięcia progowego do amplitudy sygnału sinusoidalnego dla różnych niezgodności amplitudowych obu kanałów.

Przy zmianach amplitudy sygnału sinusoidalnego spełnić można warunek (29) w układzie pokazanym na rys. 5. W układzie tym ogranicznik zbudowany w postaci przerzutnika

posiada próg działania U_p' bliski zeru, zapewniając na swym wyjściu stały współczynnik wypełnienia przebiegu prostokątnego, równy w przybliżeniu 0,5. Sygnał ten przechodzi jednak na wyjście układu tylko wtedy, gdy amplituda przebiegu sinusoidalnego przekroczy drugi próg działania U_p. Zapewnia to przerzutnik Schmitta otwierający wówczas bramkę typu AND. Układ ten jest tym mniej wrażliwy na nieidentyczność amplitudową obu ka-

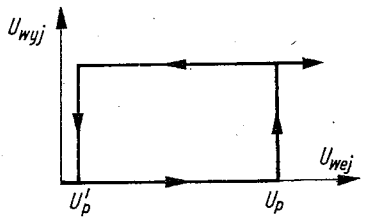


Rys. 5. Układ przetwarzania przebiegu sinusoidalnego w prostokątny z dwoma progami działania

nałów, im mniejszy jest próg działania U_p' w stosunku do progu U_p. Stała i równa 0,5 wartość współczynnika wypełnienia przebiegu prostokątnego uzasadnia przyjęcie przesunięcia w fazie między sygnałami heterodyny na wejściach mieszaczy równego

$$\psi_{opt} = \frac{\pi}{2}.$$

Warunek (29) można także spełnić wykorzystując do wytworzenia przebiegu prostokątnego ogranicznik z pętlą histerezy, przyjmując drugi próg działania U_p' bliski zeru. Zależność amplitudy napięcia na wyjściu tego ogranicznika od amplitudy napięcia na jego wejściu pokazana jest na rys. 6. Informację o kierunku ruchu obiektu należy wówczas



Rys. 6. Zależność amplitudy napięcia na wyjściu ogranicznika z pętlą histerezy od amplitudy napięcia na jego wejściu

uzyskiwać na podstawie przesunięcia zbocza, dla którego lepiej jest spełniony warunek (29). Układ ten podobnie jak układ pokazany na rys. 5 jest tym mniej wrażliwy na nieidentyczność amplitudową obu kanałów, im mniejszy jest próg działania U_p' w stosunku do progu U_p. W układzie tym współczynnik wypełnienia przebiegu prostokątnego zmienia się w zależności od amplitudy sygnału sinusoidalnego i może przyjmować wartości w granicach $0{,}25 \div 0{,}5$. Optymalna wartość przesunięcia w fazie między sygnałami heterodyny na wejściach mieszaczy powinna być wówczas równa

$$\psi_{opt} = \frac{\pi}{4}.$$

4. WPŁYW NIEPOŻĄDANEGO PRZENIKANIA SYGNAŁU NADAJNIKA DO MIESZACZY

Sygnał nadajnika dochodzi do mieszaczy dwiema drogami: jedną jako sygnał heterodyny rozdzielony do mieszaczy z wzajemnym przesunięciem w fazie o wartość ψ, drugą jako niepożądany sygnał przenikający do mieszaczy przez układ separujący. Pokazano to na rys. 2. W wyniku tego przesunięcie fazy wypadkowych sygnałów heterodyny na wejściach mieszaczy nie jest równe ψ. Istotna jest zatem ocena dopuszczalnej amplitudy sygnału niepożądanego, przy której możliwe jest jeszcze wyznaczenie kierunku ruchu obiektu.

Jeśli przyjąć, że na wejściach mieszaczy pożądane sygnały nadajnika, spełniające funkcję sygnałów heterodyny, mają odpowiednio postać

$$u_{H1} = U_H \cos \Omega_n t, \tag{30}$$

$$u_{H2} = U_H \cos(\Omega_n t - \psi), \tag{31}$$

natomiast niepożądane sygnały nadajnika

$$u_{n1} = U_n \cos(\Omega_n t + \beta), \tag{32}$$

$$u_{n2} = U_n \cos(\Omega_n t + \beta), \tag{33}$$

przy czym

$$\frac{U_n}{U_H} = K_n < 1, \tag{34}$$

wówczas wypadkowe sygnały na wejściach mieszaczy można wyrazić odpowiednio jako

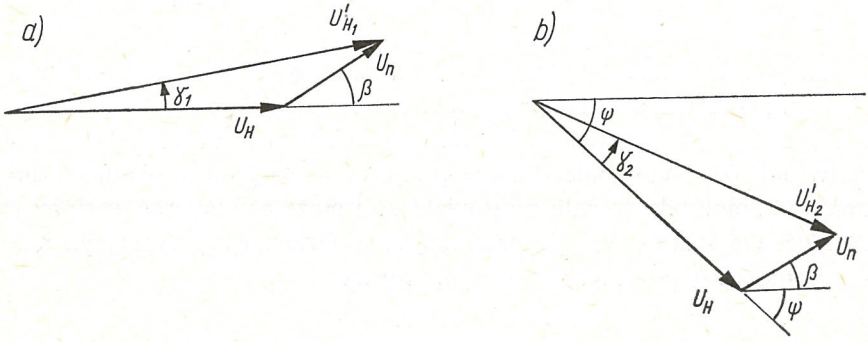
$$u'_{H1} = U'_{H1} \cos(\Omega_n t + \gamma_1), \tag{35}$$

$$u'_{H2} = U'_{H2} \cos(\Omega_n t + \gamma_2 - \psi), \tag{36}$$

gdzie (por. rys. 7)

$$\gamma_1 = \operatorname{arctg} \frac{K_n \sin\beta}{1 + K_n \cos\beta} = \operatorname{arctg} v \tag{37}$$

$$\gamma_2 = \operatorname{arctg} \frac{K_n \sin(\beta + \psi)}{1 + K_n \cos(\beta + \psi)} = \operatorname{arctg} z. \tag{38}$$



Rys. 7. Zależności wektorowe sygnałów na wejściach: a) mieszacza pierwszego, b) mieszacza drugiego

Zmiana różnicy faz wypadkowych sygnałów spowodowana przenikaniem niepożądanego sygnału nadajnika wynosi

$$\gamma_1-\gamma_2 = \operatorname{arctg}\frac{v-z}{1+vz}+n\pi, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{39}$$

Po przekształceniu tej zależności otrzymuje się

$$\gamma_1-\gamma_2 = -\operatorname{arctg}\frac{K_n^2\sin\psi+2K_n\sin\frac{\psi}{2}\cos\left(\beta+\frac{\psi}{2}\right)}{K_n^2\cos\psi+2K_n\cos\frac{\psi}{2}\cos\left(\beta+\frac{\psi}{2}\right)+1}+n\pi. \tag{40}$$

Dla zapewnienia rozróżniania kierunku ruchu różnica tych kątów w najniekorzystniejszym przypadku musi spełniać zależność

$$|\gamma_1-\gamma_2| \leqslant \psi_3 < \psi_{opt}, \tag{41}$$

gdzie ψ_3 — maksymalne dopuszczalne wzajemne przesunięcie w fazie sygnałów spowodowane przenikaniem niepożądanego sygnału nadajnika do mieszaczy.

Przy niekontrolowanej wartości przesunięcia fazy β można wyznaczyć ψ_3 różniczkując wyrażenie (40) względem β i przyrównując uzyskany wynik do zera. Po przekształceniu uzyskuje się

$$2K_n(1-K_n^2)\sin\frac{\psi}{2}\sin\left(\beta+\frac{\psi}{2}\right) = 0. \tag{42}$$

Stąd maksimum różnicy $|\gamma_1-\gamma_2|$ wystąpi dla

$$\beta_1 = -\frac{\psi}{2}+\pi. \tag{43}$$

Po podstawieniu tego wyrażenia do (37) i (38) otrzymuje się

$$\gamma_1 = -\gamma_2. \tag{44}$$

Można zatem zależność (41) wyrazić jako

$$|\gamma_1| = \operatorname{arctg}\frac{K_n\sin\frac{\psi}{2}}{1-K_n\cos\frac{\psi}{2}} \leqslant \frac{\psi_3}{2}. \tag{45}$$

Stąd po przekształceniu uzyskuje się warunek, który musi być spełniony dla zapewnienia rozróżniania kierunku ruchu obiektu

$$K_n \leqslant \frac{1}{\cos\frac{\psi}{2}+\sin\frac{\psi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\psi_3}{2}}. \tag{46}$$

W tablicy 2 podane są maksymalne wartości współczynnika K_n wyrażone w dB w funkcji dopuszczalnego przesunięcia fazy ψ_3 dla dwóch wartości ψ równych $\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{4}$. Z tablicy tej wynika, że w miarę zmniejszania dopuszczalnej wartości ψ_3 tłumienie niepożądanego

Tablica 2

Zależność maksymalnej wartości współczynnika K_n w dB od przesunięcia fazy Ψ_3

Ψ_3[°]	2	4	6	10	15	20	30	45	60	90
$\Psi = \frac{\pi}{2}$	−32,3	−26,4	−23,0	−18,8	−15,8	−13,5	−10,5	−7,6	−5,7	−3,2
$\Psi = \frac{\pi}{4}$	−27,1	−21,4	−18,3	−14,5	−11,6	−10,1	−7,4	−5,3	—	—

sygnału nadajnika musi być coraz większe dla spełnienia nierówności (46). Z porównania wyników obliczeń K_n otrzymanych dla ψ równego $\frac{\pi}{2}$ i $\frac{\pi}{4}$ można wysnuć wniosek, że wymagane tłumienie sygnału nadajnika maleje przy zmniejszaniu się kąta ψ. Spostrzeżenie to nie jest jednak poprawne, jeśli uwzględni się, że mniejszej wartości kąta ψ musi odpowiadać proporcjonalnie mniejsza dopuszczalna wartość kąta ψ_3. Porównując natomiast wyniki uzyskane dla danej wartości ψ_3 przy $\psi = \frac{\pi}{2}$ z wynikami otrzymanymi dla $\frac{\psi_3}{2}$ przy $\psi = \frac{\pi}{4}$ należy stwierdzić, że przy mniejszej wartości kąta ψ tłumienie niepożądanego sygnału nadajnika musi być większe. Różnice te są jednak niewielkie i w całym zakresie zmian kąta ψ_3 nie przekraczają 2,1 dB.

5. WPŁYW SYGNAŁU ZAKŁÓCAJĄCEGO POCHODZĄCEGO OD DRUGIEGO PORUSZAJĄCEGO SIĘ OBIEKTU

W niektórych zastosowaniach radaru wyróżniającego kierunek ruchu może wystąpić sytuacja, w której w obszarze obejmowanym przez charakterystykę kierunkową anteny poruszają się dwa obiekty. Powstaje wówczas zagadnienie, w jakim stopniu sygnał zakłócający pochodzący od jednego obiektu wpływa na poprawność wyznaczania kierunku ruchu obiektu drugiego. Jest to szczególnie istotne, gdy obiekty poruszają się w kierunkach przeciwnych. Zagadnienie to zostanie rozpatrzone dla przypadku najczęściej spotykanego w praktyce, gdy sygnały odbierane pochodzące od tych obiektów mają różne amplitudy i różne częstotliwości dopplerowskie.

Jeśli założyć, że poszczególne sygnały odbierane na wyjściach obu mieszaczy mają postać

$$u_{01} = U_{01}\cos[(\Omega_n+\Omega_{d1})t+\varphi_{01}], \tag{47}$$

$$u_{02} = U_{02}\cos[(\Omega_n-\Omega_{d2})t+\varphi_{02}], \tag{48}$$

przy czym

$$\frac{U_{01}}{U_{02}} < 1,$$

natomiast sygnały heterodyny na wejściu pierwszego i drugiego mieszacza odpowiednio

$$u_{H1} = U_H \cos \Omega_n t, \tag{49}$$

$$u_{H2} = U_H \cos(\Omega_n t - \psi), \tag{50}$$

to na wyjściu mieszacza pierwszego otrzyma się (por. rozdz. 2)

$$u_{11} = dU_{01} \cos(\Omega_{d1} t + \varphi_{01}), \tag{51}$$

$$u_{22} = dU_{02} \cos(\Omega_{d2} t - \varphi_{02}), \tag{52}$$

a na wyjściu mieszacza drugiego

$$u_{21} = dU_{01} \cos(\Omega_{d1} t + \varphi_{01} + \psi), \tag{53}$$

$$u_{22} = dU_{02} \cos(\Omega_{d2} t - \varphi_{02} - \psi), \tag{54}$$

gdzie d oznacza współczynnik proporcjonalności.

Wypadkowe sygnały na wyjściu mieszaczy wygodnie jest odnieść do sygnałów o większych amplitudach. Na wyjściu mieszacza pierwszego otrzymuje się wówczas

$$u_1 = u_{11} + u_{12} = U_1 \cos(\Omega_{d2} t - \varphi_{02} + \delta_1), \tag{55}$$

gdzie

$$\delta_1 = \operatorname{arctg} \frac{K_0 \sin \Theta}{1 + K_0 \cos \Theta} = \operatorname{arctg} w, \tag{56}$$

$$\Theta = (\Omega_{d1} - \Omega_{d2}) t + \varphi_{01} + \varphi_{02}, \tag{57}$$

$$K_0 = \frac{U_{01}}{U_{02}} < 1 \tag{58}$$

(K_0 oznacza stosunek amplitudy mniejszej do większej), natomiast na wyjściu drugiego mieszacza

$$u_2 = u_{21} + u_{22} = U_2 \cos(\Omega_{d2} t - \varphi_{02} + \delta_2), \tag{59}$$

gdzie

$$\delta_2 = \operatorname{arctg} \frac{-\sin \psi + K_0 \sin(\Theta + \psi)}{\cos \psi + K_0 \cos(\Theta + \psi)} = \operatorname{arctg} g. \tag{60}$$

Różnica faz sygnałów wypadkowych wynosi

$$\delta_1 - \delta_2 = \operatorname{arctg} \frac{w - g}{1 + wg}. \tag{61}$$

Po przekształceniu tej zależności otrzymuje się

$$\delta_1 - \delta_2 = \operatorname{arctg} \frac{(1 - K_0^2) \sin \psi}{(1 + K_0^2) \cos \psi + 2K_0 \cos(\Theta + \psi)}. \tag{62}$$

Uzyskany wynik określa różnicę sygnałów wypadkowych dla przypadku, gdy amplituda sygnału pochodzącego od obiektu oddalającego się jest większa od amplitudy sygnału pochodzącego od obiektu zbliżającego się.

Jeśliby założyć, że amplituda sygnału pochodzącego od obiektu oddalającego się jest

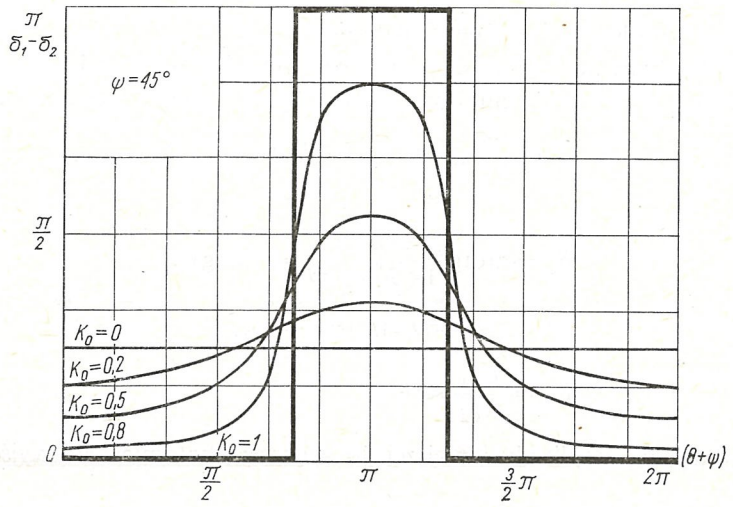
mniejsza, tzn. że

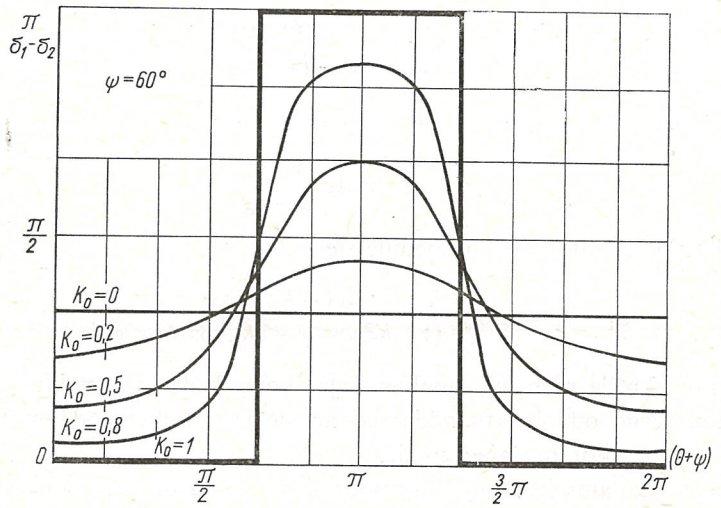
$$K_0 = \frac{U_{02}}{U_{01}} < 1, \tag{63}$$

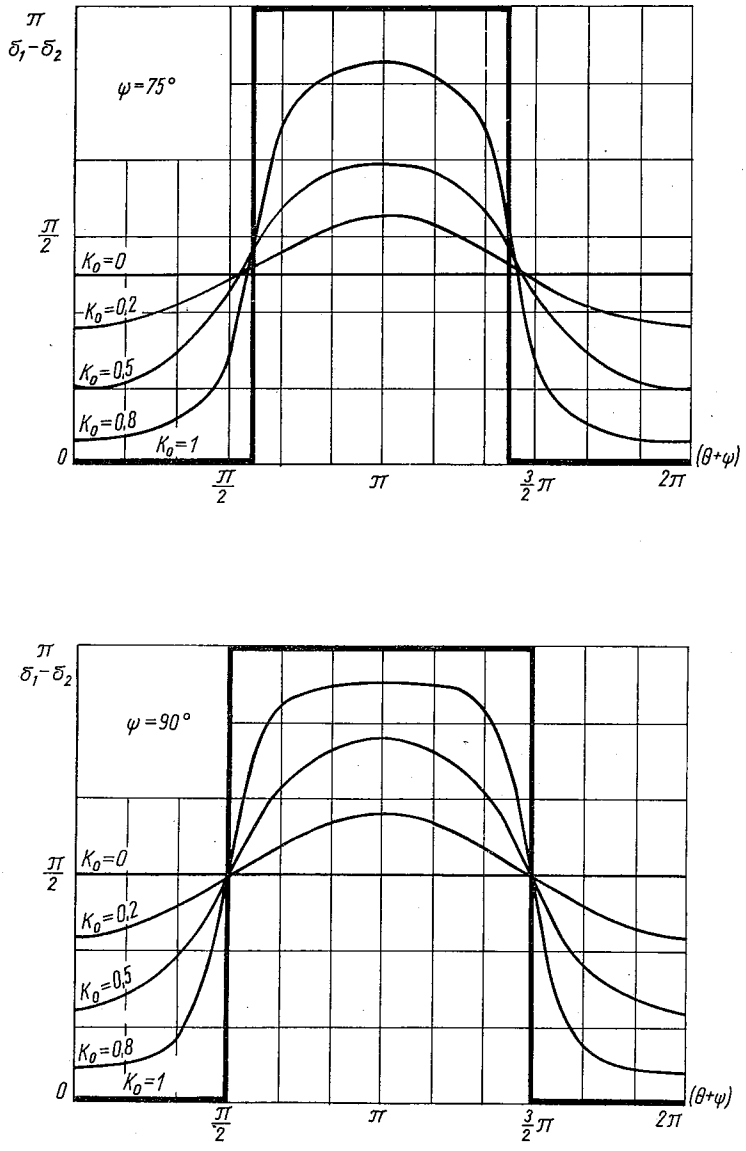
a następnie sprowadzić sygnały wypadkowe do postaci sygnałów o większych amplitudach, otrzyma się analogicznie

$$\delta_1 - \delta_2 = \operatorname{arctg}\left[- \frac{(1+K_0^2)\sin\psi}{(1+K_0^2)\cos\psi + 2K_0\cos(\Theta+\psi)} \right]. \tag{64}$$

Zależności (62) i (64) różnią się jedynie znakiem. W dalszej części rozpatrywana będzie zatem tylko zależność (62).







Rys. 8. Wykresy różnicy faz sygnałów wypadkowych w zakresie jednego okresu dla różnych stosunków amplitudy sygnału zakłócającego do amplitudy sygnału użytecznego $K_0 = 0$; 0,2; 0,5; 0,8; 1 i dla przesunięć fazy sygnałów heterodyny $\psi = 45°, 60°, 75°, 90°$

Z zależności tej wynika, że dla $K_0 = 0$, tzn. dla przypadku, gdy występuje tylko sygnał od obiektu oddalającego się, różnica faz sygnałów na wyjściach mieszaczy jest stała i równa

$$\delta_1 - \delta_2 = \psi. \tag{65}$$

Wynik ten jest identyczny z otrzymanym z (11).

Dla $0 < K_0 < 1$ różnica faz sygnałów wypadkowych na wyjściu mieszaczy zmienia się okresowo w czasie z okresem

$$T_1 = \frac{2\pi}{|\Omega_{d1} - \Omega_{d2}|}. \tag{66}$$

Występujące wówczas zmiany fazy zależą zarówno od K_0 — stosunku amplitud poszczególnych sygnałów odbieranych, jak i od przesunięcia fazy ψ wprowadzanego w radarze dla sygnału heterodyny. Wykresy różnicy faz tych sygnałów na wyjściu mieszaczy w granicach jednego okresu są pokazane na rys. 8 dla $\psi = 45°$, $60°$, $75°$ i $90°$ i dla różnych wartości współczynnika K_0. Maksymalna różnica faz występuje dla $\Theta + \psi = \pi$ i wynosi

$$(\delta_1 - \delta_2)_{max} = \operatorname{arctg} \frac{(1 - K_0^2)\sin\psi}{(1 + K_0^2)\cos\psi - 2K_0}. \tag{67}$$

Dla $0 < K_0 < 1$ przyjmuje ona wartości od ψ do π. Minimalna różnica faz występuje dla $\Theta + \psi = 0$ i wynosi

$$(\delta_1 - \delta_2)_{min} = \operatorname{arctg} \frac{(1 - K_0^2)\sin\psi}{(1 + K_0^2)\cos\psi + 2K_0}. \tag{68}$$

Dla $0 < K_0 < 1$ przyjmuje ona wartości od ψ do zera. Oznacza to, że w zależności od K_0 różnica faz sygnałów wypadkowych zmienia się wokół wartości ψ. Zmiany te rosną w miarę wzrostu współczynnika K_0. Dla K_0 bliskiego jedności zmiany te występują w granicach od zera do π niezależnie od przesunięcia fazy ψ. Znak różnicy faz sygnałów wypadkowych odpowiada zawsze kierunkowi ruchu obiektu dającego sygnał o większej amplitudzie. Własność ta umożliwia poprawne wyznaczenie kierunku ruchu obiektu w obecności zakłóceń pochodzących od obiektu poruszającego się w kierunku przeciwnym, o ile tylko amplituda sygnału zakłócającego jest mniejsza od amplitudy sygnału użytecznego.

Wyznaczenie kierunku wymaga wówczas zachowania współczynnika wypełnienia przebiegu prostokątnego na wyjściach ograniczników w obu kanałach odbiorczych równego 0,5 niezależnie od amplitudy sygnału odbieranego. Można to uzyskać w układzie pokazanym na rys. 5, przekształcając sygnały wypadkowe w przebiegi prostokątne w momencie przejścia ich przez wartość równą zeru.

W praktycznych układach występują jednak dodatkowe przesunięcia w fazie poszczególnych sygnałów, np. w wyniku asymetrii kanałów odbiorczych, co może spowodować, że różnica faz sygnałów wypadkowych przyjmie wartość większą od π lub mniejszą od zera. W obu przypadkach wprowadzi to błędną ocenę kierunku ruchu obserwowaną na wyjściu układu jako okresowe krótkotrwałe zaniki sygnału występujące po przekroczeniu granicznych wartości π lub zera. Poprawne wyznaczanie kierunku ruchu obiektu dającego sygnał o większej amplitudzie jest wówczas możliwe tylko przy odpowiednio mniejszej amplitudzie sygnału zakłócającego.

Jak wynika z rys. 8 dla $\psi < 90°$ bardziej krytyczny jest odstęp $(\delta_1 - \delta_2)_{min}$ od wartości zerowej niż odstęp $(\delta_1 - \delta_2)_{max}$ od wartości π; dla $\psi = 90°$ odstępy te są jednakowe. Przyjmując zatem, że zawsze powinno być zapewnione

$$(\delta_1 - \delta_2)_{min} = \operatorname{arctg} \frac{(1 - K_0^2)\sin\psi}{(1 + K_0^2)\cos\psi + 2K_0} \geqslant \delta > 0, \tag{69}$$

gdzie δ — minimalne dopuszczalne wzajemne przesunięcie w fazie sygnałów wypadkowych spowodowane sygnałem zakłócającym pochodzącym od obiektu poruszającego się w kierunku przeciwnym, można wyznaczyć dopuszczalną wartość K_0. Wynosi ona

$$K_0 \leqslant \frac{-\operatorname{tg}\delta + \sin\psi\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\delta}}{\sin\psi + \cos\psi \operatorname{tg}\delta}. \tag{70}$$

W tablicy 3 podane są maksymalne wartości współczynnika K_0 w funkcji dopuszczalnego minimalnego przesunięcia fazy δ dla wartości ψ równych 45°, 60°, 75° i 90°. Z tab-

Tablica 3

Zależności maksymalnej wartości współczynnika K_0 od dopuszczalnego przesunięcia fazy δ

δ[°]	1	2	4	6	10	15	20	25	30
$\Psi = 45°$	0,96	0,92	0,84	0,72	0,65	0,52	0,41	0,30	0,21
$\Psi = 60°$	0,97	0,94	0,89	0,84	0,74	0,66	0,53	0,44	0,27
$\Psi = 75°$	0,98	0,96	0,91	0,87	0,80	0,71	0,62	0,55	0,49
$\Psi = 90°$	0,98	0,97	0,93	0,90	0,84	0,77	0,70	0,63	0,58

licy tej wynika, że najkorzystniejsze jest przesunięcie fazy $\psi = 90°$. Zapewnia ono dla danego kąta δ poprawne wyznaczenie kierunku ruchu przy największym sygnale zakłócającym.

Można w analogiczny sposób wykazać, że w przypadku zakłóceń pochodzących od obiektu poruszającego się w tym samym kierunku, co obiekt badany, różnica faz sygnałów wypadkowych na wyjściach mieszaczy dla $K_0 < 1$ jest stała i równa ψ lub $-\psi$ niezależnie od amplitudy sygnału zakłócającego. Wyznaczenie kierunku odbywa się wówczas analogicznie jak przy braku zakłócenia od drugiego poruszającego się obiektu.

6. PODSUMOWANIE

Na podstawie przedstawionej analizy własności radaru dopplerowskiego, wyróżniającego kierunek ruchu, można wysnuć następujące wnioski.

1. Przy odbiorze sygnału od jednego poruszającego się obiektu o wyborze wymaganego przesunięcia fazy ψ między sygnałami otrzymywanymi na wyjściu mieszaczy decyduje sposób przekształcenia sygnałów sinusoidalnych w prostokątne i wartość współczynnika wypełnienia przebiegów prostokątnych. Przesunięcie fazy $\psi = \frac{\pi}{2}$ może być wykorzystywane tylko wówczas, gdy współczynnik wypełnienia jest stały i równy 0,5. W każdym innym przypadku wartość przesunięcia fazy ψ musi być mniejsza od $\frac{\pi}{2}$.

2. W celu uniezależnienia się od asymetrii amplitudowej kanałów odbiorczych celowe jest przekształcenie sinusoidy w przebieg prostokątny w momentach przejścia sinusoidy przez zero. Konieczność zachowania progu działania w ogranicznikach zmusza do stosowania dwuprogowego ograniczania lub do stosowania ogranicznika z pętlą histerezy. Wpływ asymetrii amplitudowej kanałów będzie wówczas tym mniejszy, im bardziej będą różnić się wartości obu progów w ogranicznikach. W przypadku zastosowania ogranicznika z pętlą histerezy współczynnik wypełnienia przebiegu prostokątnego zmienia się w przybliżeniu w granicach $0{,}25 \div 0{,}5$, co wymaga zastosowania przesunięcia fazy $\psi = \frac{\pi}{4}$.

3. Przenikanie niepożądanego sygnału nadajnika na wejścia mieszaczy może utrudnić rozróżnianie kierunku ruchu. Wielkość tłumienia tego sygnału wymagana dla poprawnej pracy radaru zależy nieznacznie od wartości przesunięcia fazy ψ. Konieczność ograniczania tego sygnału może jednak wprowadzić ograniczenie mocy nadajnika radaru. Wynika to z potrzeby zachowania stałego poziomu sygnału heterodyny, określającego optymalny punkt pracy mieszaczy oraz ze skończonej separacji odbiornika od nadajnika.

4. W przypadku, gdy jednocześnie są odbierane sygnały od obiektu zbliżającego się i oddalającego od radaru można wyznaczyć kierunek ruchu obiektu dającego sygnał o większej amplitudzie. Konieczne jest wówczas zachowanie współczynnika wypełnienia przebiegów prostokątnych w obu kanałach odbiorczych równego 0,5 niezależnie od amplitudy sygnałów wejściowych. Przesunięcie fazy ψ powinno być wówczas równe $\frac{\pi}{2}$. Uzyskuje się wtedy najmniejszy wpływ sygnału zakłócającego na wyznaczanie kierunku ruchu. Dla amplitudy sygnału zakłócającego zbliżonej do amplitudy sygnału użytecznego mogą jednak wystąpić okresowo błędne oceny kierunku ruchu. Przejawi się to w postaci okresowych, krótkotrwałych zaników sygnału na wyjściu radaru, co może wpłynąć niekorzystnie na dokładność pomiaru prędkości obiektu dającego sygnał o większej amplitudzie.

5. Jeśli odbierany sygnał zakłócający pochodzi od obiektu poruszającego się w tym samym kierunku co obiekt badany, a amplituda jego jest mniejsza od amplitudy sygnału użytecznego, nie wpływa on na wyznaczanie kierunku ruchu. Własności radaru są wówczas takie same, jak przy braku sygnału zakłócającego.

LITERATURA

1. S. H. Logue, *Rate-of-climb Meter Uses Doppler Radar*, Electronics, vol. 30, No 6, s. 150—152, June 1, 1957.
2. G. Horman, *Die Radar-Verkehrssonde RVS-1*, Telefunken Zeitung, Jg 39, Heft 2, 1966, s. 175—186.
3. K. Holford, *Doppler Radar with Sense*, Wireless World, Nov., 1972, s. 535—539.

A. LIZOŃ

DOPPLER RADAR SHOWING MOTION DIRECTION

Summary

The paper deals the operation principle of the continuouswave Doppler radar showing the direction of target motion. This direction is determined from the phase shift between received signals in a two channel receiver. It has been shown that the phase shift between two heterodyne signals in two mixers depends on

the way of measurement of the phase shift between two received signals. The phase shift between heterodyne signals is equal to $\frac{\pi}{2}$, if the phase shift between received signals is determined from zero crossing of the signals. If this phase shift is determined otherwise, the phase shift between heterodyne signals is less than $\frac{\pi}{2}$. The paper determines the influence of different channels on the correctness of the motion direction determination. The paper also determines the required isolation between transmitter and mixers so as to obtain correct determination of motion direction. The influence of a disturbing signal coming from another target moving in an opposite direction was discussed. In this case requirements for which the direction of motion can be measured were determined.

A. LIZOŃ

RADAR DOPPLER DISTINGUANT LA DIRECTION DU MOUVEMENT

Résumé

On a présenté le principe du fonctionnement du radar Doppler à onde continue distinguant la direction du mouvement de l'objet. On désigne cette direction à partir des dépendances de phases des signaux de l'écho reçus par le système de réception à deux canaux. On a démontré que le déphasage admis, parmi les signaux de l'hétérodyne sur les entrées des mélangeurs dans les deux canaux, dépend de la manière de déterminer le déphasage parmi les signaux reçus. Si dans ce cas on veut se servir du passage de la sinusoide par zéro, le déphasage doit être égal à $\frac{\pi}{2}$. Dans l'autre cas, ce déphasage doit être inférieur à $\frac{\pi}{2}$. On a déterminé l'influence de l'asymétrie d'amplitude des deux canaux de réception sur la distinction correcte de la direction du mouvement et on a donné les méthodes de diminuer l'influence de cette asymétrie. On a calculé aussi l'affaiblissement admis du signal indésirable de l'émetteur, pénétrant du côté de l'antenne jusqu'aux mélangeurs, qui assure la distinction de la direction du mouvement. On a examiné également l'influence des perturbations provenant de l'objet se remuant dans la direction contraire à l'objet examiné. On a désigné pour ce cas les conditions, pour lesquelles il est possible de distinguer correctement la direction du mouvement.

A. LIZOŃ

DOPPLER-RADAR MIT RICHTUNGSUNTERSCHEIDUNG

Zusammenfassung

Es wurde hier das Arbeitsprinzip eines die Bewegungsrichtung des Objekts unterscheidenden Doppler-Radars mit kontinuierlicher Welle behandelt. Die Richtung wird auf Grund der Phasenbeziehung der empfangenen Echosignale im Empfangssystem mit mit 2 Kanälen bezeichnet. Es wurde bewiesen, daß die erwünschte Phasenverschiebung zwischen den Signalen des Überlagers an den Eingangsmischern in beiden Kanälen von der Bestimmungsart der Phasenverschiebung zwischen den Empfangssignalen abhängt. Wenn man zu diesem Zweck den Sinusnullübergang ausnutzt, so müßte die Phasenverschiebung $\frac{\pi}{2}$ betragen. In übrigen Fällen müßte die Phasenverschiebung kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sein.

In weitern wurde der Einfluß der Amplitudenasymmetrie beider Empfangskanäle auf die Richtigkeit der Richtungsunterscheidung bestimmt, und Maßnahmen angeführt, die den Einfluß dieser Asymmetrie verringern. Auch wurde die erforderliche Dämpfung des nichterwünschten Sendesignals unter Berück-

sichtigung der Richtungsunterscheidung berechnet, das von der Antenne zu den Mischern dringt. Der Störeinfluß wurde ebenfalls analysiert, der von dem sich in Gegenrichtung zu dem Prüfobjekt bewegenden Objekt herrührt. Für diesen Fall wurden Bedingungen bezeichnet, bei denen immer noch ein richtiges Unterscheiden der Bewegungsrichtung möglich ist.

А. ЛИЗОНЬ

ДОППЛЕРОВСКИЙ РАДИОЛОКАТОР ОПРЕДЕЛЯЮЩИЙ НАПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

Р е з ю м е

Изложен принцип действия допплеровского радиолокатора с непрерывным излучением определяющего направление движения объекта. Направление движения определяется путем исследования фазы отраженных сигналов принимаемых двухканальным приемником. Доказано, что нужный сдвиг фазы между сигналами гетеродина на выходах смесителей зависит от методов измерения сдвига фазы между сигналами на выходах смесителей. Если сдвиг фазы определяется по отчетам переходов сигнала через нуль, то сдвиг фазы сигналов гетеродина должен быть $\frac{\pi}{2}$, в остальных случаях должен быть меньше чем $\frac{\pi}{2}$. Определено влияние неодинаковых каналов приемника на возможность определения направления движения объекта и изложены методы уменьшения влияния неидентичности каналов. Вычислен также допустимый уровень сигнала просачивающегося из передатчика к смесителям, при котором возможно определение направления движения. Рассмотрено влияние сигнала помехи от объекта движущегося в направлении обратном к направлению движения исследуемого объекта. Для этого случая получены условия, при которых возможно определение направления движения исследуемого объекта.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 3, ss. 645—675

621.3.01

Przesuwanie biegunów do z góry zadanych położeń wielowymiarowych układów liniowych stacjonarnych

TADEUSZ KACZOREK (WARSZAWA)

Instytut Sterowania i Elektroniki Przemysłowej Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 28.10.1975

W pracy podano krytyczny przegląd metod przesuwania biegunów do z góry zadanych położeń za pomocą członów proporcjonalnych umieszczonych w pętlach ujemnych sprzężeń zwrotnych wielowymiarowych układów liniowych stacjonarnych. Rozpatrzono zarówno przypadek, gdy dostępny (bezpośrednio mierzalny) jest cały wektor stanu, jak również gdy dostępny jest tylko wektor odpowiedzi. Podano również pewne uogólnienia i propozycje nowych metod.

1. WPROWADZENIE

W syntezie układów liniowych stacjonarnych za pomocą metod przestrzeni stanów duże znaczenie ma zagadnienie przesuwania biegunów do z góry zadanych położeń za pomocą członów proporcjonalnych umieszczonych w pętlach ujemnych sprzężeń zwrotnych. W ostatnich latach opracowano wiele nowych metod doboru tych członów proporcjonalnych zarówno dla przypadku, gdy dostępny (bezpośrednio mierzalny) jest cały wektor stanu, a również gdy dostępny jest tylko wektor odpowiedzi. Większość opublikowanych prac [1 ÷ 4, 16 ÷ 24, 26, 31, 34] dotyczy przesuwania biegunów wielowymiarowych układów liniowych stacjonarnych ciągłych. Liczba prac poświęconych przesuwaniu biegunów dyskretnych układów liniowych stacjonarnych jest znacznie mniejsza [5, 10, 28]. W pracach [6, 8, 9, 11 ÷ 15] podano metodę przesuwania zarówno biegunów jak i zer wielowymiarowych układów liniowych stacjonarnych bez opóźnień i z opóźnieniami. Mimo opublikowanej znacznej liczby prac zagadnienie przesuwania biegunów wielowymiarowych układów liniowych zwłaszcza niestacjonarnych [32, 33] nie jest jeszcze w pełni rozwiązane. Nawet dla układów stacjonarnych w przypadku ogólnym brak jest określenia warunków koniecznych i dostatecznych istnienia rozwiązania tego zagadnienia.

Celem niniejszej pracy jest dokonanie krytycznego przeglądu metod opublikowanych w ostatnich latach z punktu widzenia ich przydatności w syntezie układów metodami przestrzeni stanów. Praca zawiera również pewne uogólnienia i propozycje nowych metod.

2. SFORMUŁOWANIE ZADANIA

Dany jest obiekt liniowy stacjonarny o p wejściach i q wyjściach opisany równaniami:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

$$y = Cx + Du, \tag{2}$$

przy czym $x \in R^n$, $u \in R^p$, $y \in R^q$, a A, B, C i D są macierzami o wymiarach odpowiednio $n \times n$, $n \times p$, $q \times n$ i $q \times p$ oraz stałych niezależnych od czasu elementach.

Macierz transmitancji operatorowych tego obiektu jest określona zależnością

$$G_0(s) = C[s1 - A]^{-1}B + D = \frac{1}{M_0(s)} W(s), \tag{3}$$

przy czym

$$M_0(s) = \det[s1 - A], \tag{4}$$

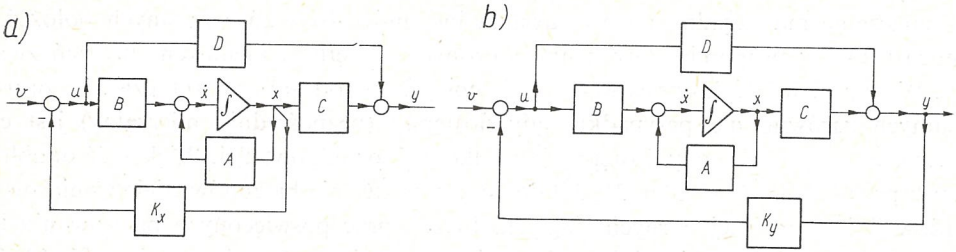
$$W(s) = C[s1 - A]_{ad} B + M_0(s)D, \tag{5}$$

$[s1 - A]_{ad}$ — macierz dołączona macierzy $[s1 - A]$.

Zakładamy, że:

1) obiekt jest sterowalny i obserwowalny,
2) istnieje taki wektor kolumnowy Θ i wektor wierszowy k, że układ o macierzach A, $B\Theta$ jest układem sterowalnym, a układ o macierzach A, kC jest układem obserwowalnym,
3) rząd macierzy B jest równy p, a rząd macierzy C — q.

Weźmy pod uwagę układ zamknięty (rys. 1), który w torze głównym zawiera obiekt



Rys. 1. Układ zamknięty zawierający w pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego człon określony: a — macierzą (6), b — macierzą (7)

opisany równaniami (1) i (2), a w pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego — człon proporcjonalny określony macierzą

$$K_x = \begin{bmatrix} k_{11}, & k_{12}, & \ldots, & k_{1n} \\ k_{21}, & k_{22}, & \ldots, & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{p1}, & k_{p2}, & \ldots, & k_{pn} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

gdy dostępny jest wektor stanu x oraz macierzą

$$K_y = \begin{bmatrix} k_{11}, & k_{12}, & \ldots, & k_{1q} \\ k_{21}, & k_{22}, & \ldots, & k_{2q} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_{p1}, & k_{p2}, & \ldots, & k_{pq} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

gdy dostępny jest wektor odpowiedzi y.

Układ zamknięty jest opisany równaniami (1), (2) oraz równaniem

$$u = v - K_x x, \tag{8}$$

gdy dostępny jest wektor stanu x (rys. 1a) i równaniem

$$u = v - K_y y, \tag{9}$$

gdy dostępny jest wektor odpowiedzi y (rys. 1b).

Podstawiając zależność (8) do równania (1) otrzymamy

$$\dot{x} = (A - BK_x)x + Bv. \tag{10}$$

Równanie charakterystyczne układu zamkniętego, w przypadku gdy dostępny jest wektor stanu x, ma zatem postać

$$M(s) = \det[s1 - A + BK_x] = 0. \tag{11}$$

W przypadku drugim natomiast podstawiając zależność (2) do równania (9) i wyznaczając z niego u przy założeniu, że

$$\det[1 + K_y D] \neq 0, \tag{12}$$

otrzymamy

$$u = [1 + K_y D]^{-1}(v - K_y Cx). \tag{13}$$

Podstawiając z kolei zależność (13) do równania (1) otrzymamy

$$\dot{x} = \{A - B[1 + K_y D]^{-1} K_y C\}x + B[1 + K_y D]^{-1} v. \tag{14}$$

Równanie charakterystyczne układu zamkniętego, w przypadku gdy dostępny jest wektor odpowiedzi y, ma zatem postać

$$M(s) = \det\{s1 - A + B[1 + K_y D]^{-1} K_y C\} = 0. \tag{15}$$

Zadanie można sformułować następująco.

Mając dany opis obiektu za pomocą równań (1) i (2) lub macierz transmitancji operatorowych (3) tego obiektu należy tak dobrać elementy macierzy (6) lub (7), aby równanie charakterystyczne układu zamkniętego (11) lub odpowiednio (15) miało m ($m \leqslant n$) pierwiastków o z góry zadanych wartościach rzeczywistych lub zespolonych parami sprzężonych.

3. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA W PRZYPADKU, GDY DOSTĘPNY JEST WEKTOR STANU

Zagadnienie sformułowane w p. 2 w przypadku, gdy dostępny jest wektor stanu, rozwiążemy dwiema różnymi metodami: metodą sprowadzenia równań obiektu do postaci kanonicznej oraz metodą rozkładu macierzy K_x na iloczyn dwóch wektorów.

3.1. Metoda sprowadzania równań obiektu do postaci kanonicznej

Z założenia obiekt opisany równaniem (1) jest sterowalny, a rząd macierzy B jest równy p. Wobec tego macierz sterowalności tego obiektu

$$[B,\ AB,\ \ldots,\ AB^{n-1}] \tag{16}$$

ma n liniowo niezależnych kolumn. Z kolumn tych tworzymy macierz nieosobliwą o postaci

$$L = [B_1, AB_1, \ldots, A^{d_1-1}B_1, B_2, AB_2, \ldots, A^{d_2-1}B_2, \ldots, A^{d_p-1}B_p], \tag{17}$$

przy czym B_i jest i-tą kolumną macierzy B, a d_i jest i-tym indeksem sterowalności obiektu.

Korzystając z macierzy odwrotnej L^{-1} tworzymy macierz nieosobliwą o postaci

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_1A \\ \vdots \\ Q_1A^{d_1-1} \\ Q_2 \\ Q_2A \\ \vdots \\ Q_2A^{d_2-1} \\ \vdots \\ Q_pA^{d_p-1} \end{bmatrix}, \tag{18}$$

przy czym Q_i jest $\sum_{j=1}^{i} d_j$ wierszem macierzy L^{-1}.

Łatwo wykazać [25], że przekształcenie liniowe zmiennych stanu

$$\bar{x} = Qx \tag{19}$$

sprowadza macierze A, B do postaci

$$\bar{A} = QAQ^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \ldots & \bar{A}_{1p} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \ldots & \bar{A}_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{A}_{p1} & \bar{A}_{p2} & \ldots & \bar{A}_{pp} \end{bmatrix}, \tag{20}$$

$$\bar{B} = QB = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \vdots \\ \bar{B}_p \end{bmatrix}, \tag{21}$$

przy czym macierze

$$\bar{A}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ * & * & * & \ldots & * \end{bmatrix} \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, p \tag{22}$$

mają postać Frobeniusa, a

$$\bar{A}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots\ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * \end{bmatrix} \quad \text{dla } i \neq j \tag{23}$$

oraz

$$\bar{B}_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \underset{i}{1} & * & \dots & * \end{bmatrix} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, p; \tag{24}$$

* oznacza dowolny w przypadku ogólnym niezerowy element macierzy.

Podstawiając zależność (19) do równania (8) otrzymamy

$$u = v - \bar{K}_x \bar{x}, \tag{25}$$

przy czym

$$\bar{K}_x = K_x Q^{-1}. \tag{26}$$

Z kolei podstawiając zależności

$$A = Q^{-1} \bar{A} Q \tag{27}$$

$$B = Q^{-1} \bar{B} \tag{28}$$

$$K_x = \bar{K}_x Q \tag{29}$$

do równania (11) otrzymamy

$$M(s) = \det[s1 - A + BK_x] = \det[sQ^{-1}Q - Q^{-1}\bar{A}Q + Q^{-1}\bar{B}\bar{K}_x Q] =$$

$$= \det Q^{-1} \det[s1 - \bar{A} + \bar{B}\bar{K}_x] \det Q = \det[s1 - \bar{A} + \bar{B}\bar{K}_x]. \tag{30}$$

Oznaczmy przez $\bar{A}_p$ i $\bar{B}_p$ macierze o wymiarach $p \times n$ i $p \times p$ utworzone z p kolejnych niezerowych wierszy odpowiednio macierzy $\bar{A}$ i $\bar{B}$ o numerach d_1, $d_1 + d_2$, ..., $\sum_{j=1}^{p} d_j$, tj. wierszy zawierających wszystkie istotne informacje o macierzach $\bar{A}$ i $\bar{B}$. Zauważmy, że macierz $\bar{B}_p$ jako macierz trójkątna o elementach równych 1 na głównej przekątnej, jest macierzą nieosobliwą. Ponadto zauważmy, że

$$\bar{B} = \hat{B}\bar{B}_p, \tag{31}$$

przy czym

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ \vdots \\ \hat{B}_p \end{bmatrix} \tag{32}$$

a

$$\hat{B}_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \underset{i}{1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, p. \tag{33}$$

Niech

$$\hat{K}_x = \bar{B}_p \bar{K}_x. \tag{34}$$

Biorąc pod uwagę zależność (31) i (34) możemy napisać

$$\bar{A} - \bar{B}\bar{K}_x = \bar{A} - \hat{B}\bar{B}_p\bar{K}_x = \bar{A} - \hat{B}\hat{K}_x, \tag{35}$$

przy czym macierz $\bar{A} - \hat{B}\hat{K}_x$ ma budowę taką samą jak macierz (20). Zauważmy, że macierz $\hat{K}_x$ możemy wyznaczyć z zależności

$$\hat{K}_x = \bar{A}_p - \bar{A}_{po}, \tag{36}$$

przy czym $\bar{A}_{po}$ jest macierzą odpowiadającą zadanym z góry pierwiastkom równania charakterystycznego układu zamkniętego. Z zależności (34) i (36) mamy

$$\bar{K}_x = \bar{B}_p^{-1}\hat{K}_x = \bar{B}_p^{-1}(\bar{A}_p - \bar{A}_{po}), \tag{37}$$

a z zależności (26)

$$K_x = \bar{K}_x Q = \bar{B}_p^{-1}(\bar{A}_p - \bar{A}_{po})Q. \tag{38}$$

Z powyższych rozważań wynika następujący tok postępowania przy rozwiązywaniu rozpatrywanego zadania:

1. mając dane macierze A i B wyznaczamy macierz (17), a następnie macierz (18),
2. korzystając z zależności (20) i (21) wyznaczamy macierze $\bar{A}_p$ i $\bar{B}_p$,
3. mając dane pierwiastki równania charakterystycznego układu zamkniętego wyznaczamy macierz $\bar{A}_{po}$,
4. poszukiwaną macierz K_x wyznaczamy z zależności (38).

Przykład 1

Dany jest obiekt opisany równaniem (1) o macierzach

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{39}$$

Należy tak dobrać elementy macierzy

$$K_x = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{bmatrix}, \tag{40}$$

aby równanie charakterystyczne układu zamkniętego miało pierwiastki $s_1 = s_2 = -2$,

$s_3 = -2+j3$, $s_4 = -2-j3$. Macierz (17) w tym przypadku ma postać

$$L = [B_1, B_2, AB_2, A^2B_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \tag{41}$$

a indeksy sterowalności są równe $d_1 = 1$, $d_2 = 3$.

Macierz odwrotna L^{-1} ma postać

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{42}$$

Wobec tego

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_2A \\ Q_2A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{43}$$

oraz

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{44}$$

Korzystając z zależności (20) i (21) obliczamy

$$\bar{A} = QAQ^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right], \qquad \bar{B} = QB = \left[\begin{array}{c} 1 \ 0 \\ \hline 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \\ 0 \ 1 \end{array}\right] \tag{45}$$

oraz

$$\bar{A}_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \bar{B}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{46}$$

Wielomian charakterystyczny układu zamkniętego ma postać

$$\begin{aligned} M(s) &= (s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4) = \\ &= (s+2)(s+2)(s+2-j3)(s+2+j3) = s^4+8s^3+33s^2+68s+52. \end{aligned} \tag{47}$$

Wobec tego macierz $\bar{A}_{po}$ ma postać

$$\bar{A}_{po} = \begin{bmatrix} 0, & 1 & 0 & 0 \\ -52, & -68, & -33, & -8 \end{bmatrix}. \tag{48}$$

Poszukiwana macierz (40) zgodnie z zależnością (38) jest więc równa

$$K_x = B_{p\text{śr}}^{-1}(\bar{A}_p - A_{po})Q = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \\ 152, & 53, & 12, & -37 \end{bmatrix}. \tag{49}$$

3.2. Metoda rozkładu macierzy K_x na iloczyn dwóch wektorów

W metodzie tej macierz K_x przedstawiamy w postaci iloczynu dwóch wektorów [1, 3, 4, 27]

$$K_x = \Theta k, \tag{50}$$

przy czym

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \vdots \\ \Theta_p \end{bmatrix}, \tag{51}$$

$$k = [k_1, k_2, \ldots, k_n]. \tag{52}$$

Składowe wektora (51) dobieramy tak, aby równoważny obiekt o jednym wejściu i macierzach A, $B\Theta$ był obiektem sterowalnym, czyli

$$\det[B\Theta, AB\Theta, \ldots, A^{n-1}B\Theta] \neq 0. \tag{53}$$

Korzystając z równości macierzowej

$$[s1 - A + BK_x] = [s1 - A]\{1 + [s1 - A]^{-1}BK_x\} \tag{54}$$

możemy wielomian charakterystyczny układu zamkniętego napisać w postaci

$$M(s) = \det[s1 - A + BK_x] = \det[s1 - A]\det\{1 + [s1 - A]^{-1}BK_x\}. \tag{55}$$

Podstawiając zależność (50) do (55) otrzymamy

$$M(s) = \det[s1 - A]\det\{1 + [s1 - A]^{-1}B\Theta k\}, \tag{56}$$

a po uwzględnieniu równości [9, 25]

$$\det\{1 + [s1 - A]^{-1}B\Theta k\} = 1 + k[s1 - A]^{-1}B\Theta \tag{57}$$

zależność o postaci

$$M(s) = M_0(s) + k[s1 - A]_{ad}B\Theta, \tag{58}$$

przy czym $M_0(s)$ jest wielomianem charakterystycznym macierzy A określonym zależnością (4).

Załóżmy na początku, że równanie charakterystyczne układu zamkniętego ma pierwiastki jednokrotne (różne) $s_1, s_2, \ldots, s_n$. W tym przypadku elementy macierzy (52) dobieramy tak, aby

$$M(s_i) = 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{59}$$

Z zależności (59) i (58) otrzymujemy następujący układ równań

$$Pk^T = M, \tag{60}$$

przy czym

$$P = \begin{bmatrix} \{[s_1 1 - A]_{ad}B\Theta\}^T \\ \{[s_2 1 - A]_{ad}B\Theta\}^T \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \{[s_n 1 - A]_{ad}B\Theta\}^T \end{bmatrix}, \tag{61}$$

$$M = -\begin{bmatrix} M_o(s_1) \\ M_o(s_2) \\ \vdots \\ M_o(s_n) \end{bmatrix}, \tag{62}$$

T — oznacza działanie transpozycji.

Można wykazać [16], że dla obiektu sterowalnego macierz P jest macierzą nieosobliwą. Z równania (60) mamy zatem

$$k^T = P^{-1}M. \tag{63}$$

W przypadku, gdy równanie charakterystyczne układu zamkniętego ma pierwiastki wielokrotne, obok zależności (59) należy wziąć pod uwagę równości

$$\left.\frac{d^j M(s)}{ds^j}\right|_{s=s_i} = 0 \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, \ldots, m_i - 1, \tag{64}$$

przy czym m_i jest wielokrotnością pierwiastka s_i.

Z powyższych rozważań wynika następujący tok postępowania przy rozwiązywaniu rozpatrywanego zadania

1. mając dane macierze A i B dobieramy tak składowe wektora (51), aby był spełniony warunek (53),
2. korzystając z zależności (59), gdy zadane pierwiastki równania charakterystycznego są jednokrotne, a z zależności (59) i (64), gdy są wielokrotne, wypisujemy odpowiedni układ równań o postaci (60),
3. rozwiązując ten układ równań wyznaczamy wektor k,
4. poszukiwaną macierz K_x wyznaczamy z zależności (50).

Przykład 2

Dla tych samych danych jak w przykładzie 1 należy wyznaczyć elementy macierzy (40) stosując metodę rozkładu macierzy K_x na iloczyn wektorów. Łatwo sprawdzić, że dla wektora

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{65}$$

spełniony jest warunek (53).

Wielomian charakterystyczny układu zamkniętego (58) ma w tym przypadku postać

$$M(s) = M_0(s) + k[s1 - A]_{ad} B\Theta =$$

$$= \begin{vmatrix} s, & 0, & -1, & 0 \\ -3, & s, & 3, & -1 \\ 1, & -1, & s-4, & 1 \\ -1, & 0, & 1, & s \end{vmatrix} + [k_1, k_2, k_3, k_4] \begin{bmatrix} s, & ,0 & -1, & 0 \\ -3, & s, & 3, & -1 \\ 1, & -1, & s-4, & 1 \\ -1, & 0, & 1, & s \end{bmatrix}_{ad} \begin{bmatrix} 0, & 0 \\ 1, & 0 \\ 0, & 1 \\ 0, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= s^4 + (k_3 - 4)s^3 + (3 + k_1 - 3k_2 - k_4)s^2 + (-1 + 2k_2 + k_4)s - 1 + k_2. \tag{66}$$

Elementy macierzy k dobieramy korzystając z zależności

$$M(s_1) = 4k_1 - 15k_2 - 8k_3 - 6k_4 + 61 = 0, \tag{67}$$

$$\frac{dM(s)}{ds}\Big|_{s=s_1=s_2} = 4s_1^3+3(k_3-4)s_1^2+2(3+k_1-3k_2-k_4)s_1+(-1+2k_2+k_4)\Big|_{s_1=-2} =$$

$$= -4k_1+14k_2+12k_3+5k_4-93 = 0, \quad (68)$$

$$M(s_3) = (-5-j12)k_1+(12+j42)k_2+(46+j9)k_3+(3+j15)k_4-317+j45 = 0, \quad (69)$$

$$M(s_4) = (-5+j12)k_1+(12-j42)k_2+(46-j9)k_3+(3-j15)k_4-317-j45 = 0. \quad (70)$$

Zapisując równania (67), (68), (69) i (70) w postaci jednego równania macierzowego otrzymamy

$$\begin{bmatrix} 4, & -15, & -8, & -6 \\ -4, & 14, & 12, & 5 \\ -5-j12, & 12+j42, & 46+j9, & 3+j15 \\ -5+j12, & 12-j42, & 46-j9, & 3-j15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -61 \\ 93 \\ 317-j45 \\ 317+j45 \end{bmatrix}. \quad (71)$$

Wobec tego

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4, & -15, & -8, & -6 \\ -4, & 14, & 12, & 5 \\ -5-j12, & 12+j42, & 46+j9, & 3+j15 \\ -5+j12, & 12-j42, & 46-j9, & 3-j15 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -61 \\ 93 \\ 317-j45 \\ 317+j45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 152 \\ 53 \\ 12 \\ -37 \end{bmatrix}, \quad (72)$$

a poszukiwana macierz (40) ma postać

$$K_x = \Theta k = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[152, 53, 12, -37] = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \\ 152, & 53, & 12, & -37 \end{bmatrix}. \quad (73)$$

Wynik ten pokrywa się z wynikiem otrzymanym w przykładzie 1. Łatwo sprawdzić, że warunek (53) spełniony jest również dla

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (74)$$

W tym przypadku wielomian charakterystyczny układu zamkniętego ma postać

$$M(s) = M_0(s)+k[s1-A]_{ad}B\Theta =$$

$$= \begin{bmatrix} s, & 0, & -1, & 0 \\ -3, & s, & 3, & -1 \\ 1, & -1, & s-4, & 1 \\ -1, & 0, & 1, & s \end{bmatrix} + [k_1, k_2, k_3, k_4] \begin{bmatrix} s, & 0, & -1, & 0 \\ -3, & s, & 3, & -1 \\ 1, & -1, & s-4, & 1 \\ -1, & 0, & 1, & s \end{bmatrix}_{ad} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= s^4+(k_2+k_3-4)s^3+(k_1-7k_2+k_3-k_4+3)s^2+(k_1+k_4-1)s+2k_2+k_4-1. \quad (75)$$

W sposób analogiczny jak w przypadku wektora Θ o postaci (65) otrzymamy

$$k = \left[57\frac{1}{6}, 5\frac{1}{6}, 8\frac{7}{12}, 11\frac{5}{6}\right] \quad (76)$$

oraz

$$K_x = \Theta k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\left[57\frac{1}{6}, 5\frac{1}{6}, 8\frac{7}{12}, 11\frac{5}{6}\right] = \begin{bmatrix} 57\frac{1}{6}, & 5\frac{1}{6}, & 8\frac{7}{12}, & 11\frac{5}{6} \\ 57\frac{1}{6}, & 5\frac{1}{6}, & 8\frac{7}{12}, & 11\frac{5}{6} \end{bmatrix}. \quad (77)$$

Łatwo sprawdzić, że zarówno dla macierzy (73) jak i macierzy (77) równanie charakterystyczne układu zamkniętego ma zadane pierwiastki $s_1 = s_2 = -2$, $s_3 = -2+j3$, $s_4 = -2-j3$.

Niekiedy metodą rachunkowo prostszą i mniej pracochłonną wyznaczania elementów macierzy (52) jest metoda polegająca na rozwiązaniu układu n równań otrzymanych w wyniku przyrównania do siebie współczynników przy tych samych potęgach zmiennej s wielomianu (58) (którego współczynniki zależą od elementów macierzy (52)) i wielomianu o zadanych pierwiastkach.

Na przykład dla obiektu o macierzach (39) z równości współczynników przy tych samych potęgach zmiennej s wielomianu (66) i wielomianu (47) mamy układ równań

$$\begin{aligned} k_3 - 4 &= 8, \\ 3 + k_1 - 3k_2 - k_4 &= 33, \\ -1 + 2k_2 + k_4 &= 68, \\ -1 + k_2 &= 52. \end{aligned} \tag{78}$$

Rozwiązując ten układ równań względem k_1, k_2, k_3 i k_4 otrzymamy

$$k_1 = 152, \quad k_2 = 53, \quad k_3 = 12, \quad k_4 = -37.$$

Wynik ten jest zgodny z wcześniej otrzymanymi wynikami.

4. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA W PRZYPADKU, GDY DOSTĘPNY JEST WEKTOR ODPOWIEDZI

4.1. Rozwiązanie zagadnienia w przypadku, gdy $D = 0$ i $m = \max(p, q)$

Dla macierzy $D = 0$ równanie charakterystyczne (15) upraszcza się do postaci

$$M(s) = \det[s1 - A + BK_y C] = 0. \tag{79}$$

Poszukiwaną macierz K_y przedstawiamy w postaci iloczynu dwóch wektorów [1, 3, 27]

$$K_y = \Theta k, \tag{80}$$

przy czym

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \vdots \\ \Theta_p \end{bmatrix}, \tag{81}$$

$$k = [k_1, k_2, \ldots, k_q]. \tag{82}$$

Korzystając z równości macierzowej

$$[s1 - A + BK_y C] = \{1 + BK_y C[s1 - A]^{-1}\}[s1 - A] \tag{83}$$

możemy wielomian charakterystyczny układu zamkniętego napisać w postaci

$$M(s) = \det[s1 - A + BK_y C] = \det[s1 - A]\det\{1 + BK_y C[s1 - A]^{-1}\}. \tag{84}$$

Podstawiając zależność (80) do (84) otrzymamy

$$M(s) = \det[s1-A]\det\{1+B\Theta kC[s1-A]^{-1}\}, \tag{85}$$

a po uwzględnieniu równości [9, 25]

$$\det\{1+B\Theta kC[s1-A]^{-1}\} = 1+kC[s1-A]^{-1}B\Theta \tag{86}$$

oraz zależności (5) dla $D = 0$ wielomian ten przyjmie postać

$$M(s) = M_o(s)+kC[s1-A]_{ad}B\Theta = M_o(s)+k\mathrm{W}(s)\Theta. \tag{87}$$

Załóżmy, że liczba m zadanych z góry pierwiastków równania charakterystycznego układu zamkniętego jest równa liczbie q wyjść obiektu (składowych wektora y), a zadane pierwiastki $s_1, s_2, \ldots, s_m$ są jednokrotne. W tym przypadku składowe wektora (81) dobieramy tak, aby równoważny obiekt o jednym wejściu był sterowalny, czyli aby był spełniony warunek (53). Natomiast elementy macierzy (82) dobieramy tak, aby

$$M(s_i) = 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{88}$$

Z zależności (88) i (87) otrzymujemy układ równań

$$Wk^T = M, \tag{89}$$

przy czym

$$W = \begin{bmatrix} [W(s_1)\Theta]^T \\ [W(s_2)\Theta]^T \\ \cdots\cdots\cdots \\ [W(s_m)\Theta]^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{C[s_1 1-A]_{ad}B\Theta\}^T \\ \{C[s_2 1-A]_{ad}B\Theta\}^T \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \{C[s_m 1-A]_{ad}B\Theta\}^T \end{bmatrix}, \tag{90}$$

$$M = -\begin{bmatrix} M_o(s_1) \\ M_o(s_2) \\ \vdots \\ M_o(s_m) \end{bmatrix}. \tag{91}$$

Można wykazać [16], że dla obiektu spełniającego założenia podane w p. 2 macierz W jest macierzą nieosobliwą. Z równania (89) mamy

$$k^T = W^{-1}M. \tag{92}$$

W przypadku, gdy równanie charakterystyczne układu zamkniętego ma pierwiastki wielokrotne, obok zależności (88) należy wziąć pod uwagę równości o postaci (64).

Załóżmy z kolei, że liczba m zadanych z góry pierwiastków równania charakterystycznego układu zamkniętego jest równa liczbie p wejść obiektu (składowych wektora u), a zadane pierwiastki $s_1, s_2, \ldots, s_m$ są jednokrotne. W tym przypadku składowe wektora (82) dobieramy tak, aby równoważny obiekt o jednym wyjściu był obserwowalny, czyli był spełniony warunek

$$\det\begin{bmatrix} kC \\ kCA \\ \cdots\cdots \\ kCA^{n-1} \end{bmatrix} \neq 0. \tag{93}$$

Natomiast składowe wektora (81) dobieramy korzystając z równości (88). Z zależności (88) i (87) w tym przypadku otrzymamy układ równań

$$W'\Theta = M, \tag{94}$$

przy czym

$$W' = \begin{bmatrix} kW(s_1) \\ kW(s_2) \\ \cdots\cdots \\ kW(s_m) \end{bmatrix}, \tag{95}$$

a wektor M jest określony zależnością (91).

W sposób analogiczny jak dla macierzy W można wykazać, że dla obiektu spełniającego założenia podane w p. 2 macierz W' jest macierzą nieosobliwą. Z równania (94) mamy

$$\Theta = W'^{-1}M. \tag{96}$$

Z powyższych rozważań wynika następujący tok postępowania przy rozwiązywaniu rozpatrywanego zadania.

1. mając dane macierze A, B i C, gdy $m = q$, dobieramy tak składowe wektora (81), aby był spełniony warunek (53), a gdy $m = p$, wektora (82), aby był spełniony warunek (93);
2. korzystając z zależności (88), gdy zadane pierwiastki równania charakterystycznego są jednokrotne, a z zależności (88) i (64), gdy są wielokrotne, wypisujemy odpowiedni układ równań o postaci (89) lub (94);
3. rozwiązując ten układ równań wyznaczamy macierz k lub Θ;
4. poszukiwaną macierz K_y wyznaczamy z zależności (80).

Przykład 3

Dany jest obiekt o dwóch wejściach i dwóch wyjściach, którego macierz transmitancji operatorowych ma postać

$$G_0(s) = \frac{W(s)}{M_o(s)} = \frac{1}{s^3+9s^2+29s+33} \begin{bmatrix} s^2+8s+15, & s^2-7 \\ s^2+4s+3\ , & -s^2-4s+3 \end{bmatrix}. \tag{97}$$

Należy tak dobrać macierz

$$K_y = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} [k_1 \ \ k_2], \tag{98}$$

aby równanie charakterystyczne układu zamkniętego miało dwa pierwiastki o wartościach $s_1 = -2$, $s_2 = -3$.

Wielomian charakterystyczny układu zamkniętego ma postać

$$M(s) = M_o(s) + kW(s)\Theta = s^3+9s^2+29s+33 + \\ + [k_1 k_2] \begin{bmatrix} s^2+8s+15, & s^2-7 \\ s^2+4s+3\ , & -s^2-4s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix}. \tag{99}$$

W tym przypadku $m = p = q$ i wobec tego elementy macierzy K_y możemy wyznaczyć stosując dowolną z podanych wyżej dwóch metod. W metodzie 1-szej składowe wektora

$\begin{bmatrix}\Theta_1\\ \Theta_2\end{bmatrix}$ dobieramy tak, aby był spełniony warunek (53). Łatwo sprawdzić, że warunek ten jest spełniony dla $\Theta_1 = \Theta_2 = 1$

W tym przypadku układ równań (89) ma postać

$$\begin{bmatrix}[W(s_1)\Theta]^T\\ [W(s_2)\Theta]^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}M_o(s_1)\\ M_o(s_2)\end{bmatrix}, \tag{100}$$

czyli

$$\begin{bmatrix}0 & 6\\ 2 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\ 0\end{bmatrix}. \tag{101}$$

Wobec tego

$$\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 6\\ 2 & 6\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-3\\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}, \tag{102}$$

a poszukiwana macierz (98) ma postać

$$K_y = \begin{bmatrix}\Theta_1\\ \Theta_2\end{bmatrix}[k_1 \;\; k_2] = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\frac{1}{2}[3, \;\; -1] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3, & -1\\ 3, & -1\end{bmatrix}. \tag{103}$$

Łatwo sprawdzić, że równanie charakterystyczne układu zamkniętego

$$M(s) = s^3+9s^2+29s+33+\frac{1}{2}[3, \;\; -1]\begin{bmatrix}s^2+8s+15, & s^2-7\\ s^2+4s+3, & -s^2-4s+3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} =$$

$$= s^3+12s^2+41s+42 = 0 \tag{104}$$

ma pierwiastki $s_1 = -2$, $s_2 = -3$, $s_3 = -7$.

W drugiej metodzie składowe wektora $[k_1, k_2]$ dobieramy tak, aby był spełniony warunek (93). Łatwo sprawdzić, że warunek ten jest spełniony dla $k_1 = k_2 = 1$. W tym przypadku układ równań (94) ma postać

$$\begin{bmatrix}kW(s_1)\\ kW(s_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Theta_1\\ \Theta_2\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}M_o(s_1)\\ M_o(s_2)\end{bmatrix}, \tag{105}$$

czyli

$$\begin{bmatrix}2, & 4\\ 0, & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Theta_1\\ \Theta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\ 0\end{bmatrix}. \tag{106}$$

Wobec tego

$$\begin{bmatrix}\Theta_1\\ \Theta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2, & 4\\ 0, & 8\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-3\\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-3\\ 0\end{bmatrix}, \tag{107}$$

a poszukiwana macierz (98) ma postać

$$K_y = \begin{bmatrix}\Theta_1\\ \Theta_2\end{bmatrix}[k_1 \;\; k_2] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-3\\ 0\end{bmatrix}[1, \;\; 1] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-3, & -3\\ 0, & 0\end{bmatrix}. \tag{108}$$

W tym przypadku równanie charakterystyczne układu zamkniętego

$$M(s) = s^3+9s^2+29s+33+ \\ +[1,\ 1]\begin{bmatrix} s^2+8s+15, & s^2-7 \\ s^2+4s+3\ , & -s^2-4s+3 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} = s^3+6s^2+11s+6 = 0 \quad (109)$$

ma pierwiastki $s_1 = -2$, $s_2 = -3$, $s_3 = -1$.

4.2. Rozwiązanie zagadnienia w przypadku, gdy $D = 0$ i $m > \max(p, q)$

4.2.1. Metoda równań więzów

W metodzie tej poszukiwaną macierz K_y przedstawiamy w postaci iloczynu (80) wektora kolumnowego Θ i wektora wierszowego k i wykorzystujemy fakt, że składowe wektora Θ muszą spełniać tylko jeden warunek (53). Pozwala to wykorzystać $p-1$ stopni swobody w wyborze tego wektora Θ do przesunięcia do z góry zadanych położeń większej liczby niż $\max(p, q)$ pierwiastków równania charakterystycznego układu zamkniętego [17].

Z założenia, że rząd macierzy C jest równy q ($q < n$) wynika, że macierz ta ma q liniowo niezależnych kolumn. Niech macierz C_q będzie macierzą nieosobliwą utworzoną z tych liniowo niezależnych kolumn macierzy C. Pozostałe (liniowo zależne) kolumny macierzy C można przedstawić jako kombinacje liniowe kolumn macierzy C_q. Istnieje zatem taka macierz nieosobliwa T, że

$$C = [C_q 0_{n-q}]T, \quad (110)$$

przy czym 0_{n-q} jest macierzą zerową o wymiarach $q \times (n-q)$.

Po uwzględnieniu zależności (110) wielomian charakterystyczny układu zamkniętego (87) przyjmie postać

$$M(s) = M_o(s)+[k'0]T[s1-A]_{ad}B\Theta = M_o(s)+\{T[s1-A]_{ad}B\Theta\}^T[k'0]^T, \quad (111)$$

przy czym

$$k' = kC_q, \quad (112)$$

a 0 jest $(n-q)$ — wymiarowym wektorem zerowym.

Załóżmy, że chcemy przesunąć wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego do z góry zadanych położeń i że zadane pierwiastki $s_1, s_2, \ldots, s_n$ są jednokrotne. W tym przypadku korzystając z zależności (59) i (111) otrzymamy układ równań

$$P_T\begin{bmatrix} k'^T \\ 0 \end{bmatrix} = M, \quad (113)$$

przy czym

$$P_T = \begin{bmatrix} \{T[s_1 1-A]_{ad}B\Theta\}^T \\ \{T[s_2 1-A]_{ad}B\Theta\}^T \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \{T[s_n 1-A]_{ad}B\Theta\}^T \end{bmatrix}, \quad (114)$$

a wektor M jest określony zależnością (62).

W sposób analogiczny jak dla macierzy P można wykazać, że dla obiektu sterowalnego macierz (114) jest macierzą nieosobliwą. Z równania (113) mamy

$$\begin{bmatrix} k'^T \\ 0 \end{bmatrix} = P_T^{-1} M \tag{115}$$

oraz

$$k'^T = -\frac{1}{\det P_T} \begin{bmatrix} p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{1n} \\ p_{21}, p_{22}, \cdots, p_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{q1}, p_{q2}, \cdots, p_{qn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0(s_1) \\ M_0(s_2) \\ \vdots \\ M_0(s_n) \end{bmatrix}, \tag{116}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\det P_T} \begin{bmatrix} p_{q+1,1}, p_{q+1,2}, \cdots, p_{q+1,n} \\ p_{q+2,1}, p_{q+2,2}, \cdots, p_{q+2,n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{n,1}, \quad p_{n,2}, \cdots, p_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0(s_1) \\ M_0(s_2) \\ \vdots \\ M_0(s_n) \end{bmatrix}, \tag{117}$$

przy czym $p_{ij}(i,j = 1, 2, \ldots, n)$ są elementami macierzy dołączonej P_{Tad} zależnymi od składowych wektora Θ.

Układ równań (117) stanowi układ $n-q$ równań więzów, z których możemy wyznaczyć związki między współrzędnymi wektora Θ. Ze związków tych do dalszych rozważań wybieramy te, które nie kolidują z warunkiem sterowalności (53).

Niech w układzie równań więzów (117) będzie α grup równań liniowo zależnych obejmujących łącznie β równań. W tym przypadku na podstawie równań więzów możemy określić $n-q-\beta+\alpha$ współrzędnych wektora Θ, a rozpatrywane zadanie ma rozwiązanie, gdy

$$m > n-\beta+\alpha. \tag{118}$$

Pozostałe współrzędne w liczbie $m-n+\beta-\alpha$ są niewiadomymi swobodnymi, które można założyć dowolnie.

W przypadku pierwiastków wielokrotnych równania charakterystycznego układu zamkniętego obok zależności (59) należy wziąć pod uwagę zależności (62).

Z powyższych rozważań wynika następujący tok postępowania przy rozwiązywaniu rozpatrywanego zadania:

1. mając daną macierz C wyznaczamy macierze C_q i T spełniające warunek (110),
2. mając macierze A, B, T wyznaczamy wielomian charakterystyczny układu zamkniętego (111),
3. korzystając z zależności (59), gdy zadane pierwiastki są jednokrotne, a z zależności (59) i (64), gdy są wielokrotne, wyznaczamy układ równań o postaci (113),
4. rozwiązując ten układ równań wyznaczamy zależności (116) i (117),
5. z równań więzów (117) wyznaczamy zależności między współrzędnymi wektora Θ i te z nich, które nie są sprzeczne z warunkiem sterowalności (53) podstawiamy do (116),
6. przyjmując na współrzędne Θ_i występujące w zależności (117) odpowiednie wartości wyznaczamy wektor k',
7. wektor k wyznaczamy z zależności

$$k = k' C_q^{-1}, \tag{119}$$

a poszukiwaną macierz K_y z zależności (80).

Przykład 4

Dany jest obiekt opisany równaniami

$$\dot{x} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3, & -1, & 1 \\ 1, & -5, & -1 \\ 2, & -2, & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 0 \\ -1, & 2 \end{bmatrix} u, \tag{120}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1, & 1, & -1 \\ 1, & 2, & 1 \end{bmatrix} x. \tag{121}$$

Należy tak dobrać elementy macierzy

$$K_y = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} [k_1 \;\; k_2], \tag{122}$$

aby równanie charakterystyczne układu zamkniętego miało pierwiastki $s_1 = s_2 = -4$, $s_3 = -3$.

Łatwo sprawdzić, że obiekt spełnia założenia podane w p. 2. Macierz

$$C = \begin{bmatrix} 1, & 1, & -1 \\ 1, & 2, & 1 \end{bmatrix} \tag{123}$$

ma rząd równy 2. Jako macierz C_q przyjmujemy macierz złożoną z dwóch pierwszych kolumn macierzy C

$$C_q = \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 2 \end{bmatrix}. \tag{124}$$

Łatwo sprawdzić, że macierz T spełniająca zależność (110) w tym przypadku ma postać

$$T = \begin{bmatrix} 1, & 0, & -3 \\ 0, & 1, & 2 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}. \tag{125}$$

Wielomian charakterystyczny układu zamkniętego (111) ma postać

$$M(s) = M_o(s) + \{T[s1 - A]_{ad} B\Theta\}^T \begin{bmatrix} k' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+\frac{3}{2}, & \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}, & s+\frac{5}{2}, & \frac{1}{2} \\ -1, & 1, & s+2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \left\{ \begin{bmatrix} 1, & 0, & -3 \\ 0, & 1, & 2 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+\frac{3}{2}, & \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}, & s+\frac{5}{2}, & \frac{1}{2} \\ -1, & 1, & s+2 \end{bmatrix}_{ad} \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 0 \\ -1, & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} k_1' \\ k_2' \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= s^3 + 6s^2 + 11s + 6 +$$

$$+\left\{\begin{bmatrix}1, & 0, & -3\\ 0, & 1, & 2\\ 0, & 0, & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s^2+\frac{9}{2}s+\frac{9}{2}, & -\frac{1}{2}s-\frac{3}{2}, & \frac{1}{2}s+\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}s+\frac{1}{2}, & s^2+\frac{7}{2}s+\frac{5}{2}, & -\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\\ s+2, & -s-2, & s^2+4s+4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Theta_1+\Theta_2\\ \Theta_1\\ 2\Theta_2-\Theta_1\end{bmatrix}\right\}^T\begin{bmatrix}k_1'\\ k_2'\\ 0\end{bmatrix}=$$

$$=s^3+6s^2+11s+6+$$

$$+\left[\left(4s^2+15\frac{1}{2}s+13\frac{1}{2}\right)\Theta_1-\left(5s^2+21\frac{1}{2}s+22\frac{1}{2}\right)\Theta_2,\ -\left(s^2+3\frac{1}{2}s+4\frac{1}{2}\right)\Theta_1+\right.$$

$$\left.+\left(4s^2+17\frac{1}{2}s+19\frac{1}{2}\right)\Theta_2,-(s^2+4s+4)\Theta_1+(2s^2+9s+10)\Theta_2\right]\begin{bmatrix}k_1'\\ k_2'\\ 0\end{bmatrix}. \tag{126}$$

Zgodnie z warunkami zadania elementy macierzy dobieramy tak, aby

$$M(s_1)=0,\qquad \frac{dM(s)}{ds}\Big|_{s=s_2}=0\qquad \text{oraz}\qquad M(s_3)=0. \tag{127}$$

Z zależności (127) i (126) dla $s_1=s_2=-4$ i $s_3=-3$ otrzymamy

$$\begin{bmatrix}k_1'\\ k_2'\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}47\frac{1}{2}\Theta_1-60\frac{1}{2}\Theta_2, & -14\frac{1}{2}\Theta_1+49\frac{1}{2}\Theta_2, & -4\Theta_1+6\Theta_2\\ -16\frac{1}{2}\Theta_1+18\frac{1}{2}\Theta_2, & 4\frac{1}{2}\Theta_1-14\frac{1}{2}\Theta_2, & 4\Theta_1-7\Theta_2\\ 18\Theta_1-3\Theta_2, & -3\Theta_1+3\Theta_2, & -\Theta_1+\Theta_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}6\\ -11\\ 0\end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}7\frac{1}{2}\Theta_1^2-14\Theta_1\Theta_2+6\frac{1}{2}\Theta_2^2, & -2\frac{1}{2}\Theta_1^2+34\Theta_1\Theta_2-31\frac{1}{2}\Theta_2^2,\\ & -40\Theta_1^2+214\frac{1}{2}\Theta_1\Theta_2-259\frac{1}{2}\Theta_2^2\\ 55\frac{1}{2}\Theta_1^2-103\Theta_1\Theta_2+2\frac{1}{2}\Theta_2^2, & 24\frac{1}{2}\Theta_1^2-12\Theta_1\Theta_2-42\frac{1}{2}\Theta_2^2,\\ & -124\Theta_1^2+402\frac{1}{2}\Theta_1\Theta_2-313\frac{1}{2}\Theta_2^2\\ -31\frac{1}{2}\Theta_1^2+169\frac{1}{2}\Theta_1\Theta_2+12\Theta_2^2, & -108\frac{1}{2}\Theta_1^2+611\Theta_1\Theta_2+32\frac{1}{2}\Theta_2^2,\\ & -25\frac{1}{2}\Theta_1^2+124\Theta_1\Theta_2-38\frac{1}{2}\Theta_2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ -11\\ 0\end{bmatrix}, \tag{128}$$

przy czym

$$\Delta=282\frac{1}{2}\Theta_1^3-3249\frac{1}{2}\Theta_1^2\Theta_2+2021\Theta_1\Theta_2^2-194\Theta_2^3.$$

Z układu równań (128) mamy

$$\begin{bmatrix}k_1'\\ k_2'\end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}7\frac{1}{2}\Theta_1^2-14\Theta_1\Theta_2+6\frac{1}{2}\Theta_2^2, & -2\frac{1}{2}\Theta_1^2+34\Theta_1\Theta_2-31\frac{1}{2}\Theta_2^2\\ 55\frac{1}{2}\Theta_1^2-103\Theta_1\Theta_2+2\frac{1}{2}\Theta_2^2, & 24\frac{1}{2}\Theta_1^2-12\Theta_2\Theta_2-42\frac{1}{2}\Theta_2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ -11\end{bmatrix} \tag{129}$$

oraz

$$0 = 1004\frac{1}{2}\Theta_1^2 + 5704\Theta_1\Theta_2 - 285\frac{1}{2}\Theta_2^2. \tag{130}$$

Zależność $\Theta_1 = a\Theta_2$ (a — stały współczynnik) odrzucamy jako sprzeczną z warunkiem sterowalności i przyjmujemy

$$\Theta_2 = 1 + \Theta_1. \tag{131}$$

Podstawiając zależność (131) do (129) otrzymamy

$$\begin{bmatrix} k_1' \\ k_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{90\Theta_1^2 + 223\Theta_1 + 385\frac{1}{2}}{-3161\Theta_1^3 + 1810\frac{1}{2}\Theta_1^2 + 1439\Theta_1 - 134} \\ \dfrac{62\Theta_1^2 + 481\Theta_1 + 482\frac{1}{2}}{-3161\Theta_1^3 + 1810\frac{1}{2}\Theta_1^2 + 1439\Theta_1 - 134} \end{bmatrix} \tag{132}$$

a dla $\Theta_1 \cong -0.85$ (z zależności (130) i (131))

$$\begin{bmatrix} k_1' \\ k_2' \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0.175 \\ 0.079 \end{bmatrix}. \tag{133}$$

Z zależności (119) mamy

$$[k_1, k_2] = [k_1', k_2']C_q^{-1} \cong [0.175, 0.079]\begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 2 \end{bmatrix}^{-1} = [0.271, -0.096]. \tag{134}$$

Poszukiwana macierz (122) jest więc równa

$$K_y = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix}[k_1, k_2] = \begin{bmatrix} -0.85 \\ 0.15 \end{bmatrix}[0.271, -0.096] = \begin{bmatrix} -0.23, & 0.082 \\ 0.041, & -0.014 \end{bmatrix}, \tag{135}$$

Z założenia, że rząd macierzy B jest równy p ($p < n$) wynika, że macierz ta ma p liniowo niezależnych wierszy. Niech macierz B_p będzie macierzą nieosobliwą utworzoną z tych liniowo niezależnych wierszy macierzy B. Pozostałe (liniowo zależne) wiersze macierzy B można przedstawić jako kombinacje liniowe wierszy macierzy B_p. Istnieje zatem taka macierz nieosobliwa S, że

$$B = S\begin{bmatrix} B_p \\ 0_{n-p} \end{bmatrix}, \tag{136}$$

przy czym 0_{n-p} jest macierzą zerową o wymiarach $(n-p)\times p$.

Po uwzględnieniu zależności (136) wielomian charakterystyczny układu zamkniętego (87) przyjmie postać

$$M(s) = M_o(s) + kC[s1 - A]_{ad}S\begin{bmatrix} \Theta' \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{137}$$

przy czym

$$\Theta' = B_p \Theta, \tag{138}$$

a 0 jest $(n-p)$-wymiarowym wektorem zerowym.

Załóżmy, że chcemy przesunąć wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego do z góry zadanych położeń i że zadane pierwiastki $s_1, s_2, \ldots, s_n$ są jednokrotne. W tym przypadku korzystając z zależności (59) i (137) otrzymamy układ równań

$$P_s \begin{bmatrix} \Theta' \\ 0 \end{bmatrix} = M, \tag{139}$$

przy czym

$$P_S = \begin{bmatrix} kC[s_1 1 - A]_{ad} S \\ kC[s_2 1 - A]_{ad} S \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ KC[s_n 1 - A]_{ad} S \end{bmatrix}, \tag{140}$$

a wektor M jest określony zależnością (62).

W sposób analogiczny jak dla macierzy P można wykazać, że dla obiektu spełniającego założenia podane w p. 2 macierz P_S jest macierzą nieosobliwą. Z równania (139) mamy

$$\begin{bmatrix} \Theta' \\ 0 \end{bmatrix} = P_S^{-1} M \tag{141}$$

oraz

$$\Theta' = -\frac{1}{\det P_S} \begin{bmatrix} p'_{11}, p'_{12}, \ldots, p'_{1n} \\ p'_{21}, p'_{22}, \ldots, p'_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p'_{p1}, p'_{p2}, \ldots, p'_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_o(s_1) \\ M_o(s_2) \\ \vdots \\ M_o(s_n) \end{bmatrix}, \tag{142}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{\det P_S} \begin{bmatrix} p'_{p+1,1}, p'_{p+2,2}, \ldots, p'_{p+1,n} \\ p'_{p+2,1}, p'_{p+2,2}, \ldots, p'_{p+2,n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p'_{n1}, p'_{n2}, \ldots, p'_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_o(s_1) \\ M_o(s_2) \\ \vdots \\ M_n(s_n) \end{bmatrix}, \tag{143}$$

przy czym $p'_{ij}(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ są elementami macierzy dołączonej P_{Sad} zależnymi od składowych wektora k.

Układ równań (143) stanowi układ $n-p$ równań więzów, z których możemy wyznaczyć związki między współrzędnymi wektora k. Ze związków tych do dalszych rozważań wybieramy te, które nie kolidują z warunkiem obserwowalności (93).

Dalszy ciąg rozważań i tok postępowania przy rozwiązywaniu rozpatrywanego zadania jest taki sam jak w przypadku wyznaczania wektora k.

4.2.2. *Metoda kolejnych przybliżeń*

W metodzie tej poszukujemy macierzy K_y w postaci iloczynu (80) wektorów Θ i k. Dla zadanych jednokrotnych pierwiastków $s_1, s_2, \ldots, s_m$ z zależności (87) i (88) otrzymamy układ m ($m \leqslant n$) równań

$$\begin{aligned} k\,W(s_1)\Theta &= -M_o(s_1), \\ k\,W(s_2)\Theta &= -M_o(s_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k\,W(s_m)\Theta &= -M_o(s_m) \end{aligned} \tag{144}$$

o $p+q$ niewiadomych składowych wektorów Θ i k.

Dla danego wektora Θ równania (144) stanowią układ m równań o postaci

$$Wk^T = M, \tag{145}$$

przy czym

$$W = \begin{bmatrix} [W(s_1)\Theta]^T \\ [W(s_2)\Theta]^T \\ \cdots\cdots\cdots \\ [W(s_m)\Theta]^T \end{bmatrix}, \tag{146}$$

$$M = -\begin{bmatrix} M_o(s_1) \\ M_o(s_2) \\ \vdots \\ M_o(s_m) \end{bmatrix}. \tag{147}$$

Z kolei dla danego wektora k równania (144) stanowią układ m równań o postaci

$$W'\Theta = M, \tag{148}$$

przy czym

$$W' = \begin{bmatrix} k\,W(s_1) \\ k\,W(s_2) \\ \vdots \\ k\,W(s_m) \end{bmatrix}. \tag{149}$$

Układy równań (145) i (148) rozwiązujemy metodą kolejnych przybliżeń przyjmując jako kryterium funkcję o postaci

$$E = \sum_{m}^{i=1} [M(s_i)]^2 = ||Wk^T - M||^2 = ||W'\Theta - M||^2. \tag{150}$$

Tok postępowania przy rozwiązywaniu rozpatrywanego zadania jest następujący.

1. Przyjmując jako zerowe przybliżenie wektora Θ wektor $\Theta^{(0)}$ wyznaczamy rozwiązanie układu równań (145) minimalizujące kryterium (150). W przypadku, gdy macierz $W_o = W(\Theta^{(0)})$ ma rząd równy p, rozwiązanie to dane jest wzorem

$$k^{(0)T} = [W_o^T W_o]^{-1} W_o^T M, \tag{151}$$

a kryterium (150) przyjmuje wartość

$$E_o = ||W_o k^{(0)T} - M||^2. \tag{152}$$

2. Podstawiając $k = k^{(0)}$ wyznaczamy rozwiązanie układu równań (148) minimalizując kryterium (150). W przypadku, gdy macierz $W_o' = W'(k^{(0)})$ ma rząd równy q, rozwiązanie to dane jest wzorem

$$\Theta^{(1)} = [W_o'^T W_o']^{-1} W_o'^T M, \tag{153}$$

a kryterium (150) przyjmuje wartość

$$E_1 = ||W_o' \Theta^{(1)} - M||^2. \tag{154}$$

3. Podstawiając z kolei $\Theta = \Theta^{(1)}$ wyznaczamy rozwiązanie układu równań (145) minimalizujące kryterium (150). W przypadku, gdy macierz $W_1 = W(\Theta^{(1)})$ ma rząd równy p, rozwiązanie to dane jest wzorem

$$k^{(1)T} = [W_1^T W_1]^{-1} W_1^T M, \tag{155}$$

a kryterium (150) przyjmuje wartość

$$E_2 = ||W_1 k^{(1)T} - M||^2. \tag{156}$$

4. Mając $k^{(1)T}$ z układu równań (148) wyznaczamy $\Theta^{(1)}$ i E_3. Procedurę obliczania kolejnych przybliżeń przerywamy, gdy funkcja E określona zależnością (150) osiągnie wartość dostatecznie małą (zależną od przyjętej dokładności).

Zbieżność ciągu kolejnych przybliżeń wynika natychmiast z zależności [27]

$$E_o > E_1 > E_2 > \ldots \geqslant 0. \tag{157}$$

W przypadku wielokrotnych pierwiastków równania charakterystycznego układu zamkniętego należy przy wypisywaniu układu równań (145) i (148) skorzystać również z zależności (64).

Przykład 5

Dla obiektu o dwóch wejściach i dwóch wyjściach, którego macierz transmitancji operatorowych ma postać (97), należy tak dobrać elementy macierzy (98), aby równanie charakterystyczne układu zamkniętego miało pierwiastki $s_1 = s_2 = -2$, $s_3 = -3$.

Wielomian charakterystyczny układu zamkniętego w tym przypadku ma postać

$$M(s) = M_o(s) + k\,W(s)\Theta = s^3 + 9s^2 + 29s + 33 + [k_1, k_2] \begin{bmatrix} s^2+8s+15, & s^2-7 \\ s^2+4s+3, & -s^2-4s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix}. \tag{158}$$

Z zależności

$$M(s_1) = 0, \quad \left.\frac{dM(s)}{ds}\right|_{s=s_2} = 0 \quad \text{oraz} \quad M(s_3) = 0 \tag{159}$$

mamy

dla $s_1 = -2$

$$[k_1, k_2] \begin{bmatrix} 3, & -3 \\ -1, & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} = -3, \tag{160}$$

dla $s_2 = -2$

$$[k_1, k_2]\begin{bmatrix} 4, & -4 \\ 0, & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} = 5, \tag{161}$$

dla $s_3 = -3$

$$[k_1, k_2]\begin{bmatrix} 0, & 2 \\ 0, & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} = 0. \tag{162}$$

Równania (160), (161) i (162) możemy zapisać następująco

$$\begin{bmatrix} 3\Theta_1 - 3\Theta_2, & 7\Theta_2 - \Theta_1 \\ 4\Theta_1 - 4\Theta_2, & 0 \\ 2\Theta_2 \quad , & 6\Theta_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dla danego wektora } \Theta \tag{163}$$

oraz

$$\begin{bmatrix} 3k_1 - k_2, & 7k_2 - 3k_1 \\ 4k_1 \quad , & -4k_1 \\ 0 \quad , & 2k_1 + 6k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dla danego wektora } k. \tag{164}$$

Jako zerowe przybliżenie wektora Θ przyjmujemy

$$\Theta^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{165}$$

Macierz

$$W_o = W(\Theta^0) = \begin{bmatrix} 3\Theta_1 - 3\Theta_2, & 7\Theta_2 - \Theta_1 \\ 4\Theta_1 - 4\Theta_2, & 0 \\ 2\Theta_2 \quad , & 6\Theta_2 \end{bmatrix}_{\Theta_1 = \Theta_2 = 1} = \begin{bmatrix} 0, & 6 \\ 0, & 0 \\ 2, & 6 \end{bmatrix} \tag{166}$$

ma rząd równy 2. Ze wzoru (151) otrzymamy zatem

$$\begin{bmatrix} k_1^0 \\ k_2^0 \end{bmatrix} = [W_o^T W_o]^{-1} W_o^T M = \begin{bmatrix} 4, & 12 \\ 12, & 72 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0, & 0, & 2 \\ 6, & 0, & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{167}$$

oraz

$$E_o = \|W_o k^{0T} - M\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} 0, & 6 \\ 0, & 0 \\ 2, & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2 = 25. \tag{168}$$

Podstawiając (167) do (164) otrzymamy

$$\begin{bmatrix} 5, & -8 \\ 6, & -6 \\ 0, & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Theta_1^{(1)} \\ \Theta_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{169}$$

Macierz

$$W_o' = W'(k^{(0)}) = \begin{bmatrix} 5, & -8 \\ 6, & -6 \\ 0, & 0 \end{bmatrix} \tag{170}$$

ma rząd równy 2. Ze wzoru (153) otrzymamy zatem

$$\begin{bmatrix} \Theta_1^{(1)} \\ \Theta_2^{(1)} \end{bmatrix} = [W_o'^T W_o']^{-1} W_o'^T M = \begin{bmatrix} 61, & -76 \\ -76, & 100 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5, & 6, & 0 \\ -8, & -6, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{58}{18} \\ \frac{43}{18} \end{bmatrix} \tag{171}$$

oraz

$$E_1 = \|W_o' \Theta^{(1)} - M\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} 5, & -8 \\ 6, & -6 \\ 0, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{58}{18} \\ \frac{43}{18} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2 = 0. \tag{172}$$

Podstawiając z kolei (171) do (163) otrzymamy

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2}, & \frac{27}{2} \\ \frac{10}{3}, & 0 \\ \frac{43}{9}, & \frac{43}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1^{(1)} \\ k_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{173}$$

Macierz

$$W_1 = W(\Theta^{(1)}) = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}, & \frac{27}{2} \\ \frac{10}{3}, & 0 \\ \frac{43}{9}, & \frac{43}{3} \end{bmatrix} \tag{174}$$

ma rząd równy 2. Ze wzoru (155) otrzymamy zatem

$$\begin{bmatrix} k_1^{(1)} \\ k_2^{(1)} \end{bmatrix} = [W_1^T W_1]^{-1} W_1 M =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{13021}{324}, & \frac{12391}{108} \\ \frac{12391}{108}, & \frac{14047}{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{2}, & \frac{10}{3}, & \frac{43}{9} \\ \frac{27}{2}, & 0, & \frac{43}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{175}$$

oraz

$$E_2 = \|W_1 k^{(1)T} - M\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} \frac{5}{2}, & \frac{27}{2} \\ \frac{10}{3}, & 0 \\ \frac{43}{9}, & \frac{43}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2 = 0. \tag{176}$$

Kontynuując tę procedurę możemy wyznaczyć z zadaną dokładnością wektory Θ i k, a następnie poszukiwaną macierz (98).

Do rozwiązywania układu równań (144) można stosować również inne sposoby podane w pracy [27].

4.3. Rozwiązanie zagadnienia w przypadku, gdy $D \neq 0$

Z porównania równań charakterystycznych (11) i (15) wynika zależność

$$K_x = [1+K_yD]^{-1}K_yC. \tag{177}$$

Macierz K_x możemy wyznaczyć stosując którąkolwiek z metod podanych w p. 3. Znając K_x poszukiwaną macierz K_y wyznaczamy rozwiązując równanie (177). Niżej zostaną podane dwa sposoby rozwiązania tego równania [18].

Sposób 1. Mnożąc lewostronnie równanie (177) przez macierz $[1+K_yD]$ otrzymamy

$$[1+K_yD]K_x = K_yC \tag{178}$$

oraz

$$K_y[C-DK_x] = K_x. \tag{179}$$

W przypadku, gdy rząd macierzy $[C-DK_x]$ jest równy q, z równania (179) mamy

$$K_y = K_x[C-DK_x]^T\{[C-DK_x][C-DK_x]^T\}^{-1}, \tag{180}$$

a gdy jest mniejszy od q

$$K_y = K_x[C-DK_x]^g, \tag{181}$$

przy czym $[C-DK_x]^g$ jest macierzą pseudoodwrotną spełniającą warunek

$$[C-DK_x][C-DK_x]^g[C-DK_x] = [C-DK_x]. \tag{182}$$

Sposób 2. Z założenia macierz C ma rząd równy q. Wobec tego macierz CC^T jest macierzą nieosobliwą. Mnożąc prawostronnie równanie (177) przez macierz C^T otrzymamy

$$K_xC^T = [1+K_yD]^{-1}K_yCC^T \tag{183}$$

oraz

$$[1+K_yD]^{-1}K_y = K_xC^T[CC^T]^{-1}. \tag{184}$$

Mnożąc z kolei równanie (184) przez $[1+K_yD]$ otrzymamy

$$K_y = [1+K_yD]K_xC^T[CC^T]^{-1} \tag{185}$$

oraz

$$K_y\{1-DK_xC^T[CC^T]^{-1}\} = K_xC^T[CC^T]^{-1}. \tag{186}$$

W przypadku, gdy macierz $\{1-DK_xC^T[CC^T]^{-1}\}$ jest macierzą nieosobliwą z równania (186) mamy

$$K_y = K_xC^T[CC^T]^{-1}\{1-DK_xC^T[CC^T]^{-1}\}^{-1}, \tag{187}$$

a gdy jest osobliwą

$$K_y = K_xC^T[CC^T]^{-1}\{1-DK_xC^T[CC^T]^{-1}\}^g, \tag{188}$$

przy czym $\{1-DK_xC^T[CC^T]^{-1}\}^g$ jest macierzą pseudoodwrotną spełniającą warunek

$$\{1-DK_xC^T[CC^T]^{-1}\}\{1-DK_xC^T[CC^T]^{-1}\}^g\{1-DK_xC^T[CC^T]^{-1}\} = \{1-DK_xC^T[CC^T]^{-1}\}. \quad (189)$$

Z powyższych rozważań wynika następujący tok postępowania przy rozwiązywaniu rozpatrywanego zadania:

1. stosując jedną z metod podanych w p. 3 wyznaczamy macierz K_x,
2. znając K_x poszukiwaną macierz K_y wyznaczamy rozwiązując równanie (177) stosując jeden z wyżej podanych sposobów.

Przykład 6

Dany jest obiekt opisany równaniami

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u, \quad (190)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 7 & 9 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} u. \quad (191)$$

Należy tak dobrać elementy macierzy

$$K_y = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}, \quad (192)$$

aby równanie charakterystyczne układu zamkniętego miało pierwiastki $s_1 = -3$, $s_2 = -3$, $s_3 = -4$.

Macierz K_x wyznaczymy korzystając z metody sprowadzania równania (190) do postaci kanonicznej. Macierz (17) w tym przypadku ma postać

$$L = [B_1, AB_1, B_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (193)$$

a indeksy sterowalności są równe $d_1 = 2$, $d_2 = 1$.

Macierz odwrotna L^{-1} ma postać

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & -3 \\ 1, & 0, & 0 \\ -1, & 0, & 1 \end{bmatrix}. \quad (194)$$

Wobec tego

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_1A \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ -1, & 0, & 1 \end{bmatrix} \quad (195)$$

oraz

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 1 \end{bmatrix}. \quad (196)$$

Korzystając z zależności (20) i (21) obliczamy

$$\bar{A} = QAQ^{-1} = \left[\begin{array}{cc:c} 0, & 1 & 0 \\ -2, & 3 & 0 \\ \hdashline 8, & 0 & 3 \end{array}\right], \quad \bar{B} = QB = \left[\begin{array}{c} 0, \ 0 \\ 1, \ 3 \\ \hdashline 0, \ 1 \end{array}\right] \tag{197}$$

oraz

$$\bar{A}_p = \begin{bmatrix} -2, & 3, & 0 \\ 8, & 0, & 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_p = \begin{bmatrix} 1, & 3 \\ 0, & 1 \end{bmatrix}. \tag{198}$$

Wielomian charakterystyczny układu zamkniętego ma postać

$$M(s) = (s-s_1)(s-s_2)(s-s_3) = (s+2)^2(s+3) = s^3+7s^2+16s+12. \tag{199}$$

Wobec tego macierz $\bar{A}_{po}$ ma postać

$$\bar{A}_{po} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 1 \\ -12, & -16, & -7 \end{bmatrix}. \tag{200}$$

Poszukiwana macierz K_x zgodnie z zależnością (38) jest więc równa

$$K_x = \bar{B}_p^{-1}(\bar{A}_p - \bar{A}_{po})Q = \\ = \begin{bmatrix} 1, & 3 \\ 0, & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2, & 3, & -1 \\ 20, & 16, & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ -1, & 0, & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -31, & -45, & -31 \\ 10, & 16, & 10 \end{bmatrix}. \tag{201}$$

Poszukiwaną macierz K_y wyznaczamy stosując sposób 1 rozwiązania równania (177).

Macierz

$$C - DK_x = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 7 \\ 7, & 9, & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1, & -1 \\ -1, & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -31, & -45, & -31 \\ 10, & 16, & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41, & 61, & 48 \\ -44, & -68, & -51 \end{bmatrix} \tag{202}$$

ma rząd równy 2. Wobec tego macierz K_y możemy wyznaczyć korzystając ze wzoru (180)

$$K_y = K_x[C-DK_x]^T\{[C-DK_x][C-DK_x]^T\}^{-1} = \\ = \begin{bmatrix} -31, & -45, & -31 \\ 10, & 16, & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 41, & -44 \\ 61, & -68 \\ 48, & -51 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7606, & -8400 \\ -8400, & 9161 \end{bmatrix}^{-1} = \\ = \frac{1}{440717} \begin{bmatrix} -9928, & 279785 \\ 12387, & -86686 \end{bmatrix}. \tag{203}$$

Łatwo sprawdzić, że macierz (203) spełnia warunek (12).

W przypadku ogólnym, gdy warunek (12) nie jest spełniony, tzn. macierz $[1+K_yD]$ jest macierzą osobliwą, w podanych wyżej rozważaniach macierz odwrotną $[1+K_yD]^{-1}$ należy zastąpić macierzą pseudoodwrotną $[1+K_yD]^g$ [18].

5. PODSUMOWANIE

Spośród wielu metod w pracy tej omówiono te metody, które zdaniem autora są możliwie najbardziej ogólne i obliczeniowo najprostsze.

Metoda sprowadzania równań obiektu do postaci kanonicznej zasługuje na uwagę

przede wszystkim ze względu na prosty algorytm obliczeniowy. Słabą stroną tej metody jest to, że może być ona stosowana tylko w przypadku, gdy dostępny jest cały wektor stanu, co w praktyce nie zawsze jest spełnione.

Metodą najbardziej uniwersalną spośród omówionych jest metoda rozkładu macierzy K_x (lub K_y) na iloczyn dwóch wektorów. Może ona być stosowana zarówno w przypadku, gdy dostępny jest cały wektor stanu, jak również, gdy dostępny jest tylko wektor odpowiedzi.

Na podkreślenie załuguje rozpatrzenie w niniejszej pracy pełnego opisu obiektu w postaci równań (1) i (2). Na ogół przyjmuje się $D = 0$. Uwzględnienie $D \neq 0$ w sposób istotny komplikuje rozwiązanie omawianego zadania w przypadku, gdy dostępny jest tylko wektor odpowiedzi.

Za swój oryginalny dorobek autor uważa również uogólnienie metody równań więzów, podanej w pracy [17] na przypadek:

1. dowolnej macierzy C, której rząd jest równy q,
2. gdy wielkością wyznaczoną z układu równań jest nie tylko wektor wierszowy k', ale również wektor kolumnowy Θ'.

Metoda ta pozwala, przy spełnieniu warunku (118) i dostępności tylko wektora odpowiedzi, przesunąć wszystkie bieguny układu wielowymiarowego do z góry zadanych położeń.

Metodą zasługującą na uwagę zwłaszcza w przypadku możliwości korzystania z maszyny cyfrowej jest metoda kolejnych przybliżeń podana w p. 4.2.2. Pozwala ona również przy dostępności tylko wektora odpowiedzi przesunąć wszystkie bieguny układu wielowymiarowego do z góry zadanych położeń.

LITERATURA

1. E. J. Davison *On pole assignment in linear systems with incomplete state feedback*, IEEE Trans. on Autom. Control, vol. AC-15, No 2, 1970, str. 348—351.
2. F. Fallside, H. Seraji, *Direct design procedure for multivariable feedback systems*, Proc. IEE, vol. 118, No 6, 1971, str. 797—801.
3. F. Fallside, H. Seraji, *Design of multivariable systems using unity-rank feedback*, Intern. J. Control, vol. 17, No 2, 1973, str. 351—364.
4. A. Jameson, *Design of a single-input system for specified roots using output feedback*, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-15, No 2, 1970, str. 345—348.
5. T. Kaczorek, *Design of linear stationary discrete-time systems for specified poles and zeros using gain elements*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. techn., vol. 20, No 6, 1972.
6. T. Kaczorek, *Design of single-input system for specified poles and zeros using gain elements*, Podstawy Sterowania, tom II, z. 4, 1972, str. 337—347.
7. T. Kaczorek, *Synteza wielowymiarowych układów liniowych stacjonarnych o zadanych własnościach dynamicznych i nie wszystkich zmiennych stanu bezpośrednio mierzalnych*, Podstawy Sterowania, tom II, z. 1, 1973, str. 79—90.
8. T. Kaczorek, *Przesuwanie zer i biegunów wielowymiarowych układów liniowych stacjonarnych z opóźnieniami*, Podstawy Sterowania, tom IV, z. 1, str. 13—26, 1974.

9. T. Kaczorek, *Przesuwanie zer i biegunów wielowymiarowych układów liniowych stacjonarnych*, Podstawy Sterowania, tom III, z. 4, 1973, str. 361—372.
10. T. Kaczorek, *Przesuwanie do z góry zadanych położeń pierwiastków równania charakterystycznego wielowymiarowego układu dyskretnego*, Podstawy Sterowania, tom III, z. 3, 1973, str. 167—180.
11. T. Kaczorek, *Design of a single-input system for specified poles and zeros using gain elements when not all state variables are measurable*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. techn., vol. 20, No 2, 1972, str. 17—23.
12. T. Kaczorek, *Design of linear stationary systems with delay in control by the use of gain elements*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. techn., vol. 21, No 5, 1973, str. 407—412.
13. T. Kaczorek, *Shifting of poles and zeros of transfer function of linear stationary systems with delay in control*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. techn., vol. 22, No 1, 1974, str. 69—74.
14. T. Kaczorek, *Shifting of poles and zeros of matrix transfer function of linear stationary systems with delay in control*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. techn., vol. 22, No 4, 1974, str. 7—13.
15. T. Kaczorek, *Synteza liniowych układów stacjonarnych za pomocą członów proporcjonalnych*, Archiwum Automatyki i Telemechaniki, tom XVII, No 3, 1972, str. 247—256.
16. T. Kaczorek i T. Traczyk, *Partial derivatives of Vandermonde determinant and their application to the synthesis of linear control systems*, Zastosowania Matematyki, z. 3, 1973, str. 329—337.
17. K. Kuźmiński, *Synteza wielowymiarowych układów liniowych stacjonarnych z opóźnieniami*, Praca habilitacyjna, Politechnika Łódzka 1975.
18. V. Lovass-Nagy, D.L. Powers, *On output feedback control*, Intern. Journal Control, vol. 21, No 6, 1975.
19. N. Munro, *Further results on pole-shifting using output feedback*, Intern. J. Control, vol. 20, No 5, str. 775—786 (1974).
20. N. Munro, A. Vardulakis, *Pole-shifting using output feedback*, Intern. Journal Control vol. 18, No 6, 1973, str. 1267—1273.
21. Park Haingjun, Dale E. Seborg, *Eigenvalue assignment using proportional-integral feedback control*, Intern. J. Control, vol. 20, No 3 (1974), str. 517—523.
22. R.V. Patal, *On output feedback pole assignability*, Intern. J. Control, vol. 20, No 6 (1974), str, 955—959.
23. P.N. Paraskovopoulos, S.G. Tzafestas, *New results in feedback modal-controller design*, Intern. Journal Control, vol. 21, No 6, 1975, str. 911—928.
24. M. Power, *A new result on eigenvalue assignment by means of dyadic output feedback*, Intern. Journal Control, vol. 21, No 1, 1975, str. 149—158.
25. H.H. Rosenbrock, *State-space and multivariable theory*, Nelson, London 1970.
26. H. Seraji, *On pole-shifting using output feedback*, Intern. J. Control, vol. 20, No 5, str. 721—726 (1974).
27. H. Seraji, *Pole assignment techniques for multivariable systems using unity rank output feedback*, Intern. Journal Control, vol. 21, No 6, 1975, str. 945—954.
28. H. Seraji, *Deadbeat control of discrete-time systems using output feedback*, Intern. Journal Control, vol. 21, No 2, 1975, str. 213—223.
29. H. Seraji, *Unattainability of certain pole positions in single-input systems with output feedback*, Intern. Journal Control, vol. 22, No 1, 1975, str. 119—123.
30. H.R. Sirisena, S.S. Choi, *Pole placement in output feedback control systems for minimum sensitivity to plant parameter variations*, Intern. Journal Control, vol. 22, No 1, 1975, str. 129—140.
31. B. Sridhar, D.P. Lindorff, *Pole-placement with constant gain output feedback*, Intern J. Control, vol. 18, No 5, 1973, str. 993—1003.
32. N. Viswanadham, G. Anbalagan, *On the stabilization of uniformly decoupled systems by state variable feedback*, Intern. Journal Control, vol. 19, No 1, 1974, str. 95—111.
33. W.A. Wolovich, *On the stabilization of controllable systems*, IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-13, October 1968, str. 569—573.
34. W.M. Wonham, *On pole assignment in multi-input controllable linear systems*, IEEE Trans., vol AC-12, 1967, str. 660—665.

T. KACZOREK

POLES ASSIGNMENT FOR MULTIVARIABLE LINEAR TIME-INVARIANT SYSTEMS

Summary

A critical review of methods of poles assignment in multivariable linear time-invariant systems using constant feedbacks is given. Two cases are considered:

1. all state variables of the plant are available (state vector x),
2. only outputs of the plant are available (output vector y). The plant is described by equations (1) and (2) with $D \neq 0$ in a general case.

Some generalizations and new methods are suggested. A generalization of the method (given in paper [17]) for the case when matrix C has a full rank and vectors k' and Θ' are calculated, is proposed. Moreover, several examples illustrating the methods are given.

T. KACZOREK

DÉCALAGE DES PÔLES À DES POSITIONS FIXÉES D'AVANCE DE MULTIDIMENSIONNELS SYSTÈMES LINÉAIRES STATIONNAIRES

Résumé

L'ouvrage contient une revue critique de méthodes du décalage des pôles à des positions fixées d'avance à l'aide des éléments proportionnels placés dans les boucles de contre-réactions de multidimensionnels systèmes linéaires stationnaires. On a examiné deux cas, où:

1. tout vecteur d'état x est accessible (mesuré directement)
2. seulement le vecteur de la réponse y est accessible. La considération est faite pour la complète description de l'objet en forme des équations (1) et (2) ($D \neq 0$).

Dans l'ouvrage on a donné certaines généralisations et les propositions de nouvelles méthodes. Parmi les autres on a donné la méthode générale des équations de liaisons, citée dans l'ouvrage [17] pour le cas:

1. de la matrice quelconque C à rang complet
2. où la grandeur définie du système d'équations est non seulement le vecteur à ligne k', mais aussi le vecteur à collone Θ'.

T. KACZOREK

VERSCHIEBUNG VON POLEN IN EINE IM VORAUS GEGEBENE LAGE DER STATIONÄREN MEHRDIMENSIONALEN LINIENSYSTEME

Zusammenfassung

In der vorliegenden Bearbeitung wurde eine kritische Übersicht über die Verschiebungsmethoden von Polen in eine im voraus gegebene Lage mittels proportioneller Glieder dargestellt, die in Schleifen der Minusrückkopplungen mehrdimensionaler stationärer Liniensysteme untergebracht sind. Zwei Fälle wurden erwogen, wenn:

1. der ganze Vektor des Zustandes x zugänglich ist (unmittelbar bemeßbar),
2. nur der Antwortsvektor y zugänglich ist.

Die Lösung wurde für die volle Objektbeschreibung in Gestalt von Formeln (1) and (2) ($D \neq 0$) durchgeführt.

Es wurden einige Verallgemeinerungen und Vorschläge von neuen Mothoden angeführt, u.a. die Verallgemeinerung der Methode der Bindungsformeln, die in der Arbeit [17] auftreten, und zwar für die Fälle:

1. einer beliebigen Matrix C eines vollen Ranges,
2. wenn die aus der Formelanordnung bezeichnete Größe nicht nur der Zeilenvektor k' ist, sondern auch der Spaltvektor Θ'.

Т. КАЧОРЕК

ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ПОЛЮСОВ В ПРЕДОПРЕДЕЛЕННЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

В труде приведен критический обзор методов перемещения полюсов в предопределенные положения при помощи пропорциональных элементов находящихся в ветви отрицательной обратной связи многомерных линейных стационарных систем. Рассмотрены два случая, когда:

1. непосредственно измерим весь вектор состояния x
2. измерим только вектор ответа y.

Рассуждения проведены для полной описи объекта в виде уравнений (1) и (2) при ($D \neq 0$).

В труде приведены некоторые обобщения и предложения новых методов. В частности приведено обобщения метода уравнений связи поданного в [17] на случаи:

1. произвольной матрицы C полного ранга.
2. когда определяемой из системы уравнений величиной является не только строчный вектор k', но и столбцевый вектор Θ'.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 3, ss. 677—685

621.3.017.31

Numeryczne wyznaczanie strat wiroprądowych w przewodzącej płycie ferromagnetycznej

JERZY GÓRECKI (POZNAŃ), LECH NOWAK (POZNAŃ), JULIUSZ POLTZ (POZNAŃ)

Instytut Elektrotechniki Przemysłowej Politechniki Poznańskiej

Otrzymano 26.3.1975

W pracy przedstawiono algorytm obliczeń strat wiroprądowych w przewodzącej, nieskończenie rozległej, płycie ferromagnetycznej z uwzględnieniem nieliniowości charakterystyki magnesowania. Na podstawie wyników obliczeń numerycznych przeprowadzono analizę wpływu nieliniowości środowiska na wyżej wymienione straty.

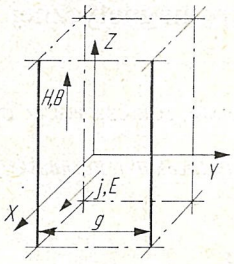
1. WSTĘP

Badania strat wiroprądowych w blachach elektrotechnicznych są przedmiotem wielu prac, między innymi [5, 6, 7, 8]. Jak wiadomo, przy stałej przenikalności straty te są proporcjonalne do kwadratu grubości blachy [5, 6]. Na drodze analitycznej wykazano, że w przypadku idealnej prostokątnej charakterystyki magnesowania ich zależność od grubości można opisać taką samą funkcją, przy czym są o 50% większe, gdy materiał ulega nasyceniu [6]. Bardziej dokładne uwzględnienie wpływu nieliniowości charakterystyki magnesowania miałoby istotne znaczenie w badaniach własności blach elektrotechnicznych. Dotychczas zagadnienie to nie doczekało się wyczerpujących rozwiązań i tylko niektóre prace, np. [10, 12, 13], w oparciu o metody przybliżone lub analogowe, częściowo rozpatrują ten problem.

W pracy przedstawiono próbę algorytmizacji obliczeń strat wiroprądowych w blachach o dowolnym kształcie charakterystyki magnesowania przy dowolnej, okresowej funkcji czasowej strumienia. Zbadano również wpływ nieliniowości na zależność strat wiroprądowych od grubości blachy. Przedstawiona zostanie metoda iteracyjna zasadniczo odbiegająca od metody podanej w pracy [12]. Ze względu na wyżej wspomnianą nieliniowość nie mogą być stosowane metody podane w pracach [1, 2, 3]. Algorytm obliczeń oparty jest na wyznaczaniu kolejnych reakcji prądów wirowych. Obliczanie kolejnych poprawek w przypadku nieliniowej charakterystyki magnesowania byłoby niemożliwe (zmienny punkt charakterystyki), stąd każdy krok iteracyjny kończy się obliczeniem całkowitej indukcji magnetycznej. W pracy nie uwzględniono wpływu histerezy na wartość wyznaczanych strat wiroprądowych, co jest w wielu przypadkach przybliżeniem dopuszczalnym [12].

2. ALGORYTM OBLICZEŃ

Rozpatruje się nieskończenie rozległą blachę o grubości g oraz konduktywności γ. Na rys. 1 wektory natężenia pola magnetycznego **H** oraz indukcji **B** są zgodne z osią z, natomiast wektory gęstości prądu **j** oraz natężenia pola elektrycznego **E** z osią x. W dalszym



Rys. 1. Nieskończenie rozległa płyta ferromagnetyczna

ciągu będą używane symbole H, B, j, E. Zakłada się, że wymuszony jest całkowity strumień wektora indukcji, tzn. zadana jest średnia indukcja w obszarze blachy:

$$B_{śr}(t) = \frac{2}{g} \int_0^{\frac{g}{2}} B(y, t)dt.$$

Ze względu na symetrię rozkładu indukcji i gęstości prądu względem osi z, rozpatrywano przedział $y \in \left\langle 0, \frac{g}{2} \right\rangle$. Pole magnetyczne w badanym układzie opisano równaniami Maxwella, które pomijając „prądy konwekcji" oraz uwzględniając, że $\gamma\mathbf{E} = \mathbf{j}$ przyjmują postać:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j}, \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{j} = -\gamma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{2}$$

Po scałkowaniu równania (2) w granicach od 0 do y, przy warunku brzegowym $j(0, t) = 0$, otrzymuje się:

$$j(y, t) = -\gamma \int_0^y \frac{\partial B(y, t)}{\partial t} dy. \tag{3}$$

Należy podkreślić, że algorytm powinien być tak zbudowany, aby indukcja średnia w każdym kroku iteracyjnym była równa indukcji średniej zadanej — jako funkcji czasu. Niech warunek powyższy zachodzi w $(n-1)$-ym kroku iteracyjnym, tzn.

$$\int_0^{\frac{g}{2}} B_{n-1}(y, t)dy = \frac{g}{2} B_{śr}(t).$$

Na podstawie zależności (3) można wyznaczyć rozkład gęstości prądu w kroku następnym — $j_n(y, t)$.

Chcąc znaleźć poszukiwaną funkcję $H_n(y, t)$ należy przyjąć dodatkowy warunek brzegowy:

$$H_n(0, t) = H_{n-1}(0, t), \tag{4}$$

gdzie $H_{n-1}(0, t) = f^{-1}[B_{n-1}(0, t)]$
lub

$$H_n\left(\frac{g}{2}, t\right) = H_{n-1}\left(\frac{g}{2}, t\right), \tag{5}$$

gdzie $H_{n-1}\left(\frac{g}{2}, t\right) = f^{-1}\left[B_{n-1}\left(\frac{g}{2}, t\right)\right]$,

przy czym funkcja $B = f(H)$ oznacza charakterystykę magnesowania.

