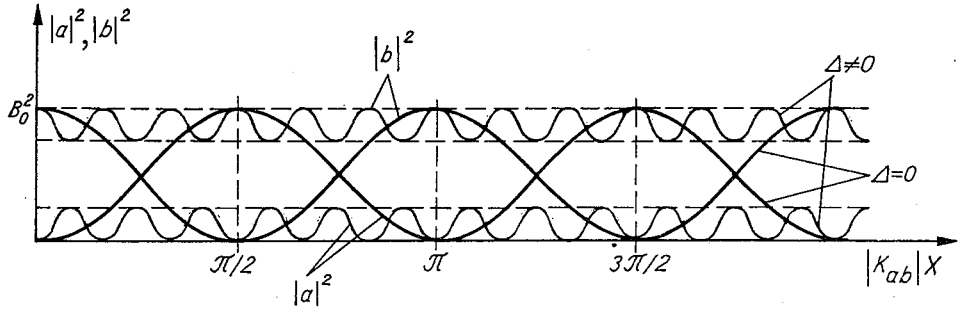
Z tego i z (14) wynika $\kappa_{ab} = -\kappa_{ba}^*$; wprowadzamy też $\kappa = |\kappa_{ab}|$. W strukturze bezstratnej ruch falowy trzeba zainicjować; jeśli falę $b(x, t)$ potraktujemy jako padającą, to na początku rozpatrywanej struktury ($x = 0$) mamy $b(0, t) = B_0$, $a(0, t) = 0$. Z tymi warunkami brzegowymi rozwiązanie układu (14) dla $\Delta = 0$ będzie miało postać:

$$a(x, t) = B_0 \frac{\kappa_{ab}}{\kappa} \exp(i\omega_a t - k_a x) \sin \kappa x, \tag{17}$$

$$b(x, t) = B_0 \exp(i\omega_b t - k_b x) \cos \kappa x.$$

Dla $\Delta \neq 0$ wzoıy się komplikują [27], jednak wynika z nich, że dla $\Delta \neq 0$ sprzężenie staje



Rys. 7. Przebiegi amplitud fal a i b w różnych warunkach dostrojenia „w przód" [27]

się coraz słabsze i dla $\Delta \gg \kappa_{ab}$ staje się ono pomijalnie małe. Obrazuje to rys. 7. Dla fal przeciwbieżnych warunek zachowania energii:

$$\frac{\partial}{\partial x}(|A|^2 - |B|^2) = 0, \tag{18}$$

z czego wynika, że $\kappa_{ab} = \kappa_{ba}^*$.

Wprowadzamy analogicznie warunki brzegowe dla $x = 0$: $b(0, t) = B_0$, przy czym struktura zaburzona rozciąga się na obszarze $x \in (0, L)$. Fala $a(x, t)$ powstaje wskutek zaburzenia w całym tym przedziale x. Fala $b(x, t)$ przekazuje swą energię fali $a(x, t)$, sama tracąc energię (tak aby w sumie spełnić (18)). Fala a porusza się w kierunku przeciwnym do b i jest zainicjowana przez b, tak więc w miejscu $x = L$ musimy założyć jej początek, czyli $a(L, t) = 0$ i potem a stopniowo wzrasta zbierając energię od b na swej drodze, ale równocześnie przekazując część swej energii zwrotnie do b — proces ten opisują równania (14) (ewentualnie (15)).

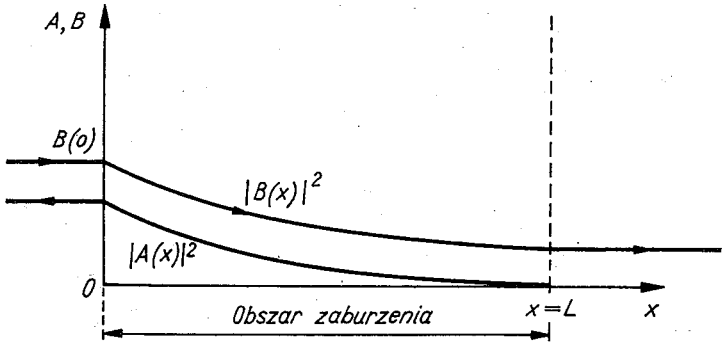
Rozwiązując układ (14) z omówionymi warunkami brzegowymi otrzymujemy dla $\Delta = 0$

$$A(x) = B(0) \frac{\kappa_{ab} \operatorname{sh} \kappa(x - L)}{\kappa \operatorname{ch}(\kappa L)},$$

$$B(x) = B(0) \frac{\operatorname{ch} \kappa(x - L)}{\operatorname{ch}(\kappa L)}. \tag{19}$$

Zależność (19) obrazuje rys. 8. Dla większych κ mamy duże argumenty funkcji hiperbolicznych i możemy je zastąpić eksponentami. Należy tu jeszcze raz podkreślić, że ekspo-

nencjalny wzrost lub zanik funkcji falowych jest efektem wymiany energii między nimi a nie stratnością lub aktywnością ośrodka. Problem ośrodków aktywnych rozpatruje się osobno startując od układu (15) i odpowiednich warunków brzegowych. Np. dla ośrodków aktywnych, w których rozwija się samoistnie akcja laserowa (pod warunkiem oczywiście, że uda się wymusić aktywność ośrodka), możemy założyć $a(L, t) = 0$ i $b(0, t) = 0$, jako że lasera nie wzbudza się z zewnątrz światłem. Następnie po zainicjowaniu akcji



Rys. 8. Przebiegi amplitud fal a i b przy sprzężeniu „wstecz" [27]

laserowej na skutek wymuszanych inwersją obsadzeń przejść promienistych fale a i b poruszając się przeciwbieżnie przekazują sobie wzajemnie energię (co opisuje układ (15)) i amplituda obu z nich narasta. Oczywiście nie może być tu zachowany warunek (18), który dotyczy ośrodków pasywnych. Symetryczne warunki brzegowe i symetria lasera DFB pozwala przewidzieć symetrię ruchu falowego, czyli identyczność przebiegu $A(x)$ i $B(x)$ z wyjątkiem tego, że kierunki narastania A i B są przeciwne.

Załóżmy równanie falowe podane wzorem (3). Rozwiązaniem takiego równania mogą być fale opisane wzorem (13), (13a). Podstawiając superpozycję tych fal do równania (3) i zakładając sprzężenie słabe (mała wartość κ oraz $\Delta \approx 0$) na tyle aby słuszna była nierówność:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \ll k_a \frac{\partial A}{\partial x} \tag{20}$$

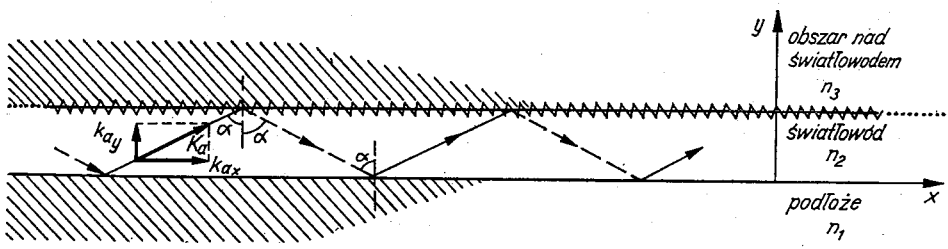
(co oznacza, że zmienność amplitudy — obwiedni fali jest znacznie wolniejsza niż zmienność „nośnej" samej fali) dochodzimy do układu równań typu (14). Jednak w tym otrzymanym układzie wartości κ_{ab} i κ_{ba} będą jawnie uzależnione od postaci zaburzenia (czyli funkcji $(\varepsilon - \varepsilon_0)$ we wzorze (3)) i od rozkładu poprzecznego fali. Czyli trzeba rozpatrywać $a(x, y, t)$ i $b(x, y, t)$ zamiast $a(x, t)$ i $b(x, t)$, gdzie właśnie element funkcji falowej zależny od y obrazuje ten rozkład poprzeczny.

Faktycznie w rzeczywistym falowodzie (światłowodzie) fala porusza się pod pewnym kątem od kierunku falowodu poprzez kolejne odbicia od jego krawędzi (krawędziami w światłowodach są skokowe nieciągłości współczynnika załamania — rys. 9). Powoduje to, że wektor falowy np. fali $a(x, y, t)$ ma postać

$$\mathbf{K}_a = \mathbf{k}_{ax} + \mathbf{k}_{ay}, \tag{21}$$

czyli

$$K_a^2 = k_{ax}^2 + k_{ay}^2. \tag{21a}$$



Rys. 9. Tor ruchu fali $a(x, y, t)$ w światłowodzie
Warunek prowadzenia fali: $n_2 > (n_1, n_3)$

Zależnie od kąta padania fali na granice ośrodków różnie będzie się dzielił wektor $\mathbf{K}$ na swoje składowe $\mathbf{k}_x$ i $\mathbf{k}_y$ — to leży u podstaw struktury modów poprzecznych światłowodów (ruch falowy w cienkich światłowodach będzie omówiony w części 3).

Wracając do oszacowania współczynnika sprzężenia κ: zakładając opisany ruch zygzakowy fali w światłowodzie oraz zakładając, że $(\varepsilon(x)-\varepsilon_0)$ jest funkcją prostokątną o wypełnieniu $\frac{1}{2}$ i okresie Λ, Amnon Yariv w swojej pracy [27], podał następujące oszacowanie dla κ

$$\kappa_l = \frac{\pi k}{3l}\frac{(n_2^2-n_3^2)}{n_2}\left(\frac{a}{t}\right)^3\left(1+\frac{3(\lambda_0/a)}{2\pi(n_2^2-n_3^2)^{1/2}}+\frac{3(\lambda_0/a)^2}{4\pi^2(n_2^2-n_3^2)}\right), \tag{22}$$

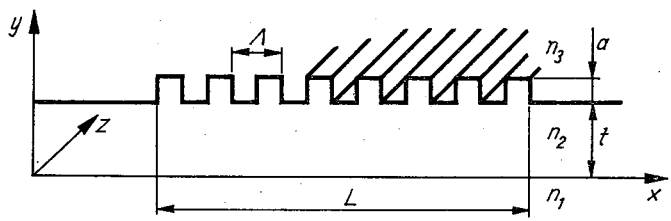
gdzie:

$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ — wektor falowy światła w próżni,

l — rząd zaburzenia,

a — głębokość rowków zaburzenia (rys. 10),

t — grubość światłowodu.



Rys. 10. Ilustracja do wzoru (22)

Wzór (22) słuszny jest dla eksponencjalnych zmian amplitudy ruchu falowego danych równaniami (19) przy wartości $\Delta \approx 0$. Trzeba zauważyć, że warunek (20) wynika z założenia, że κ jest małe, czyli również teoria modów sprzężonych jest słuszna tylko dla małych zaburzeń (bo wielkość κ wyniknie z wielkości operatora zaburzającego w (3)).

Widzimy więc, że rozwiązując równanie falowe zaburzone z funkcjami typu (13) jako postulowanymi rozwiązaniami dochodzimy do pary równań sprzężonych (14) i z tego w oparciu o teorię modów sprzężonych możemy określić dokładnie ruch falowy w periodycznej strukturze.

Wróćmy jeszcze do periodycznych ośrodków aktywnych. Sprzężenie między dwoma podstawowymi modami opisują tam równania (15). W równaniach tych $\alpha = -\frac{\mu c \sigma}{2\sqrt{\varepsilon}}$ reprezentuje aktywność ośrodka, czyli zdolność wzmacniania światła i odpowiada ujemnej przewodności [1, 17].

Zakłada się periodyczność zmian $\varepsilon(x)$ (czyli także współczynnika n) oraz α. Aby zachować warunek (20) zakłada się znów, że dewiacje (wzdłuż kierunku x) n i α są małe w porównaniu ze średnimi wartościami n i α. W teorii laserów DFB (bo takie są na ogół realizacje aktywnych struktur periodycznych) zakłada się z góry spełnienie warunków Bragga, czyli mamy

$$k_{ax} = -k_{bx} \quad \text{oraz} \quad k_{ax} - (-k_{bx}) = l\beta = l\frac{2\pi}{\Lambda} = 2k_{ax}. \tag{23}$$

Wstawiając przyjęte funkcje na n i α do równania (2) otrzymamy, że [1, 17]:

$$k^2(x) = k_{ax}^2 + i2\alpha k_{ax} + 4\kappa k_{ax}\cos(\beta x), \tag{24}$$

gdzie

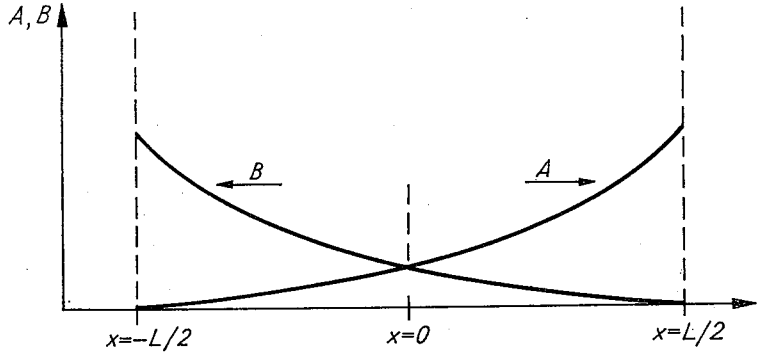
$$\kappa = \frac{n'}{2}k_{ax} + i\frac{\alpha'}{2} \tag{25}$$

jest współczynnikiem sprzężenia, oraz n' i α' są amplitudami periodycznych dewiacji n i α.

Dla uproszczenia rozpatrzony jest tylko pierwszy rząd zaburzenia oraz ruch falowy w przestrzeni nieskończenie rozciągłej w kierunku z i y, tak że $k = k_x$.

Wypadkowy ruch falowy postuluje się w postaci superpozycji fal opisanych wzorami (13); problem sprowadza się do poszukiwania $A(x)$ i $B(x)$. Z powodu aktywności ośrodka i niewzbudzania falą zewnętrzną przyjmuje się symetryczne zerowe warunki brzegowe $a(-\frac{L}{2}, t) = b(\frac{L}{2}, t) = 0$, jak to poprzednio rozpatrywano. Przy tych założeniach rozwiązanie (15) daje

$$\begin{aligned} A(x) &= \operatorname{sh}\gamma\left(x + \frac{1}{2}L\right), \\ B(x) &= \pm\operatorname{sh}\gamma\left(x - \frac{1}{2}L\right), \end{aligned} \tag{26}$$



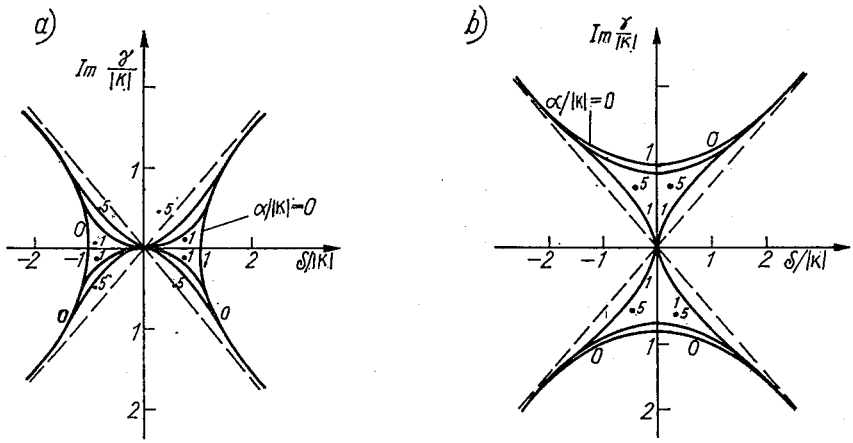
Rys. 11. Rozkład amplitud sprzężonych ze sobą fal przeciwbieżnych a i b w laserze DFB [17]

co obrazuje rys. 11, gdzie γ jest zespolonym (wskutek aktywności ośrodka) wektorem falowym spełniającym relację dyspersji

$$\gamma^2 = \kappa^2 + (\alpha - i\Delta)^2. \tag{27}$$

Postać (27) otrzymujemy właśnie z rozwiązania układu charakterystycznego dla układu (15); Δ jest rozstrojeniem od warunku Bragga.

Interpretacja równania (27) jest trudna dla zespolonej wartości κ, dlatego z osobna rozpatruje się przypadek gdy κ jest rzeczywiste (czyli źródłem sprzężenia są wyłącznie dewiacje n) i gdy κ jest urojone (sprzężenie pochodzi od dewiacji α). Oba te przypadki graficzne przedstawia rys. 12, ale pamiętać trzeba, że w rzeczywistości na ogół takiego



Rys. 12. Charakterystyki dyspersyjne w ośrodkach stratnych lub aktywnych (lasery DFB)
a) dla k rzeczywistych — dla różnych wartości α/k, b) dla k urojonych — dla różnych α/k [17]

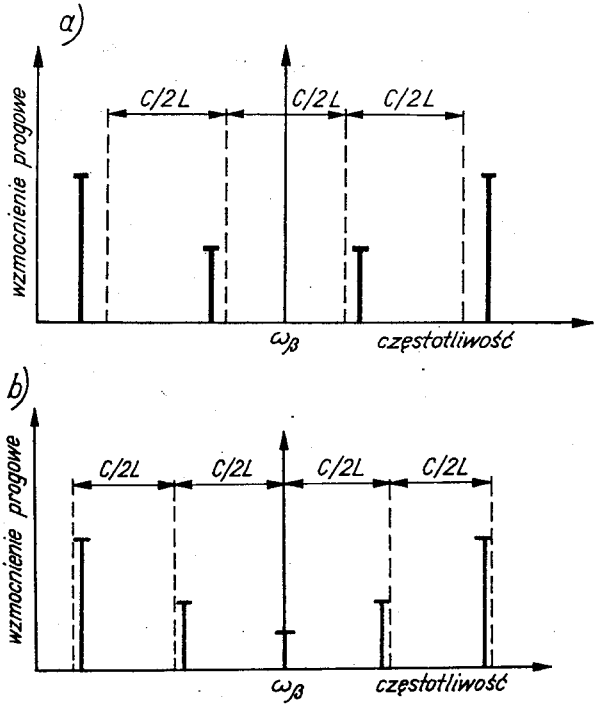
rozgraniczenia przeprowadzić nie można, gdyż z powodów technologicznych wprowadzając zaburzenia na ogół wpływa się na wszystkie parametry materiału. Rys. 12 wskazuje na wspomnianą na początku części 2.4 wzajemność zjawiska dyspersji.

Wykorzystując równania (26), (27) i (15) można wprowadzić zależności między wielkościami κ, α i Δ wskazujące na własności charakterystyk spektralnych lasera DFB. W szczególności można udowodnić, że wzmocnienie progowe wzrasta w miarę oddalania się od wartości k spełniającej warunek Bragga, czyli w miarę wzrostu Δ, co oznacza, że im dalej od preferowanej częstotliwości, tym większe musi być pompowanie lasera w celu zapewnienia wymaganego wzmocnienia progowego. Zatem teoretycznie istnieje taki zakres poziomów pompowania, że osiąga się wzmocnienie progowe dla częstotliwości preferowanej, podczas gdy dla pozostałych modów wzmocnienie jest niewystarczające dla wzbudzenia akcji laserowej, zatem praca jest jednomodowa. Obliczenia szacunkowe [17] wskazują, że poszczególne mody są od siebie oddalone o stałą różnicę częstotliwości odpowiadającą wektorowi falowemu $\frac{2\pi}{2L}$. To oszacowanie zakłada, że zaburzenia są naniesione na długości L, która jest równocześnie długością lasera, a poza laserem jest ośrodek o znacznie różniącym się współczynniku załamania. Wynikający z teorii wniosek o możliwości pracy jednomodowej jest potwierdzony praktycznie w wielu publikacjach

[3, 20, 12] z tym, że spektrum nie jest nieskończenie wąskie, bo poza dyskretnymi liniami — modami przewidzianymi teoretycznie istnieje przecież ciągłe widmo przejść promienistych w pewnym pasmie.

Selektywność struktur wzrasta oczywiście ze wzrostem ich długości. Własności selektywne w laserach DFB obrazuje rys. 13; dotyczy on wyników teorii.

W teorii modów sprzężonych założenie małej wartości κ zapewnia też, że amplitudy fali światła nawet w swych maksymalnych wartościach $\left(\text{tzn. } B\left(-\frac{1}{2}L\right) \text{ i } A\left(\frac{1}{2}L\right) - \text{rys. } 11\right)$ nie są zbyt duże, zatem ośrodek aktywny zachowuje liniowość, czyli $\alpha \neq f(A(x), B(x))$.



Rys. 13. Rozkład modów i potrzebne wzmocnienie progowe
a) dla k rzeczywistego, b) dla k urojonego [17]

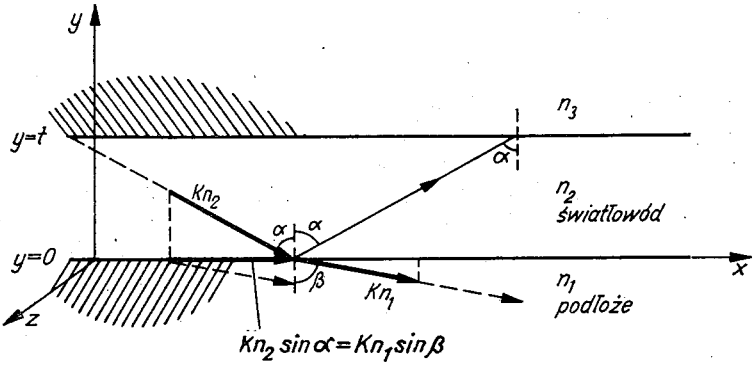
Dlatego cała analiza jest liniowa. Taki przypadek jednak praktycznie jest słuszny tylko dla pracy lasera tuż ponad progiem, przy silniejszych pompowaniach (nawet dla małych κ) ośrodek aktywny wskutek zjawiska nasycenia absorpcji staje się nieliniowy i cała opisana tu liniowa teoria modów sprzężonych wymaga dodatkowych korekcji.

3. RUCH FALOWY W CIENKICH ŚWIATŁOWODACH

Rozpatrzmy światłowód dielektryczny jak na rys. 14. Dla uzyskania efektu prowadzenia fali światła trzeba spełnić warunek $n_2 > (n_1, n_3)$, przy tym n_1 i n_3 mogą się od siebie dowolnie różnić.

W światłowodzie o skończonej grubości t fala porusza się zawsze ruchem zygzakowatym jak wspomniano w części 2 (rys. 9) [7, 8, 10, 27, 40]. Przy każdym odbiciu pojedynczego „promienia światła" od powierzchni nieciągłości zachowywana jest składowa styczna wektora falowego (prawo Sneliusa):

$$K_0 n_2 \sin\alpha = K_0 n_1 \sin\beta. \tag{28}$$



Rys. 14. Zależności między wektorami falowymi na granicy ośrodków n_1-n_2

Przy całkowitym wewnętrznym odbiciu (CWO) niezbędnym dla uzyskania efektu prowadzenia fali mamy $K_0 n_2 \sin\alpha > K_0 n_1$, zatem $\sin\beta > 1$; kąt β staje się zespolony. Podobnie $K_0 n_2 \sin\alpha > K_0 n_3$.

Przy CWO w gładkim światłowodzie (rys. 14) wektor E fali prowadzonej światła jest rozwiązaniem równania (1) w postaci

$$E(x, y) = A \exp \pm \big(i(K_0 n_2 \sin\alpha)x\big)\psi_i(y),$$

w której

$$\psi_i(y) = \begin{cases} \psi_1 = \exp(\varkappa y) & \text{— w obszarze 1 (podłoże); } y < 0, \\ \psi_2 = \sin(\chi y + \delta) & \text{— w obszarze 2 (światłowód); } y \in (0, t), \\ \psi_3 = \exp -\nu(y-t) & \text{— w obszarze 3 (nad światłowodem);} \\ & y > t, \end{cases} \tag{29}$$

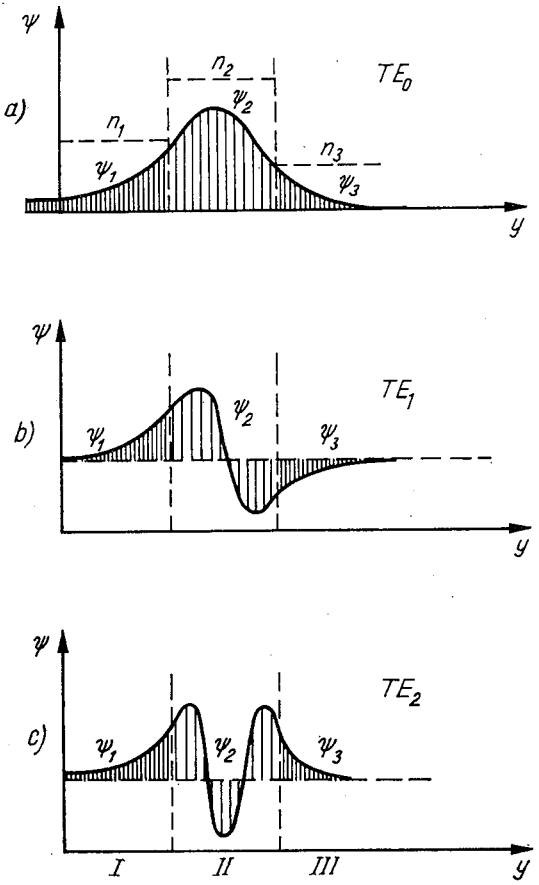
gdzie $\varkappa$, χ, ν są wektorami falowymi składowej poprzecznej (do kierunku prowadzenia x) ruchu falowego związanymi zależnościami:

$$\begin{aligned} (K_0 n_2 \sin\alpha)^2 + \chi^2 &= (K_0 n_2)^2, \\ (K_0 n_2 \sin\alpha)^2 - \varkappa^2 &= (K_0 n_1)^2, \\ (K_0 n_2 \sin\alpha)^2 - \nu^2 &= (K_0 n_3)^2, \end{aligned} \tag{30}$$

odpowiednimi do wzoru (21). Widać że wartości $\varkappa$ i ν są urojone co wynika z prawa Sneliusa. Funkcja $\psi_i(y)$ obrazuje strukturę modową poprzeczną ruchu falowego w światłowodzie, [41] (rys. 15).

Przy zadanych (np. przez warunki technologiczne) wartościach $n_{1,2,3}$ można znaleźć tak małe kąty α, że warunek CWO nie będzie spełniony. Zachodzi to dla kątów $\alpha_1 \leqslant \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$ i $\alpha_3 \leqslant \arcsin\left(\frac{n_3}{n_2}\right)$. Mniejszą z wartości $\alpha_{1,3}$ oznaczymy α_{min}.

Dla kątów $\alpha < \alpha_{min}$ następuje „wyciekanie fali" (*leaky waves*) przez obie krawędzie światłowodu. Dla $\alpha_1 < \alpha < \alpha_3$ „wyciekanie" będzie jednostronne [4, 7] Przy spełnieniu warunku CWO prawie cała energia fali jest prowadzona w światłowodzie. Część energii prowadzona poza światłowodem w kierunku x a zawarta w wykładniczo zanikających „ogonach" funkcji $\psi(y)$ jest w optyce zintegrowanej wykorzystywana do sprzęgania fali



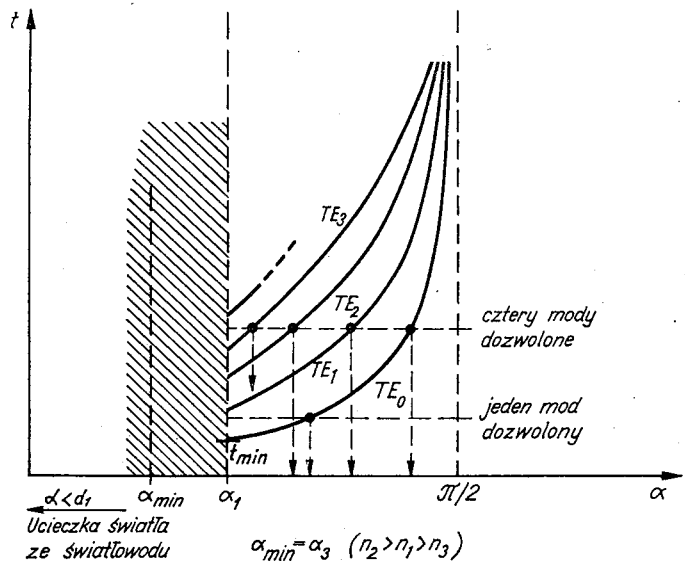
Rys. 15. Rozkłady poprzeczne pola E w światłowodzie cienkowarstwowym
a) dla podstawowego modu poprzecznego TE_0, b) dla drugiego modu poprzecznego TE_1, c) dla modu TE_2
Im większa jest różnica $(n_i - n_j)$ na granicy ośrodków, tym skuteczniejsze jest pułapkowanie energii w światłowodzie

światła prowadzonej w danym światłowodzie do innego światłowodu (analogicznie do rezonansowych obwodów sprzężonych LC). Efekt prowadzenia części strumienia wektora Poyntinga poza ściankami światłowodu nazwano tunelowaniem optycznym [7, 10, 11, 29].

Z warunków brzegowych na ciągłość funkcji $\psi_i(y)$ i jej pochodnej na granicach ośrodków [41] można wyznaczyć dopuszczalne rozkłady poprzeczne (kształty $\psi_i(y)$). Okazuje się [42], że dla ustalonej grubości t istnieje dyskretny zbiór wartości χ (oraz odpowiednio $\varkappa$ i ν dla danego K_0) reprezentujących poszczególne mody poprzeczne światłowodu [41]. Dla zadanych $n_{1,2,3}$ zbiór „trójek" wartości $(\chi, \varkappa, \nu)$ zależy wyłącznie od t dla danego K_0. Zbiór ten powiększa się ze wzrostem t. Dla bardzo cienkich światłowodów może istnieć

tylko jedna trójka (χ, $\varkappa$, ν), wtedy światłowód ma jednomodową strukturę poprzeczną, co jest pożądane w wielu wypadkach gdy chodzi o wąskie charakterystyki spektralne (np. w laserach).

Rys. 15 przedstawia orientacyjny rozkład poprzeczny fali trzech kolejnych modów poprzecznych.



Rys. 16. Zależności dopuszczalnych kątów odbicia fali od granic ośrodków w światłowodzie od grubości światłowodu, dla trzech pierwszych modów poprzecznych
Widać, że dla grubszych światłowodów może wystąpić kilka rozkładów poprzecznych jednocześnie [10]

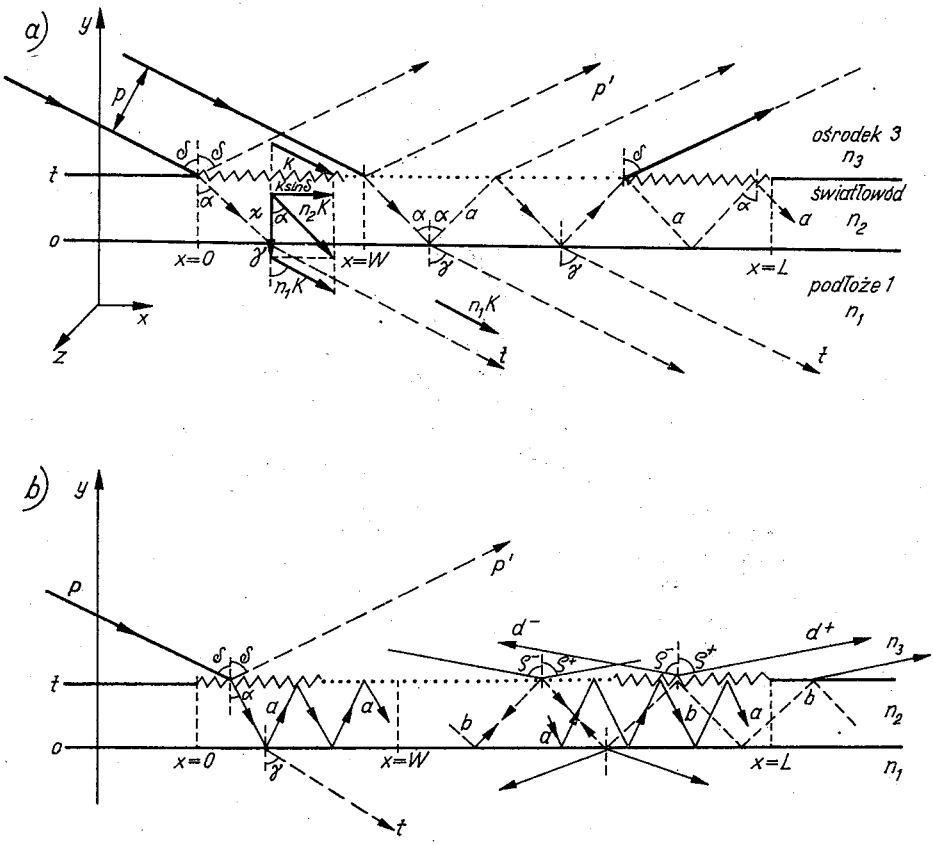
Poprzez zależność (30) wartości χ ($\varkappa$, ν) jednoznacznie odpowiada wartość α. Rys. 16 przedstawia zależność grubości światłowodu t od α dla czterech pierwszych modów poprzecznych. Widać jak ze wzrostem t rośnie ilość modów poprzecznych możliwych do utrzymania w światłowodzie. W rys. 16 przyjęto założenie $n_2 > n_1 > n_3$.

4. SPRZĘŻENIE STRUMIENIA ŚWIATŁA DO ŚWIATŁOWODU PRZY POMOCY STRUKTURY PERIODYCZNEJ

Część trzecia nie dotycząca bezpośrednio struktur periodycznych jest w analizie tych struktur nieodzowna, ponieważ — pomyślane jako podstawowe elementy w optyce zintegrowanej — struktury periodyczne są obecnie realizowane prawie wyłącznie jako cienkowarstwowe, a więc fale są tam prowadzone tak jak w cienkich światłowodach.

Jeśli z podłoża lub z ośrodka nad światłowodem pada na powierzchnię światłowodu (czyli na powierzchnię nieciągłości n) pod pewnym kątem fala świetlna (płaska), której energia ma być następnie wprowadzona do światłowodu i utrzymana w nim, to od razu pojawia się składowa normalna do kierunku światłowodu.

Załóżmy, że fala pada pod kątem δ. Część fali odbije się, część wniknie do światłowodu — częściowe wnikanie jest tu zawsze możliwe bo fala przechodzi z ośrodka o mniejszym n do światłowodu o większym n ($n_2 > n_1 > n_3$). Nałożenie struktury periodycznej w miejscu padania fali spowoduje, że poprzez zaburzenie składowa równoległa do światłowodu zostanie sprzężona do innej długości fali spełniającej warunek Bragga (wzór 6).



Rys. 17. Ruch falowy w światłowodzie zaburzonym

p — fala padająca na światłowód (*P* — amplituda fali *p*), *p'* — fala odbita, *t* — fala transmitowana do podłoża, *a* — fala wprowadzona do światłowodu wskutek częściowego odbicia fali *p* od granicy światłowód-podłoże (jest to fala wyciekająca), *b* — fala sprzężona do *a* poprzez zaburzenie, *d* — fala wyciekająca w przypadku gdy fala *b* nie jest prowadzona

Fala o tej nowej długości będzie prowadzona w światłowodzie o ile kąt między kierunkiem fali danego odcinka toru zygzakowego a kierunkiem światłowodu będzie jedną z wartości dozwolonych przy założonej grubości warstwy światłowodowej t.

Rozpatrzmy sytuację jak na rys. 17. Z zewnątrz (z ośrodka *3*) pada płaska fala świetlna wzbudzająca pod kątem δ. Załóżmy długość obszaru zaburzonego równą L, przy czym padająca fala pokrywa część tego odcinka od $x = 0$ do $x = W$. Zatem dla $x \in (0, W)$ pojawi się strumień odbity od powierzchni zaburzonej — dokładnie od składowej stałej funkcji opisującej powierzchnię sprzęgacza, odpowiadającej uśrednionej za odcinek L powierzchni gładkiej. To jest pierwszy strumień (prócz padającego) jaki zawsze można zaobserwować w ośrodku *3*. Poza tym strumieniem pojawiają się też inne jako produkty

interakcji poszczególnych rzędów zaburzenia ze strumieniem padającym (właściwie jego składową równoległą). Strumień odbity od powierzchni obserwuje się oczywiście pod kątem δ. Dla uproszczenia przyjmujemy jako ośrodek 3 — powietrze — $n_3 = 1$.

Dla fali padającej o wektorze K — w światłowodzie otrzymujemy wektor n_2K, którego składowa równoległa (do kierunku światłowodu) wynosi $K \sin \delta = n_2 K \sin \alpha$, z tego

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\sin\delta}{n_2}\right). \tag{31}$$

Widać, że $\alpha < \delta$. Zatem jest to prosty przypadek przejścia strumienia światła przez płytkę płasko-równoległą jaką jest rozpatrywany cienkowarstwowy światłowód. Kąt δ jest tu rzeczywisty, a więc nie jest spełniony warunek prowadzenia fali wymagający aby kat pod jakim porusza się fala poza światłowodem po przejściu przez granicę ośrodków był zespolony. Ponieważ $n_1 > n_3$, więc kąt γ pod jakim po przejściu granicy światłowód-podłoże porusza się fala wzbudzająca w podłożu jest mniejszy od δ, również rzeczywisty. Wprawdzie na granicy tej następuje częściowe odbicie z powrotem do światłowodu (rys. 17a), ale nie jest całkowicie wewnętrzne odbicie w światłowodzie, więc część tej energii odbitej przeniknie do powietrza przy kolejnym dojściu do międzypowierzchni światłowód-powietrze, i tak po niewielkiej ilości odbić efekt prowadzenia zanika zupełnie, co będzie widoczne jako stopniowe zanikanie światła emitowanego z powierzchni światłowodu poza obszarem pokrytym przez strumień wzbudzający (czyli dla $x > W$). Dla $x > W$ ale bliskich W strumień prowadzony jest jeszcze stosunkowo znaczny; zatem i znaczny jest strumień „wyciekający" przez powierzchnię światłowodu, ale dla rosnącego x maleje on. Jednak tempo zanikania tego strumienia wyciekającego maleje w miarę wzrostu x, czyli gdy amplituda fali prowadzonej maleje właśnie wskutek wyciekania. Opisuje to równanie:

$$-\frac{\partial A}{\partial x} = \alpha' A, \tag{32}$$

gdzie: A — amplituda fali prowadzonej (pamiętamy, że jest to jakby szczątkowe prowadzenie przy niespełnionym warunku całkowitego wewnętrznego odbicia), α' — współczynnik strat danej prowadzonej fali zależny od długości fali, jej struktury poprzecznej, od grubości światłowodu, kształtu zaburzenia, strat niepromienistych w materiale itd.

W szczegółach analizują to np. Marcuse [4] i Ogawa ze współpracownikami [16].

Rozwiązaniem (32) jest opis zanikającej w światłowodzie fali pochodzącej od strumienia wzbudzającego:

$$A = A_0 \exp -(\alpha' x). \tag{33}$$

Opisana dotąd sytuacja jest niezależna od gratingu, jest to opis fali padającej i przenikającej cienką warstwę w układzie $n_2 > n_1 > n_3$. Widać, że padając na gładki światłowód fala nie może być do niego sprzężona.

Natomiast w obecności gratingu jako sprzęgacza sprzężenie jest możliwe. Dany jest grating o okresie podstawowym Λ (czyli wektor falowy: $l\beta = l\frac{2\pi}{\Lambda}$, gdzie l — numer rzędu zaburzenia). Dla zaburzenia pierwszego rzędu składowa równoległa fali wzbudzającej (czyli mod podłużny o wektorze falowym $K \sin \delta$) zostanie sprzężona do modu

podłużnego o wektorze $(K \sin \delta \pm \beta)$. Przy tym zmieni się składowa poprzeczna wektora falowego tak, aby zachowała się wartość całkowitego wektora falowego $n_2 K$. Aby ta nowa fala mogła być całkowicie wewnętrznie odbita (CWO) potrzebne jest aby

$$|K \sin \delta \pm \beta| > n_1 K. \tag{34}$$

Warunek (34) mówi, że dla osiągnięcia sprzężenia do światłowodu potrzebna jest pewna minimalna długość wektora falowego nowej fali. Moduł po lewej stronie (34) oznacza, że dopuszczalne jest sprzężenie do fali współbieżnej i przeciwbieżnej. Widać, że warunek jest tym łatwiejszy do spełnienia, im większa jest różnica współczynników załamania podłoża i warstwy prowadzącej światło; oznacza to, że dopuszczalne jest wtedy sprzężenie przy szerszym zakresie kątów padania.

Spełnienie warunku prowadzenia fali sprzężonej (CWO) dla międzypowierzchni podłoże-światłowód gwarantuje też spełnienie potrzebnego warunku na granicy światłowodu z powietrzem, ponieważ $n_1 > n_3 = 1$.

Przeprowadzona analiza dla pierwszego rzędu zaburzenia może być powtórzona dla każdego z wyższych rzędów. Przy tym, jeśli na pierwszym rzędzie zaburzenia uzyskujemy sprzężenie „w przód", to począwszy od pewnego wyższego rzędu zaburzenia sprzężenia będą się odbywały do fali przeciwbieżnej (rys. 5); jeśli na pierwszym rzędzie zaburzenia sprzężenie będzie do fali przeciwbieżnej, to na wyższych rzędach także.

W cienkich światłowodach dla danej grubości t (rys. 17) i dla danego $n_2 K$ istnieje dyskretny zbiór dopuszczalnych kątów, pod którymi porusza się prowadzona fala sprzężona w stosunku do ścianek światłowodu i nie dla wszystkich wartości prowadzenie może być zrealizowane (przy CWO). Fala sprzężona (poprzez grating — do fali wzbudzającej) porusza się w światłowodzie poprzez odbicia pod kątem należącym do określonego dyskretnego zbioru, zatem dyskretny musi być też zbiór δ. Dlatego struktura periodyczna jest sprzęgaczem kierunkowym (w sensie kierunku padania strumienia wzbudzającego).

W strukturze periodycznej fala wzbudzająca a przekazuje energię (poprzez zaburzenie) do innej fali, b — o wektorze $(K \sin \delta - \beta)$ (składowa równoległa). Równocześnie zachodzi proces odwrotny — fala sprzężona do padającej przekazuje swą energię zwrotnie do fali wzbudzającej (przez ten sam rząd zaburzenia) oraz do innych modów $(K \sin \delta - l\beta)$ poprzez wyższe rzędy zaburzenia. Proces otrzymywania i oddawania energii opisuje równanie

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \kappa B - \xi A, \tag{36}$$

gdzie κ opisuje straty energii fali sprzężonej na korzyść fali wzbudzającej oraz innych modów $(K \sin \delta - l\beta)$; ξ opisuje przyrost amplitudy wskutek sprzężenia fali sprzężonej z falą wzbudzającą [11].

Równanie (36) jest jednym z układu równań (15). Drugie równanie $\left(\text{zawierające } \frac{\partial A}{\partial x}\right)$ jest zbędne, ponieważ $A = \text{const}$, jako amplituda fali padającej z zewnątrz równomiernie na cały odcinek $x \in (0, W)$. Rozwiązaniem (36) jest opis przebiegu amplitudy modu sprzężonego dla $x \in (0, W)$:

$$B(x) = \frac{\xi A}{\kappa}\left(1 - \exp -(\kappa x)\right). \tag{37}$$

Dla $x \in (W, L)$ mamy $A = 0$; wtedy równanie (36) przypomina równanie (32) i rozwiązanie go przy zastosowaniu wyrażenia (36) jako warunku brzegowego dla $x = W$ daje opis fali sprzężonej w strukturze periodycznej poza obszarem wzbudzenia:

$$B(x) = \frac{\xi A}{\kappa}(1-\exp(-\kappa W))\exp(-\kappa(x-W)), \tag{38}$$

gdy $x \in (W, L)$.

W miejscu $x = L$:

$$B(L) = \frac{\xi A}{\kappa}(1-\exp(-\kappa W))\exp(-\kappa(L-W)). \tag{39}$$

Opisane rozwiązanie jest uniwersalne o tyle, że fala sprzężona może tu być prowadzona (gdy δ należy do wspomnianego dyskretnego zbioru i przy spełnieniu (34)), lub może „wyciekać" ze światłowodu podobnie jak fala wzbudzająca gdy (34) nie jest spełniona. Wtedy prócz strumieni wskazanych na rys. 17a pojawią się nowe wyciekające strumienie odpowiednie do fali sprzężonej (w takim przypadku wartość κ musi też uwzględnić straty na ucieczkę energii do ośrodków *1* i *3*). Strumienie te mogą wypływać do ośrodków *1* i *3* lub tylko do *1* (podłoża). Obrazuje to rys. 17b, gdzie te nowe strumienie wypływają pod kątem ϱ, przy tym może to być ϱ^+ przy sprzężeniu „w przód" lub ϱ^- przy sprzężeniu „wstecz". Jeśli warunek prowadzenia nie jest spełniony przy sprzężeniu na pierwszym rzędzie zaburzenia, to może zostać spełniony na wyższych rzędach, o ile sprzężenie będzie wystarczająco silne.

Jeśli dana fala sprzężona jest prowadzona, to dla $x > L$ zachowuje ona amplitudę $B(L)$ (39) na całej długości gładkiego światłowodu. Jeśli sprzęgacz zaprojektowany zostanie tak, że cała jego powierzchnia jest naświetlona strumieniem wzbudzającym ($W = L$), to wtedy

$$B(L) = \frac{\xi A}{\kappa}(1-\exp(-\kappa L));$$

jest to największy możliwy poziom sprzężenia w sprzęgaczu o długości L. Strumień sprzężony do tego poziomu jest przekazywany ze sprzęgacza do światłowodu.

Sprawność sprzęgacza proporcjonalna do $\left(\frac{B(L)}{A}\right)^2$ jest:

$$\eta = \eta_0 \frac{(1-\exp(-\kappa L))^2}{\kappa L}. \tag{40}$$

Maksymalizując wyrażenie $\frac{(1-\exp(-L))^2}{L}$ otrzymujemy

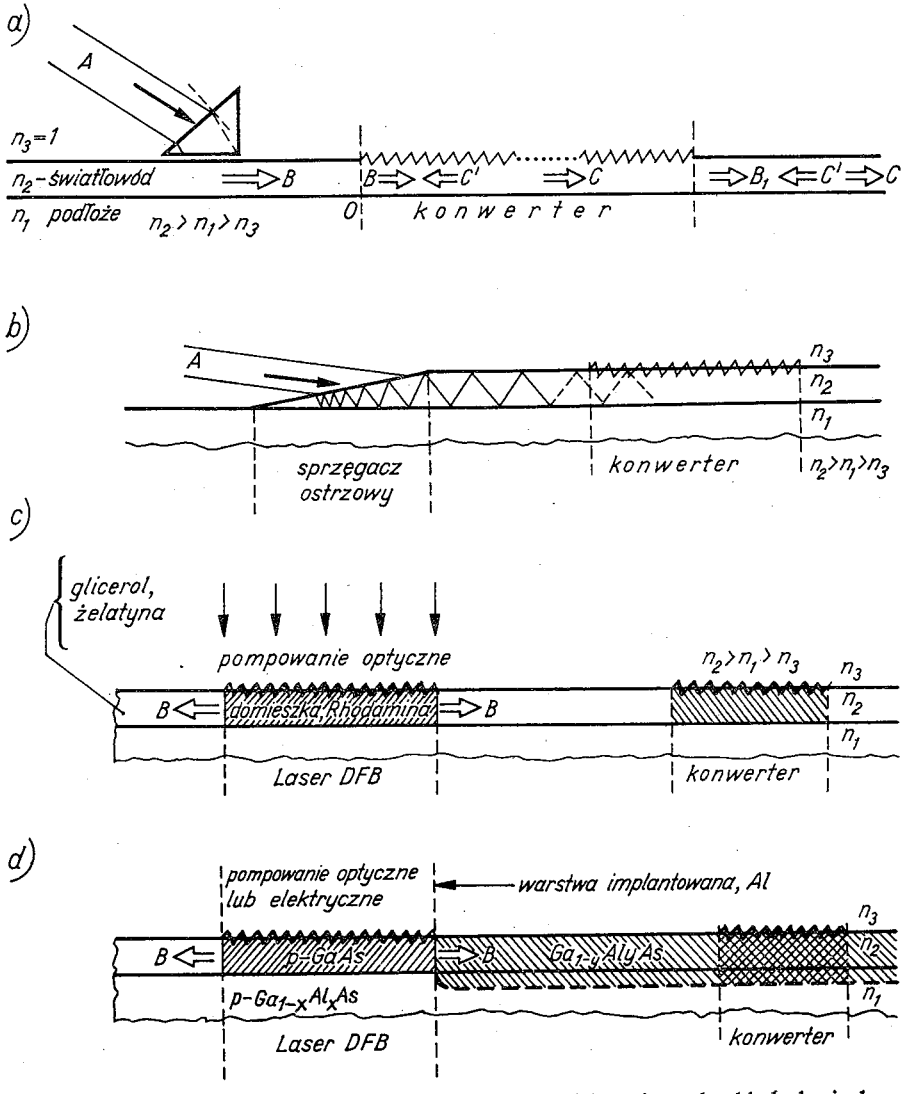
$$\eta_{max} = \eta_0 \cdot 0{,}407 \quad \text{dla} \quad \kappa L = 1{,}25. \tag{41}$$

Opisany sprzęgacz ze strukturą periodyczną jest jedynym z trzech typów sprzęgaczy stosowanych w optoelektronice i optyce zintegrowanej, poza tym stosowane są jeszcze sprzęgacze pryzmatyczne [7, 11] i ostrzowe [7, 12, 11]. Cechą charakterystyczną sprzęgacza periodycznego jest to, że sprzężenie do światłowodu odbywa się łącznie z konwersją modów, czego udowodnienie było zamiarem części 4. Sprawność tego sprzęgacza jest

tego samego rzędu co dwóch pozostałych typów (zawsze $\eta = \eta_0 \cdot 0{,}407$, gdzie η_0 zależy od własności materiału, długości światła, wartości κ, struktury modów poprzecznych [16, 4]). Teoretycznie sprawność η_0 może osiągnąć 81%.

5. PASYWNE STRUKTURY PERIODYCZNE W OPTYCE ZINTEGROWANEJ

W optyce zintegrowanej struktury periodyczne pasywne mogą być stosowane do realizacji operacji nieliniowych związanych z przemianą częstotliwości na danym kierunku oraz do ukierunkowywania ruchu fali świetlnej.

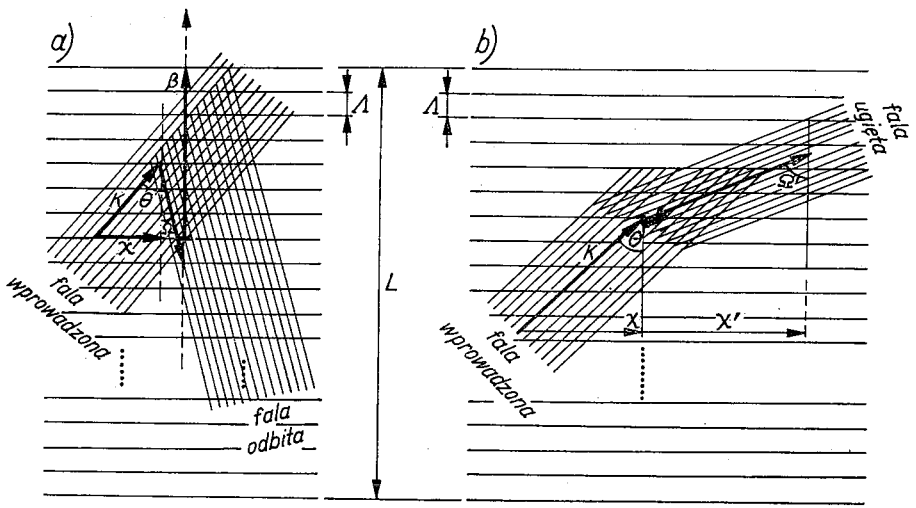


Rys. 18. Zastosowania struktur periodycznych w optoelektronicznych układach cienkowarstwowych

Przemiana częstotliwości związana jest oczywiście z konwersją modów. W tej części artykułu będziemy zakładali, że fala inicjująca proces w strukturze periodycznej jest falą prowadzoną w światłowodzie, który został na pewnym odcinku periodycznie zaburzony, co właśnie wytworzyło rozpatrywaną strukturę. Taka sytuacja może być zrealizowana różnymi sposobami; np. falę świetlną przed wprowadzeniem w grating można sprzęgnąć do światłowodu stosującego sprzęgacz pryzmatyczny (rys. 18a) lub ostrzowy (rys. 18b). Można też w pewnych przypadkach nie wprowadzać światła z zewnątrz, lecz uaktywnić pewien odcinek światłowodu i poprzez nałożenie gratingu otrzymać na tym odcinku akcję laserową w laserze DFB (rys. 18c). Można tak zrobić gdy w materiał światłowodowy udaje się wprowadzić materiał aktywizujący. Takim aktywatorem mogą być cząstki barwnika (np. Rhodamina 6G) wprowadzone do warstwy żelatyny lub glicerolu, która spełnia rolę światłowodu [3, 25].

Tak więc struktura z rys. 18c jest układem scalonym generatora optycznego z konwerterem modów (częstotliwości). Sytuację podobną w GaAs również można sobie wyobrazić w wersji niejako odwrotnej, tzn. obszar laserowy będzie odcinkiem z GaAs z nałożonym gratingiem a poza tym obszarem można w celu otrzymania ośrodka światłowodowego nieabsorbującego światła o energii kwantu 1.38 [eV] przeprowadzić implantację Al; otrzymamy światłowód GaAlAs, w którym z kolei można zrealizować pasywną strukturę periodyczną jako konwerter. Cały ten układ może być naniesiony na podłoże GaAlAs, ale z taką zawartością Al, aby podłoże miało mniejszy współczynnik załamania niż GaAlAs warstwy światłowodowej (rys. 18d) [30].

Fala świetlna o wektorze falowym (jego składowej równoległej) równym k (struktura poprzeczna jest taka, że fala ta jest prowadzona) jest wprowadzona w obszar periodycznych zaburzeń. Poprzez zaburzenie fala wejściowa jest sprzężona do modu podłużnego o wektorze falowym $(k-l\beta)$, gdzie β — wektor falowy podstawowego zaburzenia $\left(\beta=\frac{2\pi}{\Lambda}\right)$, l — rząd zaburzenia. Struktura poprzeczna fali sprzężonej jest inna niż fali padającej,



Rys. 19. Ugięcie fali w strukturze periodycznej
a) przy sprzężeniu „wstecz", b) przy sprzężeniu „w przód"

ale fala sprzężona może być również prowadzona. Jeśli wektor $(k-l\beta)$ będzie za krótki w stosunku do wektora poprzecznego aby utrzymać całkowite wewnętrzne odbicie w światłowodzie, to zaobserwujemy szybko zanikające strumienie światła wyciekającego przez powierzchnię światłowodu — sytuacja podobna jak dla fal sprzężonych nie spełniających warunku prowadzenia poza obszarem naświetlenia z zewnątrz w sprzęgaczach. Przypadek ten jest jednak mało ciekawy.

Pozostańmy przy fali sprzężonej prowadzonej. Rozpatrzmy sytuację jak na rys. 19a — fala wprowadzona jest pod pewnym kątem Θ do kierunku gratingu: $\sphericalangle(\mathbf{K}, \beta) = \Theta$.

Składowa wektora fali wprowadzonej równoległa do β: $k = K\cos\Theta$, zatem sprzężenie nastąpi do fali prowadzonej o wektorze równoległym $(K\cos\Theta - l\beta) = \vartheta$; dla fali padającej składowa poprzeczna (czyli równoległa do prążków gratingu) wynosi $K\sin\Theta = \chi$. Natomiast kąt, pod którym popłynie fala sprzężona zachowująca warunek dopasowania wektorów równoległych (czyli np. warunek Bragga), będzie wynosił $\Omega \neq 0$. Struktura działa więc jak element odbijający fale z konwersją składowych wektora falowego. Gdy zachowana będzie symetria składowych równoległych, tzn. $k - l\beta = -k$, to otrzymamy dokładnie odbicie $(\Theta = \Omega)$; odbicie to różni się od lustrzanego tym, że jest „rozłożone" na całą długość obszaru zaburzonego (L).

Z kolei rys. (19b) przedstawia ugięcie fali wejściowej, również z konwersją składowych wektora falowego. Dla składowej podłużnej zachodzi zależność podobna jak poprzednio: $\vartheta' = (K\cos\Theta - l\beta)$, z tym, że dla tej samej wartości K — aby otrzymać sprzężenie „w przód" — wartość $l\beta$ musi być znacznie mniejsza niż w sytuacji gdy chcemy otrzymać sprzężenie „wstecz". W tych sytuacjach musi być $\vartheta' > 0$ i $\vartheta' < 0$ — odpowiednio.

Dla fali wprowadzonej z kątem $\Theta = 0$ otrzymamy również sprzężenie „w przód" lub „wstecz", a kąt $\Omega = 0$. Ta sytuacja została już omówiona poprzednio; ma ona zastosowanie w laserach DFB, oczywiście dla sprzężenia wstecz z zachowaniem symetrii składowych równoległych. Grating spełnia w laserze rolę zwierciadła „rozłożonego" na całej długości, na której jest nałożony (w większości realizacji oznacza to całą długość lasera), zatem rozłożone jest tu sprzężenie zwrotne — tak jak w każdym laserze rozłożone jest wzmocnienie na całej jego długości. Stąd nazwa laser z „rozłożonym sprzężeniem zwrotnym" (*distributed feedback* — DFB).

Analizując wzór (22) — przy ustalonym n_1, n_2 n_3 — widać, że współczynnik sprzężenia zależy od a, czyli od głębokości gratingu. W opisanych dotąd strukturach wytworzony jednorazowo grating (technologia wytwarzania gratingu w GaAs, GaAlAs będzie opisana w części 7) miał stałą wartość a. Można jednak skonstruować struktury ze zmiennym sprzężeniem: w strukturze pasywnej byłby to układ o regulowanym tłumieniu, a w strukturze aktywnej pracującej poniżej progu akcji laserowej — o regulowanym wzmocnieniu.

Jako czynnik zaburzający w tych strukturach można zastosować układ stojący fal akustycznych, czyli fal drgań mechanicznych kryształu (np. podłoża lub światłowodu) wytworzonych poza obszarem zjawisk optycznych W podobny sposób można wykorzystać efekty: magnetostrykcyjny i piezoelektryczny (przy zastosowaniu odpowiednich podłoży) wymuszane za pomocą grzebieniowego układu elektrod, do których przyłożony sygnał byłby źródłem energii drgań fal stojących w podłożu. Zmienność sygnału powodowałaby zmiany amplitudy fal stojących, czyli właśnie a (wzór 22). Zależnie od natury fal stojących w krysztale mówi się o przyrządach akustooptycznych, elektrooptycznych i mag-

netooptycznych. Są to odpowiedniki układów parametrycznych elektroniki układowej. Z przyczyn technologicznych zjawiska te można wykorzystać tylko w optyce podczerwieni, dla fal długości ok. 10 μm i dłuższych. Wielość możliwości jakie stwarza zastosowanie struktur periodycznych stacjonarnych i niestacjonarnych wskazuje na ich znaczenie w optoelektronice, szczególnie zintegrowanej.

6. LASERY DFB

Zasada działania lasera DFB została opisana już przy okazji omawiania różnych aspektów periodycznego zaburzenia. Pozostają do omówienia zagadnienia bardziej szczegółowe.

Jednym z ważniejszych problemów w laserach DFB jest konieczność wykluczenia wpływu zwierciadeł powstających na końcach wnęki laserowej na pracę lasera. Efekt ten powstać może szczególnie w laserach półprzewodnikowych, które są bardzo krótkie (ułamek milimetra), a nieciągłość parametrów materiału na końcowych ściankach wiąże się ze znacznym skokiem n (w laserze GaAs pracującym do powietrza skok n jest z 3.6 do 1).

Mimo, że w laserach DFB nie stosuje się przełamywania kryształu (co zapewnia, że ewentualne zwierciadła nie będą wysokiej jakości), to jednak powstający mimo wszystko efekt częściowego odbicia może mieć udział w tworzeniu całkowitego sprzężenia zwrotnego tak znaczny, że popsuje efekty jakich dostarcza sprzężenie rozłożone (tzn. głównie rozróżnialność modów). W przypadkach szczególnie silnego pompowania, gdy wzmocnienie jest duże, to pasożytnicze sprzężenie może wystarczyć do wzbudzenia akcji laserowej.

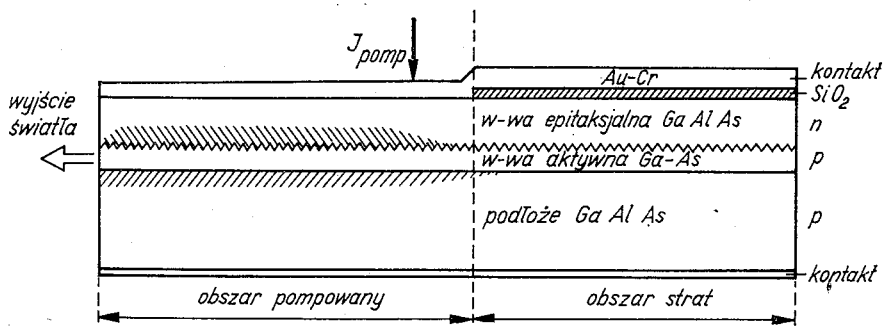
Zatem istnieją dwa źródła sprzężenia zwrotnego: źródło rozłożone (grating) i dyskretne (zwierciadła). Punkt pracy lasera DFB dobrać trzeba zatem tak, aby dominowało to pierwsze. Z drugiej strony należy dążyć różnymi metodami do wyeliminowania efektu zwierciadlanego.

Odnośnie punktu pracy staramy się wytworzyć silne sprzężenie zwrotne (czyli głęboki grating, możliwie duża wartość $(n_2 - n_3)$ i w miarę możliwości technologicznych — praca na pierwszym rzędzie zaburzenia lub innym z najniższych), tak aby warunek generacji $K\beta = 1$ był spełniany przy możliwie małym K. Oznaczono tu całkowite wzmocnienie $K = \exp(\alpha L)$ (gdzie α — wzmocnienie logarytmiczne na jednostkę długości wnęki laserowej) i współczynnik sprzężenia zwrotnego β też za całą długość wnęki. Jeśli K będzie małe, to iloczyn $K\beta'$ (gdzie β' — współczynnik dyskretnego SZ) będzie znacznie mniejszy od jedności, co wykluczy wpływ sprzężenia dyskretnego. Można się bowiem spodziewać zawsze, że na skutek bardzo złej jakości nieprzełamywanych zwierciadeł $\beta' < \beta$.

Aby jeszcze obniżyć β' można na ścianki końcowe wnęki laserowej nałożyć warstwy przeciwodbiciowe oraz zeszlifować te ścianki pod pewnym kątem do płaszczyzny złącza (najlepiej pod kątem Brewstera o ile to możliwe dla danego materiału).

Na właściwości rozróżnialności modów (selektywność) mają też wpływ trudne do kontroli w procesie produkcji zależności między długością wnęki a okresem zaburzenia, symetria ułożenia gratingu względem środka wnęki laserowej itp. Dokładniejsze zależności na ten temat są podawane teoretycznie [31], ale ich wpływ na konstrukcję nie jest duży właśnie z powodu trudności w realizacji wskazań wynikłych z tych analiz. Jest to

mało istotne, tym bardziej, że ostatnie konstrukcje [15, 14, 12] są realizowane w ten sposób, że płytka GaAs jest wycięta na długość np. 1,5÷2 [mm] i na całej tej długości można nawet wytworzyć grating, ale pompowana jest tylko część tej długości (np. 0,7 [mm]) zaczynając od jednej z krawędzi (rys. 20). W części niepompowanej warstwa aktywna GaAs (w której w obszarze pompowania zachodzą przejścia promieniste) jest silnie strat-



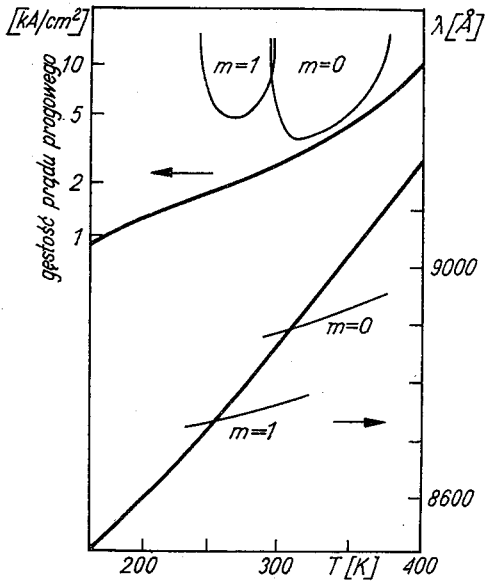
Rys. 20. Laser DFB z obszarem stratnym zapobiegającym sprzężeniu przez zwierciadła

na, tak że na pozostałym odcinku: 1,5 – 0,7 = 0,8 [mm] światło zanika na tyle, że odbicie od końcowej ścianki nie ma już znaczenia; w ten sposób przerwana jest pętla dyskretnego SZ.

Z drugiej jednak strony połączenie sprzężenia zwrotnego dyskretnego i rozłożonego pozwala uzyskać przyrządy mniej selektywne, ale o niskich progach i ustalonej dość ściśle długości fali emitowanego światła. Jeśli w dodatku na ścianki końcowe nałoży się warstwy metaliczne jako zwierciadła, to laser taki nie może emitować światła normalnie, tzn. z krawędzi, gdyż warstwy metaliczne są lustrami o współczynniku odbicia około 100%. Wtedy światło może być generowane w kierunku prostopadłym lub ukośnym do powierzchni złącza, światło przechodzi więc przez podłoże GaAlAs lub (najczęściej) przez warstwę GaAlAs nad warstwą aktywną. Jest to więc po prostu opisana w części IV fala „wyciekająca" — niesprzężona do światłowodu; powstaje ona na niskim (np. pierwszym, drugim lub trzecim) rzędzie sprzężenia poprzez grating z falą prowadzoną. Natomiast na czwartym rzędzie zaburzenia powstaje fala sprzężona przeciwbieżna o wektorze falowym równym co do długości wektorowi falowemu fali prowadzonej inicjującej, tak więc symetryczne sprzężenie potrzebne dla akcji laserowej DFB powstaje tu na czwartym rzędzie zaburzenia oraz oczywiście poprzez odbicie lustrzane. Laser taki opisali Scifres, Burnham i Streifer [32, 36] a także Alferow i współpracownicy [33]; generuje on światło o 100% polaryzacji (co w laserach półprzewodnikowych zdarza się raczej rzadko) i w bardzo dobrze skolimowanej wiązce — o rozbieżności około 0,35° mierzonej w kierunku wyznaczonym przez kierunek gratingu.

Jak wiadomo długość fali emitowanej przez DFB laser jest w pierwszym rzędzie uzależniona od okresu gratingu i od współczynnika załamania (według zal. (5)). Zmiany temperatury zmieniają okres gratingu nieznacznie, pozostaje zależność temperaturowa współczynnika załamania. Podobnie nie mają wpływu na okres zaburzenia zmiany gęstości pompowania optycznego lub gęstości prądu pompującego Dlatego przy obu tych zmianach lasery DFB wykazują małe — w porównaniu z laserami ze sprzężeniem dy-

skretnym — zmiany długości generowanego światła. Pomierzone charakterystyki podają autorzy prac [14] i [15]. W ogólności wynika z nich, że zmiany temperaturowe długości fali: $\frac{d\lambda}{dT}$ (wokół 20°C) są około trzy- do sześciokrotnie mniejsze w laserze DFB niż w laserze z wnęką Fabry-Perota i wynikają głównie z zależności $n(T)$. Jednakże, ponieważ charakterystyka spektralna przejść spontanicznych przesuwa się wraz z temperaturą w kierunku większych λ zawsze — niezależnie od zastosowanej konstrukcji, więc laser DFB stabilizujący długość fali zaczyna (przy dużych zmianach T) pracować na zboczu charakterystyki przejść spontanicznych, co musi być przyczyną podwyższenia progu akcji laserowej. Tak więc w laserach DFB obserwuje się wymienność temperaturowej stabilności długości promieniowania za niestabilność temperaturową prądów progowych.



Rys. 21. Charakterystyki temperaturowe prądu progowego i długości emitowanej fali (λ) dla lasera DFB (linia ciągła) i dla lasera Fabry-Perota (linia pogrubiona) wykonanym w tym samym procesie epitaksji [15]

W laserach z dyskretnym SZ próg również silnie rośnie z temperaturą, ale w laserach DFB efekt ten jest znacznie silniejszy, przy tym dla każdego z modów poprzecznych charakterystyka $I_{th} = f(T)$ jest nieco inna; mod najniższy (zerowy) wykazuje najdłuższy odcinek, w którym charakterystyka ta przebiega w pobliżu analogicznej charakterystyki dla lasera z dyskretnym SZ, poza tym odcinkiem TI_{th} bardzo szybko rośnie (rys. 21).

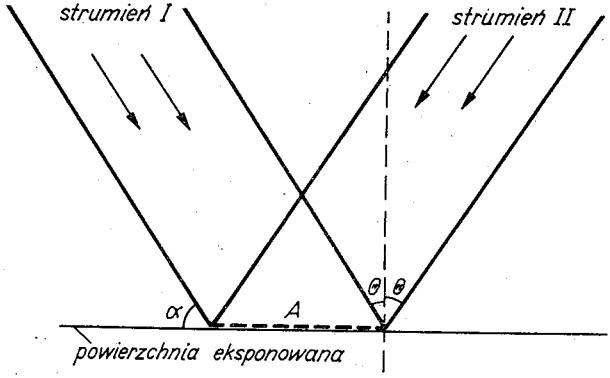
Bardziej szczegółowy opis stosowanych rozwiązań laserów DFB wymaga osobnego opracowania.

7. TECHNOLOGIE OTRZYMYWANIA STRUKTUR PERIODYCZNYCH

O trudności wytworzenia gratingu decyduje wymaganie bardzo krótkiego okresu zaburzenia. Ogólnie struktura geometryczna jest prosta, jest to przecież zbiór prostych, równoległych prążków i to pozwala zastosować metody optyczne wytworzenia gratingu.

Wykorzystuje się mianowicie falę stojącą powstającą przy nakładaniu dwóch strumieni monochromatycznego światła biegnących z przeciwnych kierunków (rys. 22). Na ogół zakłada się, że oba strumienie padają na eksponowaną powierzchnię pod tym samym kątem Θ. Jeśli długość światła wynosi λ, to ponieważ o okresie fali stojącej decydują wektory falowe przeciwbieżne (a więc równoległe do eksponowanej powierzchni), więc długość fali stojącej wynosi

$$\Lambda = \frac{\lambda}{2\sin\Theta}. \tag{42}$$



Rys. 22. Ekspozycja holograficzna dla wytworzenia gratingu

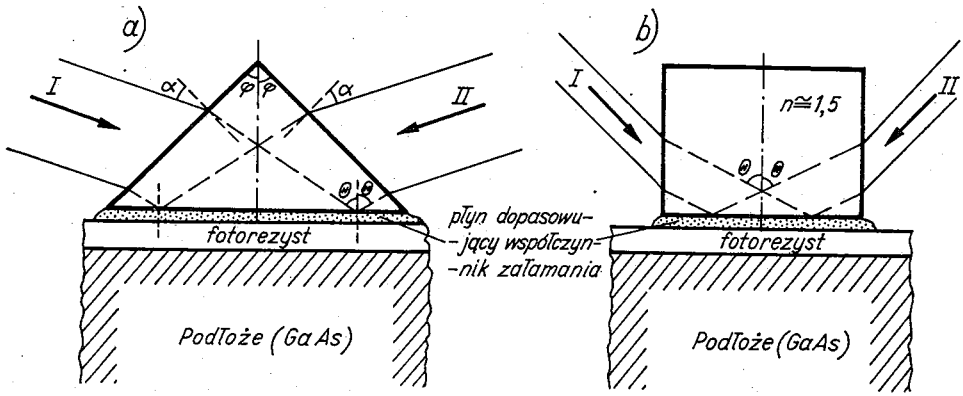
Powierzchnią eksponowaną może być warstwa kopiowa naniesiona na powierzchnię światłowodu, na której chcemy wytworzyć grating (czyli np. GaAs — warstwa epitaksjalna na podłożu GaAlAs). Na powierzchni fotorezystu, na której wytwarza się fala stojąca (obszar A — rys. 22), jasne prążki wywołują fotorezyst; w miejscu ciemnych prążków (gdzie fale światła znoszą się) fotorezyst nie jest utwardzony i po zakończeniu naświetlania można go z tych miejsc wypłukać. W ten sposób na powierzchni GaAs powstaje maska fotorezystywna odtwarzająca kształt gratingu jaki chcemy wytworzyć w GaAs.

Fala światła w GaAs ma długość około $\frac{0{,}85}{3{,}6} = 0{,}24$ [μm]. Zatem aby spełnić warunek dopasowania wektorów falowach (wzór 23) wymagane jest aby okres gratingu wynosił $\Lambda \approx 0{,}12$ [μm]. A zatem gdy strumienie I i II skierujemy prawie dokładnie przeciwsobnie $\left(\text{tak, że } \Theta = \frac{\pi}{2}\right)$, to wymagane jest źródło światła monochromatycznego o $\lambda \approx$ $\approx 0{,}24$ [μm], czyli musi to być laser ultrafioletowy o rzadko spotykanej długości fali. Laser jest wymagany ze względu na potrzebną moc do wywoływania fotorezystu i dla zapewnienia monochromatyczności. Poza tym stosowanie $\Theta = \frac{\pi}{2}$ jest praktycznie trudne.

Zastosowanie szklanego pryzmatu [34] ułatwia nieco problem (rys. 23a, b). Współczynnik załamania światła dla szkła: $n_p \cong 1{,}5$, zatem wymagany jest laser o długości fali około 0,36 [μm]; w praktyce potrzebne jest światło nieco krótsze dla realizacji $\Theta < \frac{\pi}{2}$. Wymagania takie spełnia laser helowokadmowy o linii $\lambda = 2350$ [A], wystarczająca jest

moc rzędu 10 [mW]. Czas ekspozycji około 7 [s], [34]. Technicznie wygodniejsze jest zastąpienie pryzmatu kostką prostopadłościenną [35], wtedy strumienie I i II mogą być wprowadzone pod ostrzejszym kątem (rys. 23b), co jest dalszym ułatwieniem.

Ponieważ między podstawą pryzmatu (kostki) a powierzchnią fotorezystu mogą powstać szczeliny wskutek niedopasowania obu powierzchni — co mogłoby zaburzyć roz-

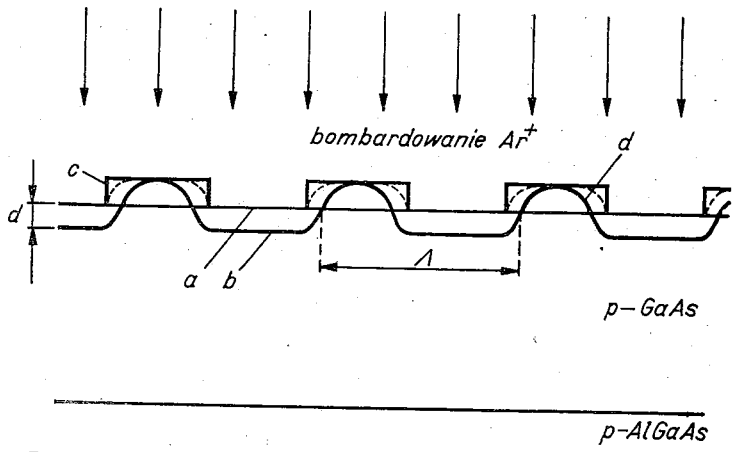


Rys. 23. Ekspozycja holograficzna umożliwiająca uzyskanie małej wartości Λ [35, 36]

kład światła wywołującego fotorezyst — należy całość zanurzyć w płynie dopasowującym n. Płyn ten powinien mieć $n \cong 1{,}5$ czyli dopasowany do szkła, ponadto nie powinien reagować chemicznie z fotorezystem ani szkłem. Warunki te spełniają niektóre oleje oraz ksylen [34].

Jako fotorezyst w tym zastosowaniu najlepiej nadaje się Shipley 1350, 1350B.

Po wywołaniu i wypłukaniu nieutwardzonego fotorezystu przez powstałą maskę fotorezystywną można przeprowadzić bombardowanie odkrytej powierzchni GaAs ciężkimi jonami, np. argonu. Bombardowanie powoduje wybicie pewnej ilości atomów z powierzch-



Rys. 24. Bombardowanie jonowe dla wytworzenia gratingu w GaAs

a) pierwotna powierzchnia GaAs, b) kształt gratingu na powierzchni GaAs po bombardowaniu, c) pierwotny kształt maski fotorezystu, d) kształt maski po bombardowaniu

ni niezamaskowanej, zatem w tym miejscu powstaną rowki. Na ogół długość rowka jest nieco większa niż przerwa między nimi, ponieważ w trakcie bombardowania fotorezyst nieco się uszkadza i jest począwszy od krawędzi — odkrywany (rys. 24). Stosowane głębokości rowków są rzędu $300 \div 1500$ [Å].

Opisany sposób otrzymywania gratingu jest stosowany w konstruowanych przyrządach najczęściej. Praktycznie obszarem periodycznie zaburzonym jest tu tylko pas o grubości d (rys. 24). Ponieważ jednak w cienkim światłowodzie ruch falowy odbywa się zygzakiem poprzez odbicia od międzypowierzchni, zatem wpływ tego płytkiego zaburzenia rozciąga się na cały światłowód. Co więcej, można nawet nie wykonywać gratingu na warstwie aktywnej światłowodowej p-GaAs, lecz na następnej cienkiej warstwie p-GaAlAs nałożonej uprzednio epitaksjalnie na warstwę GaAs. Wtedy o sprzężeniu decydują „ogony" zanikających eksponencjalnie funkcji falowych poza ściankami światłowodu (czyli fale o urojonym wektorze falowym — prostopadle do światłowodu); tak interpretuje działanie tego rozwiązania D. R. Scifres [13]. Inna interpretacja teoretyczna polega na dowodzie, że periodyczne zmiany grubości warstwy „przykrywającej" światłowód są równoznaczne wprowadzeniu periodycznych zaburzeń w sam światłowód; dowód taki przeprowadził Wang [18].

Poważnym problemem technologicznym jest jeszcze nałożenie warstwy epitaksjalnej na wytworzony grating; ten proces jest konieczny aby otrzymać lasery pompowane elektrycznie. Warstwa aktywna jest typu p; aby otrzymać złącze p-n i równocześnie utworzyć biheterostrukturę, konieczne jest nałożenie minimum jednej warstwy. Pominięcie tego etapu umożliwia co najwyżej konstrukcję elementów pasywnych DFB i laserów DFB pompowanych optycznie.

Nakładanie warstwy epitaksjalnej może spowodować znaczne lub całkowite zniszczenie gratingu. Jeśli nawet to nastąpi w małym stopniu, wtedy zaburzenia strukturalne materiałów w miejscu osiadania warstwy epitaksjalnej będą powodowały duże straty niepromieniste, co mocno pogarsza parametry lasera i praktycznie uniemożliwia pracę w temperaturze pokojowej [15]. Zastosowanie dodatkowej warstwy epitaksjalnej i usunięcie obszaru zaburzeń strukturalnych poza światłowód znacznie poprawia parametry i umożliwia pracę w temperaturze pokojowej [13, 15, 14].

Innym rozwiązaniem technologicznym w miejsce wytwarzania masek fotorezystywnych i bombardowania argonem jest trawienie selektywne powierzchni GaAs zanurzonej w roztworze trawiącym — poprzez bezpośrednie naświetlanie tej powierzchni układem fal stojących z dwóch przeciwsobnych strumieni światła monochromatycznego (rys. 22).

Wydaje się, że problem nałożenia warstwy epitaksjalnej jest tu najpoważniejszy. Należy jednak pamiętać, że opisany sposób wytwarzania gratingu jest jednym z wielu.

Dotychczasowe osiągnięcia w technice laserów DFB wskazują jednak, że trudności technologiczne są do przezwyciężenia, a własności tych przyrządów i szerokie perspektywy zastosowania skłaniają do zainteresowania nimi.

Autor składa serdeczne podziękowanie Panu Doc. Tadeuszowi Janickiemu za cenne uwagi dotyczące pracy oraz za opiekę nad rozpoczętymi pracami technologicznymi.

