gdzie:

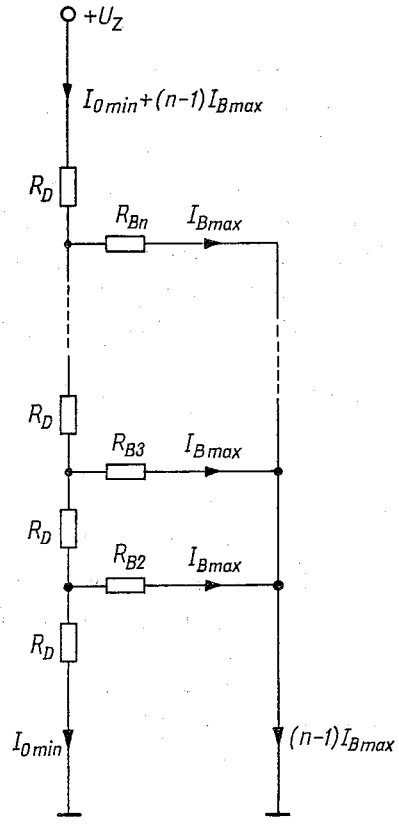
$$k = 2 \div n,$$

$$\left[nI_{Omin} + \frac{1}{2} n(n-1) I_{Bmax}\right] R_D = U_Z, \tag{2}$$

przy czym równanie (2) jest równoważne równaniu:

$$[I_{Omin} + (n-1) I_{Bmax}] R_D + I_{Bmax} R_{Bn} = U_Z,$$

a $(n+1)$-sze równanie otrzymujemy zakładając wartość maksymalnego prądu I_{Omax} płynącego przez rezystory R_D.



Rys. 4. Rozpływ prądów w układzie rezystorów zasilających bazy szeregowo połączonych tranzystorów, gdy tranzystory te znajdują się w stanie nasycenia

Maksymalna wartość I_{Omax} prądu I_O występuje wówczas, gdy tranzystory $T_1 \div T_n$ znajdują się w stanie zatkania ($I_B \simeq 0$). Spadki napięć na rezystorach $R_{B2} \div R_{Bn}$ osiągają wtedy wartość zerową, a spadki napięć na jednakowych rezystorach R_D stają się jednakowe i wynoszą U_Z/n. Wynika stąd $(n+1)$-sze równanie:

$$nI_{Omax} R_D = U_Z. \tag{3}$$

Tok obliczania wartości rezystorów polaryzujących jest następujący. Zakładając wartość I_{Omax} oraz U_Z, obliczamy R_D z równania (3). Następnie z równania (2), przyjmując na podstawie parametrów wykorzystanych we wzmacniaczu tranzystorów wartość nasycającego prądu bazy I_{Bmax}, obliczamy I_{Omin}. Z kolei z równania (1), przyjmując $k = 2$ obliczamy R_{B2}, przyjmując $k = 3$ obliczamy R_{B3} itd.

Ze wzoru (1) dla $n = 10$ wynikają duże wartości rezystorów R_{B9}, R_{B10}. Dlatego łączenie szeregowe więcej niż dziesięciu tranzystorów nie jest wskazane, gdyż wówczas otrzymuje się zbyt duże wartości rezystorów R_{Bn}. Jest to przyczyną silnego wpływu niestałości prądu zerowego kolektora I_{CO} na działanie tranzystorów z takimi rezystorami. Ponadto duża wartość rezystora dołączonego do bazy może stać się przyczyną cieplnego przebicia tranzystora w wyniku wystąpienia niestabilności cieplnej tranzystora (4).

Gdy tranzystory $T_1 \div T_n$ znajdują się w stanie nasycenia, wówczas przez rezystor kolektorowy R_C płynie prąd maksymalny, równy w przybliżeniu:

$$I_{Cn\,max} \simeq \frac{U_Z}{R_C},$$

gdyż spadek napięcia na rezystorze kolektorowym jest wówczas praktycznie równy napięciu zasilania U_Z. Prąd kolektora tranzystora T_1 wynosi wówczas:

$$I_{C1} = I_{C1\,max} = I_{Cn\,max} + (n-1)\, I_{B\,max}.$$

Wynika stąd ograniczenie od dołu dopuszczalnych wartości rezystora kolektorowego R_C. Mianowicie rezystor ten powinien mieć wartość nie mniejszą od tej, przy której $I_{Cn\,max}$ osiąga wartość, której konsekwencją jest $I_{C1\,max}$ mające wartość maksymalnie dopuszczalną $I_{C\,dop}$ dla zastosowanego we wzmacniaczu typu tranzystorów. Wartość rezystancji R_C i prąd w punkcie pracy tranzystorów są również ograniczone dopuszczalną mocą strat zastosowanych tranzystorów.

Dla prądu I_{Cn}, płynącego przez rezystor kolektorowy R_C, prawdziwe jest równanie:

$$I_{Cn} = \beta I_{we} - \sum_{i=2}^{n} I_{Bi},$$

gdzie:

I_{we} — natężenie prądu bazy tranzystora wejściowego T_1,

β — współczynnik wzmocnienia prądowego tranzystora T_1,

I_{Bi} — natężenie prądu bazy i-tego tranzystora w łańcuchu tranzystorów szeregowo połączonych.

Wynika stąd, że układ wzmacniacza pokazany na rys. 2 jest równoważny układowi z jednym tranzystorem o parametrach:

$$\begin{aligned} U'_{CE\,dop} &= nU_{CE\,dop}, \\ \beta' &= \beta - \frac{\sum_{i=2}^{n} I_{Bi}}{I_{we}}, \\ h'_{11e} &\simeq h_{11e}, \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie:

$U_{CE\,dop}$ — maksymalne dopuszczalne napięcie między kolektorem a emiterem dla jednego tranzystora,

$U_{CE\,dop}$ — maksymalne dopuszczalne napięcie między kolektorem a emiterem dla równoważnego tranzystora,

β' — współczynnik wzmocnienia prądowego równoważnego tranzystora; współczynnik ten maleje ze wzrostem ilości tranzystorów połączonych szeregowo,

h_{11e} — element macierzy [h] dla jednego tranzystora w układzie OE,

h'_{11e} — element macierzy [h] dla równoważnego tranzystora w układzie OE.

Zatem ze znanych wzorów na wzmocnienie jednostopniowego wzmacniacza tranzystorowego [4] wynika, że dla wzmacniacza niesymetrycznego, o schemacie jak na rys. 2, wzmocnienie napięciowe wyznaczone jest przez wzór:

$$K_u = \frac{-\beta' R_C}{h_{11e}+\beta' R_e + R_{B1}} \tag{5}$$

przy założeniu, że rezystancja wejściowa układu dołączonego do wyjścia wzmacniacza jest dużo większa od R_C. W przypadku wzmacniacza symetrycznego, o schemacie jak na rys. 1, wzór (5) przyjmuje postać:

$$K_{usym} = \frac{-\beta' R_C}{h_{11e}+0{,}5R_p\beta' + R_{B1}} \tag{6}$$

pod warunkiem, że napięcie wyjściowe mierzone jest na wyjściu symetrycznym, tzn. jest to napięcie $U_{WY1\ WY2}$, oraz że rezystancja wejściowa układu dołączonego do wyjścia symetrycznego jest dużo większa od R_C.

W przypadku, gdy napięcie wyjściowe mierzone jest na wyjściu niesymetrycznym wzmacniacza symetrycznego, o schemacie jak na rys. 1, wzmocnienie napięciowe jest dwukrotnie mniejsze i wynosi:

$$K_{uniesym} = 0{,}5K_{usym}. \tag{7}$$

W przypadku, gdy nie jest spełnione $R_O \gg R_C$, gdzie R_O — rezystancja obciążenia wzmacniacza, wzory (5) i (6) przyjmują postać odpowiednio:

$$K'_u = \frac{K_u}{\frac{R_C}{R_O}+1}, \tag{5a}$$

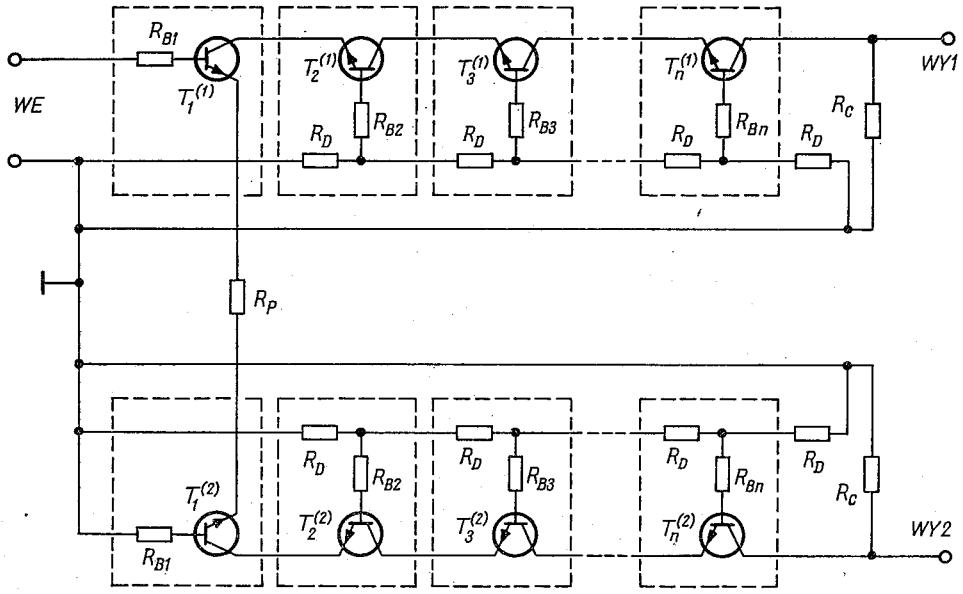
$$K'_{usym} = \frac{K_{usym}}{\frac{2R_C}{R_O}+1}, \tag{6a}$$

gdzie K_u oraz K_{usym} wyznaczone są odpowiednio przez wzory (5) oraz (6).

Wyżej przeprowadzona analiza wartości rezystorów polaryzujących R_D i $R_{B1} \div R_{Bn}$ oraz wartości rezystora kolektorowego R_C wzmacniacza niesymetrycznego (rys. 2) obowiązuje również w przypadku wzmacniacza symetrycznego (rys. 1).

Przeprowadzoną wyżej analizę działania wzmacniacza niesymetrycznego (rys. 2) można wykorzystać w celu wyjaśnienia działania wzmacniacza symetrycznego (rys. 1). Wskazane jest wykorzystanie przy tym układu równoważnego dla składowych zmiennych (dla przyrostów napięć) wzmacniacza symetrycznego (rys. 5).

Źródło napięcia stałego ($-U_{Z2}$) i rezystor R_E (rys. 1) tworzą praktycznie źródło stałoprądowe. W procesie wysterowania wzmacniacza występują małe zmiany napięcia na rezystorze R_E, ale dzięki dużej wartości tego rezystora praktycznie nie powodują one zmian prądu. Wynika stąd, że rezystor R_E stanowi praktycznie przerwę dla składowych zmiennych i dlatego został on w schemacie na rys. 5 pominięty.



Rys. 5. Układ równoważny (dla przyrostów napięć) wzmacniacza o schemacie jak na rys. 1

Z rys. 5 wynika, że tranzystor $T_2^{(1)}$ jest sterowany przez prąd kolektora tranzystora $T_1^{(1)}$. Funkcja tranzystora $T_1^{(1)}$ i sposób działania ramienia wzmacniacza złożonego z tranzystorów $T_1^{(1)} \div T_n^{(1)}$ są analogiczne jak w przypadku wzmacniacza niesymetrycznego (rys. 2). Z rys. 5 wynika również, że napięcie sterujące złącze baza-emiter tranzystora $T_1^{(2)}$ jest przeciwne w fazie w stosunku do napięcia sterującego złącze baza-emiter tranzystora $T_1^{(1)}$. Zatem początkowe tranzystory $T_1^{(1)}$ i $T_1^{(2)}$ obu ramion wzmacniacza symetrycznego (rys. 1, rys. 5) sterowane są przeciwsobnie przez napięcie wejściowe U_{WE}. W konsekwencji, fazy napięć na wyjściach niesymetrycznych wzmacniacza symetrycznego są przeciwne.

Ze względu na sposób sterowania tranzystora $T_1^{(2)}$ przez napięcie wejściowe, działa on jak wzmacniacz w układzie *OB*. Działanie pozostałych elementów ramienia wzmacniacza złożonego z tranzystorów $T_1^{(2)} \div T_n^{(2)}$ jest analogiczne jak w przypadku wzmacniacza niesymetrycznego (rys. 2).

Spadek napięcia na wspólnym rezystorze emiterowym R_E wzmacniacza symetrycznego (rys. 1) równy jest praktycznie napięciu zasilania U_{Z2}. Prąd I_E płynący przez rezystor R_E powinien mieć wartość praktycznie niezależną od stanu wysterowania wzmacniacza, tzn.:

$$I_{e1}^{(1)} + I_{e1}^{(2)} = I_E = \text{const},$$

gdzie $I_{e1}^{(1)}$, $I_{e1}^{(2)}$ — natężenia prądu emitera tranzystora odpowiednio $T_1^{(1)}$ oraz $T_1^{(2)}$.

Warunek:

$$I_E = \text{const}$$

jest praktycznie spełniony przy dużej wartości rezystora R_E. Dlatego napięcie U_{Z2} powinno być również duże, co jest praktycznie spełnione dla:

$$|U_{Z2}| \simeq |U_{Z1}|. \tag{8}$$

Przy maksymalnym wysterowaniu wzmacniacza symetrycznego (rys. 1) i optymalnej, wynikającej z dalszej części analizy, wartości rezystorów kolektorowych R_C jedno ramię wzmacniacza znajduje się w stanie nasycenia (wszystkie tranzystory tego ramienia znajdują się w stanie nasycenia) i jednocześnie drugie w stanie zatkania (wszystkie tranzystory tego ramienia znajdują się w stanie zatkania). Wówczas jest np.

$$I_{e1}^{(1)} \simeq I_E$$

oraz

$$I_{e1}^{(2)} \simeq 0.$$

Wynika stąd, że prąd I_E powinien spełniać zależność:

$$I_E \leqslant I_{edop}, \tag{9}$$

gdzie I_{edop} — maksymalny dopuszczalny prąd emitera zastosowanego we wzmacniaczu typu tranzystorów.

Wartość wspólnego rezystora emiterowego R_E wyznaczona jest przez wzór:

$$R_E = \frac{|U_{Z2}|}{I_E},$$

gdzie U_{Z2} spełnia warunek (8), a I_E spełnia warunek (9).

Przy maksymalnym wysterowaniu wzmacniacza symetrycznego i optymalnej wartości rezystorów kolektorowych R_C spadek napięcia na jednym z rezystorów kolektorowych R_C jest praktycznie równy napięciu zasilania U_{Z1}, a spadek napięcia na drugim rezystorze kolektorowym jest praktycznie równy zeru. Wtedy wartość napięcia na wyjściu symetrycznym wzmacniacza jest maksymalna. Natężenie prądu płynącego przez rezystor kolektorowy, na którym występuje spadek napięcia U_{Z1}, jest wówczas maksymalne i wynosi:

$$I_{Cnmax} = I_E - \sum I_{Bmax} = I_E - (n-1)I_{Bmax} - I_{B1\,max}, \tag{10}$$

gdzie $I_{B1\,max}$ — maksymalne natężenie prądu bazy tranzystora $T_1^{(1)}$ lub $T_1^{(2)}$.

Wartość rezystora kolektorowego R_C jest wyznaczona przez wzór:

$$R_C = \frac{U_{Z1}}{I_{Cnmax}}, \tag{11}$$

gdzie I_{Cnmax} wynika ze wzoru (10), a U_{Z1} spełnia warunek:

$$U_{Z1} \leqslant nU_{CEdop},$$

przy czym wartość U_{Z1} jest również ograniczona przez dopuszczalną moc strat zastosowanych we wzmacniaczu tranzystorów.

Zastosowanie rezystorów kolektorowych R_C o wartości różniącej się od tej, która wynika ze wzoru (11), powoduje zmniejszenie maksymalnego zakresu zmian napięcia wyjściowego wzmacniacza symetrycznego. Jest to zmniejszenie w stosunku do tego zakresu zmian, który wystąpi przy zastosowaniu rezystorów kolektorowych R_C o wartości wyznaczonej przez wzór (11).

Z powyższego wynika, że wzór (11) wyznacza optymalną wartość R_C rezystorów kolektorowych. Przy tej optymalnej wartości maksymalny zakres zmian napięcia wyjściowego na wyjściu symetrycznym wzmacniacza symetrycznego wynosi praktycznie od $-U_{Z1}$ do $+U_{Z1}$. Jest to, przy zadanej wartości napięcia zasilającego U_{Z1}, zakres maksymalny z możliwych do uzyskania.

3. PRZYKŁAD REALIZACJI UKŁADU WZMACNIACZA

Na podstawie wyników przeprowadzonej analizy teoretycznej wzmacniacza, wykorzystującego tranzystory połączone szeregowo, zbudowano wzmacniacz symetryczny o schemacie jak na rys. 1, przy $n = 10$.

We wzmacniaczu tym zastosowano tranzystory typu BF 519, V. Nie zastosowano tranzystorów wysokonapięciowych typu BF 257 lub BF 258 lub BF 259 z powodu małych wartości ich współczynników wzmocnienia prądowego β. Mała wartość współczynnika β powoduje, że ten typ tranzystorów jest nieprzydatny w opisywanym wzmacniaczu, wykorzystującym szeregowe połączenia aż dziesięciu tranzystorów. Nieprzydatność ta wynika z faktu, że zastępczy współczynnik β' wyznaczony przez wzór (4) jest wówczas bardzo mały, czego konsekwencją jest małe wzmocnienie wzmacniacza. Zastosowane we wzmacniaczu tranzystory BF 519, V dobierano parami (np. $T_2^{(1)}$ i $T_2^{(2)}$, $T_3^{(1)}$ i $T_2^{(2)}$, itd.) według wartości współczynnika β.

Przyjęto następujące dane wyjściowe do projektowania wzmacniacza: $U_{Z1} = +450$ V, $U_{Z2} = -450$ V, $I_{O\,max} \simeq 1{,}4$ mA, $I_{B\,max} \simeq 0{,}3$ mA, $I_{B1\,max} \simeq 1$ mA, $I_E = 9$ mA. Przy ustalaniu danych wyjściowych U_{Z1}, $I_{O\,max}$, $I_{B\,max}$, I_E uwzględniono żądany maksymalny zakres zmian napięcia wyjściowego wzmacniacza oraz parametry $U_{CE\,dop}$, $I_{e\,dop}$, $I_{B\,dop}$ zastosowanych tranzystorów typu BF 519 V, a także wymaganie, aby moc strat w układzie rezystorów polaryzujących bazy nie była zbyt duża. Wartość prądu $I_{B1\,max}$ wynikła z warunków współpracy wzmacniacza o dużym zakresie zmian napięcia wyjściowego z poprzedzającym wzmacniaczem sterującym, a wartość napięcia U_{Z2} wynikła z kolei z wymagania, aby rezystor R_E miał dużą rezystancję, zapewniającą dobrą symetryzację układu wzmacniacza.

Na podstawie powyższych danych wyjściowych obliczono i zastosowano rezystory o wartościach podanych w tablicy 1.

Tablica 1

Wartości rezystorów zastosowanych w układzie wzmacniacza o schemacie jak na rys. 1, przy $n = 10$

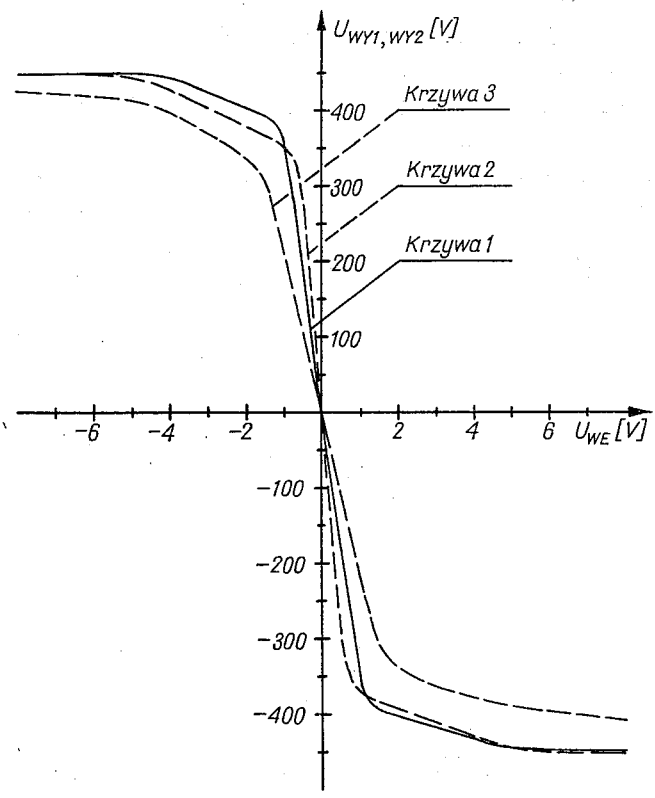
Oznaczenie rezystora	R_{B1}	R_{B2}	R_{B3}	R_{B4}	R_{B5}	R_{B6}	R_{B7}
Wartość rezystancji [kΩ]	4,7	1,5	36	100	200	330	500

Oznaczenie rezystora	R_{B8}	R_{B9}	R_{B10}	R_D	R_P	R_E	R_C
Wartość rezystancji [kΩ]	680	910	1200	33	0,22	50	85

Zastosowany we wzmacniaczu potencjometr R_P pozwala nastawić zerowe napięcie na wyjściu symetrycznym wzmacniacza przy zerowym napięciu na wejściu. Potencjometr ten zapewnia jednocześnie ujemne sprzężenie zwrotne.

Zbadano właściwości zbudowanego w ten sposób wzmacniacza symetrycznego. Stwierdzono, że wzmacniacz wykazuje dobrą odporność na zmiany napięć zasilających. Mianowicie przy zmianie jednego z napięć zasilających w zakresie ± 50 V (tzn. $U_{Z1} = +400$ V $\div$ $+500$ V lub $U_{Z2} = -500$ V $\div$ -400 V) zmiana napięcia na wyjściu symetrycznym wynosi

około 0,5 V. Wynika stąd, że niestałość napięć zasilających wzmacniacz symetryczny nie ma istotnego znaczenia, pod warunkiem wykorzystywania wyjścia symetrycznego. Ponieważ z kolei zasilacze wzmacniacza muszą dostarczać stosunkowo wysokich napięć, zatem małe wymagania odnośnie stałości tych napięć w istotny sposób upraszczają konstrukcję tych zasilaczy. Zasilacze te mogą dostarczać napięć niestabilizowanych.



Rys. 6. Charakterystyka liniowości wzmacniacza o schemacie jak na rys. 1, przy $n = 10$ i napięciach zasilających $U_{Z1} = +450$ V, $U_{Z2} = -450$ V i wyjściu symetrycznym

a) $R_P = 220\ \Omega$ — krzywa *1*,
b) $R_P = 110\ \Omega$ — krzywa *2*,
c) $R_P = 440\ \Omega$ — krzywa *3*

Wyniki badań wzmacniacza symetrycznego ilustrują wykresy na rys. 6÷8. Z rys. 6, krzywa *1*, wynika, że przy napięciu zasilającym $U_{Z1} = +450$ V maksymalny zakres zmian napięcia na wyjściu symetrycznym wynosi od -450 V do $+450$ V, co jest zgodne z przewidywaniami analizy teoretycznej. Natomiast zakres liniowych zmian napięcia na wyjściu symetrycznym wynosi od -350 V do $+350$ V, czyli zakres liniowości wynosi 700 V. Zmierzone wzmocnienie napięciowe w zakresie liniowości wynosi, w przypadku ilustrowanym przez krzywą *1*, około 400, co potwierdza w granicach błędu pomiarowego przewidywania teorii, które zgodnie ze wzorem (6) wyznaczają wzmocnienie:

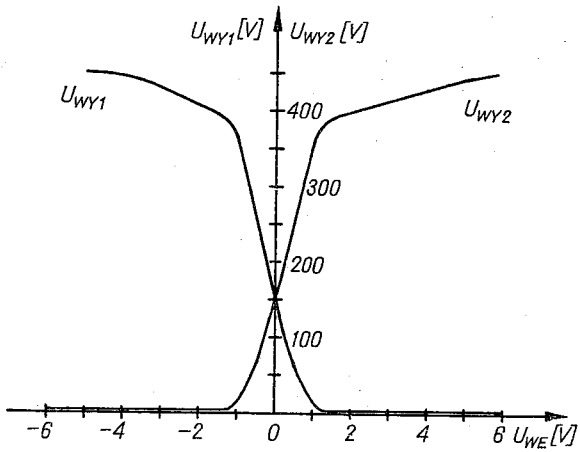
$$K_{u\,sym} \simeq 390,$$

dla $h_{11e} \simeq 1{,}5\ \text{k}\Omega$, $\beta' \simeq 60$, $R_P = 0{,}22\ \text{k}\Omega$, $R_{B1} = 4{,}7\ \text{k}\Omega$, $R_C = 85\ \text{k}\Omega$.

Przebadano wpływ wartości rezystora R_P na wzmocnienie wzmacniacza i jego charakterystykę liniowości. Przy dwukrotnym zmniejszeniu wartości rezystora R_P wzmocnienie napięciowe na wyjściu symetrycznym wzmacniacza wzrosło do wartości około 550; ze wzoru (6) wynika wówczas wzmocnienie napięciowe o wartości 535. Przy dwukrotnie zwiększonej wartości rezystora R_P wzmocnienie napięciowe na wyjściu symetrycznym wzmacniacza zmalało do wartości około 220; ze wzoru (6) wynika wówczas wzmocnienie napięciowe o wartości 250. Charakterystyki liniowości w obu powyższych przypadkach pokazują odpowiednio krzywe *2* i *3*, rys. 6.

Przebadano również charakterystyki liniowości (rys. 7) na obu wyjściach niesymetrycznych wzmacniacza symetrycznego. Zmierzone wzmocnienie napięciowe w zakresie liniowości wynosi w obu przypadkach około 190, jest więc z dokładnością do błędu pomiarowego dwukrotnie mniejsze niż na wyjściu symetrycznym, co potwierdza przewidywania teorii, wzór (7).

Z porównania rys. 6, krzywa *1*, oraz rys. 7 wynika, że wyjście symetryczne charakteryzuje się lepszą liniowością.



Rys. 7. Charakterystyki liniowości na obu wyjściach niesymetrycznych wzmacniacza o schemacie jak na rys. 1, przy $n = 10$ i napięciach zasilających $U_{Z1} = +450$ V, $U_{Z2} = -450$ V, przy czym $R_P = 220\ \Omega$

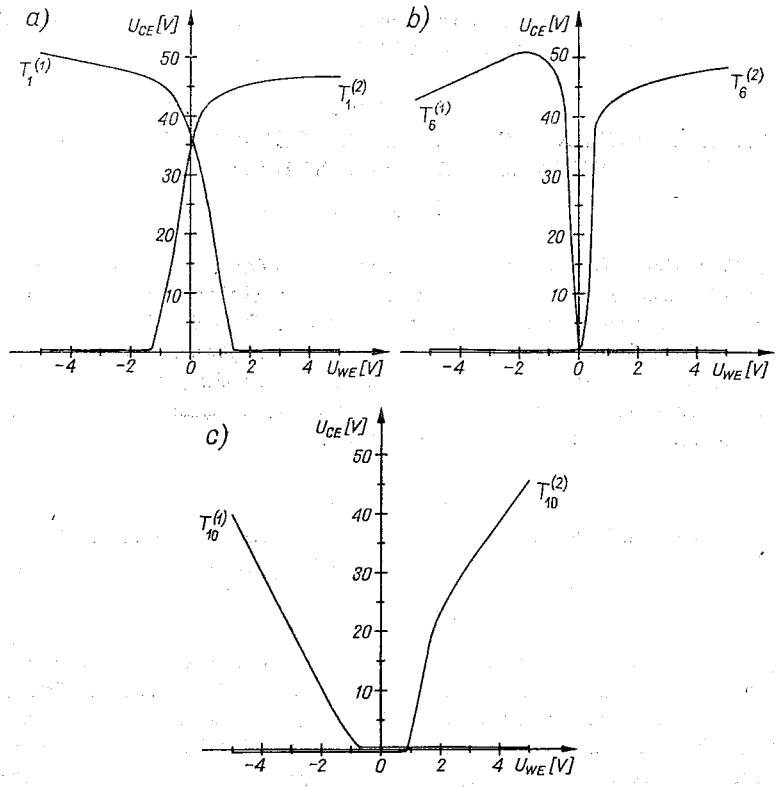
Przebadano następnie charakterystykę liniowości na wyjściu symetrycznym wzmacniacza symetrycznego przy napięciach zasilających podwyższonych do wartości $U_{Z1} = +500$ V, $U_{Z2} = -500$ V, przy czym $R_P = 220\,\Omega$. Jest to charakterystyka o podobnym kształcie jak charakterystyki pokazane na rys. 6. Z badań tych wynika, że zakres liniowości jest w tym przypadku podwyższony i wynosi około 800 V, natomiast wzmocnienie napięciowe nie uległo zmianie w stosunku do przypadku ilustrowanego przez krzywą *1* na rys. 6 i wynosi nadal około 400. Maksymalny zakres zmian napięcia na wyjściu symetrycznym wynosi wtedy od -500 V do $+500$ V, zgodnie z przewidywaniami analizy teoretycznej.

Zostały również przebadane charakterystyki wysterowania poszczególnych tranzystorów, połączonych w szereg we wzmacniaczu symetrycznym, w funkcji napięcia wejściowego U_{WE} sterującego wzmacniacz. Charakterystyki wysterowania tranzystorów $T_1^{(1)}$ i $T_1^{(2)}$, $T_6^{(1)}$ i $T_6^{(2)}$ oraz $T_{10}^{(1)}$ i $T_{10}^{(2)}$ pokazane są odpowiednio na rys. 8-a, b, c. Z charakterystyk

tych wynika, że spadki napięcia U_{CE} między kolektorem i emiterem tych tranzystorów są praktycznie jednakowe; w stanie zatkania danego ramienia wzmacniacza wynoszą one około $U_{Z1}/10$, a w stanie nasycenia wynoszą około 0 V. W pośrednich stanach wysterowania wzmacniacza spadki napięcia U_{CE} praktycznie nie przekraczają wartości $U_{Z1}/10$.

Wyżej opisane wyniki eksperymentalne stanowią potwierdzenie poprawności opracowanej analizy teoretycznej.

Układ wzmacniacza opisany w niniejszej pracy jest opatentowany [5].



Rys. 8. Charakterystyki wysterowania tranzystorów: a) $T_1^{(1)}$ oraz $T_1^{(2)}$, b) $T_6^{(1)}$ oraz $T_6^{(2)}$, c) $T_{10}^{(1)}$ oraz $T_{10}^{(2)}$ wzmacniacza o schemacie jak na rys. 1, przy $n = 10$ oraz napięciach zasilających $U_{Z1} = +450$ V, $U_{Z2} = -450$ V

U_{WE} — napięcie wejściowe wzmacniacza, U_{CE} — napięcie kolektor-emiter

LITERATURA

1. M. Grobelny, *Zarys liniowej teorii układów elektronicznych*, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 1976, wyd. 2, ss. 393—394.
2. E. N. Andrijenko, *K rasčotu schem posledovatelnovo sojedinienija poluprovodnikovych triodov*, Izv. V.U.Z., Radiotechnika, vol. 4, 1961, no. 4, ss. 418—424.
3. L. S. Krypta, *Kettenschaltung von Transistoren zur Erreichung hoher Kollektorspitzenspannung*, Radio und Fernsehen, vol. 14, 1965, no. 10, s. 292.
4. W. Golde, *Wzmacniacze tranzystorowe — małej częstotliwości, — szerokopasmowe, — operacyjne*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1975, wyd. 3.
5. H. Percak, *Wzmacniacz prądu stałego*, Patent PRL Nr 87821.

H. PERCAK

A GREAT OUTPUT-VOLTAGE RANGE TRANSISTOR D.C. AMPLIFIER

Summary

The author presents a theoretical analysis of an asymmetrical d.c. amplifier constructed of *n* in series connected transistors and also a theoretical analysis of a symmetrical d.c. amplifier constructed of two arms, either one consisting of *n* in series connected transistors.

Some design formulas for such types of amplifiers have been developed. An example of theoretical analysis application to concrete construction of a symmetrical amplifier is described, too. Maximum output-voltage range of the amplifier constructed amounts to about 1000 volts on symmetrical output and voltage amplification factor amounts to about 400 V/V.

H. PERCAK

AMPLIFICATEUR À COURANT CONTINU À TRANSISTORS À LARGE ÉTENDUE DE VARIATIONS DE TENSION DE SORTIE

Résumé

On a présenté l'analyse théorique du fonctionnement de l'amplificateur asymétrique à courant continu, composé de *n* transistors couplés en série, et de l'amplificateur symétrique à courant continu, à deux branches dont chacune se compose de *n* transistors couplés en série. On a déduit les formules indispensables pour l'établissement du projet de pareils amplificateurs. On a donné l'exemple de l'application de l'analyse théorique à la réalisation du circuit concret de l'amplificateur symétrique. L'amplificateur ainsi conçu garantit une étendue maximale de variations de tension de sortie, atteignant environ 1000 V à la sortie symétrique et une amplification de tension à peu près 400 V/V.

H. PERCAK

TRANSISTOR-GLEICHSTROMVERSTÄRKER MIT GROßEM AUSGANGSSPANNUNGSBEREICH

Zusammenfassung

Es wurde eine theoretische Analyse des unsymmetrischen und symmetrischen Gleichstromverstärkers dargestellt. Der unsymmetrische Gleichstromverstärker besteht aus *n* Transistoren in Kettenschaltung. Der symmetrische Gleichstromverstärker wurde als eine Schaltung mit zwei Armen gebaut, von den sich jeder aus *n* Transistoren in Kettenverbindung zusammensetzt. Formeln für die Projektierung dieser Verstärker wurden angegeben. Es wurde auch ein Beispiel für die Anwendung der theoretischen Analyse bei einer konkreten symmetrischen Verstärkerkonstruktion angeführt. Der maximale Ausgangsspannungsbereich des konstruierten Verstärkers beträgt etwa 1000 V und die Spannungsverstärkung — etwa 400 V/V.

Г. ПЕРЦАК

ТРАНЗИСТОРНЫЙ УСИЛИТЕЛЬ ПОСТОЯННОГО ТОКА С БОЛЬШИМ ДИАПАЗОНОМ ИЗМЕНЕНИЙ ВЫХОДНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Резюме

Представлен теоретический анализ несимметрического усилителя постоянного тока, построенного из *n* транзисторов, соединенных последовательно, а также теоретический анализ симметрического усилителя постоянного тока, с двумя плечами, из которых каждое состоит из *n* транзисторов, соединенных последовательно. Выведены формулы необходимые при проектировании таких усилителей. Описан пример применения теоретического анализа к осуществлению конкретной схемы симметрического усилителя. Построенный усилитель гарантирует максимальный диапазон изменений выходного напряжения порядка 1000 V и усиление напряжения порядка 400.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1978, 24, z. 3, ss. 611—625

621.313.2

Zbiory linii pierwiastkowych jako narzędzie badania i projektowania dynamiki układów z silnikami prądu stałego

STANISŁAW URBAŃSKI (WARSZAWA)

Instytut Elektrotechniki Politechniki Białostockiej

Otrzymano 15.3.1977

W artykule omówiono możliwości rozszerzenia metody linii pierwiastkowych Evansa w analizie i syntezie układów automatycznej regulacji. Zaproponowano posługiwanie się zbiorami („siatkami") linii pierwiastkowych pokazujących wpływ zmian różnych parametrów układów na ich dynamikę. Zagadnienie przedstawiono na przykładzie układu z ujemnym sprzężeniem zwrotnym techometrycznym, z silnikiem prądu stałego i ze sztywnym lub sprężystym połączeniem mechanicznym.

1. WSTĘP

Wśród metod analitycznego badania dynamiki liniowych układów elektromechanicznych (m.i. układów napędu elektrycznego) poczesne miejsce zajmuje metoda linii pierwiastkowych, zaproponowana przez Evansa w 1948 roku [1], [2]. Linie pierwiastkowe, tak jak je zdefiniował autor tej metody, są to miejsca geometryczne zmian położeń (na płaszczyźnie zmiennej zespolonej s) pierwiastków równania charakterystycznego układu zamkniętego, przy zmianach wartości współczynnika wzmocnienia K w pętli.

Metodę tę można jednakże rozszerzyć. Można mianowicie określać zmiany położeń pierwiastków równania charakterystycznego układu, zarówno zamkniętego jak i otwartego, w zależności od zmian także i innych parametrów. Jeśli równanie charakterystyczne układu przepiszemy w postaci

$$M_1(s)+P_1 L_1(s) = 0, \tag{1}$$

a następnie

$$1+P_1\frac{L_1(s)}{M_1(s)} = 0, \tag{2}$$

to uchwycimy wpływ interesującego nas parametru, $P_1 = \text{var}$, na położenia pierwiastków równania (1).

Jako parametr P_1 możemy przyjąć wspomniany wyżej współczynnik wzmocnienia K, ale możemy też przyjąć np. jedną ze stałych czasowych, współczynnik wzmocnienia wybranego elementu, inny współczynnik charakteryzujący daną część układu, etc. Gdy $P_1 = K = \text{var}$, to wyrażenie $L_1(s)/M_1(s)$ jest transmitancją układu w stanie otwartym. Gdy

przez P_1 ma być reprezentowany inny parametr, to wyrażenie $L_1(s)/M_1(s)$ wyobrazić możemy sobie jako transmitancję układu otwartego, złożonego z tych samych elementów podstawowych lecz inaczej połączonych.

Dla równań (1) i (2) możemy napisać:

$$L_1(s) = M_2(s)+P_2 L_2(s) \tag{3}$$

oraz

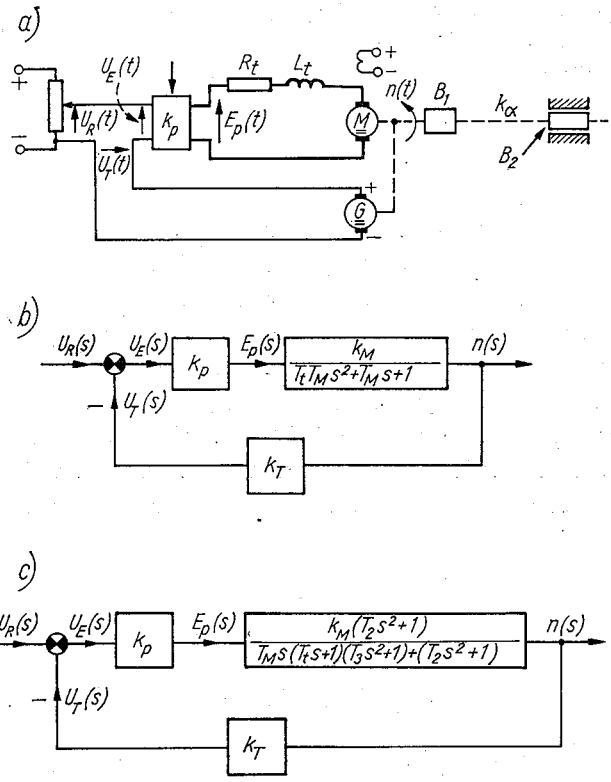
$$M_1(s) = M_3(s)+P_3 L_3(s), \tag{4}$$

lub

$$1+P_2\frac{L_2(s)}{M_2(s)} = 0 \tag{5}$$

oraz

$$1+P_3\frac{L_3(s)}{M_3(s)} = 0. \tag{6}$$



Rys. 1. Układ z ujemnym sprzężeniem zwrotnym techometrycznym z silnikiem prądu stałego i zasilaczem bezinercyjnym (k_P)

a) schemat ideowy, b) schemat blokowy dla przypadku układu sztywnego ($k_\alpha = \infty$), c) j.w., dla przypadku układu sprężystego ($0 < k_\alpha < \infty$); k_α — współczynnik sprężystości skrętnej połączenia mechanicznego między wałkiem silnika i mechanizmem napędzanym, B_1, B_2 — współczynniki reprezentujące bezwładności mechaniczne części ruchomych odpowiednio przed i za połączeniem sprężystym

Na podstawie (5) i (6) możemy wyznaczyć miejsca geometryczne pierwiastków wielomianów $L_1(s)$ i $M_1(s)$, w zależności od zmian interesujących nas parametrów P_2 i P_3. Podobnie możemy postąpić z wielomianami $L_2(s)$, $M_2(s)$, $L_3(s)$, $M_3(s)$, etc. Ten sposób postępowania jest szczególnie korzystny, gdy $L_1(s)$ i $M_1(s)$ są wielomianami wysokich stopni, przechodzi się bowiem wtedy kolejno do wielomianów coraz niższych stopni. W wyniku takiego przedstawienia wpływu zmian pewnej liczby parametrów $P_1, P_2, P_3, \ldots$, tzn. w wyniku wykorzystania pewnej liczby zależności o postaci (2), (5), (6), powstaje dla badanego układu zbiór linii pierwiastkowych. Zbiór ów wykaże „obszary" („kontury"), w których spodziewać się powinniśmy występowania pierwiastków równania charakterystycznego, przy z góry przewidywanych lub prawdopodobnych zmianach wartości jego parametrów. Obszary te nazwijmy *obszarami pierwiastków układu*. Niekiedy bywa tak, że zbiory linii pierwiastkowych układu wyglądem swym przypominają siatki. Dlatego to można je wtedy nieco bardziej sugestywnie nazywać *siatkami linii pierwiastkowych*.

Rozważmy zbiory linii pierwiastkowych dla obcowzbudnego silnika prądu stałego, a następnie — dla układu z ujemnym sprzężeniem zwrotnym tachometrycznym, z silnikiem owym w roli członu wykonawczego (rys. 1).

2. PRZYPADEK IDEALNIE SZTYWNEGO POŁĄCZENIA WAŁKA SILNIKA Z MECHANIZMEM NAPĘDZANYM (WSPÓŁCZYNNIK SPRĘŻYSTOŚCI SKRĘTNEJ POŁĄCZENIA MECHANICZNEGO $k_\alpha = \infty$, RYS. 1b)

Równanie charakterystyczne silnika, a w przypadku bezinercyjnego jego zasilacza (k_p) całego układu „sztywnego" w stanie otwartym [3], ma postać

$$T_M s(T_t s+1)+1 = T_t T_M s^2 + T_M s + 1 = T_t T_M (s-p_{s1})(s-p_{s2}) = 0, \tag{7}$$

przy czym

$T_t = \dfrac{L_t}{R_t}$ — stała czasowa elektromagnetyczna obwodu twornikowego,

$T_M = b(B_1+B_2)$ — stała czasowa elektromechaniczna całego ruchomego układu mechanicznego,

b — współczynnik pochylenia charakterystyki mechanicznej silnika.

Przepisując (7) w postaci (2) otrzymujemy:

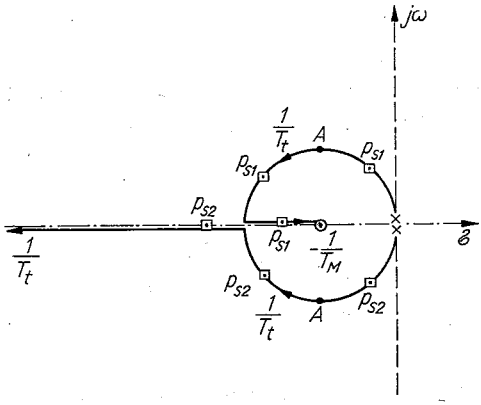
— dla $P_1 = \dfrac{1}{T_t} = \text{var}$

$$1+\frac{1}{T_s}\frac{\left(s+\dfrac{1}{T_M}\right)}{s^2} = 0, \tag{8}$$

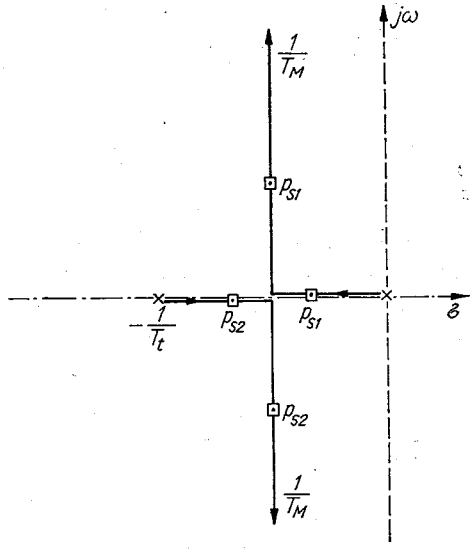
— dla $P_1 = \dfrac{1}{T_M} = \text{var}$

$$1+\frac{1}{T_M}\frac{1}{T_t}\frac{1}{s\left(s+\dfrac{1}{T_t}\right)} = 0. \tag{9}$$

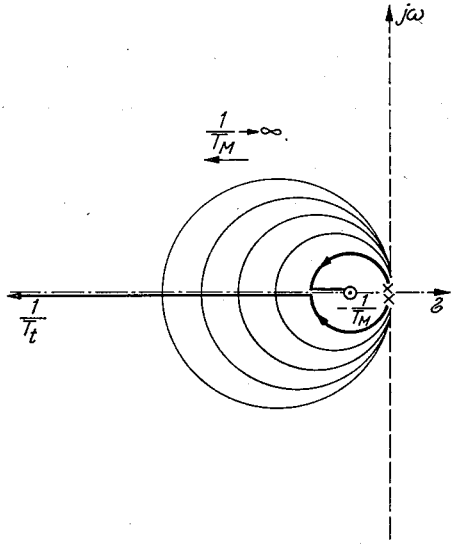
Na podstawie (8) wyznaczamy miejsca geometryczne położeń p_{s1}, p_{s2} przy zmianach T_t i przy $T_M = \text{const}$ (rys. 2), a na podstawie (9) — przy zmianach T_M i przy $T_t = \text{const}$ (rys. 3). Przy $T_t > \frac{T_M}{4}$ gałęzie linii pierwiastkowych na rys. 2 stają się półokręgami z środkiem w punkcie $s = -1/T_M$ i o promieniu $1/T_M$, a gałęzie linii pierwiastkowych na rys. 3 — prostymi równoległymi do osi urojonej.



Rys. 2. Linie pierwiastkowe (p_{s1}, p_{s2}) układu sztywnego otwartego z rys. 1b, przy $T_t = \text{var}$, $T_M = \text{const}$

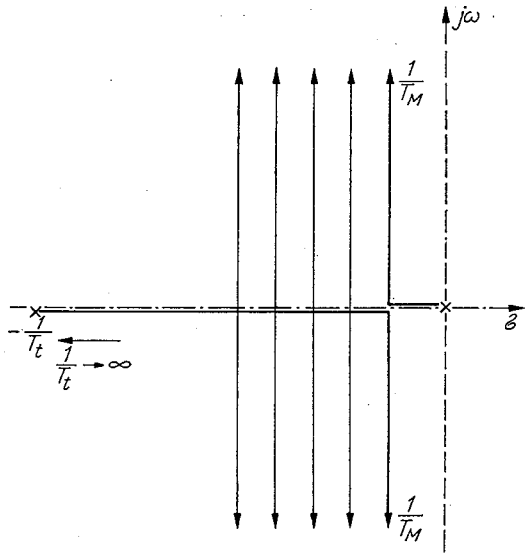


Rys. 3. Linie pierwiastkowe (p_{s1}, p_{s2}) układu sztywnego otwartego z rys. 1b, przy $T_M = \text{var}$, $T_t = \text{const}$

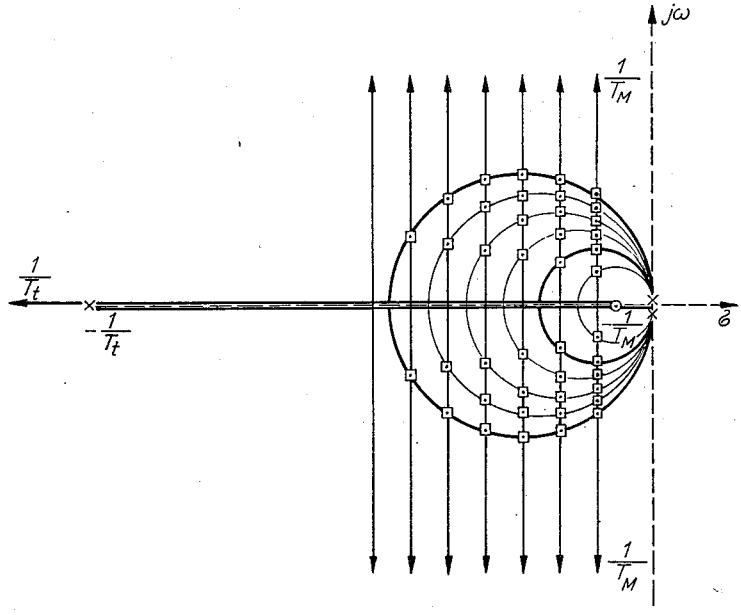


Rys. 4. Zbiór linii pierwiastkowych (p_{s1}, p_{s2}) układu sztywnego otwartego z rys. 1b, przy $T_t = \text{var}$ i przy różnych wartościach T_M

Przy $T_M \to 0$ półokręgi na rys. 2 mają coraz większą średnicę (rys. 4). Przy $T_t \to 0$, prosta równoległa do osi $j\omega$ na rys. 3 coraz bardziej się od niej oddala (rys. 5). Nakładając rys. 4 i 5 na siebie otrzymujemy siatkę linii pierwiastkowych dla transmitancji silnika (rys. 6). Łatwo z niej odczytujemy wartości pierwiastków równania charakterystycznego (biegunów

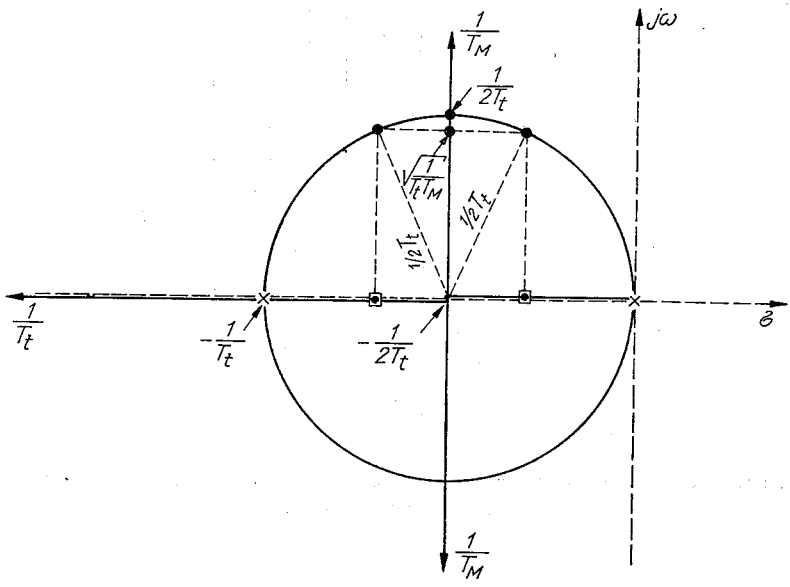


Rys. 5. Zbiór linii pierwiastkowych (p_{s1}, p_{s2}) układu sztywnego otwartego z rys. 1b, przy T_M = var i przy różnych wartościach T_t



Rys. 6. Siatka linii pierwiastkowych (p_{s1}, p_{s2}) układu sztywnego otwartego z rys. 1b, przy T_t = var i T_M = var

transmitancji) silnika. Przy $T_t < \frac{T_M}{4}$, kiedy to bieguny te powinny mieć wartości rzeczywiste, korzystamy z konstrukcji geometrycznej przedstawionej na rys. 7. Przy $T_t > \frac{T_M}{4}$, kiedy to powinny mieć one wartości zespolone sprzężone, odczytujemy je w punktach przecięcia odpowiednich okręgów z odpowiednimi prostymi.



Rys. 7. Konstrukcja geometryczna dla wyznaczenia wartości p_{s1} i p_{s2} przy $T_t < T_M/4$

Równanie charakterystyczne układu sztywnego w stanie zamkniętym (rys. 1b) ma postać

$$T_t T_M s^2 + T_M s + 1 + K = T_t T_M (s - p_{sz1})(s - p_{sz2}) = 0, \tag{10}$$

przy czym

$$K = k_p k_M k_T. \tag{11}$$

Przepisując (10) w postaci (2) otrzymujemy:

— dla $P_1 = \frac{1}{T_t} = \text{var}$

$$1 + \frac{1}{T_t} \frac{\left(s + \frac{1+K}{T_M}\right)}{s^2} = 0, \tag{12}$$

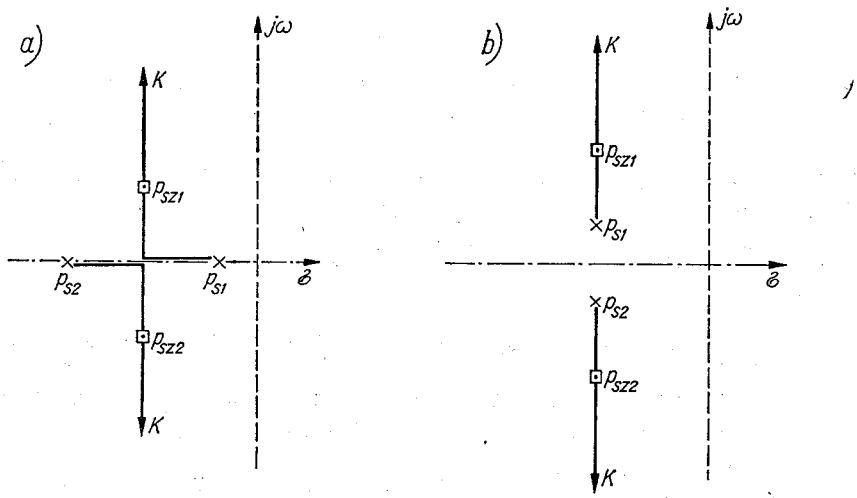
— dla $P_1 = \frac{1}{T_M} = \text{var}$

$$1 + \frac{(1+K)}{T_M} \frac{1}{T_t} \frac{1}{s\left(s + \frac{1}{T_t}\right)} = 0. \tag{13}$$

W celu utworzenia „obrazu dynamiki" rozważanego układu zamkniętego, korzystać możemy z siatki linii pierwiastkowych dla układu otwartego (rys. 6) z tym samym silnikiem, albowiem układ zamknięty z rys. 1b jest, tak jak układ otwarty, układem inercyjnym drugiego rzędu. Musimy siatkę tę jedynie przeskalować w stosunku $(1+K)$ z uwagi na to, że w wyrażeniach (12) i (13) występuje wyraz $(1+K)/T_M$ zamiast $1/T_M$, występującego w (8) i (9). Wynik przeskalowania pokazują konwencjonalne linie pierwiastkowe, dla $P_1 = K =$ = var i T_t, T_M — const, opracowane na podstawie zależności

$$1+K\frac{1}{T_t T_M s^2+T_M s+1} = 1+K\frac{1}{T_t T_M}\frac{1}{(s-p_{s1})(s-p_{s2})} = 0 \tag{14}$$

i przedstawione na rysunku 8.



Rys. 8. Konwencjonalne linie pierwiastkowe (p_{sz1}, p_{sz2}) układu sztywnego zamkniętego z rys. 1b, przy K = var i przy T_s, T_M = const
a) p_{s1}, p_{s2} rzeczywiste, b) p_{s1}, p_{s2} zespolone sprzężone

Na rysunkach od 2 do 8 otrzymaliśmy obraz dynamiki układu. Szczególnie istotne wnioski wynikają z rys. od 4 do 6:

— przy określonej wartości T_t = const i $T_M \to 0$ (rys. 3) odpowiedź $n(t)$ silnika staje się coraz bardziej oscylacyjna, przy czym czas trwania stanu nieustalonego pozostaje stały; albowiem, jak wynika z rys. 3, części rzeczywiste biegunów p_{s1} i p_{s2} pozostają stałe przy $4T_t > T_M$; w teoretycznie wyimaginowanym przypadku $T_M = 0$, silnik staje się członem proporcjonalnym;

— przy T_t = const i $T_M \to \infty$ silnik staje się nieidealnym elementem całkującym;

— przy T_M = const i rosnącym T_t odpowiedź silnika osiąga maksimum częstotliwości oscylacji (punkt A na rys. 2), a następnie, przy $T_t \to \infty$, staje się mniej oscylacyjna lecz coraz powolniejsza; w teoretycznym przypadku $T_t = \infty$, silnik staje się elementem całkującym idealnym 2-go rzędu; położenia biegunów p_{sz1}, p_{sz2} transmitancji układu zamkniętego mało się różnią od położeń biegunów p_{s1}, p_{s2} transmitancji układu otwartego; zarówno p_{sz1}, p_{sz2} jak i p_{s1}, p_{s2} „zdążają" po półokręgach do punktu $s = 0$; oznacza to, że przez powiększenie indukcyjności L_t w obwodzie twornikowym można

przy żądanej dużej wartości K uniknąć, dla biegunów p_{sz1}, p_{sz2}, położeń o współrzędnych urojonych $\pm j\omega$, niepożądanych ze względu na ewentualne periodyczne wahania momentu obciążającego, o pulsacji ω [5]: wynikająca z zastosowania takiego zabiegu powolność odpowiedzi układu na owe periodyczne wahania jest zjawiskiem pożądanym, gdy układ ten ma być użyty jako układ automatycznej stabilizacji prędkości; okoliczności te nie wychodzą na jaw tak dobitnie przy innych metodach analizy układów;

— przy $T_M = \text{const}$ i $T_t \to 0$ silnik staje się członem inercyjnym pierwszego rzędu, co jest oczywiste.

Dla spotykanych w praktyce wartości T_t i T_M odpowiadające im położenia p_{s1}, p_{s2} lub p_{sz1}, p_{sz2} odczytujemy z siatki na rys. 6 i za pomocą prostych wzorów, opracowanych w innych publikacjach (np. w [4]), określamy wskaźniki odpowiedzi $n(t)$ silnika.

3. PRZYPADEK NIEIDEALNIE SZTYWNEGO POŁĄCZENIA WAŁKA SILNIKA Z MECHANIZMEM NAPĘDZANYM ($0 < k < \infty$, RYS. 1c)

Podobnie jak w przypadku 1, równanie charakterystyczne silnika lub układu „sprężystego" w stanie otwartym [4], [5] ma postać:

$$T_M s(T_t s+1)(T_3 s^2+1)+(T_2 s^2+1) = T_t T_M T_3(s-p_{E1})(s-p_{E2})(s-p_{E3})(s-p_{E4}) = 0, \quad (15)$$

przy czym:

$T_2 = \dfrac{B_2}{k_\alpha}$ — syntetyczny współczynnik reprezentujący stopień sztywności wymienionego połączenia i bezwładność mechaniczną części ruchomych za połączeniem sprężystym, zredukowaną do prędkości wałka silnika,

$T_3 = \dfrac{1}{k_\alpha}\dfrac{B_1 B_2}{(B_1+B_2)} = T_2 \dfrac{B_1}{(B_1+B_2)}$ — syntetyczny współczynnik, ujmujący wpływ różnicy wartości B_1 i B_2.

Przepisując równanie (15) w postaci (2) otrzymujemy dla $P_1 = \dfrac{1}{T_t} = \text{var}$:

$$1+\frac{1}{T_t}\frac{1}{T_M}\frac{T_M T_3 s^3+T_2 s^2+T_M s+1}{s^2(T_3 s^2+1)} = 0. \quad (16)$$

Wyznaczamy pierwiastki z_{11}, z_{12}, z_{13} wielomianu

$$T_M T_3 s^3+T_2 s^2+T_M s+1 = T_M T_3(s-z_{11})(s-z_{12})(s-z_{13}), \quad (17)$$

występującego w (16).

Przyrównując (17) do zera i przepisując otrzymane w ten sposób równanie w postaci (2) otrzymujemy dla $P_2 = \dfrac{1}{B_1} = \text{var}$:

$$1+\frac{1}{B_1}\frac{1}{b}\frac{\left(\dfrac{B_2}{k_\alpha}s^2+B_2 bs+1\right)}{s\left(\dfrac{B_2}{k_\alpha}s^2+1\right)} = 0. \quad (18)$$

Wyznaczamy pierwiastki z_{21}, z_{22} wielomianu

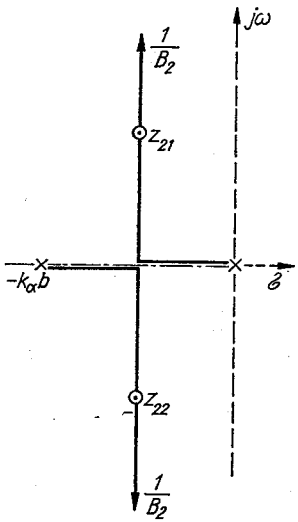
$$\frac{B_2}{k_\alpha}s^2+b_2bs+1 = \frac{B_2}{k_\alpha}(s-z_{21})(s-z_{22}), \tag{19}$$

występującego w (18).

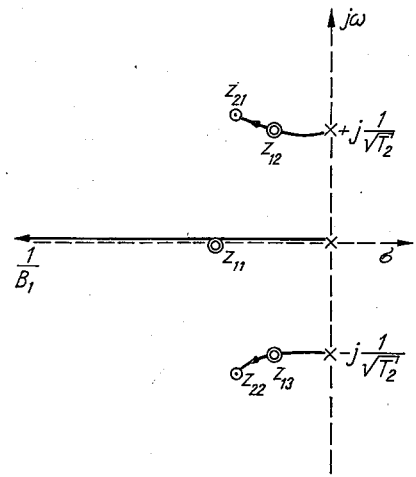
Przyrównując (19) do zera i przepisując otrzymane w ten sposób równanie w postaci (2) otrzymujemy dla $P_3 = \dfrac{1}{B_2} = \text{var}$:

$$1+\frac{k_\alpha}{B_2}\frac{1}{s(s+k_\alpha b)} = 0. \tag{20}$$

Na podstawie (20) wyznaczamy miejsca geometryczne położeń z_{21}, z_{22} w (19), przy zmianach $1/B_2$ i przy $k_\alpha = \text{const}$ (rys. 9). Mając z_{12}, z_{22} przy danej wartości B_2, wyznaczamy na podstawie (18) miejsca geometryczne położeń z_{11}, z_{12}, z_{13} w (17), przy zmianach $1/B_1$ i przy $k_\alpha = \text{const}$ (rys. 10). Mając z_{11}, z_{12}, z_{13} przy danej wartości B_1, wyznaczamy na podstawie (16) miejsca geometryczne położeń $p_{E1}, p_{E2}, p_{E3}, p_{E4}$ w (15) przy zmianach

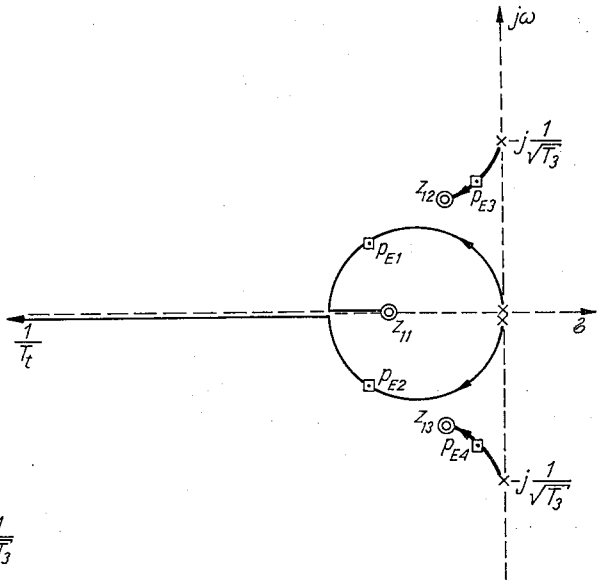


Rys. 9. Miejsce geometryczne położeń z_{21}, z_{22} w (19)

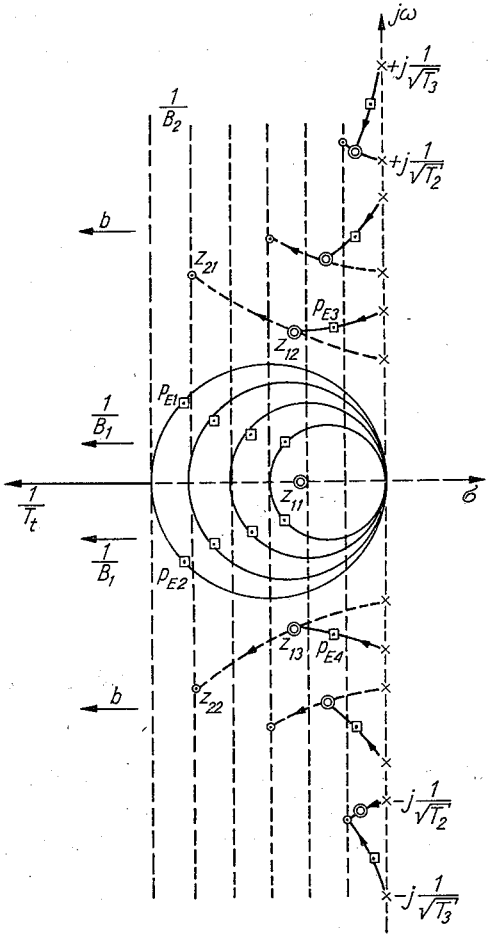


Rys. 10. Miejsce geometryczne położeń z_{11}, z_{12}, z_{13} w (17)

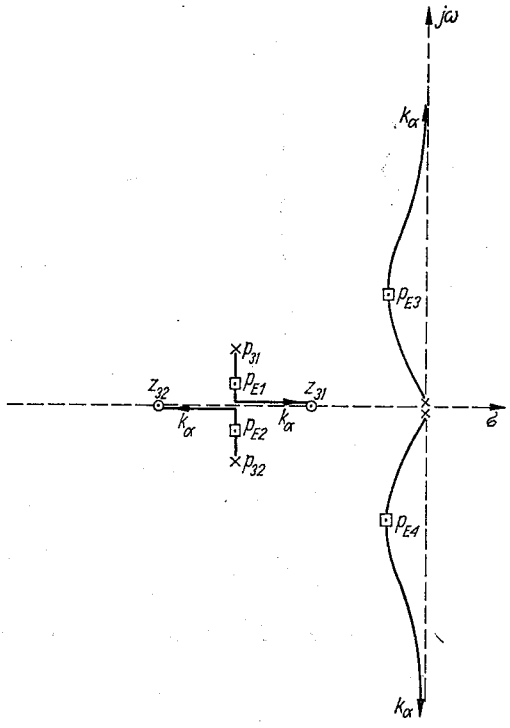
$1/T_t$ i przy $k_\alpha = \text{const}$ (rys. 11). Linie pierwiastkowe na rysunku 11 przypominają swym kształtem linie z rysunku 2 (dla $k_\alpha = \infty$), z tą różnicą, że gałęzie obejmujące zero w $s = -z_{11}$ nie są już półokręgami lecz krzywymi czwartego stopnia. Ponadto, występują w tym przypadku gałęzie zaczynające się w biegunach tj $\dfrac{1}{\sqrt{T_3}}$ i $-j\dfrac{1}{\sqrt{T_3}}$ a kończące się na zerach z_{12} i z_{13}, położonych tym bliżej osi urojonej, im większą wartość ma B_1. Linie z rys. 9, 10, 11 zestawione są w zbiór na rys. 12. Przepisując równanie (15) w postaci (2) otrzymujemy dla $P_1 = k_\alpha = \text{var}$:



Rys. 11. Miejsce geometryczne położeń $p_{E1}, p_{E2}, p_{E3}, p_{E4}$ w (15)



Rys. 12. Zbiór linii pierwiastkowych dla układu sprężystego z rys. 1c, zestawiony według rys. 9, 10, 11



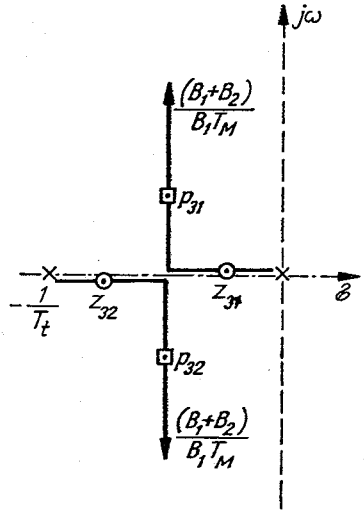
Rys. 13. Miejsce geometryczne położeń $p_{E1}, p_{E2}, p_{E3}, p_{E4}$ w (15), przy k_α = var

$$1+k_\alpha \frac{(B_1+B_2)}{B_1 B_2} \frac{\left(s^2+\frac{1}{T_t}s+\frac{1}{T_t T_M}\right)}{s^2\left(s^2+\frac{1}{T_t}s+\frac{(B_1+B_2)}{B_1}\frac{1}{T_t T_M}\right)} =$$

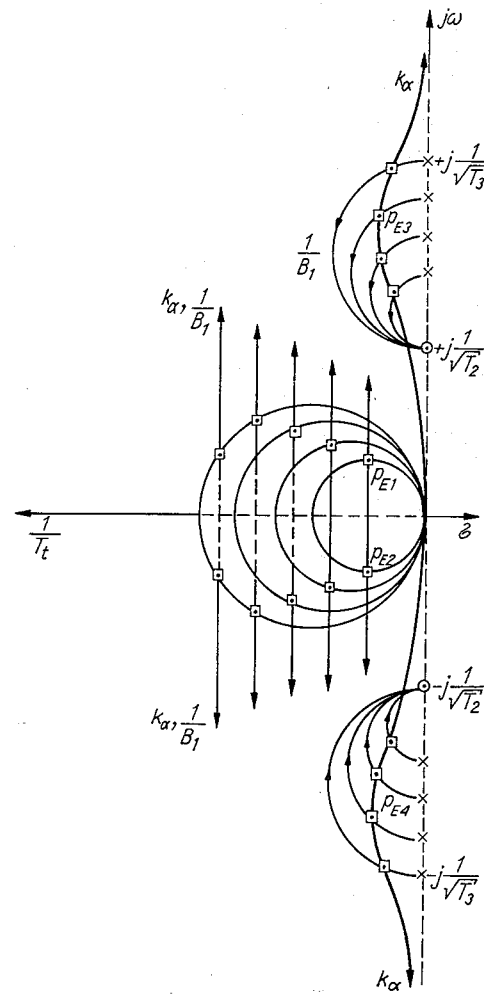
$$= 1+k_\alpha \frac{(B_1+B_2)}{B_1 B_2} \frac{(s-z_{31})(s-z_{32})}{s^2(s-p_{31})(s-p_{32})} = 0. \tag{21}$$

Na podstawie (21) wyznaczamy miejsce geometryczne położeń pierwiastków (15) przy zmianach k_α i przy stałych wartościach wszystkich innych parametrów. Otrzymujemy linie takie, jak np. na rys. 13 — dla konkretnych wartości T_t, B_1, B_2.

Per analogiam z zależnością (9) i rys. 3 możemy wyznaczyć miejsca geometryczne pierwiastków z_{31}, z_{32} licznika i p_{31}, p_{32} mianownika ułamka po lewej stronie (21), przy T_t = const i B_1, B_2 = var. Otrzymujemy wykres, jak np. na rys. 14. W rezultacie opracować możemy dla układu z połączeniem sprężystym siatkę, przedstawioną na rys. 15.



Rys. 14. Wykres pomocniczy do rys. 15



Rys. 15. Siatka linii pierwiastkowych dla układu sprężystego z rys. 1c, przy k_α = var, $B_1 B_2$ = var, T_t = var

Do omawianego zagadnienia możemy podejść także w inny sposób. Możemy mianowicie — dla scharakteryzowania badanego układu — sformułować „zintegrowany" parametr $P_1 = T_2/T_t T_M T_3 = \text{var}$. Przepisując równanie (15) w postaci (2) otrzymujemy wówczas

$$1+\frac{T_2}{T_t T_M T_3}\,\frac{1}{s\left(s+\dfrac{1}{T_t}\right)}\,\frac{(s-z_{E1})(s-z_{E2})}{(s-z_{E3})(s-z_{E4})}=0, \tag{22}$$

przy czym:

$$z_{E1}=+j\frac{1}{\sqrt{T_2}},\quad z_{E2}=-j\frac{1}{\sqrt{T_2}},$$
$$z_{E3}=+j\frac{1}{\sqrt{T_3}},\quad z_{E4}=-j\frac{1}{\sqrt{T_3}}.$$

W owym zintegrowanym parametrze możemy przyjąć $1/T_t = \text{const}$ i $T_2/T_M T_3 = \text{var}$. Otrzymamy wtedy wykres linii pierwiastkowych, przedstawiony na rys. 16.

Rzecz charakterystyczna, w parametrze $P_1 = T_2/T_t T_M T_3 = 1/bT_t B_1 = \text{const}/B_1$ nie występuje współczynnik B_2, reprezentujący bezwładność mechaniczną elementów za połączeniem sprężystym. Zmiany jego wartości odzwierciedlane są tylko przez zmiany położeń zer z_{E1} i z_{E2}.

Na rys. 16 przedstawione są trzy możliwe kształty linii pierwiastkowych, opracowanych według (22). Najprawdopodobniejszy dla wielu sytuacji spotykanych w urządzeniach przemysłowych jest kształt (*a*). Nakładając na siebie wykresy z rys. 11 i 16a otrzymujemy na rys. 17 siatkę linii pierwiastkowych układu, nieco inną niż na rys. 15. Siatka na rys. 17 jest prostsza i w wielu przypadkach praktyczniejsza niż wersja z rys. 15, zwłaszcza wtedy, gdy $B_2 \ll B_1$, a zdarza się to w wielu urządzeniach.