Przyjmując warunek (4), w celu obliczenia przybliżonego rozkładu natężenia pola należy obie strony równania (1) scałkować w granicach od 0 do y, natomiast przy założonym warunku (5) od y do $\frac{g}{2}$. Otrzymuje się:

$$H'_n(y, t) = H_{n-1}(0, t) - \int_0^y j_n(y, t)\,dy, \tag{6}$$

lub

$$H''_n(y, t) = H_{n-1}\left(\frac{g}{2}, t\right) + \int_0^{\frac{g}{2}} j_n(y, t)\,dy. \tag{7}$$

Łatwo zauważyć, że w przedziałach czasowych, dla których $\frac{\partial B}{\partial t} > 0$, zachodzą nierówności:

$$H'_n(y, t) > H_{n-1}(y, t),$$

gdzie $H_{n-1}(y, t) = f^{-1}[B_{n-1}(y, t)]$ oraz

$$H''_n(y, t) < H_{n-1}(y, t),$$

dla każdego $y \in \left(0, \frac{g}{2}\right)$.

Odwrotne relacje zachodzą przy $\frac{\partial B}{\partial t} < 0$.

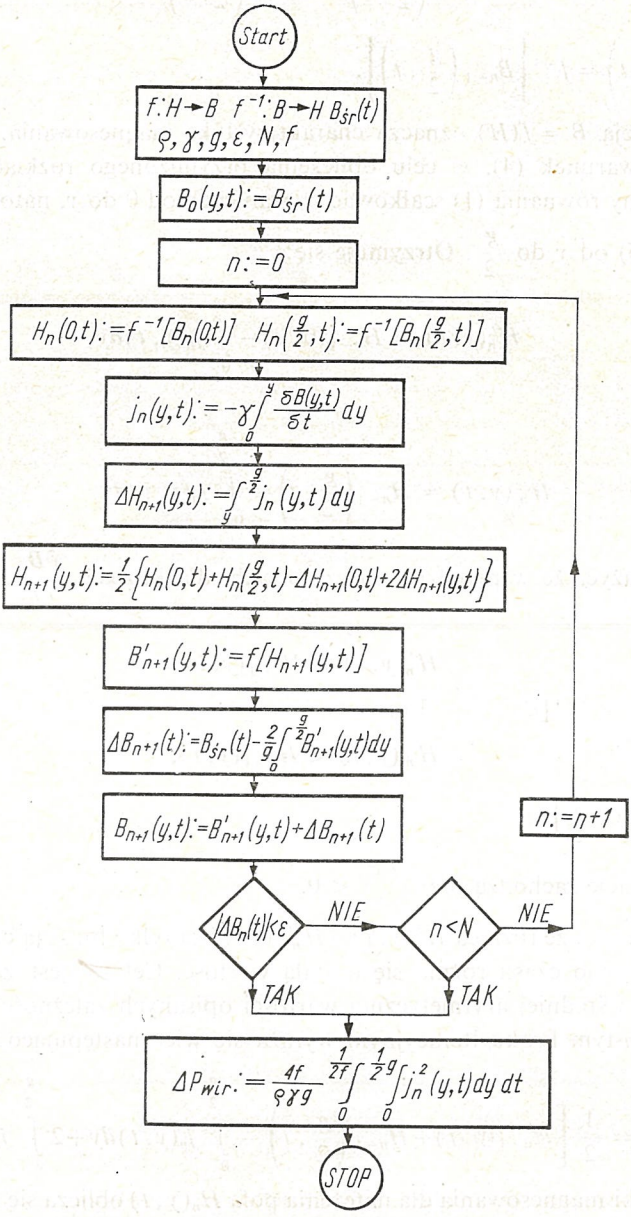
Ze względu na to, że różnica $H'_n(y, t) - H''_n(y, t)$ jest tylko funkcją czasu, oba rozkłady pola dla określonego czasu różnią się o stałą wartość. Celowe jest zatem przyjęcie do dalszych obliczeń średniej arytmetycznej wartości opisanych zależnościami (6) i (7). Natężenie pola w n-tym kroku iteracyjnym wyraża się więc następująco:

$$H_n(y, t) = \frac{1}{2}\left[H_{n-1}(0, t) + H_{n-1}\left(\frac{g}{2}, t\right) - \int_0^{\frac{g}{2}} j_n(y, t)\,dy + 2\int_y^{\frac{g}{2}} j_n(y, t)\,dy\right]. \tag{8}$$

Z charakterystyki magnesowania dla natężenia pola $H_n(y, t)$ oblicza się indukcję $B'_n(y, t) = f[H_n(y, t)]$.

Należy zaznaczyć, że średnia indukcja obliczana z rozkładu $B'_n(y, t)$ nie musi być równa pierwotnie założonej. Należy ją więc skorygować o wartość:

$$\Delta B_n(t) = B_{śr}(t) - \frac{2}{g}\int_0^{\frac{g}{2}} B'_n(y, t)\,dy, \tag{9}$$



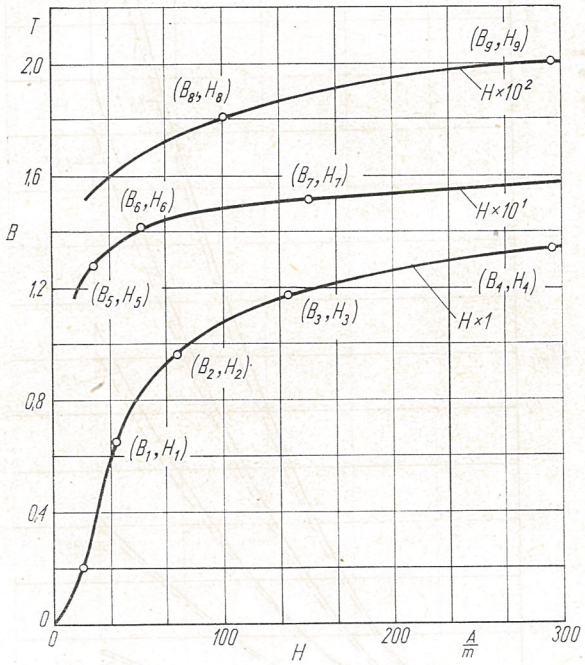
Rys. 2. Algorytm numerycznych obliczeń strat wiroprądowych

tzn. przyjąć:

$$B_n(y, t) = B'_n(y, t) + B_n(t).$$

Tak obliczona indukcja posłuży do wyznaczenia rozkładu gęstości prądu w $(n+1)$-ym kroku iteracyjnym. Pełny algorytm obliczeń jest podany na rys. 2.

Obliczenia numeryczne wykonano w myśl znanych metod, zastępując pochodne ilo-



Rys. 3. Charakterystyka magnesowania blachy H-9 Nippon Steel Corporation

razami różnicowymi, całki zaś — sumami. W tym celu przedział $\left\langle 0, \frac{g}{2} \right\rangle$ podzielono na r przedziałów o szerokości $g/2r$, a półokres zmian funkcji czasowej $B_{śr}(t)$ na p przedziałów czasowych.

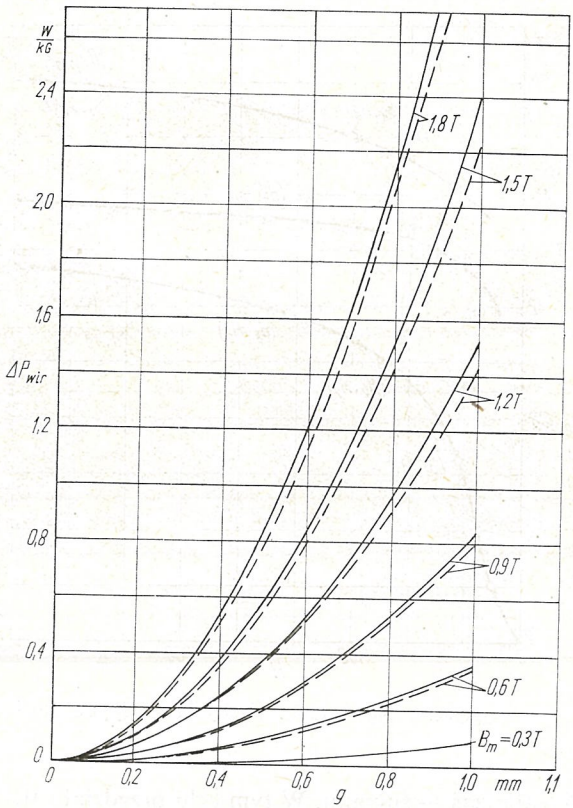
Charakterystykę magnesowania zadano w postaci tablicy $(B_k; H_k)$.

3. ANALIZA WYNIKÓW

Rys. 4 ilustruje wyniki obliczeń wykonanych dla blachy produkcji japońskiej H-9 Nippon Steel Corporation, o konduktywności $\gamma = 1{,}92 \cdot 10^{-6}\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ i gęstości $\varrho = 7650\ \mathrm{kg/m^3}$. Charakterystyka magnesowania blachy z obranymi punktami $(B_k; H_k)$ podana jest na rys. 3. Obliczenia wykonano dla sinusoidalnie zmieniającego się z częstotliwością 50 Hz strumienia $B_{śr} = B_m \sin 314t$, przyjmując $r = 20$, $p = 32$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $N = 10$. Jako rozkład początkowy indukcji przy grubości g przyjmowano rozkład końcowy obli-

czony przy grubości mniejszej. Proces iteracyjny uznawano za zbieżny, jeżeli różnice między wartościami indukcji wyznaczonymi w dwóch kolejnych krokach były mniejsze od ε, dla każdego punktu czasowego i przestrzennego. Liczba kroków iteracyjnych po których proces był zbieżny nie przekraczała 5.

Krzywe z rys. 4, przedstawione w skali logarytmicznej — rys. 5 — są liniami prostymi

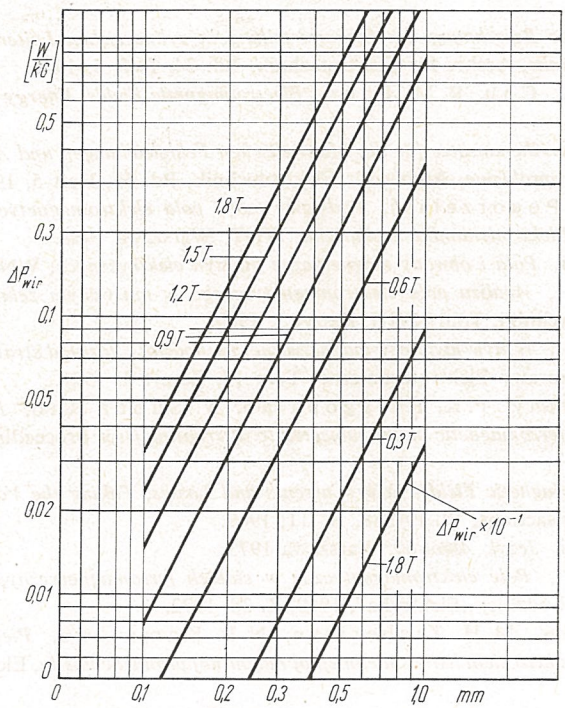


Rys. 4. Zależność strat wiroprądowych od grubości blachy z uwzględnieniem nieliniowości środowiska

nachylonymi do osi odciętych pod kątem arctg2. Wynika stąd, że nieliniowość charakterystyki magnesowania nie wpływa na kształt funkcji $\Delta P_{wir} = f(g)$. Straty wiroprądowe są proporcjonalne do kwadratu grubości blachy, tak jak ma to miejsce w przypadku środowiska liniowego. Wyniki obliczeń wykonanych w ramach tej pracy dla różnych gatunków blach oraz różnych indukcji maksymalnych B_m potwierdzają powyższy wniosek.

Na rys. 4 linią przerywaną zaznaczono straty obliczone według klasycznego wzoru dla środowiska liniowego [6], $-\Delta P_{wir} = \frac{\gamma}{243} B_m^2 g^2$. Są one niższe od strat obliczonych z uwzględnieniem nieliniowości środowiska. Łatwo to wytłumaczyć, analizując kształt funkcji czasowej gęstości prądu na powierzchni blachy. Przy ustalonej indukcji maksymalnej B_m, bez względu na kształt charakterystyki magnesowania, średnia w czasie gęstość prądu

$j_{śr}\left(\frac{g}{2}\right)$ jest stała i wynosi: $2f\gamma B_m g$. W stanie nasycenia ferromagnetyka pochodna $\frac{\partial B}{\partial t}$ jest bliska zeru i gęstość prądu jest znacznie mniejsza niż ma to miejsce w przypadku liniowej charakterystyki magnesowania. W związku z tym kształt funkcji czasowej $j\left(\frac{g}{2}, t\right)$



Rys. 5. Zależność strat wiroprądowych od grubości blachy z uwzględnieniem nieliniowości środowiska (skala logarytmiczna)

zmienia się w taki sposób, że przy ustalonej wartości średniej większa jest wartość maksymalna, a tym samym wartość skuteczna gęstości prądu. Większe są straty wiroprądowe. Podobne zjawiska zachodzą wewnątrz blachy. W przypadku praktycznie spotykanych grubości blach 0,3 ÷ 0,7 mm przy pełnym nasyceniu różnice między stratami obliczonymi przy liniowej charakterystyce magnesowania oraz stratami obliczonymi bez tego założenia nie przekraczają 5%.

4. WNIOSKI KOŃCOWE

Wykazano, że klasyczny wzór na obliczanie strat wiroprądowych w blachach elektrotechnicznych, wyprowadzony przy założeniu liniowości charakterystyki magnesowania, może być stosowany w obliczeniach z wystarczającą dokładnością. Dotyczy to blach o grubości nie przekraczającej 1 mm, przemagnesowywanych z częstotliwością zbliżoną

do 50 Hz, w przypadku gdy wpływ histerezy na straty wiroprądowe jest pomijalny. Proponuje się do powyższego wzoru wprowadzić poprawkę uwzględniającą zmienność przenikalności środowiska, zwiększającą w nim współczynnik proporcjonalności o $2 \div 4\%$ dla indukcji $0{,}8 \div 1{,}4$ T oraz $4 \div 8\%$ dla indukcji $1{,}4 \div 1{,}9$ T.

LITERATURA

1. H. G. Gross, *Die Berechnung der Stromverteilung in zylindrischen Leitern mit rechteckigem und elliptischem Querschnitt*, Archiv für Elektrotechnik, Bd. 34, Heft 5, 1940.
2. R. B. Adler, L. J. Chu, R. M. Fano, *Electromagnetic Fields, Energy and Forces*, New York, London 1960.
3. A. Vlcek, *Potenzreihenansätze für die Maxwellschen Feldgleichungen und Anwendung auf rotationssymmetrische Quellenprobleme*, Archiv für Elektrotechnik, Bd. 56, Heft 5, 1974.
4. P. Szulkin, S. Pogorzelski, *Podstawy teorii pola elektromagnetycznego*, Warszawa 1964.
5. J. Turowski, *Elektrodynamika techniczna*, WNT, Warszawa 1968.
6. M. Dąbrowski, *Pola i obwody magnetyczne maszyn elektrycznych*, WNT, Warszawa 1972.
7. K. Zakrzewski, *Analiza pola elektromagnetycznego w masywnym żelazie metodą numeryczną*, Archiwum Elektrotechniki, Tom XVIII, Zeszyt 3, 1969.
8. K. Zakrzewski, *Wpływ histerezy magnetycznej na podział i rozkład strat mocy w blachach ferromagnetycznych*, Rozprawy Elektrotechniczne, Tom 17, Zeszyt 3, 1971.
9. N. Kesavamurthy, P. K. Rajagopalan, V. Subba Rao, *Effects of saturation on the core loss of thin ferromagnetic plates subjected to alternating flux*, Proceedings IEE, Vol. 110, N° 2, February 1963.
10. K. Oberreti, *Magnetic Fields, Eddy Currents and Losses, Taking the Variable Permeability into Account*, IEEE Transactions, Vl. PAS88, N° 11, 1969.
11. S. Paszkowski, *Język Algol 60*, Warszawa 1973.
12. K. Zakrzewski, *Pole elektromagnetyczne w ciałach ferromagnetycznych przewodzących*, Zesz. Nauk. Politechniki Łódzkiej „Elektryka", 1960, Z. 38, 1972.
13. E. A. Wołdyriew, M. H. Zicherman, N. P. Kamniewa, *Pieriemiennoje elektromagnitnoje pole w prowodiaszcziem listie s nieliniejnoj magnitnoj pronicajemostiu*, Elektriczestwo, N° 3, 1974.

J. GÓRECKI, L. NOWAK, J. POLTZ

NUMERICAL CALCULATION OF EDDY-CURRENT LOSSES IN FERROMAGNETIC CONDUCTIVE THIN PLATE

Summary

In this paper there is given the algorithm of calculations of eddy-current losses in a conductive, infinite, ferromagnetic thin plate with regard to non-linear characteristics of magnetization. On the basis of results the discussion of influence of non-linear environment on the above losses was made.

J. GÓRECKI, L. NOWAK, J. POLTZ

DÉSIGNATION NUMÉRIQUE DES PERTES PAR COURANTS PARASITES DANS LA PLAQUE FERROMAGNÉTIQUE CONDUCTRICE

Résumé

On a présenté dans le travail l'algorithme des calculs des pertes par courants parasites dans la plaque ferromagnétique, conductrice, infiniment vaste, en tenant compte de la non-linéarité de la caractéristique de magnétisation. A partir des résultats de calculs numériques on a analysé l'influence de la non-linéarité du milieu sur les pertes citées ci-dessus.

J. GÓRECKI, L. NOWAK, J. POLTZ

DIGITALE BERECHNUNG DER WIRBELSTROMVERLUSTE IN EINER LEITFÄHIGEN FERROMAGNETISCHEN PLATTE

Zusammenfassung

In diesem Beitrag zeigt man das Flußbild zur Berechnung der Wirbelstromverluste in einem leitfähigen ferromagnetischen Blech unter Berücksichtigung der Nichtlinearität der Magnetisierungskurve.

Auf Grund numerischer Berechnungsergebnisse wurde der Einfluß der Nichtlinearität auf die Wirbelstromverluste untersucht.

Е. ГУРЕЦКИ, Л. НОВАК, Ю. ПОЛЬТЦ

ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕРЬ ОТ ВИХРЕВЫХ ТОКОВ В ПРОВОДЯЩЕМ ФЕРРОМАГНИТНОМ ЛИСТЕ

Резюме

В настоящей работе представлен алгоритм расчета потерь от вихревых токов в проводящем бесконечно большом ферромагнитном листе с нелинейной магнитной характеристикой.

На основе результатов произведенных в работе расчетов анализируется влияние нелинейной характеристики среды на вышеупомянутые потери.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 3, ss. 687—707

621.314.21

O możliwości obliczania indukcyjności rozproszenia uzwojeń transformatora za pomocą ogólnej metody bazującej na pojęciu średnich geometrycznych odległości

RYSZARD SOBOCKI (ŁÓDŹ)

Instytut Elektrotechniki, Oddział w Łodzi

Otrzymano 13.2.1975

W artykule przytoczono opracowaną przez G. N. Pietrowa metodę obliczania indukcyjności rozproszenia cylindrycznych układów uzwojeń, bazującą na pojęciu średnich geometrycznych odległości. Metoda umożliwia wykonanie obliczeń przy dowolnym usytuowaniu uzwojeń. Wyprowadzono wzór (10) na średnią długość zwoju, ważny dla dowolnego usytuowania uzwojeń.

Wyniki obliczeń indukcyjności powyższą metodą z uwzględnieniem wyprowadzonego wzoru na średnią długość zwoju, wykonane przy użyciu maszyny cyfrowej, porównano z wynikami pomiarów przeprowadzonych na modelu dla różnych układów uzwojeń. Stwierdzono, że rozbieżności między obliczeniem a pomiarem są duże i zawierają się w granicach od kilku do minus kilkudziesięciu procent, co wskazuje na potrzeby modyfikacji metody.

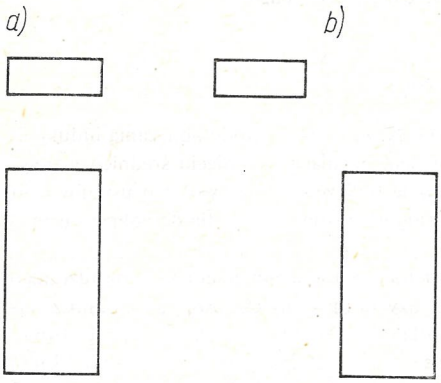
W pracy zaproponowano dwie modyfikacje metody. Jedna z nich bazuje na teorii odbić zwierciadlanych. Dobrano wstępnie odległości od hipotetycznych jarzm, przy których uzyskuje się zgodność obliczeń i pomiarów możliwą do przyjęcia dla szeregu przypadków. Druga modyfikacja bazuje na empirycznym współczynniku poprawkowym. W artykule podano wzór na ten współczynnik dla stosunkowo prostego wzajemnego usytuowania uzwojeń. Wyznaczenie wzorów dla bardziej złożonych przypadków jest uciążliwe.

1. WSTĘP

Zagadnienie obliczania indukcyjności rozproszenia, istotne w budowie transformatorów, jest przedmiotem wielu prac i badań. Obliczanie indukcyjności rozproszenia złożonego układu między zestawami (parami) uzwojeń występującego z reguły dla wielouzwojeniowych autotransformatorów, transformatorów „z rozdzielonymi uzwojeniami", transformatorów probierczych, niektórych wykonań transformatorów specjalnych prowadzi się z reguły w oparciu o teorię transformatora wielouzwojeniowego [9]. Metoda ta wymaga znajomości tzw. cząstkowych indukcyjności rozproszenia, to znaczy indukcyjności rozproszenia między fragmentami danego uzwojenia i między fragmentami różnych uzwojeń, na jakie uzwojenia te do obliczeń zostały podzielone z powodu swej niejednorodności wynikającej z konstrukcji i możliwości wykonawczych.

Dla większości przypadków występujących w praktyce istnieją metody obliczeniowe przedstawione w podręczniku prof. E. Jezierskiego [1]. Wykorzystywane są również metody opracowane przez M. Jabłońskiego [2, 3] i M. Kozłowskiego [4] bazujące na empirycznym współczynniku poprawkowym. Metody te zasadniczo mogą być stosowane dla obliczenia indukcyjności rozproszenia układu symetrycznego względem płaszczyzny przechodzącej przez środek tego układu i prostopadłej do osi kolumny. Umożliwiają one również obliczenie indukcyjności rozproszenia układu (pary uzwojeń) o luce brzegowej na krańcu jednego z uzwojeń [2, 3], o różnych lukach brzegowych w jednym z uzwojeń, o lukach brzegowych różnej wielkości na przeciwległych krańcach po jednej w każdym z uzwojeń, wtedy gdy stopień niesymetrii jest niewielki.

Każda z wyżej podanych metod umożliwia obliczenia dla określonych przypadków wzajemnego usytuowania uzwojeń (części uzwojeń), przy czym wszystkie one nie obejmują



Rys. 1. Dwa przypadki wzajemnego usytuowania uzwojeń, o dużym stopniu niesymetrii
a — układ krążkowy, b — układ współosiowy

wszystkich przypadków mogących wystąpić w praktyce (np. przypadku z rys. 1). Żadna z powyższych metod nie jest metodą ogólną stosującą się dla dowolnego usytuowania uzwojeń.

Metoda ogólna została opracowana przez G. N. Pietrowa [5, 6, 7]. Bazuje ona na pojęciu *średnich geometrycznych odległości*. Artykuł niniejszy podaje rozwinięcie metody Pietrowa, stąd też konieczne jest przedstawienie w skrócie jej podstawowych założeń i wzorów.

2. OPIS METODY

Metoda G. N. Pietrowa w swej opublikowanej postaci przedstawia się następująco.

Indukcyjność rozproszenia transformatora oblicza się ze wzoru (1) wyprowadzonego przy założeniu, iż pole rozproszenia transformatora może być rozpatrywane jako pole płasko-równoległe

$$L = 2z^2 l_{śr} \ln(k_z \cdot k_w) \times 10^{-8} \text{ mH}, \tag{1}$$

gdzie:

z — liczba zwojów, do której indukcyjność ma być odniesiona,

$l_{śr}$ — średnia długość zwojów uzwojenia (uzwojeń),

k_w — współczynnik wynikający ze średnich geometrycznych odległości,

k_z — współczynnik uwzględniający wpływ obecności rdzenia na indukcyjność rozproszenia.

Współczynnik k_w oblicza się ze wzoru:

$$k_w = \frac{g_{12}^2}{g_1 g_2}, \tag{2}$$

w którym:

g_{12} — średnia geometryczna odległość wzajemna między poosiowymi przekrojami 1 i 2 uzwojeń (części uzwojeń),

g_1 — średnia geometryczna odległość własna poosiowego przekroju 1 uzwojenia (części uzwojenia),

g_2 — jak g_1, ale dla przekroju 2.

Odległości powyższe zdefiniowane są za pomocą wzorów:

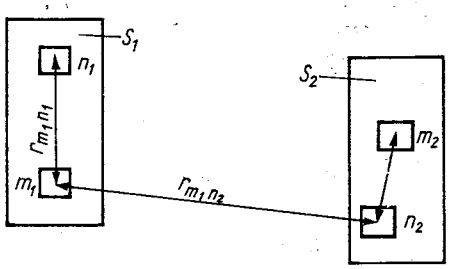
$$\begin{aligned} \ln g_{12} &= \frac{1}{S_1 S_2} \int_{S_1} \int_{S_2} \ln r_{m1\,n2}\, dS_1\, dS_2, \\ \ln g_1 &= \frac{1}{S_1^2} \int_{S_1} \int_{S_1} \ln r_{m1\,n1}\, dS_1\, dS_2, \\ \ln g_2 &= \frac{1}{S_2^2} \int_{S_2} \int_{S_2} \ln r_{m2\,n2}\, dS_2\, dS_2, \end{aligned} \tag{3}$$

gdzie:

S_1, S_2 — powierzchnie poosiowych przekrojów 1, 2,

$r_{m1,n2}$ — odległość między elementami m_1 i n_2 zajmującymi wszystkie możliwe położenia w obrębie poosiowego przekroju obu uzwojeń (rys. 2),

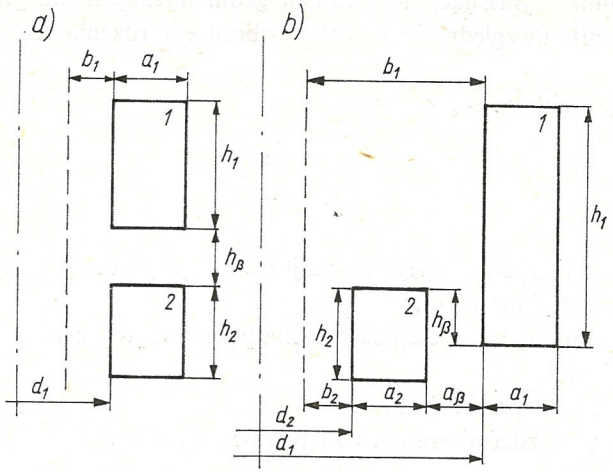
r_{m1n1}, $r_{m2,n2}$ — odległość między elementami $m1n1$ lub $m2n2$ zajmującymi wszystkie możliwe położenia w obrębie poosiowego przekroju uzwojenia 1 lub 2 (rys. 2).



Rys. 2. Sposób określania odległości r_{mn} ze wzoru (3)

Dla przekrojów prostokątnych, występujących w omawianych transformatorach odległość własna jest równa połowie obwodu prostokąta pomnożonego przez współczynnik q zależny od pierwiastka ze stosunku długości krótszego do dłuższego boku prostokąta. Wartość współczynnika q zmienia się bardzo nieznacznie wraz ze zmianą stosunku długości boków, stąd też q może być uważane za stałe i równe 0,2235 [5].

Przy obliczaniu wyrażenia g_{12} ze wzoru (3) korzystnie jest rozróżnić dwa przypadki.



Rys. 3. Szkic wymiarowy poosiowego przekroju uzwojeń dla przypadku, gdy obie części 1 i 2 należą do jednego uzwojenia (a) i przypadku, gdy należą one do różnych uzwojeń (b)
—·— oś kolumny, — — — powierzchnia kolumny

Przypadek I. Części 1 i 2 należą do jednego uzwojenia — rys. 3a. Wyrażenie g_{12} dane jest tutaj wzorem:

$$g_{12} = \frac{g_\alpha^\alpha g_\beta^\beta}{g_\gamma^\gamma g_\delta^\delta}, \tag{4}$$

w którym:

$$g_\alpha = (h_\alpha + a_1)q, \quad \alpha = \frac{h_\alpha^2}{2h_1h_2},$$

$$g_\beta = (h_\beta + a_1)q, \quad \beta = \frac{h_\beta^2}{2h_1h_2},$$

$$g_\gamma = (h_\gamma + a_1)q, \quad \gamma = \frac{h_\gamma^2}{2h_1h_2},$$

$$g_\delta = (h_\delta + a_1)q, \quad \delta = \frac{h_\delta^2}{2h_1h_2},$$

przy czym:

$$h_\alpha = h_1 + h_2 + h_\beta, \quad h_\gamma = h_1 + h_\beta, \quad h_\delta = h_2 + h_\beta.$$

Łatwo zauważyć, że $(\alpha+\beta)-(\gamma+\delta) = 1$, a zatem wyrażenie k_w jest bezwymiarowe i nie zależy od wielkości współczynnika q przy założeniu, że jest on stały.

Przypadek II. Części 1 i 2 należą do różnych uzwojeń — rys. 3b. Wyrażenie g_{12} oblicza się tutaj ze wzoru:

$$g_{12} = \frac{\dfrac{g_{\alpha\alpha'}^{\alpha\alpha'} g_{\alpha\beta'}^{\alpha\beta'}}{g_{\alpha\gamma'}^{\alpha\gamma'} g_{\alpha\delta'}^{\alpha\delta'}} \times \dfrac{g_{\beta\alpha'}^{\beta\alpha'} g_{\beta\beta'}^{\beta\beta'}}{g_{\beta\gamma'}^{\beta\gamma'} g_{\beta\delta'}^{\beta\delta'}}}{\dfrac{g_{\gamma\alpha'}^{\gamma\alpha'} g_{\gamma\beta'}^{\gamma\beta'}}{g_{\gamma\gamma'}^{\gamma\gamma'} g_{\gamma\delta'}^{\gamma\delta'}} \times \dfrac{g_{\delta\alpha'}^{\delta\alpha'} g_{\delta\beta'}^{\delta\beta'}}{g_{\delta\gamma'}^{\delta\gamma'} g_{\delta\delta'}^{\delta\delta'}}}, \tag{5}$$

w którym wyrażenia g są:

$$g_{nn'} = (h_n + a_{n'})q \qquad (n = \alpha, \beta, \gamma, \delta; \quad n' = \alpha', \beta', \gamma', \delta')$$

a wykładniki potęg

$$nn' = \frac{h_n^2}{2h_1h_2}\,\frac{a_{n'}^2}{2a_1a_2} \qquad (n, n' \text{ — jak wyżej}),$$

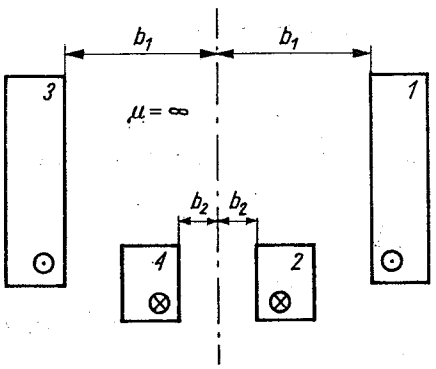
przy czym:

$$h_\alpha = h_1 + h_2 + h_\beta, \qquad a_{\alpha'} = a_1 + a_2 + a_\beta,$$
$$h_\gamma = h_1 + h_\beta, \qquad a_{\gamma'} = a_1 + a_\beta,$$
$$h_\delta = h_2 + h_\beta, \qquad a_{\delta'} = a_2 + a_\beta.$$

Identycznie jak w przypadku I, wyrażenie k_w jest bezwymiarowe i nie zależy od wielkości współczynnika q, przy założeniu, że jest on stały.

Dla obliczenia wyrażeń g_{12} zamiast wzorów (4) i (5) można również wykorzystywać uproszczoną metodę opracowaną przez Kałantarowa i Cejtlina [8]. Punktem wyjścia tej metody jest wzór (3) na średnią geometryczną odległość g_{12}. Została ona opracowana w pierwszym rzędzie pod kątem możliwości wykonywania obliczeń bez użycia maszyn liczących. Dla wielu przypadków obliczeń dokonuje się za pomocą suwaka logarytmicznego.

Współczynnik k_z wyprowadzony został z teorii transformatora wielouzwojeniowego [9] przy założeniu, że przenikalność rdzenia jest nieskończenie duża, a ekranujące działanie prądów wirowych w rdzeniu na strumień rozproszenia może być pominięte. Przy takim założeniu można wykorzystać teorię odbić zwierciadlanych (rys. 4) i obliczać indukcyjność



Rys. 4. Uzwojenia 1 i 2 oraz ich zwierciadlane odbicia 3 i 4
— — — — — powierzchnia kolumny,
⊙ ⊗ umowne kierunki amperozwojów

rozproszenia jako sumę indukcyjności uzwojeń przy braku rdzenia (współczynnik $k_z = 1$) i indukcyjności wywołanej przez odbicia 3 i 4.

Wzór na obliczanie współczynnika k_z jest następujący:

$$k_z = \frac{g_{14}^2}{g_{13}g_{24}}. \tag{6}$$

Występujące w tym wzorze współczynniki g_{14}, g_{13}, g_{24} są średnimi geometrycznymi odległościami między odpowiednimi przekrojami uzwojeń i ich odbiciami. Oblicza się je ze wzorów (4) i (5) pamiętając o zamianie odpowiednich wymiarów h_n i $a_{n'}$.

G. N. Pietrow nie podaje ogólnych wzorów na średnią długość zwoju lub równoważną jej średnią średnicę i proponuje aby dla układów współosiowych przyjmować, że średnia średnica jest równa średniej średnicy szczeliny rozproszeniowej (wzory 7a i 7b dla przypadku $a_1 = a_2$), a dla układu krążkowego równa średniej średnicy uzwojenia (wzór 8b). Jak wykazano w p. 3 dla układów współosiowych w przypadku dużej niesymetrii (por. rys. 1b) obliczenie średniej średnicy zwoju według powyższej propozycji prowadzi do znacznych błędów, dlatego zastosowanie przedstawionej wyżej metody do obliczeń poprzedzono wyprowadzeniem ogólnego wzoru na średnią długość zwoju (p. 3).

Obliczenia indukcyjności rozproszenia według wyżej przedstawionych wzorów, z wykorzystaniem wzorów na średnią długość zwoju podanych w p. 3, są bardzo żmudne i wymagają dużej dokładności. Praktycznie są one możliwe wyłącznie przy zastosowaniu maszyn cyfrowych.

W Instytucie Elektrotechniki Oddział w Łodzi zostały one wykonane na podstawie programu opracowanego na maszynę cyfrową ODRA 1304 [1)].

3. ŚREDNIA DŁUGOŚĆ ZWOJU

Dla symetrycznego cylindrycznego układu uzwojeń (układ z rys. 3b dla przypadku gdy $h_1 = h_2 = h_\beta = h$) matematycznie ścisły wzór na średnią długość zwoju przy oznaczeniu wymiarów jak na rys. 3b ma następującą postać [3]:

$$l_w = \Pi \frac{a_1(d_1+a_1)+a_2(d_2+a_2)+3a_\beta(d_1-a_\beta)}{a_1+a_2+3a_\beta}. \tag{7a}$$

Zamiast wzoru (7a) można wykorzystywać następujący wzór [2]

$$l_w = \Pi\left(\frac{d_1+d_2}{2} + \frac{2a_2+a_1}{3}\right). \tag{7b}$$

Dla krążkowego układu uzwojeń (rys. 3a) matematycznie ścisły wzór ma postać:

$$l_k = \Pi \frac{2a_1}{l_n\left(1+\frac{2a_1}{d_1}\right)}. \tag{8a}$$

Dla $a < 0{,}15d$, a zatem dla większości przypadków występujących w praktyce, wzór powyższy z błędem mniejszym od 0,6% może być zastąpiony przez wzór:

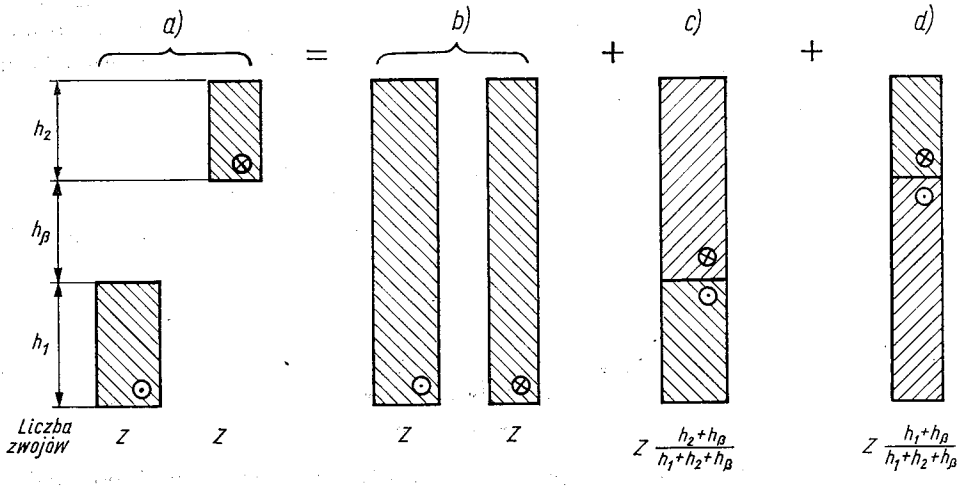
$$l_k = \Pi(d_1+a_1). \tag{8b}$$

Wzór na średnią długość zwoju dla innych przypadków uzwojeń współosiowych może być wyprowadzony w oparciu o superpozycję amperozwojów opisaną w książce E. Jezieskiego [1].

Amperozwoje obu uzwojeń (części uzwojeń) są jednakowe (rys. 5). Dla prostoty obliczeń korzystnie jest założyć, że oba uzwojenia zawierają taką samą liczbę zwojów równą z. Rzeczywisty rozkład zwojów (amperozwojów) uzwojenia może być zastąpiony przez dwa

[1)] Program opracowała mgr D. Przybylak.

układy uzwojeń: jedno współosiowe o równomiernym rozkładzie zwojów (rys. 5b) i dwa krążkowe o układzie jak na rys. 5c i 5d. Suma zwojów tych układów uzwojeń jest równa zwojom układu rzeczywistego. Indukcyjność rozproszenia rzeczywistego układu będzie równa sumie indukcyjności umyślonych układów uzwojeń obliczonych dla ilości zwojów



Rys. 5. Rzeczywisty rozkład amperozwojów (a) oraz jego rozłożenie na składowe (b, c, d)
b — układ współosiowy, c, d — układy krążkowe, ⊙ ⊗ — umowne kierunki amperozwojów

przedstawionych na rys. 5

$$L = L_w + L_{k_1} + L_{k_2}, \tag{9}$$

w którym:

L_w — indukcyjność rozproszenia układu współosiowego (rys. 5b),

L_{k_1}, L_{k_2} — indukcyjności rozproszenia układów krążkowych (rys. 5c i 5d).

Indukcyjności L_w, L_{k_1}, L_{k_2} obliczane są dla odpowiadających im średnich długości zwojów l_w, l_{k_1}, l_{k_2} danych wzorami (7) i (8), a zatem dokładnie znanych.

Obliczenie indukcyjności rozproszenia rzeczywistego układu uzwojeń przedstawionego na rys. 5 jako sumy indukcyjności umyślonych układów uzwojeń — wzór (9) — z wykorzystaniem metod przedstawionych w książce [1] i artykułach [2, 3, 4] może być dokonane tylko dla przypadku gdy $h_1 = h_2$. Obliczenie dla przypadku $h_1 \neq h_2$ wymagałoby rozszerzenia metody M. Kozłowskiego [4].

Obliczenie indukcyjności rozproszenia rzeczywistego układu poprzez obliczenie indukcyjności układów umyślonych z wykorzystaniem wzoru (9) za pomocą metody Pietrowa przedstawionej w p. 2 jest możliwe zawsze, niemniej jednak dokładność obliczenia będzie znacznie mniejsza niż przy bezpośrednim obliczeniu i znajomości średniej długości zwoju dla dowolnego wzajemnego usytuowania uzwojeń jak na rys. 3b.

Wzór (9) można napisać w postaci:

$$L = l_w\left(L_w + \frac{l_{k1}L_{k1}}{l_w l_{k1}} + \frac{l_{k2}L_{k2}}{l_w l_{k2}}\right). \tag{9a}$$

Wzór (1) do obliczania indukcyjności rozproszenia rozpatrywanego układu uzwojeń może być napisany w postaci:

$$L = l_{śr}[2z^2 l_n(k_z k_w)10^{-8}]\text{mH}.$$

Składnik w nawiasie tego wzoru zastępuje składnik w nawiasie wzoru (9a), jest jednak liczony dla jednej, wspólnej dla całego układu uzwojeń, średniej długości zwoju. Przyjmując, że długość ta może być wyrażona iloczynem średniej długości zwoju symetrycznego uzwojenia współosiowego l_w obliczonej ze wzoru (7) i współczynnika poprawkowego k_l oraz uwzględniając wyżej podaną interpretację możemy napisać:

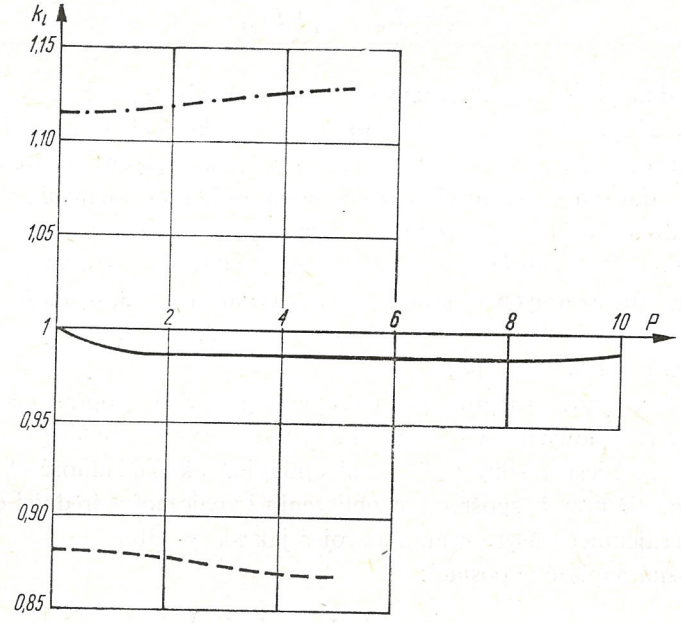
$$l_w k_l\left(\frac{L_w}{l_w}+\frac{L_{k1}}{l_{k1}}+\frac{L_{k2}}{l_{k2}}\right)=l_w\left(\frac{L_w}{l_w}+\frac{L_{k1}l_{k1}}{l_{k1}l_w}+\frac{L_{k1}l_{k2}}{l_{k2}l_w}\right).$$

Przekształcając powyższe wyrażenie uzyskuje się następujący wzór na współczynnik poprawkowy k_l

$$k_l=\frac{1+\dfrac{L_{k1}}{L_w}+\dfrac{L_{k2}}{L_w}}{1+\dfrac{L_{k1}l_w}{L_w l_{k1}}+\dfrac{L_{k2}l_w}{L_w l_{k2}}}. \tag{10}$$

Mnożąc średnią długość zwoju obliczoną ze wzorów (7) przez współczynnik poprawkowy dany wzorem (10) otrzymuje się średnią długość wzoru $l_{śr}$ wchodzącą do wzoru (1).

Należy zaznaczyć, iż nawet przy stosunkowo małej dokładności wyznaczenia wartości indukcyjności rozproszenia (dokładniej stosunków indukcyjności) wchodzących do wzoru



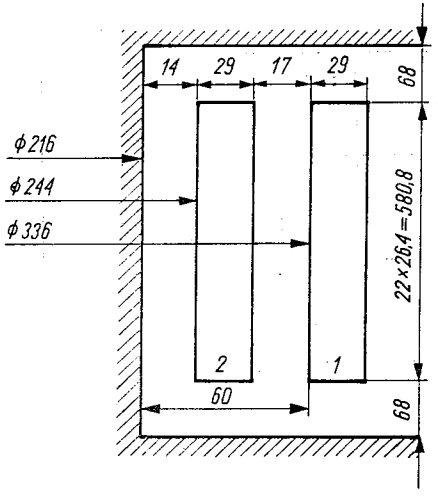
Rys. 6. Zależność współczynnika poprawkowego średniej długości zwoju k_l od parametru p dla badanego modelu i usytuowania uzwojeń jak na rys. 10c (——), 10e (— — —) i 10f (— · —)

(10), wartość k_l jest obliczona stosunkowo dokładnie. Załóżmy, że stosunek L_{k_1}/L_w równy 10 jest wyznaczony z błędem — 30%, to przy $L_{k_2} = 0$ i $l_w/L_{k_1} = 0{,}9$ błąd określenia k_l wynosi — 3,7%, jest więc około 8 razy mniejszy niż błąd stosunku L_{k_1}/L_w.

Wartość współczynnika k_l dla wzajemnego usytuowania uzwojeń badanego modelu jak na rys. 10c, e, f przedstawiono na rys. 6. Jak widać, dla układów, w których $a_1 = a_2$ oraz $h_1 = h_2$, wartość współczynnika jest niewiele różna od 1. Średnia długość zwoju dla takich układów może być więc w pierwszym przybliżeniu przyjmowana jako równa l_w. Dla układów bardzo niesymetrycznych ($h_1 \neq h_2$) wartość h_l różni się dość znacznie od 1. Przyjęcie $l_{śr} \approx l_w$ prowadzi do dużych błędów.

4. PORÓWNANIE INDUKCYJNOŚCI ROZPROSZENIA OBLICZONYCH METODĄ G. N. PIETROWA Z WYNIKAMI POMIARÓW

W publikacjach G. N. Pietrowa [5, 6, 7] podano tylko fragmentaryczne informacje o dokładności metody, to znaczy zgodności wyników obliczeń i pomiarów. Aby zatem ustosunkować się do możliwości wykorzystywania metody w praktyce, należało przeprowadzić porównanie wyników pomiarów i obliczeń w stosunkowo szerokim zakresie, obejmującym zarówno przypadki usytuowania uzwojeń, dla których obliczenie za pomocą



Rys. 7. Szkic wymiarowy uzwojeń modelu
1 — uzwojenie GN; 2 — uzwojenie DN

metod przedstawionych w publikacjach [1, 2, 3, 4] jest możliwe (np. rys. 8d), jak i dla usytuowań, dla których obliczenie tymi metodami nie jest możliwe (np. rys. 8b).

Pomiarów dokonywano na modelu, który stanowiła jedna faza suchego transformatora. Rozmieszczenie uzwojeń w oknie przedstawia rys. 7. Oba uzwojenia modelu były identyczne. Każde z nich składało się z 22 dwucewek nawijanych drutem miedzianym 8,5 × 2,0/9,1 × 2,6 mm w izolacji papierowej. Wszystkie kanały między cewkami były identyczne i równe około 4 mm.

Moc typowa transformatora (dla trzech faz) uwzględniając wymiary rdzenia i uzwojeń

oraz zakładając wykorzystanie materiałów czynnych identyczne jak dla transformatora olejowego wynosiła około 630 kVA.

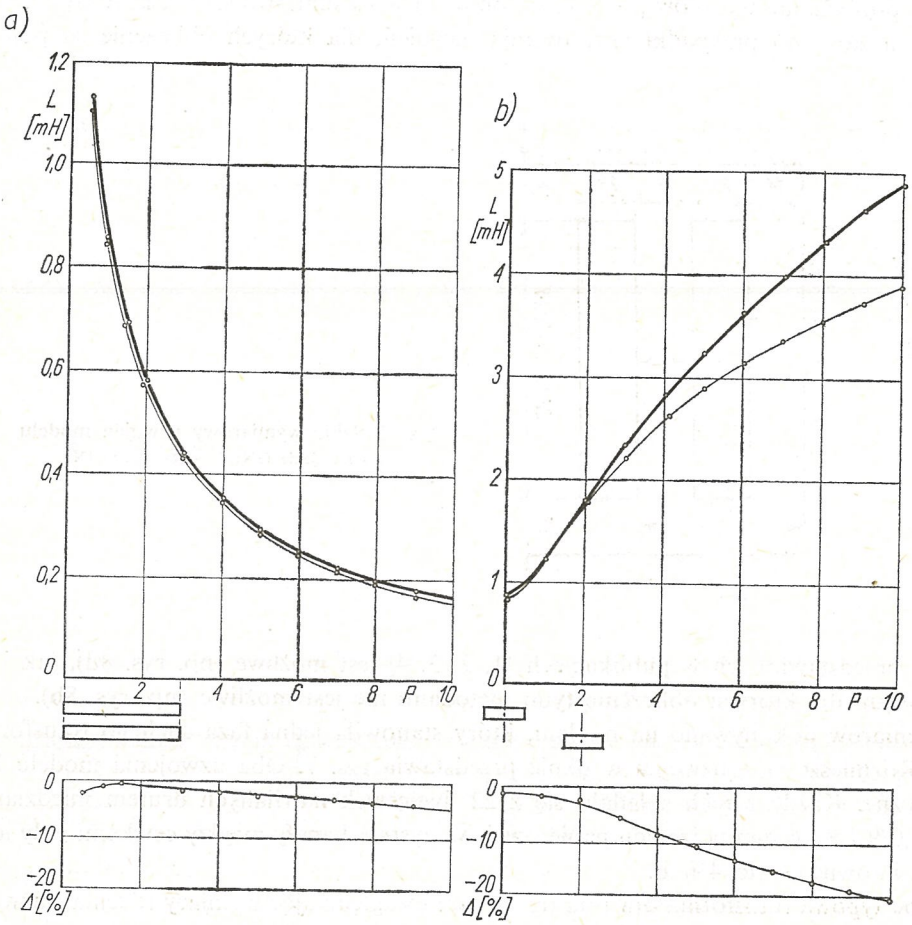
Konstrukcja uzwojeń umożliwiała wyłączenie praktycznie dowolnej liczby dwucewek każdego uzwojenia, umożliwiała zatem tworzenie bardzo różnorodnych układów uzwojeń, a więc i bardzo wszechstronne sprawdzenie metody obliczeń. Spośród wielu układów, dla których dokonano sprawdzenia dokładności metody, na rys. 8 przedstawiono wyniki pomiarów i obliczeń dla następujących układów:

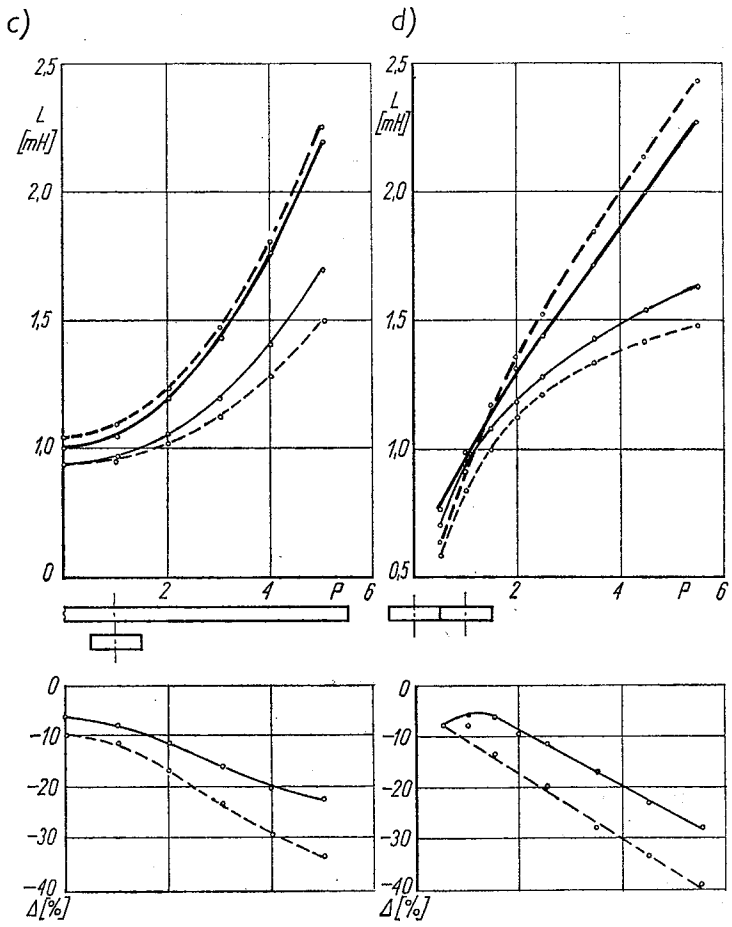
a) dwa uzwojenia jednakowej wysokości umieszczone naprzeciw siebie (rys. 8a) — parametrem p była tutaj wysokość uzwojenia,

b) czterocewka w jednym uzwojeniu względem czterocewki w drugim uzwojeniu (rys. 8b) — parametrem była odległość między osiami czterocewek,

c) czterocewka jednego uzwojenia względem całego drugiego uzwojenia (rys. 8c) — parametrem była odległość między osią czterocewki a osią drugiego uzwojenia,

d) układ krążkowy bez luki między częściami uzwojenia (rys. 8d) — parametrem była odległość między osiami części równa wysokości każdej części.





Rys. 8. Wyniki pomiarów i obliczeń indukcyjności rozproszenia dla wybranych układów uzwojeń
Δ — dokładność metody; p — parametr (wysokość); —, — — pomiar; –, – – obliczenie; a — dwa współosiowe uwzojenia jednej wysokości; b — czterocewka uzwojenia DN względem czterocewki uzwojenia GN, c — czterocewka uzwojenia GN (—, –) ub DN (— —, – –) względem całego uzwojenia DN lub GN; d — układ krążkowy bez luki między częściami uzwojenia dla uzwojenia GN (—, –) oraz DN (— —, – –)

Jako jednostkę parametru przyjęto wysokość czterocewki równą 52,8 mm. Wszystkie indukcyjności odniesiono do jednakowej liczby zwojów równej 44.

Indukcyjność obliczona jest praktycznie zawsze mniejsza od pomierzonej. Dla najprostszego przypadku (rys. 8a) rozbieżność między pomiarem i obliczeniem zawiera się w granicach 0 ... −5% i może być uznana za dopuszczalną. Dla przypadków bardziej złożonych rozbieżność ta jest znacznie większa i waha się od 0 do −40%, przy czym zależy ona bardzo silnie od proporcji wymiarowych. Wraz ze wzrostem wymiarów poosiowych w stosunku do wymiarów promieniowych rozbieżność maleje, wyjąwszy przypadek, gdy wymiary są porównywalne (rys. 8b, f). Dla większości przypadków, w których znajomość indukcyjności rozproszenia jest konieczna podane wyżej rozbieżności są zbyt duże.

Dla zastosowania metody w praktyce konieczne jest zatem jej zmodyfikowanie, tak aby rozbieżności były możliwe do przyjęcia.

5. MODYFIKACJE METODY G. N. PIETROWA

5.1. Modyfikacja oparta na teorii odbić wielokrotnych

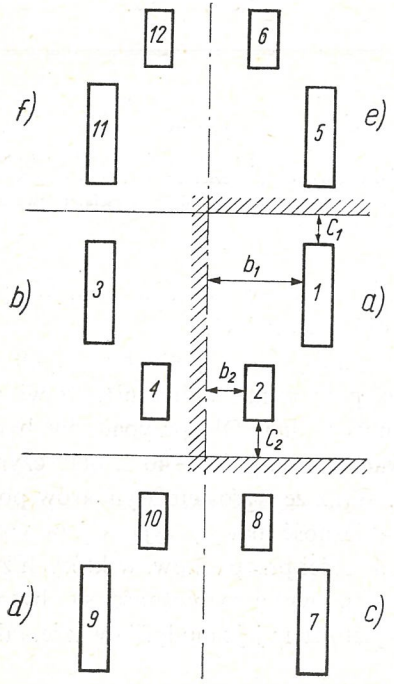
W opracowanej przez G. N. Pietrowa metodzie uwzględnia się tylko jedno zwierciadlane odbicie w kolumnie rdzenia. Możliwe jest uwzględnienie większej liczby odbić, a mianowicie również odbić w hipotetycznych jarzmach c, e — rys. 9 oraz odbicia odbić d, f. Dla przypadku odbić przedstawionych na rys. 9 stosując teorię transformatora wielouzwojeniowego, w tym przypadku 12-to uzwojeniowego, można wyprowadzić ze wzoru (1) następujący wzór na współczynnik k_z

$$k_z = k_{z1} k_{z2} k_{z3} k_{z4} k_{z5}, \tag{11}$$

w którym poszczególne składniki dane są wyrażeniami

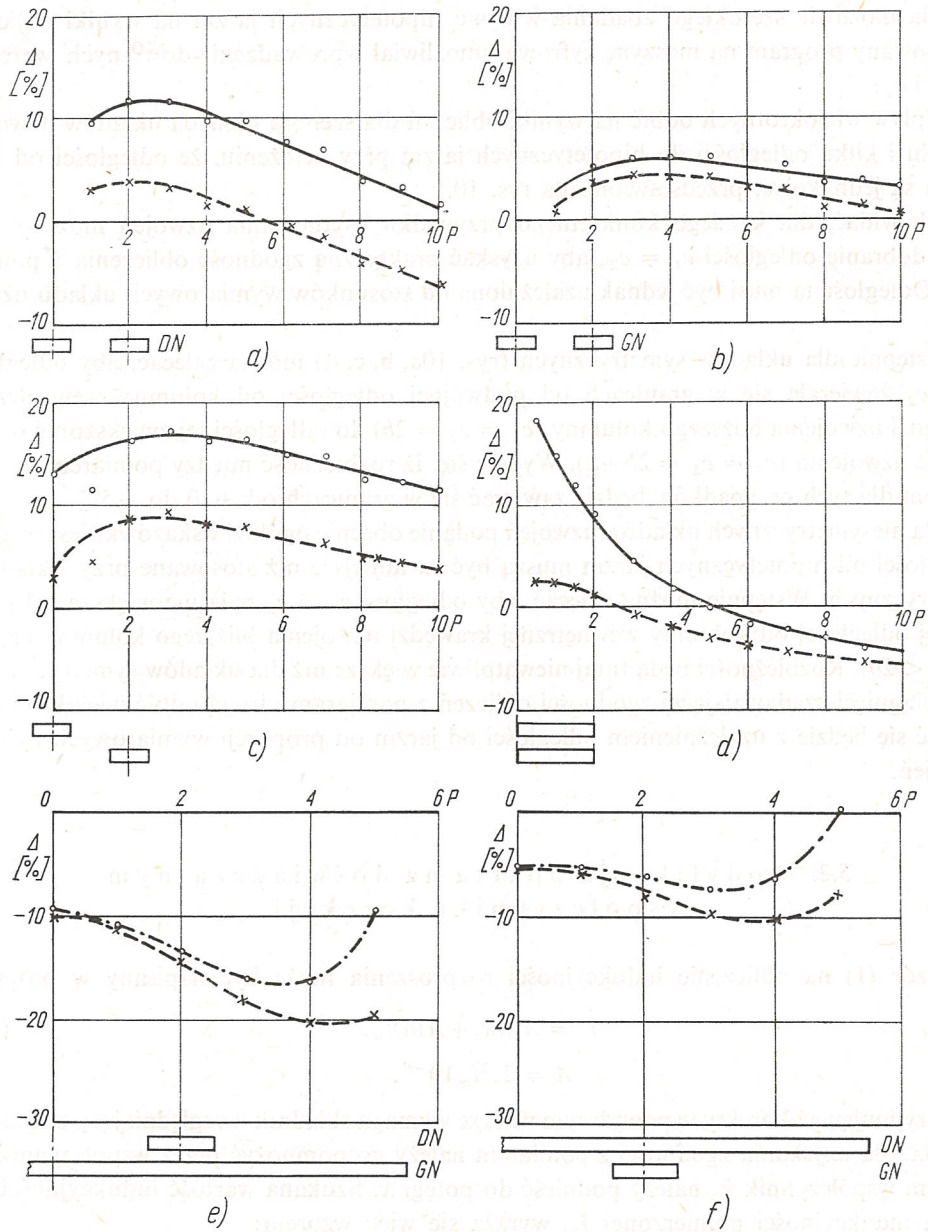
$$\left.\begin{aligned} k_{z1} &= \frac{g_{14}^2}{g_{13} g_{24}} \\ k_{z2} &= \frac{g_{16}^2}{g_{15} g_{26}} \\ k_{z3} &= \frac{g_{18}^2}{g_{17} g_{28}} \\ k_{z4} &= \frac{g_{110}^2}{g_{19} g_{210}} \\ k_{z5} &= \frac{g_{112}^2}{g_{111} g_{212}} \end{aligned}\right\} \tag{11a}$$

i uwzględniają jedno zwierciadlane odbicie.