LITERATURA

1. H. Kogelnik, *Coupled Wave Theory for Thick Hologram Gratings*, BSTJ, 1969, vol. 48, No 9, p. 2009.
2. C V. Shank, J.E. Kogelnik, *Tunable Distributed Feedback Dye Laser*, Appl. Phys. Lett., 1971, vol. 18, No 9, p. 395.
3. H. Kogelnik, C.V. Shank, *Stimulated Emission in a Periodic Structure* Appl., Phys. Lett., 1971, vol. 18, No 4, p. 152.
4. D. Marcuse, *Mode Conversion Caused by Surface Imperfections of a Dielectric Slab Waveguide*, BSTJ, 1969, vol. 48, No 10, p. 3187.
5. D. Marcuse, *The Radiation Losses of Dielectric Waveguides in Terms of Power Spectrum of the Wall Distortion Function*, BSTJ, 1969, vol. 48, No 10. p. 3233.
6. S. Chandra, N. Takenchi, S.R. Hartmann, *Prism-Dye Laser*, Appl. Phys. Lett., 1972, vol. 21, No 4, p. 144.
7. P.K. Tien, *Ligth Waves in Thin Films and Integrated Optics*, Appl. Optics, 1971, vol. 10, No 11, p. 2315.
8. P.K. Tien, *Integrated Optics — an Introduction*, BSTJ, 1969, Vol. 49, p. 2059.
9. V. Evtuchov, A. Yariv, *GaAs and GaAlAs Devices for Integrated Optics*, IEEE Trans. on Microwave Th. and Techn., 1975, MTT-23, No 1, p. 44.
10. H. Kogelnik, *An Introduction to Integrated Optics*, IEEE Trans. on Microwave Th. and Techn., 1975, MTT-23, No 1, p. 2.
11. W.S.C. Chang, *Periodic Structures and Their Application in Integrated Optics*, IEEE Trans. on Microwave Th. and Techn., 1973, MTT-21, No 12, p. 775.
12. F.K. Reinhart, R.A. Longan, *GaAs-Al_xGa_{1-x} As Injection Lasers With Distributed Bragg Reflectors*, Appl. Phys. Lett., 1975, vol. 27 No 1, p. 45.
13. D.R. Scifres, R.D. Burnham, W. Streifer, *Output Coupling and Distributed Feedback Utilizing Substrate Corrugations in Double-Heterostructure GaAs Lasers*, Appl. Phys. Lett., 1975, vol. 27, No 5, p. 295.
14. H.C. Casey, S. Somelch, M. Ilegemes, *Room Temperature Operation of Low Threshold Separate-Confinement Heterostructure Injection Laser with Distributed Feedback*, Appl. Phys. Lett., 1975, vol. 27, No 3, p. 142.
15. M. Nakamura, K. Aiki, J. Umeda, *CW Operation of Distributed Feedback GaAs/GaAlAs Diode Lasers at Temperatures up to 300 K*, Appl. Phys. Lett., 1975, vol. 27, No 7, p. 403.
16. Ogawa, Chang, Sopori, Rosenbaum, *A Theoretical Analysis of Etched Grating Couplers for Integrated Optics*, IEEE J. of Quant. Electron, 1973, vol. QE-9, No 1, p. 29.
17. H. Kogelnik, C,V. Shank, *Coupled-Wave Theory of Distributed Feedback Lasers*, J. Appl. Phys., 1972, vol. 43, No 5, p. 2327.
18. S. Wang, *Proposal of Periodic Layered Waveguide Structures for Distributed Lasers*, J. Appl. Phys., 1973, vol. 44, No 2, p. 767.
19. D.R. Scifres, R.D. Burnham, W. Streifer, *Distributed Feedback Single Heterojunction GaAs Diode Lasers*, Appl. Phys. Lett., 1974, vol. 25, No 4, p. 203.
20. C.V. Shank, R.V. Schmidt, *Double-Heterostructure GaAs Distributed Feedback Laser*, Appl. Phys. Lett., 1974, vol. 25, No 4, p. 200.
21. D.L. Rode, J. Crystal Growth 1973, vol. 20, p. 13.
22. B.I. Miller, H.C. Casey, *Proceedings of 1972 Symposium on GaAs* (Inst. of Physics, London — 1973); Conference Series No 17, pp. 231—239.
23. A.S. Dawydow, *Mechanika kwantowa*, PWN, Warszawa 1967.
24. Robert E. Collin, *Prowadzenie fal elektromagnetycznych*, Wydawnictwo Nauk.- Techn., 1966, Warszawa, str. 416.
25. Peter Zory, *Laser Oscillation in Leaky Corrugated Optical Waveguides*, Appl. Phys. Lett., 1975, vol. 22, No 4, p. 125.
26. Peter Zory, *Leaky Wave Thin Film Laser*, Materials from the O.S.A. Integrated Optic Conference, Las Vegas, Mev., Feb. 1972.

27. Amnon Yariv, *Coupled Mode Theory for Guided-Wave Optics*, IEEE J. of Quant. Electron., 1973, QE-9, No 9, p. 919.
28. J. R. Pierce, *Coupling of Modes of Propagation*, J. Appl. Phys., 1954, vol. 25, p. 179.
29. P. K. Tien, R. Ulrich, R. J. Martin, *Modes of Propagating Light Waves in Thin Deposited Semiconductor Films*, Appl. Phys. Lett., 1969, vol. 14, No 9, p. 291.
30. Garmire, Stoll, Yariv, Hunsperger, *Optical Waveguiding in Proton-Implanted GaAs*, Appl. Phys. Lett., 1972, vol. 21, No 3, p. 87.
31. S. R. Chin, *Effects of Mirror Reflectivity in a Distributed Feedback Laser*, IEEE J. of Quant. Electron, 1973, vol. QE-9, No 6, p. 574.
31a. W Streifer, D. R. Scifres, D. R. Burnham, *Longitudinal Modes of Distributed Feedback Lasers with External Reflectors*, J. of Appl. Phys., 1975, vol. 46, No 1, p. 247.
32. D. R. Scifres, R. D. Burnham, W. Streifer, *Highly Colimated Laser Beams from Electrically Pumped SH GaAs/GaAlAs Distributed Feedback Lasers*, Appl. Phys. Lett., 1975, vol. 26, No 2, p. 48.
33. Zh. I. Alferov, S. A. Gurevich, R. N. Seesjan, R. F. Kazarinow, *PKG so swierchmałoj raschodimostiu izłuczenija*, Fiz. Tekh. Poluprovod., vol. 4, 832, 1974.
34. Shank, Shmidt, *Optical Technique for Producing 0.1 — μ Periodic Surface Structures*, Appl. Phys. Lett., 1973, vol. 23, No 3, p. 154.
35. Yen, Nakamura, Garmire, *Optically Pumped GaAs Waveguide Lasers with a Fundamental 0.11 μ Corrugation Feedback*. Optics Communications, 1973, vol. 9, No 1, p. 35.
36. R. D. Burnham, D. R. Scifres. W. Streifer, *Single Heterostructure Distributed Feedback GaAs — Diode Lasers*, IEEE J. Quant, Electron., 1975, QE-11, No 7, p. 439.
37. J. P. van der Ziel, M. Ilegems, *Interference Filters: Single Crystal Multilayer AlAs-GaAs*, Appl. Optics, 1976, vol. 15, No 5, p. 1256.
38. J. P. van der Ziel, M. Ilegems, *Multilayer GaAs-$Al_{0.3}Ga_{0.7}As$ Dielectric Quarter Wave Stacks Grown by Molecular Beam Epitaksy*, Appl. Optics, 1975, vol. 14, No 11, p. 2627.
39. M. Ilegems, H. C. Casey, S. Somekh, M. B. Panish, *Epitaxial Growth on Optical Gratings for Distributed Feedback GaAs Injection Lasers*, J. of Crystal Growth, 1975, vol. 31, p. 158.
40. R. Resinger, *Characteristics of Optical Guided Modes in Lossy Waveguides*, Appl. Optics, 1973, vol. 12, No 5, p. 1015.
41. M. Osiński, *Elektromagnetyczna teoria promieniowania laserów złączowych*, Rozprawy Elektrotechniczne, 1974, t. XX, z. 2, s. 331.
42. E. Kaczmarek-Morawiec, *Podstawy mechaniki kwantowej z zastosowaniem do teorii półprzewodników* (ITE przy NPCP), PWN, Warszawa 1976.

A. MALĄG

PERIODIC STRUCTURES AND THEIR APPLICATION IN SEMICONDUCTOR OPTOELECTRONIC DEVICES

Summary

A short description of optoelectronic periodic structures is presented. First, methods of theoretical analysis of light waves motion in media with periodic variations of optical properties are described. These methods are applied to the description of wave motion in thin-film vaweguides with periodic surface disturbance. Next, the presentation of possibilities of a-light-beam-to-a-waveguide-mode-coupling and also a coupling between waveguide modes by periodic structures is made.

Also some applications of active and passive periodic waveguides to the construction of Integrated Optics Devices (periodic couplers, DFB lasers) are presented. At last methods are described of technological realizations of periodic structures in GaAs-GaAlAs optoelectronic devices.

A. MALĄG

STRUCTURES PÉRIODIQUES ET LEUR APPLICATION DANS LES DISPOSITIFS DE L'OPTO-ÉLECTRONIQUE DES SÈMICONDUCTEURS

Résumé

On a donné une description sommaire des structures opto-électroniques périodiques. D'abord on a décrit les méthodes de l'analyse théorique du mouvement ondulatoire (onde lumineuse) dans les milieux aux propriétés optiques changeant périodiquement. Ces méthodes sont appliquées à la description du mouvement ondulatoire dans les couches minces des conduits de lumière avec perturbations périodiques à la surface.

Ensuite on a présenté les possibilités du couplage du flux lumineux avec le conduit de lumière ainsi que du couplage intermodale des modes menés dans le conduit de lumière par les perturbations périodiques. On a décrit aussi l'application de la perturbation périodique dans la construction des dispositifs à couches minces de l'opto-électronique intégrée (accoupleurs périodiques, lasers DFB dans les conduits de lumière actifs). A la fin, on a présenté les méthodes technologiques de la réalisation des structures périodiques dans les dispositifs opto-électroniques de GaAs-GaAlAs.

A. MALĄG

PERIODISCHE STRUCTUREN UND IHRE ANWENDUNG IN OPTOELEKTRONISCHEN HALBLEITERVORRICHTUNGEN

Zusammenfassung

Es wird eine Kurzbeschreibung von optoelektronischen periodischen Strukturen gebracht. Am Anfang werden die Methoden einer theoretischen Analyse der Wellenbewegung (der Lichtwelle) in Medien mit periodisch wechselnden optischen Eigenschaften beschrieben. Die Methoden werden zur Beschreibung der Wellenbewegung in dünnen Schichten der Lichtwellenleiter mit periodischen Oberflächenstörungen angewandt. Im weiteren werden Kupplungsmöglichkeiten der Lichtströmung mit dem Lichtwellenleiter dargestellt, und auch der im Lichtwellenleiter durch periodische Störungen geführten Zwischenmodenkupplungen von Moden. Es werden auch Anwendungsmöglichkeiten, periodischer Störungen bei Erzeugung von dünnschichtigen, integrierten, optoelektronischen Vorrichtungen beschrieben, wie periodische Kuppler, DFB-Laser in aktiven Lichtwellenleitern. Im letzten Teil des Artikels werden technologische Erzeugungsmethoden periodischer Strukturen in optoelektronischen GaAs-GaAlAs-Vorrichtungen erörtert.

М. МАЛЬОНГ

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ОПТОЭЛЕКТРОННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПРИБОРАХ

Резюме

Представлено сокращенное описание оптоэлектронных периодических структур. Описаны методы теоретического анализа прохождения световой волны в среде с периодически изменяющимися оптическими свойствами. Эти методы применены к описанию прохождения световой волны через тонкие пленки световода с периодическими нарушениями поверхности. Представлены возможности устройств связи световых потоков к световоду и интермодальной связи модов ведомых в световоде путем периодических растройств. Описано также применение периодических возмущений к реализации тонкопленочных приборов интегрированной оптоэлектроники (периодическая связь, лазеры, DFB в активных световодах). В заключение представлены технологические методы реализации периодических структур в оптоэлектронных приборах с GaAs-GaAlAs.

TREŚĆ

Z. Trzaska: Finite Element Solution of Transients in Lossy One-Dimensional Parameter Distributed 3
S. Apanasewicz: Metoda obliczania rozkładu pola elektromagnetycznego na powierzchni metalowej częściowo ekranowanej idealnym ekranem elektrycznym lub magnetycznym . . 15
W. Lipiński: Zastępczy schemat impedancji cewki z umieszczoną wewnątrz kulą przewodzącą 31
I. Tatara: Czułość drugiego rzędu 43
M. Jabłoński: Prosta metoda obliczania dławików z rdzeniami stalowymi stosowanych w przekształtnikach energetycznych 55
A. Buyno: Rozkład gęstości prądu udarowego w przewodniku prostokątnym 85
A. Wojtkiewicz: Filtr cyfrowy dopasowany do sygnału z liniową modulacją częstotliwości 97
A. Albicki, T. Kamiński, B. Błażucki: Przegląd metod kodowania stanów wewnętrznych automatów asynchronicznych 119
J. Kaliński: Pomiary tłumienia sygnału mikrofalowego w warunkach przemysłowych . . . 137
W. Janke, S. Święciński, B. M. Wilamowski: Stałoprądowy model tranzystora bipolarnego dla szerokiego zakresu prądów i temperatur 181
A. Małąg: Struktury periodyczne i ich zastosowanie do przyrządów optoelektroniki półprzewodnikowej 191

CONTENTS — TABLE DES MATIÈRES INHALT

Z. Trzaska: Metoda elementów skończonych rozwiązania stanu nieustalonego w jednowymiarowym układzie o parametrach rozłożonych 12
Méthode d'éléments finis appliquée à la résolution de l'état transitoire dans un système unidimensionnel à paramètres continus 13
Methode der beendigten Elemente zur Bestimmung des unstabilen Zustandes in einem eindimensionalen System mit verteilten Parametern 13
A. Apanasewicz: Method of Calculating Electromagnetic Field Distribution on Metal Surface Partly Screened with Ideal Electric or Magnetic Screen 28
Méthode de calculer le champ électromagnétique sur la surface métallique partiellement écranisée par l'écran parfait électrique ou magnétique 28
Berechnungsmethode für die elektromagnetische Feldverteilung auf einer durch einen idealen elektrischen oder magnetischen Schirm teilweise abgeschirmten Metalloberfläche 28
W. Lipiński: Equivalent Circuit of the Impedance of the Coil with a Conducting Sphere 42
Schéma équivalent de l'impédance de la bobine à boule conductrice placée au dedans . . 42
Ersatzschaltung der Impedanz einer Spule mit einer leitenden Kugel im Mittelpunkt 42
I. Tatara: Second Order Sensitivity 53
Sensibilité du second ordre 53
Theorie der Empfindlichkeit 2. Ordnung 54
M. Jabłoński: Simple Method of Computation of Series-Reactors with Core Applied in Static Converters 83
Simple méthode de calcul des selfs-séries avec noyau ferromagnétique pour convertisseurs statiques 83
Einfache Berechnungsmethode der für Stromrichter verwendeten Reihenschlußdrosselspulen mit Eisenkern 84

A. Buyno: Surge Current Density Distribution in Rectangular Conductor 95
Répartition de densité de courant de choc dans un conducteur rectangulaire 95
Verteilung der Stoßstromdichte in rechteckiger Leitung 95
A. Wojtkiewicz: A Digital Filter Matched to the Chiro Signal 116
Filtre numérique adapté à un signal „chirp" 116
Zahlenfilter für ein Signal mit linearer Frequenzmodulation 117
A. Albicki, T. Kamiński, B. Błażucki: State Assignment Method for Asynchronous Automata — A Survey 134
Présentation des méthodes de codage des états intérieurs des automates synchrones 134
Übersicht über die Verfahren für die Zustandskodierung von asynchronen Automaten 135
J. Kaliński: Microwave Attenuation Measurements under Industrial Conditions 178
Mesures de l'affaiblissement du signal des micro-ondes dans les conditions industrielles . . . 179
Bemessung der Mikrowellendämpfung unter industriellen Bedingungen 179
W. Janke, S. Święciński, B. M. Wilamowski: DC Bipolar Transistor Model for a Wide Range of Currents and Temperatures 189
Modèle à courant continu d'un transistor bipolaire pour une large étendue des courants et des températures 189
Ein Gleichstrom-Transistor-Modell für breite Temperatur- und Strombereiche 190
A. Mąląg: Periodic Structures and Their Application in Semiconductor Optoelectronic Devices 224
Structures périodiques et leur application dans les dispositifs de l'opto-électronique des semiconducteurs 225
Periodische Strukturen und ihre Anwendung in optoelektronischen Halbleitervorrichtungen 225

СОДЕРЖАНИЕ

В. Тшаска: Метод конечных элементов решения переходного процесса в одномерной системе с распределенными параметрами 13
С. Апанасевич: Метод расчета распределения электромагнитного поля на металлической поверхности, частично экранированной идеальным электрическим или магнитным экраном 29
В. Липиньски: Схема замещения импеданса катушки с шаром — проводником . . . 42
И. Татара: Чувствительность второго порядка 54
М. Яблоньски: Простой метод расчета серийных дросселей применяемых в энергетических преобразователях 84
А. Буйно: Распределение плотности ударного тока в прямоугольном проводнике . . . 95
А. Войткевич: Цифровой согласованный фильтр для импульсных сигналов с линейной частотной модуляцией 117
А. Альбицки, Т. Каминьски, Б. Блажуцки: Методы кодирования внутренних состояний асинхронных автоматов 135
Е. Калиньски: Измерения затухания с.в.ч. сигналов в промышленных условиях . . 179
В. Янке, С. Съвенциньски, Б. Вилямовски: Статическая модель биполярного транзистора в широком диапазоне токов и температур 190
А. Мальонг: Периодические структуры и их применение в оптоэлектронных полупроводниковых приборах 225

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTROTECHNIKI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XXIV-ZESZYT 2

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1978

RADA REDAKCYJNA

Przewodniczący

prof. dr hab. JANUSZ GROSZKOWSKI, członek rzeczywisty PAN

Członkowie

prof. dr hab. LUDWIK BADIAN — członek korespondent PAN, prof. TADEUSZ CHOLEWICKI — członek korespondent PAN, prof. dr ANDRZEJ JELLONEK, doc. dr ZDZISŁAW KACHLICKI, prof. dr hab. TADEUSZ KACZOREK, prof. dr LEONARD KNOCH, doc. dr ANDRZEJ KUSY, prof. JAN MANITIUS, prof. dr WITOLD NOWICKI, prof. dr WITOLD ROSIŃSKI — członek korespondent PAN, prof. dr JERZY SEIDLER — członek korespondent PAN, doc. dr RYSZARD SIKORA, prof. dr hab. JANUSZ TUROWSKI, prof. dr STEFAN WĘGRZYN — członek rzeczywisty PAN

REDAKCJA

Redaktor naczelny

prof. dr WITOLD NOWICKI

Zastępca redaktora naczelnego

prof. dr hab. TADEUSZ KACZOREK

Sekretarz odpowiedzialny

Red. JANINA MATHEISEL

ADRES REDAKCJI

00-661 Warszawa, Plac Jedności Robotniczej 1
Politechnika, Instytut Telekomunikacji, Gmach Elektroniki, pok. 471

Dyżury Redakcji: poniedziałki i czwartki, godz. 11-13
tel. 28 89 81 lub 210 07-737

Telefony domowe: redaktor naczelny – 17 37 03
zastępca redaktora naczelnego – 44 88 34
sekretarz odpowiedzialny – 33 84 97

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 690 (592+98)	Oddano do składania 16.XII.1977 r.
Ark. wyd. 21,5, ark. druk. 16,5	Podpisano do druku w czerwcu 1978 r.
Papier ilustrac. sat. kl. III, 80 g. 70×100	Druk ukończono w czerwcu 1978 r.
Zamówienie nr 1741/77	Cena zł 40.— S-80

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1978, 24, z. 2, ss. 231-251

621.3.013

Wykorzystanie metody rozdzielenia zmiennych do analizy pól magnetycznych

JAN PURCZYŃSKI (SZCZECIN)

Instytut Automatyki Przemysłowej Politechniki Szczecińskiej

Otrzymano 22.11.1976

W pracy omówiono wykorzystanie metody rozdzielenia zmiennych do analizy pól magnetycznych prądu stałego. Szczegółowo rozpatrzono wyznaczanie rozwiązania szczególnego równania Poissona. Analizę przeprowadzono dla kilku układów współrzędnych. Uzyskano wyniki stanowiące rozszerzenie materiału zawartego w pracy [16].

1. WSTĘP

Wyznaczanie pola magnetycznego wytworzonego przez przewody z prądem stałym sprowadza się do rozwiązania w obszarze bezprądowym równania Laplace'a, a w obszarze zajętym przez prąd — równania Poissona. Jedną z metod analitycznych stosowaną przy wyznaczaniu pól magnetycznych jest metoda Rotha [27, 28]. Metoda ta operuje podwójnym szeregiem Fouriera. Wyniki uzyskane tą metodą, w przypadku dwuwymiarowym, zapisują się podwójnym szeregiem trygonometrycznym. Wolna zbieżność tych szeregów stanowi istotną wadę tej metody [2, 10].

Inną metodą analityczną wyznaczania pola magnetycznego wytworzonego przez prąd stały jest metoda przekształceń całkowych [12, 13, 14, 15, 31, 34, 35, 40]. Metoda ta została zastosowana do następujących układów współrzędnych: prostokątnych, kołowo-walcowych i kulistych. Obok szeregu zalet metoda ta posiada dwie istotne wady. Po pierwsze, stosuje się ona do obszarów o przenikalności $\mu = \mu_0$ — obecność ferromagnetyka należy uwzględnić przez wprowadzenie warstwy prądowej [38]. Powoduje to pewne utrudnienie natury obliczeniowej. Po drugie, metoda przekształceń całkowych została opracowana dla trzech wyżej wymienionych układów współrzędnych. Rozszerzenie jej na inne układy współrzędnych napotyka na znaczne trudności.

Wspomnianych wad nie posiada metoda rozdzielenia zmiennych. Jest to najbardziej rozpowszechniona metoda rozwiązywania równania Laplace'a. Metodę tę można z powodzeniem zastosować do rozwiązywania równania Poissona [16]. W tym przypadku rozwiązanie poszukuje się jako sumę rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego (Poissona) oraz rozwiązania ogólnego równania jednorodnego (Laplace'a).

Wyznaczanie rozwiązania szczególnego równania Poissona nastręcza nieraz poważne trudności. Omawiając powyższą metodę autorzy pracy [16] ograniczyli się do przypadku

$$\Delta A = -K = \text{const},$$

tzn. do stałej wartości prawej strony równania Poissona. Przy podanym ograniczeniu wyznaczyli oni postać rozwiązania szczególnego w następujących układach współrzędnych: prostokątnym, kołowo-walcowym, kulistym, eliptyczno-walcowym, paraboliczno-walcowym.

Niniejsza praca ma na celu rozszerzyć zakres omawianej metody na przypadki, gdy prawa strona równania Poissona jest funkcją współrzędnych.

Praca stanowi przegląd dotychczasowych publikacji dotyczących wykorzystania metody rozdzielenia zmiennych do analizy pól magnetycznych. Dokonując tego przeglądu ograniczono się do zagadnienia wyznaczania rozwiązania szczególnego równania Poissona w różnych układach współrzędnych.

2. POSTAĆ ROZWIĄZANIA SZCZEGÓLNEGO RÓWNANIA POISSONA W WYBRANYCH UKŁADACH WSPÓŁRZĘDNYCH

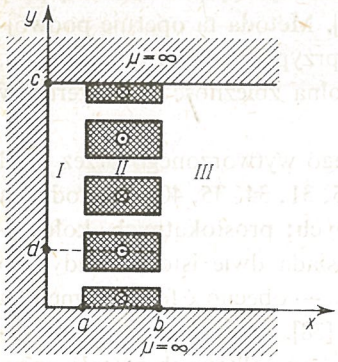
2.1. Układ kartezjański

Na rys. 1 przedstawiono wyidealizowany model transformatora z uzwojeniem krążkowym [2, 26, 39]. Zakłada się, że pole magnetyczne jest płaskorównoległe. Potencjał wektorowy pola magnetycznego spełnia w obszarze I i III równanie Laplace'a

$$\Delta A = 0 \tag{1}$$

oraz w obszarze II równanie Poissona

$$\Delta A = -\mu_0 J(y). \tag{2}$$



Rys. 1. Przekrój poprzeczny wyidealizowanego modelu transformatora z uzwojeniem krążkowym

Gęstość prądu w obszarze II jest funkcją zmiennej y. Funkcję tę rozwija się w szereg Fouriera

$$J(y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos n \frac{\pi}{d} y. \tag{3}$$

Rozwiązanie szczególne równania

$$\frac{\partial^2 A_{II}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_{II}}{\partial y^2} = -\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos \frac{n\pi}{d} y \tag{4}$$

przewiduje się w postaci

$$A_{IIsz} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi}{d} y. \tag{5}$$

Podstawiając zależność (5) do wzoru (4) wyznacza się stałe A_n.

Ostatecznie, rozwiązanie szczególne równania Poissona (4) zapisze się

$$A_{IIsz} = \mu_0 \left(\frac{\pi}{d}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n^2} \cos \frac{n\pi}{d} y. \tag{6}$$

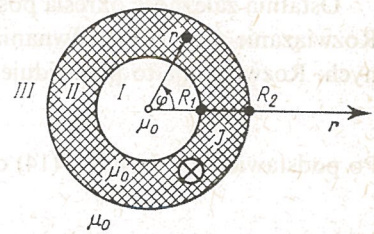
Następnie uwzględniając rozwiązanie równania Laplace'a [16, 17] oraz wypełniając warunki brzegowe (zerowanie się składowej stycznej wektora indukcji na powierzchni ferromagnetyka) znajduje się rozkład pola magnetycznego w całym obszarze [2, 26, 39].

2.2. Układ współrzędnych walcowych

2.2.1. *Pole płaskorównoległe*

Na rys. 2 przedstawiono przekrój poprzeczny układu przewodów wiodących prąd stały [33]. Zakłada się, że przewody są dostatecznie długie w kierunku osi z, aby zagadnienie można było traktować jako dwuwymiarowe. Poszczególne obszary tworzą współosiowe rury. W obszarze II płynie prąd wzdłuż osi z. Zakłada się, że gęstość prądu nie zależy od współrzędnej r i jest rozwijalną w szereg Fouriera funkcją kąta φ:

$$J(\varphi) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin n\varphi + B_n \cos n\varphi). \tag{7}$$



Rys. 2. Przekrój poprzeczny układu przewodów wiodących prądy stały

Ostatnie założenie ogranicza stosowalność metody do przewodów o przekroju poprzecznym będącym wycinkiem pierścienia. Zależności podane w tym punkcie mogą być łatwo przeniesione na przypadek, gdy gęstość prądu jest funkcją potęgową (r^m) zmiennej r (analogicznie jak w p. 2.5).

Potencjał wektorowy spełnia w obszarach I i III równanie Laplace'a a w obszarze II równanie Poissona:

$$\frac{\partial^2 A_{II}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_{II}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_{II}}{\partial \varphi^2} = -\mu_0 \left[B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\varphi + B_n \cos n\varphi\right]. \tag{8}$$

Rozwiązanie szczególne równania (8) przewiduje się w postaci

$$A_{IIsz} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n}(r) A_n \sin n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}(r) B_n \cos n\varphi + f_3(r) B_0. \tag{9}$$

Podstawiając zależność (9) do równania (8) otrzymuje się następujący układ równań:

$$\frac{d^2 f_{1n}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df_{1n}}{dr} - \frac{n^2}{r^2} f_{1n} = -\mu_0, \tag{10a}$$

$$\frac{d^2 f_{2n}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df_{2n}}{dr} - \frac{n^2}{r^2} f_{2n} = -\mu_0, \tag{10b}$$

$$\frac{d^2 f_3}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df_3}{dr} = -\mu_0. \tag{10c}$$

Z postaci równań (10a) i (10b) wynika, że $f_1 = f_2$.

Mnożąc równanie (8a) obustronnie przez r^2, otrzymuje się

$$r^2 \frac{d^2 f_{1n}}{dr^2} + r\frac{df_{1n}}{dr} - n^2 f_1 = -\mu_0 r^2. \tag{11}$$

Równanie (11) jest niejednorodnym równaniem Eulera [36]. Dokonując podstawienia $r = e^t$ uzyskuje się:

$$\frac{d^2 f_{1n}}{dt^2} - n^2 f_1 = -\mu_0 e^{2t}. \tag{12}$$

Równanie (12) posiada równanie charakterystyczne

$$x^2 - n^2 = 0.$$

Stąd rozwiązanie równania jednorodnego:

$$f_{1n} = C_1 e^{nt} + C_2 e^{-nt}. \tag{13}$$

Ostatnia zależność określa postać rozwiązania równania Laplace'a.

Rozwiązanie szczególne równania (12) znajduje się metodą współczynników nieoznaczonych. Rozwiązanie to przewiduje się w postaci

$$f'_{1n} = C_1 e^{2t}. \tag{14}$$

Po podstawieniu zależności (14) do równania (12) wyznacza się stałą C_1

$$C_1 = -\frac{\mu_0}{4-n^2}.$$

Stąd rozwiązanie szczególne równania (12) dla $n \neq 2$ ma postać

$$f'_{1n} = -\frac{\mu_0}{4-n^2} e^{2t} = -\frac{\mu_0}{4-n^2} r^2, \quad (n \neq 2).$$

Dla $n = 2$ funkcja e^{2t} występująca po prawej stronie równania (12) pokrywa się z jednym z rozwiązań równania jednorodnego (wzór 13).

Stosując metodę współczynników nieoznaczonych, funkcję f_{1n} przewiduje się w postaci [36]

$$f'_{1n} = C_2 t e^{2t} \quad \text{dla} \quad n = 2. \tag{15}$$

Podstawiając zależność (15) do równania (12) uzyskuje się

$$C_2 = -\frac{\mu_0}{4},$$

czyli

$$f_1' = -\frac{\mu_0}{4} te^{2t} = -\frac{\mu_0}{4} r^2 \ln r.$$

Ostatecznie, funkcja f_{1n}' wyrazi się zależnością:

$$f_{1n} = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0}{4-n^2} r^2 & \text{dla} \quad n \neq 2, \\ -\dfrac{\mu_0}{4} r^2 \ln r & \text{dla} \quad n = 2. \end{cases} \tag{16}$$

Przyjmując w równaniu (10a) $n = 0$ otrzymuje się równanie (10c). Stąd, po podstawieniu $n = 0$ do zależności (16), uzyska się:

$$f_3 = -\frac{\mu_0}{4} r^2. \tag{16a}$$

Po uwzględnieniu wzorów (16) i (16a) oraz zależności $f_1 = f_2$ wyrażenie (9) przyjmie postać:

$$A_{II_{sz}} = -\mu_0 r^2 \left[\frac{1}{4} B_0 + \sum_{n \neq 2} \frac{1}{4-n^2} (A_n \sin n\varphi + B_n \cos n\varphi) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} \ln r (A_2 \sin 2\varphi + B_2 \cos 2\varphi) \right]. \tag{17}$$

Rozwiązanie ogólne równania Laplace'a w układzie współrzędnych walcowych ma postać [10, 16, 17]

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \sin n\varphi + D_n \cos n\varphi)(E_n r^n + F_n r^{-n}) + G \ln r + H. \tag{18}$$

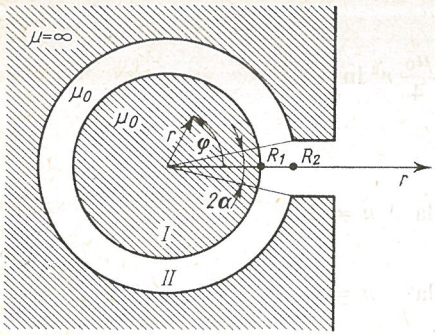
W obszarze bezprądowym rozwiązanie przewiduje się w postaci (18), natomiast w obszarze prądowym w postaci sumy wzorów (17) i (18). Wypełniając warunki brzegowe wyznacza się rozkład potencjału wektorowego.

Opisaną wyżej metodą wyznaczono w pracy [33] pole magnetyczne układu przewodów zamkniętych pierścieniem ferromagnetycznym. Układ taki posiada duże znaczenie praktyczne, m.in. występuje w zespole odchylającym lamp kineskopowych.

W przypadku przewodu o przekroju kołowym z równomiernie rozmieszczoną gęstością prądu należy przyjąć we wzorze (7) $B_0 = J$; $A_n = B_n = 0$. Wzór (17) redukuje się do postaci:

$$A_{sz} = -\frac{1}{4} \mu_0 J r^2. \tag{19}$$

Postać rozwiązania szczególnego równania Poissona określona wzorem (19) została wykorzystana w pracy [23], gdzie wyznaczono indukcyjność oraz siłę występującą w żłobku o przekroju kołowym nie całkowicie wypełnionym uzwojeniem (rys. 3).



Rys. 3. Przekrój poprzeczny żłobka częściowo zapełnionego uzwojeniem

2.2.2. Pole osiowo-symetryczne

Na rys. 4 pokazano przekrój poprzeczny wyidealizowanego obwodu magnetycznego rdzenia kubkowego [6, 25, 32]. Obszar II (zakreskowany) zajęty jest przez uzwojenie, przez które płynie prąd o stałej gęstości J. Wektor gęstości prądu, a tym samym potencjał wektorowy, posiada jedną składową — skierowaną zgodnie ze współrzędną φ.

Równanie Poissona ma postać:

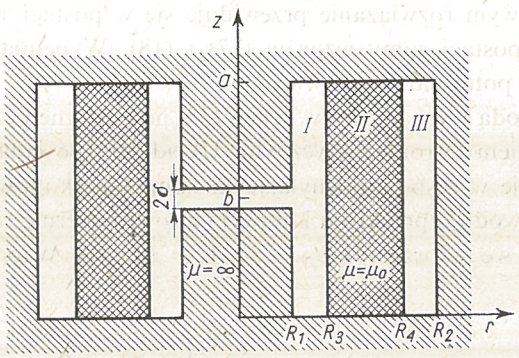
$$\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} = -\mu_0 J. \tag{20}$$

Rozwiązanie szczególne równania (20) przewiduje się w postaci

$$A_{sz} = Pr^2. \tag{21}$$

Podstawiając zależność (21) do wzoru (20) wyznacza się stałą P. Ostatecznie, rozwiązanie szczególne zapisze się

$$A_{sz} = -\frac{1}{3}\mu_0 J r^2. \tag{22}$$



Rys. 4. Przekrój poprzeczny wyidealizowanego obwodu magnetycznego rdzenia kubkowego

Rozwiązanie jednorodnego równania (20) (prawa strona równa zeru) przewiduje się w postaci [32]:

$$A = C_0 r + D_0 \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} [B_n I_1(q_n r) + C_n K_1(q_n r)] \cos q_n z, \tag{23}$$

gdzie:

$$q_n = \frac{n\pi}{a}.$$

Postać (23) obowiązuje w obszarze I i III, natomiast w obszarze II potencjał wektorowy należy założyć w postaci sumy wyrażeń (22) i (23). Wypełniając warunki brzegowe oraz warunki ciągłości na granicy obszarów wyznacza się nieznane stałe C_0, D_0, B_n i C_n.

Opisaną metodą wyznaczono w pracach [6, 25, 32] pole magnetyczne oraz indukcyjność rdzeni kubkowych. Podobną postać potencjału wektorowego założono w pracach [1, 29], w których wyznaczono siłę przyciągania elektromagnesu garnkowego.

W pracy [21] rozpatrzono straty mocy w pierścieniu obejmującym przewód z prądem przemiennym. Zakładając słabe zjawisko naskórkowości, wyznaczenie strat sprowadza się do rozwiązania równania Poissona:

$$\frac{\partial^2 I_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial I_\varphi}{\partial r} - \frac{I_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 I_\varphi}{\partial z^2} = \frac{C}{r}. \tag{24}$$

Funkcja I, w interpretacji fizycznej, jest równoznaczna z natężeniem pola magnetycznego wytworzonym przez pierwszą reakcję prądów wirowych [3].

Rozwiązanie szczególne równania (24) przewiduje się w postaci

$$I_{sz} = f(r), \tag{25}$$

tzn. przyjmuje się rozwiązanie w postaci funkcji tylko zmiennej r. Z równań (24) i (25) otrzymuje się niejednorodne równanie Eulera

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + r\frac{df}{dr} - f = Cr,$$

którego rozwiązanie szczególne ma postać [36]

$$f(r) = \frac{C}{2} r \ln r = I_{\varphi sz}. \tag{26}$$

Natomiast rozwiązanie równania jednorodnego ma postać [16, 21]

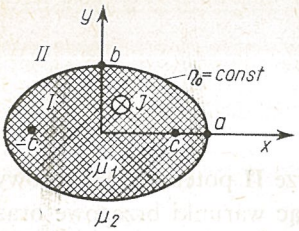
$$I_\varphi = \frac{A_0}{r} + B_0 r + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_1(q_n r) + B_n N_1(q_n r)] \operatorname{ch} q_n z. \tag{27}$$

Całkowite rozwiązanie równania (24) przewiduje się w postaci sumy wyrażeń (26) i (27).

Wypełniając warunek brzegowy, który w rozpatrywanym przypadku sprowadza się do jednorodnego zagadnienia Dirichleta [21], wyznacza się nieznane stałe A_0, B_0, A_n i B_n.

2.3. Układ współrzędnych eliptyczno-walcowych

Przewód o przekroju eliptycznym i przenikalności μ_1 znajduje się w ośrodku o przenikalności magnetycznej μ_2. Przez rozpatrywany przewód płynie prąd stały. Wymiary przewodu podane są na rys. 5 [30, 31].



Rys. 5. Przewód o przekroju eliptycznym wiodący prąd stały

Zakłada się, że przewód jest dostatecznie długi, aby zagadnienie można traktować jako dwuwymiarowe. Potencjał wektorowy A spełnia we wnętrzu przewodu (oznaczonym na rys. 5 jako obszar I) równanie Poissona

$$\Delta A_I = -\mu_1 J, \tag{28}$$

a na zewnątrz przewodu (obszar II) równanie Laplace'a.

W celu zastosowania metody rozdzielenia zmiennych wprowadza się układ współrzędnych eliptyczno-walcowych określony równaniem

$$x = C\operatorname{ch}\eta\cos\psi, \quad y = C\operatorname{sh}\eta\sin\psi, \quad z = z. \tag{29}$$

W układzie tym brzeg przewodu zapisuje się równaniem

$$\eta = \eta_0 = \text{const}.$$

Operator Laplace'a w układzie współrzędnych eliptyczno-walcowych przyjmuje postać [16]

$$\Delta A = \frac{1}{C^2(ch^2\eta - \cos^2\psi)}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial\psi^2}\right). \tag{30}$$

Ze wzorów (28) i (30) otrzymuje się następującą postać równania Poissona

$$\frac{\partial^2 A_I}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 A_I}{\partial\psi^2} = -\frac{1}{2}\mu_1 C^2 J(\operatorname{ch} 2\eta - \cos 2\psi). \tag{31}$$

Wzór (31) sugeruje następującą postać rozwiązania szczególnego [16]

$$A_{Isz} = f_1(\eta) + f_2(\psi). \tag{32}$$

Ze wzorów (31) i (32) otrzymuje się następujący układ równań:

$$\frac{d^2 f_1}{d\eta^2} = -\frac{1}{2}\mu_1 JC^2 \operatorname{ch} 2\eta,$$

$$\frac{d^2 f_2}{d\psi^2} = +\frac{1}{2}\mu_1 JC^2 \cos 2\psi,$$

którego rozwiązanie ma postać

$$f_1 = -\frac{1}{8}\mu_1 JC^2 \operatorname{ch} 2\eta,$$

$$f_2 = -\frac{1}{8}\mu_1 JC^2 \cos 2\psi.$$

Ostatecznie

$$A_{Isz} = -\frac{1}{8}\mu_1 JC^2(\operatorname{ch} 2\eta + \cos 2\psi). \tag{33}$$

Rozwiązanie równania Laplace'a przewiduje się w postaci [30, 31]

$$A_{II} = D_0 + (D_1 \operatorname{ch} 2\eta + D_2 \operatorname{sh} 2\eta)\cos 2\psi + D_3,$$

natomiast w obszarze I potencjał zapisuje się

$$A_I = C_0 + (C_1 \operatorname{ch} 2\eta + C_2 \operatorname{sh} 2\eta)\cos 2\psi + C_3 - \frac{1}{8}\mu_1 JC^2(\operatorname{ch} 2\eta + \cos 2\psi).$$

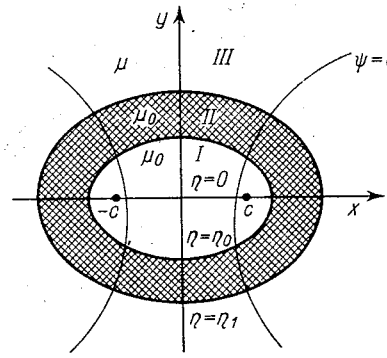
Wypełniając warunki ciągłości potencjału oraz składowej stycznej wektora natężenia pola magnetycznego, jak również uwzględniając skończoną wartość wektora indukcji wewnątrz przewodu, wyznacza się stałe C_i, D_i $(i = 0, 1, 2, 3)$.

Opisana wyżej metoda pozwoliła wyznaczyć pole magnetyczne wytworzone przez prąd płynący przez przewód o przekroju eliptycznym o dowolnej przenikalności magnetycznej. Na przykładzie tym widać wyraźnie przewagę metody rozdzielenia zmiennych nad metodą przekształceń całkowych, która to metoda nie pozwala w sposób bezpośredni uwzględnić obecność ferromagnetyka.

Rozwiązanie szczególne określone wzorem (33) zostało wykorzystane również w pracy [24], w której wyznaczono pole magnetyczne oraz indukcyjność rozproszenia żłobka owalnego. Bardziej złożoną postać rozwiązania szczególnego równania Poissona w układzie współrzędnych walcowo-eliptycznych wyprowadzono w pracach [7, 8].

Na rys. 6 przedstawiono przekrój poprzeczny układu anlizowanego w pracy [8]. Potencjał wektorowy spełnia w obszarach I i III równanie Laplace'a, a w obszarze II (zajętym przez prąd równanie Poissona

$$\Delta A_{II} = -\mu_0 J(\psi). \tag{34}$$



Rys. 6. Układ przewodów analizowany w pracy [8]

Zakłada się, że gęstość prądu J jest funkcją kąta ψ rozwijalną w szereg Fouriera

$$J(\psi) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \sin n\psi + B_n \cos n\psi), \tag{35}$$

gdzie współczynniki A_n, B_n, B_0 określa wzór (7).

Ze wzorów (30), (34) i (35) otrzymuje się

$$\frac{\partial^2 A_{II}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 A_{II}}{\partial \psi^2} = -\frac{1}{2}C^2\mu_0(\operatorname{ch}2\eta - \cos 2\psi)\left[B_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \sin n\psi + B_n \cos n\psi)\right].$$

Po przekształceniach otrzymuje się

$$\frac{\partial^2 A_{II}}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 A_{II}}{\partial \psi^2}=-\frac{1}{2}C^2\mu_0 \operatorname{ch}2\eta\left[B_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A\sin n\psi+B_n\cos n\psi)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}C^2\mu_0\left[B_0\cos 2\psi+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin(n-2)\psi+B_n\cos(n-2)\psi\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin(n+2)\psi+B_n\cos(n+2)\psi\right)\right]. \tag{36}$$

Ze wzoru (36) wynika przewidywana postać rozwiązania szczególnego

$$A_{IIsz}=f_1(\eta)\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\psi+f_2(\eta)\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos n\psi+f_3(\eta)B_0+g_1(\psi)B_0+$$

$$+f_4(\eta)\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n-2)\psi+f_5(\eta)\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n+2)\psi+f_6(\eta)\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos(n-2)\psi+$$

$$+f_7(\eta)\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos(n+2)\psi. \tag{37}$$

Ze wzorów (36) i (37) otrzymuje się następujący układ równań

$$\frac{d^2f_1}{d\eta^2}-n^2f_1(\eta)=-\frac{1}{2}C^2\mu_0\operatorname{ch}2\eta,\qquad \frac{d^2f_2}{d\eta^2}-n^2f_2(\eta)=\frac{1}{2}C^2\mu_0\operatorname{ch}2\eta,$$

$$\frac{d^2f_3}{d\eta^2}=-\frac{1}{2}C^2\mu_0\operatorname{ch}2\eta,\qquad \frac{d^2f_4}{d\eta^2}-(n-2)^2f_4(\eta)=\frac{1}{4}C^2\mu_0,$$

$$\frac{d^2f_5}{d\eta^2}-(n+2)^2f_5(\eta)=\frac{1}{4}C^2\mu_0,\qquad \frac{d^2f_6}{d\eta^2}-(n-2)^2f_6(\eta)=\frac{1}{4}C^2\mu_0,$$

$$\frac{d^2f_7}{d\eta^2}-(n+2)^2f_7(\eta)=\frac{1}{4}C^2\mu_0,\qquad \frac{d^2g_1}{d\psi^2}=\frac{1}{2}C^2\mu_0\cos 2\psi. \tag{38}$$

Z postaci równań (38) wynika, że $f_1=f_2$; $f_4=f_6$; $f_5=f_7$.

Ostatecznie, funkcje f_1, f_3, f_4, f_5, g_1 wyrażą się zależnościami

$$f_1=\begin{cases}\dfrac{C^2\mu_0}{2(n^2-4)}\operatorname{ch}2\eta & \text{dla } n\neq 2,\\ -\dfrac{C^2\mu_0}{8}\eta\operatorname{ch}2\eta & \text{dla } n=2;\end{cases}$$

$$f_5=-\frac{C^2\mu_0}{4(n+2)};$$

$$f_4=\begin{cases}-\dfrac{C^2\mu_0}{4(n-2)^2} & \text{dla } n\neq 2,\\ \dfrac{1}{8}C^2\mu_0\eta^2 & \text{dla } n=2;\end{cases} \tag{39}$$

$$f_3=-\frac{C^2\mu_0}{8}\operatorname{ch}2\eta;$$

$$g_1=-\frac{C^2\mu_0}{8}\cos 2\psi.$$

Ze wzorów (37) i (39) otrzymuje się:

$$A_{\text{IIsz}} = \frac{C^2\mu_0}{8}\left[4\operatorname{ch}2\eta \sum_{n\neq 2} \frac{A_n \sin n\psi + B_n \cos n\psi}{n^2-4} - \right.$$

$$-2\sum_{n\neq -} \frac{A_n \sin(n-2)\psi + B_n\cos(n-2)\psi}{(n-2)^2} - 2\sum_{n=1} \frac{A_n \sin(n+2)\psi + B_n\cos(n+2)\psi}{(n+2)^2} -$$

$$\left. -\eta \operatorname{sh}2\eta(A_2\sin 2\psi + B_2\cos 2\psi) - B_0(\operatorname{ch}2\eta + \cos 2\psi) + \eta^2 B_2\right]. \quad (40)$$

Rozwiązanie równania Laplace'a przewiduje się w postaci:

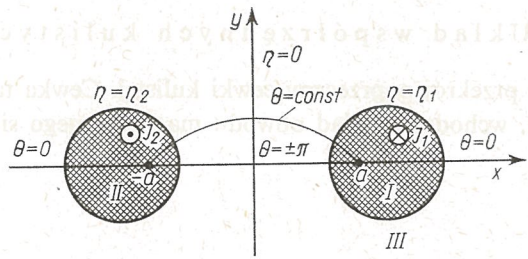
$$A^i = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n^i \operatorname{ch} n\eta + D_n^i \operatorname{sh} n\eta)(A_n \sin n\psi + B_n \cos n\psi)E^i\eta + F^i, \quad (41)$$

gdzie i = I, II, III.

W obszarze II potencjał wektorowy zapisuje się w postaci sumy zależności (40) i (41). Wypełniając warunki ciągłości potencjału oraz składowej stycznej wektora natężenia pola magnetycznego jak również uwzględniając skończoną wartość wektora indukcji w całym obszarze wyznacza się stałe C_n^i, D_n^i, E^i, F^i (i = I, II, III). Również i w tym przypadku metoda rozdzielenia zmiennych pozwoliła, w sposób bezpośredni, uwzględnić obecność ferromagnetyka (obszar III).

2.4. Układ współrzędnych dwuwalcowych

Na rys. 7 pokazano przekrój poprzeczny linii dwuprzewodowej [4, 41, 5]. Założono, że przewody o różnych przenikalnościach magnetycznych (μ_1 i μ_2) są dostatecznie długie, aby zagadnienie można traktować jako dwuwymiarowe.



Rys. 7. Przekrój poprzeczny linii dwuprzewodowej wraz z układem współrzędnych dwuwalcowych

Obliczenia prowadzi się w układzie współrzędnych dwuwalcowych [16]

$$x = \frac{a\operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}\eta - \cos\Theta}; \quad y = \frac{a\sin\Theta}{\operatorname{ch}\eta - \cos\Theta}; \quad z = z.$$

Powierzchnie boczne przewodów pokrywają się z linią η = const.

W obszarze zajętym przez prąd potencjał wektorowy spełnia równanie Poissona, które w układzie współrzędnych dwuwalcowych zapisze się:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial \Theta^2} = -\frac{\mu J a^2}{(\operatorname{ch}\eta - \cos\Theta)^2}. \tag{42}$$

Rozwiązanie równania Laplace'a ma postać [16, 17]

$$A^i = \sum_{n=1}^{\infty} (A_p^i \operatorname{sh} p\eta + B_p^i \operatorname{ch} p\eta)(C_p^i \sin p\Theta + D_p^i \cos p\Theta) F_0^i \eta + A_0^i, \tag{43}$$

$$(i = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}).$$

Wzór (42) sugeruje następującą postać rozwiązania szczególnego:

$$A_{sz} = -\mu J a^2 \frac{f_1(\eta) + f_2(\Theta)}{\operatorname{ch}\eta - \cos\Theta}. \tag{44}$$

Ze wzorów (42) i (44) otrzymuje się

$$f_1(\eta) = \frac{1}{4}\operatorname{ch}\eta; \quad f_2(\Theta) = \frac{1}{4}\cos\Theta.$$

Ostatecznie rozwiązanie szczególne równania (42) przyjmuje postać:

$$A_{sz} = -\frac{1}{4}\mu J a^2 \frac{\operatorname{ch}\eta + \cos\Theta}{\operatorname{ch}\eta - \cos\Theta}. \tag{45}$$

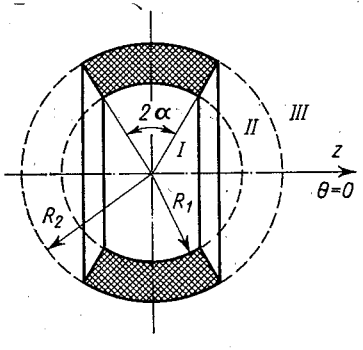
W obszarze zajętym przez prąd (I i II) obowiązuje suma rozwiązań (43) i (45).

Z warunków ciągłości potencjału oraz składowej stycznej wektora natężenia pola magnetycznego a także uwzględniając skończoną wartość indukcji w całym obszarze wyznacza się stałe A_p^i, B_p^i, C_p^i, D_p^i, F_0^i, A_0^i, gdzie $i = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$.

Opisaną metodą wyznaczono w pracy [4] pole magnetyczne wytworzone przez układ przedstawiony na rys. 7, a w pracy [5] obliczono indukcyjność oraz siły występujące w tym układzie.

2.5. Układ współrzędnych kulistych

Na rys. 8 pokazano przekrój poprzeczny cewki kulistej. Cewka ta posiada duże znaczenie praktyczne, m.in. wchodzi w skład obwodu magnetycznego silnika o trzech stopniach swobody [19].



Rys. 8. Przekrój poprzeczny cewki kulistej

Wektor gęstości prądu, a tym samym potencjał wektorowy, mają tylko jedną składową skierowaną wzdłuż współrzędnej φ

$$\mathbf{A} = \mathbf{1}_{\varphi} A; \quad \mathrm{J}(\Theta) = \mathbf{1}_{\varphi} \cdot J(\Theta). \tag{46}$$

Uwzględniając wzory (46), potencjał wektorowy spełnia równanie

$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial A}{\partial r} - \frac{A}{r^2 \sin^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \Theta^2} + \frac{1}{r^2}\operatorname{ctg}\Theta\frac{\partial A}{\partial \Theta} =$$

$$= \begin{cases} -\mu_0 J(\Theta) \text{ w obszarze II,} & \text{(47a)} \\ 0 \text{ w pozostałych obszarach.} & \text{(47b)} \end{cases}$$

Rozwijając funkcję $J(\Theta)$ w szereg stowarzyszonych funkcji Legendre'a otrzymuje się

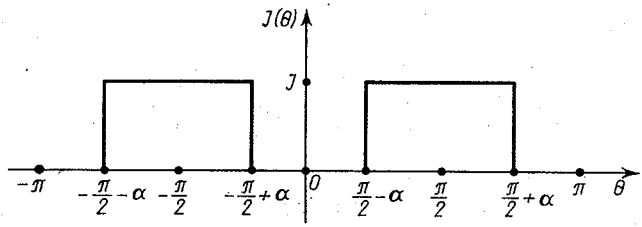
$$J(\Theta) = J \sum_{n=1}^{\infty} C_n P_n^1(\cos\Theta), \tag{48}$$

gdzie J oznacza stałą wartość gęstości prądu płynącego przez przekrój poprzeczny cewki

$$J = \frac{Iw}{s} = \frac{Iw}{\alpha(R_2^2 - R_1^2)}.$$

Na rys. 9 pokazano przebieg gęstości prądu $J(\Theta)$ jako funkcję kąta Θ. Współczynnik C_n występujący we wzorze (48) wyznacza się z zależności [16, 37]

$$C_n = \frac{2n+1}{2n(n+1)}\frac{1}{J}\int_0^{\pi} J(\Theta) P_n^1(\cos\Theta)\sin\Theta\, d\Theta. \tag{49}$$



Rys. 9. Gęstość prądu $J(\Theta)$ jako funkcja współrzędnej Θ

Z rysunku 9 wynika

$$C_n = \frac{2n+1}{2n(n+1)}\left[\int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} P_n^1(\cos\Theta)\sin\Theta\, d\Theta + \int_{\pi/2}^{\pi/2+\alpha} P_n^1(\cos\Theta)\sin\Theta\, d\Theta\right].$$

Wykorzystując własności funkcji $P_n^1(\cos\Theta)$ [37]

$$P_n^1(-\cos\Theta) = (-1)^{n-1} P_n^1(\cos\Theta),$$

uzyska się

$$C_n = \frac{2n+1}{n(n+1)}\int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} P_n^1(\cos\Theta)\sin\Theta d\Theta,$$

gdzie $n = 1, 3, 5 \ldots$

Podstawiając $w = \cos\Theta$ otrzymuje się

$$C_n = \frac{2n+1}{n(n+1)} \int_0^{\sin\alpha} P_n^1(w)\,dw. \tag{50}$$

Wyrażenie (50) można zapisać przy pomocy funkcji trygonometrycznych $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$. W pracy [19] zamieszczono dziewięć pierwszych wyrazów wzoru (50) ($C_1, C_3 \ldots C_9$).

Ogólniejsze wyniki można uzyskać zakładając, że gęstość prądu jest następującą funkcją współrzędnych r i Θ

$$J(r, \Theta) = Jr^{m-2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n P_n^1(\cos\Theta). \tag{51}$$

Zgodnie ze wzorem (47b) potencjał wektorowy w obszarze II spełnia równanie

$$r^2 \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial A}{\partial r} - \frac{A}{\sin^2\Theta} + \frac{\partial^2 A}{\partial \Theta^2} + \operatorname{ctg}\Theta \frac{\partial A}{\partial \Theta} = -\mu_0 J r^m \sum_{n=1}^{\infty} C_n P_n^1(\cos\Theta). \tag{52}$$

Rozwiązanie równania (52) przewiduje się w postaci

$$A = \sum_{n=1} f(r) P_n^1(\cos\Theta). \tag{53}$$

Podstawiając zależność (53) do równania (52) oraz wykorzystując własności stowarzyszonych funkcji Legendre'a

$$\frac{d^2[P_n^1(\cos\Theta)]}{d\Theta^2} + \frac{d[P_n^1(\cos\Theta)]}{d\Theta} \operatorname{ctg}\Theta + \left[n(n+1) - \frac{1}{\sin^2\Theta}\right] P_n^1(\cos\Theta) = 0, \tag{54}$$

otrzymuje się

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + 2r\frac{df}{dr} - n(n+1)f = -\mu_0 J r^m C_n. \tag{55}$$

Przez podstawienie

$$r = e^t, \tag{56}$$

niejednorodne równanie Eulera (55) sprowadza się do postaci

$$f'' + f' - n(n+1)f = -\mu_0 J C_n e^{mt}. \tag{57}$$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego

$$f'' + f' - n(n+1)f = 0$$

ma postać

$$f_1 = a_n e^{nt} + b_n e^{-(n+1)t} = a_n r^n + \frac{b}{r^{n+1}}. \tag{58}$$

Ze wzorów (53) i (58) uzyskuje się

$$A' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}}\right) P_n^1(\cos\Theta). \tag{59}$$

Zależność (59) określa postać potencjału wektorowego spełniającego równanie jednorodne.

Rozwiązanie szczególne równania (57) przewiduje się w postaci

$$f_2 = d_n e^{mt}. \tag{60}$$

Podstawiając wzór (60) do (57) otrzymuje się

$$d_n = \mu_0 J \frac{C_n}{(n-m)(n+m+1)} \quad \text{dla } n \neq m. \tag{61}$$

Dla $n = m$ należy przyjąć f_2 w postaci

$$f_2 = d_m t e^{mt}. \tag{62}$$

Ze wzorów (62) i (57) uzyskuje się

$$d_m = -\mu_0 J \frac{C_m}{2m+1}. \tag{63}$$

Z równań (60), (61), (62) i (63) oraz podstawienia (56) wynika

$$f_2(r) = \mu_0 J r^m \begin{cases} \dfrac{C_n}{(n-m)(n+m+1)} & \text{dla } n \neq m, \\ -\dfrac{C_m}{2m+1} \ln r & \text{dla } n = m. \end{cases} \tag{64}$$

Ze wzorów (53) i (64) otrzymuje się

$$A_{sz} = \mu_0 J r^m \left[\sum_{n \neq m} \frac{C_n P_n^1(\cos\Theta)}{(n-m)(n+m+1)} - \frac{C_m P_m^1(\cos\Theta)}{2m+1} \ln r \right]. \tag{65}$$

Wzór (65) określa rozwiązanie szczególne równania (52). Zależność (65) umożliwia wyznaczenie pola magnetycznego dla gęstości prądu zmieniającej się w funkcji współrzędnej r zgodnie ze wzorem (51).

W ogólnym przypadku, gdy gęstość prądu jest dowolną funkcją współrzędnej r, należy rozwinąć tę funkcję w szereg potęgowy zmiennej r. Zastosowanie wzoru (65) oraz zasady superpozycji umożliwia znalezienie rozkładu pola.

Gdy gęstość prądu nie jest funkcją r ($m = 2$) wzór (51) przyjmuje postać wzoru (48) a zależność (65) zapisuje się

$$A_{sz} = \mu_0 J r^2 \left[\sum_{n \neq 2} \frac{C_n P_n^1(\cos\Theta)}{(n-2)(n+3)} - \frac{C_2 P_2^1(\cos\Theta)}{5} \ln r \right]. \tag{66}$$

Dla cewki jak na rys. 8 umieszczonej symetrycznie względem środka układu współrzędnych $C_2 = C_4 = C_6 = \ldots = 0$ i wzór (66) upraszcza się do postaci

$$A_{sz} = \mu_0 J r^2 \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{C_n P_n^1(\cos\Theta)}{(n-2)(n+3)}. \tag{67}$$

Zgodnie ze wzorem (59) rozwiązanie równania Laplace'a w poszczególnych obszarach zapisze się

$$A_i = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n^i r^n + \frac{B_n^i}{r^{n+1}} \right) P_n^1(\cos\Theta), \tag{68}$$

gdzie $i = \text{I}, \text{III}$.

Potencjał wektorowy w obszarze i = II będzie sumą rozwiązań (67) i (68).

Wypełniając warunki ciągłości potencjału oraz składowej stycznej wektora natężenia pola magnetycznego a także uwzględniając skończoną wartość indukcji w całym obszarze, wyznacza się stałe A_n^i, B_n^i (i = I, II, III).

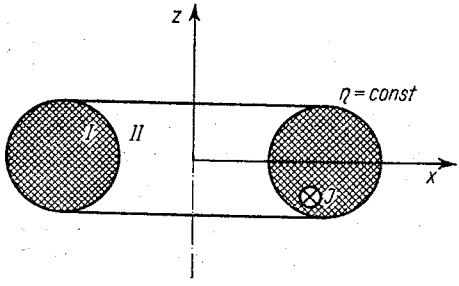
Opisaną metodą w pracy [19] wyznaczono pole magnetyczne cewki kulistej przedstawionej na rys. 8 a także uwzględniono obecność ferromagnetyka w postaci kuli umieszczonej wewnątrz cewki oraz powłoki sferycznej otaczającej cewkę.

2.6. Układ współrzędnych toroidalnych

Na rys. 10 pokazano przekrój poprzeczny zwoju kołowego, przez który płynie prąd stały.

Obliczenia prowadzi się w układzie współrzędnych toroidalnych η, Θ, ψ powiązanych następująco z układem kartezjańskim [16]

$$x = \frac{a\,\mathrm{sh}\,\eta\cos\psi}{\mathrm{ch}\,\eta-\cos\psi}, \qquad y = \frac{a\,\mathrm{sh}\,\eta\sin\psi}{\mathrm{ch}\,\eta-\cos\Theta}, \qquad z = \frac{a\sin\Theta}{\mathrm{ch}\,\eta-\cos\Theta}.$$



Rys. 10. Przekrój poprzeczny zwoju kołowego

Wektor gęstości prądu, a tym samym potencjał wektorowy, posiada tylko jedną współrzędną

$$\mathbf{J} = J\mathbf{1}_\psi; \qquad \mathbf{A} = A\mathbf{1}_\psi.$$

Składowa potencjału wektorowego spełnia następujące równanie:

$$\left(\frac{\mathrm{ch}\,\eta-\cos\Theta}{a}\right)^2\left[\frac{\partial^2 A}{\partial\Theta^2}-\frac{\partial A}{\partial\Theta}\frac{\sin\Theta}{\mathrm{ch}\,\eta-\cos\Theta}+\frac{\partial^2 A}{\partial\eta^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial A}{\partial\eta}\frac{1-\mathrm{ch}\,\eta\cos\theta}{\mathrm{sh}\,\eta(\mathrm{ch}\,\eta-\cos\Theta)}-\frac{A}{\mathrm{sh}^2\eta}\right]=\begin{cases}0 & \text{w obszarze II,} \quad (69a)\\ -\mu_0 J & \text{w obszarze I.} \quad (69b)\end{cases}$$

W pracy [9] założono, że J = const w całym obszarze I. Przy tym założeniu rozwiązanie szczególne równania (69b) ma postać [9]

$$A_{sz} = \mu_0 J\frac{a^2\,\mathrm{sh}^2\eta}{3(\mathrm{ch}\,\eta-\cos\Theta)^2}. \qquad (70)$$

Natomiast rozwiązanie równania Laplace'a w poszczególnych obszarach ma postać [16, 17]

$$A_{\mathrm{I}} = \sqrt{\mathrm{ch}\,\eta - \cos\Theta} \sum_{p=1}^{\infty} A_p Q^1_{p-1/2}(\mathrm{ch}\,\eta)\cos p\Theta, \tag{71a}$$

$$A_{\mathrm{II}} = \sqrt{\mathrm{ch}\,\eta - \cos\Theta} \sum_{p=1}^{\infty} B_p P^1_{p-1/2}(\mathrm{ch}\,\eta)\cos p\Theta. \tag{71b}$$

Uwzględniając wzory (70), (71a) i (71b) w pracy [9] wyznaczono pole magnetyczne oraz indukcyjność zwoju przedstawionego na rys. 10.

Założenie o stałej gęstości prądu w przekroju zwoju poczynione w pracy [9] może być tylko dla cienkiego zwoju.

W przypadku zwoju „grubego" (duży stosunek promienia przekroju poprzecznego do promienia toroidu) należy uwzględnić zjawisko nierównomiernego rozkładu gęstości prądu. Dla prądu stałego gęstość będzie hiperboliczną funkcją odległości danego punktu od osi z

$$J = A\frac{1}{r}.$$

W układzie współrzędnych toroidalnych zapisze się

$$J = J_0 \frac{\mathrm{ch}\,\eta - \cos\Theta}{\mathrm{sh}\,\eta}, \tag{72}$$

gdzie J_0 gęstość prądu w punkcie $\eta = \infty$.

Niestety, wyznaczenie rozwiązania szczególnego równania (69b) przy wartości J określonej wzorem (72) napotyka na duże trudności.

Natomiast w stosunkowo prosty sposób wyznacza się rozwiązanie szczególne przy gęstości prądu zmieniającej się zgodnie z zależnością

$$J = \frac{B}{r^2},$$

a w układzie współrzędnych toroidalnych

$$J = J_0 \left(\frac{\mathrm{ch}\,\eta - \cos\Theta}{\mathrm{sh}\,\eta}\right)^2. \tag{73}$$

Ze wzorów (69b) i (73) otrzymuje się

$$\frac{\partial^2 A}{\partial\Theta^2} - \frac{\partial A}{\partial\Theta}\frac{\sin\Theta}{\mathrm{ch}\,\eta - \cos\Theta} + \frac{\partial^2 A}{\partial\eta^2} + \frac{\partial A}{\partial\eta}\frac{1 - \mathrm{ch}\,\eta\cos\Theta}{\mathrm{sh}\,\eta(\mathrm{ch}\,\eta - \cos\Theta)} - \frac{A}{\mathrm{sh}^2\eta} = -\frac{\mu_0 J_0 a^2}{\mathrm{sh}^2\eta}. \tag{74}$$

Najprostsze rozwiązanie szczególne równania (74) ma postać

$$A_{sz} = A_0 = \mathrm{const}.$$

Ostatecznie

$$A_{sz} = \mu_0 J_0 a^2. \tag{75}$$

Potencjał wektorowy w obszarze I zapisze się jako suma wzorów (71a) oraz (75).

Wypełniając warunki ciągłości potencjału i składowej stycznej wektora natężenia pola magnetycznego można wyznaczyć stałe A_p i B_p. Rzeczywisty rozkład gęstości prądu sta-

Tablica 1

Postać rozwiązania szczególnego równania Poissona dla wybranych układów współrzędnych

Układ współrzędnych	A jest funkcją zmiennych	Postać gęstości prądu J	A_{sz}
prostokątny	$x,\ y$	$J = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\frac{n\pi}{d} y$	$\mu\left(\frac{\pi}{d}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{n^2} \cos\frac{n\pi}{d} y$
kołowo-walcowy	$r,\ \varphi$	$J = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin n\varphi + B_n \cos n\varphi)$	$-\mu r^2\left[\frac{1}{4}B_0 + \sum_{n\neq 2} \frac{1}{4-n^2}(A_n \sin n\varphi + B_n \cos n\varphi) + \frac{1}{4}\ln r(A_2 \sin 2\varphi + B_2 \cos 2\varphi)\right]$
eliptyczno-walcowy	$r,\ \psi$	$J = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin n\psi + B_n \cos n\psi)$	$\frac{C\mu_0}{8}\left[4\mathrm{ch}2\eta \sum_{n\neq 2} \frac{A_n \sin n\psi + B_n \cos n\psi}{n^2-4} - 2\sum_{n\neq 2} \times \frac{A_n \sin(n-2)\psi + B_n \cos(n-2)\psi}{(n-2)^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \sin n\psi + B_n \cos n\psi}{(n+2)^2} - \eta\,\mathrm{sh}2\eta(A_2 \sin 2\psi + B_2 \cos 2\psi) - B_0(\mathrm{ch}2\eta + \cos 2\psi) + \eta^2 B_2\right]$
dwu-walcowy	$\eta,\ \Theta$	$J = \mathrm{const}$	$-\frac{1}{4}\mu J a^2 \frac{\mathrm{ch}\eta + \cos\Theta}{\mathrm{ch}\eta - \cos\Theta}$
kulisty	$r,\ \Theta$	$J = r^{m-2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n P_n^1(\cos\Theta)$	$\mu r^m\left[\sum_{n\neq m} \frac{C_n P_n^1(\cos\Theta)}{(n-m)(n+m+1)} - \frac{C_m P_m^1(\cos\Theta)}{2m+1}\ln r\right]$
toroidalny	$\eta,\ \Theta$	$J = \mathrm{const}$	$\mu J a^2\ \mathrm{sh}^2\eta/3(\mathrm{ch}\eta - \cos\Theta)^2$
	$\eta,\ \Theta$	$J = J_0\left(\frac{\mathrm{ch}\eta - \cos\Theta}{\mathrm{sh}\eta}\right)^2$	$\mu J_0 a^2$

łego zawiera się pomiędzy rozpatrzonymi przypadkami szczególnymi $\left(J = \text{const i } J = \frac{B}{r^2}\right)$. Identyczna uwaga odnosi się do rozkładu pola magnetycznego oraz indukcyjności zwoju kołowego, przez który przepływa prąd stały.

3. PODSUMOWANIE

W pracy omówiono wyznaczanie rozwiązania szczególnego równania Poissona. Znajomość tego rozwiązania jest warunkiem koniecznym stosowalności metody rozdzielenia zmiennych.

Przykłady rozpatrzone w pracy rozszerzają zakres stosowalności omawianej metody w stosunku do pracy [16], gdzie ograniczono się do stałej wartości prawej strony równania Poissona.

Materiał uzupełniający pracę [16] zawarto w tablicy 1.

Tablica ta zawiera postać rozwiązania szczególnego równania Poissona w wybranych układach współrzędnych.

Oznaczenia użyte w tablicy wynikają z następujących zależności: $\nabla^2 A = -\mu J$, $A = A_j + A_{sz}$, $\nabla^2 A_j = 0$, $\nabla^2 A_{sz} = -\mu J$.

LITERATURA

1. K. Adamiak, J. Purczyński, *Siła przyciągania elektromagnesu garnkowego*, Prace Naukowe P.S., nr 31, Instytut Automatyki Przemysłowej, Elektrodynamika, Szczecin 1975.
2. K. J. Binns, P. J. Lawrenson, *Analysis and computation of electric and magnetic field problems*, New York 1963.
3. M. Gramz, *Obliczanie prądów indukowanych w cienkich przewodnikach poruszających się względem pola magnetycznego*, Rozprawa doktorska, Szczecin 1976.
4. M. Gramz, J. Purczyński, R. Sikora, *Magnetic field of bifilar lead*, Appl. Phys., 7, 55—60 (1975).
5. M. Gramz, J. Purczyński, R. Sikora, *Analysis of magnetic field of bifilar lead*, Fifth Iranian Conference on Electrical Engineering, October 27—30, 1975.
6. M. Gramz, J. Purczyński, *Wyznaczanie indukcyjności rdzeni kubkowych*, Prace Naukowe P.S., nr 31, Inst. Automatyki Przemysłowej, Elektrodynamika, Szczecin 1975.
7. S. Gratkowski, R. Pałka, *Pole magnetyczne układu przewodów rozmieszczonych wzdłuż powierzchni walca eliptycznego*, Arch. Elektrot., tom XXIV, z. 1, 1975.
8. S. Gratkowski, R. Pałka, J. Purczyński, R. Sikora, *Wire configuration creating a uniform magnetic field*, A.f.E., 58 (1976), s. 93—96.
9. W. Haubitzer, *Das magnetische Feld eines Toroids und einer mehrlagigen Zylinderspule*, Z. elektr. Inform. u. Energietechnik, Leipzig, 4 (1974), 3, s. 129—136.
10. Ł. W. Kantorowicz, W. I. Kryłow, *Priblizennyje mietody wysszewo analiza*, Moskwa 1950.
11. W. Lipiński, J. Purczyński, R. Sikora, *Berechnung des Magnetfeldes der gleichstromdurchflossener gerader Leiter mittels Eler Bessel und Fourier-Transformationen*, A.f.E., 55 (1973), s. 312—319.
12. W. Lipiński, J. Purczyński, R. Sikora, *Berechnung des Magnetfeldes der gleichstromdurchflossenen geraden Leiter*, Z. elektr. Inform. u. Energietechnik, Leipzig, 4 (1974), s. 57—62.

13. W. Lipiński, J. Purczyński, R. Sikora, *Zastosowanie przekształceń całkowych do analizy pewnych przypadków pól magnetycznych*, Archiwum Elektrotechniki, 20 (1971), z. 4.
14. W. Lipiński, J. Purczyński, R. Sikora, *Zastosowanie całkowego przekształcenia Mellina do obliczeń pola magnetycznego cewki kulistej*, Archiwum Elektrotechniki, 22 (1971), z. 4.
15. W. Lipiński, R. Sikora, J. Purczyński, *Przykłady obliczania rozkładu pola magnetycznego cewek kulistych*, Archiwum Elektrotechniki, 23 (1974), z. 3.
16. P. Moon, D. E. Spencer, *Teoria pola*, PWN, Warszawa 1966.
17. P. Moon, D. E. Spencer, *Field theory*, Handbook, Berlin 1961, Springer.
18. J. Purczyński, *Metoda Ritza obliczania indukcyjności rozproszenia*, Archiwum Elektrotechniki, 21 (1972), z. 4.
19. J. Purczyński, *Pole magnetyczne silnika elektrycznego o trzech stopniach swobody*, Archiwum Elektrotechniki, 23 (1974), z. 2.
20. J. Purczyński, P. Rolicz, R. Sikora, *The magnetic field, force and inductance of the system consisting of a thin ellipsoidal coil and a ferromagnetic ellipsoid*, Appl. Phys., 8, 71—74 (1975)
21. J. Purczyński, R. Sikora, *Straty mocy w pierścieniu obejmującym przewód z prądem przemiennym*, Archiwum Elektrotechniki, 89 (1974), z 3.
22. J. Purczyński, R. Sikora, *Pole magnetyczne w żłobku maszyny elektrycznej jako przypadek zagadnienia Neumanna dla równania Poissona*, Sympozjum „Nowoczesne metody matematyczne w elektrotechnice", Wilga 1970.
23. J. Purczyński, R. Sikora, *Analiza indukcyjności rozproszenia żłobkowego oraz sił działających na uzwojenia maszyn elektrycznych*, Rozprawy Elektrotechniczne, 21 (1975), z. 1.
24. J. Purczyński, R. Sikora, *Wykorzystanie metody rozdzielenia zmiennych oraz metody wariacyjnej do analizy pola rozproszenia żłobkowego*, Rozprawy Elektrotechniczne, 21 (1975), z. 2.
25. J. Purczyński, R. Sikora, M. Gramz, *Einsatz der Methode der Variablentrennung zur Berechnung des Magnetfeldes und der Induktivität von Schalenkernen*, Z. elektr. Inform.-u. Energietechnik, Leipzig, 4 (1974), 6.
26. W. Rogowski, *Über des Streufeld und der Streuinduktionskoeffizienten eines Transformators mit Scheibenwicklung und geteilten Endspullen*, „Mitt. über Forschungsarbeiten" V.D.I., 1909, Heft 71, s. 1—36.
27. E. Roth, *Introduction à l'étude analytique de l'échauffement des machines électriques*, Bull. Soc. Franc. Électr., t. VII, 1927, Nr 4, s. 840—966.
28. E. Roth, *Inductance due aux fuites magnetiques dans les transformateurs à bobines cylindriques et efforts exerés sur les enroulements*, R.G.d'E., 1936, s. 259—268, 291—303, 323—336.
29. R. Sikora, J. Purczyński, K. Adamiak, *Siła przyciągania elektromagnesu garnkowego*, Archiwum Elektrotechniki, t. XXIV, (1975), z. 2.
30. R. Sikora, J. Purczyński, W. Lipiński, *Pole magnetyczne przewodu o przekroju eliptycznym*, Archiwum Elektrotechniki, t. XXII (1973), z. 1.
31. R. Sikora, J. Purczyński, W. Lipiński, *Das magnetische Feld des gleichstromdurchflossenen Leiters von elliptischem Querschnitt*, A.F.E., 55 (1973), s. 223—226.
32. R. Sikora, J. Purczyński, M. Gramz, *Analiza pola magnetycznego i indukcyjności rdzeni kubkowych*, Rozprawy Elektrotechniczne, 1976, 22, z. 1.
33. R. Sikora, J. Purczyński, W. Lipiński, *Pole magnetyczne prądów płynących wzdłuż powierzchni walcowych*, Archiwum Elektrotechniki, 1973, z. 3.
34. R. Sikora, W. Lipiński, J. Purczyński, *Pole magnetyczne cewki kulistej o skończonych wymiarach*, Archiwum Elektrotechniki, 1974, z. 1.
35. R. Sikora, W. Lipiński, J. Purczyński, *Magnetische Kräfte und Induktivität eines kugelförmigen Solenoids*, Revue Roumaine des Sciences Techniques Elektrotechn. et Energ., Bucarest, (1975), Tome 20, z. 3.
36. W. I. Smirnow, *Matematyka wyższa*, t. II, PWN, Warszawa 1960.
37. W. R. Smythe, *Static and dynamic electricity*, New York 1950.
38. O. W. Tozoni, *Rasczot elektromagnitnych poliej na wyczislitielnych maszinach*, Izd. Tiechnika, Kijew 1967.
39. J. Turowski, *Elektrodynamika techniczna*, Warszawa 1968.

40. A. Weigand, *Das magnetische Feld einer von Gleichstromdurchflossenen Zylinderspule*, Deutsche Elektrotechnik, 1952, H. 12.
41. M. Ziółkowski, J. Purczyński, R. Sikora, M. Gramz, *Forces acting on the conductors and inductance of a bifilar lead*, Applied Physic, 1976 (w druku).

J. PURCZYŃSKI

APPLICATION OF THE SEPARATION OF VARIABLES METHOD TO MAGNETIC FIELDS ANALYSIS

Summary

In the paper an application of the separation of variables method to magnetic fields analysis is discussed. Determination of Poisson's equation to a particular solution is cosidered in detail. Analysis is performed for several coordinate systems. Achieved results are a generalization of the material discussed in paper [16].

J. PURCZYŃSKI

APPLICATION DE LA MÉTHODE DE SÉPARATION DES VARIABLES DANS L'ANALYSE DES CHAMPS MAGNÉTIQUES

Résumé

Dans l'étude on traite la possibilité de l'application de la séparation des variables à l'analyse des champs magnétiques du courant continu. On a étudié minutieusement la manière de déterminer la résolution de l'équation particulière de Poisson. On a analysé plusieurs systèmes de coordonnées. Grace aux résultats obtenus on a réussi à approfondir les problèmes traités dans l'étude [16].

J. PURCZYŃSKI

ANWENDUNG DER METHODE DER VARIABLENTRENNUNG ZUR ANALYSE DES MAGNETISCHEN FELDES

Zusammenfassung

In der Arbeit wird die Anwendung der Methode der Variablentrennung zur Analyse des vom Gleichstrom erregten magnetischen Feldes besprochen. Es wird die Bestimmung der Lösung der partikulären Poissonschen Differentialgleichung ausführlich betrachtet. Die Analyse wurde für einige Koordinatensysteme durchgeführt. Die gewonnenen Ergebnisse bilden eine Erweiterung der in der Arbeit [16] entwickelten Formeln.

Я. ПУРЧИНЬСКИ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ АНАЛИЗА МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Резюме

Представлено использование метода разделения переменных к анализу магнитных полей постоянного тока.

Подробно рассмотрено определение частного решения уравнения Пуассона.

Анализ проведен для разных систем координат.

Полученные результаты являются пополнением материала представленного в труде [16].

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1978, 24, z. 2, ss. 253-264

621.372

Efektywność zmodyfikowanych metod iteracyjnych Newtona w analizie stanu ustalonego układów elektronicznych

BOGUSŁAW WOLSZCZAK (WROCŁAW)

Instytut Telekomunikacji i Akustyki Politechniki Wrocławskiej

Otrzymano 6.12.1976

W pracy opisano dwa schematy iteracyjnego rozwiązywania układów równań nieliniowych pojawiających się w analizie stanu ustalonego półprzewodnikowych układów elektronicznych. Przeprowadzono ocenę efektywności tych schematów na podstawie zebranego materiału doświadczalnego podczas analizy różnorodnych konfiguracji układów elektronicznych za pomocą komputera.