Siatki linii pierwiastkowych dla układu zamkniętego (rys. 1c) ze sprężystym połączeniem mechanicznym są w kształcie podobne do siatek dla układu otwartego, lecz powinny one być „przeskalowane" w stosunku $1/(1+K)$. Wynika to z równania charakterystycznego układu zamkniętego

$$T_M s(T_t s+1)(T_3 s^2+1)+(T_2 s^2+1)(1+K)=0 \tag{23}$$

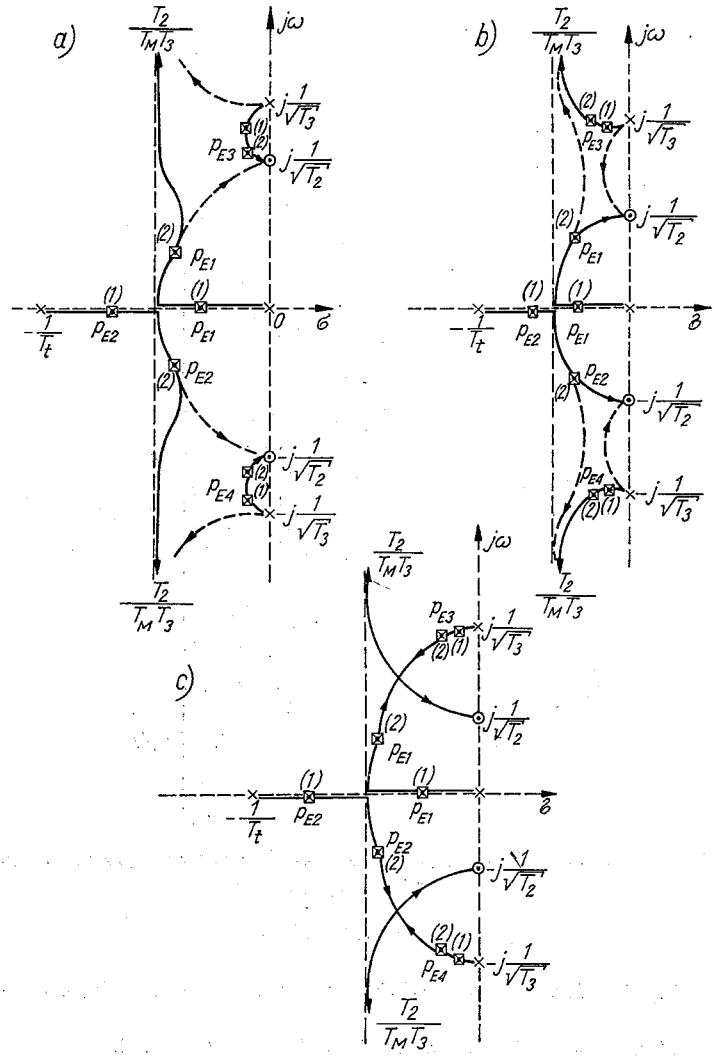
i z zależności

$$1+\frac{k_\alpha}{B_2}\,\frac{1}{s\left(s+\dfrac{k_\alpha b}{1+K}\right)}=0, \tag{24}$$

będącej odpowiednikiem zależności (20) charakteryzującej układ otwarty.

Położenia biegunów p_{E1} i p_{E2} (dla układu sprężystego) różnią się nieznacznie od położeń biegunów p_{s1} i p_{s2} (dla układu sztywnego). Bieguny p_{E3} i p_{E4} — jak to wynika z rys. 13 — mają zawsze wartości zespolone sprzężone. Są na ogół położone blisko osi urojonej, są więc przyczyną, dla której w odpowiedzi $n(t)$ układu z połączeniem sprężystym występuje składnik oscylacyjny bardzo słabo tłumiony.

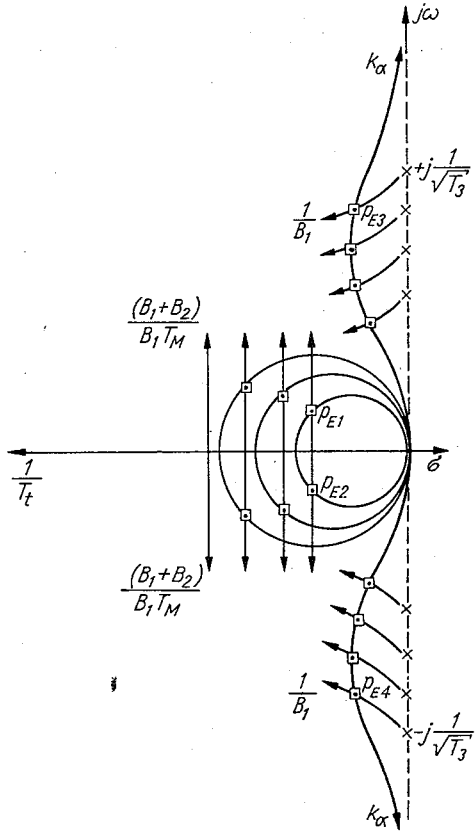
Najistotniejszym spostrzeżeniem wynikającym z inspekcji siatek na rys. 16 jest to, że bieguny p_{E3} i p_{E4} mało zmieniają swoje położenia przy zmianach parametrów T_t, B_1, B_2



Rys. 16. Linie pierwiastkowe ($p_{E1}, p_{E2}, p_{E3}, p_{E4}$) dla układu sprężystego z rys. 1c, przy $T_2/T_M T_3 = \text{var}$ i $T_t = \text{const}$

Trzy możliwe sytuacje a), b), c), w zależności od wartości T_t i k_α; (1), (2) — dwa różne zestawy położeń wymienionych biegunów

oraz przy przejściu z układu otwartego na układ zamknięty. Przy zmianach współczynnika sprężystości k_α, bieguny p_{E3} i p_{E4} w sposób znaczący zmieniają swe położenia (rys. 13), przy czym przy $k_\alpha \to 0$ dążą one do punktu $s = 0$, co oznacza, że układ „idealnie sprężysty" (czy to otwarty, czy to zamknięty) działa — jeśli chodzi o odpowiedź $n(t)$ — w przybliżeniu jak układ podwójnie całkujący. Przy $k_\alpha \to \infty$, tzn. dla układu idealnie sztywnego (otwartego lub zamkniętego), bieguny p_{E3}, p_{E4} przesuwają się odpowiednio w górę i w dół wzdłuż osi urojonej, co oznacza, że w odpowiedzi $n(t)$ układu istnieje składnik oscylacyjny niegasnący, o bardzo dużej częstotliwości lecz o zerowej amplitudzie, a więc — w rzeczywistości składnik ten nie istnieje.



Rys. 17. Siatka linii pierwiastkowych ($p_{E1}, p_{E2}, p_{E3}, p_{E4}$) dla układu sprężystego z rys. 1c, przy $T_2/T_M T_3 =$ = var, T_t = var, k_α = var

LITERATURA

1. W. R. Evans, *Graphical Analysis of Control Systems* ,Transactions A.I.E.E., Vol. 67, str. 547—551, 1948.
2. W. R. Evans, *Control System Dynamics*, Mc Graw-Hill Book Co., 1954.
3. J. Siwiński, *Automatyka napędu elektrycznego*, PWT, 1960.
4. S. Urbański, *Napęd elektryczny maszyn papierniczych*, WNT, 1974.
5. S. Urbański, *Synteza wybranych układów automatycznej stabilizacji prędkości z silnikami prądu stałego*, Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, 14/1977.

S. URBAŃSKI

SETS OF ROOT-LOCI AS AID TO STUDY AND DESIGN OF DYNAMICS OF SYSTEMS WITH D.C. MOTORS

Summary

In the paper the possibility of the extention of the Evans' root-cocus method, used widely in analysis and synthesis of closed-loop systems, is discussed.

The suggestion is made, of using up the sets („nets") of root-loci, showing the effects of value changes of various system parameters on the dynamics of a system.

The presentation of the suggested method is carried out in the article by means of analysis of the speed control system, with negative tachometric feedback and d.c. motor, connected to the rest of the system through alternatively rigid or resilient mechanical coupling.

S. URBAŃSKI

ENSEMBLES DES LIEUX DES RACINES SERVANT À L'EXAMEN ET À LA CONCEPTION DE LA DYNAMIQUE DES SYSTÈMES DE MOTEURS À COURANT CONTINU

Résumé

Dans l'article on a décrit les possibilités d'élargissement de la méthode des lieux des racines d'Evans dans l'analyse et la synthèse des systèmes de réglage automatique. On a proposé d'utiliser les ensembles (réseaux) des lieux des racines démontrant l'influence des changements de différents paramètres des systèmes sur leur dynamique. Le problème a été présenté en s'appuyant sur l'exemple du système à réaction négative tachéométrique, avec un moteur à courant continu et avec assemblage mécanique rigide ou par ressort.

S. URBAŃSKI

WURZELLINIENNETZE ALS UNTERSUCHUNGS- UND PROJEKTIERUNGSINSTRUMENTE FÜR DIE DYNAMIK VON SYSTEMEN MIT GLEICHSTROMMOTOREN

Zusammenfassung

In diesem Artikel werden die Möglichkeiten der Erweiterung der Wurzellinienmethode nach Evans bei der Analyse und Synthese von Systemen automatischer Regulierung besprochen. Es wird die Anwendung von Wurzellieniennetzen empfohlen, die den Einfluß von Änderungen verschiedener Systemparameter auf die Dynamik der Wurzellinien zeigen.

Dieses Problem wird am Beispiel eines negativen techometrischen Rückkupplungssystems mit Gleichstrommotor und einer starren bzw. elastischen mechanischen Verbindung dargelegt.

С. УРБАНЬСКИ

КОРНЕВЫЕ ГОДОГРАФЫ КАК ОСНОВА ИССЛЕДОВАНИЯ И ПРОЕКТИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ СИСТЕМ С ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯМИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Резюме

Представлены возможности расширения метода корневых годографов ИВЭНСА в анализе и синтезе автоматических систем регулирования.

Предложено пользоваться множеством („сетками") корневых годографов, отображающих влияние изменений различных параметров систем на их динамику.

Проблема представлена на примере системы с отрицательной тахометрической обратной связью, с двигателем постоянного тока и с жестким или упругим механическим соединением.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1978, 24, z. 3, ss. 627—637

621.372.5

Wybrane układy drabinkowe

WOJCIECH MITKOWSKI (KRAKÓW)

Akademia Górniczo-Hutnicza, Instytut Informatyki i Automatyki

Otrzymano 4.4.1977

W pracy omawia się niejednorodne układy drabinkowe typów: *RL* i *GC* oraz *RLC* i *rlc*, dla których można podać dokładne wzory na wartości własne. Jako szczególny przypadek omówiono układy *RC* rozwiązując zadanie syntezy przy minimalnej globalnej pojemności i oporności, przy czym układ jest opisany zadanym równaniem stanu.

1. WPROWADZENIE

Problematyką związaną z układami drabinkowymi zajmowało się wielu autorów [3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 14, 17]. Publikowane prace dotyczą analizy układów łańcuchowych [3, 4, 5, 6, 11] oraz syntezy [7, 8, 10, 14, 17] z wykorzystaniem struktur drabiniastych. Układy drabinkowe znajdują zastosowanie przy modelowaniu obiektów o parametrach rozłożonych [1, 2, 13, 16] a szczególnie przy modelowaniu procesów cieplnych [2] oraz różnego rodzaju struktur półprzewodnikowych wykorzystywanych w układach mikroelektronicznych [16].

W niniejszej pracy zajmiemy się wybranymi układami drabinkowymi. Będą to układy typów *RL* i *GC* oraz *RLC* i *rlc* ze szczególnym uwzględnieniem układów zbieżnych. Dla układów typu *RC* zostanie rozwiązane zadanie syntezy przy wskaźniku jakości równym sumie oporności i pojemności układu w klasie układów równoważnych względem zadanego równania stanu.

Każdy liniowy obwód elektryczny zbudowany z elementów o parametrach skupionych *R, L, C*, zasilany w odpowiedni sposób, można opisać równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu pierwszego nazywanym również równaniem stanu

$$\dot{x}(t) = Ax(t)+Bu(t), \tag{1}$$

gdzie: $x(t) \in R^m$ jest stanem układu, $u(t) \in R^r$ jest sterowaniem, A i B są stałymi macierzami odpowiednich wymiarów.

Dla pełnego opisu systemu jako relacji wejście-wyjście wprowadza się równanie wyjścia, które jest odpowiednią funkcją mierzalnych zmiennych stanu i sterowań.

Numeryczne rozwiązanie równania (1) nie przedstawia większych trudności. Równanie (1) zastępuje się odpowiednim równaniem różnicowym, bądź też poszukuje się macierzy $\exp(At)$, np. poprzez znalezienie wartości własnych macierzy A. Dla wielu układów drabinkowych można podać dokładne wzory na wartości własne macierzy A.

W konsekwencji pozwala to na znalezienie efektywnego rozwiązania równania (1). Analityczne wzory są pomocne w rozważaniach teoretycznych przy ustalaniu własności badanego układu. Również można je wykorzystać do testowania algorytmów na maszynę cyfrową.

W układach drabinkowych zazwyczaj A jest macierzą trójprzekątniową albo macierzą blokową, której bloki są zbudowane w odpowiedni sposób z macierzy trójprzekątniowych. Tego rodzaju budowa macierzy A, wynikająca ze struktury układu drabinkowego, wiąże wyznacznik charakterystyczny tej macierzy z odpowiednim równaniem różnicowym, a dalej przy dodatkowych założeniach z wielomianami Czebyszewa [2, 3].

Rozważmy macierz trójprzekątniową o współczynnikach rzeczywistych

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & e_1 & & & \\ d_2 & -a_2 & e_2 & & \\ & d_3 & -a_3 & e_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & d_m & -a_m \end{bmatrix}_{m,m}. \tag{2}$$

Niech $a_{2i-1} = a$, $a_{2i} = b$, $e_{2i-1}d_{2i} = e$, $e_{2i}d_{2i+1} = d$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Rozumując analogicznie jak w pracach [6, 10] można pokazać, że wartości własne macierzy A_{2n+1} oraz A_{2n} należy obliczać z równania

$$\lambda^2 + (a+b)\lambda + ab - (e+d) - 2\sqrt{ed}\cos\varphi_k = 0, \tag{3}$$

przy czym dla A_{2n+1}

$$\varphi_k = k\pi/(n+1), \tag{4}$$

$k = 1, 2, \ldots, n$ oraz

$$\lambda = -a. \tag{5}$$

Natomiast dla macierzy A_{2n} $\varphi_k \in (0, \pi)$ należy obliczać z równania trygonometrycznego

$$\sqrt{ed}\sin(n+1)\varphi + d\sin n\varphi = 0. \tag{6}$$

Przy założeniu $e = d$ równanie to można rozwiązać analitycznie

$$\varphi_k = \begin{cases} (2k-1)\pi/(2n+1) & \text{dla} \quad e < 0, \\ 2k\pi/(2n+1) & \text{dla} \quad e > 0, \end{cases} \tag{7}$$

$k = 1, 2, \ldots, n$.

W przypadku gdy $a_i = a$, $e_i d_{i+1} = e$ wartości własne macierzy A_m dane są wzorem

$$\lambda_k = -a + 2\sqrt{e}\cos\varphi_k, \tag{8}$$

przy czym

$$\varphi_k = k\pi/(m+1), \tag{9}$$

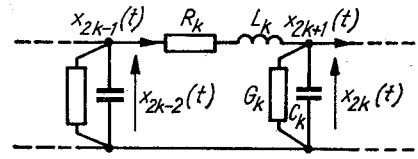
$k = 1, 2, \ldots, m$.

2. UKŁADY DRABINKOWE TYPU *RL* I *GC* ORAZ *RLC* I *rlc*

2.1. Układy RL i GC

Dany jest układ drabinkowy, którego fragment jest pokazany na rys. 1. Oznaczmy przez $x_{2k-1}(t)$ prądy w gałęziach podłużnych oraz przez $x_{2k}(t)$ napięcia na elementach w gałęziach poprzecznych. Dane są parametry układu R_k, L_k, $k = 1, 2, \ldots, n+1$ oraz $C_k, G_k, k = 1, 2, \ldots, n$. Rozważmy dwa sposoby zasilania układu:

1. zasilanie źródłami napięcia $x_0(t) = u_1(t)$, $x_{2n+2}(t) = u_2(t)$, albo
2. zasilanie źródłem napięcia $x_0(t) = u_1(t)$ oraz źródłem prądu $x_{2n+1}(t) = u_2(t)$.



Rys. 1. Układ drabinkowy *RL* i *GC*

W obu przypadkach układ można opisać równaniem stanu (1), przy czym macierz A ma postać (2), $a_{2k-1} = R_k/L_k$, $d_{2k-1} = -e_{2k-1} = 1/L_k$, $k = 1, 2, \ldots, n+1$, $a_{2k} = G_k/C_k$, $d_{2k} = -e_{2k} = 1/C_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$B = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & e_m \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$x(t) \in R^m$, $x(t) = [x_1(t), \ldots, x_m(t)]^T$, $u(t) \in R^2$, $u(t) = [u_1(t), u_2(t)]^T$. Przy pierwszym i drugim sposobie zasilania m równa się odpowiednio $2n+1$ oraz $2n$.

W przypadku układu zbieżnego, w którym $R_i = K^i R$, $L_i = K^i L$, $C_i = K^{-i} C$, $G_i = K^{-i} G$, $K > 0$, wartości własne można obliczać z równania (3) oraz wzoru (5)

$$\lambda = -R/L, \tag{11}$$

$$\lambda = -0{,}5\,[(R/L + G/C) \pm \sqrt{\Delta}]. \tag{12}$$

gdzie

$$\Delta = (R/L - G/C)^2 - (4/LC)(1 + 1/K - 2\sqrt{1/K}\cos\varphi_k), \tag{13}$$

φ_k dane jest równością (4) dla $m = 2n+1$ albo równością (7) z $e < 0$ dla $m = 2n$.

Załóżmy, że $L_{i+1} R_i = L_i R_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Rozkład napięć na pojemnościach C_i przy pierwszym sposobie zasilania można opisać równaniem rzędu drugiego

$$L_i C_i \ddot{x}_i(t) + (L_i G_i + R_i C_i)\dot{x}_i(t) + R_i G_i x_i(t) = x_{i-1}(t) - (1 + K_i^{-1}) x_i(t) + K_i^{-1} x_{i+1}(t), \tag{14}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, $x_0(t) = u_1(t)$, $x_{n+1}(t) = u_2(t)$, $x_i(t)$ napięcie na pojemności C_i, K_i równa się R_{i+1}/R_i lub L_{i+1}/L_i.

Przez odpowiednie przyjęcie zmiennych stanu równania (14) można zapisać w postaci (1). Istnieją układy, których własności można efektywnie badać analizując bezpośrednio równania (14). Na przykład dla układów zbieżnych stosując odpowiednią transformację z układu równań (14) można otrzymać n niezależnych równań rzędu drugiego [13].

Postać równań (14) jest wygodna przy rozpatrywaniu szczególnych układów drabinkowych *RL* i *GC*, w których $L_i = 0$ albo $R_i = 0$, a mianowicie układów typu *L* i *C*, *R* i *C*, *R* i *GC*, itp. W tym celu należy za odpowiednie parametry wstawić zera oraz za K_i podstawić R_{i+1}/R_i albo L_{i+1}/L_i, odpowiednio gdy $L_i = 0$ albo $R_i = 0$.

2.2. Układy *RLC* i *rlc*

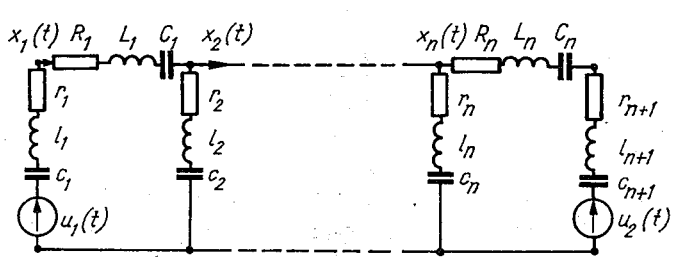
Rozważmy układ drabinkowy pokazany na rys. 2. Rozpływ prądów $x_i(t)$ w gałęziach podłużnych można opisać równaniem rzędu drugiego [3]

$$D\ddot{x}(t)+E\dot{x}(t)+Fx(t) = G\dot{u}(t)\text{m} \tag{15}$$

gdzie $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^2$, $D = H(l_i, L_i)$, $E = H(r_i, R_i)$, $F = H(c_i^{-1}, C_i^{-1})$,

$$H(l_i, L_i) = \begin{bmatrix} (l_1+L_1+l_2) & -l_2 & & \\ -l_2 & (l_2+L_2+l_3) & -l_3 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -l_n & (l_n+L_n+l_{n+1}) \end{bmatrix}_{n,n}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{n,2} \tag{16}$$

W równaniu (15) należy zadać warunki początkowe $x(0)$, $\dot{x}(0)$ oraz $u(0)$. Przyjmując odpowiednio zmienne stanu z (15) otrzymamy równanie o postaci (1).



Rys. 2. Układ drabinkowy *RLC* i *rlc*

Niekiedy wygodnie jest bezpośrednio rozwiązywać równanie (15). Dobrym przykładem będzie układ, w którym $l_i = 0$, $L_i = LK^i$, $R_i = RK^i$, $r_i = rK^i$, $C_i = CK^{-i}$, $c_i = cK^{-i}$, $K > 0$. Macierz D jest teraz macierzą diagonalną. Mnożąc lewostronnie (15) przez D^{-1} otrzymamy równanie rzędu drugiego z macierzami $D^{-1}E$, $D^{-1}F$, $D^{-1}G$. Macierz $D^{-1}E$ jest macierzą A_n postaci (2) pomnożoną przez r/L, w której $d_i = -1$, $a_i = -(1+R/r+K)$, $e_i = -K$. Macierz $D^{-1}F$ jest macierzą A_n postaci (2) pomnożoną przez $L^{-1}c^{-1}$, w której $d_i = -1$, $a_i = -(1+c/C+K)$, $e_i = -K$. Macierz $D^{-1}G$ jest macierzą (10) z $m = n$, $d_1 = L^{-1}K^{-1}$, $e_n = -L^{-1}K^{-n}$. Ponieważ wartości własne macierzy A_n są znane, więc układ nasz można rozwiązać efektywnie. W powyższym przypadku szczególnym $l_i = 0$. Identycznie będziemy postępować, gdy $r_i = 0$ albo $c_i^{-1} = 0$.

Warto zwrócić uwagę na układ jednorodny, $R_i = R$, $L_i = L$, $C_i = C$, $r_i = r$, $l_i = l$, $c_i = c$. Macierze D, E, F można teraz sprowadzić do postaci diagonalnej jednym i tym samym przekształceniem $W = W^{-1}$. Zatem równanie (15) można rozbić na n niezależnych równań skalarnych

$$b_1\ddot{y}_i(t)+b_2\dot{y}_i(t)+b_3y_i(t) = (WG\dot{u}(t))_i, \tag{17}$$

gdzie $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$b_j = m_j + 2z_j\left(1 - \cos\left(i\pi/(n+1)\right)\right), \quad j = 1, 2, 3, \tag{18}$$

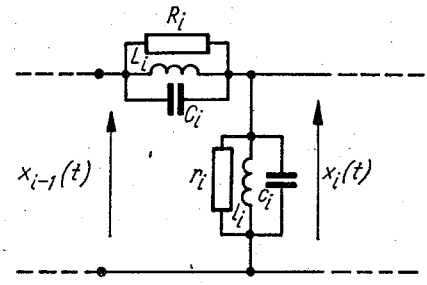
$$m_1 = L, \quad z_1 = l, \quad m_2 = R, \quad z_2 = r, \quad m_3 = C^{-1}, \quad z_3 = c^{-1}.$$

Rozważmy następujące przypadki szczególne:

1. jeżeli $R/r = L/l = c/C$, to w układzie jednorodnym mamy dwie wartości własne n-krotne $\lambda_{1,2} = -0{,}5\,[r/l \pm \sqrt{(r/l)^2 - 4/(lc)}]$;
2. jeżeli $R = r = 0$, to mamy $2n$ wartości własnych urojonych $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-b_3/b_1}$;
3. jeżeli $L = l = 0$, to $\lambda_i = -b_3/b_2$;
4. jeżeli $C^{-1} = c^{-1} = 0$, to $\lambda_i = -b_2/b_1$.

Oznaczmy przez λ_{1i} wartości własne układu z punktu 3, w którym dodatkowo $r = 0$, $C^{-1} = 0$, natomiast przez λ_{2i} wartości własne układu również z punktu 3, ale z $R = 0$ i $c^{-1} = 0$. Łatwo zauważyć, że zachodzi związek: $RCrc\,\lambda_{1i}\lambda_{2i} = 1$. Podobne zależnośc można otrzymać dla odpowiednich układów drabinkowych z punktów 2 i 4.

Rozważania z tego rozdziału dotyczą również obwodu, którego fragment pokazano na rys. 3. Rozkład napięć $x_i(t)$ w układzie odpowiednio zasilonym można opisać równaniem różniczkowym rzędu drugiego z macierzami typu (16).



Rys. 3. Element układu typu *RLC* i *rlc*

3. UKŁADY DRABINKOWE TYPU *R I C*

3.1. Równanie stanu i układy zbieżne

Niech $L_i = 0$, $G_i = 0$. Z równań (14) po zastosowaniu zapisu macierzowego otrzymamy równanie (1), przy czym A dane jest równością (2), B równością (10), $m = n$,

$$d_i = (R_i C_i)^{-1}, \quad e = (R_{i+1} C_i)^{-1}, \tag{19}$$

$$a_i = d_i + e_i. \tag{20}$$

Jeżeli $R_{2i-1} = K^{i-1}R_1$, $C_{2i-1} = K^{-i+1}C_1$, $R_{2i} = K^{i-1}R_2$, $C_{2i} = K^{-i+1}C_2$, $K > 0$, to $d_{2i-1} = (R_1 C_1)^{-1}$, $e_{2i-1} = (R_2 C_1)^{-1}$, $d_{2i} = (R_2 C_2)^{-1}$, $e_{2i} = (KR_1 C_2)^{-1}$. Korzystając z równości (3) i (5) można obliczyć wartości własne układu:

$$\lambda = -C_1^{-1}h_1 \tag{21}$$

oraz

$$\lambda = -0{,}5[(C_1^{-1}h_1 + C_2^{-1}h_2) \pm \sqrt{\Delta}], \tag{22}$$

gdzie

$$\Delta = (C_1^{-1}h_1 - C_2^{-1}h_2)^2 + 4C_1^{-1}C_2^{-1}(R_2^{-2} + R_1^{-2}K^{-1} + 2R_1^{-1}R_2^{-1}\sqrt{K^{-1}}\cos\varphi_k),$$
$$h_1 = (R_1^{-1} + R_2^{-1}), \quad h_2 = (R_1^{-1}K^{-1} + R_2^{-1}).$$

W zależności od wymiaru macierzy A φ_k dane jest równością (4) albo równaniem (6). Warunek $e = d$ jest równoważny przyjęciu $K = R_2^2/R_1^2$.

Jeżeli $R_i = K^i R$, $C_i = K^{-i}C$, $K > 0$, to $d_i = (RC)^{-1}$, $e_i = (RCK)^{-1}$, a dalej ze wzoru (8)

$$\lambda_i = -(RC)^{-1}\left(1 + K^{-1} - 2\sqrt{K^{-1}}\cos\left(i\pi/(n+1)\right)\right), \tag{23}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$. Przy $K \to \infty$, $\lambda_i \to -(RC)^{-1}$. Każda λ_i jest funkcją zmiennej K posiadającą maksimum dla $K_i = \cos^{-2}(i\pi/(n+1))$. Tak więc przyyjęcie $K = K_1$ powoduje otrzymanie układu drabinkowego o największej wartości własnej λ_1 przy ustalonych parametrach R i C.

3.2. Klasa układów o zadanym równaniu stanu

Dane jest równanie stanu (1) z macierzami (2) i (10), których elementy spełniają równość (20). Innymi słowy dane są współczynniki $d_i > 0$, $e_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Poszukujemy układu drabinkowego typu R i C, która można opisać zadanym równaniem stanu.

Rozwiązanie otrzymujemy natychmiast z równości (19)

$$R_{i+1} = R_i d_i/e_i, \quad C_i = (R_i d_i)^{-1}, \tag{24}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, $R_1 > 0$.

Oznaczmy przez Ω zbiór wszystkich układów drabinkowych typu RC, które są opisane zadanym równaniem stanu. Parametry układów należących do Ω wyznaczają równości (24) dla $R_1 > 0$.

3.3. Klasa układów rozwiązywalnych analitycznie

Rozważmy układy drabinkowe o zadanej postaci równania stanu (1) z macierzami (2) i (10), których elementy spełniają następujące warunki

$$d_i + e_i = a, \quad d_{i+1}e_i = e, \tag{25}$$
$$a_i = a > 0, \quad e > 0, \quad d_i > 0, \quad e_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Współczynniki d_i oraz e_i można wyznaczyć z dokładnością do $d_1 > 0$. Zależności (25) nie określają więc elementów macierzy A jednoznacznie. Ale każda z otrzymanych macierzy posiadać będzie wartości własne dane równością (8). Oczywiście, mając którąś z tych macierzy można jej przyporządkować układ drabinkowy typu RC wykorzystując równości (24). Ostatecznie parametry układu drabinkowego R_i, C_i, rozważanej klasy, będą wyznaczone z dokładnością do dwóch stałych $d_1 > 0$ oraz $R_1 > 0$.

Oznaczmy przez Ω_1 zbiór układów drabinkowych sparametryzowanych dwoma stałymi $d_1 > 0$ i $R_1 > 0$. Każdy układ należący do Ω_1 posiada wartości własne dane równością (8) z $m = n$.

Nie zmniejszając ogólności rozważań można przyjąć $e = 1$. Eliminując e_i z równości (25) otrzymujemy równanie na d_i typu Riccatiego, które da się efektywnie rozwiązać [9, 14]

$$d_i = \begin{cases} \dfrac{(2d_1-1)+i(1-d_1)}{(2d_1-1)+(i+1)(1-d_1)} & \text{dla} \quad a = 2, \\ s_2 \dfrac{(1-d_1 s_2)s_2^2+(s_1 d_1-1)s_2^{2i}}{(1-d_1 s_2)s_2^2+(s_1 d_1-1)s_2^{2i+2}} & \text{dla} \quad a > 2, \end{cases} \tag{26}$$

gdzie

$$s_1 = 0{,}5(a+\sqrt{a^2-4}), \quad s_2 = 0{,}5(a-\sqrt{a^2-4}). \tag{27}$$

Łatwo zauważyć, że $0 < s_2 \leqslant 1 \leqslant s_1$, gdyż $s_2 s_1 = 1$, $s_1+s_2 = a > 0$; s_1 i s_2 będą rzeczywiste, gdy $a^2-4 \geqslant 0$. Ponieważ $a > 0$, więc musi być $a \geqslant 2$. Dzięki tej nierówności wszystkie wartości własne λ_i dane równością (8) są ujemne, czyli A jest macierzą stabilną. Z założenia $d_i > 0$, $e_i > 0$. Z zależności (25) po wyrugowaniu e_i dostajemy $d_i \in (0, a)$. Można zauważyć, że warunek $d_i \in (0, a)$ będzie spełniony dla każdego i, gdy $d_1 \in (0, s_1]$. Dla skończonego ciągu n-elementowego wystarczy przyjąć $d_1 \in (0, I_n)$, $I_{k+1} = a-1/I_k$, $k = 2, 3, \ldots, n-1$, $I_2 = a$. Przyjęcie d_1 w inny sposób powoduje otrzymanie ciągu d_i o co najmniej jednym elemencie ujemnym. Jeżeli $d_1 \in (0, s_1)$, to $d_i \to s_2$ przy $i \to \infty$.

Przykład 1. Niech $a = 2$, $d_1 = 1$. Ze wzoru (26) otrzymujemy $d_i = 1$, a zatem $e_i = 1$. Tego rodzaju macierz A jest związana z jednorodnym układem drabinkowym RC, co jest widoczne z równości (24); $R_i = R_1$, $C_i = (R_1 d_1)^{-1}$.

Podobnie dla $a = 2$, $d_1 = 0{,}5$ z równości (26) mamy $d_i = i/(i+1)$, a dalej

$$R_i = \frac{2R_1}{i(i+1)}, \quad C_i = \frac{(i+1)^2}{2R_1}, \tag{28}$$

Dla obu otrzymanych układów drabinkowych wartości własne dane są wzorem (8) z $a = 2$, $e = 1$.

Przykład 2. Niech $a > 2$. Dla $d_1 = s_2$ $d_i = s_2$ oraz dla $d_1 = s_1$ $d_i = s_1$. Przy $a = 3$, $d_1 = s_2$ mamy

$$R_i = R_1 K^{i-1}, \quad C_i = C_1 K^{-i+1}, \tag{29}$$

gdzie: $K = s_2^2$, $C_1 = R_1^{-1} s_2^{-1}$.

Natomiast dla $a = 3$, $d_1 = 1$, $n = 4$, wyniki zestawiono w tablicy 1; $s_1 = 2{,}6180$, $s_2 = 0{,}3819$.

Dla otrzymanych układów drabinkowych wartości własne dane są wzorem (8) przy $a = 3$, $e = 1$.

3.4. Układy z minimalną całkowitą opornością i pojemnością

Rozważmy następującą funkcję kosztów [7, 10, 14, 17]

$$Q = \sum_{i=1}^{n+1} R_i + p \sum_{i=1}^{n} C_i, \tag{30}$$

gdzie $p > 0$ posiada odpowiednie jednostki. Funkcję Q można interpretować jako koszt wykonania układu lub jako miarę przydatności układu do realizacji mikroelektronicznej w sensie minimalnej powierzchni zajętej przez układ [10].

Niech Ω oznacza zbiór układów drabinkowych typu RC zdefiniowany w rozdziale 3.2. Zadaniem naszym jest znalezienie w zbiorze Ω takiego układu drabinkowego, którego parametry R_i oraz C_i minimalizują funkcję kosztów Q daną równością (30).

Z zależności (30) oraz (24) otrzymamy

$$Q(R_1) = R_1 f + b/R_1, \tag{31}$$

przy czym

$$f = \left(1 + \frac{d_1}{e_1} + \frac{d_1 d_2}{e_1 e_2} + \ldots + \frac{d_1 d_2 d_3 \ldots d_n}{e_1 e_2 e_3 \ldots e_n}\right), \tag{32}$$

$$b = \frac{p}{d_1}\left(1 + \frac{e_1}{d_2} + \frac{e_1 e_2}{d_2 d_3} + \ldots + \frac{e_1 e_2 e_3 \ldots e_{n-1}}{d_2 d_3 d_4 \ldots d_n}\right). \tag{33}$$

Elementarny rachunek pokazuje, że min $Q(R_1)$ dla $R_1 > 0$ jest osiągnięte dla

$$R_1^+ = \sqrt{b/f}. \tag{34}$$

Minimalna wartość funkcji kosztów jest równa

$$Q^+ = Q(R_1^+) = 2\sqrt{fb}. \tag{35}$$

Przykład 3. Rozważmy układ z przykładu 1. Macierz stanu A jest dana, bowiem $a = 2$, $d_1 = 1$. Z równości (34) i (35) otrzymamy

$$R_i = R_1^+ = \sqrt{np/(n+1)}, \qquad C_i = \sqrt{(n+1)/(np)}; \tag{36}$$

$Q^+ = 2\sqrt{n(n+1)p}$. Dla $n = 4$, $p = 1$, $R_1^+ = 0{,}8944$, $Q^+ = 8{,}9442$. Natomiast dla układu przedstawionego w tablicy 1 $R_1^+ = 11{,}0915$, $Q^+ = 35{,}8844$.

Tablica 1

Parametry układu

i	1	2	3	4	5
d_i	1,0000	0,5000	0,4000	0,3846	
e_i	2,0000	2,5000	2,6000	2,6153	
R_i	11,0915	5,5457	1,1091	0,1706	0,0251
C_i	0,0902	0,3606	2,2539	15,2374	

Uzyskane wyniki można wykorzystać przy minimalizacji kosztów budowy układu analogowego, który modeluje na przykład rozkład temperatury w pręcie o zadanych w czasie temperaturach na końcach. Układem analogowym będzie odpowiedni układ drabinkowy RC. Rozkład temperatury będzie modelowany rozkładem napięć na pojemnościach C_i.

Ze sposobu wyboru punktów dyskretyzacji zmiennej przestrzennej wynika nam postać równania stanu. Równanie stanu w pełni opisuje nasz system analogowy, bowiem wyjściem jest cały wektor stanu wykorzystywany do modelowania rozkładu temperatury.

Wskaźnik (30) może być również minimalizowany na innym zbiorze niż Ω. Na przykład na zbiorze Ω_1 określonym w rozdziale 3.2. W tym przypadku Q jest funkcją dwóch zmiennych. Minimalizację Q na zbiorze Ω_1 można sprowadzić do poszukiwania minimum funkcji Q^+ jednej zmiennej d_1 na pewnym odcinku otwartym. W szczególności, gdy $n = 2$, to minimum jest osiągane dla $d_1 = a-1$. Jeżeli przez Ω_2 oznaczymy zbiór układów drabinkowych *RC* o zadanych z góry różnych wartościach własnych $\lambda_i < 0$, to minimalizacja Q na zbiorze Ω_2 sprowadza się do zadania programowania nieliniowego z ograniczeniami równościowymi i nierównościowymi $\min Q^+, Q^+ = Q^+(d_1, d_2, \ldots, d_n, e_1, \ldots e_n)$, $d_i > 0$, $e_i > 0$, $f_j(d_1, \ldots, d_n, e_1, \ldots, e_n) = k_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, k_j są współczynnikami równania charakterystycznego.

W literaturze zbiór Ω stanowią zwykle układy o zadanej strukturze równoważne względem odpowiedniej funkcji przejścia [7, 8, 10, 17].

4. ZAKOŃCZENIE

W niniejszej pracy omówiono układy drabinkowe typów: *RL* i *GC* oraz *RLC* i *rlc*. Zwrócono uwagę głównie na układy, które można efektywnie rozwiązać. Przez efektywne rozwiązanie rozumie się podanie dokładnego wzoru na wartości własne układu, co w zasadzie jest równoznaczne z możliwością wyznaczenie macierzy $\exp(At)$. Dokładna znajomość wartości własnych jest ważna z tego powodu, że rozwiązanie równania (1) jest kombinacją liniową wyrażeń $\exp(\lambda_i t)$. Natomiast funkcja wykładnicza jest bardzo wrażliwa względem wykładnika potęgowego. Analityczne wzory na wartości własne pozwalają również w prosty sposób na wnikliwą analizę układu. Można na przykład wyznaczać obszary zmienności parametrów układu, przy których występują drgania, albo można badać własności odpowiedniego układu aktywnego w zależności od współczynnika wzmocnienia [11]. Znajomość wartości własnych λ_i umożliwia także znalezienie przekształcenia W sprowadzającego odpowiednią macierz do postaci kanonicznej, która w naszych przypadkach jest macierzą diagonalną. Na przykład dla układu zbieżnego *RC* wartości własne dane są równością (23), a macierz W ma postać [13]

$$W = \sqrt{2/(n+1)}\,[w_1, \sqrt{K}w_2, \ldots, \sqrt{K^{-1}}w_n]^T, \tag{37}$$

$$W^{-1} = \sqrt{2/(n+1)}\,[w_1, \sqrt{K^{-1}}w_2, \ldots, \sqrt{K^{-n+1}}w_n], \tag{38}$$

gdzie $w_i = [\sin\varphi_i, \sin 2\varphi_i, \ldots, \sin n\varphi_i]^T$, $\varphi_i = i\pi/(n+1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Dla dowolnych układów drabinkowych wartości λ_i należy wyznaczyć numerycznie, przy czym można tego dokonać stosunkowo prosto i z dużą dokładnością wykorzystując odpowiednie własności macierzy trójprzekątniowych [1, 15, 18]. Można również sięgnąć do odpowiedniej biblioteki gotowych podprogramów na EMC.

Dla układu drabinkowego *RC* rozwiązano zadanie syntezy przy minimalnej globalnej pojemności i oporności. Rozwiązań szukano w zbiorze układów równoważnych względem zadanego równania stanu. Uzyskano wyniki można bezpośrednio przenieść na

układy typu L i C minimalizując globalną indukcyjność i pojemność, bądź też na układy typu L i G minimalizując globalną indukcyjność i przewodność [14]. Przez dalsze analogie łatwo uzyskać podobne rezultaty dla układów innych typów, na przykład dla układu R i GC.

Na zakończenie warto zwrócić uwagę na fakt, że wszystkie wyniki uzyskane w tej pracy można przenieść na odpowiednie układy przestrzenne [12]. Należy również pamiętać, że istnieją jeszcze inne typy macierzy związanych z odpowiednimi układami drabinkowymi, dla których znane są wartości własne [1, 2, 5]. Są to zwykle macierze postaci A_{2n+1} oraz A_{2n}, przy czym $a_1, a_m \neq a$, $e_1 d_2, e_{m-1} d_m \neq e$. W tym przypadku, stosując rozumowanie podane w pracach [6, 11], otrzymuje się zależności podobne do (3), (4), (5), (6), (7).

LITERATURA

1. R. E. D. Bishop, G. M. L. Gladwell, S. Michaelson, *Macierzowa analiza drgań*, WNT, Warszawa 1972.
2. A. G. Butkowski, *Tieorija optimalnowo uprawlenija sistiemami s raspredielonnymi paramietrami*, Moskwa 1965.
3. T. Cholewicki, *Elektryczne linie długie i układy drabinkowe niejednorodne*, PWN, Warszawa 1974.
4. A. Cichocki, S. Osowski, *Algorytm wyznaczania dowolnych transmitancji dla układów drabinkowych niejednorodnych przy zastosowaniu kontynuanty*, Arch. Elektrot., t. 23, z. 4, 1974, ss. 959—968.
5. T. Endo, S. Mori, *Mode Analysis of a Multimode Ladder Oscillator*, IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. CAS-23, no. 2, 1976, pp. 100—113.
6. H. Górecki, A. Turowicz, *Analysis of an Electric Network Chain with Feedback*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn., vol. 21, no. 1, 1973, p. 53.
7. J. D. Hagopian, I. T. Frisch, *Capacitance and Resistance Minimization in One-Port RC Networks*, IEEE Trans. C.T., vol. CT-17, no. 3, 1970, pp. 386—392.
8. H. K. Kim, A. A. Ali, *Cost Function Minimization in RC Ladder Networks*, IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. CAS-23, no. 1, 1976, pp. 39—45.
9. I. Koźniewska, *Równania rekurencyjne*, PWN, Warszawa 1972.
10. J. Matacz, *Minimalizacja funkcji kosztu pewnej klasy struktur RC*, Arch. Elektrot., t. 25, z. 4, 1976, ss. 915—928.
11. W. Mitkowski, *Układy drabinkowe jednorodne typu R, L i G, C pasywne oraz aktywne*, Arch. Elektrot., t. 22, z. 2, 1973, ss. 387—395.
12. W. Mitkowski, *Sterowanie optymalne w sieciach przestrzennych*, Arch. Elektrot., t. 23, z. 2, 1974, ss. 501—512.
13. W. Mitkowski, *Aproksymacja linii długiej układem drabinkowym*, Arch. Elektrot., t. 25, z. 4, 1976, ss. 943—953.
14. W. Mitkowski, *Synteza układów drabinkowych typu RC z minimalną całkowitą opornością i pojemnością*, Mat. VI Symp. Metody Matemat. w Elektrotechn., Zakopane, maj 1977, ss. 114—119.
15. A. P. Miszyna, I. W. Proskuriakow, *Algebra wyższa*, PWN, Warszawa 1966.
16. J. Roszkiewicz, *Układy RC o stałych rozłożonych*, WKŁ, Warszawa 1972.
17. R. A. Stein, A. I. A. Salama, *Resistance and Capacitance Minimization in Low-Pass RC Ladder Networks*, IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. CAS-22, no. 1, 1975, pp. 27—31.
18. J. H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Oxford 1965.

W. MITKOWSKI

A CLASS OF LADDER NETWORKS

Summary

In the paper ladder networks of *RL* and *GC* as well as *RLC* and *rlc* types are considered. For the *RC* networks a problem of synthesis is solved. The synthesis is based on minimization of a cost function equal to the sum of the resistances and capacities in the system. The solution is sought for in the set of systems equivalent with respect to a given state equation.

W. MITKOWSKI

CERTAINS SYSTÈMES ÉCHELLES

Résumé

Dans l'étude on a analysé les systèmes échelles hétérogènes des types *RL* et *GC* ainsi que *RLC* et *rlc*. On a étudié le problème de la synthèse des circuits *RC*. En résolvant ce problème pour les circuits *RC* décrit par l'équation d'état fixée on a trouvé le circuit dont la somme de résistance et de capacité est minime.

W. MITKOWSKI

UNTERSUCHUNGEN MIT GEWÄHLTEN LEITERSYSTEMEN

Zusammenfassung

In diesem Beitrag werden die *RL*- und *GC*-Leitersysteme, auch *RLC*- und *rlc*-Systeme untersucht. Für die *RC*-Leitersysteme wurde die Synthesenaufgabe gelöst. Für die *RC*-Systemmenge der gegebenen Zustandsgleichung ist das System der Minimalsumme für Widerstand und Kapazität gefunden worden.

В. МИТКОВСКИ

НЕКОТОРЫЕ ЛЕСТНИЧНЫЕ СХЕМЫ

Резюме

Обсужден метод исследования лестничных схем типа: *RL* и *GC* а также *RLC* и *rlc*. Рассмотрена проблема минимизации функции стоимости лестничных схем типа *RC* реализирующих уравнение состояния. Функция стоимости соответствует сумме сопротивления и емкости в схеме.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1978, 24, z. 3, ss. 639—651

621.375.026

Analiza strat komutacyjnych w tranzystorowym wzmacniaczu mocy klasy D

KAZIMIERZ WALEWSKI (GDAŃSK)

Instytut Telekomunikacji Politechniki Gdańskiej

Otrzymano 6.4.1977

W artykule omówiono pracę tranzystorowych wzmacniaczy mocy w układach kluczowanych. Rozważając możliwość wykorzystania wzmacniacza kluczowanego w zakresie częstotliwości radiowych przebadano zjawisko komutacji układu w oparciu o bezinercyjny model tranzystorów. Określono moc strat związaną z procesem komutacji oraz sprawność wzmacniacza i ich zależność od warunków pracy i częstotliwości roboczej. Wskazano możliwość doboru optymalnych warunków pracy, przy których straty komutacyjne są najmniejsze. Porównanie wyników analizy z eksperymentem wykazuje dużą zgodność.

1. WPROWADZENIE

Jednym z najważniejszych parametrów eksploatacyjnych półprzewodnikowego wzmacniacza mocy jest jego sprawność energetyczna. Z dotychczasowych badań, ogłaszanych w licznych publikacjach, wynika, że najskuteczniejszym sposobem poprawy sprawności kolektorowej wzmacniacza jest kluczowanie tranzystora. Polega ono na periodycznym przełączeniu tranzystora z obszaru odcięcia do obszaru nasycenia. Znane są wzmacniacze z pojedynczym tranzystorem kluczowanym, zwane układami wzmacniającymi klasy E [1] oraz wzmacniacze z dwoma tranzystorami kluczowanymi na przemian — układy wzmacniające klasy D [2, 3][1].

Wzmacniacz klasy E charakteryzują następujące własności:

— wysoka sprawność kolektorowa (powyżej 90%),

— duża graniczna częstotliwość robocza,

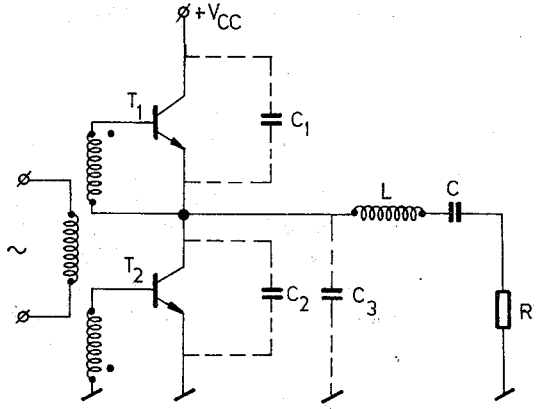
— duże maksymalne napięcie chwilowe na kolektorze, które znacznie przekracza szczytowe napięcie w konwencjonalnym wzmacniaczu klasy C, gdyż osiąga wartość $v_{cmax} = (3 \div 4) V_{cc}$,

— niewielka moc wyjściowa, ograniczona ze względu na konieczność stosowania niedużego napięcia zasilania V_{cc}.

[1] Zgodnie z definicjami wprowadzonymi przez autorów [1], [5] klasa D i E oznacza kluczowany rodzaj pracy wzmacniacza, przy której element aktywny przełączany jest ze stanu nasycenia do stanu odcięcia. W klasie D okres nasycenia i okres odcięcia elementu aktywnego są sobie równe. W klasie E oba okresy mogą być różne.

Wzmacniacz taki mimo zalet (dwie pierwsze cechy) jest kłopotliwy w praktycznym zastosowaniu. Ze względu na to, że dobroć obwodu kolektorowego musi być mała, istnieje konieczność dodatkowej filtracji harmonicznych w obciążeniu. Utrudnione jest zestrojenie obwodu kolektorowego, który należy dostroić do częstotliwości większej od częstotliwości roboczej, tak aby obwód ten posiadał charakter indukcyjny. Ograniczenie mocy wyjściowej przez duże napięcie szczytowe jest poważną wadą takiego wzmacniacza mocy.

Drugą grupę wzmacniaczy kluczowanych stanowią wzmacniacze klasy *D*. Do grupy tej należy wzmacniacz z kluczowaniem napięcia, którego analizie poświęcona jest niniejsza praca. Schemat wzmacniacza jest pokazany na rys. 1.



Rys. 1. Dwutaktowy wzmacniacz kluczowany z kluczowaniem napięcia

W zakresie małych częstotliwości wzmacniacz taki cechują następujące własności:
— wysoka sprawność kolektorowa (powyżej 90%),
— mały współczynnik szczytu napięcia kolektorowego (maksymalne napięcie na kolektorze v_{cmax} jest bliskie napięciu zasilania V_{cc}),
— duża moc wyjściowa, ograniczona dopuszczalnymi wartościami prądu kolektorowego i napięcia na kolektorze,
— stała moc wyjściowa, w małym stopniu zależna od warunków pracy,
— prosty i łatwy przy strojeniu układ.

Doświadczalne próby zastosowania wzmacniacza kluczowego klasy *D* w zakresie większych częstotliwości wskazują, że parametry energetyczne wzmacniacza ulegają wyraźnemu pogorszeniu. Nie tłumaczy tego zjawiska model wzmacniacza stosowany przy małej częstotliwości [3]. Model ten uwzględnia tylko straty mocy w rezystancji nasycenia tranzystorów, natomiast pomija straty mocy związane z przełączaniem czyli komutacją tranzystorów. Dotychczas w dostępnej literaturze nie analizowano wzmacniacza klasy *D* z uwzględnieniem zjawiska, które ma istotny wpływ na pracę wzmacniacza przy dużych częstotliwościach roboczych. Celem pracy jest wyjaśnienie mechanizmu strat mocy w układzie oraz ustalenie zależności parametrów energetycznych wzmacniacza kluczowanego od częstotliwości.

Na podstawie badań doświadczalnych stwierdzono, że we wzmacniaczu pokazanym na rys. 1 o parametrach energetycznych wzmacniacza w zakresie dużych częstotliwości decydują:

— straty komutacyjne związane z przełączaniem tranzystorów,
— straty związane z prądem skrośnym, przepływającym przez równocześnie przewodzące tranzystory.

Dla uproszczenia analizy i większej przejrzystości wyników oba zjawiska przedyskutowano oddzielnie. Tu rozważymy zjawisko strat komutacyjnych, a efekty związane z inercją tranzystorów będą przedmiotem następnego artykułu.

2. STRATY KOMUTACYJNE WE WZMACNIACZU KLASY *D*

W rzeczywistym wzmacniaczu, obok pojemności przewidzianych w układzie, występują również pojemności pasożytnicze, które przy wyższych częstotliwościach roboczych mogą mieć istotny wpływ na pracę wzmacniacza. We wzmacniaczu przedstawionym na rys. 1 należy uwzględnić obecność pojemności kolektorowych C_1 i C_2 oraz pojemności montażowej C_3. Wszystkie te pojemności dołączone są równolegle do kluczowanych tranzystorów. Ich wpływ na pracę wzmacniacza zwiększa się w miarę wzrostu częstotliwości roboczej. Przełączanie tranzystorów ze stanu odcięcia do stanu nasycenia odbywa się w momencie, gdy pojemności pasożytnicze są naładowane i napięcie na nich jest równe napięciu zasilania V_{cc}. Energia zmagazynowana w pojemnościach pasożytniczych może być częściowo rozpraszana w tranzystorach, co powoduje zwiększenie mocy traconej w kolektorach.

Analizę strat mocy związanych z komutacją układu przeprowadzimy przy założeniu, że identyczne tranzystory są przełączane kolejno w stan nasycenia, aktywny i odcięcia. Sinusoidalne źródło sterujące wprowadza każdy z tranzystorów w obszar przewodzenia w trakcie połowy okresu roboczego. Założenie takie oznacza, że rozważamy wzmacniacz zbudowany z tranzystorów, które można uważać za bezinercyjne. We wzmacniaczu takim nie płynie prąd skrośny, gdyż nie występuje zjawisko przeciągania czasu trwania impulsu prądu kolektorowego. Założymy również, że obwód rezonansowy R, L, C jest dostrojony do częstotliwości roboczej a jego dobroć jest wystarczająco duża, aby zapewnić sinusoidalny przebieg prądu wyjściowego.

Przyjęty do analizy model zastępczy wzmacniacza pokazany jest na rys. 2. Pojemność C_p będąca sumą pojemności pasożytniczych C_1, C_2 i C_3 ładuje się przez tranzystor T_1 i rozładowuje przez tranzystor T_2. Jeśli przyjąć dla uproszczenia, że rezystancja tranzystora w obszarze nasycenia r_s jest pomijalnie mała, tzn. $r_s = 0$, wówczas straty mocy w tranzystorach występują tylko w czasie przełączania układu. Ponieważ przełączanie układu występuje dwukrotnie w trakcie każdego okresu, moc tracona w tranzystorach określona jest wyrażeniem

$$P_c = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} (v_{c1} i_{c1} + v_{c2} i_{c2}) dt. \tag{1}$$

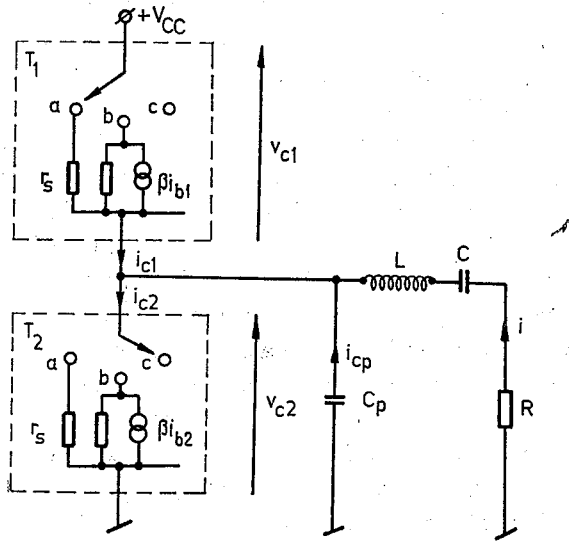
W celu obliczenia tej mocy należy określić przebiegi prądów i napięć obu tranzystorów oraz ustalić zależność czasu, w którym następuje przełączanie układu, od parametrów obwodu i warunków pracy wzmacniacza.

Biorąc pod uwagę, że w okresach aktywnej pracy tranzystorów prądy kolektorowe powtarzają sinusoidalny przebieg prądów bazy a przy nasyceniu tranzystorów prądy

kolektorowe określone są przez prąd dołączonego do tranzystora obwodu można zapisać prądy i_{c1} oraz i_{c2} w następującej postaci:

$$i_{c1} = \begin{cases} -i = -I_1 \sin(\omega t - \gamma) & t < t_1, \\ -\beta I_b \sin \omega t & t_1 \leqslant t \leqslant 0, \\ 0 & t > 0, \end{cases}$$

$$i_{c2} = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \beta I_b \sin \omega t & 0 \leqslant t \leqslant t_2, \\ i = I_1 \sin(\omega t - \gamma) & t > t_2, \end{cases} \tag{2}$$



Rys. 2. Schemat zastępczy wzmacniacza kluczowanego

gdzie:

$I_1 = k\beta I_b$ — amplituda prądu w obwodzie rezonansowym,

I_b — amplituda prądu bazy,

γ — kąt przesunięcia fazowego prądu w obwodzie rezonansowym względem prądu bazy,

k — współczynnik wysterowania wzmacniacza, $0 < k < 1$,

t_1, t_2 — odpowiednio moment początkowy i końcowy komutacji wzmacniacza.

Napięcia kolektorowe obu tranzystorów można zapisać w postaci:

$$v_{c1} = V_{cc} - v_{c2} \tag{3}$$

$$v_{c2} = V_{cc} - \frac{1}{C_p} \int_{t_1}^{t} i_{cp}\, dt. \tag{4}$$

Przebiegi prądów i napięć w układzie pokazano na rys. 3.

Prąd i_{cp}, który płynie przez pojemność C_p wyznaczymy z sumy prądów węzłowych w miejscu połączenia tranzystorów

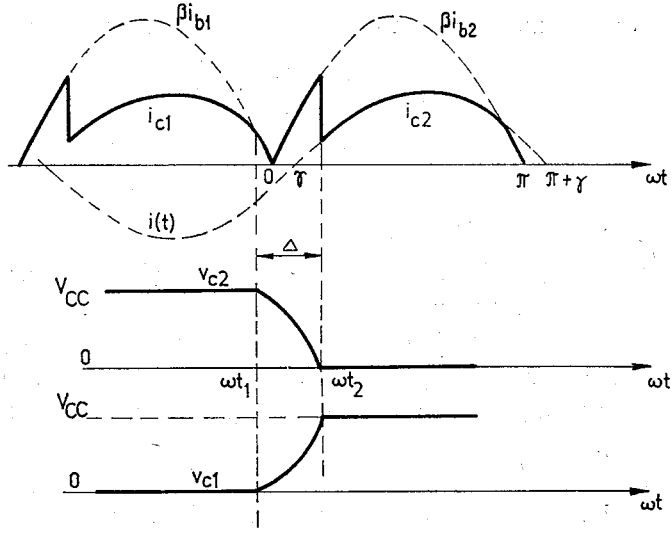
$$i_{cp} = i_{c2} - i - i_{c1}. \tag{5}$$

W praktyce komutacja układu jest procesem krótkotrwałym i prawie zawsze spełniona jest zależność $\Delta = \omega(t_2 - t_1) < 45°$, dzięki czemu w przedziale Δ można zastąpić sinusoidalne przebiegi prądów przebiegami liniowymi. Stosując liniową aproksymację prądów i_{c1}, i_{c2} oraz i w rozważanym przedziale Δ można po podstawieniu (5) do (4) otrzymać

$$v_{c2} = V_{cc} - \frac{\beta I_b}{C_p}\left[\frac{1-k}{2}\omega(t^2 - t_1^2) + k\gamma(t - t_1)\right]. \tag{6}$$

Dla wyznaczenia czasu komutacji, czyli ustalenia granic całkowania w (1), należy określić moment początkowy t_1 i końcowy t_2 procesu przełączania. Można to uczynić podstawiając warunki graniczne do otrzymanych uprzednio zależności. W momencie t_1 napięcie na pojemności C_p jest ustalone, więc nie płynie prąd i_{cp}. Wstawiając do zależności (5) warunek

$$i_{cp}(t_1) = 0$$



Rys. 3. Przebiegi prądów kolektorowych i napięć na tranzystorach w układzie kluczowanym z pojemnością pasożytniczą

oraz korzystając ze wspomnianej linearyzacji prądów można określić moment początkowy komutacji układu, otrzymując wyrażenie o następującej postaci:

$$t_1 = -\frac{1}{\omega}\frac{\gamma k}{1-k}.$$

Z uzyskanej zależności można wyznaczyć wartość kąta γ. Kąt γ uzależniony od t_1 podstawimy do wzoru (6) przy wyznaczaniu czasu komutacji.

W momencie t_2, kończącym komutację, następuje nasycenie tranzystora T_2 i napięcie na tym tranzystorze osiąga wartość zerową

$$v_{c2}(t_2) = 0.$$

Podstawiając ten warunek do zależności (6) i rugując kąt γ otrzymamy

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2}{1-k} V_{cc} C_p \frac{\omega}{\beta I_b}}. \tag{7}$$

Wyrażenie (7) określa czas komutacji układu. Zależność tę można przedstawić w postaci łatwiejszej od interpretacji, jeśli uwzględnić fakt, że skończony czas przełączania (t_2-t_1) wpływa tylko w bardzo nieznacznym stopniu na zawartość pierwszej harmonicznej prądu w obwodzie rezonansowym.

Można wykazać, że jeśli $\Delta < 45°$, to amplituda prądu I_1 w obwodzie pobudzanym napięciem $v_{c2}(t)$ nie różni się więcej niż o 2% od amplitudy prądu w przypadku pobudzania tego samego obwodu przebiegiem prostokątnym. Przy pobudzeniu przebiegiem prostokątnym o amplitudzie V_{cc} prąd w obwodzie rezonansowym jest sinusoidalny a jego amplituda równa jest

$$I_1 = \frac{2}{\pi}\frac{V_{cc}}{R}. \tag{8}$$

Wykorzystując zależność (8) można wyznaczyć napięcie V_{cc}, a następnie powiązać je z prądem bazy i współczynnikiem wzmocnienia prądowego tranzystora

$$V_{cc} = \frac{\pi}{2} RI_1 = \frac{\pi}{2} Rk\beta I_b. \tag{9}$$

Po podstawieniu (9) do (7) wyznaczymy czas komutacji układu

$$t_2-t_1 = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{k}{1-k}}\,\pi\omega RC_p\,. \tag{10}$$

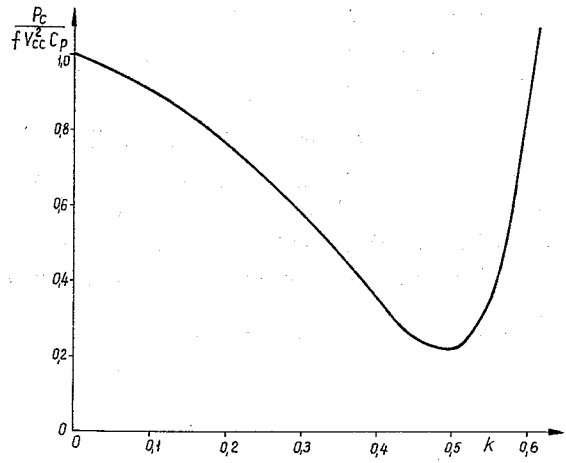
Uzyskane wyrażenia (7) i (10) pokazują, że czas komutacji wzmacniacza zależy od wysterowania tranzystorów, parametrów obwodu i częstotliwości roboczej. Zwiększenie wysterowania prowadzi do skrócenia czasu przełączania. Należałoby więc oczekiwać, że moc tracona w tranzystorach zmniejszy się i wzrośnie sprawność układu. Jednocześnie zmaleje wzmocnienie mocy, gdyż moc wyjściowa jest praktycznie stała (zmiany amplitudy I_1 są pomijalnie małe).

Obliczenie mocy traconej w tranzystorach podczas procesu komutacji wymaga obliczenia całki (1). Jak pokazano w Dodatku, po podstawieniu linearyzowanych przebiegów prądów i_{c1} oraz i_{c2} a także wyrażeń (3) i (6) moc strat komutacyjnych może być przedstawiona w postaci

$$P_c = \frac{fV_{cc}^2 C_p}{9(1-k)}\left[9-16\frac{k}{1-k}+8\left(\frac{k}{1-k}\right)^2\right]. \tag{11}$$

Przy bardzo silnym przesterowaniu tranzystorów, gdy wartość współczynnika k zmierza do zera, istnieje (przynajmniej teoretycznie) możliwość skrócenia czasu przełączania do zera. Wówczas moc tracona w tranzystorach wynosić będzie $fV_{cc}^2 C_p$, co oznacza, że cała energia zmagazynowana w pojemności pasożytniczej C_p wytracona jest w tranzystorach; ładowanie pojemności odbywa się przez tranzystor T_1, rozładowanie — przez tranzystor T_2. Okazuje się jednak, że praca odbywająca się w takich warunkach nie zapewnia największej sprawności energetycznej wzmacniacza.

Zależność unormowanej mocy strat $P_c/fV_{cc}^2 C_p$ od współczynnika k pokazano na rys. 4. Widać, że istnieje optymalny poziom wysterowania, przy którym straty mocy w tranzystorach będą najmniejsze. W takim przypadku ładowanie pojemności C_p odbywa się tylko częściowo przez tranzystor T_1, a częściowo kosztem prądu obciążenia $i(t)$. Również roz-



Rys. 4. Zależność mocy strat w tranzystorach od wysterowania wzmacniacza

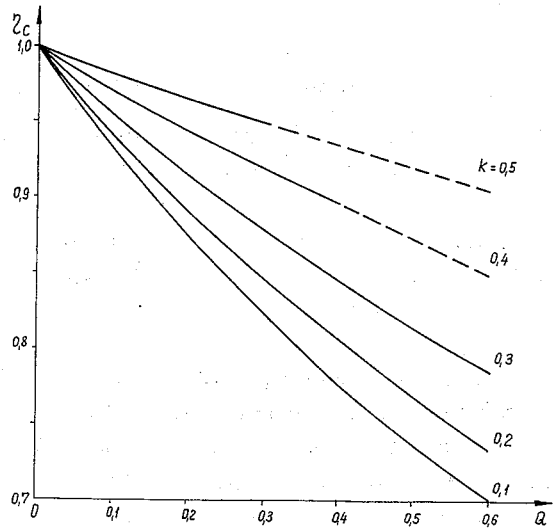
ładowanie pojemności C_p odbywa się częściowo przez obwód obciążenia, a częściowo przez tranzystor T_2. Ilustruje to rys. 3, z którego widać, że w chwili włączenia ($t = 0$) tranzystora T_2 napięcie na pojemności C_p jest mniejsze niż V_{cc}.

Sprawność kolektorową wzmacniacza można przedstawić w postaci

$$\eta_c = \frac{P_1}{P_1 + P_c} = \frac{1}{1 + \frac{P_c}{P_1}}, \tag{12}$$

gdzie P_1 jest mocą wyjściową, którą wyrazimy zależnością

$$P_1 = \frac{1}{2} I_1^2 R = \frac{2}{\pi} \frac{V_{cc}^2}{R}. \tag{13}$$



Rys. 5. Zależność sprawności kolektorowej od warunków pracy wzmacniacza kluczowanego

Dzieląc moc strat (11) przez moc wyjściową (13) otrzymamy

$$\frac{P_c}{P_1} = \frac{\pi\omega RC_p}{36(1-k)}\left[9-16\frac{k}{1-k}+8\left(\frac{k}{1-k}\right)^2\right]. \tag{14}$$

Wyrażenie to można wykorzystać we wzorze (12) dla określenia sprawności. Zależność sprawności kolektorowej od współczynnika $Q = \omega RC_p$ pokazano na rys. 5. Część krzywych przedstawiona linią przerywaną dotyczy takiego zakresu zmienności Q, w którym nierówność $\Delta < 45°$ nie jest spełniona i zależność (14) jest mało dokładna.

Z wykresu widać, że zwiększenie wysterowania tranzystorów w stosunku do poziomu optymalnego $\left(k = \frac{1}{2}\right)$ prowadzi do pogorszenia sprawności, mimo iż czas komutacji ulega skróceniu.

3. PODSUMOWANIE

Przeprowadzona analiza strat komutacyjnych we wzmacniaczu kluczowanym pozwala na sformułowanie następujących wniosków.

1° Uzyskanie wysokiej sprawności kolektorowej wzmacniacza możliwe jest tylko przy małych wartościach współczynnika Q. Przy dużych częstotliwościach roboczych należy dążyć do zapewnienia minimalnej pojemności pasożytniczej przez dobór odpowiednich tranzystorów i właściwy montaż.

2° Czas komutacji zależy od wysterowania tranzystorów i parametrów obwodu (R i C_p) oraz częstotliwości roboczej. Zwiększenie wysterowania albo zmniejszenie pojemności równoległej lub silniejsze obciążenie wzmacniacza prowadzi do skrócenia czasu przełączania (pomijamy tu wpływ inercji tranzystorów).

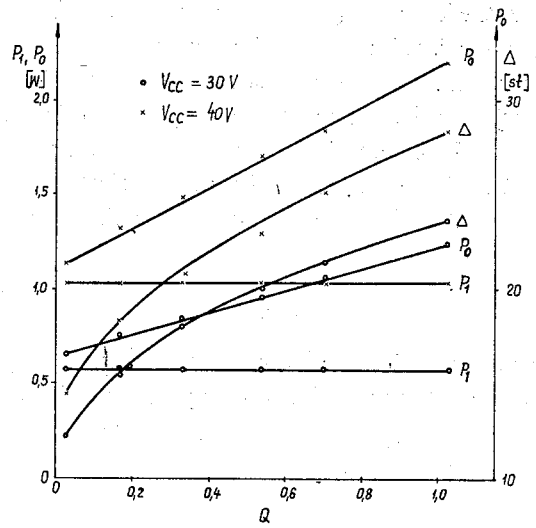
3° Przy silnym przesterowaniu, gdy wartość współczynnika k zmierza do zera, czas przełączania układu również zmierza do zera. W tranzystorach rozpraszana jest wówczas moc równa $fV_{cc}^2 C_p$.

4° Istnieje optymalny poziom wysterowania tranzystorów, przy którym $I_b \cong \frac{2I_1}{\beta}$. Straty mocy w tranzystorach są wówczas najmniejsze. Zarówno zbyt silne jak i zbyt słabe wysterowanie prowadzi do zwiększenia mocy traconej w tranzystorach i pogorszenia sprawności wzmacniacza.

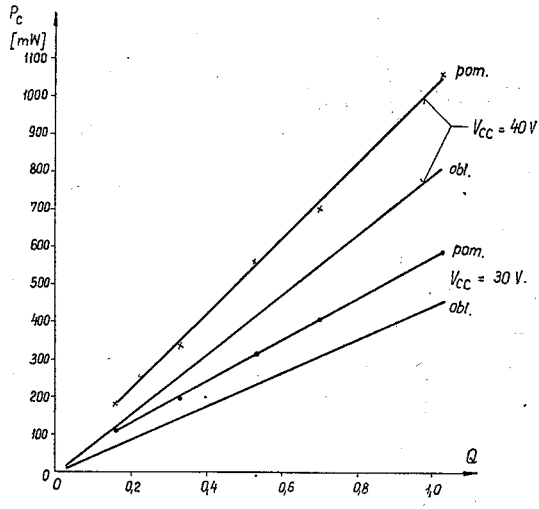
Proces przełączania wzmacniacza kluczowanego i związane z tym procesem straty komutacyjne mogą w pewnych warunkach w istotny sposób pogarszać energetyczne parametry wzmacniacza nawet w tym zakresie częstotliwości, w którym tranzystory można uważać za elementy bezinercyjne.

Istnieje teoretycznie możliwość wyeliminowania strat komutacyjnych przez odpowiednie uformowanie sygnału sterującego [4]. Sygnał ten powinien zapewniać taką pracę tranzystorów, aby w określonym czasie oba tranzystory znajdowały się w stanie odcięcia. Wówczas pojemność C_p przeładowuje się całkowicie przez obwód rezonansowy. W chwili włączenia tranzystora T_1 napięcie na pojemności wynosi V_{cc}, więc pojemność jest już naładowana bez udziału tranzystora T_1, a w momencie włączenia T_2 napięcie to równe jest zeru, co

oznacza że pojemność C_p rozładowana została przed włączeniem tego tranzystora. Nie ma zatem żadnych strat mocy związanych z przeładowaniem pojemności przez tranzystory. W praktyce zapewnienie takich warunków pracy jest trudne i wiąże się z komplikacją układu. Dlatego należy się liczyć z występowaniem strat komutacyjnych, które pogarszają własności wzmacniacza kluczowanego w miarę wzrostu częstotliwości. Zwiększenie częstotliwości roboczej wiąże się również z wystąpieniem zjawiska prądów skrośnych, które zostanie przedyskutowane w następnym artykule.



Rys. 6. Zależność mocy wyjściowej P_1, mocy dostarczonej P_o i unormowanego czasu komutacji Δ od wartości pojemności pasożytniczej C_p
W trakcie pomiarów R = const i ω = const



Rys. 7. Porównanie obliczonej i pomierzonej mocy strat komutacyjnych we wzmacniaczu kluczowanym

W celu weryfikacji analizy teoretycznej wykonano pomiary strat komutacyjnych w układzie doświadczalnym. Eksperymenty przeprowadzono przy stosunkowo niewielkich częstotliwościach (ok. 0,5 MHz), aby wpływ inercji tranzystorów był nieznaczny. Dołączając zewnętrzną pojemność C_p mierzono moc dostarczoną P_o, moc wyjściową P_1 i czas przełączania $\frac{\Delta}{\omega}$, ustawiając każdorazowo optymalny poziom wysterowania. Wyniki pomiarów przedstawiono na rys. 6. Znając czas przełączenia układu można z (10) określić wartość współczynnika k i po wstawieniu do (11) obliczyć moc strat komutacyjnych. Obliczoną wartość mocy strat komutacyjnych przedstawiono na rys. 7. Na tym samym rysunku pokazano zmierzoną moc strat, związaną z procesem komutacji. Moc ta jest różnicą mocy dostarczonej i mocy wyjściowej oraz mocy traconej w trakcie nasycenia tranzystorów. Tę ostatnią pomierzono w układzie, w którym nie dołączono zewnętrznej pojemności C_p. Wówczas wartość Q jest bliska zeru, gdyż pojemności kolektorowe są małe. Porównanie zamieszczonych wyników wskazuje na dużą zgodność analizy z eksperymentem.