Rys. 9. Uzwojenia 1 i 2 oraz ich zwierciadlane odbicia

b — odbicia w kolumnie; c, e — odbicia w „jarzmach"; f, d — odbicia odbić w jarzmach i w kolumnie; liczby nieparzyste — uzwojenie 1 i jego odbicia; liczby parzyste — uzwojenie 2 i jego odbicia



Rys. 10. Różnica między pomiarem a obliczeniem przy uwzględnieniu odbić wielokrotnych

a, b — czterocewka jednego uzwojenia względem innej czterocewki tego uzwojenia; c — czterocewka uzwojenia DN względem czterocewki uzwojenia GN; d — dwa współosiowe uzwojenia jednej wysokości; e, f — czterocewka jednego uzwojenia względem całego drugiego uzwojenia; o — · — $c_1 = c_2 = b$; • —— $c_1 = c_2 = 2b$; × — — — $c_1 = c_2 = 2b + a$

Wyrażenia g ze wzoru (11a) są jak poprzednio średnimi geometrycznymi odległościami. Oblicza się je za pomocą wzorów (4) i (5).

Dla możliwie szerokiego zbadania wpływu hipotetycznych jarzm na wyniki obliczeń opracowany program na maszynę cyfrową umożliwiał wprowadzenie dowolnych wartości na c_1 i c_2.

Wpływ wielokrotnych odbić na wyniki obliczeń dla szeregu różnych układów uzwojeń modelu i kilku odległości do hipotetycznych jarzm przy założeniu, że odległości od obu jarzm są jednakowe, przedstawiono na rys. 10.

Jak widać, dla każdego konkretnego przypadku usytuowania uzwojeń możliwe jest takie dobranie odległości $c_1 = c_2$, aby uzyskać praktyczną zgodność obliczenia z pomiarem. Odległość ta musi być jednak uzależniona od stosunków wymiarowych układu uzwojeń.

Wstępnie dla układów symetrycznych (rys. 10a, b, c, d) można zalecać, aby odległość $c_1 = c_2$ zawierała się w granicach od podwójnej odległości od kolumny wewnętrznej krawędzi uzwojenia bliższego kolumny ($c_1 = c_2 = 2b$) do odległości tej zwiększonej o szerokość uzwojenia ($c_1 = c_2 = 2b+a$). Wydaje się, iż rozbieżność między pomiarem a obliczeniem dla tych przypadków będzie zawierać się w granicach od $+10$ do -5%.

Dla niesymetrycznych układów uzwojeń podanie obecnie ogólnej wskazówki jest trudne. Odległości od hipotetycznych jarzm muszą być tu mniejsze niż stosowane przy układach symetrycznych. Wstępnie można zalecać, aby odległość $c_1 = c_2$ była nie większa od podwójnej odległości od kolumny wewnętrznej krawędzi uzwojenia bliższego kolumny ($c_1 = c_2 < 2b$). Rozbieżności będą tutaj niewątpliwie większe niż dla układów symetrycznych.

Osiągnięcie zadawalającej zgodności obliczeń z pomiarami drogą odbić wielokrotnych wiązać się będzie z uzależnieniem odległości od jarzm od proporcji wymiarowych układu uzwojeń.

5.2. Modyfikacja oparta na doświadczalnym współczynniku korekcji

Wzór (1) na obliczenie indukcyjności rozproszenia może być napisany w postaci:

$$L = A\ln k_z + A\ln k_w, \tag{1a}$$

$$A = 2z^2 l_{śr} 10^{-8}.$$

Przyjmując, iż korekty w powyższym wzorze wymaga składnik uwzględniający obecność rdzenia, dla uzyskania zgodności z pomiarem należy go pomnożyć przez współczynnik x, a zatem współczynnik k_z należy podnieść do potęgi x. Szukana wartość indukcyjności L_s równa indukcyjności pomierzonej L_p wyraża się więc wzorem:

$$L_s = L_p = Ax\ln k_z + A\ln k_w. \tag{12}$$

Doświadczalny współczynnik korekcyjny oblicza się ze wzoru:

$$x = \frac{L_p - L_1}{L - L_1}. \tag{13}$$

Występująca w tym wzorze indukcyjność L_1 ($L_1 = A \ln k_w$) obliczona jest ze wzoru (1) przy założeniu $k_z = 1$.

Wartość współczynnika x zależna będzie od wymiarów uzwojeń (dokładniej: stosunków wymiarów), a zatem dla poprawnego ustalenia związku między x a wymiarami konieczne jest zbadanie struktury wyrażenia na k_z obliczonego ze wzoru (6).

Poszczególne składniki wchodzące do wzoru (6) dla najprostszego przypadku, to jest dla usytuowania uzwojeń jak na rys. 3a i dla $h_\beta = 0$ oraz $h_1 = h_2 = h$ obliczane ze wzorów (4) i (5) mają postać:

$$g_{14} = \left[\frac{(2h+2a_1+2b_1)^{2\left(\frac{a_1+b_1}{a_1}\right)^2} (2h+2b_1)^{2\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2}}{(2h+a_1+2b_1)^{2\left(\frac{a_1+2b_1}{a_1}\right)^2}} \right]^2 \times$$

$$\times \left[\frac{(h+a_1+2b_1)^{4\left(\frac{a_1+2b_1}{a_1}\right)^2}}{(h+2a_1+2b_1)^{2\left(\frac{a_1+b_1}{a_1}\right)^2} (h+2b_1)^{2\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2}} \right],$$

$$g_{13} = g_{24} = \frac{(h+2a_1+2b_1)^{2\left(\frac{a_1+b_1}{a_1}\right)^2} (h+2b_1)^{2\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2}}{(h+a_1+2b_1)^{\left(\frac{a_1+2b_1}{a_1}\right)^2}}. \tag{14}$$

Podstawiając powyższe wyrażenia do wzoru (6), grupując, upraszczając i logarytmując otrzymuje się:

$$\ln k_z = 4\ln\left[\frac{h+a_1+2b_1}{2h+a_1+2b_1}\left(\frac{2h+2a_1+2b_1}{h+2a_1+2b_1}\right)^2\right] + 16\left(\frac{b_1}{a_1}\right)\ln\left[\frac{(h+a_1+2b_1)(2h+2a_1+2b_1)}{(2h+a_1+2b_1)(h+2a_1+2b_1)}\right] +$$

$$+ 8\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 \ln\left[\left(\frac{h+a_1+2b_1}{2h+a_1+2b_1}\right)^2 \frac{2h+2a_1+2b_1}{h+2a_1+2b_1} \frac{2h+2b_1}{h+2b_1}\right]. \tag{14a}$$

Przekształcając dalej otrzymuje się:

$$\ln k_z = 4\ln\left[\frac{1}{1+\frac{h}{h+a_1+2b_1}}\left(1+\frac{h}{h+2a_1+2b_1}\right)^2\right] +$$

$$+ 16\left(\frac{b_1}{a_1}\right)\ln\left[\frac{1}{1+\frac{h}{h+a_1+2b_1}}\left(1+\frac{h}{h+2a_1+2b_1}\right)\right] +$$

$$+ 8\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 \ln\left[\left(\frac{1}{1+\frac{h}{h+2a_1+2b_1}}\right)^2 \left(1+\frac{h}{h+2a_1+2b_1}\right)\left(1+\frac{h}{h+2b_1}\right)\right]. \tag{14b}$$

Jak widać wyrażenie k_z zależy od tak dużej liczby czynników, iż uwzględnienie wszystkich z nich nie wydaje się możliwe, konieczne jest zatem wprowadzenie uproszczeń.

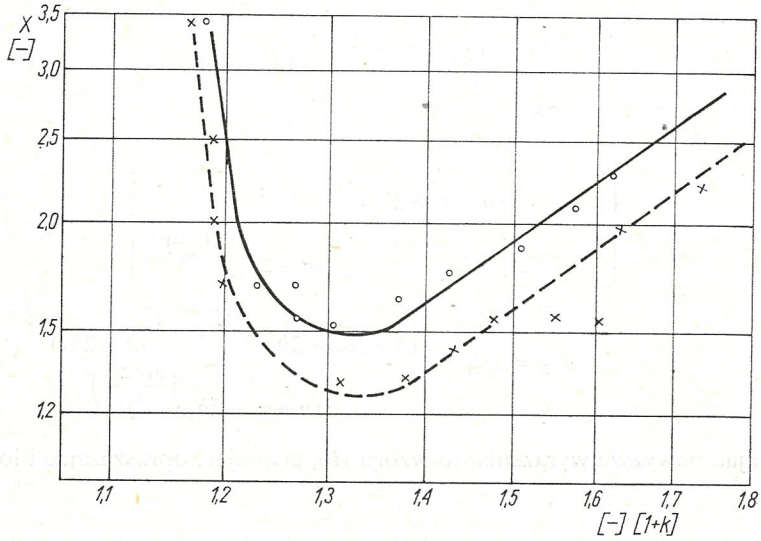
Załóżmy iż:

$$\frac{h}{h+a_1+2b_1} \approx \frac{h}{h+2a_1+2b_1} \approx \frac{h}{h+2b_1} = k = \frac{h}{h+a_1+2b_1}. \tag{15}$$

Przy takim założeniu otrzymuje się:

$$\ln k_z = 4\ln(1+k). \tag{14c}$$

Założenie (15) jest dalekie od prawdy. Spodziewać się należy (co potwierdzają obliczenia,



Rys. 11. Przebieg doświadczalnego współczynnika korekcyjnego x dla uzwojenia GN (• ——) i DN (× — —) modelu przy usytuowaniu uzwojeń jak na rys. 8d

których wynik podaje rys. 11), iż k_z zależeć będzie nie tylko od stosunku $\frac{h}{h+a_1+2b_1}$, ale również od stosunku $\frac{b_1}{a_1}$.

Dla pozostałych przypadków usytuowania uzwojeń jak na rys. 3a wzory na k_z wyprowadza się analogicznie jak wyżej. Przybliżone zależności przy uwzględnieniu uproszczeń analogicznych do uproszczenia przedstawionego zależnością (15) zebrano w tablicy 1. Wydaje się, iż dla przypadków 3 i 4 z tej tablicy można pominąć ostatni człon, to znaczy przyjąć go równym jedności.

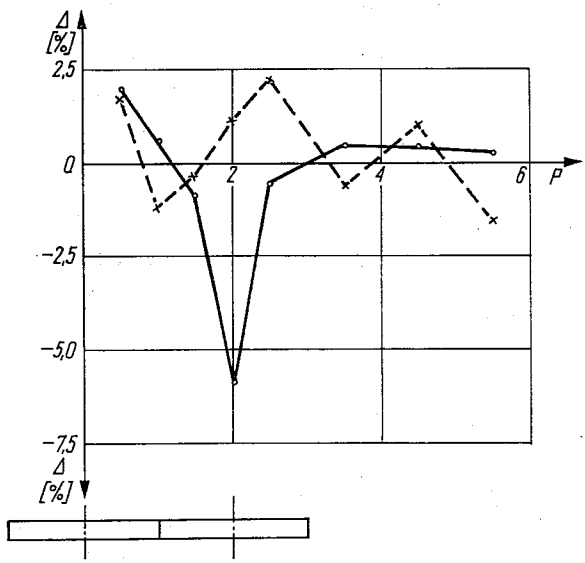
Dla najprostszego przypadku (1 z tabl. 1) dokonano obliczeń wartości współczynnika x. Dla udokładnienia obliczenia za L_z przyjmowano wartości odczytane z rys. 8d. Wyniki obliczeń oraz uzyskaną na ich podstawie zależność $x = f(1+k)$ przedstawiono na rys. 11.

Krzywe z rys. 11 dla obu uzwojeń są przesunięte względem siebie o stałą wartość $\ln x$, co wskazuje na zależność x nie tylko od parametru k, ale również od innego parametru, niezależnego od wysokości uzwojeń. Porównanie dokładnego wzoru (14a) i (14b) ze wzorem uproszczonym (14c) wskazuje na zależność współczynnika x od stosunku b_1/a_1.

Tablica 1

Zestawienie przybliżonych zależności wyrażenia k_z od proporcji wymiarowych dla przypadku usytuowania uzwojeń jak na rys. 3a

Przypadek	Wysokość uzwojeń	Przybliżona zależność
1	$h_1 = h_2 = h; \quad h_\beta = 0$	$k_z = \left(1 + \frac{h}{h + a_1 + 2b_1}\right)^4$
2	$h_1 \neq h_2; \quad h_\beta = 0$	$k_z = \left(1 + \frac{h_2}{h_1 + a_1 + 2b_1}\right)^{(1+h_1/h_2)} \left(1 + \frac{h_1}{h_2 + a_1 + 2b_1}\right)^{(1+h_2/h_1)}$
3	$h_1 = h_2 = h; \quad h_\beta > 0$	$k_z = \left(1 + \frac{h + h_\beta}{h + a_1 + 2b_1}\right)^{4(1+h_\beta/h)} \left(1 + \frac{h_\beta}{h + a_1 + 2b_1}\right)^{-2(1+2h_\beta/h)} \left[1 + \left(\frac{h}{h_\beta + h + a_1 + 2b_1}\right)^2\right]^{(h_\beta/h)^2}$
4	$h_1 \neq h_2; \quad h_\beta > 0$	$k_z = \left(1 + \frac{h_2 + h_\beta}{h_1 + a_1 + 2b_1}\right)^{\left(1 + \frac{h_1}{h_2} + 2\frac{h_\beta}{h_2}\right)} \left(1 + \frac{h_1 + h_\beta}{h_2 + a_1 + 2b_1}\right)^{\left(1 + \frac{h_2}{h_1} + 2\frac{h_\beta}{h_1}\right)} \left(1 + \frac{h_\beta}{h_1 + a_1 + 2b_1}\right)^{-\left(\frac{h_1}{h_2} + 2\frac{h_\beta}{h_2}\right)} \left[\left(1 + \frac{h_2}{h_1 + h_\beta + a_1 + 2b_1}\right)\left(\frac{1}{1 + \frac{h_2}{h_\beta + a_1 + 2b_1}}\right)\right]^{\frac{h_\beta}{h_1 h_2}}$



Rys. 12. Różnica między pomiarem a obliczeniem dla usytuowania uzwojeń jak na rys. 8d po wprowadzeniu doświadczalnego współczynnika korekcji x

· —— uzwojenie GN, × — — — uzwojenie DN

Badany model miał tylko dwa uzwojenia, zatem umożliwiał stworzenie dwóch wartości stosunku b_1/a_1; konieczne było więc założenie rodzaju zależności x od b_1/a_1. Przez analogię do wykładniczej zależności x od $(1+k)$, zależność x od b_1/a_1 przyjęto również wykładniczą.

Opracowany na podstawie rys. 8 wzór na współczynnik korekcyjny jest następujący

$$x = \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{0,124} \{445[(1+k)^4]^{-8} + 0,646[(1+k)^4]^{0,616}\}. \tag{16}$$

Tablica 2

Zestawienie wyników pomiarów i obliczeń dla układu krążkowego bez luki między częściami uzwojenia (usytuowanie uzwojeń jak na rys. 8d)

	parametr	p	0,5	1	1,5	2	2,5	3,5	4,5	5,5
uzwojenie GN	L_p	mH	0,765	0,962	1,148	1,372	1,446	1,721	2,001	2,273
	L	mH	0,703	0,934	1,078	1,189	1,281	1,429	1,544	1,637
	k	—	0,151	0,261	0,347	0,414	0,468	0,554	0,614	0,662
	x	—	11,0	1,110	1,459	1,560	1,702	1,950	2,154	2,330
	L_s	mH	0,780	0,974	1,128	1,280	1,432	1,738	2,019	2,287
	Δ	%	2,0	+1,2	−1,7	−6,7	−1,0	1,0	0,9	0,6
uzwojenie DN	L_p	mH	0,635	0,920	1,168	1,358	1,521	1,852	2,139	2,432
	L	mH	0,584	0,841	1,008	1,126	1,215	1,340	1,423	1,483
	k	—	0,199	0,381	0,480	0,551	0,605	0,682	0,734	0,772
	x	—	2,127	1,326	1,550	1,739	1,891	1,959	2,318	2,400
	L_s	mH	0,657	0,899	1,161	1,390	1,589	1,832	2,183	2,357
	Δ	%	3,5	−2,3	−0,6	2,4	4,5	−1,1	2,1	−3,1

Indukcyjności pomierzone obliczone (nieskorygowane i skorygowane) oraz różnicę między indukcyjnością pomierzoną a indukcyjnością obliczoną skorygowaną dla omawianego przypadku zebrano w tablicy 2 i na rys. 12. Różnica zawiera się w granicach −5 ... ... +3%, jest zatem niewielka.

6. ZAKOŃCZENIE

Opracowana przez Pietrowa metoda obliczenia indukcyjności rozproszenia dowolnego układu uzwojeń cylindrycznych, bazująca na pojęciu średnich geometrycznych odległości, daje przy uwzględnieniu ogólnego wzoru na średnią długość zwoju rozbieżność z pomiarem od kilku % do minus kilkudziesięciu %. Rozbieżność ta dla większości przypadków, w których wymagana jest znajomość indukcyjności rozproszenia, jest zbyt duża.

Możliwe jest znaczne zmniejszenie rozbieżności poprzez modyfikacje metody polegające bądź na wykorzystaniu teorii odbić zwierciadlanych, bądź na wprowadzeniu doświadczalnego współczynnika korekcji.

Przy uwzględnianiu większej liczby odbić (p. 5.1) celowe jest powiązanie odległości od hipotetycznych jarzm z proporcjami wymiarowymi układu uzwojeń. Według wstępnych prac dla symetrycznych układów odległość ta powinna zawierać się w granicach od $2b$ do $2b+a$. Dla układów niesymetrycznych odległość nie powinna przekraczać $2b$.

Wprowadzając doświadczalny współczynnik korekcji możliwe jest znaczne zmniejszenie rozbieżności (p. 5.2). Praktyczne wyznaczanie wzoru na ten współczynnik dla bardziej złożonych układów uzwojeń niż układ omówiony w p. 5.2 może być uciążliwe.

LITERATURA

1. E. Jezierski, *Transformatory. Podstawy teoretyczne*, WNT, Warszawa 1965.
2. M. Jabłoński, *Oporność rozproszenia transformatora przy osiowej niesymetrii uzwojeń cylindrycznych*, Przegląd Elektrotechniczny, 1955, z. 2/3.
3. M. Jabłoński, *Rozwinięcie metody obliczania oporności rozproszenia transformatora z niesymetrycznymi uzwojeniami cylindrycznymi*, Rozprawy Elektrotechniczne, 1960, z. 1/2.
4. M. Kozłowski, *Obliczanie cząstkowych impedancji zwarcia złożonych układów uzwojeń w transformatorach*, Rozprawy Elektrotechniczne, 1967, z. 4.
5. G. N. Pietrow, Weitere Entwicklung der allgemeine Methode zur Berechnung der Streuung von Transformatoren, E.u M., 1934.
6. G. N. Pietrow, *K tieorii rasczota induktiwnosti rassiejanija transformatorow*, Elektriczestwo, 1948, z. 3.
7. G. N. Pietrow, *Transformatory*, Goseniergoizdat, Moskwa-Leningrad 1934.
8. P. Ł. Kałantarow, Ł. A. Cejtlin, *K woprosu o rasczetie induktiwnosti razsiejania transformatorow*, Elektriczestwo, 1950, z. 5.
9. G. N. Pietrow, *Allgemeine Methode der Berechnung der Streuung von Transformatoren*, E.u M., 1933.

R. SOBOCKI

ON POSSIBILITY OF SUCCESSFUL CALCULATING THE LEAKAGE INDUCTANCE OF TRANSFORMER WINDINGS BY MEANS OF A GENERAL METHOD BASED UPON THE CONCEPTION OF GEOMETRIC MEAN DISTANCES

Summary

A method worked out by G. N. Petrov for calculating the leakage inductance of cylindrical winding arrangements is presented in the paper. The method is based upon the conception of geometric mean distances, enabling effecting relevant calculations for any location of the windings.

A formula (10) for the mean length of a turn has been derived in the paper, which may be applied for any location of the windings.

A comparison has been made of results of the inductance calculations performed by means of a digital computer using the above-mentioned method which includes the formula for the mean length of a turn, with the results of measurements carried out for models of a number of different winding arrangements.

It has been found that discrepancies between calculations and measurements are significant as they range from plus one or two per cent up to minus some tens per cent which is indicative of a need to modify the method.

Therefore, two modifications of the method have been suggested in the paper.

One of the suggested modifications is based upon the theory of specular reflections. The distances from hypothetical yokes have been pre-selected in the paper, for which distances the comparability obtained of calculations and measurements is acceptable for a number of cases.

The other modification is based upon an empirical correction factor. A formula for this factor has been given in the paper for a relatively simple location of the windings. Deriving the suitable formulae for more complicated cases is burdensome.

R. SOBOCKI

POSSIBILITÉ DE CALCULER L'INDUCTANCE DE LA DISPERSION DES ENROULEMENTS DU TRANSFORMATEUR À L'AIDE D'UNE MÉTHODE GÉNÉRALEMENT APPLIQUÉE BASÉE SUR LA CONCEPTION DE MOYENNES DISTANCES GÉOMÉTRIQUES

Résumé

Dans cet article on a présenté la méthode G. N. Petrov de calculer l'inductance de la dispersion des systèmes cylindriques des enroulements, basée sur la conception de moyennes distances géométriques. Cette méthode permet déeffectuer les calcules pour toute disposition des enroulements. On a déduit la formule (10) pour la longueur moyenne de la spire, valable pour toute disposition des enroulements.

Les résultats des calculs de l'inductance, obtenus avec cette méthode et l'application de la formule déduite pour la longueur moyenne de la spire, effectués à l'aide d'un calculateur numérique, ont eté comparés avec les résultats des mesures faits sur un modèle pour les divers systèmes des enroulements. On a constanté que la différence entre le calcul et la mesure est considérable et se contient parmi les limites de quelques à quelques dizaines pour cent, ce qui suggère la nécessité de modifier la méthode.

Dans l'étude on a proposé deux modifications de la méthode. Une d'elles est basée sur la théorie des réflexions régulières. Tout d'abord on a choisi les distances des culasses hypothétiques, pour lesquelles on obtient la concordance des calculs et des mesures qui peut être admise pour les nombreux cas. La seconde modification est basée sur un coefficient empirique de correction. Pour une relativement simple disposition mutuelle des enroulements on a donné la formule de ce coefficient. La détermination des formules pour les cas plus complexes est pénible.

R. SOBOCKI

ÜBER DIE MÖGLICHKEIT DER BERECHNUNG DER DISPERSIONSINDUKTIVITÄT VON TRANSFORMATORWICKLUNGEN MITTELS EINER ALLGEMEINEN, AUF DEM BEGRIFF GEOMETRISCHER MITTELENTFERNUNGEN BASIERENDEN METHODE

Zusammenfassung

In dem Artikel wurde die von G. N. Pietrow entwickelte Berechnungsmethode der Dispersionsinduktivität von zylindrischen Wicklungssystemen angeführt, die auf dem Begriff geometrischer Mittelentfernungen basiert. Die Methode gestattet, Berechnungen bei beliebiger Wicklungslage durchzuführen. Es wurde die Formel (10) für die mittlere Wicklungslänge abgeleitet, die für beliebige Wicklungslage ausgelegt ist.

Die mittels obiger Methode gewonnenen Berechnungsergebnisse für die Induktivität wurden unter Berücksichtigung der für die mittlere Wicklungslage abgeleiteten Formel auf einem Digitalrechner errechnet und mit denjenigen Meßergebnissen verglichen, die für verschiedene Wicklungssysteme am Modell erhalten worden waren. Es wurde festgestellt, daß die Divergenz zwischen den Berechnungen und den Bemessungen groß ist; sie betrug von einigen bis einigen Zehnten Prozent, was darauf hindeutet, daß die Methode modifiziert werden muß.

Im Aufsatz wurden zwei Modifikationen vorgeschlagen. Eine davon basiert auf der Spiegelbildtheorie. Es wurden die Entfernungen von denjenigen hypothetischen Jochen vorgewählt, bei denen eine für manche Fälle annehmbare Übereinstimmung zwischen Berechnungs — und Meßergebnissen auftritt. Die zweite Modifikation basiert auf einem empirischen Korrektionsfaktor. Es wurde die Formel für diesen Faktor bei verhältnismäßig einfacher gegenseitiger Situierung der Wicklungen angegeben. Das Bestimmen von Formeln für kompliziertere Fälle ist umständlich.

P. СОБОЦКИ

О ВОЗМОЖНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНДУКТИВНОСТИ РАССЕЯНИЯ ОБМОТОК ТРАНСФОРМАТОРА ПРИ ПОМОЩИ ОБЩЕГО МЕТОДА ОБОСНОВАННОГО НА ПОНЯТИИ СРЕДНИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РАССТОЯНИЙ

Резюме

В статье посвященной вычислению индуктивности рассеяния цилиндрических обмоток представлен метод обоснованный на понятии средних геометрических расстояний разработанный Г. Н. Петровым. Метод дает возможность вычисления для любого расположения обмоток.

В работе выведена формула (10) на среднюю длину витка, пригодная для любого расположения обмоток.

Результаты вычислений индуктивности вышеуказанным методом, при применении формулы на среднюю длину витка произведенных при помощи ЭВМ сопоставлены с результатами измерений для ряда разных расположений обмоток. Констатировано, что расхождение между расчетами и измерением большое — в пределах от нескольких до минус нескольких десятков %, что указывает на необходимость модификации метода.

В работе предложены две модификации метода. Одна из них обоснована на теории зеркальных отражений. В статье предварительно подобраны расстояния от гипотетических ярм, при которых получается совпадение вычислений с измерениями, которое можно принять во многих случаях.

Вторая модификация обоснована на эмпирическом коррекционном коэффициенте. В статье приведена формула (16) на этот коэффициент для сравнительно простого взаимного расположения обмоток.

Вывод формул для более сложных случаев будет слишком трудоемким.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 3, ss. 709—725

519.21

O statystycznej obróbce wyników pomiaru wytrzymałości udarowej izolacji nieregenerującej się

FRANCISZEK MOSIŃSKI (ŁÓDŹ)

Instytut Transformatorów, Maszyn i Aparatów Elektrycznych Politechniki Łódzkiej

Otrzymano 9.4.1975

Artykuł dotyczy badania modeli izolacji napięciem udarowym, z zastosowaniem metody badania poszczególnych modeli rosnącym stopniami napięciem aż do przebicia. Autorzy [2] podają metodę transformacji tak uzyskanych wyników eksperymentalnych na poszukiwaną dystrybuantę napięć przebicia rzeczywiście opisującą własności układu izolacyjnego, opartą na rozkładzie normalnym. Praca rozszerza tę metodę na rozkład Weibulla często bardziej poprawny i wygodniejszy w użyciu.

Porównano wyniki badań opracowane podaną metodą z wynikami opracowanymi na podstawie rozkładu normalnego [2] oraz z wynikami eksperymentu.

ZASTOSOWANE SYMBOLE

$F(u)$ — dystrybuanta napięć przebicia (przeskoku)
$F^*(u_i)$— oszacowanie dystrybuanty $F(u)$
$P(u_i < u)$ — prawdopodobieństwo zaistnienia przebicia (przeskoku) przy napięciu $u_i < u$, gdzie u — ustalona rzeczywista wartość napięcia
u_i — napięcie przebicia (przeskoku)
p_i — względna częstość napięć przebicia (prawdopodobieństwo z próby)
x_i — liczba przeskoków w serii pomiarowej w metodzie serii (metoda A)
n_i — liczba udarów na stopień napięciowy w metodzie serii (metoda A)
$S_{\Delta u}(u)$ — pomocnicza dystrybuanta napięć przebicia uzyskiwana metodą schodkową (metoda C)
$S^*_{\Delta u}(u_i)$ — oszacowanie dystrybuanty $S_{\Delta u}(u)$
u_a — początkowy poziom napięcia w metodzie schodkowej (metoda C)
u_o; $u_{o\Delta u}$ — parametry przesunięcia rozkładu Weibulla (napięcia wytrzymywane)
u_1; $u_{1\Delta u}$ — parametry skali rozkładu Weibulla
k, k'— parametry kształtu rozkładu Weibulla
exp — funkcja wykładnicza
i, j, n — liczby naturalne
m — liczba przebić (przeskoków) w metodzie C

t, t_x — standaryzowane zmienne losowe
b — parametr skali standaryzowanego rozkładu Weibulla
Δt — standaryzowany krok napięciowy
Δu — krok napięciowy $\Delta u = u_i - u_{i-1}$
$W(t)$, $W_x(t_x)$, $F(t)$ — standaryzowane dystrybuanty rozkładu Weibulla
t_o — parametr przesunięcia dystrybuanty $W_x(t_x)$
t_1 — parametr skali dystrybuanty $W_x(t_x)$
$\bar{u}$ — mediana napięć przebicia przy założeniu rozkładu normalnego
S — odchylenie standardowe w rozkładzie normalnym

1. WPROWADZENIE

Napięcie przeskoku w układach izolacyjnych z izolacją gazową lub ciekłą, jak również napięcie przebicia układów z izolacją stałą jest zmienną losową podlegającą prawom statystycznym. Dystrybuanta rozkładu napięć przebicia (przeskoku) $F(u)$, określająca z jakim prawdopodobieństwem P zmienna losowa U_i jest mniejsza od pewnej rzeczywistej wartości u

$$F(u) = P(U_i < u), \tag{1}$$

opisuje ważne dla praktyki własności układu izolacyjnego przy określonym rodzaju zagrożeń elektrycznych.

Przy zagrożeniach udarowych w powszechnym zastosowaniu są trzy metodyki eksperymentalnego wyznaczania dystrybuanty napięć przebicia (przeskoku) $F(u)$.

A. Metoda serii [9]. Polega ona na doprowadzeniu kolejno serii n_i jednakowych udarów o poziomie napięcia u_i i zliczaniu udarów, które doprowadziły do przeskoku. Stosunek liczby przeskoków do całkowitej liczby udarów $p_i = \frac{x_i}{n_i}$ jest prawdopodobieństwem z próby. Powtórzenie próby na kilku poziomach napięcia daje możność określenia empirycznej dystrybuanty napięć przebicia.

B. Metoda góra — dół [10]. Metoda ta polega na doprowadzeniu po jednym udarze, począwszy od niskiego poziomu napięcia (gwarantującego brak przeskoku), stopniami do napięć coraz wyższych. Jeśli przy kolejnym udarze nie wystąpi przeskok, wówczas poziom napięcia zostaje podwyższony o założony z góry, stale ten sam przyrost napięcia, tak długo aż wystąpi pierwszy przeskok. Następnie napięcie jest obniżane do najbliższego niższego poziomu. Gdy wystąpi następny przeskok, wówczas obniża się napięcie o dalszy stopień. Przy braku przeskoku podwyższa się napięcie na stopień wyższy itd. Całe postępowanie jest powtarzane $20 \div 40$ razy.

C. Metoda, którą nazwiemy „schodkową" [11]. Polega ona na podwyższaniu napięcia stopniami Δu od dostatecznie niskiego poziomu gwarantującego brak przeskoku lub przebicia aż do wystąpienia przebicia (przeskoku). Po przerwie próba jest powtarzana w identycznej procedurze na kolejnym modelu (w przypadku izolacji nieregenerującej się) lub na tym samym układzie elektrod (w przypadku izolacji regenerującej się).

Sposób statystycznej obróbki wyników uzyskanych metodami A i B jest ogólnie znany (np. [10, 11]) i umożliwia bezpośrednie oszacowanie dystrybuanty napięć przeskoku jak i jej przedziałów ufności. Natomiast dane eksperymentalne uzyskane za pomocą metody C tylko w niektórych przypadkach pozwalają na bezpośrednie wyznaczenie dystrybuanty napięć przeskoku. Jak udowodniono w [3, 4], możliwe to jest jedynie w przypadku, gdy rozrzut wielkości mierzonych przypisać można prawie wyłącznie odrębnym własnościom poszczególnych modeli (*rozrzut technologiczny*), a nie przypadkowości samego zjawiska. W przeciwnym przypadku wyznaczenie dystrybuanty napięć przebicia wymaga wprowadzenia dodatkowych założeń [11, 1, 2] i wykonania dość skomplikowanych obliczeń.

Jak wiadomo, uzyskanie danych eksperymentalnych dla układów o izolacji regenerującej się jest stosunkowo prostym zabiegiem laboratoryjnym. Natomiast uzyskanie dystrybuanty napięć przebicia układów izolacji nieregenerującej się, jak np. izolacja papierowo-olejowa, związane jest z masowym wykonywaniem i niszczeniem kosztownych często modeli. Każda z podanych wyżej metod w różnym stopniu jest przydatna do badania izolacji nieregenerującej się. Metoda A, zwana metodą serii, stosowana jest powszechnie. Niestety jednak jest to związane z koniecznością wykonywania bardzo dużej liczby modeli. Można udowodnić, że przy zastosowaniu metody C (lub B) uzyskuje się równorzędne wyniki (rozdz. 2 i 4) przy znacznie mniejszej liczbie modeli. Metoda C jest więc wysoce atrakcyjna dla badania wytrzymałości izolacji nieregenerującej się.

Rozwiązanie problemu wyznaczania dystrybuanty napięć przebicia na podstawie danych eksperymentalnych uzyskanych metodą C przypisuje się autorom ośrodka drezdeńskiego [1, 2, 6]. Jednym z koniecznych założeń jest rozpoznanie charakteru rozkładu prawdopodobieństwa; autorzy [2] opracowali metodę obliczeń opartą na założeniu, iż dane eksperymentalne podlegają rozkładowi normalnemu. Niestety, założenie takie nie zawsze jest prawdziwe, szczególnie dla izolacji nieregenerującej się. W ostatnich latach udowodniono, iż w zakresie małych prawdopodobieństw przebicia (a o takie głównie chodzi w przypadku izolacji nieregenerującej się) o wiele lepszą estymację zapewnia rozkład Weibulla.

W rozdz. 2 podano zasadnicze koncepcje metody drezdeńskiej [2] w zastosowaniu do rozkładu normalnego.

W rozdziałach 3 i 4 podano propozycję autora wyznaczania dystrybuanty napięć przebicia (przeskoku) w przypadku, gdy uzyskane metodą C wyniki podlegają rozkładowi Weibulla.

W rozdz. 4, dla ułatwienia praktycznego zastosowania proponowanej w rozdz. 3 metody, przeprowadzono w charakterze przykładu bieg obliczeń dla danych doświadczalnych wybranych z literatury oraz dla danych uzyskanych przez autora. Założenia, iż przyjęte do obróbki statystycznej wyniki pomiarów spełniają rozkład Weibulla nie sposób sprawdzić za pomocą testów nieparametrycznych, gdyż odpowiednio dobrany rozkład Weibulla ($k = 3{,}5$) [5] pokrywa się z rozkładem normalnym w zakresie prawdopodobieństw aż do 2%, a pomiary w niższym zakresie prawdopodobieństw dla nieregenerującej się izolacji są praktycznie niemożliwe. Założenie, że wyniki badań izolacji nieregenerującej się w zakresie małych prawdopodobieństw winny spełniać rozkład Weibulla jest założeniem teoretycznym, dobrze ugruntowanym przez współczesne badania, w szczególności przez prace grupy roboczej CIGRE [5].

2. POMOCNICZA DYSTRYBUANTA NAPIĘĆ PRZEBICIA UZYSKIWANA Z POMIARÓW METODĄ C

Uzyskanie prawidłowego oszacowania dystrybuanty napięć przebicia wymaga spełnienia warunku niezależności n_i doświadczeń na danym stopniu napięciowym u_i. W przypadku izolacji ciekłej, np. olejowej, w układzie gołych elektrod metalowych, zachowanie niezależności kolejnych przeskoków wymaga przerwy między kolejnymi doprowadzeniami napięcia, po wystąpieniu przeskoku rzędu 3 ... 5 min, natomiast przy braku przeskoku — rzędu 30 s. Czas trwania badań metodą A będzie więc długi. Drugim mankamentem tej metody jest duża liczba przeskoków, np. dla jedynie 5 stopni napięciowych po 20 udarów na stopień, wymagana liczba przeskoków jest rzędu 50. Tak duża liczba przeskoków wymaga częstych zmian oleju w badanym układzie lub innych sposobów eliminowania zanieczyszczania oleju.

W przypadku izolacji złożonej, np. papierowo-olejowej, stosowanie metody serii do wyznaczania dystrybuanty napięć przebicia wymaga wykonania bardzo dużej liczby modeli; np. by móc dany układ izolacyjny zbadać jedynie 5 stopniami napięciowymi dając po 20 modeli na stopień, należałoby dysponować 100 modelami.

Powyższe mankamenty nie występują w przypadku stosowania metody C [11]. W metodzie tej napięcie podwyższa się stopniami Δu o stałej wartości, tak długo aż wystąpi pierwszy przeskok.

Próbę zaczyna się od napięcia u_a, przy którym na pewno nie wystąpi przebicie, a po pierwszym przebiciu (przy napięciu $u_{i\Delta u} = u_a + i\Delta u$; $i = 1, 2, 3, \ldots$) próba zostaje przerwana. Postępowanie to powtarza się m-krotnie, przy czym wartość początkowa u_a może być zmieniana [2]. W ten sposób wyznacza się m wartości napięcia $u_{i\Delta u}$ jako realizacje zmiennej losowej ciągłej $U_{i\Delta u}$. Jeśli u_a wybrano dostatecznie niskie, to wartości $u_{i\Delta u}$ są niezależne od wyboru punktu początkowego u_a. Tak uzyskana pomocnicza dystrybuanta $S_{\Delta u}(u)$ zmiennej losowej $U_{i\Delta u}$ zależy jedynie od wybranego Δu.

Tworząc zależność

$$S^*_{\Delta u}(u_i) = \frac{\sum_{i=1}^{i} u_{i\Delta u} \leqslant u_i}{m+1}, \tag{2}$$

uzyskuje się oszacowanie pomocniczej dystrybuanty $S_{\Delta u}(u)$. Dystrybuanta ta nie daje jeszcze w praktyce żadnych informacji, ponieważ zależy od wybranego kroku napięciowego Δu. Aby wytrzymałość izolacji móc opisać jednoznacznie, dąży się do przeliczania tej pomocniczej dystrybuanty na poszukiwaną dystrybuantę napięć przebicia. Przeliczenie odwrotne jest proste i zostało podane przez Tetznera [11] oraz [3]

$$S_{\Delta u}(u) = \sum_{i=1}^{n} F(u_i) \prod_{j=0}^{i-1} [1 - F(u_j)]. \tag{3}$$

Równanie to umożliwia obliczenie dystrybuanty $S_{\Delta u}(u)$ przy znajomości istotnej dla praktyki dystrybuanty napięć przebicia $F(u)$. Autorzy [2] opierając się na rozkładzie normalnym wykorzystali wzór (3) do opracowania metody obliczeniowej pozwalającej przeliczyć wyznaczoną eksperymentalnie dystrybuantę $S_{\Delta u}(u)$ na dystrybuantę poszukiwaną $F(u)$.

W niniejszym artykule proponuje się analogiczną transformację przy założeniu, iż dane eksperymentalne podlegają nie rozkładowi normalnemu, lecz rozkładowi Weibulla.

3. PRZELICZENIE WYNIKÓW UZYSKANYCH METODĄ C PRZY ZAŁOŻENIU, ŻE DANE EKSPERYMENTALNE PODLEGAJĄ ROZKŁADOWI WEIBULLA

Dystrybuanta rozkładu Weibulla ma postać [5]

$$F(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad u \leqslant u_0 \\ 1-\exp\left[-\left(\dfrac{u-u_0}{u_1-u_0}\right)^k\right] & \text{dla} \quad u > u_0, \end{cases} \tag{4}$$

gdzie:

u_o — napięcie wytrzymywane, $F(u_o) = 0$ (*parametr przesunięcia* rozkładu Weibulla),

u_1 — parametr skali rozkładu Weibulla $F(u_1) = 0{,}632$,

k — współczynnik kształtu rozkładu Weibulla.

Korzystając z rozwinięcia wzoru (3):

$$S_{\Delta u}(u) = \sum_{i=1}^{n} F(u_a + i\Delta u) \prod_{j=0}^{i-1} [1-F(u_a+j\Delta u)] \tag{5}$$

oraz wykorzystując standaryzowaną postać rozkładu Weibulla

$$F(t) = 1-\exp\left[-\left(\frac{t}{b}\right)^k\right], \tag{6}$$

gdzie:

$$t = \frac{u_i-u_o}{u_1-u_o},$$

$$b = 1,$$

obliczono dla $k = 1{,}0;\ 1{,}5;\ 2{,}0;\ 2{,}5;\ 3{,}0;\ 3{,}5;\ 4{,}0;\ 4{,}5;\ 5{,}0$ pomocnicze dystrybuanty $S_{\Delta t}(t)$ dla różnych kroków $\Delta t = 0{,}01;\ 0{,}02;\ 0{,}04;\ 0{,}10;\ 0{,}20$. Wyniki tych obliczeń są przedstawione na wykresach z rys. 1 wykonanych w siatce rozkładu Weibulla.

Jak wynika z rys. 1, pomocnicze dystrybuanty $S_{\Delta t}(t)$ dla zakresu $k = 2 \ldots 5$, a więc dla interesującego z punktu widzenia danych eksperymentalnych [5] zakresu współczynnika kształtu i dla podanych wyżej szerokich zakresów przyrostu zmiennych losowych, są w siatce funkcyjnej rozkładu Weibulla liniami prostymi, a więc z dobrym przybliżeniem mogą być aproksymowane tym samym rozkładem.

Autorzy [2] chcąc wyznaczyć dystrybuantę F(u) z pomocniczej dystrybuanty $S_{\Delta u}(u)$, przy założeniu, że dane eksperymentalne spełniają rozkład normalny, zaproponowali metodę transformacji funkcji $S_{\Delta u}(u)$ na funkcję $F(u)$. Analogiczną transformację można zaproponować dla przypadku, gdy zakłada się iż dane eksperymentalne podlegają rozkładowi Weibulla.

Stosując standaryzację zmiennej losowej u_i

$$t = \frac{u_i-u_o}{u_1-u_o} \tag{7}$$

oraz zmiennej losowej $u_{i\Delta u}$

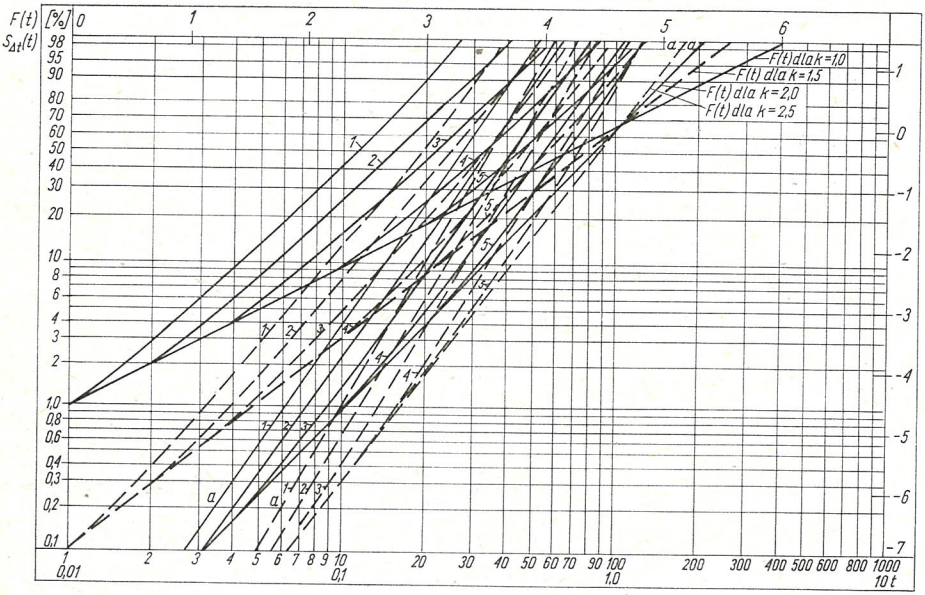
$$t_x = \frac{u_{i\Delta u}-u_o}{u_1-u_o}, \tag{8}$$

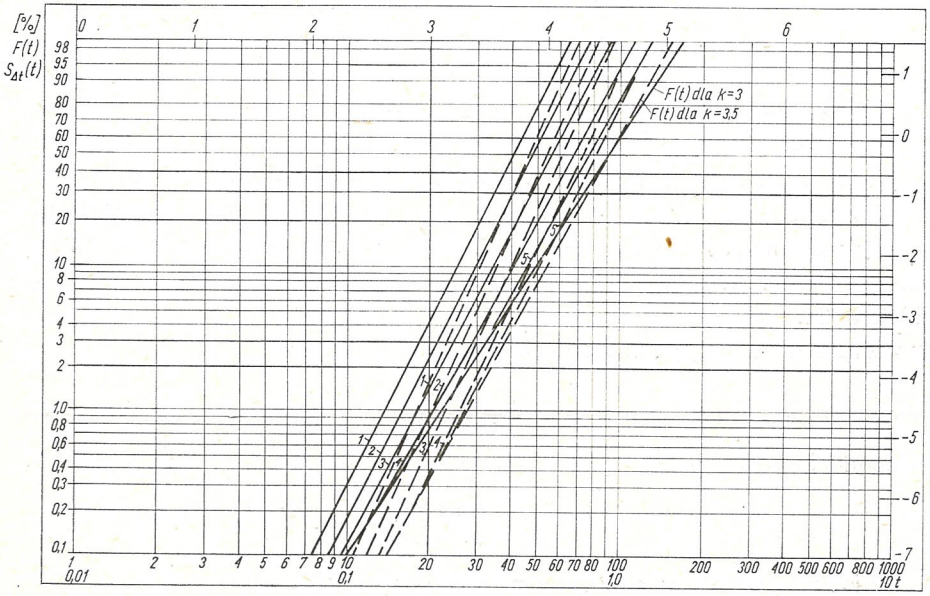
przekształca się dystrybuantę $F(u)$ do postaci $W(t)$, gdzie

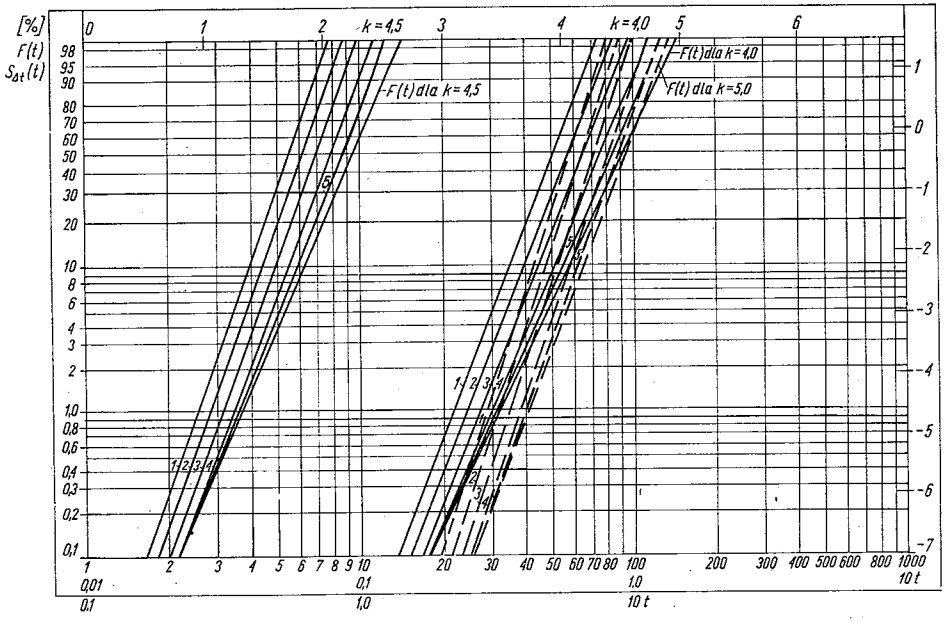
$$W(t) = 1 - \exp(-t^k), \tag{9}$$

a dystrybuantę $S_{\angle u}(u)$ do postaci $W_x(t_x)$, gdzie

$$W_x(t_x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t_x - t_o}{t_1 - t_o}\right)^k\right]; \tag{10}$$







Rys. 1. Teoretyczne dystrybuanty $S_{\Delta t}(t)$ oraz $F(t)$ obliczone na EMC-ODRA-1203 dla $k = 1 \ldots 5$ oraz $\Delta t = 0{,}01 \ldots 0{,}20$

a — linia ciągła $k = 1{,}0$; linie *1, 2, 3, 4, 5* odpowiednio $\Delta t = 0{,}01$; 0,02; 0,04; 0,10; 0,20, linia przerywana $k = 1{,}5$; linie *1 ... 5* — jak wyżej, linia ciągła $a\,k = 2{,}0$; linie *1 ... 5* — jak wyżej, linia przerywana $a\,k = 2{,}5$; linie *1 ... 5* jak wyżej; b — linia ciągła $k = 3$; linie *1 ... 5* jak na rys. 1a, linia przerywana $k = 3{,}5$; linie *1 ... 5* jak na rys. 1a, c — linie ciągłe $k = 4{,}0$ oraz $k = 4{,}5$; linie *1 ... 5* jak na rys. 1a, linia przerywana $k = 5$; linie *1 ... 5* jak na rys. 1a

t_o, t_1 — odpowiednio parametr przesunięcia i parametr skali funkcji $W_x(t_x)$.

Standaryzowany stopień napięciowy ma wówczas postać

$$\Delta t = \frac{\Delta u}{u_1 - u_0}. \tag{11}$$

Pomiędzy funkcjami $W(t)$ oraz $W_x(t_x)$ zachodzi związek

$$W(t) = W_x\left(\frac{t_x - t_0}{t_1 - t_0}\right); \tag{12}$$

stąd

$$t_x = t(t_1 - t_0) + t_0. \tag{13}$$

Standaryzowaną zmienną losową t można również uzyskać ze zmiennej $u_{i\Delta u}$ według zależności

$$t = \frac{u_{i\Delta u} - u_{o\Delta u}}{u_{i\Delta u} - u_{o\Delta u}}, \tag{14}$$

gdzie: $u_{o\Delta u}$, $u_{1\Delta u}$ — odpowiednio parametr przesunięcia i parametr skali funkcji $S_{\Delta u}(u)$.

Z równań (13) i (14) uzyskuje się

$$t_x = \frac{u_{i\Delta u} - u_{o\Delta u}}{u_{1\Delta u} - u_{0\Delta u}}(t_1 - t_o) + t_o. \tag{15}$$

Przekształcając równania (8) i (15) do postaci

$$t_x = \frac{u_{i\Delta u}}{u_1 - u_0} - \frac{u_0}{u_1 - u_0}, \tag{16}$$

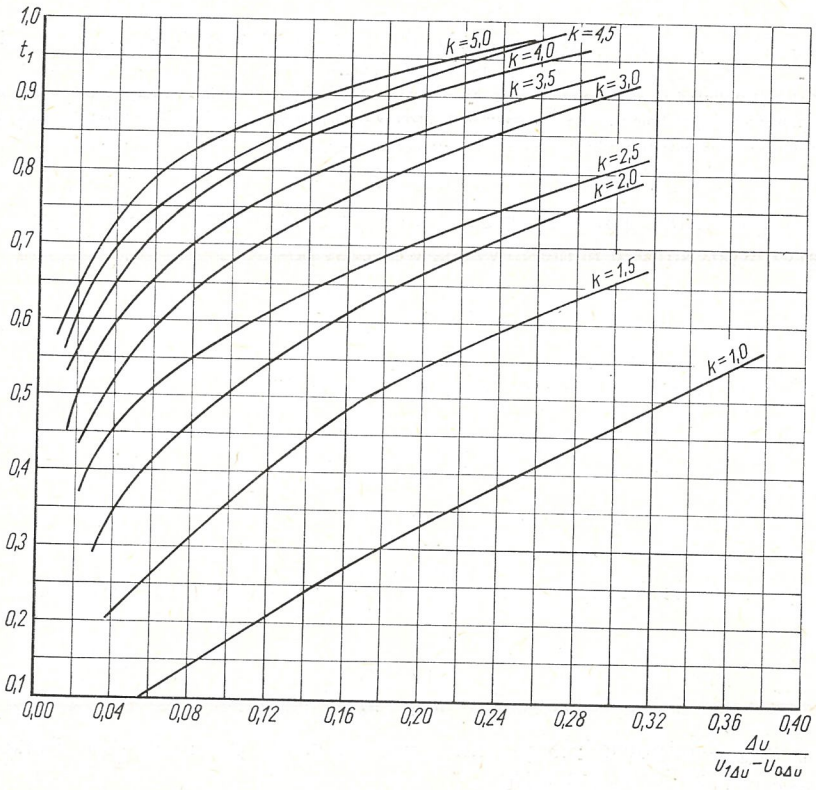
$$t_x = \frac{u_{i\Delta u}}{u_{1\Delta u} - u_{0\Delta u}}(t_1 - t_0) - \left[\frac{u_{0\Delta u}}{u_{1\Delta u} - u_{0\Delta u}}(t_1 - t_0) - t_0\right] \tag{17}$$

i porównując ich współczynniki, uzyskuje się przy założeniu $t_o = 0$ (gdyż po standaryzacji mamy do czynienia z rozkładem uciętym w zerze) następujące wyrażenia:

$$\frac{u_{1\Delta u} - u_{o\Delta u}}{u_1 - u_o} = t_1, \tag{18}$$

$$\frac{u_{1\Delta u} - u_{o\Delta u}}{u_1 - u_o} = \frac{u_{o\Delta u}}{u_o} t_1. \tag{19}$$

Z równań (18) i (19) wynika, że $u_{o\Delta u} = u_o$, a więc że dystrybuanta $F(u)$ i dystrybuanta $S_{\Delta u}(u)$ są ucięte w tym samym punkcie. Inaczej mówiąc, napięcie wytrzymywane, rozumiane jako parametr przesunięcia rozkładu Weibulla układu izolacyjnego, może być szacowane dowolną metodyką badań (A lub C) bez potrzeby przeliczania. Jest to bardzo cenny wnio-



Rys. 2. Zależność współczynnika poprawkowego t_1 od unormowanego kroku napięciowego $\frac{\Delta u}{u_{1\Delta u} - u_{0\Delta u}}$ dla $k = 1 \ldots 5$

sek, gdyż często interesujące jest tylko napięcie wytrzymywane, które jak wynika z powyższych rozważań teoretycznych nie zależy od obranego kroku napięciowego Δu i może być określone przez proste i tanie badania metodą C.

Z równań (11) i (18) lub (19) uzyskuje się normowaną wartość kroku napięciowego

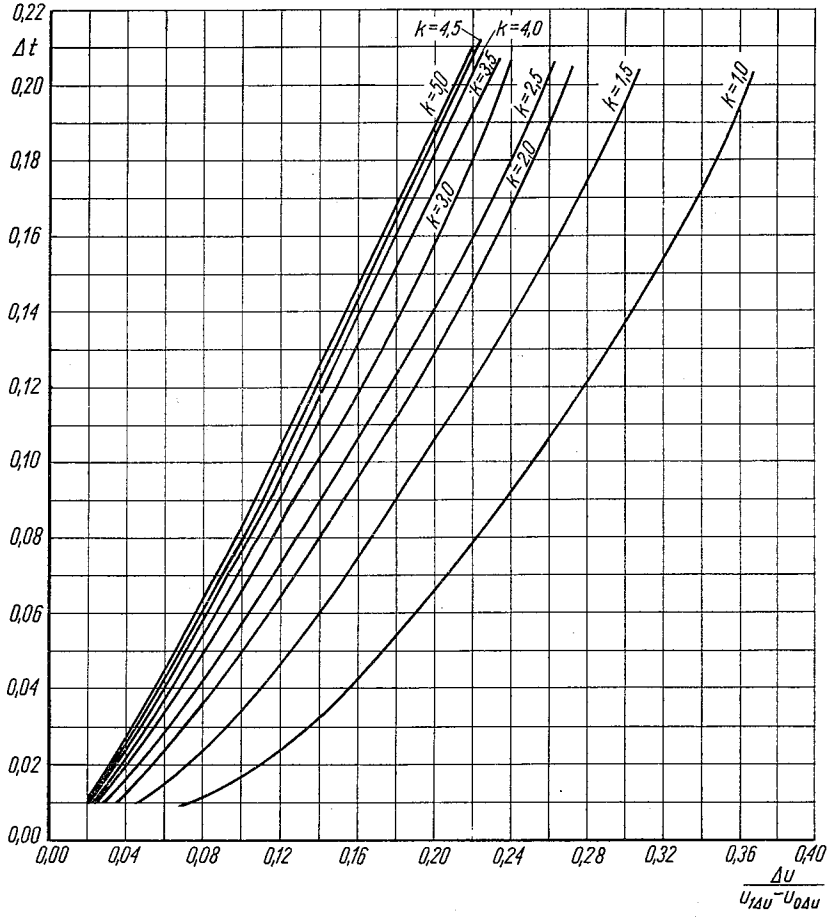
$$\Delta t = \frac{\Delta u}{u_{1\Delta u} - u_{o\Delta u}} t_1 = \frac{\Delta u}{u_{1\Delta u} - u_o} t_1 ; \tag{20}$$

stąd

$$\frac{\Delta t}{t_1} = \frac{\Delta u}{u_{1\Delta u} - u_{o\Delta u}} = f(k). \tag{21}$$

Zależność $\Delta t = f\left(\frac{\Delta u}{u_{1\Delta u} - u_{o\Delta u}}\right)$ podano na rys. 3.

Współczynniki poprawkowe t_1 umożliwiające przeliczenie wyrażenia $u_{1\Delta u} - u_{o\Delta u}$ na poszukiwaną wartość $u_1 - u_0$, wyznaczono dla danego k z rys. 1. Wykres współczynników



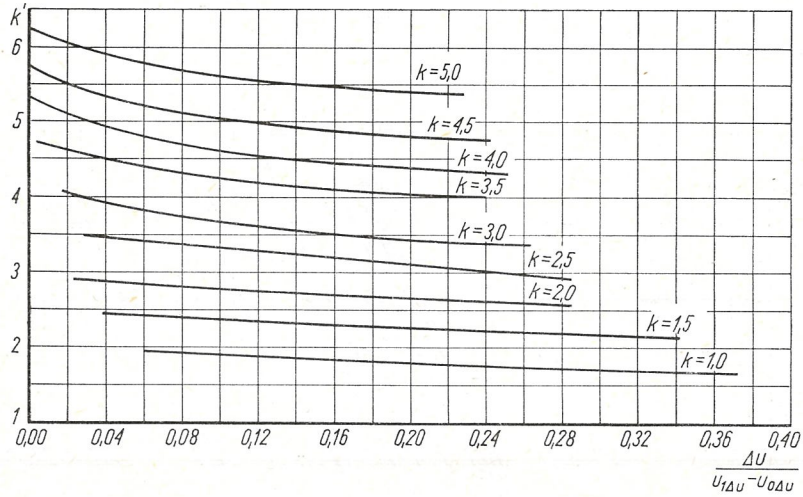
Rys. 3. Zależność Δt od unormowanego kroku napięciowego $\frac{\Delta u}{u_{1\Delta u} - u_{o\Delta u}}$ dla $k = 1 \ldots 5$

t_1 w funkcji unormowanego kroku napięciowego $\frac{\Delta u}{u_{1\Delta u}-u_{o\Delta u}}$ dla różnych wartości k podano na rys. 2. Korzystając z tego współczynnika oraz wiedząc, że $u_{o\Delta u}=u_o$, można znając eksperymentalne oszacowania $u_{1\Delta u}$ i $u_{o\Delta u}$ wyznaczyć parametr u_1 dystrybuanty napięć przebicia $F(u)$ wg zależności

$$u_1=\frac{u_{1\Delta u}-u_{o\Delta u}}{t_1}+u_{o\Delta u}=\frac{u_{1\Delta u}-u_o}{t_1}+u_o. \tag{22}$$

W ten sposób uzyskano przeliczenie jednego punktu pomocniczej dystrybuanty $S_{\Delta u}(u)$ na dystrybuantę $F(u)$.