1. WSTĘP

Analiza sieci układów elektronicznych w stanie ustalonym (analiza DC) jest jednym z podstawowych ogniw procesu projektowania układów elektronicznych wspomaganego komputerem. Znalezienie rozwiązania, a więc obliczenie rozpływu prądów, rozkładu napięć, określenie punktów pracy elementów półprzewodnikowych jakie ustalą się w układzie po włączeniu napięć zasilających sprowadza się do rozwiązania odpowiedniego układu równań nieliniowych (9). Tego rodzaju układy równań rozwiązywane są różnymi procedurami opartymi na schematach iteracyjnych zaczerpniętych z metod numerycznych [5, 9].

W odróżnieniu od metod numerycznych stosowanych w analizie liniowej (gdzie proces rozwiązywania przebiega ustalonym torem) w metodach rozwiązywania układów równań nieliniowych mogą wystąpić następujące zjawiska:

a) rozbieżność procesu iteracyjnego,
b) zbyt wolna zbieżność procesu iteracyjnego,
c) tzw. „nadmiar" podczas liczenia na EMC,
d) zaistnienie wielu rozwiązań,
e) trudności w oszacowaniu punktów startowych,
f) różnorodność dróg od punktu startowego do rozwiązania w zależności od zastosowanego schematu iteracyjnego.

Równania opisujące sieć analizowanego układu elektronicznego układane są automatycznie przez program na podstawie danych wejściowych napisanych przez użytkownika. W rezultacie określona jest tylko pewna klasa funkcji opisujących złącza półprzewodnikowe ((np. funkcje eksponencjalne (10)), natomiast sposób połączeń elementów układu jak i wartości źródeł zasilających i rezystorów mogą być dowolne. W konsekwencji otrzymany

układ równań nieliniowych (9) ma określoną klasę funkcji $\mathbf{F}(\mathbf{U})$, lecz jego macierze współczynników $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ mogą zawierać elementy o praktycznie dowolnych wartościach. Wynika stąd dodatkowa trudność w określeniu ilości rozwiązań, oszacowaniu obszaru, w którym zawarte jest rozwiązanie i ocenie szybkości zbieżności poszczególnych schematów iteracyjnych.

W programach analizy DC stosowane są zwykle (ze względu na szybką zbieżność w otoczeniu rozwiązania) różne procedury iteracyjne wywodzące się z metody Newtona [5, 9]. Zakres bezpośrednich zastosowań metody Newtona ogranicza się do prostych przykładów o małej liczbie niewiadomych i dobrze uwarunkowanych numerycznie, np. przykłady akademickie z jedną diodą lub jednym tranzystorem [2]. Modyfikacja metody Newtona polegająca na zastępowaniu w pewnych przypadkach funkcji eksponencjalnej funkcją logarytmiczną [8] bywa często zawodna i dodatkowo wprowadza niejednolitość opisu matematycznego.

Potrzeba rozwiązywania dużych układów równań nieliniowych jakie pojawiają się w analizie układów zintegrowanych spowodowała poszukiwania nowych modyfikacji metody Newtona. Opis tych modyfikacji podany jest w lieraturze [1, 4] w zakresie dotyczącym założeń koncepcyjnych, z czego nie można jeszcze wnioskować o własnościach eksploatacyjnych procedur numerycznych opartych na proponowanych schematach iteracyjnych. Metody te [1, 4] były zastosowane w procedurach programu analizy DC OPAL [15] i okazało się, że w wielu przypadkach analizowanych układów elektronicznych działają zawodnie. Po wprowadzeniu ograniczeń obszaru rozwiązań [11] (o czym nie wspomniano w [1, 4]) uzyskano znaczną poprawę niezawodności procedur numerycznego rozwiązywania układu równań nieliniowych (9).

2. WYPROWADZENIE UKŁADU RÓWNAŃ NIELINIOWYCH

Załóżmy, że analizowana sieć składa się z: n_q — tranzystorów, n_d — diod półprzewodnikowych, n_e — źródeł napięciowych, n_r — rezystorów. Modele diod i tranzystorów bipolarnych [12, 13] można przedstawić za pomocą rezystorów, dwójników o zadanych charakterystykach prądowo-napięciowych $i = g(u)$ i źródeł prądowych sterowanych pądem o wzmocnieniu prądowym α.

Prądy $\mathbf{I}_T$ i napięcia $\mathbf{U}_T$ gałęzi drzewa grafu sieci oraz prądy $\mathbf{I}_L$ i napięcia $\mathbf{U}_L$ łączników powiązane są ze sobą za pośrednictwem macierzy konturów fundamentalnych $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{I}_T = \mathbf{F}\mathbf{I}_L, \quad \mathbf{U}_L = -\mathbf{F}^t\mathbf{U}_T.$$

Jeżeli do zbioru gałęzi drzewa zostaną wybrane niezależne źródła napięciowe E, dwójniki o nieliniowych charakterystykach N i gałęzie typu rezystancyjnego R, to dwójniki typu przewodnościowego G znajdą się w łącznikach:

$$\mathbf{I}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_E \\ \mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{EG} \\ \mathbf{F}_{NG} \\ \mathbf{F}_{RG} \end{bmatrix} [\mathbf{I}_G], \tag{1}$$

$$\mathbf{U}_G = -\mathbf{F}_{NG}^t\mathbf{U}_N - \mathbf{F}_{EG}^t\mathbf{U}_E - \mathbf{F}_{RG}^t\mathbf{U}_R, \tag{2}$$

gdzie:

$\mathbf{F}_{xy}$ — odpowiednie podmacierze macierzy fundamentalnej $\mathbf{F}$,

t — transpozycja.

Uzupełniając równania (1), (2) zależnościami pomiędzy prądami i napięciami na zaciskach rezystorów:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_R \\ \mathbf{U}_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_R \\ \mathbf{I}_G \end{bmatrix} \tag{3}$$

i podstawiając

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_T^{-1} & -\mathbf{F}_{RG} \\ \mathbf{F}_{RG}^t & \mathbf{G}_L^{-1} \end{bmatrix}^{-1} = [\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

gdzie

$$\mathbf{D}_{22} = [\mathbf{R}_L - \mathbf{F}_{RG}^t \mathbf{G}_T^{-1} \mathbf{F}_{RG}]^{-1}, \tag{4a}$$

oraz (dla skrócenia zapisu):

$$\mathbf{U}_E = \mathbf{E} \quad \text{i} \quad \mathbf{U}_N = \mathbf{U},$$

otrzymano:

$$\mathbf{I}_E = -\mathbf{F}_{EG}\mathbf{D}_{22}\mathbf{F}_{EG}^t\mathbf{E} - \mathbf{F}_{EG}\mathbf{D}_{22}\mathbf{F}_{EG}^t\mathbf{U}, \tag{5}$$

$$\mathbf{I}_N = -\mathbf{F}_{NG}\mathbf{D}_{22}\mathbf{F}_{NG}^t\mathbf{U} - \mathbf{F}_{NG}\mathbf{D}_{22}\mathbf{F}_{EG}^t\mathbf{E}, \tag{6}$$

stąd

$$\mathbf{I}_N(\mathbf{U}) + \underbrace{\mathbf{F}_{NG}\mathbf{D}_{22}\mathbf{F}_{NG}^t}_{\mathbf{A}'}\mathbf{U} = \underbrace{-\mathbf{F}_{NG}\mathbf{D}_{22}\mathbf{F}_{EG}^t}_{\mathbf{B}'}\mathbf{E}, \tag{6a}$$

co można teraz zapisać w zwartej formie jako

$$\mathbf{I}_N(\mathbf{U}) + \mathbf{A}'\mathbf{U} = \mathbf{B}'\mathbf{E}. \tag{7}$$

Układ równań (7) opisuje nieliniową sieć bierną (np. układ rezystancyjno-diodowy). Jeżeli sieć zawiera tranzystory bipolarne, to układ równań (7) można dostosować do tego przypadku mnożąc macierze $\mathbf{A}'$ i $\mathbf{B}'$ przez macierz odwrotną $\mathbf{T}^{-1}$, gdzie:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \oplus \mathbf{T}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{T}_i \oplus \ldots \oplus \mathbf{T}_{n_q} \oplus \mathbf{D},$$

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_{R(i)} \\ -\alpha_{F(i)} & 1 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{D} - (n_d \times n_d)$ — diagonalna macierz jednostkowa,

n_q — liczba tranzystorów w analizowanej sieci,

a więc

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}' \text{ i } \mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}'. \tag{8}$$

W ten sposób otrzymano ogólną postać układu równań nieliniowych opisujących sieć złożoną z diod i tranzystorów bipolarnych:

$$\mathbf{I}_N(\mathbf{U}) + \mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{B}\mathbf{E}, \tag{9}$$

gdzie:

$\mathbf{A}$ — $(n \times n)$ — macierz współczynników,

$n = 2n_q + n_d$ — liczba wszystkich dwójników nieliniowych w analizowanej sieci,

$\mathbf{B} - (n \times n_e)$ — macierz współczynników,

$$\mathbf{I}_N(\mathbf{U}) = [g_1(u_1), g_2(u_2), \ldots, g_n(u_n)]^t,$$

$$g_i(u_i) = \mathbf{I}_{N(i)}(u_i) = I_{S(i)}(e^{\lambda_i u_i} - 1), \tag{10}$$

$$\lambda_i = \frac{q}{M_i kT} \simeq 40 \ 1/\mathrm{V}.$$

Równanie (10) jest znaną funkcją prądu złącza półprzewodnikowego [12, 13].

Podany w zarysie (szczegóły wyprowadzenia w [3]) sposób otrzymywania układu równań nieliniowych w postaci kanonicznej (9) jest niezbędny do oszacowania granic rozwiązania (część 3) jak i do poznania własności macierzy współczynników **A** i **B**.

Zgodnie z metodą Newtona [5, 9] kolejne przybliżenie rozwiązania układu równań (9) obliczane jest następująco:

$$\mathbf{U}^{(k+1)} = \mathbf{U}^{(k)} + \Delta\mathbf{U}^{(k)}, \tag{11}$$

gdzie:

$$\Delta\mathbf{U}^{(k)} = -\mathbf{J}^{-1}[\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{U}^{(k)})]\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{U}^{(k)}), \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{U}^{(k)}) = \mathbf{I}_N(\mathbf{U}^{(k)}) - \mathbf{A}\mathbf{U}^{(k)} - \mathbf{B}\mathbf{E}, \tag{13}$$

$\mathbf{J}^{-1}$ — $(n \times n)$ — macierz odwrotna jakobianu funkcji błędu $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{U})$ ((równanie (13)), k — kolejny numer kroku iteracyjnego.

W praktyce składowe wektora korekcyjnego $\Delta\mathbf{U}^{(k)}$ dla pewnych wartości k są za duże (co prowadzi do rozbieżności lub „nadmiaru" podczas obliczeń na EMC) lub za małe (wolna zbieżność) i dlatego sekwencja iteracyjna (11) stosowana jest ze zmienną długością kroku s:

$$\mathbf{U}^{(k+1)} = \mathbf{U}^{(k)} + s\Delta\mathbf{U}^{(k)}, \tag{14}$$

gdzie: s — pewna wielkość skalarna.

Przedstawione w części 4 schematy iteracyjne dotyczą takiego wyboru kroku iteracyjnego s aby uzyskać lepsze warunki zbieżności sekwencji iteracyjnej (14).

3. SZACOWANIE GRANIC OBSZARU ROZWIĄZAŃ

Sekwencje iteracyjne (14) oparte na metodzie Newtona mogą być stosowane do rozwiązywania układów równań nieliniowych bez znajomości granic obszaru rozwiązań, lecz wtedy istnieje duże prawdopodobieństwo pojawienia się takich składowych nowego wektora $\mathbf{U}^{(k+1)}$, których wielkość nie ma żadnego uzasadnienia fizycznego (rys. 1) lub powoduje nadmiar funkcji esponencjalnej (10) podczas obliczeń na EMC (np. zakres liczb EMC serii ODRA 1300 wynosi od 10^{-76} do 10^{+76}).

Typowy przykład pojawiania się „nadmiaru" przedstawiono na rys. 1 gdzie kolejna wartość napięcia $U^{(1)}$ jest za duża i wartość funkcji $\varphi(U^{(1)}) \to \infty$. Zastąpienie napięcia

$U^{(1)}$ wartością U_g zapewnia bliższe sąsiedztwo rozwiązania $\overset{*}{U}$ i ogranicza zakres wartości funkcji $\varphi(U)$.

Oszacowania granic obszaru rozwiązań układu równań (9) dokonano w [10]: granica dolna (kierunek zaporowy złącz)

$$U_d = \sum_{i=1}^{m} |E_i|, \tag{15}$$

granice górne (kierunek przewodzenia i-tego złącza)

$$U_g(i) = \frac{1}{\lambda_{(i)}} \ln\left(\frac{I_N(i)_{max}}{I_S(i)} + 1\right), \tag{16}$$

gdzie:

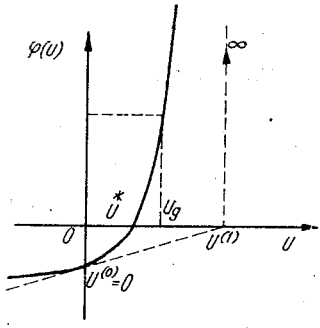
$$I_N(i)_{max} = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \sum_{k=1}^{m} |E_k| + \left|\sum_{k=1}^{m} b_{ik} E_k\right|, \tag{17}$$

przy czym:

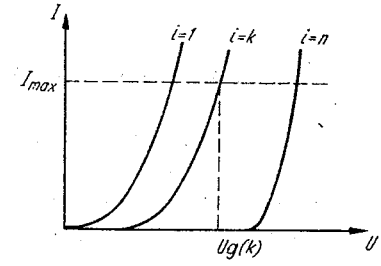
a_{ij}, b_{ik} — elementy macierzy **A** i **B** układu równań (9),

$n = 2n_q + n_d$ — liczba złącz półprzewodnikowych,

$m = n_e$ — liczba źródeł zasilających E.



Rys. 1. Graficzne przedstawienie pojawiania się nierealnych wartości napięć generowanych przez metodę Newtona



Rys. 2. Zbiór charakterystyk prądowo-napięciowych wszystkich złącz analizowanej sieci określonych przez dane wejściowe I_S, M, T — zależność (10)

Ze względu na sposób szacowania polegający na sumowaniu wartości bezwzględnych w zależności (17), oszacowanie to można nazwać umownie „matematycznym". Ponieważ analizowany układ elektroniczny jest obiektem rzeczywistym, więc wszystkie napięcia i prądy muszą przyjmować pewne skończone wartości. Podejście to zostało zaproponowane przez autora pracy [11] i ze względu na punkt wyjścia może być nazwane oszacowaniem „fizycznym". Polega ono na oszacowaniu maksymalnego prądu I_{max} jaki może się zdarzyć w analizowanej sieci i przyjęciu założenia, że w najgorszym przypadku cały ten prąd płynie przez i-te złącze (rys. 2).

Maksymalne prądy źródeł napięciowych E liczone są z zależności (5) przy założeniu, że wszystkie złącza półprzewodnikowe są krótko zwarte, tzn. $\mathbf{U} = \mathbf{O}$:

$$\{\mathbf{I}_E\}_{max} = -\mathbf{F}_{EG}\mathbf{D}_{22}\mathbf{F}_{EG}^t\mathbf{E} = \mathbf{I}_E'. \tag{18}$$

W najgorszym przypadku prąd w dowolnej gałęzi sieci będzie sumą modułów prądów źródeł $\mathbf{I}'_E$

$$I_{max} = \sum_{k=1}^{m} |I'_E(k)|, \tag{19}$$

a odpowiednie maksymalne napięcie (w kierunku przewodzenia) na i-tym złączu będzie wynosiło

$$U_g(i) = \frac{1}{\lambda_{(i)}} \ln\left(\frac{I_{max}}{I_S(i)} + 1\right). \tag{20}$$

Jak wspomniano we wstępie, na wejściu programu analizy DC może się pojawić dowolna konfiguracja sieciowa wprowadzona przez użytkownika, więc elementy macierzy współczynników **A** i **B** równania (9) ((zależnych od topologii — równania (4a), (6a) i wartości rezystancji poszczególnych gałęzi — równanie (3)) mogą przybierać zróżnicowane wartości. Z tego powodu nie można z góry przewidzieć, która metoda obliczania górnych granic da lepsze oszacowanie. W programie analizy DC OPAL [15] obliczane są równocześnie górne granice z zależności (16) i (20), a jako napięcie graniczne $U_g(i)$ podstawiana jest mniejsza liczba z pary obliczonych wartości U_g [11].

4. CHARAKTERYSTYKA SCHEMATÓW ITERACYJNYCH

Schemat 1 — Metoda redukcji długości kroku iteracyjnego

Zastosowana tu modyfikacja metody Newtona polega na sukcesywnym zmniejszaniu wartości skalarnej s (w przedziale $0 < s \leqslant 1$)

$$\mathbf{U}^{(k+1)} = \mathbf{U}^{(k)} + s\Delta\mathbf{U}^{(k)}, \tag{21}$$

dla $s = 1, 1/2, 1/4, \ldots, (1/2)^7$ tak długo, aż miara funkcji błędu $\boldsymbol{\varphi}$ w następnej iteracji będzie mniejsza od miary funkcji $\boldsymbol{\varphi}$ w iteracji poprzedniej [4]:

$$||\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{U}^{(k+1)})|| < ||\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{U}^{(k)})||. \tag{22}$$

Postępowanie tego rodzaju zabezpiecza proces przed rozbieżnością, ale nie gwarantuje zbieżności. Zwiększenie prawdopodobieństwa zbieżności procesu iteracyjnego uzyskano przez wprowadzenie do układu równań (9) dodatkowej wartości skalarnej c z przedziału $0 < c \leqslant 1$, która pozwala na rozwiązanie pośrednie przy mniejszych wymuszeniach, tzn. mniejszych wartościach napięć zasilających E. Układ równań (9) przekształcono do postaci:

$$\mathbf{I}_N(\mathbf{U}) + \mathbf{A}\,\mathbf{U} = \mathbf{B}c\mathbf{E}. \tag{23}$$

W ten sposób schemat 1 uzyskał pewne własności dynamiczne. Próby rozwiązania układ równań (23) dokonywane są dla różnych wartości wymuszeń (wartość c jest zmniejszana sukcesywnie o połowę) aż do znalezienia rozwiązania pośredniego. Rozwiązanie to traktowane jest jako następny punkt startowy do dalszych iteracji, kiedy współczynnik c sukcesywnie wzrasta o połowę poprzedniej wartości, aż źródła zasilające E osiągną swoje pierwotne wartości.

Schemat 2 — Metoda optymalizacji długości kroku iteracyjnego

Metodę Newtona zmodyfikowano wprowadzając nową miarę funkcji błędu [1]:

$$f(s) = \frac{P^{(k+1)}}{P^{(k)}} = s^2 - 2s + 1, \tag{24}$$

gdzie:

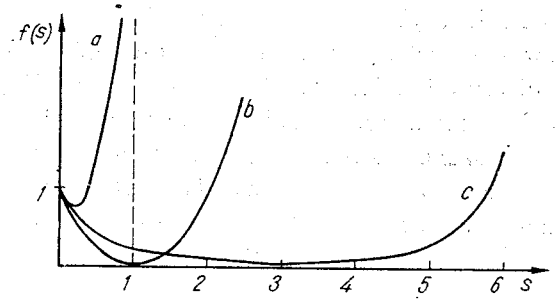
$$P^{(k)} = [\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{U}^{(k)})]^t [\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{U}^{(k)})],$$

$$P^{(k+1)} = [\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{U}^{(k+1)})]^t [\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{U}^{(k+1)})].$$

Podstawą tej metody jest spostrzeżenie, że w pobliżu rozwiązania nowa funkcja błędu $f(s)$ może być przybliżona parabolą (24). Umożliwia to wybór takiej wartości $s = s_{min}$

$$\mathbf{U}^{(k+1)} = \mathbf{U}^{(k)} + s_{min} \Delta \mathbf{U}^{(k)}, \tag{25}$$

która minimalizuje wartość funkcji błędu $f(s)$ (rys. 3).



Rys. 3. Przybliżone kształty funkcji błędu $f(s)$ w otoczeniu rozwiązania układu równań (9)

Poniżej podano kilka uwag dotyczących realizacji schematów 1 i 2 jako procedur numerycznych. Schematy 1 i 2 wyposażone są w identyczne procedury do obliczania wektora korekcyjnego $\Delta\mathbf{U}$ (12) i funkcji błędu $\boldsymbol{\varphi}$ ((równanie (13)), natomiast różnią się częścią organizacyjną. Przekład na język FORTRAN części organizacyjnej schematu 1 składa się z 60 rekordów, natomiast analogiczna część schematu 2 liczy 190 rekordów.

Schemat 2 wymaga znajomości przynajmniej trzech punktów na krzywej $f(s)$ (rys. 3) w celu określenia s_{min}, co w rezultacie wydłuża czas liczenia jednej iteracji prawie trzykrotnie w porównaniu ze schematem 1.

Uwagi te dotyczą więc długości procedur numerycznych (zajętość PO EMC) i wstępnego oszacowania czasochłonności obliczania jednego kroku iteracyjnego.

5. PORÓWNANIE EFEKTYWNOŚCI SCHEMATÓW ITERACYJNYCH

Przedstawione wyżej schematy iteracyjne 1 i 2 zastosowano w programie OPAL [15] jako procedury numerycznego rozwiązywania układu równań (9). Wybór jednego z nich dokonywany jest przez użytkownika odpowiednią dyrektywą sterującą. Do rozpoczęcia procesu iteracyjnego niezbędny jest punkt startowy, tzn. pierwsze przybliżenie rozwiązania

$\mathbf{U} = \mathbf{U}^{(0)}$. Punktem tym może być $\mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{O}$ lub wartości zadane przez użytkownika. Jeżeli punkt startowy nie został określony w danych wejściowych, to w programie przyjmowane są umowne wartości $\mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{U}'$. Wektor $\mathbf{U}'$ (standardowy punkt startowy) obliczany jest następująco: dla złącz spolaryzowanych zaporowo przyjmuje się -1 V, a dla złącz spolaryzowanych w kierunku przewodzenia przyjmuje się napięcia odpowiadające najmniejszym promieniom krzywizn charakterystyk funkcji (10).

Ze względu na dużą objętość materiału doświadczalnego (dane, wyniki, tabulogramy poszczególnych iteracji itd.) zdecydowano się na prezentację jednego z bardziej interesujących przypadków a pozostałe omówiono.

Schematy iteracyjne 1 i 2 zastosowane bez ograniczeń obszaru rozwiązań okazały się w wielu przypadkach zawodne. Typowe zatrzymania obliczeń to: rozbieżność (skierowanie się procesu iteracyjnego w obszary nierealnych napięć i prądów), nadmiar funkcji eksponencjalnych (10) (krzywe a, b, c — rys. 3 gwałtownie rosną zarówno dla małych jak i dużych wartości s). Wprowadzenie ograniczeń obszaru rozwiązań metodami zaproponowanymi w części 3 wyeliminowało problemy „nadmiarów" podczas analizy na EMC i zabezpieczyło schematy iteracyjne przed rozbieżnością.

W tabl. 1 przedstawiono rezultaty analizy DC kilku układów elektronicznych posiadających strukturę monolitycznych układów scalonych f-my CEMI [16]. W kolumnach 3 i 4 podano liczbę iteracji niezbędną do rozwiązania układu równań (9). W przypadku układów UL 1301N i UL 1201 uzyskano rozwiązanie zaczynając od standardowego punktu startowego $\mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{U}'$, natomiast w pozostałych układach UL 1400 i UL 1321N niezbędne było zastosowanie punktu startowego w bliskim otoczeniu rozwiązania (ingerencja projektanta).

Tablica 1

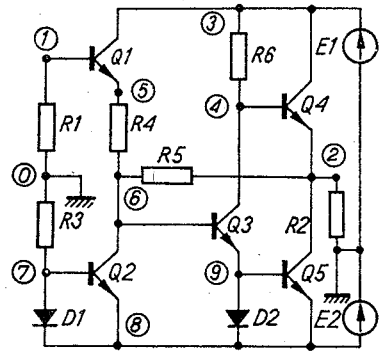
Porównanie schematów 1 i 2 pod względem liczby iteracji niezbędnych do rozwiązania układów równań nieliniowych (w nawiasach — liczba tranzystorów i diod)

Lp.	Typ układu scalonego	Schemat 1	Schemat 2	n — liczba równań nieliniowych
1	2	3	4	5
1	UL 1301N	19	9	8 (4+0)
2	UL 1201	14	9	27 (10+7)
3	UL 1400	7	6	21 (9+3)
4	UL 1321N	5	5	14 (6+3)

Efektywność schematu 2 jest szczególnie widoczna w takich przypadkach, w których zastosowanie schematu 1 prowadzi do rozwiązania lecz szybkość zbieżności jest mała — tabl. 2 (dane wejściowe) i tabl. 3 (wyniki analizy). Wartości miary funkcji błędu i odpowiednie wykresy przedstawiono w tabl. 4. Analiza krzywej 1 (tabl. 4) prowadzi do wniosku, że proces iteracyjny od pewnej iteracji $k = 11$ stał się bardzo wolny. Po 30 iteracjach przerwano obliczenia i porównano uzyskane wyniki z rozwiązaniem dokładnym. Stwierdzono, że proces iteracyjny doprowadził do bliskiego otoczenia rozwiązania, lecz jego osiągnięcie

Tablica 2

Dane wejściowe zintegrowanego stopnia wyjściowego analizowanego programem OPAL




```
DC - ANALYSIS PROGRAM OPAL
PROBLEM 6115
                OUTPUT STAGE NR 115
TEMP.=  25.00

R 1( 0- 1)= 1.00
R 2( 2- 0)= 1.00
R 3( 0- 7)= 6.50
R 4( 5- 6)= 6.00
R 5( 2- 6)= 30.0
R 6( 3- 4)= 5.00

        A   K    RS        RR          IS          M
D 1 ( 7- 8) 0.001   1.00E 03   1.00E-10 1.00
D 2 ( 9- 8) 0.001   1.00E 03   1.00E-10 1.00

        B   K   E    RBB    RCC    REE    ICS        MC     IES        ME    BF     BR
Q 1 N( 1- 3- 5) 0.005 0.001 0.001 1.00E-10 1.30 1.00E-10 1.00 200.0  5.0
Q 2 N( 7- 6- 8) 0.005 0.001 0.001 1.00E-10 1.30 1.00E-10 1.00 200.0  5.0
Q 3 N( 6- 4- 9) 0.005 0.001 0.001 1.00E-10 1.30 1.00E-10 1.00 200.0  5.0
Q 4 N( 4- 3- 2) 0.005 0.001 0.001 1.00E-10 1.30 1.00E-10 1.00 200.0  5.0
Q 5 N( 9- 2- 8) 0.005 0.001 0.001 1.00E-10 1.30 1.00E-10 1.00 200.0  5.0

E( 1)=   6.000     0(-)     3(+)
E( 2)=   6.000     8(-)     0(+)
```

Jednostki w kΩ, mA, V

Tablica 3

Wyniki analizy zintegrowanego stopnia wyjściowego

```
DC - ANALYSIS PROGRAM OPAL                          DATE 10/11/76
PROBLEM 6115
                OUTPUT STAGE NR 115
TEMP.=  25.00

POWER SUPPLY
  IE( 1)= 2.40365E 00    PE( 1)= 1.44219E 01
  IE( 2)= 4.21168E 00    PE( 2)= 2.52701E 01

  RESISTORS
              VOLTAGE          CURRENT          POWER

  R( 1)= 3.485012E-03     3.485012E-03     1.214531E-05
  R( 2)=-9.718392E-01    -9.718392E-01     9.444714E-01
  R( 3)= 5.412588E 00     8.327058E-01     4.507093E 00
  R( 4)= 4.215290E 00     7.025484E-01     2.961445E 00
  R( 5)= 3.830000E 00     1.276667E-01     4.889633E-01
  R( 6)= 6.401890E 00     1.280378E 00     8.196839E 00

TRANSISTORS
            UBC            UBE            IC             IE             IB
Q( 1) -6.0028E 00   5.8234E-01   6.9906E-01   7.0255E-01   3.4850E-03
Q( 2) -6.0995E-01   5.8656E-01   8.2383E-01   8.2795E-01   4.1181E-03
Q( 3) -4.3987E 00   5.9785E-01   1.2783E 00   1.2847E 00   6.3838E-03
Q( 4) -6.4015E 00   5.6951E-01   4.2421E-01   4.2632E-01   2.1101E-03
Q( 5) -4.4279E 00   5.9769E-01   1.2705E 00   1.2768E 00   6.3449E-03

 SMALL SIGNAL PARAMETERS:
            GMF            RDE            RDEH           UBEO
Q( 1)  2.7215E 01   3.6562E-02   7.3490E 00   5.5666E-01
Q( 2)  3.2074E 01   3.1022E-02   6.2355E 00   5.6088E-01
Q( 3)  4.9766E 01   1.9994E-02   4.0188E 00   5.7216E-01
Q( 4)  1.6514E 01   6.0255E-02   1.2111E 01   5.4383E-01
Q( 5)  4.9463E 01   2.0116E-02   4.0434F 00   5.7200E-01

DIODES
          VOLTAGE        CURRENT        POWER          RD             UO
D( 1)  5.8658E-01   8.2859E-01   4.8604E-01   3.0998E-02   5.6090E-01
D( 2)  5.9772E-01   1.2783E 00   7.6407E-01   2.0093E-02   5.7204E-01
```

Jednostki w V, mA, mW, mS

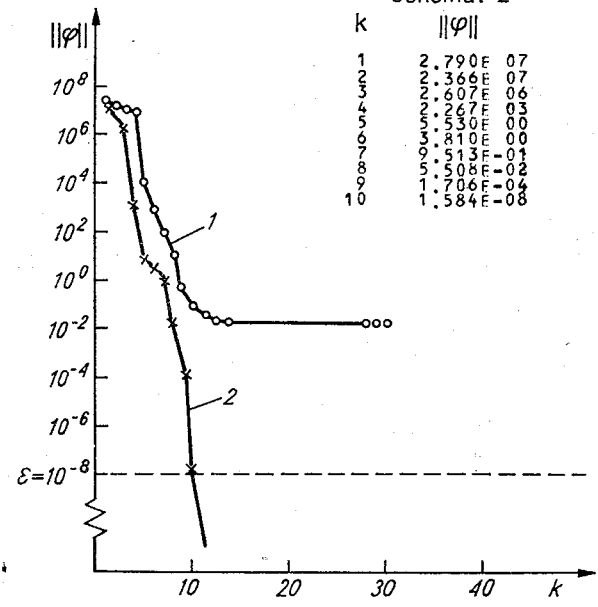
Tablica 4

Wykresy miary funkcji błędu w kolejnych krokach iteracyjnych podczas analizy zintegrowanego stopnia wyjściowego (tabl. 2) z zastosowaniem schematów 1 i 2

Schemat 1

k	$\|\varphi\|$
1	5.258E 07
2	4.664E 07
3	4.202E 07
4	3.697E 07
5	9.292E 03
6	1.169E 03
7	1.297E 02
8	1.087E 01
9	7.215E-01
10	1.661E-01
11	6.325E-02
12	5.337E-02
13	5.275E-02
14	5.100E-02
15	4.920E-02
16	4.849E-02
17	4.663E-02
18	4.406E-02
19	4.116E-02
20	4.004E-02
21	3.702E-02
22	3.337E-02
23	2.964E-02
24	2.607E-02
25	2.275E-02
26	2.206E-02
27	1.945E-02
28	1.584E-02
29	1.543E-02

MAX.NUMBER OF ITER.



Schemat 2

k	$\|\varphi\|$
1	2.790E 07
2	2.366E 07
3	2.607E 06
4	2.267E 03
5	5.530E 00
6	3.810E 00
7	9.513E-01
8	5.508E-02
9	1.706E-04
10	1.584E-08

wymagałoby dalszych kilkudziesięciu iteracji. Natomiast zastosowanie schematu 2 pozwoliło uzyskać żądaną dokładność rozwiązania $\varepsilon = 10^{-8}$ już w 10-tym kroku iteracyjnym.

Omawiany przykład i ilość iteracji z tabl. 1 prowadzą do wniosku, że schematy iteracyjne 1 i 2 mają prawie identyczną zbieżność (pozycje 3 i 4 w kolumnach 3 i 4 tabl. 1), jeżeli iteracje przebiegają według krzywej a — rys. 3 (w obu schematach zmniejszanie długości kroku iteracyjnego s). Schemat 2 daje wyraźne przyspieszenie (dzięki wydłużeniu kroku iteracyjnego $s > 1$) w przypadkach opisanych krzywą c — rys. 3.

6. PODSUMOWANIE

Charakterystyczne dla iteracyjnych metod rozwiązywania układów równań nieliniowych zjawiska wymienione w punktach a — f wstępu wyjaśniają trudności jakie napotykane są w poszukiwaniach uniwersalnej procedury numerycznej równie efektywnej w każdym przypadku analizowanego układu elektronicznego. Dodatkową trudnością w ocenie procedur numerycznych jest brak obiektywnego testu (tzn. odpowiedniego układu elektronicznego), który mógłby być wykorzystany jako kryterium porównań.

Z obliczonych przykładów (tabl. 1 i innych) wynika, że korzystnym rozwiązaniem jest wyposażenie programów analizy DC w przynajmniej kilka różnych procedur numerycznego rozwiązywania równań nieliniowych. Zaobserwowano, że np. schemat 1 zastosowany do analizy DC struktury wzmacniacza operacyjnego μA709 (30 równań nieliniowych) dopro-

wadził do rozwiązania, podczas gdy schemat 2 okazał się w tym przypadku nieskuteczny. Odwrotna sytuacja wystąpiła podczas analizy sieci wzmacniacza operacyjnego μA702, gdzie schematem 2 uzyskano rozwiązanie po 7-miu iteracjach, a schemat 1 doprowadził proces iteracyjny do punktu bez wyjścia.

Przedstawione schematy iteracyjne są niezależne od podanej tu jako szczególne zastosowanie analizy DC i mogą być również zastosowane w innych dziedzinach, np. w elektrotechnice lub modelowaniu pewnych procesów fizycznych na podstawie analogii z odpowiednimi sieciami elektrycznymi typu rezystancyjnego. W tych przypadkach funkcje $g(u) = I_N$ (10) układu równań (7) mogą być zastąpione odpowiednimi charakterystykami prądowo-napięciowymi nieliniowych dwójników, a macierze $\mathbf{A}'$ i $\mathbf{B}'$ będą odpowiadały pozostałej liniowej części sieci (tzw. liniowy rezystor n-otworowy), a wektor $\mathbf{E}$ odpowiedniemu wektorowi pobudzeń.

LITERATURA

1. F. H. Branin, *A Controlled-step Newton Method for Solving Nonlinear Equations*, Digest Rec. AMC-SIAM-IEEE Conf. Mathematical and Computer Aids to Design. Anaheim, Calif., Oct. 1969.
2. D. A. Calahan, *Computer-Aided Network Design*, Mc Graw-Hill, N.Y. 1972.
3. I. A. Cermak, D. B. Kirby, *Nonlinear Circuits and Statistical Design*, BSTJ, v. 50, nr 4, April 1971, ss. 1173—1195.
4. I. A. Cermak, *DC Solutions of Nonlinear State-Space Equations in Circuit Analysis*, IEEE Trans. Circuit Theory, v. 18, nr 3, March 1971, ss. 312—314.
5. B. P. Demidowicz, I. A. Maron. *Osnowy wyczislitielnoj matiematiki*, Nauka, Moskwa 1970.
6. M. Grobelny. *Projektowanie układów elektronicznych za mocą komputerów*, WKŁ, Warszawa 1973.
7. M. Grobelny, *Zarys stanu obecnego i perspektywy rozwoju automatyzacji projektowania układów elektronicznych*, Prace Nauk. Inst. Telekom. PWr, 1976, nr 23, materiały z konf. pt. „Automatyzacja projektowania układów elektronicznych".
8. W. J. Mc Calla, W. G. Haward, *BIAS-3 — A Program for the Nonlinear DC Analysis of Bipolar-Transistor Circuits*, IEEE J. of Solid-State Circuits, v. SC-6, nr 1, Feb. 1971, ss. 14—19.
9. A. Ralston. *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, Warszawa 1971.
10. H. Shichman, *Computation of DC Solutions for Bipolar Transistor Networks*, IEEE Trans. Circuit Theory, v. 16, nr 1, Nov. 1969, ss. 460—466.
11. B. Wolszczak, *On the bounds of DC solution for bipolar transistor networks*, komunikat D-24, Inst. Telekom. PWr, Wroław 1975.
12. B. Wolszczak, *Model tranzystora bipolarnego stosowany w programach analizy układów elektronicznych*, Elektronika, 7—8/72, ss. 309—312.
13. B. Wolszczak, *Uniwersalny model tranzystora bipolarnego stosowany w programach analiz układów elektronicznych*, Elektronika 7/73, ss. 306—308.
14. B. Wolszczak, K. Łuszczyński, *Program analizy stałoprądowej DCL2 — podręcznik użytkownika*, Inst. Telekom. PWr., raport D/5, Wrocław 1976.
15. B. Wolszczak, K. Łuszczyński, *Program analizy stałoprądowej OPAL — podręcznik użytkownika*, Inst. Telekom. P. Wr., raport I28/D-041/77, Wrocław 1977.
16. *Monolityczne układy scalone*, Naukowo-Produkcyjne Centrum Półprzewodników, Unitra — CEMI, Warszawa 1973.

B. WOLSZCZAK

EFFECTIVENESS OF THE MODIFIED NEWTON ITERATION METHODS APPLIED TO NONLINEAR DC ANALYSIS OF ELECTRONIC CIRCUITS

Summary

This paper describes two iterative schemes for solution of a set of nonlinear equations occuring in DC analysis of semiconductor electronic circuits. The evaluation of the effectiveness of these schemes was performed on the basis of the obtained experimental material from the computer-aided DC analysis of the various electronic circuits configurations.

B. WOLSZCZAK

EFFICACITÉ DES MÉTHODES MODIFIÉES ITÉRATIVES DE NEWTON DANS L'ANALYSE DU RÉGIME PERMANENT DES CIRCUITS ÉLECTRONIQUES

Résumé

Dans l'étude on a présenté deux schémas de résolution itérative des systèmes d'équations non linéaires rencontrées dans l'analyse du régime permanent des circuits électroniques semi-conducteurs. On a examiné l'efficasité de ces schémas en se basant sur les matériaux recueillis au cours des expériences, pendant l'analyse des différentes configurations des circuits électroniques, effectuée à l'aide d'un calculateur.

B. WOLSZCZAK

EFFEKTIVITÄT DER MODIFIZIERTEN ITERATIVEN NEWTON-METHODEN IN DER RECHNERGESTÜTZTEN GLEICHSPANNUNGSANALYSE ELEKTRISCHER NETZWERKE

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden zwei Algorithmen der iterativen Lösung nicht linearer Gleichungssysteme behandelt, die in der Gleichspannungsanalyse im elektronischen Halbleiternetz auftreten. Es wurde hier die Effektivität dieser Schemata einer Beurteilung unterzogen, u.zw. anhand des während der rechnergestützten Analyse verschiedenartiger Anordnungen von elektronischen Netzwerken gesammelten experimentellen Stoffes.

Б. ВОЛЬЩАК

ЭФФЕКТИВНОСТЬ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ НЮТОНА В АНАЛИЗЕ СТАТИЧЕСКОГО РЕЖИМА ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ

Резюме

Представлены две схемы итерационного решения системы нелинейных уравнений для анализа полупроводниковых электронных схем в области постоянного тока. Рассмотрена оценка эффективности итерационных схем на основе собранного экспериментального материала при анализе различных конфигураций электронных схем с помощью ЭЦВМ.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1978, 24, z. 2, ss. 265-281

621.372.6

Synteza N-wrotnika o wielokanałowej strukturze RC ze wzmacniaczami napięciowymi

ANDRZEJ CICHOCKI (WARSZAWA), STANISŁAW OSOWSKI (WARSZAWA)

Instytut Elektrotechniki Teoretycznej i Miernictwa Elektrycznego Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 13.1.1977

W pracy przedstawiono nową metodę syntezy N-wrotników w klasie układów aktywnych RC ze wzmacniaczami napięciowymi. Struktura układu jest wielokanałowa, w której kanały są niezależne od siebie a sprzężenia między nimi zachodzą poprzez układ aktywny. Metodę matematyczną syntezy stanowi rachunek macierzowy, oparty na własnościach kontynuant blokowych. Podano przykłady realizacji macierzy $\mathbf{Y}(s)$ N-wrotnika. Uzyskano wyrażenia do badania wrażliwości przedstawionej realizacji.

1. WSTĘP

Synteza N-wrotnika opisanego macierzą wymierną w dziedzinie zmiennej zespolonej s, w klasie układów aktywnych RC, zapoczątkowana została w roku 1961 przez Sandberga [13]. Sandberg udowodnił, że realizacja dowolnej wymiernej macierzy admitancji jest możliwa przy użyciu jedynie N źródeł sterowanych różnych typów oraz elementów pasywnych RC. Liczba użytych kondensatorów w jego technice realizacji jest bardzo duża. Dalsze prace w tej dziedzinie koncentrowały się w kilku kierunkach: minimalizacji liczby kondensatorów, realizacji przy wykorzystaniu wzmacniaczy operacyjnych z użyciem możliwie najmiejszej ich liczby, poszukiwaniu układów szczególnie wygodnych w technice scalonej, możliwości uwzględnienia nieidealności wzmacniaczy operacyjnych oraz minimalizacji wrażliwości na zmiany parametrów układu.

Mann i Pike [10] w 1968 r. udowodnili, że minimalna liczba kondensatorów jest równa stopniowi Macmillana macierzy. Prace, które pojawiły się w dalszych latach dotyczyły w większości bądź to poszukiwania układów z możliwie najmniejszą liczbą wzmacniaczy operacyjnych [5, 7, 12, 16], bądź też realizacji z minimalną liczbą kondensatorów [1, 2, 3, 9]. Prace Stamankovica [15] i Ramamoorthy, Thulsiramana, Murti [7] dotyczą minimalizacji liczby elementów aktywnych (przy zachowaniu kanonicznej liczby kondensatorów) w oparciu o przekształcenia macierzowe. W pracy Goldmana, Ghausiego [8] uwzględniono nieidealność wzmacniaczy a także założono z góry wartości pewnych elementów RC.

Podstawową trudnością przy realizacji N-wrotników według przedstawionych realizacji jest skomplikowana procedura syntezy, wymagająca wielu żmudnych przekształceń macierzowych, trudnych do zaprogramowania na maszynę cyfrową. Pewną próbą ominięcia

tych trudności jest zastosowanie metody zmiennych stanu [1, 2], chociaż i w tym przypadku przejście z postaci operatorowej na postać zmiennych stanu jest pracochłonne.

W pracy przedstawimy całkowicie odmienne podejście do realizacji N-wrotników opisanych za pomocą macierzy transmitancji operatorowych, wymagające jedynie podstawowych operacji macierzowych, takich jak dodawanie i mnożenie. Zaproponowany układ elektryczny posiada strukturę wielokanałową, w której część pasywna stowarzyszona przyjmowana jest w sposób dowolny uzależniony od techniki realizacji, natomiast część aktywna jest obliczana na podstawie zadanej macierzy N-wrotnika.

Układ przyjęty w pracy może być szczególnie korzystny dla realizacji w technice scalonej, ponieważ posiada możliwość dowolnego dobierania wartości podstawowych elementów pasywnych a także ze względu na strukturę kanałową, w której kanały są od siebie niezależne. Liczba użytych kondensatorów jest mała i w większości przypadków kanoniczna, a liczba wzmacniaczy operacyjnych jest równa co najwyżej $2N$.

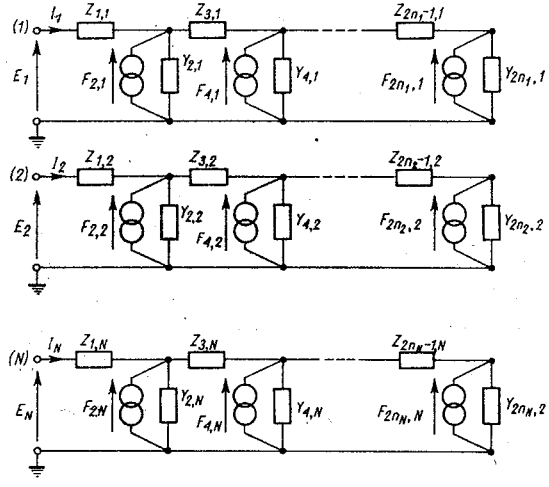
2. STRUKTURA UKŁADU

Rozważmy realizację macierzy admitancyjnej $\mathbf{Y}(s)$ N-wrotnika danej w postaci

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{D}(s)]^{-1}[\mathbf{N}(s)] = \begin{bmatrix} \frac{N_{11}}{D_1} & \frac{N_{12}}{D_1} & \cdots & \frac{N_{1N}}{D_1} \\ \frac{N_{21}}{D_2} & \frac{N_{22}}{D_2} & \cdots & \frac{N_{2N}}{D_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{N_{1N}}{D_n} & \frac{N_{2N}}{D_n} & \cdots & \frac{N_{NN}}{D_n} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

gdzie N_{ik}, D_k $(i, k = 1, 2, \ldots, N)$ są dowolnymi wielomianami zmiennej zespolonej s.

Podstawowy schemat obwodu elektrycznego przedstawiono na rys. 1. Układ składa się z N kanałów niezależnych od siebie a powiązanych jedynie za pośrednictwem odpo-



Rys. 1. Schemat realizacji N-wrotnika w układzie z prądowymi źródłami sterowanymi

wiednich źródeł sterowanych. Każdy kanał posiada strukturę drabinkowego układu aktywnego ze źródłami sterowanymi.

Wszystkie źródła oraz bramy wejściowe i wyjściowe mają wspólny punkt odniesienia. Każdy k-ty kanał ($k = 1, 2, \ldots, N$) składa się z n_k+1 sekcji kształtu gamma, gdzie n_k jest równe maksymalnemu stopniowi wielomianu licznika lub mianownika w k-tym wierszu macierzy $\mathbf{Y}(s)$;

$$n_k = \max\{D_k^0, N_{k1}^0, N_{k2}^0, \ldots, N_{kN}^0\}. \tag{2}$$

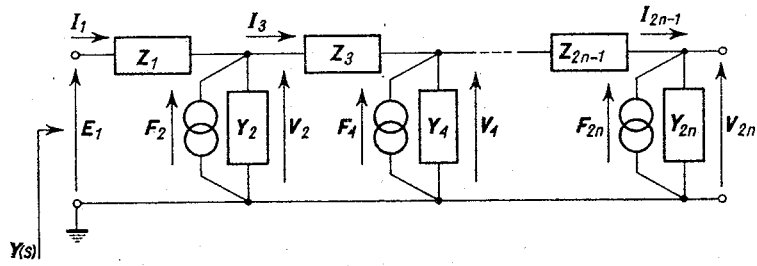
Przedstawiona powyżej struktura układu pozwala na realizację dowolnej macierzy wymiernej typu immitancyjnego lub transmisyjnego opisującej N-wrotnik. W pracy zajmiemy się bliżej realizacją macierzy admitancyjnej $\mathbf{Y}(s)$.

Niech wszystkie źródła sterowane występujące w układzie będą sterowane napięciami E_p oraz prądami I_p bram wejściowych ($p = 1, 2, \ldots, N$). Dla realizacji macierzy $\mathbf{Y}(s)$ wystarczy by źródła sterowane opisane były następującą zależnością

$$F_{2i,k} = b_{2i,k} I_k + \sum_{p=1}^{n} a_{2i,k}^{(p)} E_p, \tag{3}$$

$$\text{dla } i = 1, 2, \ldots, n_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

gdzie $a_{2i,k}^{(p)}$ oraz $b_{2i,k}$ są liczbami rzeczywistymi, określającymi współczynniki sterowania źródeł prądowych.



Rys. 2. Uogólniony układ drabinkowy aktywny

Zaproponowany układ może być przedstawiony w symbolicznej formie za pomocą uogólnionego układu drabinkowego (rys. 2) opisanego przez następujące zależności macierzowe

$$\mathbf{Z}_{2i-1} = \operatorname{diag}[Z_{2i-1,1}, Z_{2i-1,2}, \ldots, Z_{2i-1,N}], \tag{4}$$

$$\mathbf{Y}_{2i} = \operatorname{diag}[Y_{2i,1}, Y_{2i,2}, \ldots, Y_{2i,N}], \tag{5}$$

$$\mathbf{F}_{2i} = [F_{2i,1}, F_{2i,2}, \ldots, F_{2i,N}]^T, \tag{6}$$

$$\mathbf{I}_1 = [I_1, I_2, \ldots, I_N]^T, \tag{7}$$

$$\mathbf{E}_1 = [E_1, E_2, \ldots, E_N]^T, \tag{8}$$

dla $i = 1, 2, \ldots, n$, gdzie $n = \max[n_1, n_2, \ldots, n_n]+1$, natomiast T oznacza transpozycję macierzy.

Z równań (3) i (6) wynika natychmiast, że

$$\mathbf{F}_{2i} = \mathbf{a}_{2i}\mathbf{E}_1 + \mathbf{b}_{2i}\mathbf{I}_1, \tag{9}$$

gdzie

$$\mathbf{b}_{2i} = \operatorname{diag}[b_{2i,1}, b_{2i,2}, \ldots, b_{2i,N}],$$

$$\mathbf{a}_{2i} = \begin{bmatrix} a_{2i,1}^{(1)} & a_{2i,1}^{(2)} & \ldots & a_{2i,1}^{(N)} \\ a_{2i,2}^{(1)} & a_{2i,2}^{(2)} & \ldots & a_{2i,2}^{(N)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2i,N}^{(1)} & a_{2i,N}^{(2)} & \ldots & a_{2i,N}^{(N)} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Stosując prawa Kirchhoffa do uogólnionego układu drabinkowego przedstawionego na rys. 2, otrzymuje się następujące równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ 0 \\ \mathbf{F}_4 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{F}_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{1} & & & & & \\ -\mathbf{1} & \mathbf{Y}_2 & \mathbf{1} & & & & \\ & -\mathbf{1} & \mathbf{Z}_3 & \mathbf{1} & & & \\ & & -\mathbf{1} & \mathbf{Y}_4 & \mathbf{1} & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & -\mathbf{1} & \mathbf{Z}_{2n-1} & \mathbf{1} \\ & & & & & -\mathbf{1} & \mathbf{Y}_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{V}_4 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{2n-1} \\ \mathbf{V}_{2n} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Rozwiązanie powyższego równania ze względu na wektor $\mathbf{I}_1$ uzyskuje się w oparciu o graf macierzowy Coatesa i kontynuanty blokowe [6]

$$\mathbf{I}_1 = \{\mathbf{Y}_{2n} \div \mathbf{Z}_1\}^{-1} \Big[\{\mathbf{Y}_{2n} \div \mathbf{Y}_2\}\mathbf{E}_1 - \sum_{i=1}^{n} [\{\mathbf{Y}_{2n} \div \mathbf{Z}_{2i+1}\}\mathbf{F}_{2i}] \Big], \tag{12}$$

gdzie wyrażenia typu $\{\mathbf{Y}_{2n} \div \mathbf{Z}_{2i+1}\}$, $\{\mathbf{Y}_{2n} \div \mathbf{Y}_2\}$ oznaczają skrócony zapis kontynuant blokowych

$$\{\mathbf{Y}_{2n} \div \mathbf{Z}_{2i+1}\} = \{\overset{\mathbf{1}}{\mathbf{Y}_{2n}}, \overset{\mathbf{1}}{\mathbf{Z}_{2n-1}}, \mathbf{Y}_{2n-2}, \ldots, \overset{\mathbf{1}}{\mathbf{Y}_{2n+2}}, \mathbf{Z}_{2i+1}\}. \tag{13}$$

Kontynuanty blokowe w ogólności wyznacza się według następującej reguły rekurencyjnej [6]

$$\{\mathbf{M}_n \div \mathbf{M}_k\} = \{\mathbf{M}_n \div \mathbf{M}_{k+1}\}\mathbf{M}_k + \{\mathbf{M}_n \div \mathbf{M}_{k+2}\}\mathbf{L}_k, \tag{14}$$

dla $k = n, n-1, \ldots, 0$, przy $\{\mathbf{M}_n \div \mathbf{M}_{n+1}\} = \mathbf{1}$, $\{\mathbf{M}_n \div \mathbf{M}_{n+2}\} = \mathbf{0}$, przy czym konytuanta blokowa $\{\mathbf{M}_n \div \mathbf{M}_k\}$ składa się z następujących składników macierzowych

$$\{\mathbf{M}_n \div \mathbf{M}_k\} = \{\overset{\mathbf{L}_{n-1}}{\mathbf{M}_n}, \mathbf{M}_{n-1}, \ldots, \overset{\mathbf{L}_k}{\mathbf{M}_{k+1}}, \mathbf{M}_k\}. \tag{15}$$

Macierze $\mathbf{M}_i$, $\mathbf{L}_i$ są macierzami kwadratowymi stopnia N.

Podstawiając wyrażenie (9) do (12) otrzymuje się

$$\Big[\{\mathbf{Y}_{2n} \div \mathbf{Z}_1\} + \sum_{i=1}^{n} \{\mathbf{Y}_{2n} \div \mathbf{Z}_{2i+1}\}\mathbf{b}_{2i}\Big]\mathbf{I}_1 = \Big[\{\mathbf{Y}_{2n} \div \mathbf{Y}_2\} - \sum_{i=1}^{n} \{\mathbf{Y}_{2n} \div \mathbf{Z}_{2i+1}\}\mathbf{a}_{2i}\Big]\mathbf{E}_1. \tag{16}$$

Ze wzoru (16) jest widoczne, że

$$\mathbf{Y}(s) = \Big[\{\mathbf{Y}_{2n} \div \mathbf{Z}_1\} + \sum_{i=1}^{n} \{\mathbf{Y}_{2n} \div \mathbf{Z}_{2i+1}\}\mathbf{b}_{2i}\Big]^{-1} \Big[\{\mathbf{Y}_{2n} \div \mathbf{Y}_2\} - \sum_{i=1}^{n} \{\mathbf{Y}_{2n} \div \mathbf{Z}_{2i+1}\}\mathbf{a}_{2i}\Big]. \tag{17}$$

3. OGÓLNA PROCEDURA SYNTEZY

W procedurze syntezy zakłada się, że wartości elementów układu pasywnego stowarzyszonego przyjmowane są dowolnie, natomiast układ aktywny (współczynniki źródeł sterowanych) dobierany jest w zależności od zadanej macierzy $\mathbf{Y}(s)$. Przyjmujemy że, układ pasywny stowarzyszony ma strukturę dolnoprzepustową RC, tj.

$$\mathbf{Z}_{2i-1} = \operatorname{diag}[R_{2i-1,1} R_{2i-1,2}, \ldots, R_{2i-1,N}] \tag{18}$$

dla $i = 1, 2, \ldots, n$, natomiast

$$\mathbf{Y}_{2i} = \mathbf{G}_{2i} + s\mathbf{C}_{2i} = \operatorname{diag}[G_{2i,1} + sC_{2i,1}, G_{2i,2} + sC_{2i,2}, \ldots, G_{2i,n} + sC_{2i,N}] \tag{19}$$

dla $i = 2, 3, \ldots n$, natomiast

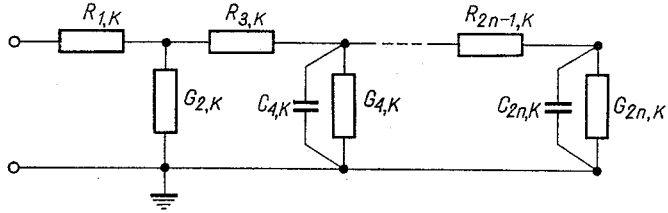
$$\mathbf{Y}_2 = \mathbf{G}_2 = \operatorname{diag}[G_{2,1}, G_{2,2}, \ldots, G_{2,N}] \tag{20}$$

przy założeniu, że

$$C_{2,k} = 0, \; R_{2i-1,k} = 0, \; C_{2i,k} = 0, \; G_{2i,k} = 0$$

dla $i > n_k$ i $k = 1, 2, \ldots, N$.

Schemat układu drabinkowego stowarzyszonego z układem aktywnym dla k-tego kanału przedstawia rys. 3. Należy zauważyć, że wartości elementów układu pasywnego stowarzyszonego mogą przyjmować dowolne wartości rzeczywiste. W szczególności wszystkie pojemności mogą być jednakowe, jak również rezystancje mogą przyjmować równe wartości, co jest pożądane np. w realizacji scalonej.



Rys. 3. Układ pasywny RC stowarzyszony z układem aktywnym K-tego kanału

Ze względu na to, że wszystkie macierze $\mathbf{Y}_{2i}$, $\mathbf{Z}_{2i-1}$ są ustalone, można policzyć wszystkie kontynuanty blokowe konieczne w syntezie macierzy admitancyjnej $\mathbf{Y}(s)$ z wykorzystaniem wzorów rekurencyjnych (14). Po obliczeniu wszystkich kontynuant blokowych przez porównanie wzorów (17) i (1) obliczyć można macierze $\mathbf{a}_{2i}$ oraz $\mathbf{b}_{2i}$ odpowiadające źródłom sterowanym. Mianowicie

$$\mathbf{D}(s) = \boldsymbol{\delta}\Big[\{\mathbf{Y}_{2n} \div \mathbf{Z}_1\} + \sum_{i=1}^{n} \{\mathbf{Y}_{2n} \div \mathbf{Z}_{2i+1}\}\mathbf{b}_{2i}\Big], \tag{21}$$

$$\mathbf{N}(s) = \boldsymbol{\delta}\Big[\{\mathbf{Y}_{2n} \div \mathbf{Y}_2\} - \sum_{i=1}^{n} \{\mathbf{Y}_{2n} \div \mathbf{Z}_{2i+1}\}\mathbf{a}_{2i}\Big]. \tag{22}$$

W równaniach (21) i (22) $\boldsymbol{\delta}$ oznacza macierz skalującą diagonalną o elementach rzeczywistych różnych od zera wybieranych w sposób dowolny

$$\boldsymbol{\delta} = \operatorname{diag}[\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N]. \tag{23}$$

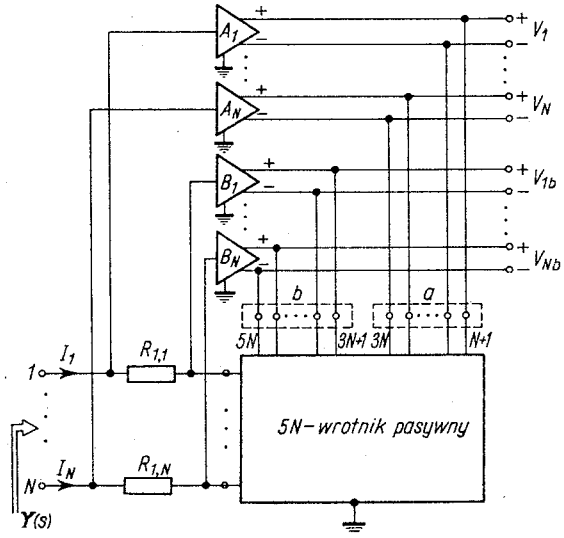
Należy podkreślić, że macierz licznika $\mathbf{N}(s)$ i mianownika $\mathbf{D}(s)$ są realizowane w sposób niezależny od siebie. Nie wymaga się tu żadnego kasowania biegunów oraz nie ma żadnych ograniczeń co do położenia biegunów i zer, jakkolwiek dla zapewnienia stabilności bieguny muszą leżeć w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s.

W ogólności procedurę syntezy można podzielić na trzy etapy:

1. Wybór wartości kondensatorów i rezystorów pasywnego układu stowarzyszonego,
2. obliczenie wszystkich potrzebnych kontynuant blokowych przy wykorzystaniu zależności rekurencyjnych (14),
3. obliczenie macierzy współczynników źródeł sterowanych $\mathbf{a}_{2i}$ oraz $\mathbf{b}_{2i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ przez porównanie odpowiednich potęg zmiennej zespolonej s w równaniach (21) i (22).

4. REALIZACJA PRAKTYCZNA ŹRÓDEŁ STEROWANYCH PRZY WYKORZYSTANIU WZMACNIACZY NAPIĘCIOWYCH O SKOŃCZONYM WZMOCNIENIU

Wszystkie źródła sterowane opisane przez macierze $\mathbf{a}_{2i}$ i $\mathbf{b}_{2i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ realizowane są przy użyciu co najwyżej $2N$ wzmacniaczy napięciowych o różnicowych wyjściach. Układ pasywny w połączeniu z częścią aktywną tworzy $5N$-wrotnik (rys. 4). Część aktywną tworzy N wzmacniaczy napięciowych o wzmocnieniach A_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$



Rys. 4. Układ $5N$-wrotnika

wzmacniających napięcia wejściowe poszczególnych bram układu oraz N wzmacniaczy napięciowych o wzmocnieniach B_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ wzmacniających napięcia panujące na admitancjach $Y_{2,k}$ poszczególnych kanałów. Napięcia panujące na wyjściach wzmacniaczy A_k i B_k mogą być więc opisane za pomocą równań macierzowych.

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{A}\mathbf{E}_1, \tag{24}$$

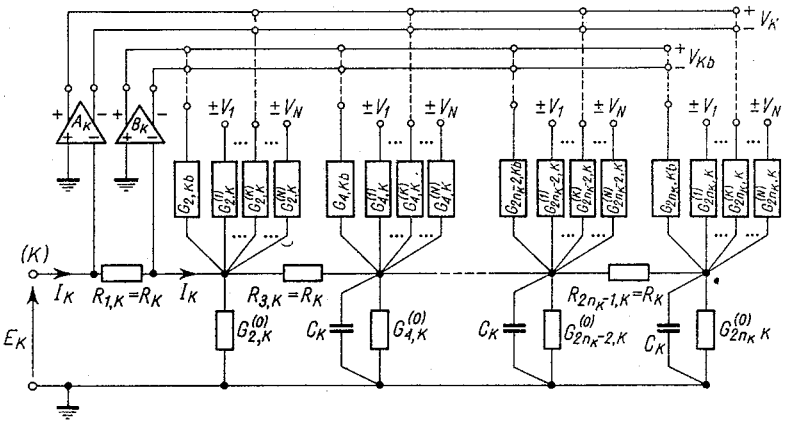
$$\mathbf{V}_B = \mathbf{B}\mathbf{V}_2 = \mathbf{B}(\mathbf{E}_1 - \mathbf{R}_1\mathbf{I}_1), \tag{25}$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \operatorname{diag}[A_1, A_2, \ldots, A_N],$$
$$\mathbf{B} = \operatorname{diag}[B_1, B_2, \ldots, B_N].$$

Wyjścia tych wzmacniaczy połączone są poprzez odpowiednie konduktancje $G_{2i,K}$, $G_{2i,Kb}$ z układem pasywnym RC (końcówki a i b $5N$-wrotnika).

Struktura połączeń K-tego kanału układu (realizującego K-ty wiersz N-wrotnika) przedstawiona jest na rys. 5. Zakładając, że wszystkie wzmacniacze mają nieskończoną impedancję wejściową, impedancję wyjściową równą zeru i skończone wzmocnienia A_K i B_K łatwo jest udowodnić, że układ z rys. 5 jest równoważny K-temu układowi drabinkowemu ze źródłami sterowanymi, przedstawionemu na rys. 1.



Rys. 5. Realizacja K-tego kanału z wykorzystaniem wzmacniaczy napięciowych

Odpowiednie źródła sterowane tworzone są poprzez konduktancje $G^{(j)}_{2i,K}$ oraz $G_{2i,Kb}$ ($j, K = 1, 2, \ldots, N$, $\quad i = 1, 2, \ldots, n_k$) w połączeniu ze wzmacniaczami napięciowymi A_j i B_K. Z analizy obwodu przedstawionego na rys. 5 wynika, że macierz źródeł sterowanych a_{2i} oraz b_{2i} (po uwzględnieniu zależności (12) (24) i (25)) opisać można następującymi zależnościami

$$\mathbf{b}_{2i} = -\mathbf{R}_1\mathbf{B}\mathbf{G}_{2i,b} \equiv -\mathbf{R}_1 \begin{bmatrix} \pm B_1 & & \\ & \pm B_2 & \\ & & \ddots \\ & & \pm B_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{2i,1b} & & \\ & G_{2i,2b} & \\ & & \ddots \\ & & G_{2i,Nb} \end{bmatrix}, \tag{26}$$

gdzie: $\mathbf{R}_1 = \operatorname{diag}[R_{1,1}, R_{1,2}, \ldots, R_{1,N}]$,

$$\mathbf{a}_{2i} = \mathbf{A}\mathbf{G}_{2i,a} + \mathbf{B}\mathbf{G}_{2i,b} = \begin{bmatrix} \pm A_1 & & \\ & \pm A_2 & \\ & & \ddots \\ & & \pm A_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G^{(1)}_{2i,1} & G^{(2)}_{2i,1} & \ldots & G^{(N)}_{2i,1} \\ G^{(1)}_{2i,2} & G^{(2)}_{2i,2} & \ldots & G^{(N)}_{2i,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ G^{(1)}_{2i,N} & G^{(2)}_{2i,N} & \ldots & G^{(N)}_{2i,N} \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} \pm B_1 & & \\ & \pm B_2 & \\ & & \ddots \\ & & \pm B_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{2i,1b} & & \\ & G_{2i,2b} & \\ & & \ddots \\ & & G_{2i,Nb} \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Dla określenia wartości konduktancji oraz wzmocnień wzmacniaczy wygodnie jest posłużyć się macierzami pomocniczymi $\mathbf{Q}_{2i,b}$ oraz $\mathbf{Q}_{2i,a}$

$$\mathbf{Q}_{2i,b} = -\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{b}_{2i} = \mathbf{B}\mathbf{G}_{2i,b}, \tag{28}$$

$$\mathbf{Q}_{2i,a} = \mathbf{a}_{2i} - \mathbf{Q}_{2i,b} = \mathbf{A}\mathbf{G}_{2i,a}. \tag{29}$$

Zależność (28) pozwala dokonać dekompozycji macierzy na iloczyn dwu macierzy: **B** oraz $\mathbf{G}_{2i,b}$. Zależność (29) pozwala wyznaczyć macierz **A** $\mathbf{G}_{2i,a}$ a następnie rozłożyć ją na macierz diagonalną **A** oraz macierz $\mathbf{G}_{2i,a}$. Przy dekompozycji odpowiednich macierzy należy tak wybrać wzmocnienia wzmacniaczy, aby otrzymane w wyniku wartości konduktancji schodzących się w poszczególnych węzłach układu

$$G_{2i,K}^{(j)},\ G_{2i,Kb} \quad (j, K = 1, 2, \ldots, N,\ i = 1, 2, \ldots, n_K)$$

w sumie nie przekraczały założonej na wstępie wartości $G_{2i,k}$, czyli aby spełniony był warunek

$$G_{2i,Kb} + \sum_{j=1}^{N} G_{2i,K}^{(j)} \leqslant G_{2i,K}. \tag{30}$$

Warunek ten zawsze można spełnić przez odpowiedni wybór wzmocnień wzmacniaczy A_K i B_K.

Wzmacniacze o wyjściu różnicowym (wzmocnienia $\pm A_K$, $\pm B_K$) konieczne są dla realizacji dodatnich i ujemnych wartości elementów macierzy $\mathbf{Q}_{2i,a}$ oraz $\mathbf{Q}_{2i,b}$. Przy dodatnich wartościach elementów macierzy $\mathbf{Q}_{2i,a}$ i $\mathbf{Q}_{2i,b}$ odpowiednie konduktancje połączone są z napięciami $+V_K$, $+V_{K,b}$, a przy ujemnych znakach odpowiednio z napięciami $-V_K$, $-V_{Kb}$. W ostatnim etapie realizacji oblicza się wartości konduktancji $G_{2i,K}^{(0)}$ korzystając z zależności

$$G_{2i,K}^{(0)} = G_{2i,K} - G_{2i,Kb} - \sum_{j=1}^{N} G_{2i,K}^{(j)}. \tag{31}$$

Przykład 1

Rozważmy realizację macierzy kwadratowej $\mathbf{Y}(s)$ o postaci

$$\mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2s+1 & s \\ s+0{,}5 & 2s-1 \end{bmatrix},$$

rozważanej przez Evena [7] oraz Bickarta i Melvina [2] jako ilustracja ich metody syntezy.

1. Z danych widoczne jest, że

$$n_1 = n_2 = 1,\ n = 2,\ N = 2.$$

2. Przyjmujemy

$$C_{2,1} = C_{2,2} = 0, \quad C_{4,1} = C_{4,2} = \frac{5}{3}, \quad R_{2i-1,K} = 1, \quad G_{2i,K} = 1 \ (i, K = 1, 2).$$

Stąd mamy

$$\mathbf{Y}_4 = \operatorname{diag}\left[1 + \frac{5}{3}s,\ 1 + \frac{5}{3}s\right], \quad \mathbf{Z}_3 = \operatorname{diag}[1, 1],$$

$$\mathbf{Y}_2 = \operatorname{diag}[1, 1], \quad \mathbf{Z}_1 = \operatorname{diag}[1, 1].$$

3. Odpowiednie kontynuanty macierzowe przyjmują postać

$$\{\mathbf{Y}_4 \div \mathbf{Z}_3\} = \operatorname{diag}\left[\frac{5}{3}s+2,\ \frac{5}{3}s+2\right],$$

$$\{\mathbf{Y}_4 \div \mathbf{Y}_2\} = \operatorname{diag}\left[\frac{10}{3}s+3,\ \frac{10}{3}s+3\right],$$

$$\{\mathbf{Y}_4 \div \mathbf{Z}_1\} = \operatorname{diag}[5s+5,\ 5s+5].$$

4. Porównując potęgi zmiennej zespolonej s w macierzy mianownika otrzymujemy

$$\mathbf{D}(s) = \boldsymbol{\delta}[\{\mathbf{Y}_4 \div \mathbf{Z}_1\} + \{\mathbf{Y}_4 \div \mathbf{Z}_3\}\mathbf{b}_2 + b_4].$$

Przyjmujemy $\boldsymbol{\delta} = \operatorname{diag}\left[\frac{1}{5},\ \frac{1}{5}\right]$, skąd wynika

$$\operatorname{diag}[s+1,\ s+1] = \frac{1}{5}\left[(5s+5)\mathbf{1} + \left(\frac{5}{3}s+2\right)\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_4\right];$$

stąd

$$\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podobnie dla macierzy licznika otrzymujemy

$$\mathbf{N}(s) = \boldsymbol{\delta}[\{\mathbf{Y}_4 \div \mathbf{Y}_2\} - \{\mathbf{Y}_4 \div \mathbf{Z}_3\}\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_4],$$

$$\begin{bmatrix} 2s+1 & s \\ s+0{,}5 & 2s-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} \frac{10}{3}s+3 & \\ & \frac{10}{3}s+3 \end{bmatrix} - \left(\frac{5}{3}s+2\right)\begin{bmatrix} a_{21}^{(1)} & a_{21}^{(2)} \\ a_{22}^{(1)} & a_{22}^{(2)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{41}^{(1)} & a_{41}^{(2)} \\ a_{42}^{(1)} & a_{42}^{(2)} \end{bmatrix}\right).$$

Stąd

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 3{,}5 & 16 \end{bmatrix}.$$

Ze wzorów (28) i (29) widoczne jest, że

$$\mathbf{Q}_{2b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Q}_{4b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

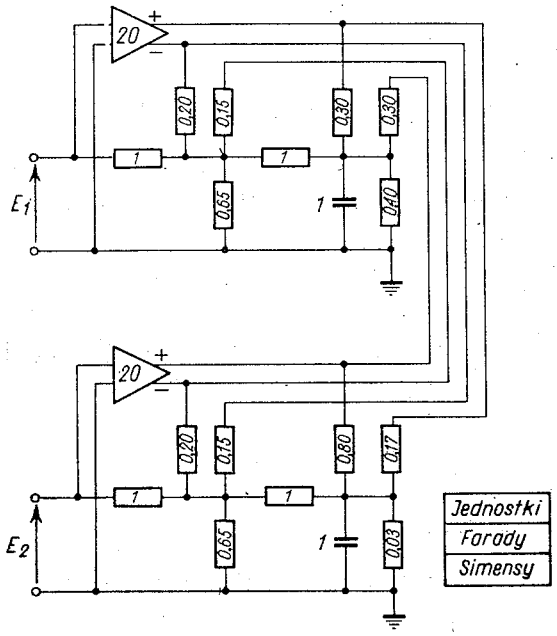
$$\mathbf{Q}_{2a} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{4a} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 3{,}5 & 16 \end{bmatrix}.$$

Przyjmujemy, że wszystkie wzmacniacze mają wzmocnienie $A_i = 20$ $(i = 1, 2)$. Stąd macierze $\mathbf{G}_{2i,a}$ są równe

$$\mathbf{G}_{2a} = \begin{bmatrix} 0{,}20 & 0{,}15 \\ 0{,}15 & 0{,}20 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_{4a} = \begin{bmatrix} 0{,}30 & 0{,}30 \\ 0{,}17 & 0{,}80 \end{bmatrix}.$$

Ostateczny schemat obwodu przedstawia rys. 6. Należy zauważyć, że do realizacji układu wymaga się dwu uziemionych kondensatorów o równych wartościach oraz 2 wzmacniaczy z wyjściem symetrycznym w porównaniu z 15 kondensatorami i 4 wzmacnia-

czami potrzebnymi w realizacji Sandberga, 4 kondensatorami i 3 wzmacniaczami użytymi przez Evena [7] oraz 2 kondensatorami i 4 wzmacniaczami koniecznymi w realizacji Bickarta, Melvina [2].



Rys. 6. Realizacja układu z przykładu 1

Przykład 2

Dokonać syntezy macierzy admitancyjnej:

$$\mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} s^2+0{,}1s+1 & 0 \\ 0 & s^3+3{,}1s^2+1{,}3s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s-0{,}5 & 1 \\ 0{,}2s^3 & s^2-s+1 \end{bmatrix}.$$

1. Określamy liczbę kanałów i liczbę sekcji w poszczególnych kanałach:

$$N = 2, \quad n_1 = 2, \quad n_2 = 3, \quad n = 4.$$

2. Przyjmujemy

$C_{2,1} = C_{2,2} = 0, \quad C_{2i,K} = 1,$

$G_{2i,K} = 1, \quad R_{2i-1,K} = 1,$

dla $K = 1, 2, \quad i = 1, 2, \ldots, n_K.$

Stąd mamy

$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_5 = \text{diag } [1, 1],$

$\mathbf{Y}_2 = \text{diag } [1, 1],$

$\mathbf{Y}_4 = \mathbf{Y}_6 = \text{diag } [s+1, s+1],$

$\mathbf{Z}_7 = \text{diag } [0, 1],$

$\mathbf{Y}_8 = \text{diag } [0, s+1].$

3. Obliczamy wartości kontynuant macierzowych na podstawie zależności rekurencyjnej (14)

$$\{\mathbf{Y}_8 \div \mathbf{Z}_7\} = \begin{bmatrix} 0 & \\ & s+2 \end{bmatrix}, \quad \{\mathbf{Y}_8 \div \mathbf{Z}_5\} = \begin{bmatrix} s+2 & \\ & s^2+5s+5 \end{bmatrix},$$

$$\{\mathbf{Y}_8 \div \mathbf{Z}_3\} = \begin{bmatrix} s^2+5s+5 & \\ & s^3+8s^2+19s+13 \end{bmatrix},$$

$$\{\mathbf{Y}_8 \div \mathbf{Y}_2\} = \begin{bmatrix} 2s^2+9s+8 & \\ & 2s^3+15s^2+33s+21 \end{bmatrix},$$

$$\{\mathbf{Y}_8 \div \mathbf{Z}_1\} = \begin{bmatrix} 3s^2+14s+13 & \\ & 3s^3+23s^2+52s+34 \end{bmatrix}.$$

4. Na podstawie wzoru (21) otrzymujemy

$$\mathbf{D}(s) = \boldsymbol{\delta}[\{\mathbf{Y}_8 \div \mathbf{Z}_1\} + \{\mathbf{Y}_8 \div \mathbf{Z}_3\}\ \mathbf{b}_2 + \{\mathbf{Y}_8 \div \mathbf{Z}_5\}\ \mathbf{b}_4 + \{\mathbf{Y}_8 \div \mathbf{Z}_7\}\ \mathbf{b}_6 + \mathbf{b}_8].$$

Załóżmy, że $\boldsymbol{\delta} = \text{diag}\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$. Przyrównując współczynniki przy kolejnych potęgach zmiennej zespolonej s otrzymujemy

$\mathbf{b}_2 = \text{diag}[0\ 0]$, $\mathbf{b}_4 = \text{diag}[-13{,}7\ \ -13{,}7]$,

$\mathbf{b}_6 = \text{diag}[17{,}4\ \ 20{,}4]$, $\mathbf{b}_8 = \text{diag}[0\ \ 2{,}7]$.

Podobnie na podstawie wzoru (22) otrzymamy równanie macierzowe dla licznika

$$\mathbf{N}(s) = \boldsymbol{\delta}[\{\mathbf{Y}_8 \div \mathbf{Y}_2\} - \{\mathbf{Y}_8 \div \mathbf{Z}_3\}\mathbf{a}_2 - \{\mathbf{Y}_8 \div \mathbf{Z}_5\}\mathbf{a}_4 - \{\mathbf{Y}_8 \div \mathbf{Z}_7\}\mathbf{a}_6 - \mathbf{a}_8].$$

Stąd

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -0{,}6 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 4{,}8 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_6 = \begin{bmatrix} 7{,}5 & -3 \\ -12{,}6 & 18 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 9 & -24 \end{bmatrix}.$$

5. Na podstawie wzorów (28) i (29) określamy macierze $\mathbf{Q}_{2i,b}$ oraz $\mathbf{Q}_{2i,a}$

$$\mathbf{Q}_{2i,b} = -\mathbf{b}_{2i}$$

dla $i = 1, 2, 3, 4$,

$$\mathbf{Q}_{2,a} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -0{,}6 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Q}_{4,a} = \begin{bmatrix} -17{,}7 & 0 \\ 4{,}8 & -17{,}7 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{6,a} = \begin{bmatrix} 24{,}9 & -3 \\ -12{,}6 & 38{,}4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{8,a} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 9 & -21{,}3 \end{bmatrix}.$$

6. Przyjmujemy, że wzmacniacze mają następujące wzmocnienia

$\mathbf{B} = \text{diag}\ [25\ \ 50]$, $\mathbf{A} = \text{diag}\ [100,\ \ 100]$.

Stąd na podstawie zależności (28) i (29) otrzymamy

$$\mathbf{G}_{2,b} = \text{diag}[G_{2,1b},\ G_{2,2b}] = \text{diag}[0, 0],$$

$$\mathbf{G}_{4,b} = \text{diag}[G_{4,1b},\ G_{4,2b}] = \text{diag}[0{,}548,\ 0{,}274],$$

$$\mathbf{G}_{6,b} = \text{diag}[G_{6,1b},\ G_{6,2b}] = \text{diag}[0{,}696,\ 0{,}408],$$

$$\mathbf{G}_{8,b} = \text{diag}[G_{8,1b},\ G_{8,2b}] = \text{diag}[0,\ 0{,}054],$$

$$\mathbf{G}_{2,a} = \begin{bmatrix} G_{2,1}^{(1)} & G_{2,1}^{(2)} \\ G_{2,2}^{(1)} & G_{2,2}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}02 & 0 \\ 0{,}006 & 0{,}02 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_{4,a} = \begin{bmatrix} G_{4,1}^{(1)} & G_{4,1}^{(2)} \\ G_{4,2}^{(1)} & G_{4,2}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}177 & 0 \\ 0{,}048 & 0{,}177 \end{bmatrix},$$

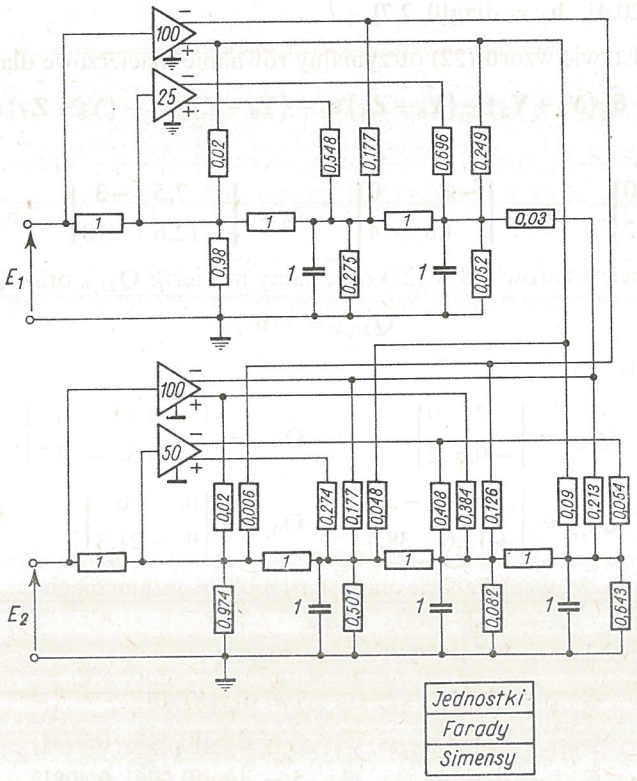
$$\mathbf{G}_{6,a} = \begin{bmatrix} G_{6,1}^{(1)} & G_{6,1}^{(1)} \\ G_{6,2}^{(1)} & G_{6,2}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}249 & 0{,}003 \\ 0{,}126 & 0{,}384 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}_{8,a} = \begin{bmatrix} G_{8,1}^{(1)} & G_{8,1}^{(2)} \\ G_{8,2}^{(1)} & G_{8,2}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}09 & 0{,}213 \end{bmatrix}.$$

Ze wzoru (31) obliczamy wartości konduktancji $G_{2i,k}$

$$G_{2,1}^{(0)} = 0{,}980, \quad G_{2,2}^{(0)} = 0{,}974, \quad G_{4,1}^{(0)} = 0{,}275,$$
$$G_{4,2}^{(0)} = 0{,}501, \quad G_{6,1}^{(0)} = 0{,}052, \quad G_{6,2}^{(0)} = 0{,}082,$$
$$G_{8,1}^{(0)} = 0, \quad G_{8,2}^{(0)} = 0{,}643.$$

Schemat obwodu przedstawiony jest na rys. 7.