DODATEK

Moc strat komutacyjnych obliczamy w oparciu o zależność (1). Biorąc pod uwagę przebieg prądów w obu tranzystorach przedstawiony zależnością (2) można zapisać

$$P_c = \frac{2}{T}\left[\int_{t_1}^{0} v_{c1}\, i_{c1}\, dt + \int_{0}^{t_2} v_{c2}\, i_{c2}\, dt\right]. \tag{D1}$$

Aproksymując przebiegi prądów przebiegami liniowymi oraz wykorzystując (3) i (6) mamy

$$P_c = \frac{2}{T}\left\{\int_{t_1}^{0} V_{cc}(-\beta I_b \omega t)\, dt + \int_{t_1}^{0} -V_{cc}(-\beta I_b \omega t)\, dt + \int_{t_1}^{0} \frac{\beta I_b}{C_c}\left[\frac{1-k}{2}\omega(t^2 - t_1^2) + k\gamma \times\right.\right.$$

$$\times (t - t_1)\Big](-\beta I_b \omega t)\, dt + \int_{0}^{t_2} V_{cc}(\beta I_b \omega t)\, dt + \int_{0}^{t_2} -\frac{\beta I_b}{C_p}\left[\frac{1-k}{2}\omega(t^2 - t_1^2) + \right.$$

$$\left.\left. + k\gamma(t - t_1)\right](\beta I_b \omega t)\, dt\right\}. \tag{D2}$$

Wyrażenia podcałkowe w trzeciej i piątej całce są identyczne a całki różnią się tylko granicami całkowania. Oznaczymy te całki odpowiednio symbolami J_3 i J_5 a czwartą całkę symbolem J_4 i obliczymy kolejno każdą z nich osobno

$$J_3 = -\frac{(\beta I_b \omega)^2}{C_p}\left[\frac{1-k}{8} t_1^4 + \frac{k\gamma}{6\omega} t_1^3\right],$$

$$J_5 = -\frac{(\beta I_b \omega)^2}{C_p}\left[\frac{1-k}{8} t_2^4 - \frac{1-k}{4} t_1^2 t_2^2 + \frac{k\gamma}{\omega}\left(\frac{1}{3} t_2^3 - \frac{1}{2} t_1 t_2^2\right)\right], \tag{D3}$$

$$J_4 = \frac{1}{2} V_{cc} \beta I_b \omega t_2^2.$$

Stąd korzystając z zależności (9) mamy

$$P_c = \frac{2}{T}[J_4+J_3+J_5] = \frac{\omega}{\pi}[J_4+J_3+J_5] =$$

$$= \frac{V_{cc}^2}{kR\pi^2}(\omega t_2)^2 - \frac{V_{cc}^2}{6(kR\pi)^2}\frac{1-k}{\pi\omega C_p}[3(\omega t_2)^4-(\omega t_1)^4+6(\omega t_1)^2(\omega t_2)^2-8(\omega t_1)(\omega t_2)^3].$$

Podstawiając zależności:

$$\omega t_2 = \omega t_1 + \Delta, \tag{D4}$$

$$\frac{k}{1-k}\pi\omega RC_p = \Delta^2, \tag{D5}$$

otrzymamy

$$P_c = \frac{V_{cc}^2}{kR\pi^2}[(\omega t_1)^2+2(\omega t_1)\Delta+\Delta^2] - \frac{V_{cc}^2}{6kR\pi^2}\frac{1}{\Delta^2}[4(\omega t_1)\Delta^3+3\Delta^4] =$$

$$= \frac{V_{cc}^2}{6kR\pi^2}[6(\omega t_1)+8(\omega t_1)\Delta+3\Delta^2]. \tag{D6}$$

Wykorzystamy obecnie uzyskaną uprzednio zależność

$$\omega t_1 = -\frac{k}{1-k}\gamma$$

podstawiając ją do (D6). Uzyskamy wówczas wyrażenie

$$P_c = \frac{V_{cc}^2}{6kR\pi^2}\left[6\left(\frac{k}{1-k}\right)^2\gamma^2+3\Delta^2-8\frac{k}{1-k}\Delta\gamma\right]. \tag{D7}$$

Występujący w tym wyrażeniu kąt γ jest kątem przesunięcia fazowego prądu, który płynie przez dostrojony do częstotliwości pobudzenia obwód rezonansowy *RLC*. Przy założeniu, że dobroć obwodu jest wystarczająco duża prąd ten jest sinusoidalny a jego faza jest określona przez fazę pierwszej harmonicznej napięcia występującego na wejściu obwodu rezonansowego. Rozkładając w szereg Fouriera periodyczny przebieg napięcia v_{c2} pokazany na rys. 3 można określić amplitudę i fazę pierwszej harmonicznej tego napięcia. Wynoszą one odpowiednio:

$$U_1 = \frac{4}{\pi\Delta}V_{cc}\sqrt{1+\frac{2}{\Delta^2}-\frac{2}{\Delta}\left(\sin\Delta+\frac{\cos\Delta}{\Delta}\right)}, \tag{D8}$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{\Delta\sin\Delta+\cos\Delta-1}{\Delta\cos\Delta-\sin\Delta}. \tag{D9}$$

Jak łatwo sprawdzić, nawet przy $\Delta = 45°$ amplituda pierwszej harmonicznej U_1 w przebiegu v_{c2} niewiele różni się od amplitudy pierwszej harmonicznej w przebiegu prostokątnym o takiej samej amplitudzie V_{cc}. Z własności tej skorzystano w zależnościach (9) i (13).

Kąt fazowy γ jest funkcją unormowanego czasu przełączania Δ, czyli zależy od wysterowania wzmacniacza i parametrów obwodu. Jak wykazują obliczenia numeryczne zależności (D9) kąt γ można przedstawić w postaci

$$\gamma = \frac{2}{3}\Delta = \frac{2}{3}\omega(t_2-t_1). \tag{D10}$$

Podstawiając tę ostatnią zależność do (D7) otrzymamy

$$P_c = \frac{V_{cc}^2}{18kR\pi^2}\left[8\left(\frac{k}{1-k}\right)^2 + 9 - 16\frac{k}{1-k}\right]. \tag{D11}$$

Wykorzystując jeszcze raz (D5) uzyskamy ostateczną postać wyrażenia określającego moc strat komutacyjnych, którą podano we wzorze (11).

LITERATURA

1. N. O. Sokal, A. D. Sokal, *Class E — a new class high-efficiency tuned single-ended switching power amplifiers*, IEEE J. of Solid State Circuits, t. SC — 10, nr 3, 1975, s. 168—176.
2. W. J. Chudobiak, D. F. Page, *Frequency and power limitations of class-D transistor amplifiers*, IEEE J. of Solid State Circuits, t. SC — 4, nr 1, 1969, s. 25—37.
3. M. R. Osborne, *Design of tuned transistor power amplifiers*, Electronic Engineering, t. 40, nr 8, 1968, s. 436—443.
4. S. A. Żukow, W. B. Kozyriew, *Dwuchtaktnyj kluczewoj generator bez kommutatiwnych potier*, Połuprowodnikowyje pribory w technikie elektroswiazi, nr 15, 1975, s. 95—107.
5. P. J. Baxandall, *Transistor sine-wave LC oscillators*, Proc. IEE, t. 106, pt. B, suppl. 16, 1959, s. 748—758.

K. WALEWSKI

ANALYSIS OF SWITCHING LOSSES IN A CLASS D TRANSISTOR POWER AMPLIFIER

Summary

Transistor switching amplifiers are considered as high frequency power amplifiers. A simple model for switching inertialless transistors in the voltage-switching amplifier has been developed and analysed. The collector power dissipation due to the switching process has been calculated. It is shown that the power dissipation and collector efficiency are closely dependent on frequency, drive level and load conditions. It is found that the power dissipation can be minimized by appropriate choice of drive level. Good agreement is observed between the experiment data and the theoretical calculations.

K. WALEWSKI

ANALYSE DES PERTES DE COMMUTATION DANS L'AMPLIFICATEUR DE PUISSANCE À TRANSISTORS DE CLASSE D

Résumé

L'article décrit le travail des amplificateurs de puissance à transistors dans les circuits à manipulation. En envisageant la possibilité de l'utilisation de l'amplificateur à manipulation au domaine de radiofréquences on a étudié le phénomène de commutation du circuit sur le modèle sans inertie à transistors. On a défini la puissance dissipée liée au processus de commutation, le rendement de l'amplificateur et la dépendance de ces derniers des conditions de travail et de sa fréquence. On a montré la possibilité du choix des conditions optimales de travail, pour lesquelles les pertes de commutation sont les moindres. La comparaison des résultats de l'analyse avec ceux des expériences montre une conformité parfaite.

K. WALEWSKI

ANALYSE DER KOMMUTATIONSVERLUSTE IM TRANSISTORLEISTUNGSVERSTÄRKER DER D-KLASSE

Zusammenfassung

Im vorliegenden Aufsatz wurde die Arbeitsweise von Transistorleistungsverstärkern in Systemen von Betriebsverstärkern erwogen. Indem die Ausnutzungsmöglichkeit eines Betriebsverstärkers im Bereich von Radiofrequenzen überlegt worden ist, ist die Erscheinung der Kommutationsanordnung in Anlehnung an ein nicht inertiales Transistormodell überprüft worden. Im weiteren wurden die mit dem Kommutationsprozeß verbundene Verlustleistung, die Verstärkerleistung sowie die Abhängigkeit der Verluste von Arbeitsbedingungen und der Betriebsfrequenz bestimmt. Es wurde auch auf die Möglichkeit hingewiesen, optimale Arbeitsbedingungen zu schaffen, bei denen die Kommutationsverluste am geringsten sind. Der Verhleich der Analysenergebnisse mit den Versuchsergebnissen ergab eine gute Übereinstimmung.

К. ВАЛЕВСКИ

АНАЛИЗ КОММУТАТИВНЫХ ПОТЕРЬ В ТРАНЗИСТОРНОМ УСИЛИТЕЛЕ МОЩНОСТИ КЛАССА Д

Резюме

Рассматривается работа транзисторных ключевых генераторов мощности. Обсуждена возможность применения двухтактной ключевой схемы при высоких частотах. Введена простая модель безинерционных транзисторов и дан анализ коммутативных потерь. Найдена связь коммутативных потерь и кпд усилителя с режимом и рабочей частотой. Показана возможность оптимального режима когда коммутативные потери малы. Получено хорошее совпадение результатов расчетов и экспериментов.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1978, 24, z. 3. ss. 653—676

621.394.147.3
621.394.67

Korygowanie błędów drogą dekodowania większościowego

MARIAN DĄBROWSKI (WARSZAWA)
Instytut Telekomunikacji Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 10.1.1977

W artykule omówiono grupy kodów cyklicznych, które można dekodować większościowo. Dla kodu cyklicznego wprowadza się estymatory ortogonalne w postaci sumy modulo 2 niektórych elementów macierzy ortogonalnej H kodu (n, k). Przy zdefiniowanych estymatorach ortogonalnych określona została reguła dekodowania większościowego jedno- i wieloetapowego. Istotną rolę przy podejmowaniu decyzji o elementach ciągów nadawanych ma funkcja większościowa zdefiniowana na zmiennych boolowskich (rozdz. 3).

Omówiono kody cykliczne dające się określić za pomocą zależności dla geometrii skończonych *PG* i *EG*, reguły dekodowania większościowego tych kodów oraz możliwości korekcyjne kodów. Podano układy dekoderów dwóch typów oraz zależności między konstrukcją dekodera i estymatorami ortogonalnymi.

1. WSTĘP

Dekodowanie korekcyjne kodów liniowych, poza najprostszymi przykładami kodów, związane jest z komplikacją algorytmów, a w konsekwencji z bardzo dużymi lub wręcz nierealizowalnymi technicznie układami dekoderów. Dekodowanie większościowe wydaje się znacznie prostsze w porównaniu z innymi metodami dekodowania korekcyjnego. Jednak nie wszystkie rodzaje kodów są dekodowalne większościowo. Warunki optymalnego dekodowania większościowego i ogólne możliwości korekcji podano w rozdz. 2 i 3. Szczególnie pożyteczne rodzaje kodów to kody geometrii skończonych[1] *PG* i *EG*. Duża część tych kodów daje się generować z kodów *BCH* i kodów Reed-Mullera. Istnieją możliwości jedno- lub wieloetapowego dekodowania tych kodów (rozdz. 5 i 6). W rozdz. 7 i 8 podano techniczne metody wyznaczania estymatorów ortogonalnych dla korekcji oraz dwa typy dekoderów. Możliwości jednoetapowego dekodowania większościowego kodów ortogonalizowalnych względem zbiorów pozycji w ciągach kodowych analizowane są w rozdz. 9. W zakończeniu (rozdz. 10) podsumowano rezultaty i oceniono parametry kodów dekodowalnych większościowo porównując je z granicą Gilberta-Varshamowa i Eliasa.

W literaturze polskiej dekodowanie większościowe analizowane jest w [11], rozdział 5; zamieszczono tam również tablice niektórych kodów dekodowalnych większościowo (dodatek 4).

---

[1] Terminem: geometria skończona *PG* i *EG* będziemy dalej nazywać geometrie o skończonej liczbie punktów *PG* (ang. *projective geometry*) i *EG* (*euclidean geometry*) — patrz np. [12], rozdz. 12.

2. ESTYMATORY ORTOGONALNE

Rozpatrywać będziemy binarne kody cykliczne (n, k) o długości n [1].

Ciągi nadawane oznaczać będziemy przez

$$\underline{t} = (t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots, t_{n-1}), \tag{2.1}$$

gdzie:

t_i dla $i = 0, 1, \ldots, (k-1)$ — pozycje informacyjne,

t_i dla $i = k, (k+1), \ldots, (n-1)$ — pozycje kontrolne.

Zakładamy zatem, że kodowanie odbywa się w sposób systematyczny (to założenie nie zmniejsza ogólności stwierdzeń).

Przyjmiemy, że na przesyłane ciągi $\underline{t}$ w kanale oddziaływają ciągi błędów $\underline{e}$ w sposób addytywny oraz, że elementy e_i ciągów błędów

$$\underline{e} = (e_0, e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_{n-1}) \tag{2.2}$$

generowane są z jednakowym prawdopodobieństwem niezależnym od i.

Przy powyższych założeniach, ciąg odebrany ma postać

$$\underline{r} = (r_0, r_1, \ldots, r_r, \ldots, r_{n-1}), \tag{2.3}$$

gdzie

$$r_i = t_i \oplus e_i, \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2.4}$$

Dla kodów binarnych wartości pozycji ciągów t_i, e_i, r_i są elementami $GF(2)$, a dodawanie w (2.4) jest dodawaniem mod 2.

W procesie dekodowania kodów liniowych korzystamy z macierzy ortogonalnej H o wymiarach $(n-k)xn$ [1]. Dla systematycznego kodu cyklicznego macierz H ma postać

$$H = [P^T : I_{(n-k)}] = [P^T; \quad I_{(n-k)}], \tag{2.5}$$

gdzie:

P^T jest macierzą kontrolną o wymiarach $(n-k) \times k$,

$I_{(n-k)}$ jest macierzą jednostkową rzędu $n-k$.

Wyraz macierzy H w j-tym wierszu oraz i-tej kolumnie oznaczać będziemy przez h_{ji}.

Dla każdego słowa kodowego (ciągu kodowego) $\underline{t}$, należącego do kodu cyklicznego (n, k) o macierzy ortogonalnej H określanej przez (2.5), zachodzi:

$$s_j = \sum_{i=0}^{n-1} t_i h_{ji} = 0, \tag{2.6}$$

dla każdego wiersza macierzy H, tzn. dla

$$j = k, \quad k+1, \ldots, n-1,$$

gdzie Σ — oznacza sumowanie mod 2.

Dla ciągu odebranego $\underline{r}$, uwzględniając (2.6), zachodzi

$$s_j = \sum_{i=0}^{n-1} r_i h_{ji} = \sum_{i} (t_i \oplus e_i) h_{ji} = \sum_{i=0}^{n-1} e_i h_{ji}. \tag{2.7}$$

Wartości $s_j \in GF(2)$, dla $j = k, k+1, \ldots, n-1$, nazywane są pozycjami syndromu ciągu odebranego $\underline{r}$. Wartości pozycji s_j syndromu

$$\underline{s} = (s_k, s_{k+1}, \ldots, s_{n-1}), \tag{2.8}$$

dla ustalonego kodu (tzn. ustalonej macierzy H), zależą od ciągu błędów $\underline{e}$. Niestety, nie jest to zależność wzajemnie jednoznaczna (różnych ciągów błędów $\underline{e}$ jest 2^n, natomiast różnych syndromów $\underline{s}$ — tylko 2^{n-k}); stąd podstawowy problem dekodowania polega na określeniu najbardziej prawdopodobnego $\underline{e}$ przy wyznaczonym $\underline{s}$.

Massey [2], przy analizie dekodowania progowego, zdefiniował uogólnione sumy kontrolne. W tym artykule zdefiniujemy estymatory ortogonalne w sposób odmienny.

Niech

$$E_m = \sum_{j=k}^{n-1} \gamma_{mj} s_j, \tag{2.9}$$

dla $m = 1, 2, \ldots, M$, będzie zbiorem sum (mod 2) pozycji syndromu $\underline{s}$ ważonych przez współczynniki $\gamma_{mj} \in GF(2)$. Współczynniki γ_{mj} tworzą macierz Γ o wymiarach $M \times (n-k)$.

Podstawiając (2.7) do (2.9), otrzymamy

$$E_m = \sum_{j=k}^{n-1} \gamma_{mj} \sum_{i=0}^{n-1} e_i h_{ji} = \sum_i e_i \sum_j \gamma_{mj} h_{ji};$$

stąd

$$E_m = \sum_{i=0}^{n-1} a_{mi} e_i, \tag{2.10}$$

$$m = 1, 2, \ldots, M,$$

gdzie:

$$a_{mi} \overset{\text{df}}{=} \sum_j \gamma_m h_{ji}, \tag{2.11}$$

$$a_{mi} \in GF(2).$$

Postać (2.11) skłania do traktowania a_{mi} jako wyrazów macierzy A o wymiarach $M \times n$. Formalnie, M-wierszowa macierz A zastąpiła macierz H przy wyznaczaniu sum E_m określonych przez (2.9). Dla ustalonego m wiersz macierzy A jest liniową kombinacją wierszy macierzy H o współczynnikach γ_{mj}, a więc przez dobór γ_{mj} dla ustalonego m możemy dowolny ciąg, należący do przestrzeni ortogonalnej kodu (n, k), podstawić do macierzy A.

Wartości E_m, dla $m = 1, 2, \ldots, M$, zależą od ciągu błędów $\underline{e}$ (podobnie jak wartości pozycji syndromu s_j). Zależność E_m od $\underline{e}$ określona jest przez m-ty wiersz A, podobnie jak zależność s_j od $\underline{e}$ wyznaczona jest przez j-ty wiersz H.

Dla celów dekodowania większościowego żądać będziemy, aby macierz A była ortogonalna względem l-tej pozycji e_l w sensie następującej definicji.

Macierz

$$A = [a_{mi}]; \quad m = 1, 2, \ldots, M; \quad i = 0, 1, \ldots, n-1; \tag{2.12}$$

jest ortogonalna względem l-tej pozycji ciągu błędów $\underline{e}$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

1) wartości a_{ml}, dla $m = 1, 2, \ldots, M$, są równe 1;

2) wszystkie kolumny A, z wyjątkiem l-tej, zawierają co najwyżej jedną „1".

Przy powyższym warunku sumy E_m, określone przez (2.10), będziemy nazywać estymatorami ortogonalnymi pozycji błędnej e_l.

Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy estymatorami ortogonalnymi E_m oraz ortogonalnością sum kontrolnych zdefiniowaną w [3].

3. DEKODOWANIE WIĘKSZOŚCIOWE (*DW*)

Zdefiniujemy funkcję większościową następująco. Jeśli $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \{x_i\}$ są zmiennymi boolowskimi, to funkcja większościowa

$$\operatorname{maj}\{x_i\} \overset{\text{df}}{=} \begin{cases} 1, & \text{jeśli} \quad \sum_{i=1}^{m} x_i > \frac{m}{2}, \\ 0, & \text{jeśli} \quad \sum_{i=1}^{m} x_i \leqslant \frac{m}{2}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Dekodowanie większościowe (*DW*) jest regułą podejmowania decyzji o wartości dekodowanej pozycji błędnej e_l taką, że

$$\hat{e}_l = \operatorname{maj}(E_1, \ldots, E_m, \ldots, E_M), \tag{3.2}$$

gdzie:

E_m; $m = 1, \ldots, M$ są estymatorami ortogonalnymi e_l, określonymi przez (2.9) lub (2.11),

$\hat{e}_l$ — decyzja dekodera.

Załóżmy, że w odbieranym ciągu wystąpiło

$$t \leqslant \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor \tag{3.3}$$

błędów ($\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą x).

Jeżeli l-ta pozycja $e_l = 0$ (brak błędu), to z konstrukcji macierzy A wynika, że co najmniej

$$M - \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor \tag{3.4}$$

estymatorów E_m będzie równych 0, a więc na podstawie reguły (3.2) $\hat{e}_l = 0$.

Jeżeli $e_l = 1$ (błąd), to co najmniej

$$M - \left(\left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor - 1 \right) \geqslant \left\lfloor \frac{M}{2} + 1 \right\rfloor \tag{3.5}$$

estymatorów E_m będzie równych 1, a więc na podstawie reguły (3.2) $\hat{e}_l = 1$.

Jak widać, decyzje podejmowane w dekodowaniu większościowym są zgodne z „głosowaniem" estymatorów ortogonalnych.

W ogólności, reguła dekodowania większościowego dotyczy kodów liniowych q-narnych. Dalsze zainteresowania pozostaną jednak ograniczone do cyklicznych kodów binarnych. Można wykazać [1], że jeśli w kodzie istnieje $M = d-1$ estymatorów ortogonalnych względem każdej pozycji, to kod ma odległość minimalną co najmniej d.

Zatem, jeśli uda się stworzyć macierz A o $d-1$ wierszach, ortogonalną względem jednej pozycji w kodzie cyklicznym, to wobec cykliczności kodu (dowód Petersona [4]), estymatory E_m będą ortogonalne względem każdej pozycji kodu i kod ma odległość minimalną co najmniej d.

Które rodzaje kodów są szczególnie podatne na tworzenie estymatorów o żądanych cechach? Przy dekodowaniu DW w szczególności zainteresowanymi jesteśmy przestrzenią ortogonalną kodu. Niech d' oznacza odległość minimalną kodu dualnego względem kodu rozpatrywanego. Zatem każdy niezerowy ciąg przestrzeni ortogonalnej ma wagę co najmniej d', a więc każdy wiersz macierzy A ma wagę co najmniej d'.

Wobec tego, wykluczając pozycję l-tą (dekodowaną), w której występuje „1" w każdym wierszu macierzy A, pozostałe $(d-1)$ „1" może wystąpić tylko raz wśród $n-1$ pozycji macierzy A. Można wobec tego utworzyć co najwyżej

$$M = \frac{n-1}{d'-1}$$

estymatorów ortogonalnych E_m.

Powyższe rozważania prowadzą do wniosku, że kod cykliczny (n, k) jest dekodowalny większościowo pod warunkiem, że wystąpiło

$$t \leqslant \frac{n-1}{2(d'-1)} \tag{3.6}$$

błędów, gdzie d' jest odległością minimalną kodu dualnego od kodu (n, k).

Ten wniosek sugeruje, że należy do dekodowania DW wybierać takie kody, dla których kody dualne mają małą odległość minimalną. Kodami takimi są kody Reeda-Mullera [5] i ich uogólnienie — kody geometrii skończonych PG i EG [6] i [3].

Podana definicja dekodowania większościowego dotyczy dekodowania jednoetapowego, tzn. takiego, w którym estymatory są ortogonalne względem jednej pozycji ciągu, a decyzja podejmowana jest w jednym „głosowaniu" określonym przez (3.2).

4. DEKODOWANIE L-ETAPOWE

Istnieje bardzo ograniczona liczba kodów cyklicznych (n, k) o odległości minimalnej d, dla których można znaleźć $d-1$ estymatorów E_m ortogonalnych względem jednej pozycji ciągu kodowego; istnieje wobec tego jedynie mała grupa kodów ortogonalnych dekodowalnych większościowo w jednym etapie. Grupę kodów dekodowalnych większościowo można powiększyć znacznie przez wprowadzenie dekodowania L-etapowego. Wprowadzimy definicję.

Macierz

$$A^{(L)} = [a_{mi}^{(L)}]; \quad m = 1, 2, \ldots, M; \quad i = 0, 1, \ldots, n-1; \tag{4.1}$$

jest ortogonalna względem zbioru pozycji

$$(l_1, l_2, \ldots, l_k) = \{l\}$$

ciągu $\underline{e}$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

1) dla każdego $i \in \{l\}$ elementy $a_{mi}^{(L)} = 1$,

2) dla każdego $i \neq l_k \in \{l\}$, kolumna macierzy A zawiera co najwyżej jedną „1".

Załóżmy, że można utworzyć macierz $A^{(L)}$ o $M = d-1$ wierszach ortogonalną względem zbioru pozycji.

Zauważmy, że w zbiorze $\{l\}$ może być co najwyżej $d'/2$ pozycji, gdzie d', jak poprzednio, jest odległością minimalną kodu dualnego (gdyby było więcej pozycji, to wówczas niektóre wiersze $A^{(L)}$ posiadałyby mniej niż $\left\lfloor \frac{d'}{2} \right\rfloor$ pozycji niezerowych, oprócz tych w zbiorze $\{l\}$ — suma dwóch takich wierszy dałaby ciąg o wadze mniejszej od d' co jest niemożliwe).

Zauważmy ponadto, że jeżeli można utworzyć $d-1$ wierszy $A^{(L)}$ ortogonalnych do zbioru $\{L\}$, to z cykliczności kodu wynika, że można utworzyć inne macierze $A^{(L)}$ ortogonalne do innych (w szczególności przesuniętych o i pozycji) pozycji $\underline{e}$.

Na podstawie macierzy $A^{(L)}$ oraz ciągu $\underline{e}$ można wyznaczyć estymatory $E_m^{(L)}$, analogicznie jak w (2.10), które będą ortogonalne do zbioru $\{l\}$. Estymatory $E_m^{(L)}$ zgodnie z regułą (3.2) wyznaczą decyzję

$$\hat{e}^{(L)} = \text{maj}(E_1^{(L)}, E_2^{(l)}, \ldots, E_M^{(l)}), \tag{4.2}$$

gdzie $M = d-1$.

Jeżeli w ciągu $\underline{e}$ było mniej niż $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ pozycji niezerowych, decyzja $\hat{e}^{(L)}$ oznacza

$$\hat{e}^{(L)} = \begin{cases} 1 \text{ — jest błąd w pozycjach } i \in \{l\}, \\ 0 \text{ — nie ma błędu w pozycjach } i \in \{l\}. \end{cases}$$

Analogiczne decyzje o innych zbiorach pozycji ciągu $\underline{e}$ można wyznaczyć na podstawie odpowiednich macierzy $A^{(L)}$. W ten sposób zakończony został pierwszy etap dekodowania większościowego. W wyniku pierwszego etapu otrzymaliśmy informacje o błędach w pewnych zbiorach pozycji ciągu odbieranego. Przed wykonaniem następnego etapu zakłada się, że decyzje $\hat{e}^{(L)}$ są prawdziwe. Konstruując macierz $A^{(L-1)}$ o $d-1$ wierszach, w następnym etapie korzystamy z pierwotnej macierzy H zmodyfikowanej przez uzupełnienie jej decyzjami $\hat{e}^{(L)}$, np. w następujący sposób:

1) każda decyzja $\hat{e}^{(L)}$ generuje dodatkowy wiersz dołączony do macierzy H,

2) w dołączonym wierszu wyrazy w kolumnach i, odpowiadającym pozycjom $i \in \{l\}$, są równe 1; pozostałe wyrazy są zerowe.

W rezultacie, po l-etapach dekodowania, otrzymamy decyzję $\hat{e}$ dotyczącą jednej pozycji ciągu $\underline{e}$. Opis dekodowania L-etapowego zostanie sformalizowany w dalszej części.

Teraz wyprowadzimy zależność ogólną na liczbę błędów korygowanych w dekodowaniu DW w L-etapach.

Aby korygować t_L błędów, należy skonstruować co najmniej $2t_L$ estymatorów $E_m^{(l)}$ ortogonalnych względem podzbioru $\{l\}$. Jak stwierdziliśmy poprzednio, w podzbiorze takim nie może być więcej niż $\left\lfloor \frac{d'}{2} \right\rfloor$ pozycji, gdzie d' jest odległością minimalną kodu dual-

nego. Ponieważ każdy estymator $E_m^{(l)}$ generowany jest przez słowo kodowe kodu dualnego, którego waga wynosi co najmniej d' oraz co najwyżej $\left\lfloor \frac{d'}{2} \right\rfloor$ pozycji tego słowa jest wspólnych dla każdego estymatora, to pozostałe pozycje w liczbie nie mniejszej niż

$$d' - \left\lfloor \frac{d'}{2} \right\rfloor$$

muszą znajdować się w

$$n - \left\lfloor \frac{d'}{2} \right\rfloor,$$

pozycjach ciągu $\underline{e}$.

Wobec tego, że te ostatnie pozycje muszą być rozłączne dla poszczególnych estymatorów (warunek ortogonalności) można utworzyć co najwyżej

$$\frac{n - \left\lfloor \frac{d'}{2} \right\rfloor}{d' - \left\lfloor \frac{d'}{2} \right\rfloor}$$

estymatorów ortogonalnych do zbioru pozycji $\underline{e}$. Zatem

$$t_L \leqslant \frac{1}{2} \frac{n - \left\lfloor \frac{d'}{2} \right\rfloor}{d' - \left\lfloor \frac{d'}{2} \right\rfloor}. \tag{4.3}$$

Podstawiając zależności

$$x - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{dla } x \text{ parzystych,} \\ \frac{x+1}{2} & \text{dla } x \text{ nieparzystych} \end{cases}$$

łatwo stwierdzić, że

$$t_L \leqslant \frac{2n-d'}{2d'} \quad \text{dla } d' \text{ parzystych,} \tag{4.4}$$

oraz

$$t_L \leqslant \frac{2n-d+1}{2(d'+1)} \quad \text{dla } d' \text{ nieparzystych.} \tag{4.5}$$

5. DEKODOWANIE KODÓW *PG*

Pewną podgrupę kodów cyklicznych stanowią kody rozpatrywane w geometriach skończonych *PG* i *EG* [6], [1] i [3]. Kody te, ze względu na swoją konstrukcję, mogą być łatwo dekodowane większościowo. Często kody *PG* są kodami *BCH*. Dlatego też dolną granicę na odległość minimalną d wyznacza się podobnie jak dla kodów *BCH*.

Kod rzędu r w geometrii $PG(m, 2^s)$ ma odległość minimalną [1]

$$d \geqslant d_{BCH} = \frac{2^{s(m-r+1)}-1}{2^s-1} + 1. \tag{5.1}$$

Wykażemy, że kod taki może być dekodowany większościowo w r-etapach algorytmem Reeda [7]. Z definicji, kod $PG(m, 2^s)$ rzędu $r < m$ jest binarnym kodem cyklicznym o długości

$$n = 2^{s(m+1)}-1 \tag{5.2}$$

(z pozycjami należącymi do $GF(2)$) takim, że wszystkie wielomiany, należące do jego przestrzeni ortogonalnej, należą do wszystkich powierzchni $P_r \subset PG(m, p^s)$. Odpowiedniość przestrzeni ortogonalnej kodu i powierzchni P_r jest wzajemnie jednoznaczna.

Z konstrukcji kodów w geometrii PG wynika [3], że każdemu punktowi powierzchni P_r odpowiada pozycja ciągu o niezerowanej wartości; ciąg n-pozycjowy o wadze

$$W_r = 2^{s(r+1)}-1 \tag{5.3}$$

określany jest przez powierzchnię P_r. Powierzchnia P_{r-1} oraz punkt nie należący do P_{r-1} wyznaczają powierzchnię P_r. Każdy punkt nie należący do P_{r-1} musi należeć tylko do jednej P_r (własność geometrii). Z kolei wszystkie powierzchnie P_r „przecinają się" na P_{r-1}. Zatem liczba punktów geometrii PG, nie należących do P_{r-1}, musi być równa liczbie punktów należących do N powierzchni P_r, ale nie należących do P_{r-1}.

Ponieważ liczba punktów P_x dla $0 < x \leqslant m$ wynosi

$$2^{sx}+2^{s(r-1)}+\ldots+2^s+1, \tag{5.4}$$

to kilka poprzednich zdań można zapisać w postaci

$$(2^{sm}+2^{s(m-1)}+\ldots+2^s+1)-(2^{s(r-1)}+2^{s(r-2)}+\ldots+2^s+1) = N2^{sr}, \tag{5.5}$$

gdzie 2^{sr} jest liczbą punktów należących do P_r, ale nie należących do P_{r-1}.

Lewą stronę (5.5) można uprościć do postaci

$$2^{sm}+2^{s(m-1)}+\ldots+2^{sr} = 2^{sr}(2^{s(m-r)}+\ldots+2^s+1) = 2^{sr}\frac{(2^{s(m-r+1)}-1)}{(2^s-1)}. \tag{5.6}$$

Jak widać, liczba powierzchni P_r, przecinających się na powierzchni P_{r-1}, wynosi

$$N = \frac{2^{s(m-r+1)}-1}{2^s-1}. \tag{5.7}$$

Innymi słowami, jest to liczba ciągów ortogonalnych względem pozycji odpowiadających punktom P_r. Pozycje te można przyjąć w pierwszym etapie dekodowania. Kolejnych r etapów prowadzi do ortogonalizacji na określonej pozycji ciągu.

Ponieważ można utworzyć N estymatorów ortogonalnych, to odległość minimalna kodu wynosi co najmniej $N+1$. Przez porównanie (5.1) i (5.7) można stwierdzić, że odległość minimalna d_{DW} kodów PG dekodowanych większościowo jest równa odległości d_{BCH} wyznaczonej dla tych kodów

$$d_{DW} = d_{BCH} = \frac{2^{s(m-r+1)}-1}{2^s-1} + 1. \tag{5.8}$$

Zatem kod $PG(m, 2^s)$ rzędu r o długości n, jak w (5.2), może korygować

$$t_r \leqslant \left\lfloor \frac{d_{DW}-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2^{s(m-r+1)}}{2(2^s-1)} \right\rfloor \tag{5.9}$$

błędów.

W szczególnym przypadku $s = 1$, kody binarne PG są kodami dualnymi względem kodów Reeda-Mullera z pominiętą jedną pozycją.

Dla kodów $PG(m, q)$, gdzie $q = p^s$, p — liczba pierwsza, o długości

$$n = \frac{p^{s(m+1)}-1}{p^s-1} \tag{5.10}$$

odległość minimalna przy dekodowaniu większościowym wynosi

$$d_{DW} = \frac{p^{s(m-r+1)}-1}{p^s-1} + 1. \tag{5.11}$$

W tablicy 1 zestawiono parametry wybranych kodów PG dla $p = 2, 3, 5$ (kolumna t' zostanie wyjaśniona w rozdz. 9).

6. DEKODOWANIE KODÓW *EG*

Analiza kodów w geometrii EG jest zbliżona do analizy w geometrii PG.

Kod $EG(m, p^s)$, rzędu r o długości

$$n = p^{sm}-1 \tag{6.1}$$

i o elementach z $GF(p)$, jest kodem cyklicznym, którego przestrzeń ortogonalna zawiera wszystkie wielomiany odpowiadające wszystkim takim powierzchniom P_{r+1} należącym do $EG(m, p^s)$, które nie przecinają punktu zerowego.

Dalej ograniczymy się do kodów binarnych ($p = 2$).

Wyprowadzenie zależności na odległość minimalną kodów EG jest możliwe przez wyznaczenie granicy d_{BCH} [1]

$$d_{BCH} = 2^{s(m-r-1)} + 2^{s(m-r-2)+1} - 1. \tag{6.2}$$

Przy dekodowaniu większościowym drogą wyznaczania zależności pomiędzy powierzchniami P_{r+1} i P_r w EG, analogicznie jak dla kodów PG, otrzymamy [1]

$$d_{DW} = \frac{2^{s(m-r)}-1}{2^s-1}. \tag{6.3}$$

Zatem, kod $EG(m, 2^s)$ rzędu r może być dekodowany $(r+1)$-etapowo i jest w stanie korygować

$$t_L \leqslant \left\lfloor \frac{d_{DW}-1}{2} \right\rfloor \tag{6.4}$$

błędów. Ogólnie dla kodów q-narnych, gdzie $q = p^s$ (p — liczba pierwsza) odległości minimalne wynoszą odpowiednio

$$d_{BCH} = p^{s(m-r-1)} + p^{s(m-r-2)+1} - 1, \tag{6.5}$$

$$d_{DW} = \frac{p^{s(m-r)}-1}{p^s-1}. \tag{6.6}$$

W przypadku szczególnym, $p = 2$, $s = 1$, kody EG są kodami Reeda-Mullera z pominiętą jedną pozycją.

Odległość d_{DW} jest równa d_{BCH} dla kodów binarnych w przypadku gdy $s = 1$ lub $m-r = 2$. Dla innych wartości parametrów

$$d_{DW} < d_{BCH}. \tag{6.7}$$

Tablica 1

Wybrane kody $PG(m, p^s)$

n	k	m, p, s	r	$d_{DW} = d_{BCH}$	t	t'
7	3	2,2,1	1	4	1	
15	10	3,2,1	2	4	1	1
15	4	3,2,1	1	8	3	
21	11	2,2,2	1	6	2	
31	25	4,2,1	3	4	1	1
31	15	4,2,1	2	8	3	2—
31	5	4,2,1	1	16	7	
63	56	5,2,1	4	4	1	1
63	41	5,2,1	3	8	3	2—
63	21	5,2,1	2	16	7	5—
63	6	5,2,1	1	32	15	
73	45	2,2,3	1	10	4	
85	68	3,2,2	2	6	2	2
85	24	3,2,2	1	22	10	
273	191	2,2,4	1	18	8	
585	520	3,2,3	2	10	4	4
585	184	3,2,3	1	74	36	
1057	813	2,2,5	1	34	16	
4161	3431	2,2,6	1	66	32	
4369	4112	3,2,4	2	18	8	8
4369	1568	3,2,4	1	274	136	
4681	4555	4,2,3	3	10	4	4
4681	3105	4,2,3	2	74	36	32—
4681	590	4,2,3	1	586	292	
13	6	2,3,1	1	5	2	
40	29	3,3,1	2	5	2	1—
40	10	3,3,1	1	14	6	
91	54	2,3,2	1	11	5	
121	105	4,3,1	3	5	2	1—
121	60	4,3,1	2	14	6	5—
121	15	4,3,1	1	41	20	
757	540	2,3,3	1	29	14	
31	15	2,5,1	1	7	3	
156	120	3,5,1	2	7	3	2—
156	38	3,5,1	1	32	15	
651	425	2,5,2	1	27	13	

W tablicy 2 podano wybrane kody binarne *EG*. Tablice 3 i 4 są pomocne przy ocenie różnicy rzeczywistej odległości minimalnej przy dekodowaniu większościowym d_{DW} i odległości d_{BCW}.

Tablica 2

Wybrane kody $EG(m, 2^s)$

n	k	m, s	r	d_{DW}	t
7	4	3,1	1	3	1
15	11	4,1	2	3	1
15	7	2,2	0	5	2
15	5	4,1	1	7	3
31	26	5,1	3	3	1
31	16	5,1	2	7	3
31	6	5,1	1	15	7
63	57	6,1	4	3	1
63	48	3,2	1	5	2
63	42	6,1	3	7	3
63	37	2,3	0	9	4
63	22	6,1	2	15	7
63	13	3,2	0	21	10
63	7	6,1	1	31	15
255	175	2,4	1	17	8

$d_{BCH} = d_{DW}$ dla wszystkich wymienionych kodów, z wyjątkiem kodu (63,13), dla którego $d_{BCH} = 23$

Tablica 3

Tablica pomocnicza 1

$m-r$ \ s	2	3	4	5	6
3	23 21 64	79 73 512	287 273 4096	1087 1057 32768	4223 4161 262144
4	95 85 256	639 585 4096	4607 4369 65536		
5	383 341 1024	5119 4681 32768			
6	1535 1363 4096				
7	6143 5461 16384				

Układ wartości:

$$\begin{array}{|cc|}\hline a & \\ b & c \\ \hline\end{array}$$

$a = 2^{s(m-r-1)} + 2^{s(m-r-2)+1} - 1$

$b = (2^{s(m-r)} - 1)/(2^s - 1)$

$c = 2^{sm}$

Tablica 4

Tablica pomocnicza 2

$m-r$ \ s	1	2	3	4	5	6
2	5 4 9	11 10 81	29 28 729	83 82 6561	245 244 59049	731 730 531441
3	17 13 27	107 91 729	809 757 19683	6803 6643 531441	59777 59223 $14{,}3\cdot 10^6$	
4	53 40 81	971 820 6561	21869 20440 531441			
5	161 121 243	8747 7381 59049				
6	485 364 729					

Układ wartości:

$$\begin{array}{|cc|}\hline a & \\ b & c \\ \hline \end{array}$$

$a = 3^{s(m-r-1)} + 3^{s(m-r-2)+1} - 1$
$b = (3^{s(m-r)} - 1)/(3^s - 1)$
$c = 3^{sm}$

7. WYZNACZANIE ESTYMATORÓW ORTOGONALNYCH

Podamy metodę znajdowania estymatorów ortogonalnych; metoda ta może być zastosowana do wielu kodów cyklicznych, które są ortogonalizowane w geometriach skończonych.

Skorzystamy z następującego twierdzenia [5].

Równanie

$$\sum_{i \in P} h_{ji} = 0 \tag{7.1}$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{i \in P} \alpha^i = 0, \tag{7.2}$$

gdzie:

h_{ji} — element macierzy H,

P — podzbiór numerów kolumn macierzy H,

α — element pierwotny wielomianu $h(x)$ ortogonalnego względem wielomianów kodowych kodu cyklicznego (n, k) generowanego przez $g(x)$

$$g(x)h(x) = x^n \oplus 1.$$

Korzystając z tego twierdzenia, wiersze macierzy $A = a_{mi}$ wyznaczamy według poniższego algorytmu.

1) Ustalamy kod: (n, k), $g(x)$, d.

2) Wyznaczamy wielomian ortogonalny

$$h(x) = \frac{x^n \oplus 1}{g(x)}.$$

3) Wyznaczamy pierwiastek pierwotny α oraz jego potęgi α^i dla $i = 0, \ldots, n-2$; potęgi pierwiastka zapisujemy w postaci wielomianowej.

4) Wybieramy wielomian należący do przestrzeni ortogonalnej kodu o niezerowym współczynniku w pozycji, względem której przeprowadzona będzie ortogonalizacja; w szczególności wielomian $h(x)$ należy do przestrzeni ortogonalnej i posiada niezerowy współczynnik w pozycji zerowej słowa kodowego.

5) Wybrany wielomian (np. $h(x)$) będzie pierwszym spośród $d-1$, które należy wyznaczyć.

6) Kolejne wielomiany wyznaczamy, korzystając z wyżej podanego twierdzenia, w następujący sposób:

— ustalamy współczynniki niezerowe wielomianu w pozycji ortogonalizowanej v_1 oraz w $(l-2)$ pozycjach v_j $(j = 2, 3, \ldots, l-1)$, które są zerowe w poprzednich wielomianach, gdzie l jest wagą wielomianu przyjętego na początku;

— pozycję l-tą wyznaczamy z zależności

$$\alpha^{v_l} = \sum_{\substack{i \in P \\ i \neq v_l}} \alpha^i; \qquad v_l = \Big(\sum_{\substack{i \in P \\ i \neq v_l}} i\Big) \bmod n,$$

co gwarantuje (patrz twierdzenie), że wyznaczony wielomian należy do przestrzeni ortogonalnej kodu.

7) Procedura zakończy się po wyznaczeniu $d-1$ wielomianów.

Przykład. Kod $PG(4, 2)$ rzędu 1. Jest to kod (31,5) o odległości minimalnej $d = 16$ i wielomianie $h(x) = x^5 \oplus x^2 \oplus 1$. W tabl. 5 podano potęgi pierwiastka pierwotnego α^i dla $i = 0, 1, \ldots, 30$ w zapisie binarnym współczynników wielomianów. Jako początkowy wielomian przyjęto

$$f(x) = 1 \oplus x^2 \oplus x^5.$$

Został on umieszczony w pierwszym wierszu tabl. 6 w postaci współczynników przy określonych potęgach. Ortogonalizacja następować będzie względem pozycji 0. Drugi wielomian wyznaczono zakładając „1" w pozycjach 0 i 1 (dotychczas „nie używana"); pozycję $v = 18$ wyznaczono z zależności

$$\alpha^v = \alpha^0 \oplus \alpha^1$$

na podstawie tabl. 5. Analogicznie wyznaczone zostały pozostałe wielomiany ortogonalne względem pozycji $i = 0$.

Tak wyznaczona macierz $A = [a_{mi}]$ zawiera $M = d-1$ wierszy oraz n kolumn. Każdy wiersz macierzy A zawiera współczynniki a_{mi} m-tego estymatora ortogonalnego E_m określonego równaniem (2.10). Wszystkie estymatory E_m są ortogonalne względem pozycji zerowej ciągu błędów $\underline{e}$.

Druga metoda wyznaczania estymatorów ortogonalnych E_m dla kodu (n, k) wiąże się z określeniem estymatora równaniem (2.9) i wyznaczeniem macierzy $\Gamma = [\gamma_{mj}]$. Procedura jest następująca.

1) Po wyznaczeniu wielomianu $h(x)$ wyznaczamy macierz kodu dualnego generowanego przez $h(x)$. Macierz ta dla kodu systematycznego ma postać

$$H' = [I_{n-k};\ P],$$

Tablica 5

Elementy $GF(2^5)$ jako wielomiany mod (x^5+x^2+1)

i	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
0					1
1				1	
2			1		
3		1			
4	1				
5			1		1
6		1		1	
7	1		1		
8		1	1		1
9	1	1		1	
10	1				1
11			1	1	1
12		1	1	1	
13	1	1	1		
14	1	1	1		1
15	1	1	1	1	1
16	1	1		1	1
17	1			1	1
18				1	1
19			1	1	
20		1	1		
21	1	1			
22	1		1		1
23		1	1	1	1
24	1	1	1	1	
25	1	1			1
26	1		1	1	1
27		1		1	1
28	1		1	1	
29		1			1
30	1			1	

W tablicy przedstawiono elementy α^i jako wielomiany $f_i(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$ (zerowe współczynniki a pominięto)

Tablica 6

Wartości niezerowych wyrazów a_{mi} macierzy A dla kodu (31,5)

m \ i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	1	1		1		1																									
2	1	1																	1												
3	1			1																										1	
4	1				1						1																				
5	1					1																						1			
6	1						1																						1		
7	1							1																			1				
8	1								1							1															
9	1									1										1											
10	1										1																	1			
11	1											1			1																
12	1												1																		
13	1													1																	
14	1														1																
15	1															1															
16	1																1														
17	1																	1													
18	1																		1												
19	1																			1											
20	1																				1										
21	1																					1									
22	1																						1								
23	1																							1							
24	1																								1						
25	1																									1					
26	1																										1				
27	1																											1			
28	1																												1		
29	1																													1	
30	1																														1

gdzie:

I_{n-k} — macierz jednostkowa rzędu $n-k$,

P — macierz kontrolna o wymiarach $(n-k)\times k$ związana z wielomianem $h(x)$. Część P macierzy H' można wyznaczyć, przykładowo korzystając z elementów $GF(2^s)$ traktowanych jako wielomiany mod $h(x)$.

2) Ustalamy pozycję, względem której nastąpi ortogonalizacja. Jeżeli np. ustalimy pozycję zerową, to istotną rolę w procedurze będzie mieć ostatnia kolumna macierzy P.

3) Spośród wierszy macierzy P wybieramy te, które mają takie same wyrazy we wszystkich kolumnach z wyjątkiem ostatniej. Numery tych wierszy, np. $j_1, j_2, \ldots$ wyznaczają wiersz macierzy, przykładowo

$$\gamma_{m,j_1} = \gamma_{m,j_2} = \ldots = 1.$$

Pozostałe wyrazy w tym wierszu są zerowe.

4) Procedura jak w p. 3) jest powtarzana aż do uzyskania

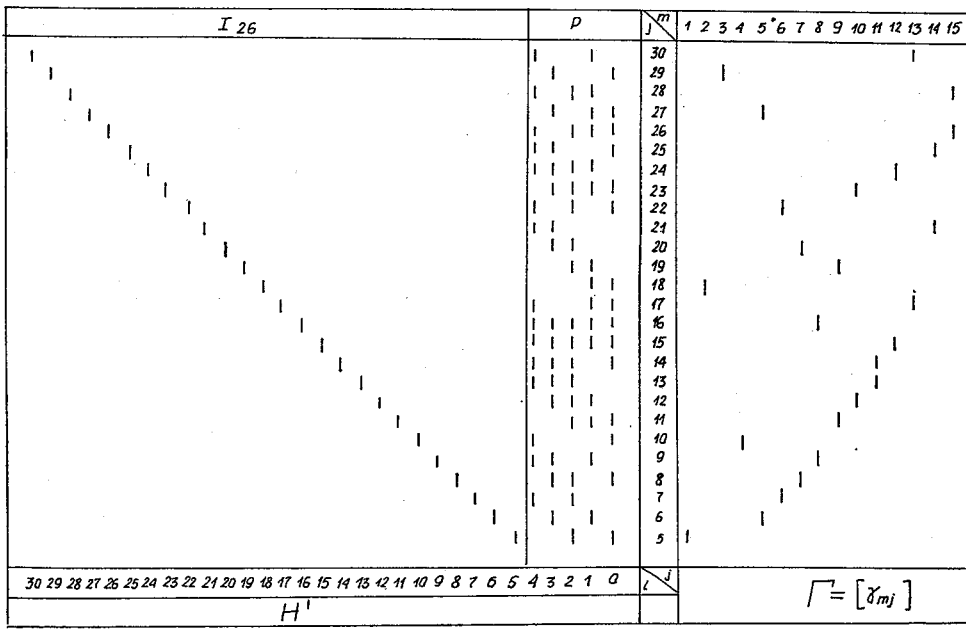
$$M = d-1$$

wierszy macierzy Γ, gdzie d jest odległością minimalną kodu pierwotnego.

Zauważmy, że j-ty wiersz macierzy H' jest bezpośrednio związany z j-tą pozycją syndromu s_j. Z kolei, macierz Γ, skonstruowana według wyżej przedstawionej procedury, ma tę własność, że niezerowe wyrazy w ustalonym wierszu przyporządkowane zostały tym wierszom macierzy H', które po zsumowaniu dadzą ciągi ortogonalne względem zerowej pozycji. Przy wyznaczonych pozycjach syndromu, elementy macierzy Γ wyznaczają wartości estymatorów ortogonalnych zgodnie z równaniem (2.9). Należy zauważyć, że powyższa

Tablica 7

Macierze H i Γ dla kodu (31,5)



konstrukcja macierzy pozwala na bezpośrednie wyznaczenie macierzy $A = [a_{mi}]$ przez zastosowanie zależności (2.11).

Przykład. Dla kodu z poprzedniego przykładu wyznaczymy macierz Γ. Tablica 7 w swojej lewej części zawiera macierz H', j-ty wiersz macierzy kontrolnej P jest elementem α^j ciała $GF(2^5)$ w postaci współczynników wielomianów (elementy zerowe macierzy pominięto). W prawej części tabl. 7 przedstawiono macierz Γ w postaci transponowanej i z odwróconą kolejnością wierszy (dla wygodniejszego porównania z macierzą H').

Przykładowo, wiersz $m = 11$ macierzy Γ zawiera „1" dla $j = 13$ i 14, ponieważ macierz kontrolna P w wierszach $j = 13$ i 14 różni się jedynie w pozycji $i = 0$. Te dwa wiersze wyznaczają niezerowe wyrazy macierzy A

$$a_{11,i} \quad \text{dla} \quad i = 0, 13, 14$$

według zależności (2.11).

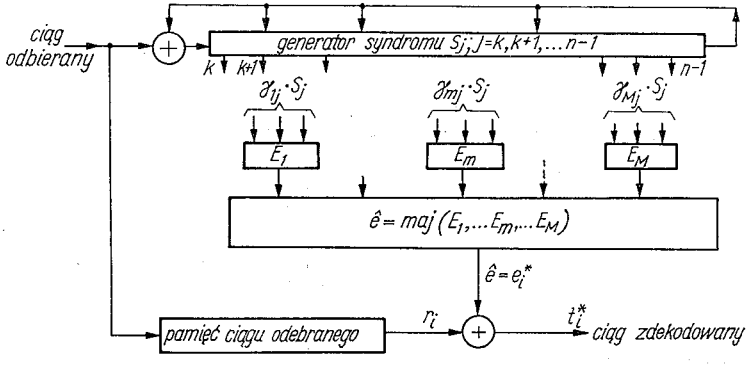
Ta szybka metoda wyznaczania wielomianów ortogonalnych staje się bardziej uciążliwa dla kodów dekodowanych L-etapowo ($L > 1$), ponieważ należy wówczas, przy wyznaczaniu kolejnych wierszy macierzy A lub Γ, założyć niezerowe współczynniki na zbiorze pozycji.

8. KONSTRUKCJA DEKODERÓW

Algorytmy dekodowania mogą być realizowane przy użyciu układów Meggitta. Rozpatrzymy dwa rodzaje układów dekoderów związanych z dwoma odmiennymi sposobami określania estymatorów ortogonalnych odpowiednio poprzez zależności (2.9) i (2.10).

Pierwszy rodzaj dekodera przedstawiono na rys. 1. Ciąg odebrany zostaje zapamiętany w pamięci, a ponadto wyznaczony zostaje syndrom w generatorze syndromu. Generator syndromu jest układem sekwencyjnym o $(n-k)$ stopniach, powodującym dzielenie ciągu odebranego (traktowanego jako wielomian stopnia $n-1$) przez wielomian generujący kodu $g(x)$ stopnia $(n-k)$. W rezultacie, po wykonaniu dzielenia, wyjścia poszczególnych stopni mają wartość

$$s_j \quad \text{dla} \quad j = k, k+1, \ldots, n-k \tag{8.1}$$



Rys. 1. Dekoder większościowy 1-etapowy, rodzaj 1

określoną równaniem (2.7). Wyjścia s_j dołączone są do wejść układów estymujących

$$E_m \quad \text{dla} \quad m = 1, \ldots, M. \tag{8.2}$$

Połączenia pomiędzy generatorem syndromu i układami estymującymi wyznaczone są macierzą Γ. Do m-tego układu E_m należy dołączyć wyjścia s_j dla j takich, że

$$\gamma_{mj} = 1. \tag{8.3}$$

Układy E_m są wieloargumentowymi sumami mod 2, wyznaczającymi wartość E_m zgodnie z (2.9). Wyjścia M układów E_m dołączone są do układu realizującego funkcję większościową

$$\hat{e} = \text{maj}(E_1, \ldots, E_m, \ldots, E_M) \tag{8.4}$$

zgodnie z zależnością (3.2). Decyzja tego układu

$$\hat{e} = e_0^*,$$

dodana mod 2 do pobranej z pamięci ciągu odebranego pozycji r_0 ciągu, stanowi decyzję t_0^* o zerowej pozycji ciągu nadanego.

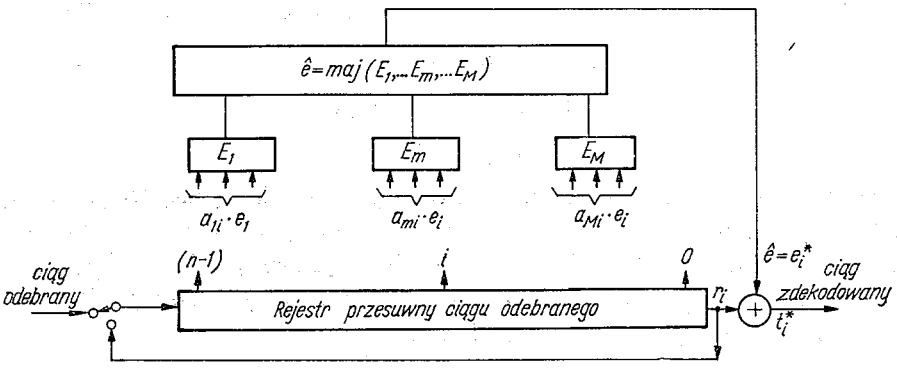
Jak już stwierdziliśmy, reguła dekodowania większościowego pozycji zerowej kodu cyklicznego (n, k) o długości n jest poprawna dla pozostałych pozycji kodu. Należy jedynie wyznaczyć wartości s_j syndromu dla pozostałych pozycji. Korzystamy z następującego twierdzenia [4].

Syndrom ciągu n-pozycjowego, przesuniętego cyklicznie o i pozycji, jest przesunięciem cyklicznym o i miejsc syndromu ciągu nieprzesuniętego (przesuwanie syndromu odbywa się w generatorze syndromu i oczywiście sprzężenia zwrotne tego układu sekwencyjnego działają).

Zatem, poprzez synchroniczne przesunięcia w pamięci ciągu odebranego oraz w generatorze syndromu, układ dekodera z rys. 1 dokona dekodowania większościowego wszystkich pozycji ciągu odebranego.

Drugi rodzaj dekodera przedstawiono na rys. 2. Niektóre fragmenty układu są oczywiste przez porównanie z rys. 1. Zamiast generatora syndromu i pamięci ciągu odebranego, zastosowano jeden rejestr przesuwny od 0 do $n-1$ zgodnie z pozycjami ciągu. Połączenia pomiędzy rejestrem przesuwnym i układami estymatorów wyznacza macierz

$$A = [a_{mi}]. \tag{8.5}$$



Rys. 2. Dekoder większościowy 1-etapowy, rodzaj 2

Do m-tego układu E_m dołączone są wyjścia rejestru przesuwnego o numerach i takich, że

$$a_{mi} = 1. \tag{8.6}$$

Układ E_m realizuje estymację zgodnie z równaniem (2.10).

Opisane dwa rodzaje dekoderów większościowych są niemal równoważne pod względem skomplikowania. O wyborze układu może decydować sposób realizacji — układowy lub programowy.

9. DEKODOWANIE WIĘKSZOŚCIOWE ESTYMATORAMI NIEORTOGONALNYMI

Wyznaczenie estymatorów ortogonalnych w dekodowaniu L-etapowym ($L > 1$) jest uciążliwe zwłaszcza dla kodów długich. Ponadto dekodowanie L-etapowe wymaga znacznej ilości najdroższych elementów dekodera, tzn. układów realizujących $\hat{e}$. Wykażemy, że kody PG dekodowalne L-etapowo można dekodować jednoetapowo przy ewentualnym pogorszeniu możliwości korekcyjnych.

Dla kodu (n, k) rozpatrzymy przestrzeń ortogonalną kodu zawierającą 2^{n-k} ciągów o długości n. Przy analizie wykorzystamy własności konfiguracji kombinatorycznych wieloparametrowych [8] oraz związane z nimi własności geometrii PG [np. 3].

Konfiguracja

$$(n_r, n, M, n_p, \lambda) \tag{9.1}$$

jest systemem n_r zbiorów i n elementów, dla których macierz incydencji H o wymiarach $n_r \times n$ jest macierzą (0,1) [2] o następujących własnościach:

$$H' = [h_{ji}]; \quad j = 1, 2, \ldots, n_r; \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \tag{9.2}$$

1) dla każdego i istnieje dokładnie n_p elementów h'_{ij} równych 1,
2) dla każdego j istnieje dokładnie M elementów h'_{ij} równych 1,
3) iloczyn skalarny

$$\sum_{j=1}^{n_r} h'_{ji} h'_{jl} = \lambda, \tag{9.3}$$

dla wszystkich $i \neq l$.

Pomiędzy parametrami $(n_r, n, M, n_p, \lambda)$ istnieją następujące zależności [8]:

$$\begin{aligned} n_r &\geqslant n, \\ M(n_p - 1) &= \lambda(n-1), \\ n_r n_p &= nM. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Istnieje zależność pomiędzy geometrią $PG(m, p^s)$ i macierzą incydencji konfiguracji $(n_r, n, M, n_p, \lambda)$. Kod $PG(m, p^s)$ rzędu r jest kodem cyklicznym, którego przestrzeń ortogonalna zawiera wszystkie wektory incydencji wszystkich powierzchni P_r [6].

W każdej spośród $(m-1)$ cyklicznych macierzy incydencji $PG(m, p^s)$ istnieją następujące relacje, mające odpowiedniki w konfiguracji [3]:

[2] Elementami macierzy są 0 i 1.

n — liczba punktów geometrii $PG(m, p^s)$

$$n = \frac{p^{s(m+1)}}{p^s - 1}, \tag{9.5}$$

n_r — liczba powierzchni P_r (różnych) należących do $PG(m, p^s)$ $(r < m)$

$$n_r = \prod_{i=0}^{r} \frac{p^{s(m+1-i)} - 1}{p^{s(m+1-i)} - 1}, \tag{9.6}$$

n_p — liczba punktów powierzchni P_r

$$n_p = \frac{p^{s(r+1)} - 1}{p^s - 1}, \tag{9.7}$$

M — liczba powierzchni P_r zawierających ustalony punkt

$$M = \frac{(p^s + \ldots + p^{sm}) \ldots (p^{sr} + \ldots + p^{sm})}{(p^s + \ldots p^{sr}) \ldots (p^{s(r+1)} + p^{sr}) p^{sr}}, \tag{9.8}$$

λ — liczba powierzchni P_r zawierających ustaloną linię (powierzchnię P_1), tzn. dwa ustalone, różne punkty PG (oczywiście $\lambda = 1$, jeśli $r = 1$, ponieważ dwa różne punkty mogą należeć tylko do jednej linii)

$$\lambda = \frac{(p^{2s} + \ldots + p^{sm}) \ldots (p^{sr} + \ldots + p^{sm})}{(p^{2s} + \ldots + p^{sr}) \ldots (p^{s(r-1)} + \ldots + p^{sr}) p^{sr}}, \tag{9.9}$$

dla $r > 1$.

W kodach geometrii PG każdej pozycji ciągu kodowego o długości n przyporządkowany jest jeden punkt PG. Zatem, dla kodu PG rzędu r możemy wyznaczyć macierz H' taką, że:

1) każdy wiersz macierzy będzie słowem kodowym kodu dualnego,
2) każdy wiersz będzie posiadał dokładne n_p niezerowych elementów (słowo kodowe o wadze n_p jest odpowiednikiem powierzchni P_r),
3) wszystkich wierszy w macierzy jest n_r,
4) dla każdej pozycji ciągów zawartych w macierzy istnieje dokładnie M ciągów posiadających w tej pozycji „1".

Z macierzy H' wybierzmy wiersze zawierające „1", np. w kolumnie $i = 0$. Wierszy takich jest M, zgodnie z zależnością (9.8). Wszystkie wybrane wiersze będą ciągami o jednakowej wadze n_p. Powstała w ten sposób macierz $A' = [a'_{mi}]$ o M wierszach i n kolumnach posiada następujące własności:

1) zerowa kolumna zawiera wyłącznie „1",
2) każda inna kolumna zawiera dokładnie λ elementów „1", gdzie λ jest określone przez (9.9) (wynika to z własności określonej przez (9.3) dla $l = 0$).

Należy zwrócić uwagę na różnice między macierzą A, określoną przez (2.12) i macierzą A'. W macierzy A w każdej kolumnie występuje co najwyżej jedna „1", natomiast w macierzy A' każda kolumna zawiera dokładnie λ elementów „1". Stąd macierz A generuje estymatory ortogonalne E_m dla $m = 1, \ldots, M$, natomiast macierz A' generuje estymatory nieortogonalne E'_m.

Każde słowo kodowe kodu (n, k), o przestrzeni ortogonalnej H', spełnia warunek

$$\sum_{i=0}^{n-1} a'_{mi} t_i = 0; \quad m = 1, 2, \ldots, M. \tag{9.10}$$

W procesie dekodowania większościowego sprowadzamy powyższe zależności do ciągu odbieranego

$$\sum_{i=0}^{n-1} a'_{mi} r_i = 0; \quad m = 1, 2, \ldots, M, \tag{9.11}$$

gdzie r_i jest i-tym elementem ciągu odebranego.

Zastosujemy regułę decyzyjną Rudolpha [9], zapisaną w następującej postaci.

Decyzja dekodera większościowego r_o jest równa

$$r_o^* = \text{maj}\,(E'_0, E'_1, E'_2, \ldots, E'_m, \ldots, E'_M), \tag{9.12}$$

gdzie:

$$E'_0 = r_o, \tag{9.13}$$

$$E'_m = \sum_{i=1}^{n-1} a'_{mi} r_i; \quad m = 1, \ldots, M, \tag{9.14}$$

r_o, r_i — elementy ciągu odbieranego $\underline{r}$,

a'_{mi} — element macierzy A'.

W dekodowaniu, według powyższej reguły, wykorzystywane są kolumny macierzy A' od 1 do $n-1$ oraz elementy ciągu odbieranego. Łatwo zauważyć, że reguła może być zrealizowana przy użyciu dekodera pokazanego na rys. 2. Wobec cykliczności kodu reguła decyzyjna, określona dla elementu r_o, pozostaje słuszna dla pozostałych r_i w ciągu dekodowym.

Sprawdźmy poprawność reguły oraz możliwości korekcyjnego kodu. Wartość r_o estymowana jest przez $M+1$ estymatorów E'_m, natomiast błąd w którejkolwiek niezerowej pozycji wpływa na wartość λ estymatorów E'_m. Zatem decyzje będą podejmowane prawidłowo, jeżeli w ciągu odebranym wystąpi

$$t' \leqslant \left[\frac{M}{2}\right] = \left[\frac{n-1}{2(n_p-1)}\right] \tag{9.15}$$

błędów.

Korzystając z (9.5) i (9.7) zależność (9.15) można zapisać w wygodniejszej do obliczeń postaci

$$t' \leqslant \left[\frac{2^{sm+s-1}-1}{2(2^{sr+s-1}-1)}\right]. \tag{9.16}$$

Przykład. Kod (31, 15) w $PG(4,2)$ rzędu $r = 2$. Z zależności (9.5)÷(9.9), dla $n = 31$, $m = 4$, $p = 2$, $s = 1$, $r = 2$, otrzymamy: $n_r = 135$, $M = 35$, $n_p = 7$, $\lambda = 7$, stąd $t' \leqslant 2$.

Jak widać w kodzie dualnym istnieje 135 ciągów o wadze 7, w tym 35 ciągów posiada „1" w tej samej pozycji.

W tabl. 1, w kolumnie t' podano możliwości korekcyjne kodów PG rzędu $r > 1$ dekodowanych jednoetapowo, według wyżej opisanej reguły. Minusem zaznaczono kody, dla których

$$t' < t,$$

gdzie t jest liczbą korygowanych błędów przy dekodowaniu r-etapowym.

Ng [10], przeprowadzając dowód twierdzenia o dekodowaniu większościowym pojedynczego błędu, zaproponował metodę dekodowania ważonego. Ponieważ błąd w każdej niezerowej pozycji wpływa na λ estymatorów, to estymatorowi E_0' należy przypisać wagę λ. Liczba korygowanych błędów spełnia wtedy nierówność

$$t'' \leqslant \left\lfloor \frac{M+\lambda-1}{2} \right\rfloor. \tag{9.17}$$

Oczywiście t'' nie musi przewyższać t'; zależy to od wartości M i λ. W przykładzie podanym wyżej $t' = t$.

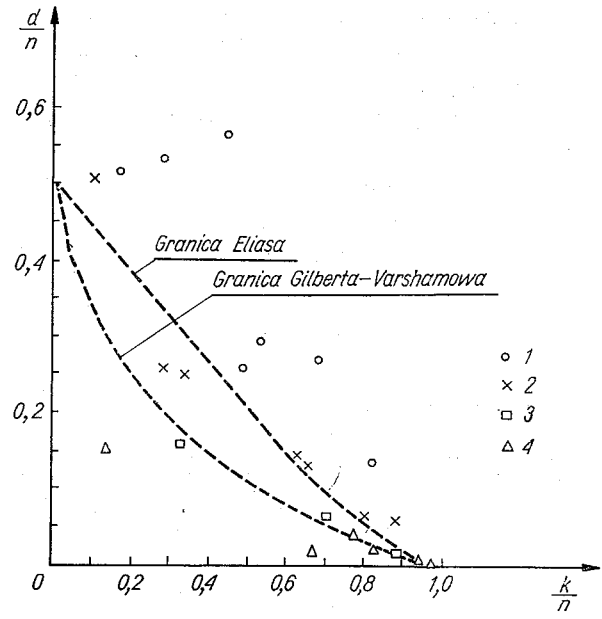
10. PODSUMOWANIE

Większość rezultatów była komentowana w tekście. Tu zwrócimy uwagę na parametry kodów.

Na wykresie rys. 3 podano zależność

$$\frac{d}{n} = f\left(\frac{k}{n}\right), \tag{10.1}$$

dla kodów binarnych z tabl. 1.



Rys. 3. Parametry kodów $PG(m, 2^s)$ dekodowalnych większościowo

Wielkość $\frac{k}{n}$ często bywa nazywana szybkością efektywną, natomiast $\frac{d}{n}$ jest względną odległością minimalną kodu (względem jego długości). Dla porównania, na wykresie podano granicę Gilberta-Varshamowa według uproszczonej zależności

$$H\left(\frac{d-2}{n}\right) \geqslant 1-\frac{k}{2}, \tag{10.2}$$

gdzie $H(x)$ jest funkcją entropii oraz granicę Eliasa

$$\frac{d}{n} < 2\lambda(1-\lambda), \tag{10.3}$$

gdzie λ jest argumentem funkcji entropii

$$H(\lambda) = 1-\frac{k}{n}. \tag{10.4}$$

Należy pamiętać, że obie granice tak przedstawione są zadowalającym przybliżeniem dla dużych n (w szczególności granica Eliasa). Wykres pokazuje, że kody binarne $PG(m, 2^s)$ dekodowalne większościowo (znaczna ich część jest kodami *BCH*) należą do kodów o dobrych parametrach, dla niezbyt dużych długości n.

Istotną zaletą omówionego dekodowania większościowego jest jego prosta realizacja nawet do kodów długich. Kody cykliczne na ogół są dekodowalne korekcyjnie w sposób skomplikowany i wymagający rozbudowanych układów (np. algorytm Berlekampa [5]). Dekodowanie większościowe jest znacznie prostsze zarówno w realizacji układowej, jak i w realizacji programowanej.

Przy dekodowaniu kodów *PG* dekoderami większościowymi, możliwości korekcyjne układów są równe tym, które wynikają z dolnej granicy na odległość minimalną d_{BCH}. Przy dekodowaniu kodów *EG* w nielicznych przypadkach możliwości korekcyjne są nieco mniejsze od d_{BCH}.

Kody w pełni ortogonalizowalne i dekodowalne w L etapach można poprzez modyfikację algorytmu dekodować jednoetapowo. Przy dekodowaniu jednoetapowym estymatory nie są ortogonalne i może nastąpić pewne zmniejszenie możliwości korekcyjnych, jednakże układy dekoderów 1-etapowych są z reguły (dla dużych n) znacznie prostsze od układów dekoderów L-etapowych.

Należy zwrócić uwagę, że algorytm dekodowania zapewnia również korekcję niektórych serii błędów o długości przekraczającej t. Jeżeli w pozycjach ciągu innych niż aktualnie korygowana wystąpiła parzysta liczba błędów dla tych i, które są kontrolowane przez estymator

$$E_m = \sum_i a_{mi} e_i,$$

to wartość estymatora będzie prawidłowa. Zatem te serie błędów (niezależnie od ich długości), które nie zakłócą więcej niż połowę estymatorów będą korygowane poprawnie. Ponadto, łatwo przeprowadzić kontrolę poprawności korekcji. Wyjścia estymatorów E_m, w obu rodzajach układów, można traktować jako wartości pozycji syndromu w zwykłej regule detekcyjnej dla kodów cyklicznych. Wprowadzenie takiej kontroli pozwoli na wykrycie serii błędów

$$t_D \leqslant d-1$$

i zastosowanie np. sprzężenia zwrotnego.

LITERATURA

1. W. W. Peterson, E. J. Weldon jr., *Error correcting codes*, 2nd ed., MIT Press, 1972.
2. J. L. Massey, *Theshold decoding*, MIT Press, 1963.
3. M. Dąbrowski, *Kody ortogonalizowalne w geometriach*, PG, Wyd. IT-PW, Referaty, Zeszyt 34, 1976.
4. W. W. Peterson, *Error corecting codes*, 1st ed., MIT Press, 1961.
5. E. R. Berlekamp, *Algebraic coding theory*, McGraw-Hill, 1968.
6. I. F. Blake, R. C. Mullin, *The mathematical theory of coding*, Academic Press, 1975.
7. I. S. Reed, *A class of multiple—error—correcting codes and the decoding scheme*, IRE Trans. PGIT-4.
8. H. J. Ryser, *Combinatorical mathematics*, MAA, J. Willey, 1963.
9. L. D. Rudolph, *A class of majority logic decodable codes*, IEEE, IT-13, 1967.
10. S. W. Ng, *On Rudolph's majority-logic decoding algorithm*, IEEE, IT-16, 1970.
11. J. Seidler, *Systemy przesyłania informacji cyfrowych*, WNT, 1972.
12. M. Hall Jr., *Combinatorial Theory*, Blaisdell Pub. Co. Walfham, Mass. 1967.

M. DĄBROWSKI

ERROR CORRECTION WITH THE AID OF MAJORITY-LOGIC DECODERS

Summary

The paper describes a class of cyclic codes which are majority-logic decoded. For the projective geometry codes (PG) and euclidean geometry codes (EG) ortogonal estimators are defined in the manner similar to the Massey's parity check sum. Majority function for decoding rule is defined at point 3. Further, decoding circuits of two types and design of decoders for ortogonal matrix A and Γ are given. Error correction possibility is given in the tables for a group of finite geometry codes.

M. DĄBROWSKI

CORRECTION DES ERREURS À L'AIDE DE DÉCODAGE MAJORITAIRE

Résumé

Dans l'article on traité les groupes de codes cycliques, que l'on peut décoder majoritairement. Pour le code cyclique on introduit des estimateurs statistiques orthogonaux formés de la somme en module 2 de certains éléments de la matrice orthogonale H du code (n, k). Pour les estimateurs statistiques orthogonaux définis on a établi la règle de décodage majoritaire à une et polyétapes. C'est la fonction majorante définie à partir des variables booliennes (point 3) qui joue un rôle essentiel dans la prise de décision sur les éléments des séries émises.

On a traité les codes cycliques qui peuvent être déterminés à l'aide des dépendances pour la géométrie des finis PG et EG, les règles de décodage majoritaire de ces codes et les possibilités correctives des codes. On a présenté les circuits de décodeurs de deux types et la relation existant entre la construction du décodeur et les estimateurs statistiques orthogonaux.

M. DĄBROWSKI

FEHLERKORREKTUR MITTELS MEHRHEITSDEKODIERUNG

Zusammenfassung

Im Artikel wurden diejenigen zyklischen Kodegruppen besprochen, die mittels einer Mehrheitsdekodierung gelöst werden können. Für die Zykluskoden werden orthogonale Ästimatoren in Form von Modulo-

2-Summen mancher Elemente der orthogonalen H-Matrix der Kode (n, k) eingeführt. Bei identifizierten orthogonalen Ästimatoren wurde die Regel für die ein- und mehrstufige Mehrheitsdekodierung bestimmt. Eine wesentliche Rolle beim Fällen der Entscheidung über die Elemente der aufgegebenen Folgen spielt die aug der Basis Boolowscher Veränderlichen definierte Mehrheitsfunktion (Punkt 3).

Im weiteren wurden erörtert: Zykluskoden, die such mittels Abhängigkeiten für beendete Geometrien *PG* und *EG* bestimmen lassen, Regeln für die Mehrheitsdekodierung dieser Koden und die Korrekturmöglichkeiten der Koden. Es wurden twei Typen von Dekodierungsanordnungen angegeben sowie Abhängigkeiten zwischen der Konstruktion eines Dekoders und den orthogonalen Ästimatoren.

М. ДОМБРОВСКИ

ИСПРАВЛЕНИЕ ОШИБОК ПОЭЛЕМЕНТНЫМ ДЕКОДИРОВАНИЕМ

Р е з ю м е

Описаны блоковые коды исправляющие ошибки и метод декодирования обоснованный на независимых оценках элементарных позиции кодовых последовательностей — мажоритные правила приема. Определены ортогональные оценки при применении таблицы H кода и схемы для декодирования. Описаны исправляющие возможности класса кодов описанных аппаратом геометрии *PG* и *EG*.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1978, 24, z. 3, ss. 677—688

621.316.721

O pewnej metodzie przyspieszania procesu regulacji poziomu

MARIAN ZIENTALSKI (GDAŃSK)

Instytut Telekomunikacji Politechniki Gdańskiej

Otrzymano 11.7.1977

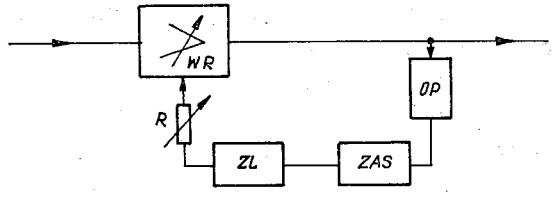
Omówiono układy przyspieszające proces regulacji poziomu stosowane w urządzeniach teletransmisyjnych oraz podano oryginalną metodę przyspieszania z dzielnikiem przekompensowanym. Przeprowadzono analizę opracowanego układu, określono efektywną stałą czasową termistora przy przyspieszaniu oraz względną niestabilność oporności termistora.