Aby móc określić całą dystrybuantę napięć przebicia (przeskoku), należy dodatkowo skorygować uzyskany eksperymentalnie współczynnik kształtu k' dystrybuanty $S_{\Delta u}(u)$, który

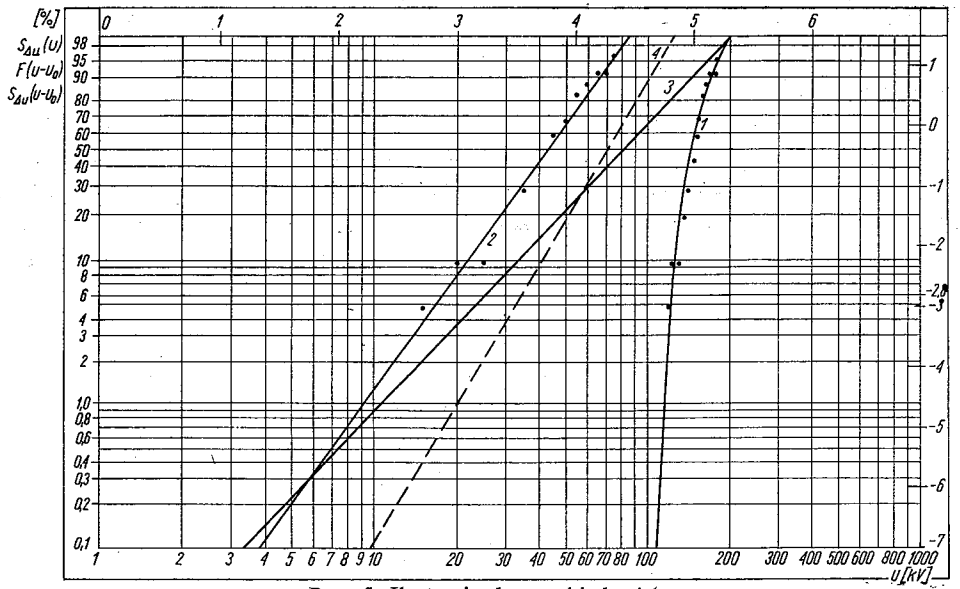


Rys. 4. Wykresy umożliwiające oszacowanie parametru kształtu k dystrybuanty napięć przebicia $F(u)$ na podstawie znajomości parametru kształtu k' pomocniczej dystrybuanty $S_{\Delta u}(u)$

jest jej współczynnikiem nachylenia w siatce funkcyjnej rozkładu Weibulla. Zależność współczynnika k' od kroku $\frac{\Delta u}{u_{1\Delta u}-u_{o\Delta u}}$ dla różnych współczynników kształtu dystrybuanty $F(u)$ podano na rys. 4. Znając k' oraz $\frac{\Delta t}{t_1}=\frac{\Delta u}{u_{1\Delta u}-u_{o\Delta u}}$ szacuje się z tych wykresów k. W ten sposób mając przeliczony jeden punkt szukanej dystrybuanty napięć przebicia $F(u)$ według równania (22) oraz znając jej nachylenie w siatce rozkładu Weibulla, można tę funkcję wykreślić.

4. PRZYKŁADY ZASTOSOWANIA

4.1. Opierając się na podanych w [2] wynikach pomiarów wykonanych metodą C (tablica 1) wykreślono w siatce funkcyjnej rozkładu Weibulla dystrybuantę pomocniczą $S^*_u(u_i)$ (krzywa *1* — rys. 5).



Rys. 5. Ilustracje do przykładu 4.1

linia *1* — oszacowanie pomocniczej dystrybuanty $S^*_{\Delta u}(u_i)$ wg danych [2], linia *2* — oszacowanie pomocniczej dystrybuanty $S^*_{\Delta u}(u_{i\Delta u}-u_{o\Delta u})$ wg danych [2], linia *3* — obliczona na podstawie $S^*_{\Delta u}(u_{i\Delta u}-u_{o\Delta u})$ dystrybuanta napięć przeskoku $F^*(u_i-u_o)$, linia *4* — dystrybuanta napięć przeskoku $F^*(u_i-u_o)$ wg danych [2]

Tablica I

Eksperymentalne wyniki uzyskane metodą C dla odstępu (50 mm) ostrze-płyta w oleju wg [2]

$u_{i\Delta u}$ kV	Liczba przeskoków na danym poziomie napięcia	Liczba przeskoków do danego poziomu napięcia włącznie $\Sigma u_{i\Delta u}$	$\frac{\Sigma u_{i\Delta u}}{m+1}100\%$	$u_{i\Delta u}-u_{o\Delta u}$
1	2	3	4	5
120	1	1	4,76	15
125	1	2	9,52	20
130	0	2	9,52	25
135	2	4	19,05	30
140	2	6	28,57	35
145	3	9	42,86	40
150	3	12	57,14	45
155	2	14	66,70	50
160	3	17	81,00	55
165	1	18	85,70	60
170	1	19	90,50	65
175	0	19	90,50	70
180	1	20	95,20	75

Wykorzystane dane eksperymentalne [2] dotyczą badania udarem łączeniowym 50/5000 μs odstępu ostrze-płyta w oleju (odstęp 50 mm). Liczba uzyskanych przeskoków wynosi $m = 20$. Krok napięciowy wybrano równy $\Delta u = 5$ kV.

Traktując przykład obliczeniowy jako ilustrację do stosowania proponowanej metody obliczeń poprzestano jedynie na graficznym szacowaniu parametrów [7] rozkładów napięć przebicia u_o, k, u_1. Dla dystrybuanty $S^*_{\Delta u}(u_i)$ z krzywej *1* na rys. 5 uzyskano w ten sposób parametr przesunięcia (napięcie wytrzymywane) $u_{o\Delta u} \cong 105$ kV. Tworząc wyrażenia $u_{i\Delta u} - u_{o\Delta u}$ (rubryka 5 — tabl. 1), uzyskano prostą *2* będącą oszacowaniem pomocniczej dystrybuanty $S^*_{\Delta u}(u_{i\Delta u} - u_{o\Delta u})$.

Z prostej tej oszacowano parametry dystrybuanty:

$$k' \cong 2{,}8,$$

$$u_{1\Delta u} - u_{o\Delta u} \cong 50 \text{ kV},$$

$$\frac{\Delta u}{u_{1\Delta u} - u_{o\Delta u}} = \frac{5}{50} = 0{,}1.$$

Z rys. 4 dla $k' = 2{,}8$ i $\dfrac{\Delta u}{u_{1\Delta u} - u_{o\Delta u}} = \dfrac{\Delta u}{u_{1\Delta u} - u_o} = 0{,}1$ uzyskano $k = 2$, a z rys. 2 $t_1 = 0{,}505$.

Stąd na podstawie wzoru (22) $u_1 - u_o = \dfrac{u_{1\Delta u} - u_{o\Delta u}}{t_1} = \dfrac{50}{0{,}505} = 99$ kV.

Znając $u_1 - u_o$ oraz k, wykreślono na rys. 5 poszukiwaną dystrybuantę napięć przebicia (krzywa *3*). Na tym samym wykresie naniesiono dystrybuantę $F^*(u_i - u_o)$ (krzywa *4*) obliczoną w [2] w oparciu o rozkład normalny. Prostą *2* z rys. 5 określono metodą najmniejszych kwadratów.

Dystrybuantę *4* z rys. 5 wykreślono następująco:

— wg obliczeń przeprowadzonych przy założeniu rozkładu normalnego [2] parametry obliczonej dystrybuanty napięć przebicia wynoszą $S = 23$ kV; $U = 169$ kV,

— posługując się podanymi w [5] wzorami przeliczono te parametry na parametry rozkładu Weibulla o $k = 3{,}5$:

$$u_o = \bar{U} - 3{,}17S = 169 - 3{,}17 \cdot 23 = 96 \text{ kV},$$

$$u_1 = \bar{U} + 0{,}35S = 169 + 0{,}35 \cdot 23 = 177 \text{ kV},$$

— znając parametry k, u_o, u_1 wykreślono prostą *4* na rys. 5.

Różnice między krzywymi *3* i *4* wynikają z różnych założeń przy ich wyznaczaniu. Krzywa *4* obliczona jest przy założeniu stałego kształtu (rozkład normalny) funkcji $S_u(u)$ i $F(u)$, natomiast krzywa *3* oparta o rozkład Weibulla bazuje na założeniu, że stały jest kres dolny obu funkcji a współczynnik kształtu zależy od kroku napięciowego Δu.

4.2. W celu uzyskania danych mogących służyć jako przykład zastosowania proponowanej metodyki obliczeń, wykonano pomiary napięć przeskoku metodą A (tabl. 2) i metodą C (tabl. 3) dla układu elektrod miedzianych pokazanych na rys. 6 zanurzonych w kadzi z olejem o pojemności około 60 l. Próby wykonano udarem napięciowym 1,2/50μs. Krok napięciowy przyjęto równy $\Delta u = 7$ kV.

Tablica 2

Eksperymentalne wyniki uzyskane metodą A dla elektrod z rys. 6 zanurzonych w oleju transformatorowym

u_i kV	Liczba udarów na stopień napięciowy n_i	Liczba przeskoków w serii x_i	$\frac{x_i}{n_i}100\%$	$u_i - u_0$
1	2	3	4	5
129,0	20	0	0	20
143,0	20	1	5	34
150,0	20	2	10	41
163,0	20	3	15	54
170,0	20	6	30	61
183,5	20	8	40	74,5
190,0	20	7	35	81
200,0	20	14	70	101

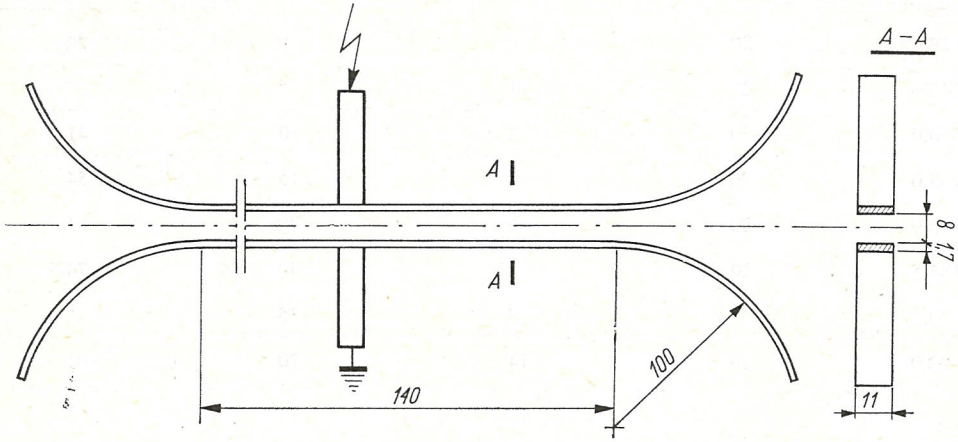
Tablica 3

Eksperymentalne wyniki uzyskane metodą C dla elektrod z rys. 6 zanurzonych w oleju transformatorowym

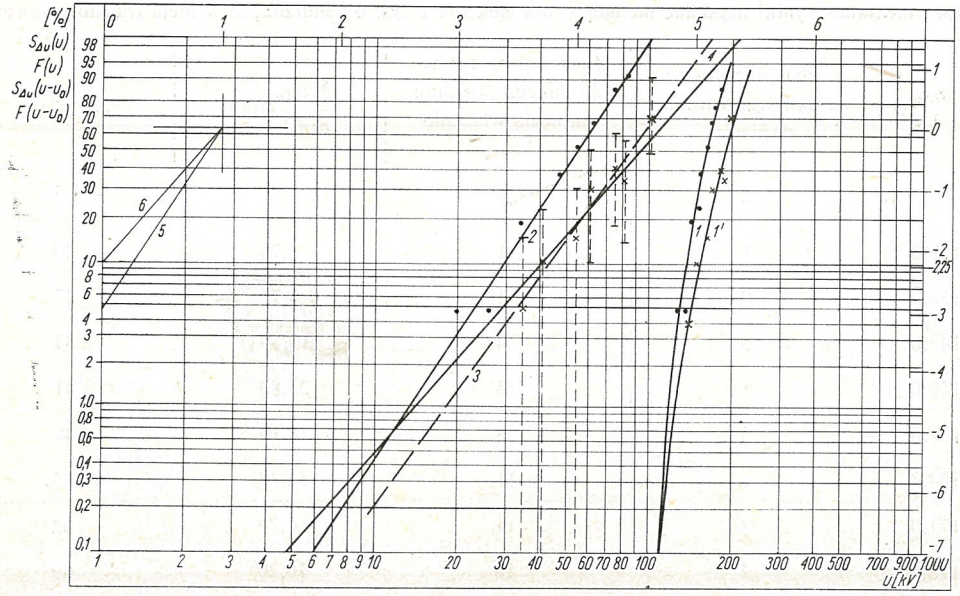
$u_{i\Delta u}$ kV	Liczba przeskoków na danym poziomie napięcia	Liczba przeskoków do danego poziomu napięcia włącznie $\Sigma u_{i\Delta u}$	$\frac{\Sigma u_{i\Delta u}}{m+1}100\%$	$u_{i\Delta u} - u_{o\Delta u}$
1	2	3	4	5
129,0	1	1	4,76	20
136,0	0	1	4,76	27
143,0	3	4	19,05	34
150,0	1	5	23,80	41
157,0	3	8	38,10	47
164,0	3	11	52,30	55
171,0	3	14	66,70	62
178,0	2	16	76,20	69
185,0	2	18	85,70	76
192,0	1	19	90,50	83
199,0	1	20	95,20	90

Tok obliczeń jest następujący.

I. W oparciu o dane z tabl. 2 dotyczące metody A, wykreślono na rys. 7 wg ogólnie znanej metody graficznego szacowania parametrów rozkładu Weibulla ([7] str. 246) oszacowanie dystrybuanty napięć przebicia (linia *1'*) $F^*(u_i)$, z której uzyskano oszacowanie $u_o \cong 109$ kV. Tworząc wyrażenia $u_i - u_o$ oszacowano dystrybuantę $F^*(u_i - u_o)$ (linia *3*).



Rys. 6. Wymiary elektrod badanych w przykładzie 4.2



Rys. 7. Wyniki badań i obliczeń do przykładu 4.2

1 — oszacowanie dystrybuanty pomocniczej $S^*_{\Delta u}(u i_{\Delta u})$ na podstawie wyników uzyskanych metodą C, *2* — oszacowanie dystrybuanty pomocniczej $S^*_{\Delta u}(u i_{\Delta u} - u_{o\Delta u})$ na podstawie wyników uzyskanych metodą C, *1'* — oszacowanie dystrybuanty napięć przebicia $F^*(u_i)$ na podstawie wyników uzyskanych metodą A, *3* — oszacowanie dystrybuanty napięć przebicia $F^*(u_i - u_o)$ na podstawie wyników uzyskanych metodą A, *4* — dystrybuanta obliczona na podstawie wyznaczonych parametrów dystrybuanty pomocniczej *2*, *5*, *6* — graficzne oszacowanie parametrów kształtu odpowiednio dla dystrybuanty *2* i *4*

Dla poszczególnych serii pomiarowych wykonanych metodą A naniesiono przedziały ufności obliczone konwencjonalną metodą [12] dla poziomu ufności 95%.

II. W oparciu o dane z tabl. 3 dotyczące metody C, wykreślono na rys. 7 oszacowanie pomocniczej dystrybuanty napięć przebicia $S^*_{\Delta u}(u_{i\Delta u})$ (linia *1*), dla której uzyskano oszacowanie $u_{o\Delta u} \cong 109$ kV. Tworząc wyrażenia $u_{i\Delta u} - u_{o\Delta u}$ oszacowano pomocniczą dystrybuantę $S^*_{\Delta u}(u_{i\Delta u} - u_{o\Delta u})$ (linia *2*). Z krzywej *2* odczytano oszacowanie jej parametrów $k' = 3{,}05$ (pomocnicza linia *5*); $u_{1\Delta u} - u_{o\Delta u} = 62$ kV. Standaryzowany krok napięciowy ma wartość

$$\frac{\Delta u}{u_{1\Delta u} - u_{o\Delta u}} = \frac{7}{62} = 0{,}113.$$

III. Posługując się rys. 4, który ma charakter wykresu uniwersalnego dla $k' = 3{,}05$ i $\frac{\Delta u}{u_{1\Delta u} - u_{o\Delta u}} = 0{,}113$, odczytano $k = 2{,}25$. Następnie posługując się rysunkiem 2 odczytano $t_1 = 0{,}57$. Stad wg wzoru (22):

$$u_1 - u_o = \frac{u_{1\Delta u} - u_{o\Delta u}}{t_1} = \frac{62}{0{,}57} = 109 \text{ kV}.$$

Obliczony w ten sposób jeden punkt dystrybuanty napięć przebicia oraz jej nachylenie k (pomocnicza linia *6*) wykorzystano do wykreślenia tej dystrybuanty (linia *4*).

Jak wynika z przedstawionych wykresów, obliczona dystrybuanta *4* (rys. 7) w całym zakresie leży w granicach 95% przedziałów ufności uzyskanych dla poszczególnych serii pomiarowych wykonanych metodą A. Stąd wniosek, iż nie można odrzucić hipotezy, że uzyskane przeliczenie wyników uzyskanych metodą C (linia *4* — rys. 7) jest oszacowaniem dystrybuanty napięć przebicia.

5. WNIOSKI

1. Wykazano, że proponowana przez autorów drezdeńskich [1, 2, 6, 11] metoda wyznaczania dystrybuanty napięć przebicia (przeskoku), nazwana w niniejszym opracowaniu metodą C, może być zaadaptowana do przekształcania dystrybuant napięć przebicia izolacji nieregenerującej się w założeniu, że rozkłady prawdopodobieństwa napięć przebicia są rozkładami Weibulla.

2. Z przeliczonych tytułem próby przykładów wynika, iż proponowana technika obróbki statystycznej wykorzystująca ogólnie ważne wykresy z rys. 2, 3, 4 jest stosunkowo prosta i niezbyt pracochłonna.

3. Stosowanie metody C do badania wytrzymałości udarowej izolacji nieregenerującej się wraz z założeniem, że rozkłady prawdopodobieństwa napięć przebicia tej izolacji są rozkładami Weibulla rokuje, zdaniem autora, nadzieję na uzyskanie co najmniej równorzędnych wyników w stosunku do konwencjonalnej metody A, przy znacznie zmniejszonej liczbie modeli i mniejszym nakładzie prac laboratoryjnych .

LITERATURA

1. A. Hochrainer, *Verhaltensfunktionen und Summenhäufigkeitskurven*, ETZ-A, 90 (1969), 2, s. 25—28.
2. H. Ebersberger, W. Hauschild, K.H. Förster, *Statistische Verfahren zur Bestimmung. der Durschlagwahrscheinlichkeit von Isolierstrecken*, Wiss. Z. Elektrotechn., Leipzig, (1971), 2/3, s. 117—132.
3. T. H. Sie, O. F. Wohlfahrt, *Contribution to the measurement of the impulse withstand voltage of oil-paper insulation systems*, IEEE Trans. on PAS-88, No 6, June 1969.
4. K. F. Stiepańczuk, *K woprosu ob impulsnych ispytanijach obrazcow izolacji*, Energietika — Izw. Wyższ. Uczebn. Zaw., Nr 11, 1972.
5. CIGRE 12-72 (WG03) 0,8, *Criteria for the determination of the dielectric test procedures for power transformers* — 1972.
6. W. Hauschild, B. Tschacher, H. Günter, *Über die Ermittlung repräsentativer Verteilungsfunktionen der Durschlagspannung*, Elektrie (1973), Nr 6.
7. S. Firkowicz, *Statystyczne badanie wyrobów*, WNT, Warszawa 1970.
8. PN-58/N-01051, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna — Terminy, określenia i symbole.*
9. PN-70/E-04067, *Próby napięciem łączeniowym.*
10. B. Paderta, *Stanoveni výdržnych napěti pomoci modifikované metody „nahoru-dolů"*, Elektrotechn. Obz., 62 (1973), čis 5.
11. V. Tetzner, *Bestimmung einer für Isolieranordnungen zweckmässige 50% Durchschlagstoss-Spannung*, Arch. Elektrotechn., 44 (1958), 1, 52—56.
12. G. N. Aleksandrow, W. L. Iwanow, W. E. Kizewietow, *Elektriczeskaja procznost, narużonnoj wysokowoltnoj izolacji*, Energia, Leningrad 1969.

F. MOSIŃSKI

STATISTIC ELABORATION OF THE RESULTS FOR THE IMPULSE STRENGTH MEASUREMENTS OF THE INSULATION

Summary

The paper deals with the testing of insulation structures by means of lightning surges. The procedure applied consists in raising the crest value of the surge step by step up to the following the above mentioned procedure form the probability estimation function that is to be transformed into the breakdown voltage distribution function which really characterizes the properties of insulation system. The authors of [2] accomplished the transformation on the basis of the Gauss distribution but, as is proved in this paper, the method of transformation may be extended to the Weibull distribution, which is often more correct and more useful.

The results obtained using both methods of transformation were compared and the method given was examined experimentally.

F. MOSIŃSKI

EMPRISE STATISTIQUE DES RÉSULTATS DES MESURES DE LA RÉSISTANCE AUX CHOCS DE L'ISOLATION NON RÉGÉNÉRÉE

Résumé

L'article décrit les essais des modèles de l'isolation avec la tension aux chocs en appliquant la méthode des essais des particuliers modèles avec la tension augmentant graduellement jusqu'au percement. Les auteurs [2] donnent la méthode de la transformation des résultats expérimentaux obtenus de cette mranieè

pour le distribuant de la tension de percement recherchée, qui décrit effectivement les propriétés du système d'isolation et qui est basée sur la répartition normale. L'étude élargit cette méthode sur la répartition Weibull qui s'avère plus exacte et plus facile à employer.

On a comparé les résultats des essais élaborés à l'aide de cette méthode avec les résultats obtenus pour la répartition normale [2] ainsi qu'avec les résultats expérimentaux.

F. MOSIŃSKI

BEMESSUNG VON STOßFESTIGKEIT EINER SICH NICHT REGENERIERENDEN ISOLIERUNG

Zusammenfassung

Der Artikel betrifft die Untersuchung von Isolationsmodellen unter Anwendung von Stoßspannungen. Einzelne Modelle werden beim anwachsenden Spannungsgrad bis zum Isolationsdurchschlag geprüft. Die Verfasser [2] geben eine Transformationsmethode an der auf diese Weise gewonnenen Versuchsergebnisse für die gesuchte Spannungsdistribuente des Durchschlags, die die wahren Eigenschaften des Isolierungssystemes beschreiben, das sich auf einer Normalverteilung stützt. In der Arbeit wird die Anwendung dieser Methode auf die Weibull-Verteilung ausgedehnt, die oft richtiger und bequemer in der Anwendung ist.

Zum Schluß wurden die mit obiger Methode bearbeiteten Ergebnisse mit den auf Grund der Normalverteilung [2] gewonnenen Ergebnisse sowie den Versuchsergebnissen verglichen.

Ф. МОСИНЬСКИ

О СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ УДАРНОЙ ПРОЧНОСТИ ИЗОЛЯЦИИ

Резюме

В статье обсуждается вопрос импульсных испытаний моделей изоляции при использовании метода испытания отдельных моделей растущим до пробоя напряжением. Авторы [2] представили метод трансформации полученных этим путем данных к искомому распределению напряжений пробоя, базирующий на нормальном распределении. Работа обобщает этот метод на распределение Вейбулла.

Сопоставлены опытные данные обработанные представленным методом с данными обработанными методом нормального распределения [2] а также с данными эксперимента.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 3, ss. 727—748

621.3-523.8

Analiza tranzystorowego układu napędowego o sterowaniu impulsowym w stanie quasiustalonym

EUGENIUSZ ZAWALICH (GDAŃSK)

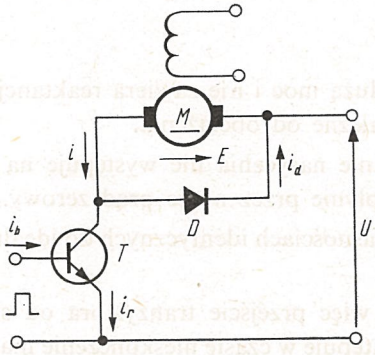
Instytut Elektrotechniki Morskiej i Przemysłowej Politechniki Gdańskiej

Otrzymano 25.4.1975

W pracy przedstawiono analizę pracy układu napędowego sterowanego impulsowo i złożonego z silnika obcowzbudzonego prądu stałego, tranzystora mocy pracującego w stanie kluczowym oraz diody rozładowczej. Podano metodę wyznaczania statycznych charakterystyk mechanicznych silnika w stanie ciągłego i nieciągłego przepływu prądu twornikowego oraz metodę określenia granicy między tymi stanami. Wyprowadzone wzory określające obciążenie prądowe elementów półprzewodnikowych umożliwiają ich prawidłowy dobór w analizowanym układzie i wskazują na użyteczne wykorzystanie nagromadzonej energii magnetycznej w uzwojeniu twornika podczas pracy impulsowej układu.

1. WSTĘP

Tranzystor mocy, wprowadzony do obwodu roboczego w układach napędowych, może pracować w stanie aktywnym lub w stanie kluczowym. Z uwagi na możliwość zbudowania układu o większej mocy, ważniejsze znaczenie praktyczne ma przypadek pracy kluczowej.



Rys. 1. Schemat nierewersyjnego tranzystorowego układu napędowego sterowanego impulsowo

Przedmiotem analizy jest nierewersyjny prosty układ napędowy, którego schemat ideowy przedstawiono na rys. 1.

Silnik obcowzbudny prądu stałego połączony w szereg z tranzystorem mocy zasilany

jest ze źródła napięcia stałego. Dzięki wprowadzeniu odpowiedniego impulsu sterującego do obwodu bazy zostaje wymuszona praca kluczowa tranzystora. W stanie nasycenia tranzystora pełna wartość napięcia zasilania pojawia się na zaciskach silnika, powodując wykładnicze narastanie prądu twornikowego. Stan ten równoważny jest bezpośredniemu włączeniu silnika do źródła napięcia. Zanik impulsu sterującego w obwodzie bazy wywołuje w tranzystorze stan blokowania, który odpowiada odłączeniu silnika od źródła napięcia.

W wyniku nagłego zmniejszenia prądu twornikowego generuje się w uzwojeniu siła elektromotoryczna samoindukcji przeciwna co do zwrotu i przewyższająca pod względem wartości siłę elektromotoryczną rotacji, wywołując przepływ prądu przez diodę rozładowczą. Proces ten przebiega dzięki nagromadzonej energii magnetycznej w uzwojeniu twornika. Część tej energii zamienia się na użyteczną pracę mechaniczną, a pozostała część ulega rozproszeniu w postaci ciepła.

Jeżeli prąd płynący przez diodę nie osiągnie wartości zerowej w chwili pojawienia się następnego impulsu sterującego, to obserwuje się ciągły przepływ prądu twornikowego. Stan, w którym wartość prądu twornikowego na początku i na końcu okresu sygnału impulsowego jest równa, nazywa się stanem quasiustalonym.

Przepływ prądu przez diodę rozładowczą może zaniknąć przed pojawieniem się nowego impulsu. Obserwuje się wtedy stan nieciągłego przepływu prądu twornikowego. Własności silnika w tym stanie różnią się w sposób istotny od własności w stanie ciągłego przepływu.

W szczególnym przypadku prąd płynący przez diodę osiąga wartość zerową w chwili pojawienia się następnego impulsu sterującego. Jest to stan graniczny. Znajomość parametrów tego stanu okazuje się konieczna do wyznaczenia charakterystyki regulacyjnej oraz charakterystyki mechanicznej silnika.

Płynna regulacja prędkości kątowej w przedstawionym układzie możliwa jest za pomocą zmiany czasu trwania impulsu, czyli zmiany współczynnika wypełnienia impulsu prostokątnego. Zmiana częstotliwości impulsu w stanie ciągłego przepływu prądu twornikowego nie zapewnia szerokiej regulacji prędkości kątowej silnika i z tej przyczyny metoda ta wyłączona jest z analizy.

Analiza przedstawionego na rys. 1 układu napędowego w stanie quasiustalonym została przeprowadzona przy następujących założeniach:

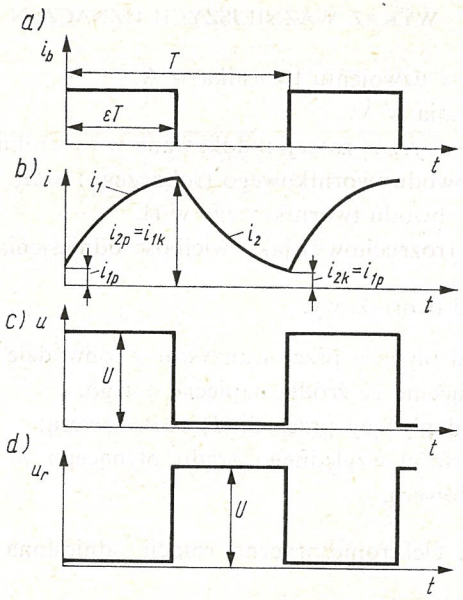
1. Strumień wzbudzenia w silniku jest stały.
2. Źródło napięcia zasilającego ma dostateczną dużą moc i nie zawiera reaktancji indukcyjnej. Napięcie zasilania jest stałe i niezależne od obciążenia.
3. Tranzystor jest idealnym kluczem, tzn. w stanie nasycenia nie występuje na nim spadek napięcia, a w stanie blokowania nie płynie przez niego prąd zerowy.
4. Dioda wyładowcza jest idealnym zaworem o własnościach identycznych do idealnego klucza.
5. Impulsy sterujące są idealnie prostokątne, a więc przejście tranzystora od stanu nasycenia do stanu blokowania i odwrotnie następuje w czasie nieskończenie małym.
6. Częstotliwość powtarzania impulsów jest dostatecznie duża, aby słuszne było założenie, że takie wielkości, jak prędkość kątowa, siła elektromotoryczna rotacji, moment elektromagnetyczny silnika miały w czasie trwania jednego cyklu stałą wartoś średnią.

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

I — prąd płynący w uzwojeniu twornika w A,
U — napięcie zasilania w V,
E — siła elektromotoryczna rotacji indukowana w tworniku w V,
R — rezystancja obwodu twornikowego (roboczego) w Ω,
L — indukcyjność obwodu twornikowego w H,
I_z — prąd zwarcia (rozruchowy) jako wielkość odniesienia,
$i = \frac{I}{I_z}$ — względny prąd twornikowy,
i_r — względny prąd płynący przez tranzystor w obwodzie kolektor-emiter, równy prądowi płynącemu ze źródła napięcia stałego,
i_d — względny prąd płynący przez diodę rozładowczą,
$i_{śr}$, $i_{rśr}$, $i_{dśr}$ — średnie wartości względnego prądu płynącego przez twornik, tranzystor i diodę rozładowczą,
$\alpha = \frac{E}{U}$ — względna siła elektromotoryczna rotacji odniesiona do napięcia zasilania,
$T_s = \frac{L}{R}$ — stała czasowa obwodu twornikowego w s,
T — okres periodycznego impulsu prostokątnego,
$\varepsilon = \frac{t_1}{T}$ — względny czas trwania impulsu, czyli współczynnik wypełnienia impulsu,
ω_0, ω — prędkość kątowa wirnika w rad/s w idealnym stanie jałowym i podczas obciążenia,
$v = \frac{\omega}{\omega_0}$ — względna prędkość kątowa wirnika,
$\tau = \frac{t_p}{T}$ — względny czas przepływu prądu przez uzwojenie twornika,
$\mu = \frac{M}{M_z}$ — względny moment obrotowy silnika odniesiony do momentu w stanie rozruchu (zwarcia),
$\beta = \frac{T}{T_s}$ — stosunek okresu impulsu do stałej czasowej obwodu twornikowego (względny okres impulsowania).

2. STAN CIĄGŁEGO PRZEPŁYWU PRĄDU TWORNIKOWEGO

Przyjmuje się, że w układzie na rys. 1 napięcie na tworniku ma wymuszenie czasowe zgodne z wykresem na rys. 2c, zaś prąd płynący przez uzwojenie twornika zmienia się w czasie według wykresu na rys. 2b. Twornik wiruje z prędkością kątową ω powodując, przy stałym strumieniu wzbudzenia, generację siły elektromotorycznej rotacji E.



Rys. 2. Czasowe przebiegi prądu i napięcia w tranzystorowym układzie napędowym w stanie ciągłego przepływu prądu twornikowego

a) impulsy sterujące w obwodzie bazy tranzystora mocy, b) prąd płynący przez uzwojenie twornika, c) napięcie na zaciskach silnika (twornika), d) napięcie na tranzystorze między kolektorem i emiterem

W czasie trwania impulsu napięcia na tworniku słuszny jest następujący bilans napięciowy

$$RI_1 + L\frac{dI_1}{dt} = U - E. \tag{1}$$

W przerwie beznapięciowej obwód twornika zwierany jest przez diodę rozładowczą dzięki działaniu siły elektromotorycznej samoindukcji. Dla zwartego obwodu bilans napięciowy jest następujący:

$$RI_2 + L\frac{dI_2}{dt} = -E. \tag{2}$$

Wprowadza się jednostki względne

$$\alpha = \frac{E}{U}, \quad i_1 = \frac{I_1}{I_z}, \quad i_2 = \frac{I_2}{I_z}, \tag{3}$$

oznaczenia

$$I_z = \frac{U}{R}, \quad T_s = \frac{L}{R}, \quad (T_{s1} = T_{s2}) \tag{4}$$

i przekształca się równania (1) i (2) do postaci

$$T_s\frac{di_1}{dt} + i_1 = 1 - \alpha, \tag{5}$$

$$T_s\frac{di_2}{dt} + i_2 = -\alpha. \tag{6}$$

Po sformułowaniu warunków brzegowych dla stanu quasiustalonego (rys. 2b)

$$\begin{aligned} &\text{dla } t = 0 \quad \text{zachodzi } i_1 = i_{1p} = i_{2k}, \\ &\text{dla } t = \varepsilon T \text{ zachodzi } i_1 = i_{1k} = i_{2p}, \end{aligned} \tag{7}$$

znajduje się rozwiązanie równań (5) i (6)

$$i_1 = (1-\alpha)\left(1-e^{-\frac{t}{T_s}}\right)+i_{1p}e^{-\frac{t}{T_s}}, \tag{8}$$

$$i_2 = -\alpha\left(1-e^{-\frac{t-\varepsilon T}{T_s}}\right)+i_{2p}e^{-\frac{t-\varepsilon T}{T_s}}. \tag{9}$$

Kładąc w równaniu (8) $t = \varepsilon T$, zaś w równaniu (9) $t = T$ i wprowadzając oznaczenie względnego okresu impulsowania

$$\beta = \frac{T}{T_s} = \frac{1}{f \cdot T_s}, \tag{10}$$

wyznacza się końcowe wartości prądów w rozważanych przedziałach czasowych

$$i_{1k} = (1-\alpha)(1-e^{-\beta\varepsilon})+i_{1p}e^{-\beta\varepsilon}, \tag{11}$$

$$i_{2k} = -\alpha[1-e^{-\beta(1-\varepsilon)}]+i_{2p}e^{-\beta(1-\varepsilon)}. \tag{12}$$

Układ równań (11), (12) przy uwzględnieniu warunków (7) i po przeprowadzeniu odpowiednich działań pozwala wyznaczyć wartość prądu twornikowego na początku i na końcu impulsu napięciowego

$$i_{1p} = \frac{e^{\beta\varepsilon}-1}{e^{\beta}-1}, \tag{13}$$

$$i_{1k} = \frac{e^{\beta\varepsilon}-1}{e^{\beta}-1} \cdot \frac{e^{\beta}}{e^{\varepsilon\beta}} - \alpha. \tag{14}$$

Po wprowadzeniu zależności (13) i (14) do równań (8) i (9) i dokonaniu przekształceń dochodzi się do pełnego rozwiązania równań (5) i (6):

$$i_1 = (1-\alpha)+\left(\frac{e^{\beta\varepsilon}-1}{e^{\beta}-1}-1\right)e^{-\frac{t}{T_s}}, \tag{15}$$

$$i_2 = -\alpha+\left(\frac{e^{\beta\varepsilon}-1}{e^{\beta}-1} \cdot \frac{e^{\beta}}{e^{\varepsilon\beta}}\right)e^{-\frac{t-\varepsilon T}{T_s}}. \tag{16}$$

Równanie (15) ma sens fizyczny dla $0 < t < \varepsilon T$, zaś równanie (16) dla $\varepsilon T < t < T$.

Prąd i_1 zawiera składową stałą oraz składową zmienną narastającą wykładniczo w czasie. Taki prąd płynie przez uzwojenie twornika i przez nasycony tranzystor. Jest to jednocześnie prąd płynący ze źródła napięcia. Prąd i_2 również zawiera składową stałą oraz składową zmienną malejącą wykładniczo w czasie. Taki prąd płynie po zaniku impulsu przez uzwojenie twornika i przez diodę rozładowczą. Przyjmując oznaczenia z rys. 1 można zapisać

$$i_1 = i_r \quad \text{oraz} \quad i_2 = i_d.$$

Zmiana indeksów ma na celu podkreślenie zmiany struktury elektrycznego obwodu roboczego w czasie jednego okresu impulsowania. Przyjęcie równej wartości stałej czasowej

dla obu obwodów jest na tyle słuszne, na ile różnica rezystancji dynamicznej diody i tranzystora w stanie nasycenia jest względnie mała w stosunku do całkowitej rezystancji twornika, a źródło zasilania odpowiada założeniom sformułowanym we wstępie.

Podstawą do określenia charakterystycznych parametrów poszczególnych elementów układu jest średnia wartość prądu i napięcia.

Średnia wartość względnego prądu twornikowego jest sumą średnich wartości prądu płynącego przez tranzystor oraz prądu płynącego przez diodę rozładowczą

$$i_{śr} = \frac{1}{T}\int_0^{\varepsilon T} i_1\,dt + \frac{1}{T}\int_{\varepsilon T}^{T} i_2\,dt = i_{rśr} + i_{dśr}. \tag{17}$$

Średni względny prąd tranzystora oblicza się z pierwszej całki wyrażenia (17). Wprowadzając pod znak całki równanie (15)

$$i_{rśr} = \frac{1-\alpha}{T}\int_0^{\varepsilon T} dt + \frac{1}{T}\left(\frac{e^{\beta\varepsilon}-1}{e^{\beta}-1} - 1\right)\int_0^{\varepsilon T} e^{-\frac{t}{T_s}}\,dt, \tag{18}$$

wykonując działanie oraz odpowiednie przekształcenie uzyskuje się wynik

$$i_{rśr} = (1-\alpha)\varepsilon - \xi, \tag{19}$$

gdzie

$$\xi = \frac{1}{\beta}\cdot\frac{e^{\beta\varepsilon}-1}{e^{\beta}-1}\left(e^{\beta(1-\varepsilon)}-1\right). \tag{20}$$

Analogicznie wprowadzając równanie (16) pod znak drugiej całki wyrażenia (17)

$$i_{dśr} = \frac{-\alpha}{T}\int_{\varepsilon T}^{T} dt + \frac{1}{T}\cdot\frac{e^{\beta\varepsilon}-1}{e^{\beta}-1}\cdot\frac{e^{\beta}}{e^{\varepsilon\beta}}\int_{\varepsilon T}^{T} e^{-\frac{t-\varepsilon T}{T_s}}\,dt, \tag{21}$$

po wykonaniu odpowiednich działań uzyskuje się wzór na średnią wartość względnego prądu płynącego przez diodę rozładowczą

$$i_{dśr} = (\varepsilon-\alpha) - \varepsilon(1-\alpha) + \xi. \tag{22}$$

Średni prąd względny płynący przez uzwojenie twornika zgodnie z równaniem (17) przy wykorzystaniu (19) i (22) wyraża się wzorem

$$i_{śr} = \varepsilon - \alpha. \tag{23}$$

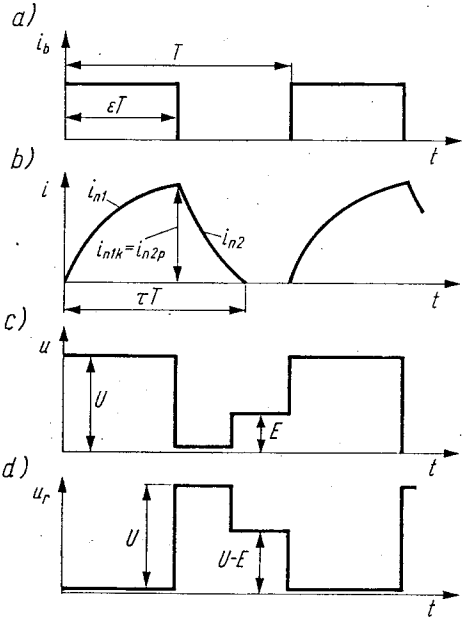
Prąd ten nie zależy ani od częstotliwości powtarzania impulsów, ani od stałej czasowej uzwojenia twornika, lecz tylko od względnego czasu trwania impulsu i względnej siły elektromotorycznej.

Średnia względna wartość napięcia zasilającego na zaciskach twornika zgodnie z wykresem na rys. 2c wynosi

$$u_{śr} = \frac{U_{śr}}{U} = \frac{1}{T}\int_0^{\varepsilon T} dt = \varepsilon. \tag{24}$$

3. STAN NIECIĄGŁEGO PRZEPŁYWU PRĄDU TWORNIKOWEGO

Przy niewielkich obciążeniach momentem statycznym na wale silnika pracującego w układzie podanym na rys. 1 obserwuje się nieciągły przepływ prądu w uzwojeniu twornika zgodnie z wykresem na rys. 3b. W chwili pojawienia się kolejnego impulsu napięcio-



Rys. 3. Czasowe przebiegi prądu i napięcia w tranzystorowym układzie napędowym w stanie nieciągłego przepływu prądu twornikowego

a) impulsy sterujące w obwodzie bazy tranzystora mocy, b) prąd płynący przez uzwojenie twornika, c) napięcie na zaciskach silnika (twornika), d) napięcie na tranzystorze między kolektorem i emiterem

wego prąd twornika ma wartość zerową. Nowy warunek początkowy (dla $t = 0$ zachodzi $i_{1p} = 0$) upraszcza równanie (8) do postaci

$$i_{n1} = (1-\alpha)\left(1-e^{-\frac{t}{T_s}}\right), \tag{25}$$

zaś równanie (11) do postaci

$$i_{n1k} = (1-\alpha)(1-e^{-\beta\varepsilon}). \tag{26}$$

Biorąc pod uwagę warunek brzegowy $i_{n1k} = i_{n2p}$ i podstawiając w równaniu (9) na miejsce i_{2p} wyrażenie (26), uzyskuje się po szeregu przekształceń równanie dla prądu płynącego przez uzwojenie twornika po zaniku impulsu napięciowego

$$i_{n2} = -\alpha+\left[1-(1-\alpha)e^{-\beta\varepsilon}\right]e^{-\frac{t-\varepsilon T}{T_s}}. \tag{27}$$

Prąd ten osiąga wartość zerową w chwili $t = \tau T$ (rys. 3b)

$$0 = -\alpha+\left[1-(1-\alpha)e^{-\beta\varepsilon}\right]e^{-\beta(\tau-\varepsilon)}, \tag{28}$$

przy czym $\varepsilon \leqslant \tau \leqslant 1$.

Z równania (28) można wyznaczyć względny czas przepływu prądu przez uzwojenie twornika w przedziale jednego okresu

$$\tau = \frac{1}{\beta} \cdot \ln\left(\frac{e^{\beta\varepsilon}-1}{\alpha}+1\right). \tag{29}$$

W przypadku stałej wartości siły elektromotorycznej rotacji (α = const) równanie (29) pozwala w prosty sposób wyznaczyć względny czas przepływu prądu. Jednakże w analizowanym układzie napędowym z silnikiem prądu stałego przypadek taki nie może być brany pod uwagę z przyczyn podanych w dalszym toku rozważań.

Średnia wartość względna prądu twornikowego w stanie nieciągłego przepływu określona wzorem

$$i_{nśr} = \frac{1}{T}\int_0^{\varepsilon T} i_{n1}\cdot dt + \frac{1}{T}\int_{\varepsilon T}^{\tau T} i_{n2}\cdot dt \tag{30}$$

zawiera dwie składowe, z których pierwsza

$$i_{nrśr} = \frac{1-\alpha}{T}\int_0^{\varepsilon T} dt - \frac{1-\alpha}{T}\int_0^{\varepsilon T} e^{-\frac{t}{T_s}}\,dt \tag{31}$$

jest średnim względnym prądem płynącym ze źródła a jednocześnie przez tranzystor. Druga składowa

$$i_{ndśr} = \frac{-\alpha}{T}\int_{\varepsilon T}^{\tau T} dt + [1-(1-\alpha)e^{-\beta\varepsilon}]\int_{\varepsilon T}^{\tau T} e^{-\frac{t-\varepsilon T}{T_s}}\,dt \tag{32}$$

jest średnim względnym prądem płynącym przez diodę rozładowczą. Obliczenie całki (31) prowadzi do wzoru

$$i_{nrśr} = (1-\alpha)\varepsilon - \frac{1-\alpha}{\beta}(1-e^{-\beta\varepsilon}), \tag{33}$$

zaś po obliczeniu całki (32) i wykonaniu szeregu przekształceń uzyskuje się wzór

$$i_{ndśr} = -\alpha(\tau-\varepsilon) + \frac{1-\alpha}{\beta}(1-e^{-\beta\varepsilon}). \tag{34}$$

Suma średniej wartości prądu płynącego przez tranzystor i prądu płynącego przez diodę równa się średniej wartości prądu twornikowego

$$i_{nśr} = \varepsilon - \alpha\tau. \tag{35}$$

W odróżnieniu od stanu ciągłego przepływu prąd ten jest zależny od częstotliwości powtarzania impulsów oraz od stałej czasowej obwodu roboczego, co wynika ze wzoru (29).

4. CHARAKTERYSTYKA MECHANICZNA SILNIKA

Z uwagi na względnie dużą wartość elektromechanicznej stałej czasowej układów napędowych w porównaniu do stałej czasowej obwodów elektrycznych bierze się pod uwagę tylko wpływ wartości średnich napięcia i prądu na własności statyczne silnika prądu stałego zasilanego impulsami napięciowymi o dostatecznie dużej częstotliwości. Znajduje to swój wyraz w podstawowym równaniu opisującym charakterystykę mechaniczną

$$\omega = \frac{U_{śr} - RI_{śr}}{k\Phi}. \tag{36}$$

Równanie to, po uwzględnieniu wzoru (24), przekształca się do postaci

$$\omega = \frac{\varepsilon U}{k\Phi} - \frac{I_{śr} k\Phi}{I_z k\Phi} \cdot \frac{RI_z}{k\Phi}, \tag{37}$$

a po wprowadzeniu wielkości względnej momentu obrotowego i prędkości kątowej

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \frac{M}{M_z} = \frac{k\Phi I_{śr}}{k\Phi I_z} \\ \nu &= \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \text{gdzie} \quad \omega_0 = \frac{RI_z}{k\Phi} = \frac{U}{k\Phi} \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

upraszcza się do postaci

$$\nu = \varepsilon - \mu. \tag{39}$$

Równanie (39) znane jest w przypadku regulacji prędkości kątowej silnika obcowzbudnego za pomocą zmiany napięcia zasilającego ($U_a = \varepsilon U$).

Z relacji (38) wynika, że w silniku obcowzbudzonym przy stałej wartości strumienia magnetycznego istnieją równości

$$\mu = \frac{I_{śr}}{I_z} = i_{śr}; \quad \nu = \frac{k\Phi\omega}{k\Phi\omega_0} = \frac{E}{U} = \alpha. \tag{40}$$

Wprowadzenie równości (40) do wzoru (23) nadaje mu postać identyczną ze wzorem (39). Oznacza to, że silnik obcowzbudny prądu stałego ma jednakowe charakterystyki mechaniczne i jednakowe własności regulacyjne w przypadku zmiany czasu trwania impulsu napięcia o stałej wartości ($\varepsilon = t_1/T$) oraz w przypadku zmiany wartości napięcia trwającego ciągle ($\varepsilon = U_a/U$) na zaciskach twornika.

Ponieważ równanie (23) obowiązuje dla stanu ciągłego przepływu, przeto charakterystyka mechaniczna (39) określona jest również tylko dla tego stanu.

Równania (40) wprowadzone do wzoru (35) z poprawką ($\mu = i_{nśr}$) przekształcają go w równanie charakterystyki mechanicznej silnika prądu stałego zasilanego impulsowo w stanie nieciągłego przepływu prądu twornikowego

$$\nu = \frac{\varepsilon - \mu}{\tau}. \tag{41}$$

Podobnie wzór (29), określający czas przepływu prądu twornikowego, zostaje zmieniony do postaci

$$\tau = \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{e^{\beta\varepsilon}-1}{\nu}+1\right). \tag{42}$$

Wyznaczanie charakterystyki mechanicznej (39) w stanie ciągłego przepływu dla dowolnej wartości ε nie przedstawia żadnej trudności. Natomiast zadanie wyznaczenia charakterystyki mechanicznej przy nieciągłym przepływie prądu staje się bardziej złożone. W analizowanym układzie moment obrotowy μ oraz czas trwania impulsu ε są niezależnymi wielkościami wymuszającymi, zaś prędkość kątowa jest szukaną odpowiedzią układu na wymuszenie. Tymczasem równania (41) i (42) wyrażają względem prędkości kątowej funkcję uwikłaną, której nie można rozwiązać metodami analitycznymi.

Wydaje się, że metoda wykreślna najszybciej prowadzi do celu, chociaż nie zapewnia dużej dokładności. W tym celu równanie (42) przekształca się do postaci

$$e^{\beta\tau} = \frac{e^{\beta\varepsilon}-1}{\nu} - 1, \tag{43}$$

a następnie po uwzględnieniu zależności (41) do postaci

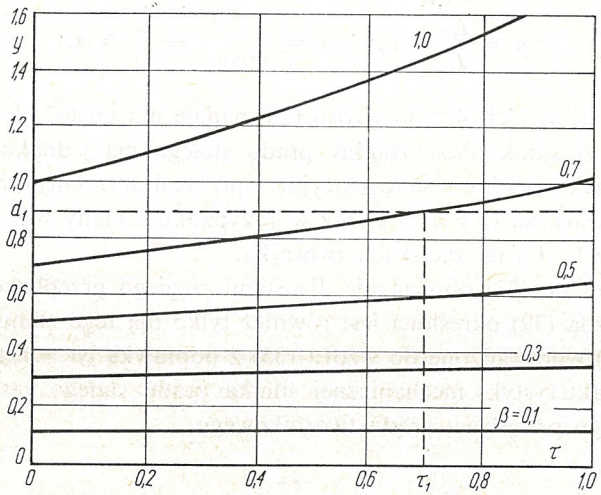
$$\frac{e^{\beta\tau}-1}{\tau} = \frac{e^{\beta\varepsilon}-1}{\varepsilon-\mu}. \tag{44}$$

Lewą stronę równania (44) traktuje się jako funkcję jednej zmiennej

$$y = \frac{e^{\beta\tau}-1}{\tau} = f(\tau),$$

którą można wykreślić dla danej wartości współczynnika β (rys. 4). Dla wybranego wymuszenia (ε_1, μ_1) prawa strona równania (44) ma jednoznacznie określoną wartość

$$d_1 = \frac{e^{\beta\varepsilon_1}-1}{\varepsilon_1-\mu_1},$$



Rys. 4. Graficzne rozwiązanie równania (44)

którą nanosi się na wykres w formie prostej. Punkt przecięcia się z krzywą $y = f(\tau)$ dla danego β wyznacza wartość τ_1, którą należy wstawić do wzoru (41), aby określić jeden punkt na charakterystyce mechanicznej przy wybranych wcześniej wartościach ε_1 oraz μ_1.

Dla wartości $\beta < 0{,}3$ wykres funkcji $y = f(\tau)$ w przedziale $0 < \tau \leqslant 1$ jest zbliżony do prostej o nieznacznym nachyleniu do osi odciętych. Powstają trudności z wyznaczeniem punktu przecięcia z prostą d. Metoda wykreślna staje się mało dokładna. W tym przypadku korzystniej jest zastosować metodę kolejnych przybliżeń przy użyciu suwaka albo nawet maszyny cyfrowej, względnie aproksymować funkcję za pomocą szeregu

$$y = \beta + \frac{\beta^2}{2}\tau + \frac{\beta^3}{6}\tau^2 + \ldots$$

i przeprowadzić rozwiązanie analityczne, którego złożoność zależeć będzie od wyboru liczby kolejnych składników szeregu, z czym wiąże się również stopień dokładności obliczeń.

5. STAN GRANICZNY

Najczęściej wyznacza się charakterystyki mechaniczne silnika zasilanego impulsowo przy stałej wartości współczynnika wypełnienia oraz stałej częstotliwości powtarzania impulsów (β = const). W tych warunkach istnieje graniczna wartość momentu obciążenia μ_g, która dzieli charakterystykę na dwie części. Dla $\mu > \mu_g$ istnieje stan ciągłego przepływu, zaś dla $\mu < \mu_g$ stan nieciągłego przepływu prądu twornikowego. Każdej wartości granicznej momentu odpowiada wartość graniczna prędkości kątowej ν_g. Zbiór tych wartości dla ustalonego ε tworzy stan graniczny układu. Zatem określenie tego stanu wiąże się ściśle z wyznaczeniem charakterystyki mechanicznej silnika prądu stałego zasilanego impulsowo.

Z wcześniejszej analizy wynika, że stan graniczny wystąpi wtedy, gdy prąd i_{n2} płynący przez diodę (wzór 27) osiągnie wartość zerową w chwili $t = T$. Wprowadzając warunek $\tau = 1$ do równania (43), otrzymuje się prędkość graniczną ze wzoru

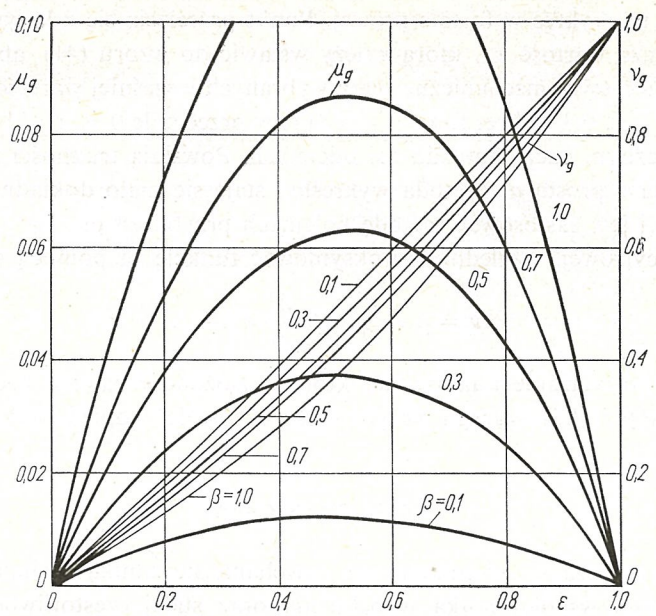
$$\nu_g = \frac{e^{\beta\varepsilon} - 1}{e^{\beta} - 1}, \tag{45}$$

który jednocześnie musi spełniać zależność (39). Zatem moment graniczny określony jest wzorem

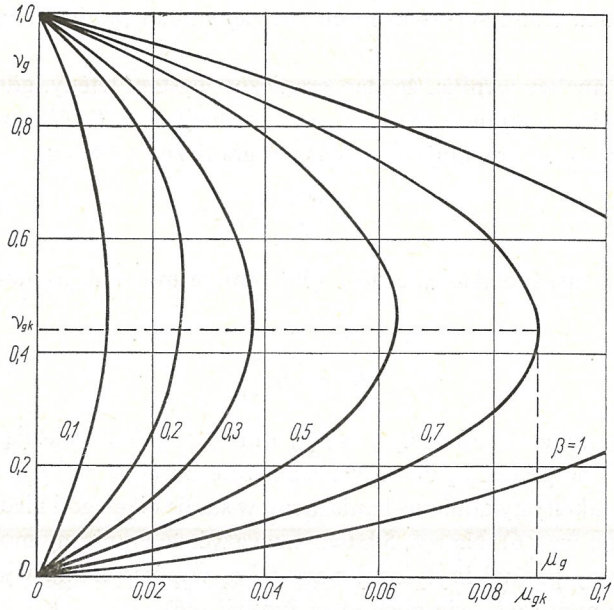
$$\mu_g = \varepsilon - \frac{e^{\beta\varepsilon} - 1}{e^{\beta} - 1}. \tag{46}$$

Na rys. 5 wykreślono zależności $\nu_g = f(\varepsilon)$ oraz $\mu_g = f(\varepsilon)$ traktując współczynnik β jako parametr. Są one podstawą do wykreślenia zależności $\nu_g = f(\mu_g)$, która uwidacznia granicę między charakterystykami mechanicznymi w stanie ciągłego i nieciągłego przepływu prądu twornikowego (rys. 6). Na rys. 5 łatwo zauważyć, że graniczny moment osiąga maksymalną wartość przy pewnej krytycznej wartości ε_k współczynnika wypełnienia. W celu wyznaczenia ekstremum szuka się pochodnej funkcji (46)

$$\frac{d\mu_g}{d\varepsilon} = 1 - \beta \cdot \frac{e^{\varepsilon\beta}}{e^{\beta} - 1} = 0,$$



Rys. 5. Zależność granicznego momentu względnego μ_g oraz granicznej prędkości względnej ν_g w funkcji współczynnika wypełnienia impulsu (względnego czasu trwania impulsu) dla różnych wartości parametru β



Rys. 6. Granice dzielące charakterystyki mechaniczne na część liniową odpowiadającą stanowi ciągłego przepływu i na część nieliniową odpowiadającą stanowi nieciągłego przepływu prądu twornikowego

skąd

$$\varepsilon = \varepsilon_k = \frac{1}{\beta} \ln \frac{e^{\beta}-1}{\beta}. \tag{47}$$

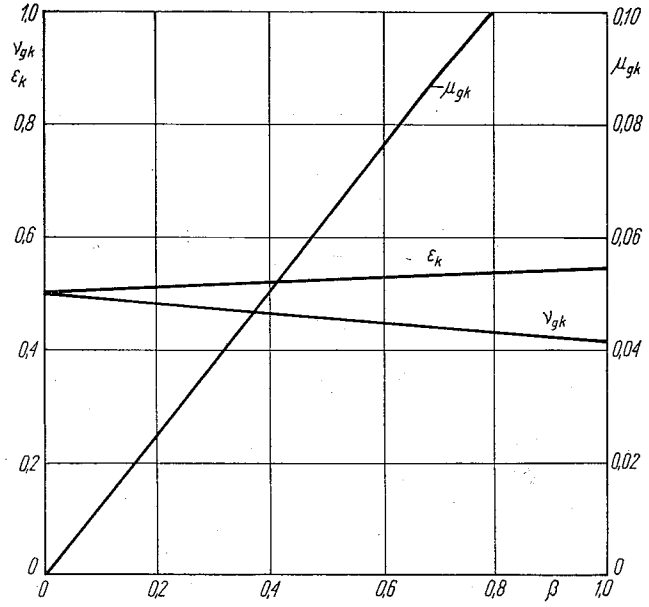
Tej wartości odpowiada krytyczna wartość prędkości granicznej

$$\nu_{gk} = \frac{e^{\beta}-1-\beta}{\beta(e^{\beta}-1)} \tag{48}$$

oraz krytyczna wartość momentu granicznego

$$\mu_{gk} = \frac{1}{\beta}\left[\ln \frac{e^{\beta}-1}{\beta} - \frac{e^{\beta}-1-\beta}{e^{\beta}-1}\right]. \tag{49}$$

Wielkości krytyczne są funkcjami tylko jednej zmiennej β, która charakteryzuje własności obwodu twornikowego i źródła impulsów. Przebieg powyższych funkcji przedstawiono na rys. 7. Z wykresów wynika, że wartość prędkości krytycznej zmienia się w niewielkich



Rys. 7. Zależność wielkości krytycznych od zmiennego parametru β

granicach $0{,}4 < \nu_{gk} < 0{,}5$, natomiast moment krytyczny prawie liniowo zależy od β. Zwiększenie częstotliwości powtarzania impulsów oznacza zmniejszenie wartości β (wzór 10) i jednoczesne zmniejszenie krytycznej wartości momentu. Przy odpowiednim doborze częstotliwości moment krytyczny może mieć wartość mniejszą od wartości momentu obciążenia w stanie jałowym. W takich warunkach zapewniony jest stan ciągłego przepływu prądu twornikowego w całym przedziale obciążenia.