Rys. 7. Realizacja układu z przykładu 2

5. BADANIE WRAŻLIWOŚCI UKŁADU

Badanie wrażliwości układu ograniczymy do badania zmian przyrostowych wartości elementów aktywnych i pasywnych. Ze względu na niezależną realizację macierzy licznika i mianownika funkcje wrażliwości określane zostaną osobno dla $\mathbf{N}(s)$ i oddzielnie dla $\mathbf{D}(s)$. Wieloparametrowa macierz funkcji wrażliwości w zależności od zmian parametrów układu X_i danych przez wektor $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \ldots, X_m]$ zdefiniowana jest w postaci:

1. dla macierzy diagonalnej $\mathbf{D}(s)$

$$\mathbf{S}(\mathbf{D}, \mathbf{X}) = \frac{\partial \ln \mathbf{D}(s)}{\partial \ln \mathbf{X}} = \left[\frac{\partial \ln D_1}{\partial \ln(X_1, X_2, \ldots, X_m)}, \frac{\partial \ln D_2}{\partial \ln(X_1, X_2, \ldots, X_m)}, \ldots, \frac{\partial \ln D_N}{\partial \ln(X_1, X_2, \ldots, X_m)}\right], \tag{32}$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{D}, \mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln D_1}{\partial \ln X_1}, & \frac{\partial \ln D_1}{\partial \ln X_2}, & \ldots, & \frac{\partial \ln D_1}{\partial \ln X_m} \\ \frac{\partial \ln D_2}{\partial \ln X_1}, & \frac{\partial \ln D_2}{\partial \ln X_2}, & \ldots, & \frac{\partial \ln D_2}{\partial \ln X_m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \ln D_N}{\partial \ln X_1}, & \frac{\partial \ln D_N}{\partial \ln X_2}, & \ldots, & \frac{\partial \ln D_N}{\partial \ln X_m} \end{bmatrix}; \tag{33}$$

2. dla macierzy $\mathbf{N}(s)$

$$\mathbf{S}(\mathbf{N}, \mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln N_{11}}{\partial \ln(X_1, X_2, \ldots, X_m)}, & \frac{\partial \ln N_{12}}{\partial \ln(X_1, X_2, \ldots, X_m)}, & \ldots, & \frac{\partial \ln N_{1N}}{\partial \ln(X_1, X_2, \ldots, X_m)} \\ \frac{\partial \ln N_{21}}{\partial \ln(X_1, X_2, \ldots, X_m)}, & \frac{\partial \ln N_{22}}{\partial \ln(X_1, X_2, \ldots, X_m)}, & \ldots, & \frac{\partial \ln N_{2N}}{\partial \ln(X_1, X_2, \ldots, X_m)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \ln N_{N1}}{\partial \ln(X_1, X_2, \ldots, X_m)}, & \frac{\partial \ln N_{N2}}{\partial \ln(X_1, X_2, \ldots, X_m)}, & \ldots, & \frac{\partial \ln N_{NN}}{\partial \ln(X_1, X_2, \ldots, X_m)} \end{bmatrix}. \tag{34}$$

Poszczególne składniki wektora $\mathbf{X}$ oznaczają parametry układu pasywnego i aktywnego, od których uzależniona jest macierz $\mathbf{Y}(s)$.

Ponieważ

$$\frac{\partial \ln D}{\partial \ln X_i} = \frac{\partial D}{\partial X_i} \frac{X_i}{D}, \tag{35}$$

w dalszych rozważaniach ograniczymy się do badania wrażliwości bezwzględnej. Ze względu na niezależną strukturę kanałową układu, bez ograniczenia ogólności rozważań, wyznaczymy jedynie funkcje wrażliwości dla pojedynczego K-tego kanału ($K = 1, 2, \ldots, N$). Z analizy pojedynczego kanału oczywiste jest, że zależności na licznik N_{kj} oraz mianownik D_k mogą być wyrażone przez kontynuanty skalarne [4]

$$D_k = -R_k B_k \sum_{i=1}^{n_k} \{Y_{2n_k,k} \div Z_{2i+1,k}\} G_{2i,kb} + \{\mathbf{Y}_{2n_k,k} \div Z_{1,k}\}, \tag{36}$$

$$N_{k,j}\big|_{k\neq j} = \{Y_{2n_k,k} \div Y_{2,k}\} - A_j \sum_{i=1}^{n_k} \{Y_{2n_k,k} \div Z_{2i+1,k}\} G_{2i,k}^{(j)}, \tag{37}$$

gdzie:

$$Z_{2i+1,k} = R_{2i+1,k}, \quad Y_{2i,k} = sC_{2i,k} + G_{2i,kb} + G_{2i,k}^{(0)} + \sum_{j=1}^{N} G_{2i,k}^{(j)}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n_k, \; R_{1,k} = R_k)$$

oznaczają elementy k-tego kanału.

Z własności kontynuant wynikają następujące funkcje wrażliwości licznika i mianownika na zmiany parametrów układu.

Funkcje wrażliwości dla mianownika

$$\frac{\partial D_k}{\partial A_l} = 0, \quad \frac{\partial D_k}{\partial B_l\big|_{l\neq k}} = 0, \tag{38}$$

$$\frac{\partial D_k}{\partial B_k} = R_k \sum_{i=1}^{n_k} \{Y_{2n_k,k} \div Z_{2i+1,k}\} G_{2i,kb}, \tag{39}$$

$$\frac{\partial D_k}{\partial R_{2p+1,k}} = \{Y_{2n_k,k} \div Y_{2p+2,k}\}\{Y_{2p,k} \div Z_1\} + R_k B_k \sum_{i=p}^{n_k} \left[\{Y_{2n_k,k} \div Y_{2p+2,k}\}\{Y_{2p,k} \div Z_{2i+1,k}\} B_k G_{2i,kb}\right], \tag{40}$$

$$\frac{\partial D_k}{\partial C_{2p,k}} = s\left[\{Y_{2n_k,k} \div Z_{2p+1,k}\}\{Z_{2p-1,k} \div Z_{1,k}\} + R_k B_k \sum_{i=p+1}^{n_k} \{Y_{2n_k,k} \div Z_{2p+1,k}\}\{Z_{2p-1} \div Z_{2i+1,k}\} G_{2i,kb}\right], \tag{41}$$

$$\frac{\partial D_k}{\partial G_{2p,k}^{(0)}} = \{Y_{2n_k,k} \div Z_{2p+1,k}\}\{Z_{2p-1,k} \div Z_{1,k}\} + R_k B_k \sum_{i=p+1}^{n_k} \{Y_{2n_k,k} \div Z_{2p+1,k}\}\{Z_{2p-1,k} \div Z_{2i+1,k}\} G_{2i,kb}, \tag{42}$$

$$\frac{\partial D_k}{\partial G_{2p,k}^{(l)}} = \frac{\partial D_k}{\partial G_{2p,k}^{(0)}}. \tag{43}$$

Podobnie funkcje wrażliwości dla licznika $N_{k,j}$ mają postać (przy założeniu $k \neq j$):

$$\frac{\partial N_{k,j}}{\partial B_l} = 0, \quad \frac{\partial N_{k,j}}{\partial A_l}\bigg|_{l\neq j} = 0, \tag{44}$$

$$\frac{\partial N_{k,j}}{\partial A_j} = -\sum_{i=1}^{n_k} \{Y_{2n_k,k} \div Z_{2i+1,k}\} G_{2i,k}^{(j)}, \tag{45}$$

$$\frac{\partial N_{k,j}}{\partial R_{2p+1,k}} = \{Y_{2n_k,k} \div Y_{2p+2,k}\}\{Y_{2p,k} \div Y_{2,k}\} - A_j \sum_{i=p}^{n_k} \{Y_{2n_k,k} \div Y_{2p+2,k}\}\{Y_{2p,k} \div Z_{2i+1,k}\} G_{2i,k}^{(j)}, \tag{46}$$

$$\frac{\partial N_{k,j}}{\partial C_{2p,k}} = s\{Y_{2n_k,k} \div Z_{2p+1,k}\}\{Z_{2p-1,k} \div Y_{2,k}\} + \\ - A_j \sum_{i=p+1}^{n_k} \{Y_{2n_k,k} \div Z_{2p+1,k}\}\{Z_{2p-1,k} \div Z_{2i+1,k}\} A_j G^{(j)}_{2i,k}, \tag{47}$$

$$\frac{\partial N_{k,j}}{\partial G_{2p,kb}} = \{Y_{2n_k,k} \div Z_{2p+1,k}\}\{Z_{2p-1,k} \div Y_{2,k}\} + \\ - A_j \sum_{i=p+1}^{n_k} \{Y_{2n_k,k} \div Z_{2p+1,k}\}\{Z_{2p-1,k} \div Z_{2i+1,k}\} A_j G^{(j)}_{2i,k}, \tag{48}$$

$$\frac{\partial N_{k,j}}{\partial G^{(0)}_{2p,k}} = \frac{\partial N_{k,j}}{\partial G_{2p,kb}}, \tag{49}$$

$$\left.\frac{\partial N_{k,j}}{\partial G^{(j)}_{2p,k}}\right|_{p \neq j} = \frac{\partial N_{k,j}}{\partial G_{2p,kb}}, \tag{50}$$

$$\frac{\partial N_{k,j}}{\partial G^{(p)}_{2p,k}} = \frac{\partial N_{k,j}}{\partial G^{(0)}_{2p,k}} - \{Y_{2n_k,k} \div Z_{2p+1,k}\} A_j. \tag{51}$$

Wykorzystując zależności rekurencyjne kontynuant można łatwo wyznaczyć interesujące nas funkcje wrażliwości. Z podanych wzorów widoczne jest, że wrażliwość realizacji dowolnego k-tego kanału jest równa zeru na zmiany elementów pasywnych wszystkich pozostałych kanałów. Realizacja mianownika D_k jest niezależna od wzmocnień wszystkich wzmacniaczy A_k ($k = 1, 2, \ldots, N$) oraz od wzmacniaczy B_j ($j = 1, 2, \ldots, N$, $j \neq k$). Podane wyrażenia stanowią podstawę dalszych prac nad minimalizacją czułości układu poprzez odpowiedni wybór zakładanych na wstępie parametrów układu pasywnego R_k, C_k, G_k oraz dobór wzmocnień wzmacniaczy napięciowych.

6. KONKLUZJA

W pracy przedstawiono systematyczną metodę syntezy N-wrotnika w układzie aktywnym RC ze wzmacniaczami napięciowymi. Realizacja wymaga użycia $m = \sum_{k=1}^{N} n_k$ uziemionych, jednakowej wartości kondensatorów, co w większości przypadków odpowiada liczbie minimalnej. Maksymalna liczba wzmacniaczy koniecznych do realizacji układu jest równa $2N$. Metoda oparata jest na pojęciu kontynuant macierzowych i podstawowych działaniach na macierzach. Zdaniem autorów metoda ma następujące zalety.

1. Proces syntezy jest operacją czysto algebraiczną i jest łatwy w przystosowaniu do obliczeń komputerowych.

2. Licznik $\mathbf{N}(s)$ i mianownik $\mathbf{D}(s)$ macierzy $\mathbf{Y}(s)$ opisującej N-wrotnik realizowane są niezależnie od siebie. Ponadto każdy wiersz macierzy $\mathbf{Y}(s)$ może być realizowany oddzielnie, niezależnie od siebie, co dodatkowo upraszcza procedurę syntezy.

3. Prezentowany układ posiada drabinkową strukturę kanałową, przy czym zmiany parametrów pasywnych R_i, C_i w jednym kanale nie wpływają na pozostałe kanały. Stąd wydaje się, że założona struktura posiada stosunkowo małą wrażliwość na zmianę parametrów.

4. Wartości pasywnych elementów R_i, C_i mogą przyjmować dowolnie wybrane wartości. W szczególności wszystkie kondensatory $C_{2i,k}$ oraz rezystory $R_{2i-1,k}$ mogą być odpowiednio jednakowe.

5. Wyrażenia otrzymane na funkcje wrażliwości (32)÷(51) stanowić mogą podstawę optymalizacji tego typu układów.

LITERATURA

1. T. Bickart, D. Melvin, *Synthesis of active RC multiport networks with grounded ports*, J. Frankl. Inst., vol. 294, pp. 289—312, Nov. 1972.
2. T. Bickart, D. Melvin, *P-port active RC networks: short-circut admittance matrix synthesis with a minimum number of capacitors*, IEEE Tr. on C.T., vol 18, pp. 587—592, Nov. 1971.
3. T. Bickart, B. Stamenkovic, *On the realization of multiport network functions with active RC networks and a minimum number of capacitors*, Proc. Conf. IEEE ISCAS, 1976.
4. A. Cichocki, S. Osowski, *Analysis of active ladder networks using Coates Flow Graphs and Continuants*, Int. J. on Numerical Methods in Engr., 1977, No. 5, Vol. 11, pp. 900—904.
5. A. Cichocki, S. Osowski, *Synthesis of rational transfer matrices using equal valued grounded capacitors*, Int. J. on Electronics, 1977, No. 3, Vol. 42, pp. 229—239.
6. A Cichocki, S. Osowski, *Zastosowanie kontynuanty macierzowej do analizy łańcuchowego połączenia 2m-wrotników*, Arch. Elektr., z. 1—2, 1977, ss. 365—378.
7. R.K. Even, *Admittance matrix synthesis with RC common ground networks and grounded finite gain phase inverting voltage amplifiers*, IEEE Tr. on C.T., vol. 17, pp. 344—351, Aug. 1970.
8. M. Goldman, M.S. Ghausi, *Active RC synthesis of admittance matrix with prescribed RC elements constraints*, IEEE Tr. on C.T., vol. 18, pp. 299—302, March 1971.
9. D. Hilberman, *Synthesis of rational transfer and admittance matrices with active RC common-ground networks containing unity gain voltages amplifiers*, IEEE Tr. on. C.T., vol. 15, pp. 431—440, Dec. 1968.
10. B.J. Mann, D.B. Pike, *Minimal reactance realization of N-port active RC networks*, Proc. IEEE, vol. 56, pp. 1099, June 1968.
11. T. Muir, W. Metzler, *A treatise on the theory of determinants*, N.Y. Dover, 1960.
12. P.A. Ramamoorthy, K. Thulsiraman, V.G.K. Murti, *Active RC n-port network synthesis using nullators and norators*, IEEE Tr. on CAS, vol. 21, pp. 206—209, March 1974.
13. I.W. Sandberg, *Synthesis of N-port active RC networks*, B.S.T.J., vol. 40, pp. 329—347, Jan. 1961.
14. B.B. Stamenkovic, *On the realization of grounded active RC multiport networks, with a minimum numbers of capacitors*, Proc. 1976 Conf. on C.T. and Design, Genova, Italy.
15. B.B. Stamenkovic, *Realization of open-circuit voltage transfer matrices by grounded nullors*, El. Letters, vol. 11, No 6, pp. 134—136, 1975.

A. CICHOCKI, S. OSOWSKI

SYNTHESIS OF *N*-PORT NETWORKS IN *RC* MULTICHANNEL STRUCTURE WITH VOLTAGE AMPLIFIERS

Summary

A new and practical technique for synthesizing arbitrary rational admittance matrices is presented in this paper. The network has the channel structure in which all channels are independent from each other. Of special interest is the inclusion of the *RC* constraints in the synthesis procedure. The mathematical basis of the synthesis are the properties of the matrix-continuants. Examples of the admittance matrix realizations are given as is the sensitivity analysis.

A. CICHOCKI, S. OSOWSKI

SYNTHÈSE DES *N*-PORTES À STRUCTURE MULTIVOIE EN *RC* AUX AMPLIFICATEURS DE TENSION

Résumé

L'article présente la nouvelle méthode de synthèse des *N*-portes dans la classe des circuits actifs *RC* aux amplificateurs de tension. La structure du circuit est multivoie, les canaux y sont indépendants l'un de l'autre et le couplage mutuel entre eux se fait à travers le circuit actif. La méthode methématique de synthèse est constituée par le calcul matriciel basé sur les propriétés des continuantes de blocage. On a donné les exemples de la réalisation de la matrice $\mathbf{Y}(s)$ de *N*-portes. On a obtenu les expressions servant à examiner la sensibilité de la réalisation présentée.

A. CICHOCKI, S. OSOWSKI

SYSTEME DES MEHRTORS IN DER MEHRKANALSTRUKTUR MIT EINEM *RC*-NETZWERK UND SPANNUNGSVERSTÄRKERN

Zusammenfassung

In diesem Artikel wird eine neue und praktische Verwirklichungsmethode für beliebige rationelle Admittanzmatrizen dargestellt. Das Netzwerk hat eine Kanalstruktur, worin alle Kanäle voreinander unabhängig sind. Die Theorie der Synthese ist auf Grund von Continuant-Matrizen aufgebaut. Es werden Beispiele für Matrixrealisierungen angeführt.

А. ЦИХОЦКИ, С. ОСОВСКИ

СИНТЕЗ МНОГОПОЛЮСНИКОВ В МНОГОКАНАЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ *RC* С УСИЛИТЕЛЯМИ НАПРЯЖЕНИЯ

Резюме

Представлен новый метод реализации многополюсников при помощи пассивных *RC*-схем и усилителей напряжения. Структура цепи является многоканальной, причем все каналы взаимно независимы. Теория синтеза основана на применении матричного континуанта. Даны примеры реализации матрицы $\mathbf{Y}(s)$ многополюсников.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1978, 24, z. 2, ss. 283-296

621.372.4

Synteza dwójników *RC* ze stratnymi kondensatorami

RADOSŁAW BIERNACKI (WARSZAWA)

Instytut Podstaw Elektroniki Politechniki Warszawskiej

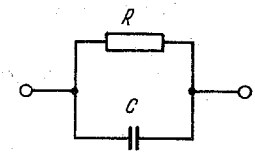
Otrzymano 27.12.1976

W pracy przedstawiono metody syntezy liniowych dwójników pasywnych zbudowanych z elementów R lub C_R (równoległe połączenie pojemności i oporu). Skoncentrowano się na metodach syntezy nie wymagających poszukiwania zer i biegunów impedancji syntetyzowanego dwójnika. Podano proste oszacowanie najmniejszej stratności kondensatorów potrzebnej do realizacji zadanej impedancji.

1. WSTĘP

Zagadnienie syntezy dwójników *RC* jest jednym z klasycznych problemów syntezy układów elektrycznych i bierze początek od prac Fostera [1] i Cauera [2, 3]. Jak wiadomo, układ elektryczny o zadanych właściwościach zaciskowych można zrealizować na ogół na wiele sposobów. W oparciu o każdy model układu otrzymany w procesie syntezy można zbudować odpowiedni układ rzeczywisty. Jednak nie każdy zbudowany w ten sposób układ będzie zadowalający z praktycznego punktu widzenia. Fakt ten wynika głównie z tego, że w syntetyzowanych modelach stosowane są elementy idealne. Dlatego też metody syntezy powinny pozwalać na uwzględnienie nieidealności elementów. Inaczej mówiąc, w modelach otrzymywanych w procesie syntezy powinny występować — jako bloki — układy zastępcze elementów rzeczywistych.

W niniejszej pracy omówione są metody syntezy dwójników zbudowanych z oporów i z kondensatorów ze stratami. Przyjęto schemat zastępczy kondensatora ze stratami w postaci równoległego połączenia pojemności i oporu (rys. 1). Kondensator ze stratami przedstawiony na rys. 1 — traktowany jako element niepodzielny — będzie oznaczony symbolem C_R.



Rys. 1. Schemat zastępczy kondensatora ze stratami

Warunki konieczne i wystarczające realizowalności dwójników *RC* są dobrze znane (np. [4, 5]). Dla porządku przytoczymy te warunki formułując je w postaci poniższej definicji funkcji *RC*.

Definicja 1. Funkcję wymierną f o współczynnikach rzeczywistych

$$f(s) = \frac{a(s)}{b(s)} = \frac{a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n}{b_0 + b_1 s + \ldots + b_n s^n}, \quad b(s) \neq 0, \tag{1}$$

nazywamy funkcję RC ($f \in \mathscr{F}_{RC}$), jeżeli można ją przedstawić w postaci

$$f(s) = H \frac{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)\ldots(s+\alpha_p)}{(s+\beta_1)(s+\beta_2)\ldots(s+\beta_r)} \quad \text{lub} \quad f(s) = H, \tag{2}$$

gdzie $H \in R^+$, $p = r$ lub $p = r-1$ oraz liczby α_i i β_i są rzeczywiste i spełniają nierówności:

$$0 \leqslant \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \ldots \tag{3}$$

Wymagania definicji 1 określają warunki konieczne i wystarczające realizowalności funkcji f jako impedancji dwójnika RC.

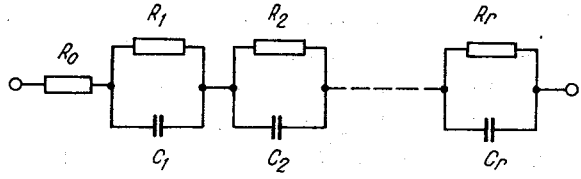
Jest rzeczą oczywistą, że impedancja dwójnika zbudowanego z elementów R lub C_R jest funkcją RC nie posiadającą bieguna w punkcie $s = 0$. Istotnie, między zaciskami wejściowymi takiego dwójnika istnieje przynajmniej jeden łańcuch zbudowany wyłącznie z oporów, a więc dla $s = 0$ admitancja dowolnego dwójnika RC_R jest różna od zera. Z drugiej strony, jeśli funkcja (2) nie posiada bieguna w punkcie $s = 0$, to, jak wiadomo, jej rozkład na ułamki proste ma postać:

$$f(s) = H + \sum_{i=1}^{r} \frac{k_i}{s+\beta_i}, \tag{4}$$

gdzie $\beta_i > 0$ i $k_i > 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, r$.

Wobec tego szeregowa postać kanoniczna Fostera (np. [5]) dwójnika o impedancji f jest taka, jak na rys. 2, gdzie

$$R_0 = H, \quad R_i = \frac{k_i}{\beta_i}, \quad C_i = \frac{1}{k_i} \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, r.$$



Rys. 2. Szeregowa postać kanoniczna Fostera dwójnika RC_R

Dwójnik przedstawiony na rys. 2 jest zbudowany wyłącznie z elementów R lub C_R. Stąd wynika, że warunki definicji 1 z zastrzeżeniem $b_0 \neq 0$ we wzorze (1) ($\beta_1 > 0$ we wzorze (3)) są warunkami koniecznymi i wystarczającymi realizowalności dwójników zbudowanych z elementów R lub C_R.

W niniejszej pracy zajęto się takimi metodami syntezy, które nie wymagają znajomości zer i biegunów impedancji. Metody te — ponieważ nie wymagają rozwiązywania równań nieliniowych — będą nazywane metodami liniowymi. Cechą charakterystyczną metod liniowych jest ich oparcie o działanie arytmetyczne na współczynnikach syntetyzowanej impedancji.

2. METODA WYCIĄGANIA NIEPEŁNYCH WARTOŚCI GRANICZNYCH

Jak wiadomo [3, 4, 5], metody syntezy w obu postaciach kanonicznych Cauera polegają na wyciąganiu z dwójnika pojedynczych elementów R lub C połączonych szeregowo lub równolegle z dwójnikiem resztkowym, zgodnie z następującymi zasadami:

a) opór szeregowy $$R_{szer} = \lim_{s\to\infty} Z(s), \tag{5}$$

b) opór równoległy $$R_{równ} = \lim_{s\to 0} Z(s), \tag{6}$$

c) pojemność szeregowa $$C_{szer} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{sZ(s)}, \tag{7}$$

d) pojemność równoległa $$C_{równ} = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{sZ(s)}, \tag{8}$$

gdzie Z jest impedancją dwójnika występującego w pewnym etapie syntezy.

Istnienie skończonych i niezerowych wartości poszczególnych granic zależy od kombinacji zerowania się współczynników a_n i b_0 w (1) zgodnie z tablicą 1.

Tablica 1

Wartości granic (5)÷(8) dla różnych kombinacji zerowania się współczynników a_n i b_0

Kombinacja	R_{szer}	$R_{równ}$	C_{szer}	$C_{równ}$
$a_n \neq 0,\ b_0 \neq 0$	+	+	nie istnieje	0
$a_n = 0,\ b_0 \neq 0$	0	+	nie istnieje	+
$a_n \neq 0,\ b_0 = 0$	+	nie istnieje	+	0
$a_n = 0,\ b_0 = 0$	0	nie istnieje	+	+

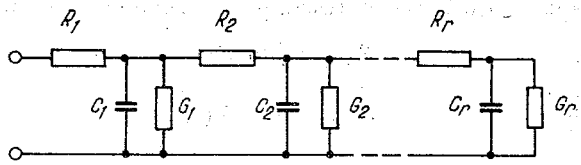
Plusami zaznaczono przypadki, w których dane granice przyjmują wartości dodatnie

Jak widać, dla każdej ustalonej kombinacji istnieją dokładnie dwie niezerowe wartości graniczne, a więc możliwe jest wyciągnięcie z dwójnika jednego lub dwóch elementów R lub C, przy czym z każdym wyciąganiem pełnej wartości granicznej związana jest zmiana kombinacji.

W przypadku dwójników zbudowanych z elementów R lub C_R możliwe są tylko dwie pierwsze kombinacje z tablicy 1, a więc możliwe jest wyciąganie granic: R_{szer}, $C_{równ}$ i $R_{równ}$. Wyciąganie pierwszych dwóch spośród tych granic nie zmienia warunku syntezy z elementów R lub C_R, natomiast pełne wyciągnięcie granicy $R_{równ}$ wprowadza biegun w punkcie $s = 0$ do impedancji „resztkowej". Ponadto łatwo zauważyć, że tylko pełne wyciąganie granic R_{szer} i $C_{równ}$ pozwala na zmianę kombinacji, a tym samym na redukcję stopnia funkcji. Ponieważ wyciąganie granicy $R_{równ}$ jest w obu rozważanych kombinacjach możliwe, a równocześnie nie jest dopuszczalne pełne wyciąganie tej granicy, to w celu otrzymania elementu C_R można zastosować niepełne wyciąganie oporu równoległego o przewodności G

$$G < \frac{1}{R_{równ}}. \tag{9}$$

Powyższe rozważania prowadzą do wniosku, że jedyną strukturą dwójnika RC_R, którą można otrzymać w oparciu o wyciąganie wartości granicznych, jest struktura drabinkowa prosta, przedstawiona na rys. 3, gdzie $R_1 \geqslant 0$ oraz pozostałe wartości elementów są dodatnie.



Rys. 3. Dwójnik RC_R o strukturze drabinkowej prostej

Wartości elementów w powyższej strukturze są wyznaczane jako wartości granic (5) (8) odpowiednich impedancji dwójników resztkowych oraz przez wyciąganie niepełnych wartości granicy (6) zgodnie z (9). Powyższe działania zapewniają zmniejszenie stopnia funkcji „resztkowej" w każdym etapie syntezy oraz nie wprowadzają bieguna w punkcie $s = 0$, a więc gwarantują przeprowadzenie syntezy z elementów R lub C_R.

Przedstawiona metoda jest modyfikacją metody syntezy w I Postaci Kanonicznej Cauera [5], przy czym zwiększenie liczby elementów w stosunku do tej postaci wynosi $r-1$, gdzie r jest liczbą wszystkich kondensatorów.

Należy zaznaczyć, że bardzo elegancka metoda syntezy w strukturze drabinkowej prostej została podana w [6]. Opiera się ona na przekształceniach ekwiwalentnych dwójników o tej strukturze. Jednak przeprowadzone w niniejszym punkcie rozważania pozwalają dodatkowo na następujące stwierdzenia:

1. struktura drabinkowa prosta jest jedyną strukturą, w której możliwa jest synteza dwójników RC_R w oparciu o wyciąganie wartości granicznych,

2. niepełne wyciąganie tych wartości granicznych, których pełne wyciąganie wyprowadza poza klasę układów RC_R jest efektywną metodą dołączania pewnego oporu równolegle do idealnego kondensatora, tworząc w ten sposób element C_R,

3. stopień swobody, wynikający z dowolnego wyboru wartości G spełniającej nierówność (9) umożliwia otrzymanie (nieskończenie) wielu realizacji tej samej funkcji, różniących się jedynie wartościami elementów.

Na zakończenie tego punktu podamy przykład zastosowania omówionej metody.

Przykład 1

Wyznaczmy realizację w strukturze drabinkowej prostej dwójnika o impedancji $Z_1(s) = \dfrac{2s^2+7s+5}{2s^3+13s^2+22s+9}$. Funkcja ta spełnia warunki realizowalności w układzie RC_R. W pierwszym kroku możliwe jest wyciągnięcie pojemności równoległej $C_1 = 1$. Jednocześnie, zgodnie z (9), wyciągamy G_1. Ponieważ $R_{równ} = \dfrac{5}{9}$, to jako G_1 możemy przyjąć dowolną wartość mniejszą od $\dfrac{9}{5}$, np. $G_1 = 1$. Wobec tego

$$\frac{1}{Z_1(s)} = s+1+\frac{1}{Z_2(s)} = s+1+\frac{4s^2+10s+4}{2s^2+7s+5}.$$

Z funkcji $Z_2(s)$ wyciągamy $R_2 = 0{,}5$ i otrzymujemy

$$Z_2(s) = 0{,}5 + Z_2'(s) = 0{,}5 + \frac{2s+3}{4s^2+10s+4}.$$

Granice (8) i (6) określone dla funkcji Z_2' są równe

$$C_2 = 2 \quad \text{i} \quad R_{równ} = \frac{3}{4},$$

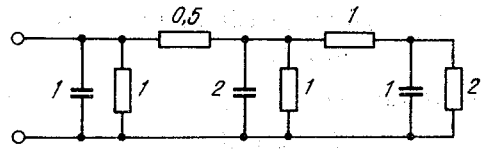
Przyjmując niepełną wartość granicy $\frac{1}{R_{równ}}$, np. $G_2 = 1 < \frac{4}{3}$, mamy

$$\frac{1}{Z_2'(s)} = 2s+1+\frac{1}{Z_3(s)} = 2s+1+\frac{2s+1}{2s+3}.$$

W następnym kroku wyciągamy $R_3 = 1$

$$Z_3(s) = \frac{2s+3}{2s+1} = 1+\frac{2}{2s+1}.$$

Wartości ostatnich dwóch elementów są równe $C_3 = 1$ i $G_3 = 0{,}5$. Otrzymana realizacja dwójnika jest przedstawiona na rys. 4.



Rys. 4. Realizacja dwójnika RC_R o impedancji

$$Z_1(s) = \frac{2s^2+7s+5}{2s^3+13s^2+22s+9}$$

3. METODA PRZESUNIĘCIA FUNKCJI

W literaturze (np. [7]) podawana jest metoda syntezy ze stratnymi elementami reaktancyjnymi wykorzystująca przesunięcie funkcji. W niniejszym punkcie omówimy tę metodę oraz rozważymy możliwość jej zastosowania w liniowych metodach syntezy dwójników RC_R.

Rozważmy funkcję $f \in \mathscr{I}_{RC}$ nie posiadającą bieguna w punkcie $s = 0$ oraz pomocniczą funkcję g utworzoną z funkcji f przez przesunięcie o $\alpha > 0$ zgodnie z zależnością

$$g(z) = f(z-\alpha). \tag{10}$$

Jeżeli g jest funkcją RC, to rozkładając ją w odpowiedni sposób (np. na ułamki proste lub łańcuchowe) można wyznaczyć wartości elementów dowolnej znanej realizacji funkcji g jako impedancji pewnego dwójnika RC. Wykorzystanie zależności odwrotnej do (10) umożliwia przez podstawienie $z = s+\alpha$ otrzymanie pewnego rozkładu funkcji f z każdego rozkładu funkcji g. Wówczas każdej pojemności C_i (o admitancji sC_i) dwójnika o impedancji g odpowiada dwójnik o admitancji $(s+\alpha)C_i = sC_i + \alpha C_i$ w realizacji funkcji f. Ponieważ $\alpha > 0$, to $G_i = \alpha C_i$ jest wartością przewodności połączonej równolegle z kon-

densatorem o pojemności C_i. Powyższe działanie dotyczy wszystkich pojemności, a więc otrzymywana w ten sposób realizacja funkcji f jest dwójnikiem RC_R.

Rozważmy, dla jakich wartości α funkcja g jest funkcją RC. Rozwiązanie tego problemu wynika bezpośrednio z definicji 1. Jeśli f ma postać (2), to funkcję (10) można przedstawić następująco:

$$g(z) = H\frac{(z+(\alpha_1-\alpha))(z+(\alpha_2-\alpha))\ldots(z+(\alpha_p-\alpha))}{(z+(\beta_1+\alpha))(z+(\beta_2-\alpha))\ldots(z+(\beta_r-\alpha))}.$$

Zgodnie z (3) dla powyższej funkcji otrzymujemy warunki

$$0 \leqslant \beta_1-\alpha < \alpha_1-\alpha < \beta_2-\alpha \ldots \tag{11}$$

Ponieważ f jest funkcją RC, to nierówności (3) są spełnione. a wobec tego dla dowolnego α takiego, że

$$0 < \alpha \leqslant \beta_1, \tag{12}$$

spełniony jest warunek (11), a więc g jest funkcją RC. Z założenia $\beta_1 > 0$, czyli wybór odpowiedniego α jest zawsze możliwy.

Bezpośrednie korzystanie z (12) w celu określenia wartości α nie jest możliwe w metodach liniowych, gdyż wymaga znalezienia wartości β_1, co jest równoważne rozwiązaniu równania $b(s) = 0$, w ogólnym przypadku nieliniowego. Z drugiej strony, ze względu na dowolność wyboru α, nie jest potrzebna znajomość całego przedziału $(0, \beta_1\rangle$. Wystarcza możliwość określenia pewnego podprzedziału $(0, A\rangle$, gdzie

$$0 < A \leqslant \beta_1, \tag{13}$$

gdyż wybór α spełniającego warunek

$$0 < \alpha \leqslant A \tag{14}$$

gwarantuje spełnienie (12).

Określona wzorem (13) wartość $(-A)$ stanowi oszacowanie od góry wszystkich biegunów funkcji f. Jeśli nie chcemy wyznaczać postaci zredukowanej funkcji f, to jako $(-A)$ możemy przyjąć oszacowanie od góry wszystkich zer mianownika funkcji f po uprzednim wyeliminowaniu ewentualnego wspólnego zera w punkie $s = 0$. Możliwość bardzo wygodnego oszacowania wszystkich zer wielomianu o zerach ujemnych wynika z następującego lematu.

Lemat 1. Jeżeli wielomian q o postaci:

$$q(s) = q_0+q_1s+\ldots+q_ns^n = q_n\prod_{i=1}^{n}(s+\alpha_i) \tag{15}$$

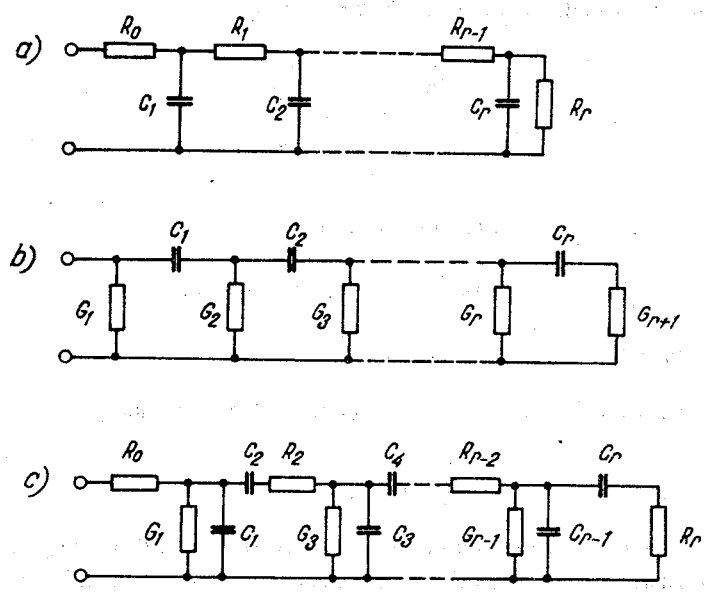
jest wielomianem o wszystkich zerach rzeczywistych, ujemnych, to

$$\frac{q_0}{q_1} \leqslant \alpha_i \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

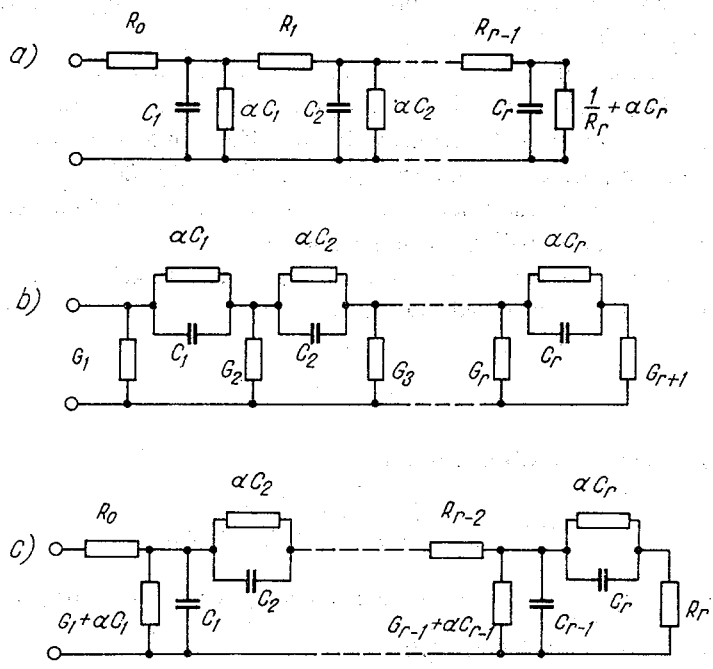
Dowód. Rozwijając postać iloczynową wielomianu (15) otrzymujemy

$$q(s) = q_n\Big[s^n+s^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+\ldots+s\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\alpha_j+\prod_{i=1}^{n}\alpha_i\Big] =$$

$$= q_n\left(s^n+\frac{q_{n-1}}{q_n}s^{n-1}+\ldots+\frac{q_1}{q_n}s+\frac{q_0}{q_n}\right).$$



Rys. 5. Realizacje kanoniczne dwójnika o impedancji g:
a) w I postaci Cauera, b) w II postaci Cauera, c) w jednej z postaci mieszanych



Rys. 6. Struktury dwójników RC_R odpowiadające poszczególnym realizacjom funkcji przesuniętej, przedstawionym na rys. 5

Po przyrównaniu odpowiednich współczynników mamy

$$\frac{q_1}{q_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{n} \alpha_j}{\prod_{i=1}^{n} \alpha_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i}.$$

Ponieważ $\alpha_i > 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, to oczywiście

$$\frac{q_1}{q_0} \geqslant \frac{1}{\alpha_i} \quad \text{oraz} \quad \frac{q_0}{q_1} \leqslant \alpha_i \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, n,$$

co kończy dowód lematu.

Na mocy powyższego lematu $\frac{b_0}{b_1} \leqslant \beta_1$, więc jako A przyjmujemy

$$A = \frac{b_0}{b_1}, \tag{16}$$

przy czym $A > 0$ zgodnie z założeniami. Wobec tego przyjęcie dowolnego α spełniającego (14) umożliwia zastosowanie metody przesunięcia funkcji w syntezie dwójników RC_R bez konieczności rozwiązywania równania nieliniowego.

Na podstawie rozumowania przeprowadzonego w niniejszym punkcie łatwo można wykazać, że β_1 określa największą wartość stratności najlepszego kondensatora (tzn. kondensatora o najmniejszej stratności) w klasie wszystkich realizacji zadanej funkcji. Z drugiej strony liczba (16) jako dość dobre przybliżenie β_1 orientacyjnie określa „jakość" kondensatorów niezbędnych w realizacji.

Przedstawiona metoda znacznie rozszerza klasę struktur, w których możliwe są realizacje dwójników RC_R metodami liniowymi. Wynika to z faktu, że jako realizacje funkcji g można wziąć dowolny dwójnik RC realizowalny metodami liniowymi, np. jedną z postaci Cauera lub dowolną z postaci mieszanych omawianych w [8]. Dla przykładu na rys. 5 przedstawione są trzy wybrane realizacje kanoniczne dwójnika o impedancji g, a na rys. 6 — odpowiadające im realizacje dwójnika o impedancji f.

Obecnie zilustrujemy zastosowanie metody przesunięcia funkcji na przykładzie realizacji dwójników o strukturach przedstawionych na rys. 6 b,c.

Przykład 2

Przeprowadźmy syntezę dwójnika o impedancji

$$f(s) = \frac{8s^2 + 9{,}6s + 1{,}88}{16s^3 + 36{,}8s^2 + 18{,}88s + 2{,}536}.$$

Zgodnie z (16) $A = \frac{2{,}536}{18{,}88} = 0{,}134$. Jako α możemy wybrać dowolną wartość z przedziału $(0, 0{,}134\rangle$ np. $\alpha = 0{,}1$. Wobec (10)

$$g(s) = \frac{8(s-0{,}1)^2 + 9{,}6(s-0{,}1) + 1{,}88}{16(s-0{,}1)^3 + 36{,}8(s-0{,}1)^2 + 18{,}88(s-0{,}1) + 2{,}536}.$$

Po rozwinięciu otrzymujemy

$$g(s) = \frac{8s^2+8s+1}{16s^3+32s^2+12s+1}.$$

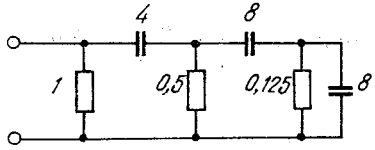
Syntezę pomocniczego dwójnika o impedancji g w strukturze jak na rys. 5b przeprowadzamy w oparciu o rozwinięcie na następujący ułamek łańcuchowy

$$g(s) = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{4s}+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{8s}+\cfrac{1}{8s+8}}}}}.$$

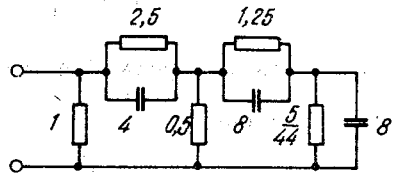
Otrzymany dwójnik jest przedstawiony na rys. 7.

Zgodnie z podanym wyżej opisem każdy kondensator o pojemności C_i na rys. 7 zastępujemy dwójnikiem o admitancji $sC_i+0{,}1\ C_i$.

Odpowiednia realizacja dwójnika RC_R o impedancji f jest przedstawiona na rys. 8.



Rys. 7. Pomocniczy dwójnik o impedancji g



Rys. 8. Realizacja dwójnika RC_R o impedancji f

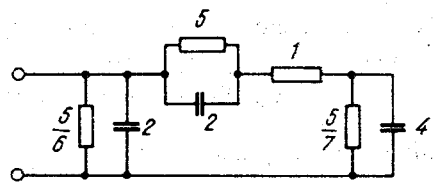
W celu otrzymania realizacji w strukturze przedstawionej na rys. 6c wykorzystujemy rozkład na nieco inny ułamek łańcuchowy

$$g(z) = \cfrac{1}{1+2z+\cfrac{1}{\cfrac{1}{2z}+1+\cfrac{1}{1+4z}}}.$$

Podstawiając $z = s+0{,}1$ otrzymujemy rozkład funkcji f

$$f(s) = \cfrac{1}{1{,}2+2s+\cfrac{1}{\cfrac{1}{2s+0{,}2}+1+\cfrac{1}{1{,}4+4s}}}.$$

Odpowiadająca powyższemu rozkładowi realizacja dwójnika o impedancji f jest pokazana na rys. 9.



Rys. 9. Dwójnik RC_R o impedancji f

4. METODA WPROWADZANIA BIEGUNÓW

Jak wspomniano, wyciąganie elementu C_R szeregowo połączonego z resztą dwójnika nie jest możliwe bez rozwiązywania równania $b(s) = 0$, czyli bez znajomości biegunów. Poniżej prezentowana jest metoda pozwalająca na szeregowe wyciągnięcie elementu C_R w oparciu o wprowadzenie znanego bieguna

Rozważmy funkcję RC $Z = \frac{a}{b}$ nie posiadająca bieguna w punkcie $s = 0$. Omawiana metoda polega na niepełnym wyciąganiu granicy (6) z admitancji $\frac{1}{Z}$ zgodnie ze wzorem:

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{Z} - \frac{1}{Z(-\alpha)}. \tag{17}$$

Tak określona funkcja $\frac{1}{Z_1}$ posiada zero w punkcie $s = -\alpha$. Wobec tego punkt ten jest biegunem impedancji Z_1 dwójnika resztkowego, tzn. funkcja Z_1 ma postać:

$$Z_1(s) = \frac{a(s)}{(s+\alpha)c(s)} = \frac{k}{s+\alpha} + \frac{a'(s)}{c(s)}. \tag{18}$$

Znajomość wartości α pozwala na wyodrębnienie ułamka prostego $\frac{k}{s+\alpha}$ z funkcji Z_1 zgodnie ze wzorami

$$k = \frac{a(-\alpha)}{c(-\alpha)}, \quad a'(s) = \frac{a(s) - kc(s)}{s+\alpha}, \tag{19}$$

a więc metodami liniowymi.

Warunkiem poprawności wyciągania (17) jest spełnienie nierówności:

$$0 \leqslant \frac{1}{Z(-\alpha)} < \frac{1}{R_{równ}}. \tag{20}$$

Jest rzeczą oczywistą, że przypadkowy wybór α i sprawdzanie warunku (20) jest metodą nie do przyjęcia. Z drugiej strony, łatwo zauważyć, że przyjęcie α zgodnie z (14), gdzie A dane jest wzorem (16), gwarantuje spełnienie warunku (20). Istotnie, wynika to z faktu, że wartość $-A$ stanowi oszacowanie od góry nie tylko biegunów, ale i zer impedancji. Wobec tego, tak impedancja jak i admitancja przyjmują wartości dodatnie w przedziale $(-A, 0\rangle$, a jako że admitancja jest ściśle monotoniczną (rosnącą) funkcją zmiennej rzeczywistej s, więc warunek (20) jest spełniony.

Stosowanie wzorów (17) i (18) na przemian prowadzi do struktury przedstawionej na rys. 6b, otrzymanej metodą przesunięcia funkcji. Różnica w stosowaniu obu metod polega na tym, że przesunięcie funkcji wymaga jednakowych stratności kondensatorów. Natomiast metoda wprowadzania biegunów dopuszcza różne stratności.

Omówioną metodę można wykorzystać w syntezie dwójników zbudowanych tylko z elementów C_R. Warunkiem koniecznym i wystarczającym realizowalności takich dwójników jest, aby impedancja $Z = \frac{a}{b}$ była funkcją RC nie posiadającą bieguna w punkcie

$s = 0$, taką że st $a <$ st b. W tym przypadku możliwa jest tylko druga kombinacja z tablicy 1, a mianowicie $a_n = 0$ i $b_0 \neq 0$. Wobec tego synteza dwójników C_R nie może być oparta o wyciąganie pełnych wartości granicznych, a redukcja stopnia funkcji jest możliwa tylko poprzez szeregowe wyciąganie elementu C_R zgodnie z (18).

Wprowadzanie bieguna do impedancji dwójnika resztkowego jest związane z wyciąganiem pewnego oporu równoległego. Aby w otrzymanej realizacji zapewnić występowanie tylko elementów C_R należy ponadto wyciągać pewną pojemność równoległą. Jednak z uwagi na niedopuszczalność zmiany kombinacji ($a_n = 0$, $b_n \neq 0$) nie może to być pełna wartość granicy (8). Wobec tego poszczególne kroki syntezy są następujące:

1. wyciągamy z admitancji $\dfrac{1}{Z_{2i-1}}$ niepełną wartość granicy (8)

$$C_{2i-1} < \lim_{s\to\infty} \frac{1}{sZ_{2i-1}(s)},$$

zgodnie ze wzorem

$$\frac{1}{Z'_{2i-1}(s)} = \frac{1}{Z_{2i-1}(s)} - sC_{2i-1}; \tag{21}$$

2. wybieramy dowolną wartość α_i z przedziału $(0, A_i\rangle$ określonego dla funkcji Z'_{2i-1} i obliczamy wartość

$$R_{2i-1} = Z'_{2i-1}(-\alpha_i);$$

3. odejmujemy admitancję $sC_{2i-1} + \dfrac{1}{R_{2i-1}}$ od admitancji $\dfrac{1}{Z_{2i-1}}$ otrzymując funkcję „resztkową"

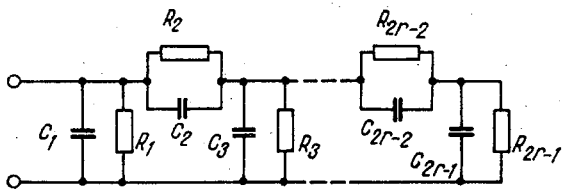
$$\frac{1}{Z_{2i}(s)} = \frac{1}{Z_{2i-1}(s)} - \left(sC_{2i-1} + \frac{1}{R_{2i-1}}\right); \tag{22}$$

4. wyciągamy element C_R połączony szeregowo z resztą dwójnika zgodnie z zależnością

$$Z_{2i}(s) = \frac{k_i}{s+\alpha_i} + Z_{2i+1}(s). \tag{23}$$

Powyższe działania stosowane cyklicznie prowadzą do dwójnika zbudowanego wyłącznie z elementów C_R o strukturze przedstawionej na rys. 10.

Omówioną metodę zilustrujemy przykładem.



Rys. 10. Dwójnik zbudowany z elementów C_R

Przykład 3

Przeprowadźmy syntezę dwójnika o impedancji

$$Z_1(s) = \frac{20s^2+32s+11}{45s^3+127s^2+97s+19}.$$

w układzie przedstawionym na rys. 10. Obliczamy granicę $\lim_{s\to\infty} \frac{1}{sZ_1(s)} = \frac{45}{20}$ i wybieramy wartość C_1, np. $C_1 = 1 < \frac{45}{20}$. Zgodnie z (21) otrzymujemy

$$\frac{1}{Z_1'(s)} = \frac{1}{Z_1(s)} - s = \frac{25s^3+95s^2+86s+19}{20s^3+32s+11}.$$

Dla funkcji Z_1' wyznaczamy wartość $A_1 = \frac{19}{86}$ i wybieramy $\alpha_1 \leqslant A_1$, np. $\alpha_1 = 0{,}2$. Po wykonaniu obliczeń otrzymujemy $R_1 = Z_1'(-0{,}2) = 1$ i zgodnie z (22) wyciągamy $\frac{1}{R_1}$:

$$\frac{1}{Z_2(s)} = \frac{1}{Z_1'(s)} - 1 = \frac{25s^3+75s^2+54s+8}{20s^2+32s+11} = \frac{(5s+1)(5s^2+14s+8)}{20s^2+32s+11}.$$

Funkcja Z_2 posiada biegun w punkcie $s = -0{,}2$. W następnym kroku postępujemy zgodnie z (23)

$$Z_2(s) = \frac{1}{5s+1} + \frac{3s+3}{5s^2+14s+8} = \frac{1}{5s+1} + Z_3(s).$$

Dalszy ciąg obliczeń jest analogiczny. Obliczamy $\lim_{s\to\infty} \frac{1}{sZ_3(s)} = \frac{5}{3}$ i wybieramy $C_3 = 1$

$$\frac{1}{Z_3'(s)} = \frac{1}{Z_3(s)} - s = \frac{2s^2+11s+8}{3s+3}.$$

Jako α_2 przyjmujemy $\alpha_2 = 0{,}5 < \frac{8}{11}$. Wówczas $Z_3'(-\alpha_2) = 0{,}5$

$$\frac{1}{Z_4(s)} = \frac{1}{Z_3(s)} - (s+2) = \frac{2s^2+5s+2}{3s+3}.$$

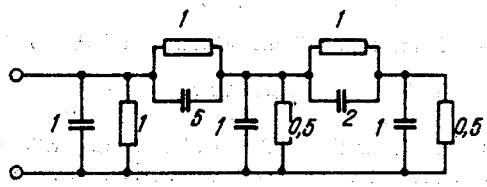
Wyciągnięcie szeregowe elementu C_R daje w wyniku

$$Z_5(s) = \frac{3s+3}{2s^2+5s+2} - \frac{1}{2s+1} = \frac{1}{s+2}.$$

Otrzymana realizacja dwójnika o impedancji Z_1 jest przedstawiona na rys. 11.

Na zakończenie niniejszego punktu zwrócimy jeszcze uwagę na inną możliwość wprowadzania znanych biegunów. Polega ono na niepełnym wyciąganiu pojemności równoległej o wartości

$$C = \frac{1}{(-\alpha)Z(-\alpha)}, \tag{24}$$



Rys. 11. Realizacja dwójnika o impedancji

$$Z_1(s) = \frac{20s^2+32s+11}{45s^3+127s^2+97s+19}$$

gdyż wówczas funkcja

$$\frac{1}{Z_1(s)} = \frac{1}{Z(s)} - sC$$

posiada zero w punkcie $s = -\alpha$. Jako α przyjmujemy dowolną wartość spełniającą nierówność

$$\alpha \geqslant \frac{b_{n-1}}{b_n}. \tag{25}$$

Dowód poprawności tej metody przeprowadza się analogicznie do poprzedniego, wobec czego zostanie on pominięty.

5. PODSUMOWANIE

W pracy omówiono trzy metody syntezy dwójników *RC* pozwalające na zastosowanie nieidealnych kondensatorów, a mianowicie: metodę wyciągania niepełnych wartości granicznych, metodę przesunięcia funkcji oraz metodę wprowadzania znanych biegunów. Wszystkie omówione metody prowadzą do struktur niekanonicznych. Jak wiadomo, dobór wartości elementów w strukturach niekanonicznych jest niejednoznaczny. Umożliwia to dodatkowo poszukiwanie realizacji najkorzystniejszej z punktu widzenia konstruktura. Zaletą prezentowanych metod jest ich prostota. Wynika ona z ograniczenia klasy rozważanych struktur do klasy struktur drabinkowych. Synteza w tej klasie struktur nie wymaga rozwiązywania równań nieliniowych w celu wyznaczenia wartości elementów.

LITERATURA

1. R. M. Foster, *A Reactance Theorem*, Bell Syst. Tech. Jour. vol. 3, April, 1924.
2. W. Cauer, *Ein Reaktanztheorem*, Sitzber. preuss. Akad. Wiss., Physik-Math. Kl., Nr. 30/32, 1931.
3. W. Cauer, *Theorie der Wechselstromschaltungen*, Akad. Verl., Leipzig 1954.
4. L. Weinberg, *Network Analysis and Synthesis*, McGraw Hill, 1962.
5. J. Kudrewicz, J. Osiowski, *Wybrane zagadnienia teorii obwodów*, WPW, Warszawa 1974.
6. M. S. Piekarski, *Warunki równoważności dwójników RC o strukturze drabinkowej prostej*, Materiały I Krajowego Sympozjum Nauk Radiowych URSI, Warszawa 1975.
7. S. Darlington, *Synthesis of Reactance 4-poles Which Produce Prescribed Insertion Loss Characteristics*, J. Math. Phys., vol. 18, September, 1939.
8. R. Biernacki, *Synteza dwójników RC w różnych postaciach kanonicznych*, Arch. Elektr., t. XXV, z. 2, 1976.

R. BIERNACKI

SYNTHESIS OF TWO TERMINAL *RC* NETWORKS WITH NONIDEAL CAPACITORS

Summary

In the paper three methods of two terminal *RC* network synthesis, with nonideal capacitors, are presented. The parallel connection of resistance and capacitance is assumed as a model of a nonideal capacitor. Considered are those methods only in which determination of poles and zeros of impedance function is not necessary. Consequently, the presented methods are based on arithmetical operations on polynomial coefficients.

R. BIERNACKI

SYNTHÈSE DES DIPÔLES EN *RC* À CONDENSATEURS IMPARFAITS

Résumé

Dans l'ouvrage on à présenté les méthodes de synthèse des dipôles linéaires passifs composés d'éléments R ou C_R (montage parallèle de capacité et de résistance). On s'est limité aux méthodes de synthèse qui n'exigeaient pas la recherche les zéros ni les pôles d'impédance du dipôle étudié. On a donné une simple évaluation de la moindre perte des condensateurs nécessaire pour obtenir l'impédance désirée.

R. BIERNACKI

SYNTHESE VON *RC*-ZWEIPOLEN MIT VERLUSTKONDENSATOREN

Zusammenfassung

In vorliegender Bearbeitung wurden verschiedene Methoden für die Synthese linearer passiver Zweipole aus R-bzw. C_R- Elementen (parallele Verbindung der Kapazität und des Widerstandes) dargestellt. Man konzentrierte sich auf die Methoden der Synthese, die keine Bestimmung der Nullwerte und der Impendanzpole des der Synthese unterzogenen Zweipols benötigen. Es wurde eine einfache Schätzungsweise der geringsten, für die Gewinnung der gegebenen Impendanz erforderliche Verlustbarkeit der Kondensatoren angeführt.

Р. БЕРНАЦКИ

СИНТЕЗ ДВУХПОЛЮСНИКОВ *RC* СОДЕРЖАЩИХ КОНДЕНСАТОРЫ С ПОТЕРЯМИ

Резюме

Представлены методы синтеза пассивных двухполюсников составленных из элементов R или C_R (параллельное соединение емкости и резистанса). Особое внимание обращено на методы синтеза не требующие нахождения нулей и полюсов импеданса синтезируемого двухполюсника. Приведен простой способ оценки минимальных удельных потерь конденсаторов необходимых для реализации заданного импеданса.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1978, 24, z. 2, ss. 297-305

621.317.335

Analiza rezonansowej metody pomiaru pojemności kondensatorów o dużych stratach

GRZEGORZ PANKANIN (WARSZAWA), TADEUSZ WIERZBICA (WARSZAWA)

Instytut Podstaw Elektroniki Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 31.1.1977

W pracy przedstawiono koncepcję metody rezonansowo-różniczkowej pomiaru pojemności kondensatorów o dużych stratach. Przedstawiono rozważania analityczne prowadzące do sformułowania warunków optymalnego działania układu zbudowanego w oparciu o tę metodę pomiarową. Rozważania dotyczące błędu metody pozwalają na właściwy dobór parametrów układów generacyjnych.

1. WSTĘP

Rozwój miernictwa wielkości nieelektrycznych, w tym pojemnościowych metod pomiaru wilgotności, składu chemicznego i poziomu, spowodował wzrost zainteresowania układami do pomiaru pojemności o dużych stratach. Przez kondensator o dużych stratach rozumiemy kondensator o $\operatorname{tg}\delta > 10$. Przy pomiarach pojemności takich kondensatorów w dotychczas stosowanych metodach błędy względne pomiaru są większe od kilku % [1]. Istnieje więc konieczność bądź udoskonalania znanych metod, bądź opracowywania nowych. W niniejszym artykule przeanalizowano metodę rezonansową, zaproponowaną w [2], którą cechuje niezależność wyniku pomiaru pojemności kondensatora od jego rezystancji strat. Wyprowadzono zależności na czułość i optymalną ze względu na czułość wartość indukcyjności obwodu rezonansowego. Dokonano analizy błędu metody. W literaturze autorzy nie spotkali szczegółowej analizy tych problemów.

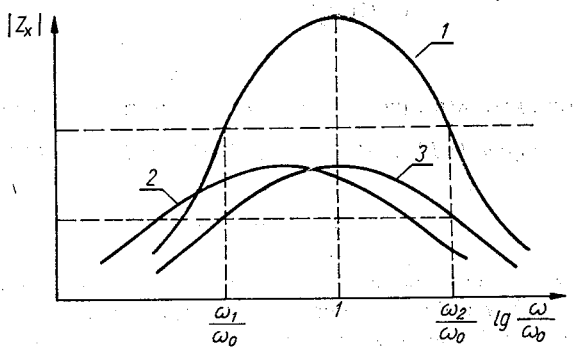
2. OPIS METODY POMIAROWEJ

Jest to metoda zerowa wykorzystująca zasadę podstawienia odwrotnego. Zasada ta jest realizowana w ten sposób, że układ, po wytrąceniu ze stanu równowagi w wyniku dołączenia mierzonego kondensatora równolegle do kondensatora wzorcowego, zostaje przywrócony do poprzedniego stanu za pomocą zmniejszenia pojemności kondensatora wzorcowego. Wartość zmiany pojemności kondensatora wzorcowego jest miarą pojemności mierzonej.

W analizowanej przez autorów metodzie rezonansowej wykorzystuje się kształt krzywej rezonansowej, bowiem spełnienie warunku dostrojenia obwodu do rezonansu jest spraw-

dzane w okolicy punktu jej największego nachylenia (punkt przegięcia), a nie w punkcie najmniejszego nachylenia (wierzchołek krzywej), co jest realizowane np. w Q-metrach i co nie pozwala uzyskać zadawalającej dokładności pomiaru w przypadku kondensatorów o dużych stratach [1].

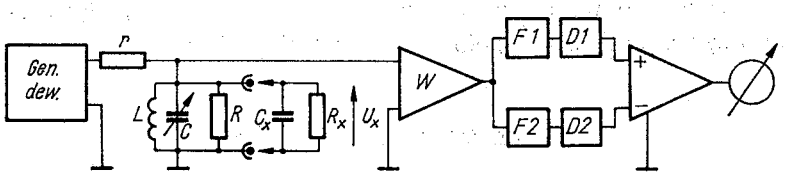
Impedancyjno-częstotliwościową charakterystykę rezonansową obwodu równoległego *RLC* w warunkach ustalonych przedstawia krzywa *1* na rys. 1.



Rys. 1. Krzywe rezonansowe obwodu równoległego
1 — bez pojemności mierzonej, *2* — po dołączeniu pojemności mierzonej, *3* — po dostrojeniu obwodu do rezonansu

Gdy równolegle do obwodu dołączymy mierzony kondensator ze stratami, krzywa rezonansowa ulegnie przesunięciu w lewo — wpływ pojemności, i spłaszczeniu — wpływ strat. Otrzymamy krzywą *2*.

W metodzie wykorzystuje się do pomiarów takie dwie pulsacje ω_1 i ω_2, przy których moduły impedancji obwodu rezonansowego w stanie zrównoważenia układu (krzywe *1* i 3) są sobie równe niezależnie od rezystancji strat. Przy założeniu prądowego zasilania obwodu rezonansowego przebiegi modułu impedancji Z_x i modułu napięcia U_x obwodu są podobne (patrz oznaczenie na rys. 2). W dalszych rozważaniach operuje się tylko modułem napięcia obwodu rezonansowgo, gdyż w tej metodzie pomiaru istotne jest tylko stwierdzenie takiego stanu, w którym moduły napięcia U_x przy obu częstotliwościach i jednakowym prądzie zasilającym obwód rezonansowy są sobie równe.



Rys. 2. Uproszczony schemat połączeń układu do pomiaru pojemności kondensatorów stratnych

W stanie początkowym, czyli bez pojemności mierzonej, amplitudy napięć o pulsacjach ω_1 i ω_2 są sobie równe. Po dołączeniu kondensatora ze stratami o mierzonej pojemności pojawi się różnica amplitud tych napięć. Pomiar polega na takim zmniejszeniu pojemności kondensatora wzorcowego, aby moduły napięć o pulsacjach ω_1 i ω_2 znów zrównały się ze sobą.

Ze względu na stosowany sposób równoważenia wygodniej jest przyjąć równoległy schemat zastępczy kondensatora ze stratami.

Na rys. 2. przedstawiono przykładowy schemat połączeń układu do pomiaru pojemności wyżej omawianą metodą.

Częstotliwość napięcia generatora dewiacyjnego zmienia się liniowo w funkcji czasu. Napięcie to poprzez rezystor doprowadzane jest do obwodu rezonansowego. Napięcie U_x tego obwodu po wzmocnieniu podaje się na filtry środkowoprzepustowe $F1$ i $F2$, dostrojone do pulsacji ω_1 i ω_2. Detektory $D1$ i $D2$ prostują szczytowo napięcia o tych pulsacjach, a uzyskane w ten sposób dwa napięcia stałe odejmują się od siebie we wzmacniaczu różnicowym. Napięcie wyjściowe tego wzmacniacza zanika w stanie dostrojenia obwodu do rezonansu.

3. ZALEŻNOŚCI ANALITYCZNE

3.1. Dobór wartości pulsacji pomiarowych ω_1 i ω_2

W równoległym obwodzie rezonansowym jak na rys. 2 moduł napięcia o pulsacji ω opisuje następująca zależność

$$U_x = U_g \frac{\omega LR}{\sqrt{R^2 r^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \omega^2 L^2 (R+r)^2}}, \tag{1}$$

gdzie:

ω_0 — pulsacja rezonansowa obwodu pomiarowego, tj. pulsacja odpowiadająca maksimum impedancji:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \tag{2}$$

Korzystając dwukrotnie z (1): raz dla $\omega = \omega_1$, drugi raz dla $\omega = \omega_2$ i przyrównując do siebie obydwa wyrażenia otrzymuje się warunek

$$\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2. \tag{3}$$

Jest to warunek konieczny na to, aby wynik pomiaru pojemności kondensatora nie zależał od rezystancji strat R, gdy rezystancja ta i pojemność C nie zależą od częstotliwości w pasmie od ω_1 do ω_2.

3.2 Obliczenie czułości bezwzględnej

Czułość bezwzględną S zdefiniowaną jako stosunek zmiany modułu napięcia ΔU_x do zmiany pojemności ΔC w pobliżu stanu dostrojenia obwodu do rezonansu możemy obliczyć różniczkując wyrażenie (1) względem pojemności C. Obliczona w ten sposób czułość S wyraża się wzorem:

$$S = \frac{\partial U_x}{\partial C} = U_g \frac{\omega^3 L^2 R^3 r^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}{[A(\omega)]^{3/2}}, \tag{4}$$

gdzie:

$$A(\omega) = R^2r^2\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\omega^2L^2(R+r)^2. \tag{5}$$

Rozpatrywana będzie tylko czułość bezwzględna ze względu na to, że omawiana metoda jest metodą zerową.

Ze schematu przedstawionego na rys. 2 wynika, że w metodzie wykorzystuje się różnicę czułości

$$S_w = S_1 - S_2, \tag{6}$$

gdzie:

S_1 — czułość obliczona przy pulsacji ω_1,

S_2 — czułość obliczona przy pulsacji ω_2.

Ponieważ $S_1 > 0$, a $S_2 < 0$ (pochodne modułu napięcia względem pojemności na obu zboczach krzywej rezonansowej mają różne znaki), czułość wypadkowa jest sumą modułów czułości przy obu pulsacjach.

Czułość wypadkową omawianej metody można traktować jako kryterium jakości układu. Optymalizacja układu będzie rozumiana dalej jako poszukiwanie takich warunków pracy obwodu pomiarowego, przy których występuje maksimum czułości.

3.3. Optymalna wartość indukcyjności obwodu rezonansowego

W celu określenia optymalnej ze względu na czułość wartości indukcyjności L_{opt} obwodu rezonansowego, wyznaczamy pochodną czułości wypadkowej względem indukcyjności L, a następnie przyrównujemy ją do zera. Otrzymujemy

$$L_{opt} = \frac{Rr}{\omega_1(R+r)}\left(1-\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right). \tag{7}$$

Indukcyjność należy optymalizować dla najgorszych warunków pracy układu, a więc dla najmniejszej rezystancji strat R.

4. ANALIZA BŁĘDÓW POMIAROWYCH

Poniżej będą rozważone błędy pomiarowe, wspólne przy każdej realizacji układu wykorzystującego omawianą metodę pomiarową. W każdej realizacji układu występują ponadto dodatkowe błędy, takie jak błąd związany z różnymi wartościami wzmocnienia wzmacniacza W, filtrów $F1$ i $F2$, detektorów $D1$ i $D2$ przy pulsacjach ω_1 i ω_2, błąd związany z niedokładnym dostrojeniem układu do rezonansu, błąd związany z zależnością pojemności C_x i rezystancji strat R_x od częstotliwości w pasmie od ω_1 do ω_2, błąd związany z progiem czułości, błąd temperaturowy itp., które nie będą tutaj analizowane.

Dwa podstawowe składniki błędu pomiarowego to: błąd częstotliwościowy związany z niespełnieniem warunku (3) oraz błąd amplitudowy wynikający z nierówności napięć U_g o pulsacjach ω_1 oraz ω_2.

4.1. Błąd częstotliwościowy

W pobliżu punktu pracy czułość opisuje się wzorem:

$$S_w \cong \frac{\Delta U_x}{\Delta C}; \tag{8}$$

stąd

$$\Delta C \cong \frac{\Delta U_x}{S_w}, \tag{9}$$

gdzie

$$\Delta U_x = U_{x1} - U_{x2}. \tag{10}$$

Wyrażenie (10) można przedstawić w postaci

$$\Delta U_x = \frac{U_{x1}^2 - U_{x2}^2}{U_{x1} + U_{x2}}. \tag{11}$$

Ponieważ rozpatrujemy bezpośrednie otoczenie punktu dostrojenia do rezonansu, więc

$$U_{x1} + U_{x2} \cong 2U_{x1}; \tag{12}$$

stąd

$$\Delta U_x \cong \frac{U_{x1}^2 - U_{x2}^2}{2U_{x1}}. \tag{13}$$

Wstawiając (13) do (9) otrzymujemy wyrażenie na błąd pomiaru pojemności

$$\Delta C \cong \frac{U_{x1}^2 - U_{x2}^2}{2U_{x1} S_w}. \tag{14}$$

Podstawiając do wzoru (14) zależność (1) raz dla $\omega = \omega_1$, drugi raz dla $\omega = \omega_2$ oraz zależność (4) otrzymujemy wzór na błąd pomiaru pojemności spowodowany niespełnieniem warunku (3)

$$\Delta C_f \cong \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)\left(1 - \dfrac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_0^4}\right)}{2(D+1)\omega_1^4 L\left(1 - \dfrac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right)} \frac{A(\omega_1)}{A(\omega_2)}, \tag{15}$$

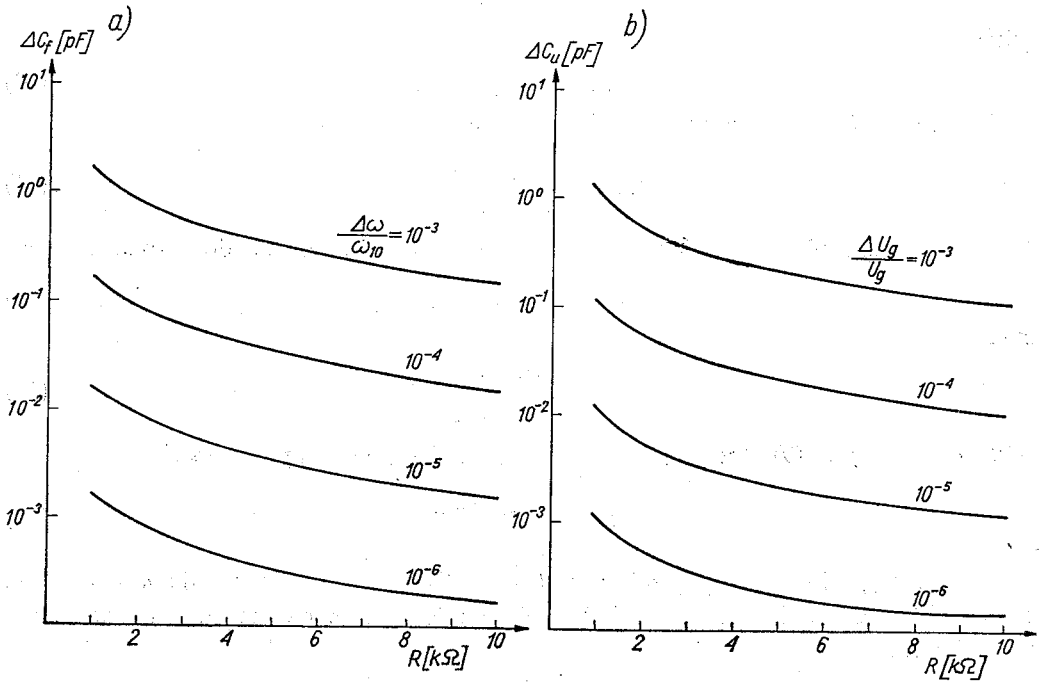
gdzie D — wartość bezwzględna stosunku pochodnej napięcia U_x względem pojemności dla pulsacji ω_2 do pochodnej dla pulsacji ω_1 ($\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$). Wielkość D charakteryzuje więc niesymetrię krzywej rezonansowej w układzie współrzędnych napięcie — pojemność; wyraża się ona wzorem:

$$D = \left[\frac{A(\omega_1)}{A(\omega_2)}\right]^{2/3} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^4. \tag{16}$$

Przyjmując $L = L_{opt}$, $\omega_1 = \omega_{10} + \Delta\omega$, $\omega_2 = \omega_{20}$ (przy $\omega_{10}\omega_{20} = \omega_0^2$), $\Delta\omega \ll \omega_{10}$, $R \ll r$, wyrażenie (15) można sprowadzić do postaci

$$\Delta C_f \cong \frac{\omega_{10} + \omega_{20}}{(D+1)\omega_{10} R(\omega_{20} - \omega_{10})} \frac{\Delta\omega}{\omega_{10}}. \tag{17}$$

Podstawiając do wzoru (17) następujące dane liczbowe: $\omega_{10} = 2\pi \cdot 10^5 \left[\frac{\text{rd}}{\text{s}}\right]$, $\omega_{20} = 4\pi \cdot 10^5 \left[\frac{\text{rd}}{\text{s}}\right]$, $R = 1$ [kΩ], $\frac{\Delta\omega}{\omega_{10}} = 10^{-5}$ otrzymano błąd bezwzględny pomiaru pojemności równy $\Delta C_f = 0{,}017$ [pF]. Na rys. 3a przedstawiono obliczoną ze wzoru (17) zależność błędu częstotliwościowego pomiaru pojemności od strat dla kilku wartości niestabilności częstotliwościowej generatora.



Rys. 3. Zależność bezwzględnego błędu pomiaru pojemności kondensatorów o dużych stratach od rezystancji strat

a) błąd częstotliwościowy przy różnych niestabilnościach częstotliwości generatorów, b) błąd amplitudowy przy różnych niestabilnościach amplitudy generatorów

4.2. Błąd amplitudowy

Jak już wspomniano, błąd amplitudowy wynika z nierówności napięć zasilających o pulsacjach ω_1 i ω_2 otrzymanych z generatorów. Podstawiając do wzoru (1) zamiast ω i U_g odpowiednio ω_1 i U_{g1} oraz ω_2 i U_{g2} i wykorzystując zależności (4), (14) można określić błąd amplitudowy pomiaru pojemności

$$\Delta C_u \cong \frac{[U_{g1}^2 - U_{g2}^2]A(\omega_1)}{2U_{g1}^2(D+1)\omega_1^2 LR^2 r^2\left(1-\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right)}. \tag{18}$$

Przy założeniach: $L = L_{opt}$, $U_{g2} = U_{g1} + \Delta U_g$, $\Delta U_g \ll U_{g1}$, $\omega_1\omega_2 = \omega_o^2$, $R \ll r$ wyrażenie (18) można sprowadzić do postaci

$$\Delta C_u \cong \frac{2}{(D+1)\omega_1 R} \frac{\Delta U_g}{U_g}. \tag{19}$$

Podstawiając do wzoru (19) następujące dane liczbowe: $\omega_1 = 2\pi \cdot 10^5 \left[\frac{\text{rd}}{\text{s}}\right]$, $\omega_2 = +4\pi \cdot 10^5 \left[\frac{\text{rd}}{\text{s}}\right]$, $R = 1$ [kΩ], $\frac{\Delta U_g}{U_g} = 10^{-5}$ otrzymano błąd amplitudowy pomiaru pojemności $\Delta C_u = 0{,}011$ [pF]. Na rys. 3b przedstawiono obliczoną ze wzoru (19) zależność błędu amplitudowego pomiaru pojemności od rezystancji strat dla kilku wartości niestabilności amplitudy generatora.

5. WNIOSKI

Z wyprowadzonych zależności wynika, że błąd pomiaru pojemności zależy nie tylko od błędu kondensatora wzorcowego ale i od przyjętych wartości pulsacji ω_1 i ω_2, rezystancji strat mierzonego kondensatora oraz od niestabilności częstotliwościowej i amplitudowej generowanych napięć o pulsacjach ω_1 i ω_2. Błąd amplitudowy może mieć praktycznie mniejszą wartość niż obliczona w p. 4.2, o ile zrealizowana zostanie taka stabilizacja napięć wyjściowych generatorów, która zapewni współbieżność ich zmian. Stabilizacja częstotliwości musi być zapewniona niezależnie w obu generatorach, gdyż współbieżność zmian częstotliwości generatorów nie jest w tym układzie korzystna. Należy zwrócić uwagę na to, że zmniejszenie o rząd stabilności zarówno amplitudowej jak i częstotliwościowej generatorów powoduje wzrost odpowiednio błędu częstotliwościowego lub amplitudowego również o rząd. Zwiększenie rezystancji strat R pojemności mierzonej powoduje zmniejszenie błędu pomiaru pojemności.

Górną wartość pojemności mierzonej określa wartość pojemności w obwodzie rezonansowym, przy której można uzyskać optymalne warunki pomiaru. Gdy mamy przyjęte wartości ω_o i ω_1, ze wzoru (7) otrzymuje się L_{opt}, przy której czułość jest maksymalna. Mierzona pojemność musi być mniejsza od pojemności w obwodzie rezonansowym. Przy pomiarach większych pojemności i tych samych ω_o i ω_1 następuje zmniejszenie czułości.

Omawiana metoda pozwala na uniezależnienie wyniku pomiaru pojemności od strat w szerokim zakresie $\operatorname{tg}\delta$. Z obliczeń przeprowadzonych w p. 4 wynika, że metoda pozwala mierzyć pojemności o $\operatorname{tg}\delta = 300$ z błędem 1% przy niestabilności częstotliwości generatorów 10^{-5} i niestabilności amplitudy 10^{-5}, co oznacza, że w schemacie zastępczym równoległym prąd płynący w gałęzi pojemnościowej jest 300 razy mniejszy niż prąd płynący przez rezystancję.

Wyrażenia na błąd metody wynikający z niestabilności częstotliwości i niestabilności amplitudy generatorów oraz przebieg wykresów podanych na rys. 3a i rys. 4b zwracają uwagę na konieczność zapewnienia dużej stabilności częstotliwościowej i amplitudowej generatorów dostarczających sygnały o pulsacjach pomiarowych ω_1 i ω_2. Z tego też powodu realizację układu pomiarowego z użyciem generatora dewiacyjnego zaproponowaną w [2] należy uznać za nieprzydatną do dokładnego pomiaru pojemności kondensatorów o dużych stratach.