1. WSTĘP

Jednym z zasadniczych zespołów krajowej rodziny teletransmisyjnych systemów współosiowych, do której zaliczamy telefonię 300- i 960-krotną, są urządzenia automatycznej regulacji poziomu (ARP), które zapewniają właściwą jakość transmisji i umożliwiają kontrolę traktu liniowego. Celem urządzeń ARP jest zapewnienie w sposób automatyczny właściwego poziomu sygnału, przy zmianach charakterystyk transmisyjnych łącza i starzeniu elementów urządzeń teletransmisyjnych.

Opracowane w Instytucie Telekomunikacji Politechniki Gdańskiej urządzenia ARP realizują regulację dyskretną i wykazują szereg zalet w porównaniu z układami regulacji ciągłej, takich jak np. uzyskiwanie dużej dokładności regulacji i eliminacja zakłóceń przypadkowych zawierających się w strefie nieczułości, uzyskiwanie założonej szybkości regulacji określonej częstotliwością zegara, co ogranicza przeregulowania, jak również zapewniają utrzymanie stałego poziomu wyjściowego przy zaniku i szybkich zmianach poziomu pilota.

Na rys. 1 przedstawiono schemat blokowy urządzenia dyskretnej regulacji poziomu. W skład urządzenia wchodzą: wzmacniacz regulowany — *WR*, odbiornik pilota — *OP*, układ analizujący tzw. dyskryminator poziomu i sterujący licznik — *ZAS*, zespół liczący i sterujący regulator — *ZL*, układ regulujący — *R*.



Rys. 1. Schemat blokowy urządzenia dyskretnej regulacji poziomu

Zasada pracy urządzenia ARP jest następująca. Sygnał o częstotliwości pilotującej, którego poziom stanowi kryterium regulacji, zostaje wzmocniony w odbiorniku pilota i po detekcji podany do układu analizującego. Zadaniem układu analizującego jest ujawnienie przekroczenia bezwzględnej wartości sygnału błędu i identyfikacja jednej z trzech stref, tzw. strefy nieczułości, regulacji lub strefy blokad i sygnalizacji. Układ analizujący steruje pracą układu liczącego, który dokonuje dwóch operacji. Pierwsza operacja polega na obliczeniu w sposób dyskretny wartości sygnału regulującego wzmacniacz, a druga na zapamiętywaniu tej wartości w okresie czasu, gdy nie występuje proces regulacji, tj. wówczas, gdy sygnał błędu zawiera się w strefie nieczułości oraz dla przypadków, gdy następuje zanik albo gwałtowna zmiana poziomu pilota — tzw. strefa blokad i sygnalizacji.

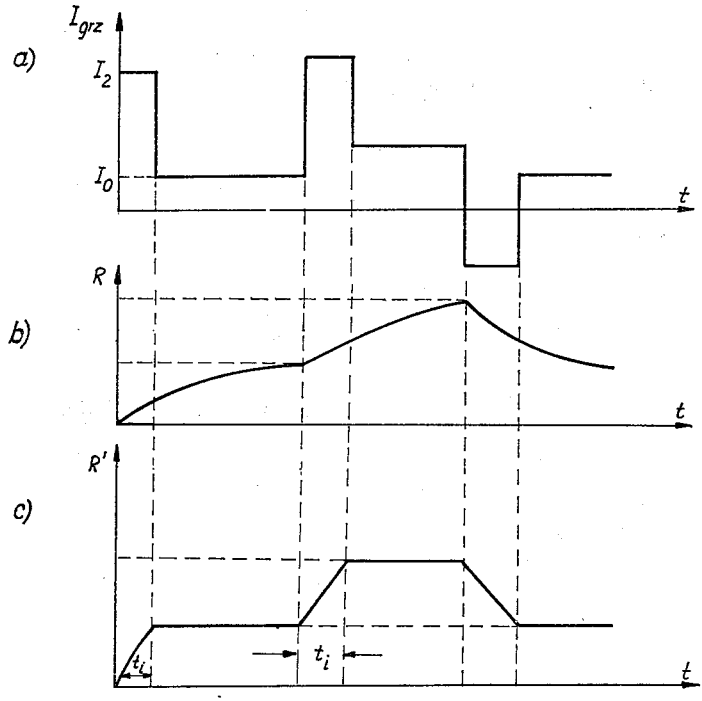
Zasada działania zespołu liczącego polega na kolejnym zliczaniu impulsów binarnych otrzymywanych z układu analizującego, który zawiera zegar taktujący. Funkcję zespołu liczącego spełnia licznik rewersyjny, którego aktualny stan jest określony poprzez ciąg impulsów binarnych podawanych do chwili bieżącej. Stanowi licznika zostaje przyporządkowany odpowiedni sygnał regulujący podawany na wzmacniacz regulowany i ustawiający jego wzmocnienie na pożądaną wartość. Licznik rewersyjny steruje element regulujący, który powoduje zmianę wzmocnienia, odpowiadającą zmianom poziomu pilota. W opracowanych urządzeniach zastosowano regulator termistorowy. Wykorzystanie regulatora termistorowego wymaga zastosowania układu przyspieszającego proces regulacji poziomu. Wynika to z faktu, że czas ustalania się rezystancji termistora jest rzędu $3 \div 4$ stałych czasowych, co nawet przy małej stałej czasowej termostora (zastosowany termistor typu F 76-34/14x posiada stałą czasową ok. 3 [sek]) daje wymagany okres impulsowania, określony częstotliwością powtarzania zegara taktującego, wynoszący około 10 [sek].

2. PRZYSPIESZENIE PROCESU REGULACJI POZIOMU

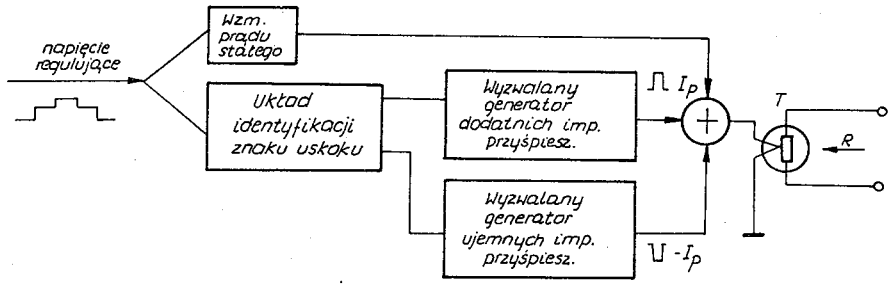
W dotychczas produkowanych urządzeniach ARP dla systemów współosiowych pracujących na torach koncentrycznych małogabarytowych (np. opracowanie firmy Telefunken) zastosowano metodę przyspieszania polegającą na wprowadzeniu dodatkowego impulsu prądowego w obwód prądu grzejnego termistora [3]. W opracowaniu krajowym zastosowano bardzo prosty i niezawodny układ przyspieszający oparty na dzielniku przekompensowanym.

3. PRZYSPIESZENIE ZA POMOCĄ DODATKOWYCH IMPULSÓW PRZYSPIESZAJĄCYCH

Istota tej metody polega na tym, że w chwili pojawienia się uskoku prądu grzejnego dodaje się do niego dodatkowy impuls prądowy o takiej samej polaryzacji jak uskok prądu grzejnego. Wysokość dodatkowego impulsu (I_2—I_o) oraz czas trwania (t_i) należy tak dobrać, aby w chwili jego zakończenia rezystancja termistora była równa rezystancji odpowiadającej stanowi ustalonemu w przypadku braku impulsu przyspieszającego. Zasadę działania tej metody ilustruje rys. 2, a na rys. 3 przedstawiono schemat blokowy układu przyspieszającego.



Rys. 2. Ilustracja przyspieszania za pomocą impulsów przyspieszających



Rys. 3. Schemat blokowy układu przyspieszającego proces regulacji

Rozpatrując termistor jako układ inercyjny o funkcji przenoszenia danej wzorem:

$$R_t = R_o + \Delta R(I)\{1 - e^{-\frac{t}{\tau_t}}\}, \tag{1}$$

gdzie: R_o jest rezystancją początkową termistora, ΔR — przyrostem rezystancji odpowiadającym przyrostowi prądu ΔI, a τ_t — stałą czasową termistora oraz zakładając liniową zmianę przyrostu rezystancji ΔR w funkcji przyrostu prądu grzejnego: $\Delta R = aI_o$, możemy wyznaczyć zależność pomiędzy wysokością impulsu przyspieszającego a jego czasem trwania.

Całkowita kompensacja zachodzi wówczas, gdy zależna od prądu grzejnego rezystancja termistora R_t określona w chwili t_i (rys. 2) zrówna się z rezystancją $R(\infty)$, wywołaną uskokiem prądu dla czasu bardzo dużego, czyli:

$$R_t = R_o + aI_2\{1-e^{-\frac{t_i}{\tau_t}}\} = R_o + aI_o, \tag{2}$$

gdzie a jest współczynnikiem proporcjonalności.

Rozwiązaniem równania (2) jest funkcja:

$$\frac{I_2}{I_o} = \frac{1}{1-e^{-\frac{t_i}{\tau_t}}}. \tag{3}$$

Wprowadzimy oznaczenia: $\frac{I_2-I_o}{I_o} = \alpha$ — współczynnik określający względny uskok impulsu przyspieszającego, $\frac{\tau_t}{t_i} = \gamma$ — współczynnik określający stałość czasu ustalania się rezystancji termistora; wówczas zależność (3) przyjmie postać:

$$\alpha = \frac{1}{e^{\frac{1}{\gamma}}-1}. \tag{4}$$

W przypadku gdy γ jest bardzo duże, czyli dla poważnego skrócenia czasu regulacji, wzór (4) przyjmie postać:

$$\alpha = \gamma - 1. \tag{5}$$

Aby zapewnić prawidłowy proces regulacji, należy parametry impulsu przyspieszającego (jego wysokość I_2 oraz czas trwania t_i) dobrać według zależności (4).

Uwzględniając tylko przyrost rezystancji termistora $R' = f(t_i)$ określony w chwili zakończenia oddziaływania impulsu przyspieszającego otrzymamy:

$$R' = aI_p[1-e^{-\frac{t_i}{\tau_t}}] + aI_2[1-e^{-\frac{t_i}{\tau_t}}], \tag{6}$$

gdzie $I_p = I_2 - I_o$ — wysokość impulsu przyspieszającego.

Niestabilność przyrostu rezystancji termistora wynosi:

$$\Delta R' = \frac{\partial R'}{\partial I_p}\Delta I_p + \frac{\partial R'}{\partial t_i}\Delta t_i. \tag{7}$$

Uwzględniając zależność (6) otrzymamy względną niestabilność przyrostu rezystancji:

$$\frac{\Delta R'}{R'} = \frac{I_p}{I_2}\frac{\Delta I_p}{I_p} + \frac{t_i e^{\frac{t_i}{\tau_t}}}{\tau_t[1-e^{\frac{t_i}{\tau_t}}]}\frac{\Delta t_i}{t_i}. \tag{8}$$

Uwzględniając, że $I_p \gg I_o$ oraz biorąc dwa pierwsze wyrazy rozwinięcia eksponentu w szereg Taylora, mamy:

$$\frac{\Delta R'}{R'} \approx \frac{\Delta I_p}{I_p} + \frac{\Delta t_i}{t_i}. \tag{9}$$

Zakładając występowanie spotykanych w praktyce niestabilności: $\frac{\Delta I_p}{I_p} = 10\%$; $\frac{\Delta t_i}{t_i} = 20\%$, otrzymamy względną niestabilność zmiany rezystancji termistora: $\frac{\Delta R'}{R'} = 30\%$.

Zasadniczą wadą omawianego układu jest niezadowalająca względna niestabilność rezystancji termistora, która powoduje różne zakresy regulacji poziomu dla dodatnich i ujemnych zmian wzmocnienia. Biorąc pod uwagę wady tej metody oraz duży stopień skomplikowania technicznego układów, opracowano oryginalną i pozbawioną tych wad metodę przyspieszania procesu regulacji poziomu za pomocą dzielnika przekompensowanego.

4. PRZYSPIESZANIE ZA POMOCĄ DZIELNIKA PRZEKOMPENSOWANEGO

Zastosowana, w opracowanych dla krajowej rodziny teletransmisyjnych systemów współosiowych urządzeniach automatycznej regulacji poziomu, metoda przyspieszania procesu regulacji poziomu polega na odpowiednim formowaniu uskoku prądu grzejnego za pomocą dzielnika przekompensowanego, przedstawionego na rys. 4. Jeżeli, tak jak to pokazano na rys. 5, na wejście dzielnika podamy uskok napięcia $u_1(t)$, to na jego wyjściu otrzymamy impuls napięciowy $u_2(t)$, który posiada odpowiednio ukształtowany pik.

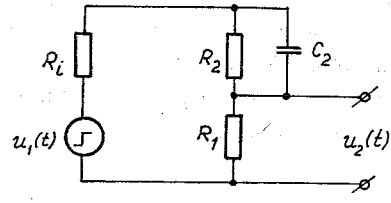
Transformata napięcia wyjściowego $u_2(p)$ wynosi:

$$u_2(p) = u_1(p)Z(p), \tag{10}$$

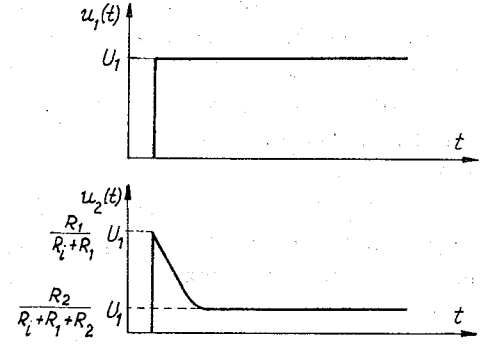
gdzie: $u_1(p) = \frac{1}{p}$ jest transformatą uskoku jednostkowego[1], a $Z(p)$ — operatorową funkcją przenoszenia.

Określając operatorową funkcję przenoszenia $Z(p)$, możemy obliczyć transformatę napięcia wyjściowego:

$$u_2(p) = \frac{U_1}{p} \frac{R_1(1+pR_2C_2)}{(R_i+R_1+R_2)+p(R_i+R_1)R_2C_2}. \tag{11}$$



Rys. 4. Dzielnik przekompensowany



Rys. 5. Kształt impulsu w dzielniku przekompensowanym

[1] Funkcja jednostkowa dana jest przepisem:

$$1(t) = \begin{cases} 0 \text{ dla } t < 0 \\ 1 \text{ dla } t \geqslant 0 \end{cases}.$$

gdzie: R_i — rezystancja wewnętrzna źródła (w tym przypadku wzmacniacza), R_1 i R_2 — rezystory dzielnika, C_2 — pojemność dzielnika.

Transformata odwrotna funkcji $u_2(p)$, czyli napięcie $u_2(t)$ na wyjściu dzielnika wynosi:

$$u_2(t) = \frac{R_1}{R_i+R_1+R_2}\left[1+\frac{R_2}{R_i+R_1}e^{-\frac{t}{\tau_d}}\right]U_1, \tag{12}$$

gdzie $\tau_d = \frac{(R_i+R_1)R_2}{R_i+R_1+R_2}C_2$ jest stałą czasową dzielnika.

W początkowym momencie uskoku (dla $t = 0$), napięcie na wyjściu dzielnika jest duże i określone przez dzielnik napięcia utworzony przez rezystancje R_1 oraz R_i+R_1, czyli:

$$u_2(0) = \frac{R_1}{R_i+R_1}U_1. \tag{13}$$

Następnie napięcie $u_2(t)$ maleje eksponencjalnie ze stałą czasową τ_d do wartości ustalonej określonej przez dzielnik $\frac{R_1}{R_i+R_1+R_2}$, czyli:

$$u_2(\infty) = \frac{R_1}{R_i+R_1+R_2}U_1. \tag{14}$$

Wprowadzimy współczynnik β określający względną wysokość piku:

$$\beta \overset{\text{def}}{=} \frac{u_2(0)}{u_2(\infty)} = \frac{\frac{R_1}{R_i+R_1}}{\frac{R_1}{R_i+R_1+R_2}} = \frac{R_i+R_1+R_2}{R_i+R_1}. \tag{15}$$

Pik spełnia tutaj podobną rolę jak impuls przyspieszający stosowany w omówionej metodzie. Metoda wykorzystująca dzielnik przekompensowany posiada tę zaletę, że układ jest nadzwyczaj prosty i nie wymaga dodatkowych skomplikowanych i wysokostabilnych układów: generatorów impulsów przyspieszających obu znaków, układu identyfikacji polaryzacji uskoku oraz układu sumującego.

Zalety dzielnika przekompensowanego okupione są jednak pewną wadą w postaci dużego tłumienia uskoku proporcjonalnego do współczynnika β. Wada ta nie jest istotna, gdyż stosując jednostopniowy wzmacniacz można wyrównać tłumienie wniesione przez dzielnik przekompensowany. Ażeby dzielnik spełniał należycie swoje zadanie, względna wysokość piku β oraz stała czasowa dzielnika muszą być odpowiednio dobrane, w zależności od stałej czasowej termistora τ_t. Przyjęty układ zastępczy termistora, wykorzystywanego w charakterze elementu regulującego, pokazano na rys. 6, gdzie R_3 i C_3 są umownymi elementami termistora z punktu widzenia inercji jego rezystancji:

$$R' = ai_t[1-e^{-\frac{t}{\tau_t}}], \tag{16}$$

zaś

$$\tau_t = R_3C_3, \tag{17}$$

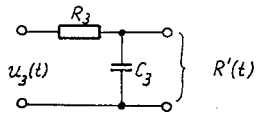
natomiast: R' jest przyrostem rezystancji termistora, który odpowiada zmianom prądu grzejnego i_t dla jednego schodka, a — współczynnikiem proporcjonalności.

Przyjmując liniową zależność prądu grzejnego i_t oraz napięcia $u_3(t)$ na grzejniku w funkcji napięcia wyjściowego dzielnika przekompensowanego $u_2(t)$:

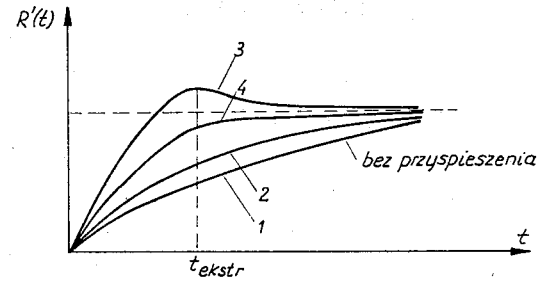
$$u_3(t) = bu_2(t), \tag{18}$$

gdzie b jest współczynnikiem proporcjonalności, otrzymujemy transformatę przyrostu rezystancji termistora:

$$R'(p) = ab\frac{U_1}{p}\frac{R_1(1+pR_2C_2)}{(R_i+R_1+R_2)+(R_i+R_1)R_2C_2p}\frac{1}{1+pR_3C_3}. \tag{19}$$



Rys. 6. Uproszczony układ zastępczy termistora



Rys. 7. Zmiana oporności termistora z układem przyspieszającym

Transformata odwrotna rezystancji termistora czyli zmiana rezystancji w funkcji czasu $R'(t)$ wynosi:

$$R'(t) = ab\left\{\frac{R_1}{R_i+R_1+R_2} - \frac{R_1}{R_i+R_1}\left[\frac{(\beta-1)\tau_d}{\beta(\tau_t-\tau_d)}e^{-\frac{t}{\tau_d}} + \frac{\tau_t-\beta\tau_d}{\beta(\tau_t-\tau_d)}e^{-\frac{t}{\tau_t}}\right]\right\}U_1. \tag{20}$$

Z zależności (20) wynika, że zmiana rezystancji $R'(t)$ zależy od stałej czasowej termistora τ_t, stałej czasowej dzielnika τ_d oraz współczynnika β. W realizacji praktycznej wyłania się więc problem prawidłowego doboru stałej czasowej dzielnika τ_d i współczynnika β. Ilustruje to rysunek 7. W przypadku gdy pik jest nieduży (małe β) przyspieszenie jest również nieduże i przypadek ten ilustruje krzywa *2* na rys. 7. Gdy natomiast pik jest za duży, występuje przyrost i wówczas rezystancja termistora w czasie przyspieszenia przekracza wartość w stanie ustalonym R'_{ust} (krzywa *3*).

Pomiędzy krzywymi *2* i *3* będzie leżała krzywa graniczna *4*, która zapewni w sposób optymalny przyspieszenie procesu regulacji. Moment, w którym występuje ekstremum $t = t_{ekstr}$ możemy wyznaczyć przyrównując pochodną $\frac{dR'(t)}{dt}$ do zera i wyznaczając warunek graniczny istnienia ekstremum. Otrzymamy:

$$t_{ekstr} = \frac{\tau_t-\tau_d}{\tau_t\tau_d}\ln\frac{(\beta-1)\tau_t}{\beta\tau_d-\tau_t}. \tag{21}$$

Aby ekstremum istniało, musi być spełniony warunek:

$$\beta\tau_d > \tau_t. \tag{22}$$

Krzywą graniczną otrzymuje się przy spełnieniu warunku:

$$\beta\tau_d = \tau_t. \tag{23}$$

Wstawiając zależność (23) do wzoru (20) otrzymujemy:

$$R'(t) = \frac{abR_1 U_1}{R_i + R_1 + R_2}\left[1 - e^{-\frac{\beta t}{\tau_t}}\right] = c\left[1 - e^{-\frac{\beta t}{\tau_t}}\right], \tag{24}$$

gdzie c jest stałą.

Otrzymana zależność czasowa rezystancji $R'(t)$, wyrażona wzorem (24), jest słuszna dla przypadku granicznego, tzn. gdy spełniony jest warunek (23). Ze wzoru (24) wynika, że wpływ dzielnika przekompensowanego, a zwłaszcza współczynnika β mającego sens względnej wysokości piku, uwidacznia się w ten sposób, że prowadzi do β-krotnego zmniejszenia efektywnej stałej czasowej rezystancji termistora, czyli:

$$\tau_{tef} = \frac{\tau_t}{\beta}. \tag{25}$$

Uwzględniając zależność (23) otrzymamy:

$$\tau_{tef} = \tau_d, \tag{26}$$

czyli efektywna stała czasowa termistora dla przypadku granicznego staje się równa stałej czasowej dzielnika przekompensowanego.

W zrealizowanych urządzeniach ARP dla telefonii 300- i 960-krotnej zastosowano termistor o stałej czasowej $\tau_t \approx 3$ sek. Dla okresu impulsowania $T = 0{,}5$ [sek] lub 1 [sek] oraz przyjętej zależności $T = (2 \div 3)\tau_{tef}$, otrzymujemy:

$$\beta = \frac{(2 \div 3)\tau_t}{T} = 12 \div 18 \text{ lub } \beta = 6 \div 9.$$

W rozwiązaniach praktycznych przyjęto wartość $\beta = 10$.

Przyspieszenie za pomocą dzielnika przekompensowanego wykazuje oprócz nadzwyczajnej prostoty jeszcze tę zaletę, że system regulacji poziomu z taką metodą przyspieszania pracuje stabilniej od przedstawionego na rys. 3.

Normalizując zmianę rezystancji termistora $R'(t)$ w stosunku do wartości ustalonej R'_{ust} otrzymamy zależność:

$$R''(t) = \frac{R'(t)}{R'_{ust}} = 1 - \frac{(\beta - 1)\tau_d}{\tau_t - \tau_d} e^{-\frac{t}{\tau_d}} - \frac{\tau_t - \beta\tau_d}{\tau_t - \tau_d} e^{-\frac{t}{\tau_t}}. \tag{27}$$

Przyrost rezystancji spowodowany wpływem zmian elementów dzielnika przekompensowanego wynosi:

$$\Delta R''(t, \beta, \tau_d) = \frac{\partial R''(t)}{\partial \beta}\Delta\beta + \frac{\partial R''(t)}{\partial \tau_d}\Delta\tau_d; \tag{28}$$

stąd

$$\Delta R''(t, \beta, \tau_d) = \frac{\tau_d \Delta\beta}{\tau_t - \tau_d}\left(e^{-\frac{t}{\tau_t}} - e^{-\frac{t}{\tau_t}}\right) + \frac{(\beta - 1)}{(\tau_t - \tau_d)^2}\left[\tau_t e^{-\frac{t}{\tau_t}} + \left(-\tau_t - t\frac{\tau_t}{\tau_d} + t\right)e^{-\frac{t}{\tau_d}}\right]\Delta\tau_d. \tag{29}$$

Uwzględniając warunek (23) otrzymamy:

$$\Delta R''(t, \beta, \tau_d) = \frac{1}{\beta - 1}\left(e^{-\frac{t}{\tau_t}} - e^{-\frac{\beta t}{\tau_t}}\right)\Delta\beta + \frac{1}{\tau_d(\beta - 1)}\left[\beta e^{-\frac{t}{\tau_t}} + \right.$$

$$\left. + \left(-\beta - \beta\frac{t}{\tau_d} + \frac{t}{\tau_d}\right)e^{-\frac{\beta t}{\tau_t}}\right]\Delta\tau_d. \tag{30}$$

Względna niestabilność rezystancji termistora przy wykorzystaniu dzielnika przekompensowanego wynosi:

$$\frac{\Delta R''}{R''} = \frac{\beta}{\beta-1}\,\frac{e^{-\frac{t}{\tau_t}} - e^{-\frac{\beta t}{\tau_t}}}{1-e^{-\frac{\beta t}{\tau_t}}}\left(\frac{\Delta\beta}{\beta}+\frac{\Delta\tau_d}{\tau_d}\right)+\frac{t}{\tau_d}\,\frac{e^{-\frac{\beta t}{\tau_t}}}{1-e^{-\frac{\beta t}{\tau_t}}}\,\frac{\Delta\tau_d}{\tau_d}. \tag{31}$$

Pomijając w wyrażeniu (31) składniki, których wpływ jest mało istotny otrzymamy:

$$\frac{\Delta R''}{R''} \cong \frac{\beta}{\beta-1}\,\frac{e^{-\frac{t}{\tau_t}}}{1-e^{-\frac{\beta t}{\tau_t}}}\left(\frac{\Delta\beta}{\beta}+\frac{\Delta\tau_d}{\tau_d}\right) = C_1\left(\frac{\Delta\beta}{\beta}+\frac{\Delta\tau_d}{\tau_d}\right), \tag{32}$$

gdzie:

$\frac{\Delta\beta}{\beta}$ — względna zmiana wysokości piku (p. rys. 5),

$\frac{\Delta\tau_d}{\tau_d}$ — względna zmiana stałej czasowej dzielnika,

$$C_1 = \frac{\beta}{\beta-1}\,\frac{e^{-\frac{t}{\tau_t}}}{1-e^{-\frac{\beta t}{\tau_t}}}$$ — współczynnik.

Zakładając, że okres impulsowania T wynosi:

$$T = n\frac{\tau_t}{\beta} = n\tau_d, \tag{33}$$

dla stosowanych w praktyce wartości n i β otrzymamy wartość współczynnika C_1 bliską jedności, czyli można założyć:

$$C_1 \approx 1. \tag{34}$$

Na rys. 8 przedstawiono wykres współczynnika C_1 w funkcji β dla wartości $n = 1, 2, \ldots, 5$, zaś obliczone wartości C_1 zestawiono w tablicy 1.

Dla $C_1 \approx 1$ możemy wzór (32) przepisać w postaci:

$$\frac{\Delta R''}{R''} \approx \frac{\Delta\beta}{\beta}+\frac{\Delta\tau_d}{\tau_d}. \tag{35}$$

Tablica 1

Wartości współczynnika C_1

β \ n	1	2	3	4	5
5	5,63	0,97	0,72	0,575	0,467
10	1,59	1,05	0,86	0,76	0,67
20	1,58	1,09	0,95	0,88	0,83
40	1,59	1,12	1,01	0,94	0,91
80	1,59	1,14	1,02	0,98	0,96
160	1,59	1,15	1,03	1,00	0,98

Z otrzymanego wzoru widać, że niestabilność względnej zmiany rezystancji termistora zależy tylko od niestabilności względnej wysokości piku oraz stałej czasowej dzielnika.

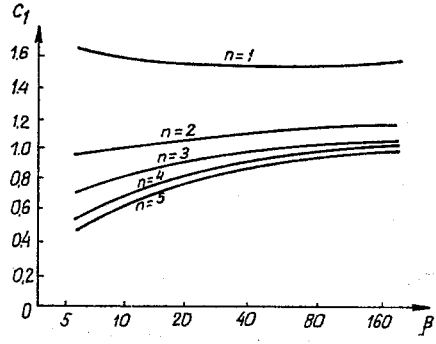
Wyrazimy teraz niestabilności β i τ_d w funkcji elementów dzielnika:

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial\beta}{\partial R_1}\Delta R_1 + \frac{1}{\beta}\frac{\partial\beta}{\partial R_2}\Delta R_2 = -\frac{R_1 R_2}{(R_i+R_1)(R_i+R_1+R_2)}\frac{\Delta R_1}{R_1} + \\ + \frac{R_2}{R_i+R_1+R_2}\frac{\Delta R_2}{R_2}. \tag{36}$$

Uwzględniając, że $R_2 \gg R_1+R_i$ oraz $R_1 > R_i$, mamy:

$$\frac{\Delta\beta}{\beta} \approx -\frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R_2}{R_2}. \tag{37}$$

Stosując jako elementy dzielnika rezystory wysokostabilne o jednakowym współczynniku temperaturowym, można uzyskać dużą stabilność wysokości piku.



Rys. 8. Wykres współczynnika C_1 w funkcji β

Względna niestabilność stałej czasowej dzielnika wynosi:

$$\frac{\Delta\tau_d}{\tau_d} + \frac{1}{\tau_d}\frac{\partial\tau_d}{\partial R_1}\Delta R_1 + \frac{1}{\tau_d}\frac{\partial\tau_d}{\partial R_2}\Delta R_2 + \frac{1}{\tau_d}\frac{\partial\tau_d}{\partial C_2}\Delta C_2; \tag{38}$$

stąd:

$$\frac{\Delta\tau_d}{\tau_d} = \frac{R_1 R_2}{(R_i+R_1)(R_i+R_1+R_2)}\frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{1}{\beta}\frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta C_2}{C_2} \approx \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta C_2}{C_2}. \tag{39}$$

Ostatecznie niestabilność rezystancji termistora wynosi:

$$\frac{\Delta R''}{R''} \approx \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta C_2}{C_2} \tag{40}$$

i praktycznie zależy tylko od niestabilności elementów R_2 i C_2 dzielnika.

Niezależność $\frac{\Delta R''}{R''}$ od niestabilności dolnej rezystancji R_1 wynika stąd, że wzrost R_1 powoduje zmniejszenie β (wzór 15) oraz jednocześnie zwiększenie stałej czasowej dzielnika o taką samą wartość, co powoduje, że iloczyn $\beta\tau_d$ pozostaje stały, zapewniając tym samym prawidłowe przyspieszenie dla przypadku granicznego (krzywa *4* na rys. 7).

Przyjmując np. niestabilności: $\frac{\Delta R_2}{R_2} = 1\%$ oraz $\frac{\Delta C_2}{C_2} = 2\%$, otrzymujemy wynikającą

z tych zmian niestabilność rezystancji termistora $\frac{\Delta R''}{R''} = 3\%$. Uzyskane wyniki są znacznie lepsze, a koszt rozwiązania wielokrotnie niższy niż dla przypadku przyspieszania za pomocą dodatkowych impulsów gdzie niestabilna praca układu przyspieszającego powodowała zmiany rezystancji termistora $\frac{\Delta R'}{R'}$ wynoszące ok. 30%.

Wnioski wynikające z przeprowadzonej analizy układów przyspieszających zostały wykorzystane przy projektowaniu urządzeń dyskretnej automatycznej regulacji poziomu dla krajowej rodziny systemów współosiowych. W opracowanych urządzeniach zastosowano układ przyspieszający proces regulacji wykorzystujący dzielnik przekompensowany.

LITERATURA

1. W. Barjasz, P. Bublewicz, J. Kobielski, M. Zientalski, *Nowoczesne systemy teletransmisyjne*, WKŁ, 1976.
2. T. Bartkowski, M. Zientalski, *Układ przyspieszający proces regulacji dla dyskretnie sterowanego wzmacniacza z termistorem regulującym*, Patent PRL 54980.
3. Patent NRF Nr 1118832 kl. 21a² 36/13.

M. ZIENTALSKI

A METHOD OF SPEEDING UP THE LEVEL CONTROL PROCESS

Summary

The systems which speed up the level control process employed in transmission devices are discussed and a new method with an overcompensated divider to this aim is proposed. The system designed has been analyzed and the effective thermistor time constant of the acceleration process is determined together with the relative instability of the thermistor resistance.

M. ZIENTALSKI

CERTAINE MÉTHODE ACCÉLÉRÉE DU PROCESSUS DE RÉGLAGE DU NIVEAU

Résumé

On a examiné les systèmes accélérant le processus de réglage du niveau utilisés dans les dispositifs de télétransmission et on a présenté une méthode originale d'accélération avec diviseur surcompensé. On a analysé le système élaboré et on a déterminé la constante de temps effective d'un thermistor lors de l'accélération ainsi que l'instabilité relative de la résistance du thermistor.

M. ZIENTALSKI

BEITRAG ZUR METHODE DES BESCHLEUNIGENS VON REGELUNGSVERLÄUFEN

Zusammenfassung

Im Aufsatz wurden die den Pegel-Regelungsverlauf beschleunigenden Schaltungen diskutiert sowie eine neue, eigene Methode des Beschleunigens mittels eines überkompensierten Teilers vorgeschlagen. Die entworfene Schaltung wurde analysiert, die effektive Thermistor-Zeitkonstante beim Beschleunigen und die relative Unstabilität der Resistanz des Thermistors wurden ermittelt.

М. ЗЕНТАЛЬСКИ

ОБ ОДНОМ ИЗ МЕТОДОВ УСКОРЕНИЯ ПРОЦЕССА РЕГУЛЯЦИИ УРОВНЯ

Р е з ю м е

Обсуждены системы ускоряющие процесс регуляции, применяемые в телетрансмиссионных устройствах и показан оригинальный метод ускорения с перекомпенсированным делителем. Проведен анализ разработанной системы, определены эффективная постоянная времени термистора при ускорении и относительная устойчивость сопротивления термистора.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1978, 24, z. 3, ss. 689—713

621.394.9

Metody analizy wielodostępowych systemów teleinformatycznych wykorzystujących kanał radiowy w schemacie dostępu niekontrolowanego

ALEKSANDER KOZŁOWSKI (GDAŃSK)

Instytut Telekomunikacji Politechniki Gdańskiej

Otrzymano 4.4.1977

W artykule przedstawiono opis podstawowych wariantów teleinformatycznych systemów o dostępie niekontrolowanym wykorzystujących kanał radiowy, określanych wspólną nazwą systemów typu ALOHA.

Dokonano przeglądu znanych metod statycznej i dynamicznej analizy tych systemów, w wyniku której określono podstawowe ich parametry, takie jak: obciążenie i zajętość kanału, średnie opóźnienie transmisji i średnią liczbę urządzeń blokowanych. Przedstawiono także wpływ rozmieszczenia przestrzennego urządzeń końcowych i efektu przechwytywania na parametry systemu. Przytoczono również analizę wielostopniowego teleinformatycznego systemu wykorzystującego kanał radiowy w schemacie dostępu niekontrolowanego.

1. WSTĘP

Znaczny rozwój techniki komputerowej powodujący powstawanie wielkich zintegrowanych systemów gromadzenia i przetwarzania danych obejmujących duże obszary terytorialne stwarza konieczność organizacji sieci szybkiej transmisji dużej ilości danych. Sieci z komutacją kanałów stosowane w latach 60-tych pomimo swojej prostoty nie spełniają stawianych obecnie wymagań. Ostatnio w istotny sposób rozwinęła się technika komutacji informacji[1)]. Do podstawowych systemów komutacji informacji zaliczamy systemy wielodostępowe charakteryzujące się możliwością dostępu do wspólnego kanału transmisji więcej niż jednego urządzenia.

Wśród zasadniczych schematów przydziału wspólnego kanału transmisji dla poszczególnych urządzeń wyróżnia się najczęściej (patrz np. Gitman [1]):

1) systemy z przydziałem ustalonym (np. zwielokratnianie częstotliwościowe FDM, zwielokrotnianie czasowe TDMA),

[1)] Technika nazywana też komutacją pakietów. Pakietem informacji nazywamy integralną jednostkę informacji, powstałą w wyniku podziału wiadomości na bloki o stałej lub zmiennej długości uzupełnione częścią organizacyjną, która zawiera co najmniej adres docelowy i adres źródłowy.

2) systemy z przydziałem dynamicznym o sterowaniu centralnym (np. schemat listowy, rezerwacja według prośby),
3) systemy z przydziałem czasowym o sterowaniu zdecentralizowanym (np. sieć pętlowa, schemat rezerwacji niekontrolowanej),
4) systemy o dostępie niekontrolowanym.

Systemy $1 \div 3$ posiadają powszechnie znane zalety i wady. Stopniowy rozwój kolejnych systemów powodował tworzenie następnych schematów dostępu usuwających wady poprzednich, lecz mających inne nowe mankamenty.

Ze względu na podstawowe wymagania stawiane współczesnym sieciom teleinformatycznym, takie jak duża szybkość transmisji, duża ilość przekazywanych danych, duże obszary terytorialne pokrywane siecią oraz niski koszt tworzenia i eksploatacji sieci, szczególnie atrakcyjne wydają się sieci organizowane w oparciu o wykorzystanie kanału radiowego w schemacie dostępu niekontrolowanego.

Sieci tego typu posiadają szereg niezaprzeczalnych zalet. Do podstawowych należą ([2], [3]):

1) wielodostępowość i dyfuzyjność kanału radiowego,
2) wyeliminowanie problemów topologicznych i problemów doboru trasy,
3) duży (przy wykorzystaniu przekaźników satelitarnych bardzo duży) zasięg sieci przy stosunkowo niskich kosztach i prostocie tworzenia kanału,
4) możliwość obsługi użytkowników ruchomych,
5) duża liczba aktywnych i potencjalnie aktywnych użytkowników,
6) proste rozszerzenie sieci dla nowo dołączonych użytkowników,
7) stosunkowo niskie koszty eksploatacji przy odpowiednio dużej liczbie użytkowników,
8) proste w porównaniu z innymi sieciami wyposażenie węzłów sieci,
9) statystyczne uśrednianie obciążenia kanału.

Jedną z sieci pracujących obecnie w schemacie dostępu niekontrolowanego z wykorzystaniem kanału radiowego jest sieć ALOHA, której koncepcję stworzono w Uniwersytecie Hawajskim. Z eksperymentalnej sieci teleinformatycznej wykorzystującej kanał satelitarny o pasmie 45 kHz (maksymalna szybkość transmisji 56 kb/s), tworzony przez geostacjonarnego satelitę atlantyckiego INTELSAT IV [4], przerodziła się ona w integralną część sieci ARPA. Według danych z 1972 r. w sieci tej pracują stacje w Paumaulu na Hawajach, w Jamesburgu i centrum NASA w Kalifornii (przy czym ostatni węzeł AMES umożliwia współpracę systemu ALOHA z siecią ARPA).

System ALOHA bazuje w zasadzie na podstawowych założeniach sieci ARPA. Zasadnicze różnice istnieją jedynie w dwóch istotnych momentach:

— w sieci ALOHA dostęp jest niekontrolowany,
— zwielokratnianie w sieci ALOHA odbywa się automatycznie (dzięki specyficznemu nośnikowi informacji), ponieważ wszystkie odległe urządzenia mają potencjalnie jednoczesny dostęp do wspólnego kanału.

Podstawowe prace poświęcone analizie systemów typu ALOHA powstały w latach 1970 do 1973 w Uniwersytecie Hawajskim, stworzone przez Abramsona, Robertsa, Normana, Fayole, Kuo, Frischa, Kleinrocka i innych.

Niniejszy artykuł poświęcony jest opisowi poszczególnych odmian systemu typu

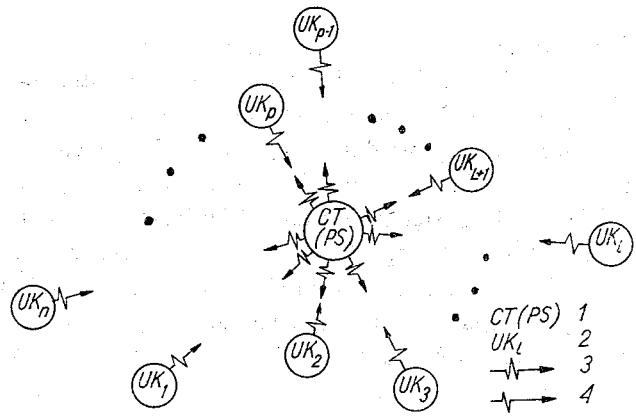
ALOHA i metod ich analizy. Podano również podstawowe parametry użytkowe uzyskane w wyniku przytaczanych analiz dla sieci typu ALOHA. Do parametrów tych należą:

1) zajętość kanału, oznaczana przez $G(G_j)$, zdefiniowana jako średnia liczba pakietów nadawanych pierwotnie i retransmitowanych w czasie równym czasowi trwania pakietu (czasie jednostkowym);
2) obciążenie kanału, oznaczane przez $S(S_j)$, zdefiniowane jako średnia liczba pierwotnych (nadawanych po raz pierwszy) pakietów informacji przechodzących przez kanał w czasie równym czasowi trwania pakietu (w czasie jednostkowym); jest to więc zajętość kanału pomniejszona o średnią liczbę pakietów retransmitowanych;
3) średnie opóźnienie, oznaczane przez D, definiowane jako średni czas oczekiwania na transmisję przez testowane urządzenie (często w celu tworzenia wspólnych mierników dla wszystkich odmian sieci ALOHA czas ten mierzony jest w wielokrotnościach czasu trwania pakietu).

W końcowej części artykułu dokonano próby porównania poszczególnych odmian rozważanych sieci.

2. OGÓLNY OPIS RODZINY SYSTEMÓW TYPU ALOHA

W systemach typu ALOHA istnieją dwa radiowe kanały transmisji; w jednym odbywa się transmisja urządzenia końcowe — centrum teleinformatyczne i jest on nazywany kanałem wielodostępowym, w drugim transmisja centrum teleinformatyczne — urządzenia końcowe i jest to tzw. kanał dyfuzyjny (patrz rys. 1). W dalszych rozważaniach zajmiemy się



Rys. 1. Ogólna struktura przestrzenna systemów typu ALOHA

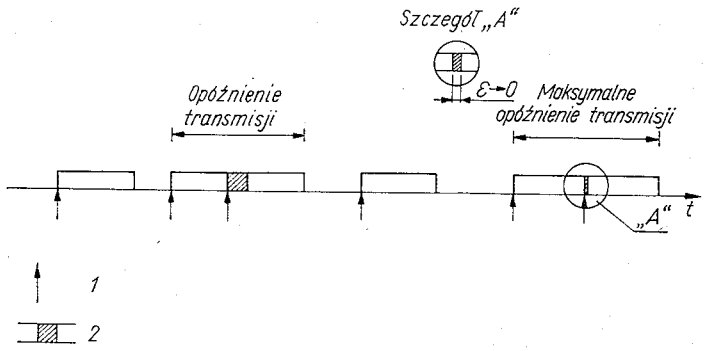
1 — centrum teleinformatyczne (przekaźnik satelitarny), *2* — *l*-te urządzenie końcowe ($l = 1, 2, \ldots, n$), *3* — radiowy kanał dyfuzyjny, *4* — radiowy kanał wielodostępowy

przede wszystkim kanałem wielodostępowym, jako że w kanale dyfuzyjnym transmisja jest niejako uporządkowana poprzez normalną kolejkę pakietów do poszczególnych użytkowników.

W zależności od sposobu wykorzystania kanału wielodostępowego rozważa się szereg wariantów w obrębie rodziny systemów typu ALOHA, które zostaną opisane poniżej.

2.1. System ALOHA bez ramkowania

Jest to najstarszy i najprostszy wariant w rodzinie systemów typu ALOHA [4]. Jeśli urządzenie końcowe posiada gotowy do transmisji pakiet informacji, to nadaje go do centrum teleinformatycznego. Oczywiście w tym schemacie dostępu nieuniknione jest nakładanie się (interferencja) pakietów informacji od poszczególnych użytkowników sieci, przy czym przyjmuje się, że każda interferencja powoduje błędne odebranie nałożonych pakietów i wymagana jest ich retransmisja. Pakiety interferują na ogół częściowo (patrz rys. 2) i maksymalne opóźnienie osiąga wartość równą podwójnej wartości czasu trwania



Rys. 2. Przykładowe rozmieszczenie w czasie pakietów informacji w kanale wielodostępowym systemu typu ALOHA bez ramkowania

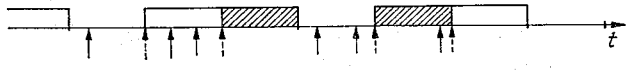
1 — moment zgłoszenia do transmisji pakietu informacji przez urządzenie końcowe, *2* — interferujące części pakietów informacji

pakietu. Ponieważ w sieci tego typu dopuszcza się możliwość interferencji pakietów informacji, należy więc wprowadzić potwierdzenie poprawności (ewentualnie stwierdzenie niepoprawności) odbioru pakietów. Potwierdzenie realizuje centrum teleinformatyczne na podstawie analizy odebranych, odpowiednio zakodowanych pakietów. Jeżeli urządzenie końcowe nie uzyska potwierdzenia poprawności odbioru wysłanego pakietu, to przechodzi w stan blokowania (nie wysyła następnych pakietów informacji) i w losowo wybranym w przyszłości momencie czasu bez względu na stan kanału retransmituje pakiet, który interferował. W ten sposób wszystkie końcówki sieci dzielą się na blokowane, tzn. takie, które dokonywały próby dostępu do wspólnego kanału i w jej wyniku nastąpiła interferencja z pakietem wysyłanym przez innego użytkownika sieci, oraz końcówki aktywne, do których zaliczamy wszystkie pozostałe.

2.2. System ALOHA z ramkowaniem

W celu zmniejszenia opóźnienia spowodowanego zajmowaniem kanału wielodostępowego przez interferujące pakiety, które w systemie ALOHA bez ramkowania sięga maksymalnie podwojonemu czasowi trwania pakietu, zabezpiecza się transmisję w kanale tylko w określonych ramkach czasowych [4]. Ramki te, o czasie trwania równym czasowi trwania pojedynczego pakietu informacji, generowane są przez zegar centralny. W tym systemie

urządzenie końcowe posiadające gotowy do transmisji pakiet buforuje go do początku najbliższej ramki czasowej i wysyła pakiet bez względu na stan kanału. Intuicyjnie wyczuwalne jest, że tego typu model dostępu zmniejsza opóźnienie w porównaniu z modelem poprzednim. W tym przypadku, jeżeli pakiety od poszczególnych użytkowników sieci interferują, to interferują zupełnie (patrz rys. 3), a nie jak poprzednio częściowo. Maksy-

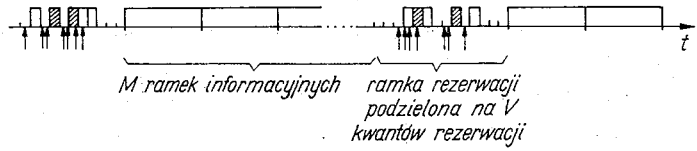


Rys. 3. Przykładowe rozmieszczenie w czasie pakietów informacji w kanale wielodostępowym systemu typu ALOHA z ramkowaniem
Linią kreskowaną oznaczono moment nadania pakietu informacji przez urządzenie końcowe, pozostałe oznaczenia jak na rys. 2

malne opóźnienie transmisji pakietu jest równe czasowi jego trwania. Sposób potwierdzania poprawnego odbioru i retransmisji jest podobny do poprzedniego, z tym że retransmisje odbywają się tylko w obrębie ramek.

2.3. System ALOHA z rezerwacją okresową

Następnym etapem rozwoju rodziny systemów ALOHA jest sieć ALOHA z rezerwacją okresową. W wersji tej, podobnie jak w sieci ALOHA z ramkowaniem, oś czasu podzielona jest na ramki [5]. Wyróżnia się dwa typy ramek: ramki rezerwacji i ramki informacyjne (patrz rys. 4). Co każde M ramek informacyjnych następuje jedna ramka rezerwacji podzielona na V kwantów rezerwacji. W sieci tej przyjęto, że jeżeli końcówka posiada gotowy



Rys. 4. Przykładowe rozmieszczenie w czasie pakietów rezerwacji i pakietów informacji w kanale wielodostępowym systemu typu ALOHA z rezerwacją okresową
Oznaczenia jak na rys. 2

do transmisji pakiet informacji, to wysyła ona w najbliższej ramce rezerwacji, według klasycznego schematu dostępu typu ALOHA, pakiet rezerwacji o czasie trwania równym czasowi trwania kwantu rezerwacji. W przypadku bezbłędnego odbioru pakietu rezerwacji, centrum teleinformatyczne rezerwuje dla pakietu informacyjnego danego użytkownika ramkę informacyjną w obrębie następnych M ramek informacyjnych. Rezerwacja jest potwierdzana przez centrum. Jeżeli nastąpiła interferencja pakietów rezerwacji od kilku użytkowników, to następuje retransmisja pakietu rezerwacji identycznie jak w sieci ALOHA z ramkowaniem. W przypadku, gdy retransmisja pakietu rezerwacji nie nastąpiła w obrębie aktualnej ramki rezerwacji, to odbywa się ona w kolejnej następnej ramce rezerwacji.

W ten sposób bezpośrednio po ramce rezerwacji utworzona zostaje kolejka dostępu urządzeń końcowych do wielodostępowego kanału radiowego i interferencje pakietów informacyjnych w tego typu sieci nie występują.

2.4. Rodzina systemów ALOHA ze śledzeniem nośnej

Jest to kolejna wersja systemów typu ALOHA. W wersji tej każda końcówka wyposażona jest w urządzenie pozwalające śledzić („podsłuchiwać") transmisję w kanale (ang. *Carrier Sense Multiple Access* — CSMA). W ramach tego typu dostępu wyróżnia się także szereg wariantów, które zostaną opisane poniżej.

2.4.1. System ALOHA ze śledzeniem nośnej i bezwzględnym wymuszeniem retransmisji

W systemie tym, jeżeli urządzenie końcowe posiada gotowy do transmisji pakiet informacji, to podejmuje próbę dostępu do kanału według następującego schematu [6]:
— jeżeli kanał jest wolny, to końcówka nadaje pakiet informacji,
— jeżeli kanał jest zajęty, to końcówka czeka do momentu zwolnienia się kanału.
Powyższy schemat dostępu ma tę zasadniczą wadę, że posiada tendencję „pełnego" wykorzystania kanału, aż do granicy interferencji pomiędzy pakietami. Spowodowane jest to ciągłym przeznaczaniem nienadanych pakietów do retransmisji.

2.4.2. System ALOHA ze śledzeniem nośnej bez wymuszenia retransmisji

Wady opisywanej w 2.4.1 nie posiada system o poniższym schemacie użytkowania kanału:
— jeżeli kanał jest wolny, to końcówka nadaje pakiet,
— jeżeli kanał jest zajęty, to końcówka przeznacza pakiet do nadania w jednym z kilku wybranych w przyszłości momentów czasu, przy czym zwłoka w transmisji pakietu jest zależna od dotychczasowego opóźnienia transmisji; do momentu ponownej próby nadania pakietu końcówka śledzi nośną w kanale i opisywany algorytm powtarza się.
Tego typu schemat dostępu wpływa jednak na zmniejszenie przepustowości kanału.

2.4.3. System ALOHA ze śledzeniem nośnej i wymuszeniem transmisji z prawdopodobieństwem p

W systemie tym wykorzystano ideę przypadkowego czasu startu pakietów kumulujących się pod koniec ramki czasowej. Model pracy systemu podany jest poniżej:
— jeżeli kanał jest wolny, to
  a) z prawdopodobieństwem p końcówka nadaje pakiet,
  b) z prawdopodobieństwem $1-p$ końcówka opóźnia transmisję pakietu o czas τ równy czasowi trwania pakietu; jeżeli do wyznaczonego nowego momentu nadawania pakietu kanał jest wciąż wolny, to powyższy proces jest powtarzany;
— jeżeli kanał jest zajęty, to końcówka czeka z nadawaniem pakietu do czasu zwolnienia się kanału i podejmuje działania według powyższego opisu.

2.4.4. System ALOHA ze śledzeniem nośnej i wymuszeniem transmisji z prawdopodobieństwem $1/\alpha\tau$ a retransmisji z prawdopodobieństwem $1/\beta\tau$

Jest to modyfikacja systemu opisywanego w punkcie 2.4.3. W systemie tym końcówka posiadająca gotowy do transmisji pakiet informacji podejmuje próbę dostępu do kanału i jeżeli kanał jest w tej chwili wolny, końcówka przechodzi w stan aktywny (jeśli była dotychczas w stanie blokowania), nadaje pakiet i transmisja jest udana. Natomiast w przypadku, kiedy w chwili podjęcia próby dostępu do kanału jest on zajęty, to urządzenie końcowe nie nadaje pakietu i przechodzi w stan blokowania (jeżeli nie było dotychczas w stanie blokowania). Urządzenie końcowe aktywne podejmuje próby dostępu do kanału z prawdopodobieństwem $1/\alpha\tau$, natomiast urządzenie końcowe blokowane z prawdopodobieństwem $1/\beta\tau$ [7].

Nietrudno zauważyć, że system opisywany w 2.4.1 jest szczególnym przypadkiem systemu z wymuszeniem retransmisji z prawdopodobieństwem p przy $p = 1$. Jednak ze względów historycznych i z powodu zróżnicowania stopnia komplikacji analizy, powyższy podział wydaje się uzasadniony. Liczba odmian systemów ze śledzeniem nośnej wzrasta z uwagi na możliwość stosowania tego typu dostępu, zarówno w reżimie pracy z ramkowaniem jak i bez ramkowania.

Charakterystyczną cechą systemów ze śledzeniem nośnej jest zmniejszenie ich zasięgu terytorialnego w porównaniu z pozostałymi wariantami systemów ALOHA. Spowodowane jest to koniecznością śledzenia transmisji w kanale przez wszystkie końcówki systemu, a więc koniecznością wzajemnej „słyszalności" poszczególnych urządzeń końcowych, co limituje moc nadajników poszczególnych użytkowników sieci.

Poszczególne, opisywane tutaj sieci cechuje stopniowy wzrost komplikacji metody dostępu. Natomiast zmiany jakości tych systemów omówione zostaną w dalszej części artykułu.

3. ANALIZA RODZINY SYSTEMÓW TYPU ALOHA

W chwili obecnej istnieje szereg metod analizy systemów typu ALOHA. Obejmują one na ogół podstawowe parametry użytkowe omawianych sieci, do których należą: zajętość, obciążenie kanału i średnie opóźnienie transmisji. Powyższe parametry analizowane są w dwóch podstawowych przypadkach:

1) przy założeniu, że liczba pakietów informacji wprowadzanych do kanału jest równa liczbie pakietów opuszczających kanał (analiza statyczna),
2) przy pominięciu powyższego założenia (analiza dynamiczna).

Poza tym na ogół w analizie zakłada się idealny (bezszumowy) kanał radiowy, zerowy czas propagacji sygnału radiowego i stały równy τ czas trwania pakietów informacji. Ważniejsze szczegółowe założenia będą podawane w trakcie ich wykorzystywania.

3.1. Analiza statyczna sieci ALOHA bez ramkowania

Podstawowym założeniem prezentowanej analizy jest założenie o średniej prędkości generacji pakietów przez pojedyncze urządzenie końcowe. Średnia prędkość generacji

informacji jest taka, że średni czas pomiędzy kolejnymi pakietami informacji jest dużo większy od czasu trwania pakietu (w systemie ALOHA [4] stosunek ten jest jak 2000—1). Przyjmując poza tym:

1) poissonowski rozkład chwil startu pakietów informacji nadawanych od wszystkich użytkowników, z parametrem S_j pakietów na sekundę, oraz
2) poissonowski rozkład chwil startu pakietów pierwotnych i retransmitowanych od wszystkich użytkowników, z parametrem G_j pakietów na sekundę,

można wykazać ([4], [10]), że zależność pomiędzy średnim obciążeniem i zajętością kanału ma postać:

$$S = Ge^{-2G}, \tag{1}$$

gdzie:

$S = S_j \tau$ — obciążenie kanału wielodostępowego,

$G = G_j \tau$ — zajętość kanału wielodostępowego.

Zauważmy, że obciążenie osiąga maksimum równe $1/2e = 0{,}184$ dla zajętości $G = 1/2$.

Dysponując maksymalnym obciążeniem kanału można znaleźć [3], przy założeniu jednakowych właściwości wszystkich użytkowników, maksymalną liczbę użytkowników wykorzystujących dany kanał:

$$n_{max} = \frac{C}{2es_u}, \tag{2}$$

gdzie:

n_{max} — maksymalna liczba użytkowników kanału,

C — przepustowość kanału wielodostępowego, w bit/sec,

s_u — natężenie pakietów informacji generowanych przez pojedynczą końcówkę, w bit/sec.

Maksymalne natężenie strumienia pakietów generowanych przez wszystkich użytkowników systemu s_{max} wynosi:

$$s_{max} = \frac{C}{2e}. \tag{3}$$

Przyjmując zmienną długość pakietu informacji, przy założeniu wykładniczego rozkładu długości pakietów [3], otrzymuje się odpowiednik zależności (1) w postaci:

$$S = \frac{G}{(1+G)^3}. \tag{4}$$

Maksymalne obciążenie kanału S_{max} wynosi 0,148 dla zajętości $G = 1/2$ i jest mniejsze od maksymalnego obciążenia przy założeniu stałej długości pakietu. Powyższy wniosek można uogólnić na wszystkie możliwe rozkłady długości pakietów. Można wykazać [8], że spośród wszystkich możliwych rozkładów długości pakietów największą wartość obciążenia kanału uzyskuje się dla przypadku pakietów o stałej długości.

Zakładając, że kanał wielodostępowy wnosi zakłócenia, można otrzymać [3]:

$$S = G(1-P_B)e^{-2G}, \tag{5}$$

gdzie P_B jest prawdopodobieństwem błędu spowodowanego szumem fluktuacyjnym, oraz

$$S_{max} = \frac{1-P_B}{2e}, \tag{6}$$

co zmniejsza maksymalne obciążenie kanału. Gdyby ze względu na niewielkie wartości P_B (rzędu $10^{-3} \div 10^{-5}$) pominąć składnik P_B, S_{max} staje się wówczas równe podanej poprzednio wartości $1/2e$.

W średnie opóźnienie wchodzi składnik zdeterminowany, określony przez sumę czasu propagacji i czasu transmisji pakietu, oraz składnik losowy. Składnik losowy uwzględnia czas tracony na retransmisję. Ostatecznie średnie opóźnienie wynosi [3]:

$$D = \frac{T_p}{\tau}\left(1-\frac{1}{e}\right)+\frac{T_p}{\tau e}\frac{1}{1-2eS}, \tag{7}$$

gdzie:

D — średnie opóźnienie mierzone w wielokrotnościach czasu trwania pakietu,

T_p — średni czas propagacji sygnału radiowego.

3.2. Analiza systemu ALOHA z ramkowaniem

3.2.1. Statyczna analiza systemu ALOHA z ramkowaniem

Rozważania podobne do poprzednich można przeprowadzić dla sieci ALOHA z ramkowaniem. Definiując S_i jako prawdopodobieństwo transmisji pakietu informacji w określonej ramce czasowej przez i-te urządzenie końcowe, przyjmując niezależność pracy poszczególnych końcówek i niezależność wysyłania pakietów przez dane urządzenie w określonych ramkach czasowych, możemy dla n takich urządzeń zdefiniować obciążenie kanału jako [4]:

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i. \tag{8}$$

Podobnie można określić zajętość kanału

$$G = \sum_{i=1}^{n} G_i. \tag{9}$$

Zakładając identyczność właściwości poszczególnych urządzeń końcowych można otrzymać zależność pomiędzy obciążeniem i zajętością kanału w postaci:

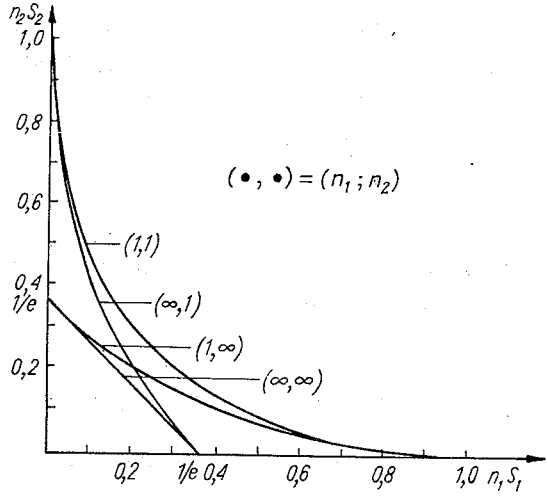
$$S = G\left(1-\frac{G}{n}\right)^{n-1}. \tag{10}$$

Przy liczbie końcówek zmierzającej do nieskończoności otrzymano

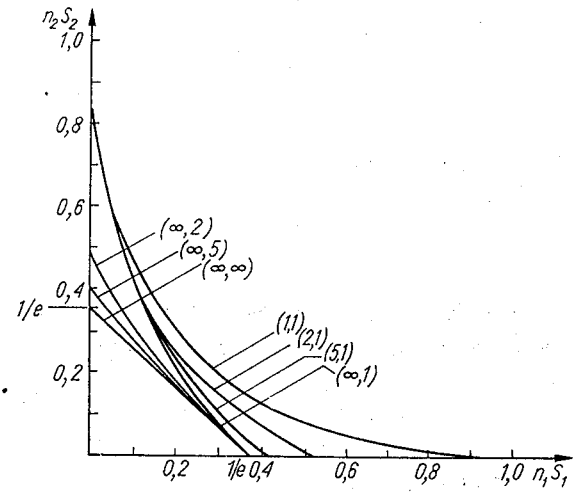
$$S = \lim_{n\to\infty} G\left(1-\frac{G}{n}\right)^{n-1} = Ge^{-G}. \tag{11}$$

Jak łatwo stwierdzić, maksymalne obciążenie kanału w sieci ALOHA z ramkowaniem $S_{max} = 1/e = 0{,}37$ przy $G = 1$. Jest ono dwa razy większe niż w systemie ALOHA bez ramkowania.

Prezentowaną analizę można zastosować również wtedy, gdy zbiór urządzeń końcowych daje się podzielić na podzbiory zawierające końcówki o różnych intensywnościach generacji pakietów informacji. W tym wypadku analiza [4] prowadzi do zależności przedstawionych na rys. 5 i rys. 6.



Rys. 5. Zależność pomiędzy obciążeniami kanału przez dwie klasy urządzeń końcowych współpracujących w systemie typu ALOHA z ramkowaniem w przypadku, kiedy w jednej z klas pracuje pojedyncze urządzenie
n_1 — liczba urządzeń końcowych w klasie pierwszej, S_1 — obciążenie kanału wnoszone przez pojedyncze urządzenie końcowe klasy pierwszej, n_2 — liczba urządzeń końcowych w klasie drugiej, S_2 — obciążenie kanału wnoszone przez pojedyncze urządzenie końcowe klasy drugiej



Rys. 6. Zależność pomiędzy obciążeniami kanału przez dwie klasy urządzeń końcowych współpracujących w systemie typu ALOHA z ramkowaniem
Oznaczenia jak na rysunku 5

Z rys. 5 wynikają ważne wnioski. W mało obciążonym kanale systemu ALOHA z ramkowaniem, pojedyncze „szybkie" (tzn. o dużej prędkości generacji pakietów informacji) urządzenie końcowe wykorzystuje dużą część całkowitego obciążenia kanału (wiele powyżej 37% fizycznej przepustowości kanału, które to obciążenie otrzymuje się w przypadku współpracy w sieci wielu identycznych urządzeń). Wniosek ten jest istotny wtedy, gdy w sieci pracuje wiele wzajemnie oddziaływających końcówek i mała liczba końcówek rzadko nadających dużą ilość informacji.

Wprowadzając podział końcówek na dwie klasy z bardziej szczegółowymi ograniczeniami [4] otrzymano:

dla $n_1 = n_2 = 1$

$$S_1 = G_1^2, \tag{12a}$$

$$S_2 = (1-G_1)^2, \tag{12b}$$

dla $n_2 \to \infty$

$$S_1 = G_1(1-G_1)^{n-1}\exp[-(1-n_1 G_1)], \tag{13a}$$

$$S_2 = (1-n_1 G_1)(1-G_1)^{n-1}\exp[-(1-n_1 G_1)]. \tag{13b}$$

Z zależności (12a) i (12b) wynika, że dla granicznych wartości zajętości kanału G_1 ($G_1 = 0$ i $G_1 = 1$) obciążenia kanału S_1 i S_2 wynoszą odpowiednio $S_1 = 0$, $S_2 = 1$ i $S_1 = 1$, $S_2 = 0$. Wniosek ten jest oczywisty, ponieważ w tych przypadkach mamy do czynienia ze zdegenerowaną siecią, w której pracuje jedna końcówka. W tego typu sieci interferencje oczywiście nie występują i obciążenie kanału jest równe jego zajętości.

Natomiast, kiedy liczba końcówek obydwu typów dąży do nieskończoności, otrzymujemy:

$$S_1 = \frac{G_1}{e}, \tag{14a}$$

$$S_2 = \frac{1-G_1}{e}. \tag{14b}$$

Dla granicznych wartości zajętości kanału G_1 ($G_1 = 0$ i $G_1 = 1$) jego obciążenia S_1 i S_2 wynoszą odpowiednio $S_1 = 1/e$, $S_2 = 0$ oraz $S_1 = 0$, $S_2 = 1/e$, a więc są odpowiednio równe maksymalnej wartości obciążenia kanału w sieci ALOHA z ramkowaniem.

Odrzucając założenie o poissonowskim rozkładzie chwil startu pakietów retransmitowanych i przyjmując, że „pamięć" strumienia tych pakietów obejmuje k ramek czasowych z przeszłości, znaleziono przybliżoną zależność odpowiadającą zależności (10), patrz [3], w postaci:

$$S = \frac{k-1}{k} G e^{-G} \tag{15}$$

oraz

$$S_{max} = \frac{k-1}{k}\frac{1}{e}. \tag{16}$$

Dla k zmierzającego do nieskończoności zależność (15) daje rezultat identyczny z wynikiem otrzymanym przez Abramsona (patrz (11)). Opóźnienie, podobnie jak w 3.1, jest

sumą składnika zdeterminowanego i składnika losowego. Przybliżona zależność opisująca średnie opóźnienie w wielokrotnościach czasu trwania pakietu ma postać [3]:

$$D = \frac{T_p}{\tau} + 1 + \left[\frac{k}{k-1} e^G - 1\right]\left[\frac{T_p}{\tau} + \frac{k+1}{2}\right]. \tag{17}$$

Wyrażenie (17) jest dobrym przybliżeniem opóźnienia dla wartości $k > 10$.

Maksymalna liczba użytkowników w sieci ALOHA z ramkowaniem wynosi

$$n_{max} = \frac{(k-1)C}{kes_u} \tag{18}$$

i jest prawie dwa razy większa od maksymalnej liczby końcówek sieci ALOHA bez ramkowania.

Analiza statyczna sieci ALOHA z ramkowaniem nasuwa interesujące wnioski. Badanie zależności (17) pokazuje, że dla jednej wartości obciążenia kanału S istnieją dwie wartości opóźnienia D. Zjawisko to, zwane bistabilnym zachowaniem systemu, nasuwa wniosek, że założenia dokonywane przy analizie statycznej sieci ALOHA z ramkowaniem nie wystarczają do pełnego opisu zachowania systemu. Przeprowadzone symulacje doprowadziły do sformułowania pojęcia nasycenia kanału, stworzyły konieczność wprowadzenia nowego modelu matematycznego sieci ALOHA z ramkowaniem, uwzględniającego stabilność systemu, i stosowania analizy dynamicznej systemu.

3.2.2. Dynamiczna analiza systemu ALOHA z ramkowaniem

Prezentowaną analizę prowadzono przy możliwie najogólniejszych założeniach odnośnie strumieni pakietów informacji (komplet założeń można znaleźć w [3]). Wprowadzając markowowski model systemu ALOHA z ramkowaniem otrzymano [3] zależność pomiędzy obciążeniem kanału S, prawdopodobieństwem wygenerowania przez końcówkę pakietu pierwotnego (p) oraz prawdopodobieństwem retransmisji pakietu (r). Ze względu na skomplikowane zależności analityczne wyniki przedstawiono graficznie na rys. 7.

Maksymalne obciążenie kanału przy założeniu $p = r$ osiągane jest dla wartości $p = 1/n$ i wynosi:

$$S_{max} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}, \tag{19}$$

gdzie n jest liczbą końcówek współpracujących w systemie.

Przy liczbie użytkowników zmierzającej do nieskończoności ($n \to \infty$) dąży ono do wartości $1/e$, czyli do wartości maksymalnego obciążenia kanału uzyskanego w wyniku statycznej analizy omawianego systemu (patrz (11)).

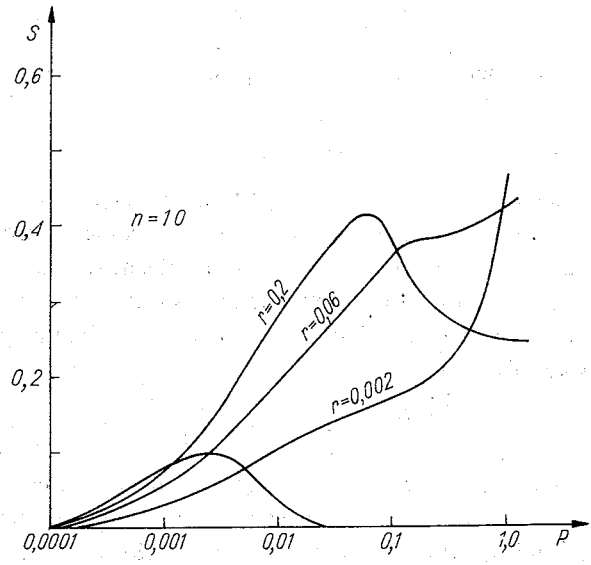
Średnie opóźnienie uzyskane w wyniku omawianej analizy wynosi [9]:

$$D = \frac{1 - P_{BI}}{P_{BI} r} + \frac{1}{P_{BI}} + 1, \tag{20}$$

gdzie P_{BI} jest prawdopodobieństwem braku interferencji.

Z przytoczonej analizy wynika, że przy szczególnych założeniach odnośnie strumieni informacji jedynie rezultaty graniczne obu typów analiz opisanych w 3.2.1 i 3.2.2 są zbieżne.

Rozwiązanie problemu maksymalizacji obciążenia kanału, przy jednoczesnej minimalizacji opóźnienia względem prawdopodobieństw p i r, prowadzi do nowej odmiany systemu, tzw. adaptacyjnego systemu ALOHA z ramkowaniem. Adaptacja polega na dobieraniu wartości prawdopodobieństwa r w zależności od aktualnej wartości prawdopodobieństwa p. W przypadku niezależnego wyboru r oraz p mamy do czynienia z klasycznym systemem ALOHA z ramkowaniem. Oczywiście system ten nie jest optymalny w relacji obciążenie kanału — opóźnienie.



Rys. 7. Zależność obciążenia kanału od prawdopodobieństwa p wygenerowania przez końcówkę pakietu pierwotnego dla systemu typu ALOHA z ramkowaniem, w którym współpracuje 10 końcówek

Parametrem krzywych jest prawdopodobieństwo retransmisji pakietu r

Analiza stabilności rozważanego systemu spowodowała konieczność wprowadzenia nowego parametru charakteryzującego system. Jest to tzw. współczynnik stabilności systemu. Dokładny opis tego typu analizy, wraz z zależnościami pomiędzy obciążeniem kanału, opóźnieniem i stabilnością, można znaleźć w [3].

Wyniki symulacji przeprowadzonej przez Szpankowskiego [9] wykazały, przy założeniu poissonowskiego rozkładu momentów startu pakietów pierwotnych i równomiernego rozkładu ramek dla pakietów retransmitowanych, dobrą zgodność z wynikami teoretycznymi, jeżeli tylko k jest dostatecznie duże.

3.3. Analiza systemu ALOHA z rezerwacją okresową

Podobnie jak poprzednio zakłada się niezależność momentów generacji pakietów informacji przez pojedynczą końcówkę i niezależność momentów generacji pakietów informacji przez poszczególne urządzenia końcowe. Okres rezerwacji przyjmuje wartości natu-

ralne nie większe od liczby kwantów rezerwacji, tzn. $M \leqslant V$. Poza tym istotne jest także założenie o prawidłowości odbioru nieinterferujących pakietów rezerwacji przez poszczególnych użytkowników [3]. Tego typu praca sieci wynika z konieczności znajomości aktualnego stanu rezerwacji przez wszystkich użytkowników systemu.

Dla opisywanego systemu w wyniku analizy otrzymano zależność określającą obciążenie kanału w postaci

$$S = \frac{n(1-P_o)}{M+1}\left[1-\frac{1-P_o}{V}\right]^{n-1}, \tag{21}$$

gdzie P_o jest prawdopodobieństwem zdarzenia polegającego na tym, że urządzenie końcowe nie posiada gotowych do transmisji pakietów informacji.

Wartość maksymalna obciążenia kanału osiągana przy $1-P_o = \frac{V}{n}$ wynosi:

$$S_{max} = \frac{V}{M+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}. \tag{22}$$

Na średnie opóźnienie transmisji składa się suma średniego opóźnienia pakietu rezerwacji danego użytkownika i średniego opóźnienia jego pakietu informacji nadawanego w zarezerwowanej ramce informacyjnej. Ostateczna zależność określająca średnie opóźnienie wyraża się w złożonej formie, którą można znaleźć w pracy [3]. Interesującym wynikiem wspomnianej zależności jest możliwość określenia maksymalnego obciążenia kanału przy zadanej ilości kwantów rezerwacji V. W tym przypadku otrzymuje się:

$$S_{max} = \max_{1\leqslant M\leqslant V}\left\{\min\left[\frac{V}{M+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1};\ \frac{M}{M+1}\right]\right\}. \tag{23}$$

Powyższa zależność stwarza perspektywę znalezienia liczby ramek informacyjnych M maksymalizującą obciążenie kanału. Ponieważ ilość ramek informacyjnych M musi być liczbą naturalną, natomiast wynikająca z zależności (23) wartość $M^* = V(1-1/n)^{n-1}$ jest w ogólności liczbą rzeczywistą, więc optymalna ilość ramek informacyjnych wynosi [3]:

$$M_{opt} = \begin{cases} M_{1\,opt}, & \text{gdy} \quad \dfrac{V}{M+1}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}\Big|_{M=M_{2\,opt}} \leqslant \dfrac{M}{M+1}\Big|_{M=M_{1\,opt}}, \\ M_{2\,opt}, & \text{gdy} \quad \dfrac{V}{M+1}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}\Big|_{M=M_{2\,opt}} > \dfrac{M}{M+1}\Big|_{M=M_{1\,opt}}, \end{cases} \tag{24a}$$

gdzie:

$$M_{1\,opt} = \mathrm{ENT}\left[V\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right], \tag{24b}$$

$$M_{2\,opt} = M_{1\,opt}+1; \tag{24c}$$

ENT[x] — największa liczba całkowita, nie większa od x.