W praktyce często stawia się problem w ten sposób, że dla ustalonej częstotliwości powtarzania impulsów (β = const) i założonej wartości momentu statycznego na wale silnika ($\mu_g = \mu_s$) szuka się wartości granicznej prędkości. Z wykresów na rys. 5 wynika, że

należy oczekiwać w rozwiązaniu dwóch wartości ε oraz v_g. W celu wyznaczenia ich przekształca się równanie (46) do postaci

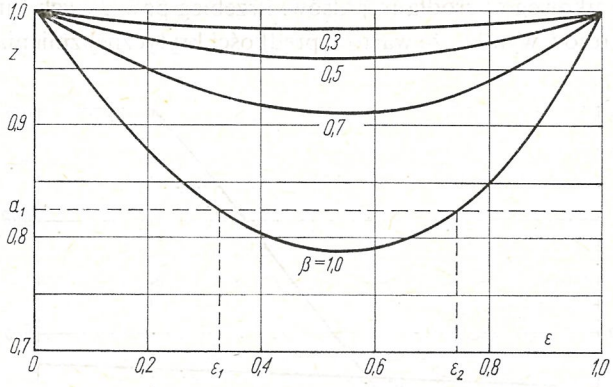
$$e^{\beta\varepsilon}-\varepsilon(e^{\beta}-1) = 1-\mu_s(e^{\beta}-1), \tag{50}$$

która dla zmiennej ε jest funkcją uwikłaną, a więc niemożliwą do rozwiązania na drodze analitycznej. Można tu zastosować metodę wykreślną, którą wykorzystano do rozwiązania równania (44). Lewą stronę równania (50) traktuje się jako funkcję jednej zmiennej ε

$$z = e^{\beta\varepsilon}-\varepsilon(e^{\beta}-1) = f(\varepsilon),$$

którą można wykreślić przy założeniu $\beta = \text{const}$ (rys. 8). Dla wybranego momentu μ_s prawa strona równania (50) przyjmuje określoną wartość

$$a_1 = 1-\mu_s(e^{\beta}-1),$$



Rys. 8. Graficzne rozwiązanie równania (50)

która na rys. 8 przedstawiona jest jako prosta. Punkty przecięcia się prostej z krzywą $z = f(\varepsilon)$ dla danej wartości β wyznaczają dwie wartości ε_1 oraz ε_2, które stanowią rozwiązanie równania (50). Przy małych wartościach β krzywizna funkcji $z = f(\varepsilon)$ jest niewielka, co może stać się przyczyną poważnych błędów. W tym przypadku dokładniejsze wyniki osiąga się za pomocą metody analitycznej rozwijając funkcję w szereg lub przy pomocy metody iteracyjnej.

Można dobrać taką wartość momentu, dla której prosta a będzie styczna do krzywej $z = f(\varepsilon)$ w punkcie ekstremalnym. Dla tego przypadku równanie (50) ma jedno rozwiązanie przedstawione wzorem (47), zaś funkcja $z = f(\varepsilon)$ przyjmuje wartość

$$z_k = \frac{e^{\beta}-1}{\beta}\left[1-\ln\frac{e^{\beta}-1}{\beta}\right]. \tag{51}$$

Nieciągły przepływ prądu twornikowego wystąpi wtedy, gdy

$$z_k < a < 1. \tag{52}$$

Biorąc pod uwagę, że warunek $a < 1$ jest zawsze spełniony, można nierówność podwójną (52) sprowadzić do nierówności pojedynczej

$$\frac{e^{\beta}-1}{\beta}\left[1-\ln\frac{e^{\beta}-1}{\beta}\right] < 1-\mu_s(e^{\beta}-1),$$

która po uwzględnieniu wzoru (49) przyjmuje postać

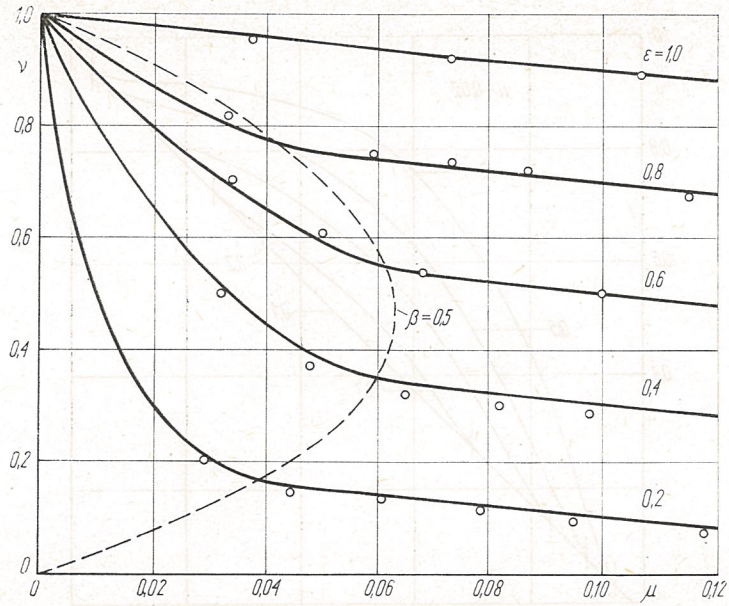
$$\mu_s < \mu_{gk}. \tag{53}$$

Jeżeli nierówność (53) jest spełniona, występuje stan nieciągłego przepływu w przedziale $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$, któremu odpowiada przedział prędkości kątowej $\nu_1 < \nu < \nu_2$. Jeżeli nierówność (53) nie jest spełniona, występuje stan ciągłego przepływu w całym przedziale $0 < \varepsilon < 1$ albo $0 < \nu < 1$.

Warunek (53) stanowi kryterium oceny stanu pracy układu napędowego oraz kryterium doboru parametrów obwodu roboczego, w szczególności doboru częstotliwości impulsów sterujących.

6. METODA WYZNACZANIA CHARAKTERYSTYK MECHANICZNYCH I CHARAKTERYSTYK REGULACYJNYCH

Metoda wyznaczania charakterystyk mechanicznych silnika obcowzbudnego przy sterowaniu impulsowym wynika z analizy przeprowadzonej w p. 4 oraz w p. 5. W pierwszej kolejności należy wyznaczyć charakterystykę graniczną przedstawioną na rys. 6 i opisaną wzorami (45), (46) w postaci parametrycznej. W obszarze zawartym między osią rzędnych (ν) i charakterystyką graniczną występuje stan nieciągłego przepływu prądu twornikowego. Dla dowolnie wybranych wartości wykreśla się charakterystyki $\nu = f(\mu)$ w obszarze ciągłego przepływu, zgodnie ze wzorem (39). Charakterystyki te tworzą rodzinę prostych równoległych (rys. 9) przecinających krzywą graniczną w odpowiednich punktach.



Rys. 9. Charakterystyki mechaniczne silnika bocznikowego obcowzbudnego prądu stałego zasilanego napięciem impulsowym wytworzonym za pomocą tranzystora mocy

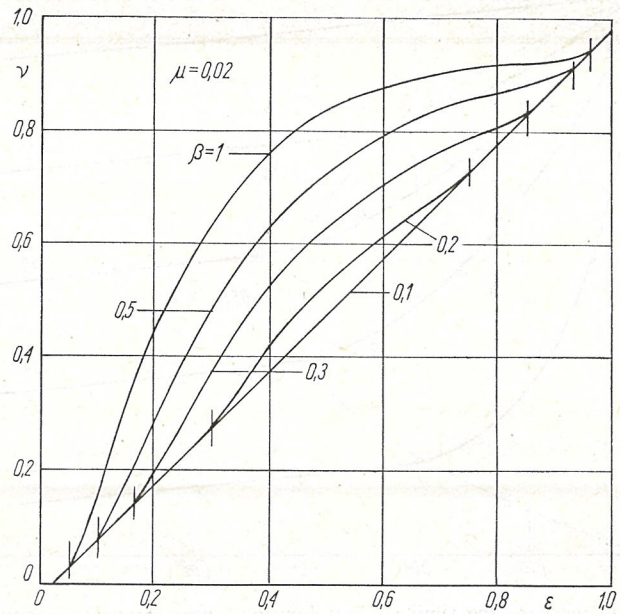
— — — granica między dwoma stanami pracy, O O O punkty uzyskane z doświadczenia

Obliczanie charakterystyk mechanicznych dla stanu nieciągłego przepływu prądu twornikowego jest bardziej pracochłonne. Dla wybranej wcześniej wartości ε przyjmuje się kolejne wartości momentu $\mu < \mu_g$ i rozwiązuje się równanie (44), np. metodą wykreślną. Obliczony względny czas przepływu τ prądu twornikowego jest podstawą do wyznaczenia względnej prędkości kątowej ze wzoru (41). Uzyskane w ten sposób charakterystyki z jednej strony stanowią przedłużenie charakterystyk wykreślonych dla stanu ciągłego przepływu, a z drugiej strony są zbieżne do jednego punktu o współrzędnych $\nu = 1$, $\mu = 0$.

Stosując powyższą metodę wykreślono na rys. 9 rodzinę charakterystyk mechanicznych dla silnika obcowzbudnego prądu stałego o mocy znamionowej 0,76 kW i prędkości znamionowej 1500 obr/min, sterowanego tranzystorem mocy typu BDY 20 przy impulsie napięcia o wartości 120 V i stałym współczynniku $\beta \simeq 0{,}5$. Na tymże wykresie naniesione zostały wyniki uzyskane na drodze doświadczalnej.

Charakterystyki mechaniczne w stanie ciągłego przepływu prądu twornikowego są zbieżne z charakterystykami, jakie otrzymuje się w klasycznej metodzie regulacji prędkości kątowej za pomocą zmiany wartości napięcia zasilającego. Natomiast takie charakterystyki w stanie nieciągłego przepływu są analogiczne do charakterystyk, jakie są osiągalne przy zasilaniu stałym napięciem i zmianie dodatkowej rezystancji w obwodzie twornika.

Przez charakterystykę regulacyjną rozumie się tu zależność prędkości kątowej od średniej wartości napięcia na zaciskach twornika ($\nu = f(\varepsilon)$) przy stałej wartości momentu obciążenia μ_s oraz współczynnika β. W pierwszej kolejności bada się warunek (53). W przypadku stwierdzenia stanu nieciągłego przepływu należy rozwiązać równanie (50), np. metodą wykreślną, i wyznaczyć dwie wartości: ε_1 oraz ε_2, którym odpowiadają graniczne wartości



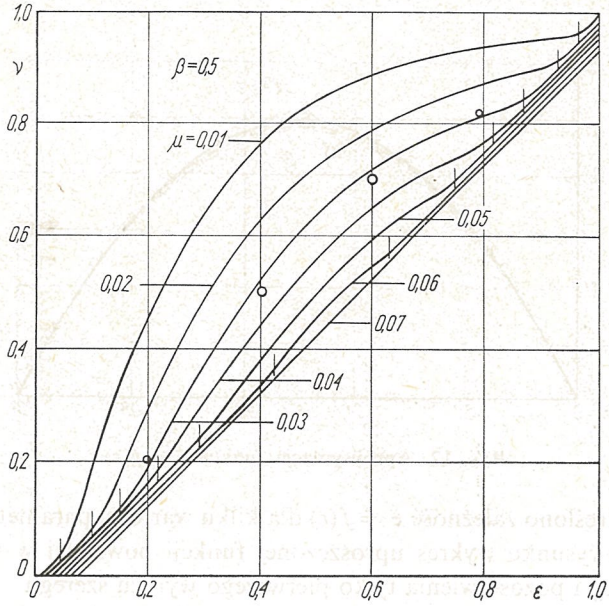
Rys. 10. Charakterystyki regulacyjne silnika obcowzbudnego prądu stałego przy zmiennym parametrze β i stałym momencie obciążenia

prędkości kątowej

$$\left.\begin{aligned} \nu_{g1} &= \varepsilon_1 - \mu_s, \\ \nu_{g2} &= \varepsilon_2 - \mu_s. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Dowolne wartości w przedziale $\nu_{g1} < \nu < \nu_{g2}$ oblicza się ze wzoru (41), rozwiązując uprzednio równanie (44) w celu wyznaczenia względnego czasu τ. W przedziałach $0 < \nu < \nu_{g1}$ oraz $\nu_{g2} < \nu < 1$ występuje stan ciągłego przepływu prądu twornikowego. W tym przypadku korzysta się ze wzoru (39).

Na rys. 10 i rys. 11 wykreślono charakterystyki regulacyjne wyżej podaną metodą, przyjmując kolejno β oraz μ jako zmienny parametr. Przebieg charakterystyk jest liniowy



Rys. 11. Charakterystyki regulacyjne silnika obcowzbudnego prądu stałego przy założeniu momentu obciążenia jako zmiennego parametru
O O O punkty uzyskane z doświadczenia

tylko w stanie ciągłego przepływu prądu twornikowego. Zagadnienie zbliżenia charakterystyki regulacyjnej do postaci liniowej przy określonym momencie obciążenia należy rozwiązać na drodze odpowiedniego doboru względnego okresu impulsowania β. Z tym wiąże się zagadnienie wyboru częstotliwości impulsów lub zagadnienie zmiany parametrów w obwodzie twornikowym.

7. OBCIĄŻENIE PRĄDOWE TRANZYSTORA I DIODY

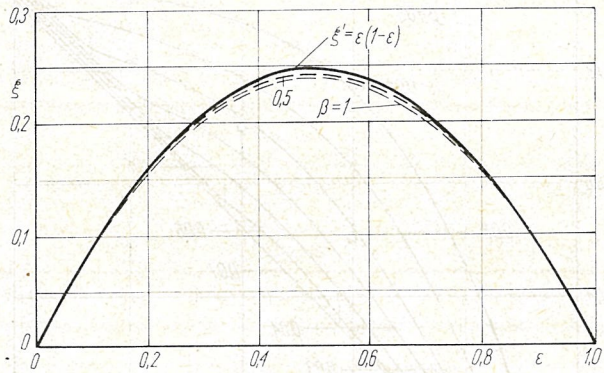
O ile prąd twornikowy może przybierać charakter ciągły lub nieciągły, o tyle prąd płynący przez tranzystor oraz prąd płynący przez diodę mają charakter nieciągły dla każdego stanu pracy i obciążenia.

Średni prąd płynący przez tranzystor w stanie ciągłego przepływu prądu twornikowego określony jest wzorem (19). Dodatkowe zależności (39) i (40) umożliwiają przekształcenie go do postaci

$$i_{\text{śr}} = \varepsilon\mu + \varepsilon(1-\varepsilon) - \xi. \tag{55}$$

Ostatni składnik prawej strony równania (55) wyrażony jest wzorem (20) i może być sprowadzony do postaci

$$\xi = \frac{2}{\beta} \cdot \frac{\operatorname{sh}\frac{\beta\varepsilon}{2} \cdot \operatorname{sh}\frac{\beta}{2}(1-\varepsilon)}{\operatorname{sh}\frac{\beta}{2}}. \tag{56}$$



Rys. 12. Aproksymacja funkcji $\xi = f(\varepsilon)$

Na rys. 12 wykreślono zależność $\xi = f(\varepsilon)$ dla kilku wartości parametru β. Jednocześnie naniesiono na tym rysunku wykres uproszczonej funkcji powstałej w wyniku rozłożenia wzoru (56) w szereg i pozostawienia tylko pierwszego wyrazu szeregu

$$\xi' = \varepsilon(1-\varepsilon). \tag{57}$$

Z porównania wykresów na rys. (12) wynika, że przyjmując postać uproszczoną (57) popełnia się błąd nie większy od 2% przy zmianie parametru w przedziale $0 < \beta < 1$, który w rzeczywistych układach jest najczęściej zachowany. Podstawienie wzoru (57) do równania (55) upraszcza je do postaci

$$i_{\text{śr}} = \varepsilon\mu. \tag{58}$$

Średni prąd płynący przez diodę rozładowczą w stanie ciągłego przepływu prądu twornikowego wyrażony jest wzorem (22), który po uwzględnieniu zależności (39) i (40) może być sprowadzony do postaci

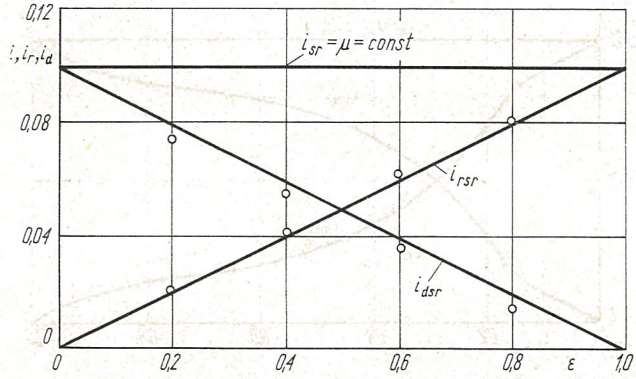
$$i_{d\text{śr}} = (1-\varepsilon)\mu - \varepsilon(1-\varepsilon) + \xi, \tag{59}$$

a po przyjęciu uproszczenia (57) do postaci

$$i_{d\text{śr}} = (1-\varepsilon)\mu. \tag{60}$$

Przy stałej wartości momentu obciążenia średni prąd płynący przez tranzystor oraz przez diodę rozładowczą jest liniową funkcją względnego czasu trwania impulsu. Na rys. 13 wykreślone są zależności (58) i (60) w funkcji ε przy stałej średniej wartości prądu twornikowego czyli momentu obciążenia.

Średni prąd płynący przez tranzystor jest jednocześnie średnim prądem płynącym z sieci. Z wykresu na rys. 13 wynika, że przy stałym momencie obciążenia średni prąd



Rys. 13. Zależność średniej wartości prądu płynącego przez tranzystor $i_{r\acute{s}r}$ i prądu płynącego przez diodę rozładowczą $i_{d\acute{s}r}$ w funkcji współczynnika wypełnienia impulsu przy stałym momencie obciążenia w stanie ciągłego przepływu prądu twornikowego
O O O punkty uzyskane na drodze doświadczalnej

pobierany ze źródła maleje liniowo wraz ze zmniejszeniem średniej wartości napięcia na zaciskach silnika (również ε). Doświadczenie potwierdza przebieg tej zależności, która nie występuje przy klasycznym zasilaniu silnika ze źródła napięcia stałego. Efekt taki powstaje dzięki diodzie rozładowczej, której rola jest taka sama jak w układach prostowników sterowanych. Należy tylko podkreślić, że w przypadku silnika zasilanego impulsami napięciowymi o dostatecznie dużej częstotliwości (do 1000 Hz) istnieją warunki do użytecznego wykorzystania części energii magnetycznej, zgromadzonej w czasie narastania prądu, w wyniku zamiany jej na pracę mechaniczną. Udział energii magnetycznej w wytwarzaniu momentu obrotowego jest tym większy, im mniejsza jest siła elektromotoryczna rotacji, a więc im mniejszy jest względny czas trwania impulsu. Przy małych wartościach ε średni prąd płynący przez diodę rozładowczą ma większą wartość niż średni prąd płynący przez tranzystor oraz prąd płynący z sieci. Przy dużych wartościach ε dioda i tranzystor pracują w warunkach odwróconych.

Średni prąd płynący przez tranzystor w stanie nieciągłego przepływu prądu twornikowego określony jest wzorem (33). Można go sprowadzić do nowej postaci po uwzględnieniu relacji (40) i (41)

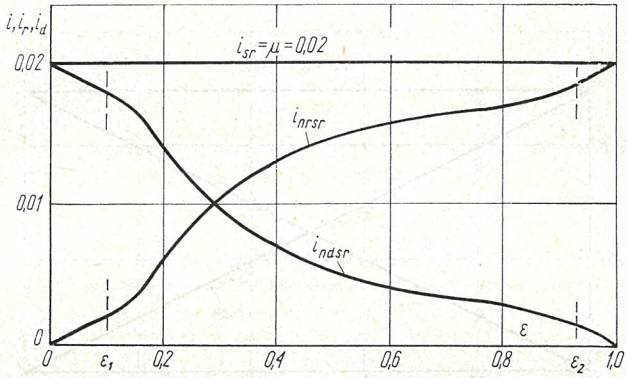
$$i_{nr\acute{s}r} = (1-\nu)\left[\varepsilon - \frac{1}{\beta}(1-e^{-\beta\varepsilon})\right]. \tag{61}$$

Średni prąd płynący przez diodę rozładowczą w stanie nieciągłego przepływu prądu twornikowego wyrażony jest wzorem (34). Po wprowadzeniu relacji (40) i (41) oraz po

dokonaniu przekształceń matematycznych przyjmuje on nową postać

$$i_{ndśr} = \mu - (1-\nu)\left[\varepsilon - \frac{1}{\beta}(1-e^{-\beta\varepsilon})\right]. \tag{62}$$

Graficzne przedstawienie zależności (61) i (62) podane zostało na rys. 14. W przedziale $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$ występująca we wzorach wartość względnej prędkości ν została obliczona



Rys. 14. Zależność średniej wartości prądu płynącego przez tranzystor $i_{nrśr}$ i prądu płynącego przez diodę rozładowczą $i_{ndśr}$ w funkcji współczynnika wypełnienia impulsu przy stałym momencie obciążenia w stanie nieciągłego przepływu prądu twornikowego

ze wzoru (41) po uprzednim rozwiązaniu równania (43). Wykorzystano tu obliczenia wykonane przy wykreślaniu charakterystyk na rys. 10 i 11.

Z wykresu na rys. 14 wynika, że w stanie nieciągłego przepływu średni prąd płynący przez tranzystor i przez diodę nie jest liniową funkcją ε. W porównaniu do stanu poprzedniego występuje tu dodatkowe obciążenie tranzystora oraz odciążenie diody. Jednakże główny charakter przebiegu charakterystyk nie ulega zmianie, tzn. że przy stałym momencie obciążenia prąd płynący ze źródła zasilania również maleje wraz ze zmniejszeniem względnego czasu trwania impulsu. Stopień wykorzystania energii magnetycznej nagromadzonej w czasie trwania impulsu obniża się.

8. WNIOSKI

Praca silnika obcowzbudnego prądu stałego zasilanego impulsami napięcia prostokątnego formowanymi przy pomocy tranzystora mocy odbywa się w jednym z dwóch charakterystycznych stanów: 1) stan ciągłego przepływu prądu twornikowego, 2) stan nieciągłego przepływu prądu twornikowego.

Przebiegi statycznych charakterystyk mechanicznych i regulacyjnych w obu stanach różnią się zasadniczo. Przy ciągłym przepływie prądu charakterystyki mechaniczne i regulacyjne są takie same, jakie uzyskuje się podczas klasycznej regulacji napięciowej silnika prądu stałego. W przypadku nieciągłego przepływu prądu charakterystyki mechaniczne są analogiczne do charakterystyk, jakie osiągalne są przy klasycznym zasilaniu za pomocą

dodatkowej rezystancji wtrącanej do obwodu twornika. Granica między tymi stanami jest zmienna i zależy od częstotliwości impulsu oraz od elektromagnetycznej stałej czasowej obwodu twornikowego.

Prąd płynący z sieci ma zawsze charakter nieciągły, niezależnie od częstotliwości powtarzania impulsu i od obciążenia momentem obrotowym na wale silnika. Przy stałym momencie obciążenia średnia wartość prądu płynącego ze źródła maleje ze zmniejszeniem czasu trwania impulsu. Jest to specyficzna własność silnika prądu stałego zasilanego impulsami z częstotliwością rzędu do 1 kHz. Występujące tu zjawisko ubocznej przemiany energii magnetycznej w energię mechaniczną poprawia bilans energetyczny i przyczynia się do podniesienia sprawności układu napędowego.

Liniowość charakterystyk mechanicznych oraz charakterystyk regulacyjnych zachowana jest tylko w stanie ciągłego przepływu prądu twornikowego. W pozostałym przypadku odchylenie od linii prostej jest tym większe, im mniejsza jest częstotliwość powtarzania impulsów oraz elektromagnetyczna stała czasowa obwodu twornikowego. Odpowiedni dobór tej częstotliwości pozwala tak ograniczyć obszar nieliniowości, aby nie był dostrzegalny przy momencie obrotowym w stanie jałowym.

Wyniki przedstawionej analizy mogą być słuszne również wtedy, gdy tranzystor zostanie zastąpiony przez tyrystor, pod warunkiem ograniczonej mocy silnika prądu stałego w stosunku do mocy źródła zasilania. W układach napędowych większej mocy może zachodzić konieczność uwzględnienia różnicy w strukturze obwodu twornikowego podczas trwania impulsu oraz podczas zwierania tego twornika przez diodę rozładowczą.

Wyniki i wnioski z przeprowadzonej analizy są zbieżne z wynikami uzyskanymi na drodze doświadczalnej.

LITERATURA

1. J. I. Koniew, *Tranzystorowe impulsowe układy napędowe*, WNT, Warszawa 1967.
2. O. A. Kossow, *Tranzystorowe wzmacniacze mocy*, WNT, Warszawa 1967.
3. T. A. Głazenko, G. A. Galberton, *Regulirowanije skorosti dwigatiela postojannogo toka s połuprowodnikowym kluczom w cepi jakora*, Elektriczestwo 1961, nr 2, s. 49—54.
4. T. A. Głazenko, *Połuprowodnikowyje preobrazowatieli w elektropriwodach postojannogo toka*, Energia, Leningradskoje Otdzielenije, 1973.
5. H. P. Kreuth, *Das Betriebsverhalten periodisch geschalteter Gleichstrommaschinen*, Elektrotechnik und Maschinenbau, 84 (1967), H. 12, s. 498—503.

E. ZAWALICH

ANALYSIS OF PULSE-CONTROLLED TRANSISTOR DRIVE SYSTEM UNDER QUASI-STEADY CONDITION

Summary

The paper discusses the operation of an unreversible variable speed driving system, which uses a separately excited d.c. motor and a transistor chopper as an armature controller. The control circuit is based on generating a square voltage impulse, the frequency of which is constant and the width veriable.

The method is described of obtaining static speed-torque characteristics under the noncontinuous and continuous conduction in the armature circuit. The borderline between two ranges of the speed-torque

characteristics has been established. The relationships of the mean value of the transistor current and diode current as the function of the pulse duty factor are given.

The calculated and measured speed-torque characteristics are compared.

E. ZAWALICH

ANALYSE DU SYSTÈME MENANT À TRANSISTORS À COMMANDE PAR IMPULSION DANS LE RÉGIME QUASI-PERMANENT

Résumé

Dans l'ouvrage on a présenté l'analyse du travail de système menant à commande par impulsion et composé de moteur à excitation indépendante à courant continu, de transistor de puissance, qui travaille en régime de commutation, et de diode de décharge. On a donné la méthode de la définition des isostatiques caractéristiques mécaniques du moteur en régime de l'incessant et de cessant écoulement du courant d'induit et la méthode de la désignation des limites parmi ces régimes. Les formules déduites déterminant la charge de courant des éléments semiconducteurs rendent possible leur choix régulier dans le système analysé et montrent si l'énergie magnétique accumulée dans l'enroulement de l'induit est utilement exploitée pendant le travail à impulsion du système.

E. ZAWALICH

BEITRAG ZUM QUASISTATIONÄREN BETRIEBSVERHALTEN EINES ÜBER GLEICHSPANNUNGSSTELLER GESPEISTEN GLEICHSTROMMOTORS

Zusammenfassung

In dem Artikel wird das Betriebsverhalten des pulsgesteuerten Nebenschlussmotors analysiert. Zur Steuerung werden Leistungtransistoren als Schalter und Löschdioden verwendet. Der Verlauf der Lastkennlinien hängt davon ab, ob es sich um nichtlückenden oder lückenden Ankerstrom handelt. Die Berechnungsmethode der Grenze zwischen diesen Betriebszuständen wird bei konstanter Pulsfrequenz dargestellt. Die Abhängigkeit des Mittelwertes des Transistorstroms und des Diodenstroms wird vom Einschaltverhältnis abgeleitet.

Die Rechenergebnisse wurden mit den Messergebnissen verglichen.

Е. ЗАВАЛИХ

АНАЛИЗ КВАЗИУСТАНОВИВШИХСЯ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРОПРИВОДАХ С ИМПУЛЬСНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Резюме

Исследованы квазиустановившиеся процессы в простейшей нереверсивной импульсной схеме регулирования скорости вращения двигателей постоянного тока (независимого возбуждения) с транзисторными преобразователями с постоянной частотой комутации и с широтно-импульсным управлением.

Рассмотрена методика аналитического определения механических и регулировочных характеристик электродвигателя в зоне непрерывных токов и в зоне прерывистых токов. Определено семейство граничных кривых отделяющих эти зоны.

Получено аналитическое выражение для определения средних значений токов протекающих через транзистор и через шунтирующий диод в рассматриваемых зонах прерывистых и непрерывных токов. Показано, что в импульсных системах существуют условия полезного использования магнитной энергии накопленной в цепи якоря.

Производится сравнение расчетных и экспериментальных результатов.

Komunikaty

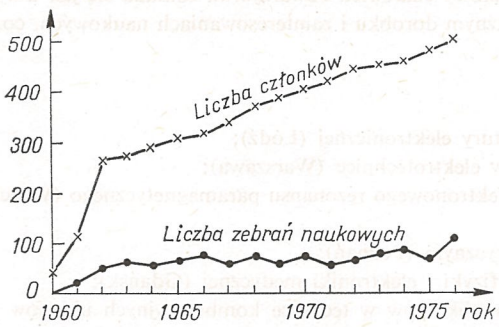
Z życia PTETS

XV LAT POLSKIEGO TOWARZYSTWA ELEKTROTECHNIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

W dniu 29 stycznia 1976 roku minęło 15 lat od utworzenia PTETS, które zostało powołane w r. 1961 w celu krzewienia i popierania rozwoju elektrotechniki teoretycznej i stosowanej oraz współdziałania w jej szerzeniu i rozpowszechnianiu. Skupiając specjalistów różnych dyscyplin, Towarzystwo sprzyja integracji naukowej oraz wymianie myśli i idei pomiędzy różnymi specjalnościami.

Działalność Towarzystwa skupia się głównie w Oddziałach, których obecnie jest 8, o następującej liczbie członków: Gdańsk — 60, Gliwice — 48, Kraków — 47, Łódź — 52, Poznań — 57, Szczecin — 20, Warszawa — 111 i Wrocław — 82.

Liczba członków Towarzystwa, od początkowego składu 41 Członków Założycieli, wzrastała szybko (rys. 1), aby już po dwóch latach osiągnąć stan równomiernego spokojnego rozwoju, odpowiadającego potrzebom społecznym w tym zakresie i wzrostowi liczby aktywnie działających pracowników nauki.



Rys. 1

Obok oddzielnych zebrań naukowych coraz większą rolę odgrywają specjalistyczne imprezy zbiorowe w postaci sympozjów, konferencji, seminariów i kursów, których do roku 1976 odbyło się 86. Wygłoszono na nich łącznie 968 referatów. Ponadto w okresie piętnastolecia zorganizowano 64 konkursy naukowe.

Zjazdy Delegatów PTETS, które odbywają się obecnie co dwa lata, zatwierdzają sprawozdania i plany, wybierają władze centralne oraz nadają członkostwa honorowe Towarzystwa.

Kolejnymi przewodniczącymi Zarządu Głównego PTETS byli:1) Prof. dr Paweł Szulkin (1961—1963), 2) Prof. dr Jan Podoski (1963—1967), 3) Prof. dr Bolesław Dubicki (1967—1971), 4) Prof. Tadeusz Cholewicki (1971—1973), 5) Prof. dr Tadeusz Zagajewski (1973—1976), 6) Prof. dr hab. Janusz Turowski od roku 1976.

W okresie piętnastu lat Towarzystwo nadało godność Członków Honorowych następującym, zasłużonym na polu elektrotechniki pracownikom nauki i aktywnym działaczom Towarzystwa: 1) Prof. dr Stanisław Fryze (Gliwice), 2) Prof. dr Janusz Groszkowski (Warszawa), 3) Prof. dr Kazimierz Idaszewski (Wrocław), 4) Prof. dr Bolesław Konorski (Łódź), 5) Prof. dr Stanisław Kończykowski (Warszawa), 6) Prof. dr Stanisław Bladowski (Kraków), 7) Prof. Eugeniusz Jezierski (Łódź), 8) Prof. Lucjan Nehrebecki (Gliwice), 9) Prof. dr Jerzy Ignacy Skowroński (Wrocław), 10) Prof. dr Stefan Manczarski (Warszawa), 11) Prof. dr Edmund Romer (Gliwice), 12) Prof. dr Jan Podoski (Warszawa), 13) Prof. Roman Kurdziel (Wrocław), 14) Prof. dr Bolesław Dubicki (Warszawa), 15) Prof. dr Marian Suski (Wrocław).

Ostatni, XIV Zjazd Delegatów PTETS, który odbył się w Warszawie w dniu 16 marca 1976 r., zalecił nowo wybranemu Zarządowi Głównemu publikowanie syntetycznych sprawozdań i planów Towarzystwa. Dzięki uprzejmości Redakcji „Rozpraw Elektrotechnicznych" udało się ten postulat zrealizować.

Sprawozdanie za rok 1975

W roku 1975 zorganizowano 62 zebrania naukowe z udziałem 1.214 uczestników i 454 dyskutantów. Jest to wprawdzie liczba mniejsza niż w r. 1974 (83 zebrania), lecz za to trzykrotnie wzrosła liczba sympozjów, których zorganizowano 6, o łącznej liczbie referatów 137. Ponadto odbyły się 3 seminaria w Gdańsku i w Warszawie z 28 wykładami.

Tematyka sympozjów obejmowała:

1) Problemy wyładowań niezupełnych w układach elektroizolacyjnych (Kraków);
2) Analiza i wykorzystanie pól (Szczecin);
3) Zastosowanie maszyn matematycznych w elektrotechnice (Łódź);
4) Automatyzacja projektowania układów elektronicznych (Wrocław);
5) Metody matematyczne w elektrotechnice (Warszawa);
6) Zjawiska elektromagnetyczne w obwodach nieliniowych (Poznań).

Zorganizowano także 3 konkursy naukowe, na które wpłynęło łącznie 36 prac.

W konkursie Zarządu Głównego nagrody za r. 1975 otrzymali: dr A. Ciarkowski (II), dr M. Kaźmierski (II), mgr inż. W. Brociek i mgr inż. H. Rawa (III), mgr inż. J. K. Frąckowiak (III), prof. dr hab. M. Dąbrowski (III). Nagrody I stopnia nie przyznano.

Plan na rok 1976

W zakresie wzrostu liczby członków i zebrań naukowych przewiduje się dalszy umiarkowany wzrost (rys. 1). Ze względu na naukowy charakter Towarzystwa zakłada się jak dotychczas, że jego członkami w zasadzie są osoby o wyraźnym dorobku i zainteresowaniach naukowych, co w określonej mierze ogranicza krąg kandydatów.

Planowane są

sympozja:

1) Kierunki rozwoju aparatury elektronicznej (Łódź);
2) Metody matematyczne w elektrotechnice (Warszawa);
3) Aparatura do badania elektronowego rezonansu paramagnetycznego (Wrocław);

seminaria:

1) Obwody z łukiem elektrycznym (Poznań);
2) Wybrane zagadnienia z fizyki i elektroniki medycznej (Gdańsk);
3) Metoda redukcji quasi-implikantów w technice kombinacyjnych układów przełączających (Kraków);

konkursy:

1) Analiza stanów nieustalonych w przetwornikach elektrycznych i elektromechanicznych (Zarząd Główny);
2) Metody matematyczne w elektrotechnice (Warszawa);
3) Metody symulacji i ich zastosowanie w elektrotechnice (Gliwice).

XIV Zjazd Delegatów wybrał Zarząd Główny w składzie: prof. dr hab. Janusz Turowski (przewodniczący), prof. dr Bolesław Dubicki (wiceprzewodniczący), dr hab. Stanisław Przeździecki (wiceprzewodniczący), prof. dr hab. Eugeniusz Koziej (sekretarz generalny), prof. dr Józef Żydanowicz (skarbnik), prof. dr hab. Mirosław Dąbrowski (z-ca sekretarza generalnego), doc. dr Romuald Nowicki i prof. dr hab. Michał Jabłoński (członkowie Zarządu Głównego), doc. dr hab. Zdzisław Kachlicki i doc. dr Marian Piekarski (z-cy członków Zarządu Głównego) oraz Główną Komisję Rewizyjną w składzie: prof. dr Jan Podoski (przewodniczący), prof. dr Jan Kożuchowski (z-ca przewodniczącego), prof. dr Marian Suski i doc. dr Stefan Wojciechowski (członkowie), dr hab. Józef Machowski (z-ca członka).

Przewodniczącymi w poszczególnych Oddziałach PTETS są:

Gdańsk — prof. dr Jerzy Sawicki, Gliwice — doc. dr Tadeusz Szweda, Kraków — prof. dr Władysław Kołek, Łódź — doc. dr hab. Zdzisław Korzec, Poznań — dr hab. Lech Różański, Szczecin — doc. dr Ryszard Sikora, Warszawa — doc. dr Andrzej Marusak, Wrocław — doc. dr hab. Wojciech Fuliński.

J. T.

TREŚĆ

C. Syc: Topologiczna analiza liniowych układów czynnych 483
J. Migdalski: Metody obliczania niezawodności systemów o strukturach złożonych 499
W. Lipiński: Stała czasowa dyfuzji pola magnetycznego do obszaru przewodzącego 543
W. Nakwaski: Rekombinacja promienista w silnie domieszkowanych półprzewodnikach . . 555
M. Majewski: Metody zwiększania mocy wyjściowej generatorów z diodami lawinowymi . . 583
M. Pospieszalski: Pomiary własności dielektryków mikrofalowych metodą rezonatora dielektrycznego 605
A. Lizoń: Radar dopplerowski wyróżniający kierunek ruchu 625
T. Kaczorek: Przesuwanie biegunów do z góry zadanych położeń wielowymiarowych układów liniowych stacjonarnych 645
J. Górecki, L. Nowak, J. Poltz: Numeryczne wyznaczanie strat wiroprądowych w przewodzącej płycie ferromagnetycznej 677
R. Sobocki: O możliwości obliczania indukcyjności rozproszenia uzwojeń transformatora za pomocą ogólnej metody bazującej na pojęciu średnich geometrycznych odległości 687
F. Mosiński: O statystycznej obróbce wyników pomiaru wytrzymałości udarowej izolacji nieregenerującej się 709
E. Zawalich: Analiza tranzystorowego układu napędowego o sterowaniu impulsowym w stanie quasiustalonym 727
Komunikat: XV lat Polskiego Towarzystwa Elektrotechniki Teoretycznej 749

CONTENTS — TABLE DES MATIÈRES — INHALT

C. Syc: Topological Analysis of Linear Active Circuit 497
Analyse topologique des circuits linéaires actifs 497
Topologische Analyse linearer aktiver Schaltungen 497
J. Migdalski: Evaluation Methods of Reliable Systems with Complex Structures 539
Méthodes de calcul de la fiabilité de systèmes à structures complexes 540
Berechnungsmethoden der Zuverlässigkeit von Systemen mit zusammengesetzten Strukturen . 540
W. Lipiński: Time Parameter of Magnetic Field Diffusion into Conducting Region 553
Constante de temps de la diffusion du champ magnétique vers la région conductrice 553
Über die Zeitkonstante der Diffusion des elektromagnetischen Feldes im leitenden Raum . . 554
W. Nakwaski: Radiative Recombination in Highly Doped Semiconductors 580
Recombinaison radiante dans les semi-conducteurs à fortes impuretés 581
Strahlungsrekombination bei stark dotierten Halbleitern 581
M. Majewski: Methods of Increasing Output Power in Avalanche Diode Oscillators 603
Méthode d'augmentation de la puissance de sortie des générateurs aux diodes à avalanche . . 603
Vergrösserungsmethode der Anfangsleistung von Generatoren mit Lawinendioden 603
M. Pospieszalski: Measurement of Complex Permittivity of Microwave Insulators by the Dielectric Resonator Method 622
Mesures des propriétés des diélectriques micro-ondes avec la méthode du résonateur diélectrique 622
Bemessung der Eigenschaften von Mikrowellendielektriken mittels der Methode einer dielektrischen Resonators 623
A. Lizoń: Doppler Radar Showing Motion Direction 643
Radar Doppler distinguant la direction du mouvement 643
Doppler-Radar mit Richtungsunterscheidung 643
T. Kaczorek: Poles Assignment for Multivariable Linear Time-Invariant Systems 674
Décalage des pôles à des positions fixées d'avance de multidimensionnels circuits linéaires stationnaires 674

Verschiebung von Polen im eine im voraus gegebene Lage der stationären mehrdimensionalen Liniensysteme 674
J. Górecki, L. Nowak, J. Poltz: Numerical Calculation of Eddy-Current Losses in Ferromagnetic Conductive Thin Plate 684
Désignation numérique des pertes par courants parasites dans la plaque ferromagnétique conductrice 684
Digitale Berechnung der Wirbelstromverluste in einer leitfähigen ferromagnetischen Plate . . 685
R. Sobocki: On Possibility of Successful Calculating the Leakage Inductance of Transformer Windings by Means of a General Method Based upon the Conception of Geometric Mean Distances 705
Possibilité de calculer l'inductance de la dispersion des enroulements du transformateur à l'aide d'une méthode généralement appliquée basée sur la conception de moyennes distances géométriques 706
Über die Möglichkeit der Berechnung der Dispersionsinduktivität von Transformatorwicklungen mittels einer allgemeinen, auf dem Begriff geometrischer Mittelentfernungen basierenden Methode 706
F. Mosiński: Statistic Elaboration of the Results for the Impulse Strength Measurements of the Insulation 724
Emprise statistique des résultats des mesures de la résistance aux chocs de l'isolation non régénérée 724
Bemessung von Stossfestigkeit einer sich nicht regenerierenden Isolierung 725
E. Zawalich: Analysis of Pulse-Controlled Transistor Drive System under Quasi-Steady Condition 747
Analyse du système menant à transistors à commande par impulsion dans le régime quasi-permanent 748
Beitrag zum quasistationären Betriebsverhalten eines über Gleichspannungssteller gespeisten Gleichstrommotors 748

СОДЕРЖАНИЕ

Ч. Сыц: Топологический анализ линейных активных цепей 497
Я. Мигдальски: Методы расчета надежности систем со сложными структурами . . 541
В. Липиньски: Постоянная времени диффузии магнитного поля в проводящую зону 554
В. Накваски: Излучательная рекомбинация в полупроводниках с большим содержанием примесей 581
М. Маевски: Методы повышения выходной мощности генераторов на лавинно-пролетных диодах 604
М. Поспешальски: Исследование свойств микроволновых диэлектриков методом диэлектрического резонатора 623
А. Лизонь: Допплеровский радиолокатор определяющий направление движения . . 644
Т. Качорек: Перемещение полюсов в предопределенные положения многомерных линейных стационарных систем 675
Е. Гурецки, Л. Новак, Ю. Польтц: Численное определение потерь от вихревых токов в проводящем ферромагнитном листе 685
Р. Соботцки: О возможности вычисления индуктивности рассеяния обмоток трансформатора при помощи общего метода обоснованного на понятии средних геометрических расстояний 707
Ф. Мосиньски: О статистической обработке результатов измерений ударной прочности изоляции 725
Е. Завалих: Анализ квазиустановившихся процессов в электроприводах с импульсным управлением 748

7. *Streszczenia.* Do każdej nadsyłanej pracy należy dołączyć krótkie streszczenie (analizę) w języku polskim (w 5 egz.) oraz streszczenia w językach obcych: angielskim, francuskim, niemieckim i rosyjskim. W razie niemożności przygotowania streszczeń w językach obcych Autor powinien przynajmniej podać niezbędną do wykonania tłumaczenia obcojęzyczną terminologię.

8. *Literatura.* Po zakończeniu artykułu należy podać wykaz literatury, wymieniając w następującej kolejności: pierwsze litery imion, nazwisko autora, po czym po przecinku pełny tytuł dzieła lub artykułu; dalej, w przypadku książki — wydawcę, miejsce wydania i rok, a w przypadku artykułu — tytuł czasopisma, numer zeszytu, rok wydania i ewent. numer strony. Pozycje wykazu powinny być ponumerowane.

Uwagi

1. Niezastosowanie się Autora do podanych wyżej wytycznych pociągnie za sobą konieczność potrącenia z honorarium autorskiego kosztów związanych z doprowadzeniem dostarczonych materiałów do postaci wymaganej przez Redakcję.

2. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egz. odbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze Autor może zamówić w Redakcji na własny koszt.

3. **Autora obowiązuje korekta autorska, którą należy zwracać w ciągu 3 dni** pod adresem Redakcji.

Cena zł 40.—

Rozprawy Elektrotechniczne

Kwartalnik

WARUNKI PRENUMERATY CZASOPISMA

Cena prenumeraty rocznej zł 160.—
„ „ półrocznej zł 80.—

Prenumeratę przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch" oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:
— do dnia 25 listopada na styczeń, I-szy kwartał, I-sze półrocze i cały rok następny,
— do dnia 10 każdego miesiąca (z wyjątkiem grudnia) poprzedzającego okres prenumeraty.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne oraz wszelkiego rodzaju inne zakłady pracy, składają zamówienia w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch".

Zakłady pracy w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW oraz prenumeratorzy indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO nr 1531-71 — w terminach podanych dla prenumeraty krajowej. Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki".

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona-Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa, Poland.

Rozpr. Elektrot. T. 22. z. 3, s. 481 — 752, Warszawa 1976

Index 37483

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTROTECHNIKI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XXII · ZESZYT 4

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1976

Wytyczne dla Autorów

Komitet Redakcyjny prosi o przestrzeganie następujących wytycznych przy opracowywaniu maszynopisów artykułów nadsyłanych do opublikowania.

1. *Tematyka, charakter i oryginalność artykułów.* „Rozprawy Elektrotechniczne" są przeznaczone do ogłaszania prac naukowych wchodzących w zakres szeroko pojętej elektrotechniki, zwłaszcza jeżeli traktują one omawiane zagadnienia w sposób możliwie kompletny i zmierzają do osiągnięcia celu informacyjno-dydaktycznego. W związku z tym publikowane prace mogą być w mniejszym lub większym stopniu pracami nieoryginalnymi, jeśli chodzi o treść w nich zawartą, co nie zwalnia Autorów od obowiązku ujęcia tematu w sposób oryginalny. Twórczy wkład Autora może polegać wówczas np. na: porównaniu opisywanych teorii, metod lub systemów, krytycznej ich ocenie, wyciągnięciu własnych wniosków co do celowości takiego lub innego działania, zastosowaniu własnej klasyfikacji zagadnień, prognostyce itp. W szczególności „Rozprawy" ogłaszają takie prace naukowe, które zawierają: analizę porównawczą teorii, metod lub systemów, syntetyczne ujęcia określonego zagadnienia naukowego, omówienie obecnego stanu wybranego działu elektrotechniki, omówienie jego postępów lub tendencji rozwojowych itp.

2. *Wymagania ogólne.* Artykuły należy nadsyłać w maszynopisie, w dwóch egzemplarzach. Maszynopis powinien być napisany jednostronnie przez czarną taśmę, na maszynie do pisania z niezabrudzonymi i nieuszkodzonymi znakami. Dopuszcza się odręczne czytelne uzupełnianie lub pisanie atramentem albo długopisem kolorem czarnym lub ciemnoniebieskim znaków specjalnych oraz znaków w językach, których alfabetów nie ma na maszynach do pisania, np. znaków matematycznych, chemicznych, liter greckich. Maszynopis powinien być napisany na papierze do maszyn do pisania koloru białego, formatu A4; numeracja ciągła na wszystkich kartkach.

3. *Sposób pisania tekstu.* Tekst w maszynopisie powinien być pisany bez używania wyróżnień, a w szczególności nie dopuszcza się spacjowania (rozstrzelenia), podkreślania i pisania tekstów dużymi literami. Proponowane wyróżnienia Autor może wprowadzić do maszynopisu (zwykłym ołówkiem) za pomocą przyjętych znaków adiustacyjnych (podkreślenie linią przerywaną — spacjowanie, podkreślenie linią ciągłą — pogrubienie, podkreślenie wężykiem — kursywa itp.). Na jednej kartce maszynopisu powinno być 30 wierszy po około 60 znaków łącznie z odstępami. Marginesy każdej kartki powinny mieć następujące wymiary: górny — ok. 25 mm, lewy — ok. 35 mm. Tekst maszynopisu powinien być napisany z podwójnym odstępem między wierszami; tytuły i podtytuły małymi literami. Akapity należy rozpoczynać z wcięciem równym trzem uderzeniom maszyny do pisania.

4. *Sposób pisania tablic.* Tablice w maszynopisie powinny być napisane w układzie zbliżonym do układu zecerskiego. Tytuły rubryk pionowych i poziomych powinny być napisane małymi literami z podwójnym odstępem między wierszami. Przypisy (notki) dotyczące tablic należy pisać bezpośrednio pod tablicą. Tablice należy numerować kolejno liczbami arabskimi; u góry każdej tablicy podać tytuł.

5. *Sposób pisania wzorów matematycznych.* Rozmieszczenie znaków, cyfr, liter i odstępów powinno być zbliżone do rozmieszczenia elementów druku. Wskaźniki i wykładniki powinny być napisane wyraźnie i być prawidłowo obniżone lub podwyższone w stosunku do linii wiersza podstawowego. Znaki nad literami i cyframi: strzałki, linie, kropki, daszki itp. powinny być napisane dokładnie nad tymi elementami, do których się odnoszą. Numery wzorów należy umieszczać z prawej strony.

6. *Przygotowanie materiału ilustracyjnego.* Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonywać zgodnie z obowiązującymi normami, na oddzielnych arkuszach, z podaniem kolejnych numerów rysunków. W maszynopisie artykułu na marginesie, obok właściwego tekstu, należy podać jedynie odnośny numer rysunku, a na oddzielnym arkuszu wykaz podpisów pod rysunki. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót: rys.). U samego dołu rysunku (a przy fotografiach na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, tytuł pracy i nazwisko autora. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.

Dalszy ciąg wytycznych na 3 stronie okładki

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTROTECHNIKI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XXII · ZESZYT 4

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1976

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor naczelny
PROF. DR WITOLD NOWICKI

Zastępca redaktora naczelnego
PROF. DR HAB. TADEUSZ KACZOREK

Członkowie
PROF. DR LEONARD KNOCH, PROF. DR WITOLD ROSIŃSKI
PROF. DR HAB. JANUSZ TUROWSKI

Sekretarz
JANINA MATHEISEL

ADRES REDAKCJI

00-661 Warszawa, Plac Jedności Robotniczej 1
Politechnika, Instytut Teleelektroniki, Gmach Elektroniki, pok. 471

Dyżury Redakcji: poniedziałki i czwartki, godz. 11-13
tel. 28 89 81 lub 210 07-737
Telefony domowe: redaktor naczelny – 17 37 03
zastępca redaktora naczelnego – 44 88 34
sekretarz – 33 84 97

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 700 (600+100)	Oddano do składania 29.V.1976 r.
Ark. wyd. 20, 5, ark. druk. 14,5+0,75 luź. wkł.	Podpisano do druku w październiku 1976 r.
Papier ilustrac. sat. imp. kl. III, 90 g. 70×100	Druk ukończono w październiku 1976 r.
Zamówienie nr 779/76	Cena zł 40.— J-101

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 4, ss. 755—766

621.317.335

Wykorzystanie metod Ritza i Trefftza do dwustronnego szacowania pojemności

JAN PURCZYŃSKI (Szczecin)

Instytut Automatyki Przemysłowej Politechniki Szczecińskiej

Otrzymano 8.11.1975

W pracy zaproponowano dwustronne szacowanie pojemności w wyniku zastosowania metod Ritza i Trefftza. Metoda ta wykorzystuje fakt, że rzeczywista wartość pojemności zawiera się w przedziale ograniczonym przez wartości przybliżone, wyznaczone metodami Ritza i Trefftza.

Wykazano, że przy obliczaniu pojemności wygodniej jest korzystać z pierwotnej postaci funkcjonału, a nie z postaci przekształconej do całek wyznaczonych wzdłuż brzegu obszaru.

1. WSTĘP

Zastosowanie metody Ritza do obliczania pojemności zostało przedstawione w pracach [10, 12]. W pracach tych została zasygnalizowana możliwość dwustronnego szacowania pojemności w wyniku zastosowania metod wariacyjnych: Ritza i Trefftza. Problemowi temu poświęcona jest obecna praca. W pracy [12] omówiono dotychczasową literaturę dotyczącą wykorzystania metod wariacyjnych do obliczania pól elektrostatycznych.

W pracy [1] rozpatrzono zastosowanie metody Trefftza do wyznaczania pól elektrostatycznych przy wykorzystaniu maszyn cyfrowych.

W odróżnieniu od pracy [1], gdzie stosowano dyskretną wersję metody Trefftza (skończona liczba punktów kollokacji), w przedstawionej pracy wykorzystano klasyczną wersję metody Trefftza. W wyniku czego uzyskano wyrażenia określające pojemność w postaci wzorów analitycznych.

Metodę dwustronnego oszacowania pojemności przedstawiono w pracy [5]. Pojemność była wyznaczona ze wzorów:

$$C = \frac{2W}{U^2} \tag{1}$$

oraz

$$C = \frac{Q^2}{2W}. \tag{2}$$

Energię występującą we wzorze (1) obliczono metodą Ritza, a we wzorze (2) przy użyciu funkcji Greena. W obu przypadkach uzyskano wartość przybliżoną energii z nadmiarem i dopiero zastosowanie wzorów (1) i (2) pozwoliło oszacować wartość pojemności.

Natomiast, zastosowana w niniejszej pracy, metoda Trefftza prowadzi w sposób naturalny do wartości przybliżonej energii z niedomiarem.

2. IDEA METODY

Potencjał płaskorównoległego pola elektrostatycznego spełnia równanie Laplace'a

$$\Delta V = 0. \tag{3}$$

Rozwiązanie zagadnienia Dirichleta

$$V|_\Gamma = \omega(P) \tag{4}$$

dla równania Laplace'a (3) jest równoznaczne minimalizacji funkcjonału [2, 4, 6, 7, 8, 12]

$$F_R = l \int\int_D \operatorname{grad}^2 V dx dy \tag{5}$$

wśród funkcji V spełniających warunek (4). Metoda wariacyjna Ritza polega na bezpośredniej minimalizacji funkcjonału (5).

Niech $F_{R\min}$ oznacza wartość funkcjonału (5) dla V_d, gdzie V_d — wartość dokładna (rzeczywista) potencjału. Wówczas, dla każdego rozwiązania przybliżonego V zachodzi

$$F_R \geqslant F_{R\min}. \tag{6}$$

Uwzględniając związek [12]

$$C_R = \frac{\varepsilon F_R}{U^2}, \tag{7}$$

otrzymuje się

$$C_R \geqslant C_d, \tag{8}$$

gdzie:

C_R — wartość przybliżona pojemności wyznaczona metodą Ritza,

C_d — wartość dokładna pojemności.

Natomiast zasada wariacyjna Trefftza głosi [3, 8, 14], że wśród wszystkich rozwiązań równania (3), rozwiązanie wypełniające warunek brzegowy (4) zapewnia minimum funkcjonału

$$F_T = l\left\{\int\int_D \operatorname{grad}^2 V dx dy - 2 \oint_\Gamma \omega \cdot \frac{\partial V}{\partial n} \cdot dl\right\}. \tag{9}$$

Uwzględniając postać energii

$$W = \frac{\varepsilon l}{2} \int\int_D \operatorname{grad}^2 V dx dy \tag{10a}$$

oraz

$$W = \frac{l}{2} \oint_\Gamma V \cdot \sigma \, dl = \frac{\varepsilon l}{2} \oint_\Gamma \omega \cdot \frac{\partial V}{\partial n} dl \tag{10b}$$

gdzie σ — gęstość powierzchniowa ładunku, otrzymuje się

$$F_T = -\frac{2W}{\varepsilon}.$$

Ze związku

$$W = \frac{1}{2}CU^2 \tag{10c}$$

uzyskuje się

$$C_T = -\frac{\varepsilon F_T}{U^2}, \tag{11}$$

gdzie C_T — wartość przybliżona pojemności wyznaczona metodą Trefftza.

Dla funkcjonału (9) zachodzi nierówność analogiczna do wzoru (6)

$$F_T \geqslant F_{Tmin}. \tag{12}$$

Ze wzorów (11) i (12) wynika

$$C_T \leqslant C_d. \tag{13}$$

Ostatecznie zachodzi

$$C_T \leqslant C_d \leqslant C_R. \tag{14}$$

Nierówność (14) określa ideę dwustronnego szacowania pojemności.

W praktyce zamiast wzoru (9) stosuje się postać dogodniejszą do obliczeń [2, 3, 4, 8]. Zakłada się, że n-te przybliżenie ma postać

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k. \tag{15}$$

Podstawiając związek (15) do wzoru (9), przeprowadzając minimalizację oraz stosując wzór Greena, uzyskuje się

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \int_\Gamma \varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \cdot dl = \int_\Gamma \omega \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \cdot dl \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{16}$$

Wzór (16) określa układ n równań o n niewiadomych (współczynniki $a_1, a_2, \ldots a_n$). Cechą charakterystyczną układu (16) jest fakt, że rozwiązanie określone jest z dokładnością do stałej. Dodanie dowolnej stałej nie powoduje zmiany układu równań (16).

Wartość funkcjonału (9), a tym samym pojemność (wzór 11), nie zależą od doboru tej stałej. Ponieważ zasadniczym tematem pracy jest wyznaczenie pojemności, w dalszej części wywodów przyjmuje się wartość stałej równą zeru.

Proponowana metoda szacowania pojemności zostanie przedstawiona na dwóch przykładach.

3. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

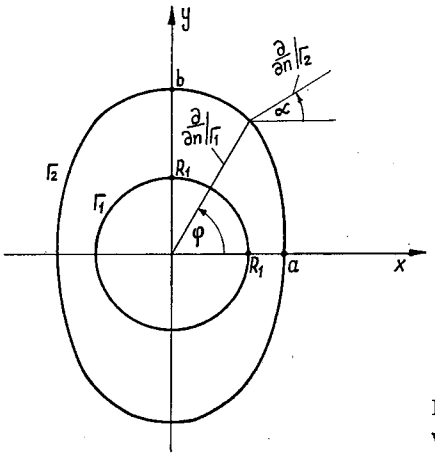
3.1. Odkształcony kondensator walcowy

Na rys. 1 przedstawiony jest przekrój poprzeczny kondensatora walcowego. Okładka wewnętrzna w przekroju poprzecznym jest okręgiem, a zewnętrzna elipsą. Rozpatrywany

układ elektrod może powstać np. w wyniku działania siły zewnętrznej na kondensator walcowy o przekroju kołowym.

Długość kondensatora l jest dostatecznie duża, aby zagadnienie można było traktować jako dwuwymiarowe. Zewnętrzną okładkę przyjęto uziemioną, tzn. potencjał spełnia następujące warunki brzegowe:

$$V|_{\Gamma_1} = U; \quad V|_{\Gamma_2} = 0. \tag{17}$$



Rys. 1. Przekrój poprzeczny kondensatora walcowego o odkształconej okładce zewnętrznej

W rozwiązaniu ograniczono się do pierwszego przybliżenia

$$V = a_1\psi_1; \quad \psi_1 = \ln r^2 = \ln(x^2+y^2). \tag{18}$$

Uwzględniając zależności

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial n}\cdot dl|_{\Gamma_1} = \frac{2}{r}\cdot rd\varphi = 2\cdot d\varphi,$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial n}\cdot dl|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\cdot\sin\alpha\right)\cdot\sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}\cdot d\varphi$$

oraz

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \frac{a}{b}\cdot\operatorname{tg}\varphi \text{ słuszne dla } \frac{a}{b}\approx 1$$

oraz wzór (18), układ równań (16) przyjmie postać

$$4a_1\left[-\int_0^{\pi/2} 2\cdot\ln r^2 d\varphi + 2ab\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}\right]d\varphi = -4\int_0^{\pi/2} 2U d\varphi. \tag{19}$$

Obieg krzywych Γ_1 i Γ_2 przyjęto taki, że obszar z energią znajduje się po lewej stronie poszczególnych krzywych.

Wykorzystując wzory [13]

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\ln(1-\cos^2\beta\cos^2 x)}{1-\cos^2\alpha\cos^2 x}dx = -\frac{\pi}{\sin\alpha}\cdot\ln\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta}, \tag{20a}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{p^2\sin^2 x + q^2\cos^2 x} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{q\cdot p}, \tag{20b}$$

obliczono współczynnik a_1

$$a_1 = \frac{V}{2\left(\ln\frac{R_1}{b} + \ln\frac{a+b}{2a}\right)}.$$

Stąd potencjał pola elektrostatycznego, określony z dokładnością do stałej, wynosi

$$V = \frac{U\ln r}{\ln\frac{a+b}{2a} - \ln b/R_1}. \tag{21}$$

Ze wzorów (10a), (10c) (20a) oraz (21) otrzymuje się

$$C_T = 2\pi\varepsilon l \cdot \frac{\ln\frac{a+b}{2R_1}}{\ln^2\frac{2ab}{R_1(a+b)}}. \tag{22}$$

Dla $a = b = R_2$ wzór (22) przyjmuje postać

$$C_0 = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}, \tag{23}$$

tzn. dla tego przypadku metoda Trefftza prowadzi do rozwiązana dokładnego.