W pracy [3] przedstawiono zrealizowany układ do pomiaru pojemności kondensatorów o dużych stratach, w którym zamiast generatora dewiacyjnego zastosowano dwa stabilizowane generatory dostarczające napięć o pulsacjach ω_1 i ω_2. Podstawowe parametry układu: $\omega_1 = 83{,}2 \cdot 10^6 \left[\frac{\text{rd}}{\text{s}}\right]$, $\omega_0 = 94{,}5 \cdot 10^6 \left[\frac{\text{rd}}{\text{s}}\right]$, $L = 300$ [μH], $R = 1 \div 10$ [kΩ]. W tym zakresie rezystancji strat uzyskano błąd średniokwadratowy pomiaru pojemności mniejszy od $\sigma_c = 0{,}25$ [pF]. Stwierdzono, że dla $R < 1$ [kΩ] dokładność pomiaru pojemności wraz z maleniem wartości R gwałtownie maleje, co spowodowane jest zmniejszaniem się czułości. Natomiast dla $R > 1$ [kΩ] błąd średniokwadratowy pomiarów był w zasadzie stały, co potwierdza przydatność metody w tym zakresie zmian rezystancji strat R.

LITERATURA

1. K. Bracławski, *Metody pomiaru nieliniowych pojemności elementów półprzewodnikowych oparte na zamkniętej przemianie częstotliwości*, praca doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 1970.
2. V. Malikov, M. Bandak, *Avtomatičeskoje izmierienie sostavlajuščich jomkostnovo preobrazovatiela*, Informacjonno-izmieritielnyje sistemy, izd. Višča škola, Kijów 1974.
3. T. Wierzbica, G. Pankanin, *Układ do pomiaru pojemności o dużych stratach z wykorzystaniem metody rezonansowej*, materiały z XII Międzyuczelnianej Narady Metrologów, Poznań 1977.

G. PANKANIN, T. WIERZBICA

RESONANCE-DIFFERENTIAL METHOD OF MEASURING CAPACITY OF CAPACITORS WITH HIGH LOSSES

Summary

The article presents a conception of a resonance-differential method of measuring capacity of capacitors with high losses. We present analytical considerations leading to the formulation of optimum conditions for the method. The considerations of method error permit a suitable selection of generator parameters.

G. PANKANIN, T. WIERZBICA

MÉTHODE RÉSONNANTE-DIFFÉRENTIELLE DE MESURE DE CAPACITÉ DES CONDENSATEURS À PERTES IMPORTANTES

Résumé

L'objet de l'article est de présenter la conception de la méthode résonnante-différentielle de mesure de capacité à haut facteur de dissipation. L'analyse du problème mène à formuler des conditions du fonctionnement optimal d'un sytème élaboré d'après cette méthode. Les résultats des recherches sur l'erreur de la méthode permettent de construire des générateurs aux paramètres requis.

G. PANKANIN, T. WIERZBICA

RESONANZ-DIFFERENTIAL-METHODE FÜR KAPAZITÄTSMESSUNGEN BEI GROßEN VERLUSTEN

Zusammenfassung

Im Artikel is eine neue Konzeption einer Resonanz-Differential-Methode dargestellt worden, die für Kapazitätsmessungen bei großen Verlusten geeignet ist. Die Analyse des Problems führt zur Bestimmung von Bedingungen für die Schaltungsoptimierung. Die Fehleranalyse der Methode gestattet, richtige Parameter für Oszillatorschaltungen zu wählen.

Г. ПАНКАНИН, Т. ВЕЖБИЦА

РЕЗОНАНСО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ЕМКОСТИ КОНДЕНСАТОРОВ С БОЛЬШИМИ ПОТЕРЯМИ

Резюме

В статье представлена концепция резонансо-дифференциального метода измерения емкости конденсаторов с большими потерями. Представлены аналитические рассуждения ведущие к сформулированию условий оптимальной работы системы построенной на базе этого метода. Анализ погрешностей метода позволяет на оптимальный подбор параметров генерационных схем.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1978, 24, z. 2, ss. 307 - 313

621.315.592

Interpretacja charakterystyk statycznych zaporowo spolaryzowanego krzemowego złącza *p-n*

WITOLD J. STEPOWICZ (GDAŃSK)

Instytut Technologii Elektronicznej Politechniki Gdańskiej

Otrzymano 30.12.1976

W pracy omówiono charakterystyki statyczne zaporowo spolaryzowanego krzemowego złącza *p-n*, którego prąd wsteczny obliczono uwzględniając wpływ zjawiska jonizacji zderzeniowej na objętościowy prąd generacji. Otrzymane w ten sposób charakterystyki posiadają odcinek prawie prostoliniowy. Wynika stąd, że nie jest konieczne wprowadzanie do układu zastępczego złącza elementu liniowego, tzw. konduktancji upływu, w celu modelowania czy interpretacji odcinka prostoliniowego charakterystyk $i(u)$ złącza.

1. WSTĘP

W krzemowym złączu *p-n* spolaryzowanym zaporowo można wyróżnić następujące składowe prądu:

1. prąd generacji uwarunkowany zjawiskiem generacji nośników w warstwie ładunku przestrzennego. Zależność prądu generacji i_g od napięcia u jest następująca

$$i_g = B(U_D+u)^m, \tag{1}$$

gdzie:

B — stała niezależna od napięcia,
U_D — napięcie dyfuzyjne,
m — wykładnik zależny od technologii złącza, dla złącza skokowego $m = 1/2$, dla złącza liniowego $m = 1/3$;

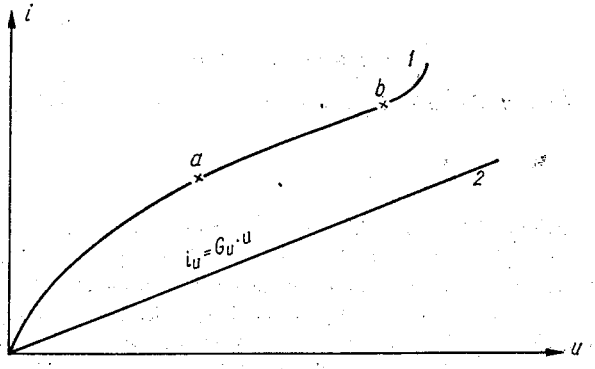
2. prąd dyfuzyjny uwarunkowany zjawiskiem generacji nośników w obszarach przyzłączowych. Dla napięć wstecznych $|u| > 4U_T$ jest on stały, równy prądowi nasycenia złącza. W złączach krzemowych prąd dyfuzyjny w temperaturze $T = 300$ K jest dużo mniejszy, przeważnie około 10^3 razy, od prądu generacji;
3. prąd tunelowy związany z przejściami pasmo-pasmo elektronów. Odgrywa on istotną rolę przy małych szerokościach warstwy ładunku przestrzennego;
4. prąd upływnościowy określony przez zjawiska związane z powierzchnią złącza, takie jak powstanie kanału inwersyjnego, dyslokacje, generacja i rekombinacja nośników na powierzchni i in. Często zakłada się, że prąd upływnościowy jest liniowo zależny od napięcia na złączu a współczynnikiem proporcjonalności jest konduktancja upływu G_u.

Prąd generacji i dyfuzyjny zwiększają się wskutek zjawiska jonizacji zderzeniowej przy

wzroście napięcia. Powielanie nośników tworzących prąd upływnościowy zależy od rozkładu natężenia pola elektrycznego. Dla dużych wartości natężenia pola przy powierzchni złącza może zajść przebicie lokalne.

Typowy kształt charakterystyki prądowo-napięciowej rzeczywistego złącza krzemowego pokazany jest na rys. 1. Charakterystykę tę interpretuje się jako superpozycję zależności (1) dotyczącej prądu generacji oraz prądu upływu i_u, co można zapisać

$$i = i_g + i_u = B(U_D + u)^m + G_u u. \tag{2}$$



Rys. 1. Charakterystyki wsteczne złącza *p-n*

Niekiedy zamiast prądu generacji wprowadza się do wzoru (2) prąd dyfuzyjny złącza, co dla złącz krzemowych jest niesłuszne. Prawie liniowy przebieg charakterystyki na odcinku *a-b* wiąże się z dominacją prądu upływu na tym odcinku, co daje możliwość wyznaczenia konduktancji upływu według

$$G_u = \frac{i_a - i_b}{u_a - u_b}. \tag{3}$$

Przedstawiony powyżej bardzo uproszczony sposób wyznaczania konduktancji upływu może być zastąpiony wyznaczaniem parametrów przyjętego modelu złącza za pomocą maszyny cyfrowej na podstawie pomierzonej charakterystyki $i(u)$. Oczywiście w modelu takim, podobnie jak w równaniu (2), z góry zakłada się istnienie konduktancji upływu.

Modele diod zawierające konduktancję upływu stosowane są zarówno w podręcznikach akademickich, np. [3], jak i w pracach dotyczących modelowania elementów, np. [5].

W niniejszej pracy udowodniono, że uwzględnienie wpływu zjawiska jonizacji zderzeniowej na prąd generacji daje w wyniku kształt charakterystyki $i(u)$ złącza z wyraźnie zaznaczonym odcinkiem prawie prostoliniowym. Tak więc zmierzony liniowy przebieg charakterystyki $i(u)$ złącza wcale nie musi być interpretowany jako istnienie prądu upływu mającego świadczyć o wpływie zjawisk powierzchniowych na właściwości elementu.

2. CHARAKTERYSTYKI WSTECZNE KRZEMOWEGO ZŁĄCZA *p-n* Z UWZGLĘDNIENIEM ZJAWISKA JONIZACJI ZDERZENIOWEJ

W przedstawionej poniżej analizie zakłada się, że całkowity prąd wsteczny jest określony przez prąd generacji ulegający zwiększeniu wskutek zjawiska jonizacji zderzeniowej.

Efekt powielania liczby nośników prądu charakteryzuje współczynnik powielania M, którego zależność od napięcia może być określona następująco

$$M = \frac{1}{1-\left(\frac{u}{U_{PL}}\right)^n}, \tag{4}$$

gdzie U_{PL} oznacza napięcie przebicia złącza, tj. wartość napięcia, przy której $M = \infty$. W zależności (4), podanej po raz pierwszy przez Millera, wartość wykładnika n wyznaczona doświadczalnie dla krzemu wynosi $n = 1 \div 6$ [4]. Wartość tego wykładnika, według cytowanej powyżej pracy, zależy zarówno od rezystywności krzemu jak i stosunku u/U_{PL} : im większa rezystywność krzemu tym mniejsza wartość wykładnika n, oraz im bliższa jedności wartość u/U_{PL} tym większa wartość n. Wpływ stosunku napięć u/U_{PL} na wartość wykładnika n nie znajduje potwierdzenia w innych pracach, np. [1]. W dalszej analizie pomija się wzrost temperatury złącza wywołany wydzielaniem mocy elektrycznej w złączu oraz rozważa się zakres napięć, w którym

$$|u| \gg U_D. \tag{5}$$

Ostatecznie więc analizowana zależność $i(u)$ ma postać

$$i = \frac{Bu^m}{1-\left(\frac{u}{U_{PL}}\right)^n}. \tag{6}$$

W celu wykreślenia zależności według (6) wprowadzono zmienne znormalizowane

$$Y = \frac{u}{U_{PL}}, \qquad X = i(u)\frac{1}{B}\left(\frac{100}{U_{PL}}\right)^m. \tag{7}$$

Zależność między zmiennymi znormalizowanymi jest następująca

$$X = \frac{(100Y)^m}{1-Y^n}. \tag{8}$$

Normalizację prądu przeprowadzono tak, aby był spełniony warunek

$$X(0{,}01\ Y) = 1. \tag{9}$$

Warunek ten, jak wynika z równania (8), jest spełniony dla $n \geqslant 1$ z błędem nie większym niż 1%.

Rys. 2 przedstawia krzywe obliczone według (8) dla złącza skokowego ($m = 1/2$) dla $n = 1$ i $n = 6$ (krzywe ciągłe) oraz dla złącza liniowego ($m = 1/3$) dla $n = 1$ i $n = 6$ (krzywe przerywane). Krzywe dla określonego m dla innych wartości wykładnika n z przedziału $1 \div 6$ leżą między wykresami dla przyjętych skrajnych wartości n. Jak widać z rys. 2, kształt charakterystyk zależy od wartości wykładnika n — im większa jego wartość, tym charakterystyki są bardziej strome. Dla wartości $n = 1$ wykreślone charakterystyki mają wyraźnie „miękki" przebieg, mimo, że analiza nie uwzględnia żadnych efektów powierzchniowych.

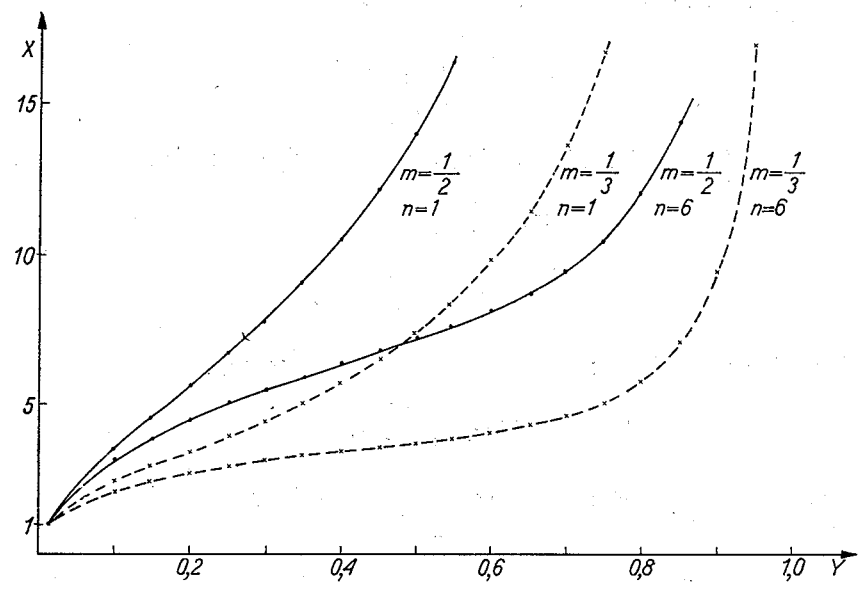
Z przebiegu charakterystyk wynika, że konduktancja różniczkowa złącza początkowo maleje ze wzrostem napięcia aż do punktu przegięcia charakterystyk $i(u)$, a następnie rośnie w miarę, gdy napięcie zbliża się do wartości U_{PL}. Wokół punktu przegięcia krzywych $i(u)$ istnieje przedział napięcia, w którym zależność $i(u)$ jest prawie liniowa, tzn. przedział, w którym konduktancja różniczkowa złącza pozostaje prawie stała. Aby określić szerokość tego przedziału ΔY oraz ustalić jego położenie na osi Y, obliczono konduktancję różniczkową złącza. Na podstawie (6) uzyskano wzór

$$g_d = \frac{di}{du} = \frac{mBu^{m-1}}{(1-Y^n)^2}\left[1+\left(\frac{n}{m}-1\right)Y^n\right]. \tag{10}$$

Obliczenie $\frac{d^2i}{du^2}$ doprowadziło do uzyskania następującego równania, pozwalającego wyznaczyć wartość Y_{ex}, dla której konduktancja różniczkowa złącza przyjmuje wartość minimalną

$$Y_{ex}^{2n}\left[\left(\frac{n}{m}-1\right)(n-m+1)\right]+Y_{ex}^{n}\left[2(n-m+1)+\frac{n}{m}(n-1)\right]+(m-1)=0. \tag{11}$$

Wartości Y_{ex} dla różnych wartości n i m podaje tablica 1.



Rys. 2. Znormalizowana zależność $X = f(Y)$ obliczona według (8).

Z przedstawionych danych wynika, że ze wzrostem wykładnika n punkt przegięcia funkcji $i(u)$ przesuwa się w stronę większych napięć. Przedział $\Delta Y = Y_2 - Y_1$ określono jako zakres Y, w którym wartość rezystancji różniczkowej nie różni się więcej niż o 10% od wartości maksymalnej w punkcie $Y = Y_{ex}$. Tablica 1 podaje wyniki obliczeń szerokości przedziału ΔY dla różnych wartości m i n. Jak widać, przedział ΔY zajmuje około 20% pełnego zakresu napięciowego, słabo zależąc od wartości m i n. Natomiast położenie granic przedziału ΔY, tj. wartości Y_1 i Y_2, zależy od wartości m i n i jest następujące

$$Y_1 \geqslant 0{,}08, \quad Y_2 \leqslant 0{,}54. \tag{12}$$

Tablica 1

Wartości Y_{ex} dla różnych wartości n i m

	m \ n	1	2	3	4	5	6
Y_{ex}	1/2	0,155	0,231	0,295	0,350	0,396	0,434
	1/3	0,171	0,235	0,295	0,347	0,392	0,431
Y_1		0,076	0,133	0,185	0,230	0,269	0,303
Y_2	1/2	0,267	0,348	0,412	0,464	0,508	0,543
ΔY		0,191	0,215	0,227	0,234	0,239	0,240
Y_1		0,092	0,146	0,197	0,243	0,283	0,318
Y_2	1/3	0,281	0,344	0,401	0,450	0,492	0,528
ΔY		0,189	0,198	0,204	0,207	0,209	0,210

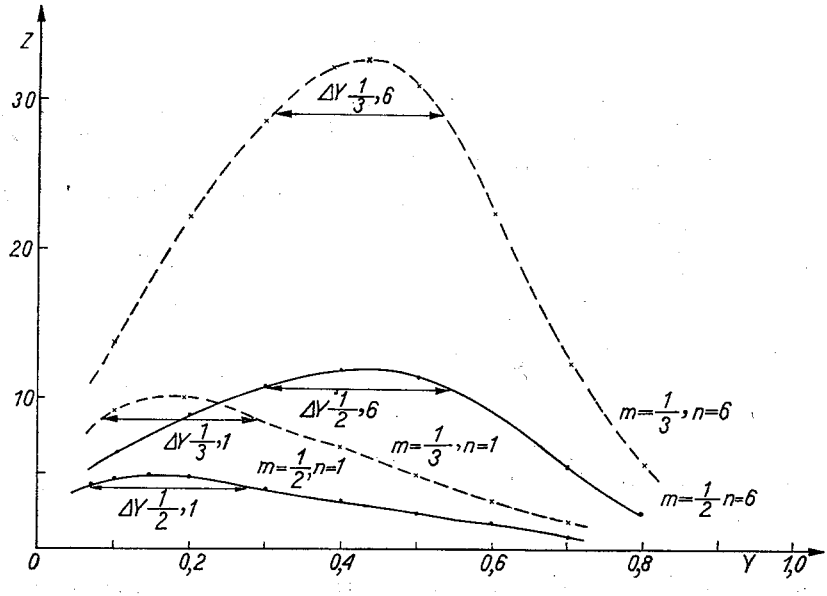
W celu wykreślenia zależności rezystancji różniczkowej od napięcia wprowadzono zmienną

$$Z = r_d(u)B\left(\frac{U_{PL}}{100}\right)^{m-1}. \tag{13}$$

Wówczas zależność $Z(Y)$ ma postać

$$Z = \frac{(1-Y^n)^2}{m(100Y)^{m-1}}\left[1+\left(\frac{n}{m}-1\right)Y^n\right]^{-1}. \tag{14}$$

Rys. 3 pokazuje przebieg funkcji $Z(Y)$ obliczony według (14). Krzywe ciągłe dotyczą złącza skokowego ($m = 1/2$) dla wartości $n = 1$ i $n = 6$, zaś krzywe przerywane dotyczą



Rys. 3. Znormalizowana zależność $Z = f(Y)$ obliczona według (14)

złącza liniowego ($m = 1/3$) także dla $n = 1$ i $n = 6$. Na wykresie zaznaczono położenie przedziału ΔY, w którym wartość rezystancji różniczkowej różni się o mniej niż 10% od wartości maksymalnej w punkcie $Y = Y_{ex}$.

3. WNIOSKI

Przedstawione obliczenia wykazały, że charakterystyka wsteczna krzemowego złącza *p-n*, w którym prąd wynika z uwzględnienia wpływu zjawiska jonizacji zderzeniowej na prąd generacji, posiada odcinek prawie prostoliniowy. Wynika stąd wniosek, że w pomierzonych charakterystykach $i(u)$ diody ich przebieg liniowy w pewnym zakresie napięć nie musi świadczyć o wpływie zjawisk powierzchniowych na te charakterystyki.

Zależność (6) może stanowić podstawę do modelowania zachowania złącza krzemowego spolaryzowanego zaporowo. Z tablicy 1 wynika, że wpływ zjawiska jonizacji zderzeniowej na charakterystyki $i(u)$, ujawniający się maleniem rezystancji różniczkowej, widoczny jest już nawet przy napięciach rzędu $0{,}2U_{PL}$ dla małych wartości n. Widać to na podstawie danych dotyczących położenia punktu przegięcia charakterystyk $i(u)$ o współrzędnej Y_{ex}.

Pozostaje oczywiście do rozwiązania problem jak należy, w razie potrzeby, przedstawić w modelu złącza zjawiska fizyczne związane z powierzchnią złącza. Należy sądzić, że opis tych zjawisk poprzez wprowadzenie prądu upływu liniowego zależącego od napięcia jest zbyt uproszczony. Dla przykładu, Inkson [2] wykazał, że prąd wsteczny związany z powstaniem powierzchniowego kanału inwersyjnego zależy od napięcia według

$$i \doteq u^{1/2}, \tag{15}$$

a więc identycznie jak zależy od napięcia prąd generacji złącza skokowego.

LITERATURA

1. C. D. Bulucea, D. C. Prisecaru, *The calculation of the avalanche multiplication factor in silicon p-n junction taking into account the carrier generation (thermal or optical) in the space-charge region*, IEEE Trans. on El. Dev., ED-20, 8, 1973.
2. J. C. Inkson, *An investigation of inversion layer induced leakage current in abrupt p-n junction*, Solid State Electronics, 13, 1970.
3. A. Świt, J. Pułtorak, *Przyrządy półprzewodnikowe*, WNT, Warszawa 1976.
4. H. Wolff, *Półprzewodniki*, WNT. Warszawa 1975.
5. B. Wolszczak, *Model tranzystora bipolarnego w programach analizy układów elektronicznych*, Elektronika, 13, 7—8, 1972.

W. J. STEPOWICZ

INTERPRETATION OF DC CHARACTERISTICS OF REVERSE-BIASED SILICON *P-N* JUNCTION

Summary

In this paper the DC characteristics of a reverse-biased silicon junction are derived on the assumption that the reverse current of a junction is formed by the carriers generated in the space-charge region, subjected

to an impact ionization. The obtained characteristics have a nearly linear segment. Therefore it can be concluded that there is no necessity to include the shunt conductance in an equivalent circuit of a junction in order to model or to interpret the linearity of the DC characteristics.

W. J. STEPOWICZ

INTERPRÉTATION DES CARACTÉRISTIQUES STATIQUES D'UNE JONCTION *p-n* EN SILICIUM POLARISÈE À BLOCAGE

Résumé

Dans l'ouvrage on a décrit les caractéristiques statiques de la jonction *p-n* en silicium polarisée à blocage et on a calculé son courant inverse prenant en considération l'influence du phénomène d'ionisation par chocs sur le courant de capacité de la génération. Les caractéristiques obtenues de cette manière possèdent un segment presque rectiligne. Il en résulte, qu'il n'est pas obligatoire d'introduire dans le système remplacant un élément linéaire, c'est à dire la conductance de fuite pour modelér ou interpréter le segment rectiligne des caractéristiques $i(u)$ de la jonction.

W. J. STEPOWICZ

INTERPRETATION VON KENNLINIEN DES RÜCKWÄRTSPOLARISIERTEN SILIZIUM-ÜBERGANGS *P-N*

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurden die Kennlinien des rückwärtspolarisierten Silizium-Übergangs *P-N* gefunden u.zw. unter der Annahme, daß der Rückstrom bei den in der Sperrschicht generierten Ladungsträgern gebildet wird, und daß diese Ladungsträger von der impakten Ionisation beeinflußt werden. Die berechneten Kennlinien weisen eine fast lineare Strecke auf. Daraus folgt, daß keine Notwendigkeit besteht, einen Ohmschen Leitwert in des Ersatzschema des Übergangs einzuführen, um den Übergang zu modellieren oder seine Kennlinien zu interpretieren.

В. И. СТЕПОВИЧ

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ВОЛЬТАМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КРЕМНИЕВОГО *p-n* ПЕРЕХОДА ПРИ ОБРАТНОМ СМЕЩЕНИИ

Резюме

Описаны вольтамперные характеристики кремниевого *p-n* перехода при обратном смещении, ток которого вычислен с учетом влияния явления ударной ионизации на ток генерации в запирающем слое. Полученные таким образом характеристики содержат почти линейный отрезок. Поэтому при моделировании или интерпретации вольтамперных характеристик нет необходимости вводить в эквивалентную схему перехода линейной проводимости.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1978, 24, z. 2, ss. 315-332

621.315.592

Problemy aproksymacji charakterystyk prądowo-napięciowych diod tunelowych

BOGDAN MOESCHKE (WARSZAWA), MAREK STABROWSKI (WARSZAWA)

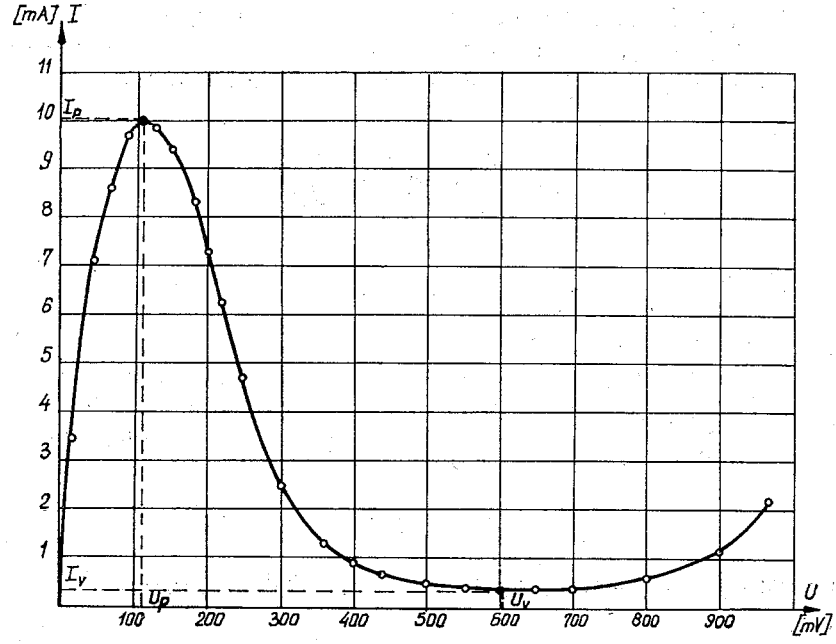
Instytut Elektrotechniki Teoretycznej i Miernictwa Elektrycznego Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 31.1.1977

Przedstawiono podstawowe metody aproksymacji charakterystyk diod tunelowych: „fizyczną", wykładniczą i metody wielomianowe. Opisano algorytmy komputerowych programów aproksymacji. Wyniki przykładowych obliczeń zestawiono z wynikami pomiarów.

1. PODSTAWOWE PROBLEMY BADANIA I APROKSYMACJI CHARAKTERYSTYK DIOD TUNELOWYCH

Analiza układów z diodami tunelowymi wymaga bardzo często przedstawienia charakterystyki prądowo-napięciowej diody w formie analitycznej. Znalezienie takiej dość uniwersalnej zależności analitycznej pozwoliłoby także m. in. ograniczyć liczbę pomiarów



Rys. 1. Eksperymentalna charakterystyka prądowo-napięciowa diody tunelowej z arsenku galu typu АИ-301Г; punkt szczytu (U_p, I_p); punkt doliny (U_v, I_v)

wykonywanych przy badaniu tych elementów. Jest to dość istotne, gdyż eksperymentalne wyznaczanie charakterystyk diod tunelowych jest kłopotliwe i wiąże się z potrzebą używania unikalnej aparatury, zwłaszcza głowic pomiarowych [3, 7, 8]. O wiele prostszy jest pomiar współrzędnych punktu szczytowego i dolinowego charakterystyki diody (rys. 1). Niektóre metody aproksymacji pozwalają podać funkcję opisującą charakterystykę diody już w oparciu o tak skąpe dane pomiarowe.

Metody aproksymacji charakterystyk diod tunelowych można podzielić na dwie podstawowe grupy: grupę metod nawiązującą do procesów fizycznych zachodzących w diodzie i grupę metod polegających na dobieraniu funkcji przybliżających charakterystyki wyznaczone eksperymentalnie. W drugiej grupie metod aproksymacji metoda wykorzystująca funkcje wykładnicze prowadzi do rezultatów podobnych jak aproksymacja „fizyczna". Poza tym najczęściej stosowany w drugiej grupie typ funkcji to wielomiany różnych stopni i linie proste (linearyzacja odcinkowa). Poszczególne metody aproksymacji zbadano opracowując odpowiednie programy komputerowe. Wyniki rozważań teoretycznych porównano z wynikami doświadczalnymi oraz oszacowano dokładność i przydatność badanych metod aproksymacji.

2. APROKSYMACJA UWZGLĘDNIAJĄCA PROCESY FIZYCZNE ZACHODZĄCE W DIODZIE

Zjawiska zachodzące w diodzie tunelowej są bardzo złożone i prowadzą do skomplikowanych równań opisujących charakterystykę diody tunelowej [5, 6, 7, 8]. Ich praktyczna użyteczność jest wątpliwa, zwłaszcza że niektóre równania należy rozwiązywać oddzielnie dla poszczególnych odcinków charakterystyki. Przy znacznym zdegenerowaniu obu obszarów złącza *p-n* diody można jednak otrzymać [1, 2, 7] dość proste wyrażenie dla prądu tunelowego I_t

$$I_t = \frac{I_p}{U_p} U \exp\left(1 - \frac{U}{U_p}\right), \tag{1}$$

gdzie:

I_p — prąd szczytu,

U_p — napięcie szczytu,

U — napięcie diody tunelowej.

Dokonano porównania wartości otrzymanych z powyższej zależności z wartościami wyznaczonymi eksperymentalnie dla diod krzemowych, germanowych i z arsenku galu. Wartości otrzymane obliczeniowo i eksperymentalnie, a także względne wartości różnicy

$$\gamma_a = \frac{(I_t)_o - (I_t)_w}{(I_t)_w}, \tag{2}$$

w której indeks „o" oznacza wartości obliczone, a indeks „w„ — zmierzone, podano w tablicy 1.

Z danych zawartych w tablicy 1 wynika, że w pobliżu punktu szczytu dokładność aproksymacji charakterystyk badanych diod jest zadowalająca. Przyjmując jako dopusz-

Tablica 1

Aproksymacja charakterystyk diod tunelowych za pomocą uproszczonego równania „fizycznego"

Si — 1 N 2930					Ge — 1 N 3713					GaAs — АИ-301Г				
U_p = 68,20 mV, I_p = 4,850 mA					U_p = 64,69 mV, I_p = 0,998 mA					U_p = 115,00 mV, I_p = 10,041 mA				
U [mV]	$\frac{U}{U_p}$	$(I_t)_w$ [mA]	$(I_t)_o$ [mA]	γ_a [%]	U [mV]	$\frac{U}{U_p}$	$(I_t)_w$ [mA]	$(I_t)_o$ [mA]	γ_a [%]	U [mV]	$\frac{U}{U_p}$	$(I_t)_w$ [mA]	$[I_t]_o$ [mA]	γ_a [%]
10	1,1466	1,293	1,668	+29,00	10	0,1546	0,323	0,359	+11,15	10	0,0870	1,788	2,177	+21,76
20	0,2932	2,590	2,884	+11,35	20	0,3092	0,576	0,616	+6,94	20	0,1739	3,406	3,988	+17,09
40	0,5865	4,302	4,298	−0,11	40	0,6183	0,890	0,904	+1,57	50	0,4348	7,149	7,723	+8,03
50	0,7332	4,695	4,644	−1,09	50	0,7729	0,967	0,969	+0,20	80	0,6957	9,297	9,395	+0,98
60	0,8798	4,792	4,811	+0,40	60	0,9275	0,997	0,995	+0,20	100	0,8696	9,911	9,944	+0,33
70	1,0264	4,820	4,850	+0,62	70	1,0821	0,966	0,995	+3,00	110	0,9565	10,031	10,024	−0,12
80	1,1730	4,763	4,785	+0,46	80	1,2367	0,893	0,965	+8,06	120	1,0435	10,023	10,062	+0,38
90	1,3196	4,645	4,507	−2,97	90	1,3913	0,785	0,939	+19,62	130	1,1304	9,918	9,967	+0,90
100	1,4661	4,483	4,462	−0,47	100	1,5460	0,679	0,895	+31,81	150	1,3044	9,462	9,673	+2,23
120	1,7595	4,158	3,994	−3,94	120	1,8550	0,541	0,787	+45,47	180	1,5652	8,333	8,915	+6,53
140	2,0528	3,775	3,474	−7,97	140	2,1642	0,438	0,674	+53,88	200	1,739	7,364	8,345	+13,32
180	2,6393	3,080	2,451	−20,42	160	2,4733	0,361	0,566	+56,79	220	1,9130	6,302	7,708	+22,31
200	2,9322	2,783	2,113	−24,07	180	2,7825	0,286	0,467	+63,29	250	2,1739	4,671	6,747	+44,44
220	3,2258	2,516	1,688	−32,91	200	3,0917	0,224	0,400	+78,57	300	2,6094	2,500	5,246	+109,84
240	3,5191	2,263	1,374	−39,28	220	3,4008	0,184	0,308	+67,39	360	3,1304	1,248	3,732	+199,20
260	3,8123	2,058	1,111	−46,02	260	4,0192	0,136	0,196	+44,12	400	3,4783	0,868	2,930	+237,56
300	4,3988	1,705	0,712	−58,24	300	4,6375	0,106	0,121	+14,15	500	4,3478	0,498	1,526	+206,43

czalny dziesięcioprocentowy błąd aproksymacji, otrzymuje się następujące przedziały użyteczności wzoru (1):
— diody krzemowe (1N2930) → $(0{,}6 \div 2{,}0)\ U_p$,
— diody germanowe (1N3713) — $(0{,}3 \div 1{,}2)\ U_p$,
— diody z arsenku galu (АИ-301Г) — $(0{,}4 \div 1{,}6)\ U_p$.
Zakresy te, dość szerokie dla diod krzemowych i z arsenku galu, są mniejsze, zwłaszcza przy napięciach większych od napięcia U_p, dla diod germanowych. Błędy aproksymacji są znaczne dla napięć $U \gg U_p$, przy czym dla diod krzemowych i z arsenku galu wartości ich rosną ze wzrostem napięcia. Jest to dość oczywiste, gdyż wzór (1) uwzględnia tylko współrzędne punktu szczytu. W zakresie opadającej części charakterystyki diody $I = f(U)$ wartości prądu obliczone ze wzoru (1) są dla diod germanowych i z arsenku galu większe niż wartości eksperymentalne. Inaczej jest w przypadku diod krzemowych. Warto zauważyć, że dane wyjściowe do wzoru aproksymacyjnego (1) podawane są we wszystkich katalogach diod tunelowych.

3. APROKSYMACJA ZA POMOCĄ FUNKCJI WYKŁADNICZYCH

Aproksymacja za pomocą funkcji wykładniczych należy do drugiej grupy metod aproksymujących, bazujących na danych eksperymentalnych. Ten typ funkcji aproksymujących [2, 7, 8] wykorzystuje się zarówno do opisu części charakterystyki diody — dla napięć mniejszych do napięcia doliny U_v, jak i do opisu całej charakterystyki. W pierwszym przypadku funkcja aproksymująca ma postać

$$I = I_p \left(\frac{U}{U_p}\right)^a \exp\left[a\left(1 - \frac{U}{U_p}\right)\right] \tag{3}$$

lub też

$$I = AU \exp(-aU). \tag{4}$$

Obie te postaci funkcji aproksymującej są zbliżone do podanego wcześniej wzoru (1) określającego prąd tunelowy diody. Uwzględnienie prądu dyfuzyjnego za pomocą dodatkowego członu wykładniczego pozwala opisać całą charakterystykę diody zależnością

$$I = AU \exp(-aU) + B(\exp bU - 1). \tag{5}$$

W dalszych rozważaniach wykorzystano tę pełną zależność (5). Stałe A, a, B, b określono stosując następującą metodykę.

Dla napięć mniejszych od napięcia doliny, drugi składnik wyrażenia (5) może być pominięty, co pozwala na sprowadzenie tego wyrażenią do postaci (4). Po przekształceniach

$$\ln\frac{I}{U} = \ln A - aU. \tag{6}$$

Równanie (6) w układzie współrzędnych $\ln\frac{I}{U}$ i U jest równaniem prostej o współczynniku kierunkowym a i wartości funkcji dla $U = O$ równej $\ln A$ (rys. 2).

W obszarze charakterystyki $I = f(U)$, w którym decydującą rolę odgrywa prąd dyfuzyjny, można pominąć pierwszy składnik w wyrażeniu (5), co daje:

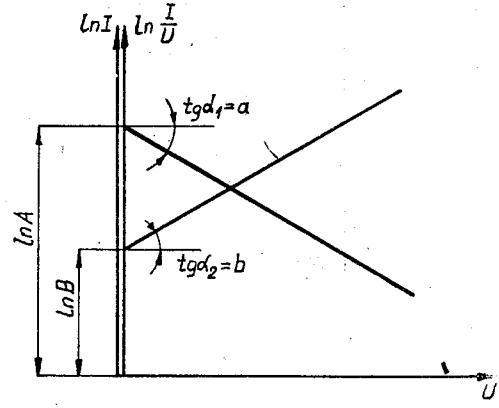
$$I \approx B(\exp bU - 1), \tag{7}$$

a dla $\exp bU \gg 1$

$$I \approx B \exp bU$$

i

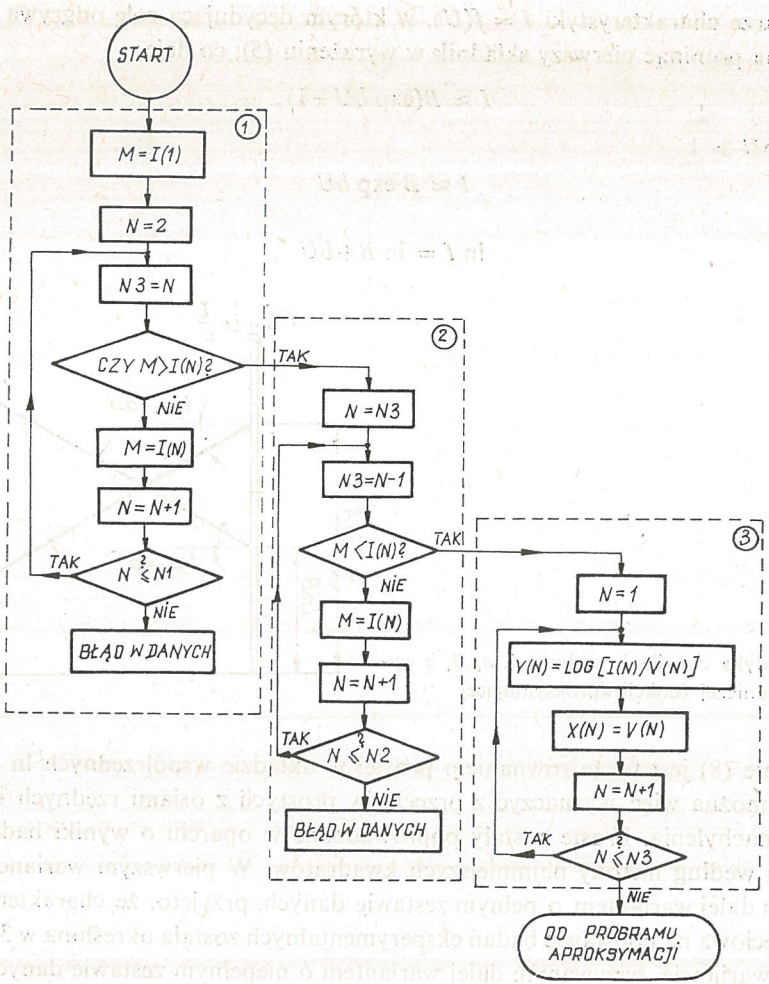
$$\ln I = \ln B + bU \tag{8}$$



Rys. 2. Metodyka określania stałych A, a, B, b wykładniczej funkcji aproksymującej

Równanie (8) jest także równaniem prostej w układzie współrzędnych ln I i U. Stałe A, a, B, b można więc wyznaczyć z przecięcia prostych z osiami rzędnych i tangensów kątów ich nachylenia. Proste zostały poprowadzone w oparciu o wyniki badań eksperymentalnych według metody najmniejszych kwadratów. W pierwszym wariancie obliczeń, nazywanym dalej wariantem o pełnym zestawie danych, przyjęto, że charakterystyka prądowo-napięciowa na podstawie badań eksperymentalnych została określona w 35 punktach. W drugim wariancie, nazywanym dalej wariantem o niepełnym zestawie danych, przyjęto, że znane są współrzędne tylko 12 punktów charakterystyki $I = f(U)$, przy czym na każdym odcinku wyznaczonym przez początek układu współrzędnych i punkty ekstremalne znane są po cztery punkty. Obliczenia przeprowadzono dla diody z arsenku galu typu АИ-301Г o następujących parametrach: I_p = 10,041 mA, U_p = 115,0 mV, I_v = 0,419 mA, U_v = = 600,0 mV.

Fragment sieci działań programu komputerowego przedstawiono na rys. 3. Część tej sieci oznaczona jako (*1*) zawiera działania prowadzące do odszukania w zbiorze danych wartości prądu szczytu $I(N)$ i numeru punktu pomiarowego $N3$, dla którego prąd szczytu przyjmuje wartość maksymalną M. Prąd szczytu jest tu prądem maksimum lokalnego. Takie bardziej złożone podejście było konieczne, gdyż maksimum globalne prądu może występować dla napięć większych od napięcia doliny. Druga część (*2*) sieci opisuje działania prowadzące do wyznaczenia punktu doliny na charakterystyce diody. Współrzędnymi tego punktu są prąd oznaczony jako $M = I(N3)$ i numer punktu pomiarowego $N3$. Punkt dolinowy rozdziela charakterystykę diody na dwie części, z których każda jest aproksymowana inną funkcją wykładniczą. Trzecia część (3) sieci działań pokazuje jak dokonano



Rys. 3. Uproszczona sieć działań programu aproksymacji wykładniczej

transformacji współrzędnych, dzięki której aproksymację funkcjami wykładniczymi sprowadzono do aproksymacji prostymi. Podprogam aproksymacji metodą najmniejszych kwadratów omawiany będzie nieco dalej. Program główny dwukrotnie odwołuje się do tego podprogramu.

W rezultacie obliczeń otrzymano następujące wartości stałych występujących we wzorze (5):

— pełny zestaw danych: $A = 0{,}2658$, $a = 1{,}962 \cdot 10^{-2}$,

$$B = 0{,}1774,\ b = 4{,}7069 \cdot 10^{-3};$$

— niepełny zestaw danych: $A = 0{,}8003$, $a = 1{,}3054 \cdot 10^{-2}$,

$$B = 0{,}6080,\ b = 6{,}5500 \cdot 10^{-4}.$$

Wyniki obliczeń podano w tablicy 2, zestawiając je z danymi eksperymentalnymi.

Tablica 2

Aproksymacja charakterystyki diody tunelowej typu АИ-301Г z arsenku galu funkcją wykładniczą

U [mV]	Wartości eksperymentalne I_w [mA]	Pełny zestaw danych		Niepełny zestaw danych	
		I_o [mA]	γ_a [%]	I_o [mA]	γ_a [%]
10	1,788	2,380	+33,10	6,996	+291,28
20	3,406	4,268	+25,30	12,226	+258,95
50	7,149	7,680	+ 7,43	20,391	+185,23
80	9,297	8,848	− 4,83	21,769	+134,15
100	9,911	8,885	−10,37	20,780	+109,66
110	10,031	8,760	−12,71	19,977	+99,15
120	10,023	8,566	−14,52	19,046	+90,02
130	9,918	8,318	−16,12	18,034	+81,83
150	9,462	7,712	−18,51	15,899	+68,03
180	8,333	6,669	−19,97	12,749	+52,99
200	7,364	5,958	−19,09	10,834	+47,12
220	6,302	5,271	−16,35	9,120	−44,71
250	4,671	4,324	− 7,43	6,948	+48,75
300	2,500	3,027	+21,08	4,310	+72,40
360	1,248	1,926	+54,33	2,391	+91,59
400	0,868	1,423	+63,94	1,626	+87,32
440	0,657	1,062	+61,64	1,128	+71,69
500	0,498	0,722	+44,98	0,703	+41,16
550	0,442	0,570	+28,96	0,525	+18,78
600	0,419	0,502	+19,81	0,438	+ 4,53
650	0,437	0,499	+14,19	0,403	− 7,78
700	0,486	0,547	+12,55	0,398	−18,11
800	0,693	0,781	+12,70	0,432	−37,66
900	1,158	1,221	+ 5,44	0,492	−57,51
1000	2,272	1,950	−14,17	0,563	−75,22

Jak widać, jakość aproksymacji wyraźnie zależy od ilości danych pomiarowych. Dla wariantu obliczeń z pełnym zestawem danych, dokładność aproksymacji można uznać za zadowalającą. Różnice między obliczonymi I_o i zmierzonymi I_w wartościami prądu diody dla całej charakterystyki nie przekraczają 1,75 mA, co po odniesieniu do wartości prądu szczytu I_p nie sięga 18%. W porównaniu z aproksymacją „fizyczną" zwiększona została dokładność opisu całej charakterystyki, natomiast dla pewnych odcinków błędy są większe.

Przy niepełnym zestawie danych zachowany został jedynie charakter zależności między prądem a napięciem diody. Różnice między obliczonymi i zmierzonymi wartościami prądu przekraczają 100%, zwłaszcza w początkowej części charakterystyki, w rejonie punktu szczytu i są dość duże dla napięć większych od napięcia doliny. Znamienne jest również i to, że charakterystyka aproksymująca dla napięć mniejszych od napięcia doliny przebiega znacznie wyżej niż charakterystyka eksperymentalna, natomiast w zakresie napięć większych od U_v poniżej charakterystyki eksperymentalnej. Punkt szczytu na charakterystyce aproksymującej został przesunięty w kierunku napięć mniejszych. Zjawisko to wystąpiło zresztą

w mniejszym stopniu także w wariancie obliczeń z pełnym zestawem danych. Środkiem zaradczym poprawiającym jakość tego typu aproksymacji dla ograniczonej ilości danych pomiarowych mogłoby być wprowadzenie odpowiednich współczynników wagowych dla poszczególnych punktów pomiarowych. Skoro rozważany przykład ujawnił niedoskonałości aproksymacji w określonych częściach charakterystyki, naturalne jest, że punkty z tych odcinków charakterystyki powinny mieć większe wagi. Współczynniki wagowe można łatwo uwzględnić w podprogramie wyznaczania przebiegu dwóch prostych metodą najmniejszych kwadratów.

4. APROKSYMACJA WIELOMIANOWA METODĄ NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW

Przy wszystkich aprosymacjach wielomianowych założono minimalizację średniokwadratowego błędu aproksymacji δ zdefiniowanego jako

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(y_a - y_i)^2}, \tag{9}$$

gdzie:

n — liczba danych punktów pomiarowych,

y_i — wartość funkcji określona doświadczalnie,

y_a — wartość funkcji aproksymującej.

Jeśli funkcja aproksymująca ma postać wielomianu stopnia k

$$y_a = a_o + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \dots a_k x_i^k, \tag{10}$$

to dążenie do minimalizacji błędu δ prowadzi do warunku

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_o}\sum_{1}^{n}(y_a - y_i)^2 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial a_1}\sum_{1}^{n}(y_a - y_i)^2 &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial}{\partial a_k}\sum_{1}^{n}(y_a - y_i)^2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Układ równań (11) po uwzględnieniu postaci fukcji aproksymującej przybiera postać układu równań liniowych, które można zapisać w postaci macierzowej [4]

$$\begin{bmatrix} \Sigma x_i^0 & \Sigma x_i^1 & \Sigma x_i^2 & \dots \Sigma x_i^k \\ \Sigma x_i^1 & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \dots \Sigma x_i^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Sigma x_i^k & \Sigma x_i^{k+1} & \Sigma x_i^{k+2} & \dots \Sigma x_i^{2k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i x_i^0 \\ \Sigma y_i x_i^1 \\ \vdots \\ \Sigma y_i x_i^k \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Rozwiązanie tego układu równań pozwala wyznaczyć współczynniki $a_o \div a_k$ występujące w wielomianie aproksymującym.

W przypadku ograniczenia wielomianu do sumy składników zawierających wykładniki od l do k

$$y_a = a_l x_i^l + a_{l+1} x_i^{l+1} + \ldots a_k x_i^k \tag{13}$$

modyfikacji ulega też równanie macierzowe określające te współczynniki. Ma ono wówczas postać:

$$\begin{bmatrix} \Sigma x_i^l & \Sigma x_i^{l+1} & \ldots \Sigma x_i^k \\ \Sigma x_i^{l+1} & \Sigma x_i^{l+2} & \ldots \Sigma x_i^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Sigma x_i^{l+k} & \Sigma x_i^{l+k+1} & \ldots \Sigma x_i^{2k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_l \\ a_{l+1} \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i x_i^l \\ \Sigma y_i x_i^{l+1} \\ \vdots \\ \Sigma y_i x_i^k \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Rozszerzenie wielomianu aproksymującego o składniki zawierające ujemne potęgi zmiennej niezależnej

$$y_a = a_{-l} x_i^{-l} + a_{-l+1} x_i^{-l+1} + \ldots + a_{-1} x_i^{-1} + a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_k x_i^k \tag{15}$$

rozszerza też macierze równań normalnych [9], które przybierają postać:

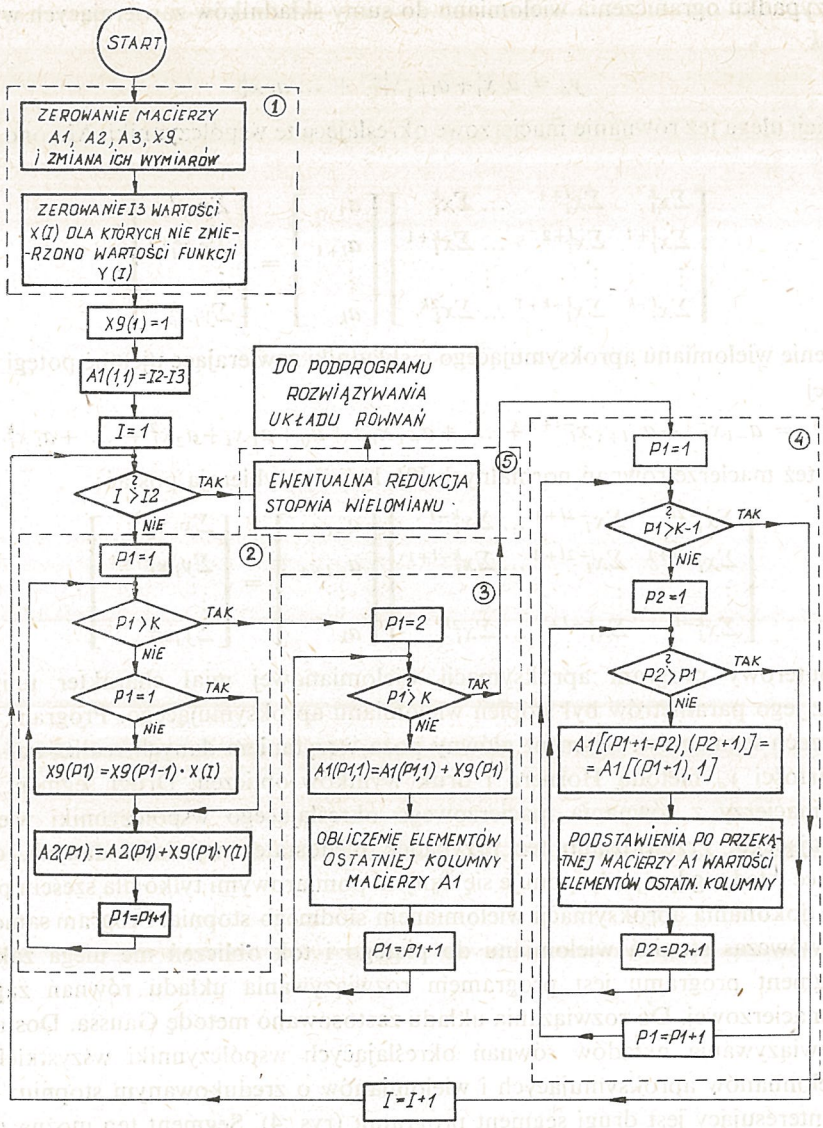
$$\begin{bmatrix} \Sigma x_i^{-2l} & \Sigma x_i^{-2l+1} & \ldots \Sigma x_i^{k-l} \\ \Sigma x_i^{-2l+1} & \Sigma x_i^{-2l+2} & \ldots \Sigma x_i^{k-l+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Sigma x_i^{k-l} & \Sigma x_i^{k-l+1} & \ldots \Sigma x_i^{2k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{-l} \\ a_{-l+1} \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i x_i^{-l} \\ \Sigma y_i x_i^{-l+1} \\ \vdots \\ \Sigma y_i x_i^k \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Komputerowy program aproksymacji wielomianowej miał charakter uniwersalny i jednym z jego parametrów był stopień wielomianu aproksymującego. Program ten składał się z trzech segmentów. Segment główny poza wczytaniem danych realizował też obliczenia wartości y_a metodą Hornera i druk wyników obliczeń. Drugi segment obliczał elementy macierzy z równania macierzowego określającego współczynniki wielomianu aproksymującego. Przewidziano też przypadek niedostatecznej ilości danych, co może mieć miejsce wtedy, gdy np. dysponuje się danymi pomiarowymi tylko dla sześciu punktów, a żąda się dokonania aproksymacji wielomianem siódmego stopnia. Program samoczynnie redukuje wówczas stopień wielomianu do piątego i tok obliczeń nie ulega zakłóceniu. Trzeci segment programu jest programem rozwiązywania układu równań zapisanego w formie macierzowej. Do rozwiązania układu zastosowano metodę Gaussa. Dostosowano ją do rozwiązywania układów równań określających współczynniki wszystkich trzech typów wielomianów aproksymujących i wielomianów o zredukowanym stopniu.

Dość interesujący jest drugi segment programu (rys. 4). Segment ten można podzielić na pięć części spełniających określone funkcje. Zadaniem pierwszej części segmentu jest uwzględnienie sytuacji braku danych pomiarowych dla pewnych założonych wartości napięć. Sytuacje takie mają miejsce w przypadku, gdy dla niektórych wybranych wcześniej wartości napięcia nie zmierzono prądu diody tunelowej, lub też gdy pomiarów takich w ogóle nie planowano, a interesująca jest tylko wartość funkcji aproksymującej. Operacja uwzględnienia tych sytuacji polega na zerowaniu wartości odpowiednich odciętych x_i.

W drugiej części tego segmentu oblicza się wartości elementów macierzy A3. Macierz A3 jest jedną z macierzy występujących w równaniach normalnych (12, 14, 16), które można zapisać w postaci

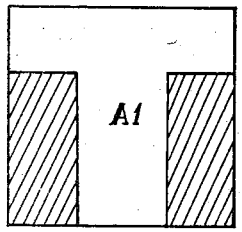
$$\mathrm{A1A2} = \mathrm{A3}. \tag{17}$$



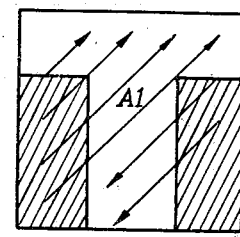
Rys. 4. Uproszczona sieć działań podprogramu obliczania współczynników macierzy A1 i A2

Zadaniem części trzeciej segmentu drugiego jest obliczenie wartości elementów pierwszej i ostatniej kolumny macierzy **A1** (rys. 5). Wartość elementu **A1**(1,1), dla wielomianu typu (10), określana jest w pierwszej części tego segmentu jako liczba punktów, dla których znane są wartości eksperymentalne. Element **A1**(1,k) jest równy **A1**(k,1) i nie ma potrzeby ponownego wyznaczania jego wartości.

W czwartej części tego segmentu wyznacza się wartości pozostałych elementów macierzy **A1**. Odbywa się to po prostu poprzez nadanie określonym elementom wewnętrznym tej macierzy wartości takich, jak wartości elementów pierwszej i ostatniej kolumny. Podstawianie odbywa się wzdłuż przekątnych, jak pokazuje to rys. 6.



Rys. 5. Elementy macierzy A1 obliczone w początkowej części programu



Rys. 6. Obliczanie elementów macierzy A1 przez podstawianie wzdłuż przekątnych

Końcowa część drugiego segmentu programu redukuje stopień wielomianu aproksymującego. Redukcja stopnia wielomianu przy niedostatecznej ilości danych eksperymentalnych polega na wyzerowaniu odpowiedniej liczby końcowych kolumn macierzy A1. Pominięcie l początkowych składników wielomianu aproksymacyjnego wymaga wyzerowania takiej samej liczby początkowych kolumn macierzy A1. Operacjom tym towarzyszy oczywiście ograniczenie liczby równań rozwiązanych w trzecim segmencie programu. Przedstawionemu tu tokowi postępowania można zarzucić pewną redundancję w wyznaczaniu macierzy A1. Czas wykonywania takiego programu jest prawdopodobnie dłuższy niż programu „oszczędniejszego". Jednakże wydaje się, że czas kompilacji programu redundancyjnego jest krótszy, a sam program ma prostszą strukturę.

5. APROKSYMACJA WIELOMIANAMI O DODATNICH WYKŁADNIKACH POTĘGOWYCH

Przy aproksymacji wielomianem o dodatnich wykładnikach potęg rozpatrywano wielomiany od 3 do 7 stopnia. Najniższy stopień wielomianu wynika z przebiegu funkcji $I = f(U)$. Ponieważ posiada ona maksimum i minimum, to w tych dwóch punktach pierwsza pochodna $\frac{dI}{dU}$ powinna być równa zeru, co narzuca warunek, że wielomian nie może być stopnia niższego niż trzeci. Z kolei zbyt wysoki stopień wielomianu znacznie komplikowałby i zwiększał czas wykonywanych ewentualnie dalszych obliczeń. Istotnym problemem występującym przy aproksymacji wielomianem wysokiego stopnia jest możliwość pojawienia się oscylacji [4]. Rozpatrywano dwa typy wielomianów: wielomiany bez składnika zerowego a_0 i wielomiany ze składnikiem a_0, przy czym obliczenia wykonano tak jak i poprzednio w dwóch wariantach: przy pełnym i niepełnym zestawie danych. W obliczeniach tych uwzględniono nie tylko diody z arsenku galu, lecz także diody krzemowe i germanowe.

W tablicy 3 podano niektóre z wyników obliczeń dla diody z arsenku galu. W tablicy tej wymieniono także wartości współczynników wielomianu. Przeprowadzone obliczenia potwierdziły intuicyjne przypuszczenie, że powiększenie stopnia wielomianu zwiększa dokładność aproksymacji. Aby osiągnąć niedokładność aproksymacji rzędu 20% w całym zakresie charakterystyki $I = f(U)$, stopień wielomianu nie powinien być niższy od $6 \div 7$. Największy względny błąd aproksymacji występuje dla napięć o wartościach zbliżonych do napięcia doliny, chociaż bezwzględne różnice w wartościach I_o i I_w nie są większe niż

Tablica 3

Aproksymacja charakterystyki diody tunelowej typu АИ-301Г wielomianem o dodatnich wykładnikach potęg

		PEŁNY ZESTAW DANYCH						NIEPEŁNY ZESTAW DANYCH					
		WIELOMIAN BEZ SKŁADNIKA a_0						WIELOMIAN ZE SKŁADNIKIEM a_0					
		stopień wielomianu						stopień wielomianu					
		3		5		7		3		5		7	
U [mV]	I_w [mA]	I_o [mA]	γ_a [%]	I_o [mA]	γ_a [%]	I_o [mA]	γ_a [%]	I_o [mA]	γ_a [%]	I_o [mA]	γ_a [%]	I_o [mA]	γ_a [%]
10	1,788	0,688	-61,52	1,817	+1,62	2,004	+12,08	7,274	+306,82	2,277	+27,35	1,456	-18,57
20	3,406	1,336	-60,78	3,401	-1,47	3,727	+ 9,42	7,331	+115,24	3,773	+10,73	3,373	- 9,69
50	7,149	3,049	-57,35	6,915	-3,27	7,419	+ 3,78	7,427	+ 3,89	7,079	- 9,79	7,414	+3,71
80	9,297	4,434	-52,31	8,882	-4,46	9,316	+ 2,04	7,417	-20,92	8,914	- 4,12	9,422	+ 1,34
100	9,911	5,187	-47,66	9,513	-4,02	9,819	- 0,93	7,355	-25,79	9,488	- 4,27	9,926	+ 1,51
110	10,031	5,514	-45,03	9,660	-3,70	9,889	- 1,42	7,309	-27,14	9,616	- 4,14	9,983	- 0,48
120	10,023	5,810	-42,03	9,710	-3,12	9,856	- 1,67	7,253	-27,64	9,650	- 3,72	9,933	- 0,90
130	9,918	6,075	-38,75	9,673	-2,47	9,734	+ 1,86	7,187	-27,54	9,602	- 3,19	9,790	- 1,29
150	9,462	6,517	-31,12	9,376	-0,91	9,269	+ 2,04	7,029	-25,71	9,293	- 1,79	9,281	- 1,91
180	8,333	6,971	-16,34	8,504	+2,05	8,181	+ 1,82	6,730	-19,24	8,424	+ 1,09	8,134	- 2,39
200	7,364	7,144	- 2,99	7,728	+4,94	7,300	- 0,87	6,493	-11,83	7,660	+ 4,02	7,227	- 1,86
220	6,302	7,221	+14,58	6,859	+8,84	6,364	+ 0,98	6,229	- 1,16	6,808	+ 8,03	6,278	-3,81
250	4,671	7,171	+53,52	5,477	+17,3	4,960	+ 6,19	5,789	+23,94	5,455	+16,78	4,878	+ 4,39
300	2,500	6,703	+168,12	3,253	+30,2	2,891	+15,64	4,961	+98,44	3,279	+31,16	2,855	+14,20
360	1,248	5,635	+351,52	1,154	- 7,53	1,187	- 4,89	3,861	+269,38	1,218	- 2,40	1,225	- 1,84
400	0,868	4,698	+441,24	0,247	-71,54	0,565	-34,91	3,099	+257,03	0,317	-63,48	0,634	-26,96
440	0,657	3,644	+454,64	-0,248	-175,49	0,294	-55,25	2,339	+256,01	-0,186	-128,31	0,366	-44,29
500	0,498	1,960	+293,57	-0,318	-163,86	0,329	-33,94	1,251	+151,21	-0,289	-158,03	0,359	-27,91
550	0,442	0,575	+ 30,09	0,056	- 87,33	0,530	+19,91	0,439	+ 0,68	0,049	- 88,91	0,506	+14,48
600	0,419	-0,680	-262,29	0,600	+ 43,20	0,697	+66,35	-0,241	-157,52	0,558	+ 33,17	0,632	+50,84
650	0,437	-1,703	-489,70	1,100	+151,72	0,731	+67,28	-0,747	-270,94	1,036	+137,07	0,660	+51,03
700	0,486	-2,388	- 59,36	1,379	+183,75	0,630	+29,63	-1,036	-214	1,313	+170,17	0,592	+21,84
800	0,693	-2,333	-436,65	0,988	+ 42,57	0,444	-35,93	-0,790	-214,00	0,982	+ 41,70	0,511	-26,26
900	1,158	0,318	- 72,54	0,252	- 78,24	1,208	+ 4,32	0,838	- 27,63	0,324	- 72,02	1,194	+ 3,11
1000	2,272	6,396	+181,51	3,109	+ 36,84	2,123	- 6,54	4,191	+ 84,46	3,040	- 33,80	2,166	- 4,67
		WSPÓŁCZYNNIKI WIELOMIANÓW											
a_0		0		0		0		7,203		0,560		-0,794	
a_1		0,071		0,194		0,215		$7,724 \cdot 10^{-3}$		0,183		0,243	
a_2		$-2,031 \cdot 10^{-4}$		$-1,252 \cdot 10^{-3}$		$-1,525 \cdot 10^{-3}$		$-6,778 \cdot 10^{-5}$		$-1,181 \cdot 10^{-5}$		$-1,822 \cdot 10^{-3}$	
a_3		$-1,387 \cdot 10^{-4}$		$2,914 \cdot 10^{-6}$		$3,947 \cdot 10^{-6}$		$5,704 \cdot 10^{-8}$		$2,774 \cdot 10^{-6}$		$5,389 \cdot 10^{-6}$	
a_4				$2,904 \cdot 10^{-6}$		$-4,121 \cdot 10^{-9}$				$-2,760 \cdot 10^{-9}$		$-7,730 \cdot 10^{-9}$	
a_5				$1,050 \cdot 10^{-12}$		$4,673 \cdot 15^{-13}$				$0,997 \cdot 10^{-12}$		$5,298 \cdot 10^{-12}$	
a_6						$1,997 \cdot 10^{-15}$						$-1,292 \cdot 10^{-15}$	
a_7						$-9,776 \cdot 10^{-19}$						$-8,433 \cdot 10^{-20}$	

	NIEPEŁNY ZESTAW DANYCH WIELOMIAN ZE SKŁADNIKIEM a_0					
	Stopień wielomianu					
	3		5		7	
	I_o [mA]	γ_a [%]	I_o [mA]	γ_a [%]	I_o [mA]	γ_a [%]
	7,278	+307,05	2,149	+00,19	1,425	-20,30
	7,323	+115,00	3,691	+ 8,37	3,309	- 2,84
	7,389	+ 3,36	7,100	- 6,85	7,335	+ 2,60
	7,362	- 20,81	8,990	- 3,30	9,337	+ 0,97
	7,296	- 26,30	9,580	- 3,34	9,923	+ 1,21
	7,250	- 27,72	9,711	- 3,19	9,994	- 0,37
	7,195	- 28,92	9,746	- 2,76	9,956	- 0,67
	7,131	- 28,10	9,695	- 2,25	9,821	- 0,93
	6,891	- 26,22	9,374	- 0,93	9,318	- 1,52
	6,699	- 19,61	8,475	+ 1,70	8,155	- 2,14
	6,478	- 12,03	7,686	+ 4,37	7,224	- 1,90
	6,234	- 1,08	6,806	+ 7,80	6,245	- 0,91
	5,827	+ 24,75	5,410	+15,82	4,793	+ 2,61
	5,063	+102,52	3,168	+26,72	2,707	+ 3,28
	4,049	+224,44	1,052	-15,71	1,073	-14,02
	3,345	+285,37	0,135	-84,45	0,525	-39,62
	2,638	+301,52	-0,368	-156,01	0,323	-50,84
	1,617	-224,70	-0,446	-189,56	0,407	-18,27
	0,842	+90,50	-0,070	-115,84	0,574	+29,86
	0,176	- 50,84	0,176	+ 15,51	0,645	+53,94
	-0,345	-178,95	1,000	+128,83	0,556	+27,23
	-0,685	-240,95	1,299	+167,28	0,362	-25,51
	-0,672	-196,97	0,920	+ 32,76	0,354	-48,42
	0,510	- 55,96	0,044	- 96,20	1,821	+57,29
	3,155	+ 33,86	2,368	+ 4,23	2,270	- 0,09
	7,223		0,378		-0,771	
	$6,179 \cdot 10^{-3}$		0,189		0,236	
	$-5,931 \cdot 10^{-5}$		$-1,230 \cdot 10^{-3}$		$-1,690 \cdot 10^{-3}$	
	$4,906 \cdot 10^{-5}$		$2,863 \cdot 10^{-6}$		$4,440 \cdot 10^{-6}$	
			$-2,844 \cdot 10^{-9}$		$-4,592 \cdot 10^{-9}$	
			$1,024 \cdot 10^{-12}$		$1,024 \cdot 10^{-13}$	
					$2,898 \cdot 10^{-15}$	
					$-1,391 \cdot 10^{-18}$	

na pozostałej części charakterystyki. Jeżeli jako kryterium jakości aproksymacji przyjmie się wartość błędu względnego (2), to dla wszystkich wielomianów aproksymacja w pobliżu punktu doliny jest najmniej dokładna i stwarza największe trudności. Według tego kryterium najwierniejszy opis charakterystyki $I = f(U)$ wielomianem o dodatnich wykładnikach potęg uzyskuje się w zakresie napięć $0{,}5\ U_p < U < 2\ U_p$. Przy wielomianie np. siódmego stopnia błędy na tym odcinku nie przekraczają 2,5%, a przy wielomianie np. stopnia piątego — 6%. Gdy stopień wielomianu jest wysoki, to pominięcie składnika zerowego odgrywa niewielką rolę. Przy niskich stopniach wielomianu ($n = 3, 4$) składnik zerowy w istotny sposób wpływa na dokładność aproksymacji początkowego odcinka $0{,}5\ U_p > U$. Dokładność jest znacznie większa przy pominięciu a_0. Rośnie jednak wtedy nieco błąd aproksymacji pozostałej części charakterystyki, a zwłaszcza odcinka w pobliżu doliny. Natomiast zwiększenie ilości danych eksperymentalnych nie ma decydującego wpływu na jakość aproksymacji. Generalnie rzecz biorąc błędy aproksymacji mało zależą i od materiału diody. Jednakże aproksymacja charakterystyk diod z arsenku galu wielomianem o stopniu większym od trzeciego powoduje, że wielomian ten ma w pewnym zakresie napięć (np. dla wielomianu stopnia siódmego $440\ \text{mV} < U < 800\ \text{mV}$) charakter oscylacyjny. Efektu tego nie zaobserwowano dla diod krzemowych i germanowych. Oscylacje te są większe w przypadku wielomianu niższego stopnia (piąty) i maleją przy powiększaniu stopnia wielomianu (siódmy lub wyższy). Wprawdzie w przypadku wielomianów stopnia trzeciego oscylacje takie nie występują, ale w pobliżu doliny prądy obliczone w oparciu o wielomian aproksymujący mają wartości ujemne. Temu niedopuszczalnemu zjawisku można próbować zapobiec wprowadzając wysokie współczynniki wagowe dla punktów pomiarowych w pobliżu doliny. Jest to jednak mało opłacalne ze względu na ogólną niezbyt wysoką dokładność aproksymacji wielomianem tak niskiego stopnia.

6. APROKSYMACJA WIELOMIANAMI O DODATNICH I UJEMNYCH WYKŁADNIKACH POTĘGOWYCH

Przy aproksymacji wielomianem o dodatnich i ujemnych wykładnikach potęg ograniczono się do zbadania możliwości aproksymacji wielomianem o postaci:

$$I = a_1 U^{-1} + a_0 + a_1 U^1 + a_2 U^2. \tag{18}$$

Obliczenia przeprowadzono dla diody z arsenku galu tej samej co poprzednio, przy pełnym i niepełnym zestawie danych. Niektóre wyniki obliczeń podano w tablicy 4.

Jeżeli otrzymane rezultaty porównać z wynikami uzyskanymi przy aproksymacji wielomianem trzeciego stopnia o dodatnich wykładnikach potęg, to łatwo zauważyć, że dokładność aproksymacji jest znacznie większa. W zakresie napięć $0{,}5\ U_p < U < 2\ U_p$ błędy aproksymacji zarówno przy pełnym jak i niepełnym zestawie danych nie przekraczają 20%. W pozostałym zakresie napięć są one większe. Zwiększenie ilości punktów poprawia dokładność aproksymacji na początkowym odcinku charakterystyki ($0 < U < 0{,}5\ U_p$) oraz przy dużych wartościach napięć ($U > 2U_p$), natomiast pogarsza w pobliżu punktu szczytu.

Wydaje się, że wielomiany tego typu, podobnie jak w przypadku tranzystorów bipolarnych [9], zapewniają lepszą jakość aproksymacji także dla wyższych stopni. Porównanie to odnosi się do wielomianów aproksymujących o dodatnich wykładnikach potęgowych.

Tablica 4

Aproksymacja charakterystyki diody tunelowej typu АИ-301Г wielomianem o dodatnich i ujemnych wykładnikach potęg

U [mV]	I_o [mA]	Pełny zestaw danych		Niepełny zestaw danych	
		I_w [mA]	γ_a [%]	I_w [mA]	γ_a [%]
10	1,788	0,393	−121,98	8,302	−564,31
20	3,406	6,235	+83,06	3,085	−9,42
50	7,149	9,284	+29,86	8,877	+24,17
80	9,297	9,224	−0,32	9,403	+11,4
100	9,911	8,862	−10,58	9,194	−10,58
110	10,031	8,642	−13,85	9,019	−10,09
120	10,023	8,407	−16,13	8,815	−11,81
130	9,918	8,161	−17,715	8,590	−13,39
150	9,462	7,652	−19,13	8,099	−14,40
180	8,333	6,873	−17,52	7,312	−12,25
200	7,364	6,358	−13,66	6,777	−7,97
220	6,302	5,852	−7,14	6,244	−0,92
250	4,671	5,119	+9,59	5,463	+16,96
300	2,500	3,982	+59,28	4,236	+69,44
360	1,248	2,781	+122,84	2,926	+134,46
400	0,868	2,087	+140,43	2,164	+149,31
440	0,657	1,482	+125,57	1,497	+127,85
500	0,498	0,743	+49,20	0,680	+36,55
550	0,442	0,285	−35,52	0,171	−61,31
600	0,419	−0,027	−106,44	−0,178	−142,48
650	0,437	−0,193	−144,16	−0,366	−183,75
700	0,486	−0,213	−143,62	−0,393	−180,86
800	0,693	0,191	−72,44	−0,256	−136,94
900	1,158	1,187	+2,50	1,139	−1,64
1000	2,272	2,276	+2,22	2,893	+27,32
		Współczynniki wielomianu			
		$a_{-1} = -140{,}59$ $a_0 = 22{,}18$ $a_1 = 4{,}10 \cdot 10^{-2}$ $a_2 = 2{,}99 \cdot 10^{-5}$		$a_{-1} = -236{,}75$ $a_0 = 15{,}83$ $a_1 = 4{,}60 \cdot 10^{-2}$ $a_2 = 3{,}31 \cdot 10^{-5}$	

7. APROKSYMACJA WIELOMIANOWA — ODCINKOWA

Radykalne zwiększenie dokładności aproksymacji jest możliwe przez zastosowanie aproksymacji odcinkowej. Charakterystyka diody została w tym przypadku podzielona na trzy odcinki: pierwszy obejmował zakres napięć od zera do napięcia szczytu, drugi od napięcia szczytu do napięcia doliny i trzeci — zakres napięć większych od U_v. Dla pierwszego i trzeciego odcinka funkcja aproksymująca była wielomianem stopnia trzeciego

o dodatnich wykładnikach potęg i składniku zerowym, natomiast dla odcinka drugiego wielomianem o postaci danej zależnością (18). Wielomiany tego typu są bardziej przydatne [9] do aproksymacji funkcji malejących. Obliczenia przeprowadzono dla tej samej diody z arsenku galu co poprzednio. Niektóre z wyników obliczeń i wartości współczynników wielomianu podano w tablicy 5.

Na pierwszym odcinku i w początkowej części odcinka drugiego aproksymację można uznać za idealną, gdyż błędy nie przekraczają wartości błędów wyznaczenia punktów doświadczalnych. Duża dokładność została osiągnięta także dla odcinka trzeciego. Natomiast w zakresie napięć $2\ U_p < U < U_v$ błędy aproksymacji są większe. Lepsze wyniki można uzyskać przez zastosowanie, do opisu tego odcinka, wielomianu wyższego stopnia lub też podział charakterystyki prądowo-napięciowej na większą liczbę odcinków.

Tablica 5

Wielomianowa — odcinkowa aproksymacja charakterystyki diody tunelowej typu АИ-301Г wielomianami różnych typów

Odcinek 1 ($0 < U < U_p$)

U [mV]	I_o [mA]	I_w [mA]	γ_a [%]
10	1,788	1,781	−0,39
20	3,406	3,411	−0,15
50	7,149	7,145	−0,05
80	9,297	9,291	−0,06
100	9,911	9,930	+0,19
110	10,031	10,032	+0,01

Współczynniki wielomianu
$a_0 = 5{,}191 \cdot 10^{-2}$; $a_1 = 0{,}194$;
$a_2 = -1{,}052 \cdot 10^{-3}$; $a_3 = 1{,}132 \cdot 10^{-6}$

Odcinek 2 ($U_p < U < U_v$)

U [mV]	I_o [mA]	I_w [mA]	γ_a [%]
120	10,023	10,460	+0,23
130	9,918	10,066	+1,48
150	9,462	9,214	−2,62
180	8,333	7,872	−5,53
200	7,364	6,983	−5,17
220	6,302	6,121	−2,87
250	4,671	4,902	+4,71
300	2,500	3,125	+25,0
360	1,248	1,488	+19,23
400	0,868	0,722	−16,82
500	0,498	0,019	−96,18
600	0,419	0,107	−74,46

Współczynniki wielomianu
$a_{-1} = 469{,}803$; $a_0 = 24{,}157$;
$a_1 = -9{,}260 \cdot 10^{-12}$; $a_2 = 9{,}237 \cdot 10^{-5}$

Odcinek 3 ($U > U_v$)

U [mV]	I_o [mA]	I_w [mA]	γ_a [%]
650	0,437	0,425	−2,74
700	0,485	0,506	+4,11
800	0,693	0,681	−1,76
900	1,158	1,153	−0,43
950	1,569	1,605	+2,29
1000	2,272	2,255	−0,75

Współczynniki wielomianu
$a_0 = -20{,}409$; $a_1 = 8{,}559 \cdot 10^{-2}$;
$a_2 = -1{,}185 \cdot 10^{-4}$; $a_3 = 5{,}554 \cdot 10^{-18}$

8. UWAGI I WNIOSKI

1. Zaprezentowany tu materiał doświadczalny i obliczeniowy jest fragmentem o wiele większej pracy, która objęła badania przeszło 100 egzemplarzy diod tunelowych różnych typów. Z tego obszernego materiału wybrano przede wszystkim przykłady szczególnie kłopotliwe do opracowania analitycznego. Chodziło tu m.in. o jak najszersze przedstawienie trudności wyłaniających się przy aproksymacji charakterystyk diod tunelowych.

2. Na podstawie przedstawionych w artykule rozważań możliwy jest dobór funkcji aproksymującej charakterystykę diody tunelowej. Głównymi kryteriami określającymi celowość zastosowania określonej funkcji aproksymującej powinny być: dokładność aproksymacji i dostosowanie postaci funkcji do dokonywania odpowiednich operacji matematycznych, a więc przydatność do opisu układu, w którym dioda tunelowa pracuje. Oprócz omówionych funkcji aproksymujących, przy przybliżeniach mniej dokładnych można korzystać także z aproksymacji:

— liniowo-odcinkowej

$$I = \begin{cases} a_o' + a_1' U & \text{dla } 0 < U < U_1, \\ a_o'' + a_1'' U & \text{dla } U_1 < U < U_2, \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_o^{(i)} + a_1^{(i)} U & \text{dla } U_{l-1} < U < U_l; \end{cases} \tag{19}$$

w celu uzyskania wartości możliwie zgodnych z rzeczywistymi konieczny jest podział charakterystyki prądowo-napięciowej na minimum 5 odcinków;

— liniowo-parabolicznej

$$I = \begin{cases} a_1' U & \text{dla } U < U_p, \\ a_o'' + a_1'' U + a_2'' U^2 & \text{dla } U > U_p. \end{cases} \tag{20}$$

3. Stosowanie metody najmniejszych kwadratów w formie bezpośredniej (aproksymacja wielomianowa) i pośredniej (aproksymacja wykładnicza) jest oczywiste ze względu na doświadczalne pochodzenie danych wyjściowych.

4. Interesujące wydaje się zbadanie aproksymacji wielomianowych wykorzystujących wielomiany ortogonalne. Szczególnie przydatne w przypadku materiałów doświadczalnych byłyby wielomiany Forsythe'a — pierwotne i uogólnione [10]. Warto jednak zwrócić uwagę na to, że w przypadku wielomianów Forsythe'a nie można tworzyć funkcji aproksymujących typu (18). Zadecydowało to o wykorzystaniu metody bezpośredniej aproksymacji średniokwadratowej.

LITERATURA

1. W.L. Boncz-Brujewicz, P.S. Sierebrennikow, *O woltampiernoj charakteristikie tunnielnowo dioda*, Radiot. i elektron., 1961, nr 12.
2. A. Ferendeci, W. H. Ko, *A Two-Term Analytical Approximation of Tunnel Diode Static Characteristics*, Proc. IRE, 1962, vol. 50, s. 1852.