Maksymalne obciążenie kanału przy optymalnej liczbie ramek informacyjnych M_{opt} równe jest:

$$S_{max} = \begin{cases} \dfrac{V\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}}{M_{opt}+1} & \text{dla} \quad M_{opt} = M_{2\,opt}, \\ \dfrac{M_{opt}}{M_{opt}+1} & \text{dla} \quad M_{opt} = M_{1\,opt}. \end{cases} \tag{25}$$

W omawianej analizie stawia się również problem maksymalizacji obciążenia kanału S i jednoczesnej minimalizacji opóźnienia względem M. Wyniki symulacji dla niektórych wartości M i V można znaleźć w [3].

3.4. Analiza dynamiczna systemu ALOHA ze śledzeniem nośnej

System ten pracuje zgodnie z opisem przedstawionym w punkcie 2.4.4, a więc końcówka aktywna próbuje wysyłać pakiety informacji średnio α razy na sekundę. Urządzenie końcowe blokowane dokonuje próby dostępu do kanału średnio β razy na sekundę. Przyjmując poza tym poissonowski rozkład chwil startu pakietów informacji i definiując dodatkowo stany, w których może znaleźć się pojedyncze urządzenie systemu jako:
$I_m(t)$ — wolny kanał z m blokowanymi urządzeniami końcowymi w czasie t; $0 \leqslant m \leqslant n$;
$B_m(t)$ — zajęty kanał z m blokowanymi urządzeniami końcowymi w czasie t; $0 \leqslant m \leqslant n$;
dla systemu z n urządzeniami końcowymi można otrzymać [7] zespół różniczkowych równań stanu systemu postaci:

$$\dot{P}\{I_l(t)\} = [-l\beta-(n-1)\alpha]\,P\{I_l(t)\}+\sum_{k=0}^{n} c_{l|k}P\{I_k(t-\tau)\}, \tag{26a}$$

$$\dot{P}\{B_l(t)\} = [n-(l-1)\alpha]P\{B_{l-1}(t)\}-(n-1)\alpha P\{B_l(t)\}+$$
$$+(n-1)\alpha P\{I_l(t)\}+(l+1)\beta P\{I_{l+1}(t)\}-\sum_{k=0}^{n} c_{l|k}P\{I_k(t-\tau)\}, \tag{26b}$$
$$l = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

gdzie:

$$c_{l|k} = (n-k)\alpha F_{l-k|k}(\tau)+k\beta F_{-k+1|k-1}(\tau), \tag{26c}$$

$$F_{r|p} = \begin{cases} \mathbf{1}(\tau)\binom{n-p}{r}(e^{\alpha\tau}-1)^m e^{-(n-p)\alpha\tau}, & m = 0, 1, \ldots, n-p, \\ 0 & \text{dla pozostałych } m, \end{cases} \tag{26d}$$

oraz

$$\mathbf{1}(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad \tau \geqslant 0, \\ 0 & \text{dla} \quad \tau < 0. \end{cases} \tag{26e}$$

Powyższy zespół równań można przedstawić w zwartej postaci macierzowej [7]:

$$\dot{\vec{X}}(t) = H\vec{X}(t)+G\vec{X}(t-\tau), \tag{27a}$$

gdzie:

$$\vec{X}(t) = \begin{bmatrix} \vec{P}_I(t) \\ \vec{P}_B(t) \end{bmatrix}, \qquad \dot{\vec{X}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\vec{P}}_I(t) \\ \dot{\vec{P}}_B(t) \end{bmatrix}, \tag{27b}$$

$$\vec{P}_B(t) = \begin{bmatrix} P\{B_0(t)\} \\ P\{B_1(t)\} \\ \vdots \\ P\{B_n(t)\} \end{bmatrix}, \qquad \vec{P}_I(t) = \begin{bmatrix} P\{I_0(t)\} \\ P\{I_1(t)\} \\ \vdots \\ P\{I_n(t)\} \end{bmatrix}, \tag{27c}$$

oraz:

$$H = \begin{bmatrix} Q & \emptyset \\ R & S \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} C & \emptyset \\ -C & \emptyset \end{bmatrix}, \tag{27d}$$

gdzie $\emptyset$ jest macierzą zerową o wymiarze $(n+1)\times(n+1)$.

Natomiast elementy macierzy Q, R, S i C równe są odpowiednio:

$$q_{i,j} = -\{(i-1)\beta+(n-i+1)\alpha\}\delta_{i,j}, \tag{28a}$$

$$r_{i,j} = (n-i+1)\alpha\delta_{i,j}+i\beta\delta_{i+1,j}, \tag{28b}$$

$$s_{i,j} = -(n+i+1)\alpha\delta_{i,j}+(n-j+1)\beta\delta_{i,j+1}, \tag{28c}$$

$$c_{i,j} = (n-j+1)\alpha F_{i-j|j-1}(\tau)+(j-1)\beta F_{i-j+1|j-2}(\tau), \tag{28d}$$

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad i = j, \\ 0 & \text{dla} \quad i \neq j, \end{cases} \tag{28e}$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Rozwiązanie przedstawionych równań różniczkowych jest w ogólności trudne. Istnieje [7] iteracyjna lub częstotliwościowa metoda ich rozwiązania.

O wiele prostsze jest natomiast rozwiązanie stanu ustalonego dla rozważanego systemu. Przyjmując, że w stanie ustalonym $\dot{\vec{X}}_\infty = 0$, $\vec{X}(t) = \vec{X}(t-\tau) = \vec{X}_\infty$, równanie stanu systemu przechodzi w równanie [7]:

$$\vec{P}_I = (Q+C)'^{-1}\vec{W}, \tag{29a}$$

gdzie macierz $(Q+C)'$ jest macierzą $Q+C$, w której ostatni wiersz zastąpiono współczynnikami równania:

$$\sum_{l=0}^{n} \{1+[(n-1)\alpha+l\beta]\tau\}P(I_l) = 1, \tag{29b}$$

$$\vec{W} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{29c}$$

oraz

$$\vec{P}_B = S^{-1}[\vec{W}-(R-C)\vec{P}_I]. \tag{29d}$$

Z powyższej analizy otrzymujemy, że dla stanu ustalonego średnie obciążenie kanału w systemie wynosi

$$S = \sum_{l=0}^{n} P(B_l). \tag{30}$$

Natomiast średnie opóźnienie

$$D = \frac{P(B)}{\beta(1-S\tau)\tau}, \tag{31}$$

gdzie opóźnienie D dane jest w wielokrotnościach czasu trwania pakietu.

Średnia liczba urządzeń blokowanych dla stanu ustalonego jest równa:

$$\bar{n} = \sum_{l=0}^{n} l[P(I_l)+P(B_l)]. \tag{32}$$

Analiza stanu ustalonego w systemie z dwoma końcówkami prowadzi do wniosku, że wielkość $\beta\tau$ musi być wybierana możliwie największa. Natomiast wybór $\alpha\tau$ musi być wypośrodkowany. Należy bowiem pamiętać, że dla zmniejszenia opóźnień i liczby urządzeń blokowanych $\alpha\tau$ musi być duże, lecz wpływa to jednocześnie na zmniejszenie obciążenia kanału.

Podstawowe mierniki jakości pozostałych sieci rodziny systemów ze śledzeniem nośnej można znaleźć w [6]. Dla ilustracji zmiany jakości tych sieci przytoczone zostanie jedynie porównanie przepustowości poszczególnych wariantów tej rodziny zaczerpnięte z [6].

Schemat dostępu do kanału	Przepustowość kanału w systemie
ALOHA bez ramkowania	0,184
ALOHA z ramkowaniem	0,368
CSMA wymuszane z prawdopodobieństwem 1	0,529
ramkowane CSMA wymuszane z prawdopodobieństwem 1	0,531
CSMA wymuszane z prawdopodobieństwem 0,01	0,791
CSMA bez wymuszania	0,815
CSMA wymuszane z prawdopodobieństwem 0,03	0,827
ramkowane CSMA bez wymuszania	0,857

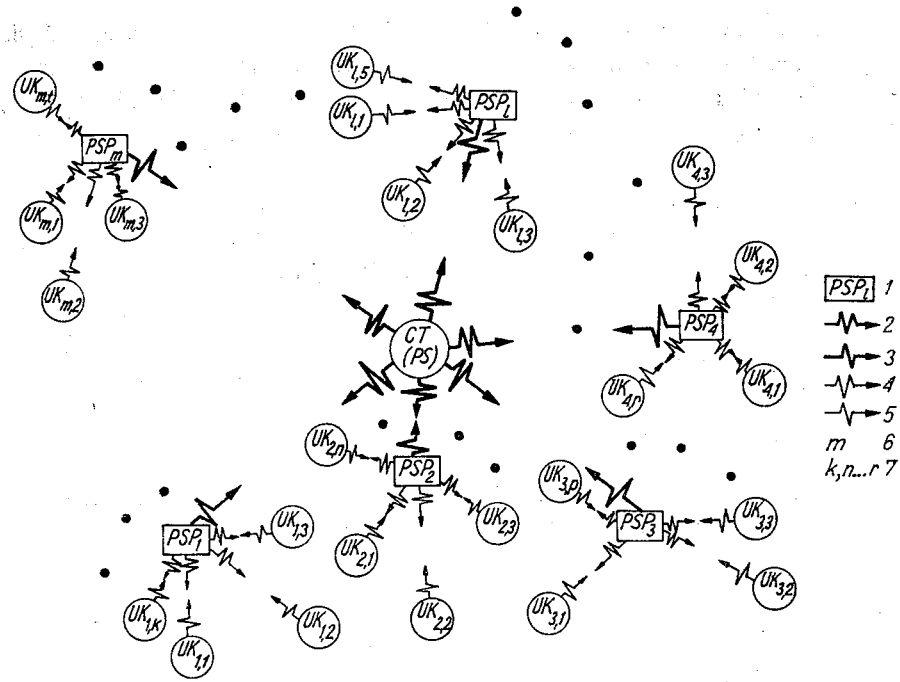
W [6] można znaleźć również porównanie innych parametrów dla poszczególnych odmian omawianych systemów, jak również dalsze rozwinięcia metody dostępu do kanału radiowego. Do rozwinięć tych należy system z tonem zajętości (ang. *Busy Tone Multiple Access* — BTMA), w którym kanał szerokopasmowy dzieli się na dwa podkanały: w jednym odbywa się transmisja pakietów informacji, w drugim nadawany jest sygnał zajętości kanału „informacyjnego".

Analizowany jest również system z podzielonym kanałem rezerwacji (*Splitchannel Reservation Multiple Access* — SRMA), który jest w zasadzie systemem z zapytaniem. Zapytanie realizowane jest według klasycznego schematu dostępu typu ALOHA lub CSMA. Kanał sterujący w tego typu sieci jest podzielony na dwa kanały: kanał zapytań i kanał odpowiedzi na zapytanie.

3.5. Analiza wielostopniowego systemu ALOHA

Gitman [1] proponuje wielostopniową sieć ALOHA. Działanie tej sieci opiera się na klasycznej metodzie dostępu niekontrolowanego (w omawianej analizie jest rozwinięciem systemu ALOHA z ramkowaniem). Nowością jest jedynie podział zbioru końcówek na szereg podzbiorów, z których każdy jest obsługiwany przez tzw. przekaźnikową stację

pośredniczącą. Natomiast szereg stacji pośredniczących współpracuje (również w schemacie dostępu niekontrolowanego) z centrum teleinformatycznym (satelitarną stacją przekaźnikową). Schemat współpracy sieci tego typu przedstawiono na rys. 8.



Rys. 8. Ogólna struktura przestrzenna dwustopniowego systemu typu ALOHA

1 — *l*-ta pośrednicząca stacja przekaźnikowa ($l = 1, 2, \ldots, m$), *2* — radiowy kanał dyfuzyjny na etapie centrum teleinformatyczne — pośrednicząca stacja przekaźnikowa, *3* — radiowy kanał wielodostępowy na etapie centrum teleinformatyczne — pośrednicząca stacja przekaźnikowa, *4* — radiowy kanał dyfuzyjny na etapie pośrednicząca stacja przekaźnikowa — końcówka, *5* — radiowy kanał wielodostępowy na etapie pośrednicząca stacja przekaźnikowa — końcówka, *6* — liczba stacji przekaźnikowych pracujących w sieci, *7* — liczba końcówek współpracujących z 1, 2, ..., *m*-tą stacją przekaźnikową, pozostałe oznaczenia jak na rys. 1

Zakładając w analizie, że wszystkie stacje sieci pracują na tej samej częstotliwości nośnej (lecz innej w kanale wielodostępowym i w kanale dyfuzyjnym), rozważa się [1] obciążenie i zajętość kanału oraz średnie opóźnienie transmisji na etapie końcówka — pośrednicząca stacja przekaźnikowa i etapie stacje przekaźnikowe — centrum teleinformatyczne (przekaźnik satelitarny). Przyjmując założenia uczynione przy analizie sieci ALOHA z ramkowaniem oraz zakładając dodatkowo identyczność wszystkich końcówek, pośredniczących stacji przekaźnikowych i możliwość buforowania pakietów informacji w pośredniczących stacjach przekaźnikowych, obciążenie kanału w obu etapach wynosi

$$S = \frac{G_1 \exp(-G_1/m)}{[1+(G_1/m)\exp(-G_1/m)]^m}, \tag{33}$$

gdzie:

m — liczba pośredniczących stacji przekaźnikowych,

G_1 — całkowita zajętość kanału przez końcówki na etapie końcówki — pośrednicząca stacja przekaźnikowa.

Maksima obciążenia kanału dla trzech wartości zajętości kanału można uzyskać w dwu przypadkach [1]. Gdy

$$G_1 = m, \quad \text{dla} \quad m < 4, \tag{34a}$$

maksymalna wartość obciążenia kanału wynosi:

$$S_{max} = \frac{m}{e(1+1/e)^m}. \tag{34b}$$

Natomiast wówczas, gdy G_1 jest rozwiązaniem równania

$$m-(m-1)G_1\exp(-G_1/m) = 0, \quad \text{dla} \quad m \geqslant 4, \tag{34c}$$

maksymalne obciążenie kanału wynosi:

$$S_{max} = (1-1/m)^{m-1}. \tag{34d}$$

Zauważmy tutaj, że dla $m = 1$ obciążenie kanału analizowanego systemu jest mniejsze niż dla systemu jednostopniowego, gdzie wynosi ono $1/e$. Natomiast dla $m > 1$ jest większe od $1/e$ i zmierza do tej wartości przy liczbie przekaźników pośredniczących dążącej do nieskończoności.

W rozważanym systemie możliwe jest wprowadzenie w pośredniczących stacjach przekaźnikowych anten kierunkowych dla łączności z centrum teleinformatycznym (przekaźnikiem satelitarnym). W przypadku wykorzystywania anten kierunkowych, transmisje od przekaźnika pośredniczącego do centrum nie interferują z transmisjami od końcówek do przekaźnika pośredniczącego. Tego typu polepszenie jakości systemu jest efektywne tylko dla $m < 4$, ponieważ dla $m \geqslant 4$ obciążenie kanału jest determinowane przez obciążenie na etapie przekaźnik pośredniczący — centrum teleinformatyczne (przekaźnik satelitarny), a na tym etapie zastosowanie anten kierunkowych nie zmniejsza liczby interferencji.

W rozpatrywanym systemie poważnym problemem staje się jednak wykorzystanie kanału dyfuzyjnego przenoszącego informację od centrum (przekaźnika satelitarnego) do urządzeń końcowych. Ponieważ transmisja jest dwuetapowa a wszystkie stacje w systemie (centrum, przekaźniki pośredniczące, końcówki) pracują z jednakową częstotliwością nośną, pojawia się więc problem niespotykany w omawianych dotychczas systemach. Pakiety informacji nadawane z centrum teleinformatycznego do pośredniczącej stacji przekaźnikowej interferują z pakietami informacji od stacji pośredniczących do urządzeń końcowych. Konieczna jest w tym przypadku analiza kanału dyfuzyjnego. W jej wyniku, przy założeniach podobnych do uczynionych na początku tego punktu, otrzymano [1]:

$$S_{dyf} = G_{1\,dyf}\frac{1-G_{1\,dyf}}{1-G_{1\,dyf}[(m-1)/m]}, \tag{35}$$

gdzie $G_{1\,dyf}$ jest zajętością kanału w etapie centrum teleinformatyczne (przekaźnik satelitarny) — pośrednicząca stacja przekaźnikowa.

Maksimum obciążenia otrzymano dla zajętości kanału wynoszącej:

$$G_{1\,dyf} = \frac{2m+I-1\pm[4mI+(I-1)^2]^{1/2}}{2(m-1)}, \tag{36}$$

gdzie I jest poziomem interferencji równym ilości stacji mogących interferować z pojedynczym przekaźnikiem pośredniczącym (dla uproszczenia przyjęto, że każdy przekaźnik pośredniczący posiada tak samo liczny zbiór stacji mogących z nim interferować).

Dla zwiększenia obciążenia kanału dyfuzyjnego można zastosować w centrum teleinformatycznym (przekaźniku satelitarnym) anteny kierunkowe i nadajniki wielokrotne z antenami kierunkowymi. W tym przypadku otrzymano [1] następujące maksymalne obciążenie kanału dyfuzyjnego:

$$S_{dyf} = \begin{cases} \dfrac{m}{I+1}\left(1+\dfrac{1}{I+1}\right)^{I} & \text{dla} \quad m \leqslant I+1, \\ (1-1/m)^{I} & \text{dla} \quad m > I+1. \end{cases} \tag{37}$$

Z ostatniej zależności wynika, że obciążenie kanału w systemie z antenami kierunkowymi jest wyższe niż dla systemu bez anten kierunkowych, szczególnie przy niskim poziomie interferencji (małe I).

Zastosowanie nadajników wielokrotnych z antenami kierunkowymi stwarza możliwość zwiększenia zajętości kanału powyżej jedności, co jest wartością maksymalną dla systemu z pojedynczym nadajnikiem. Oczywiście ma to zasadniczy wpływ na łączne obciążenie kanału, które może być w tym przypadku również większe od jedności.

Minimalna liczba nadajników z antenami kierunkowymi w centrum teleinformatycznym (przekaźniku satelitarnym), zapewniająca maksimum obciążenia kanału, jest równa $[m/(1+km)]$, gdzie nawias kwadratowy $[x]$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą większą od x, natomiast $k = \dfrac{I}{m}$.

Jak wynika z podanej wartości minimalnej liczby nadajników i zależności (37), zwiększenie liczby nadajników w centrum teleinformatycznym (przekaźniku satelitarnym) nie zwiększy obciążenia kanału w przypadku, kiedy poziom interferencji I jest wysoki, tzn. gdy $m < km+1$.

4. WPŁYW ROZMIESZCZENIA PRZESTRZENNEGO URZĄDZEŃ KOŃCOWYCH I EFEKTU PRZECHWYTYWANIA NA OBCIĄŻENIE KANAŁU I ŚREDNIE OPÓŹNIENIE TRANSMISJI

Abramson [10], [11] rozważa również w systemach ALOHA wpływ rozmieszczenia przestrzennego urządzeń końcowych w obecności efektu przechwytywania[2)] na obciążenie systemu typu ALOHA. W prostej analizie rozważa się system ALOHA bez ramkowania z pojedynczym odbiornikiem radiowym, odbierającym pakiety informacji nadawane przez dużą liczbę urządzeń końcowych, rozmieszczonych w różny sposób wokół odbiornika centralnego. Przyjmuje się poza tym poissonowski rozkład chwil startu pakietów informacji i jednostkowy czas trwania pakietu.

Definiując przez $s_a(r)$ znormalizowane obciążenie kanału (obciążenie jednostkowe S_j na jednostkę powierzchni w odległości r od odbiornika centralnego) oraz przez $g_a(r)$

[2)] Efekt przechwytywania ma miejsce w przypadku, kiedy odbiornik radiowy jednocześnie przyjmuje sygnały o różnym poziomie mocy. Wtedy to sygnał o większej mocy zagłusza (przechwytuje) sygnał o mniejszej mocy. Sygnał o większej mocy może być odebrany poprawnie.

znormalizowaną zajętość kanału (zajętość jednostkowa G_j na jednostkę powierzchni w odległości r od odbiornika centralnego), można otrzymać równanie wiążące opisane powyżej parametry systemu dla zespołu końcówek z koła o promieniu r [10], [11]:

$$s_a'(r)g_a(r) = g_a'(r)s_a(r) - 4\pi r a^2 g_a(ar)g_a(r)s_a(r), \tag{38}$$

gdzie $a \geqslant 1$ jest współczynnikiem przechwytywania.

Zakładając stałą niezależną od r znormalizowaną zajętość kanału $g_a(r) = g_0$ i definiując odległość r_1 jako promień koła, przy którym otrzymuje się zajętość maksymalną, tzn. $\pi r_1^2 g_0 = 1$, przy warunku brzegowym $s_a(0) = g_0$, jednostkowe obciążenie kanału $s_a(r)$ można wyrazić następująco [10]:

$$s_a(r) = g_0 \exp\left[-2a^2\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\right], \tag{39}$$

zaś całkowite jednostkowe obciążenie kanału przez wszystkie urządzenia końcowe z koła o promieniu r wynosi:

$$S_j = \int_0^r 2\pi x s_a(x)\,dx = \frac{1}{2a^2}\left\{1 - \exp\left[-2\left(\frac{ar}{r_1}\right)^2\right]\right\}. \tag{40}$$

Okazuje się, że

$$\lim_{r\to\infty} S_j = \frac{1}{2a^2}. \tag{41}$$

W przypadku całkowitego przechwytywania ($a = 1$) całkowite obciążenie kanału wnoszone przez wszystkie końcówki wynosi 1/2.

Zakładając natomiast stałe niezależne od odległości znormalizowane obciążenie wnoszone przez wszystkie końcówki z koła o promieniu r, tzn. $s_a(r) = s_0$, można w przypadku całkowitego przechwytywania ($a = 1$), przy warunku brzegowym $g_a(0) = s_0$, uzyskać [10], [11]:

$$g_a(r) = \frac{s_0}{1 - 2\pi r^2 s_0}. \tag{42}$$

Wyrażenie (42) posiada sens fizyczny jedynie dla r z przedziału:

$$0 \leqslant r < r_0, \tag{43}$$

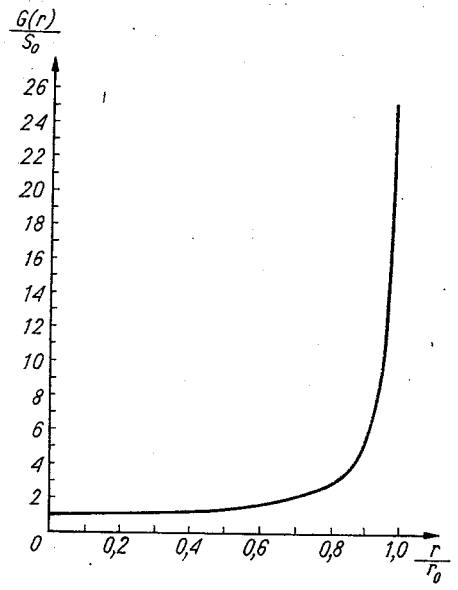
gdzie $r_0 = (2\pi s_0)^{-1/2}$ nazywane jest promieniem Syzyfa.

Okazuje się, że wszystkie końcówki rozmieszczone w kole o promieniu Syzyfa po skończonej liczbie retransmisji przekażą bezbłędnie swoje pakiety informacji od stacji centralnej. Natomiast urządzenia końcowe rozmieszczone na zewnątrz koła o promieniu Syzyfa nie przekażą swoich pakietów informacji do odbiornika centralnego, gdyż opóźnienie transmisji dla wszystkich tych końcówek jest nieskończone.

Średnią liczbę transmisji przypadających na jedną transmisję udaną w funkcji odległości od odbiornika centralnego dla systemu ALOHA bez ramkowania, [10], [11], przedstawia rys. 9.

Powyższe rozważania można uogólnić na system ALOHA z ramkowaniem i dowolne rozmieszczenie urządzeń końcowych wokół odbiornika centralnego wprowadzając pojęcie parametru Syzyfa [10]. Wykazuje się również, że niecałkowite przechwytanie ($a > 1$)

dla pewnych rozmieszczeń przestrzennych końcówek nie wpływa na zmianę obciążenia kanału. Poza tym analizuje się przypadek szczególny sieci z dwoma urządzeniami końcowymi przy całkowitym przechwytywaniu, otrzymując zależności analityczne pomiędzy obciążeniem i zajętością kanału oraz opóźnieniem i obciążeniem kanału w systemie ALOHA z (lub bez) ramkowaniem.



Rys. 9. Średnia liczba transmisji przypadających na jedną transmisję udaną w funkcji odległości końcówki od odbiornika centralnego dla systemu typu ALOHA bez ramkowania

5. PODSUMOWANIE

Statyczne rozważania poszczególnych wariantów teleinformatycznego systemu komunikacji radiowej o dostępie niekontrolowanym wskazują na możliwość uzyskiwania coraz wyższych wskaźników jakości. Najlepsze w sensie analizowanych parametrów są systemy ze śledzeniem nośnej. Interesującym zagadnieniem wydaje się analiza parametrów systemu z rezerwacją okresową przy założeniu rezerwacji w schemacie ALOHA ze śledzeniem nośnej.

Zauważmy jednak, że wzrost jakości systemu uzyskiwany jest kosztem komplikacji wyposażenia urządzeń końcowych, co powoduje wzrost jego ceny. Rodzi się w ten sposób problem relacji pomiędzy polepszeniem jakości systemu i wzrostem jego ceny. Optymalizacja obejmująca zarówno jakość jak i cenę mogłaby dać odpowiedź na pytanie, jak daleko opłaci się komplikować metodę dostępu do kanału w systemach o dostępie niekontrolowanym.

Istotnym wnioskiem z dynamicznej analizy systemu ALOHA z ramkowaniem jest stwierdzenie niedostateczności analizy statycznej dla poznania zachowania systemu. Jedynie przy pewnych szczegółowych założeniach graniczne wyniki obu typów analiz są zbieżne.

Różniczkowe równania stanu systemu ze śledzeniem nośnej, przedstawione w rozdziale 3.4, dają interesujące zależności pomiędzy parametrami systemu a reżimem pracy koń-

cówek. Ciekawe zagadnienie stanowiłoby rozwiązanie równań stanu systemu dla liczby końcówek większej od dwóch i określenie warunków stabilności systemu.

Koncepcja systemu z przekaźnikowymi stacjami pośredniczącymi może, w warunkach kiedy sieć pokrywa bardzo duże obszary terytorialne, zasadniczo obniżyć koszty systemu ze względu na dokonywany podział mocy nadajników urządzeń końcowych. System ten charakteryzuje się w pewnych okolicznościach bardzo dobrymi wskaźnikami jakości. Poważnym mankamentem przytoczonej analizy jest założenie schematu dostępu z ramkowaniem, co nie daje materiału porównawczego dla innych wariantów systemu ALOHA przy wielopoziomowej strukturze sieci.

Analiza wpływu rozmieszczenia przestrzennego urządzeń końcowych w obecności efektu przechwytywania daje dodatkowo cenne wskazówki odnośnie jakości systemu. Poważnym brakiem analizy jest otrzymanie wyników jedynie dla odmian systemu ALOHA z (lub bez) ramkowaniem.

Ze względu na ograniczoną objętość prezentowanej publikacji oraz równorodność i złożoność zagadnień opis założeń i analiz musiał ulec poważnym uproszczeniom. Bardziej systematyczny i szeroki przegląd sieci ALOHA znaleźć można w opracowaniu autora [2] i pracy Szpankowskiego [3].

Niewielka objętość artykułu nie pozwoliła na przedstawienie opisów szeregu innych analiz (np. analizy systemów BTMA czy też SRMA) i studiów porównawczych rodziny systemów ALOHA z innymi, działającymi obecnie sieciami teleinformatycznymi.

LITERATURA

1. I. Gitman, *On the Capacity of Slotted ALOHA Networks and Some Design Problems*, IEEE Transactions on Communications, vol-com 23, No 3, March 1975.
2. A. Kozłowski, *Analiza wielodostępowych systemów teleinformatycznych z dostępem przypadkowym, wykorzystujących kanał radiowy*, Opracowanie w ramach problemu węzłowego 06.1.3, Gdańsk 1975.
3. W. Szpankowski, *Analiza niektórych sieci teleinformatycznych z kanałem radiowym*, Praca dyplomowa, Gdańsk 1976.
4. N. Abramson, *Packiet Switching with Satellites*, ASS Note 37 NIC # 15194, University of Hawaii, 1973.
5. M. J. Eric, *The Economics and Performance of Satellite Packiet Switching*, IEEE Transactions on Communications, vol-com 23, No 7, July 1975.
6. L. Kleinrock, F. Tobogi, *Random Acces Techniques for Data Transmission over Packet Switched Radio Channels*, in 1975 Nat. Conf., AFIPS Conf. Proc., vol. 44, Montreale, N. J.: AFIPS Press, 1975.
7. R. Y. Ibaraki, *A Dynamic Analysis of ALOHA Systems with Blocking and Carrier Sense*, Reports ARPA NAS 2-6700, 1974.
8. M. Ferguson, *A Study of Onslotted ALOHA with Orbitrary Message Lenght*, ASTR B75-7, February 1975.
9. W. Szpankowski, *Symulation of ALOHA-type Systems*, Report of Fraining in Rokusai Denshan, Denwa, 1975.
10. N. Abramson, *The Theory of Packet Broadcasting*, Technical Report B76-1, University of Hawaii, 1976.
11. N. Abramson, *The Spatial Capacity of an ALOHA Channel*, NIC # 16087 Packet Radio Temporary, Note 49, University of Hawaii, 1973.

Poza tym związane bezpośrednio z systemem ALOHA lub stanowiące podbudowę teoretyczną są następujące pozycje:

12. J. Seidler, *Systemy przesyłania informacji cyfrowych*, WNT, Warszawa 1976, pp. 507—595.
13. N. Abramson, *The ALOHA system*, in: Computer Communication Networks, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1973, pp. 501—518 (tłumaczenie polskie w druku).
14. W. Sobczak, *Analiza jakości systemów wielodostępowych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Elektronika, nr 198, z. XXX, Gdańsk 1973.

A. KOZŁOWSKI

METHODS OF ANALYSIS OF PACKET SWITCHING NETWORKS USING A RADIO CHANNEL IN THE RANDOM ACCESS MODE

Summary

In this paper the base mutants of packet switching networks using a radio channel in a random access mode are described. A review of the known methods of static and dynamic analysis of these systems is given. The main parameters like packet throughput and packet traffic, average delay of transmission and average numbers of blocked devices are defined. The influence of capture effect and of space distribution of the terminals on these network parameters is also described. The multistage structure network with random access mode using a radio channel has also been analysed.

A. KOZŁOWSKI

MÉTHODE D'ANALYSE DES SYSTÈMES TÉLÉINFORMATIQUES MULTIACCESSIBLES UTILISANT LA VOIE RADIOÉLECTRIQUE DANS LE SCHÉMA DE L'ACCÈS INCONTRÔLÉ

Résumé

Dans l'article on a décrit les principaux types des systèmes téléinformatiques à accès incontrôlé, utilisant la voie radioélectrique, généralement nommés systèmes ALOHA.

On a passé en revue les méthodes connues d'analyse statique et dynamique de ces systèmes, à partir de laquelle on a désigné leurs principaux paramètres, tels que: charge et occupation de voie, retard moyen de transmission, nombre moyen des dispositifs bloqués. On a présenté aussi l'influence de la répartition spaciale des terminaux et de l'effet d'interception sur les paramètres du système.

Enfin on a fait l'analyse du système téléinformatique multiaccessible, utilisant la voie radioélectrique dans le schéma de l'accès incontrôlé.

A. KOZŁOWSKI

DURCHFÜHRUNGSMETHODEN FÜR ANALYSEN MEHRZUGÄNGLICHER TELEINFORMATIVER SYSTEME, DIE DEN RANDFUNKKANAL IM SCHEMA EINES UNKONTROLLIERTEN ZUGANGS AUSNUTZEN

Zusammenfassung

Im obigen Artikel wurde die Beschreibung der Grundvarianten teleinformativer Systeme mit unkontrolliertem Zugang gebracht, die den Rundfunkkanal ausnutzen. Sie werden mit dem Sammelnamen ALOHA-Systeme bezeichnet.

Eine Übersicht über die bekannten Methoden wurde getätigt: die statische und die dynamische Analysenmethode für diese Systeme, in Ergebnis deren die Grundparameter festgelegt worden sind, und zwar Belastung und Besetzheitsgrad des Kanals, mittlere Transmissionsverzögerung und die mittlere Menge der blockierten Vorrichtungen.

Es wurde auch der Einflus der Raumverteilung von Schluß- vorrichtungen sowie des Auffangeffekts auf die Systemparameter geschildert.

Zum Schuß wurde die Analyse des mehrstufigen teleinformativen Systems angeführt, das den Rundfunkkanal im Schema eines unkontrollierten Zugangs ausnutzt.

А. КОЗЛОВСКИ

МЕТОДЫ АНАЛИЗА МНОГОДОСТУПНЫХ СИСТЕМ РАДИОПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ СО СВОБОДНЫМ ДОСТУПОМ К РАДИОКАНАЛУ

Р е з ю м е

Представлены основные варианты телеинформатических систем со свободным доступом к радиоканалу (системы типа ALOHA). Обсуждены известные методы статического и динамического анализа таких систем и определены их основные параметры, как: нагрузка и использование канала связи, среднее время ожидания передачи и среднее число блокированных устройств. В труде представлено влияние пространственного размещения оконечных устройств и эффекта перехватывания на параметры систем.

Приведен также анализ иэрархических многодоступных систем радиопередачи данных со свободным доступом.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1978, 24, z. 3, ss. 715—743

621.391.822

Problemy teoretyczne szumów typu $1/f$

ANDRZEJ KUSY (RZESZÓW)

Instytut Elektrotechniki Politechniki Rzeszowskiej

Otrzymano 14.5.1977

Przedstawiono podstawowe trudności jakie napotyka się przy analizie teoretycznej szumów typu $1/f$. Zaprezentowano usystematyzowany przegląd propozycji wyjaśnienia tego zjawiska uwzględniający modele matematyczne oraz fenomenologiczne i fizyczne. W zakresie modeli matematycznych przedstawiono z jednej strony koncepcje zakładające stacjonarność procesu i bazujące na twierdzeniu Wienera-Chinczyna oraz z drugiej, propozycje dopuszczające niestacjonarność — z uwzględnieniem całkowania rzędu ułamkowego oraz procesów typu błądzenia przypadkowego i ruchu Browna. Opisano koncepcję traktowania fluktuacji i uzasadniania gęstości widmowej postaci $1/f$ w systemie z prądem elektrycznym, jako wybrany przykład analizy systemu znajdującego się w stanie nierównowagi. Podano krótką charakterystykę zjawisk powierzchniowych w półprzewodnikach oraz wykorzystania ich do wyjaśniania szumów typu $1/f$. Dokonano przeglądu i porównania teorii szumów styków punktowych, jako obszarów o małej liczbie całkowitej swobodnych nośników ładunku. Oszacowano rozmiary ośrodka przewodzącego, krytyczne z punktu widzenia powstawania szumów typu $1/f$ oraz porównano je z rozmiarami cząstek przewodzących obserwowanych w rezystywnych warstwach grubych. W oparciu o przeprowadzoną w pracy analizę teoretyczną wskazano główne kierunki badań nad szumami typu $1/f$.

1. WSTĘP

W zakresie małych częstotliwości (na ogół poniżej ok. 100 kHz) w szeregu materiałów i elementów elektronicznych [1—9], a także w roztworach jonowych, ogniwach stężeniowych [10] [11], błonach komórek nerwowych [12] obserwuje się podczas przepływu prądu fluktuacje, których poziom znacznie przewyższa szumy białe. Dane doświadczalne wskazują zgodnie na fakt, że gęstość widmowa tych szumów jest w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalna do częstotliwości w zakresie wielu dekad (stąd nazwa szumy typu $1/f$). W szczególności nie zaobserwowano dotychczas dolnej granicy tej zależności, mimo że prowadzone były intensywne próby jej ustalenia aż do $10^{-4} \div 10^{-5}$ Hz [13—15]. W zakresie dużych częstotliwości pomiary szumów typu $1/f$ ogranicza poziom szumów białych. Drugą charakterystyczną cechą rozważanych szumów jest proporcjonalność gęstości widmowej kwadratu napięcia (lub prądu) fluktuacji, w przybliżeniu do kwadratu napięcia (lub prądu), które te fluktuacje wywołuje. Tak więc gęstość widmową szumów typu $1/f$ można opisać eksperymentalnym wzorem:

$$\frac{\overline{u^2}}{\Delta f} = Cf^{-\gamma} U^{\alpha}, \tag{1}$$

gdzie f i U oznaczają odpowiednio częstotliwość i napięcie, C jest stałą zależną od materiału i struktury badanej próbki, zaś γ i α są współczynnikami, przyjmującymi wartości odpowiednio w przedziałach $0{,}8 \div 1{,}2$ i $1{,}6 \div 2{,}4$.

Jedna z podstawowych trudności natury teoretycznej, którą określa się czasem jako „katastrofę energetyczną", dotyczy tu przypadku $\gamma \geqslant 1$. Wówczas bowiem, całka z gęstości widmowej, czyli moc średnia szumów, określona przy dolnej granicy równej 0 staje się równa nieskończoności:

$$\int_{f_1}^{f_2} f^{-\gamma} df = \left(\frac{1}{1-\gamma} f^{1-\gamma} \right)_{f_1 \to 0}^{f_2} \longrightarrow \infty \qquad \text{dla } \gamma > 1,$$

$$\int_{f_1}^{f_2} f^{-\gamma} df = \ln f \Big|_{f_1}^{f_2} \xrightarrow[\text{lub } f_2 \to \infty]{f_1 \to 0} \infty \qquad \text{dla } \gamma = 1.$$

W przypadku $\gamma = 1$, zarówno $f_1 = 0$ jak i $f_2 = \infty$ prowadzą do nieskończenie dużej mocy.

Jeżeli chodzi o nieskończoność związaną z górną granicą, to w analogii do szumów śrutowych można przypuszczać, że gęstość widmowa będzie się zmieniać jak $1/f^2$ dla częstotliwości dużo większych niż odwrotność czasu trwania indywidualnego zdarzenia procesu tworzącego szumy. Jest to dla półprzewodników częstotliwość rzędu kilku MHz (czas życia nośników jest rzędu 1 μs). Szumy typu $1/f$ „giną" jednak pod poziomem szumów białych dla znacznie niższych częstotliwości i dlatego nie można potwierdzić tej prognozy na drodze eksperymentalnej. Problem nieskończoności związanej z górną granicą może być w związku z tym potraktowany od strony teoretycznej analogicznie, jak dla szumów białych [16] [17].

W celu przedyskutowania rozbieżności całki w dolnej granicy weźmy pod uwagę następujący przykład [17]. Jak wiadomo, dla typowego rezystora kompozycyjnego średniej jakości, wartość skuteczna napięcia szumów typu $1/f$ w zakresie 1 dekady częstotliwości wynosi ok. 1 μ na 1 V przyłożonego napięcia stałego [18]. Tak więc, stosunek mocy prądu stałego zasilania do mocy szumów wynosi 10^{12} i aby osiągnąć moc szumów równą 1% mocy zasilania, należałoby zwiększyć pasmo częstotliwości do 10^{10} dekad[1]. Oznacza to, że gdyby przyjąć f_2 równe 10 GHz (10 dekad w stosunku do 1 Hz), to okres odpowiadający najniższej częstotliwości takiego pasma byłby stale jeszcze 10^9 dekad dłuższy niż 1 s (wynosiłby 10^{10^9} s). Tak więc zwiększenie mocy szumów typu $1/f$ do poziomu porównywalnego z mocą zasilania poprzez rozszerzenie pasma w kierunku dolnych częstotliwości (można by to uznać za praktyczny aspekt rozbieżności całki z gęstości widmowej dla $f = 0$) jest praktycznie niemożliwe. W tym świetle sugestia, że odwrotna proporcjonalność gęstości widmowej do częstotliwości jest nie do przyjęcia, ponieważ całka jest rozbieżna dla $f = 0$, nie ma praktycznego znaczenia.

Trudniejszy problem, związany z wyjaśnieniem samej natury rozważanych szumów, stanowi dobranie takiego zjawiska czasowego (czy też sumy zjawisk), któremu odpowia-

[1] $\left(\frac{P_{1/f}}{P_=}\right)_{\frac{f_2}{f_1} = 10^{10^{10}}} = \frac{C \ln 10^{10^{10}} V^2}{1V^2} = \frac{10^{10} C \ln 10 V^2}{1V^2} = 10^{10} \cdot 10^{-12} = 0{,}01.$

dałaby gęstość widmowa postaci $1/f$. Jak wiadomo, dla każdego stacjonarnego procesu stochastycznego, dwustronna gęstość widmowa mocy może być znaleziona jako transformata Fouriera funkcji autokorelacji (twierdzenie Wienera-Chinczyna) i gęstość ta musi być funkcją parzystą, nieujemną [19], a więc nie może przybierać postaci $1/f$. Wiadomo także, że dla każdego procesu stacjonarnego funkcja autokorelacji jest funkcją ciągłą i skończoną. Próba znalezienia funkcji autokorelacji jako odwrotnej transformaty Fouriera gęstości widmowej o postaci $1/f$ prowadzi jednak do rozbieżności. Narzuca się więc wniosek, że szumy typu $1/f$ powstają z procesów, które nie są stacjonarne. Prowadzone w ostatnich latach przez szereg autorów prace dotyczące zmian wariancji szumów typu $1/f$ wykazują występowanie fluktuacji wariancji, czyli jak się to niekiedy nazywa „szumu wariancji" [20—27]. Przemawia to za niestacjonarnym charakterem zjawisk tworzących rozważane szumy. Ze względu jednak na obserwowane nieznaczne odchylenia od stacjonarności, jak również z uwagi na to, że cytowane wyżej badania wymagają dalszych, pełniejszych potwierdzeń, nie można obecnie stwierdzić, że szumy typu $1/f$ nie są związane (choćby po części) z procesem stacjonarnym. Można wręcz przypuszczać, że mamy tu do czynienia z superpozycją zjawisk czasowych, zarówno stacjonarnych jak i niestacjonarnych.

Znalezienie odpowiedniego zjawiska czasowego warunkuje badania nad fizycznymi modelami szumów typu $1/f$. Badania te prowadzone są na ogół oddzielnie w odniesieniu do każdego typu źródła szumów. Niemniej jednak zaproponowany przez Hooga i innych [28—30] półempiryczny model szumów styków punktowych polaryzuje obecnie szereg badań podstawowych w kierunku poszukiwania przyczyn szumów typu $1/f$ w zjawiskach towarzyszących transportowi ładunku w próbkach o niewielkiej liczbie swobodnych nośników. W odniesieniu do półprzewodników szereg prac wskazuje na to, że szumy typu $1/f$ są związane ze zjawiskami zachodzącymi na powierzchni materiału, a konkretnie z tzw. powolnymi stanami powierzchniowymi [31—34].

Celem niniejszej pracy jest możliwie ogólna analiza współczesnych poglądów na temat szumów typu $1/f$. Przedstawione podejścia, różniące się niekiedy krańcowo, sprzyjają krytycznemu spojrzeniu na całość zagadnienia oraz pozwalają na wyciągnięcie wniosków odnośnie kierunków dalszych prac.

2. MODELE MATEMATYCZNE WYKORZYSTUJĄCE PROCESY STACJONARNE

2.1. Przypadek zależności f^{-1}

Dla stacjonarnego procesu przypadkowego $x(t)$ ($\overline{x(t)} = 0$), funkcja autokorelacji

$$\varphi(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} \tag{2}$$

jest związana z jednostronną funkcją gęstości widmowej $G(f)$ równaniami (tw. Wienera-Chinczyna):

$$G(f) = 4\int_0^\infty \varphi(\tau)\cos 2\pi f\tau\, d\tau, \tag{3}$$

$$\varphi(\tau) = \int_0^\infty G(f)\cos 2\pi f\tau\, df. \tag{4}$$

Widać stąd, że gęstość widmowa nie może spełniać relacji eksperymentalnej

$$G(f) = \frac{C'}{f} \tag{5}$$

(wzór (1) dla $\gamma = 1$), gdzie C' jest stałą.

Jeżeli bowiem podstawić (5) do (4), to otrzymana całka jest rozbieżna dla $f = 0$ przy wszystkich wartościach τ i dla $f = \infty$ przy $\tau = 0$. Z tych względów $G(f)$ winna spełniać następujące założenia [31]:

a) $G(f)$ zmienia się wolniej niż $1/f$ dla bardzo małych częstotliwości,

b) $G(f)$ zmienia się szybciej niż $1/f$ dla bardzo dużych częstotliwości.

Widmo spełniające powyższe wymagania można znaleźć dla funkcji autokorelacji postaci

$$\varphi(t) = \overline{x^2(t)} \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_c}\right), \tag{6}$$

gdzie τ_c jest czasem korelacji procesu, zakładając, że zamiast pojedynczego czasu τ_c mamy do czynienia z odpowiednio szerokim rozkładem czasów korelacji. Jeśli

$$dP = g(\tau_c)\,d\tau_c \tag{7}$$

jest prawdopodobieństwem, że czas korelacji jest zawarty w przedziale τ_c, $\tau_c + d\tau_c$, wtedy uwzględniając, że zgodnie z twierdzeniem Wienera-Chinczyna funkcji autokorelacji (6) odpowiada gęstość widmowa o postaci

$$G_{\tau_c}(f) = 4\overline{x^2(t)}\,\frac{\tau_c}{1+(2\pi f \tau_c)^2}, \tag{8}$$

otrzymujemy na podstawie (7):

$$G(f) = 4\overline{x^2(t)} \int_0^\infty \frac{\tau_c}{1+(2\pi f \tau_c)^2}\, g(\tau_c)\,d\tau_c. \tag{9}$$

Zależność $1/f$ uzyskuje się wprowadzając następującą znormalizowaną gęstość prawdopodobieństwa czasów korelacji:

$$\left.\begin{aligned} g(\tau_c)\,d\tau_c &= \left[\ln\frac{\tau_{c_2}}{\tau_{c_1}}\right]^{-1} \frac{d\tau_c}{\tau_c} \quad \text{dla} \quad \tau_{c_1} < \tau_c < \tau_{c_2}, \\ g(\tau_c)\,d\tau_c &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{poza tym przedziałem.} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Wstawiając (10) do (9) otrzymuje się po scałkowaniu:

$$G(f) = 4\overline{x^2(t)}\left(\ln\frac{\tau_{c_2}}{\tau_{c_1}}\right)^{-1} \frac{\operatorname{arctg} 2\pi f\tau_{c_2} - \operatorname{arctg} 2\pi f\tau_{c_1}}{2\pi f}. \tag{11}$$

Uzyskana gęstość widmowa jest niezależna od częstotliwości dla $f \ll (2\pi\tau_{c_2})^{-1}$, zmienia się jak $1/f$ w przedziale $(2\pi\tau_{c_2})^{-1} < f < (2\pi\tau_{c_1})^{-1}$ oraz jak $1/f^2$ w przedziale $f \gg (2\pi\tau_{c_1})^{-1}$.

Tak więc gęstość widmowa mocy dana równaniem (11) spełnia podane uprzednio założenia a) i b) dla bardzo małych i bardzo dużych częstotliwości. Wymagany odpowiednio

szeroki rozkład czasów korelacji τ_c spełniających zależność (10), wykazują powolne stany powierzchniowe w półprzewodnikach, dla których teoria ta została sformułowana (rozdz. 4.2).

2.2. Zagadnienie zależności ogólnej $f^{-\gamma}$ — ciągi impulsów

Halford [35] zaproponował bardziej ogólny model matematyczny szumów typu $1/f$, traktując je jako superpozycję zaburzeń sygnału[2] — zaburzeń zachodzących w sposób przypadkowy, których czas trwania oraz amplituda mają również charakter przypadkowy. Są to tzw. „realne perturbacje", tzn. spełniające założenia o skończoności samych perturbacji, ich całki w czasie, skończoności czasu trwania oraz będące rzeczywistą funkcją czasu i posiadające skończoną, niezerową energię. Dwustronna gęstość widmowa takiego procesu stochastycznego jest definiowana następująco:

$$S(f) \underset{(\mathrm{df})}{=} \lambda \int_0^{\infty} P(\tau) A^2(\tau) |F(\omega, \tau)|^2 d\tau, \tag{12}$$

gdzie:

$A^2(\tau)$ — wartość średnia kwadratu amplitudy zaburzenia o czasie trwania τ,

$P(\tau)$ — znormalizowana gęstość prawdopodobieństwa czasu trwania zaburzenia,

λ — średnia ilość zaburzeń w jednostce czasu,

zaś

$$F(\omega, \tau) = A_o^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} H(A_0, \tau, t) \exp(-j\omega t) dt \tag{13}$$

określa znormalizowaną transformatę Fouriera realizacji zaburzenia $H(A_o, \tau, t)$ o amplitudzie A_o i czasie trwania τ.

Równanie (12), będące rozwinięciem twierdzenia Carsona (patrz [33], s. 17), należy traktować jako definicję gęstości widmowej procesu przypadkowego, będącego sekwencją zaburzeń o przypadkowej amplitudzie i przypadkowym czasie trwania. Rozważane zaburzenia podlegają pewnym dodatkowym ograniczeniom, polegającym na tym, że kwadrat modułu transformaty danej wzorem (13) spełnia następujące warunki:

$$\lim_{|f| \to \infty} |F(\omega, \tau)|^2 = \mathrm{const}\, |f|^{\gamma_\infty} \tag{14}$$

i

$$\lim_{|f| \to 0} |F(\omega, \tau)|^2 = \mathrm{const}\, |f|^{\gamma_o}, \tag{15}$$

gdzie γ_∞ i γ_o — współczynniki stałe dla danej klasy zaburzeń, spełniające nierówności

$$\gamma_\infty \leqslant -2, \tag{16}$$

$$\gamma_o \geqslant 0. \tag{17}$$

[2] Sygnał oznacza tu przebieg zdeterminowany, nie mający znaczenia w dalszych rozważaniach, natomiast zaburzenia stanowią źródło szumów.

Zakładając, że iloczyn $P(\tau)A^2(\tau)$ spełnia zależność:

$$P(\tau)A^2(\tau) = B\tau^{-\delta-3}, \tag{18}$$

gdzie B i δ są to stałe niezależne od τ w przedziale $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$, $\tau_1 > 0$, przy warunku, że $P(\tau)A^2(\tau) \leqslant B\tau^{-\delta-3}$ dla wszystkich τ spoza przedziału $[\tau_1, \tau_2]$, Halford [35] uzyskuje następujące zależności gęstości widmowej szumów od częstotliwości w zakresie $(2\pi\tau_2)^{-1} \ll f \ll (2\pi\tau_1)^{-1}$:

$$S(f) \cong \begin{cases} C_1|f|^{\gamma_o} & \text{dla} \quad \delta > \gamma_o, & \text{(19a)} \\ C_2|f|^{\delta} & \text{dla} \quad \gamma_\infty < \delta < \gamma_o, & \text{(19b)} \\ C_3|f|^{\gamma_\infty} & \text{dla} \quad \delta < \lambda_\infty, & \text{(19c)} \end{cases}$$

gdzie C_1, C_2 i C_3 są stałymi niezależnymi od f.

Z relacji tych wynika, że wykładnik potęgowy γ przyjmuje wartości wyłącznie w przedziale $[\gamma_\infty, \gamma_o]$ i że w przypadku najbardziej interesującym (19b) γ i δ są sobie równe. Gęstość widmowa $S(f) \sim f^{-1}$ jest tu więc szczególnym przypadkiem $\gamma = \delta = -1$. Tak więc wykładnik potęgowy, od którego zależy iloczyn gęstości prawdopodobieństwa czasu trwania zaburzenia i kwadratu jego amplitudy, determinuje jednocześnie zależność gęstości widmowej szumów od częstotliwości. Zależności (19a ÷ 19c) określają charakter widma jedynie w przedziale $(2\pi\tau_2)^{-1} \ll f \ll (2\pi\tau_1)^{-1}$; przedział ten wzrasta nieograniczenie ze wzrostem szerokości rozkładu czasów trwania zaburzeń $[\tau_1, \tau_2]$. Mamy tu, jak widać, do czynienia z analogiczną sytuacją jak w przypadku przedziału częstotliwości, w którym gęstość widmowa zmienia się jak $1/f$ i zakresu τ_c, w którym $g(\tau_c) \sim 1/\tau_c$ — z poprzedniego rozdziału.

Model Halforda, jakkolwiek zawierający założenia, których akceptowalność fizyczna pozostaje otwarta (wzór (18)), oferuje znaczną ogólność i elastyczność. Stanowi on uogólnienie modelu z poprzedniego rozdziału i również zakłada stacjonarność szumów typu $1/f$.

Koncepcję definicji gęstości widmowej procesu będącego sekwencją impulsów przypadkowych analogicznie jak w modelu Halforda, wykorzystał Bell [36] do tzw. „problemu odwrotnego". Stosując przekształconą postać wzoru (12):

$$S(\omega) = \lambda \int_0^\infty \tau^2 A^2(\tau) P(\tau) |F(\omega\tau)|^2 d\tau, \tag{12a}$$

Bell traktuje go jako liniowe równanie całkowe pierwszego rodzaju:

$$S(\omega) = \int_0^\infty h(\tau) K(\omega\tau) d\tau, \tag{20}$$

gdzie

$$h(\tau) = \lambda\tau^2 A^2(\tau) P(\tau), \tag{21}$$

zaś

$$K(\omega\tau) = |F(\omega\tau)|^2 \tag{22}$$

jest jądrem równania.

Wspomniany problem odwrotny polega tu na wyznaczaniu funkcji gęstości prawdopodobieństwa czasu trwania impulsów, $P(\tau)$, procesu o znanej gęstości widmowej $S(\omega)$,

dla którego to procesu postuluje się na bazie eksperymentalnej kształt impulsów. Równanie całkowe (20) można stosunkowo prosto rozwiązać w oparciu o transformatę Mellina [37]:

$$\mathcal{M}[f(x), s] \equiv \tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx \tag{23}$$

oraz odpowiadające jej przekształcenie odwrotne

$$f(x) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \tilde{f}(s)x^{-s}ds, \tag{24}$$

przy czym droga całkowania w równaniu (24) leży w pasku płaszczyzny zespolonej, dla którego transformata wyrażona równaniem (23) istnieje. Równanie całkowe (20) redukuje się dzięki zastosowaniu (23) i (24) do postaci [36]:

$$\tilde{S}(s) = \tilde{h}(1-s)\tilde{K}(s), \tag{25}$$

lub po podstawieniu $p = 1-s$

$$\tilde{h}(s) = \frac{1}{\tilde{K}(1-s)}\tilde{S}(1-s) \equiv \tilde{L}(s)\tilde{S}(1-s). \tag{26}$$

Zakładając, że transformata odwrotna

$$L(x) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{1}{\tilde{K}(1-s)}x^{-s}ds \tag{27}$$

istnieje, rozwiązanie równania całkowego (20) otrzymuje się w postaci[3]:

$$h(\tau) = \int_0^\infty S(\omega)L(\omega\tau)d\tau. \tag{28}$$

Następnie w oparciu o (21) można wyznaczyć szukaną gęstość prawdopodobiestwa czasu trwania impulsów — $P(\tau)$.

Metodę Bella można więc traktować jako rozwinięcie modelu Halforda w kierunku identyfikacji statystycznych własności ciągów impulsów przypadkowych wykorzystywanych do modelowania szumów. Gęstości widmowe sekwencji impulsów oraz ich zastosowanie do analizy zjawisk szumowych w nadprzewodnikach badał również Heiden [38].

3. TEORIE DOPUSZCZAJĄCE NIESTACJONARNOŚĆ

3.1. Wykorzystanie całkowania rzędu ułamkowego

Jak wiadomo, dla stacjonarnego procesu przypadkowego $x(t)$ spełniona jest zależność [39]:

$$S_{(m)}(\omega) = \omega^{2m}S(\omega), \tag{29}$$

[3] Równanie (28) wynika bezpośrednio ze wzoru (26), jako jedna z własności transformaty Mellina [37]:

$$\mathcal{M}\left[\int_0^\infty L(xu)S(u)du; s\right] = \tilde{L}(s)\tilde{S}(1-s).$$

gdzie:

$S(\omega)$ — gęstość widmowa procesu $x(t)$,

$S_{(m)}(\omega)$ — gęstość widmowa procesu $\dfrac{d^m x(t)}{dt^m}$.

Dla otrzymania widma typu $1/f$ Barnes i Allan [40] wykorzystali tę zależność w kierunku przeciwnym:

$$S^{(m)}(\omega) = \frac{1}{\omega^{2m}} S(\omega), \tag{30}$$

gdzie $S^{(m)}(\omega)$ jest gęstością widmową m-krotnej całki $x(t)$ względem czasu (należy tu podkreślić, że podejście takie implikuje utratę stacjonarności). Jeśli $x(t)$ jest szumem białym oznaczanym dalej przez $n(t)$, to $S(\omega) = \text{const}$ i dla $2m = 1$ równanie (30) przyjmuje postać:

$$S^{(1/2)}(\omega) = \frac{1}{\omega} S(\omega) = \frac{\text{const}}{\omega}, \tag{31}$$

przy czym $S^{(1/2)}(\omega)$ jest gęstością widmową procesu $n^{(1/2)}(t)$, będącego całką rzędu 1/2 procesu $n(t)$. Mamy tu zatem do czynienia z całką rzędu ułamkowego, którą można traktować jako szczególny przypadek całki rzędu m, zdefiniowanej wzorem [41]:

$$D^{-m} n(t) \underset{(\mathrm{df})}{=} \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^t (t-u)^{m-1} n(u)\, du, \tag{32}$$

gdzie: D^{-m} — operator całkowania rzędu m, m — liczba dodatnia, $\Gamma(m)$ — funkcja gamma.

W modelu Barnesa i Allana proces $n^{(1/2)}(t)$ stanowi fluktuacja częstotliwości chwilowej oscylatora kwarcowego, wykazująca widmo $1/f$. Fluktuacja fazy chwilowej takiego oscylatora będzie zatem procesem $n^{(3/2)}(t)$, a zatem całką rzędu 3/2 procesu $n(t)$, czyli szumu białego. Tak więc gęstość widmowa fluktuacji fazy, $\phi(t)$, jest dana wzorem:

$$S_\phi(\omega) = S^{(3/2)}(\omega). \tag{33}$$

Całka rzędu 3/2, k-tej realizacji szumu białego, $\phi_k(t)$, jest na podstawie (32) dana wzorem:

$$\phi_k(t) = \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_0^t (t-u)^{1/2} n_k(u)\, du. \tag{34}$$

Operacje uśredniania po zbiorze realizacji w celu wyznaczenia $\langle \phi_k(t) \rangle$, $\langle \phi_k(t)\, \phi_k(t+\tau) \rangle$ oraz $\langle [\phi_k(t)]^2 \rangle$, a więc wartości średniej, funkcji autokorelacji i wartości średniej kwadratu, przeprowadzone dla $\phi_k(t)$ danego wzorem (34) wskazują, że tak zdefiniowana fluktuacja fazy chwilowej oscylatora jest zgodnie z oczekiwaniami procesem niestacjonarnym. Zastępując $\phi(t)$ zdyskretyzowanym ψ_j, Barnes i Allan uzyskali następujący wzór umożliwiający generację, za pomocą komputera, liczb przypadkowych o własnościach analogicznych do szumów $1/f$ [40]:

$$\psi_j = \sum_{i=1}^{j} (j+1-i)^{2/3} a_i, \tag{35}$$

gdzie a_i jest analogiem dyskretnym $n(t)$, czyli szumem białym w postaci dyskretnej.

Należy podkreślić, że wprawdzie przedstawiony model dotyczy fluktuacji częstotliwości, $n^{(1/2)}(t)$ oraz wynikającej z tego fluktuacji fazy chwilowej, $n^{(3/2)}(t)$, sygnału oscylatora, to jednak podane rozważania mają charakter ogólny i mogą być wykorzystane do dowolnego typu źródła szumów $1/f$. Dyskusyjne może się tu wydawać przyjęcie zależności (30), która implikuje niestacjonarność procesu.

3.2. Wykorzystanie procesów typu błądzenia przypadkowego i ruchu Browna

Najprostszy model błądzenia przypadkowego stanowi proces stochastyczny $x(t)$, który przyjmuje wartości dyskretne h, $-h$ i 0, gdzie $h > 0$ jest stałą, z prawdopodobieństwami równymi odpowiednio p, q i r $(p+q+r = 1)$ w dyskretnych momentach czasu $t = nT_b$ [42]. W symetrycznym błądzeniu przypadkowym $p = q = 1/2$ i $r = 0$. Ten ostatni proces posiada następujące własności:

$$\langle x(nT_b)\rangle = 0, \quad \langle x^2(nT_b)\rangle = nh^2. \tag{36}$$

Proces Wienera Levy, zwany często ruchem Browna, można traktować jako przypadek graniczny błądzenia przypadkowego. Jeśli mianowicie we wzorze (36) podstawimy $n = t/T_b$, to otrzymamy $\langle x^2(t)\rangle = \frac{h^2}{T_b} t$; zmierzając następnie z h i T_b do zera przy $\frac{h^2}{T_b} \equiv c$ skończonym, otrzymamy w granicy proces $w(t)$ (patrz [39], ss. 292—293):

$$w(t) = \lim_{\substack{T_b \to 0 \\ h \to 0}} x(t), \tag{37}$$

zwany dalej ruchem Browna. Zgodnie z (36) mamy również:

$$\langle w(t)\rangle = 0, \quad \langle w^2(t)\rangle = ct. \tag{38}$$

Można wykazać, że proces $w(t)$ posiada gęstość prawdopodobieństwa $p(w, t)$ o postaci:

$$p(w, t) = \frac{1}{(2\pi ct)^{1/2}} \exp\left(-\frac{w^2}{2ct}\right), \tag{39}$$

a zatem jest procesem o normalnym rozkładzie prawdopodobieństwa amplitud, z zerową wartością średnią i wariancją równą ct, zgodnie z (38).

Tak więc procesy: błądzenie przypadkowe i ruch Browna są niestacjonarnymi procesami stochastycznymi.

Bell (patrz [16], s. 19) wykazał, że proces błądzenia przypadkowego charakteryzuje się gęstością widmową mocy zmieniającą się jak $1/f^2$. Jednocześnie, ponieważ $w(t)$ można otrzymać jako całkę z szumu białego (patrz [39], s. 502):

$$w(t) = \int_0^t n(u)\,du, \tag{40}$$

więc w oparciu o równanie (30) dla $m = 1$ łatwo wykazać, że gęstość widmowa mocy ruchu Browna ma także postać $1/f^2$.

Aby uzyskać widmo typu $1/f$, Offner [43] zaproponował modyfikację błądzenia przypadkowego, a mianowicie „błądzenie przypadkowe z dryftem". W stosunku do oryginal-

nego, symetrycznego błądzenia przypadkowego, dla którego po każdym kroku zachodzi zmiana rzędnej o h lub $-h$, mamy tu do czynienia ze zmniejszeniem wartości bezwzględnej przemieszczenia po każdym kroku o określony procent w celu spowodowania powrotu do stanu równowagi. Tak więc ta prosta koncepcja polega na „ustacjonarnieniu" błądzenia przypadkowego. Znajdując amplitudy składników rozwinięcia w szereg Fouriera 1000-krokowej symulacji błądzenia przypadkowego z dryftem, F_k, a następnie znajdując sumy $\sum kF_k^2$, gdzie k jest rzędem składnika rozwinięcia, Offner uzyskał stałość tych sum dla jednakowych przedziałów k, potwierdzając w ten sposób widmo $1/f$ swego modelu.

Znacznie bardziej ogólne podejście zaproponował Tunaley [44], wykorzystując stochastyczne równanie Fokkera-Plancka, opisujące procesy typu quasi-ciągłego błądzenia przypadkowego i ruchu Browna:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[b(x,t)p] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[a(x,t)p], \tag{41}$$

gdzie: $p \equiv p[x(t)|x(t_o) = x_o]$ — warunkowa gęstość prawdopodobieństwa $x(t)$ przy założeniu $x(t_o) = x_o$ w quasi-ciągłym błądzeniu przypadkowym lub w ruchu Browna, $b(x,t)$ — średnie przemieszczenie na jednostkę czasu, $a(x,t)$ — średni kwadrat przemieszczenia na jednostkę czasu[4].

Rozważył on 3 niestacjonarne procesy przypadkowe oraz ich modyfikacje w oparciu o koncepcję *oczekiwanej gęstości widmowej mocy* [44] [45]:

$$\langle S_i(f)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \varphi_i(\tau)\rangle \exp(-j\omega\tau)\,d\tau, \tag{42}$$

gdzie $S_i(f)$ oraz $\varphi_i(\tau)$ to odpowiednio gęstość widmowa oraz funkcja autokorelacji i-tej realizacji $x_i(t)$, w skończonym przedziale czasu $[0, T]$, procesu stochastycznego.

Tak więc ze względu na fakt, że

$$S_i(f) = \frac{1}{T}|F_i(f)|^2, \tag{43}$$

gdzie $F_i(f)$ jest transformatą Fouriera $x_i(t)$ oraz

$$\varphi_i(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x_i(t)x_i(t+\tau)\,dt, \tag{44}$$

czas trwania realizacji T jest nieodłącznym parametrem wszystkich uzyskanych zależności.

Wykorzystując równanie Fokkera-Plancka (41) oraz koncepcję oczekiwanej gęstości widmowej mocy (42), Tunaley potwierdził widmo $1/f^2$ dla symetrycznego błądzenia przypadkowego, a następnie stosując randomizację czasów przejścia, czyli traktując n (patrz wzory (36)) jako zmienną przypadkową, zbadał widma błądzenia przypadkowego, pro-

[4] Gdy a i b nie zależą od x i t oraz gdy zmiana rzędnej jest za każdym krokiem stała i równa h, słuszne są wzory:

$$b = \frac{p-q}{T_b}h, \quad a = \frac{p+q}{T_b}h^2.$$

cesu Ornsteina-Uhlenbecka (ruch Browna z dryftem w kierunku początku układu) [46] oraz ich uogólnienia a także szum śrutowy[5]. Ten ostatni proces wydaje się być najbardziej interesujący, jeśli chodzi o modelowanie szumów typu $1/f$ [44].

Koncepcję tzw. „cząstkowego ruchu Browna" zaproponowali Mandelbrot i Van Ness [47]. W stosunku do zwykłego ruchu Browna, $w(t)$, proces ten, $w_\varkappa(t)$, jest zdefiniowany jako:

$$w_\varkappa(t) = \frac{1}{\Gamma(\varkappa+1)} \int_{s=0}^{t} (t-s)^\varkappa dw(s), \tag{45}$$

gdzie $\varkappa$ jest parametrem spełniającym nierówność $-1/2 \leqslant \varkappa \leqslant 1/2$.

Jest to zatem „poruszająca się średnia", której przyrosty w przeszłości są „ważone" przez jądro $(t-s)^\varkappa$. Jak widać z równania (45), $\varkappa = 0$ odpowiada zwykłemu ruchowi Browna, którego widmo jest jak wspomniano uprzednio typu $1/f^2$. „Cząstkowemu ruchowi Browna" odpowiada z kolei gęstość widmowa o postaci [48]:

$$S(\omega) \sim \omega^{-2\varkappa-2}. \tag{46}$$

Tak więc dla $\varkappa = -1/2$ uzyskujemy dokładnie $S(\omega) \sim 1/\omega$, a dla $\varkappa$ z przedziału $[-1/2, 0]$ widma typu od $1/f$ do $1/f^2$.

4. NIEKTÓRE MODELE FENOMENOLOGICZNE I FIZYCZNE

4.1. Fluktuacje poziomu odniesienia w systemie nierównowagowym[6]

Szumy typu $1/f$ obserwowane są zwykle (rozdz. 5) w systemach nierównowagowych. Analizując system nierównowagowy z prądem elektrycznym, Teitler i Osborne zaproponowali model, w którym fluktuacje traktowane są jako składające sie z dwóch części [49]:
a) fluktuacji względem lokalnego (w czasie) poziomu odniesienia,
b) fluktuacji lokalnego poziomu odniesienia.
Fluktuacje a) są odpowiedzialne za szumy białe, zaś fluktuacje b) stanowią nowy składnik prowadzący do tzw. szumów nadmiarowych, w stosunku do których będziemy oczekiwać gęstości widmowej o postaci $1/f$. Aby wyodrębnić obydwie fluktuacje rozważmy realizację $i(t)$ natężenia prądu w systemie nierównowagowym, w zakresie bardzo długiego odcinka czasu T. Wartość średnia za ten okres wynosi:

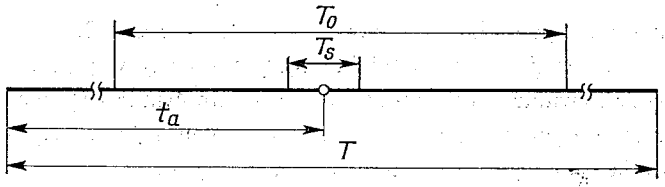
$$\bar{i} = T^{-1} \int_{-T/2}^{T/2} i(t)\,dt. \tag{47}$$

[5] Szum śrutowy jest tu rozumiany jako proces stochastyczny będący sekwencją funkcji δ — Diraca, przy czym czas pomiędzy poszczególnymi zdarzeniami-impulsami jest zrandomizowany i ma rozkład, który nie posiada ani wartości średniej ani wariancji (na tym polega jego niestacjonarność) [44].

[6] Przez system równowagowy należy rozumieć układ znajdujący się w stanie równowagi termodynamicznej — dający się opisać parametrami stałymi w czasie (np. próbka w stałej temperaturze, w ciemności i w nieobecności pól zewnętrznych). Każdy inny układ termodynamiczny jest systemem nierównowagowym. W pracy ograniczymy sie do znajdującego się w stanie ustałonym systemu nierównowagowego z prądem.

Weźmy teraz pod uwagę czas $T_o \ll T$ (rys. 1), znacznie jednak większy od czasów korelacji dla szumów białych w zakresie małych częstotliwości; te czasy korelacji charakteryzują fluktuacje równowagowe, tzn. fluktuacje względem lokalnego poziomu odniesienia. Wartość średnia za okres T_o, którego punktem środkowym jest chwila t_a, wynosi:

$$\overline{i^a(T_o)} = T_o^{-1} \int_{t_a - T_o/2}^{t_a + T_o/2} i(t)\,dt. \tag{48}$$



Rys. 1. Porównanie interwałów czasu stosowanych w analizie fluktuacji w systemie nierównowagowym z prądem elektrycznym

W ogólności $\bar{i} - \overline{i^a(T_o)} \neq 0$ i fluktuację w chwili t_a możemy zapisać jako:

$$i(t_a) - \bar{i} = i(t_a) - \overline{i^a(T_o)} + \overline{i^a(T_o)} - \bar{i}. \tag{49}$$

Rozważając kolejno czasy coraz to mniejsze: $T_1 = T_o/l$, $T_2 = T_o/l^2$, ..., $T_s = T_o/l^s$, gdzie l jest małą liczbą całkowitą, zatrzymujemy podział przy T_s, który jest najmniejszym odcinkiem czasu, jaki może jeszcze służyć za przedział uśredniania dla fluktuacji równowagowych (szumów białych) w zakresie małych częstotliwości. Analogicznie jak w przypadku równania (49) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} i(t_a) - \bar{i} &= i(t_a) - \overline{i^a(T_s)} + \overline{i^a(T_s)} - \overline{i^a(T_{s-1})} + \ldots \\ &\ldots + \overline{i^a(T_1)} - \overline{i^a(T_o)} + \overline{i^a(T_o)} - \bar{i} = \\ &= i(t_a) - \overline{i^a(T_s)} + \sum_{n=0}^{s} I_n^a, \end{aligned} \tag{50}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} I_o^a &= \overline{i^a(T_o)} - \bar{i}, \\ I_n^a &= \overline{i^a(T_n)} - \overline{i^a(T_{n-1})}. \end{aligned} \tag{51}$$

Jak widać ze wzorów (50) i (51), fluktuacja w chwili t_a składa się z dwóch członów: fluktuacji względem lokalnego poziomu odniesienia, $i(t_a) - \overline{i^a(T_s)}$, oraz fluktuacji lokalnego poziomu odniesienia, czyli:

$$\sum_{n=0}^{s} I_n^a = \sum_{n=0}^{s} \left[\overline{i^a(T_n)} - \overline{i^a(T_{n-1})}\right], \tag{52}$$

zwanej dalej *sumą różnic wartości średnich prądu.*

Zauważmy teraz, że

$$\overline{i^a(T_n)} = T_n^{-1} \int_{t_a - T_n/2}^{t_a + T_n/2} i(t)\,dt$$

reprezentuje udział w $i(t_a)$ wszystkich częstotliwości mniejszych niż T_n^{-1}, bowiem wartości średnie za okres T_n składowych o okresach T_n i wszystkich mniejszych są równe zeru. Analogicznie $\overline{i^a(T_{n-1})}$ zawiera udział wszystkich częstotliwości mniejszych niż T_{n-1}^{-1}. A zatem I_n^a — n-ta różnica wartości średnich prądu — reprezentuje udział częstotliwości od $f_{n-1} = T_{n-1}^{-1}$ do $f_n = T_n^{-1}$ w całkowitej fluktuacji poziomu odniesienia. Różnica częstotliwości:

$$f_n - f_{n-1} \underset{(\mathrm{df})}{=} \Delta f_n = f_n \frac{l-1}{l} \tag{53}$$

stanowi pasmo częstotliwości odpowiadające $I_n^a = \overline{i^a(T_n)} - \overline{i^a(T_{n-1})}$. Można zatem zdefiniować gęstość widmową różnicy wartości średnich, stosując przejście do granicy, jako:

$$\frac{I_n^a}{\Delta f_n} = \frac{I_n^a}{f_n} \frac{l}{l-1} \xrightarrow{f_n \to f} \frac{I_a(f)}{f} \frac{l}{l-1} \equiv \Delta I^a(f); \tag{54}$$

$\Delta I^a(f)$ jest gęstością widmową różnicy wartości średnich prądu w chwili t_a. Oznaczając przez $|\Delta I(f)|^2$ wartość średnią $|\Delta I^a(f)|^2$ po wszystkich możliwych wartościach t_a (t_a jest zawarte w przedziale $-\frac{T-T_o}{2} \leqslant t_a \leqslant \frac{T-T_o}{2}$), możemy zdefiniować jednostronną gęstość widmową mocy jako [49] [50]:

$$G(f) = 2\frac{1}{T-T_o}|\Delta I(f)|^2$$

oraz z uwagi na $T \gg T_o$

$$G(f) = \frac{2}{T}|\Delta I(f)|^2. \tag{55}$$

Przedstawiona procedura stanowi jedynie ilustrację, jak można wyprowadzić i uzasadniać pojęcie gęstości widmowej mocy fluktuacji lokalnego poziomu odniesienia; proces ten należy rozważać jako źródło szumów nadmiarowych w systemach nierównowagowych. Teitler i Osborne zakładają istnienie gęstości widmowej w sensie Wienera-Chinczyna dla szumów nadmiarowych i co z tego wynika stacjonarność fluktuacji lokalnego poziomu odniesienia [50]. Przytoczone przez nich następnie wyprowadzenie gęstości widmowej postaci $1/f$ ma charakter intuicyjny i opiera się na podzieleniu całego zakresu częstotliwości na przedziały Δf_n (patrz wzór (53)) o jednakowej mocy szumów [49].