Na podstawie wzoru (22) wykonano krzywą T na rys. 2. Do obliczeń przyjęto $a+b = 2R_2$ const oraz $R_2/R_1 = 2$. Pojemność kondensatora przedstawionego na rys. 1 była wyznaczona w pracy [12] przy użyciu metody Ritza. Wyraża się ona wzorem:

$$C_R = 2\pi\varepsilon l \cdot \frac{\left[\left(\frac{R_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{R_1}{b}\right)^2 - 2\right]^2\left[\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \left(\frac{R_1}{a}\right)^4 - \left(\frac{R_1}{b}\right)^4\right]}{8\left[\frac{3}{8}\left(\frac{R_1}{a}\right)^4 + \frac{1}{4}\left(\frac{R_1}{a}\cdot\frac{R_1}{b}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{R_1}{b}\right)^4 - \left(\frac{R_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{R_1}{b}\right)^2 + 1\right]^2}. \tag{24}$$

Przy tych samych założeniach jak dla krzywej T, na podstawie wzoru (24) sporządzono krzywą R (rys. 2). Pole zakreskowane oznacza obszar, w którym zawiera się wartość rzeczywista pojemności tego układu.

Okładka zewnętrzna początkowo była walcem kołowym o promieniu R_2. W wyniku działania siły zewnętrznej uległa odkształceniu. Przyjmuje się, że zachodzi związek

$$a = R_2 - d; \quad b = R_2 + d.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\beta = \frac{d}{R_2}; \quad \tau = \frac{R_2}{R_1},$$

wzór (22) zapisze się

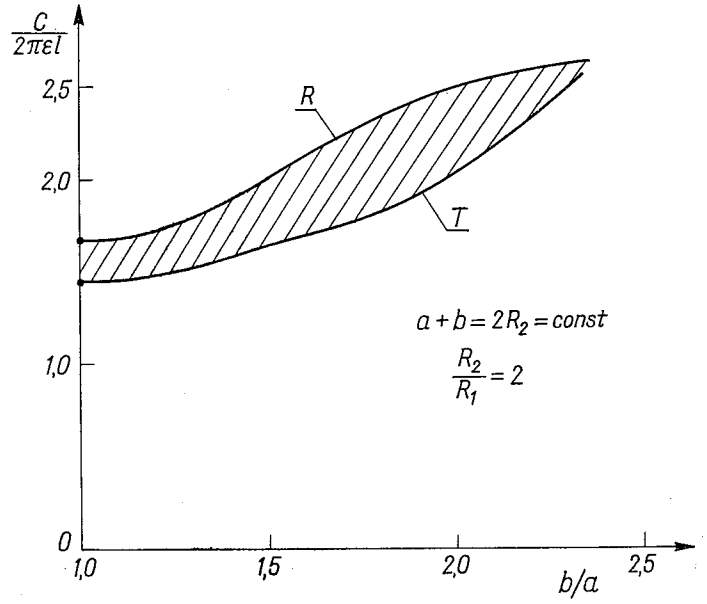
$$C_T = C_0 \cdot \left\{ \frac{\ln \tau}{\ln[\tau(1-\beta^2)]} \right\}^2, \tag{25}$$

gdzie C_0 — pojemność układu przy braku odkształcenia (wzór 23).

Analogicznie dla metody Ritza otrzymano [12]

$$C_R = C_0 \left(1 + 2\beta^2 \frac{\tau^6 + \tau^4 + 2\tau^2 + 8}{\tau^6 - \tau^4 - \tau^2 + 1} \right). \tag{26}$$

Opierając się na wzorach (25) i (26) sporządzono rys. 3 obrazujący przyrost pojemności kondensatora walcowego spowodowany zmianą odkształcenia. Obszar zakreskowany



Rys. 2. Zależność wartości pojemności wyznaczonej metodą Ritza (R) oraz Trefftza (T) od stosunku półosi elipsy b/a

określa przedział, w którym zawiera się rozwiązanie dokładne. Z rys. 3 wynika silna (w przybliżeniu paraboliczna) zależność pojemności kondensatora walcowego od odkształcenia.

Na marginesie obliczeń pojemności omawianego układu należy zwrócić uwagę na ważny fakt. Przy wyznaczaniu potencjału użyto wzoru (16). Okazuje się jednak, że zastosowanie wzoru (9) znacznie upraszcza obliczenia. Wzór (9) dla kondensatora przedstawionego na rys. 2 zapisze się następująco

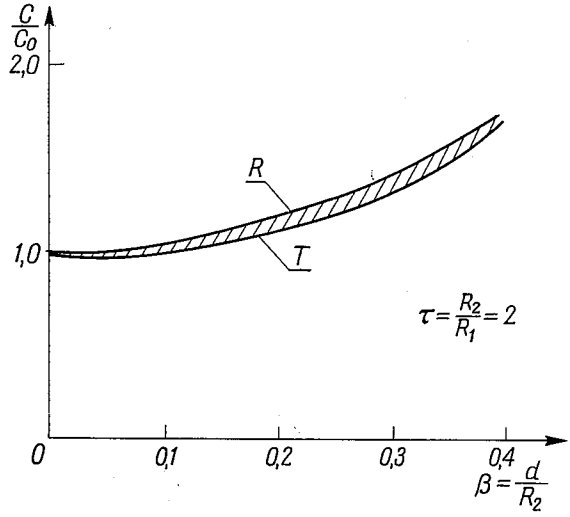
$$F_T = 4l \left\{ \int_0^{\pi/2} \left[\int_{R_1}^{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} \operatorname{grad}^2 V \cdot r dr \right] d\varphi - 2 \int_0^{\pi/2} V \cdot \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=R_1} \cdot R_1 \, d\varphi \right\}, \tag{27}$$

gdzie $V = a_1 \ln r^2$.

W czasie całkowania należy skorzystać ze szczególnego przypadku wzoru (20a). W wyniku minimalizacji znajduje się współczynnik a_1, wartość funkcjonału F_T a tym samym pojemność C_T (wzór 11).

Przewaga tej metody wynika z dwóch faktów:

a) wzór (27) wymaga przeprowadzenia łatwiejszych obliczeń aniżeli wzór (19),



Rys. 3. Zależność pojemności kondensatora walcowego od odkształcenia (d) okładki zewnętrznej

b) stosując wzór (19) należało dodatkowo wyznaczać pojemność, podczas gdy ze wzoru (27) wynika bezpośrednio wartość pojemności.

W związku z powyższym, w następnym przykładzie zostanie wykorzystany wzór (9).

3.2. Kondensator walcowy o przekroju poprzecznym przedstawionym na rys. 4

Na rys. 4 przedstawiono kondensator, którego okładki w przekroju poprzecznym tworzą współśrodkowe kwadraty. Pojemność takiego kondensatora, przy użyciu brzegowej metody najmniejszych kwadratów, wyznaczono w pracy [9]. Autorzy pracy [9] nieszczęśliwie użyli sformułowania sugerującego, że stosują metodę Trefftza[1].

Przyjmuje się, podobnie jak w przykładzie 3.1, dostateczną długość kondensatora l oraz potencjał na okładkach określony wzorem (17). Analogicznie jak w przykładzie 3.1 rozkład potencjału zakłada się w postaci (18).

Uwzględniając symetrię, wzór (9) zapisze się:

$$F_T = 8l\left\{\int_a^b\left[\int_0^x \operatorname{grad}^2 V dy\right]dx + 2V\int_0^a \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=a}\cdot dy\right\}. \tag{28}$$

[1] Autorzy pracy [9] uzyskali wyrażenie określające potencjał z dokładnością do stałej. Przeczy to własności rozwiązania zagadnienia Dirichleta uzyskanego metodą Trefftza — dokładność do stałej addytywnej [3, 4, 8].

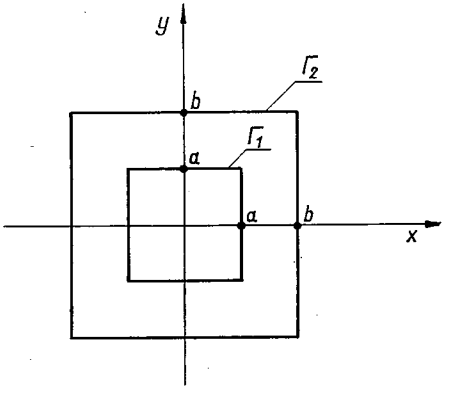
Przeprowadzając minimalizację uzyskuje się:

$$a_1 = -\frac{V}{2\ln b/a} \tag{29}$$

oraz

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln b/a}. \tag{30}$$

Na podstawie wzoru (30) sporządzono krzywą T na rys. 4.



Rys. 4. Przekrój poprzeczny kondensatora walcowego w kształcie współśrodkowych kwadratów

Aby oszacować wartość pojemności, wykorzystana zostanie metoda Ritza [10, 12]. Z powodu trudności związanych z doborem funkcji wypełniającej oba warunki brzegowe (wzór 17), potencjał pola elektrostatycznego przewiduje się w postaci zapewniającej spełnienie tylko jednego warunku brzegowego, np. dla okładki zewnętrznej

$$V|_{\Gamma_2} = 0. \tag{31}$$

Przyjmuje się początkowo, że potencjał spełnia na okładce wewnętrznej następujący warunek brzegowy

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n} + \delta \cdot V\right)\Big|_{\Gamma_1} = \delta \cdot U, \tag{32}$$

gdzie: $\frac{\partial V}{\partial n}$ — pochodna w kierunku normalnym do brzegu Γ_1,

δ — dowolna stała.

Przechodząc do granicy $\delta \to \infty$ zależność (32) przyjmuje postać:

$$V|_{\Gamma_1} = U. \tag{32a}$$

Oznacza to, że potencjał wypełnia już żądany warunek brzegowy.

Rozwiązanie równania Laplace'a (3) przy warunku brzegowym (32) sprowadza się do minimalizacji funkcjonału [2, 4, 6, 8]

$$F = l\left[\iint_D \operatorname{grad}^2 V\,dx\,dy + \delta \int_{\Gamma_1} (V^2 - 2VU)\,ds\right]. \tag{33}$$

Należy podkreślić fakt, że w przypadku funkcjonału (33) postać poszukiwanego potencjału nie musi zapewniać wypełnienia warunków brzegowych.

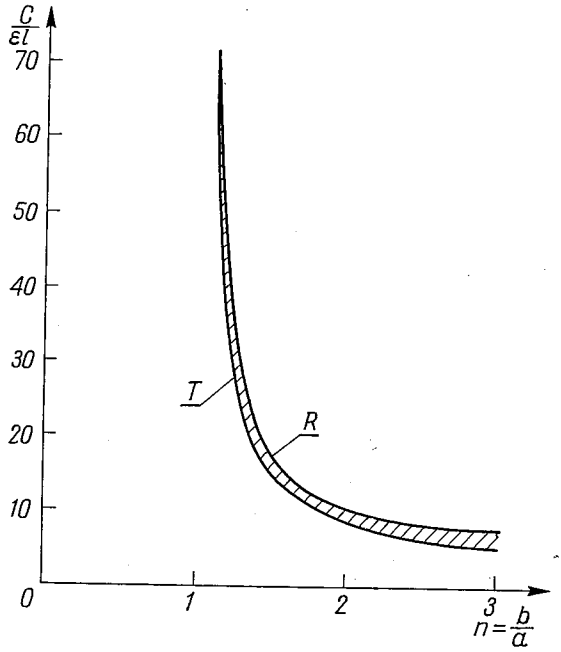
Pierwsze przybliżenie potencjału przyjęto w postaci

$$V = a_1(b^2-x^2)(b^2-y^2). \tag{34}$$

Minimalizowany funkcjonał wyraża się wzorem

$$F_R = 8l\Big[\int_a^b \Big(\int_0^x \operatorname{grad}^2 V dy\Big)\, dx + \delta \int_0^a \Big](V^2-2VU)|_{x=a} \cdot dy. \tag{35}$$

Następnie wykonuje się całkowanie określone wzorem (35) oraz przeprowadza minimalizację funkcjonału. W uzyskanej postaci współczynnika a_1 dokonuje się przejścia granicznego $\delta \to \infty$. Tak otrzymany współczynnik a_1 wyznacza minimum funkcjonału, a tym samym



Rys. 5. Zależność wartości pojemności wyznaczonej metodą Ritza (R) oraz Trefftza (T) od stosunku wymiarów okładek b/a

wartość pojemności. W rezultacie pojemność kondensatora o okładkach pokazanych w przekroju na rys. 4 zapisze się następująco

$$C_R = \frac{160}{9}\varepsilon \cdot l \frac{(8n^6+8n^4-7n^2+3)(3n^2-1)^2}{(n^2-1)(15n^4-10n^2+3)^2}, \tag{36}$$

gdzie

$$n = \frac{b}{a}$$

Opierając się na wzorze (36) sporządzono krzywą R na rys. 5 uzyskując górne oszacowanie wartości pojemności.

W celu uzyskania dokładniejszych wyników należałoby uwzględnić następne przybliżenia. I tak, w metodzie Ritza drugie przybliżenie zapisze się

$$V = (b^2-x^2)(b^2-y^2)[a_1+a_2(x^2+y^2)],$$

a trzecie

$$V = (b^2-x^2)(b^2-y^2)[a_1+a_2(x^2+y^2)+a_3x^2y^2].$$

Analogicznie, drugie przybliżenie w metodzie Trefftza można przyjąć w postaci

$$V = a_1\ln(x^2+y^2)+a_2(x^4-6x^2y^2+y^4).$$

4. WNIOSKI KOŃCOWE

Jak wykazały obliczenia przeprowadzone w punkcie 3, przy wyznaczaniu pojemność wygodniej jest korzystać ze wzoru (9).

Zastosowanie wzoru (9) prowadzi szybciej do obliczenia pojemności, aniżeli wykorzystanie wzoru (16).

Opisana metoda dwustronnego szacowania może być również z powodzeniem wykorzystana przy wyznaczaniu indukcyjności przewodów ferromagnetycznych oraz mocy traconej na prądy wirowe w przypadku słabego zjawiska naskórkowości. Problem ten zostanie omówiony w dalszych pracach autora.

LITERATURA

1. I. B. Altszuler i inni, *Rasczot elektromagnitnych poliej w elektriczeskich maszinach*, Moskwa 1968.
2. J. S. Beresin, N. P. Żidkow, *Mietody wyczislienij*, t. II, Moskwa 1959.
3. M. Sz. Birman, *Wariacjonnyje mietody rieszenja krajewych zadacz, analogicznyje mietodu Treffca*, Wiestnik Leningrodzkowo Uniwersiteta, No 13, 1956.
4. L. Collatz, *Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych*, Warszawa 1967.
5. R. E. Collins, *Prowadzenie fal elektromagnetycznych*, WNT, 1966.
6. Ł. W. Kantorowicz, W. I. Kryłow, *Pribliżennyje mietody wysszewo analiza*, Moskwa 1950.
7. E. Kącki, *Równania różniczkowe cząstkowe w elektrotechnice*, WNT, Warszawa 1971.
8. S. G. Michlin, *Wariacjonnyje mietody w matiematiczeskoj fizikie*, Moskwa 1970.
9. N. N. Miroliubow i inni, *Mietody rascziota elektrostaticzeskich poliej*, Moskwa 1963.
10. J. Purczyński, *Wariacyjne metody obliczania pojemności*, Zeszyty Naukowe Politechniki Szczecińskiej „Elektryka", Nr 14, 1972.
11. J. Purczyński, *Wyznaczanie stacjonarnych pól elektromagnetycznych metodą Ritza*, Zeszyty Naukowe Politechniki Szczecińskiej „Elektryka", Nr 15, 1972.
12. J. Purczyński, R. Sikora, *Zastosowanie metody Ritza do obliczania pojemności*, Archiwum Elektrotechniki, 1973, z. 3.
13. I. M. Ryżyk, I. S. Gradsztejn, *Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów*, PWN, 1964.
14. E. Trefftz, *Ein Gegenstück zum Ritschen Verfahren*, Verhandl. d. 2. Intern. Kongress f. technische Mechanik, Zürich 1926.

J. PURCZYŃSKI

USE OF RITZ AND TREFFTZ METHODS FOR BILATERAL CAPACITY ESTIMATION

Summary

The article proposes bilateral capacity estimation as a result of the employment of Ritz and Trefftz methods. The method takes advantage of the fact that the actual capacity value is confined within a range limited by approximate values determined with Ritz and Trefftz methods.

It has been shown that in capacity calculating the most convenient way is to employ the original form of the functional and not its form transformed into integrals determined along the edge of the area.

J. PURCZYŃSKI

APPLICATION DES MÉTHODES DE RITZ ET DE TREFFTZ À L'ÉVALUATION BILATÉRALE DE LA CAPACITÉ

Résumé

Dans l'étude on a proposé l'emploi des méthodes de Ritz et de Trefftz à l'évaluation bilatérale de la capacité. Ctte méthode met à profit le fait, que la valeur vraie de la capacité se contient dans l'étendue limitée par les valeurs approchées, déterminées à l'aide des méthodes de Ritz et de Trefftz.

On a montré que dans le calcul de la capacité il est le mieux de se servir de la fonctionnelle forme primaire et non de la forme transformée en intégrales définies le long de bord à un domaine.

J. PURCZYŃSKI

AUSNUTZUNG DER RITZ-TREFFTZ-METHODE ZUR DOPPELSEITIGEN KAPAZITÄTSBESCHÄTZUNG

Zusammenfassung

In vorliegender Bearbeitung wurde die doppelseitige Kapazitätsschätzung unter Anwendung der Ritz-Trefftz-Methode vorgeschlagen. Bei dieser Methode wird der Umstand genutzt, daß sich der wirkliche Kapazitätswert in dem durch angenäherte Werte begrenzten Intervall befindet, die mittels der Ritz-Trefftz-Methode bestimmt worden sind.

Es wurde bewiesen, daß es bei der Berechnung der Kapazität am bequemsten ist, die ursprüngliche Funktionalform und nicht deren Umgestaltung in Form der längst des Gebietrandes bestimmten Integrale zu benutzen.

Я. ПУРЧИЬНСКИ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ РИТЦА И ТРЕФТЦА ДЛЯ ДВУХСТОРОННЕЙ ОЦЕНКИ ЕМКОСТИ

Резюме

В труде предложена двухсторонняя оценка емкости как результат применения методов Ритца и Трефтца. Предлагаемый метод использует факт, что действительное значение емкости находится внутри диапазона ограниченного приблизительными значениями, определенными методами Ритца и Трефтца.

Доказано, что при вычислении емкости удобнее всего пользоваться исходным видом функционала не преобразованным до интегралов вдоль контура области.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 4, ss. 767—776

Zastosowanie złącza Josephsona do generacji i detekcji fali akustycznej o bardzo dużej częstotliwości

KRYSTYNA LENCZEWSKA (WARSZAWA)

Instytut Radioelektroniki Politechniki Warszawskiej

MIECZYSŁAW MICHAŁ DOBRZAŃSKI (WARSZAWA)

Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk

Otrzymano 4.4.1975

Technika współczesna wymaga stosowania źródeł fal hiperdźwiękowych o częstotliwości rzędu $10^{11} \div 10^{13}$ Hz. W niniejszej publikacji przedstawiona została metoda generacji i detekcji fononów o częstotliwości rzędu $11^{11} \div 10^{12}$ Hz za pomocą złącza Josephsona.

1. WSTĘP

Akustoelektronika jest stosunkowo nową dziedziną techniki, zajmującą się praktycznym wykorzystaniem sprzężenia występującego pomiędzy polem sprężystym i polem elektromagnetycznym. Wprawdzie pierwsze eksperymenty pochodzą jeszcze z r. 1932 [1], niemniej można przyjąć, że ta nowa dziedzina liczy sobie około 20 lat [2]. W Polsce prace nad akustoelektroniką zostały zapoczątkowane przez Kaliskiego [3] i Maleckiego [4] w latach 1964—1965. Obecnie akustoelektronika jest dziedziną bardzo rozległą; obejmuje ona zarówno wzmacnianie i generację fal akustycznych o bardzo dużych częstotliwościach, jak i linie opóźniające, układy funkcjonalne, syntetyzery obrazów telewizyjnych, liczniki promieniowania radioaktywnego i inne [5], [6].

Szczególnie ważnym i aktualnym kierunkiem badań w akustoelektronice jest technika mikrofalowa. Świadczy o tym chociażby wydanie przed pięcioma laty przez Institut of Electrical and Electronics Engineers wolumenu Microwave Theory and Techniques w całości poświęconego specjalnym zastosowaniem mikrofal akustycznych [7]. Eksperymenty nad generacją mikrofal akustycznych są jednak o wiele starsze, gdyż sięgają końca lat pięćdziesiątych, kiedy to wzbudzono falę akustyczną w sztyfcie kwarcowym przez umieszczenie jego końca w elektromagnetycznym rezonatorze mikrofalowym [8], [9].

Technika współczesna wymaga stosowania fal hiperdźwiękowych o bardzo dużych częstotliwościach. Wynika to z jednej strony z potrzeb fizyki ciała stałego, z drugiej zaś strony — z potrzeb elektroniki kwantowej i techniki mikrofalowej. Obecnie dysponuje się źródłami i odbiornikami fal hiperdźwiękowych w zakresie do 10 THz, a więc sięgającymi

górnej częstotliwości granicznej propagacji fal sprężystych w ciałach stałych. Uzyskanie tak dużych częstotliwości było możliwe dzięki zastosowaniu kwantowych metod generacji [10], bowiem metody klasyczne oparte na wykorzystaniu drgań warstwy cienkiej, pozwalały jedynie na generację w zakresie $3 \cdot 10^8 \div 3 \cdot 10^{10}$ Hz. Warto przy tym zwrócić uwagę na fakt, że ze względu na dokładność obróbki mechanicznej jak i mechaniczne niejednorodności kryształów, do generacji fal terahercowych praktycznie nadają się tylko źródła niekoherentne.

Niekoherentnymi źródłami kwantowymi są źródła termiczne i złącze Josephsona. Generacja termiczna polega na impulsowym pobudzeniu termicznym cienkej warstwy konstantanu naparowanej na płaszczyznę monokryształu kwarcu, szafiru lub alkalicznych związków halidków. Kryształ o długości 1 cm jest umieszczony w kriostacie. Dzięki tej metodzie udało się uzyskać drgania o częstotliwości $8 \cdot 10^{11}$ Hz. Pierwsze eksperymenty przeprowadzono na polikryształach srebra i ołowiu jeszcze w r. 1956, a na monokryształach kwarcu i szafiru w 1964 r. Generacja za pomocą złącza Josephsona, zrealizowana po raz pierwszy przez Eisenmegera w r. 1966 [11], polega na wykorzystaniu efektu tunelowego występującego na złączu dwóch nadprzewodników odpowiednio spolaryzowanych. W wyniku zderzeń swobodnych elektronów z defektami sieci uzyskuje się ciągłe widmo fononów relaksacyjnych, a w wyniku tworzenia się par Coopera powstają monoenergetyczne fonony rekombinacyjne o częstotliwości do 10^{12} Hz w zależności od wielkości przerwy energetycznej.

2. REPREZENTACJA FONONOWA

Z fenomenologicznego punktu widzenia rozchodzenie się fali akustycznej w ciele stałym jest rozprzestrzenianiem się zaburzenia położeń cząsteczek. W modelu klasycznym cząsteczki te są traktowane jako oscylatory sprzężone, między którymi energia jest przekazywana w sposób ciągły. Jednakże wyniki eksperymentalne dotyczące malenia udziału sieci krystalicznej w cieple właściwym wraz z obniżeniem temperatury oraz zmiany wektorów falowych promieniowania rentgenowskiego i neutronowego rozpraszanych niesprężyście przez kryształ, odpowiadające kwantom pola sprężystego, świadczą o skwantowanym charakterze fali akustycznej. Dlatego też w modelu ciała stałego oscylatory klasyczne należało zastąpić przez oscylatory kwantowe, których pobudzenie następuje przez udzielenie im pewnych ilości kwantów energii. Obrazem fizycznym łańcucha oscylatorów kwantowych jest zatem strumień oscylatorów zindywidualizowanych, o różnych stopniach pobudzenia i różnych częstotliwościach własnych. Traktując każdy ze wspomnianych oscylatorów zindywidualizowanych jako zespół identycznych cząstek o tym samym wektorze falowym, przechodzi się do modelu fononowego rozchodzenia się fali akustycznej w ciele stałym.

Występuje szereg analogii między kwantowym ujęciem pola elektromagnetycznego i pola sprężystego. Fonon, podobnie jak foton, ma przypisaną energię hf, gdzie h jest stałą Plancka a f — częstotliwością, przy czym ze względu na całkowity spin oba rodzaje cząstek podlegają statystyce Bosego-Einsteina. Formalna różnica tkwi w tym, że fotony rzeczywiste mają dwie wartości własne spinu, podczas gdy spin fononów może przybierać war-

tości -1, 0, $+1$. Znaczenie tego jest niebagatelne, gdyż zgodnie z formalizmem teorii cząstek elementarnych fonony winny mieć w takim razie niezerową masę spoczynkową. Można oszacować jej rząd, pomijając trudności interpretacyjne wynikające z takiego postępowania. Otrzymuje się wtedy, że masa spoczynkowa fononu winna być mniejsza od 10^{-50} g [12], a więc jest mniejsza również od postulowanej przez de Broglie'a masy spoczynkowej fotonu.

Zarówno w przypadku pola elektromagnetycznego, jak i w przypadku pola sprężystego reprezentacja korpuskularna ma praktyczny sens dopiero dla odpowiednio dużych częstotliwości, przy czym dla pola sprężystego częstotliwość graniczna, od której należy stosować model fononowy, jest silnie zależna od temperatury, a dla temperatur kriogenicznych odpowiada częstotliwościom megahercowym [13], [14].

W akustoelektronice kwantowej istotną rolę odgrywają bardzo niskie temperatury, co jest związane z anharmonicznością oddziaływań w kryształach rzeczywistych, mającą istotny wpływ na długość średniej drogi swobodnej fononów. Zainteresowanie badaczy niskimi temperaturami pozwoliło na odkrycie szeregu nowych efektów. W 1947 r. udało się uzyskać, przewidziany teoretycznie jeszcze w r. 1938 przez Tisza (por. [15]), efekt polegający na generacji przy pomocy fali akustycznej fluktuacji entropii rozchodzących się w postaci nietłumionej i nie ulegającej dyspersji fali, tzw. drugiego dźwięku. W 1961 r. wykorzystaną akcję maserową budując fononowy maser paramagnetyczny pracujący w temperaturze 1,5 K [16]. W r. 1966 zastosowano złącze Josephsona do generacji i detekcji fal akustycznych. W chwili obecnej prowadzone są badania nad nieliniowymi efektami akustoelektrycznymi w nadprzewodnikach: powstawaniem prądu stałego w nadprzewodniku pod wpływem bieżącej fali akustycznej [17] oraz powstawaniem strumienia magnetycznego wewnątrz obwodu nadprzewodzącego, w którym rozchodzi się fala akustyczna [18].

3. NADPRZEWODNICTWO

Zjawisko nadprzewodnictwa, odkryte przez holenderskiego uczonego Kamerlingha Onnesa w r. 1911, charakteryzuje się tym, że w temperaturach kriogenicznych dla wielu metali zanika oporność elektryczna. Temperatura przejścia w stan nadprzewodzący jest wielkością charakterystyczną dla danej substancji i dla znanych nadprzewodników nie przekracza 20 K.

Według określenia Londona z r. 1935, stan nadprzewodnictwa jest dalekosiężnym uporządkowaniem ruchu większości elektronów w całej objętości metalu. Najlepiej tłumaczącą naturę nadprzewodnictwa teorią jest sformułowana w r. 1957 teoria Bardena, Coopera, Schrieffera, tzw. teoria BCS:

— nadprzewodnictwo jest związane ze zmianą zachowania się elektronów będących nośnikami prądu, polegającą na ich dalekim uporządkowaniu oraz występowaniu w ich widmie enegetycznym przerwy rzędu 10^{-4} eV,
— wprawdzie własności sieci krystalicznej nie ulegają zmianie, niemniej występowanie efektu izotopowego świadczy o istnotnej roli sieci krystalicznej,
— przejście ze stanu nadprzewodzącego do stanu normalnego jest przejściem fononowym drugiego rodzaju.

Problem oddziaływań między elektronami w stanie nadprzewodzącym został rozwiązany dzięki pracom Fröhlicha, który badając oddziaływanie elektronów z siecią krystaliczną stwierdził możliwość istnienia oddziaływań będących wynikiem wirtualnej wymiany fononów. Ze szczegółowych rozważań wynika, że jeżeli $E_1 - E_2 < hf$, gdzie E_1 i E_2 są energiami elektronu przed i po emisji fononu a f jest jego częstotliwością, to końcowym efektem jest pojawienie się przyciągania między dwoma elektronami.

Dalszy krok na drodze mikroskopowej teorii nadprzewodnictwa uczynił Cooper. Wykazał on, że jeśli między dwoma elektronami wprowadzonymi do metalu w temperaturze zera bezwzględnego istnieje choćby niewielkie przyciąganie, to mogą one utworzyć stan związany. W stanie tym elektrony ulegają wielokrotnemu rozproszeniu z jednoczesną zmianą pędów w przedziale $\Delta p = \frac{mhf_L}{p_F}$ wokół powierzchni Fermiego (m — masa elektronu, f_L — średnia częstotliwość fononów typowa dla danej sieci, p_F — pęd Fermiego), przy czym zostaje zachowany stały prąd wypadkowy. Proces ten spisuje dwuelektronowa funkcja stanu:

$$\Phi(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = \sum_{i,j} a_{ij} \Psi(\underline{r}_{n-1}, p) \Psi(\underline{r}_n, p_j), \tag{1}$$

gdzie $\Psi(\underline{r}, p)$ jest jednoelektronową funkcją stanu, zaś a_{ij} jest amplitudą prawdopodobieństwa znalezienia pary elektronów o indywidualnych pędach zawartych w przedziale Δp, spełniających relację $p_i + p_j = \text{const}$.

Proces wzajemnego wielokrotnego rozpraszania prowadzi do obniżenia energii potencjalnej układu. Maksymalne obniżenie energii występuje w przypadku sparowania elektronów o równych lecz przeciwnie skierowanych pędach oraz przeciwnych spinach. Równanie (1) przybiera wtedy postać:

$$\Phi(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = \sum_{i} a_i \Psi(\underline{r}_{n-1}, p_i, \uparrow) \Psi(\underline{r}_n, -p_i, \downarrow) \tag{2}$$

i opisuje twór nazwany parą Coopera. Analiza dokonana przez Coopera doprowadziła do wniosku, że przy tworzeniu się pary elektronów o równych lecz przeciwnych pędach, obniżenie energii potencjalnej związane z oddziaływaniem między elektronami przewyższa przyrost energii kinetycznej ponad wartość $2E_F$, gdzie przez E_F oznaczono energię Fermiego.

Powyższe wyniki zostały zaadoptowane przez Bardeena, Coopera i Schrieffera do badań nad oddziaływaniami między wieloma elektronami i opublikowane w r. 1957. Podstawowe założenia teorii BCS mówią, że w stanie nadprzewodnictwa istotne są jedynie te oddziaływania, które prowadzą do powstawania par Coopera. Ponadto teoria zakłada, że wpływ wszystkich pozostałych elektronów na dowolną parę Coopera ogranicza jedynie, zgodnie z zasadą Pauliego, liczbę stanów, do których oddziaływająca para może być rozpraszana.

W metalu w temperaturze zera bezwzględnego, gdzie rozkład elektronów opisany jest statystyką Fermiego-Diraca, można utworzyć stan o niższej energii przez powstanie pary Coopera. Jest to możliwe również i dla wielu par, co oznacza dalsze obniżenie energii. Wynika to stąd, że taka sama funkcja stanu Φ może opisywać więcej niż jedną parę ele-

ktronów. A zatem wszystkie elektrony nadprzewodzące mogą być reprezentowane przez wieloelektronową funkcję stanu będącą iloczynem funkcji stanu poszczególnych par:

$$\Phi(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \ldots, \underline{r}_n) = \Phi(\underline{r}_1, \underline{r}_2)\cdot\Phi(\underline{r}_3, \underline{r}_4)\ldots\Phi(\underline{r}_{n-1}-\underline{r}_n), \tag{3}$$

gdzie: $n/2$ jest całkowitą liczbą par, $\underline{r}_n$ określa położenie n-tego elektronu a funkcje Φ, takie same dla wszystkich par, opisane są równaniem (2).

Z postaci wieloelektronowej funkcji stanu wynika, że:
— nie ma jakichkolwiek ograniczeń ilości par,
— pary podlegają statystyce Bosego-Einsteina,
— wszystkie pary znajdują się w identycznym stanie kwantowym.

Funkcja stanu opisana równaniem (3) odpowiada więc stanowi o najmniejszej energii całkowitej, tzw. stanowi podstawowemu. Wzbudzenie nadprzewodnika do stanu wyższego przez podniesienie jego temperatury lub oświetlenie go światłem o odpowiedniej długości fali nie może zwiększyć energii pary przez zwiększenie pędów poszczególnych elektronów. Dostarczona z zewnątrz energia może jedynie rozbić parę Coopera. Wartość tej energii wynosi:

$$E = \left|\sqrt{E_i - E_F^2 + \Delta^2}\right| + \left|\sqrt{E_j + E_F^2 + \Delta^2}\right|, \tag{4}$$

gdzie Δ ma wymiar energii i określona jest zależnocią:

$$\Delta = 2\hbar\omega_D \exp(-2\pi^2\hbar^2 v_F p_F g, \tag{5}$$

przy czym: $\hbar$ jest określoną stałą Plancka, ω_D jest częstotliwością Debyea, v_F i p_F są prędkością i pędem Fermiego, g jest stałą charakteryzującą oddziaływanie elektron-fonon. Tak więc najmniejsza wartość enegii niezbędna do rozerwania pary wynosi w temperaturze zera bezwzględnego 2Δ. W widmie wzbudzenia nadprzewodnika istnieje zatem przerwa energetyczna o wartości 2Δ. Istnienie przerwy energetycznej ma dwa następstwa: po pierwsze, po rozerwaniu pary Coopera znika jej energia wiązania, po drugie, jeżeli stan $p\uparrow$ zostaje obsadzony przez elektron powstały w wyniku rozbicia pary, a stan $-p\downarrow$ jest pusty, to istniejące pary nie mogą być rozproszone do stanu $p\uparrow$ i $-p\downarrow$. Wtedy ilość aktów rozproszeniowych par maleje, co w rezultacie zmniejsza energię wiązania. Proces ten w prosty sposób wyjaśnia zjawisko zwężenia się przerwy energetycznej w funkcji wzrostu temperatury. Natomiast przewidziany teoretycznie związek między wielkością przerwy energetycznej w temperaturze zera bezwzględnego a temperaturą krytyczną wyjaśnia pochodzenie efektu izotopowego:

$$2\Delta(0) = 3{,}5 k_B T_c, \tag{6}$$

gdzie k_B jest stałą Boltzmana, T_c jest temperaturą krytyczną.

Uwzględniając w wyrażeniu (6) wartość $\Delta(0)$ ze wzoru (5), otrzymuje się wyraźną zależność temperatury przejścia od masy atomowej, ponieważ częstotliwość Debyea jest proporcjonalna do pierwiastka z masy atomowej.

Skokową zmianę wartości cipła właściwego metalu przy przejściu ze stanu normalnego w stan nadprzewodzący, przy braku ciepła utajonego (przejście fazowe drugiego rodzaju), teoria BCS wyjaśnia zmianę elektronowego ciepła właściwego. Dla temperatur bliskich temperaturze przejścia w nadprzewodniku zmniejszanie się przerwy energetycznej przy wzroście temperatury powoduje szybsze zwiększanie się elektronowego ciepła właściwego

niż w stanie normalnym. Stopniowy zanik przerwy energetycznej sprawia, że całkowita energia elektronów w temperaturze przejścia jest taka sama niezależnie od kierunku zmiany temperatury.

4. ZŁĄCZE JOSEPHSONA JAKO GENERATOR I DETEKTOR FAL HIPERDŹWIĘKOWYCH

W r. 1962 Josephson na podstawie teoretycznej analizy zjawiska nadprzewodnictwa stwierdził, że można spowodować przepływ prądu nadprzewodzącego przez przerwę izolującą dwa ciała nadprzewodzące. Wykazał on ponadto, że ten prąd tunelowy może przybierać dwie postacie: stałoprądową i zmiennoprądową. Skonstruowanie w r. 1963 złącza tunelowego [19] pozwoliło na eksperymentalne potwierdzenie istnienia stałoprądowego i zmiennoprądowego efektu Josephsona. W r. 1965 Langenberg, Scalpino i Taylor wykorzystali efekt zmiennoprądowy do generacji fal elektromagnetycznych o bardzo dużych częstotliwościach. Natomiast w r. 1966 Eisenmenger i Dayem zastosowali złącze nadprzewodnikowe do generacji i detekcji fal hiperdźwiękowych [11].

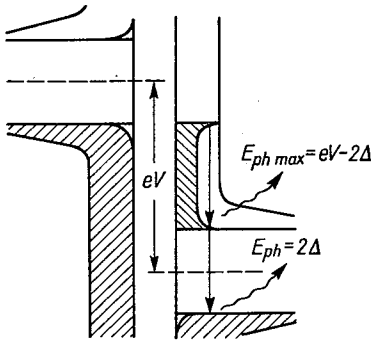
Generacja fal sprężystych za pomocą złącza Josephsona jest możliwa dzięki tunelowaniu elektronów niesparowanych poprzez warstwę izolacyjną. Pobudzenie następuje przeważnie dwustopniowo poprzez emisję niekoherentnych fononów relaksacyjnych i rekombinacyjnych [20]. Emisja fononów relaksacyjnych wynika ze zmiany poziomów energetycznych przez elektrony wzbudzone na skutek efektu tunelowania, natomiast emisja fononów rekombinacyjnych wynika z efektu łączenia się elektronów w pary Coopera. Emisji fononowej może towarzyszyć emisja fotonów relaksacyjnych i rekombinacyjnych, lecz udział ich jest pomijalny w porównaniu z udziałem fononów.

Złącze generujące falę hiperdźwiękową składa się z dwóch nadprzewodników o grubości rzędu 10^3 Å, rozdzielonych warstwą izolującą o grubości około 10 Å. Powierzchnia generująca jest rzędu 1 mm^2. Dla uzyskania efektu tunelowego dla elektronów niesparowanych konieczna jest zewnętrzna polaryzacja stałym potencjałem. Wartość polaryzacji winna odpowiadać co najmniej szerokości przerwy energetycznej, tzn. $U \geqslant 2\Delta/e$, gdzie e jest ładunkiem elektronu. Identyczne złącze, lecz o polaryzacji $U < 2\Delta/e$, może być użyte do detekcji fal hiperdźwiękowych.

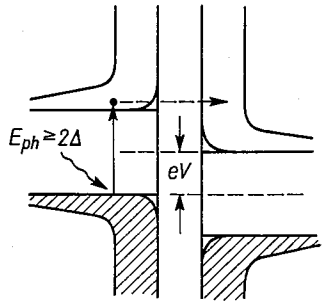
Prostą ilustrację generacji (rys. 1) i detekcji fonowej (rys. 2) uzyskuje się korzystając z półprzewodnikowego modelu poziomów energetycznych dla złącza utworzonego z dwóch identycznych nadprzewodników. Przy potencjale polaryzacyjnym $U \geqslant 2\Delta/e$ następuje, jak pokazano na diagramie, tunelowanie elektronów niesparowanych z dolnego pasma nadprzewodnika spolaryzowanego ujemnie do górnego pasma nadprzewodnika spolaryzowanego dodatnio. Ilość tunelujących elektronów, a więc i wartość prądu tunelowego jest proporcjonalna do ilości stanów zajętych o energii E_i w nadprzewodniku spolaryzowanym ujemnie i do ilości stanów pustych o takiej samej energii w nadprzewodniku spolaryzowanym dodatnio. Energia tunelujących elektronów zawarta jest w granicach $\Delta \leqslant E_i \leqslant eU-\Delta$. Elektrony dążąc do zajęcia niższych poziomów energetycznych emitują w czasie 10^{-9} s [21] nadmiar energii w postaci fononów relaksacyjnych o widmie zawartym w paśmie od 0 do $eU-2\Delta$. Następnie w czasie około 10^{-7} s [41], [42] w wyniku łączenia się w pary Coopera powstają fonony rekombinacyjne o częstotliwości odpowiadającej

szerokości przerwy energetycznej. Przy przerwach energetycznych rzędu 1 meV występujących w znanych nadprzewodnikach uzyskuje się falę hiperdźwiękową o częstotliwościach od 100 GHz do 1 THz.

W eksperymencie dokonanym przez Eisenmengera, w którym użyto złącza Sn-SnO_3-Sn, częstotliwość fononów rekombinacyjnych wynosiła około 280 GHz (przerwa energetyczna dla cyny w temperaturze 1,2 K jest równa 1,15 meV. Złącze użyte do detekcji fal hiperdźwiękowych spolaryzowane było tak, że prąd tunelowy bezpośrednio nie płynął (rys. 2).



Rys. 1. Generacja fononów $eV \geqslant 2\Delta$



Rys. 2. Detekcja fononów $0 < eV < 2\Delta$

Fonony o energii nie mniejszej od 2Δ, padające na złącze spolaryzowane ujemnie, rozbijając pary Coopera wytwarzały elektrony wzbudzone tunelujące do warstwy nadprzewodnika o polaryzacji dodatniej. Wartość tak wytworzonego prądu tunelowego jest proporcjonalna do ilości rozbitych par, a tym samym i do ilości absorbowanych fononów; prąd tunelowy jest więc proporcjonalny do natężenia fali hiperdźwiękowej. Ze względu na to, że jedynie fonony o energii większej od 2Δ mogą rozbijać pary, detektor fononów jest selektywny częstotliwościowo.

LITERATURA

1. P. Debye, F. W. Sears, *On the Scattering of Ligt by Supersonic Waves*, Proc. Nat. Acad. Sci., **18**, 6, 409 (1932).
2. R. H. Parmenter, *The Acousto-Electric Effect*, Phys. Rev., **89**, 5, 990 (1953).
3. S. Kaliski, *Wzmocnienie elektro-magneto-ultradźwiękowych fal za pomocą zewnętrznego strumienia elektronów*, Biul. WAT, **14**, 1, 12 (1965).
4. I. Malecki, *Pola skojarzone elektromagnetyczne i sprężyste i ich zastosowanie w akustyce*, Arch. Ak., **1**, 51 (1966).
5. W. Pajewski, *Fale akustyczne w elektronice*, Rozpr. Elektr., **18**, 2, 285 (1972).
6. J. Żmija, *Zastosowanie związków półprzewodnikowych typu A^{II} B^{VI} z dużą przerwą energetyczną*. Post. Fiz., **24**, 1, 111 (1973).
7. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, (USA) **17**, 11 (1969).
8. K. N. Baransky, *Excitation of hypersonic oscillations in quartz*, DAN (Sov. Res. Phys.), **114**, 3, 517 (1957).
9. H. E. Bömmel, K. Dransfeld, *Excitation of Very-High-Frequency Sound in Quartz*, Phys. Rev. Lett., **1**, 234 (1958).

10. M. M. Dobrzański, K. Lenczewska, *Kwantowe źródła fali hiperdźwiękowej*, Arch. Ak., **10**, 3, 205 (1975).
11. W. Eisenmenger, A. H. Dayem, *Quantum Generation and Detection of Incoherent Phonons in Superconductors*, Phys. Rev. Lett., **18**, 4, 125 (1967).
12. M. M. Dobrzański (praca nie opublikowana).
13. M. M. Dobrzański, *Quantization Conditions for the Acoustic Field and Transition to the Phonon Representation*, Bull. Ac. Pol. Sci. Sér. sci. tech., **22**, 2, 9 (1974).
14. I. Malecki, *Znaczenie przedstawienia kwantowego we współczesnej akustyce*, Arch. Ak., **9**, 3, 303 (1974).
15. L. Tisza, *Sur la supraconductibilité thermique de l'helium II liquide et la statistique de Bose-Einstein*, CR Acad. Sci., Paris, 207, 1035 (1938).
16. E. B. Tucker, *Amplification of 9,3 kMc/sec Ultrasonic Pulses by Maser Action in Ruby*, Phys. Rev. Lett., **6**, 10, 547 (1961).
17. Yu. M. Galperin, W. L. Gurewicz, W. I. Kozub, *Nonlinear Acoustic Effects in Superconductors*, JETF, **65**, 1045 (1973).
18. Yu. M. Galperin, W. L. Gurewicz, W. I. Kozub, *On Sound-Electrical Effect in Superconductors*, Solid St. Phys. (sov.), **16**, 4, 1151 (1974).
19. J. Giaever, *Metal-Insulator-Metal Tunnelling*, in: *Tunnelling Phenomena in Solids*, Ed.: E. Burstein, S. Lundqvist. Plenum Press, New York 1969.
20. J. W. Wilkkins, *Multiparticle Tunnelling*, ibid.
21. J. R. Schrieffer, *Single Particle Tunnelling in Superconductors*, ibid.

K. LENCZEWSKA, M. M. DOBRZAŃSKI

APPLICATION OF JOSEPHSON JUNCTION IN GENERATION AND DETECTION OF HIGH FREQUENCY WAVES ACOUSTICS

Summary

Present-day technique requires the sources of hypersonic waves with frequency range from 10^{11} Hz to 10^{13} Hz. Generation and detection of these waves at frequency about 10^{11} Hz may be accomplished by means of Josephson contact. Phonon generation and detection may be used for the investigation of acoustic electron resonance and for energy gap measurements in superconductors.

K. LENCZEWSKA, M. M. DOBRZAŃSKI

APPLICATION DE LA JONCTION DE JOSEPHSON POUR LA GÉNÉRATION ET LA DÉTECTION LES ONDES ACOUSTIQUES À TRES HAUTE FRÉQUENCE

Résumé

La technique contemporaine exige des sources des ondes hypersoniques des fréquences 10^{11} Hz-10^{13} Hz. La génération et la détection des ondes aux fréquences plus élevées de 10^{11} Hz est possible à l'aide de la jonction de Josephson. Ctte méthode peut être utilisée pour la résonance acousto-électronique et pour le mesurage de la largeur de la bande 2Δ à l'état supraconducteur.

K. LENCZEWSKA, M. M. DOBRZAŃSKI-

ANWENDUNG DER JOSEPHSON-VERBINDUNG ZUR GENERATION UND DETEKTION EINER AKUSTISCHEN WELLE MIT SEHR GROßER FREQUENZ

Zusammenfassung

Die moderne Technik verlangt die Anwendung von Quellen von Hypertonwellen mit einer Frequen der Ordnung $10^{11} \div 10^{13}$ Hz. In der voliegenden Publikation wurde eine Methode der Generation und

Detektion von Schallquanten mit einer Frequenz der Ordnung $11^{11} \div 10^{12}$ Hz mittels einer Josephson-Verbindung dargestellt.

К. ЛЕНЧЕВСКА, М. М. ДОБЖАНЬСКИ

ПРИМЕНЕНИЕ ПЕРЕХОДА ДЖОЗЕФСОНА ДЛЯ ГЕНЕРАЦИИ И ДЕТЕКЦИИ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЫ

Р е з ю м е

Современной технике необходимы источники гиперзвуковых волн частотой 10^{11} Гц $\div 10^{13}$ Гц. Генерация и детекция волн с частотами превышающими 10^{11} Гц реали реализируются при использовании перехода Джозефсона. Этот метод генерации и детекции фононов может быть удобен для получения акусто-электронного резонанса и измерения энергетических параметров в сверхпроводниках.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1976, 22, z. 4, ss. 777—802

621.314.21

Obliczanie optymalnych wymiarów podstawowych części czynnych transformatorów energetycznych

ZYGMUNT RYDZEWSKI (ŁÓDŹ), MARIAN JAROSZEWSKI (ŁÓDŹ)

Instytut Transformatorów, Maszyn i Aparatów Elektrycznych Politechniki Łódzkiej

Otrzymano 19.6.1975

W pracy przedstawiono algorytm obliczania na elektronicznej maszynie cyfrowej (EMC) optymalnych wymiarów podstawowych części czynnych trójfazowych transformatorów energetycznych dwu-uzwojeniowych. Za kryterium optymalizacji przyjęto minimalny koszt materiałów czynnych transformatora. Program na EMC opracowano w czterech odmianach: z ograniczeniem na wartość indukcji w kolumnie rdzenia ze względu na prąd stanu jałowego i bez takiego ograniczenia w zastosowaniu do transformatorów, których rdzeń ma powierzchnię przekroju kolumny s_k równą powierzchni przekroju jarzma s_j oraz dla transformatorów z rdzeniem o $s_j > s_k$.

W toku obliczeń sprawdza się również obciążalność cieplną uzwojeń przy pracy znamionowej. Dane wejściowe do programu na EMC stanowią: znamiona transformatora, odstępy izolacyjne, współczynnik zapełnienia uzwojeń i inne w liczbie 46, wszystkie łatwe do przygotowania.

Program na EMC w języku ALGOL realizowany jest na maszynie Odra 1204 w ciągu około 1 minuty. W wyniku obliczeń otrzymuje się optymalne wymiary podstawowe rdzenia i odpowiadające im napięcie na zwój, indukcję w kolumnie i jarzmie, koszty i masy materiałów czynnych, naprężenia w materiale przewodowym uzwojeń od sił promieniowych oraz wymiary obrysu uzwojeń. Na tej podstawie można łatwo, już bezpośrednio, zaprojektować dokładnie uzwojenia zoptymalizowanego transformatora.

1. WSTĘP

Obliczanie trójfazowego transformatora energetycznego mimo ustalonych od dawna wzorów jest pracochłonne. W szczególności jeżeli dąży się przy obliczaniu transformatora do wyznaczania jego optymalnych wymiarów z punktu widzenia ekonomicznego, przy zachowaniu określonych wymagań technicznych.

Poprawnie obliczony transformator powinien posiadać żądane znamiona, a w tym zadane straty jałowe i obciążeniowe, napięcie zwarcia oraz prąd stanu jałowego. Projektowany transformator powinien także odpowiadać wymaganiom norm w zakresie wytrzymałości dielektrycznej, cieplnej i dynamicznej uzwojeń. Ponadto części czynne transformatora, rdzeni i uzwojenia mogą być wykonywane z różnych materiałów, o różnych własnościach fizycznych i cenach.

W związku z takim stanem rzeczy oczywista staje się potrzeba opracowania metody obliczania optymalnych wymiarów części czynnych transformatorów energetycznych przy wykorzystaniu elektronicznych maszyn cyfrowych (EMC).

W literaturze przedmiotu można znaleźć szereg metod obliczania optymalnych wymiarów podstawowych części czynnych transformatora [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9]. Niektóre z nich mogą być podstawą do opracowania algorytmów obliczeń na EMC.

W zastosowaniu maszyn cyfrowych do obliczania transformatorów obserwuje się dwie tendencje. Jedna z nich polega na opracowaniu algorytmów obliczania transformatora, łącznie z automatycznym projektowaniem uzwojeń. Drugie ujęcie sprowadza się do obliczania na maszynie cyfrowej podstawowych wymiarów i głównych parametrów. Pozwala to, już bezpośrednio w sposób łatwy, zaprojektować uzwojenia wykorzystując wszystkie ograniczenia wynikające z zasad ich konstruowania i przyjętej technologii. Taka procedura projektowania optymalnego transformatora skraca bardzo program obliczeń optymalnych na EMC oraz daje konstruktorowi pewną swobodę przy projektowaniu uzwojeń. Wymagania, które muszą być spełnione w tym przypadku, są trudne do zaprogramowania i czasochłonne przy realizacji na maszynie cyfrowej.

W niniejszym artykule przyjęto zasadę obliczania tylko podstawowych wymiarów części czynnych transformatora. Algorytm obliczenia optymalnych wymiarów podstawowych części czynnych został opracowany dla trójfazowych transformatorów dwuuzwojeniowych z rdzeniem kolumnowym. Danymi wejściowymi dla przeprowadzenia omawianych obliczeń optymalnych, które należy zadać, oprócz znamion transformatora, są pewne jego parametry konstrukcyjne na ogół łatwe do określenia w praktyce obliczeniowej. Należą do nich między innymi współczynniki zapełnienia uzwojeń materiałem przewodowym k_u, współczynnik strat dodatkowych w uzwojeniach k_d i w rdzeniu k_o, odległości izolacyjne oraz niektóre inne dane, jak na przykład ceny jednostkowe materiałów czynnych.

Wykaz oznaczeń

α — Współczynnik poprawkowy przyjęty przy określeniu średniej średnicy uzwojeń transformatora (por. wzór (7))

β — Współczynnik poprawkowy przyjęty przy określaniu średniej średnicy szczeliny rozproszeniowej (por. wzór (26))

γ — Przewodność właściwa materiału

Δ — Szerokość promieniowego kanału chłodzącego

$(\Delta P_{u75})_i$ — Straty obciążeniowe w temperaturze 75°C i-tego uzwojenia

ΔP_o — Straty jałowe transformatora

ΔP_{o_h} — straty jałowe transformatora hipotetycznego o $s_j = s_k$

ΔP_{o_j} — Straty jałowe w jarzmach rdzenia

ΔP_{o_k} — Straty jałowe w kolumnach rdzenia

δ_{02} — Szerokość szczeliny izolacyjnej między kolumną transformatora a uzwojeniem DN

δ_{12} — Szerokość szczeliny rozproszeniowej

δ_{11} — Szerokość szczeliny między uzwojeniami GN w oknie transformatora

δ — Średnia szerokość osiowego kanału chłodzącego

δ_{K1}, δ_{K2} — Szerokość kanałów chłodzących w uzwojeniach 1 oraz 2

δ'_K — Zastępcza szerokość kanałów chłodzących

δ' — Szerokość zastępczej szczeliny rozproszeniowej
ε — Dopuszczalna odchyłka pomiędzy stratami jałowymi obliczonymi i założonymi przy $s_j > s_k$
η — Współczynnik wykorzystania koła opisanego na schodkowym przekroju rdzenia
η_1 — Współczynnik określony wzorem (33)
χ — Współczynnik, por. wzór (20)
Π — Wielkość określona wzorem (41)
Π' — Wielkość określona wzorem (45)
φ — Wielkość określona wzorem (20)
ψ — Zakres regulacji napięcia w procentach
ω_i — Wielkość określona wzorem (59) dla i-tego uzwojenia
A — Obciążenie liniowe
a_i — Szerokość i-tego uzwojenia bez uwzględnienia kanałów chłodzących
B_k — Indukcja w kolumnie
b — Wielkość określona wzorem (43b)
C — Wielkość określona wzorem (8)
c — Szerokość przewodu profilowego w izolacji
c_t — Współczynnik wzrostu oporu elektrycznego zależny od temperatury
D_k — Średnica koła opisanego na kolumnie transformatora
D_i — Średnica średnia i-tego uzwojenia
$D_{śr}$ — Średnia arytmetyczna średnich średnic uzwojeń GN i DN
D_{zew1} — Zewnętrzna średnica uzwojenia GN
D_{wew2} — Wewnętrzna średnica uzwojeń DN
d_i — Wielkość określona wzorami (61) i (62a)
E — Siła elektromotoryczna
e — Wielkość określona wzorem (10)
e' — Napięcie zwojowe
f — Częstotliwość
g — Wielkość określona wzorem (65)
g_{min} — Wielkość określona wzorem (66)
g_u — Masa właściwa materiału nawojowego
g_{Fe} — Masa właściwa blachy transformatorowej
h' — Wysokość przewodu profilowego w izolacji
h — Powiększenie średnicy D_k w toku każdych kolejnych obliczeń — krok w obliczeniach na EMC
j — Gęstość prądu
K — Koszt części czynnej
K_u — Koszt części czynnej uzwojeń
K_{Fe} — Koszt czynnego żelaza
K_1 — Wielkość określona wzorem (33)
k_d — Współczynnik strat dodatkowych w uzwojeniach
k_i — Współczynnik zapełnienia uwzględniający izolację blach
k_o — Współczynnik strat dodatkowych dla blach

k_R — Współczynnik Rogowskiego
k_u — Średni współczynnik zapełnienia uzwojeń
k_{ui} — Współczynnik zapełnienia i-tego uzwojenia, i — 1,2
k_z — Współczynnik powiększający obliczoną ze wzoru teoretycznego wartość składowej biernej napięcia zwarcia
L_k — Wysokość kolumny
L_j — Długość jarzma
L_u — Wysokość uzwojeń
$l_{śri}$ — Średnia długość zwojów i-tego uzwojenia
M — Odstęp między osiami
M_{Fe} — Masa rdzenia
M_u — Masa uzwojenia — średnia
M_{ui} — Masa i-tego uzwojenia
m — liczba warstw w uzwojeniu
m_1 — odstęp izolacyjny uzwojeń od jarzm (por. rys. 2)
m_{Fe} — Cena jednostkowa blachy transformatorowej
m_u — Cena jednostkowa uzwojeń
n_{ki} — Liczba osiowych kanałów chłodzących w i-tym uzwojeniu
p — Stratność blachy transformatorowej
p' — Wielkość określona wzorem (47a)
p_u — Wielkość określona wzorem (37)
q — Obciążenie cieplne powierzchni
q' — Wielkość określona wzorem (47b)
R_{f20} — Rezystancja fazowa uzwojenia w temperaturze 20°C
S_n — Moc znamionowa transformatora
s_i — Przekrój przewodów i-tego uzwojenia
s_j — Przekrój jarzma
s_k — Przekrój kolumny
s_u — Zastępczy przekrój przewodu nawojowego (por. wzór (19))
T — Szerokość okna transformatora
U_{nfi} — Fazowe napięcie znamionowe i-tego uzwojenia
u_R — Składowa czynna napięcia zwarcia
u_x — Składowa bierna napięcia zwarcia
u_z — Napięcie zwarcia
x — Wielkość określona wzorem (3)
y — Wielkość określona wzorem (3)
z — Liczba zwojów
z_D — Pierwsza wartość średnicy kolumny podstawiona przy obliczeniach na EMC

2. ZAŁOŻENIA METODY OBLICZEŃ OPTYMALNYCH WYMIARÓW PODSTAWOWYCH CZĘŚCI CZYNNYCH TRANSFORMATORA

Obliczenie optymalnych wymiarów podstawowych części czynnych trójfazowego transformatora energetycznego będzie przeprowadzone dla zadanych strat i napięcia

zwarcia. Jednym z kryteriów oceny obliczeń wymiarów podstawowych transformatora może być koszt jego części czynnych. To właśnie kryterium zostało przyjęte w przedstawionych poniżej obliczeniach optymalnych. Koszt części czynnych stanowi zatem w tych obliczeniach funkcję celu.

Obliczenia optymalne wymiarów podstawowych części czynnych transformatora, tak jak w innych metodach [6], sprowadzają się do takiego rozwiązania układu równań:

$$\begin{aligned} K &= M_{Fe}m_{Fe}+M_u m_u, \\ \Delta P_o &= F_1(D_k, L_k, T, B_k), \\ \Delta P_u &= F_2(D_k, L_k, T, B_k), \\ X_z &= F_3(D_k, L_k, T, B_k), \end{aligned} \tag{1}$$

w którym koszt materiałów cznnych osiąga minimum,

gdzie: K — koszt części cznnych transformatora (uzwojeń i rdzenia),

M_{Fe}, M_u — odpowiednio masy rdzenia i uzwojeń,

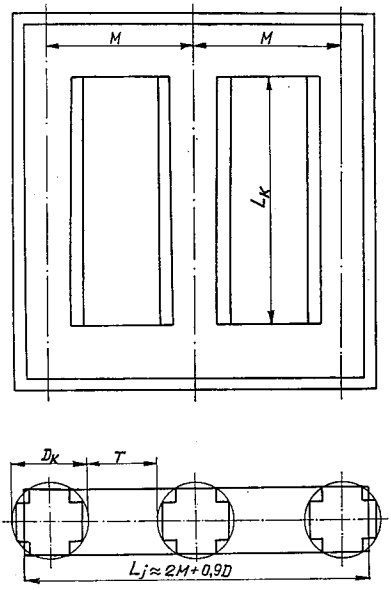
m_{Fe}, m_u — ceny jednostkowe odpowiednio rdzenia i uzwojeń,

$\Delta P_o, \Delta P_u, X_z$ — odpowiednio straty w rdzeniu i uzwojeniach oraz reaktancja zwarcia transformatora,

D_k, L_k, T — wymiary rdzenia (por. rys. 1),

B_k — indukcja w kolumnie,

F_1, F_2, F_3 — ogólnie nieliniowe funkcje.