3. A. M. Goodman, *Test Set for Displaying the Volt-Ampere Characteristic of Tunnel Diodes*, Rev. Sci. Instr., 1960, vol. 31, s. 286—288.
4. F. B. Hildebrand, *Introduction to numerical analysis*, Mc Graw Hill, New York 1955.
5. E. O. Kane, *Theory of tunneling*, J. Appl. Phys., 1961, vol. 32, s. 83—89.
6. L. V. Kieldyš, *O povedenii niemietaličeskich kristalov v silnych elektriceskich poliach*, Zurn. Eksp. Teor. Fiz., 1957, t. 33, s. 994—1003.
7. B. Moeschke, *Zastosowanie i poprawa własności metrologicznych niektórych elementów półprzewodnikowych jako przetworników wielkości mechanicznych*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, 1976.
8. H. C. Okean, *Tunnel Diodes. Semiconductors and Semimetals*, vol. 7, Academic Press, New York 1970.
9. M. Stabrowski, *Algorytmy aproksymacji niskoczęstotliwościowych charakterystyk tranzystorów bipolarnych*, Archiwum Elektrotechniki, 1975, nr 3, s. 547—556.
10. M. Stabrowski, *Zastosowanie uogólnionych wielomianów Forsythe'a do aproksymacji charakterystyk elementów nieliniowych*, Archiwum Elektrotechniki, 1977, nr 4.

B. MOESCHKE, M. STABROWSKI

APPROXIMATION OF TUNNEL DIODES VOLT-AMPERE CHARACTERISTICS

Summary

The paper presents basic approximation methods applicable to tunnel diodes: „physical", exponential and polynomial methods. Algorithms of computer approximation programs are described. Sample computation results are compared with measurement data.

B. MOESCHKE, M. STABROWSKI

PROBLÈMES D'APPROXIMATION DES CARACTÉRISTIQUES DES DIODES TUNNEL

Résumé

On a présenté les méthodes fondamentales d'approximation des caractéristiques des diodes tunnel, c'est à dire la méthode „physique", exponentielle et les méthodes de polynôme. On a décrit les algorithmes des programmes d'approximation pour l'ordinateur. Les résultats des calculs exemplaires ont été comparés avec les résultats des mesures.

B. MOESCHKE, M. STABROWSKI

PROBLEME DER APPROXIMATION VON KENNLINIEN DER TUNNELDIODEN

Zusammenfassung

Es werden die Grundverfahren d.h. das physikalische, exponentiale und polynomiale Verfahren der Approximation von Kennlinien der Tunneldioden dargestellt. Algorithmen von Rechnerprogrammen der Approximation werden beschrieben. Beispiele von Rechenresultaten werden mit den Meßergebnissen zusammengestellt.

Б. МОЭШКЕ, М. СТАБРОВСКИ

ПРОБЛЕМЫ АППРОКСИМАЦИИ ВОЛЬТАМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТУННЕЛЬНЫХ ДИОДОВ

Р е з ю м е

Представлены основные методы аппроксимации характеристик туннельных диодов — „физическая", экспоненциальная и аппроксимация с помощью многочленов. Описаны алгоритмы аппроксимации на ЭЦВМ. Некоторые результаты вычислений сопоставлены с результатами измерений.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1978, 24, z. 2, ss. 333 — 349

621.314.21

Rozpływ prądów w transformatorze przy niesymetrii zasilania i obciążenia

ZYGMUNT BAJOREK (RZESZÓW)

Instytut Elektrotechniki Politechniki Rzeszowskiej

Otrzymano 4.11.1976

W pracy podano ogólną metodę obliczania rozpływu prądów w transformatorze o układzie połączeń Y_0y_06, Y_0d5 lub Y_0z5 przy dowolnej niesymetrii impedancji obciążenia i napięcia sieci zasilającej. Niesymetria obciążenia obejmuje również zwarcia i przerwy w obwodach obciążenia, przerwy po stronie pierwotnej oraz dowolną wartość impedancji w przewodach zerowych po stronie pierwotnej i wtórnej dla układów skojarzonych w gwiazdę lub w zygzak. Podana metoda obliczeń może być stosowana przy dowolnych sposobach skojarzenia uzwojeń.

1. WSTĘP

Obliczanie rozpływu prądów w uzwojeniach trójfazowego transformatora przy zastosowaniu znanej z teorii obwodów metody składowych symetrycznych prowadzi do tak złożonego układu równań [3], że praktycznie można je rozwiązać tylko w niektórych granicznych przypadkach niesymetrii (np. przy obciążeniu jednofazowym lub dwufazowym) oraz przy założeniu symetrii zasilania i pominięciu prądu magnesującego. Liczba tych równań i stopień ich skomplikowania szczególnie wzrasta w przypadku transformatorów połączonych po stronie wtórnej w trójkąt lub w zygzak i transformatorów trójuzwojeniowych.

W pracy podana jest metoda wywodząca się z ogólnej teorii transformatorów trójfazowych (dwuuzwojeniowych i trójuzwojeniowych) pozwalająca na obliczenie rozpływu prądów przy dowolnej niesymetrii obciążenia łącznie z przerwami w obwodach fazowych strony pierwotnej lub wtórnej a także przy przerwach w przewodach zerowych. Opracowana metoda obliczeń nie wymaga wprowadzania jakichkolwiek ograniczeń odnośnie rodzaju i stopnia niesymetrii napięć zasilających i obwodów poza transformatorem, ani co do sposobu skojarzenia uzwojeń.

Przy formułowaniu podstawowych równań czyni się następujące założenia upraszczające:

a) zakłada się symetrię budowy obwodu magnetycznego i elektrycznego transformatora,
b) pomija się straty w rdzeniu i wynikającą stąd składową czynną prądu stanu jałowego,
c) zakłada się stałość parametrów obwodów,
d) rozpatruje się jedynie stany ustalone przy sinusoidalnych przebiegach czasowych prądów i napięć.

Wykaz oznaczeń

ϑ_z — przekładnia zwojowa,
indeksy:

górny z — strona pierwotna,
górne w, y — strona wtórna,
górne $'w$, $'y$ — strona wtórna przeliczona na stronę pierwotną,
dolne 1, 2, 3 — wielkości fazowe,
dolne (0), (1), (2) — wielkości wyrażone w składowych 0, 1, 2;
parametry uzwojeń:

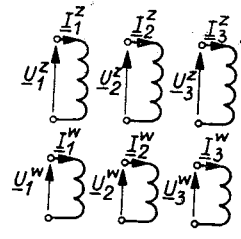
$\underline{Z}^z$, $\underline{Z}'^w$, $\underline{Z}'^y$ — impedancje gałęzi podłużnej schematu zastępczego transformatora dla odpowiednich uzwojeń,
$X_{\mu(0)}$ — reaktancja gałęzi poprzecznej (główna) dla składowej (0),
X_μ — reaktancja główna dla składowych (1) i (2);
macierze:

$\mathbf{U}^z_{fm} = [\underline{U}^z_{1m}, \underline{U}^z_{2m}, \underline{U}^z_{3m}]^T$ — wektor fazowych napięć zasilających,
$\mathbf{U}^z_m = [\underline{U}^z_{(0)m}, \underline{U}^z_{(1)m}, \underline{U}^z_{(2)m}]^T$ — wektor napięć 0, 1, 2 sieci zasilającej,
$\mathbf{U}^z = [\underline{U}^z_{(0)}, \underline{U}^z_{(1)}, \underline{U}^z_{(2)}]^T$ — wektor napięć 0, 1, 2 strony pierwotnej,
$\mathbf{U}'^w = [\underline{U}'^w_{(0)}, \underline{U}'^w_{(1)}, \underline{U}'^w_{(2)}]^T$ — wektor przeliczonych na stronę pierwotną napięć 0, 1, 2 strony wtórnej w,
$\mathbf{U}'^y = [\underline{U}'^y_{(0)}, \underline{U}'^y_{(1)}, \underline{U}'^y_{(2)}]^T$ — wektor przeliczonych na stronę pierwotną napięć 0, 1, 2 strony wtórnej y,
$\mathbf{I}^z_f = [\underline{I}^z_1, \underline{I}^z_2, \underline{I}^z_3]^T$ — wektor fazowych prądów strony pierwotnej,
$\mathbf{I}_f = [\underline{I}_a, \underline{I}_b, \underline{I}_c]^T$ — wektor fazowych prądów obciążenia,
$\mathbf{I}^w_f = [\underline{I}^w_1, \underline{I}^w_2, \underline{I}^w_3]^T$ — wektor fazowych prądów strony wtórnej w,
$\mathbf{I}'_f = [\underline{I}'_a, \underline{I}'_b, \underline{I}'_c]^T$ — wektor fazowych prądów obciążenia przeliczonych na stronę pierwotną,
$\mathbf{I}'^y_f = [\underline{I}'^y_1, \underline{I}'^y_2, \underline{I}'^y_3]^T$ — wektor przeliczonych na stronę pierwotną fazowych prądów strony wtórnej y,
$\mathbf{I}^z = [\underline{I}^z_{(0)}, \underline{I}^z_{(1)}, \underline{I}^z_{(2)}]^T$ — wektor prądów 0, 1, 2 strony pierwotnej,
$\mathbf{I}' = [\underline{I}'_{(0)}, \underline{I}'_{(1)}, \underline{I}'_{(2)}]^T$ — wektor prądów obciążenia 0, 1, 2 przeliczonych na stronę pierwotną,
$\mathbf{I}'^w = [\underline{I}'^w_{(0)}, \underline{I}'^w_{(1)}, \underline{I}'^w_{(2)}]^T$ — wektor przeliczonych na stronę pierwotną prądów 0, 1, 2 strony wtórnej w,
$\mathbf{I}'^y = [\underline{I}'^y_{(0)}, \underline{I}'^y_{(1)}, \underline{I}'^y_{(2)}]^T$ — wektor przeliczonych na stronę pierwotną prądów 0, 1, 2 strony wtórnej y,
$\mathbf{Z}^z$ — macierz impedancji strony pierwotnej według wzorów (1) i (5),
$\mathbf{Z}'^w$ — macierz przeliczonych na stronę pierwotną impedancji strony wtórnej w według wzorów (2) i (6),
$\mathbf{Z}'^y$ — macierz przeliczonych na stronę pierwotną impedancji strony wtórnej y według wzoru (58),
$\mathbf{X}$ — macierz reaktancji głównych według wzorów (1), (2), (5) i (6),

$\mathbf{Z}_T^z$ — macierz impedancji według wzorów (7) i (9),
$\mathbf{Z}_T^{\prime w}$ — macierz impedancji według wzorów (8) i (10),
$\mathbf{K}^z$ — macierz współczynników według wzorów (7) i (9),
$\mathbf{K}^{\prime w}$ — macierz współczynników według wzorów (8) i (10),
$\mathbf{Z}_{ABC}^z$ — macierz impedancji włączonych po stronie pierwotnej według wzorów (13) i (15),
$\mathbf{Z}_{abc}^{\prime w}$ — macierz przeliczonych na stronę pierwotną impedancji obciążenia według wzorów (14) i (16),
$\mathbf{Z}_0^z$ — macierz impedancji przewodu zerowego strony pierwotnej według wzorów (13) i (15),
$\mathbf{Z}_0^{\prime w}$ — macierz przeliczonej na stronę pierwotną impedancji przewodu zerowego strony wtórnej według wzorów (14) i (16),
$\mathbf{Z}_{T0}^{\prime w}$ — macierz impedancji według wzorów (40) i (41),
$\mathbf{K}_0^{\prime w}$ — macierz współczynników według wzorów (40) i (41),
$\mathbf{Z}_i^{\prime w}$ — macierz impedancji według wzoru (79),
$\mathbf{Z}_i^{\prime y}$ — macierz impedancji według wzoru (79),
$\mathbf{K}$ — macierz współczynników według wzoru (79),
$\mathbf{S}$ — macierz transformacji według wzoru (3),
$\mathbf{P}$ — macierz impedancji według wzoru (32),
$\mathbf{C}$ — macierz impedancji układu Y_0d według wzoru (45),
$\mathbf{T}$ — macierz wersorów według wzoru (63),
$\mathbf{G}$ — macierz reaktancji według wzoru (71).

2. PODSTAWOWE RÓWNANIA NAPIĘĆ TRANSFORMATORA DWUUZWOJENIOWEGO

Dwuuzwojeniowy transformator trójfazowy (rys. 1) może być opisany układem równań wyrażających zależność napięć strony pierwotnej i wtórnej od prądów strony pierwotnej i wtórnej oraz parametrów uzwojeń (rezystancji i indukcyjności własnych i wzajemnych) [2, 5, 6]. Z tych równań wyrażonych przez fazowe wartości prądów i napięć można otrzy-



Rys. 1. Schemat obwodu elektrycznego transformatora dwuuzwojeniowego; oznaczenia napięć i prądów

mać dla stanu ustalonego i przebiegów sinusoidalnych równania zapisane w postaci symbolicznej wiążące składowe 0, 1, 2 napięć fazowych ze składowymi 0, 1, 2 prądów fazowych strony pierwotnej i wtórnej:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}^z_{(0)} \\ \underline{U}^z_{(1)} \\ \underline{U}^z_{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}^z, & 0, & 0 \\ 0, & \underline{Z}^z, & 0 \\ 0, & 0, & \underline{Z}^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}^z_{(0)} \\ \underline{I}^z_{(1)} \\ \underline{I}^z_{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} jX_{\mu(0)}, & 0, & 0 \\ 0, & jX_\mu, & 0 \\ 0, & 0, & jX_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}^z_{(0)} \\ \underline{I}^z_{(1)} \\ \underline{I}^z_{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} jX_{\mu(0)}, & 0, & 0 \\ 0, & jX_\mu, & 0 \\ 0, & 0, & jX_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}'^w_{(0)} \\ \underline{I}'^w_{(1)} \\ \underline{I}'^w_{(2)} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}'^w_{(0)} \\ \underline{U}'^w_{(1)} \\ \underline{U}'^w_{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}'^w, & 0, & 0 \\ 0, & \underline{Z}'^w, & 0 \\ 0, & 0, & \underline{Z}'^w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}'^w_{(0)} \\ \underline{I}'^w_{(1)} \\ \underline{I}'^w_{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} jX_{\mu(0)}, & 0, & 0 \\ 0, & jX_\mu, & 0 \\ 0, & 0, & jX_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}'^w_{(0)} \\ \underline{I}'^w_{(1)} \\ \underline{I}'^w_{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} jX_{\mu(0)}, & 0, & 0 \\ 0, & jX_\mu, & 0 \\ 0, & 0, & jX_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}^z_{(0)} \\ \underline{I}^z_{(1)} \\ \underline{I}^z_{(2)} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

gdzie wektory napięć i prądów wyrażonych w składowych 0, 1, 2 otrzymano przez transformację współrzędnych, mnożąc lewostronnie wektory prądów i napięć fazowych przez macierz

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & a, & a^2 \\ 1, & a^2, & a \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Napięcia, prądy i impedancje strony wtórnej są przeliczone na stronę pierwotną według zależności:

$$\underline{U}'^w = \vartheta_z \underline{U}^w, \quad \underline{I}'^w = \frac{1}{\vartheta_z} \underline{I}^w, \quad \underline{Z}'^w = \vartheta^2 \underline{Z}^w. \tag{4}$$

Równania (1) i (2) można napisać w postaci macierzowej:

$$\mathbf{U}^z = (\mathbf{Z}^z + \mathbf{X})\mathbf{I}^z + \mathbf{X}\mathbf{I}'^w, \tag{5}$$

$$\mathbf{U}'^w = (\mathbf{Z}'^w + \mathbf{X})\mathbf{I}'^w + \mathbf{X}\mathbf{I}^z. \tag{6}$$

Jeżeli do wzoru (1) podstawi się prądy $\underline{I}'^w_{(0)}$, $\underline{I}'^w_{(1)}$ i $\underline{I}'^w_{(2)}$ wyznaczone z wzoru (2) a do wzoru (2) prądy $\underline{I}^z_{(0)}$, $\underline{I}^z_{(1)}$ i $\underline{I}^z_{(2)}$ określone z wzoru (1), to otrzyma się układ równań napięć:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}^z_{(0)} \\ \underline{U}^z_{(1)} \\ \underline{U}^z_{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}^z_{T(0)}, & 0, & 0 \\ 0, & \underline{Z}^z_T, & 0 \\ 0, & 0, & \underline{Z}^z_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}^z_{(0)} \\ \underline{I}^z_{(1)} \\ \underline{I}^z_{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{K}^z_{(0)}, & 0, & 0 \\ 0, & K^z, & 0 \\ 0, & 0, & K^z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}'^w_{(0)} \\ \underline{U}'^w_{(1)} \\ \underline{U}'^w_{(2)} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}'^w_{(0)} \\ \underline{U}'^w_{(1)} \\ \underline{U}'^w_{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}'^w_{T(0)}, & 0, & 0 \\ 0, & \underline{Z}'^w_T, & 0 \\ 0, & 0, & \underline{Z}'^w_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}'^w_{(0)} \\ \underline{I}'^w_{(1)} \\ \underline{I}'^w_{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{K}'^w_{(0)}, & 0, & 0 \\ 0, & \underline{K}'^w, & 0 \\ 0, & 0, & \underline{K}'^w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}^z_{(0)} \\ \underline{U}^z_{(1)} \\ \underline{U}^z_{(2)} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

gdzie:

$$\underline{Z}^z_{T(0)} = \underline{Z}^z + jX_{\mu(0)} \frac{\underline{Z}'^w}{\underline{Z}'^w + jX_{\mu(0)}},$$

$$\underline{Z}'^w_{T(0)} = \underline{Z}'^w + jX_{\mu(0)} \frac{\underline{Z}^z}{\underline{Z}^z + jX_{\mu(0)}},$$

$$\underline{Z}^z_T = \underline{Z}^z + jX_\mu \frac{\underline{Z}'^w}{\underline{Z}'^w + jX_\mu},$$

$$\underline{Z}'^w_T = \underline{Z}'^w + jX_\mu \frac{\underline{Z}^z}{\underline{Z}^z + jX_\mu},$$

$$\underline{K}^{z}_{(0)} = \frac{jX_{\mu(0)}}{\underline{Z}^{w}+jX_{\mu(0)}}, \qquad \underline{K}^{z} = \frac{jX_{\mu}}{\underline{Z}'^{w}+jX_{\mu}},$$

$$\underline{K}'^{w}_{(0)} = \frac{jX_{\mu(0)}}{\underline{Z}^{z}+jX_{\mu(0)}}, \qquad \underline{K}'^{w} = \frac{jX_{\mu}}{\underline{Z}^{z}+jX_{\mu}}.$$

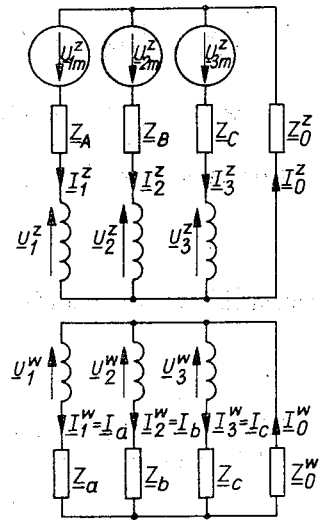
Równania (7) i (8) zapiszemy krócej w postaci:

$$\mathbf{U}^{z} = \mathbf{Z}^{z}_{T}\mathbf{I}^{z}+\mathbf{K}^{z}\mathbf{U}'^{w}, \tag{9}$$

$$\mathbf{U}'^{w} = \mathbf{Z}'^{w}_{T}\mathbf{I}'^{w}+\mathbf{K}'^{w}\mathbf{U}^{z}. \tag{10}$$

3. NIESYMETRIA OBCIĄŻENIA TRANSFORMATORA Y_0y_0

Dla obliczenia prądów w przypadku niesymetrii zasilania i obciążenia, przerw po stronie pierwotnej lub wtórnej oraz przerw w przewodach zerowych rozpatruje się układ (rys. 2) z impedancjami $\underline{Z}_A$, $\underline{Z}_B$ i $\underline{Z}_C$ włączonymi po stronie pierwotnej, $\underline{Z}_a$, $\underline{Z}_b$ i $\underline{Z}_c$ po stronie wtórnej oraz $\underline{Z}^{z}_{0}$ i $\underline{Z}^{w}_{0}$ w przewodach zerowych. Układ ten pozwala również na dokonanie analizy pracy transformatora przy niesztywnym napięciu sieci. Dla odróżnienia od napięć fazowych transformatora napięcia fazowe sieci zasilającej oznaczono dodatkowym indeksem dolnym *m*.



Rys. 2. Schemat obwodu elektrycznego transformatora Y_0y_06

Równania napięć dla strony pierwotnej i wtórnej można napisać w postaci:

$$\begin{bmatrix}\underline{U}_{1m}\\ \underline{U}_{2m}\\ \underline{U}_{3m}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underline{U}^{z}_{1}\\ \underline{U}^{z}_{2}\\ \underline{U}^{z}_{3}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\underline{Z}_A, & 0, & 0\\ 0, & \underline{Z}_B, & 0\\ 0, & 0, & \underline{Z}_C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{I}^{z}_{1}\\ \underline{I}^{z}_{2}\\ \underline{I}^{z}_{3}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\underline{Z}^{z}_{0}, & \underline{Z}^{z}_{0}, & \underline{Z}^{z}_{0}\\ \underline{Z}^{z}_{0}, & \underline{Z}^{z}_{0}, & \underline{Z}^{z}_{0}\\ \underline{Z}^{z}_{0}, & \underline{Z}^{z}_{0}, & \underline{Z}^{z}_{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{I}^{z}_{1}\\ \underline{I}^{z}_{2}\\ \underline{I}^{z}_{3}\end{bmatrix}, \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underline{U}'^{w}_{1}\\ \underline{U}'^{w}_{2}\\ \underline{U}'^{w}_{3}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\underline{Z}'_a, & 0, & 0\\ 0, & \underline{Z}'_b, & 0\\ 0, & 0, & \underline{Z}'_c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{I}'^{w}_{1}\\ \underline{I}'^{w}_{2}\\ \underline{I}'^{w}_{3}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\underline{Z}'^{w}_{0}, & \underline{Z}'^{w}_{0}, & \underline{Z}'^{w}_{0}\\ \underline{Z}'^{w}_{0}, & \underline{Z}'^{w}_{0}, & \underline{Z}'^{w}_{0}\\ \underline{Z}'^{w}_{0}, & \underline{Z}'^{w}_{0}, & \underline{Z}'^{w}_{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{I}'^{w}_{1}\\ \underline{I}'^{w}_{2}\\ \underline{I}'^{w}_{3}\end{bmatrix}. \tag{12}$$

Symbol „prim" w oznaczeniach $\underline{Z}'_a$, $\underline{Z}'_b$, $\underline{Z}'_c$ i $\underline{Z}'^w_0$ oznacza, że impedancje obciążenia i w przewodzie zerowym strony wtórnej są przeliczone na stronę pierwotną.

Po dokonaniu transformacji współrzędnych otrzymuje się równania:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}^z_{(0)m} \\ \underline{U}^z_{(1)m} \\ \underline{U}^z_{(2)m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}^z_{(0)} \\ \underline{U}^z_{(1)} \\ \underline{U}^z_{(2)} \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} \underline{Z}^z_{(0)}, & \underline{Z}^z_{(2)}, & \underline{Z}^z_{(1)} \\ \underline{Z}^z_{(1)}, & \underline{Z}^z_{(0)}, & \underline{Z}^z_{(2)} \\ \underline{Z}^z_{(2)}, & \underline{Z}^z_{(1)}, & \underline{Z}^z_{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\underline{Z}^z_0, & 0, & 0 \\ 0 & , & 0, & 0 \\ 0 & , & 0, & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \underline{I}^z_{(0)} \\ \underline{I}^z_{(1)} \\ \underline{I}^z_{(2)} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}'^w_{(0)} \\ \underline{U}'^w_{(1)} \\ \underline{U}'^w_{(2)} \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} \underline{Z}'^w_{(0)}, & \underline{Z}'^w_{(2)}, & \underline{Z}'^w_{(1)} \\ \underline{Z}'^w_{(1)}, & \underline{Z}'^w_{(0)}, & \underline{Z}'^w_{(2)} \\ \underline{Z}'^w_{(2)}, & \underline{Z}'^w_{(1)}, & \underline{Z}'^w_{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\underline{Z}'^w_0, & 0, & 0 \\ 0 & , & 0, & 0 \\ 0 & , & 0, & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \underline{I}'^w_{(0)} \\ \underline{I}'^w_{(1)} \\ \underline{I}'^w_{(2)} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

gdzie: $\underline{Z}^z_{(0)} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_A + \underline{Z}_B + \underline{Z}_C)$,

$$\underline{Z}^z_{(1)} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_A + a\underline{Z}_B + a^2\underline{Z}_C),$$

$$\underline{Z}^z_{(2)} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_A + a^2\underline{Z}_B + a\underline{Z}_C),$$

$$\underline{Z}'^w_{(0)} = \frac{1}{3}(\underline{Z}'_a + \underline{Z}'_b + \underline{Z}'_c),$$

$$\underline{Z}'^w_{(1)} = \frac{1}{3}(\underline{Z}'_a + a\underline{Z}'_b + a^2\underline{Z}'_c),$$

$$\underline{Z}'^w_{(2)} = \frac{1}{3}(\underline{Z}'_a + a^2\underline{Z}'_b + a\underline{Z}'_c).$$

Równania te zapiszemy w postaci:

$$\mathbf{U}^z_m = \mathbf{U}^z + (\mathbf{Z}^z_{ABC} + \mathbf{Z}^z_0)\mathbf{I}^z, \tag{15}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{U}'^w + (\mathbf{Z}'^w_{abc} + \mathbf{Z}'^w_0)\mathbf{I}'^w. \tag{16}$$

Podstawiając równania (5) i (6) do (15) i (16) otrzymuje się

$$\mathbf{U}^z_m = (\mathbf{Z}^z + \mathbf{X} + \mathbf{Z}^z_{ABC} + \mathbf{Z}^z_0)\mathbf{I}^z + \mathbf{X}\mathbf{I}'^w, \tag{17}$$

$$\mathbf{0} = (\mathbf{Z}'^w + \mathbf{X} + \mathbf{Z}'^w_{abc} + \mathbf{Z}'^w_0)\mathbf{I}'^w + \mathbf{X}\mathbf{I}^z. \tag{18}$$

W ogólnym przypadku niesymetrii można wyznaczyć prądy strony pierwotnej i wtórnej określając najpierw wektor $\mathbf{I}^z$ z równania (18):

$$\mathbf{I}^z = -\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{Z}'^w + \mathbf{X} + \mathbf{Z}'^w_{abc} + \mathbf{Z}'^w_0)\mathbf{I}'^w \tag{19}$$

i podstawiając do równania (17):

$$\mathbf{U}^z_m = \{\mathbf{X} - (\mathbf{Z}^z + \mathbf{X} + \mathbf{Z}^z_{ABC} + \mathbf{Z}^z_0)\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{Z}'^w + \mathbf{X} + \mathbf{Z}'^w_{abc} + \mathbf{Z}'^w_0)\}\mathbf{I}'^w; \tag{20}$$

stąd

$$\mathbf{I}'^w = \{\mathbf{X} - (\mathbf{Z}^z + \mathbf{X} + \mathbf{Z}^z_{ABC} + \mathbf{Z}^z_0)\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{Z}'^w + \mathbf{X} + \mathbf{Z}'^w_{abc} + \mathbf{Z}'^w_0)\}^{-1}\mathbf{U}^z_m. \tag{21}$$

Jeżeli po stronie pierwotnej występują przerwy w przewodach fazowych lub w przewodzie zerowym, to wygodniej jest przeprowadzać obliczenia w taki sposób, by najpierw z równania (17) wyznaczyć prądy strony pierwotnej

$$\mathbf{I}^z = (\mathbf{Z}^z + \mathbf{X} + \mathbf{Z}^z_{ABC} + \mathbf{Z}^z_0)^{-1}(\mathbf{U}^z_m - \mathbf{X}\mathbf{I}'^w), \tag{22}$$

przy czym macierz odwrotną $(\mathbf{Z}^z+\mathbf{X}+\mathbf{Z}^z_{ABC}+\mathbf{Z}^z_0)^{-1}$ dla warunków pracy transformatora (np. dla $Z_A \to \infty$) oblicza się stosując regułę de l'Hospitala. Podstawiając prąd $\mathbf{I}^z$ z równania (22) do równania (18) otrzymuje się:

$$\mathbf{0} = (\mathbf{Z}'^w+\mathbf{X}+\mathbf{Z}'^w_{abc}+\mathbf{Z}'^w_0)\mathbf{I}'^w+\mathbf{X}(\mathbf{Z}^z+\mathbf{X}+\mathbf{Z}^z_{ABC}+\mathbf{Z}^z_0)^{-1}(\mathbf{U}^z_m-\mathbf{X}\mathbf{I}'^w); \tag{23}$$

stąd

$$\mathbf{I}'^w = \{\mathbf{X}(\mathbf{Z}^z+\mathbf{X}+\mathbf{Z}^z_{ABC}+\mathbf{Z}^z_0)^{-1}\mathbf{X}-(\mathbf{Z}'^w+\mathbf{X}+\mathbf{Z}'^w_{abc}+Z'^w_0)\}^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{Z}^z+\mathbf{X}+\mathbf{Z}^z_{ABC}+\mathbf{Z}^z_0)^{-1}\mathbf{U}^z_m. \tag{24}$$

Przy przerwach po stronie wtórnej dogodnie jest wyznaczyć prąd $\mathbf{I}'^w$ z równania (18):

$$\mathbf{I}'^w = -(\mathbf{Z}'^w+\mathbf{X}+\mathbf{Z}'^w_{abc}+\mathbf{Z}'^w_0)^{-1}\mathbf{X}\mathbf{I}^z, \tag{25}$$

gdzie macierz odwrotną oblicza się metodą de l'Hospitala dla warunków przerw występujących w obwodzie.

Na podstawie wzoru (17) prąd strony pierwotnej wyraża się zależnością:

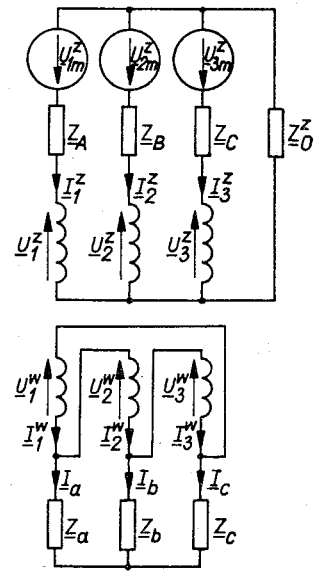
$$\mathbf{I}^z = \{(\mathbf{Z}^z+\mathbf{X}+\mathbf{Z}^z_{ABC}+\mathbf{Z}^z_0)-\mathbf{X}(\mathbf{Z}'^w+\mathbf{X}+\mathbf{Z}'^w_{abc}+\mathbf{Z}'^w_0)^{-1}\mathbf{X}\}^{-1}\mathbf{U}^z_m. \tag{26}$$

Znając wektory prądów $\mathbf{I}^z$ i $\mathbf{I}'^w$ można obliczyć prądy fazowe:

$$\mathbf{I}^z_f = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{I}^z, \quad \mathbf{I}^w_f = \mathbf{I}_f = \vartheta_z\mathbf{S}^{-1}\mathbf{I}'^w. \tag{27}$$

4. NIESYMETRIA OBCIĄŻENIA TRANSFORMATORA Y_0d

W celu obliczenia prądów przy niesymetrii zasilania i obciążenia (łącznie z przypadkami granicznymi) transformatora Y_0d rozpatruje się układ (rys. 3) z impedancjami fazowymi $\underline{Z}_A$, $\underline{Z}_B$ i $\underline{Z}_C$ po stronie pierwotnej, impedancją $\underline{Z}^z_0$ w przewodzie zerowym oraz $\underline{Z}_a$, $\underline{Z}_b$ i $\underline{Z}_c$ po stronie wtórnej. W przypadku układu Yd impedancja $\underline{Z}^z_0$ przyjmuje wartość nieskończenie dużą.



Rys. 3. Schemat obwodu elektrycznego transformatora Y_0d5

Dla strony pierwotnej można napisać równanie napięć podane wzorem (17), dla strony wtórnej związek między prądami przewodowymi i fazowymi dla przyjętego układu połączeń ma postać:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_a \\ \underline{I}_b \\ \underline{I}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & -1, & 0 \\ 0, & 1, & -1 \\ -1, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}^w \\ \underline{I}^w \\ \underline{I}^w \end{bmatrix}, \tag{28}$$

a między napięciami fazowymi i prądami przewodowymi

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1^w \\ \underline{U}_2^w \\ \underline{U}_3^w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1, & 0, & 1 \\ 1, & -1, & 0 \\ 0, & 1, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Z}_a, & 0, & 0 \\ 0, & \underline{Z}_b, & 0 \\ 0, & 0, & \underline{Z}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_a \\ \underline{I}_b \\ \underline{I}_c \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Po podstawieniu wzoru (28) do (29) i przeliczeniu wszystkich wielkości strony wtórnej na stronę pierwotną otrzymuje się:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1'^w \\ \underline{U}_2'^w \\ \underline{U}_3'^w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1, & 0, & 1 \\ 1, & -1, & 0 \\ 0, & 1, & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Z}_a', & 0, & 0 \\ 0, & \underline{Z}_b', & 0 \\ 0, & 0, & \underline{Z}_c' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & -1, & 0 \\ 0, & 1, & -1 \\ -1, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1'^w \\ \underline{I}_2'^w \\ \underline{I}_3'^w \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\underline{Z}_c'-\underline{Z}_a', & \underline{Z}_a', & \underline{Z}_c' \\ \underline{Z}_a', & -\underline{Z}_a'-\underline{Z}_b', & \underline{Z}_b' \\ \underline{Z}_c', & \underline{Z}_b', & -\underline{Z}_b'-\underline{Z}_c' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1'^w \\ \underline{I}_2'^w \\ \underline{I}_3'^w \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Przechodząc do współrzędnych 0, 1, 2 otrzymuje się

$$\mathbf{U}'^w = \mathbf{S} \begin{bmatrix} \underline{U}_1'^w \\ \underline{U}_2'^w \\ \underline{U}_3'^w \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} -\underline{Z}_c'-\underline{Z}_a', & \underline{Z}_a', & \underline{Z}_c' \\ \underline{Z}_a', & -\underline{Z}_a'-\underline{Z}_b', & \underline{Z}_b' \\ \underline{Z}_c', & \underline{Z}_b', & -\underline{Z}_b'-\underline{Z}_c' \end{bmatrix} \mathbf{S}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{I}_{(0)}'^w \\ \underline{I}_{(1)}'^w \\ \underline{I}_{(2)}'^w \end{bmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{I}'^w, \tag{31}$$

gdzie po wymnożeniu macierzy impedancji przez macierze $\mathbf{S}$ i $\mathbf{S}^{-1}$ macierz $\mathbf{P}$ określa się wzorem:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & -\underline{Z}_a'-\underline{Z}_b'-\underline{Z}_c', & a\underline{Z}_a'+\underline{Z}_b'+a^2\underline{Z}_c' \\ 0, & a^2\underline{Z}_a'+\underline{Z}_b'+a\underline{Z}_c', & -\underline{Z}_a'-\underline{Z}_b'-\underline{Z}_c' \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Z wzorów (17), (6) i (31) otrzymuje się następujący układ równań:

$$\mathbf{U}_m^z = (\mathbf{Z}^z + \mathbf{X} + \mathbf{Z}_{ABC}^z + \mathbf{Z}_0^z)\mathbf{I}^z + \mathbf{X}\mathbf{I}'^w, \tag{33}$$

$$\mathbf{U}'^w = (\mathbf{Z}'^w + \mathbf{X})\mathbf{I}'^w + \mathbf{X}\mathbf{I}^z, \tag{34}$$

$$\mathbf{U}'^w = \mathbf{P}\mathbf{I}'^w. \tag{35}$$

Po podstawieniu wzoru (35) do (34)

$$\mathbf{P}\mathbf{I}'^w = (\mathbf{Z}'^w + \mathbf{X})\mathbf{I}'^w + \mathbf{X}\mathbf{I}^z \tag{36}$$

można określić wektor prądu $\mathbf{I}'^w$:

$$\mathbf{I}'^w = (\mathbf{P} - \mathbf{Z}'^w - \mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}\mathbf{I}^z, \tag{37}$$

a podstawiając to wyrażenie do (33)

$$\mathbf{U}_m^z = (\mathbf{Z}^z + \mathbf{X} + \mathbf{Z}_{ABC}^z + \mathbf{Z}_0^z)\mathbf{I}^z + \mathbf{X}(\mathbf{P} - \mathbf{Z}'^w - \mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}\mathbf{I}^z \tag{38}$$

obliczyć prąd $\mathbf{I}^z$:

$$\mathbf{I}^z = \{\mathbf{Z}^z + \mathbf{X} + \mathbf{Z}^z_{ABC} + \mathbf{Z}^z_0 + \mathbf{X}(\mathbf{P} - \mathbf{Z}'^w - \mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}\}^{-1}\mathbf{U}^z_m. \tag{39}$$

Jeżeli nie ma przerw po stronie pierwotnej ($\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = 0$), wówczas rachunek jest znacznie uproszczony, gdyż można wykorzystać równanie napięć strony wtórnej (8), które dla układu $Y_0 d$ z impedancją $\underline{Z}^z_0$ w przewodzie zerowym ma postać:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}'^w_{(0)} \\ \underline{U}'^w_{(1)} \\ \underline{U}'^w_{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}'^w_{T(0)0}, & 0, & 0 \\ 0, & \underline{Z}'^w_T, & 0 \\ 0, & 0, & \underline{Z}'^w_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}'^w_{(0)} \\ \underline{I}'^w_{(1)} \\ \underline{I}'^w_{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{K}'^w_{(0)0}, & 0, & 0 \\ 0, & \underline{K}'^w, & 0 \\ 0, & 0, & \underline{K}'^w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}^z_{(0)} \\ \underline{U}^z_{(1)} \\ \underline{U}^z_{(2)} \end{bmatrix}, \tag{40}$$

gdzie

$$\underline{Z}'^w_{T(0)0} = \underline{Z}'^w + jX_{\mu(0)} \frac{\underline{Z}^z + 3\underline{Z}^z_0}{\underline{Z}^z + 3\underline{Z}^z_0 + jX_{\mu(0)}},$$

$$\underline{K}'^w_{(0)0} = \frac{jX_{\mu(0)}}{\underline{Z}^z + 3\underline{Z}^z_0 + jX_{\mu(0)}},$$

a pozostałe wielkości określone są jak we wzorze (8).

Wzór (40) można napisać w postaci:

$$\mathbf{U}'^w = \mathbf{Z}'^w_{T0}\mathbf{I}'^w + \mathbf{K}'^w_0\mathbf{U}^z. \tag{41}$$

Podstawiając wzór (35) otrzymuje się

$$\mathbf{P}\mathbf{I}'^w = \mathbf{Z}'^w_{T0}\mathbf{I}'^w + \mathbf{K}'^w_0\mathbf{U}^z; \tag{42}$$

można obliczyć wektor prądów wtórnych

$$\mathbf{I}'^w = (\mathbf{P} - \mathbf{Z}'^w_{T0})^{-1}\mathbf{K}'^w_0\mathbf{U}^z, \tag{43}$$

zaś wektor prądów pierwotnych przy $\mathbf{Z}^z_{ABC} = \mathbf{0}$ na podstawie wzoru (33):

$$\mathbf{I}^z = (\mathbf{Z}^z + \mathbf{X} + \mathbf{Z}^z_0)^{-1}(\mathbf{U}^z_m - \mathbf{X}\mathbf{I}'^w). \tag{44}$$

W ogólnym przypadku niesymetrii, gdy nie ma przerwy w żadnym z obwodów obciążenia można na podstawie (32) i (40) wyznaczyć macierz występującą w nawiasie we wzorze (43):

$$\mathbf{C} = \mathbf{P} - \mathbf{Z}'^w_{T0} = \begin{bmatrix} -\underline{Z}'^w_{T(0)0}, & 0, & 0 \\ 0, & -\underline{Z}'_a - \underline{Z}'_b - \underline{Z}'_c - \underline{Z}'^w_T, & a\underline{Z}'_a + \underline{Z}'_b + a^2\underline{Z}'_c \\ 0, & a^2\underline{Z}'_a + \underline{Z}'_b + a\underline{Z}'_c, & -\underline{Z}'_a - \underline{Z}'_b - \underline{Z}'_c - \underline{Z}'^w_T \end{bmatrix}. \tag{45}$$

Dla obliczenia występującej we wzorze (43) macierzy odwrotnej względem macierzy $\mathbf{C}$ wyznaczymy macierz dołączoną $\mathbf{C}^D$ i wyznacznik $\det\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C}^D = \begin{bmatrix} M, & 0, & 0 \\ 0, & N, & a^2H_1 \\ 0, & aH_2, & N \end{bmatrix}, \tag{46}$$

$$\det\mathbf{C} = -\underline{Z}'^w_{T(0)0}(\underline{Z}'^{w2}_T + M), \tag{47}$$

gdzie:

$$M = 3(\underline{Z}'_a\underline{Z}'_b + \underline{Z}'_a\underline{Z}'_c + \underline{Z}'_b\underline{Z}'_c) + 2\underline{Z}'^w_T(\underline{Z}'_a + \underline{Z}'_b + \underline{Z}'_c),$$

$$N = \underline{Z}'^w_{T(0)0}(\underline{Z}'_a + \underline{Z}'_b + \underline{Z}'_c + \underline{Z}'^w_T),$$

$$H_1 = \underline{Z}'^w_{T(0)0}(\underline{Z}'_a + a\underline{Z}'_b + a^2\underline{Z}'_c),$$

$$H_2 = \underline{Z}'^w_{T(0)0}(\underline{Z}'_a + a^2\underline{Z}'_b + a\underline{Z}'_c).$$

Jeżeli występuje przerwa w obwodzie obciążenia, np. w fazie a, czyli $\underline{Z}'_a \to \infty$, wówczas obliczamy

$$\lim_{\underline{Z}'_a \to \infty} \mathbf{C}^{-1} = \frac{\lim \dfrac{\partial \mathbf{C}^D}{\partial \underline{Z}'_a}}{\lim\limits_{\underline{Z}'_a \to \infty} \dfrac{\partial}{\partial \underline{Z}'_a} \det \mathbf{C}}, \tag{48}$$

przy czym z wzorów (46) i (47) otrzymuje się:

$$\lim_{\underline{Z}'_a \to \infty} \frac{\partial \mathbf{C}^D}{\partial \underline{Z}'_a} = \begin{bmatrix} 3\underline{Z}'_b + 3\underline{Z}'_c + 2\underline{Z}'^w_T, & 0, & 0 \\ 0, & \underline{Z}'^w_{T(0)0}, & a^2 \underline{Z}'^w_{T(0)0} \\ 0, & a\underline{Z}'^w_{T(0)0}, & \underline{Z}'^w_{T(0)0} \end{bmatrix}, \tag{49}$$

$$\lim_{\underline{Z}'_a \to \infty} \frac{\partial}{\partial \underline{Z}'_a} \det \mathbf{C} = -\underline{Z}'^w_{T(0)0} (3\underline{Z}'_b + 3\underline{Z}'_c + 2\underline{Z}'^w_T), \tag{50}$$

prądy strony wtórnej na podstawie (43) wynoszą więc:

$$\underline{I}'^w_{(0)} = \frac{-\underline{K}'^w_{(0)0} \underline{U}^z_{(0)}}{\underline{Z}'^w_{T(0)0}}, \tag{51}$$

$$\underline{I}'^w_{(1)} = \frac{-\underline{K}'^w (\underline{U}^z_{(1)} + a\underline{U}^z_{(2)})}{3\underline{Z}'_b + 3\underline{Z}'_c + 2\underline{Z}'^w_T}, \tag{52}$$

$$\underline{I}'^w_{(2)} = \frac{-\underline{K}'^w (a^2 \underline{U}^z_{(1)} + \underline{U}^z_{(2)})}{3\underline{Z}'_b + 3\underline{Z}'_c + 2\underline{Z}'^w_T} = a^2 \underline{I}'^w_{(1)}. \tag{53}$$

Z powyższych wzorów wynikają następujące wnioski:

a) prąd $\underline{I}'^w_{(0)}$ pojawia się tylko wówczas, gdy istnieje składowa $\underline{U}^z_{(0)}$ napięcia strony pierwotnej,

b) prąd $\underline{I}'^w_{(0)}$ zależy tylko od parametrów własnych transformatora i od impedancji przewodu zerowego po stronie pierwotnej, natomiast nie zależy od wielkości impedancji obciążenia strony wtórnej,

c) prądy $\underline{I}'^w_{(1)}$ i $\underline{I}'^w_{(2)}$ zależą zarówno od napięcia $\underline{U}^z_{(1)}$ jak $\underline{U}^z_{(2)}$ a także od impedancji obciążenia i parametrów własnych transformatora, nie zależą natomiast od impedancji przewodu zerowego strony pierwotnej,

d) jeżeli po stronie pierwotnej nie ma przewodu zerowego, wówczas po podstawieniu $\underline{Z}^z_0 = \infty$ otrzymuje się na podstawie wzoru (40):

$$\underline{Z}'^w_{T(0)0} = \underline{Z}'^w + jX_{\mu(0)}, \qquad \underline{K}'^w_{(0)0} = 0, \qquad \underline{I}'^w_{(0)} = 0, \tag{54}$$

zatem w układzie *Yd* składowa $\underline{I}'^w_{(0)}$ nie występuje niezależnie od rodzaju niesymetrii napięć zasilających.

Prądy fazowe obciążenia po stronie wtórnej można obliczyć z zależności:

$$\mathbf{I}^w_f = \vartheta_z \mathbf{S}^{-1} \mathbf{I}'^w, \tag{55}$$

a prądy przewodowe i napięcia wtórne z wzorów (28) i (29).

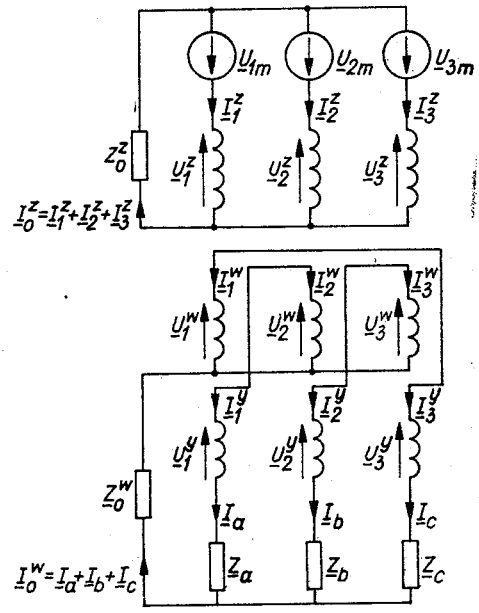
5. NIESYMETRIA OBCIĄŻENIA TRANSFORMATORA Y_0z

Transformator Y_0z (rys. 4) można rozpatrywać jako szczególny przypadek transformatora trójuzwojeniowego, w którym jedno uzwojenie jest zasilane a dwa pozostałe — o jednakowej liczbie zwojów — skojarzone w zygzak. Podobnie jak wzorami (5) i (6) były zapisane równania napięć transformatora dwuuzwojeniowego, można napisać ogólne równania napięć dla poszczególnych uzwojeń transformatora trójuzwojeniowego wyrażonych przez składowe 0, 1, 2:

$$\mathbf{U}^z = (\mathbf{Z}^z + \mathbf{X})\mathbf{I}^z + \mathbf{X}\mathbf{I}'^w + \mathbf{X}\mathbf{I}'^y, \tag{56}$$

$$\mathbf{U}'^w = (\mathbf{Z}'^w + \mathbf{X})\mathbf{I}'^w + \mathbf{X}\mathbf{I}^z + \mathbf{X}\mathbf{I}'^y, \tag{57}$$

$$\mathbf{U}'^y = (\mathbf{Z}'^y + \mathbf{X})\mathbf{I}'^y + \mathbf{X}\mathbf{I}^z + \mathbf{X}\mathbf{I}'^w. \tag{58}$$



Rys. 4. Schemat obwodu elektrycznego transformatora Y_0z5

Dla układu przedstawionego na rys. 4 wektory prądów fazowych obu grup strony wtórnej można wyrazić przez wektor prądów fazowych obciążenia:

$$\mathbf{I}_f'^y = \mathbf{I}_f', \tag{59}$$

$$\mathbf{I}_f'^w = \begin{bmatrix} 0, & 0, & -1 \\ -1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0 \end{bmatrix} \mathbf{I}_f'. \tag{60}$$

Po transformacji współrzędnych otrzymuje się:

$$\mathbf{I}'^y = \mathbf{I}', \tag{61}$$

$$\mathbf{I}'^w = \mathbf{S}\begin{bmatrix} 0, & 0, & -1 \\ -1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0 \end{bmatrix}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{I}_f'. \tag{62}$$

Powyższe równanie zapiszemy w postaci:

$$\mathbf{I}'^{w} = -\mathbf{T}\mathbf{I}', \tag{63}$$

gdzie

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & a, & 0 \\ 0, & 0, & a^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}' = \mathbf{S}\mathbf{I}'_f.$$

Równanie napięć po stronie pierwotnej dla układu połączenia w gwiazdę z impedancją $\underline{Z}_0^z$ w przewodzie zerowym można zapisać wzorem (15):

$$\mathbf{U}_m^z = \mathbf{U}^z + \mathbf{Z}_0^z \mathbf{I}^z, \tag{64}$$

przy czym nie rozpatruje się układu z impedancjami $\underline{Z}_A$, $\underline{Z}_B$ i $\underline{Z}_C$ po stronie pierwotnej, wobec czego $\underline{Z}_{ABC} = 0$.

Z równań (56), (57), (58), (61), (63) i (64) można zapisać równania napięć, gdzie występują tylko dwa wektory prądów wyrażone przez składowe 0, 1, 2, a mianowicie prądy pierwotne i obciążenia:

$$\mathbf{U}_m^z = \mathbf{Z}^z \mathbf{I}^z + \mathbf{Z}_0^z \mathbf{I}^z + \mathbf{X}(\mathbf{I}^z - \mathbf{T}\mathbf{I}' + \mathbf{I}'), \tag{65}$$

$$\mathbf{U}'^{w} = -\mathbf{Z}'^{w}\mathbf{T}\mathbf{I}' + \mathbf{X}(\mathbf{I}^z - \mathbf{T}\mathbf{I}' + \mathbf{I}'), \tag{66}$$

$$\mathbf{U}'^{y} = \mathbf{Z}'^{y}\mathbf{I}' + \mathbf{X}(\mathbf{I}^z - \mathbf{T}\mathbf{I}' + \mathbf{I}'), \tag{67}$$

lub po uporządkowaniu według prądów:

$$\mathbf{U}_m^z = (\mathbf{Z}^z + \mathbf{Z}_0^z + \mathbf{X})\mathbf{I}^z + \mathbf{X}(\mathbf{E} - \mathbf{T})\mathbf{I}', \tag{68}$$

$$\mathbf{U}'^{w} = \mathbf{X}\mathbf{I}^z - \{\mathbf{Z}'^{w}\mathbf{T} - \mathbf{X}(\mathbf{E} - \mathbf{T})\}\mathbf{I}', \tag{69}$$

$$\mathbf{U}'^{y} = \mathbf{X}\mathbf{I}^z + \{\mathbf{Z}'^{y} + \mathbf{X}(\mathbf{E} - \mathbf{T})\}\mathbf{I}'. \tag{70}$$

Z wzorów (1), (5) i (63) wynika, że występująca w równaniach (68)÷(70) macierz $\mathbf{X}(\mathbf{E}-\mathbf{T})$ wynosi:

$$\mathbf{G} = \mathbf{X}(\mathbf{E} - \mathbf{T}) = \sqrt{3} \begin{bmatrix} 0, & 0 & , & 0 \\ 0, & -a^2 X_\mu, & & 0 \\ 0, & 0 & , & aX_\mu \end{bmatrix}. \tag{71}$$

Aby wyrazić wektory napięć $\mathbf{U}'^{w}$ i $\mathbf{U}'^{y}$ tylko przez wektor napięć $\mathbf{U}_m^z$ i wektor prądów $\mathbf{I}'$, wyznaczymy z równania (68) prąd $\mathbf{I}^z$ i podstawimy do równań (69) i (70):

$$\mathbf{I}^z = (\mathbf{Z}^z + \mathbf{Z}_0^z + \mathbf{X})^{-1}(\mathbf{U}_m^z - \mathbf{G}\mathbf{I}'). \tag{72}$$

Obliczenia macierzy odwrotnej w tym wzorze jest łatwe, gdyż z wyrażeń (1), (5), (13) i (15) wynika, że cała suma $\mathbf{Z}^z + \mathbf{Z}_0^z + \mathbf{X}$ jest macierzą diagonalną. Otrzymujemy teraz równania napięć strony wtórnej:

$$\mathbf{U}'^{w} = \mathbf{X}(\mathbf{Z}^z + \mathbf{Z}_0^z + \mathbf{X})^{-1}(\mathbf{U}_m^z - \mathbf{G}\mathbf{I}') - (\mathbf{Z}'^{w}\mathbf{T} - \mathbf{G})\mathbf{I}', \tag{73}$$

$$\mathbf{U}'^{y} = \mathbf{X}(\mathbf{Z}^z + \mathbf{Z}_0^z + \mathbf{X})^{-1}(\mathbf{U}_m^z - \mathbf{G}\mathbf{I}') + (\mathbf{Z}'^{y} + \mathbf{G})\mathbf{I}', \tag{74}$$

lub po uporządkowaniu według prądów:

$$\mathbf{U}'^{w} = -\{\mathbf{Z}'^{w}\mathbf{T} - \mathbf{G} + \mathbf{X}(\mathbf{Z}^z + \mathbf{Z}_0^z + \mathbf{X})^{-1}\mathbf{G}\}\mathbf{I}' + \mathbf{X}(\mathbf{Z}^z + \mathbf{Z}_0^z + \mathbf{X})^{-1}\mathbf{U}_m^z, \tag{75}$$

$$\mathbf{U}'^{y} = \{\mathbf{Z}'^{y} + \mathbf{G} - \mathbf{X}(\mathbf{Z}^z + \mathbf{Z}_0^z + \mathbf{X})^{-1}\mathbf{G}\}\mathbf{I}' + \mathbf{X}(\mathbf{Z}^z + \mathbf{Z}_0^z + \mathbf{X})^{-1}\mathbf{U}_m^z. \tag{76}$$

Wzory te można zapisać w postaci dwóch równań macierzowych:

$$\mathbf{U}'^{w} = -\mathbf{Z}_i'^{w}\mathbf{I}' + \mathbf{K}\mathbf{U}_m^z, \tag{77}$$

$$\mathbf{U}'^{y} = \mathbf{Z}_i'^{y}\mathbf{I}' + \mathbf{K}\mathbf{U}_m^z. \tag{78}$$

Macierze $\mathbf{Z}_i'^{w}$, $\mathbf{Z}_i'^{y}$ i $\mathbf{K}$ są macierzami diagonalnymi:

$$\mathbf{Z}_i'^{w} = \begin{bmatrix} \underline{Z}'^{w}, & 0, & 0 \\ 0, & \underline{Z}'^{w}_{i(1)}, & 0 \\ 0, & 0, & \underline{Z}'^{w}_{i(2)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_i'^{y} = \begin{bmatrix} \underline{Z}'^{y}, & 0, & 0 \\ 0, & \underline{Z}'^{y}_{i(1)}, & 0 \\ 0, & 0, & \underline{Z}'^{y}_{i(2)} \end{bmatrix}, \tag{79}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \underline{K}'^{w}_{(0)0}, & 0, & 0 \\ 0, & \underline{K}'^{w}, & 0 \\ 0, & 0, & \underline{K}'^{w} \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$\underline{Z}'^{w}_{i(1)} = a\underline{Z}'^{w} + \sqrt{3}\,a^2\frac{\underline{Z}^z X_\mu}{\underline{Z}^z + jX_\mu},$$

$$\underline{Z}'^{w}_{i(2)} = a^2\underline{Z}'^{w} - \sqrt{3}\,a\frac{\underline{Z}^z X_\mu}{\underline{Z}^z + jX_\mu},$$

$$\underline{Z}'^{y}_{i(1)} = \underline{Z}'^{y} - \sqrt{3}\,a^2\frac{\underline{Z}^z X_\mu}{\underline{Z}^z + jX_\mu},$$

$$\underline{Z}'^{y}_{i(2)} = \underline{Z}'^{y} + \sqrt{3}\,a\frac{\underline{Z}^z X_\mu}{\underline{Z}^z + jX_\mu},$$

zaś współczynniki $\underline{K}'^{w}_{(0)0}$ i $\underline{K}'^{w}$ są określone we wzorach (40) i (8).

Na podstawie rys. 4 można napisać równania napięć:

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}'_a, & 0, & 0 \\ 0, & \underline{Z}'_b, & 0 \\ 0, & 0, & \underline{Z}'_c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{I}'_a \\ \underline{I}'_b \\ \underline{I}'_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{U}'^{y}_1 + \underline{U}'^{w}_2 \\ -\underline{U}'^{y}_2 + \underline{U}'^{w}_3 \\ -\underline{U}'^{y}_3 + \underline{U}'^{w}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{Z}'^{w}_0, & \underline{Z}'^{w}_0, & \underline{Z}'^{w}_0 \\ \underline{Z}'^{w}_0, & \underline{Z}'^{w}_0, & \underline{Z}'^{w}_0 \\ \underline{Z}'^{w}_0, & \underline{Z}'^{w}_0, & \underline{Z}'^{w}_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{I}'_a \\ \underline{I}'_b \\ \underline{I}'_c \end{bmatrix}, \tag{80}$$

skąd po transformacji współrzędnych otrzymuje się:

$$\mathbf{Z}'^{w}_{abc}\mathbf{I}' = -\mathbf{U}'^{y} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{U}'^{w} - \mathbf{Z}'^{w}_0\mathbf{I}', \tag{81}$$

gdzie $\mathbf{Z}'^{w}_{abc}$ i $\mathbf{Z}'^{w}_0$ są określone we wzorach (14) i (16) a $\mathbf{T}$ we wzorze (63).

Po podstawieniu do równania (81) napięć $\mathbf{U}'^{w}$ i $\mathbf{U}'^{y}$ określonych wzorami (77) i (78) otrzymuje się:

$$\mathbf{Z}_i'^{y}\mathbf{I}' + \mathbf{K}\mathbf{U}_m^z + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Z}_i'^{w}\mathbf{I}' - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{U}_m^z = -(\mathbf{Z}'^{w}_{abc} + \mathbf{Z}'^{w}_0)\mathbf{I}', \tag{82}$$

a po uporządkowaniu

$$(\mathbf{Z}_i'^{y} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Z}_i'^{w} + \mathbf{Z}'^{w}_{abc} + \mathbf{Z}'^{w}_0)\mathbf{I}' = (\mathbf{E} - \mathbf{T}^{-1})\mathbf{K}\mathbf{U}_m^z. \tag{83}$$

Z tego równania można już obliczyć przeliczony na stronę pierwotną prąd obciążenia wyrażony przez składowe 0, 1, 2:

$$\mathbf{I}' = (\mathbf{Z}_i'^{y} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Z}_i'^{w} + \mathbf{Z}'^{w}_{abc} + \mathbf{Z}'^{w}_0)^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{T}^{-1})\mathbf{K}\mathbf{U}_m^z. \tag{84}$$

Zapiszmy powyższy wzór w postaci:

$$\mathbf{I}' = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_m^z; \tag{85}$$

po podstawieniu wyrażeń określonych we wzorach (79), (63), (14) i (16) macierze **A** i **B** można napisać następująco:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Z}_i'^{y} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Z}_i'^{w} + \mathbf{Z}_{abc}'^{w} + \mathbf{Z}_0'^{w} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{(0)}'^{w} + \underline{D}, & \underline{Z}_{(2)}'^{w}, & \underline{Z}_{(1)}'^{w} \\ \underline{Z}_{(1)}'^{w}, & \underline{Z}_{(0)}'^{w} + \underline{F}, & \underline{Z}_{(2)}'^{w} \\ \underline{Z}_{(2)}'^{w}, & \underline{Z}_{(1)}'^{w}, & \underline{Z}_{(0)}'^{w} + \underline{F} \end{bmatrix}, \tag{86}$$

gdzie:

$$\underline{D} = \underline{Z}'^{w} + \underline{Z}'^{y} + 3\underline{Z}_0'^{w},$$

$$\underline{F} = \underline{Z}'^{w} + \underline{Z}'^{y} + 3\frac{\underline{Z}^{z} jX_\mu}{\underline{Z}^{z} + jX_\mu},$$

zaś $\underline{Z}_{(0)}'^{w}$, $\underline{Z}_{(1)}'^{w}$ i $\underline{Z}_{(2)}'^{w}$ są określone we wzorze (14)

$$\mathbf{B} = (\mathbf{E} - \mathbf{T}^{-1})\mathbf{K} = \frac{\sqrt{3}\,X_\mu}{\underline{Z}^{z} + jX_\mu} \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & -a, & 0 \\ 0, & 0, & a^2 \end{bmatrix}. \tag{87}$$

Prądy strony pierwotnej wyrażone przez składowe 0, 1, 2 można obliczyć teraz wykorzystując wzór (72):

$$\mathbf{I}^{z} = (\mathbf{Z}^{z} + \mathbf{Z}_0^{z} + \mathbf{X})^{-1}(\mathbf{U}_m^{z} - \mathbf{G}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}_m^{z}) = (\mathbf{Z}^{z} + \mathbf{Z}_0^{z} + \mathbf{X})^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{G}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})\,\mathbf{U}_m^{z}. \tag{88}$$

Prądy fazowe strony pierwotnej i wtórnej oblicza się przez transformację powrotną z uwzględnieniem przekładni:

$$\mathbf{I}_f^{z} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{I}^{z}, \qquad \mathbf{I}_f = \vartheta_z \mathbf{S}^{-1}\mathbf{I}'. \tag{89}$$

Otrzymane zależności można stosować również w granicznych przypadkach niesymetrii czyli przy przerwach i zwarciach w obwodzie obciążenia a także przy przerwach w przewodach zerowych. Dla przykładu załóżmy, że występuje przerwa w jednej fazie obciążenia, zatem $\underline{Z}_a = \infty$. Impedancja ta występuje we wzorze (88) tylko w macierzy $\mathbf{A}^{-1}$. Stosując regułę de l'Hospitala obliczamy granicę, do jakiej dąży macierz $\mathbf{A}^{-1}$ dla $\underline{Z}_a' \to \infty$:

$$\lim_{\underline{Z}_a' \to \infty} \mathbf{A}^{-1} = \lim_{\underline{Z}_a' \to \infty} \frac{\dfrac{\partial}{\partial \underline{Z}_a'}\mathbf{A}^{D}}{\dfrac{\partial}{\partial \underline{Z}_a'}\det \mathbf{A}}, \tag{90}$$

gdzie z wzoru (86):

$$\frac{\partial}{\partial \underline{Z}_a'}\mathbf{A}^{D} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2\underline{F} + \underline{Z}_b' + \underline{Z}_c', & -\underline{F} + a\underline{Z}_b' + a^2\underline{Z}_c', & -\underline{F} + a^2\underline{Z}_b' + a\underline{Z}_c' \\ -\underline{F} + a^2\underline{Z}_b' + a\underline{Z}_c', & \underline{D} + \underline{F} + \underline{Z}_b' + \underline{Z}_c', & -\underline{D} + a\underline{Z}_b' + a^2\underline{Z}_c' \\ -\underline{F} + a\underline{Z}_b' + a^2\underline{Z}_c', & -\underline{D} + a^2\underline{Z}_b' + a\underline{Z}_c', & D + F + \underline{Z}_b' + \underline{Z}_c' \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial \underline{Z}_a'}\det \mathbf{A} = \frac{1}{3}\{\underline{F}(2D + F) + (\underline{D} + 2\underline{F})(\underline{Z}_b' + \underline{Z}_c') + 3\underline{Z}_b'\underline{Z}_c'\}.$$

Dla uproszczenia obliczeń wygodniej jest bezpośrednio określić prąd obciążenia przez fazowe napięcia zasilania strony pierwotnej. Z wzorów (85) i (90) wynika zależność:

$$\mathbf{I}_f = \vartheta_z \mathbf{S}^{-1} \frac{\dfrac{\partial}{\partial \underline{Z}_a'}\mathbf{A}^{D}}{\dfrac{\partial}{\partial \underline{Z}_a'}\det \mathbf{A}} \frac{\sqrt{3}\,X_\mu}{\underline{Z}^{z} + jX_\mu} \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & -a, & 0 \\ 0, & 0, & a^2 \end{bmatrix} \mathbf{S}\mathbf{U}_{fm}^{z}, \tag{91}$$

a po obliczeniu iloczynu macierzy zapisanych między przekładnią ϑ_z a wektorem $\mathbf{U}^z_{fm}$ otrzymuje się:

$$\mathbf{I}_f = \frac{\vartheta_z jX_\mu}{(\underline{Z}^z + jX_\mu)\dfrac{\partial}{\partial \underline{Z}'_a}\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} 0 & , & 0 & , & 0 \\ \underline{F}-\underline{D} & , & -F-D-3\underline{Z}'_c, & & \underline{F}+2\underline{D}+3\underline{Z}'_c \\ 2\underline{F}-\underline{D}+3\underline{Z}'_b, & & \underline{D}-\underline{F} & , & -\underline{F}-2\underline{D}-3\underline{Z}'_b \end{bmatrix} \mathbf{U}^z_{fm}. \quad (92)$$

6. PODSUMOWANIE

Przedstawiona metoda pozwala na wykonanie obliczeń rozpływu prądów transformatora w stanie ustalonym przy dowolnej niesymetrii zasilania i obciążenia. Założenia upraszczające dotyczą jedynie wewnętrznej symetrii budowy transformatora, stałości jego parametrów, sinusoidalnych przebiegów czasowych prądów i napięć oraz pominięcia strat w rdzeniu. Metodę obliczeń można stosować w przypadkach dowolnych impedancji obciążenia oraz przerw w obwodzie obciążenia lub po stronie pierwotnej a także przy przerwach w przewodach zerowych. Wyprowadzone zależności dotyczą wybranych układów połączeń, można jednak łatwo otrzymać wzory dla innych połączeń, np. *Dz* lub *Dy*. Omawiane układy połączeń można jeszcze uzupełnić impedancjami w przewodach fazowych po stronie pierwotnej w układzie Y_0z lub impedancjami w obwodach fazowych trójkąta dla umożliwienia obliczenia rozpływu prądów przy przerwach po stronie pierwotnej, uwzględnienia niesztywności sieci lub przerw wewnątrz układu połączonego w trójkąt.

Mimo że przy stosowaniu wyprowadzonych wzorów czasochłonność obliczeń jest dość duża, obliczenia są znacznie prostsze niż przy stosowaniu ogólnych wyrażeń wynikających z równań napięć i metody składowych symetrycznych znanej z teorii obwodów. Obliczenia są znacznie ułatwione dzięki wprowadzeniu diagonalizacji macierzy w równaniach napięć. Szereg macierzy ma postać diagonalną ($\mathbf{X}$, $\mathbf{Z}^z$, $\mathbf{Z}'^w$, $\mathbf{Z}^z_T$, $\mathbf{Z}'^w_T$, $\mathbf{Z}'^w_i$, $\mathbf{Z}'^y_i$, $\mathbf{Z}'^w_{T0}$, $\mathbf{K}^z$, $\mathbf{K}'^w$, $\mathbf{K}'^w_0$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{K}$), a w macierzach $\mathbf{Z}^z_0$ i $\mathbf{Z}'^w_0$ występuje tylko jeden wyraz niezerowy. Niesymetria obciążenia strony wtórnej wpływa tylko na postać macierzy $\mathbf{Z}'^w_{abc}$, niesymetria impedancji dołączonych po stronie pierwotnej lub przerwy po stronie pierwotnej decydują tylko o postaci macierzy $\mathbf{Z}^z_{ABC}$, $\mathbf{P}$ i $\mathbf{C}$, impedancje przewodów zerowych występują tylko w macierzach $\mathbf{Z}^z_0$, $\mathbf{Z}'^w_0$ i $\mathbf{Z}'^w_{T0}$, a ewentualna niesymetria napięć zasilających ujawnia się w macierzy $\mathbf{U}^z_m$. Niektóre macierze ($\mathbf{Z}^z$, $\mathbf{Z}'^w$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Z}^z_T$, $\mathbf{Z}'^w_T$, $\mathbf{Z}'^w_i$, $\mathbf{Z}'^y_i$, $\mathbf{K}$ i $\mathbf{G}$) są wyrażone tylko przez stałe parametry transformatora.

Wzory obliczeniowe zostały wyprowadzone dla założonych układów skojarzenia uzwojeń odpowiadających grupom połączenia *Yy6*, *Yd5* i *Yz5*. Jeżeli sposób skojarzenia uzwojeń jest inny, odpowiednie wzory (np. (28), (29), (51), (52), (53), (60) i (80)) ulegają określonym modyfikacjom.

LITERATURA

1. W. Kołek, A. Puchała, *Die Ermittlung der Grenzfälle nichtsymmertischer Belastung von Transformatoren*, Wissenschaftliche Zeitschrift der Elektrotechnik, 1961, Band 1, Heft 2, s. 101—112.
2. A. Puchała, *Teoria przetworników elektromechanicznych*, Wydawnictwo Akademii Górniczo-Hutniczej, Kraków 1969.

3. T. Glinka i in., *Zadania z maszyn elektrycznych*, WNT, Warszawa 1973.
4. Z. Rydzewski, J. Majcher, *Analiza macierzowa obciążeń niesymetrycznych transformatorów trójfazowych*, Przegląd Elektrotechniczny, 1973, Nr 6, s. 265—272.
5. Z. Tertil, J. Skwarczyński, *Maszyny elektryczne*, Wydawnictwo Akademii Górniczo-Hutniczej, Kraków 1975.
6. Z. Bajorek, *Teoria maszyn elektrycznych*, Wydawnictwo Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 1976.

Z. BAJOREK

PROPAGATION OF CURRENTS IN THE TRANSFORMER AT FEED AND LOAD ASYMMETRY

Summary

The paper presents a general method of calculating current propagation in the transformer with the scheme of connections Y_0y_06, Y_0d5 or Y_0z5 at any asymmetry of impedance of load and feed of the mains. Asymmetry of load also includes short-circuits and breaks in load circuits, breaks on the primary side and any value of impedance in zero conductors on the primary and secondary sides for star or zigzag connections. The method of calculations given can be used for any coils connection.

Z. BAJOREK

RÉPARTITION DES COURANTS DANS UN TRANSFORMATEUR POUR L'ALIMENTATION ET LE CHARGE ASYMÉTRIQUES

Résumé

Dans le travail on a décrit la méthode générale de calcul de la répartition des courants dans un transformateur à couplage Y_0y_06, Y_0d5 ou Y_0z5 pour une asymétrie quelconque de l'impédance de charge et de tension du réseau d'alimentation. Dans l'asymétrie de la charge sont compris aussi des courts circuits et des intermittences dans les circuits de charge, les intermittences du côté primaire et la valeur quelconque de l'impédance dans les conducteurs neutres du côté primaire et secondaire pour les circuits groupés en étoile ou en zigzag. La méthode de calculs présentée peut être utilisée pour les modes quelconques de couplage des enroulements.

Z. BAJOREK

STROMVERTEILUNG IM TRANSFORMATOR BEI SPEISUNGS- UND BELASTUNGSASYMMETRIE

Zusammenfassung

In vorliegender Bearbeitung wird die allgemeine Berechnungsmethode für die Stromverteilung im Transformator mit Schaltgruppen Y_0y_06, Y_0d5 oder Y_0z5 bei willkürlicher Asymmetrie der Belastungsimpedanzen und beliebiger Netzspeisespannung erwogen. Die Belastungsasymmetrie umfaßt auch das Auftreten von Kurzschlüssen und Unterbrechungen in den Belastungskreisen, Unterbrechungen auf der Primärseite, und auch den beliebigen Impedanzwert in den Nulleitungen der Primär- und Sekundärseite für Stern- und Zickzackschaltungen. Die angeführte Berechnungsmethode kann für beliebige Windungsschaltungen angewandt werden.

З. БАЙОРЭК

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКОВ ТРАНСФОРМАТОРА ПРИ НЕСИММЕТРИИ ПИТАНИЯ И НАГРУЗКИ

Р е з ю м е

В статье приведен общий метод расчета распределения токов трансформатора для группы соединений $Y_0y_0 6$, Y_0d5 или Y_0z5 при любой несимметрии сопротивлений нагрузки и напряжения питающей сети. Несимметрия нагрузки включает тоже короткие замыкания и обрывы в цепи нагрузки, обрывы по первичной стороне, а также любую величину сопротивлений в нулевых цепях первичной и вторичной стороны при соединении обмоток звездой или зигзагом. Приведенный метод расчета можно использовать для любых групп соединений обмоток.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1978, 24, z. 2, ss. 351 — 372

621.313.323

Analiza modeli matematycznych silnika synchronicznego z punktu widzenia stabilności pracy

MARIA STEGNER-DEMS (ŁÓDŹ)

Instytut Transformatorów, Maszyn i Aparatów Elektrycznych Politechniki Łódzkiej

Otrzymano 4.12.1976

W artykule przedstawiono porównanie różnych modeli matematycznych silnika synchronicznego przeprowadzone na drodze obliczeniowej oraz z wynikami pomiarowymi dla silnika modelowego. Na podstawie uzyskanych wyników określono przydatność uproszczonego liniowego modelu III stopnia do analizy stanów nieustalonych silnika synchronicznego występujących na skutek nagłych zmian obciążenia (dla różnych zakresów tych zmian, różnych poziomów wzbudzenia oraz wielkości i rodzajów silników synchronicznych).

1. WSTĘP

Jednym z ważniejszych zagadnień w teorii maszyny synchronicznej jest analiza zachowania się maszyny pod wpływem zakłóceń, mogących prowadzić do utraty synchronizmu. Podstawą tej analizy jest model matematyczny maszyny synchronicznej, pozwalający na obliczenie zjawisk występujących w czasie trwania zakłócenia jak i znalezienie rozwiązań zwiększających stabilność pracy maszyny synchronicznej.

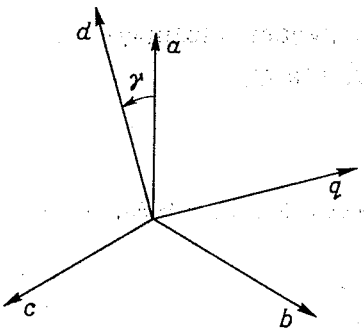
Stosowanie pełnego modelu matematycznego maszyny synchronicznej jest stosunkowo pracochłonne i dla szeregu przypadków niecelowe, toteż w praktyce stosuje się często modele matematyczne uproszczone. Przyjęte uproszczenia i dokładność modelu matematycznego mają wpływ jednak na uzyskane wyniki obliczeń, a uchyb tym spowodowany powinien być możliwie dokładnie oszacowany.

W artykule przedstawiono porównanie dokładności 4 modeli matematycznych silników synchronicznych różnych wielkości, przeprowadzone na drodze obliczeniowej oraz przez porównanie z wynikami pomiarowymi uzyskanymi dla silnika synchronicznego modelowego. Analizowano zjawisko kołysań własnych silnika synchronicznego przy stałym napięciu zasilającym i stałym wzbudzeniu, przy zakłóceniu wywołanym nagłą zmianą momentu na wale silnika.

2. MODELE MATEMATYCZNE SILNIKA SYNCHRONICZNEGO

Podstawą rozważań jest klasyczny model Parka maszyny synchronicznej we współrzędnych d, q, 0. Założono pięciouzwojeniowy model, zawierający 2 zastępcze uzwojenia

twornika, uzwojenie wzbudzenia i 2 zastępcze uzwojenia tłumiące (w osi d, q). Analizowane będą tylko symetryczne stany pracy maszyny więc rozpatrywany układ równań nie zawiera składowych zerowych. Pominięto także wpływ nasycenia, histerezy i prądów wirowych.



Rys. 1. Położenie układu współrzędnych dq względem układu współrzędnych naturalnych a, b, c

Przy zapisie równań przyjęto kolejność osi według rys. 1. Pełen model d, q silnika synchronicznego, dla maszyny mającej $2p$ biegunów w wartościach względnych [Zał. 1] ma postać:

$$ri_d+\frac{d\psi_d}{d\tau}+\psi_q\frac{d\gamma}{d\tau}=u_d, \qquad ri_q+\frac{d\psi_q}{d\tau}-\psi_d\frac{d\gamma}{d\tau}=u_q, \qquad r_w i_w+\frac{d\psi_w}{d\tau}=u_w,$$

$$r_D i_D+\frac{d\psi_D}{d\tau}=u_D=0, \qquad r_Q i_Q+\frac{d\psi_Q}{d\tau}=u_Q=0,$$

$$\psi_d=x_d i_d+x_{dw}i_w+x_{dD}i_D, \qquad \psi_q=x_q i_q+x_{qQ}i_Q, \qquad \psi_w=x_{wd}i_d+x_w i_w+x_{wD}i_D,$$

$$\psi_D=x_{Dd}i_d+x_{Dw}i_w+x_D i_D, \qquad \psi_Q=x_{Qq}i_q+x_Q i_Q,$$

$$\frac{J\omega_1^2}{pM_1}\frac{d^2\gamma}{d\tau^2}+\frac{D}{pM_1}\omega_1\frac{d\gamma}{d\tau}-(\psi_d i_q-\psi_q i_d)=-m_m, \tag{1}$$

$$\tau=\omega_1 t=2\pi f_1 t,$$

γ — kąt elektryczny.

Jest to model silnika synchronicznego I-go stopnia [3].

Jeśli w równaniach tych pominiemy SEM transformacji $\frac{d\psi_d}{d\tau}$ i $\frac{d\psi_q}{d\tau}$, to otrzymamy model matematyczny silnika synchronicznego II-go stopnia w następującej postaci:

$$ri_d+\psi_q\frac{d\gamma}{d\tau}=u_d, \qquad ri_q-\psi_d\frac{d\gamma}{d\tau}=u_q, \qquad r_w i_w+\frac{d\psi_w}{d\tau}=u_w,$$

$$r_D i_D+\frac{d\psi_D}{d\tau}=u_D=0, \qquad r_Q i_Q+\frac{d\psi_Q}{d\tau}=u_Q=0,$$

$$\psi_d=x_d i_d+x_{dw}i_w+x_{dD}i_D, \qquad \psi_q=x_q i_q+x_{qQ}i_Q, \qquad \psi_w=x_{wd}i_d+x_w i_w+x_{wD}i_D,$$

$$\psi_D=x_{Dd}i_d+x_{Dw}i_w+x_D i_D, \qquad \psi_Q=x_{Qq}i_q+x_Q i_Q,$$

$$\frac{J\omega_1^2}{pM_1}\frac{d^2\gamma}{d\tau^2}+\frac{D}{pM_1}\omega_1\frac{d\gamma}{d\tau}-(\psi_d i_q-\psi_q i_d)=-m_m. \tag{2}$$

Dalsze uproszczenie polega na pominięciu równań prądowo-napięciowych dotyczących obwodów tłumiących i uwzględnieniu tłumienia elektromagnetycznego tylko w równaniu ruchu wirnika. Otrzymujemy wtedy model silnika synchronicznego III-go stopnia w postaci:

$$ri_d+\psi_q\frac{d\gamma}{d\tau}=u_d, \quad ri_q-\psi_d\frac{d\gamma}{d\tau}=u_q, \quad r_w i_w+\frac{d\psi_w}{d\tau}=u_w,$$

$$\psi_d = x_d i_d+x_{dw}i_w, \quad \psi_q = x_q i_q, \quad \psi_w = x_{wd}i_d+x_w i_w,$$

$$\frac{J\omega_1^2}{pM_1}\frac{d^2\gamma}{d\tau^2}+\frac{D}{pM_1}\omega_1\frac{d\gamma}{d\tau}-(\psi_d i_q-\psi_q i_d) = -m_m. \tag{3}$$

Model ten można zapisać w postaci modelu stanu silnika synchronicznego (wektorowo-macierzowego)

$$\dot{\underline{x}} = \mathbf{A}\underline{x}+\mathbf{B}\underline{u},$$

gdzie:

$\underline{x} = (\vartheta, \omega, i_w)$ — wektor stanu,

$\underline{u} = u_w$ — wektor sterowania,

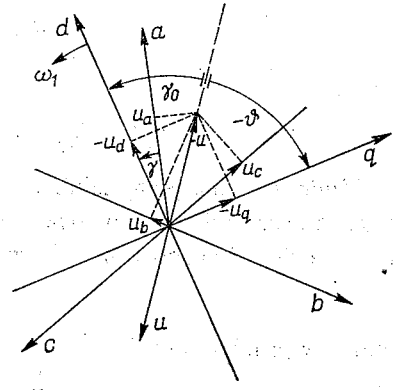
$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ — macierze, których wyrazy są zależne od parametrów maszyny i w ogólnym przypadku są funkcjami kąta $\gamma(t)$.