4.2. Szumy typu $1/f$ jako efekty powierzchniowe w półprzewodnikach

Dla przedstawienia modelu zjawisk powierzchniowych z punktu widzenia ich znaczenia w powstawaniu szumów typu $1/f$, skorzystajmy z zależności matematycznych opisanych

w rozdz. 2.1. Gęstość widmowa dana równaniem (8), która dla natężenia prądu przyjmuje postać [33]:

$$G_{\tau_c}(f) = 4\overline{i^2(t)}\frac{\tau_c}{1+(2\pi f\tau_c)^2} = \frac{4I^2p}{N}\frac{\tau_c}{1+(2\pi f\tau_c)^2}, \tag{56}$$

gdzie: I — natężenie prądu stałego płynącego przez próbkę, N — liczba swobodnych nośników ładunku w próbce, p — prawdopodobieństwo związania nośnika w pułapce, dotyczy tzw. *szumów generacyjno-rekombinacyjnych* w półprzewodnikach.

Są to szumy będące efektem fluktuacji swobodnych nośników wskutek zjawisk generacji-rekombinacji, zaś τ_c jest średnim czasem życia nośnika w półprzewodniku. Podobnie jak szumy śrutowe, w lampach elektronowych, mogą być one traktowane jako sekwencja impulsów prostokątnych, których czas trwania τ (czas życia nośnika) jest zrandomizowany i charakteryzuje się funkcją gęstości prawdopodobieństwa o postaci:

$$g(\tau) = \frac{1}{\tau_c}\exp\left(-\frac{\tau}{\tau_c}\right). \tag{57}$$

Takiej gęstości prawdopodobieństwa τ odpowiada z kolei funkcja autokorelacji (6) z rozdz. 2.1, czyli (patrz [16], ss. 91—92 oraz [33], ss. 23—24):

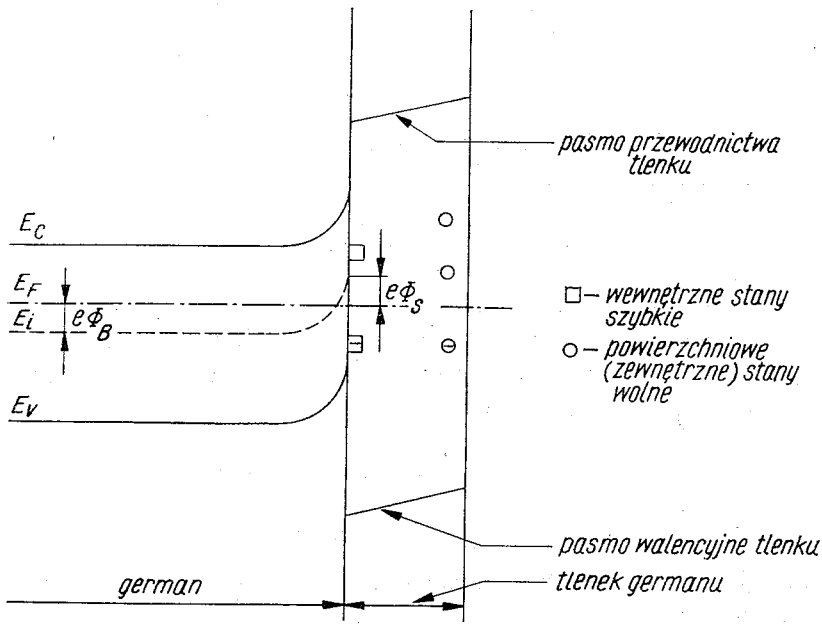
$$\varphi(\tau) = \overline{i^2(t)}\exp\left(-\frac{\tau}{\tau_c}\right).$$

Do takiej samej postaci $\varphi(\tau)$ można dojść rozważając sekwencje impulsów o kształcie eksponencjalnym zamiast prostokątnym [16]. Zgodnie z (57) czas τ_c jest średnim czasem życia nośnika, zwanym w rozdziale 2.1 czasem korelacji, co było konsekwencją równania (6). Zastosowanie twierdzenia Wienera-Chinczyna do takiej postaci $\varphi(\tau)$ daje gęstość widmową postaci (56).

Jak widać ze wzoru (56), $G_{\tau_c}(f)$ jest stała dla $f \ll (2\pi\tau_c)^{-1}$ oraz zmienia się jak $1/f^2$ dla częstotliwości znacznie większych niż $(2\pi\tau_c)^{-1}$. Fakt ten jest wykorzystywany do wyznaczania położenia pułapkowych poziomów energetycznych w pasmie zabronionym odpowiedzialnych za procesy generacyjno-rekombinacyjne [51]. Jak wynika z zależności (10) i (11) widmo typu $1/f$ można otrzymać, jeśli zamiast pojedynczego czasu korelacji rozważy się rozkład czasów τ_c o gęstości prawdopodobieństwa $g(\tau_c) \sim 1/\tau_c$. Dyskusja wzoru (11) wykazuje poza tym, że dla uzyskania gęstości widmowej $1/f$, obserwowanej doświadczalnie w zakresie 10 dekad częstotliwości, niezbędne jest, aby stosunek granic rozkładu czasów korelacji τ_{c_2}/τ_{c_1} był rzędu 10^{10}.

Założenie odnośnie postaci $g(\tau_c) \sim 1/\tau_c$ znalazło swe eksperymentalne potwierdzenie w doświadczeniu z „efektem polowym", zrealizowanym i opisanym przez Morrisona [52]. Doświadczenie to, w oryginalnej wersji, zostało przeprowadzone na cienkiej płytce germanowej, stanowiącej jedną z okładek płasko-równoległego kondensatora (takie ukształtowanie próbki umożliwia uzyskanie dużego stosunku powierzchni do objętości). Drugą okładkę stanowiła metalowa elektroda. Po przyłożeniu pola elektrycznego między okładki, konduktancja próbki początkowo zmienia się znacznie, a następnie stopniowo wraca do swej pierwotnej wartości w czasie rzędu sekund lub minut, pomimo że natężenie pola elektrycznego utrzymane jest na tym samym poziomie. Zjawisko to cechuje zatem stosunkowo duży czas relaksacji, który jest związany z istnieniem dużych wartości czasów życia nośni-

ków na powierzchni, τ_c. Okazało się, przeprowadzając badania w zmiennym polu elektrycznym, że jeżeli potencjał powierzchniowy germanu nie zmienia się podczas eksperymentu więcej niż o $\frac{kT}{e}$, to konduktancja jest logarytmiczną funkcją częstotliwości. Wyjaśnienie tego faktu wymaga spełnienia założenia, że gęstość prawdopodobieństwa czasu τ_c ma właśnie postać $g(\tau_c) \sim 1/\tau_c$, co po raz pierwszy zostało stwierdzone przez McWhortera i wykorzystane przez niego do zaproponowania teorii szumów typu $1/f$ w półprzewodnikach [32]. Szczegółowa analiza doświadczalna z efektem polowym [52], a także badania dotyczące *warstwy inwersyjnej*, znajdującej się na głębokości $10^{-4} \div 10^{-5}$ cm pod powierzchnią półprzewodnika [53], wskazują na to, że tzw. *powolne stany powierzchniowe* są odpowiedzialne za to zjawisko. Na rys. 2 przedstawiono model pasmowy powierzchni germanu typu n



Rys. 2. Struktura pasmowa powierzchni germanu

E_i — poziom Fermiego dla półprzewodnika samoistnego, E_F — poziom Fermiego, E_c i E_v — poziomy odpowiednio dna pasma przewodnictwa i wierzchołka pasma walencyjnego

z uwzględnieniem powolnych i szybkich stanów powierzchniowych [33] [54]. Jak widać z rysunku, szybkie stany są umiejscowione na powierzchni granicznej german — tlenek germanu. Są one odpowiedzialne za szybką rekombinację powierzchniową (czasy relaksacji rzędu μs lub ms). Powolne stany powierzchniowe są umieszczone raczej na powierzchni zewnętrznej tlenku germanu niż w jego objętości i wykazują czasy relaksacji rzędu sekund lub minut.

Wyjaśnienie efektu polowego jest w związku z powyższym następujące [52]. Przyłożenie pola elektrycznego do powierzchni próbki półprzewodnika indukuje w niej początkowo znaczny ładunek, dający w efekcie nagromadzenie swobodnych nośników przy powierzchni półprzewodnika. W miarę upływu czasu nośniki te są pułapkowane przez powolne stany

powierzchniowe ze względu na ich dużą koncentrację[7] i liczba tych nadmiarowych nośników stopniowo maleje. Szybkość jej malenia zależy od czasu życia nośnika w sąsiedztwie powolnego stanu powierzchniowego i jest scharakteryzowana ilościowo przez średni czas życia nośnika ze względu na ten proces — τ_c.

Zgodnie z teorią McWhortera ten średni czas τ_c nie jest stały na całej powierzchni półprzewodnika. Wprowadza on podział powierzchni na małe obszary o rozmiarach rzędu długości Deby'e (w przybliżeniu kwadraty $10^{-5} \times 10^{-5}$ cm) i przypisuje każdemu z tych obszarów inny średni czas życia nośnika [32]. Zgodnie z wynikami analizy efektu polowego (zmiennoprądowego) McWhorter zakłada, że czas τ_c zmienia się od obszaru do obszaru z gęstością prawdopodobieństwa $g(\tau_c) \sim 1/\tau_c$. Odpowiednio szeroki rozkład czasów τ_c może być związany albo z tunelowaniem poprzez barierę potencjału znajdującą się pomiędzy „objętością" półprzewodnika a powolnymi stanami powierzchniowymi, albo z aktywowanym termicznie procesem dochodzenia nośników do pułapek [31]. Pierwszy mechanizm daje [34]:

$$\tau_c = \tau_{c_0} \exp(\varepsilon w), \tag{58}$$

gdzie w jest szerokością bariery, zaś ε wielkością rzędu 10^8 cm^{-1} zależną od wysokości bariery; drugi mechanizm daje natomiast:

$$\tau_c = \tau'_{c_0} \exp\left(\frac{E_p}{kT}\right), \tag{59}$$

gdzie E_p jest energią „wzbudzenia" pułapki powierzchniowej a τ_{c_0} i τ'_{c_0} są stałymi.

Dla uzyskania gęstości prawdopodobieństwa $g(\tau_c) \sim 1/\tau_c$ niezbędne jest, aby szerokość bariery w (lub energia aktywacji E_p) była zrandomizowana i cechowała się funkcją gęstości prawdopodobieństwa $p(w)$ stałą w odpowiednim przedziale wartości;

$$\begin{aligned} p(w)\,dw &= \frac{1}{w_2 - w_1}\,dw \quad \text{dla} \quad w_1 < w < w_2, \\ p(w) &= 0 \quad \text{poza tym przedziałem.} \end{aligned} \tag{60}$$

Prosta zamiana zmiennych przypadkowych z w na τ_c, przy uwzględnieniu (58), daje pożądaną gęstość $g(\tau_c)$.

Obydwa mechanizmy opisane równaniami (58) i (59) są tu z matematycznego punktu widzenia równoważne. Jednak pierwszy mechanizm (tunelowanie przez barierę) jest bardziej prawdopodobny, ponieważ w przypadku drugiego występowałby silny wpływ temperatury na gęstość widmową na krańcach pasma, czego się praktycznie nie obserwuje. Na podstawie (58) można oszacować, że zmiany szerokości bariery w zakresie pomiędzy 20 i 40 Å dają stosunek

$$\frac{\tau_c(40\text{ Å})}{\tau_c(20\text{ Å})} \cong 5 \cdot 10^8.$$

Wynika stąd, że mechanizm tunelowania nośników swobodnych poprzez barierę potencjału do powolnych stanów powierzchniowych daje właściwe wyjaśnienie wymaganego rozkładu czasów τ_c.

[7] Koncentracja powolnych stanów powierzchniowych może przekraczać 10^{13}/cm^2 [32].

Przedstawiona teoria McWhortera została z powodzeniem zastosowana (w mniej lub bardziej zmienionej wersji) do wyjaśniania szumów typu $1/f$ w szeregu materiałów i przyrządów półprzewodnikowych [4] [5] [55]. Posiada ona jednak szereg niejasnych punktów, jak np.:

— brak spodziewanej zależności poziomu szumów typu $1/f$ od temperatury,

— brak zależności poziomu szumów typu $1/f$ od potencjału powierzchniowego ϕ_s (rys. 2) w przypadku istnienia warstwy akumulacyjnej na powierzchni półprzewodnika, zgodnie z obserwacjami Mac Rae i Levinsteina [56].

Nieco inną koncepcję zjawisk powierzchniowych zaproponował Bess [57]. Centralnym pojęciem w jego teorii są tzw. *centra emisyjne*, występujące na powierzchni półprzewodnika. Centra te, rozproszone w sposób przypadkowy na powierzchni, mogą emitować lub adsorbować duże ilości *atomów „zanieczyszczeniowych"*[8] (z każdym centrum związane jest ok. 10^5 atomów zanieczyszczeniowych). Atom taki dyfunduje po powierzchni półprzewodnika w okolicy centrum ruchami analogicznymi do ruchów Browna aż do momentu, gdy zostanie związany przez centrum, które go wyemitowało, albo też przez inne, sąsiednie centrum. Oddziaływanie atomu zanieczyszczeniowego na ruchome nośniki ładunku w warstwie przypowierzchniowej polega na tym, że podczas dyfuzji po powierzchni powoduje on unieruchomienie w przybliżeniu jednego elektronu lub dziury, ze względu na to, że z jego obecnością na powierzchni wiąże się istnienie pułapkowego stanu powierzchniowego. W czasie, gdy atom zanieczyszczeniowy zostaje związany przez centrum, zanika stan pułapkowy i nośnik zostaje uwolniony. Cały taki proces stanowi pojedyncze zdarzenie — impuls. Sekwencja takich zrandomizowanych impulsów jest odpowiedzialna za występowanie szumów typu $1/f$. Bess identyfikuje centra emisyjne jako dyslokacje krawędziowe. W czasie, gdy atom zanieczyszczeniowy jest schwytany przez centrum, wędruje on wzdłuż linii dyslokacji w głąb półprzewodnika a następnie po określonym czasie wraca na powierzchnię. W oparciu o zaproponowany model Bess uzyskuje widmo $1/f$ w szerokim przedziale częstotliwości (ponad 8 dekad) [57].

Jäntsch zaproponował model będący syntezą teorii McWhortera i Bessa [58]. Rozważa on powierzchnię krzemu i dyfundujące po niej cząsteczki wody, jako odpowiedniki atomów zanieczyszczeniowych. Szczegółowa analiza procesów dyfuzji cząsteczek wody ruchami analogicznymi do ruchów Browna, jak w modelu Bessa, oraz ich wychwytywania przez centra emisyjne prowadzi Jäntscha do gęstości prawdopodobieństwa czasu życia postaci $1/\tau$, jak w modelu McWhortera. W efekcie uzyskuje on postać gęstości widmowej, analogiczną jak dana równaniem (11) (rozdz. 2.1), w zakresie częstotliwości $3 \cdot 10^{-2} \div 3 \cdot 10^3$ Hz.

4.3. Zagadnienie małej liczby swobodnych nośników ładunku w próbce — styki punktowe

Jako punkt wyjścia przekształćmy równanie (1) (rozdz. 1) dla $\gamma = 1$ i $\alpha = 2$ do postaci:

$$\frac{\overline{(\Delta U)^2}}{U^2} = \frac{\overline{(\Delta R)^2}}{R^2} = C\frac{\Delta f}{f}, \tag{61}$$

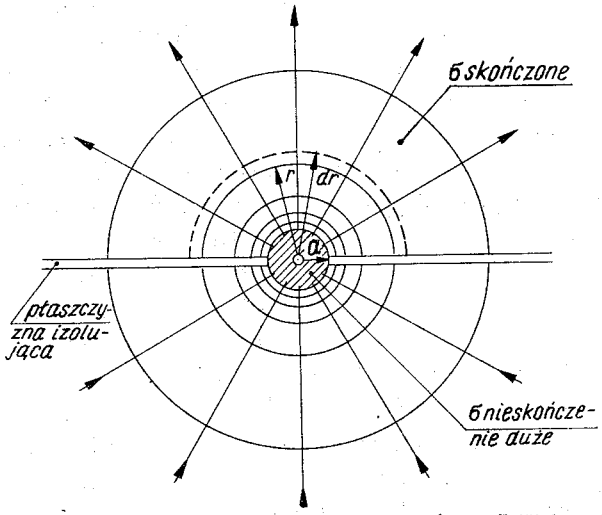
[8] Nazwa atomy zanieczyszczeniowe dotyczy tu atomów lub jonów adsorbowanych na powierzchni półprzewodnika, które nazywane są zanieczyszczeniowymi w odróżnieniu od wprowadzonych w sposób kontrolowany atomów domieszkowych.

przy czym napięcie szumów u zostało zastąpione przez ΔU, R jest rezystancją próbki a ΔR fluktuacją rezystancji. Badania przeprowadzone przez Hooga i Hoppenbrouwersa [3] [28—30] wykazały, że dla jednorodnej próbki stała C spełnia zależność empiryczną:

$$C = \frac{\beta}{N}, \tag{62}$$

gdzie β jest stałą, która dla metali i półprzewodników przyjmuje wartość $2 \cdot 10^{-3}$ i jest $10^3 \div 10^4$ razy większa dla roztworów jonowych [10] [11], zaś N jest całkowitą liczbą swobodnych nośników ładunku w próbce.

Jako przykład próbki o małej liczbie swobodnych nośników ładunku N, rozważmy *styk punktowy*. W uproszczonej wersji Holma [59] w powierzchni styku, przyjmowanej za kołową, rozważa się kulę o nieskończenie dużej konduktywności σ i o promieniu a (rys. 3).



Rys. 3. Ilustracja modelu styku w uproszczonej wersji Holma [59]

Styk składa się tu z dwóch członów, które stanowią półkule o rezystywności ϱ izolowane względem siebie poza kulą o promieniu a. Rezystancja pomiędzy dwiema sąsiadującymi powierzchniami ekwipotencjalnymi (półkule o promieniach r i $r+dr$) wynosi dla jednego członu:

$$R_i = \frac{\varrho}{2\pi r^2} dr. \tag{63}$$

Zatem rezystancja odpowiadająca jednemu członowi styku, R, jest całką wzoru (63) w zakresie od a do ∞, czyli

$$R = \frac{\varrho}{2\pi a}. \tag{64}$$

Hooge i Hoppenbrouwers wykorzystali ten model do opisu szumów typu $1/f$ styku punktowego [30]. Mianowicie dla objętości zawartej pomiędzy półkulami o promieniach r i $r+dr$ wzór (61) przyjmuje postać:

$$\frac{\overline{(\Delta R_i)^2}}{R_i^2} = \frac{\beta}{2\pi r^2 dr n} \frac{\Delta f}{f}, \tag{65}$$

gdzie n jest koncentracją swobodnych nośników w materiale styku.

Po uwzględnieniu (63) otrzymujemy następujące równanie określające fluktuację rezystancji połowy styku:

$$\overline{(\Delta R)^2} = \int_a^\infty \frac{\beta R_i^2}{2\pi r^2 dr n} \frac{\Delta f}{f} = \frac{32\pi^2 \beta R^5}{40 n \varrho^3} \frac{\Delta f}{f}, \tag{66}$$

lub po uwzględnieniu (64)

$$\frac{\overline{(\Delta R)^2}}{R^2} = \frac{\beta}{10\pi a^3 n} \frac{\Delta f}{f}. \tag{67}$$

Z porównania (61) i (67) widać, że stała C jest określona wzorem

$$C = \frac{\beta}{10\pi a^3 n} = \frac{\beta}{V_{ef} n}, \tag{68}$$

gdzie

$$V_{ef} = 10\pi a^3 \tag{69}$$

jest efektywną objętością 1/2 styku.

W przypadku całego styku $V_{ef} = 20\pi a^3$. Dla ułatwienia porównania różnych modeli dalsze rozważania i obliczenia będą prowadzone w odniesieniu do połowy styku.

Model Hooga i Hoppenbrouwersa został następnie potwierdzony przez jego autorów [60] [61], a także przez Vandamme [62]. Ten ostatni wyjaśnił rozbieżności ilościowe, niekiedy na poziomie kilku rzędów, pomiędzy doświadczalnymi wartościami stałej C i tymi, które przewiduje wzór (68). Z badań Vandamme wynika, że przyczyną obserwowanych rozbieżności jest występowanie, w przypadku pewnych materiałów, warstwy tlenku izolującej człony styku.

Przedstawiona koncepcja szumów typu $1/f$ styku punktowego doczekała się także szeregu uogólnień i uściśleń natury teoretycznej. Rozważając zagadnienie szumów typu $1/f$ ciał o dowolnym kształcie Honig wyprowadził następujące równanie [63]:

$$\frac{\overline{(\Delta R)^2}}{R^2} = \left[\frac{R^2}{U^4} \int_v \frac{\beta \varepsilon^4}{n\varrho^2} dv\right] \frac{\Delta f}{f}, \tag{70}$$

gdzie ε jest natężeniem pola, R rezystancją ciała, v jego objętością, zaś pozostałe oznaczenia mają taki sam sens, jak w dotychczasowych rozważaniach.

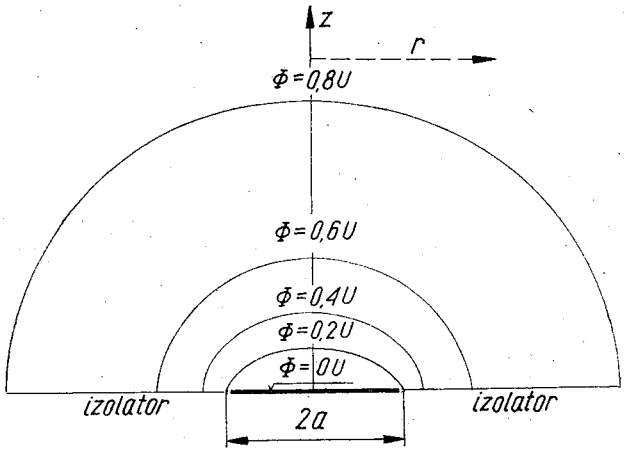
Honig zastosował równanie (70) do styku punktowego w uściślonej wersji Holma (patrz [59] ss. 13—17). W wersji tej styk punktowy stanowią dwie półprzestrzenie o rezystywności ϱ, izolowane względem siebie z wyjątkiem małej powierzchni kołowej o promieniu a[9] (rys. 4); powierzchnie ekwipotencjalne mają tu kształt elipsoidalny, nie zaś kulisty, jak w modelu uproszczonym. Bezpośrednie całkowanie równania (70) dla modelu styku z rys. 4, które najłatwiej wykonać stosując współrzędne sferoidalne (wzory (76)), prowadzi do nieskończenie dużej wartości szumów, co wiąże się z nieskończenie dużym natężeniem

[9] W oryginale promienie powierzchni styku występujące w obydwu wersjach są różne [59]. Porównywanie poszczególnych teorii jest jednak wygodne, jeśli przyjmie się jedno z dwu założeń: równości powierzchni styku lub równości rezystancji styku. W niniejszej pracy przyjęto to pierwsze założenie.

pola na krawędziach powierzchni styku. Honig usuwa rozbieżność całki (70) w tym miejscu, poprzez wprowadzenie czynnika $\exp\left(-\frac{(\nabla\phi)^2}{F_0^2}\right)$, gdzie $\nabla\phi$ jest gradientem potencjału a F_o stałą. Czynnik ten posiada wartość bliską 1 dla małych wartości natężenia pola i zmierza do 0, gdy natężenie zmierza do nieskończoności. W efekcie złożonych operacji całkowania otrzymuje się następujące wyrażenie dla stałej C połowy styku [63]:

$$C = \frac{1}{2\pi^2 a^3}\frac{\beta}{n}\left[-\frac{1}{2}-\zeta-2\ln\left(\frac{2U}{\pi a F_o}\right)\right], \tag{71}$$

gdzie $\zeta = 0{,}577...$ jest stałą Eulera, U napięciem przyłożonym do 1/2 styku; równanie to jest ważne z błędem mniejszym niż 2%, jeśli spełniony jest warunek $\frac{2U}{\pi a F_o} < 0{,}1$.



Rys. 4. Model połowy styku z elipsoidalnymi powierzchniami ekwipotencjalnymi i płaszczyzną izolującą człony styku [59]

Na podstawie (71) mamy:

$$V_{ef} = \frac{2\pi^2 a^3}{-\frac{1}{2}-\zeta-2\ln\left(\frac{2U}{\pi a F_o}\right)}. \tag{72}$$

Równanie (70), stanowiące punkt wyjścia koncepcji Honiga określania szumów $1/f$ ciał o dowolnym kształcie, zostało również potwierdzone w oparciu o ogólniejsze rozważania Butterwecka [64]. Rozważając fluktuacje konduktywności ciała o dowolnym kształcie, uzyskał on następujące równanie opisujące fluktuacje napięcia pomiędzy dwiema ekwipotencjalnymi powierzchniami (elektrodami) 1 i 2:

$$(\Delta U_{12})^2 = \frac{M_o}{I^2}\int_v |\nabla\phi|^4 dv, \tag{73}$$

gdzie I jest natężeniem prądu stałego płynącego od elektrody 1 do 2, $\nabla\phi$ gradientem potencjału, a M_o — całką po objętości ciała v z przestrzennej funkcji autokorelacji R_{PQ}. Ta ostatnia jest zdefiniowana jako

$$R_{PQ} = \overline{\delta\sigma(P,t)\delta\sigma(Q,t)}, \tag{74}$$

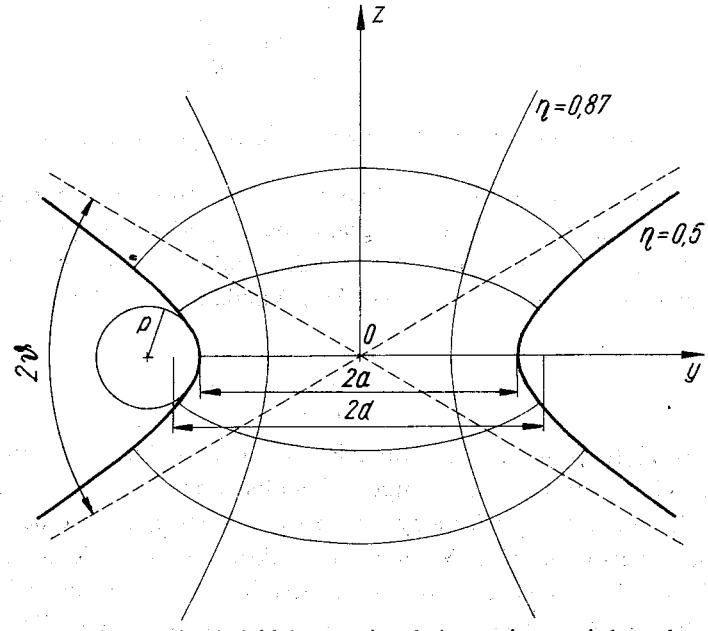
przy czym $\delta\sigma(P,t)$ i $\delta\sigma(Q,t)$ są fluktuacjami konduktywności w punktach P i Q ciała w chwili t.

Dla ośrodka jednorodnego z punktu widzenia statystycznych właściwości szumowych (tzw. „stacjonarność przestrzenna"), M_o jest wielkością stałą, określoną następująco [64]:

$$M_o = M(P) \underset{(\mathrm{def})}{=} \int_v R_{PQ}\, dv_Q. \tag{75}$$

Należy tu podkreślić, że równanie (73) jest słuszne przy założeniu, że długość korelacji dla fluktuacji konduktywności jest pomijalnie mała w porównaniu z rozmiarami styku. Oznacza to, że $|\nabla\phi|^2$ zmienia się nieznacznie w zakresie przemieszczeń rzędu długości korelacji.

Uogólnienie koncepcji teoretycznej szumów typu $1/f$ styku punktowego, a także porównanie dotychczasowych modeli w tym zakresie przedstawił ostatnio Vandamme [65]. Wykorzystał on dwa zaprezentowane dotychczas podejścia, a mianowicie Hooga — zwane dalej *procedurą dodawanych powłok* (zależności (64)—(67)) oraz Butterwecka (równanie (73)). Dwie symetryczne połowy styku izolowane są w jego ujęciu hiperboloidą w jednej wersji (rys. 5), lub powierzchnią stożkową w drugiej (rys. 6).

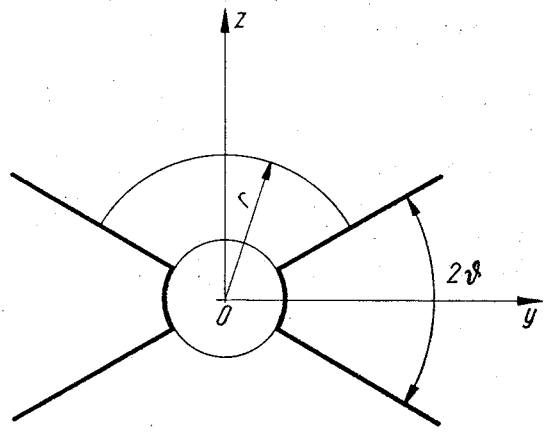


Rys. 5. Model styku z hiperboloidalną powierzchnią graniczną między członami [65]
a — promień powierzchni styku, 2ϑ — kąt rozwarcia ramion hiperboli granicznej, p — promień krzywizny hiperboli granicznej, $2d$ — odległość ogniskowa

Opis modelu z hiperboloidalną powierzchnią graniczną, jak na rys. 5, wygodnie jest przeprowadzić korzystając ze współrzędnych sferoidalnych spłaszczonych ξ, η i φ [66]:

$$\begin{aligned} x &= d\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)}\,\cos\varphi, \\ y &= d\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)}\,\sin\varphi, \\ z &= d\xi\eta, \end{aligned} \tag{76}$$

które przyjmują wartości $\xi \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, i jeśli rozważymy tylko górną połowę styku, to η jest dodatnie i $\eta_o \leqslant \eta \leqslant 1$. Linie ekwipotencjalne są pokazane na rysunku dla wartości ξ równych: 0, 0,5 i 1, zaś hiperboloidy $\eta = 0{,}5$, 0,87 i 1 obrazują w płaszczyźnie rysunku linie przepływu prądu. Dzięki zastosowaniu hiperboloidalnej powierzchni granicznej pomiędzy członami styku unika się tu nieskończonej wartości natężenia pola na „brzegach przewężenia", które nie są „ostre" jak w dotychczasowych modelach, lecz wykazują



Rys. 6. Model styku ze stożkową powierzchnią graniczną między członami

uzasadnione fizykalnie „zaokrąglenia", a ich miarą jest promień p okręgu stycznego na rys. 5. Miarą rozwarcia ramion hiperboli granicznej w płaszczyźnie rysunku jest kąt 2ϑ. W przypadku $\vartheta = 0$ otrzymuje się model styku jak u Holma (rys. 4). Stosując podejście zaproponowane przez Butterwecka (równanie (73)), Vandamme uzyskuje równanie dla stałej C postaci:

$$C = \frac{\beta}{nV_{ef}(a, p)}, \tag{77}$$

przy czym $V_{ef} = V_{ef}(a, p)$ jest złożoną funkcją promienia styku a oraz promienia okręgu stycznego p. Jeżeli $p \to 0$, czyli jeżeli hiperboloidalna granica pomiędzy członami styku degeneruje się do płaszczyzny, jak na rys. 4, to wartość stałej C zgodnie ze wzorem (77) zmierza do nieskończoności [65]. Wynika to z faktu, że założenie o pomijalnie małej (w porównaniu z a i p) długości korelacji nie jest już wtedy spełnione i równanie (73) przestaje być słuszne. Aby znaleźć dla porównania wzór na stałą C dla modelu według rys. 4, wykorzystywanego przez Honiga, trzeba zastosować procedurę dodawanych powłok, która dla 1/2 styku prowadzi do

$$C = \frac{\beta \cdot 6 \cdot 0{,}47}{n\pi^3 a^3}, \tag{78}$$

skąd

$$V_{ef} = \frac{\pi^3 a^3}{6 \cdot 0{,}47}, \tag{79}$$

gdzie 0,47 jest przybliżoną wartością pewnego wyrażenia całkowego [65].

Wartość C dana równaniem (78) jest 2,1 raza mniejsza niż dana równaniem Honiga (71) dla $\frac{2U}{\pi a F_o} = 0{,}09$ oraz 2,85 raza większa niż wynikająca z modelu Hooga (równanie (68)).

W przypadku modelu styku ze stożkową powierzchnią graniczną (rys. 6) człony styku są połączone kulą o promieniu a i o pomijalnie małej rezystywności. Jak widać model ten przechodzi w uproszczony model Holma (rys. 3), gdy $\vartheta = 0$. Oba podejścia: dodawanych powłok i Butterwecka dają w tym przypadku ten sam wynik [65]:

$$C = \frac{\beta}{10\pi a^3(1-\sin\vartheta)n}, \tag{80}$$

co dla $\vartheta = 0$ przechodzi w (68) oraz daje $V_{ef} = 10\pi a^3$, zgodnie z (69).

Z przedstawionych modeli, stanowiących rozwinięcie teorii szumów typu $1/f$ styków punktowych, opartej na empirycznym prawie Hooga (wzór (62)), a także ze szczegółowej ich dyskusji przeprowadzonej przez Vandamme [65] wynika, że ostateczne równania opisujące stałą C oraz objętość efektywną styku V_{ef} zależą w sposób istotny od geometrii styku. Narzuca ona procedurę obliczeniową, a także w ramach danej procedury decyduje o wartościach liczbowych współczynników określających C i V_{ef}. Obie przedstawione metody: dodawanych powłok i Butterwecka są tu interesujące, przy czym ta ostatnia wydaje się bardziej ogólna i elegancka. Wybór metody obliczeniowej, jak również modelu styku (hiperboloidalna czy stożkowa powierzchnia graniczna) zależy od rodzaju i właściwości konkretnej próbki.

Stosunkowo mało dotychczas wiadomo na temat pochodzenia fluktuacji konduktywności odpowiedzialnych za szumy typu $1/f$ styków punktowych, jako obszarów o niewielkiej liczbie nośników swobodnych. Z badań Hooga wynika, że są one spowodowane fluktuacjami ruchliwości nośników, nie zaś fluktuacjami ich liczby [61].

Na zakończenie wydaje się interesujące przytoczenie kilku danych liczbowych, dotyczących wielkości determinujących poziom szumów $1/f$ próbek o małej liczbie całkowitej swobodnych nośników. I tak np., jeżeli próbka zawiera mniej niż 10^{13} swobodnych nośników ładunku, to szumy $1/f$ są łatwo wykrywalne [61] [62]. W przypadku Ag ($n = 5{,}8 \times 10^{22}$ cm^{-3}) odpowiada to objętości $1{,}7 \cdot 10^{-10}$ cm^3 oraz rozmiarom liniowym $6{,}9 \times 10^{-4}$ cm. Badane przez autora rezystywne warstwy grube wykazują rozmiary cząstek przewodzących rzędu $5 \cdot 10^{-6} \div 10^{-4}$ cm oraz rozmiary średnicy styku pomiędzy cząstkami rzędu $7{,}5 \cdot 10^{-7} \div 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ cm [8] [67] [68]. Dla kulistego kształtu cząstek mamy zatem objętości cząstek przewodzących w zakresie $6{,}6 \cdot 10^{-17} \div 5{,}2 \cdot 10^{-13}$ cm^3 oraz objętości efektywne styków, określone na podstawie wzoru (79) w zakresie $1{,}2 \cdot 10^{-18} \div 9{,}3 \times 10^{-15}$ cm^3. Odpowiada to dla Ag liczbom elektronów w cząstkach przewodzących $3{,}8 \cdot 10^6 \div 3{,}0 \cdot 10^{10}$ oraz w stykach $6{,}7 \cdot 10^4 \div 7{,}2 \cdot 10^8$. Warstwy te zawierają zatem zarówno szumiące styki punktowe, jak i szumiące cząstki przewodzące. Można przytoczyć szereg analogicznych przykładów elementów ciała stałego, decydujących o transporcie ładunku, np. w przyrządach półprzewodnikowych, kiedy odpowiednie rozmiary są mniejsze niż rozmiary graniczne. Należy przy tym pamiętać, że rozmiary graniczne są tu zależne od koncentracji nośników swobodnych w danym medium, a zatem zmieniają się od materiału do materiału.

5. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono przegląd teorii szumów typu $1/f$, który obejmuje zarówno formalne podejścia matematyczne, jak i ujęcia fizykalne. Przeprowadzenie rozważań w tych dwóch płaszczyznach ułatwia spojrzenie na całość zagadnienia. Analizując zaprezentowane modele matematyczne można wyciągnąć następujące wnioski.

Stosowanie teorii Wienera-Chinczyna do szumów typu $1/f$ napotyka na trudności, które powstają przy wyznaczaniu funkcji autokorelacji na podstawie gęstości widmowej. Wydaje się, że dalsze poszukiwanie dolnej częstotliwości granicznej, poniżej której gęstość widmowa szumów typu $1/f$ zachowuje się zgodnie z wymaganiami teorii Wienera-Chinczyna nie jest interesujące, tym bardziej, że wiąże się ze znacznymi problemami pomiarowymi (pomiary widma poniżej 10^{-5} Hz). Podkreślenia godne wydaje się również, że eksperymentalne stwierdzenie istnienia gęstości widmowej postaci $1/f$ jest wynikiem zastosowania określonej procedury pomiarowej i obliczeniowej i nie powinno być utożsamiane z istnieniem tej postaci gęstości widmowej w sensie Wienera-Chinczyna. Jedną z konsekwencji takiego rozumowania jest zakwestionowanie stacjonarności szumów typu $1/f$. Szereg ostatnich badań cytowanych w niniejszej pracy [20—27] wskazuje na to, że nie są to procesy stacjonarne. Ustalenie niestacjonarności wymaga jednak dalszych pełniejszych badań.

Szumy typu $1/f$ obserwowano do niedawna wyłącznie w systemach nierównowagowych. Dlatego też tym systemom poświęcono szereg prac. Jedną z nich jest opisana w niniejszej pracy koncepcja, w której za szumy typu $1/f$ odpowiedzialne są fluktuacje lokalnego poziomu odniesienia systemu z prądem elektrycznym (rozdz. 4.1). Inne modele tego typu można znaleźć w pozycjach [69—71]. Otatnie badania Vossa i Clarka [72] fluktuacji wartości średniej kwadratu napięcia szumów cieplnych stanowią istotny argument za tym, że szumy typu $1/f$ występują również w systemach znajdujących się w równowadze.

W zakresie modeli fizycznych szumów typu $1/f$ w pracy uwzględniono dwie główne koncepcje. Według pierwszej są one efektem powierzchniowym, natomiast według drugiej efektem objętościowym, wynikającym z fluktuacji konduktywności materiału, szczególnie istotnych dla próbek o małej liczbie całkowitej swobodnych nośników ładunku (wzór (62)). Wydaje się, że w przypadku materiałów o przewodnictwie typu metalicznego szumy typu $1/f$ są zjawiskiem objętościowym, zgodnie z eksperymentalnymi dowodami dostarczonymi przez Hooga i innych (patrz np. [6]). Natomiast w przypadku półprzewodników, których powierzchnia wykazuje znaczną ilość tzw. powolnych stanów powierzchniowych (ma to szczególne znaczenie w przypadku tranzystorów typu MOS) należy przypuszczać, że głównym źródłem szumów $1/f$ są zjawiska powierzchniowe. Jednakże jeżeli rozmiary próbki półprzewodnikowej generującej szumy są odpowiednio małe, to udział szumów typu $1/f$ typu objętościowego może zdominować efekty powierzchniowe.

Z innych nie uwzględnionych w pracy teorii należy zwrócić uwagę na interesującą koncepcję „uogólnionego natężenia prądu" jako pierwiastka kwadratowego z mocy oraz na wynikającą z niej definicję zespolonej funkcji autokorelacji wprowadzoną przez Stephany [73] [74]. Bazuje ona na analizie wymiarowej funkcji autokorelacji i gęstości widmowej oraz na wprowadzeniu ujemnej rezystancji przy analizie mechanizmu transportu ładunku w przewodniku, z uwzględnieniem „prądu sieci krystalicznej". Uzyskana w efekcie postać

gęstości widmowej jest zbliżona zarówno pod względem formy jak i wartości do otrzymanej przez Hooga (wzory (61) i (62)).

Podsumowując należy stwierdzić, że wyjaśnienie zagadki jaką stanowią szumy typu $1/f$ jest sprawą otwartą, zarówno jeśli chodzi o modele matematyczne, jak i fizyczne. Wydaje się, że główne kierunki dalszych badań w tej dziedzinie powinny obejmować:

— prace teoretyczne w zakresie niestacjonarnych procesów stochastycznych w celu znalezienia odpowiednio ogólnego modelu matematycznego,
— prace eksperymentalne nad ustaleniem charakteru niestacjonarności i co się z tym wiąże postaci funkcji gęstości prawdopodobieństwa amplitud szumów typu $1/f$ i jej zmian w czasie,
— badania teoretyczne i eksperymentalne systemów znajdujących się w stanie nierównowagi, a także niektórych systemów w równowadze,
— poszukiwania nowych modeli fizycznych, ze szczególnym uwzględnieniem dotychczasowych koncepcji Hooga i innych (rozdz. 4.3), a także, w przypadku półprzewodników, kontynuowanie badań zjawisk powierzchniowych.

LITERATURA

1. K. M. Van Vliet, C. J. Van Leeuwen, J. Blok, C. Ris, *Measurements on current noise in carbon resistors and thermistors*, Physica, XX, 1954, ss. 481—496.
2. J. J. Brophy, *Excees nosise in n-type germanium*, Physical Review, vol. 106, nr 4, 1957, ss. 675—678.
3. F. N. Hooge, H. J. A. Van Dijk, A. M. H. Hoppenbrouwers, *1/f noise in epitaxial silicon*, Philips Research Reports, vol. 25, 1970, ss. 81—86.
4. C. Main, A. E. Owen, *Current noise in vitreous semiconductors*, Physical status solidi (a), nr 1, 1970, ss. 297—306.
5. F. M. Klaasen, *Characterization of low 1/f noise in MOS transistors*, IEEE Transactions on Electron Devices, vol. ed. — 18, nr 10, 1971, ss. 887—891.
6. F. N. Hooge, A. M. H. Hoppenbrouwers, *1/f noise in continuous thin gold films*, Physica, 45, 1969, ss. 386—392.
7. P. Mazzetti, A. Stepanescu, *Mechanism of noise formation and electrical conduction in thin metal films*, Thin Solid Films, vol. 13, 1972, ss. 67—71.
8. A. Kusy, *Szumy 1/f warstw rutenianowych*, Archiwum Elektrotechniki, z. 2, 1978 (w druku).
9. F. N. Hooge, J. L. M. Gaal, *Experimental study 1/f noise in thermo e.m.f.*, Philips Research Reports, vol. 26, nr 5, 1971, ss. 345—358.
10. F. N. Hooge, *1/f noise in the conductance of ions in aqueous solutions*, Physics Letters, vol. 33 A, nr 3, 1970, ss. 169—170.
11. F. N. Hooge, J. L. M. Gaal, *Fluctuactions with a 1/f spectrum in the conductance of ionic solutions and in the voltage of concentration cells*, Philips Research Reports, vol. 26, nr 2, 1971, ss. 77—90.
12. A. A. Verveen, H. E. Derksen, *Fluctuations phenomena in nerve membrane*, Proceedings of the IEEE, vol. 56, nr 6, 1968, ss. 906—915.
13. B. V. Rollin, I. M. Templeton, *Noise in semiconductors at very low frequencies*, Proc. Phys. Soc. (London), B 66, 1953, ss. 259—261.
14. T. E. Firle, H. Winston, *Noise measurements in semiconductors at very low frequencies*, J. Appl. Phys., vol. 26, 1955, ss. 716—717.
15. I. R. M. Mansour, R. J. Hawkins, G. G. Bloodworth, *Measurements of current noise in M.O.S. transistors from* $5 \cdot 10^{-5}$ *to 1 Hz*, *The Radio and Electronic Engineer*, 35, nr 4, 1968, ss. 212—216.
16. D. A. Bell, *Electrical noise*, Van Nostrand, London, 1960, s. 228.

17. D. A. Bell, *Present knowledge of 1/f noise*, Conference on physical aspects of noise in electronic devices, University of Nottingham, 11—13 September, 1968, ss. 106—116.
18. A. Kusy, *Pomiar właściwości szumowych warstw rezystywnych PdO/Pd-Ag za pomocą miernika typu Quan-Tech*, Rozprawy Elektrotechniczne, nr 2, 1974, ss. 313—330.
19. J. S. Bendat, A. G. Piersol, *Random data: analysis and measurements procedures*, Wiley, New York, 1971, s. 71.
20. J. J. Brophy, *Statistics of 1/f noise*, Physical Review, vol. 166, nr 3, 1968, ss. 827—831.
21. J. J. Brophy, *Zero-crossing statistics of 1/f noise*, Journal of Applied Physics, vol. 40, nr 2, 1969, ss. 567—569.
22. J. J. Brophy, *Variance fluctuations in flicker noise and current noise*, Journal of Applied Physics, vol. 40, nr 9, 1969, ss. 3551—3553.
23. J. J. Brophy, *Low-frequency varianee noise*, Journal of Applied Physics, vol. 41, nr 7, 1970, ss. 2913—2916.
24. W. E. Purcell, *Variance noise spectra of 1/f noise*, Journal of Applied Physics, vol. 43, nr 6, 1972, ss. 2890—2895.
25. R. A. Dell, *Experimental study of 1/f noise stationarity by digital techniques*, Doctoral dissertation, Northwestern University, Illinois, 1971.
26. R. A. Dell, M. Epstein, C. R. Kannewurf, *Experimental study of 1/f noise stationarity by digital techniques*, Journal of Applied Physics, vol. 44, nr 1, 1973, ss. 472—476.
27. W. J. Moore, *Statistical studies of 1/f noise from carbon resistors, Journal of Applied Physics*, vol. 45, nr 4, 1974, ss. 1896—1901.
28. F. N. Hooge, *1/f noise is no surface effect*, Physics Letters, vol. 29 A, nr 3, 1969, ss. 139—140.
29. A. M. H. Hoppenbrouwers, Dyskusja prywatna.
30. F. N. Hooge, A. M. H. Hoppenbrouwers, *Contact noise*, Physics Letters, vol. 29 A, nr 11, 1969, ss. 642—643.
31. A. Van der Ziel, *On the noise spectra of semiconductor noise and of flicker effect*, Physica, XVI, nr 4, 1950, ss. 359—372.
32. A. L. McWhorter, *1/f noise and germanium surface properties*, w „Semiconductor Surface Physics", wydanym przez R. H. Kingston, University of Pennsylvania Press, Philadelphia, 1957, ss. 207—228.
33. A. Van der Ziel, *Fluctuation phenomena in semiconductors*, Butterworths Scientific Publication, London, 1959, ss. 46—64.
34. A. Van der Ziel, *Noise — sources, characterization, measurements*, Prentice-Hall, 1970, ss. 106—115.
35. D. Halford, *A general mechanical model for $|f|^{\alpha}$ spectral density random noise with special reference to flicker noise $1/|f|$*, Proceedings of the IEEE, vol. 56, nr 3, 1968, ss. 251—258.
36. T. H. Bell, *Representation of random noise by random pulses*, Journal of Applied Physics, vol. 45, nr 4, 1974; ss. 1902—1904.
37. I. N. Sneddon, *The use of integral transforms*, McGraw-Hill, 1972, ss. 262—288.
38. Ch. Heiden, *Power spectrum of stochastic pulse sequences with correlation between the pulse parameters*, Physical Review, vol. 177, nr 1, 1969, ss. 319—325.
39. A. Papoulis, *Probability, random variables and stochastic processes*, McGraw-Hill, Tokyo, 1965, s. 339.
40. J. A. Barnes, D. W. Allan, *A statistical model of flicker noise*, Proceedings of the IEEE, vol. 54, nr 2, 1966, ss. 176—178.
41. R. Courant, *Kurs differencjalnowo i intiegralnowo isczislienija*, Izdatielstwo „Nauka", Moskwa, 1970, t. 2, s. 363 (tłum. z ang.).
42. Praca zbiorowa pod redakcją F. Beckenbacha, *Nowoczesna matematyka dla inżynierów*, cz. 2, PWN, Warszawa, 1968, ss. 219—224 (tłum. z ang.).
43. F. F. Offner, *1/f noise in semiconductors*, Journal of Applied Physics, vol. 41, 1970, ss. 5033—5034.
44. J. K. E. Tunaley, *Some stochastic processes yielding a $f^{-\nu}$ type of spectral density*, Journal of Applied Physics, vol. 43, nr 11, 1972, ss. 4777—4783.
45. J. K. E. Tunaley, *A physical process for 1/f noise in thin metallic films*, Journal of Applied Physics, vol. 43, nr 9, 1972, ss. 3851—3855.

46. F. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, t. 2, PWN, Warszawa, 1969, s. 301 (tłum. z ang.).
47. B.B. Mandelbrot, J.W. Van Ness, *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications*, A Publication of the Society for Indiustrial and Applied Mathematics (SIAM Review), vol. 10, nr 4, 1968, ss. 422—437.
48. M. F. M. Osborne, *The observation and theory of fluctuations in deep ocean currents*, Ergänzugsheft zur Deutschen Hydrographischen Zeitschrift, Reihe A (8°), Nr 13, Deutsches Hydrographisches Institut, Hamburg, 1973, s. 39.
49. S. Teitler, M. F. M. Osborne, *Phenomenological approach to low-frequency electrical noise*, Journal of Applied Physics, vol. 41, nr 8, 1970, ss. 3274—3276.
50. M. F. M. Osborne, Dyskusja prywatna.
51. R. E. Stricker, *An experimental investigation of the transport mechanisms and density of states of amorphous silicon and silicon-bismuth thin films*, Doctoral dissertation, Purdue University, Lafayette, 1973.
52. S. R. Morrison, *Slow relaxation phenomena on the germanium surface*, w „Semiconductor Surface Physics", wydanym przez R. H. Kingston, University of Pennsylvania Press, Philadelphia, 1957, ss. 169—196.
53. H. Satz, G. A. De Mars, L. Davis, Jr., and A. Adams, Jr., *Measurements of inversion layers on silicon and germanium and their interpretation*, w „Semiconductor Surface Physics", wydanym przez R. H. Kingston, University of Pennsylvania Press, Philadelphia, 1957, ss. 139—168.
54. K. W. Szalimowa, *Fizyka półprzewodników*, PWN, Warszawa, 1974, s. 318 (tłum. z rosyjskiego).
55. F. Berz, C. G. Prior, *Test of McWhorter's model of low-frequency noise in Si M.O.S.T.*, Electronic Letters, vol. 6, nr 19, 1970, ss. 595—597.
56. A. U. Mac Rae, H. Levinstein, *Surface dependent 1/f noise in germanium*, Physical Review, vol. 119, nr 1, 1960, ss. 62—69.
57. L. Bess, *Study of 1/f noise in semiconductor filaments*, Physical Review, vol. 103, nr 1, 1956, ss. 72—82.
58. O. Jäntsch, *A theory of 1/f noise at semiconductor surfaces*, Solid State Electronics, vol. 11, 1968, ss. 267—272.
59. R. Holm, *Electric contacts*, Springer Verlag, Berlin, 1958, ss. 1—5.
60. A. M. H. Hoppenbrouwers, F. N. Hooge, *1/f noise of spreading resistances*, Philips Research Reports, vol. 25, nr 2, 1970, ss. 69—80.
61. F. N. Hooge, *Discussion of recent experiments on 1/f noise*, Physica, 60, 1972, ss. 130—144.
62. L. K. J. Vandamme, *1/f noise of point contacts affected by uniform films*, Journal of Applied Physics, vol. 45, nr 10, 1974, ss. 4563—4565.
63. E. P. Honig, *1/f noise of bodies of arbitrary shape and of point contacts*, Philips Research Reports, 29, 1974, ss. 253—260.
64. H. J. Butterweck, *Noise voltages of bulk resistors due to random fluctuations of conductivity*, Philips Research Reports, vol. 30, 1975, ss. 316*—321*.
65. L. K. J. Vandamme, *On the calculation of 1/f noise of contacts*, Applied Physics, vol. 11, 1976, ss. 89—96.
66. J. Meixner, E. W. Schäfke, *Mathieusche Funktionen und Spharoidalfunktionen*, Springer Verlag, Berlin, 1954, ss. 23—26.
67. A. Kusy, *On the structure and conduction mechanism of thick resistive films*, Thin Solid Films, vol. 37, nr 3, 1976, ss. 281—302.
68. A. Kusy, *Chains of conducting particles that determine the resistivity of thick resistive films*, Thin Solid Films, vol. 43, nr 3, 1977, ss. 243—250.
69. S. Teitler, M. F. M. Osborne, *Similarity arguments and an inverse-frequency noise spectrum for electrical conductors*, Physical Review Letters, vol. 27, nr 14, 1971, ss. 912—915.
70. P. H. Handel, *1/f noise — an „infrared" phenomenon*, Physical Review Letters, vol. 34, nr 24, 1975, ss. 1492—1495.
71. P. H. Handel, *Nature of 1/f noise*, Physical Review Letters, vol. 34, nr 24, 1975, ss. 1495—1498.

72. R. F. Voss, J. Clark, *1/f noise from systems in thermal equilibrium*, Physical Review Letters, vol. 36, nr 1, 1976, ss. 42—45.
73. J. F. Stephany, *Origin of 1/f noise*, Journal of Applied Physics, vol. 46, nr 2, 1975, ss. 665—667.
74. J. F. Stephany, *Origin of 1/f noise, part III: A source of magnetically generated 1/f noise*, Journal of Applied Physics, vol. 46, nr 11, 1975, ss. 5010—5011.

A. KUSY

THEORETICAL PROBLEMS OF 1/f NOISE

Summary

The main difficulties which arise in the theoretical analysis of 1/f noise have been presented. A systematized review of the propositions of the explanation of this phenomenon has been made, taking into account mathematical as well as phenomenological and physical models. When dealing with the mathematical models the conceptions assuming the process stationarity and basing on the Wiener-Chinczyn theorem have been presented on one hand, and on the other, the propositions allowing nonstationarity — including the fractional order of integration and processes of the type of random walk and Brownian motion. The concept of the treatment of the fluctuations, and the reasoning of 1/f type spectral density in a system with electrical current has been described as an example of analysis of a nonequilibrium system. The short characteristic of surface phenomena in semoconductors and the use of the phenomena for the explanation of 1/f noise have been given. A review and comparison of the theories of 1/f noise of point contacts — as the regions of small total number of free charge carriers have been made. The dimensions of the conducting medium that are critical from the point of view of 1/f noise generation have been estimated and compared with the dimensions of conducting particles observed in thick resistive films. The main directions of 1/f noise investigations have been concluded and indicated on the base of the theoretical analysis done in the work.

A. KUSY

PROBLÈMES THÉORIQUES DES BRUITS DU TYPE 1/f

Résumé

On a présenté les principales difficultés rencontrées pendant l'analyse théorique des bruits 1/f. On a passé systématiquement en revue les propositions de l'explication de ce phénoméne prenant en considération les modèles mathématiques aussi bien que phénoménologiques et physiques. Dans le domaine des modèles mathématiques on a montré d'un côté les conceptions admettant la stabilité du processus et qui sont basées sur le théorème de Wiener-Chinczyn et de l'autre côté les propositions admettant l'instabilité — tenant compte d'intégration de l'ordre fractionnaire ainsi que des processus du type de vagabondage aléatoire et du mouvement brownien. On a décrit la conception du traitement de la fluctuation et d'argumentation de la formation de densité spectrale en forme 1/f dans le circuit avec intensité de courant — comme exemple choisi de l'analyse du circuit à l'état de déséquilibre. On a donné une brève caractéristique des phénomènes superficiels dans les semi-conducteurs et leur mise à profit pour expliquer les bruits 1/f. On a passé en revue et on a comparé les théories des bruits de points de contact, comme espaces à petit nombre entier de porteurs de charge libres. On a évalué les dimensions du milieu conducteur, critiques du point de vue de la formation des bruits 1/f et on les a comparés avec les dimensions des particules conductrices observées dans les couches épaisses de résistivité. Se basant sur l'analyse théorique faite dans l'étude on a montré de principales directives de futurs recherches sur les bruits 1/f.

A. KUSY

THEORETISCHE PROBLEME DES $1/f$-RAUSCHENS

Zusammenfassung

Es werden Grundschwierigkeiten geschildert, die in der theoretischen Analyse des $1/f$-Rauschens entstehen. Eine systematisierte Übersicht über die Vorschläge zur Erklärung dieses Phänomens wurde unter Berücksichtigung von mathematischen, phänomenologischen und physikalischen Modellen gebracht. Auf dem Gebiet der mathematischen Modelle wurden einerseits diejenigen Auffassungen geschildert, die die Stationarität des Prozesses zu Grunde legen, und auf dem Wiener-Chinczyn-Theorem basieren, und anderseits diejenigen Vorschläge erörtert, die eine Unstationarität unter Berücksichtigung der Bruchintegration und derartiger Prozesse zulassen, wie z. B. des zufälligen Vagabundierens und der Brownschen Bewegung. Im weitere wurden Konzeptionen der Behandlung von Schwankungen sowie der Begründung für die Spektraldichte der $1/f$-Form in einem mit Stromstärke behafteten System diskutiert, u. zwar als ein gewähltes Beispiel für die Analyse eines Systems im unausbalancierten Zustand. Eine kurze Charakteristik der Oberflächenphänomene bei Halbleitern ist angeführt worden sowie deren Ausnutzung für die Erklärung des $1/f$-Rauschens. Es wurde eine Übersicht über die Theorien des $1/f$-Rauschens der Punktkontakte getätigt, Vergleiche gezogen, und zwar vom Gesichtspunkt des Leiterraumes mit kleiner Totalzahl freier Ladungsträger. Die Abmessungen des Leitmediums wurden abgeschätzt, die vom Gesichtspunkt der Entstehung des $1/f$-Rauschens kritisch bezeichnet werden können. Diese Abmessungen wurden mit der Größe der leitenden Teilchen verglichen, die in dicken Widerstandsschichten beobachtet werden. In Anlehnung an die durchgeführte theoretische Analyse wurden die Hauptrichtungen für die Untersuchungen auf dem Gebiet des $1/f$-Rauschens aufgezeichnet.

А. КУСЫ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ШУМОВ $1/f$

Резюме

Представлены основные трудности встречаемые при теоретическом анализе шумов вида $1/f$. Приведен усистематизированный обзор предложений изъяснения этого явления, учитывающий математические, феноменологические и физические модели. Среди математических моделей представлены с одной стороны концепции предполагающие стационарность процесса и использующие теорему Винера-Хинчина, а с другой — допускающие нестационарность с учетом процессов типа случайного блуждения и Броуновского движения. Описана концепция трактовки флуктуации и обоснования спектральной плотности вида $1/f$ в системе с электрическим током — как избранного примера анализа системы находящейся в состоянии неравновесия. Приведена краткая характеристика поверхностных явлений в полупроводниках и использования их при объяснении шумов $1/f$. Проведен обзор и сравнение теории шумов $1/f$ точечных контактов — как областей с малым полным числом свободных носителей заряда. Оценены размеры проводящей среды критические с точки зрения появления шумов $1/f$, которые сравнены с размерами проводящих частиц наблюдаемых в толстых резистивных пленках. На основании проведенного в труде анализа указаны главные направления исследований шумов вида $1/f$.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1978, 24, z. 3, ss. 745—762

621.317.089.68

Wzorzec natężenia pola elektromagnetycznego z wykorzystaniem odcinka linii TEM

HUBERT TRZASKA (WROCŁAW)

Instytut Telekomunikacji i Akustyki Politechniki Wrocławskiej

Otrzymano 21.2.1977

W pracy przedstawiono główne czynniki ograniczające dokładność wzorca natężenia pola elektromagnetycznego opartego o wykorzystanie odcinka symetrycznej linii paskowej pracującej z rodzajem pola TEM. Szczególną uwagę zwrócono na wzajemne oddziaływanie linii na badany w niej obiekt i obiektu na linię oraz współzależność dokładności pomiaru pobudzenia linii i dopasowania linii do przyjętego standardu impedancji falowej.

Prowadzone rozważania dają podstawę do analizy wzorców natężenia pola elektromagnetycznego opartych o inne linie transmisyjne TEM, np. linie paskowe niesymetryczne, linie współosiowe oraz linie pracujące z podstawowym rodzajem pola innym niż TEM.

1. WSTĘP

Wykorzystanie linii transmisyjnych pracujących z rodzajem pola TEM do wytwarzania wzorcowych pól elektromagnetycznych od dawna było przedmiotem zainteresowania wielu autorów [5, 8, 9, 14, 16]. Takie zalety tego wzorca, jak: prostota budowy, łatwość uzyskiwania dużych natężeń pól przy użyciu stosunkowo niewielkich mocy, mała ilość energii odpromieniowywanej na zewnątrz, a więc duża kompatybilność układu zarówno z punktu widzenia zakłóceń radioelektrycznych, jak i zagrożenia personelu, praca w bardzo szerokim pasmie częstotliwości, proste i niezależne od częstotliwości zależności opisujące natężenie pola w linii spowodowały takie jego zastosowania, jak m.in.: badanie własności materii znajdującej się w polu elektromagnetycznym, badanie susceptybilności aparatury elektrycznej i elektronicznej, wzorcowanie mierników natężeń pól elektrycznych i magnetycznych w.cz. i in.

W Politechnice Wrocławskiej stosuje się taki wzorzec do badania własności szerokopasmowych czujników pól elektrycznych i magnetycznych w.cz. przeznaczonych do pomiarów zagrożeń stwarzanych przez te pola. Wzorzec jest wykorzystywany zarówno do pomiarów charakterystyk częstotliwościowych tych czujników, wstępnego pomiaru charakterystyk promieniowania anten w nich stosowanych, jak i do wzorcowania czujników.

Wykorzystanie odcinka linii jako źródła wzorcowego pola elektromagnetycznego wymaga przeprowadzenia dokładnej analizy czynników wpływających na dokładność tego wzorca. W pracy przedstawiono niektóre czynniki ograniczające dokładność wzorca, przy czym szczególną uwagę zwrócono na wzajemne oddziaływania wzorca i badanego w nim obiektu oraz na czynniki ograniczające częstotliwość krytyczną wzorca.

2. SYMETRYCZNA LINIA PASKOWA

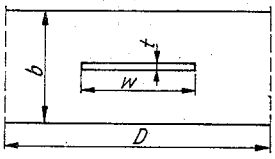
Przekrój poprzeczny przez symetryczną linię paskową pokazano na rys. 1. W niektórych rozwiązaniach [8], celem zmniejszenia niepożądanych promieniowań, otwarte boki linii zamyka się dodatkowymi ściankami. W warunkach pełnego dopasowania linii, w pewnej odległości od obszarów o zaburzonym polu (krawędzi, zmiany przekroju) uzyskuje się falę bieżącą o strukturze fali TEM. Wielkość natężenia pola elektrycznego w tym obszarze określa zależność:

$$E = \frac{2\sqrt{PZ_o}}{b-t} e^{-jkx}, \tag{1}$$

gdzie:

P — moc doprowadzana do linii,

Z_o — impedancja falowa linii.



Rys. 1. Przekrój poprzeczny przez symetryczną linię paskową

Natomiast natężenie pola magnetycznego określa zależność:

$$H = E\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}, \tag{2}$$

gdzie: ε, μ — przenikalność magnetyczna i elektryczna ośrodka wypełniającego linię.

Pomijając zmiany fazy wzdłuż linii, dla linii wypełnionej powietrzem wzór (2) przekształcimy do postaci:

$$H = \frac{E}{\zeta_o} = \frac{2}{b-t}\sqrt{\frac{P}{\zeta_o}}\, q, \tag{3}$$

gdzie:

$$\zeta_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}} = 120\pi,$$

$q = \sqrt{\frac{Z_o}{\zeta_o}}$ — współczynnik redukcji impedancji falowej linii, dla przyjętego standardu $Z_o = 50$ omów, $q = 0{,}364$.

Łatwo zauważyć, że moduł natężenia pola elektrycznego i magnetycznego jest funkcją tylko jednej zmiennej — mocy doprowadzonej do linii. Pozostałe wielkości wchodzące do wzorów (1) i (3) są wielkościami stałymi dla określonego rozwiązania linii, oczywiście w zakresie częstotliwościowym odpowiadającym podstawowemu rodzajowi pola TEM — wielkości te nie zależą od częstotliwości; jak wyżej wspomniano stanowi to jedną z podstawowych zalet tego typu wzorca.

Impedancję falową linii określa zależność:

$$Z_o = (cC)^{-1}, \tag{4}$$

gdzie:

$c = (\varepsilon_o \mu_o)^{-1/2}$ — prędkość światła w próżni,

C — pojemność jednostkowa linii.

Dla linii o przekroju poprzecznym, jak na rys. 1, pojemność jednostkową można wyznaczyć jako sumę pojemności kondensatora płaskiego C_p i pojemności rozproszonych C_d odpowiadających polu niejednorodnemu na obu krawędziach przewodu środkowego:

$$C = 2(C_p + 2C_d). \tag{5}$$

W pierwszym przybliżeniu, zwłaszcza dla linii o dużej wartości C_p, wpływ pól rozproszonych można pominąć. Rygorystyczne rozwiązanie zagadnienia prowadzi do znalezienia funkcji potencjału ϕ, spełniającej równanie Laplace'a w dowolnej płaszczyźnie przekroju poprzecznego linii:

$$\nabla^2 \phi = 0. \tag{6}$$

Zagadnienie to dla nieskończenie szerokich płaszczyzn zewnętrznych linii zostało rozwiązane [6] i przy założeniu $D \gg w$ wyraża się wzorami:

$$C_d \approx \frac{\varepsilon}{\pi}\left\{\frac{2}{1-\frac{t}{b}}\ln\left[1+\frac{1}{1-\frac{t}{b}}\right]-\left[\frac{1}{1-\frac{t}{b}}-1\right]\left[\ln\frac{1}{\left(1-\frac{t}{b}\right)^2}-1\right]\right\}, \tag{7}$$

lub dla linii spełniającej warunek $t \ll b$:

$$C_d = \frac{2\varepsilon}{\pi}\ln 2 \tag{8}$$

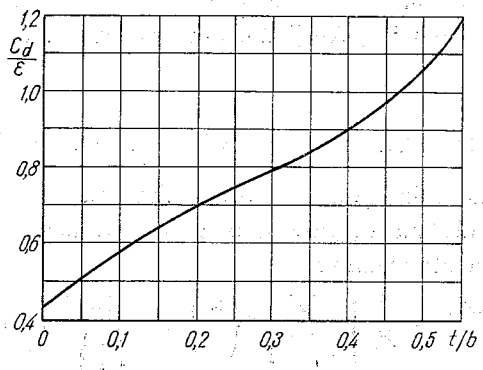
oraz:

$$C_p = \frac{2\varepsilon w}{b-t}. \tag{9}$$

Podstawiając (8) i (9) do (4) po przekształceniach otrzymamy [11]:

$$Z_o \approx \frac{15\pi^2}{\sqrt{\varepsilon_r}}\left(\frac{\pi w}{2b}+\ln 2\right)^{-1}. \tag{10}$$

Przebieg unormowanej względem ε pojemności C_d pokazano na rys. 2. Z punktu widzenia prowadzonych rozważań niezmiernie istotny jest tu wniosek wynikający z zależności (4), a mianowicie: zmiana impedancji falowej linii przez zmianę jej pojemności jednostkowej — zagadnienie to będzie szerzej naświetlone w dalszej części pracy. Pewnego



Rys. 2. Zmiany pojemności C_d w zależności od t/b

wyjaśnienia wymaga tu kwestia ograniczeń częstotliwościowych. Jak wspomniano, zależności (1), (2) i (3) obowiązują dla podstawowego rodzaju pola TEM, przy czym wyższe rodzaje pola powstają w linii, gdy [11]:

$$w < \frac{\lambda_{gr}}{2} \quad \text{i} \quad b < \frac{\lambda_{gr}}{2}, \tag{11}$$

gdzie λ_{gr} — graniczna długość fali w linii dla falowodowych rodzajów pola, to znaczy E_{mn} lub H_{mn}.

Istnieje wprawdzie możliwość eliminowania fal typu E_{mn} lub H_{mn} poprzez stosowanie odpowiednich przecięć i przesłon w linii, możliwe jest także zmniejszanie λ_{gr} przez pomniejszanie wymiarów linii, jednak przy częstotliwościach dochodzących do około 1 GHz zbudowanie wzorca opartego o prezentowaną metodykę jest już sprawą niezmiernie złożoną. Wynika to zarówno z pojawiania się wyższych rodzajów pola, konieczności zmniejszania wymiarów, a więc i przestrzeni użytecznej wewnątrz linii, wzrostu tłumienia oraz trudności z dopasowaniem linii do pozostałych elementów toru w.cz.

3. CZYNNIKI OGRANICZAJĄCE DOKŁADNOŚĆ WZORCA

Na błąd określenia wytwarzanego w linii pola wzorcowego ma wpływ dokładność wykonania linii, dokładność dopasowania linii i dokładność pomiaru mocy doprowadzanej do linii. Wymienione czynniki można by określić jako źródła błędów przypadkowych, które mogą być usunięte z dowolną, z góry przyjętą dokładnością [18]. Dodatkowym źródłem błędów jest tu z jednej strony zmiana rozkładu pola wewnątrz linii wskutek wprowadzenia do niej badanego przedmiotu (wpływa to także na dopasowanie linii), z drugiej natomiast strony zmiana parametrów badanego obiektu wskutek umieszczenia go pomiędzy przewodzącymi płaszczyznami tworzącymi linię. Czynniki te są zwykle trudne do wyznaczenia *a priori*, zwłaszcza dla obiektów o niezbyt regularnych kształtach, wymagają one przyjęcia jakiegoś kompromisu, w którym z jednej strony będzie stosowanie linii o wymiarach dużych w porównaniu z wymiarami obiektu, z drugiej strony będzie to dążenie do uzyskania możliwie najwyższej częstotliwości granicznej linii. Kompromis taki prowadzi zwykle do budowy kilku linii o różnych wymiarach przeznaczonych do pracy w coraz to szerszym pasmie częstotliwości, przy czym dokładność takich wzorców, siłą rzeczy, będzie coraz to mniejsza.

Poniżej zostaną krótko omówione niektóre z wymienionych źródeł błędów dla pokazania ich istotności w ogólnej dyskusji dokładności linii jako źródła wzorcowego pola elektromagnetycznego.

3.1. Dokładność wykonania linii

Dokładność wykonania linii jest w istocie najprostszym do uwzględnienia źródłem błędów pomiarowych i ujawnia się głównie przez wzrost niedopasowania na wejściu linii. Różniczkując wzór (10) otrzymamy:

$$\frac{dZ_o}{Z_o} = \frac{1}{Z_o}\left[\frac{\partial Z_o}{\partial\left(\frac{w}{b}\right)} d\left(\frac{w}{b}\right) + \frac{\partial Z_o}{\partial\left(\frac{t}{b}\right)} d\left(\frac{t}{b}\right)\right]. \tag{12}$$

Po wykonaniu obliczeń wzór (12) przyjmuje postać:

$$\frac{dZ_o}{Z_o} = -Ad\left(\frac{w}{b}\right) - Bd\left(\frac{t}{b}\right), \tag{13}$$

gdzie A i B — parametry zależne od wymiarów przekroju poprzecznego linii.

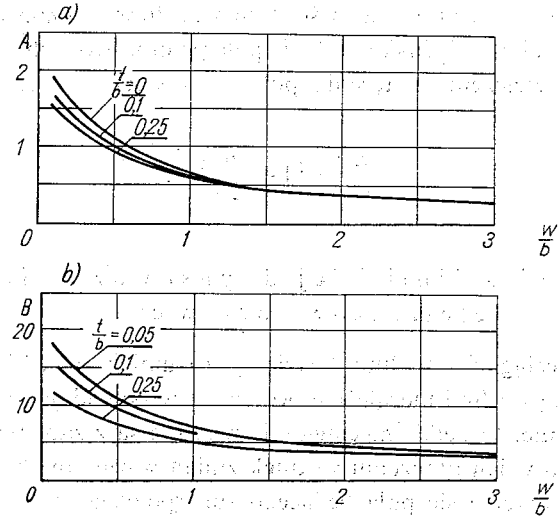
Przyjmując, że dokładność określenia wymiarów liniowych jest jednakowa dla wszystkich wielkości, tj. $\Delta w = \Delta b = \Delta t = \Delta l$, wzór (13) można przekształcić do postaci:

$$\frac{\Delta Z_o}{Z_o} = -\frac{\Delta l}{b}\left[A\left(1-\frac{w}{b}\right)+B\left(1-\frac{t}{b}\right)\right]. \tag{14}$$

Ze względu na to, że większość stosowanych układów spełnia warunek $t \ll b$ wzór (14) można uprościć do postaci:

$$\frac{\Delta Z_o}{Z_o} = -\frac{\Delta l}{b}A\left(1-\frac{w}{b}\right). \tag{15}$$

Dla zilustrowania szybkości zmian parametrów A i B w zależności od stosunku w/b odpowiednie przebiegi dla kilku wartości t/b pokazano na rys. 3a i 3b. Z zależności (15) wynika, że przyjmując $\Delta l = 1$ mm względny błąd impedancji falowej linii o impedancji 50 omów przy wymiarach $b = 25$ cm i $w = 36$ cm wyniesie mniej niż 1%.



Rys. 3. Przebieg zależności: a) współczynnika A od stosunku w/b, b) współczynnika B od stosunku w/b

Rozpatrzymy obecnie wpływ mimośrodowości przewodu środkowego na impedancję falową linii. Mając na względzie wzór (4), przez analogię do wzoru (5) możemy napisać

$$C' = C'_p + C''_p + 2(C'_d + C''_d), \tag{16}$$

gdzie:

C'_p i C'_d — składowe pojemności jednostkowej utworzone przez przewód środkowy i bok znajdujący się w odległości $b/2+\delta$,

C_p'' i C_d'' — składowe pojemności jednostkowej utworzone przez przewód środkowy i bok znajdujący się w odległości $b/2-\delta$,

δ — niecentryczność przewodu środkowego w stosunku do położenia środkowego odpowiadającego $b/2$.