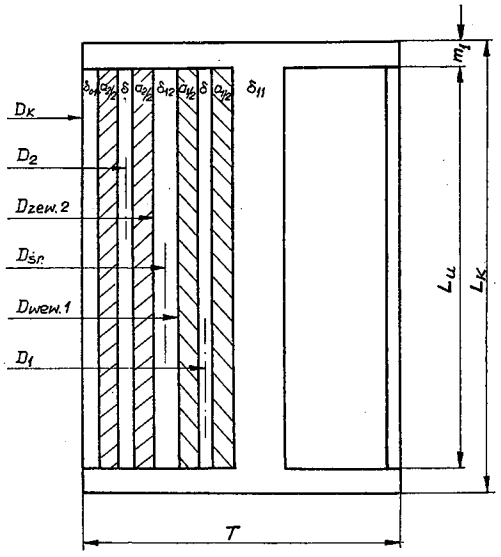


Rys. 1. Podstawowe wymiary rdzenia

2.1. Obliczanie transformatora — wzory podstawowe

Przedstawioną poniżej metodę obliczeń optymalnych wymiarów podstawowych części czynnych zastosowano do trójfazowych transformatorów olejowych małej i średniej mocy nieregulacyjnych:

— o układach połączeń *Yy*, *Dy*, *Yd*, lub *Yz*,
— z rdzeniem magnetycznym trójkolumnowym, w którym powierzchnia przekroju kolumn równa jest powierzchni jarzm lub z jarzmami o powiększonej powierzchni,
— z uzwojeniami, które mogą być projektowane z przewodów miedzianych lub aluminiowych, jako blokowe, cewkowe, wywrotkowe, rurowe oraz śrubowe [2], rozmieszczonymi w oknie rdzenia, jak podano na rys. 2.



Rys. 2. Rozmieszczenie uzwojeń w oknie

Biorąc pod uwagę równania (1), wzory określające odpowiednie parametry techniczne powinny mieć postać dostosowaną do potrzeb obliczeń optymalnych; podano je opierając się na pracy [6] lub wyprowadzono przekształcając zależności podstawowe zamieszczone w źródłowej literaturze traktującej o obliczeniach transformatorów [1] [2]. Objaśnienia oznaczeń znajdują się w zestawieniu podanym wyżej.

2.1.1. Masa rdzenia transformatora trójfazowego

Masa rdzenia transformatora trójfazowego M_{Fe} o stałej powierzchni przekroju, a więc przy $s_k = s_j$, w zależności od jego wymiarów podstawowych (por. rys. 1), wyraża się wzorem:

$$M_{Fe} = 0{,}25\pi \cdot \eta k_i D_K^2 g_{Fe}(3L_K + 4T + 5{,}8D_k), \tag{2}$$

przy czym dla materiału rdzenia — blachy transformatorowej zimnowalcowanej — przyjmuje się gęstość $g_{Fe} = 7650$ kg/m^3.

Wprowadzając oznaczenia:

$$x = \frac{L_K}{T} \quad \text{oraz} \quad y = \frac{D_K}{T}, \tag{3}$$

otrzymuje się inną postać wzoru (2):

$$M_{Fe} = 0{,}25\pi \cdot \eta k_i g_{Fe} T^3 y^2(3x + 4 + 5{,}8y). \tag{4}$$

2.1.2. *Masa uzwojeń transformatora*

Masę uzwojeń transformatora M_u, bez izolacji, nawiniętych przewodami o powierzchniach przekrojów s_1 oraz s_2 można wyrazić:

$$M_u = 3(\Sigma s_1 + \Sigma s_2)\pi D'_{śr} g_u, \tag{5}$$

$$D'_{śr} = \left(D_K + \frac{T}{2}\right)\alpha, \tag{6}$$

gdzie

$$\alpha = \frac{M_{u1} + M_{u2}}{0{,}5(T+2D_K)\left(\frac{M_{u1}}{D_1} + \frac{M_{u2}}{D_2}\right)}. \tag{7}$$

Wartość współczynnika α, dla rozpatrywanych transformatorów, zawiera się w granicach $0{,}96 \div 1{,}03$. Gęstości materiału przewodowego uzwojeń są:

dla miedzi $g_u = 8930$ kg/m^3,
dla aluminium $g_u = 2700$ kg/m^3.

Wprowadzając średni współczynnik wypełnienia uzwojenia k_u:

$$k_u = \frac{\Sigma s_1 + \Sigma s_2}{0{,}5(L_K - 2m_1)(T-C)} \tag{8}$$

oraz oznaczając przez C sumę kanałów poosiowych w oknie transformatora:

$$C = 2(\delta_{02} + \delta_{12} + \delta_K) + \delta_{11}, \tag{8a}$$

gdzie

$$\delta_K = \delta'_{K_1} + \ldots + \delta^n_{K_1} + \delta'_{K_2} + \ldots + \delta^n_{K_2} = (n_{K_1} + n_{K_2})\delta, \tag{8b}$$

otrzymuje się przekształcony wzór na średnią masę uzwojenia M_u

$$M_u = 0{,}75 \cdot \pi\alpha k_u g_u (L_k - 2m_1)(T+2D_k)(T-C). \tag{9}$$

Oznaczając przez e

$$e = \frac{2m_1}{T} \tag{10}$$

oraz uwzględniając (3) i (10), otrzymano ostatecznie:

$$M_u = 0{,}75\pi\alpha k_u g_u T^2 (T-C)(1+2y)(x-e), \tag{11}$$

przy czym masa uzwojenia GN jest:

$$M_{u1} = 3\pi D_1 g_u a_1 (L_k - 2m_1) k_{u1}, \tag{11a}$$

a masa uzwojenia DN:

$$M_{u2} = 3\pi \cdot D_2 g_u a_2 (L_k - 2m_1) k_{u2}. \tag{11b}$$

Przedstawione powyżej ujęcie obliczania mas uzwojeń wynika ze struktury programu. Rozpoczęcie obliczeń na EMC wymaga znajomości masy uzwojeń M_u, wykorzystuje się tu założony współczynnik α oraz średni współczynnik uzwojenia. Dalsze kolejne obliczenia mas wykonywane są w oparciu o wzory 11a oraz 11b.

2.1.3. Koszt części czynnych transformatora

Koszt części czynnych K składa się z kosztu rdzenia K_{Fe} oraz kosztu uzwojeń K_u:

$$K = K_{Fe} + K_u, \tag{12}$$

$$K_{Fe} = m_{Fe} M_{Fe} = m_{Fe} \cdot 0{,}25\pi\eta k_i g_{Fe} T^3 y^2 (3x+4+5{,}8y), \tag{13}$$

$$K_u = m_u M_u = m_u \cdot 0{,}75\pi\alpha k_u g_u T^2 (T-C)(1+2y)(x-e), \tag{14}$$

gdzie m_u średnia cena jednostkowa uzwojeń:

$$m_u = \frac{m_{u1} M_{u1} + m_{u2} M_{u2}}{M_{u1} + M_{u2}}. \tag{15}$$

Ceny jednostkowe przewodów nawojowych uzwojeń GN — m_{u1} oraz DN — m_{u2} nie są na ogół równe. Zwykle $m_{u1} > m_{u2}$.

2.1.4. Składowe napięcia zwarcia transformatora

2.1.4.1. Składowa czynna napięcia zwarcia

Składowa czynna napięcia zwarcia wyraża się wzorem

$$u_R = k_d \frac{(\Delta P_{u75})_{pod}}{S_n} 100\%, \tag{16}$$

w którym straty obciążeniowe równe są iloczynowi strat podstawowych w uzwojeniach $(\Delta P_{u75})_{pod}$ i współczynnika strat dodatkowych k_d.
Z drugiej strony:

$$(\Delta P_{u75})_{pod} = c_t \cdot 3 \cdot I_{nf}^2 R_{f20} = 1{,}22 \cdot 3 \cdot I_{nf}^2 R_{f20}. \tag{17}$$

Przyjmując dla uproszczenia, że uzwojenia mają jednakową gęstość prądu $j_1 = j_2$ oraz jednakową liczbę zwojów $z_1 = z_2 = z$, wtedy R_{f20} obliczeniowa rezystancja uzwojenia w temperaturze 20°C jest równa:

$$R_{f20} = \frac{2zl_{śr}}{\gamma_{20} s_u} = \frac{4\pi z^2 \alpha (T+2D_K)\varphi\chi}{\gamma_{20}(L_K - 2m_1)(T-C)k_u}, \tag{18}$$

gdzie:

s_u — zastępczy przekrój przewodu nawojowego,

$$s_u = \frac{\Sigma s_1 + \Sigma s_2}{2z\varphi} = \frac{(L_K - 2m_1)(T-C)k_u}{4z\varphi}, \tag{19}$$

ψ — zakres regulacji zaczepowej napięcia, w %, w uzwojeniu GN,

χ — współczynnik zależny od układu połączeń

dla Yy, Yd i Dy : $\chi = 1$,
dla Yz : $\chi = 1{,}078$,

φ — współczynnik zależny od zakresu regulacji zaczepowej w uzwojeniu GN

$$\varphi = \chi + \frac{\psi}{200}. \tag{20}$$

Ostatecznie wzór na straty obciążeniowe w uzwojeniach ma postać:

$$\Delta P_{u75} = \frac{4}{3} \cdot c_t \cdot \pi \frac{S_n^2 k_d \alpha \cdot \varphi \cdot \chi (T+2D_K)}{\gamma_{20} e'^2 (L_K - 2m_1)(T-C) k_u}, \tag{21}$$

natomiast składową czynną można wyrazić następująco:

$$u_R = \frac{4}{3} c_t \pi \frac{S_n}{\gamma_{20} e'^2} \cdot \frac{k_d \alpha \cdot \varphi \cdot \chi (T+2D_K)}{k_u (L_K - 2m_1)(T-C)} 100\%; \tag{22}$$

c_t — współczynnik temperaturowy wzrostu oporu, $c_t = 1{,}22$.

3.1.4.2. Składowa indukcyjna napięcia zwarcia

Składową indukcyjną napięcia zwarcia u_X można wyrazić wzorem:

$$u_X = 7{,}9 \frac{I_{nf}}{U_{nf}} f z^2 \frac{l_{sr}}{L_u} k_R \cdot 10^{-4}\%. \tag{23}$$

Współczynnik liczbowy 7,9 wynikający z założeń teoretycznych powinien być powiększony [1]. Ogólnie powiększenie tego liczbowego współczynnika zależy od mocy transformatora; ujmuje to współczynnik k_z (30). Poszczególne wielkości występujące we wzorze (23) można określić z następujących związków:
wysokość uzwojenia L_u

$$L_u = L_k - 2m_1 \tag{24}$$

szczelina zastępcza δ'

$$\delta' = \delta_{12} + \delta'_K + \frac{1}{3} a, \tag{25}$$

przy czym a jest sumą szerokości promieniowych obu uzwojeń $a = a_1 + a_2 = 0{,}5(T-C)$, por. rys. 1.

Zakładając, że ewentualne kanały osiowe w uzwojeniach są jednakowe i dzielą te uzwojenia na równe części, por. rys. 2, wtedy:

$$\delta'_{K1} = \delta''_{K1} = \ldots = \delta^n_{K1} = \delta_{K2} = \ldots = \delta^n_{K2} = \delta$$

oraz

$$z'_1 = z''_1 = \ldots = z^n_1,$$
$$z'_2 = z''_2 = \ldots = z^n_2.$$

Stąd wzór na osiowy kanał zastępczy δ'_K ma postać:

$$\delta'_K = \delta \left[\left(\frac{1}{n_{K1}+1} \right)^2 + \left(\frac{2}{n_{K1}+1} \right)^2 + \left(\frac{3}{n_{K1}+1} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{n_{K1}}{n_{K1}+1} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{n_{K2}+1} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{n_{K2}}{n_{K2}+1} \right)^2 \right] = \frac{\delta}{6} \left[\frac{n_{K1}(2n_{K1}+1)}{n_{K1}+1} + \frac{n_{K2}(2n_{K2}+1)}{n_{K2}+1} \right]; \tag{26}$$

średnia długość zwoju

$$l_{śr} = \pi \frac{D_{wew1} + D_{zew2}}{2} = \pi\beta \frac{T + 2D_K}{2}, \tag{27}$$

$$\beta = \frac{D_{wew1} + D_{zew2}}{T + 2D_K}. \tag{28}$$

Zgodnie z [6] dla transformatorów dwuzwojeniowych $\beta = 0{,}9 \div 1{,}02$. Ostatecznie indukcyjną stratę napięcia można wyrazić następująco:

$$u_x = \frac{4}{3} \frac{f}{100} \beta \frac{S_n}{e'^2} \frac{k_z(T + 2D_K)[3(\delta_{12} + \delta'_K) + a] \cdot 10^{-2}}{(L_K - 2m_1)} \%, \tag{29}$$

przy czym współczynnik k_z ujmuje współczynnik Rogowskiego k_R oraz wzrost współczynnika liczbowego 7,9 do wartości 8,4 (23); k_z wyraża się wzorem:

$$k_z = 8{,}4 \cdot k_R \frac{\pi}{18} \cdot \frac{3}{4} = 1{,}1 k_R. \tag{30}$$

2.1.5. Szerokość okna rdzenia transformatora

Wykorzystując wzory (22) i (29) wyprowadzono wzór na szerokość okna rdzenia transformatora T (por. rys. 1); sposób wyprowadzenia tego wzoru podano poniżej:

$$\frac{u_X}{u_R} = \frac{f\beta k_z \gamma_{20} k_u [3(\delta_{12} + \delta'_K) + a](T - C)}{1{,}22\pi \cdot 10^6 \cdot k_d \cdot \alpha \cdot \varphi \cdot \chi}; \tag{31}$$

podstawiając

$$a = 0{,}5(T - C)$$

otrzymuje się równanie kwadratowe względem $(T - C)$

$$(T - C)^2 + 6(\delta_{12} + \delta'_K)(T - C) - \frac{4{,}88 \cdot 50}{\gamma_{20} f} \frac{k_d \varphi \chi}{k_z k_u} \frac{\alpha}{\beta} \frac{u_X 10^4}{u_R} = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania jest wyrażenie:

$$T - C = -3(\delta_{12} + \delta'_K) + \sqrt{9(\delta_{12} + \delta'_K)^2 + K_1}; \tag{32}$$

dla $f = 50$ Hz:

$$K_1 = \eta_1 \frac{k_d \cdot \varphi \cdot \chi \alpha}{k_z k_u \beta} \frac{u_X}{u_R}, \tag{33}$$

dla miedzi:

$$\eta_1 = \frac{4{,}88}{\gamma_{20}} \pi \cdot 10^4 = 0{,}0027\,\Omega\text{m}, \tag{33a}$$

dla aluminium:

$$\eta_1 = \frac{4{,}88}{\gamma_{20}} \pi \cdot 10^4 = 0{,}0043\,\Omega\text{m}; \tag{33b}$$

a stąd szerokość okna T jest równa:

$$T = C-3(\delta_{12}+\delta'_K)+\sqrt{9(\delta_{12}+\delta'_K)^2+K_1}. \tag{34}$$

2.1.6. Wymiary podstawowe rdzenia transformatora w funkcji mocy znamionowej i strat obciążeniowych

Wymiary podstawowe transformatora w funkcji jego mocy znamionowej można przedstawić wychodząc z podstawowego wzoru na moc znamionową S_n:

$$S_n = 3\cdot 1{,}11\pi k_i \eta f z I_{nf} D_K^2 \cdot B_K \ [\mathrm{VA}] \tag{35}$$

oraz wzoru na straty obciążeniowe w temperaturze 75°C ΔP_{u75} wyprowadzonego na podstawie zależności (17), (18) i (19) oraz (6):

$$\Delta P_{u75} = k_d p_u M_u j^2 \frac{\chi}{\varphi}, \tag{36}$$

gdzie

$$p_u = \frac{1{,}22}{\gamma_{20} g_u}; \tag{37}$$

dla miedzi:

$$p_u = 2{,}4\cdot 10^{-12}\,\frac{\Omega \mathrm{m}^4}{\mathrm{kg}}, \tag{37a}$$

dla aluminium:

$$p_u = 12{,}6\cdot 10^{-12}\,\frac{\Omega \mathrm{m}^4}{\mathrm{kg}}. \tag{37b}$$

Wykorzystując (19) otrzymuje się związek:

$$(zI_{nf})^2 = j^2\,\frac{(L_K-2m_1)^2(T-C)^2 k_u^2}{16\varphi^2}. \tag{38}$$

Podstawiając wyrażenie (36) do wzoru (38) oraz uwzględniając (3), (10) i (11)

$$(zI_{nf})^2 = \frac{\Delta P_{u75} k_u (x-e)(T-C)}{0{,}75\cdot 16\pi k_d p_u g_u \alpha\varphi\chi(1+2y)}, \tag{39}$$

a stąd podstawiając do (35) i odpowiednio przekształcając otrzymano:

$$x = e+\Pi\frac{1+2y}{y^4}, \tag{40}$$

gdzie:

$$\Pi = \frac{k_d p_u g_u \alpha\cdot\varphi\cdot\chi\cdot S_n^2}{2{,}9 k_i^2 \eta^2 f^2 k_u B_K^2 \Delta P_{u75}(T-C)T^4}. \tag{41}$$

2.1.7. Wymiary podstawowe rdzenia transformatora w funkcji indukcji w kolumnie

Wymiary podstawowe rdzenia są oczywiście związane z gwarantowanymi stratami w żelazie ΔP_o, a zatem i z wartością indukcji w kolumnie B_K:

$$\Delta P_o = k_o M_{Fe} p(B_K). \tag{42}$$

Funkcja $p(B_K)$ jest charakterystyką stratności jednostkowej blachy transformatorowej.

Jak wykazały badania, charakterystykę stratności blachy transformatorowej ARMCO M-5, w przedziale indukcji stosowanych w transformatorach, można z dużą dokładnością aproksymować funkcją:

$$p = 0{,}28 B_K^3. \tag{43a}$$

Ogólnie dla blachy zimnowalcowanej w przedziale indukcji od $1{,}40 \div 1{,}75$ T:

$$p = b B_K^3. \tag{43b}$$

Ostatecznie podstawiając (4), (40), (43a) do (42) otrzymuje się:

$$\Delta P_o = 0{,}25\pi k_o \eta k_i g_{Fe} T^3 y^2 \left[3\left(e + \Pi \frac{1+2y}{y^4}\right) + 4 + 5{,}8y\right] 0{,}28 B_K^3, \tag{44}$$

oznaczając

$$\Pi' = \Pi \cdot B_K^2, \quad \text{czyli} \quad \Pi = \frac{\Pi'}{B_K^2}. \tag{45}$$

Podstawiając następnie (45) do (44) i odpowiednio przekształcając otrzymuje się

$$B_K^3 + p' B_K + q' = 0, \tag{46}$$

gdzie:

$$p' = \frac{3\Pi'(1+2y)}{y^4(3e+4+5{,}8y)}, \tag{47a}$$

$$q' = -\frac{\Delta P_o}{a' y^2 (3e+4+5{,}8y)}, \tag{47b}$$

$$a' = b \cdot 0{,}25\pi k_o \eta k_i g_{Fe} T^3. \tag{47c}$$

Pierwiastki równania (46) zależą od wartości wyrażenia $\frac{q'^2}{4} + \frac{p'^3}{27}$; gdy $\frac{q'^2}{4} + \frac{p'^3}{27} > 0$, co ma miejsce w rozpatrywanym przypadku, równanie (46) ma dwa pierwiastki zespolone i jeden rzeczywisty, który jest poszukiwany rozwiązaniem.

Ostatecznie wzór na pierwiastek rzeczywisty ma postać:

$$B_K = \sqrt[3]{-\frac{q'}{2} + \sqrt{\frac{q'^2}{4} + \frac{p'^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q'}{2} - \sqrt{\frac{q'^2}{4} + \frac{p'^3}{27}}}. \tag{48}$$

W ten sposób dla projektowanego transformatora podany został związek pomiędzy indukcją B_K a wymiarami podstawowymi oraz mocą znamionową S_n i stratami ΔP_{u75} przy zadanych stratach jałowych ΔP_o.

2.1.8. *Gęstość prądu w uzwojeniach*

Podstawiając (11) do (36) oraz uwzględniając (40) otrzymuje się wzór na gęstość prądu j. Zakłada się, że jest ona jednakowa dla obu uzwojeń

$$j = \frac{1{,}11\,\eta k_i f B_K \Delta P_{u75} T}{k_d p_u g_u \alpha S_n \chi} \cdot \frac{y^2}{1+2y}. \tag{49}$$

Przyjmując, zgodnie z wymaganiami normy PN-69/E-06040, że
— ustalony prąd zwarciowy jest co najwyżej 20 razy większy od prądu znamionowego oraz
— dopuszczalny czas trwania zwarcia wynosi 3 sekundy,
można obliczyć dopuszczalną gęstość prądu w uzwojeniach, w warunkach pracy znamionowej j_{max}, ze względu na wytrzymałość cieplną uzwojeń transformatora przy zwarciu:

dla miedzi $j_{max} = 3{,}8$ A/mm^2,

dla aluminium $j_{max} = 2{,}1$ A/mm^2.

2.1.9. *Napięcie zwojowe*

Przekształcając w sposób oczywisty wzór podstawowy na napięcie zwojowe:

$$e' = 4{,}44 \cdot f \Phi \tag{50}$$

i wykorzystując (3) dochodzi się do innej postaci wzoru na e', wygodnej ze względu na obliczenia, którą zamieszczono poniżej:

$$e' = 1{,}11\pi\eta k_i \cdot f \cdot B_K T^2 y^2. \tag{51}$$

2.1.10. *Obciążenie liniowe*

Obciążenie liniowe $A = \frac{2 \cdot I_{1n} Z}{L_K}$ po prostych przekształceniach wyraża się wzorem:

$$A = \frac{2}{3} \frac{S_n}{e' T x}. \tag{52}$$

2.1.11. *Szerokość uzwojeń w funkcji wymiarów podstawowych rdzenia*

Wykorzystując zasadę równowagi amperozwojów można podać wzór na szerokość uzwojeń.

Zakładając, że obydwa uzwojenia mają tę samą wysokość i gęstość prądu oraz oznaczając przez a sumę szerokości obydwu uzwojeń

$$a = a_1 + a_2, \tag{53}$$

a także uwzględniając zwoje regulacyjne i ewentualne połączenie w zygzak otrzymuje się wyrażenia:

na szerokość uzwojenia wewnętrznego:

$$a_2 = \frac{(2\chi-1)\cdot k_{u1}}{\left(1+\frac{\psi}{100}\right)k_{u1}+(2\chi-1)k_{u2}}\cdot a, \tag{54}$$

na szerokość uzwojenia zewnętrznego:

$$a_1 = \frac{\left(1+\frac{\psi}{100}\right)k_{u2}}{\left(1+\frac{\psi}{100}\right)k_{u1}+(2\chi-1)k_{u2}}\cdot a. \tag{55}$$

2.1.12. Dopuszczalne obciążenia cieplne uzwojeń

Przyrost temperatury uzwojeń względem czynnika chłodzącego w rozpatrywanym przypadku oleju zależy od gęstości strumienia cieplnego q W/m^2

$$q = \frac{\Delta P_{u75}}{s_{cz}}. \tag{56}$$

Powierzchnię czynną s_{cz} oddawania ciepła przez uzwojenia transformatora oblicza się różnie, zależnie od przyjętego rodzaju uzwojenia. Dla poszczególnych rodzajów uzwojeń przyjmują również różne wartości współczynniki zakrycia ξ. Dla uzwojeń wielowarstwowych i rurowych

$$s_{cz} = 3\cdot 2(L_K-2_{m1})\pi D_{śr}(n_{Ki}+1)\xi_i; \quad i = 1, 2. \tag{57}$$

Dla uzwojeń składających się z n cewek płaskich, wywrotkowych oraz śrubowych:

$$s_{cz} = 3\cdot 2(h'+c'm)n\xi l_{śr} = 3\cdot 2(h'+a_i)n\xi\pi D_{śr}; \quad i = 1, 2, \tag{58}$$

gdzie:

$$(h'+a_i)n = h'n+a_in = L_K-2m_1-(n-1)\Delta+a_in.$$

Gdy kanały promieniowe mają różną wysokość Δ, wtedy zamiast wyrażenia $(n-1)\Delta$ należy podstawić $\Sigma\Delta$. Oznaczając przez ω_i

$$\omega_i = a_in-(n-1)\Delta = a_in-\Sigma\Delta, \quad i = 1, 2, \tag{59}$$

można ostatecznie podać wzór na powierzchnię czynną, z punktu widzenia cieplnego, dla i-tego uzwojenia transformatora:

$$s_{czi} = 6(L_K-2m_1+\omega_i)\pi D_{śr}(n_{Ki}+1)\xi_i d_i, \quad i = 1, 2, \tag{60}$$

przy czym:

a) dla uzwojeń rurowych i blokowych $\omega = 0$,

b) dla uzwojeń o cewkach płaskich $n_K = 0$,

natomiast:

$$d_1 = \frac{D_1}{D_{śr}}, \quad d_2 = \frac{D_2}{D_{śr}}, \tag{61}$$

gdzie $D_{śr} = 0{,}5(D_1+D_2)$.

Wielkości d_1 oraz d_2 zmieniają się na ogół w granicach:

$$\begin{aligned} d_1 &= 1{,}15 \div 1{,}25, \\ d_2 &= 0{,}75 \div 0{,}85, \end{aligned} \tag{62a}$$

przy czym dla danego transformatora

$$d_1 + d_2 = 2. \tag{62b}$$

Uwzględniając wzory (3), (6) i (10) otrzymuje się wyrażenie na s_{czi} w innej postaci:

$$s_{czi} = 3T^2\left(x - e + \frac{\omega_i}{T}\right)(1+2y)\alpha\pi(n_{Ki}+1)\xi_i d_i = \frac{(\Delta P_{u75})_i}{q_i} \tag{63}$$

i dalej opierając się na wzorze (40) można z (63) uzyskać związek (64), w którym wymiary podstawowe rdzenia transformatora y oraz x uzależnione są od strumienia cieplnego q i strat i-tego uzwojenia

$$\frac{1+2y}{y^2} = \sqrt{\frac{(\Delta P_{u75})_i \cdot (x-e)}{3\pi\xi_i(n_{Ki}+1)T^2\alpha d_i q_i\left(x-e+\frac{\omega_i}{T}\right)\Pi}}, \quad i = 1, 2. \tag{64}$$

Oznaczając przez g wyrażenie:

$$g = \frac{1+2y}{y^2} \tag{65}$$

łatwo zauważyć, że przy maksymalnym dopuszczalnym $q_i = q_{imax}$ wyrażenie g_i osiąga najmniejszą wartość, przy czym

$$g_{imin} = \frac{B_K}{T}\sqrt{\frac{(\Delta P_{u75})_i \cdot (x-e)}{3\pi\xi_i(n_{Ki}+1)\alpha d_i q_{imax} \cdot \left(x-e+\frac{\omega_i}{T}\right)\Pi'}}, \quad i = 1, 2. \tag{66}$$

Biorąc pod uwagę (65) otrzymuje się wyrażenie na dopuszczalną wartość parametru y wynikające z warunków cieplnych:

$$y_{imax} = \frac{1}{g_{imin}}\left(1 + \sqrt{1+g_{imin}}\right). \tag{67}$$

Parametr y winien zatem spełniać nierówność

$$y < y_{imax} \quad \text{dla} \quad i = 1, 2.$$

2.1.13. *Obliczanie średniego naprężenia rozrywającego uzwojenie zewnętrzne*

Średnie naprężenie uzwojenia zewnętrznego $\sigma_{śr}$ oblicza się ze wzoru:

$$\sigma_{śr} = 2\pi \cdot (iz)^2 \frac{l_{śr}}{L_u} \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1}{2\pi} \frac{1}{L_u a_1 \cdot k_u} = (iz)^2 \frac{l_{śr}}{(L_K - 2m_1)^2 a_1 k_u} \cdot 10^{-7}, \tag{68}$$

gdzie

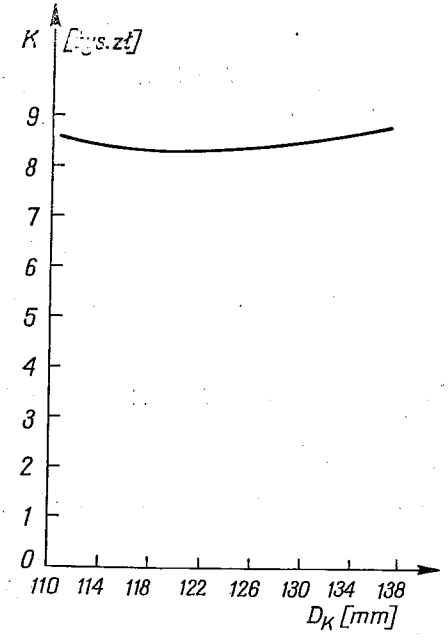
$$iz = \frac{AL_k}{2} \frac{100}{u_z} \sqrt{2}(1+e)^{\frac{-u_R}{u_X}}.$$

2.2. Algorytm i opis programu na EMC obliczania optymalnych wymiarów podstawowych części czynnych trójfazowego transformatora

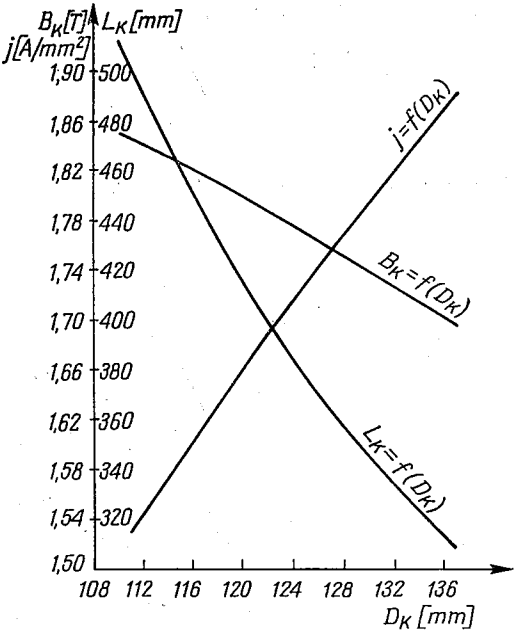
2.2.1. Algorytm obliczeń optymalnych na EMC

Koszt części czynnych transformatora trójfazowego K może być przedstawiony w funkcji jednego z podstawowych wymiarów rdzenia. Najczęściej koszt ten bywa przedstawiony w funkcji średnicy kolumny D_K.

Na rys. 3, dla przykładu, zamieszczono charakterystyczny wykres funkcji $K = f(D_K)$ dla transformatora 100 kVA o napięciu 10,5 kV z uzwojeniami aluminiowymi. Aczkolwiek przebieg tej funkcji jest dość płaski, ma ona jednak swoje minimum.



Rys. 3. Koszt części czynnych transformatora 100 kVA; 10500±5%÷2,5%/525 V (uzwojenia z aluminium) $K = f(D_K)$ jako funkcja średnicy kolumny



Rys. 4. $L_K = f_1(D_K)$, $B_K = f_2(D_K)$, $j = f_3(D_K)$ dla transformatora 100 kVA, 10500±5%÷ ÷2,5%/525 V

Wykresy funkcji $L_K = f_1(D_K)$, $B_K = f_2(D_K)$ oraz $j = f(D_K)$ dla tego samego transformatora podano na rys. 4.

Wykorzystując fakt istnienia minimum dla funkcji $K = f(D_K)$ można podać algorytm obliczania optymalnych wymiarów podstawowych transformatora, realizujący zadaną funkcję celu, a więc w tym przypadku minimalny koszt materiałów czynnych. W algorytmie tym na podstawie wzorów podanych w punkcie 2.1, zakładając a priori średnicę kolumny D_K, oblicza się tranformator o określonych znamionach spełniający odpowiednie wymagania techniczne. Należy przy tym dodać, że wszystkie odległości izolacyjne w oknie

transformatora łącznie z ewentualnymi kanałami poosiowymi w uzwojeniach zadawane są jako dane wejściowe, gdyż uwarunkowane są one wytrzymałością dielektryczną lub cieplną transformatora, a zatem ogólnie zależą od jego znamion.

Jeżeli, rozpoczynając obliczenia, założy się w szczególności średnicę kolumny D_{K_1} zdecydowanie mniejszą od tej, przy której koszt materiałów czynnych transformatora osiąga swoje minimum, to odpowiadający jej koszt K_1 znajdzie się na lewo od punktu minimalnego — por. rys. 3. Zwiększając następnie krok po kroku średnice D_K, oblicza się za każdym razem odpowiadające im transformatory, a zatem i koszty materiałów czynnych do momentu, aż osiągnięte zostanie minimum funkcji $K = f(D_K)$. Określenie minimalnego kosztu łatwo przeprowadza się poprzez porównanie kosztów uzyskiwanych w kolejnych obliczeniach.

Wartości współczynników α oraz β, występujących we wzorach (29), (33), (41) i (54), które należy oszacować przy rozpoczynaniu obliczeń, są obliczane z określoną dokładnością, np.: 0,01, drogą iteracji w toku realizacji programu.

Pozostaje jednak jeszcze problem ograniczeń funkcjonujących przy projektowaniu transformatora o optymalnych wymiarach. Dotyczy to gęstości prądu, obciążalności cieplnej oraz prądu stanu jałowego. Wielkości te zależą od doboru znamion, a w szczególności strat. Dopuszczalne wartości gęstości prądu i obciążalności cieplnej określone zostały odpowiednio w punktach 2.1.8 oraz 2.1.12. Przy niewłaściwym doborze strat, może się zdarzyć także, że indukcja przy optymalnych wymiarach podstawowych transformatora wypada zbyt duża ze względu na wartość prądu stanu jałowego (na przykład dla transformatora 400 kVA, por. rys. 9, gdy $\Delta P_u = 5500$ W oraz $\Delta P_o = 1000$ W wtedy indukcja w kolumnie $B_K = 1{,}783$ T, co stanowi właśnie wartość zbyt dużą ze względu na prąd stanu jałowego).

W przypadkach, gdy niemożliwa jest korekta poziomu strat, a zatem danych wejściowych, w programie na EMC powinno działać ograniczenie, aby dopuszczalna wartość indukcji nie została przekroczona. Zespół wymiarów podstawowych transformatora, odpowiadający przyjętej maksymalnej indukcji, należy wtedy uznać za optymalny dla zadanych znamion. Koszt części czynnych transformatora nie równa się wtedy minimum funkcji $K = f(D_K)$. Dopuszczalna wartość indukcji w kolumnie jest funkcją mocy znamionowej, przyjmuje się ją na podstawie literatury [2] lub doświadczeń konstrukcyjnych.

Obliczanie optymalnych wymiarów transformatora z powiększonym przekrojem jarzm rozpoczyna się od obliczenia hipotetycznego transformatora, w którym przekrój kolumn i jarzm jest jednakowy $s_k = s_j$. W tym celu, oprócz strat jałowych ΔP_o transformatora rzeczywistego, jako dodatkową daną wejściową zadaje straty jałowe transformatora hipotetycznego ΔP_{o_h}, przy czym $\Delta P_{o_h} > \Delta P_o$. Następnie po obliczeniu hipotetycznego transformatora, powiększa się powierzchnię przekroju jarzm zgodnie z założonym współczynnikiem wzmocnienia jarzm k_j. W tym nowym transformatorze już z powiększonym jarzmem straty jałowe są mniejsze od strat ΔP_{o_h} transformatora o $s_k = s_j$.

Drogą kolejnych iteracji oblicza się optymalne wymiary podstawowe transformatora korygując straty ΔP_{o_h} tak, aby po powiększeniu powierzchni przekroju jarzm k_j razy, straty jałowe były równe założonym stratom ΔP_o z określoną dokładnością ε. Tak obliczone wymiary podstawowe uznaje się za optymalne dla transformatora z powiększonym jarzmem o współczynniku powiększenia k_j. Powiększenie przekroju jarzma prowadzi

oczywiście do zwiększenia masy całkowitej rdzenia obliczanego transformatora o $s_j > s_k$. Wobec tego program na EMC transformatora z powiększonymi jarzmami wymaga trzech dodatkowych danych: ΔP_{o_h}, k_j oraz ε. Program ten działa jak poprzedni bez ograniczenia na wartość indukcji w kolumnie i z ograniczeniem.

2.2.2. *Dane wejściowe i opis programu na EMC do obliczania optymalnych wymiarów podstawowych transformatora*

Do wykonania obliczeń optymalnych wymiarów podstawowych transformatora, jak wynika z wzorów zamieszczonych w punkcie 2.1, potrzebne są dane wejściowe w liczbie 43 dla programu na EMC przy $s_k = s_j$, lub liczbie 46 dla programu przy $s_j < s_k$.
Omawiane dane wejściowe do programów na EMC zestawiono poniżej:

1. δ por rys. 2,
2. α,
3. δ_{02} por. rys. 2,
4. δ_{12} por. rys. 2,
5. δ_{11} por. rys. 2,
6. η,
7. η_1,
8. f,
9. g_u,
10. g_{Fe},
11. χ,
12. ψ,
13. β,
14. h,
15. k_d,
16. k_u,
17. k_z,
18. k_i,
19. k_o,
20. q_{1max},
21. q_{2max},
22. ξ_1,
23. ξ_2,
24. m_u,
25. m_{Fe}
26. m_1 por. rys. 2,
27. n_{k1},
28. n_{k2},
29. ω_1,
30. ω_2,
31. j_{max},
32. ΔP_{u75},
33. ΔP_o,
34. p_u,
35. S_n,
36. u_z,
37. U_{GN},
38. U_{DN},
39. z_D,
40. b,
41. B_k,
42. k_{u1},
43. k_{u2},
44. ΔP_{o_h},
45. k_j,
46. ε.

Przygotowanie danych wejściowych do obliczeń optymalnych zamieszczonych w zestawieniu polega na przypisaniu im właściwych wartości. Dane wejściowe można podzielić na trzy grupy:

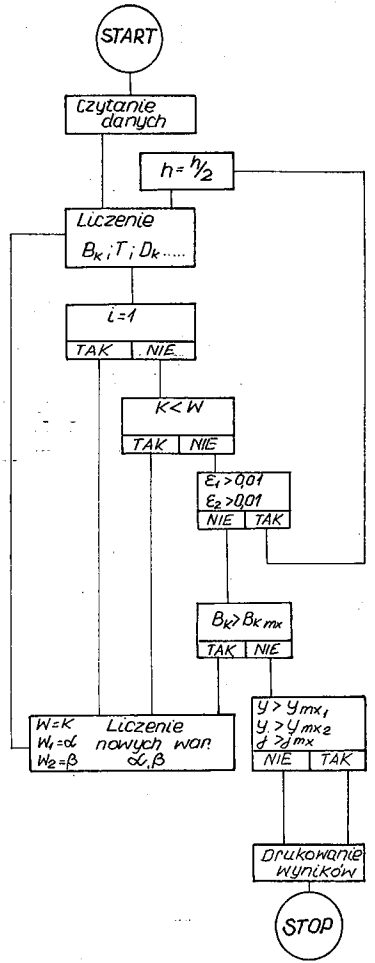
I grupa — dane znamionowe transformatora; wartości ich zależą od przyjętych znamion projektowanego transformatora,

II grupa — odległości izolacyjne i kanały chłodzące, są to: δ, δ_{02}, δ_{12}, δ_{11}, m_1 oraz n_{k1} i n_{k2} ewentualnie Δ,

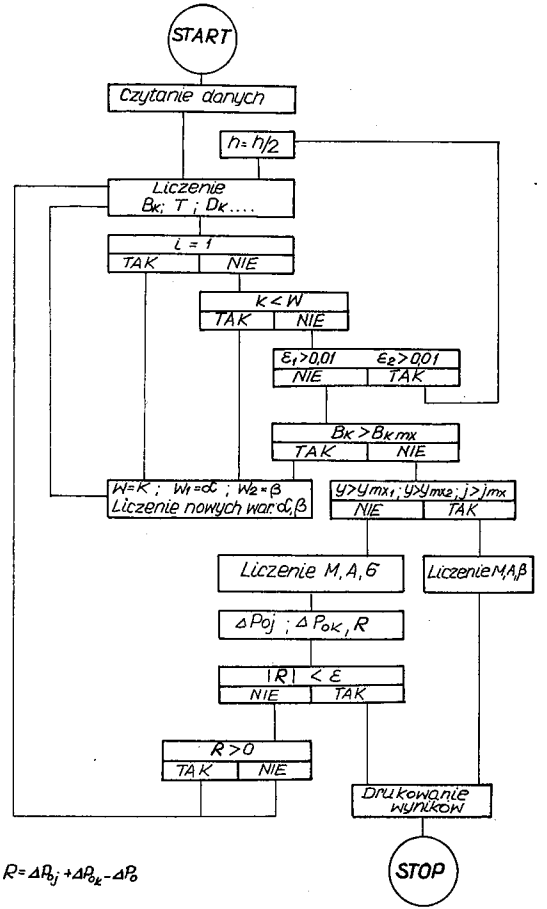
III grupa — współczynniki oraz parametry techniczne; wśród nich podstawowe znaczenie ma wartość współczynników zapełnienia uzwojeń k_u, k_{u1} oraz k_{u2}.

Wartości niektórych innych współczynników, jak ΔP_{o_h}, α oraz β zadawane są dość dowolnie, gdyż są one potrzebne jedynie do rozpoczęcia obliczeń. W toku realizacji programu obliczane są ich poprawne wartości z przyjętą dokładnością.

Charakter danych startowych mają również wartości przypisane: z_D, h oraz ε. Ogólnie wartości współczynników i parametrów technicznych należących do grupy III mogą być przyjmowane w oparciu o dane zaczerpnięte ze źródłowej literatury [2] lub o doświadczenie obliczeniowo konstrukcyjne. Należy przy tym dodać, że takie parametry, jak q_{imax}, ω lub j_{max} wpływają jedynie na poziom ograniczeń cieplnych, przekroczenie których nie przerywa obliczania optymalnych wymiarów transformatora, a jest to tylko zaznaczane w rezultatach obliczeń. Wynika to stąd, iż założeniem przedstawionej metody jest ostateczne pro-



Rys. 5. Schemat blokowy programu przy $s_k = s_j$



Rys. 6. Schemat blokowy programu przy $s_k > s_j$

jektowanie w sposób bezpośredni uzwojeń, a przy tym dokonuje się również sprawdzenia ich przyrostów temperatur. Wobec tego ograniczenia dokładności w zakresie funkcjonowania ograniczeń cieplnych przy obliczaniu transformatora bez dokładniejszych danych co do $q_{i\,max}$ lub ω nie umniejsza przydatności metody obliczania optymalnych wymiarów podstawowych, na które te ograniczenia nie mają wpływu.

Programy obliczania optymalnych wymiarów podstawowych transformatora o $s_k = s_j$ oraz o $s_j > s_k$ zostały opracowane w języku ALGOL na maszynę Odra 1204. Schematy blokowe tych programów podano na rys. 5 oraz na rys. 6. Czas obliczeń wymiarów optymalnych nie przekracza 1 minuty.

```
          OBLICZENIE OPTYMALNYCH WYMIAROW PODSTAWOWYCH
          I PARAMETROW TECHNICZNYCH TRANSFORMATORA

SN = 160000.00   UGN = 15750.000   UDN = 400.000   UZ = 4.500
ALFA = 1.000   DELTA = 0.005
DELTA02 = 0.003   DELTA12 = 0.013   DELTA11 = 0.008
ETA = 0.930   F= 50.00   GU = 2700.00   GFE = 7650.00
KD = 1.070   KU = 0.645   KZ = 1.060   KI = 0.962   KO = 1.320   ETA1 = 0.0043
GMX1 = 1500.00   GMX2 = 2000.00   KSI1 = 0.780   KSI2 = 0.850
MU = 78.00   MFE = 36.00   M1 = 0.025   NK1 = 1.000   NK2 = 0.000
DELTAPU = 2570.0   DELTAPO = 530.0   PU =+1.2600(10)-11   JMX = 2.100(10)+6
KROKH = 0.0005   ZD = 0.100   WSP B = 0.280   BETA = 1.0000   KU1 = 0.535
KU2 = 0.754   PSI = 5.000

   OBLICZENIA BEZ OGRANICZENIA NA INDUKCJE

   UR = 1.606        UX = 4.204        UZ = 4.500

   SREDN KOLUMNY          [M]          DK =    .1380
   SZER OKNA              [M]          T =     .1594
   WYS KOLUMNY            [M]          LK =    .4696
   ODSTEP MIEDZY KOLUMNAMI [M]         M =     .2974
   NAPIECIE ZWOJOWE       [V/ZW]       E =    5.0489
   DLUGOSC JARZMA         [M]          LJ =    .7191
   SZER UZWOJENIA GN      [M]          A1 =    .0307
   SZER UZWOJENIA DN      [M]          A2 =    .0240
   INDUKCJA               [T]          BK =   1.6996
   GESTOSC PRADU          [A/M<M]      J =   1.576(10)6
   OBC LINIOWE            [A/M]        A = 449.919(10)2
   NAP W MATERIALE PRZEW UZW [N/M<M]   SIGMA = 353.476(10)4
   MASA UZWOJENIA         [KG]         GU = 786.607(10)-1
   MASA RDZENIA           [KG]         GFE = 291.424
   KOSZT UZWOJENIA        [ZL]         KU = 613.553(10)1
   KOSZT RDZENIA          [ZL]         KFE = 104.913(10)2
   KOSZT CZESCI CZYNNEJ   [ZL]         K = 166.268(10)2
```

Rys. 7. Wyniki obliczenia na EMC optymalnych wymiarów podstawowych transformatora 160 kVA z uzwojeniami z aluminium

Formę, w jakiej podawane są wyniki obliczeń, przedstawiono na rys. 7, który stanowi fotografię obliczeń optymalnych wymiarów podstawowych transformatora 160 kVA z uzwojeniami aluminiowymi.

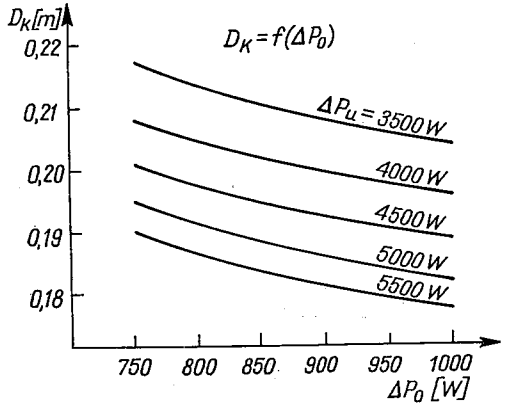
2.3. Możliwość wykorzystania programu obliczeń optymalnych wymiarów podstawowych transformatora

Dotychczas omawiano wykorzystanie programu obliczeń optymalnych wymiarów podstawowych przy zadanych stratach bez ograniczeń lub z ograniczeniami na wartość indukcji. Krótki czas obliczeń za pomocą tego programu umożliwia ponadto badanie wpływu wartości poszczególnych danych znamionowych (jak strat i napięcia zwarcia), lub cen materiałów czynnych na koszty, masy i wymiary projektowanych transformatorów. Możliwe jest także ustalenie właściwego poziomu strat tych transformatorów. Pod właściwym poziomem strat transformatorów rozumie się tu taki ich poziom, aby wartość

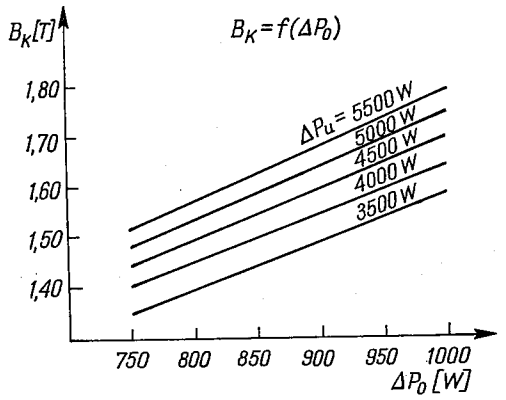
indukcji w kolumnie nie przekraczała wartości dopuszczalnych ze względu na prąd stanu jałowego. Właściwy poziom strat prowadzi do osiągnięcia naturalnego minimum kosztów materiałów czynnych, a więc optymalnych wymiarów podstawowych poniżej działania ograniczenia na indukcję. Dla przykładu badanie wpływu poziomu strat wykonano dla transformatora z uzwojeniami z miedzi o następujących danych znamionowych:

$$400\ \text{kVA}, \quad 15750 \pm 5\%/400, \quad \text{Dy5}, \quad u_z = 4{,}5\%.$$

W ramach tych badań przeprowadzono trzydzieści obliczeń optymalnych transformatora dla strat jałowych ΔP_o = 750, 800, 900, 950 i 1000 W oraz dla strat obciążeniowych ΔP_u = 3500, 4000, 4500, 5000 i 5500 W. Wyniki zamieszczono na rys. 8, 9, 10, 11, 12 oraz 13.



Rys. 8. $D_K = f(\Delta P_o)$ dla transformatora 400 kVA, 15 kV, uzwojenia z miedzi



Rys. 9. $B_K = f(\Delta P_o)$ dla transformatora 400 kVA, 15 kV, uzwojenia z miedzi

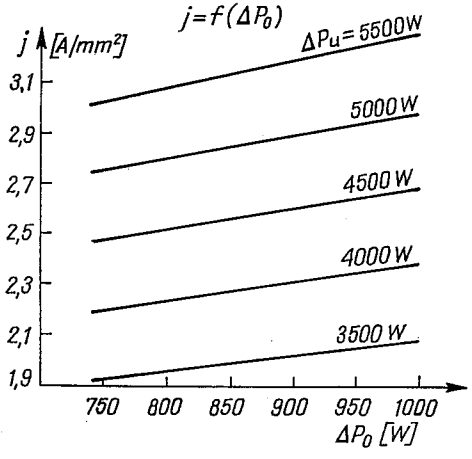
Wykorzystując ten materiał można pokazać w skróceniu, jak dla projektowanego transformatora przeprowadzać analizę wielkości strat jałowych i obciążeniowych, o ile nie są one zadane jako znamiona, jeżeli w szczególności przyjmie się, z uwagi na wielkość prądu stanu jałowego, że indukcja w rdzeniu rozpatrywanego transformatora (o mocy znamionowej 400 kVA) nie powinna przekraczać 1,68 T. Dla tej indukcji, zgodnie z rys. 9, najniższe straty w uzwojeniach ΔP_u są równe ΔP_u = 4500 W.

W przypadku optymalnego rozwiązania projektowanego transformatora tym stratom w uzwojeniach odpowiadają straty jałowe ΔP_o = 980 W. Jeżeli z kolei przyjąć straty w uzwojeniach ΔP_u = 5500 W (por. rys. 9), to przy rozwiązaniu optymalnym i indukcji 1,68 T, odpowiadają im straty jałowe ΔP_o = 900 W. Tym dwu parom strat (ΔP_u oraz ΔP_o) w projektowanym transformatorze przy przyjętej dopuszczalnej indukcji w rdzeniu 1,68 T odpowiadają określone gęstości prądu (por. rys. 10) oraz koszty (por. rys. 13).

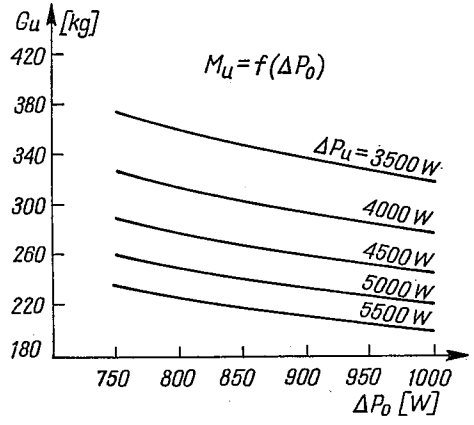
Inne wielkości i parametry podane są w funkcji strat jałowych na rys. od 8 do 13. Uwzględniając dopuszczalną wartość indukcji w rdzeniu przyjętą do obliczeń (1,68 T) oraz znaną z doświadczeń konstruktorskich dopuszczalną gęstość prądu w transformatorach tej mocy co rozpatrywany ($\sim$ 3 A/mm^2), należy uznać, że straty w projektowanym transformatorze powinny wynosić ΔP_o = 900 W, ΔP_u = 5500 W.

Jak wynika z rys. 13 jest to transformator o najniższych kosztach, a zatem optymalny zgodnie z kryterium przyjętym w tej pracy.

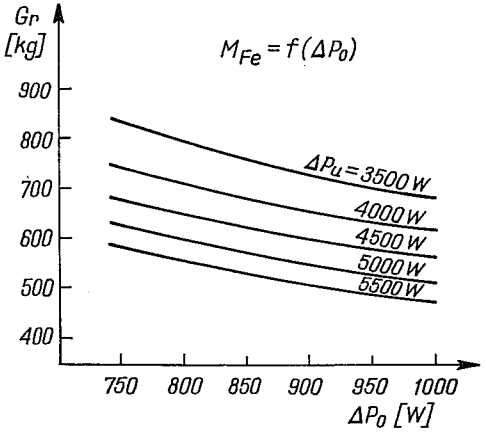
Reasumując, zastosowanie omawianego programu pozwala przeprowadzić wybór poziomu strat i efektywnie zaprojektować zoptymalizowany transformator wykorzystany harmonijnie pod względem magnetycznym i elektrycznym.



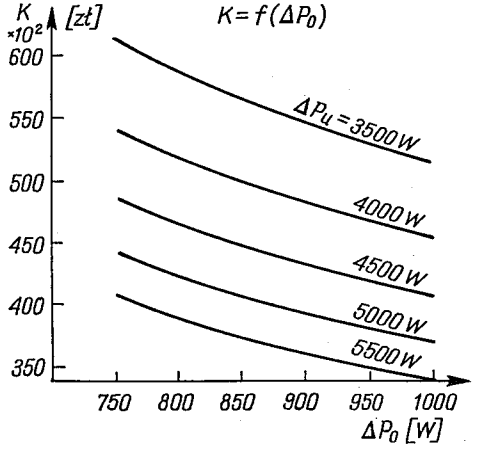
Rys. 10. $j = f(\Delta P_o)$ dla transformatora 400 kVA, 15 kV, uzwojenia z miedzi



Rys. 11. $M_u = f(\Delta P_o)$ dla transformatora 400 kVA, 15 kVA z uzwojeniami z miedzi



Rys. 12. $M_{Fe} = f(\Delta P_o)$ dla transformatora 400 kVA, 15 kV, z uzwojeniami z miedzi



Rys. 13. $K = f(\Delta P_o)$ dla transformatora 400 kVA, 15 kV, z uzwojeniami z miedzi

3. ZAKOŃCZENIE

Przedstawiona metoda obliczania optymalnych wymiarów podstawowych transformatorów energetycznych ze względu na swą prostotę oraz łatwość przygotowania danych może być wykorzystana:

— do obliczania transformatorów nowo projektowanych przy zadanych znamionach wykonywanych z materiałów czynnych o różnych własnościach i cenach, z rdzeniami o jednorodnych powierzchniach przekroju lub z powiększonymi jarzmami,
— do ustalenia poziomu strat lub wartości innych danych znamionowych, jak np. napięcie zwarcia,
— do oceny ekonomiki projektu w związku ze zmianą cen materiałów czynnych,
— do weryfikacji projektów transformatorów obliczanych bezpośrednio (bez użycia EMC),
— do sporządzania propozycji ofertowych na transformatory energetyczne.

Na zakończenie autorzy wyrażają wdzięczność Panu prof. dr h. Maciejowi Kozłowskiemu, Kierownikowi Zakładu Transformatorów Instytutu Elektrotegniki w Łodzi, za wnikliwą recenzję niniejszej pracy i uwagi, które wykorzystaliśmy w celu istotnego ulepszenia przedstawionej metody.

LITERATURA

1. E. Jezierski, *Transformatory — Podstawy teoretyczne*, WNT, Warszawa 1965.
2. E. Jezierski, Z. Gogolewski, Z. Kopczyński, J. Szmit, *Transformatory — Budowa i projektowanie*, WNT, Warszawa 1963.
3. B. Schwarz, *Der wirtschaftliche Entwurf des Transformators*, E u M, 1931, s. 873.
4. B. Dubicki, *Obliczanie trójfazowych transformatorów rdzeniowych*, Przegląd Elektrotechniczny, 1950, z. 1/2/3.
5. W. Lepieszko, *Wyznaczanie najkorzystniejszych wymiarów geometrycznych transformatora*, Przegląd Elektrotechniczny, 1955, z. 2/3.
6. I. N. Popow, C. I. Genow, *Opriedielenie optymalnych rozmierow siłowych transformatorow*, Energia, Moskwa 1967.
7. A. Łowicki, *Metoda analizy i optymalizacji transformatorów*, Przegląd Elektrotechniczny, 1966, z. 12.
8. H. M. Deng, *Erfahrungen mit der Transformatoren-Berechnung auf dem Computer*, Bulletin Oerlikon, 1968, nr 383/384, s. 2.
9. W. A. Sharpley and J. K. Oldfield, *The digital computer applied to the design of large power transformers*, Proc. IEE, Aug. 1957, p. 112.
10. Z. Kopczyński, *Straty dodatkowe w uzwojeniach transformatorów*, Przegląd Elektrotechniczny, 1938, s. 334.

Z. RYDZEWSKI, M. JAROSZEWSKI

CALCULATION OF OPTIMAL FUNDAMENTAL DIMENSIONS OF ACTIVE PARTS OF POWER TRANSFORMERS

Summary

The paper describes an algorithm of calculation of optimal fundamental dimensions of active parts of power transformers with the aid of the digital computer.

As the criterion of optimalization a minimal cost of active materials for production of transformer has been assumed. Four variants of the program for the digital computer were made: with a limitation of magnetic flux density value in leg on account of the exciting current and without this limitation for transformers in which cores with area cross-section of leg s_k is equal to area cross-section of yoke s_j and for transformers with cores where $s_j > s_k$.

In calculation also the thermal loading of winding at rating is verified. Input information to the program for the digital computer are: rating, insulating distance, fill factor of windings and others, all easy to prepare.

The program for the digital computer was realized in ALGOL. The calculations with computer Odra 1204 take one minute. As a result of the calculation we obtain basic dimensions of core and correlative to them voltage of coil magnetic flux density in leg and yoke, cost and mass of active materials, tension in conductors of windings induced by radial forces and outline of windings. On the basis of the above principles an accurate design of windings of optimal transformer may be made directly.

Z. RYDZEWSKI, M. JAROSZEWSKI

CALCUL DE FONDAMENTALES DIMENSIONS OPTIMALES DES PARTIES ACTIVES DES TRANSFORMATEURS DE PUISSANCE

Résumé

On a présenté dans l'article l'algorithme du calcul, à l'aide d'un calculateur numérique, des fondamentales dimensions optimales des parties actives des transformateurs énergétiques. Comme critère d'optimisation on a admis le prix minimal des matériaux actifs du transformateur. Le programme pour le calculateur est prévu en quatre variantes: a) avec limitation de la valeur de la densité de flux magnétique dans les noyaux magnétiques à cause du courant à vide, b) sans cette limitation. Ces deux possibilités sont adaptées aux transformateurs avec les noyaux magnétiques, dans lesquels la surface de la section transversale de la colonne s_k est égale à al surface de la section transversale de la culasse s_j ainsi qu'aux transformateurs avec $s_j > s_k$. Au cours des calculs on a vérifié aussi le charge thermique des enroulements en régime nominal.

Les données d'entrée pour le programme sont les suivantes: paramètres nominaux, distances isolantes, facteur de remplissage des enroulements et les autres, au total au nombre de 46, tous faciles à préparer. Le programme ALGOL peut être réalisé pendant une minute. En résultat des calculs on reçoit des dimensions fondamentales du noyau magnétique et les valeurs correspondantes: tension par spire, induction dans la colonne et dans la culasse, prix et masses des matériaux actifs, tension mécanique des conducteurs des enroulements évoquée par des forces radiantes et aussi les dimensions fondamentales des enroulements.

D'après ce principe on peut avec facilité préparer directement le projet exact des enroulements d'un transformateur optimalisé.

Z. RYDZEWSKI, M. JAROSZEWSKI

BERECHNUNG DER OPTIMALEN ABMESSUNGEN AKTIVER GRUNDELMENTE VON TRANSISTOREN

Zusammenfassung

In der Arbeit wurde der Algorithmus für Berechnungen der optimalen Abmessungen aktiver Grundelemente der Dreiphasentransformatoren unter Anwendung von Digitalrechnern angegeben.

Als Kriterium für die Optimierung wurden minimale Werkstoffkosten der aktiven Elemente angenommen.

Das Programm für die Digitalrechner wurde in vier Varianten bearbeitet: 1) mit einer durch Leerlauf verursachte Begrenzung des Induktionwertes des Magnetkerns, und 2) ohne diese Begrenzung; 3) unter Anwendung von Transformatoren, deren Durchschnittfläche des Kerns s_k der Durchschnittsfläche des Jochs s_j gleicht; 4) such für Transformatoren, bei denen s_j größer als s_k ist.

Während der Berechnungen wurde auch die thermische Belastung der Wicklungen beim Nennbetrieb geprüft. Die Programmanfangsdaten für die Digitalrechenanlagen sind: Nennwerte des Transformators,