Związek między kątem γ określającym wzajemne położenie układów współrzędnych d,q i a,b,c oraz kątem obciążenia ϑ dla silnika synchronicznego ilustruje rys. 2. Mamy tu:

$$\gamma = \omega_1 t+\gamma_0, \quad \gamma_0 = \frac{\pi}{2}+\vartheta, \quad \gamma = \omega_1 t+\frac{\pi}{2}+\vartheta, \quad \dot{\gamma} = \omega_1+\dot{\vartheta}, \quad \ddot{\gamma} = \ddot{\vartheta}, \tag{4}$$

natomiast napięcie

$$u_d = -u\sin\vartheta, \quad u_q = -u\cos\vartheta.$$



Rys. 2. Zależność między kątem γ i kątem obciążenia ϑ dla silnika synchronicznego

Uwzględniając powyższe zależności i przyjmując dla równań prądowych $\dot{\gamma} = \omega_1$ otrzymujemy z układu równań (3) dla $r = 0$ nieliniowy model silnika synchronicznego III-go stopnia w postaci:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \dot{\vartheta} = \omega,$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = -\frac{D}{J}\omega-\frac{pM_1}{J}\frac{ux_{dw}}{x_d}i_w\sin\vartheta-\frac{pM_1}{2J}\frac{u^2(x_d-x_q)}{x_d x_q}\sin 2\vartheta-\frac{pM_1}{J}(m_{e0}+\Delta m_m),$$

$$\frac{di_w}{dt} = \frac{\omega_1 x_d}{x_d x_w-x_{dw}^2}u_w-\frac{r_w\omega_1 x_d}{x_d x_w-x_{dw}^2}i_w+\frac{ux_{dw}}{x_d x_w-x_{dw}^2}\omega\sin\vartheta, \tag{5}$$

gdzie:

$$m_{e0} = \frac{ue_{m0}}{x_d}\sin\vartheta_0 + \frac{u^2(x_d - x_q)}{2x_d x_q}\sin 2\vartheta_0,$$

m_{e0} — moment elektromagnetyczny w warunkach ustalonych,

Δm_m — zmiana momentu mechanicznego powodująca kołysanie własne silnika synchronicznego.

Model ten można zlinearyzować, przyjmując jako zmienne stanu przyrosty wielkości, występujące w czasie stanu nieustalonego w postaci

$$\underline{x} = (\Delta\vartheta, \Delta\omega, \Delta i_w).$$

Wtedy układ równań (5) można zapisać dla małych przyrostów zmiennych w postaci liniowego modelu stanu:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\vartheta} \\ \Delta\dot{\omega} \\ \Delta\dot{i}_w \\ \Delta\dot{m}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ 0 & a_{32} & -a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\vartheta \\ \Delta\omega \\ \Delta i_w \\ \Delta m_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_{31} \\ 0 \end{bmatrix} [\Delta u_w], \tag{6}$$

gdzie współczynniki macierzy **A** i **B** wyrażają się zależnościami:

$$a_{21} = \frac{pM_1}{J}\left(\frac{ux_{dw}}{x_d} i_{wo}\cos\vartheta_0 + \frac{u^2(x_d - x_q)}{x_d x_q}\cos 2\vartheta_0\right),$$

$$a_{22} = \frac{D}{J}, \qquad a_{23} = \frac{pM_1}{J} u\frac{x_{dw}}{x_d}\sin\vartheta_0, \qquad a_{24} = \frac{pM_1}{J},$$

$$a_{32} = \frac{ux_{dw}}{x_d x_w - x_{dw}^2}\sin\vartheta_0, \qquad a_{33} = \frac{r_w\omega_1 x_d}{x_d x_w - x_{dw}^2},$$

$$b_{31} = \frac{\omega_1 x_d}{x_d x_w - x_{dw}^2}. \tag{6a}$$

Model matematyczny silnika synchronicznego IV stopnia uzyskuje się, opisując silnik synchroniczny tylko za pomocą równania ruchu wirnika. Nieliniowy model IV stopnia silnika synchronicznego dla zmiennych stanu

$$\underline{x} = (\vartheta, \omega).$$

będzie więc miał postać

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \dot{\vartheta} = \omega,$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = -\frac{D}{J}\omega - \frac{pM_1}{J}\frac{ue_m}{x_d}\sin\vartheta - \frac{pM_1}{2J}\frac{u^2(x_d - x_q)}{x_d x_q}\sin 2\vartheta - \frac{pM_1}{J}(m_{e0} + \Delta m_m). \tag{7}$$

Dla małych przyrostów zmiennych możemy z układu równań (7) otrzymać liniowy model stanu silnika synchronicznego IV-go stopnia w postaci:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\vartheta} \\ \Delta\dot{\omega} \\ \Delta\dot{m}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\vartheta \\ \Delta\omega \\ \Delta m_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\Delta u_w], \tag{8}$$

gdzie:

$$a_{21} = \frac{pM_1}{J}\left(\frac{ue_{m0}}{x_d}\cos\vartheta_0 + \frac{u^2(x_d - x_q)}{x_d x_q}\cos 2\vartheta_0\right),$$

$$a_{22} = \frac{D}{J}, \qquad a_{23} = \frac{pM_1}{J}.$$

W analizie stabilności pracy silnika synchronicznego przy najbardziej typowych zaburzeniach, takich jak nagła zmiana momentu na wale bądź zmiana napięcia na zaciskach silnika, decydującą rolę odgrywają oscylacje kąta obciążenia maszyny. Z tego względu wystarczającym dla tej analizy jest posługiwanie się modelem III-go lub IV-go stopnia.

3. PORÓWNANIE WYNIKÓW OBLICZEŃ UZYSKANYCH PRZY ZASTOSOWANIU MODELU MATEMATYCZNEGO SILNIKA SYNCHRONICZNEGO III-go i IV-go STOPNIA

Tablica 1

Dane znamionowe i parametry silników synchronicznych

Dane znamionowe i parametry	Typ silnika			
	GAe-1612t	GAe-156t	GYe-154t	WAA-14-B
Moc znamionowa P_n [kW]	3150	4000	6700	24
Napięcie znamionowe [V]	6000 Y	6000 Y	6000 Y	400/231 Y/Δ
Prąd znamionowy [A]	348	447	703	43,3
cos φ_n [—]	0,9 poj.	0,9 poj.	0,95 poj.	0,8 poj.
Liczba biegunów $2p$	12	6	4	4
Prędkość obrotowa [obr/min]	500	1000	1500	1500
Napięcie wzbudzenia [V]	114	77	65	21
Prąd wzbudzenia [A]	300	380	440	23
Moment zamachowy [kGm²]	9000	2970	2000	9,76
Moment znamionowy $M_n = \frac{P_n}{\Omega_n}$ [Nm]	60160	38197	42654	153
x_d [jw]	0,9637	1,631	1,341	1,910
x'_d [jw]	0,3057	0,4226	0,299	0,427
x''_d [jw]	0,1574	0,180	0,164	0,298
x_q [jw]	0,5647	0,9356	0,693	0,970
x''_q [jw]	0,1534	0,1723	0,181	0,720
x_r [jw]	0,0937	0,1156	0,101	0,107
x_w [jw]	1,150	1,90	1,475	2,192
x_{dw} [jw]	0,710	1,237	1,0122	1,471
r_{75} [jw]	0,00855	0,00858	0,00534	0,0654
r_{w75} [jw]	0,00143	0,00171	0,00102	0,00652
T''_d [s]	0,418	0,413	0,543	0,0698
T'_d [s]	0,812	0,97	0,99	0,240
T_{do} [s]	2,56	3,74	4,44	1,071
T_a [s]	0,0578	0,0654	0,103	0,0225
T_D [s]	0,081	0,106	0,0295	—
T_Q [s]	0,0438	0,0503	0,0146	—

W celu porównania wyników obliczeń uzyskanych przy zastosowaniu modelu matematycznego silnika synchronicznego III-go i IV-go stopnia, przeprowadzono obliczenie odpowiedzi układu przy nagłej zmianie momentu na wale silnika synchronicznego, przy stałym napięciu zasilającym i stałym wzbudzeniu, w oparciu o 4 modele matematyczne silnika synchronicznego:

a) model nieliniowy III-go stopnia (5) krzywa *1*,
b) model nieliniowy IV-go stopnia (7) krzywa *2*,
c) model liniowy III-go stopnia (6) } krzywa *3*.
d) model liniowy IV-go stopnia (8) }

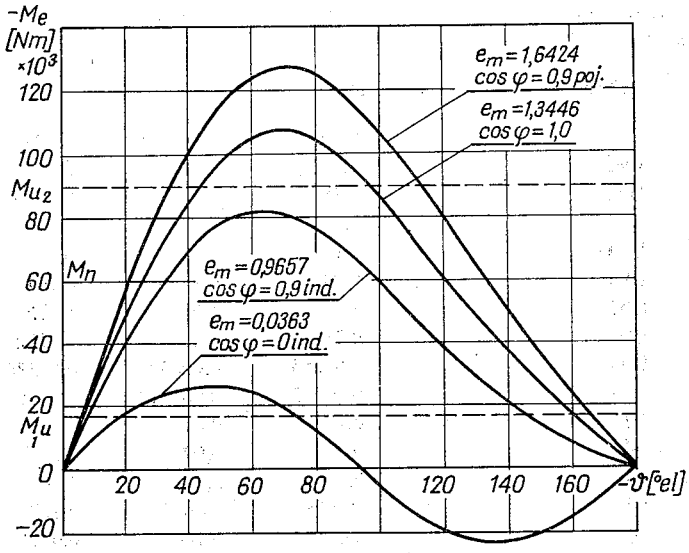
Obliczenie przeprowadzono dla różnych wartości zmian momentu na wale silnika, przy różnych stałych wartościach prądu wzbudzenia. Równania (5÷8) rozwiązano metodą Rungego-Kuthy na maszynie cyfrowej.

Obiektem rozważań były silniki synchroniczne: GAe-1612t, GAe-156t, GYe-154t oraz silnik synchroniczny modelowy WAA-14-B o parametrach podanych w tablicy 1.

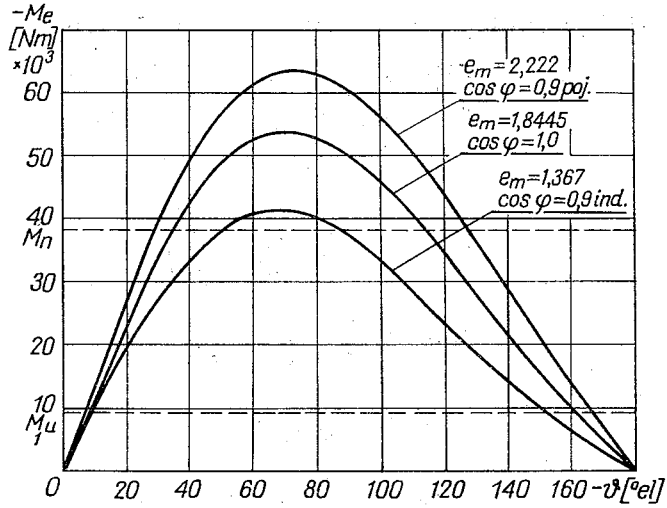
3.1. Wyniki obliczeń kołysań własnych silnika synchronicznego wyznaczonych w oparciu o modele III-go i IV-go stopnia

Dla silników synchronicznych GAe-1612t, GAe-156t, GYe-154t wyznaczono statyczne charakterystyki kątowe dla następujących warunków:

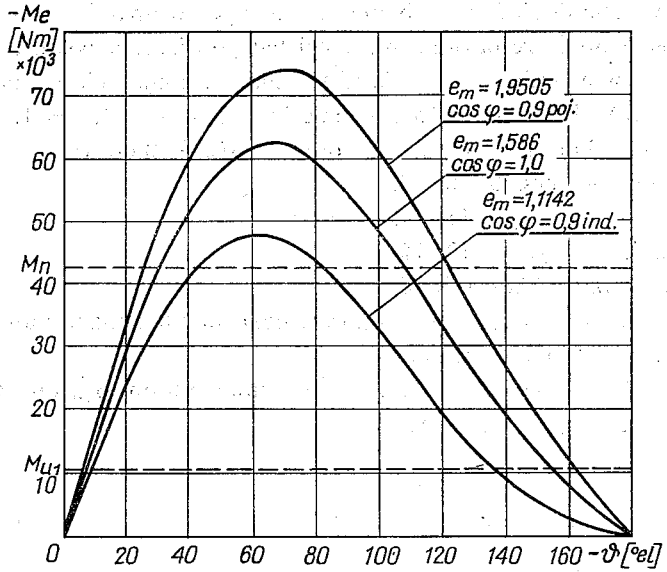
a) $u = 1$, $i = 1$, $\cos\varphi = 0{,}9$ poj. (rys. 3, 4, 5),
b) $u = 1$, $i = 1$, $\cos\varphi = 1{,}0$,
c) $u = 1$, $i = 1$, $\cos\varphi = 0{,}9$ ind.,
d) $u = 1$, $i = 1$, $\cos\varphi = 0$ ind. dla silnika GAe-1612t.



Rys. 3. Statyczne charakterystyki kątowe silnika synchronicznego GAe-1612t



Rys. 4. Statyczne charakterystyki kątowe silnika synchronicznego GAe-156t



Rys. 5. Statyczne charakterystyki kątowe silnika synchronicznego GYe-154t

Omawiane silniki synchroniczne posiadają klatkę tłumiącą, co umożliwia określenie występującego w równaniach (5÷8) współczynnika tłumienia według zależności [4]:

$$d = \frac{D}{M_1} = \frac{M_{dd}\sin^2\vartheta_0 + M_{qq}\cos^2\vartheta_0}{\nu_0} = 2\xi\sqrt{\sigma\frac{J}{M_1}}p\,; \tag{9}$$

M_{dd}, M_{qq} — momenty asynchroniczne w osiach d i q (przy $r = 0$ i częstości ν_0),

$$\sigma = \frac{u e_{m0}}{x_d}\cos\vartheta_0 + \frac{u^2(x_d - x_q)}{x_d x_q}\cos 2\vartheta_0,$$

$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{p\sigma M_1}{J}}$ — częstotliwość kołysań własnych nietłumionych.

Dla silnika z klatką rozruchową, przy rozwartym uzwojeniu wzbudzenia [5], [6]

$$M_{dd0} = \frac{2M_{dd\,max}}{\frac{s}{s_{utd}} + \frac{s_{utd}}{s}}, \qquad M_{qq} = \frac{2M_{qq\,max}}{\frac{s}{s_{utq}} + \frac{s_{utq}}{s}}, \tag{10}$$

gdzie:

$$M_{dd\,max} = \frac{u^2}{4}\left(\frac{1}{x_d \sigma'_d} - \frac{1}{x_d}\right),$$

$$M_{qq\,max} = \frac{u^2}{4}\left(\frac{1}{x''_q} - \frac{1}{x_q}\right),$$

$$s_{utd} = \frac{1}{\omega_1 \sigma'_d T_D},$$

$$s_{utq} = \frac{1}{\omega_1 T_Q}, \qquad s = \frac{\nu_0}{f_1}.$$

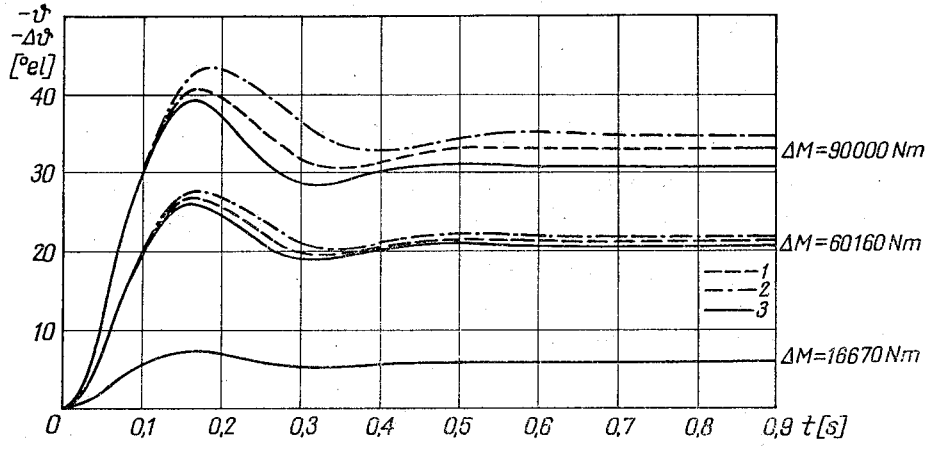
W celu porównania dokładności obliczeń uzyskanych w oparciu o model matematyczny III-go i IV-go stopnia zestawiono przebiegi kąta obciążenia poszczególnych silników $\varphi = f(t)$ obliczone w oparciu o równania (5÷8) dla następujących przypadków:

— dla silników GAe-1612t, GAe-156t i GYe-154t oraz $u = 1$, $i = 1$, $\vartheta_0 = 0$ i zmian momentu od $M_{e0} = 0$ do $M_{1ust} = 0{,}25\ M_n$ oraz od $M_{e0} = 0$ do $M_{ust} = M_n$

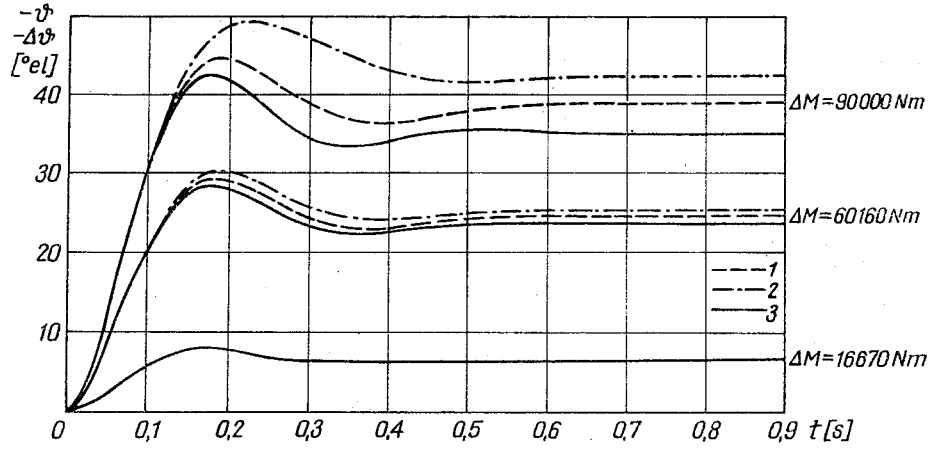
1) $\cos\varphi = 0{,}9$ poj. — rys. 6, 10, 13,
2) $\cos\varphi = 1{,}0$ — rys. 7, 11, 14,
3) $\cos\varphi = 0{,}9$ ind. — rys. 8, 12, 15,

— ponadto, dla silnika GAe-1612t, dla:

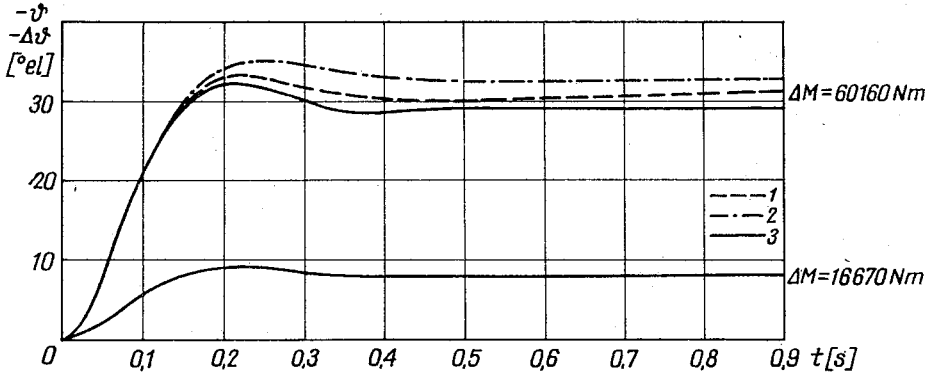
4) $u = 1$, $i = 1$, $\vartheta_0 = 0$, $\cos\varphi = 0{,}9$ poj. oraz $\cos\varphi = 1{,}0$, zmiana momentu od $M_{e0} = 0$ do $M_{2ust} = 1{,}5\ M_n$ — rys. 6, 7,
5) $u = 1$, $i = 1$, $\vartheta_0 = 0$, $\cos\varphi = 0$ ind., zmiana momentu od M_{e0} do $M_{1ust} = 0{,}25\ M_n$, oraz od M_{e0} do $M_{ust} = M_n$ — rys. 9.



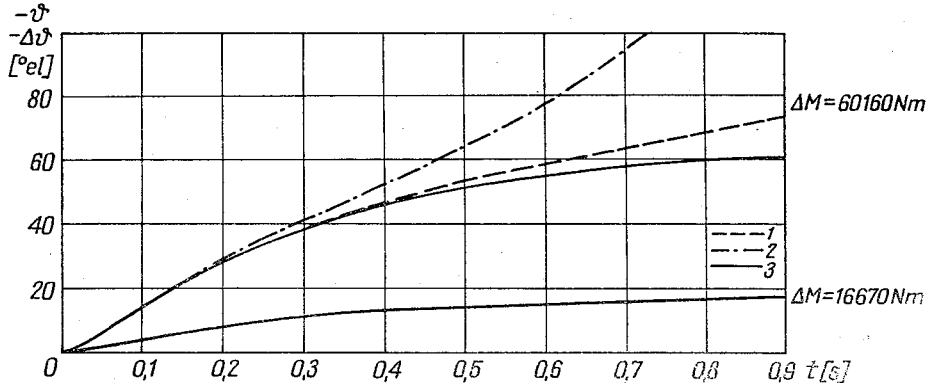
Rys. 6. Przebiegi $\vartheta(t)$ i $\Delta\vartheta(t)$ dla silnika GAe-1612t
$u = 1$, $i = 1$, $\cos\varphi = 0{,}9$ poj.



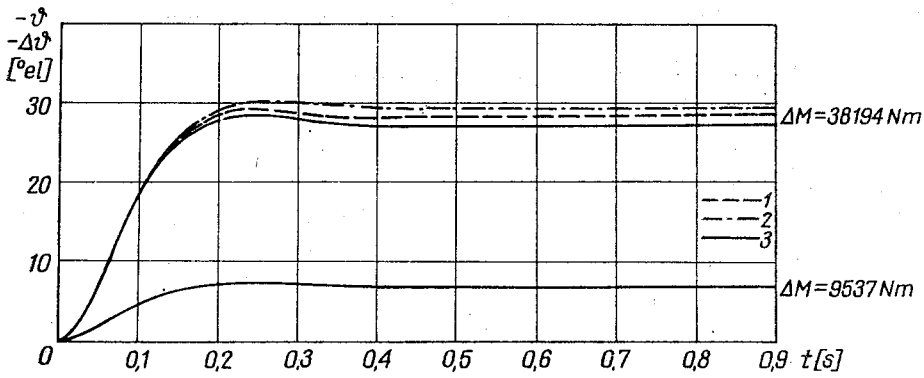
Rys. 7. Przebiegi $\vartheta(t)$ i $\Delta\vartheta(t)$ dla silnika GAe-1612t
$u = 1$, $i = 1$, $\cos\varphi = 1{,}0$



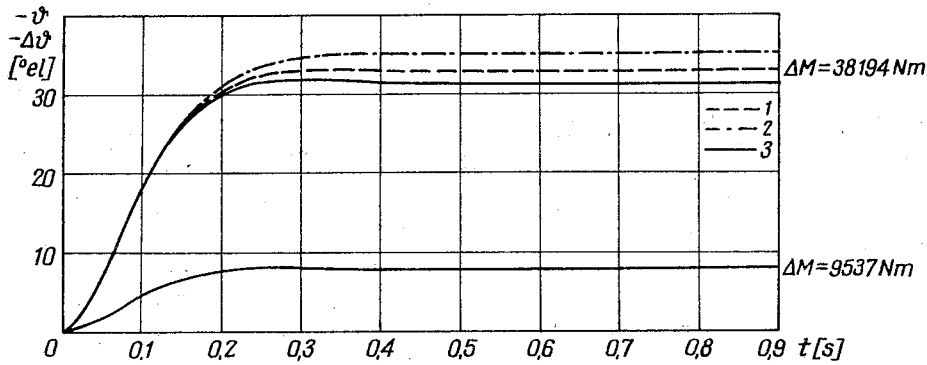
Rys. 8. Przebiegi $\vartheta(t)$ i $\Delta\vartheta(t)$ dla silnika GAe-1612t
$u = 1$, $i = 1$, $\cos\varphi = 0{,}9$ ind.



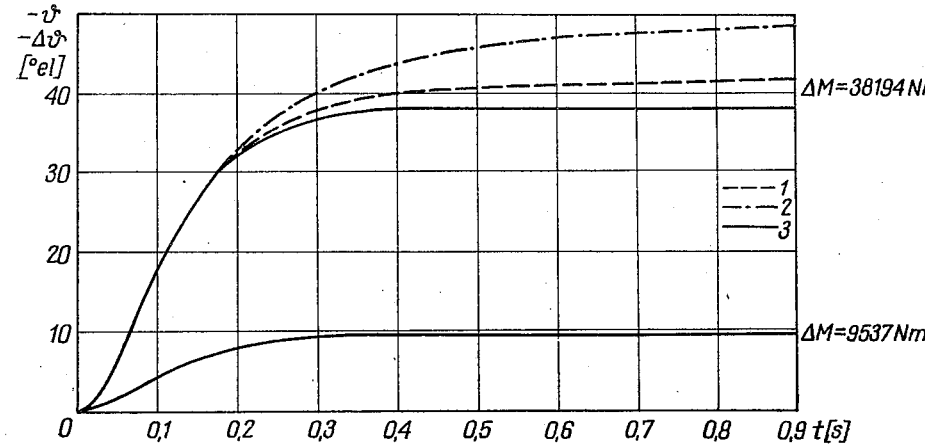
Rys. 9. Przebiegi $\vartheta(t)$ i $\Delta\vartheta(t)$ dla silnika GAe-1612t
$u = 1$, $i = 1$, $\cos\varphi = 0$ ind.



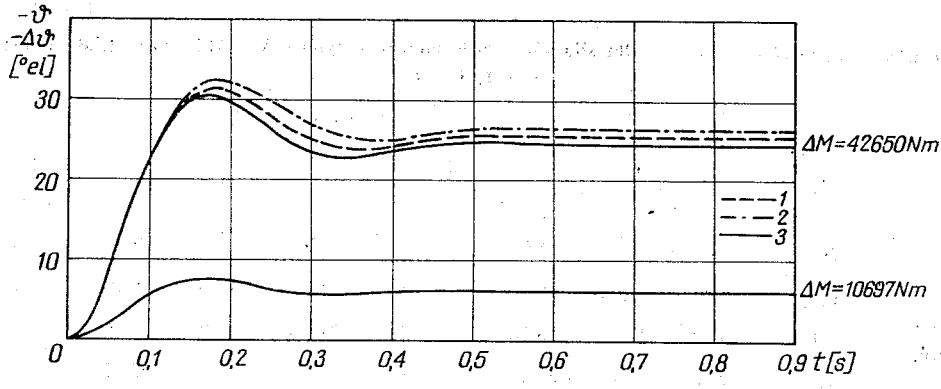
Rys. 10. Przebiegi $\vartheta(t)$ i $\Delta\vartheta(t)$ dla silnika GAe-156t
$u = 1$, $i = 1$, $\cos\varphi = 0{,}9$ poj.



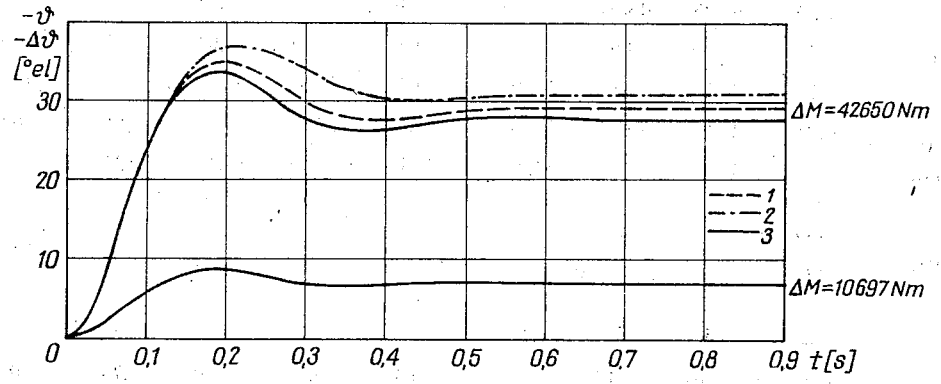
Rys. 11. Przebiegi $\vartheta(t)$ i $\Delta\vartheta(t)$ dla silnika GAe-156t
$u = 1$, $i = 1$, $\cos\varphi = 1{,}0$



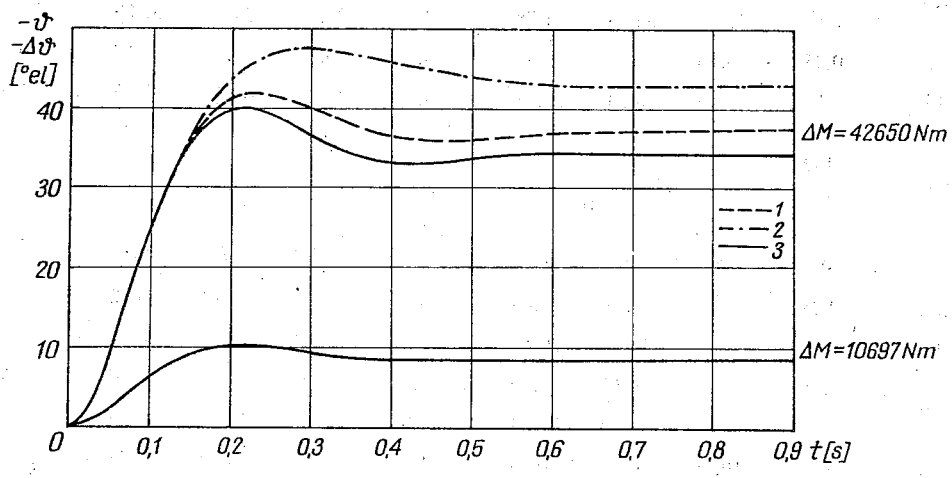
Rys. 12. Przebiegi $\vartheta(t)$ i $\Delta\vartheta(t)$ dla silnika GAe-156t
$u = 1$, $i = 1$, $\cos\varphi = 0{,}9$ ind.



Rys. 13. Przebiegi $\vartheta(t)$ i $\Delta\vartheta(t)$ dla silnika GYe-154t
$u = 1$, $i = 1$, $\cos\varphi = 0{,}9$ poj.



Rys. 14. Przebiegi $\vartheta(t)$ i $\Delta\vartheta(t)$ dla silnika GYe-154t
$u = 1$, $i = 1$, $\cos\varphi = 1{,}0$



Rys. 15. Przebiegi $\vartheta(t)$ i $\Delta\vartheta(t)$ dla silnika GYe-154t
$u = 1$, $i = 1$, $\cos\varphi = 0{,}9$ ind.

Tablica 2

Zestawienie wartości ϑ_{1max} i ϑ_{ust} dla silników synchronicznych typu GAe-1612t, GAe-156t GAe-154t $u = 1$, $i = 1$

cos φ	$\frac{\Delta M}{M_n}$	GAe-1612 t							
		ϑ_{1max}[°el]			$\frac{\Delta\vartheta_{1max}}{\vartheta_{1max\,5}}$	ϑ_{ust}[°el]			$\frac{\Delta\vartheta_u}{\Delta\vartheta_{u5}}$
—	j.w.	5	7	6/8	%	5	7	6/8	%
0,9 poj.	0,25	7,27	7,28	7,26	0,3	5,68	5,69	5,67	0,4
	1	26,62	27,12	26,20	3,5	21,40	21,47	20,51	4,5
	1,5	40,63	43,14	39,19	9,7	33,00	34,36	30,62	11,3
1,0	0,25	7,89	7,90	7,87	0,4	6,52	6,52	6,50	0,3
	1	29,01	29,87	28,42	5,0	24,46	25,02	23,45	6,4
	1,50	44,59	48,95	42,52	14,4	39,02	42,25	35,08	18,4
0,9 ind.	0,25	8,89	8,92	8,87	0,6	8,01	8,03	7,97	0,8
	1	32,94	34,98	32,01	9,0	30,82	32,52	28,76	12,2
0 ind.	0,25	17,94	19,31	17,51	10,0	17,94	19,31	17,51	10,0
	1	77,73	168,85	62,24	137,1	77,73	168,85	62,24	137,1
cosφ	$\frac{\Delta M}{M_n}$	GAe-156t							
		ϑ_{1max}[°el]			$\frac{\Delta\vartheta_{1max}}{\vartheta_{1max\,5}}$	ϑ_{ust}[°el]			$\frac{\Delta\vartheta_u}{\vartheta_{u5}}$
—	j.w.	5	7	6/8	%	5	7	6/8	%
0,9 poj.	0,25	7,16	7,17	7,15	0,3	6,79	6,80	6,78	0,3
	1	29,31	30,29	28,62	5,7	28,42	29,29	27,14	7,6
1,0	0,25	7,95	7,97	7,94	0,4	7,79	7,81	7,76	0,6
	1	32,92	34,98	31,78	9,7	33,10	34,91	31,09	11,5
0,9 ind.	0,25	9,56	9,57	9,53	0,4	9,56	9,57	9,52	0,5
	1	42,06	48,73	38,15	25,2	42,06	48,73	38,13	21,5
cosφ	$\frac{\Delta M}{M_n}$	GYe-154t							
		ϑ_{1max}[°el]			$\frac{\Delta\vartheta_{1max}}{\vartheta_{1max\,5}}$	ϑ_{ust}[°el]			$\frac{\Delta\vartheta_u}{\vartheta_{u5}}$
—	j.w.	5	7	6/8	%	5	7	6/8	%
0,9 poj.	0,25	7,66	7,68	7,65	0,4	6,14	6,15	6,12	0,5
	1	31,31	32,34	30,50	5,9	25,43	26,16	24,41	6,9
1,0	0,25	8,51	8,54	8,49	0,6	6,98	7,01	6,96	0,7
	1	34,85	36,20	33,83	6,8	29,31	30,99	27,74	11,1
0,9 ind.	0,25	10,11	10,18	10,05	1,3	8,61	8,69	8,57	1,4
	1	41,84	47,26	40,06	17,2	37,44	42,87	34,16	23,3

W tablicy 2 zestawiono wartości ϑ_{1max} i ϑ_{ust} wyznaczone dla poszczególnych silników, w oparciu o różne modele matematyczne, przy różnych wzbudzeniach i różnych wartościach zmian momentu.

Jednocześnie w tablicy 2 podano maksymalne rozbieżności pierwszej amplitudy $\Delta\vartheta_{1max\%}$ i $\Delta\vartheta_{ust\%}$ w odniesieniu do wartości ϑ_{1max} i ϑ_{ust} wyznaczonych w oparciu o model nieliniowy III-go stopnia (5), spowodowane zastosowaniem do obliczeń różnych modeli matematycznych silnika synchronicznego:

(5) — model nieliniowy III-go stopnia,
(7) — model nieliniowy IV-go stopnia,
(6) — model liniowy III-go stopnia,
(8) — model liniowy IV-go stopnia.

Na podstawie przedstawionych przebiegów i zestawienia podanego w tablicy 2 można stwierdzić, że wyniki obliczeń przebiegów $\vartheta = f(t)$ uzyskane przy zastosowaniu modelu liniowego III-go i IV-go stopnia (równania 6, 8) dla wszystkich rozpatrywanych zmian momentu przy różnych wzbudzeniach są jednakowe (maksymalne rozbieżności nie przekraczają 0,1%).

Dla małych skoków momentu, w granicach do $M_{1ust} = 0{,}25\ M_n$, dla różnych wartości wzbudzenia, wyniki uzyskane w oparciu o równania (5÷8) są bardzo do siebie zbliżone. Maksymalne rozbieżności pierwszej amplitudy $\Delta\vartheta_{1max}$ i $\Delta\vartheta_{ust}$ obliczone w oparciu o cztery różne modele matematyczne silnika synchronicznego nie przekraczają 1,5%.

Przy nagłej zmianie momentu w granicach wartości znamionowej M_n największe wartości ϑ_{1max} i ϑ_{ust} otrzymujemy przy zastosowaniu modelu nieliniowego IV-go stopnia, a najmniejsze — dla modelu liniowego III-go i IV-go stopnia. Maksymalne rozbieżności $\Delta\vartheta_{1max}$ i $\Delta\vartheta_{ust}$ są tym większe, im mniejsza jest wartość wzbudzenia i dla

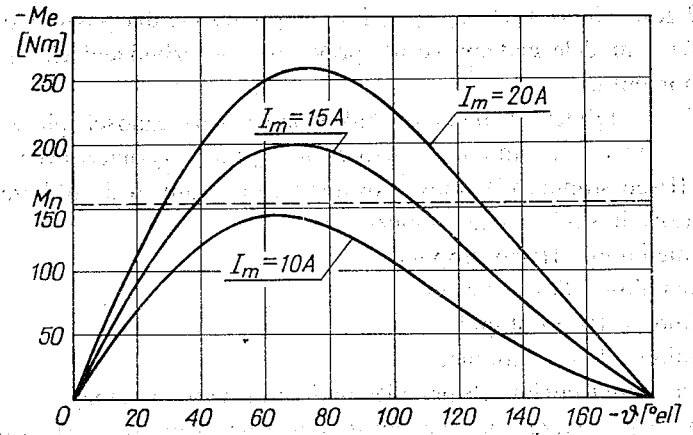
$\cos\varphi = 0{,}9$ poj. — nie przekraczają 8%,
$\cos\varphi = 1{,}0$ — nie przekraczają 12%,
$\cos\varphi = 0{,}9$ ind. — nie przekraczają 25%,
$\cos\varphi = 0$ ind. — silnik wypada z synchronizmu.

Przy dużym skoku momentu, rzędu $\Delta M \approx 1{,}5\ M_n$, rozbieżności kąta obciążenia są znaczne, ale dla silnika GAe-1612t, dla $\cos\varphi = 0{,}9$ poj. nie przekraczają 12%, dla $\cos\varphi = 1{,}0$ nie przekraczają 19%.

Należy podkreślić, że silniki synchroniczne pracują zwykle przy wzbudzeniu odpowiadającym $\cos\varphi_n = 0{,}9$ poj. W tych warunkach maksmymalne rozbieżności $\Delta\vartheta_{1max}$ i $\Delta\vartheta_{ust}$ nawet przy znacznej zmianie momentu na wale dla modeli III-go i IV-go stopnia nie przekraczają wartości 10%.

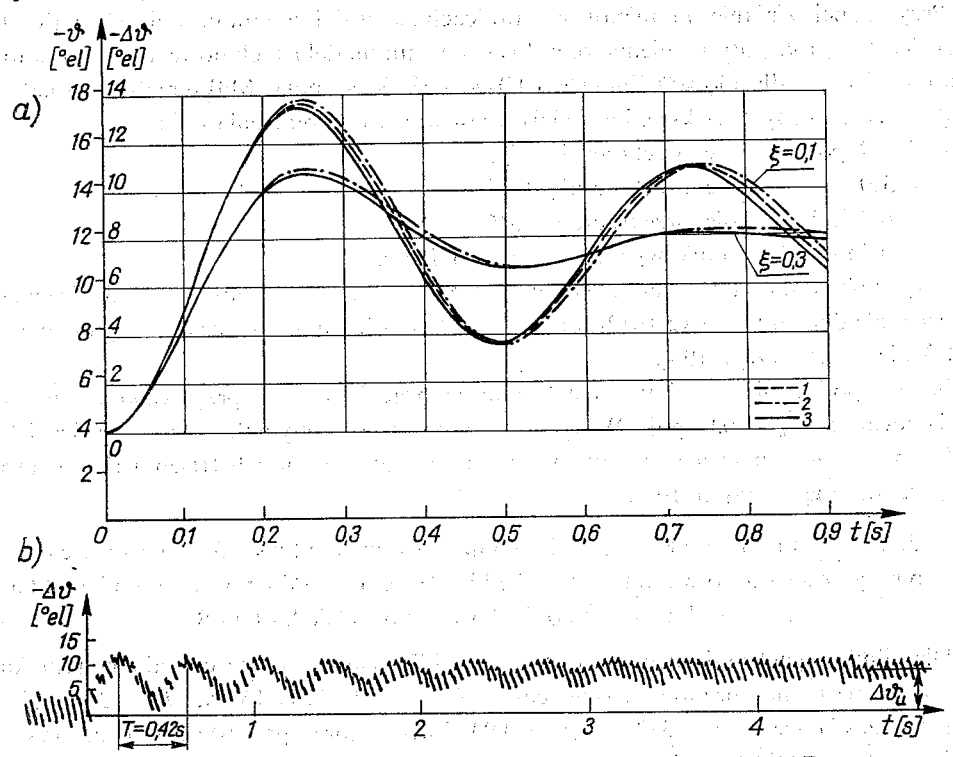
3.2. Wyniki obliczeń i pomiarów kołysań własnych przy zastosowaniu modeli III-go i IV-go stopnia dla silnika modelowego WAA-14-B

Dla silnika synchronicznego modelowego obliczono statyczne charakterystyki kątowe $M_{el} = f(\vartheta)$ dla prądów wzbudzenia: $I_m = 10$ A, $I_m = 15$ A, $I_m = 20$ A i dla napięcia zasilającego $u = 372$ V ($u = 0{,}93$ j.w.), które przedstawiono na rys. 16. Silnik modelowy nie posiada uzwojenia rozruchowego, natomiast jego pieńki biegunowe i nabiegunniki są wykonane z masywnego żelaza.

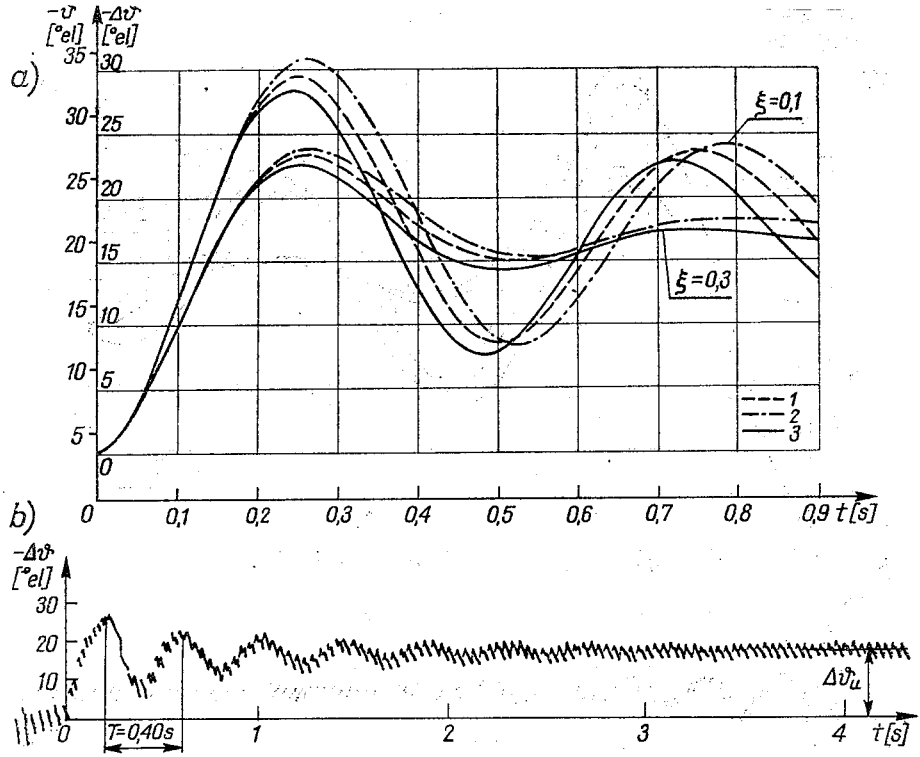


Rys. 16. Statyczne charakterystyki kątowe silnika synchronicznego modelowego WAA-14-B

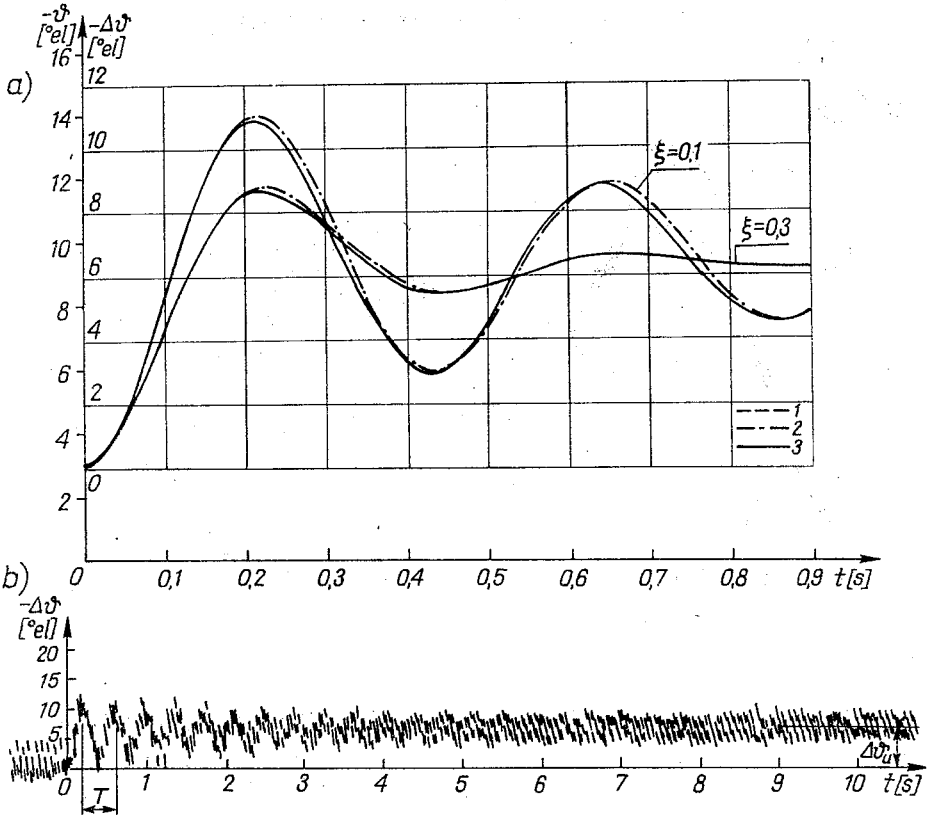
W celu porównania dokładności modeli matematycznych III-go i IV-go stopnia przeprowadzono dla silnika modelowego pomiar przebiegu kąta obciążenia $\vartheta = f(t)$ w czasie skokowych zmian momentu mechanicznego, przy różnych wartościach prądu wzbudzenia. Jednocześnie przeprowadzono obliczenia przebiegu $\vartheta = f(t)$ w oparciu o równania (5÷8) dla warunków uzyskanych w trakcie pomiaru. Otrzymane wyniki przedstawiono na rys. 17÷21 i w tabl. 3.



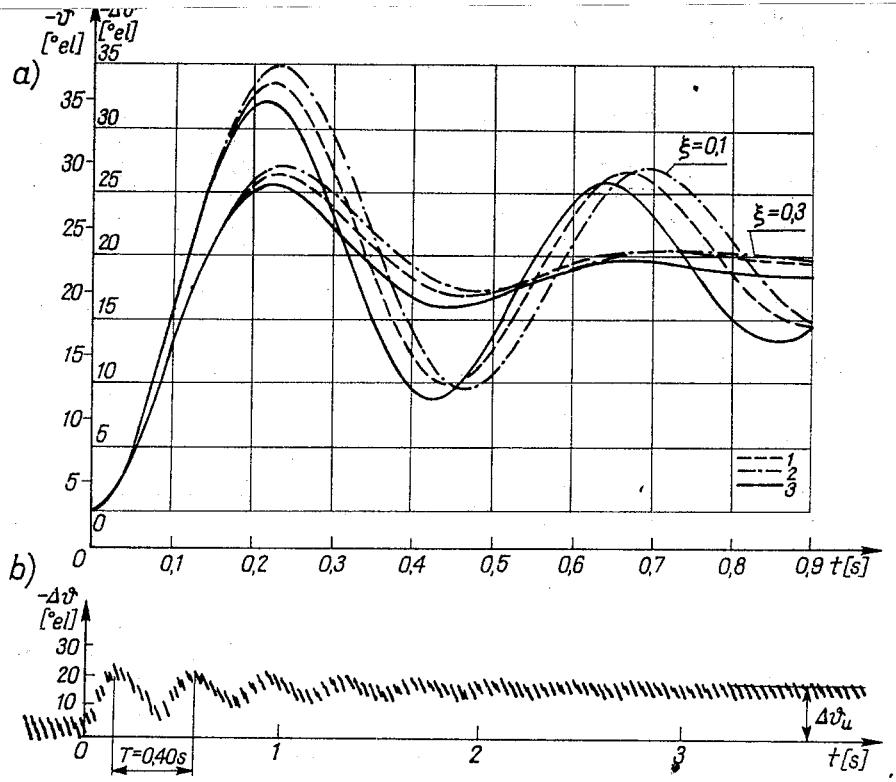
Rys. 17. Przebiegi $\vartheta(t)$ i $\Delta\vartheta(t)$ dla silnika modelowego WAA-14-B
$I_m = 10$ A, $\Delta M = 28{,}3$ N_m.
a) obliczone, b) zmierzony



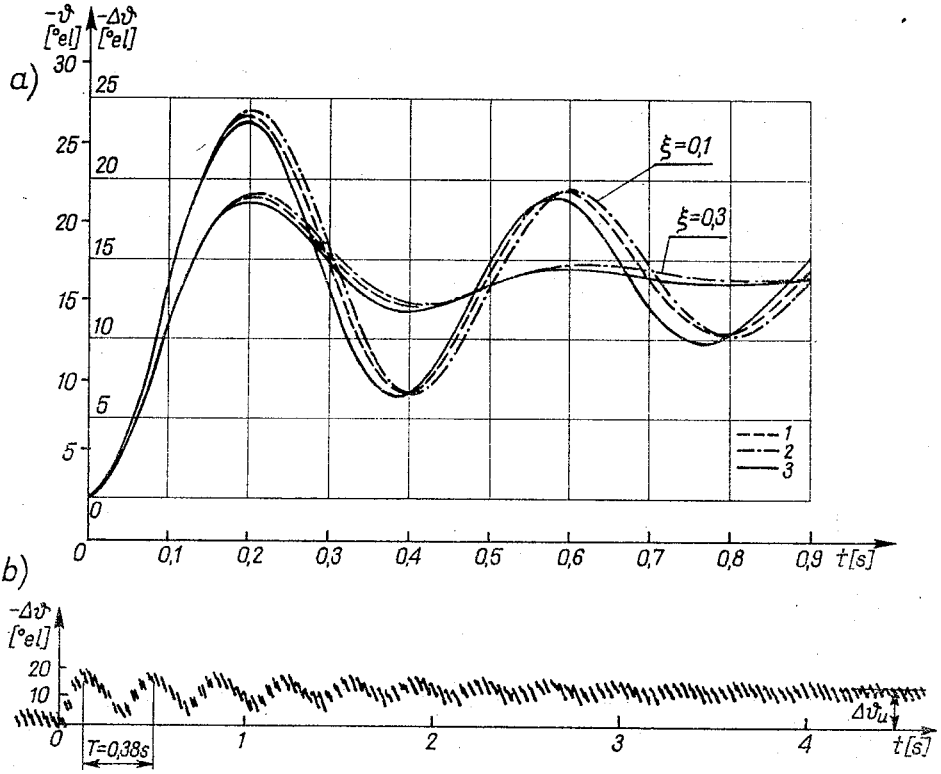
Rys. 18. Przebiegi $\vartheta(t)$ i $\Delta\vartheta(t)$ dla silnika modelowego WAA-14-B
$I_m = 10$ A, $\Delta M = 60{,}3$ N_m; a) obliczone, b) zmierzony



Rys. 19. Przebiegi $\vartheta(t)$ i $\Delta\vartheta(t)$ dla silnika modelowego WAA-14-B
$I_m = 15$ A, $\Delta M = 29{,}5$ N_m; a) obliczone, b) zmierzony



Rys. 20. Przebiegi $\vartheta(t)$ i $\Delta\vartheta(t)$ dla silnika modelowego WAA-14-B
$I_m = 15$ A, $\Delta M = 86{,}8$ N_m; a) obliczone, b) zmierzony



Rys. 21. Przebiegi $\vartheta(t)$ i $\Delta\vartheta(t)$ dla silnika modelowego WAA-14-B
$I_m = 20$ A, $\Delta M = 77{,}7$ N_m; a) obliczone, b) zmierzony

Tablica 3

Zestawienie wyników obliczeń i pomiarów dla silnika modelowego WAA-14-B
u = 0,93 j.w.

I_m	$\frac{\Delta M_m}{M_n}$	Wyniki obliczeń												Wyniki pomiarów		
		$\Delta\vartheta_{1max}$ [°el]			$\frac{\Delta\vartheta_{1,7}-\Delta\vartheta_{1,6}}{\Delta\vartheta_{1,5}}$	$\Delta\vartheta_{ust}$ [°el]			$\frac{\Delta\vartheta_{u7}-\Delta\vartheta_{u6}}{\Delta\vartheta_{u5}}$	ν_0 [Hz]			$\frac{\Delta\nu_0}{\nu_{0S}}$	$\Delta\vartheta_{1max}$	$\Delta\vartheta_{ust}$	ν_0
A	j.w.	5	7	6/8	%	5	7	6/8	%	5	7	6/8	%	°el	°el	Hz
10	0,185	13,7	13,9	13,6	2,2	8,0	8,0	7,9	1,3	2,00	2,08	2,60	4,0	11,0	8,0	2,38
	0,394	29,5	30,9	28,6	7,8	17,4	17,5	16,6	5,2	2,00	2,08	1,92	8,0	26,0	16,5	2,50
15	0,193	11,0	11,1	10,9	1,8	6,4	6,4	6,3	1,6	2,27	2,33	2,31	2,6	11,0	6,3	2,50
	0,567	33,5	34,6	32,2	7,2	19,6	19,6	18,7	4,6	2,25	2,38	2,17	9,3	22,0	18,7	2,50
20	0,508	24,0	24,5	23,5	4,2	14,0	14,0	13,6	2,9	2,50	2,63	2,50	5,2	20,0	14,0	2,63

5 — model nieliniowy III-go stopnia
6 — model liniowy III-go stopnia
7 — model nieliniowy IV-go stopnia
8 — model liniowy IV-go stopnia

Ponieważ silnik modelowy jest maszyną synchroniczną jawnobiegunową z litymi nabiegunnikami, nie możemy dokładnie ustalić wartości współczynnika tłumienia. W przybliżeniu można przyjąć, że dla maszyn synchronicznych nie posiadających uzwojeń tłumiących występujący w równaniach (5÷8) współczynnik tłumienia waha się w granicach $0{,}1 \leqslant \xi \leqslant 0{,}3$. Na rys. (17a÷21a) przedstawiono przebiegi $\vartheta = f(t)$ obliczone, na rys. (17b÷21b) wyniki pomiarów, a w tablicy 3 zestawiono i porównano wartości $\Delta\vartheta_{1max}$ i $\Delta\vartheta_{ust}$.

Jak wynika z porównania obliczonych przebiegów i pomierzonych wartości, $\xi = 0{,}1$ daje większą zbieżność wyników niż ξ o większej wartości. Ponadto, na podstawie obliczonych przebiegów można stwierdzić, że przyjęcie $\xi = 0{,}1$ daje znacznie większe wartości pierwszego wychylenia kąta obciążenia, co przy badaniu stabilności maszyny jest założeniem ostrzejszym.

Z tablicy 3 wynika, że dla silnika synchronicznego modelowego przy skoku momentu rzędu 0,5 M_n, przy różnych wzbudzeniach, rozbieżności pierwszej amplitudy $\Delta\vartheta_{1max}$, $\Delta\vartheta_{ust}$ i częstotliwości przebiegów $\Delta\vartheta\ (t)$ obliczone w oparciu o 4 różne modele matematyczne silnika synchronicznego nie przekraczają 10%.

Jeśli porównamy wyniki obliczeń z wynikami pomiarów, to możemy stwierdzić, że maksymalne rozbieżności pomierzonej i obliczonej wartości kąta obciążenia $\Delta\vartheta_{ust}$ nie przekraczają 6%.

4. WNIOSKI

1. W oparciu o przedstawioną analizę różnych modeli matematycznych można przyjąć, że dla badań stabilności pracy silnika synchronicznego dostatecznie dokładnym jest model III i IV stopnia.

2. Z przedstawionego porównania przebiegów kołysań własnych obliczonych w oparciu o modele nieliniowe i zlinearyzowane III i IV stopnia wynika, że przy udarowej zmianie momentu mechanicznego nie przekraczającego 0,25 M_n wybór modelu matematycznego nie odgrywa praktycznie istotnej roli, gdyż maksymalne rozbieżności ustalonego kąta obciążenia $\Delta\vartheta_{ust}$ i amplitudy pierwszego wychylenia $\Delta\vartheta_{1max}$ obliczonego w oparciu o różne modele nie przekraczają 2,5%.

3. Nie jest rzeczą obojętną wybór modelu matematycznego silnika synchronicznego do obliczeń dużych kołysań własnych występujących przy zmianie momentu mechanicznego rzędu M_n a nawet 1,5 M_n. W tym przypadku stosowanie modelu liniowego III-go lub IV-go stopnia dla silników dużych (o mocy rzędu kilku MW) posiadających uzwojenie rozruchowe powoduje różnicę w wartości kąta obciążenia nie przekraczającą 10%.

4. Dla silników synchronicznych nie posiadających uzwojeń tłumiących podstawowym zagadnieniem jest ustalenie współczynnika tłumienia, którego wartość jest zależna od konstrukcji i wymiarów geometrycznych nabiegunników i pieńków biegunowych. Dla badanego silnika modelowego na podstawie przeprowadzonych pomiarów i obliczeń przyjęto współczynnik $\xi = 0{,}1$. Przy tej wartości uzyskano dobrą zgodność wyników pomiarów i obliczeń w oparciu o model stanu III-go stopnia.

Załącznik 1

Równania silnika synchronicznego w układzie $d-q$ [6] mają postać:

$$RI_d+\frac{d\Psi_d}{dt}+\Psi_q\frac{d\gamma}{dt}=U_d, \qquad RI_q+\frac{d\Psi_q}{dt}-\Psi_d\frac{d\gamma}{dt}=U_q,$$

$$R_wI_w+\frac{d\Psi_w}{dt}=U_w, \qquad R_DI_D+\frac{d\Psi_D}{dt}=U_D=0, \qquad R_QI_Q+\frac{d\Psi_Q}{dt}=U_Q=0,$$

$$\Psi_d=L_dI_d+M_dI_w+M_DI_D, \qquad \Psi_q=L_qI_q+M_QI_Q, \qquad \Psi_w=\frac{3}{2}M_dI_d+L_wI_w+M_{wD}I_D,$$

$$\Psi_D=\frac{3}{2}M_DI_d+L_DI_D+M_{Dw}I_w, \qquad \Psi_Q=\frac{3}{2}M_QI_q+L_QI_Q,$$

$$J\frac{d^2\gamma_m}{dt^2}+D\frac{d\gamma_m}{dt}-\frac{3}{2}(\Psi_dI_q-\Psi_qI_d)=-M_m,$$

γ — kąt elektryczny $\frac{d\gamma}{dt}=\omega$,

γ_m — kąt mechaniczny dla $\gamma=\gamma_m p$, $M_{el}=pM_{el(p=2)}$.

Równanie ruchu wirnika dla maszyny mającej $2p$ biegunów będzie miało postać

$$\frac{J}{p}\frac{d^2\gamma}{dt^2}+\frac{D}{p}\frac{d\gamma}{dt}-\frac{3}{2}p(\Psi_dI_q-\Psi_qI_d)=-M_m.$$

Przyjęto następujący układ wartości odniesienia [1], [2]:

napięcie: $\sqrt{2}U_{nf}$, $u=\frac{U_f}{\sqrt{2}U_{nf}}$,

prąd: $\sqrt{2}I_{nf}$, $i=\frac{I_f}{\sqrt{2}I_{nf}}$,

impedancje: $Z_{nf}=\frac{U_{nf}}{I_{nf}}$, $z=\frac{Z}{Z_{nf}}$,

moc: $3U_{nf}I_{nf}$, $p=\frac{P}{3U_{nf}I_{nf}}$,

moment: $M_1=\frac{3U_{nf}I_{nf}}{\Omega_1}$, $m=\frac{M}{3U_{nf}I_{nf}}\frac{\omega_1}{p}$,

skojarzenie magnetyczne: $\frac{\sqrt{2}U_{nf}}{\omega_1}$, $\psi=\frac{\Psi}{\sqrt{2}U_{nf}}\omega_1$,

czas: $\frac{1}{\omega_1}$, $\tau=\omega_1 t$.

Dla obwodów wirnika:

napięcia: $u_w=\frac{z_1}{z_w}\frac{U_w}{\sqrt{2}U_{nf}}$,

$u_D=\frac{z_1}{z_D}\frac{U_D}{\sqrt{2}U_{nf}}$,

$$u_Q = \frac{z_1}{z_Q}\frac{U_Q}{\sqrt{2}U_{nf}};$$

prądy:

$$i_w = \frac{2}{3}\frac{z_w}{z_1}\frac{I_w}{\sqrt{2}I_{nf}},$$

$$i_D = \frac{2}{3}\frac{z_D}{z_1}\frac{I_D}{\sqrt{2}I_{nf}},$$

$$i_Q = \frac{2}{3}\frac{z_Q}{z_1}\frac{I_Q}{\sqrt{2}I_{nf}};$$

rezystancje:

$$r_w = \frac{3}{2}\left(\frac{z_1}{z_w}\right)^2\frac{R_w}{Z_{nf}},$$

$$r_D = \frac{3}{2}\left(\frac{z_1}{z_D}\right)^2\frac{R_D}{Z_{nf}},$$

$$r_Q = \frac{3}{2}\left(\frac{z_1}{z_Q}\right)^2\frac{R_Q}{Z_{nf}};$$

reaktancje:

$$x_d = \frac{\omega_1 L_d}{Z_{nf}},$$

$$x_q = \frac{\omega_1 L_q}{Z_{nf}},$$

$$x_w = \frac{3}{2}\left(\frac{z_1}{z_w}\right)^2\frac{\omega_1 L_w}{Z_{nf}},$$

$$x_D = \frac{3}{2}\left(\frac{z_1}{z_D}\right)^2\frac{\omega_1 L_D}{Z_{nf}},$$

$$x_{Dw} = \frac{3}{2}\frac{z_1^2}{z_w z_D}\frac{\omega_1 M_{Dw}}{Z_{nf}},$$

$$x_Q = \frac{3}{2}\left(\frac{z_1}{z_Q}\right)^2\frac{\omega_1 L_Q}{Z_{nf}},$$

$$x_{Dd} = \frac{3}{2}\frac{z_1}{z_{\hat{D}}}\frac{\omega_1 M_D}{Z_{nf}},$$

$$x_{Qq} = \frac{3}{2}\frac{z_1}{z_Q}\frac{\omega_1 M_Q}{Z_{nf}},$$

$$x_{dw} = \frac{3}{2}\frac{z_1}{z_w}\frac{\omega_1 M_d}{Z_{nf}}.$$

Po wprowadzeniu podanych wartości odniesienia, układ równań silnika synchronicznego $2p$-biegunowego w wartościach względnych ma postać:

$$ri_d + \frac{d\psi_d}{d\tau} + \psi_q\frac{d\gamma}{d\tau} = u_d,$$

$$ri_q + \frac{d\psi_q}{d\tau} - \psi_d\frac{d\gamma}{d\tau} = u_q$$

$$r_w i_w + \frac{d\psi_w}{d\tau} = u_w,$$

$$r_D i_D + \frac{d\psi_D}{d\tau} = u_D = 0,$$

$$r_Q i_Q + \frac{d\psi_Q}{d\tau} = u_Q = 0,$$

$$\psi_d = x_d i_d + x_{dw} i_w + x_{Dd} i_D,$$

$$\psi_q = x_q i_q + x_{qQ} i_Q,$$

$$\psi_w = x_{wd} i_d + x_w i_w + x_{wD} i_D,$$

$$\psi_D = x_{Dd} i_d + x_{Dw} i_w + x_D i_D,$$

$$\psi_Q = x_{Qq} i_q + x_Q i_Q,$$

$$T_m \omega_1 \frac{d^2\gamma}{d\tau^2} + d\omega_1 \frac{d\gamma}{d\tau} - (\psi_d i_q - \psi_q i_d) = -m_m,$$

gdzie:

$T_m = \frac{J}{M_1}\Omega_1$ — stała czasowa mechaniczna układu wirującego,

$$d = \frac{D}{pM_1}, \qquad \Omega_1 = \frac{\omega_1}{p},$$

z_1, z_w, z_D, z_Q — liczba zwojów poszczególnych uzwojeń silnika synchronicznego z uwzględnieniem odpowiednich współczynników uzwojeń $\xi_1, \xi_w, \xi_D, \xi_Q$.

LITERATURA

1. S. J. Dunajewski, O. A. Kryłow, T. W. Mazija, *Modelowanie elementów układów elektromechanicznych*, WNT, Warszawa 1970.
2. Th. Laible, *Teorija sinchronnoj mašiny pri perechodnych pročessach*, Moskwa 1957.
3. Dieter Nelles, *Comparison of the various mathematical generator models for the calculation of transient electromechanical phenomena*, 4-th Power System Computation Conference, Grenoble 1972, paper 31/1, Vol. 3, session 3.1.
4. E. Ja. Kazovskij, Ja. B. Danilevic, *Anormalnyje rezimy raboty krupnych sinchronnych mašin*, Izd. Nauka, Leningrad 1969.
5. K. Pawluk, S. Bednarek, *Rozruch i stany asynchroniczne silników synchronicznych*, WNT, Warszawa 1968.
6. M. Stegner, *Badanie stanów nieustalonych w maszynach synchronicznych przy pomocy maszyn matematycznych*, praca magisterska, Łódź 1970.

M. STEGNER-DEMS

ANALYSIS OF SYNCHRONOUS MOTOR MATHEMATICAL MODELS WITH REGARD TO OPERATING STABILITY

Summary

The article presents a comparison of various mathematical models of a synchronous motor. The comparison is made in the computational manner, including measurement results for the model motor.

On the basis of the results obtained the suitability has been defined of a simplified linear 3rd degree model for the analysis of a synchronous motor transient states occuring due to sudden load changed (for variations ranges of the changes, various excitation levels as well as various sizes and kindes of synchronous motors).

M. STEGNER-DEMS

ANALYSE DES MODÈLES MATHÉMATIQUES DU MOTEUR SYNCHRONE VU LA STABILITÈ DE SON TRAVAIL

Résumé

Dans l'article on a comparé les différents modèles mathématiques du moteur synchrone, obtenus sur la voie de calcul, avec les résultats de mesure pour le moteur — modèle. Les résultats obtenus de cette comparaison ont servi à determiner l'utilité du simplifié modèle linéaire de III-e degré pour l'analyse des régimes transitoires du moteur synchrone, apparaissant à la suite de soudains changements de la charge (pour différentes étendues de ces changements, différents niveaux d'excitation et dimensions et genres des moteurs synchrones).

M. STEGNER-DEMS

ANALYSE MATHEMATISCHER MODELLE EINES SYNCHRONMOTORS VOM GESICHTSPUNKT SEINER BETRIEBSSTABILITÄT

Zusammenfassung

Es werden verschiedene mathematische Modelle eines Synchronmotors miteinander verglichen, indem die Ergebnisse von numerischen Berechnungen mit denjenigen zusammengestellt werden, die für den Modellmotor auf dem Prüfstand gewonnen worden sind. Auf dieser Grundlage wird die Nützlichkeit des vereinfachten linearen Modells des dritten Grades zur Analyse der infolge eines plötzlichen Lastwechsels auftretenden instabilen Zustände des Synchronmotors bestimmt.

М. СТЕГНЕР-ДЕМС

АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ СТАБИЛЬНОСТИ РАБОТЫ

Резюме

Представлено сравнение различных математических моделей синхронного двигателя на основании результатов расчетов и исследования модельного двигателя.

На основании полученных результатов определена пригодность упрощенной линейной модели третьей степени к анализу неустановившихся режимов работы синхронного двигателя, выступающих при неожиданных изменениях нагрузки (для разных пределов этих изменений, разных уровней возбуждения, размеров и типов синхронных двигателей).

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1978, 24, z.2, ss. 373 — 388

621.373.3

Model matematyczny stalowniczego urządzenia łukowego

ALEKSY KURBIEL (KRAKÓW)

Instytut Automatyki Napędu i Urządzeń Przemysłowych
Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie

Otrzymano 4.11.1976

Stalownicze urządzenie łukowe stanowi złożony i interesujący obiekt pod względem teoretycznej analizy jego pracy. Sformułowano model matematyczny umożliwiający analizowanie zarówno nieustalonych jak i ustalonych stanów pracy takiego urządzenia.

Stany nieustalone można badać na podstawie równań (22) przy zastosowaniu cyfrowej techniki obliczeniowej. Potrzebna jest przy tym znajomość odpowiednich parametrów elektrycznych dławika, transformatora piecowego, toru wielkoprądowego oraz charakterystyk dynamicznych łuków elektrycznych. Dzięki przedstawieniu równań napięciowo-prądowych we współrzędnych S, występujące w tych równaniach parametry elektryczne są mierzalne i łatwe do wyznaczenia nieskomplikowanymi metodami pomiarowymi.

Na podstawie równań (36) i (37) lub uproszczonego równania (49) można wyznaczyć i analizować ustalone stany pracy urządzenia łukowego, występujące w różnych zadanych warunkach, jak np. przy dowolnie zadanej nierówności prądów łuków, przy równych rezystancjach łuków itp. Na podstawie takiej analizy łatwo jest ustalić najkorzystniejsze stany pracy urządzenia łukowego.

1. WSTĘP

Stalownicze urządzenie łukowe składa się z pieca łukowego, toru wielkoprądowego z elektrodami, transformatora piecowego i ewentualnie dławika (rys. 1). Transformator i dławik budowane są symetrycznie i połączone na jednakowych zaczepach we wszystkich fazach. Dławik pracuje jedynie w okresie roztapiania wsadu, przy czym stosuje się go tylko w przypadku małych pieców łukowych.

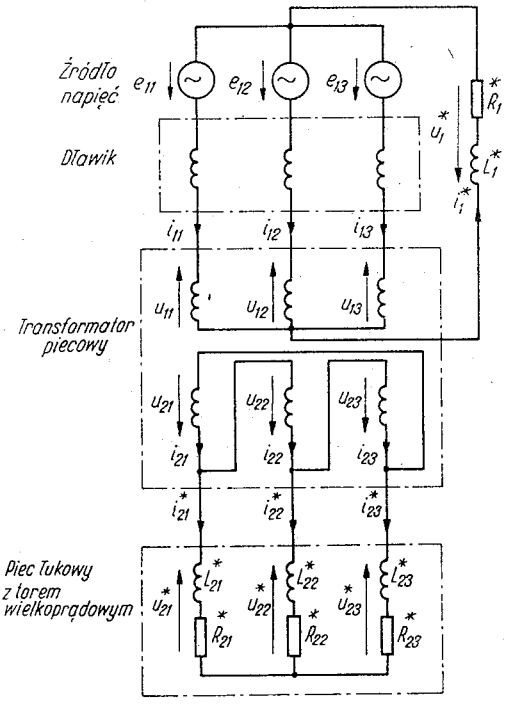
Analizę pracy przedstawionego urządzenia łukowego przeprowadza się zazwyczaj przy przyjęciu szeregu upraszczających założeń. Najczęściej zakłada się, że prąd łuku elektrycznego jest sinusoidalny. Wstępne badania łuków płonących w piecach wykazały, że prądy łuków mogą być w przybliżeniu sinusoidalne tylko w pewnych okresach pracy pieca, po roztopieniu wsadu i wytworzeniu na nim żużla. Natomiast w okresie roztapiania wsadu prądy łuków są bardzo silnie odkształcone.

Niekiedy urządzenia łukowe traktuje się jak symetryczne odbiorniki energii elektrycznej. Takie traktowanie jest dopuszczalne tylko w przypadku symetrycznych torów wielkoprądowych, odznaczających się jednakowymi rezystancjami i reaktancjami fazowymi. Wiele stosowanych w przemyśle torów nie spełnia jednak tego warunku i dlatego po

wodują występowanie nierówności mocy łuków, określanej jako zjawisko fazy mocnej i słabej pieca.

Analiza urządzenia łukowego bywa też przeprowadzana oddzielnie dla każdej jego fazy. Taki sposób analizy jest dopuszczalny tylko w przypadku występowania symetrii prądów fazowych pieca. W wielu przypadkach piece są eksploatowane przy utrzymywaniu jednakowych w przybliżeniu prądów łuków.

Poza tym analizuje się najczęściej stany pracy statycznej urządzenia łukowego. Należy przy tym zaznaczyć, że w czasie roztapiania wsadu występują ciągle stany dynamiczne, których przejawem są bardzo częste nagłe zmiany prądów łuków i powstające w urządzeniu przepięcia.



Rys. 1. Schemat stalowniczego urządzenia łukowego

W niniejszym opracowaniu przedstawiono model matematyczny urządzenia łukowego, umożliwiający dokładne analizowanie stanów dynamicznych i statycznych tego urządzenia, występujących w dowolnych warunkach jego pracy, np. w przypadku prądów odkształconych, nierównych prądów łuków itp. (z pominięciem wyżej podanych założeń upraszczających). Model ten został opracowany przy zastosowaniu rachunku macierzowego i metody współrzędnych symetrycznych.

2. RÓWNANIA NAPIĘCIOWO-PRĄDOWE URZĄDZENIA ŁUKOWEGO

Dla transformatora piecowego trójfazowego i dwuuzwojeniowego można napisać następujące równanie napięciowo-prądowe:

$$\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ \hdashline u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} R_{T1} & & & & & \\ & R_{T1} & & & & \\ & & R_{T1} & & & \\ \hdashline & & & R_{T2} & & \\ & & & & R_{T2} & \\ & & & & & R_{T2} \end{array}\right] \begin{bmatrix} i_{11} \\ i_{12} \\ i_{13} \\ \hdashline i_{21} \\ i_{22} \\ i_{23} \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{d}{dt} \left[\begin{array}{ccc:ccc} L_{\sigma 1} & & & & & \\ & L_{\sigma 1} & & & & \\ & & L_{\sigma 1} & & & \\ \hdashline & & & L_{\sigma 2} & & \\ & & & & L_{\sigma 2} & \\ & & & & & L_{\sigma 2} \end{array}\right] \begin{bmatrix} i_{11} \\ i_{12} \\ i_{13} \\ \hdashline i_{21} \\ i_{22} \\ i_{23} \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{d}{dt} \left[\begin{array}{ccc:ccc} L_{T1} & M_1^1 & M_1^1 & M_2^1 & M_2^2 & M_1^2 \\ M_1^1 & L_{T1} & M_1^1 & M_2^1 & M_2^2 & M_1^2 \\ M_1^1 & M_1^1 & L_{T1} & M_2^1 & M_2^2 & M_2^1 \\ \hdashline M_2^1 & M_1^2 & M_1^2 & L_{T2} & M_2^2 & M_2^2 \\ M_1^2 & M_2^1 & M_1^2 & M_2^2 & L_{T2} & M_2^2 \\ M_1^2 & M_1^2 & M_2^1 & M_2^2 & M_2^2 & L_{T2} \end{array}\right] \begin{bmatrix} i_{11} \\ i_{12} \\ i_{13} \\ \hdashline i_{21} \\ i_{22} \\ i_{23} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

przy czym przyjęto oznaczenia:

u_{ki}, i_{ki} — napięcie oraz prąd k-tej strony ($k = 1, 2$) oraz i-tej fazy ($i = 1, 2, 3$),

$R_{Tk}, L_{\sigma k}$ — rezystancja oraz indukcyjność rozproszenia,

$L_{Tk}, M_k^k, M_2^1\ M_1^2$ — indukcyjności własne i wzajemne określone wzorami:

$$\begin{aligned} L_{Tk} &= \frac{\Lambda(2\Lambda + \Lambda_0)}{3\Lambda + \Lambda_0} (W_k)^2 \approx \frac{2\Lambda}{3} (W_k)^2, \\ M_k^k &= -\frac{\Lambda^2}{3\Lambda + \Lambda_0} (W_k)^2 \approx -\frac{\Lambda}{3} (W_k)^2, \\ M_2^1 &= \frac{\Lambda(2\Lambda + \Lambda_0)}{3\Lambda + \Lambda_0} W_1 W_2 \approx \frac{2\Lambda}{3} W_1 W_2, \\ M_1^2 &= -\frac{\Lambda^2}{3\Lambda + \Lambda_0} W_1 W_2 \approx -\frac{\Lambda}{3} W_1 W_2, \end{aligned} \tag{2}$$

w których:

W_1, W_2 — liczby zwojów uzwojenia pierwotnego i wtórnego,

Λ, Λ_0 — przewodności magnetyczne uzwojonej kolumny transformatora i obwodu dla ewentualnego strumienia wychodzącego z rdzenia.

Macierze w równaniu (1) można podzielić na układy podmacierzy wyznaczone liniami przerywanymi. Równanie to można więc przepisać w postaci

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{T1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{T2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{\sigma 1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_{\sigma 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{T1} & \mathbf{M}_T \\ \mathbf{M}_T & \mathbf{L}_{T2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

w którym przyjęto następujące oznaczenia:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{i}_1 = \begin{bmatrix} i_{11} \\ i_{12} \\ i_{13} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{i}_2 = \begin{bmatrix} i_{21} \\ i_{22} \\ i_{23} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{T1} = R_{T1} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{T2} = R_{T2} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_{\sigma 1} = L_{\sigma 1} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_{\sigma 2} = L_{\sigma 2} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_{T1} = \begin{bmatrix} L_{T1} & M_1^1 & M_1^1 \\ M_1^1 & L_{T1} & M_1^1 \\ M_1^1 & M_1^1 & L_{T1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_{T2} = \begin{bmatrix} L_{T2} & M_2^2 & M_2^2 \\ M_2^2 & L_{T2} & M_2^2 \\ M_2^2 & M_2^2 & L_{T2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_s = \begin{bmatrix} M_2^1 & M_1^2 & M_1^2 \\ M_1^2 & M_2^1 & M_1^2 \\ M_1^2 & M_1^2 & M_2^1 \end{bmatrix}.$$

Uzwojenia transformatora mogą być połączone w gwiazdę lub trójkąt (rys. 1). Oprócz prądów fazowych transformatora występują więc liniowo od nich zależne prądy zewnętrzne, oznaczone gwiazdkami, przy czym równaniami wiążącymi te dwa rodzaje prądów są równania więzów, wynikające z połączenia uzwojeń transformatora

$$\overset{*}{\mathbf{i}}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{i}_k. \tag{4}$$

Macierz więzów przy połączeniu w gwiazdę ma postać

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{C}_\lambda = [1 \quad 1 \quad 1], \tag{5}$$

zaś przy połączeniu w trójkąt

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{C}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Również napięcia zewnętrzne $\overset{*}{u}_{ki}$ występujące poza więzami i oznaczone gwiazdkami na rys. 1 można włączyć do napięć fazowych transformatora po przeliczeniu według zależności

$$\Delta \mathbf{u}_k = \mathbf{C}_k^T \overset{*}{\mathbf{u}}_k, \tag{7}$$

przy czym $\mathbf{C}_k^T$ oznacza transponowaną macierz $\mathbf{C}_k$.

Dalsze rozważania zostaną przeprowadzone dla układu połączeń transformatora $Y-O/d$, jak na rys. 1, przy czym dla każdego innego układu połączeń obliczenia są podobne. Aby zachować ogólność rozważań i zapisu nie pomija się przewodu zerowego

w układzie gwiazdowym, a jego brak w rzeczywistych układach będzie uwzględniony w dalszych obliczeniach.