Metoda rozwiązania asymetrii linii jest identyczna jak przy obliczaniu impedancji falowej linii symetrycznej, co pokazano w p. 2; różnica polega na policzeniu pojemności jednostkowych dla dwu linii niesymetrycznych umieszczonych nad ośrodkiem przewodzącym w odległości $b/2+\delta$ i $b/2-\delta$, a następnie zsumowaniu uzyskanych rezultatów. Po wykonaniu obliczeń dla linii o niezbyt grubym przewodzie środkowym otrzymamy:

$$\frac{C'}{C} = \frac{Z_o}{Z_o'} = \frac{\left(1-\frac{t}{b}\right)^2}{\left(1-\frac{2\delta}{b}-\frac{t}{b}\right)\left(1+\frac{2\delta}{b}-\frac{t}{b}\right)}. \tag{17}$$

Przyjmując, że mimośrodowość nie powinna przekraczać przyjętej dokładności wyznaczenia wymiarów liniowych Δl, tj. $\delta = \Delta l$, na podstawie wzoru (17) można policzyć względny błąd określenia impedancji falowej i dla powyższego przykładu linii 50-omowej wynosi on około 1%. Analiza wzoru (17) pokazuje, że asymetria przewodu środkowego linii powoduje spadek impedancji falowej linii; spadek ten jest w pierwszym przybliżeniu proporcjonalny do $(2\delta/b)^2$. Wniosek ten wskazuje na pewne niebezpieczeństwo zbudowania linii z niecentrycznym przewodem środkowym, dobrze dopasowanej do przyjętego standardu impedancji falowej, jednak natężenia pola po obu stronach przewodu środkowego będą różne. Błąd wyznaczenia natężenia pola w stosunku do centrycznego położenia przewodu wyniesie:

$$\frac{\Delta E}{E} = \left(1+\frac{b}{2\delta}\right)^{-1}. \tag{18}$$

3.2. Nieciągłości w linii i jej dopasowanie do pozostałych elementów toru w. cz.

Pod pojęciem nieciągłości w linii będziemy rozumieli wszelkie zmiany wymiarów w przekroju poprzecznym linii niezależnie od tego, czy powodują one zmianę impedancji falowej linii, czy też nie. Wszelkie nieciągłości związane są z zaburzeniami rozkładu pola elektromagnetycznego w ich otoczeniu wskutek zmian warunków brzegowych [6]. Rezultatem tego jest wytworzenie się pola będącego superpozycją podstawowego i wyższych rodzajów pola, powstających w otoczeniu nieciągłości. Ze względu na to, że pracuje się zwykle w zakresie częstotliwości niższych od częstotliwości granicznej linii, wyższe rodzaje pola są szybko wytłumiane, skutkiem czego rozkład pola przy oddalaniu się od źródła zaburzenia powraca do „normalnego"; jednak wskutek gromadzenia się pewnej energii w reaktancji reprezentującej zaburzenie, powstaje na ogół wzrost współczynnika odbicia odpowiadający liczbowo dołączeniu do linii zastępczej reaktancji skupionej. Wielkość tej reaktancji jest zależna od rodzaju zaburzenia, jego kształtu i rozmiarów.

Nie będziemy tu rozpatrywali dowolnych nieciągłości występujących w symetrycznej linii paskowej i ich wpływu na dopasowanie linii. Przedstawimy jedynie zarys postępowania

przy analizie zniekształceń w obszarze przejścia oraz odbicia powodowane przez wprowadzenie do linii badanego obiektu. Zagadnienia nieciągłości są szeroko analizowane w literaturze [1, 5, 6, 11, 13, 17]. Linia będąca wzorcem natężenia pola powinna pracować w warunkach możliwie dobrego dopasowania, co zostanie w dalszym ciągu pracy szerzej wyjaśnione. Obecnie przyjmiemy, że współczynnik odbicia na wejściu linii jest równy zeru.

a) Dopasowanie linii do pozostałych elementów toru w.cz.

Ze zrozumiałych względów wszystkie połączenia poszczególnych urządzeń wchodzących w skład zestawu wzorca są realizowane za pomocą przewodów współosiowych. Poważny problem stanowi tu budowa przejścia z przewodu współosiowego na symetryczną linię paskową. Przejście takie z jednej strony stwarza najwięcej problemów z uzyskaniem dopasowania w wymaganym pasmie częstotliwości, z drugiej jest powodem zniekształceń pola także na pewnym odcinku symetrycznej linii paskowej, co powoduje skrócenie „użytkowej" długości linii, lub też powoduje konieczność budowy linii o większej długości. W pierwszym przybliżeniu można powiedzić, że długość linii nie ma wpływu na dokładność wytwarzanego w niej pola — tak jednak nie jest, bowiem im większa jest elektryczna długość linii, tym dokładniejszy musi być pomiar mocy do niej doprowadzanej.

W zbudowanych modelach stosuje się przejścia zbieżne. Szczegóły projektowania przejść tego typu zostały podane w [8, 11]. Rozważania te prowadzą do wniosku, że wielkość zaburzeń pola powodowana przez przejście w symetrycznej linii paskowej jest tym mniejsza, im dłuższe jest przejście. Na ogół przyjmuje się, że odległość przejścia l_p powinna wynosić [11]:

$$l_p > 0{,}1\lambda. \tag{19}$$

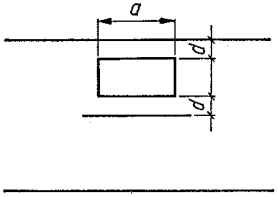
W przypadku, gdy długość przejścia jest mniejsza, wzrasta rola reprezentującej go reaktancji zastępczej, dla skompensowania której stosuje się np. różne długości odcinka przejścia zbieżnego w przewodzie środkowym i w przewodach zewnętrznych [14].

b) Czujnik w symetrycznej linii paskowej

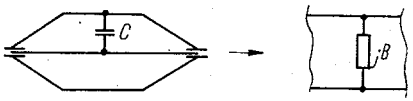
O ile rozpatrywane dotychczas źródła odbić rzutowały na procedurę projektowania linii oraz jej starannego wykonania i przystępując do rozpatrywania linii jako wzorca można było przyjąć, że linia jest dopasowana tak, że współczynnik fali stojącej (ϱ) jest mniejszy od przyjętego za dopuszczalny, o tyle wprowadzenie do linii jakiegokolwiek obiektu, np. czujnika badanego miernika natężenia pola, jest związane ze spowodowaniem wystąpienia odbić o wielkości zależnej od gabarytów tego obiektu. Czujniki do pomiaru pola elektrycznego zostały omówione w pracy [3]. Przypomnimy tu jedynie krótko, że czujnik taki składa się z krótkiej antenki dipolowej dołączonej do układu detekcyjnego poprzez filtr kształtujący częstotliwościową charakterystykę czujnika, napięcie stałe z detektora jest odprowadzane przez linię „przezroczystą" dla pola, tj. nie powodującą jego zniekształceń, do miernika napięcia stałego. Przekrój poprzeczny symetrycznej linii paskowej z wprowadzoną do niej przesłoną obrazującą czujnik pola elektrycznego pokazano na

rys. 4. Układ zastępczy takiej nieciągłości pokazano na rys. 5. Przesłony pojemnościowe w liniach paskowych niesymetrycznych są szczegółowo analizowane w [6]. W analizie tej przyjęto, że przesłona jest nieskończenie cienka, a linia i umieszczona w niej przesłona są nieskończenie szerokie. Stosując zaproponowaną w [6] metodykę do rozwiązania zagadnienia przedstawionego na rys. 4, obliczymy zastępczą susceptancję B reprezentującą niejednorodność w linii spowodowaną wprowadzeniem do niej czujnika pola elektrycznego w postaci:

$$B = \frac{kba}{\pi w} \ln \operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi d}{b} + \frac{L\alpha_1^2}{1+L\alpha_2^2}\right) Z_o, \tag{20}$$



Rys. 4. Przesłona pojemnościowa w symetrycznej linii paskowej



Rys. 5. Układ zastępczy nieciągłości pokazanej na rys. 4

gdzie:

$$L = \frac{4\pi}{\gamma} - 1,$$

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{4\pi}{b}\right)^2 - k^2},$$

$$\alpha_1 = \cos\frac{2\pi d}{b},$$

$$\alpha_2 = \sin\frac{2\pi d}{b},$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Susceptancja ta powoduje wzrost współczynnika fali stojącej określonego dla $|B| \ll Z_o$ zależnością [11]:

$$\varrho = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{B}{Z_o}\right)^2. \tag{21}$$

W tablicy 1 zestawiono wyniki obliczeń i pomiarów współczynnika fali stojącej na wejściu dopasowanej symetrycznej linii paskowej po wprowadzeniu do niej czujnika pola elektrycznego. Z porównania rezultatów przedstawionych w tablicy 1 widać, że wartości obliczone są zaniżone w stosunku do pomierzonych. Rozbieżność ta jest spowodowana dwoma przyczynami:

— w obliczeniach antenę o skończonej grubości zastąpiono tworem płaskim,

— wyznaczenie małych wartości ϱ na częstotliwości 10 MHz zostało przeprowadzone drogą pomiaru zmiany pojemności własnej linii, co wiąże się ze stosunkowo dużymi

błędami pomiarowymi; natomiast na częstotliwościach 300 MHz pomiar wykonano za pomocą Z_g — Diagrafu, jednak już bez wprowadzania czujnika do linii na 300 MHz $\varrho \approx 1{,}05$.

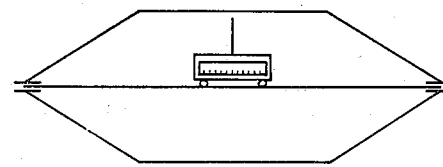
Czujniki do pomiaru pola magnetycznego zostały przedstawione w [4]. Czujnik taki składa się z anteny ramowej dołączonej, poprzez układ kształtujący charakterystykę częstotliwościową czujnika, do detektora.

Tablica 1

Wyniki pomiarów i obliczeń współczynnika fali stojącej

	Obliczenia			Pomiary		
$4h/b$	0,88	0,56	0,32	0,88	0,56	0,32
10 MHz	1,001	1,0003	1,00004	1,003	1,001	1,001
300 MHz	1,03	1,007	1,001	1,15	1,10	1,05

Analiza niejednorodności w linii paskowej w postaci umieszczonego w niej czujnika pola magnetycznego może być prowadzona w sposób analogiczny jak czujnika pola elektrycznego, bowiem wymiary obu są znacznie mniejsze od długości fali. Rezultaty przeprowadzonej analizy i pomiarów pokazują, że współczynniki fali stojącej są około dwukrotnie większe dla anten ramowych o średnicy $2h$ niż dla anten dipolowych przy tym samym stosunku $2h/b$. Konieczne jest tu zwrócenie szczególnej uwagi na ostrożne podejście do wykorzystania linii jako źródła wzorcowego pola elektromagnetycznego, gdy rozmiary badanego w linii obiektu są duże w porównaniu z wymiarami linii. Przykład zastosowania linii jako wzorca pola o ograniczonej dokładności pokazano na rys. 6. Rysunek



Rys. 6. Wskaźnik natężenia pola w symetrycznej linii paskowej

ten przedstawia wskaźnik natężenia pola, składający się z obudowy zawierającej miernik napięcia i wyposażony w niesymetryczną antenę prętową, umieszczony w symetrycznej linii paskowej. Odległość pomiędzy końcem anteny a ścianką linii wynosi 1 cm. Umieszczenie w linii takiego obiektu powoduje wzrost współczynnika fali stojącej do wartości $\varrho \approx 2$ już w zakresie częstotliwości poniżej 50 MHz. Konieczne jest tu także zwrócenie uwagi na to, że stosowanie zewnętrznej kompensacji fal odbitych wpływa na jednorodność pola wewnątrz linii jedynie w ograniczonym stopniu.

4. SPOSÓB POMIARU MOCY DOPROWADZANEJ DO LINII

Jak przedstawiono dotychczas, zarówno wskutek niedokładności wykonania linii, jak i wskutek wprowadzenia do niej badanych obiektów dopasowanie linii nie jest idealne, a wielkość niedopasowania jest zależna głównie od rozmiarów badanego obiektu. Skut-

kiem tego jest zaburzenie pola w linii, co prowadzi do ograniczenia dokładności wytwarzanego w linii pola wzorcowego. Ze względu na to, że do wzorcowania używana jest najczęściej środkowa część linii, zastanowimy się jak duże wartości ϱ są dopuszczalne dla uzyskania wymaganej zgodności wartości napięcia w środku linii z wielkością określoną na podstawie pomiaru mocy doprowadzanej do linii, pomiaru napięcia na wejściu linii oraz pomiaru napięcia na wejściu i wyjściu linii. Oczywiste jest, że dla idealnie dopasowanej linii wszystkie te sposoby są sobie równoważne. Przyjmiemy, jako dopuszczalną, względną zmianę napięcia mierzonego i występującego w środku linii nie większą niż $\pm 5\%$.

a) Wyznaczenie napięcia w środku linii poprzez pomiar napięcia na jej wejściu

Nie uwzględniając występowania wielokrotnych odbić, napięcie U_x wzdłuż linii opisuje zależność:

$$U_x = \frac{E}{1+\frac{Z_g}{Z_f}} \frac{e^{-jkx}+\Gamma_2 e^{-jk(2l-x)}}{1-\Gamma_1\Gamma_2 e^{-j2kl}}, \tag{22}$$

gdzie:

$$\Gamma_1 = \frac{Z_g - Z_f}{Z_g + Z_f},$$

$$\Gamma_2 = \frac{Z_l - Z_f}{Z_l + Z_f},$$

E — siła elektromotoryczna generatora,
Z_g — impedancja wyjściowa generatora,
Z_f — impedancja falowa linii,
Z_l — impedancja obciążenia linii,
l — długość linii.

Dla warunków dopasowania $Z_g = Z_f = Z_l = Z_o$.

Napięcie na wejściu linii ($x = 0$) wynosi:

$$U_1 = \frac{E}{1+\frac{Z_g}{Z_f}} \frac{1+\Gamma_2 e^{-j2kl}}{1-\Gamma_1\Gamma_2 e^{-j2kl}}. \tag{23}$$

Obliczając na podstawie zależności (22) napięcie w środkowej części linii ($x = l/2$), $U_{l/2}$ oraz obliczając moduł stosunku napięć $U_{l/2}$ do U_1 otrzymamy:

$$\left|\frac{U_{l/2}}{U_1}\right| = \sqrt{\frac{1+|\Gamma_2|^2+2|\Gamma_2|\cos kl}{1+|\Gamma_2|^2+2|\Gamma_2|\cos 2kl}}. \tag{24}$$

Lewa strona wzoru (24) zgodnie z przyjętym założeniem powinna spełniać nierówność:

$$0{,}95 \leqslant \left|\frac{U_{l/2}}{U_1}\right| \leqslant 1{,}05. \tag{25}$$

Wyniki obliczeń ϱ_{max} przy pomiarze napięcia U_1 podano w tablicy 2 w wierszu oznaczonym U_1.

b) *Wyznaczenie napięcia w środku linii przez pomiar mocy doprowadzanej do linii (napięcia doprowadzanego do linii)*

Napięcie na wejściu linii można przedstawić w postaci sumy:

$$U_1 = U_1^+ + U_1^-, \tag{26}$$

gdzie: U_1^+ i U_1^- są napięciami fali padającej i odbitej, odpowiednio.

Napięcia te przy założeniu $\Gamma_1 = 0$ są związane z sobą zależnością:

$$\frac{U_1^-}{U_1^+} = \Gamma_2 e^{-j2kl}. \tag{27}$$

Ponieważ dla $x = l/2$:

$$U_{l/2} = U_1^+(e^{-jkl/2} + \Gamma_2 e^{-j3kl/2}), \tag{28}$$

to:

$$\left|\frac{U_{l/2}}{U_1^+}\right| = \sqrt{1+|\Gamma_2|^2+2|\Gamma_2|\cos kl}. \tag{29}$$

Lewa strona wzoru (29) zgodnie z uprzednim założeniem powinna spełniać nierówność (25).

Tablica 2

Obliczone wartości ϱ_{max}

	l/λ	0	0,1	0,125	0,2	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
ϱ_{max}	U_1	∞	1,25	1,15	1,10	1,10	1,15	1,05	1,15	1,10	1,15	∞
	U_1^+	1,10	1,13	1,14	1,25	1,90	1,14	1,10	1,13	1,90	1,14	1,1
	U	∞	< 5	1,85	1,63	1,94	1,10	1,05	1,10	1,94	1,85	∞

Wyniki obliczeń ϱ_{max} przy pomiarze napięcia doprowadzanego do linii (U_1^+) podano w tablicy 2 w wierszu oznaczonym U_1^+.

c) *Wyznaczenie napięcia w środku linii przez pomiar napięć na wejściu i wyjściu linii*

Podstawiając $x = l$ w równaniu (22) otrzymamy napięcie U_2 na końcu linii

$$U_2 = U_1 \frac{e^{-jkl} + \Gamma_2 e^{-jkl}}{1+\Gamma_2 e^{-jkl}}. \tag{30}$$

Moduł średniej wartości napięcia na wejściu i wyjściu linii wyraża zależność:

$$|U_o| = \frac{|U_1|+|U_2|}{2} = \frac{|U_1|}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1+|\Gamma_2|^2+2|\Gamma_2|}{1+|\Gamma_2|^2+2|\Gamma_2|\cos kl}}\right). \tag{31}$$

Odnosząc rzeczywistą wartość napięcia dla $x = l/2$ do napięcia U_o otrzymamy:

$$\left|\frac{U_{l/2}}{U_o}\right| = \frac{2\sqrt{\dfrac{1+|\Gamma_2|^2+2|\Gamma_2|\cos kl}{1+|\Gamma_2|^2+2|\Gamma_2|\cos 2kl}}}{1+\sqrt{\dfrac{1+|\Gamma_2|^2+2|\Gamma_2|}{1+|\Gamma_2|^2+2|\Gamma_2\cos kl}}}. \tag{32}$$

Oczywiście lewa strona wzoru (32) powinna spełniać nierówność (25).

Wyniki obliczeń ϱ_{max} przy pomiarze napięć U_1 i U_2 i przyjmowaniu jako napięcia w środku linii ich średniej arytmetycznej podano w tablicy 2 w wierszu oznaczonym U_o.

Analiza danych zestawionych w tablicy 2 pozwala na wyciągnięcie wniosków odnośnie optymalnego sposobu pomiaru mocy doprowadzanej do linii. Dla linii o długościach elektrycznych mniejszych od około $0{,}4\lambda$ najkorzystniejszy jest pomiar napięcia na wejściu i wyjściu linii i wyznaczanie napięcia w środku linii jako średniej arytmetycznej tych wielkości. Dla linii o długościach $0{,}4\lambda \div 0{,}7\lambda$ najkorzystniejszy jest pomiar fali padającej reflektometrem. Dla linii o długościach $0{,}7\lambda \div 1\lambda$ ponownie przez pomiar napięć na wejściu i wyjściu linii. Dla linii krótszych od $0{,}1\lambda$ pomiar napięcia na wejściu linii pozwala na uzyskanie wyższych dokładności niż pomiar reflektometrem. Dla uzyskania dokładności wytwarzanego pola $\pm 5\%$ przy pomiarze pobudzenia linii reflektometrem, dla linii o długości do 1λ konieczne jest utrzymanie $\varrho \leqslant 1{,}1$; oczywiście ϱ_{max} jest funkcją częstotliwości i zmienia się w granicach $1{,}1 \div 1{,}9$.

W powyższej dyskusji przyjęto, że dokładność stosowanych przyrządów pomiarowych jest jednakowa, i że nie wprowadzają one dodatkowych niedopasowań na wejściu i wyjściu linii. Przy pomiarze reflektometrem przyjęto $\Gamma_1 = 0$, co dało zaniżenie ϱ_{max}, jednak i tak widać, że pomiar reflektometrem jest ograniczony do linii o określonych długościach elektrycznych; ponadto przeprowadzone rozważanie pokazuje konieczność uwzględniania niedopasowań, powodowanych także przez badane w linii obiekty, na dokładność pomiaru napięcia pomiędzy ściankami linii.

5. WPŁYW LINII NA PARAMETRY BADANEGO W NIEJ OBIEKTU

Ze względu na niewielką odległość pomiędzy płytami tworzącymi symetryczną linię paskową konieczne jest rozpatrzenie nie tylko oddziaływania badanego obiektu na parametry linii, lecz także i wpływu linii na parametry badanego w niej obiektu. Ze względu na to, że analiza dokładności linii jako źródła wzorcowego pola elektromagnetycznego jest prowadzona pod kątem widzenia jej zastosowania do badania czujników do pomiaru pól elektrycznych i magnetycznych, rozpatrzymy poniżej krótko wpływ linii na takie czujniki.

5.1. Czujniki pola elektrycznego

Transmitancja czujnika pola elektrycznego w pasmie pomiarowym jest określona zależnością [3]:

$$T_f = C_1 \frac{C_f}{C_f + C_d}, \tag{33}$$

gdzie:

C_1 — stała,

C_f — pojemność wejściowa anteny w swobodnej przestrzeni

$$C_f = (\omega X_f)^{-1},$$

C_d — pojemność wejściowa detektora.

Pojemność C_d jest wielkością zależną od rodzaju stosowanego detektora; do naszych rozważań przyjmiemy ją jako wielkość stałą, niezależną od warunków otoczenia.

Reaktancję wejściową krótkiej, symetrycznej anteny dipolowej określa w pierwszym przybliżeniu zależność [10]:

$$X_f = \frac{120}{kh}\left(1{,}7 - \ln\frac{h}{r}\right), \tag{34}$$

gdzie r — promień ramienia anteny.

Jeżeli antena ta zostanie umieszczona prostopadle do nieskończenie rozległego, doskonale przewodzącego ośrodka, a odległość pomiędzy tym ośrodkiem a bliższym końcem anteny wynosi d, to reaktancja wejściowa takiej anteny ulega zmianie o wielkość X_o i wynosi:

$$X_i = X_f + X_o, \tag{35}$$

gdzie:

$$X_o = \frac{60}{kh}\left[\frac{d}{h}\ln\frac{\left(1+\frac{3}{2}\frac{h}{d}\right)^4}{\left(1+\frac{h}{d}\right)^4\left(1+2\frac{h}{d}\right)} + 2\ln\frac{\left(1+\frac{1}{2}\frac{h}{d}\right)\left(1+\frac{3}{2}\frac{h}{d}\right)^3}{1+\left(\frac{h}{d}\right)^3\left(1+2\frac{h}{d}\right)}\right]. \tag{36}$$

W przypadku umieszczenia tej anteny symetrycznie względem ścian linii paskowej, zmiany reaktancji wejściowej będą w pierwszym przybliżeniu dwukrotnie większe i wzór (35) przybierze postać:

$$X_i = X_f + 2X_o. \tag{37}$$

Skutkiem zmian reaktancji wejściowej anteny transmitancja czujnika zmieni się do wielkości:

$$T_o = C_1\frac{C_i}{C_i + C_d}, \tag{38}$$

gdzie

$$C_i = (\omega X_i)^{-1}.$$

Skutkiem zmiany transmitancji czułość sondy pozornie wzrośnie: wzrost ten opisuje zależność:

$$\eta_E = \frac{1}{1+\frac{X_f}{2X_o}\frac{C_d+C_f}{C_d}}. \tag{39}$$

Pozorny wzrost czułości będzie najmniejszy dla czujnika spełniającego warunek: $C_d \ll C_f$.

Warto tu zwrócić uwagę na przybliżenia zastosowane przy wyprowadzeniu wzoru (36). Wzór ten został wyprowadzony dla $h \gg r$ oraz $d \gg r$. Stosunek h/r anten krótkich jest siłą rzeczy niewielki, ponadto do pomiarów pól elektrycznych o częstotliwościach poniżej 100 kHz używa się zwykle anten zakończonych pojemnością końcową dla uzyskania dużej wartości T_f określonej wzorem (33) — anteny takie są bardziej wrażliwe na obecność ośrodka przewodzącego, wykazują większą pozorną zmianę czułości w czasie wzorcowania. Wyniki obliczeń zmian czułości czujnika z anteną dipolową i czujnika z anteną dipolową z pojemnością końcową w funkcji odległości pomiędzy ścianami linii paskowej oraz wyniki

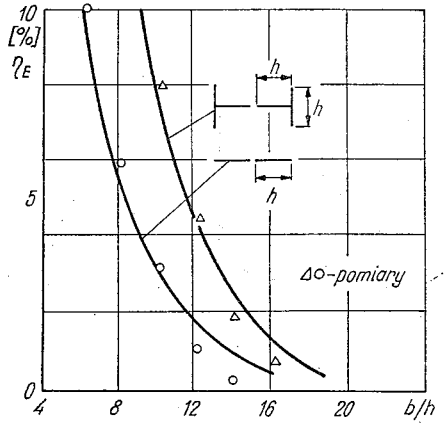
pomiarów pozornej zmiany czułości przedstawiono na rys. 7. Czujniki te spełniają warunek $C_d \gg C_f$. Dla przypadku tego możliwe jest podsumowanie rozważań w postaci nierówności określających maksymalny wymiar anteny przy dopuszczonym wzroście czułości o 5%:

$$h < b/8 \tag{40}$$

oraz dla anteny dipolowej z pojemnością końcową:

$$h < b/12. \tag{41}$$

Jeżeli nie jest spełniony warunek $C_d \gg C_f$ oraz warunki wyrażone nierównościami (40) i (41), konieczne jest uwzględnianie poprawek cechowniczych wyznaczonych na drodze analitycznej lub eksperymentalnej dla danego rozwiązania czujnika (rodzaj anteny, C_d).



Rys. 7. Wyniki obliczeń i pomiarów

Dla przykładu pokazanego na rys. 6 zmiana reaktancji wejściowej anteny wskaźnika jest ponad dwukrotna, co łącznie z efektem zaburzenia pola w pobliżu anteny przez dużą obudowę wskaźnika daje około czterokrotny wzrost czułości wskaźnika. Badanie takie może mieć znaczenie jedynie orientacyjne.

5.2. Czujnik pola magnetycznego

Rozpatrując transmitancję czujnika pola magnetycznego pracującego na częstotliwościach większych od częstotliwości rezonansu własnego f_r anteny ramowej [2] możemy napisać dla $f \gg f_r$:

$$T_f = C_2 \frac{1}{L_f}, \tag{42}$$

gdzie:

C_2 — stała,

L_f — indukcyjność własna ramy.

Zależność (42) została wprowadzona przy daleko idących uproszczeniach polegających na założeniu, że dowolny wymiar anteny jest znacznie mniejszy od długości fali, jednakże zależność ta pozwala na zobrazowanie wpływu zmian indukcyjności własnej anteny na transmitancję czujnika pola magnetycznego.

Postępując podobnie jak poprzednio możemy napisać:

$$\eta_H = 1 - \frac{L_f}{2M_o + L_f}, \tag{43}$$

gdzie M_o — indukcyjność wnoszona do anteny ramowej przez znajdujące się w jej pobliżu ośrodki przewodzące.

Dla jednozwojowej, kołowej anteny ramowej o średnicy $2R$, wykonanej z przewodu o średnicy $2r$ indukcyjność L_f wynosi [15]:

$$L_f = C_3 \left(\ln \frac{8R}{r} - 1{,}75 \right), \tag{44}$$

gdzie C_3 — stała zależna od wymiarów anteny.

Jeżeli tę samą antenę umieścimy równolegle do nieskończenie rozległego, doskonale przewodzącego ośrodka w odległości d, to [12]:

$$M_o = C_3 \left(\ln \frac{4R}{d} - 2 \right). \tag{45}$$

Podstawiając (45) i (44) do (43) otrzymamy po wyliczeniu, przez analogię do (40):

$$R < b/6. \tag{46}$$

Uzyskany rezultat wymaga pewnego komentarza, bowiem przyjęto do rachunku niewłaściwe umieszczenie anteny w stosunku do powierzchni przewodzącej. Łatwo wykazać, że M_o policzone przy prostopadłym umieszczeniu anteny do powierzchni będzie mniejsze dla danych stosunków R/d, niż policzone ze wzoru (45). Ograniczenie dane warunkiem (46) jest więc majorantą błędu, jaki tu może wystąpić wskutek zmiany reaktancji anteny. Ciekawe jest natomiast porównanie warunków (40), (41) i (46), z którego wynika, że czujnik do pomiaru pola magnetycznego jest mniej wrażliwy na obecność ośrodków przewodzących w jego pobliżu niż czujnik pola elektrycznego. Prowadząc podobną analizę dla czujnika pola magnetycznego pracującego z anteną ramową, pracującą poniżej częstotliwości rezonansu własnego [4], uzyskałoby się jeszcze mniej rygorystyczne ograniczenie wymiarów anteny ramowej w stosunku do linii paskowej, niż wyrażone nierównością (46).

6. ZAKOŃCZENIE

W pracy krótko przedstawiono wpływ dokładności wykonania symetrycznej linii paskowej na dokładność wytwarzanego w niej wzorcowego pola elektromagnetycznego oraz przeanalizowano wzajemny wpływ linii na badany w niej obiekt i badanego obiektu na zmianę dopasowania linii. Rozważania dotyczące interrakcji linii i badanego w niej obiektu nie były dotychczas publikowane w literaturze przedmiotu. Z przeprowadzonej analizy wynika, że wprowadzenie do linii badanego obiektu powoduje zaburzenia pola wewnątrz linii i wynikające z tego zmiany dopasowania linii, przy czym efekt ten jest szczególnie istotny dla linii o długości $l > 0{,}1\ \lambda$.

Ważne jest przy tym stwierdzenie, że kompensacja fal odbitych na wejściu i wyjściu linii tylko w niewielkim stopniu wpływa na poprawę dokładności wyznaczania natężenia

pola wewnątrz linii, w której znajduje się obiekt zaburzający rozkład pola. Przy niewielkiej odległości pomiędzy ściankami linii a badanym w niej obiektem w postaci czujnika pola elektrycznego lub magnetycznego, następuje zmiana reaktancji wejściowej anteny czujnika i wynikający z tego pozorny wzrost czułości czujnika. Pozorna zmiana czułości czujnika znajdującego się w pobliżu ośrodka przewodzącego tłumaczy m.in. obserwowany efekt pozornego wzrostu natężenia pola w pobliżu zarówno zewnętrznego „zimnego", jak i wewnętrznego „gorącego" przewodu linii. Ze względu na wzajemne oddziaływanie linii i badanego w niej obiektu, rozmiary poprzeczne linii, a więc i jej częstotliwość graniczną, dobiera się dla określonych gabarytów badanego obiektu jako kompromis pomiędzy możliwie wysoką częstotliwością graniczną linii a wymaganą dokładnością wzorca. Ponadto, w zależności od długości elektrycznej linii i zaburzeń pola wewnątrz linii przez badane w niej obiekty optymalne, są różne sposoby pomiaru pobudzenia linii.

Czynnikami determinującymi dokładność wzorca jest dokładność pomiaru pobudzenia linii oraz jej wpływ na parametry badanego w niej obiektu. Ostatni czynnik jest tu szczególnie istotny. Gdy nie są spełnione wymagania określone nierównościami (40), (41) i (46), dla uzyskania wymaganej dokładności wzorcowania konieczne jest wtedy stosowanie odpowiednich poprawek cechowniczych. Stosowanie takich poprawek jest wprawdzie dość uciążliwe, jednak pozwala na pewne podniesienie częstotliwości granicznej linii w stosunku do wynikającej ze spełnienia nierówności (40), (41) i (46).

Dokładność wytwarzanego w linii wzorcowego pola magnetycznego jest taka sama jak dokładność wytwarzania pola elektrycznego, natomiast ze względu na mniejszą wrażliwość czujników do pomiarów pola magnetycznego na obecność w ich pobliżu ośrodka przewodzącego, możliwe jest stosowanie linii o wyższej częstotliwości granicznej.

Opisywany rodzaj wzorca natężenia pola elektromagnetycznego jest przeznaczony do pracy w zakresie częstotliwości $0 \div 1$ GHz, przy częstotliwościach wyższych od 1 GHz trudne jest uzyskanie dokładności wytwarzanego pola lepszej niż około $8 \div 10\%$. Wielkości wytwarzanych w linii natężeń pól są ograniczone od góry, głównie własnościami wytrzymałościowymi torów zasilających linię i możliwościami pomiaru pobudzenia linii.

LITERATURA

1. H. M. Altschuler, A. A. Oliner, *Discontinuities in the Center Conductor of Symetric Strip Transmission Line*, IRE Trans., vol. MTT-8, May 1960, s. 328—339.
2. E. Aslan, *A Low Frequency H-Field Radiation Monitor*, Proc. 1975 USNC/URSI Meeting, Boulder, CO.
3. T. M. Babij, H. Trzaska, *Superwideband Electric Field Probes*, Proc. 1975 IEEE-EMC Intl. Symp. San Antonio, TX.
4. T. M. Babij, H. Trzaska, *Problems of Wiedeband Magnetic Field Measurements Above 30 MHz*, Proc. 1975 IMPE Intl. Microvawe Symposium Waterloo.
5. T. M. Babij, H. Trzaska, *Accuracy Limitations of the Crafford Cell*, Proc. 1976 CPEM, Boulder, CO.
6. R. E. Collin, *Prowadzenie fal elektromagnetycznych*, WNT, Warszawa 1966.
7. R. E. Collin, F. J. Zucker, *Antenna Theory*, Part 1, McGraw-Hill, 1969.
8. M. L. Crafford, *Generation of Standard EM Fields Using TEM Transmission Cells*, IEEE Trans., vol. EMC, Nov. 1974, Nr 4, s. 189—195

9. E. Grudziński, H. Trzaska, W. Wadowski, *Sposób wzorcowania mierników natężenia pola elektromagnetycznego*, Patent PRL Nr P-169 960.
10. R. W. P. King, *The Theory of Linear Antennas*, Harvard Univ. Press, 1956.
11. R. Litwin, M. Suski, *Technika mikrofalowa*, WNT, Warszawa 1972.
12. S. C. Moorthy, *Analysis of a Thin Circular Loop Antenna Over a Homogeneous Earth*, BSTJ, July-Aug. 1970, s. 1215—1233.
13. E. I. Niefiedow, A. T. Fiałkowskij, *Połoskowyje linii pieriedaczi*, Moskwa 1974.
14. M. Proksa, *Wytwarzanie wzorcowego pola elektromagnetycznego*, Praca dyplomowa, Politechnika Wrocławska, 1975.
15. W. S. Sobolew, Ju. M. Szkarlet, *Ekrannyje datcziki*, Moskwa 1967.
16. H. Trzaska, *Wytwarzanie wzorcowych pól elektromagnetycznych*, Prace IŁ, 1974, Nr 4, s. 3—28.
17. J. R. Whinnery, H. W. Jamieson, *Equivalent Circuits for Discontinuities in Transmission Lines*, Proc. IRE, vol. 32, Feb. 1944, Nr 2, s. 98—114.
18. I. P. Buszminskij, *Izgotowlenije elementow konstrukcij S.W. Cz.*, Moskwa 1974.

H. TRZASKA

ELECTROMAGNETIC FIELD STANDARD WITH TEM TRANSMISSION LINE

Summary

The main factors limiting the accuracy of the electromagnetic field standard based upon the use of the symmetric transmission line with the TEM mode are presented in the paper. Particular attention is paid to the mutual interraction of the line and the object under test as well as the needed excitation measurements accuracy for different mismatching of the line to the accepted wave impedance standard.

The considerations presented give a basis to the analysis of the electromagnetic field standards based on other types of TEM transmission lines, e.g. nonsymmetric strip line, coaxial line and lines with modes different from TEM, e.g. waveguide.

H. TRZASKA

ETALON D'INTENSITÉ DE CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE METTANT À PROFIT LE TRONÇON DE LA LIGNE TEM

Résumé

Dans l'étude on a présenté les principaux agents limitant l'exactitude de l'étalon d'intensité de champ électromagnétique basé sur l'utilisation du tronçon de la ligne symétrique en bande travaillant avec le champ du genre TEM.

On a prété surtout attention à l'influence réciproque exercée par la ligne sur l'objet examiné et de cet objet sur la ligne, ainsi qu'à la corrélation existant entre l'exactitude de la measure de l'excitation de la ligne et l'adaptation de la ligne à l'impédance d'onde du standard admis.

Les considérations poursuivies établissent les principes de l'analyse des étalons d'intensité de champ électromagnétique basés sur d'autres lignes de transmission TEM, par exemple ligne asymétrique en bande, ligne coaxiales et ligne travaillant avec un autre genre du champ fondamental que celui de TEM.

H. TRZASKA

INTENSITÄTSMODELL EINES ELEKTROMAGNETISCHEN FELDES UNTER AUSNUTZUNG DES LINIENABSCHNITTS TEM

Zusammenfassung

In der Arbeitsbeschreibung wurden die Hauptfaktoren dargestellt, die die Genauigkeit eines Intensitätsmodells des elektromagnetischen Feldes begrenzen, das auf der Ausnutzung einer Strecke einer symmetrischen, mit einer Art von TEM-Feld zusammenarbeitenden Streifenlinie basiert.

Besondere Aufmerksamkeit wurde der gegenseitigen Beeinflussung der Linie auf des darin geprüfte Objekt, und des Objekts auf die Linie geschenkt sowie auf die gegenseitige Abhängigkeit der Meßgenauigkeit bei Linienerregung und der Anpassung der Linie an den angenommenen Standard der Wellenimpendanz.

Die getätigten Erwägungen dienen als Grundlage zur Modellanalyse der Intensität eines elektromagnetischen Feldes, d.h. zur Analyse von Modellen, die sich auf andere also TEM-Transmissionslinien stützen, z.B. auf asymmetrische Streifenlinien, bzw. zentrierte Linien oder auch auf mit anderen Feldgrundarten als TEM zusammenwirkende Linien.

X. TШАСКА

ЭТАЛОН НАПРЯЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОТРЕЗКА ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ ТЕМ

Р е з ю м е

Труд посвящен главным образом анализу факторов ограничивающих точность эталона напряжения электромагнитного поля обоснованного на использовании отрезка линии передачи ТЕМ. Особое внимание обращено на взаимодействие между линией и исследуемым в ней объектом, а также точности измерения возбуждения линии необходимой для различных способов измерений возбуждения и различных коэффициентов отражения на входе и выходе линии. Проведенные рассуждения дают основание для анализа эталонов напряжения электромагнитного поля с использованием линии передачи ТЕМ других видов, как например несимметрической полосковой линии, коаксиальной линии, а даже линий работающих с основным родом поля, отличающимся от ТЕМ — например волноводов.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1978, 24, z. 3 ss. 763—766

XV Zjazd Delegatów Polskiego Towarzystwa Elektrotechniki Teoretycznej i Stosowanej

W dniach 24 i 25 kwietnia 1978 r. odbył się w Szczecinie XV Zjazd Delegatów PTETS połączony z sesją naukową. Poprzednie Zjazdy odbywały się kolejno: w Warszawie (w latach 1962, 63, 64, 65, 66, 67, 68), w Krakowie (1969 r.), w Poznaniu (1970 r.), w Warszawie (1971 r.), we Wrocławiu (1972 r.), w Łodzi (1973 r.), w Katowicach (1974 r.) i w Warszawie (1976 r.) [1], [2].

Na wstępie zebrani uczcili minutową ciszą pamięć zmarłych od ostatniego Zjazdu Członków Towarzystwa: prof. dr Stanisława Bellerta, prof. dr Stefana Seidla, prof. dr Szymona Firkiewicza, doc. dr Wiesława Gabrysia oraz wieloletniego Dyrektora Biura Zarządu Głównego PTETS p. Haliny Rosińskiej.

XV Zjazd Delegatów przyjął sprawozdanie ustępującego Zarządu Głównego za rok 1976 i 1977, zatwierdził plan na rok 1978 oraz dokonał wyboru przewodniczącego, członków Zarządu Głównego i członków Komisji Rewizyjnej na lata 1978—1980.

Na wniosek ustępującego Zarządu Głównego, Zjazd Delegatów nadał przez aklamację prof. Tadeuszowi Cholewickiemu z Politechniki Warszawskiej godność Członka Honorowego PTETS.

W części naukowej referaty przedstawili: doc. dr hab. D. Bem, prof. dr J. Manitius, prof. dr hab. Z. Ciok, prof. dr R. Sikora i prof. dr J. Dziedzic.

Sprawozdanie z działalności PTETS za rok 1976 zostało już opublikowane w komunikacie poprzednim [2].

Sprawozdanie za rok 1977

W roku 1977 odbyły się 4 zebrania organizacyjne w ramach Zarządu Głównego i 45 zebrań organizacyjnych w Oddziałach. Liczba Członków Towarzystwa wzrosła o 19 — do obecnego stanu 515 osób, w tym Gdańsk — 58, Gliwice — 50, Kraków — 53, Łódź — 52, Poznań — 59, Szczecin — 19, Warszawa — 140, Wrocław — 84.

Na 37 zebraniach naukowych, w których uczestniczyło łącznie 806 osób, wygłoszono 47 referatów, w tym w poszczególnych Oddziałach: Gdańsk — 4, Gliwice — 4, Kraków — 5, Łódź — 8, Poznań — 7, Szczecin — 12, Warszawa — 4, Wrocław — 7. Wśród referentów było 9 osób z zagranicy. Tematyka referatów obejmowała zagadnienia elektrodynamiki, teorii obwodów, informatyki, automatyki, elektroniki, maszyn elektrycznych, metod pomiarowych, matematyki stosowanej i in.

W dalszym ciągu w działalności PTETS znaczną rolę odgrywają sympozja i seminaria naukowe, w których coraz bardziej zarysowuje się specjalizacja poszczególnych ośrodków naukowych, utrzymujących przez kilka lat to samo podstawowe hasło konferencji. W roku 1977 były to:

1) Metody matematyczne w elektrotechnice — VI Sympozjum zorganizowane przez Oddział Warszawski od 16 do 20 maja 1977 r. w Zakopanem. Przy udziale 150 uczestników wygłoszono 74 referaty.

2) Zjawiska elektromagnetyczne w obwodach nieliniowych — IV Sympozjum zorganizowane przez Oddział Poznański 25—26 lutego 1977 r., z 12 referatami i 30 uczestnikami.

3) Zastosowanie maszyn matematycznych w elektrotechnice — VII Sympozjum zorganizowane przez Oddział Łódzki wspólnie z Oddziałem Łódzkim Polskiego Towarzystwa Cybernetycznego i Ośrodkiem ETO Politechniki Łódzkiej. Przy udziale 58 osób wygłoszono 32 referaty w sekcjach:
— zastosowanie maszyn analogowych,
— zastosowanie maszyn hybrydowych,
— zastosowanie maszyn cyfrowych.

4) Optymalizacja w zagadnieniach elektrotechniki — Sympozjum zorganizowane przez Oddział Warszawski PTETS 10—13 października 1977 r. w Ameliówce, wspólnie z Wydziałem Elektrotechniki Politechniki Świętokrzyskiej. Udział wzięły 93 osoby. Wygłoszono 16 referatów.

5) Fizyka i elektronika w medycynie — V Seminarium zorganizowane przez Oddział Gdański PTETS 16—17 grudnia 1977 r. Przy udziale 109 uczestników wygłoszono 22 referaty.

6) Symulacja cyfrowa i automatyzacja projektowania — Seminarium zorganizowane przez Oddział Warszawski w dniach 5, 21, 28 listopada i 19 grudnia 1977 r. z udziałem 43 uczestników (4 dwugodzinne wykłady).

W roku 1977 zorganizowano 3 konkursy naukowe.

W konkursie Zarządu Głównego pod hasłem „Metody analizy układów elektrycznych z zastosowaniem maszyn cyfrowych" przyznano nagrody: II stopnia — dr inż. M. Tadeusiewiczowi za pracę „Komputerowa metoda analizy stałopędowych obwodów zawierających diody i tranzystory", II stopnia — dr inż. K. Konkolowi za pracę „Algorytm generacji drzew i dwudrzew kompletnych", III stopnia — dr inż. A. Kamusińskiemu za pracę „Analiza przebiegów prądu, napięć i momentów elektromagnetycznych prądnic małej mocy w procesie ich synchronizacji", III stopnia zespołową — prof. dr hab. W. Paszkowi, mgr inż. B. Drakowi i mgr inż. Z. Ryczko za pracę „Zastosowanie elektronicznej techniki obliczeniowej do analizy sił elektrodynamicznych oraz naprężeń i drgań połączeń czołowych uzwojeń stojanów silników dużej mocy".

W konkursie Oddziału Łódzkiego n.t. „Modelowanie w elektrotechnice i elektronice" nagrody otrzymali: II stopnia — dr inż. Z. Leszczyński, II stopnia zespołową — mgr inż. W. Pewca i mgr inż. M. Rudecki, III stopnia — mgr inż. K. Januszkiewicz, III stopnia zespołową — mgr inż. G. Sobiczewska i mgr inż. K. Komęza, III stopnia

zespołową — dr hab. R. Kozioł, dr inż. A. Ciepila, mgr inż. J. Sawicki, mgr inż. A. Zdrojewski.

W konkursie Oddziału Warszawskiego n.t. „Metody matematyczne w elektrotechnice" nagrody otrzymali: II stopnia zespołowa kol. A. Brahmer-Kasprzycka i kol. W. Zielke; III stopnia zespołową — kol. kol. A. Buyno, K. Jakubiuk, A. Skiba i P. Zimny, III stopnia — kol. A. Wira.

Akcja wydawnicza obejmowała druk materiałów sympozjów i seminariów w Warszawie, Łodzi, Poznaniu oraz druk komunikatu sprawozdawczego [2].

Plan na rok 1978

Przewiduje się dalszy umiarkowany wzrost liczby członków Towarzystwa do 545 osób. Odbędzie się 67 zebrań naukowych oraz następujące sympozja i seminaria:

1) Problemy projektowania obwodów elektrycznych (Gliwice 14—15.9.78 r.),
2) Mikroprocesory i ich zastosowanie (Łódź, maj 1978 r.),
3) Modelowanie elementów półprzewodnikowych i obwodów scalonych (Łódź, 25 września 1978 r.),
4) Zjawiska elektromagnetyczne w obwodach nieliniowych (Poznań, 21—22 kwietnia 1978 r.),
5) Sesja naukowa z okazji XV Zjazdu Delegatów (Szczecin, 24—25 kwietnia 1978 r.),
6) Metody matematyczne w elektrotechnice (Warszawa, 1978 r.),
7) Planowanie i eksploatacja systemów elektroenergetycznych (Wrocław, 28—30 września 1978 r.),
8) Fizyka i elektronika w medycynie (Gdańsk, 1978 r.),
9) Metrologia elektryczna w kriotechnice (Wrocław, 1978 r.).

Wydanie materiałów konferencyjnych drukiem planują Oddziały: w Gdańsku, Gliwicach, Łodzi, Poznaniu, Szczecinie, Warszawie i Wrocławiu.

Konkursy na najlepszą pracę naukową w roku 1978 przeprowadzają:

1) Zarząd Główny n.t. „Zastosowanie metod optymalizacji w elektrotechnice",
2) Oddział w Łodzi n.t. „Mikroprocesory i ich zastosowania".

Ponadto na rok 1979 przewiduje się zorganizowanie ogólnopolskiego konkursu naukowego Zarządu Głównego z zakresu zastosowania modelowania i symulacji w urządzeniach elektrycznych.

Zarząd Główny

XV-ty Zjazd Delegatów wybrał Zarząd Główny na okres do 1980 roku w składzie:

1) Prof. dr hab. Janusz Turowski — Przewodniczący
2) Prof. dr Bolesław Dubicki — Wiceprzewodniczący
3) Doc. dr hab. Stanisław Przeździecki — Wiceprzewodniczący
4) Prof. dr Eugeniusz Koziej — Sekretarz Generalny
5) Prof. dr Józef Żydanowicz — Skarbnik
6) Prof. dr hab. Mirosław Dąbrowski — Z-ca Sekretarza Generaln.
7) Doc. dr hab. Romuald Nowicki — Członek Zarządu Głównego

8) Prof. dr hab. Zygmunt Nowomiejski — Członek Zarządu Głównego
9) Prof. dr Ryszard Sikora — „ „ „ i przewodnicz. O/Szczecin
10) Doc. dr Andrzej Marusak — Z-ca Członka Zarz. Głównego i przewodn. O/Warszawa
11) Doc. dr hab. Marian Piekarski — Z-ca Członka Zarz. Głównego
12) Doc. dr hab. Zbigniew Szczerba — „ „ „ „

W skład Zarządu Głównego wchodzą także Przewodniczący Oddziałów:

13) Prof. dr hab. Jerzy Sawicki — Oddział w Gdańsku
14) Doc. dr Stanisław Szpilka — „ w Gliwicach
15) Doc. dr hab. Józef Machowski — „ w Krakowie
16) Doc. dr hab. Zdzisław Korzec — „ w Łodzi
17) Doc. dr hab. Lech Różański — „ w Poznaniu
18) Prof. dr hab. Wojciech Fuliński — „ we Wrocławiu

Wybrano także Główną Komisję Rewizyjną w składzie:

1) Prof. dr Marian Suski — Przewodniczący
2) Prof. dr Jan Podoski — Z-ca Przewodniczącego
3) Prof. dr Jan Kożuchowski — Członek
4) Doc. dr hab. Józef Machowski — „
5) Doc. dr Henryk Wierzba — Z-ca Członka Kom. Rewiz.
6) Doc. dr Stefan Wojciechowski — „ „ „ „

Kierownictwo Biura Zarządu Głównego objęła od 1-go maja 1978 p. Kazimiera Chmielewska (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, pok. 1724, telefon c. 20-02-11 wewn. 2268).

Bibliografia

1. *XV lat Polskiego Tow. Elektrotechniki Teoret. i Stosowanej; Komunikat 1,* Rozprawy Elektrotechniczne, 1976, **22,** Nr 3, ss. 749—750.
2. *Działalność PTETS w roku 1976 i plan na rok 1977, Komunikat 2,* Rozprawy Elektrotechniczne, 1977, **23,** Nr 2, ss. 479—481.

J. T.

TREŚĆ

A. Zborucki: Analiza układu pojemnościowo-rezystancyjnego mostka podwójnie równoważonego . . . 495
R. Zielonko, A. Królikowski, J. Hoja: Some Conception of Fault Diagnosis in Analog Electronic Circuits . . . 511
M. Stabrowski, S. Tumański: Komputerowa metoda określania właściwości dynamicznych elektrycznych czujników temperatury . . . 525
A. Chwaleba, B. Moeschke: Piezozłączowe przetworniki tunelowe ciśnienia hydrostatycznego . . . 533
H. Percak: Tranzystorowy wzmacniacz prądu stałego o dużym zakresie zmian napięcia wyjściowego . . . 597
S. Urbański: Zbiory linii pierwiastkowych jako narzędzie badania i projektowania dynamiki układów z silnikami prądu stałego . . . 611
W. Mitkowski: Wybrane układy drabinkowe . . . 627
K. Walewski: Analiza strat komutacyjnych w tranzystorowym wzmacniaczu mocy klasy D 639
M. Dąbrowski: Korygowanie błędów drogą dekodowania większościowego . . . 653
M. Zientalski: O pewnej metodzie przyspieszania procesu regulacji poziomu . . . 677
A. Kozłowski: Metody analizy wielodostępowych systemów teleinformatycznych wykorzystujących kanał radiowy w schemacie dostępu niekontrolowanego . . . 689
A. Kusy: Problemy teoretyczne szumów typu $1/f$ . . . 715
H. Trzaska: Wzorzec natężenia pola elektromagnetycznego z wykorzystaniem odcinka linii TEM . . . 745
Komunikat: XV Zjazd Delegatów Polskiego Towarzystwa Elektrotechniki Teoretycznej i Stosowanej . . . 763

CONTENTS — TABLE DES MATIÈRES — INHALT

A. Zborucki: An Analysis of the Capacitance-Resistance Double-Balanced Bridge . . . 508
Analyse du système d'un pont de résistances capacitives au double équilibrage . . . 508
Analyse eines Kapazitäts-Resistanz-Systems bei einer doppelt ausgewuchteten Brücke . . . 508
R. Zielonko, A. Królikowski, J. Hoja: O pewnej koncepcji diagnostyki uszkodzeń w analogowych układach elektronicznych . . . 523
Certaine conception du diagnostic des pannes survenues dans les circuits électroniques analogues . . . 523
Beitrag zur gewissen Konzeption einer Beschädigungsdiagnostik bei analogen elektronischen Systemen . . . 523
M. Stabrowski, S. Tumański: Computer-Aided Analysis of Dynamic Parameters of Electrical Temperature Transducers . . . 531
Méthode de désigner à l'aide d'un calculateur des propriétés dynamiques des détecteurs électriques de température . . . 532
Rechnergestützte Methode für die Bestimmung dynamischer Eigenschaftem von elektrischen Temperaturwandlern . . . 532
A. Chwaleba, B. Moeschke: Piezojunction Tunnel Converters of Hydrostatic Pressure 594
Convertisseurs piézojonctions à mesurer la pression hydrostatique . . . 594
Piezoverbundene Tunnelumsetzer des hydrostatischen Druckes . . . 595
H. Percak: A Great Output-Voltage Range Transistor D. C. Amplifier . . . 610
Amplificateur à courant continu à transistors à large ètendue de variations de tension de sortie 610
Transistor-Gleichstromverstärker mit grossem Ausgangsspannungsbereich . . . 610
S. Urbański: Sets of Root-Loci as Aid to Study and Design of Dynamics of Systems with D.C. Motors . . . 624

Ensembles des lieux des racines servant à l'examen et à la conception de la dynamique des systèmes de moteurs à courant continu . . . 625
Wurzelliniennetze als Untersuchungs- und Projektierungsinstrumente für die Dynamik von Systemen mit Gleichstrommotoren . . . 625
W. Mitkowski: A Class of Ladder Networks . . . 637
Certains systèmes échelles . . . 637
Untersuchungen mit gewählten Leitersystemen . . . 637
K. Walewski: Analysis of Switching Losses in a Class D Transistor Power Amplifier . . . 650
Analyse des pertes de commutation dans l'amplificateur de puissance à transistors de classe D 650
Analyse der Kommutationsverluste im Transistorleistungsverstärker der D-Klasse . . . 651
M. Dąbrowski: Error Correction with the Aid of Majority-Logic Decoders . . . 675
Correction des erreurs à l'aide de décodage majoritaire . . . 675
Fehlerkorrektur mittels Mehrheitsdekodierung . . . 675
M. Zientalski: A Method of Speeding Up the Level Control Process . . . 687
Certaine méthode accélérée du processus de réglage du niveau . . . 687
Beitrag zur Methode des Beschleunigens von Regelungsverläufen . . . 687
A. Kozłowski: Methods of Analysis of Packet Switching Networks Using a Radio Channel in the Random Access Mode . . . 712
Méthode d'analyse des systèmes téléinformatiques multiaccessibles utilisant la voie radioélectrique dans le schéme de l'accès incontrôlé . . . 712
Durchführungsmethoden für Analysen mehrzugänglicher teleinformativer Systeme, die den Rundfunkkanal im Schema eines unkontrollierten Zugangs ausnutzen . . . 712
A. Kusy: Theoretical Problems of $1/f$ Noise . . . 742
Problèmes théoriques des bruits du type $1/f$ . . . 742
Theoretische Probleme des $1/f$-Rauschens . . . 743
H. Trzaska: Electromagnetic Field Standard With TEM Transmission Line . . . 761
Etalon d'intensité de champ électromagnétique mettant à profit le tronçon de la ligne TEM 761
Intensitätsmodell eines elektromagnetischen Feldes unter Ausnutzung des Linienabschnitts TEM 761

СОДЕРЖАНИЕ

А. Зборуцки: Анализ схемы емкостно-резистансного моста с двойным уравновешиванием . . . 509
Р. Зелонко, А. Круликовски, Е. Хоя: О некоторой концепции диагностики повреждений в аналоговых электронных схемах . . . 523
М. Стабровски, С. Туманьски: Машинный расчет динамических параметров электрических преобразователей температуры . . . 532
А. Хвалеба, Б. Моэшке: Преобразователи гидростатического давления на туннельных *p-n* переходах . . . 595
Г. Перцак: Транзисторный усилитель постоянного тока с большим диапазоном изменений выходного напряжения . . . 610
С. Урбаньски: Корневые годографы как основа исследования и проектирования динамики систем с электродвигателями постоянного тока . . . 625
В. Митковски: Некоторые лестничные схемы . . . 637
К. Валевски: Анализ комутативных потерь в транзисторном усилителе мощности типа Д . . . 651
М. Домбровски: Исправление ошибок поэлементным декодированием . . . 676
М. Зентальски: Об одном из методов ускорения процесса регуляции уровня . . . 688
А. Козловски: Методы анализа многодоступных систем радиопередачи данных со свободным доступом к радиоканалу . . . 713
А. Кусы: Теоретические проблемы шумов $1/f$ . . . 743
Х. Тшаска: Эталон напряжения электромагнитного поля с использованием отрезка линии передачи ТЕМ . . . 762

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTROTECHNIKI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XXIV-ZESZYT 4

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1978

RADA REDAKCYJNA

Przewodniczący

prof. dr hab. JANUSZ GROSZKOWSKI — członek rzeczywisty PAN

Członkowie

prof. dr hab. LUDWIK BADIAN — członek korespondent PAN, prof. TADEUSZ CHOLEWICKI — członek korespondent PAN, prof. dr ANDRZEJ JELLONEK, doc. dr ZDZISŁAW KACHLICKI, prof. dr hab. TADEUSZ KACZOREK, prof. dr LEONARD KNOCH, doc. dr ANDRZEJ KUSY, prof. JAN MANITIUS, prof. dr WITOLD NOWICKI, prof. dr WITOLD ROSIŃSKI — członek korespondent PAN, prof. dr JERZY SEIDLER — członek korespondent PAN, prof. dr RYSZARD SIKORA, prof. dr hab. JANUSZ TUROWSKI, prof. dr STEFAN WĘGRZYN — członek rzeczywisty PAN

REDAKCJA

Redaktor naczelny

prof. dr WITOLD NOWICKI

Zastępca redaktora naczelnego

prof. dr hab. TADEUSZ KACZOREK

Sekretarz odpowiedzialny

red. JANINA MATHEISEL

ADRES REDAKCJI

00-661 Warszawa, Plac Jedności Robotniczej 1
Politechnika, Instytut Telekomunikacji, Gmach Elektroniki, pok. 471

Dyżury Redakcji: poniedziałki i czwartki, godz. 11-13
tel. 28 89 81 lub 210 07-737

Telefony domowe: redaktor naczelny – 17 37 03
zastępca redaktora naczelnego – 44 88 34
sekretarz odpowiedzialny – 33 84 97

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 690 (585+105)	Oddano do składania 11.V.1978 r.
Ark. wyd. 17,5 Ark. druk. 13,25+0,75 luźne wkł.	Podpisano do druku w listopadzie 1978 r.
Papier druk. sat. kl. IV, 70 g. 70×100	Druk ukończono w listopadzie 1978 r.
Zamówienie nr 718/78	Cena zł 40.— S-86

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1978, 24, z. 4, ss. 767 — 780

621.391.81
538.56

Zastosowanie metody elementu skończonego do analizy pól elektromagnetycznych w środowiskach nieliniowych o symetrii osiowej

JAN SIKORA (WARSZAWA), STANISŁAW WINCENCIAK (BRWINÓW)

Instytut Elektrotechniki Teoretycznej i Miernictwa Elektrycznego Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 14.4.1977

W pracy przedstawiono analizę strumienia magnetycznego w środowiskach o symetrii osiowej, niejednorodnych z uwzględnieniem nieliniowości materiału. W przypadku cewki z rdzeniem muszlowym wyznaczono, opierając się na zmodyfikowanym potencjale wektorowym **U**, podstawowe zależności opisujące rozkład pola w obszarze ograniczonym przy zadanych warunkach brzegowych.

Część teoretyczna zilustrowana jest przykładem numerycznym, którego wyniki porównano z danymi katalogowymi i pomiarami laboratoryjnymi.

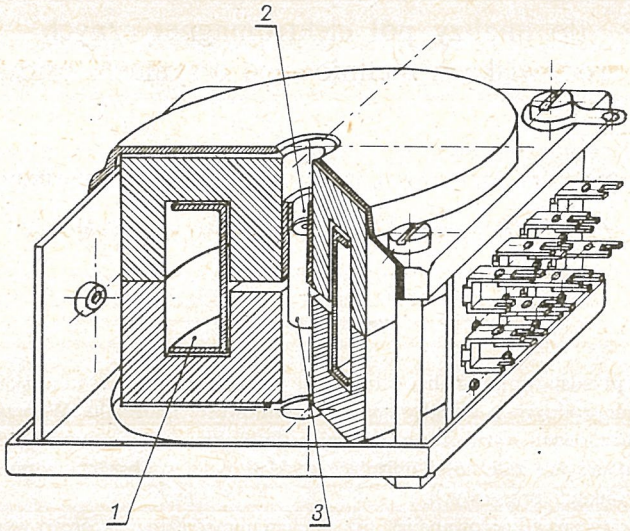
1. WSTĘP

Rozwój maszyn cyfrowych w ostatnich latach umożliwia wprowadzanie do praktyki inżynierskiej nowoczesnych metod numerycznych pozwalających na dokładną analizę pól elektromagnetycznych w maszynach i urządzeniach elektrycznych. Ma to szczególne znaczenie zwłaszcza w tych przypadkach, gdy zawodzą inne znane metody analizy, takie jak np.: modelowanie analogowe przy użyciu papieru elektroprzewodzącego, czy też metody analityczne [3, 4].

Pierwsza z tych metod jest kłopotliwa w przypadku zagadnień o symetrii osiowej, a druga zawodzi w przypadku analizy układów o skomplikowanych kształtach. Dlatego też w takich przypadkach ze szczególnym powodzeniem stosowane są metody numeryczne, do których zaliczyć możemy metodę różnic skończonych [2, 12], czy też metodę elementu skończonego [1, 5, 8, 9, 10, 11, 13].

W pracy przedstawiono zastosowanie metody elementu skończonego do analizy pola magnetycznego w cewce o rdzeniu kubkowym (rys. 1). W celu uproszczenia analizy oraz uzyskania rozkładu strumienia magnetycznego w badanym obiekcie, zastosowano podstawienie modyfikujące magnetyczny potencjał wektorowy **A**. Metodę tę można uogólnić na pola elektromagnetyczne przez wprowadzenie pewnych poprawek do programu obliczeń numerycznych o nazwie MESKO.

Dużą zaletą prezentowanej metody jest możliwość analizy szerokiego wachlarza problemów z odpowiedniej dziedziny przy wykorzystaniu tego samego programu. Zalety te oraz prostota i przejrzystość obliczeń zapewniają metodzie elementu skończonego szerokie wykorzystanie do rozwiązywania konkretnych problemów technicznych. Wyniki uzyskane przy zastosowaniu tej metody cechuje duża dokładność.



Rys. 1.Rdzeń kubkowy z wyposażeniem
1. Karkas, 2. tuleja prowadząca rdzeń 3, 3. rdzeń strojący

2. PODSTAWOWE RÓWNANIA OPISUJĄCE ROZKŁAD POTENCJAŁU WEKTOROWEGO W POLU MAGNETYCZNYM

Obiekt przedstawiony na rys. 1 ma symetrię osiową, dlatego też do analizy przyjmujemy walcowy układ współrzędnych. Rozkład pola magnetycznego wokół cewki z prądem stałym można opisać równaniami Maxwella o postaci

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Korzystając z pojęcia magnetycznego potencjału wektorowego zdefiniowanego zależnością

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

oraz

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \tag{2}$$

gdzie

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

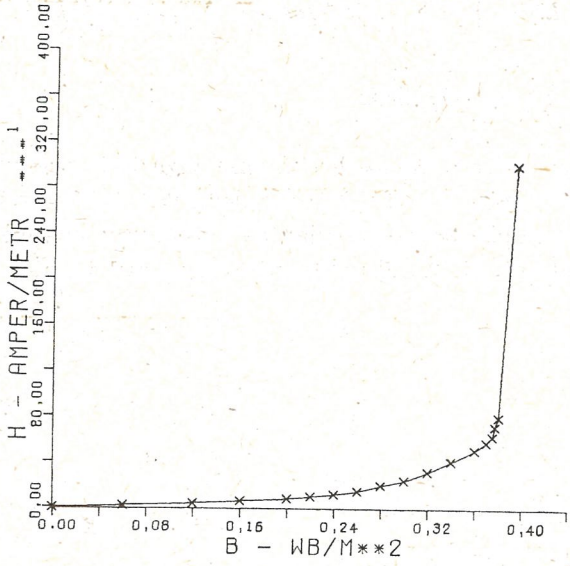
równanie Maxwella można przekształcić do postaci

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{\mu}\frac{\partial A_\Theta}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_\Theta}{\partial z}\right) - \frac{1}{\mu}\frac{A_\Theta}{r^2} = -J_\Theta, \tag{3}$$

gdzie $\mu(P, |\mathbf{B}|)$ — przenikalność magnetyczna jest funkcją punktu i modułu indukcji (rys. 2).

Równanie (3) jest równaniem skalarnym, w którym $\mathbf{A} = [0, A_\Theta, 0]$ oraz $\mathbf{J} = [0, J_\Theta, 0]$. Celem uproszczenia zapisu w dalszych rozważaniach pominiemy indeks Θ. Ostatecznie równanie (3) można przedstawić w następującej formie

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{\mu}\frac{\partial A}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{r}{\mu}\frac{\partial A}{\partial z}\right)-\frac{1}{\mu}\frac{A}{r}=-Jr. \tag{4}$$



Rys. 2. Krzywa magnesowania materiału Ferroxyd 1001

Równanie (4) opisuje całą klasę zagadnień nieliniowych niejednorodnych z symetrią osiową

Do rozwiązania tego zagadnienia zastosujemy metodę elementów skończonych [1, 5, 8, 9, 10, 11, 13].

3. METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Aby móc zastosować technikę elementu skończonego należy zadanie różniczkowe zastąpić zadaniem wariacyjnym. Na mocy twierdzenia Eulera wiadomo, że funkcja spełniająca równanie (4) z jednorodnymi warunkami brzegowymi typu Dirichleta minimalizuje funkcjonał energetyczny o postaci

$$\varkappa(A)=\int_V \frac{1}{2}\left[\frac{r}{\mu}\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)^2+\frac{r}{\mu}\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{\mu}\frac{A^2}{r}+2A\frac{\partial A}{\partial r}\frac{1}{\mu}-2JAr\right]dr\,dz. \tag{5}$$

Stosując zwykłe postępowanie w metodzie elementu skończonego [1, 8, 9, 13] stosowny układ równań przyjmie postać

$$([K]+[L])\{A\}=\{F\}, \tag{6}$$

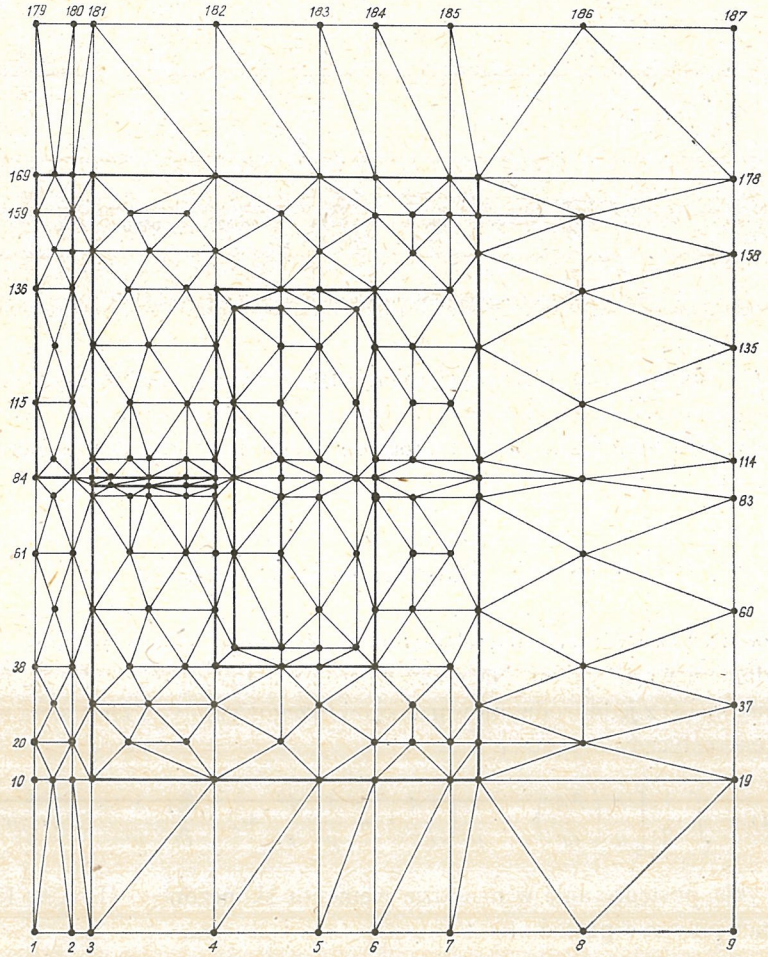
gdzie dla pojedynczych elementów odpowiednie składniki poszczególnych macierzy wyrażają się wzorami

$$K_{ij}^e = \int_V r\left[\frac{\partial N_i}{\partial r}\frac{1}{\mu}\frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{1}{\mu}\frac{\partial N_j}{\partial z}\right]dr\,dz, \tag{7}$$

$$L_{ij}^e = \int_V r\frac{1}{\mu}\frac{1}{r^2}N_i N_j\,dr\,dz + \int_V \frac{1}{\mu}N_i\frac{\partial N_j}{\partial r}\,dr\,dz, \tag{8}$$

$$F_i^e = \int_V rJN_i\,dr\,dz. \tag{9}$$

O ile wyznaczenie macierzy $[K]$ na drodze analitycznej nie przedstawia trudności (pochodna funkcji kształtu jest wartością stałą dla elementów trójkątnych przy aproksymacji wektora **A** wielomianem pierwszego stopnia), to wyznaczenie macierzy $[L]$ i $\{F\}$ staje się kłopotliwe. Wielu autorów [1, 8, 13] poleca stosowanie całkowania numerycznego, które



Rys. 3. Podział obszaru na 338 elementów trójkątnych o 187 węzłach

jest ekonomiczne i daje zadawalającą dokładność. Łatwo zauważyć, że tych kłopotliwych obliczeń można uniknąć, wprowadzając do równania (4) nową zmienną U [6] określoną zależnością

$$U = Ar, \tag{10}$$

gdzie:

A = składowa Θ potencjału wektorowego,

U = zmodyfikowany potencjał wektorowy.

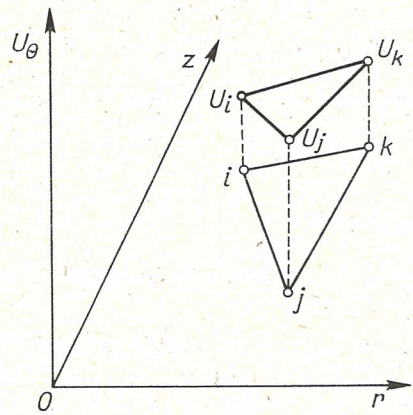
Podstawiając zależność (10) do równania (4) otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\mu r}\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu r}\frac{\partial U}{\partial z}\right) = -J. \tag{11}$$

Funkcja U spełniająca równanie (11) przy jednorodnych warunkach brzegowych typu Dirichleta minimalizuje jednocześnie funkcjonał energetyczny o postaci [6]:

$$\varkappa(U) = \int_V \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mu r}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{\mu r}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 - 2JU\right] dv. \tag{12}$$

Wykorzystując symetrię względem kąta Θ zagadnienie opisane równaniem (11) rozpatrujemy w płaszczyźnie r, z jako zagadnienie płaskie. Ograniczamy obszar i nakładamy na jego brzegi jednorodne warunki typu Dirichleta.



Rys. 4. Rozkład zmodyfikowanego potencjału wektorowego U nad obszarem trójkąta

Podział obszaru na elementy trójkątne przedstawiono na rys. 3. Przyjmując liniową aproksymację zmodyfikowanego potencjału wektorowego U, wewnątrz każdego z elementów (rys. 4) możemy napisać

$$U^e = [N_i N_j N_k][U_i U_j U_k]^T, \tag{13}$$

gdzie:

$N_m = (a_m + b_m r + c_m z)/2\Delta$,

$m = i, j, k$,

Δ = pole trójkąta

$$\Delta = \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_k & z_k \end{bmatrix}, \tag{14}$$

oraz

$$\begin{bmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_k & z_k \end{bmatrix}^{-1}. \tag{15}$$

W celu wyznaczenia minimum funkcjonału energetycznego dla każdego z elementów obszaru, należy obliczyć pochodną cząstkową funkcjonału względem wartości zmodyfikowanego potencjału wektorowego w poszczególnych węzłach elementu (11). Przyrównując do zera i sumując po wszystkich trójkątach rozpatrywanego obszaru otrzymamy następujący układ równań

$$\sum_{e=1}^{n} \left\{ \frac{\partial \varkappa}{\partial U_i} \right\} = \{0\}. \tag{16}$$

Równanie (16) można przedstawić w postaci macierzowej

$$[K]\{U\} = \{F\}, \tag{17}$$

gdzie elementy i, j macierzy $[K]$ i $\{F\}$ określone są w sposób następujący

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^{n} K_{ij}^{e}, \quad F_i = \sum_{e=1}^{n} F_i^e,$$

a poszczególne składniki sumy wyrażają się wzorami

$$K_{ij}^{e} = \int_V \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{1}{\mu r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{1}{\mu r} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dr\, dz, \tag{18}$$

$$F_i^e = \int_V J N_i\, dr\, dz. \tag{19}$$

Stosując regułę Gaussa-Legendre'a całkowania numerycznego, łatwo można obliczyć wyrażenia (18) i (19).

Na podstawie przedstawionych rozważań widać, że dzięki podstawieniu (10) uzyskaliśmy znaczne uproszczenie wyrażeń (7), (8) i (9).

4. WYZNACZENIE WEKTORA INDUKCJI MAGNETYCZNEJ

Magnetyczny potencjał wektorowy **A** i zmodyfikowany potencjał wektorowy **U** są umyślonymi wielkościami, które są nieprzydatne dla projektantów urządzeń magnetycznych. Stąd konieczność wyznaczenia wektora indukcji magnetycznej. Na podstawie zależności (2) można napisać

$$\mathbf{B} = -\frac{\partial A}{\partial z}\mathbf{1}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA)\mathbf{1}_z, \tag{20}$$

lub posługując się zmodyfikowanym potencjałem wektorowym **U**

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{1}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{1}_z. \tag{21}$$

Podstawiając zależność (13) do równania (21) otrzymamy

$$B_r = -\frac{1}{r^e}\frac{\partial}{\partial z}\left([N_iN_jN_k][U_iU_jU_k]^T\right) = -\frac{1}{r^e}[c_ic_jc_k][U_iU_jU_k]^T, \tag{22}$$

$$B_z = +\frac{1}{r^e}\frac{\partial}{\partial r}\left([N_iN_jN_k][U_iU_jU_k]^T\right) = \frac{1}{r^e}[b_ib_jb_k][U_iU_jU_k]^T, \tag{23}$$

gdzie

$$r^e = \frac{1}{3}(r_i+r_j+r_k).$$

Oznacza to, że wyznaczamy składowe wektora indukcji dla środka ciężkości elementu trójkątnego.