W przypadku urządzenia jak na rys. 1, do napięć $\mathbf{u}_1$ określonych wzorem (3) dodają się jeszcze dodatkowe składniki, przedstawiające spadki napięć na rezystancji R_D i indukcyjności L_D dławika oraz rezystancji $\overset{*}{R}_1$ i indukcyjności $\overset{*}{L}_1$ w przewodzie zerowym. Napięcia na R_D, L_D dodaje się bezpośrednio do napięć fazowych transformatora $\mathbf{u}_1$, zaś napięcie $\overset{*}{u}_1$ na przewodzie zerowym dodaje się dopiero po przeliczeniu według zależności (7)

$$\mathbf{C}_\lambda^T \overset{*}{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{C}_\lambda^T \left(\overset{*}{R}_1 + \frac{d}{dt} \overset{*}{L}_1 \right) \overset{*}{\mathbf{i}}_1 = \mathbf{C}_\lambda^T \left(\overset{*}{R}_1 + \frac{d}{dt} \overset{*}{L}_1 \right) \mathbf{C}_\lambda \mathbf{i}_1 . \tag{8}$$

Po zsumowaniu wszystkich składowych napięć otrzymuje się napięcia $\mathbf{e}_1$ źródła zasilającego.

Napięcia $\overset{*}{u}_{2i}$ występujące na rezystancji $\overset{*}{R}_{2i}$ i reaktancji $\overset{*}{L}_{2i}$ na skutek przepływu prądu $\overset{*}{i}_{2i}$ spełniają równość

$$\overset{*}{\mathbf{u}}_2 = \left(\overset{*}{\mathbf{R}}_2 + \frac{d}{dt} \overset{*}{\mathbf{L}}_2 \right) \overset{*}{\mathbf{i}}_2 .$$

Napięcia te przeliczone na napięcia fazowe transformatora wynoszą

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{C}_\Delta^T \overset{*}{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{C}_\Delta^T \left(\overset{*}{\mathbf{R}}_2 + \frac{d}{dt} \overset{*}{\mathbf{L}}_2 \right) \mathbf{C}_\Delta \mathbf{i}_2 . \tag{9}$$

Po włączeniu tych napięć do obwodów fazowych transformatora wypadkowe napięcia $u_{2i} = 0$.

Ze wzorów (8) i (9) widać, że rezystancje $\overset{*}{R}_{ki}$ i indukcyjności $\overset{*}{L}_{ki}$ można przetransformować przez więzy do obwodów fazowych transformatora, mnożąc macierze rezystancji $\overset{*}{\mathbf{R}}_k$ i indukcyjności $\overset{*}{\mathbf{L}}_k$ lewostronnie przez macierz $\mathbf{C}_k^T$, a prawostronnie przez macierz $\mathbf{C}_k$.

Dla urządzenia łukowego z rys. 1 można więc napisać następujące równanie napięciowo-prądowe:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{T1} + \mathbf{R}_D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{T2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_\lambda^T \overset{*}{\mathbf{R}}_1 \mathbf{C}_\lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_\Delta^T \overset{*}{\mathbf{R}}_2 \mathbf{C}_\Delta \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{\sigma 1} + \mathbf{L}_D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_{\sigma 2} \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_\lambda^T \overset{*}{\mathbf{L}}_1 \mathbf{C}_\lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_\Delta^T \overset{*}{\mathbf{L}}_2 \mathbf{C}_\Delta \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{T1} & \mathbf{M}_T \\ \mathbf{M}_T & \mathbf{L}_{T2} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \end{bmatrix} . \tag{10}$$

Z zależności (2) i oznaczeń macierzy indukcyjności głównych transformatora (podanych pod równaniem (3)) wynikają następujące związki między tymi macierzami:

$$\mathbf{L}_{T1} = \mathfrak{V}^2 \mathbf{L}_{T2} \text{ oraz } \mathbf{M}_T = \mathfrak{V} \mathbf{L}_{T2},$$

$$\text{przy czym } \mathfrak{V} = \vartheta \mathbf{E}; \quad \vartheta = \frac{W_1}{W_2}; \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Występującą w równaniu (10) macierz reprezentującą omawiane indukcyjności główne transformatora można więc wyrazić wzorem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_{T1} & \mathbf{M}_T \\ \mathbf{M}_T & \mathbf{L}_{T2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \mathbf{L}_{T2} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Po zsumowaniu w zależności (10) odpowiednich macierzy i przyjęciu oznaczeń

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1 &= \mathbf{R}_{T1} + \mathbf{R}_D + \frac{d}{dt}(\mathbf{L}_{\sigma 1} + \mathbf{L}_D) + \mathbf{C}_\lambda^T \left(\overset{*}{R}_1 + \frac{d}{dt} \overset{*}{L}_1 \right) \mathbf{C}_\lambda, \\ \mathbf{Z}_2 &= \mathbf{R}_{T2} + \frac{d}{dt} \mathbf{L}_{\sigma 2} + \mathbf{C}_\Delta^T \left(\overset{*}{\mathbf{R}}_2 + \frac{d}{dt} \overset{*}{\mathbf{L}}_2 \right) \mathbf{C}_\Delta, \end{aligned} \tag{13}$$

możemy napisać

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathfrak{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \mathbf{L}_{T2} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

W celu przeliczenia parametrów układu ze strony pierwotnej transformatora na stronę wtórną, wyłączymy poza nawias z prawej strony powyższego równania macierz

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

oraz przez odwrotność tej macierzy pomnożymy lewostronnie omawiane równanie

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathfrak{I}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \mathfrak{I}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{I}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + \frac{d}{dt} \mathbf{L}_{T2} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathfrak{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{15}$$

Przyjmując oznaczenia

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{1z} &= \mathfrak{I}^{-1} \mathbf{e}_1 = \frac{1}{\vartheta} \mathbf{E} \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{i}_{1z} &= \mathfrak{I} \mathbf{i}_1, \\ \mathbf{Z}_{1z} &= \mathfrak{I}^{-2} \mathbf{Z}_1 = \frac{1}{\vartheta^2} \mathbf{E} \mathbf{Z}_1 \end{aligned} \tag{16}$$

oraz wykonując naznaczone działania w równaniu (15) otrzymuje się

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_{1z} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{1z} + \frac{d}{dt} \mathbf{L}_{T2} & \frac{d}{dt} \mathbf{L}_{T2} \\ \frac{d}{dt} \mathbf{L}_{T2} & \mathbf{Z}_2 + \frac{d}{dt} \mathbf{L}_{T2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{1z} \\ \mathbf{i}_2 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Zależność tę można przepisać w postaci dwóch równań macierzowych

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{1z} &= \mathbf{Z}_{1z} \mathbf{i}_{1z} + \frac{d}{dt} \mathbf{L}_{T2} \mathbf{i}_{1z} + \frac{d}{dt} \mathbf{L}_{T2} \mathbf{i}_2, \\ \mathbf{0} &= \frac{d}{dt} \mathbf{L}_{T2} \mathbf{i}_{1z} + \mathbf{Z}_2 \mathbf{i}_2 + \frac{d}{dt} \mathbf{L}_{T2} \mathbf{i}_2. \end{aligned} \tag{18}$$

3. TRANSFORMACJA DO UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH SYMETRYCZNYCH

Dla ułatwienia obliczeń, równania (18) wyrażone we współrzędnych fazowych (naturalnych) zostaną przetransformowane do układu współrzędnych symetrycznych za pomocą macierzy transformacyjnej **S**

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}, \tag{19}$$

w której $a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz $a^2 = \check{a} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Macierz ta odznacza się następującymi właściwościami:

$$\mathbf{S}^{-1} = \check{\mathbf{S}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}}.$$

Mnożąc lewostronnie równania (18) przez **S** otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{Se}_{1z} &= \mathbf{SZ}_{1z}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{Si}_{1z} + \frac{d}{dt}\mathbf{SL}_{T2}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{Si}_{1z} + \frac{d}{dt}\mathbf{SL}_{T2}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{Si}_2, \\ \mathbf{0} &= \frac{d}{dt}\mathbf{SL}_{T2}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{Si}_{1z} + \mathbf{SZ}_2\mathbf{S}^{-1}\mathbf{Si}_2 + \frac{d}{dt}\mathbf{SL}_{T2}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{Si}_2. \end{aligned} \tag{20}$$

Transformacja do układu współrzędnych symetrycznych **S** jest korzystna, gdyż doprowadza wyrażenie do postaci zawierającej mierzalne w praktyce parametry elektryczne układu zasilającego piec (toru elektrycznego). Poza tym omawiana transformacja odznacza się niezmienniczością mocy, co będzie wykazane dalej.

Po przyjęciu oznaczeń

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^s_{1z} &= \mathbf{Se}_{1z}, & \mathbf{i}^s_{1z} &= \mathbf{Si}_{1z}, \\ \mathbf{i}^s_2 &= \mathbf{Si}_2, & \mathbf{L}^s_{T2} &= \mathbf{SL}_{T2}\mathbf{S}^{-1}, \\ \mathbf{Z}^s_{1z} &= \mathbf{SZ}_{1z}\mathbf{S}^{-1}, & \mathbf{Z}^s_2 &= \mathbf{SZ}_2\mathbf{S}^{-1}, \end{aligned} \tag{21}$$

równania (20) można przepisać w postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^s_{1z} &= \mathbf{Z}^s_{1z}\mathbf{i}^s_{1z} + \frac{d}{dt}\mathbf{L}^s_{T2}\mathbf{i}^s_{1z} + \frac{d}{dt}\mathbf{L}^s_{T2}\mathbf{i}^s_2, \\ \mathbf{0} &= \frac{d}{dt}\mathbf{L}^s_{T2}\mathbf{i}^s_{1z} + \mathbf{Z}^s_2\mathbf{i}^s_2 + \frac{d}{dt}\mathbf{L}^s_{T2}\mathbf{i}^s_2. \end{aligned} \tag{22}$$

Przeanalizujemy kolejno macierze występujące w powyższych równaniach.

Macierz napięć zasilających, przeliczonych na stronę wtórną transformatora i wyrażonych we współrzędnych fazowych, wynosi

$$\mathbf{e}_{1z} = \begin{bmatrix} e_{11z} \\ e_{12z} \\ e_{13z} \end{bmatrix} = \frac{E_{ap}}{\sqrt{3}\vartheta} \begin{bmatrix} \cos\omega t \\ \cos(\omega t - 120°) \\ \cos(\omega t - 240°) \end{bmatrix} = \frac{E_{ap}}{2\sqrt{3}\vartheta} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & a \\ a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{j\omega t} \\ e^{-j\omega t} \end{bmatrix}, \tag{23}$$

przy czym przyjmujemy, że zachodzi symetria zasilających napięć międzyprzewodowych, czyli występuje równość ich amplitud $E_{ap1} = E_{ap2} = E_{ap3} = E_{ap}$. Macierz napięć $\mathbf{e}_{1z}$ wyrażonych we współrzędnych symetrycznych wynosi

$$\mathbf{e}^s_{1z} = \frac{E_{ap}}{6\vartheta}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & a^2\\ 1 & a^2 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ a^2 & a\\ a & a^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{j\omega t}\\ e^{-j\omega t}\end{bmatrix} = \frac{E_{ap}}{2\vartheta}\begin{bmatrix}0\\ e^{j\omega t}\\ e^{-j\omega_1}\end{bmatrix}. \tag{24}$$

Po rozpisaniu wyrażenia dla macierzy $\mathbf{L}^s_{T2}$ otrzymuje się

$$\mathbf{L}^s_{T2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & a^2\\ 1 & a^2 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_{T2} & M_2^2 & M_2^2\\ M_2^2 & L_{T2} & M_2^2\\ M_2^2 & M_2^2 & L_{T2}\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a^2 & a\\ 1 & a & a^2\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}L_{T2}+2M_2^2 & & \\ & L_{T2}-M_2^2 & \\ & & L_{T2}-M_2^2\end{bmatrix}. \tag{25}$$

Na podstawie wyrażeń (2) można napisać związki

$$L_{T2}+2M_2^2 = L^o_\mu = \frac{\Delta\frac{\Delta_o}{3}}{\Delta+\frac{\Delta_o}{3}}(W_2)^2,$$
$$L_{T2}-M_2^2 = L'_\mu = \Delta(W_2)^2. \tag{26}$$

Przekształcona macierz indukcyjności głównych transformatora ma więc postać

$$\mathbf{L}^s_{T2} = \mathbf{L}^s_\mu = \begin{bmatrix}L^o_\mu & & \\ & L'_\mu & \\ & & L'_\mu\end{bmatrix}, \tag{27}$$

przy czym L^o_μ oznacza indukcyjność transformatora dla współrzędnej zerowej prądu magnesującego, zaś L'_μ — dla współrzędnej zgodnej i przeciwnej tego prądu.

Dla obliczenia macierzy $\mathbf{Z}^s_{1z}$, określonej wzorami (21), (16) i (13), obliczymy kolejno jej części składowe

$$\mathbf{S}\vartheta^{-2}\left[\mathbf{R}_{T1}+\mathbf{R}_D+\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_{\sigma 1}+\mathbf{L}_D)\right]\mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{\vartheta^2}\left[R_{T1}+R_D+\frac{d}{dt}(L_{\sigma 1}+L_D)\right]\mathbf{E}$$

oraz

$$\mathbf{S}\vartheta^{-2}\mathbf{C}^T_\lambda\left(\overset{*}{R}_1+\frac{d}{dt}\overset{*}{L}_1\right)\mathbf{C}_\lambda\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix}3\vartheta^{-2}\left(\overset{*}{R}_1+\frac{d}{dt}\overset{*}{L}_1\right) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Przyjmując oznaczenia

$$Z^o_{1z} = \frac{1}{\vartheta^2}\left[R_{T1}+R_D+3\overset{*}{R}_1+\frac{d}{dt}(L_{\sigma 1}+L_D+3\overset{*}{L}_1)\right],$$
$$Z'_{1z} = \frac{1}{\vartheta^2}\left[R_{T1}+R_D+\frac{d}{dt}(L_{\sigma 1}+L_D)\right] \tag{28}$$

można napisać

$$\mathbf{Z}_{1z}^{s} = \begin{bmatrix} Z_{1z}^{o} & & \\ & Z_{1z}' & \\ & & Z_{1z}' \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Z powodu braku przewodu zerowego wartość $Z_{1z}^{o} \to \infty$, przy czym omawiane przejście do granicy będzie uwzględnione dopiero w dalszych rozważaniach.

W podobny sposób obliczamy macierz $\mathbf{Z}_2^s$ określoną wzorami (21) i (13), przy czym należy zaznaczyć, że macierz $\overset{*}{\mathbf{R}}_2$ zawiera rezystancje toru wielkoprądowego i łuków elektrycznych, zaś macierz $\overset{*}{\mathbf{L}}_2$ zawiera indukcyjności własne i wzajemne toru wielkoprądowego

$$\mathbf{S}\left(\mathbf{R}_{T2} + \frac{d}{dt}\mathbf{L}_{\sigma 2}\right)\mathbf{S}^{-1} = \left(R_{T2} + \frac{d}{dt}L_{\sigma 2}\right)\mathbf{E},$$

$$\mathbf{S}\mathbf{C}_{\Delta}^{T}\left(\overset{*}{\mathbf{R}}_2 + \frac{d}{dt}\overset{*}{\mathbf{L}}_2\right)\mathbf{C}_{\Delta}\mathbf{S}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} \overset{*}{R}_{L1}+\overset{*}{r}_1 & & \\ & \overset{*}{R}_{L2}+\overset{*}{r}_2 & \\ & & \overset{*}{R}_{L3}+\overset{*}{r}_3 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \overset{*}{L}_{L1} & \overset{*}{M}_{21} & \overset{*}{M}_{13} \\ \overset{*}{M}_{12} & \overset{*}{L}_{L2} & \overset{*}{M}_{23} \\ \overset{*}{M}_{13} & \overset{*}{M}_{23} & \overset{*}{L}_{L3} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overset{*}{R}_{L1}+\overset{*}{r}_1+\overset{*}{R}_{L2}+\overset{*}{r}_2+\overset{*}{R}_{L3}+\overset{*}{r}_3 & -[\overset{*}{R}_{L2}+\overset{*}{r}_2+a(\overset{*}{R}_{L1}+\overset{*}{r}_1)+a^2(\overset{*}{R}_{L3}+\overset{*}{r}_3)] \\ 0 & -[\overset{*}{R}_{L2}+\overset{*}{r}_2+a(\overset{*}{R}_{L3}+\overset{*}{r}_3)+a^2(\overset{*}{R}_{L1}+\overset{*}{r}_1)] & \overset{*}{R}_{L1}+\overset{*}{r}_1+\overset{*}{R}_{L2}+\overset{*}{r}_2+\overset{*}{R}_{L3}+\overset{*}{r}_3 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overset{*}{L}_1\overset{*}{L}_2+\overset{*}{L}_3-\overset{*}{M}_{12}-\overset{*}{M}_{23}-\overset{*}{M}_{13} & -[\overset{*}{L}_{L2}+a\overset{*}{L}_{L1}+a^2\overset{*}{L}_{L3}+2(\overset{*}{M}_{13}+a\overset{*}{M}_{23}+a^2\overset{*}{M}_{12})]. \\ 0 & -[\overset{*}{L}_{L2}+a\overset{*}{L}_{L3}+a^2\overset{*}{L}_{L1}+2(\overset{*}{M}_{13}+a\overset{*}{M}_{12}+a^2\overset{*}{M}_{23})], & \overset{*}{L}_1+\overset{*}{L}_2+\overset{*}{L}_3-\overset{*}{M}_{12}-\overset{*}{M}_{23}-\overset{*}{M}_{13} \end{bmatrix}.$$

Przyjmując oznaczenia

$$\overset{*}{R}^{o} = \frac{1}{3}(\overset{*}{R}_{L1}+\overset{*}{r}_1+\overset{*}{R}_{L2}+\overset{*}{r}_2+\overset{*}{R}_{L3}+\overset{*}{r}_3),$$

$$\overset{*}{R}' = \frac{1}{3}[\overset{*}{R}_{L1}+\overset{*}{r}_1+a(\overset{*}{R}_{L2}+\overset{*}{r}_2)+a^2(\overset{*}{R}_{L3}+\overset{*}{r}_3)],$$

$$\overset{*}{R}'' = \frac{1}{3}[\overset{*}{R}_{L1}+\overset{*}{r}_1+a^2(\overset{*}{R}_{L2}+\overset{*}{r}_2)+a(\overset{*}{R}_{L3}+\overset{*}{r}_3)],$$

$$\overset{*}{L}{}^{o} = \frac{1}{3}(\overset{*}{L}_{L1}+\overset{*}{L}_{L2}+\overset{*}{L}_{L3}),$$

$$\overset{*}{L}{}' = \frac{1}{3}(\overset{*}{L}_{L1}+a\overset{*}{L}_{L2}+a^2\overset{*}{L}_{L3}),$$

$$\overset{*}{L}{}'' = \frac{1}{3}(\overset{*}{L}_{L1}+a^2\overset{*}{L}_{L2}+a\overset{*}{L}_{L3}), \tag{30}$$

$$\overset{*}{M}{}^{o} = \frac{1}{3}(\overset{*}{M}_{23}+\overset{*}{M}_{13}+\overset{*}{M}_{12}),$$

$$\overset{*}{M}{}' = \frac{1}{3}(\overset{*}{M}_{23}+a\overset{*}{M}_{13}+a^2\overset{*}{M}_{12}),$$

$$M'' = \frac{1}{3}(\overset{*}{M}_{23}+a^2\overset{*}{M}_{13}+a\overset{*}{M}_{12}),$$

można macierz $\mathbf{Z}_2^s$ wyrazić wzorem

$$\mathbf{Z}_2^s = \begin{bmatrix} R_{T2}+\dfrac{d}{dt}L_\sigma & 0 & 0 \\ 0 & R_{T2}+3\overset{*}{R}{}^{o}+\dfrac{d}{dt}[L_{\sigma 2}+3(\overset{*}{L}{}^{o}-\overset{*}{M}{}^{o})], & -3a\left[\overset{*}{R}{}''+\dfrac{d}{dt}(\overset{*}{L}{}''+2\overset{*}{M}{}'')\right] \\ 0 & -3a^2\left[\overset{*}{R}{}'+\dfrac{d}{dt}(\overset{*}{L}{}'+2\overset{*}{M}{}')\right] & , \; R_{T2}+3\overset{*}{R}{}^{o}+\dfrac{d}{dt}[L_{\sigma 2}+3(\overset{*}{L}{}^{o}-\overset{*}{M}{}^{o})] \end{bmatrix}, \tag{31}$$

Transformatory piecowe są najczęściej łączone w układzie D/d oraz Y/d. W przypadku, gdy uzwojenie pierwotne jest połączone w trójkąt, to współrzędne symetryczne napięć zasilających $\mathbf{e}_{1z}^s$, wyznaczone na podstawie zależności (23) i (7), wynoszą

$$\mathbf{e}_{1z}^s = \mathbf{S}\mathbf{C}_\Delta^T\mathbf{e}_{1z} = \frac{E_{ap}}{2\vartheta}\begin{bmatrix} 0 \\ (1-a)e^{j\omega t} \\ (1-a^2)e^{-j\omega t} \end{bmatrix}, \tag{32}$$

Natomiast macierz $\mathbf{Z}_{1z}^s$ w przypadku trójkątowego połączenia można obliczyć z zależności

$$\mathbf{Z}_{1z}^s = \mathbf{S}\vartheta^{-2}\left\{\mathbf{R}_{T1}+\frac{d}{dt}\mathbf{L}_{\sigma 1}+\mathbf{C}_\Delta^T\left(\overset{*}{\mathbf{R}}_D+\frac{d}{dt}\overset{*}{\mathbf{L}}_D\right)\mathbf{C}_\Delta\right\}\mathbf{S}^{-1}. \tag{33}$$

Ponieważ zachodzą zależności

$$\mathbf{S}\vartheta^{-2}\left(\mathbf{R}_{T1}+\frac{d}{dt}\mathbf{L}_{\sigma 1}\right)\mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{\vartheta^2}\left(R_{T1}+\frac{d}{dt}L_{\sigma 1}\right)\mathbf{E}$$

oraz

$$\mathbf{S}\vartheta^{-2}\mathbf{C}_\Delta^T\left(\overset{*}{\mathbf{R}}_D+\frac{d}{dt}\overset{*}{\mathbf{L}}_D\right)\mathbf{C}_\Delta\mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{\vartheta^2}\left(\overset{*}{R}_D+\frac{d}{dt}\overset{*}{L}_D\right)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

więc przyjmując oznaczenia

$$Z_{1z}^{0} = \frac{1}{\vartheta^2}\left(R_{T1} + \frac{d}{dt}L_{\sigma 1}\right),$$
$$Z_{1z}' = \frac{1}{\vartheta^2}\left[R_{T1} + 3\overset{*}{R}_D + \frac{d}{dt}(L_{\sigma 1} + 3\overset{*}{L}_D)\right], \tag{34}$$

można macierz $\mathbf{Z}_{1z}^{s}$ wyrazić wzorem

$$\mathbf{Z}_{1z}^{s} = \begin{bmatrix} Z_{1z}^{0} & & \\ & Z_{1z}' & \\ & & Z_{1z}' \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Na podstawie równań macierzowych (22), po uwzględnieniu w nich wyżej wyznaczonych wyrażeń dla odpowiednich macierzy, można ułożyć w najogólniejszym przypadku sześć równań różniczkowych. Dla rozwiązania tych równań konieczna jest znajomość charakterystyk dynamicznych łuku elektrycznego.

Warunki wyładowania łukowego ulegają w piecu łukowym dużym zmianom w czasie jednego wytopu. Z tego powodu właściwości łuku zmieniają się też w czasie pracy pieca. Przeprowadzone wstępne badania łuków elektrycznych różnych pieców wykazały, że w okresie roztapiania wsadu prądy łuków są silnie odkształcone, co wynika z nieliniowego charakteru łuku. Przy dużej ilości płynnego wsadu prąd łuku jest mniej odkształcony, a natomiast po całkowitym roztopieniu wsadu i wytworzeniu na nim żużla łuk, zwłaszcza krótki, jest stabilny i jego prąd jest w niektórych okresach w przybliżeniu sinusoidalny.

Z powyższych uwag wynika, że w pracy pieca łukowego można wyróżnić okresy pracy dynamicznej, w których łuki odznaczają się nieliniowymi i ciągle zmieniającymi się charakterystykami dynamicznymi, oraz okresy pracy statycznej, przebiegającej w warunkach usprawiedliwiających traktowanie łuku w przybliżeniu jako elementu liniowego. Poprzednio sformułowany model matematyczny urządzenia łukowego umożliwia przy zastosowaniu cyfrowej techniki obliczeniowej przeprowadzenie obliczeń stanów dynamicznych urządzenia łukowego. Konieczna jest przy tym znajomość trajektorii dynamicznych łuku. Badania nad przebiegami tych trajektorii nie są obecnie dostatecznie rozwinięte, jakkolwiek wiele ośrodków naukowych prowadzi badania łuków elektrycznych w różnych aspektach. A więc po dokładnym poznaniu wszystkich właściwości wyładowań łukowych w piecach można będzie wykorzystać wspomniany model matematyczny do opisu zjawisk nieliniowych, występujących w urządzeniu łukowym.

4. OPIS STANÓW STATYCZNYCH URZĄDZENIA ŁUKOWEGO

W dalszym ciągu omawiany model matematyczny zostanie użyty do opisu stanów statycznych urządzenia łukowego przy założeniu, że przebiegi prądów łuków są sinusoidalne. W przypadku takich łuków układ równań różniczkowych (22) jest układem liniowym o stałych współczynnikach.

Analiza pracy urządzenia zostanie przeprowadzona przy zastosowaniu metody symbolicznej, czego wyraźnie nie będzie się zaznaczać, aby zbytnio nie komplikować zapisu.

Przy przyjęciu tej metody należy w równaniach (22) oraz wyrażeniach (28), (31) i (34) zastąpić operator $\frac{d}{dt}$ przez wyrażenie $j\omega$. Równania te zmienią się więc w równania algebraiczne o postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^s_{1z} &= (\mathbf{Z}^s_{1z}+\mathbf{Z}^s_{\mu})\mathbf{I}^s_{1z}+\mathbf{Z}^s_{\mu}\mathbf{I}^s_2, \\ \mathbf{0} &= \mathbf{Z}^s_{\mu}\mathbf{I}^s_{1z}+(\mathbf{Z}^s_2+\mathbf{Z}^s_{\mu})\mathbf{I}^s_2, \end{aligned} \tag{36}$$

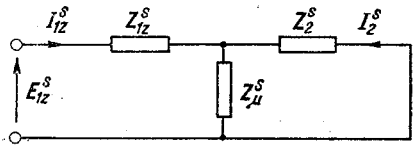
przy czym

$$\mathbf{Z}^s_{\mu} = j\omega\mathbf{L}^s_{T2} = j\omega\mathbf{L}^s_{\mu}.$$

Po obliczeniu z drugiego równania (36) macierzy $\mathbf{I}^s_2$ i podstawieniu jej do pierwszego równania dochodzi się do zależności

$$\mathbf{E}^s_{1z} = \{\mathbf{Z}^s_{1z}+[(\mathbf{Z}^s_{\mu})^{-1}+(\mathbf{Z}^s_2)^{-1}]^{-1}\}\mathbf{I}^s_{1z}. \tag{37}$$

Schemat zastępczy odpowiadający tej zależności przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Macierzowy schemat zastępczy urządzenia łukowego odpowiadający zależności (37)

We wzorze (37) występuje wyrażenie

$$[(\mathbf{Z}^s_{\mu})^{-1}+(\mathbf{Z}^s_z)^{-1}]^{-1} = \mathbf{Z}^s_u(\mathbf{Z}^s_{\mu}+\mathbf{Z}^s_2)^{-1}\mathbf{Z}^s_2 = \mathbf{K}^s_2\mathbf{Z}^s_2,$$

przy czym

$$\mathbf{K}^s_2 = \mathbf{Z}^s_{\mu}(\mathbf{Z}^s_{\mu}+\mathbf{Z}^s_2)^{-1} \tag{38}$$

jest uogólnioną przekładnią Thevenina. Natomiast wyrażenie

$$\mathbf{Z}^s_{wz} = \mathbf{Z}^s_{1z}+\mathbf{K}^s_2\mathbf{Z}^s_2 \tag{39}$$

jest macierzową impedancją urządzenia widzianą od strony pierwotnej transformatora i przeliczoną na stronę wtórną.

Na podstawie wzoru (37) i drugiego wzoru (36) można wyznaczyć interesujące nas wielkości urządzenia łukowego. Na przykład przy znanej macierzy $\mathbf{E}^s_{1z}$ współrzędnych symetrycznych fazowych napięć zasilających (wzór (24) lub (32)) oraz przy znanych macierzach impedancji $\mathbf{Z}^s_{\mu}$, $\mathbf{Z}^s_{2z}$ i $\mathbf{Z}^s_2$ można obliczyć macierz $\mathbf{I}^s_{1z}$ współrzędnych symetrycznych prądów fazowych strony pierwotnej transformatora, przeliczonych na stronę wtórną:

$$\mathbf{I}^s_{1z} = \{\mathbf{Z}^s_{1z}+[(\mathbf{Z}^s_{\mu})^{-1}+(\mathbf{Z}^s_2)^{-1}]^{-1}\}^{-1}\mathbf{E}^s_{1z}. \tag{40}$$

W tej zależności łatwo jest uwzględnić poprzednio wspomniane przejście do granicy $\overset{*}{Z}_1 \to \infty$, wynikające z braku przewodu zerowego. Znajomość macierzy $\mathbf{I}^s_{1z}$ umożliwia wyznaczenie prądów fazowych strony pierwotnej

$$\mathbf{I}_1 = \mathfrak{S}^{-1}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{I}^s_{1z}. \tag{41}$$

Macierze prądów fazowych strony wtórnej, wyrażonych we współrzędnych symetrycznych i we współrzędnych fazowych, można obliczyć z drugiego równania (36)

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2^s &= -\mathbf{Z}_\mu^s(\mathbf{Z}_\mu^s+\mathbf{Z}_2^s)^{-1}\mathbf{I}_{1z}^s = -\mathbf{K}_2^s\mathbf{I}_{1z}^s, \\ \mathbf{I}_2 &= \mathbf{S}^{-1}\mathbf{I}_2^s. \end{aligned} \tag{42}$$

Macierze współrzędnych symetrycznych i fazowych prądów magnesujących wyznaczają zależności

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\mu^s &= \mathbf{I}_{1z}^s+\mathbf{I}_2^s = \mathbf{Z}_2^s(\mathbf{Z}_\mu^s+\mathbf{Z}_2^s)^{-1}\mathbf{I}_{1z}^s, \\ \mathbf{I}_\mu &= \mathbf{S}^{-1}\mathbf{I}_\mu^s. \end{aligned} \tag{43}$$

Transformacja do układu współrzędnych S odznacza się niezmienniczością mocy, tzn.

$$P_S^s = (\check{\mathbf{I}}^s)^T\mathbf{E}^s = \check{\mathbf{I}}^T\check{\mathbf{S}}^T\mathbf{S}\mathbf{E} = \check{\mathbf{I}}^T\mathbf{E} = P_s. \tag{44}$$

Moc urządzenia łukowego obliczona na podstawie powyższego wzoru przy uwzględnieniu zależności (36) i (43) wynosi

$$P_s = (\check{\mathbf{I}}_{1z}^s)\mathbf{Z}_{1z}^s\mathbf{I}_{1z}^s+[(\check{\mathbf{I}}_\mu^s)^T-(\check{\mathbf{I}}_2^s)^T]\,\mathbf{Z}_\mu^s(\mathbf{I}_\mu^s-\mathbf{I}_2^s)+[(\check{\mathbf{I}}_\mu^s)^T-(\check{\mathbf{I}}_2^s)^T]\mathbf{Z}_\mu^s\mathbf{I}_2^s.$$

Po uproszczeniu tego wyrażenia i uwzględnieniu równości $\mathbf{Z}_\mu^s\mathbf{I}_\mu^s = -\mathbf{Z}_2^s\mathbf{I}_2^s$, wynikającej ze schematu na rys. 2, otrzymuje się

$$P_s = (\check{\mathbf{I}}_{1z}^s)^T\mathbf{Z}_{1z}^s\mathbf{I}_{1z}^s+(\check{\mathbf{I}}_\mu^s)^T\mathbf{Z}_\mu^s\mathbf{I}_\mu^s+(\check{\mathbf{I}}_2^s)^T\mathbf{Z}_2^s\mathbf{I}_2^s. \tag{45}$$

Pierwszy składnik przedstawia moce tracone w dławiku i uzwojeniu pierwotnym transformatora, drugi składnik — moc pobieraną na magnesowanie rdzenia, trzeci składnik — moce tracone w uzwojeniu wtórnym transformatora i torze wielkoprądowym oraz moce wydzielane w łukach elektrycznych.

Przy analizowaniu urządzenia łukowego można posłużyć się jeszcze innym schematem zastępczym niż pokazanym na rys. 2. Aby to wyjaśnić przekształcimy równania (36) w ten sposób, że obliczone z pierwszego równania wyrażenie dla $\mathbf{I}_{1z}^s$ podstawimy do drugiego równania. Otrzymuje się wtedy zależność

$$\mathbf{0} = \{\mathbf{Z}_\mu^s(\mathbf{Z}_{1z}^s+\mathbf{Z}_\mu^s)^{-1}\mathbf{Z}_{1z}^s+\mathbf{Z}_2^s\}\mathbf{I}_2^s+\mathbf{Z}_\mu^s(\mathbf{Z}_{1z}^s+\mathbf{Z}_\mu^s)^{-1}\mathbf{E}_{1z}^s.$$

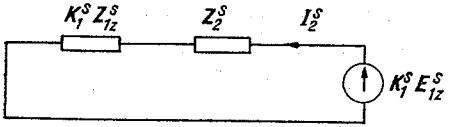
Ponieważ wyrażenie

$$\mathbf{K}_1^s = \mathbf{Z}_\mu^s(\mathbf{Z}_{1z}^s+\mathbf{Z}_\mu^s)^{-1} \tag{46}$$

jest uogólnioną przekładnią Thevenina, więc powyższe równanie można przepisać w postaci

$$\mathbf{0} = (\mathbf{K}_1^s\mathbf{Z}_{1z}^s+\mathbf{Z}_2^s)\mathbf{I}_2^s+\mathbf{K}_1^s\mathbf{E}_{1z}^s. \tag{47}$$

Równaniu temu odpowiada schemat pokazany na rys. 3.



Rys. 3. Macierzowy schemat zastępczy urządzenia łukowego odpowiadający zależności (47)

Uogólnioną przekładnię Thevenina (46) można przekształcić do postaci

$$\mathbf{K}_1^s = \begin{bmatrix} K_1^0 & 0 & 0 \\ 0 & K_1' & 0 \\ 0 & 0 & K_1' \end{bmatrix}, \tag{48}$$

przy czym

$$K_1^0 = \frac{jX_\mu^0}{Z_{1z}^0 + jX_\mu^0},$$

$$K_1' = \frac{jX_\mu'}{Z_{1z}' + jX_\mu'} = \frac{1}{1 + \dfrac{Z_{1z}'}{jX_\mu'}} = \frac{1}{1 + \dfrac{R_{1z}'}{jX_\mu'} + \dfrac{X_{1z}'}{X_\mu'}} \approx 1.$$

Wartość K_1' jest niewiele mniejsza od 1, gdyż wartości $\frac{R_{1z}'}{jX_\mu'}$ oraz $\frac{X_{1z}'}{X_\mu'}$ są pomijalnie małe, zwłaszcza gdy urządzenie łukowe nie ma dławika.

Z symetrycznej budowy transformatora piecowego wynika, że współrzędna zerowa I_2^0 (jego wtórnych prądów fazowych jest równa zeru. Również współrzędna zerowa E_{1z}^0 i przeciwna E_{1z}'' napięć zasilających są równe zeru ze względu na symetrię napięć międzyprzewodowych E_{pi} w rozdzielni piecowej. Biorąc powyższe pod uwagę oraz fakt, że $K_1' \approx 1$, można pominąć macierz $\mathbf{K}_1^s$ we wzorze (47). Wzór ten uprości się więc do postaci

$$\mathbf{E}_{1z}^s = -\mathbf{Z}^s\mathbf{I}_2^s, \tag{49}$$

przy czym

$$\mathbf{Z}^s = \mathbf{Z}_{1z}^s + \mathbf{Z}_2^s.$$

Stany pracy statycznej urządzenia łukowego można więc wyznaczyć z wystarczającą dla technicznych obliczeń dokładnością, na podstawie zależności (49), znacznie prostszej niż zależność (36).

5. WNIOSKI

Stalownicze urządzenie łukowe stanowi złożony i interesujący obiekt pod względem teoretycznej analizy jego pracy. Sformułowany model matematyczny umożliwia analizowanie zarówno dynamicznych jak i statycznych stanów pracy takiego urządzenia.

Stany dynamiczne można badać na podstawie równań (22) przy zastosowaniu cyfrowej techniki obliczeniowej. Potrzebna jest przy tym znajomość odpowiednich parametrów elektrycznych dławika, transformatora piecowego, toru wielkoprądowego oraz charakterystyk dynamicznych łuków elektrycznych. Dzięki przedstawieniu równań napięciowo-prądowych we współrzędnych S, występujące w tych równaniach parametry elektryczne są mierzalne i łatwe do wyznaczenia nieskomplikowanymi metodami pomiarowymi.

Na podstawie równań (36) i (37) lub uproszczonego równania (49) można wyznaczyć i analizować statyczne stany pracy urządzenia łukowego, występujące w różnych zadanych warunkach, jak np. przy dowolnie zadanej nierówności prądów łuków, przy równych rezystancjach łuków itp. Na podstawie takiej analizy łatwo jest ustalić najkorzystniejsze stany pracy urządzenia łukowego.

LITERATURA

1. W. Kołek, B. Wachta, *Impedancja zastępcza niesymetrycznych transformatorów jako podstawa klasyfikacji źródeł niesymetrii*, Rozprawy Elektrotechniczne, z. 1, 1970.
2. A. Kurbiel, *Zarys teorii stanów pracy elektrycznych urządzeń łukowych*, Zeszyty Nauk. AGH, Elektryfikacja i Mechanizacja G. i H., z. 42, 1971.
3. A. Puchała, *Teoria przetworników elektromechanicznych*, Część II, Kraków 1969.
4. B. Wachta, *Zagadnienie symetryzacji prądów w niesymetrycznych odbiornikach wielkiej mocy*, Zeszyty Naukowe AGH, Elektryfikacja i Mechanizacja Górn. i Hutn., z. 39, 1970.

A. KURBIEL

MATHEMATICAL MODEL OF STEELMAKING ARC APPLIANCE

Summary

The arc steelmaking appliance forms a complex and interresting object for the theoretical analysis of its operation. A mathematical model which allows for the analysis of both transient and steady states of this appliance is given in this paper.

Transient states may be examined on the basis of equations (22) and of the digital mathematical method. The knowledge of suitable electric parameters of the reactor, furnace transformer, current carrying system and dynamic characteristics of electric arcs is needed. Due to the representation of voltage-current equations in components **S**, parameters appearing in this equation are measurable and easy to evaluate with simple measuring methods.

On the basis of equations (36) and (37) or the simplified equation (49), operational steady states occurring in different conditions, e.g. given asymmetry of arc currents, equal arc resistances and others, may be determined. From this analysis it is easy to evaluate optimal operational states of an arc appliance.

A. KURBIEL

MODÉLE MATHÉMATIQUE D'UN DISPOSITIF À ARC POUR SIDÉRURGIE

Résumé

Le dispositif à arc pour sidérurgie constitue un objet complex et intéressant pour l'analyse théorique. On a préparé un modèle mathématique qui permet d'analyser les régimes statiques et dynamiques du travail.

Les régimes dynamiques peuvent etre déterminés à partir des équations (22) à l'aide des calculs numériques. Ainsi doit-on connaitre les valeurs des paramètres électriques du trafo de four, d'inductance, des barres du courant fort et les caractéristiques dynamiques de l'arc. Comme les équations-relations entre courants et tensions sont transformées par *S*, les paramètres électriques sont mesurables et faciles à déterminer par les simples méthodes.

Les équations (36) et (37) ou l'équation simplifiée (49) permettent de déterminer et d'analyser les régimes statiques du travail du dispositif à arc dans les conditions diverses, p.ex. déséquilibre arbitraire des courants, égalité des résistances d'arcs etc. Une telle analyse peremet d'établir les conditions optimales du travail du dispositif à arc.

A. KURBIEL

MATHEMATISCHES MODELL EINER LICHTBOGENOFENANLAGE EINES STAHLWERKS

Zusammenfassung

Eine Lichtbogenofenanlage eines Stahlwerks bildet ein verwickeltes und interessantes Objekt für die theoretische Betriebsanalyse. Das erarbeitete mathematische Modell ermöglicht die Analyse sowohl im dynamischen, als auch statischen Zustand dieser Anlage. Die dynamischen Zustände können auf Grund der Gleichungen (22) unter Anwendung der Digitalberechnungstechnik geprüft werden. Dazu sind aber Kenntnisse über die entsprechenden elektrischen Parameter von Drosselspulen, von Ofentransformatoren, Hochstromleitungen und dynamischen Lichtbogeneigenschaften erforderlich. Dank der Darstellung der Stromspannungs-Gleichungen in Form von Symmetriekoordinaten S sind die in diesen Gleichunge auftretenden en elektrischen Parameter meßbar, und können mittels wenig komplizierter Meßmethoden bestimmt werden.

Auf Grund der Gleichungen (36) und (37) bzw. der gekürzten Gleichung (49) können die statischen Zustände einer Ofenanlage in verschiedenen gegebenen Arbeitsverhältnissen bestimmt und analysiert werden, wie z.B. bei beliebig gegebener Stromsymmetrie des Lichtbogens, bei gleichen Lichtbogenresistanzen u.dgl. Auf Grund einer solchen Analyse bietet die Bestimmung der günstigsten Betriebszustände der Ofenanlage keine größeren Schwierigkeiten.

А. КУРБЕЛЬ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТАЛЕПЛАВИЛЬНОЙ ДУГОВОЙ ПЕЧИ

Резюме

Дуговая сталеплавильная печь представляет собой сложный и интересный объект с точки зрения теоретического анализа ее работы. Сформулирована математическая модель позволяющая на анализ, как динамических так и статических режимов работы печи.

Динамический режим можно исследовать на основании уравнений (22) применяя цифровую вычислительную технику. Необходимо при этом знакомство соответствующих электрических параметров дросселя, печного трансформатора, короткой сети и динамических характеристик электрических дуг. Благодаря представлению уравнений напряжение-ток в системе координат S выступающие в этих уравнениях электрические параметры измеримы и нетрудны для определения несложными измерительными методами.

На основании уравнений (36) и (37) или упрощенного уравнения (49) можно определить и анализировать статические режимы работы дуговой печи, выступающие в различных заданных условиях, как например при произвольном заданном неравенстве токов, при равных сопротивлениях дуг и т. п. На основании такого анализа легко установить оптимальные режимы работы дуговой печи.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1978, 24, z. 2, ss. 389 — 398

621.315.05

Idee przesyłu energii elektrycznej z zastosowaniem kompensacji dławikowej niby-ciągłej

STANISŁAW SZPOR (GDAŃSK)

Otrzymano 2.11.1976

Przedstawiono zasady kompensacji poprzecznej (dławikowej) niby-ciągłej dla linii przesyłowych na najwyższe napięcia i o największych długościach, nawet rzędu kilku tysięcy kilometrów. Kompensacja ta może dać ogromne zwiększenie szybkości fali i długości fali, nawet do 30000...60000 km. Kompensacja bardzo silna, zbliżona do idealnej, będzie wymagać zastosowania na każdym słupie kompensacji mechanicznej zwisu. Przewiduje się, że nie będzie potrzebne gęściejsze rozmieszczenie dławików niż co 200...500 km.

Istnieje możliwość wyzyskania dławików jako transformatorów obniżających do zasilania miejscowych odbiorów przy linii przesyłowej. Moce indukcyjne dławików dla całej linii wypadają ogromne, na przykład przy linii 1-torowej dla 1100...3000 kV około 80000... ...600000 MVA.

Przewiduje się dla najwyższych napięć prace nad transformatorami energetycznymi kaskadowymi, nad wytrzymałością elektryczną wielkich przerw iskrowych — z zastosowaniem nowych zasad fizykalnych dla iskry długiej, nad ograniczeniem współczynnika przepięciowego do 1,2...1,3. Proponuje się też prace nad wyłączaniem linii przez szybkie kasowanie wzbudzenia prądnic.

Takie linie będą usuwały trudności ze szczytami dobowymi obciążeń — przy kierunku wschód-zachód, albo trudności ze szczytami rocznymi obciążeń — przy kierunku północ-południe. Linia Syberia—Polska usunie całkowicie trudności Polski ze szczytami dobowymi. Wskazano trzy możliwości realizacji linii Polska—Szwecja: jedną lądową, morską kablową i morską napowietrzną.

Omawia się widoki podwójnej, bardzo ekonomicznej eksploatacji polskiego węgla: elektrownie podziemne, wyzyskiwanie ze spalin dwutlenku węgla dla intensyfikacji ogrodnictwa i dla produkcji syntetycznej żywności.

W załączniku I bada się rozkłady napięcia i prądu wzdłuż linii przesyłowej w stanie jałowym bez kompensacji, z kompensacją dławikową równomierną oraz niby-równomierną. Przykłady liczbowe odpowiadają długości linii 1500 km przy częstotliwości 50 Hz, a kompensację niby-równomierną rozpatruje się dwuodcinkową i pięcioodcinkową. Kompensacja pięcioodcinkowa okazuje się bardzo skuteczna, z wahaniami napięcia wzdłuż linii do około 10%.

W załączniku II omawia się pobieżnie stateczność statyczną przesyłu bez kompensacji, z kompensacją dławikową i z kompensacją kondensatorową, którą uznaje się za zbyt kosztowną.

1. WSTĘP

Obecne linie przesyłowe na najwyższe napięcia, 400 kV, 500 kV i 750 kV, służą do przesyłu wielkich energii na umiarkowane odległości, przeważnie rzędu kilkuset kilometrów.

Najczęściej chodzi o przesył z wielkich elektrowni wodnych do wielkich centrów zużycia energii. Tak jest w Szwecji, Francji, Kanadzie. Znacznie większe odległości, rzędu tysięcy kilometrów, wchodzą i wejdą w rachubę na Syberii w związku z zasobami wodnymi i węgla odkrywkowego i w Ameryce w związku z ogromnymi zasobami energii Amazonki. Bardzo wielkie odległości wystąpią, jeżeli będzie się wyzyskiwać możliwości energetyczne różnic temperatury wody morskiej na różnych głębokościach na terenach tropikalnych.

Już obecnie studiuje się linie na napięcia przemienne 1100 kV i 1500 kV do realizacji w bliskiej przyszłości. Jednakże według klasycznej nauki o przesyle napowietrznym przewiduje się tylko odległości niewielkie w porównaniu z długością fali, która wynosi 6000 km dla 50 Hz, 5000 km dla 60 Hz. Wyjątkowo przewiduje się odległość półfalową, 3000 km lub 2500 km. Jednakże z przesyłem półfalowym są związane dość uciążliwe zastrzeżenia. Nie ma tych ograniczeń w przesyle na prąd stały, który już realizuje się na przykład w Związku Radzieckim.

Zalety przesyłu prądem przemiennym skłoniły autora do opracowania kompensacji poprzecznej niby-ciągłej. Dławiki poprzeczne będą rozmieszczone stosunkowo równomiernie wzdłuż linii, na przykład w odstępach 200...500 km. Rozwiązanie to pozwoli na realizację przesyłu prądem przemiennym nawet na odległości większe niż 6000 km. Można przewidywać napięcia perspektywiczne 2200 kV i 3000 kV. Można przewidywać, że wysokonapięciowcy dadzą sobie radę z wytrzymałością izolacji, z przepięciami wewnętrznymi i z ulotem.

Takie linie przesyłowe dadzą obok kilku korzyści znanych z literatury dwie wspaniałe możliwości:

1. Linie wschód—zachód pozwolą opanować znakomicie szczyty dobowe obciążeń — dzięki kilkugodzinnemu przesunięciu między zachodami słońca na krańcach linii. Najwspanialszym przykładem jest przesył Syberia—Polska—Europa Zachodnia.
2. Linie północ—południe pozwolą opanować szczyty roczne obciążeń, wahania lato—zima. Wielkim przykładem jest przesył: krańce Ameryki Południowej — elektrownie na Amazonce — Ameryka Środkowa — wschodnie części Stanów Zjednoczonych — Kanada.

2. ZASADA KOMPENSACJI POPRZECZNEJ NIBY-CIĄGŁEJ

W linii bez kompensacji szybkość fali, długość fali oraz impedancja falowa odpowiadają wzorom

$$v_o = \frac{1}{\sqrt{L_o C_o}} = 300\,000 \text{ km/s}, \tag{1}$$

(przy 50 Hz)
$$\lambda_o = v_o T = 6000 \text{ km}, \tag{2}$$

$$Z_o = \sqrt{\frac{L_o}{C_o}}. \tag{3}$$

Kompensując (zmniejszając) bądź L_o, bądź C_o, bądź obydwa parametry, można znacznie zwiększyć szybkość fali i długość fali. Niestety zwiększa się także impedancja falowa. Kompensacja szeregowa (podłużna) kondensatorowa byłaby ogromnie kosztowna dla wielkich odległości i dla bardzo wysokich napięć. Kompensacja równoległa (poprzeczna)

dławikowa jest daleko ekonomiczniejsza. Konstrukcje indukcyjne bowiem zwiększają ciężar i cenę tylko umiarkowanie, kiedy moc rośnie.

Jeżeli kompensacja dławikowa ciągła (rozłożona mniej lub więcej równomiernie wzdłuż linii) zmniejsza pojemność czynną linii do wartości

$$C = \gamma C_o, \tag{4}$$

to szybkość, długość fali i impedancja falowa odpowiadają wzorom:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} 300\,000 \text{ km/s}, \tag{5}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} 6000 \text{ km}, \tag{6}$$

$$Z = \frac{Z_o}{\sqrt{\gamma}}. \tag{7}$$

Charakteryzuje się możliwości następującymi obliczeniami

γ	= 0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	
v	= $3 \cdot 10^6$	$1{,}5 \cdot 10^6$	$1{,}11 \cdot 10^6$	$0{,}75 \cdot 10^6$	$0{,}6 \cdot 10^6$	km/s [1]
λ	= 60000	30000	20000	15000	12000	km
Z/Z_o	= 100	25	11,1	6,25	4	

Wartości $\gamma = 0{,}09...0{,}16...0{,}25$ odpowiadają kompensacji umiarkowanej, osiągalnej przy klasycznej konstrukcji linii o zmiennym zwisie. Wartości $\gamma = 0{,}01...0{,}4$ odpowiadają stałej wartości C_o, tj. stałego zwisu. Warunek ten sprowadza się do stosowania kompensacji mechanicznej zwisu na każdym słupie. Będzie to linia o stałym naciągu mechanicznym i o stałym zwisie.

Najdrobniejsze rozłożenie dławików to rozłożenie na każdym słupie. Zwykle będzie wystarczające rozmieszczenie rzadsze, na przykład w odstępach między kolejnymi dławikami równych około 200...500 km. Odstęp ten będzie przedmiotem obliczeń technicznych i ekonomicznych.

3. BADANIA I DODATKOWE WYZYSKANIE DŁAWIKÓW

Według szkicowanych projektów można wyobrazić sobie konstrukcję dławika o rdzeniu jednosłupowym, z wieloma szczelinami izolacyjnymi. Izolacja szczelin będzie olejowa albo gazowa, na przykład mieszanka termoelektryczna według rozwiązania polskiego, a zwłaszcza mieszanka H_2-SF_6. Uniknięcie gospodarki olejowej jest pożądane przy rozmieszczeniu dławików wzdłuż linii.

Istnieje możliwość wyzyskania dławików jako transformatorów przez dodanie uzwojenia wtórnego. Będzie to bardziej ekonomiczne niż zastosowanie transformacji zwykłymi transformatorami. Uzyskanie odbiorów energii wzdłuż linii może być bardzo pożyteczne

[1] Czytelnicy zważywszy na teorię Einsteina przyjmą może z niedowierzaniem wartości $v = 3 \cdot 10^6$ km/s. Wyjaśnia się, że nasze v nie ma takiego sensu fizykalnego, jak szybkość w ruchu fal udarowych w linii kompensowanej, która pozostaje równa $3 \cdot 10^5$ km/s.

na przykład na Syberii, w pustynnych rejonach Afryki, czy w Ameryce Południowej. Może to ułatwić zakładanie nowych ośrodków przemysłowych i urbanistycznych.

Moce indukcyjne dławików dla całej linii przesyłowej wypadają ogromne. Na przykład przy odległości 1000 km, przy linii jednotorowej moc indukcyjna byłaby

przy 1100 ... 1500 ... 2200 ... 3000 kV
8000 ... 15000 ... 30000 ... 60000 MVA.

Te imponujące wartości mocy biernej wskazują, że bez kompensacji linia taka działałaby wprost zwierająco na źródła nawet najsilniejsze.

4. DODATKOWE POTRZEBY BADAŃ I OPRACOWAŃ

Kompensacja dławikowa niby-ciągła nie wyczerpuje potrzeb. Konieczne są równoległe opracowania różnych elementów poza kompensacją.

Najwyższe napięcia będą wymagały transformatorów energetycznych kaskadowych: może już na 1100...1500 kV, a z pewnością na 2200...3000 kV. Powtarzane często zastrzeżenie, że kaskada nie pozwoli opanować zbyt wielkich napięć zwarciowych, jest przesadzone. Należy pracować nad rozwiązaniami kaskadowymi.

Należy dążyć do mniejszych współczynników przepięciowych dla przepięć wewnętrznych (stosunków przepięcia do napięcia roboczego). Obecnie wskazuje się optimum $k \approx 1{,}5$. Bardzo pożądane jest zejście — dla najwyższych napięć znamionowych — do $k \approx 1{,}2...1{,}3$. Będzie temu sprzyjać kompensacja dławikowa niby-ciągła. Poza tym należy opracować sterowanie synchronizacyjno-elektroniczne wyłącznika. Da to bardzo wielki efekt. Należy też robić próby wyłączania linii przez bardzo szybkie skasowanie wzbudzenia prądnic.

Należy pracować nad wytrzymałością elektryczną wielkich przerw iskrowych. Przewiduje się ogromne trudności przy obecnych rozwiązaniach. Wyłaniają się różne możliwości doskonalszych rozwiązań dla wielometrowych przerw powietrznych i dla izolatorów wiszących. Walka o wytrzymałość będzie walką z liderem schodkowym piorunowym. Lider schodkowy ślizgowy otrzymano niedawno w Gdańsku. Walka o wielką wytrzymałość będzie polegała na eliminacji schodków.

Ochrona odgromowa tych linii musi być idealnie dobra. Należy w tym celu znacznie udoskonalić i zaostrzyć obliczenia na przeskoki odwrotne.

5. ZNACZENIE DLA POLSKI

Polska należy do krajów o największych trudnościach z dobowymi szczytami obciążeniowymi. Linia Syberia—Polska usunie radykalnie te trudności. Przedłużenie linii do Europy Zachodniej nie będzie miało dla Polski wielkiego znaczenia energetycznego. Będzie miało natomiast ogromne znaczenie dla krajów zachodnich. Polska będzie pobierać od nich opłaty dewizowe za tranzyt.

Polska może nie tylko brać udział w wymianie czasowej energii, lecz również dostarczać nadwyżkę swej energii na wielką szynę międzykontynentalną. Możemy na przykład dostarczać energię podstawową Szwecji oraz Szwajcarii.

Linia Polska—Szwecja może być zrealizowana 3 sposobami:

1. przez kraje bałtyckie i Finlandię, z wielką korzyścią dla tych krajów,
2. kablem przez Bałtyk, na 400...500 kV, z transformatorami podwyższającymi na obu wybrzeżach,
3. linią napowietrzną nad Bałtykiem, przy głębokości morza nie przekraczającej kilkudziesięciu metrów.

Sposoby 2 i 3 zapewne wyzyskiwałyby Bornholm.

Można wyobrazić sobie polskie elektrownie na węglu kamiennym jako podziemne, przy kopalniach. Nie będzie prawie zupełnie transportu węgla. Żużel będzie pozostawiany pod ziemią. Spaliny, reprezentujące ciepło oraz CO_2, będą może wyprowadzane nad kopalnię do wielopiętrowych zakładów ogrodniczych, gdzie się będzie może produkować jarzyny i owoce w atmosferze bogatej w CO_2 i przy naświetlaniu elektrycznym, a więc również w zimie, albo będą dostarczane do zakładów chemii spożywczej, realizujących syntezę białka, tłuszczów, węglowodanów i skrobi. Będzie to bardzo ekonomiczne podwójne wyzyskanie węgla: dla energetyki i dla produkcji żywności. Lepiej będzie więc eksportować nie węgiel, ale energię elektryczną i artykuły spożywcze.

Polska powinna produkować aparaty i transformatory na najwyższe napięcia dla siebie i na eksport. Będzie to eksport bardzo korzystny: małe zużycie surowców, dużo robocizny, dobre ceny wobec małej konkurencji. Będzie to najpoważniejsza dziedzina eksportowa w elektrotechnice polskiej. Znacznie korzystniejsza niż różne inne obiekty eksportowe zużywające bardzo dużo stali.

Załącznik I

Rozpatruje się stan jałowy linii o długości przykładowej $l = \lambda_0/4 = 1500$ km.

Bez kompensacji dławikowej (rys. 1-A) można wyrazić zmienność napięcia i prądu wzdłuż linii wzorami [8]

$$\hat{U}_o = \hat{U}_2 \cos bx, \tag{8}$$

$$\hat{I}_o \hat{Z} = j\hat{U}_2 \sin bx, \tag{9}$$

przy czym

$$b = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}. \tag{10}$$

Krzywe U_o, I_o Z przedstawiono na rys. 2 i na rys. 3 w funkcji stosunku $x/l = x/(\lambda_0/4)$. Zmienność napięcia U_o jest bardzo wielka: 100-procentowa.

Na rys. 1-B przedstawiono kompensację dwustopniową, przy podziale linii na dwa równe odcinki $\lambda/8$. Dla odcinka 2—3 można napisać [8]

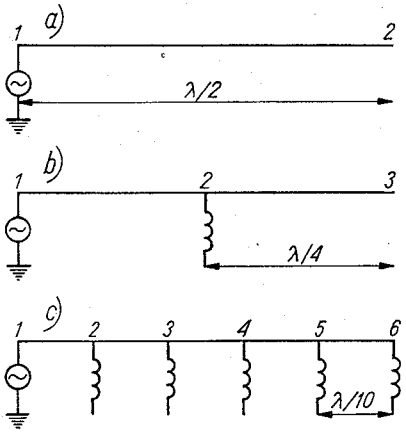
$$\hat{U}_{k2} = \hat{U}_3 \cos bx + \hat{I}_3 \hat{Z} \sin bx, \tag{11}$$

$$\hat{I}_{k2} \hat{Z} = j\hat{U}_3 \sin bx - \hat{I}_3 \hat{Z} \cos bx. \tag{12}$$

Przyjmuje się przykładowo kompensację 90-procentową

$$\frac{1}{X} = 0{,}9\omega C \frac{\lambda_0}{8}, \tag{13}$$

$$\hat{I}_3 \hat{Z} = -j\frac{\hat{U}_3}{X}\hat{Z} = -j0{,}9\frac{\lambda_0}{4}\hat{U}_3. \tag{14}$$



Rys. 1. Linia 1500 km w stanie jałowym
a) bez kompensacji, b) z kompensacją dwuodcinkową, c) z kompensacją pięcioodcinkową

Podstawiając (13) i (14) do (11) i (12) otrzymuje się

$$\hat{U}_{k2} = \hat{U}_3 \cos bx + 0{,}707 \hat{I}_3 \hat{Z} \sin bx, \tag{15}$$

$$\hat{I}_{k2}\hat{Z} = j\hat{U}_3(-0{,}707 \cos bx + \sin bx). \tag{16}$$

Podobnie dla odcinka 1—2 otrzymuje się:

$$\hat{U}_{k2} = \hat{U}_3 \ (1{,}2071 \cos bx + 0{,}646\, U_3 \sin bx), \tag{17}$$

$$\hat{I}_{k2}\hat{Z} = j\hat{U}_3 \ (-0{,}646 \cos bx + 1{,}2071 \sin bx). \tag{18}$$

Krzywe U_{k2}, $I_{k2}Z$ przedstawiono na rys. 2 i na rys. 3. Zmienność napięcia $\hat{U}_{k2}$ jest jeszcze dość duża: 37-procentowa (od 100% do 137%).

Na rys. 1-C przedstawiono kompensację pięciostopniową, przy podziale linii na pięć równych odcinków $\lambda_0/20$. Przyjmuje się znowu kompensację 90-procentową:

$$\frac{1}{X} = 0{,}9\omega C \frac{\lambda}{20}, \tag{19}$$

$$\hat{I}_6\hat{Z} = -j\frac{\hat{U}_6}{X}\hat{Z} = -0{,}9\frac{\lambda}{10}\hat{U}_6. \tag{20}$$

Otrzymuje się ostatecznie wzory:
dla odcinka 5—6

$$\hat{U}_{k5} = \hat{U}_6(\cos bx + 0{,}283 \sin bx), \tag{21}$$

$$\hat{I}_{k5}\hat{Z} = j\hat{U}_6(-0{,}283 \cos bx + \sin bx); \tag{22}$$

dla odcinka 4—5

$$\hat{U}_{k5} = \hat{U}_6(1{,}0386 \cos bx + 0{,}254 \sin bx), \tag{23}$$

$$\hat{I}_{k5} = \hat{Z} = j\hat{U}_6(-0{,}254 \cos bx + 1{,}0386 \sin bx); \tag{24}$$

dla odcinka 3—4

$$\hat{U}_{k5} = \hat{U}_6(1{,}0685 \cos bx + 0{,}2225 \sin bx), \tag{25}$$

$$\hat{I}_{k5}\hat{Z} = j\hat{U}_6(0{,}2225 \cos bx + 1{,}0685 \sin bx); \tag{26}$$

dla odcinka 2—3

$$\hat{U}_{k5} = \hat{U}_6(1{,}0868\cos bx + 0{,}189\sin bx), \tag{27}$$

$$\hat{I}_{k5}\hat{Z} = j\hat{U}_6(-0{,}189\cos bx + 1{,}0868\sin bx); \tag{28}$$

dla odcinka 1—2

$$\hat{U}_{k5} = \hat{U}_6(1{,}0925\cos bx + 0{,}153\sin bx), \tag{29}$$

$$\hat{I}_{k5}\hat{Z} = j\hat{U}_6(-0{,}153\cos bx + 1{,}0925\sin bx). \tag{30}$$

Wyniki obliczeń U_{k5} oraz $I_{k5}Z$ przedstawiono na rys. 2 i na rys. 3. Zmienność napięcia U_{k5} jest korzystnie ograniczona: 10-procentowa, od 100% do 110%.

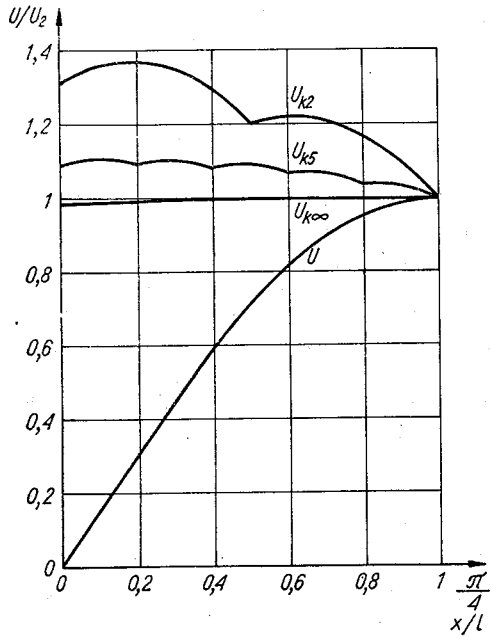
Na koniec rozpatruje się przypadek kompensacji równomiernej, tj. rozbicia linii na nieskończoną liczbę odcinków. Przyjmuje się znowu kompensację 90-procentową. Znajduje się ostatecznie

$$\hat{U}_{k\infty} = \hat{U}_2\cos bx, \tag{31}$$

$$\hat{I}_{k\infty}\hat{Z} = j\hat{U}_2\sin bx, \tag{32}$$

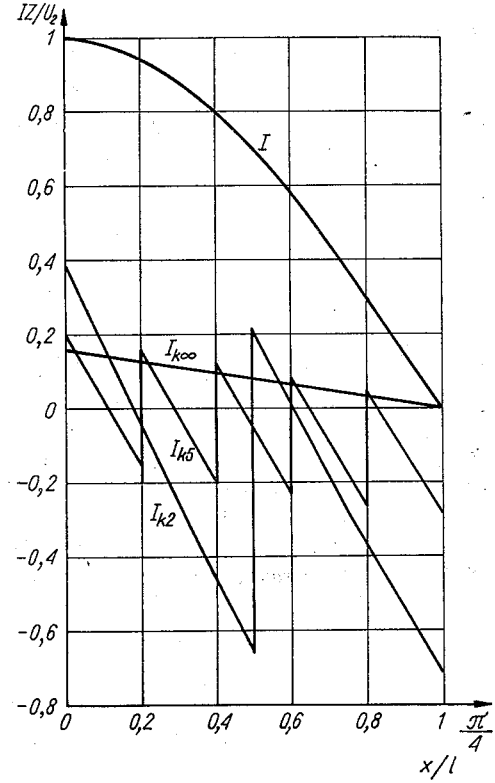
przy czym

$$b = 2\pi\sqrt{0{,}1}\,\frac{1}{\lambda_0}.$$



Rys. 2. Rozkład napięcia wzdłuż linii 1500 km w stanie jałowym

U_o — bez kompensacji, U_{k2} — przy kompensacji dwuodcinkowej, U_{k5} — przy kompensacji pięcioodcinkowej, $U_{k\infty}$ — przy kompensacji równomiernej



Rys. 3. Rozkład prądu wzdłuż linii 1500 km w stanie jałowym

I_o — bez kompensacji, I_{k2} — przy kompensacji dwuodcinkowej, I_{k5} — przy kompensacji pięcioodcinkowej, $I_{k\infty}$ — przy kompensacji równomiernej

Wyniki obliczeń $U_{k\infty}$, $I_{k\infty}Z$ przedstawiono na rys. 2 i na rys. 3. Zmienność napięcia $U_{k\infty}$ jest korzystnie ograniczona: 1,23-procentowa (od 100% do 98,77%).

Ograniczenie zmienności napięcia w stanie jałowym wzdłuż linii jest bardzo korzystne dla przepięć dynamicznych (przepięć o częstotliwości roboczej).

Załącznik II

Dla mocy odpowiadającej stateczności statycznej można napisać znany wzór

$$P = \frac{U_1 U_2 \sin\Theta}{X}, \tag{33}$$

w którym:

U_1, U_2 — napięcia na końcach linii,

Θ — przesunięcia fazowe między nimi,

X — reaktancja szeregowa linii,

jednostki: kV, Ω, MW.

Wprowadzając kompensację dławikową — poprzeczną, nie zmieniamy reaktancji szeregowej X. Zmniejszamy jedynie napięcie U_1, stąd wynika zmniejszenie mocy P, tj. osłabienie stateczności statycznej.

Gdybyśmy zastosowali kompensację kondensatorową — podłużną, wyniknęłoby tadykalne zmniejszenie X i zwiększenie P. Jednakże kondensatory kompensujące na ultrawysokie napięcia wypadają niezmiernie kosztowne. Kompensacji takiej zapewne nie będzie się stosować.

LITERATURA

1. S. Szpor, *Sposób kompensacji linii przesyłowej*, Polski projekt wynalazczy Nr P-162308, 1973.
2. S. Szpor, *Izolacja gazowa*, Polski projekt wynalazczy Nr P-162307, 1973.
3. S. Szpor, *Reviev of the relaxation theory of the lightning stepped leader*, Acta Geophys, Pol., 1970, s. 73.
4. S. Szpor, *Electrodynamic consideration of lightning problems — II*, Acta Geophys. Pol., 1971, s. 35.
5. S. Szpor, A. Gadon, *Confirmation en laboratoire de la théorie de relaxation du leader discontinu de la foudre — II*, Arch. Elektrotechniki, 1972, s. 247.
6. S. Szpor, *Inductive and induced voltages for back flashovers*, Arch. Elektrotechniki, 1974, s. 981.
7. S. Szpor, *Earth voltages for back flashovers*, Arch. Elektrotechniki, 1974, s. 1001.
8. L. Staniewicz, *Teoria prądów zmiennych*, wyd. II, 1951.

S. SZPOR

TRANSMISSION LINE WITH TRANSVERSE QUASI-CONTINUOUS COMPENSATION

Summary

Principles of transverse quasi-continuous compensation (with inductance coils) have been presented for extrahigh-voltage transmission lines of greatest lengths, even of several thousands of kilometers. This compensation may result in a huge increase in wave velocity and length even up to 30000...60000 km.

A very strong compensation, close to the ideal case, will require on each tower a mechanical compensation of a constant height of each conductor. The distances between the inductance coils are anticipated to be about 200...500 km.

A column construction of the coil is foreseen, with several insulating gaps, with thermo-electric gas insulation (He-SF_6). The inductance duties of the coils for the whole line are huge, for instance for 1000 km and for voltages 1100...3000 kV about 8000...60000 MVA.

Information is given about recent studies on additional compensation features, which jointly with transverse quasi-continuous compensation will make it possible to realise transmission even above 6000 km, for instance with 1500...3000 kV. Studies are foreseen also on cascade-type transformers, on reduction of the overvoltage factor below 1,2...1,3, on the electric strength of great air gaps-with the application of new physical concepts, on the deenergisation of lines by suppression of field of alternators, on a 100% lightning protection, based on new methods of calculations.

Such lines will eliminate difficulties with daily peaks of energy-demand in East-West direction, and difficulties with yearly peaks of energy demand in North-South direction. The Siberia—Poland line would totally eliminate Poland's difficulties with daily peaks. Three possibilities of a line Poland—Sweden are shown: one overland, one with underwater cables and one with overhead lines; the latter two across the Baltic.

There is a discussion of a double, very economical exploitation of Polish coal: underground power stations, secondary utilisation of carbon dioxide for the intensification of horticulture and for the synthetic production of foodstuffs.

In Appendix I there have been studied the distributions of voltage and current along a transmission line with no burden, without compensation, with a continuous coil compensation and with a quasi-continuous coil compensation. Numerical examples correspond to a line length 1500 km with a frequency 50 Hz. The compensation is regarded with two sections and with five sections. The five sections compensation is very efficacions, with voltage variations along the line up to about 10%.

In Appendix II there has been discussed shortly the static stability of the transmission without compensation, with compensation by coils and with compensation by condensers, which are foud to be too costly.

S. SZPOR

IDÉE D'UNE LIGNE DE TRANSPORT D'ÉNERGIE ÉLECTRIQUE AVEC COMPENSATION TRANSVERSALE QUASI-CONTINUE

Résumé

On présente les principes d'une compensation transversale quasi-continue d'une ligne de transport d'énergie de très grande longueur à l'aide des bobines de réactance installées aux intervalles relativement petits, par exemple de 200...500 km. Une telle ligne se caractérise par une grande longueur d'onde. La construction et la puissance réactive des bobines sont discutées. D'autres aspects de ligne de très grande longueur y sont aussi présentés, surtout le facteur de surtension interne, lequel on compte réduire à 1,2...1,3. Les lignes très longues est-ouest serviront à échanger les puissance de pointe. On parle d'une double exploitation du charbon: de l'utilisation additionnelle du CO_2.

Dans l'Appendice I on étudie les répartitions de tensions et de courants le long d'une ligne de transport sans charge, sans compensation transversale, avec une compensation transversale continue et avec une compensation transversale quasi-continue. Les exemples numériques correspondent à une longueur de la ligne de 1500 km à 50 Hz. La compensation quasi-continue est considérée à deux sections et a cinq sections. La compensation à cinq sections est très efficace; elle réduit les changements de la tension le long de la ligne à environ 10%.

Dans l'Appendice II on parle brièvement de la stabilité statique du transport sans compensation, avec compensation par bobines de réactance et avec compensation par condensateurs, laquelle on trouve trop coûteuse.

S. SZPOR

GRUNDSÄTZE FÜR EINE ÜBERTRAGUNGS-FREILEITUNG MIT EINER QUASI-STETER QUERKOMPENSATION

Zusammenfassung

Es wurden die Grundsätze für eine quasi-stete Querkompensation einer sehr langen Übertragungs-Freileitung dargestellt, u.zw. unter Anwendung von Drosselspules in verhältnismäßig kleinen Abständen (z.B. 200...500 km). Eine solche Freileitung wird durch eine große Wellenlänge gekennzeichnet. Konstruktion und induktive Leistung der Drosselspulen werden besprochen, auch andere Aspekte sehr langer Leitungen werden dargelegt, besonders das Problem des Überspannungsfaktors, den man auf den Wert 1,2...1,3 zu verkleinern hofft. Ost-West-Freileitungen werden zum Austausch der Lastspitzen dienen. Man erörtert weiterhin die zweiartige Ausnutzungsmöglichkeit der Kohle, d.h. die zusätzliche Ausnutzung des CO_2.

In der Beilage I werden es Spannungs- und Stromverteilungen längs einer Übertragungs-Freileitung studiert, und zwar ohne Last, ohne Querkompensation, mit einer stetigen Querkompensation und mit einer quasi-stetigen Querkompensation. Zahlenbeispiele entsprechen einer Freileitungslänge von 1500 km und einer Frequenz 50 Hz. Die quasi-stetige Kompensation wird für zwei und fünf Leitungsstücke studiert. Die Kompensation mit fünf Leitungsstücken ist sehr gut; sie begrenzt die Spannungsschwankungen längs der Freileitung auf ungefähr 10%.

In der Beilage II bespricht man kurz die statische Stabilität der Übertragung ohne Kompensation, mit Drosselspulen-Kompensation und mit Kondensatoren-Kompensation, die als zu teuer beurteilt wird.

С. ШПОР

ИДЕИ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ЛИНИИ С ПОПЕРЕЧНОЙ КВАЗИ-НЕПРЕРЫВНОЙ КОМПЕНСАЦИЕЙ

Резюме

Представлены принципы поперечной квази-непрерывной компенсации передаточной линии очень большой длины с применением дросселей расположенных в относительно небольших расстояниях, например 200 ∴ 500 км. Такая линия имеет очень большую длину волны. Обсуждена конструкция и пассивная мощность дросселей. Представлены другие аспекты очень длинных линий, а в частности коэффициент внутреннего перенапряжения, который предполагается уменьшить до 1,2 ... 1,3. Очень длинные линии восток-запад будут применяться для передач пиковых мощностей. Упомянуто о двойном использовании угля- с дополнительным использованием CO_2.

В приложении I исследуются распределения напряжений и токов вдоль передаточной линии без нагрузки, а в частности без поперечной компенсации, с непрерывной поперечной компенсацией и с квази-непрерывной поперечной компенсацией. Численные примеры соответствуют протяженности линии 1500 км при 50 гц. Квази-непрерывная компенсация рассматривается при двух и пяти отрезочном исполнении. Пятиотрезочная компенсация чрезвычайно эффективная — она ограничивает изменения напряжения вдоль линии до около 10%.

В приложении II кратко обсуждается статическая устойчивость передачи без компенсации, с дроссельной компенсацией и с конденсаторной компенсацией, которая оценивается как чрезмерно дорогая.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1978, 24, z. 2, ss. 399 — 414

621.313.2

Opis matematyczny maszyn prądu stałego metodą przestrzeni stanów

JAN PROKOP (RZESZÓW)

Instytut Elektrotechniki Politechniki Rzeszowskiej

Otrzymano 13.1.1977

W pracy przedstawiono ogólny model maszyny prądu stałego oraz opis jego własności dynamicznych metodą zmiennych stanu. Ograniczono się do rozważania zależności zlinearyzowanych dla małych odchyleń. Stwierdzono wyraźną zmienność wartości parametrów modelu zależnie od warunków pracy. Podano transmitancje macierzowe silnika obcowzbudnego i szeregowego prądu stałego.

1. WSTĘP

Podobieństwo budowy wielu odmian maszyn prądu stałego, w tym również wzmacniaczy elektromaszynowych, nasuwa koncepcję jednolitego ich opisu matematycznego, na podstawie którego można by uzyskać szczególne stany pracy wynikające z budowy obwodu elektrycznego i sposobu zasilania. Ogólny model maszyny prądu stałego oraz jego opis matematyczny powinien określać dynamiczne własności maszyny.

Prace dotyczące tego zagadnienia prowadzone są już od przeszło 50 lat począwszy od Doherty'ego i Nicle'a (lata 20-te) przez prace Parka (1929), Krona (1935, 42), Adkinsa (1959), White'a i Woodsona (1959) do Hancocka (1966) [23, 11, 20].

Chociaż znane są rozmaite zbiory równań opisujące modele maszyn prądu stałego o różnym stopniu komplikacji [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 16, 17, 20], autor niniejszej pracy nie spotkał się z próbą syntetycznego ujęcia tego problemu, jedynie zarys podano w [7, 17, 18, 20, 21].

Maszyny prądu stałego są złożonymi układami wielowymiarowymi, których opis matematyczny wyraża się dużą liczbą związków między parametrami zależnymi od nasycenia obwodu magnetycznego, prądów wirowych oraz od podłużnej i poprzecznej reakcji twornika. Ścisłe analityczne uwzględnienie wszystkich wymienionych zjawisk prowadzi do wysokich rzędów równań różniczkowych, których dokładne rozwiązanie nie jest możliwe. W celu uproszczenia układu tych równań przy badaniu stanów nieustalonych stosowanymi dotąd metodami [2, 5, 7], dokonuje się linearyzacji charakterystyki magnesowania przyjmując stałość parametrów oraz czyni szereg innych założeń.

W pracy przedstawiono ogólny model maszyny prądu stałego, oraz jego opis matematyczny w przestrzeni stanu. Przewidując dalsze wzbogacenie przedstawionego modelu oraz w perspektywie zastosowanie maszyn analogowych i cyfrowych opisano dynamikę maszyn prądu stałego równaniami różniczkowymi w przestrzeni stanu.

W celu analitycznego rozwiązania nieliniowych równań stanu zastosowano linearyzację wokół wybranego punktu pracy. Zastosowanie przekształcenia Laplace'a pozwoliło otrzymać transmitancje macierzowe silnika obcowzbudnego i szeregowego prądu stałego.

2. OGÓLNY MODEL MASZYNY PRĄDU STAŁEGO

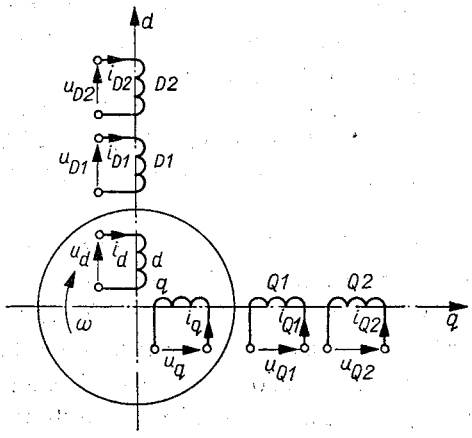
2.1. Równania stanu

Najbardziej ogólną metodą opisu matematycznego układów dynamicznych jest metoda oparta na bezpośrednim wykorzystaniu zasady Hamiltona oraz wywodzących się z niej równań Lagrange'a. Metoda ta, dzięki jej szczególnemu sformalizowaniu, umożliwia jednolite ujmowanie trzech różnych grup układów dynamicznych, układów: mechanicznych, elektrycznych i elektromechanicznych. Ogólne rozważania oparte na zasadzie Hamiltona i równaniach Lagrange'a prowadzą do równań wyjściowych dla dowolnej maszyny prądu stałego, zgodnych z równaniami wynikającymi z modelu maszyny uogólnionej [8, 9]. Dla przypadku ogólnego maszyny prądu stałego o podwójnym układzie szczotek (rys. 1.) i przy zastosowaniu zapisu wektorowo macierzowego w przestrzeni stanu równania te przyjmą postać:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\Psi} = -\mathbf{R}\mathbf{i} - \omega\mathbf{G}\mathbf{i} + \mathbf{u}, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\omega = -\frac{D}{J}\omega + \frac{1}{J}\mathbf{i}^T\mathbf{G}\mathbf{i} + \frac{1}{J}m, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{L}\mathbf{i}. \tag{3}$$



Rys. 1. Ogólny model maszyny prądu stałego

W powyższych równaniach przyjęto oznaczenia:

$\mathbf{u}$ — wektor napięć,

$\mathbf{u} = [u_{D1}, u_{D2}, u_d, u_q, u_{Q1}, u_{Q2}]^T$,

$\mathbf{i}$ — wektor prądów,

$\mathbf{i} = [i_{D1}, i_{D2}, i_d, i_q, i_{Q1}, i_{Q2}]$,