5. WYZNACZENIE ROZKŁADU STRUMIENIA MAGNETYCZNEGO

W prostokątnym układzie współrzędnych linie równego potencjału wektorowego są jednocześnie liniami strumienia magnetycznego [5, 8]. Natomiast w analizowanym przypadku tak nie jest. Posługując się równaniem linii sił pola w postaci różniczkowej

$$\mathbf{B}\times d\mathbf{l} = \mathbf{0}, \tag{24}$$

można wykazać, że słuszna jest zależność

$$A_\Theta r = \text{const}. \tag{25}$$

Korzystając z zależności (10) otrzymamy

$$U = \text{const}. \tag{26}$$

Zatem podstawienie (10) pełni rolę nie tylko czynnika upraszczającego tok obliczeń, ale przede wszystkim umożliwia wykreślenie rozkładu strumienia magnetycznego w urządzeniach o symetrii osiowej, gdyż rozkład linii równego zmodyfikowanego potencjału wektorowego pokrywa się z liniami sił pola magnetycznego.

6. METODA KONTROLI POPRAWNOŚCI OBLICZEŃ

W celu skontrolowania poprawności obliczeń numerycznych, co ma szczególnie istotne znaczenie w zagadnieniach nieliniowych, wyznaczono indukcyjność układu

$$L \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\Psi}{I}, \tag{27}$$

gdzie:

Ψ — strumień skojarzony,

I — prąd w cewce.

Energia zgromadzona w układzie wynosi

$$E = \frac{LI^2}{2};$$

stąd

$$L = \frac{2E}{I^2} = \frac{2Ez}{J^2S^2} = z\frac{\int_V |\mathbf{B}|^2 dv}{\mu J^2 S^2} \approx z\sum_{e=1}^{n} \frac{|\mathbf{B}|^2 r^e \Delta^e}{\mu^e J^2 S^2}, \tag{28}$$

gdzie:

$$|\mathbf{B}|^2 = B_r^2 + B_z^2,$$

S — pole przekroju poprzecznego cewki,

z — liczba zwojów

Zależność (28) jest podstawą do globalnej oceny dokładności rozwiązania postawionego zagadnienia. Wpływ na dokładność ma cały szereg czynników począwszy od przyjęcia pewnych założeń upraszczających a skończywszy na samej precyzji rozwiązania równań algebraicznych nieliniowych.

7. PRZYKŁAD NUMERYCZNY

Rdzenie kubkowe służą do konstruowania cewek o regulowanej indukcyjności. Regulację indukcyjności uzyskuje się przez obroty walcowego rdzenia strojącego *3* z rys. 1. Rdzeń wykonany jest z materiału ferromagnetycznego o nazwie Ferroxyd 1001, którego własności przedstawione są na rys. 2. Omawiane rdzenie znajdują szerokie zastosowanie w technice telekomunikacyjnej, a w szczególności w urządzeniach telegrafii i telefonii wielokrotnej.

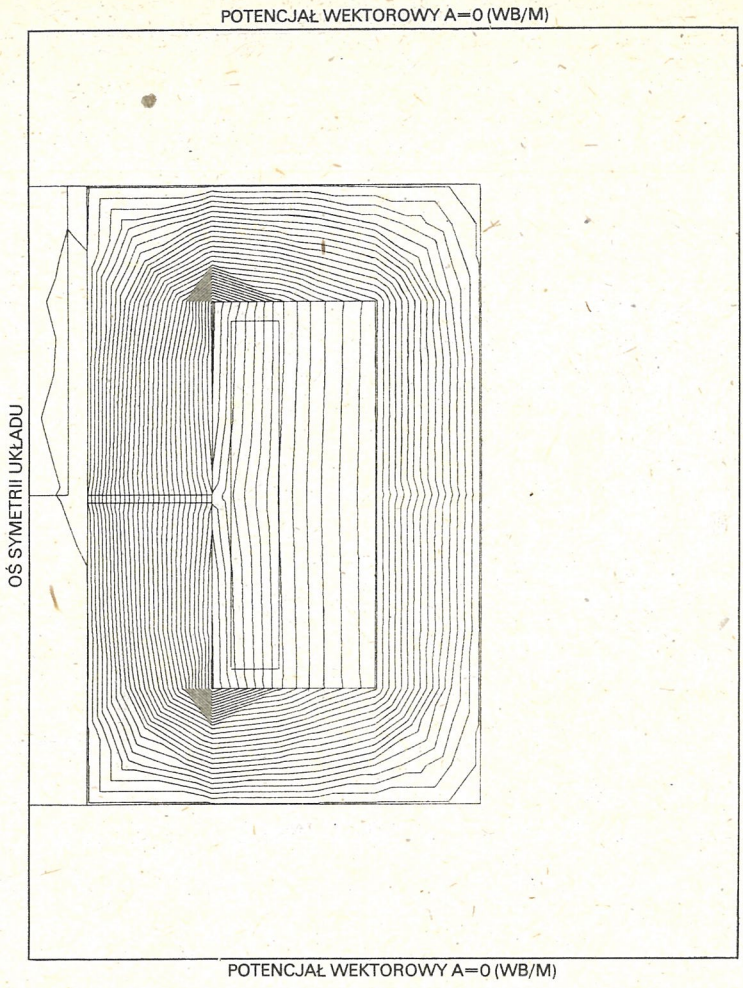
Przedstawioną metodę zastosowano do analizy rozkładu magnetycznego potencjału wektorowego **A** oraz strumienia magnetycznego dla rdzenia kubkowego o szczelinie powietrznej $\delta = 0{,}4$ mm i uzwojeniu zawierającym 1000 zwojów. W przypadku liniowym dla wektora gęstości prądu $J = 1$ A/mm^2 rozkład potencjału wektorowego **A** przedstawiony jest na rys. 5. Wartość indukcyjności obliczoną na podstawie wzoru (28) porównano z danymi katalogowymi (rys. 6).

Zgodność obliczeń numerycznych z danymi katalogowymi i pomiarami laboratoryjnymi jest bardzo dobra, błąd zawiera się w granicach $\pm 5\%$. Dzięki tak dużej dokładności obliczeń możliwe jest wyznaczenie zmian indukcyjności w zależności od położenia rdzenia strojącego 3 z rys. 1. Rozkład magnetycznego potencjału wektorowego i strumienia magnetycznego dla środkowego położenia rdzenia przedstawiono na rys. 7a i 7b.

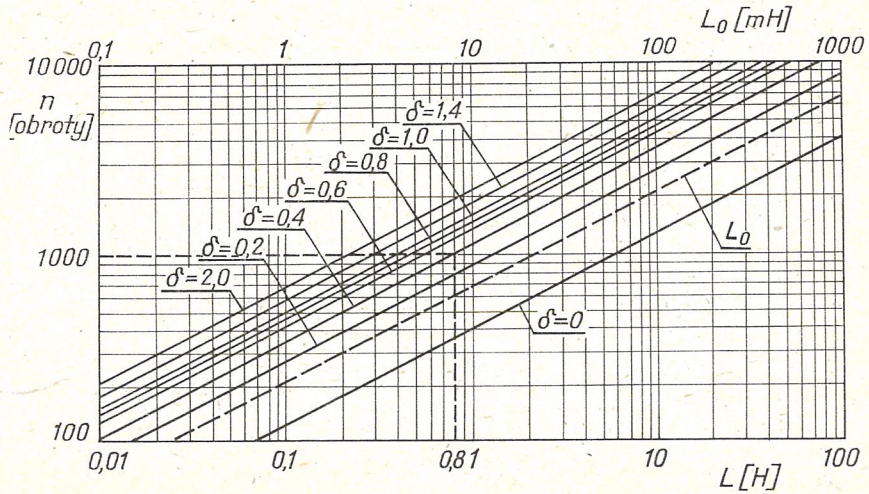
Wykres procentowej zmiany indukcyjności w funkcji obrotów rdzenia strojącego przedstawiono na rys. 8. Wykres ten jest jeszcze jednym potwierdzeniem dużej dokładności obliczeń mimo stosunkowo niewielkiej liczby elementów skończonych, a co za tym idzie i węzłów. W miarę wzrostu wartości wektora gęstości prądu wzrastać będzie indukcja i zagadnienie z typowo liniowego przekształci się w nieliniowe.

Stosując algorytm Newtona-Raphsona otrzymano zadowalającą zbieżność rozwiązania już po 12 iteracjach.

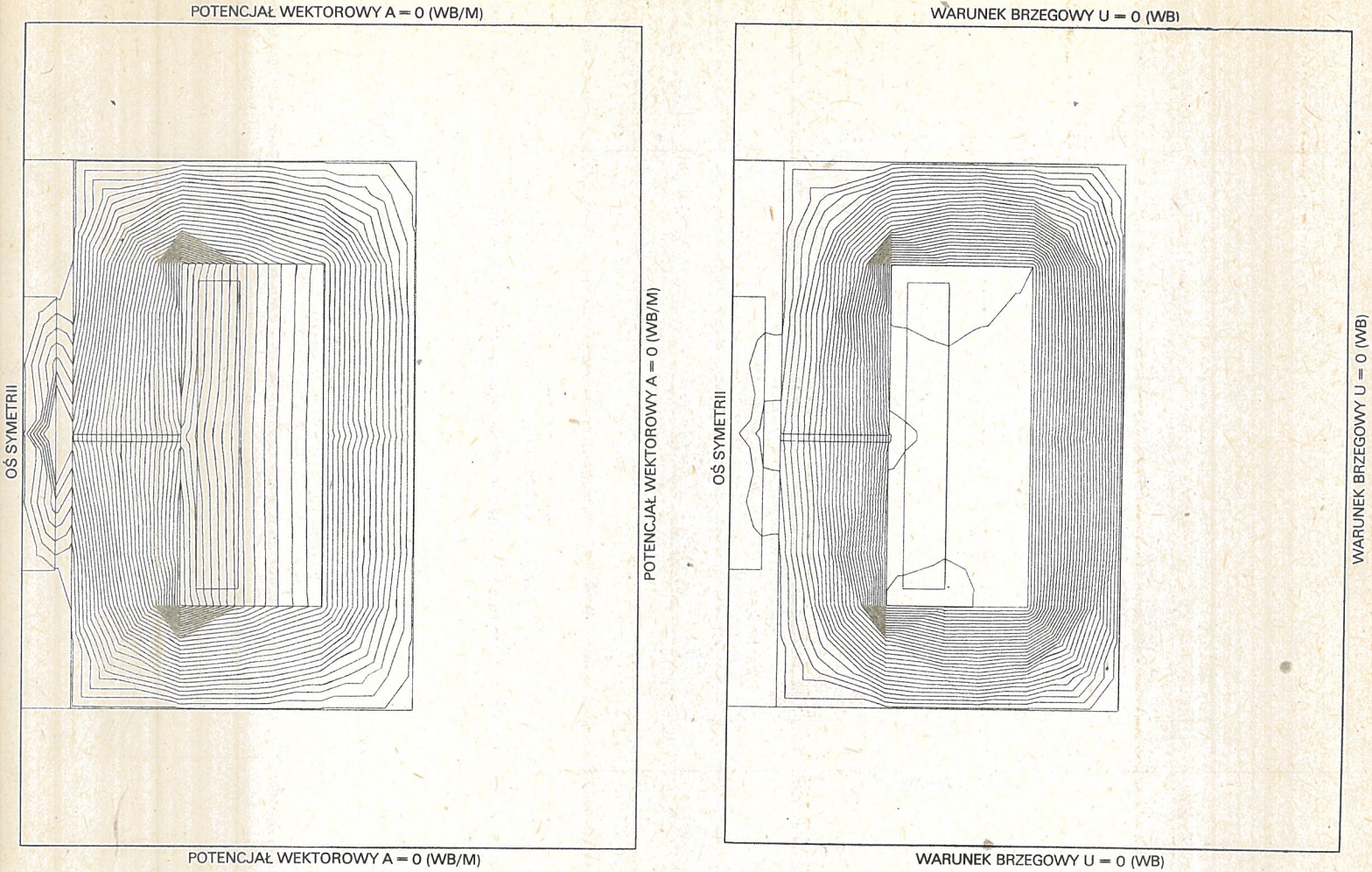
Rozkład potencjału wektorowego i strumienia magnetycznego dla wektora gęstości prądu $J = 2$ A/mm^2 przedstawiono na rys. 9a i 9b.



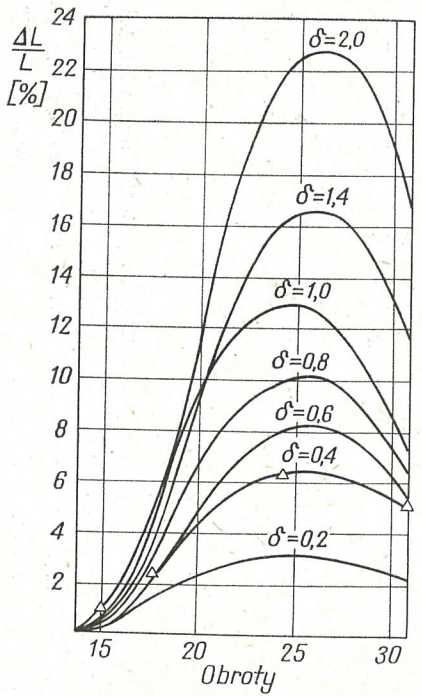
Rys. 5. Rozkład potencjału wektorowego A dla $J = 1$ A/mm²



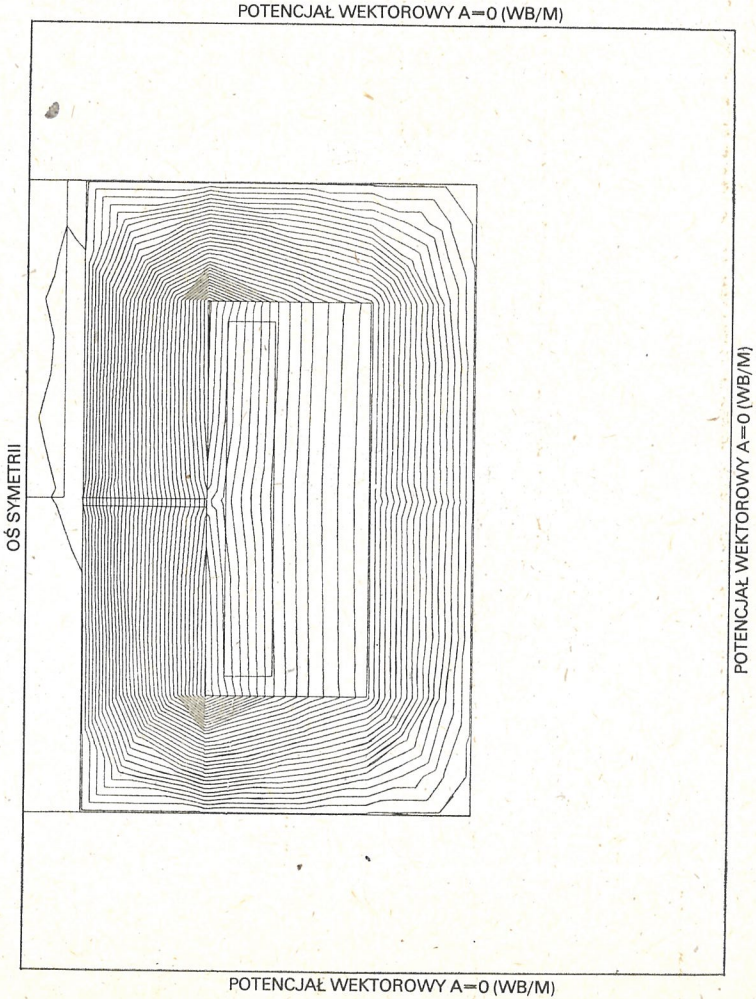
Rys. 6. Wartość indukcyjności przy danej szczelinie powietrznej i liczbie zwojów uzwojenia



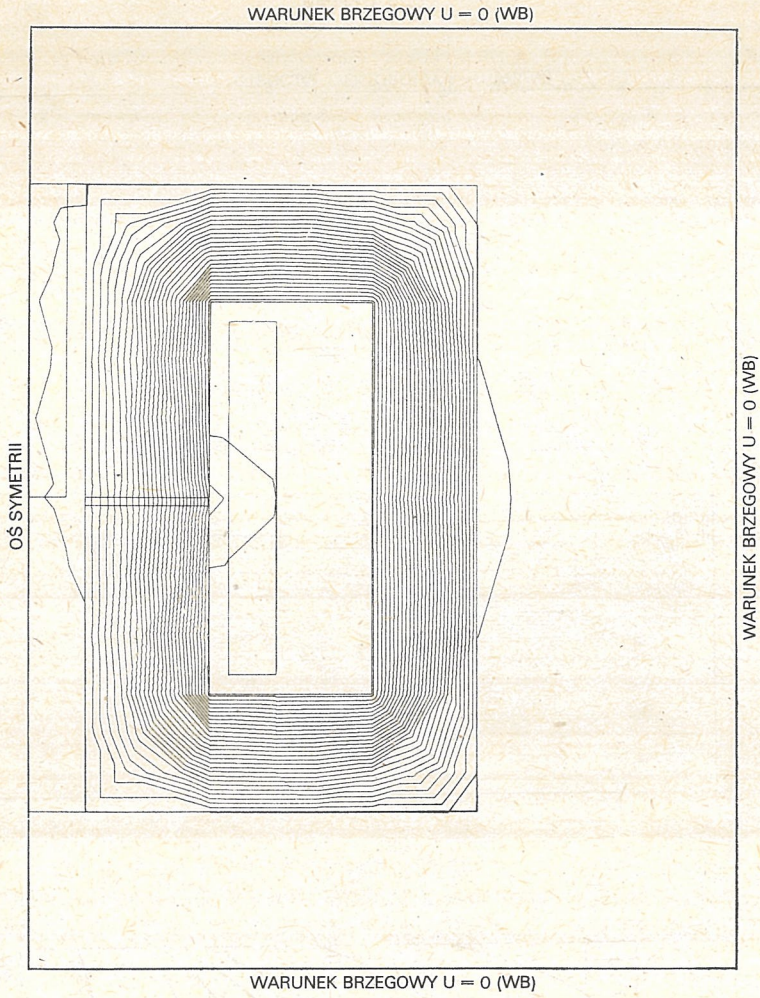
Rys. 7. Rozkłady: a) potencjału wektorowego A dla środkowego położenia rdzenia strojącego, b) strumienia magnetycznego dla środkowego położenia rdzenia strojącego



Rys. 8. Charakterystyka strojenia cewek dla różnych długości szczeliny powietrznej w funkcji obrotów



Rys. 9. Rozkłady: a) potencjału wektorowego A dla $J = 2$ A/mm^2



Rys. 9. Rozkłady: b) strumienia magnetycznego $J = 2$ A/mm²

KONKLUZJA

Przedstawiona metoda i wyniki obliczeń zarówno zagadnień liniowych jak i nieliniowych pozwalają stwierdzić, że metoda jest niezwykle operatywna i przy niewielkim nakładzie pracy pozwala przeliczyć cały szereg wariantów postawionego zagadnienia, jak np. zmiana położenia rdzenia strojeniowego lub zmiana wypełnienia okna rdzenia itp. Dlatego też metoda ta jest szczególnie przydatna do optymalizacji urządzeń elektromagnetycznych.

Autorzy niniejszej pracy gotowi są udostępnić zainteresowanym osobom program obliczeń numerycznych.

LITERATURA

1. J. Donea, S. Giuliani, A. Philipe, *Finite elements in the solution of electromagnetic induction problems*, Int. J. Num. Meth. Eng., 1974.
2. E. Erdelyi, E. Fuchs, *Nonlinear magnetic field analysis of DC machines*, Part I, Part II, IEEE Transactions on PAS, No 7, 1970.
3. I. Kuzora, *Modele elektryczne i ich zastosowanie do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych*, Zbiór Prac Nr 16, Wyższa Szkoła Marynarki Wojennej im. Bohaterów Westerplatte, 1966.
4. I. Kuzora, *Analiza wymiarowa modelu dla równania Laplace'a z drugim i trzecim warunkiem brzegowym*, Archiwum Hydrotechniki, 1969.
5. F. Melkes, *Vypočet rovinného magnetickécho pole za použití trojíhelnikových elementů*, Technika elektrickych strojů teoreticke čislo, 1974.
6. J. Purczyński, M. Gramz, R. Sikora, *Wariacyjna metoda obliczania indukcyjności rdzeni kubkowych*, Archiwum Elektrotechniki, 1974.
7. A. Ralston, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, 1971.
8. P. Silvester, M.V.K. Chari, *Finite element solution of saturable magnetic field problems*, IEEE Transactions on PAS, 1970.
9. P. Silvester, A. Konrad, *Analysis of Transformer Leakage Phenomena by High-Order Finite Elements*, IEEE Transactions on PAS, 1973.
10. J. Sikora, St. Wincenciak, *Metoda elementu skończonego w zastosowaniu do analizy pól elektrycznych stacjonarnych w ośrodkach niejednorodnych i anizotropowych*, Archiwum Elektrotechniki, 1976.
11. J. Sikora, St. Wincenciak, *Analiza pól potencjalnych w ośrodkach anizotropowych metodą elementu skończonego*, Sympozjum PTETiS — „Analiza i Wykorzystanie Pól", Szczecin, 19—21 czerwiec 1975.
12. A.M. Winslow, *Numerical solution of the quasilinear Poissons equation in a non uniform triangle mesh*, J. Comp. Phisics, 1967.
13. O.C. Zienkiewicz, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, 1972.

J. SIKORA, S. WINCENCIAK

APPLICATION OF FINITE ELEMENT METHOD TO ANALYSIS OF ELECTROMAGNETIC FIELDS IN NONLINEAR MEDIA WITH AXIS SYMMETRY

Summary

The analysis of the magnetic flux in a nonhomogeneous, nonlinear medium with axis symmetry is given in this paper. Through the application of the modified vector potential **U**, the expressions describing the field in a finite area with given boundary values for the coil with the ferrite core are obtained. The theoretical considerations are illustrated with a numerical example, whose results are compared with the catalog data and experimental measurements.

J. SIKORA, S. WINCENCIAK

APPLICATION DE LA MÉTHODE D'ÉLÉMENT FINI À L'ANALYSE DES CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LES MILIEUX NON LINÉAIRES À SYMÉTRIE AXIALE

Résumé

Dans cet article on a donné les résultats de l'analyse numérique de la répartition du flux magnétique dans un milieu hétérogène à symétrie axiale.

Dans le cas d'une bobine à noyau gobelet on a déterminé, à partir du potentiel vectoriel modifié **U**,

les relations fondamentales d'écrivant la répartition du champ dans une région limitée pour les conditions aux limites désirées.

La partie théorique de l'article est illustrée par un exemple numérique et les résultats obtenus sont comparés avec ceux qui sont présentés dans un catalogue de la maison et les résultats expérimentaux.

J. SIKORA, S. WINCENCIAK

ANWENDUNG DER METHODE EINES BEENDETEN ELEMENTES ZUR ANALYSE ELEKTROMAGNETISCHER FELDER IN UNLINEAREN ACHSENSYMETRISCHEN MEDIEN

Zusammenfassung

In diesem Artikel wurde eine Analyse des magnetischen Stromes in achsensymetrischen, nicht homogenen Medien unter Berücksichtigung der Materialunlinearität durchgeführt.

In Anlehnung an das modifizierte Vektorpotential **U** wurden die Hauptabhängigkeiten für ein Feld im begrenzten Raum unter Berücksichtigung der Randbedingungen für eine Muschelkernspule gewonnen.

Die theoretischen Erwägungen wurden mittels eines Zahlenbeispieles bekräftigt. Die Ergebnisse wurden mit Katalogdaten und Labormessungen verglichen.

Я. СИКОРА, С. ВИНЦЕНЦИАК

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К АНАЛИЗУ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Резюме

Представлен анализ магнитного потока в неоднородной среде с осевой симметрией с учетом нелинейности материала.

Для катушки с чашечным сердечником, при применении модифицированного векторного потенциала **U** определены основные зависимости описывающие распределение поля в ограниченном пространстве при определенных краевых условиях. Теоретическая часть иллюстрирована численным примером, результаты которого были сравнены с данными из каталога и лабораторными измерениями.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1978, 24, z. 4, ss. 781 — 794

621.3—83

Metoda aproksymacji funkcji odwzorowującej nasycenie maszyn elektrycznych

WACŁAW MATULEWICZ (SOPOT), TADEUSZ SYLWANOWICZ (RUMIA)

Instytut Elektrotechniki Morskiej i Przemysłowej Politechniki Gdańskiej

Otrzymano 4.7.1977

W pracy przedstawiono sposoby uzyskiwania funkcji odwzorowującej nasycenie magnetyczne na podstawie charakterystyki biegu jałowego. Następnie przedstawiono algorytm umożliwiający wykorzystanie maszyny cyfrowej do znalezienia parametrów funkcji $\zeta = AU_g^{k/m} + B$ aproksymującej funkcję nasycenia.

1. WSTĘP

Badania stanów nieustalonych maszyn elektrycznych za pomocą maszyn cyfrowych prowadzone są przy założeniu liniowości obwodu magnetycznego. Ze wzlgędu na rodzaj rozwiązywanych zagadnień w wielu przypadkach pominięcie zjawiska nasycenia obwodu magnetycznego jest niedopuszczalne. W uproszczeniu, uwzględnienie tego zjawiska dokonuje się przyjmując do obliczeń wartości nasycone reaktancji.

Dokładną metodą byłoby uwzględnienie zmian reaktancji za pomocą zmiennego współczynnika nasycenia zależnego od wielkości i charakteru obciążenia. Ten sposób jest jednak trudny do zrealizowania ze względu na brak charakterystyk obciążenia maszyny dla różnych współczynników mocy lub różnych wielkości prądu obciążenia.

Powyższe trudności występują szczególnie przy modelowaniu maszyny synchronicznej ze względu na oddziaływanie twornika w obu osiach maszyny.

Przybliżonym, lecz dostatecznie dokładnym sposobem uwzględnienia nieliniowości obwodu magnetycznego dla większości przypadków stanów nieustalonych jest wprowadzenie funkcji odwzorowującej nasycenie do algorytmu obliczeń.

Poniżej przedstawiona została metoda aproksymacji funkcji odwzorowującej nasycenie, na podstawie kilku znanych punktów charakterystyki biegu jałowego, za pomocą maszyny cyfrowej.

Aproksymacja polega na wyznaczeniu takiej funkcji $f(x)$, by dla danej funkcji $F(x)$ można było znaleźć dowolnie małą dodatnią liczbę ε, by słuszna była nierówność

$$|F(x)-f(x)| < \varepsilon.$$

Aproksymacja obejmuje dwa zagadnienia:

a) określenie klasy funkcji aproksymującej,

b) określenie kryteriów aproksymacji.

Wybór klasy funkcji aproksymującej zależy od:
— przebiegu funkcji aproksymowanej,
— zadania jakie ma spełniać funkcja aproksymująca,
— pracochłonności samego procesu aproksymacji.

Najczęściej spotykane klasy funkcji aproksymacyjnej:

— wielomian $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$,

— funkcja wykładnicza typu $f(x) = \sum_{i=0}^{n} A_i e^{a_i x}$,

— funkcja wymierna $f(x) = \dfrac{\sum_{i=0}^{n} b_i x_i}{\sum_{i=0}^{m} b_i x^i}$,

— wielomian trygonometryczny $f(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i \cos \omega_i x + b_i \sin \omega_i x)$.

Wśród kryteriów i metod aproksymacji najczęściej stosuje się:
— aproksymację przez rozwinięcie w szereg i wzięcie pod uwagę skończonej liczby wyrazów tego szeregu,
— aproksymację według minimum średniego błędu kwadratowego,
— aproksymację według najmniejszych odchyleń.

Ze względu na prostotę algorytmu oraz dobrą dokładność do rozwiązania zagadnienia aproksymacji funkcji odwzorowującej nasycenie, posłużono się kryterium aproksymacyjnym według minimum średniego błędu kwadratowego oraz funkcją wykładniczą klasy $y = Ax^{k/n} + B$.

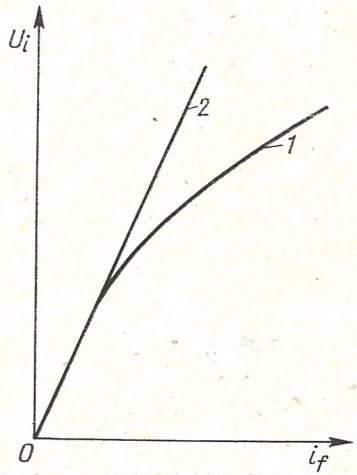
2. WAŻNIEJSZE OZNACZENIA

i_f — prąd magnesujący,
U_i — napięcie indukowane,
η — funkcja odwzorowująca nasycenie w maszynie prądu stałego,
ζ — funkcja odwzorowująca nasycenie w maszynie synchronicznej,
Ψ — strumień skojarzony,
K, M — wartości wykładnika funkcji postaci (2),
KL — kod realizacji,
KS — współczynnik skali,
L — całkowita ilość wartości (X_L, Y_L) przewidziana do wydrukowania,
N — ilość wartości (X_N, Y_N) w danych wejściowych.

3. SPOSOBY WYZNACZANIA FUNKCJI ODWZOROWUJĄCEJ NASYCENIE

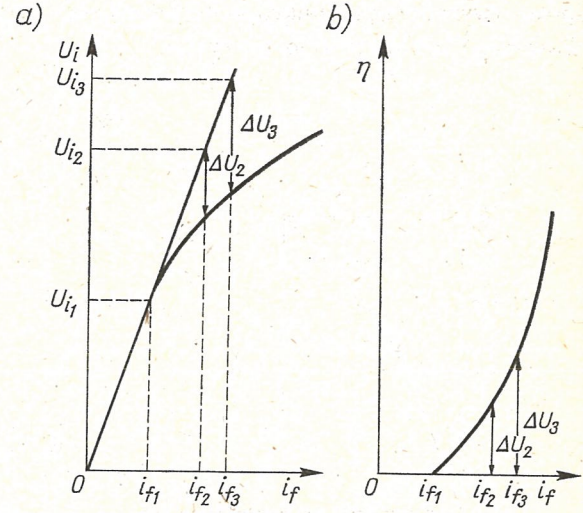
Na rys. 1 przedstawiona została charakterystyka biegu jałowego maszyny elektrycznej w postaci zależności napięcia indukowanego od prądu magnesującego (krzywa *1*). Krzywa *2* przedstawia charakterystykę szczeliny powietrznej.

W zależności od rodzaju modelowanej maszyny elektrycznej istnieją trzy metody wprowadzania funkcji odwzorowującej nasycenie do modelu matematycznego. Przy modelowaniu maszyn obcowzbudnych prądu stałego wprowadza się funkcję odwzorowującą nasycenie jako dodatkową wartość napięcia. Zasadę wyznaczania wartości napięć indukowanych przedstawiono na rys. 2a. Funkcję odwzorowującą nasycenie w funkcji



Rys. 1. Krzywa magnesowania maszyny elektrycznej

1 — charakterystyka rzeczywista, *2* — charakterystyka szczeliny powietrzne j



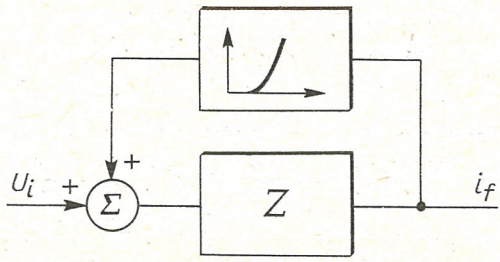
Rys. 2. Sposób wyznaczania funkcji nasycenia maszyny prądu stałego

a) metoda uzyskiwania funkcji odwzorowującej nasycenie, b) funkcja odwzorowująca nasycenie $\eta = f(i_f)$

prądu magnesującego $\eta = f(i_f)$ przedstawiono na rys. 2b. Sposób wprowadzenia uzyskanej funkcji korekcyjnej do schematu strukturalnego maszyny elektrycznej przedstawiono na rys. 3 (przedstawiony został jedynie fragment schematu strukturalnego, w którym realizowane jest wprowadzenie funkcji odwzorowującej nasycenie magnetyczne).

Modelowanie przeprowadzone jest w jednostkach względnych, w takich też jednostkach wyznaczona jest funkcja odwzorowująca nasycenie.

W przypadku maszyny synchronicznej zjawisko nasycenia obwodu magnetycznego traktuje się jako zjawisko występujące jedynie w osi podłużnej maszyny. Jednak w prze-

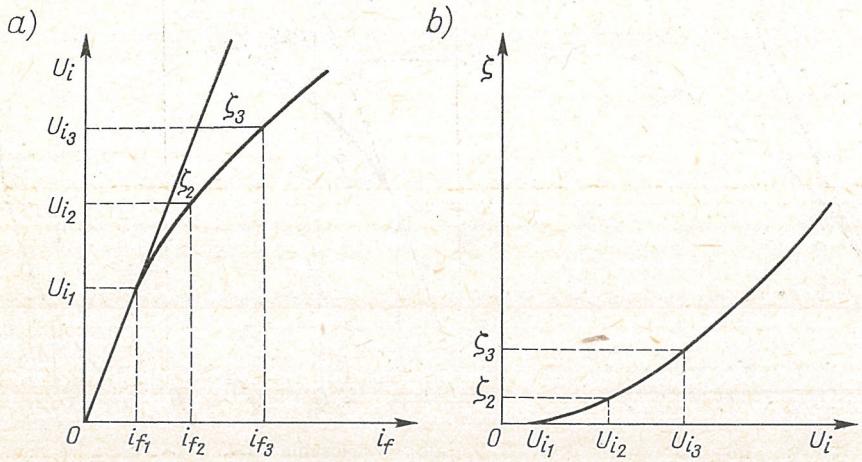


Rys. 3. Wprowadzenie funkcji odwzorowującej nasycenie do schematu strukturalnego maszyny prądu stałego

ciwieństwie do maszyn prądu stałego, uzależnia się je od strumienia w szczelinie powietrznej maszyny, jako wyniku działania strumieni w obu osiach, podłużnej i poprzecznej.

Funkcja odwzorowująca nasycenie $\zeta = f(U_i)$ uzyskiwana jest również na podstawie charakterystyki biegu jałowego, jednak w tym sposobie dla określonych wartości strumienia wzbudzenia (któremu odpowiada napięcie indukowane) znajdowany jest dodatkowy prąd wzbudzenia.

Sposób wyznaczania funkcji odwzorowującej nasycenie i jej zależność od napięcia indukowanego przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Sposób wyznaczania funkcji nasycenia maszyny synchronicznej
a) metoda uzyskiwania funkcji odwzorowującej nasycenie, b) funkcja odwzorowująca nasycenie $\zeta = f(U_i)$

Wprowadzenie nieliniowości wynikającej z występowania zjawiska nasycenia magnetycznego do schematu strukturalnego maszyny synchronicznej przedstawiono na rys. 5. Strumień wzbudzenia obliczony jest ze wzoru:

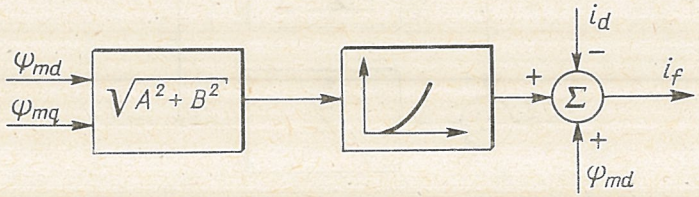
$$\psi_m = U_i = \sqrt{\psi_{md}^2 + \psi_{mq}^2}, \tag{1}$$

gdzie:

ψ_{md} — strumień skojarzony oddziaływania twornika w osi podłużnej,

ψ_{mq} — strumień skojarzony oddziaływania twornika w osi poprzecznej.

Przy rozpatrywaniu zagadnienia samowzbudzania się maszyny bocznikowej prądu stałego, a także pracy maszyny szeregowej nie wystarczające jest modelowanie funkcji odwzorowującej nasycenie. Niezbędne staje się wprowadzenie do programu symulacji



Rys. 5. Wprowadzenie nieliniowości do schematu strukturalnego maszyny synchronicznej

funkcji aproksymującej charakterystykę magnesowania. Sposoby aproksymacji tej funkcji wielomianem, funkcją wykładniczą lub szeregiem Fourier'a przedstawione zostały w [5, 6].

Przedstawiona na rys. 1 charakterystyka biegu jałowego oraz pozostałe wykreślone na jej podstawie krzywe mają charakter ciągły. Zarówno dla maszyn wykonanych jak i projektowanych charakterystyka magnesowania podana jest w postaci zbioru punktów, a nie funkcji ciągłej.

Przyjęto, że każdą funkcję nasycenia można aproksymować funkcją wykładniczą o postaci

$$y = Ax^{k/m} + B. \tag{2}$$

Znalezienie parametrów funkcji matematycznej tej postaci dla potrzebnych charakterystyk zaprogramowane zostało na maszynie cyfrowej.

W tablicy 1 przedstawiono przykładową charakterystykę biegu jałowego generatora synchronicznego dużej mocy, dla którego następnie znaleziona została funkcja nasycenia.

Tablica 1

Charakterystyka biegu jałowego generatora synchronicznego dużej mocy

i_f	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
U	0	0,58	1,0	1,21	1,33	1,4

4. METODA APROKSYMACJI

Rozwój techniki cyfrowej powoduje zastępowanie metod interpolacyjnych metodami aproksymacyjnymi. Zapamiętanie w maszynie tablicy wartości funkcji i korzystanie ze wzorów interpolacyjnych jest rozrzutne z punktu widzenia wykorzystania pamięci maszyny, jak również zazwyczaj nie jest dokładniejsze od metod aproksymacyjnych. Z tych powodów funkcję nasycenia i charakterystykę magnesowania korzystniej jest aproksymować — odpowiednio — funkcją wykładniczą i wielomianem.

Do aproksymowania charakterystyk magnesowania i nasycenia została zastosowana metoda najmniejszych kwadratów. Metoda ta matematycznie przedstawia się następująco. Jeżeli dana jest charakterystyka magnesowania parami współrzędnych (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_N, y_N), którą ma aproksymować wielomian

$$H_n(x) = A_1 + A_2 x + \ldots + A_{n+1} x^n \tag{3}$$

stopnia co najwyżej n ($n < N$), to stosując metodę najmniejszych kwadratów należy znaleźć

$$\sum_{i=1}^{N} [y_i - H_n(x_i)]^2 = \min. \tag{4}$$

W przypadku $n = N$ wielomian (3) jest wielomianem interpolacyjnym.

Lewa strona równania (4) jest funkcją $n+1$ zmiennych $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$. Szukanie minimum (4) sprowadza się do rozwiązania następującego układu równań

$$\begin{aligned} S_1 A_1 &+ S_2 A_2 &+ \ldots &+ S_{n+1} A_{n+1} &= T_1, \\ S_2 A_1 &+ S_3 A_2 &+ \ldots &+ S_{n+2} A_{n+1} &= T_2, \\ &\vdots &&\vdots &\vdots \\ S_{n+1} A_1 &+ S_{n+2} A_2 &+ \ldots &+ S_{2n+1} A_{n+1} &= T_{n+1}, \end{aligned} \tag{5}$$

gdzie:

$$S_i = \sum_{j=1}^{N} x_j^i, \tag{6}$$

$$T_i = \sum_{j=1}^{N} x_j y_j. \tag{7}$$

Układ równań (5) pozwala wyznaczyć niewiadome współczynniki A_i.

Tak przedstawiony wielomian dobrze aproksymuje charakterystykę magnesowania, lecz nie powinien być stosowany do aproksymowania funkcji odwzorowującej nasycenie o postaci przedstawionej na rys. 4. Funkcja ta (rys. 4) aproksymuje się dokładniej za pomocą zależności postaci (2), ponieważ można zmieniać w tym równaniu wykładnik funkcji k/m, podczas gdy wykładnik wielomianu (3) ma wartość 2 lub 3. Przez zmianę wykładnika k/m funkcji (2) można znaleźć taką jego wartość, przy której otrzymuje się najmniejszy błąd kwadratowy wyznaczony za pomocą zależności (4).

Jeżeli oznaczyć:

$$z = \sum_{j=1}^{N} (y_j - A x_j^{k/m} - B)^2, \tag{8}$$

to warunki $\frac{dz}{dA} = 0$ i $\frac{dz}{dB} = 0$ mają postać:

$$A \sum_{j=1}^{N} x_j^{2k/m} + B \sum_{j=1}^{N} x_j^{k/m} = \sum_{j=1}^{N} x_j^{k/m} y_j, \tag{9}$$

$$A \sum_{j=1}^{N} x_j + BN = \sum_{j=1}^{N} y_j. \tag{10}$$

Zmienna j może przyjmować wartości $1, 2, \ldots, N$. Zatem ze wzorów (6) i (7):

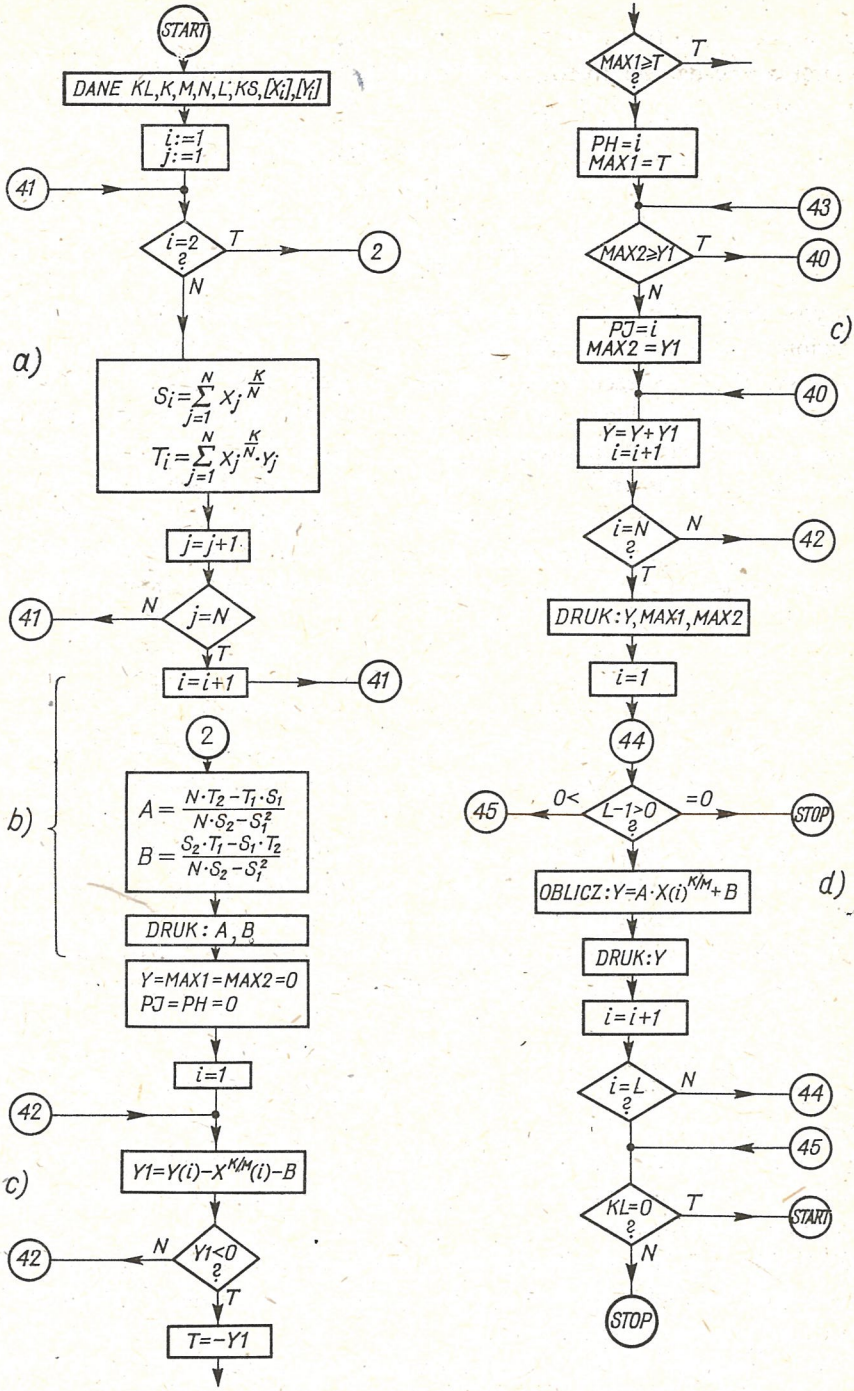
$$S_1 = \sum_{j=1}^{N} x_j^{k/m}, \quad S_2 = \sum_{j=1}^{N} x_j^{2k/m}, \tag{11}$$

$$T_1 = \sum_{j=1}^{N} y_j, \quad T_2 = \sum_{j=1}^{N} x_j^{k/m} y_j. \tag{12}$$

Podstawiając wartości S i T obliczone z równań (11) i (12) do równań (9) i (10) uzyskamy:

$$S_2 A + S_1 B = T_2, \tag{13}$$

$$S_1 A + NB = T_1. \tag{14}$$



Rys. 6. Algorytm obliczania parametrów aproksymującej funkcji wykładniczej $y = Ax^{k/m} + B$

a) ustawienie macierzy parametrów (X, Y) w pamięci maszyny cyfrowej, b) obliczenie i wydrukowanie współczynników A, B równania (2), c) obliczanie wartości minimalnej i maksymalnej odchyłki oraz błędu średnio kwadratowego aproksymacji, d) obliczanie wartości funkcji aproksymującej

Gdy $S_2N-S_1^2 \neq 0$ (warunek ten jest spełniony, jeżeli $x_k \neq x_l$ dla $k \neq l$ — czyli wartości te muszą być parami różne), to parametry szukane równań (9) i (10) wyrażone są zależnościami:

$$A = \frac{NT_2 - T_1 S_1}{NS_2 - S_1^2}, \tag{15}$$

$$B = \frac{S_2 T_1 - T_2 S_1}{NS_2 - S_1^2}. \tag{16}$$

Algorytm obliczeń będący podstawą sporządzenia programu dla maszyny cyfrowej, przedstawiony został na rys. 6. Początek algorytmu (rys. 6a) systematyzuje podane dane wejściowe (symbole oznaczeń zostały opisane w rozdz. 2) w pamięci maszyny cyfrowej. Na kolejnych częściach algorytmu (rys. 6b, c, d) przedstawiona została kolejność procedury obliczeń parametrów charakterystycznych metody, tzn. współczynników A, B równania postaci (2), minimalnej i maksymalnej odchyłki funkcji aproksymacyjnej od zadanych par współrzędnych oraz błędu średnio kwadratowego. Przedstawiony algorytm i program napisany na jego podstawie (Załącznik) umożliwia obliczenie dowolnych i w dowolnej ilości współrzędnych y dla podanych w bloku DANE wartości współrzędnych x.

5. WNIOSKI

Przedstawiony sposób uwzględnienia nasycenia obwodów magnetycznych, mimo że jest jednym z możliwych przybliżeń, jest sposobem dającym dostateczną dokładność odwzorowania tego zjawiska [2, 3].

Opisany program aproksymacji na podstawie danych punktów charakterystyki biegu jałowego, umożliwia znalezienie parametrów funkcji wykładniczej o postaci (2), określającej funkcję odwzorowującą nasycenie maszyny elektrycznej. Program ten może być zastosowany do określenia funkcji odwzorowującej nasycenie $\eta = f(i_f)$ lub $\zeta = f(U_i)$ dla dowolnej maszyny, na podstawie co najmniej trzech punktów charakterystyki biegu jałowego.

Po dokonaniu niewielkich zmian w programie, może być on również wykorzystany do aproksymowania charakterystyki biegu jałowego lub charakterystyki magnesowania przez wielomian postaci (3).

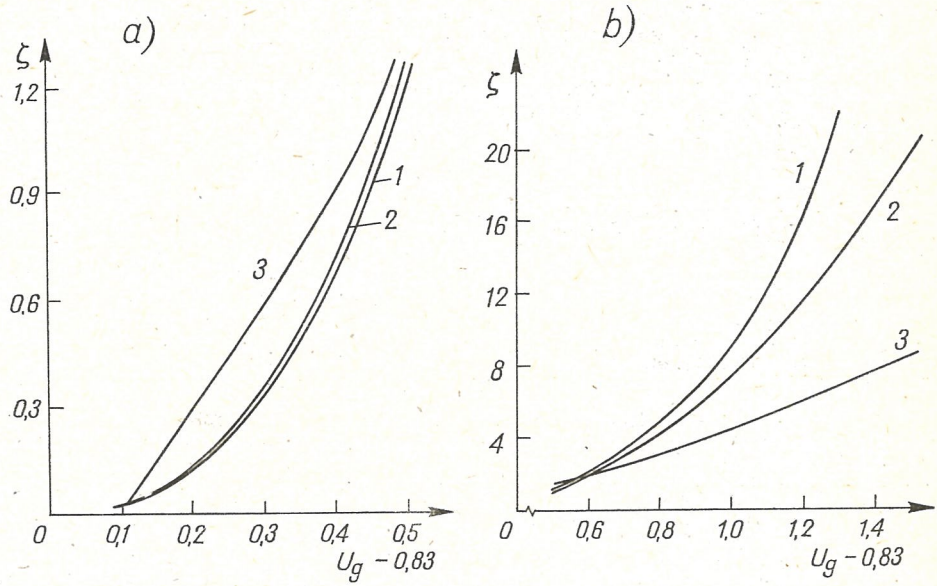
Dla badań nie związanych z modelowaniem maszyn elektrycznych podany algorytm może być przydatny do aproksymowania funkcją wykładniczą dowolnego zbioru punktów uzyskanych z doświadczeń.

W wydruku wyników podawane są maksymalne odchyłki od funkcji aproksymującej — dodatnia i ujemna. Wydrukowana DELTA określa dokładność przybliżenia uzyskanej funkcji do zadanego zbioru punktów.

Na rys. 7 przedstawiono graficznie funkcję odworowującą nasycenie uzyskaną za pomocą interpolacji i aproksymacji wielomianem typu (3) oraz za pomocą aproksymacji funkcją wykładniczą typu (2).

Ponieważ ilość węzłów interpolacyjnych jest mała, bo dokładnie równa stopniowi wielomianu aproksymacyjnego, nie jest spełniony warunek $n < N$, zatem nie można

znaleźć wielomianu, który lepiej przybliżałby daną funkcję niż interpolacyjny. W danym przypadku aproksymacja wielomianem daje dokładnie takie same wyniki jak interpolacja. Wybierając funkcję klasy (2) mamy błąd przybliżenia nie większy, niż na trzecim miejscu po przecinku. Błąd ten jest najmniejszy dla $k/m = 5/2$.



Rys. 7. Graficzne przedstawienie wyników aproksymacji i interpolacji
1 — interpolacja i aproksymacja wielomianem, *2* — aproksymacja funkcją postaci (2) o wykładniku 5/2, *3* — aproksymacja funkcją postaci (2) o wykładniku 5/3

Załącznik

Poniżej podano program w języku FORTRAN napisany na podstawie algorytmu przedstawionego na rys. 6, przykład wydruku wyników aproksymacji dla dwóch wartości wykładnika k/m, wydruk wyników interpolacji i aproksymacji wielomianem. Przez porównanie wartości podanej jako DELTA uzyskuje się pogląd o dokładności aproksymacji.

Przykład cyfrowy dotyczy tak zwanej uniwersalnej charakterystyki biegu jałowego podanej w [1]. Podane parametry tej charakterystyki są stałymi w równaniu typu (2) dla funkcji odwzorowującej nasycenie $\zeta = f(U_i)$.

```
      MASTER AMNK
C     A P R O K S Y M A C J A   F U N K C J A   W Y K Ł A D N I C Z A
C           Y = A*X**K/N + B
      INTEGER ZA(20)
      INTEGER I,N,M,PH,PJ,WS
      DIMENSION X1(20),X(20),Z(20),XX(20,20),ZZ(20,20)
      REAL T,T1,Y,MAX1,MAX2,A,B,M1
103   READ(2,18)KL,K,M,N,NN,L,KS
      Y=0
      M1=M
      N1=N
      READ(2,19)(Z(I),I=1,N)
3     READ(2,19)(X(I),I=1,N)
36    T=0
      T1=0
      Y1=0
      Y=0
      DO41 I=1,N
      IF(Z)I 107,41,0
      A=ALOG(Z(I))*K/M1
      T=T+EXP(A)
      T1=T1+EXP(A+A)
      Y1=Y1+X(I)*EXP(A)
      Y=Y+X(I)
41    CONTINUE
      B=T1*N-T*T
      A= Y1*N-Y*T /B
      B= T1*Y-T*Y1 /B
      WRITE(1,105)
      IF(KL)107,121,0
      IF(KL.EQ.1)GO TO 140
      READ(2,141)K1,K2,K3,K4
141   FORMAT(4I4)
      WRITE(1,142)K1,K2,K3,K4
142   FORMAT(1HO,10X,7HKODY = ,2 I4,1X,I4)
      GO TO 121
140   READ(2,122)K1,K2
122   FORMAT(2I6)
      WRITE(1,123)K1,K2
123   FORMAT(1HO,10X,7HKODY = ,I6,1X,I6)
121   WRITE(1,120)
120   FORMAT(1HO,10X,20HPARAMETRY FUNKCJI : )
      WRITE(1,71)K
      WRITE(1,72)M
      WRITE(1,30)A
      IF(NN,EQ.0)B=0
      WRITE(1,77)B
      BB=B
      Y=0
      PJ=1
      PH=1
      MAX1=0
      MAX2=0
      DO 42 I=1,N
      IF(Z(I).EQ.0)A=0
      IF(Z(I).EQ.0)Z(I) = 1
      T=ALOG(Z(I))*K/M1
      Y1=X(I)-A*EXP(T)-B
      IF(Y1)0,110,110
```

```
      T=-Y1
      IF(MAX1.GE.T)GO TO 110
      PH=I
      MAX1=T
110   IF(MAX2.GE.Y1)GO TO 42
      PJ=I
      MAX2=Y1
42    Y=Y+Y1*Y1
      WRITE(1,100)Y
      IF(KL)107,132,0
      WRITE(1,133)M_AX2,Z PJ
      WRITE 1,134 MAX1,Z PH
133   FORMAT(1HO,8X,9HMAX +  = ,F6.2,4X,
     1     21HDLA WSPOŁRZEDNEJ X = ,F6.0)
      FORMAT(1HO,8X,9HMAX -  = ,F6.2,4X,
     1     21HDLA WSPOŁRZEDNEJ X = ,F6.0)
      GO TO 60
132   WRITE(1,101)MAX2,Z PJ
      WRITE(1,102)MAX1,Z PH
60    WRITE(1,76)
      DO 34 I=1,L
      IF(L-1)107,25,0
      READ(2,19)T1
      IF(T1)107,111,0
      T=ALOG(T1)*K/M1
      Y=A*EXP(T)+BB
111   IF(T1.EQ.0)Y=0
      IF(NN.EQ.0)Y=A*EXP(T)
      Y=Y*KS
      IF(KL)107,124,0
      WS=T1
      WRITE(1,125)I,WS,Y
125   FORMAT(1HO,8X,12,10X,I8,10X,F15.4)
      GO TO 34
124   WRITE(1,15)I,T1,Y
34    CONTINUE
      IF(KL)25,0,0
      PAUSE HULA
      GO TO 103
72    FORMAT(1HO,10X,6H  M = ,I1)
71    FORMAT(1HO,10X,6H  K = ,I1)
19    FORMAT(20F0.0)
18    FORMAT(7I0)
15    FORMAT(1HO,8X,I3,6X,F15.4,4X,F15.4)
76    FORMAT(1HO,8X,4HL.P.,15X,1HX,22X,1HY/)
30    FORMAT(1HO,10X,6H  A = ,E15.6)
77    FORMAT(1HO,10X,6H  B =,E15.6 )
100   FORMAT(1HO,8X,8HDELTA =  ,F6.2)
101   FORMAT(1HO,8X,9HMAX +  = ,F6.2,4X,
     1     21HDLA WSPOŁRZEDNEJ X = ,F6.4)
102   FORMAT(1HO,8X,9HMAX -  = ,F6.2,4X,
     1     21HDLA WSPOŁRZEDNEJ X = ,F6.4 )
105   FORMAT(1H1,1UX,37HAPROKSYMACJA FUNKCJA Y = A*X**K/M + B/)
107   STOP UJEM
25    STOP STOP
      END
```

APROKSYMACJA FUNKCJA Y = A*X**K/M + B

PARAMETRY FUNKCJI :

K = 5

M = 3

A = 0.427584E 01

B = 0.000000E 00

DELTA = 0.11

MAX + = 0.00 DLA WSPOŁRZEDNEJ X = 0.0000

MAX - = 0.25 DLA WSPOŁRZEDNEJ X = 0.4390

L.P.	X	Y
1	0.0000	0.0000
2	0.1000	0.0921
3	0.2330	0.3772
4	0.3000	0.5749
5	0.4390	1.0842
6	0.5000	1.3468
7	0.5595	1.6244
8	0.8000	2.9478
9	1.0000	4.2758
10	1.5000	8.4044

APROKSYMACJA FUNKCJA Y = A*X**K/M + B

PARAMETRY FUNKCJI :

K = 5

M = 2

A = 0.689848E 01

B = 0.000000E 00

DELTA = 0.00

MAX + = 0.00 DLA WSPOŁRZEDNEJ X = 0.5595

MAX - = 0.05 DLA WSPOŁRZEDNEJ X = 0.4390

L.P.	X	Y
1	0.0000	0.0000
2	0.1000	0.0218
3	0.2330	0.1808
4	0.3000	0.3401
5	0.4390	0.8809
6	0.5000	1.2195
7	0.5595	1.6153
8	0.8000	3.9489
9	1.000	6.8985
10	1.500	19.0100

A P R O K S Y M A C J A W I E L O M I A N E M

SUMA/A/I/xXTI/ DLA I=1,2,3...N

WSPOŁCZYNNIKI

A/0/ = 0.000000E 00

A/1/ = 0.280516E 00

A/2/ = 0.123464E 00

A/3/ = 0.813265E 01

DELTA = 0.335052E 01

MAX/+/ = 0.000000E 00

MAX/-/ = 0.162000E 01

L.P.	X	Y
1	0.0000	0.0000
2	0.1000	0.0374
3	0.2300	0.1700
4	0.3000	0.3148
5	0.4390	0.8350
6	0.5000	1.1877
7	0.5595	1.6200
8	0.8000	4.4673
9	1.0000	8.5366
10	1.5000	28.1463

INTERPOLACJA WIELOMIANEM

WSPOŁCZYNNIKI WIELOMIANU STOPNIA 3-EGO

A/ 0 / = 0.000000

A/ 1 / = 0.280516

A/ 2 / = 0.123464

A/ 3 / = 8.132654

LP	X	Y
1	0.0000	0.0000
2	0.1000	0.0374
3	0.2300	0.1700
4	0.3000	0.3148
5	0.4390	0.8350
6	0.5000	1.1877
7	0.5595	1.6200
8	0.8000	4.4673
9	1.0000	8.5366
10	1.5000	28.1463

LITERATURA

1. L. M. Piotrowskij, *Elektriczeskije masziny*, Moskwa—Leningrad 1949, s. 313—314.
2. M. Riaz, *Analoque computer representation of synchronous generator in voltage-regulation studies*, Trans. AIEE, 1956, s. 1178—1182.
3. D. C. White, H. H. Woodson, *Electromechanical energy conversion*, John Wiley, Nowy Jork 1959.
4. W. W. Wojewodina, A. D. Gordunowa, T. P. Klimcowa, A. G. Swieszni-kowa, *Wyczyslitelnyje metoda a programmirowanie*, Moskwa 1965.
5. W. K. MacFagyen, R. R. S. Simpson, R. D. Slater, W. S. Wood, *Representation of magnetisation curves by exponential series*, Proc. IEEE, 197, s. 902—904 oraz dyskusja artykułu.
6. G. F. T. Widger, *Representation of magnetisation curves over extensive range by rational-fraction*, Proc. IEE, 1969, s. 156—160.
7. A. Ralston, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, Warszawa 1971.

W. MATULEWICZ, T. SYLWANOWICZ

APPROXIMATION OF SATURATION FUNCTION INCLUDING SATURATION EFFECTS OF ELECTRICAL MACHINES

Summary

This paper describes methods of determining saturation function on the basis of open circuit saturation curve. Next the algorithm of computations on digital computer of coefficients of function ($\zeta = AU_g^{k/m} + B$) are presented and the approximate saturation function is given.

W. MATULEWICZ, T. SYLWANOWICZ

APPROXIMATION DE LA FONCTION DESCRIPTIVE DE SATURATION DU CIRCUIT MAGNÉTIQUE DES MACHINES ÉLECTRIQUES

Résumé

Dans l'article on a presenté les méthodes d'obtenir la fonction descriptive de saturation magnétique en se basant sur la caractéristique de marche à vide. On a present ensuite l'algorithme permettant a'utiliser l'ordinateur pour trouver les paramètres de cette fonction ($\zeta = AU_g^{k/m} + B$).

W. MATULEWICZ, T. SYLWANOWICZ

APPROXIMATION EINER DIE SÄTTIGUNG VON ELEKTROMASCHINEN ABBILDENDEN FUNKTION

Zusammenfassung

Im obigen Aufsatz wurden Verfahren zur Gewinnung einer die Sättigung von Elektromaschinen abbildenden Funktion auf Grund der Charakteristik des Freilaufs dargestellt. Im weiteren wurde der Algorithmus für die Anwendung eines Digitalrechners zwecks Bestimmung von Parametern $\zeta = AU_g^{k/m} + B$-Funktion erläutert, die die Sättigungfunktion approximiert.

В. МАТУЛЕВИЧ, Т. СИЛЬВАНОВИЧ

АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ ОТОБРАЖАЮЩЕЙ НАСЫЩЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

Резюме

Представлены способы получения функции отображающей магнитное насыщение электрических машин на основании характеристики холостого хода.

Показан алгоритм и программа на ЭЦВМ для вычисления коэффициентов аппроксимирующей функции $\zeta = AU_g^{k/m} + B$.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1978, 24, z. 4, ss. 795 — 811

621.382

Metody wyznaczania rozkładu temperatury w półprzewodnikowej płytce przyrządów półprzewodnikowych

ZBIGNIEW LISIK (ŁÓDŹ)

Instytut Elektroniki Politechniki Łódzkiej

Otrzymano 21.7.1977

W pracy porównano analityczne i numeryczne metody rozwiązywania równania przewodnictwa cieplnego w przyrządach półprzewodnikowych.

W części zajmującej się metodami numerycznymi wiele miejsca poświęcono dokładności uzyskanego rozwiązania. Zaproponowano prostą metodę umożliwiającą jej wstępne oszacowanie. Pozwala ona na uwzględnienie specyfiki funkcji generacji ciepła przy wyborze kroku dyskretyzacji. Przedyskutowano możliwości aproksymowania pochodnych w problemach przepływu ciepła szeregami zawierającymi różnice wyższych rzędów. Wykazano celowość takiego postępowania.

1. WSTĘP

Wzrost temperatury w półprzewodnikowej pastylce wpływa na zmianę wartości prawie wszystkich parametrów charakteryzujących przyrząd półprzewodnikowy. Jest on także podstawowym czynnikiem determinującym dopuszczalne warunki obciążenia, przekroczenie pewnej granicznej wielkości temperatury powoduje nieodwracalne uszkodzenie przyrządu [1], [2][1]. Z tych względów konieczna jest znajomość zmian temperatury w jego wnętrzu w różnych warunkach pracy. Ma to szczególnie duże znaczenie dla półprzewodnikowych przyrządów mocy.

Pomiar temperatury wewnątrz przyrządu półprzewodnikowego nie zawsze jest możliwy. Wymaga on często zastosowania trudno dostępnej aparatury, a dokładność wyników uzyskanych dla przebiegów szybkozmiennych jest wątpliwa [3]÷[6]. Skłania to do szukania oszacowań zmian temperatury na drodze obliczeń matematycznych. W tym celu, w oparciu o fizyczny model zachodzących w przyrządzie procesów i jego dane konstrukcyjne, trzeba przyjąć odpowiednie warunki brzegowe umożliwiające rozwiązanie równania przewodnictwa cieplnego (1).

[1] Dla krzemowych przyrządów półprzewodnikowych wartości krytycznej temperatury przy krótkotrwałym obciążeniu wynoszą odpowiednio 1000÷1300°C dla półprzewodnikowej pastylki, 370°C dla lutu eutektycznego Si-Au mocującego pastylkę do podłoża i 100÷150°C dla połączeń pastylki z aluminiowymi wyprowadzeniami. Dodatkowe ograniczenia na dopuszczalną wartość temperatury narzucają warunki pracy przyrządu. Ogólnie, maksymalna temperatura w krzemowej pastylce przy pracy ciągłej i na początku każdego impulsu przy pracy impulsowej nie może przekroczyć wartości rzędu 400°C odpowiadającej pojawieniu się niestabilności cieplnej.

Znalezienie rozwiązania analitycznego nie jest na ogół sprawą ptostą. Wymaga to nieraz znacznych uproszczeń modelu zjawisk zachodzących w przyrządzie półprzewodnikowym, a tym samym uzyskane wyniki mogą odbiegać od swoich rzeczywistych wartości. W literaturze można znaleźć szereg rozwiązań aproksymujących zmiany temperatury w przyrządzie dla różnych warunków pracy [7]÷[11].

Wraz ze wzrostem możliwości e.m.c. coraz popularniejsze staje się rozwiązywanie równania przewodnictwa cieplnego metodami numerycznymi. Umożliwiają one wierniejsze modelowanie zjawisk zachodzących w przyrządzie, ale uzyskany wynik jest obarczony pewnym błędem wynikającym z ich przybliżonego charakteru. Wielu autorów zajmowało się formowaniem algorytmów obliczeń dla równania (1). Skupili się oni głównie na badaniu stabilności proponowanych metod, sposobami poprawienia dokładności poprzez dodatkowe obliczenia i minimalizacji czasu trwania obliczeń nie podejmując próby sformułowania dokładnego wyrażenia na błąd i jego dyskusji [12]÷[16].

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie przeglądu metod rozwiązywania zagadnienia wzrostu temperatury w obszarze przyrządu półprzewodnikowego. Szczególnie dużo uwagi poświęcono w niej metodom numerycznym. Przeprowadzono dokładną analizę błędów wnoszonych do rozwiązania przez te metody (Dodatek I i II). Na jej podstawie sformułowano zasady doboru kroku dyskretyzacji pozwalające te błędy ograniczyć i kontrolować.

Oznaczenia

T — temperatura,
c — ciepło właściwe,
ϱ — gęstość właściwa,
λ — przewodnictwo cieplne właściwe,
t — czas,
x, z, r — zmienne przestrzenne,
$g(P, t)$ — funkcja gęstości wydzielania ciepła w punkcie P,
A, B, W, b, d, h — liniowe wymiary geometryczne,
J_0, J_1 — funkcje Bessela, odpowiednio, zerowego i pierwszego rzędu
α_l — pierwiastki funkcji Bessela zerowego rzędu,
f — gęstość powierzchniowa strumienia ciepła,
V_0 — napięcie blokowane przez tyrystor przed załączeniem,
I_0 — prąd płynący przez tyrystor po załączeniu,
t_r — czas trwania procesu załączania,
v — prędkość przesuwania się brzegu obszaru przewodzącego w procesie załączania,
$\Delta t, K$ — krok dyskretyzacji czasu,
$\Delta x, H$ — krok dyskretyzacji przestrzennej,
$x_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ — dyskretne punkty podziału przestrzeni,
$f_n, f(n)$ — wartość funkcji $f(x)$ w dyskretnym punkcie $x = x_0 + nH$,
$\Delta^k f_n$ — różnica progresywna k-tego rzędu funkcji dyskretnej $f(m)$ w punkcie $m = n$,
E — błąd dyskretyzacji.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Celem analizy matematycznej procesów termicznych w przyrządach półprzewodnikowych jest wyznaczenie rozkładu temperatury wewnątrz przyrządu lub wartości impedancji termicznej (dla stanów ustalonych rezystancji).

Punktem wyjścia dla takiej analizy jest równanie przewodnictwa cieplnego (1) wraz z odpowiednimi dla rozwiązywanego problemu warunkami brzegowymi i początkowymi

$$\nabla^2 T - \frac{c\varrho}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\lambda}g(P, t). \tag{1}$$

Warunki brzegowe są sformułowane najczęściej w postaci:

— powierzchni izotermicznej ($T = \text{const}$),

— powierzchni adiabatycznej $\left(\frac{dT}{dn} = 0\right)$,

— powierzchni ze strumieniem $\left(\frac{dT}{dn} = f(P, t)\right)$,

— powierzchni granicznej $\left(\lambda_1 \frac{dT_1}{dn} = \lambda_2 \frac{dT_2}{dn}\right)$.

Aby równanie (1) opisywało zjawiska w przyrządzie półprzewodnikowym, a warunki brzegowe dawały problem rozwiązalny analitycznie, konieczne jest przyjęcie pewnych założeń idealizujących. W zależności od rodzaju problemu wykorzystuje się w tym celu odpowiednią grupę założeń z poniższego zbioru:

a) ciepło nie jest generowane w metalicznych odprowadzeniach ciepła,
b) ciepło jest generowane równomiernie w całym obszarze czynnym półprzewodnika,
c) ciepło jest generowane tylko w płaszczyźnie odpowiedniego złącza,
d) ciepło nie jest generowane dla stanu blokowania lub nasycenia złącza,
e) wyodrębnia się elementarne źródła ciepła i stosuje zasadę superpozycji (np. obwód bramkowy i anodowy tyrystora),
f) przyjmuje się jeden kierunek przepływu ciepła (np. prostopadle do złącz w tyrystorach mocy),
g) temperatura powierzchni odprowadzeń ciepła jest stała,
h) pomija się odprowadzenia ciepła (temperatura powierzchni półprzewodnika jest stała),
i) niektóre powierzchnie traktuje się jako adiabatyczne (np. powierzchnie stykające się z ceramiczną obudową),
j) wykorzystuje się symetrię przestrzenną przyrządu bądź zjawiska w celu redukcji zmiennych oraz redukcji analizowanego obszaru,
k) przyjmuje się stałe fizyczne jako niezależne od temperatury (mimo, że np. przewodność termiczna krzemu w temperaturze pokojowej wynosi 1,7 W/K cm, a dla punktu topnienia 0,22 W/K cm [17]) lub aproksymuje się ich zmiany prostymi funkcjami.

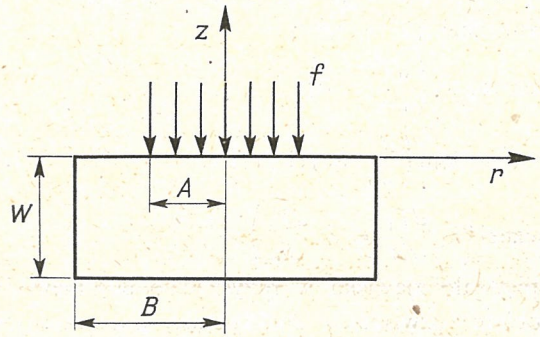
3. PRZYKŁADY ROZWIĄZAŃ ANALITYCZNYCH

Ciekawe, dające duże możliwości zastosowania, rozwiązanie uzyskano w [7] dla cylindra z materiału o liniowych własnościach termicznych, do którego wnika strumień ciepła przez powierzchnię ($0 < r < A, z = 0$), rys. 1. Przy założeniu, że powierzchnia ($0 < r < B$,

$z = W$) jest powierzchnią izotermiczną, a pozostałe powierzchnie są adiabatyczne, uzyskano rozwiązanie w postaci [7]:

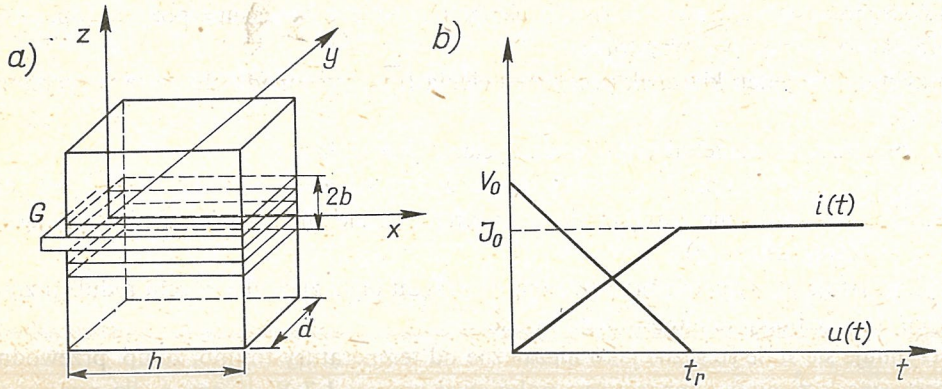
$$T(r,z) = \frac{f}{\lambda}(W-z)\left\{\frac{A^2}{B^2} + \frac{2A}{W-z}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{\sinh\alpha_l\frac{W-z}{B}}{\cosh\alpha_l\frac{W}{B}}\,\frac{J_1\left(\alpha_l\frac{A}{B}\right)J_0\left(\alpha_l\frac{r}{B}\right)}{\alpha_l^2 J_0^2(\alpha_l)}\right)\right\}, \tag{2}$$

gdzie: α_l — pierwiastki funkcji Bessela zerowego rzędu, a J_1 i J_0 funkcje Bessela, odpowiednio, pierwszego i zerowego rzędu.



Rys. 1. Schemat wnikania strumienia f do cylindra z materiału półprzewodnikowego odpowiadający rozwiązaniu (2)

Równanie (2) może aproksymować rozkład temperatury, np. w diodzie mocy, może też być wykorzystane jako swego rodzaju warunek brzegowy dla bardziej złożonych problemów rozwiązywanych na maszynach cyfrowych.



Rys. 2. Przyjęty do obliczeń model tyrystora (a) oraz zmiany napięcia i prądu podczas załączania (b)

W pracy [8] przeprowadzono próbę wyznaczania rozkładu temperatury podczas procesu złączania tyrystora prostokątnego (rys. 2a). Przyjęto w niej następujące założenia idealizujące:

— prąd anodowy zaczyna płynąć przy kontakcie bramki,

— prędkość przesuwania się brzegu obszaru przewodzącego jest stała,

— przebiegi prądu i napięcia są zgodne z rys. 2b,
— stałe materiałowe krzemu c, λ, ϱ są stałe,
— ruch ciepła odbywa się tylko w kierunku osi z,
— temperatura stykających się z odprowadzeniami ciepła powierzchni pastylki krzemowej jest równa temperaturze otoczenia,
— ciepło wydziela się tylko na płaszczyźnie przechodzącej przez środek pastylki krzemowej.

Powyższe założenia pozwoliły otrzymać za pomocą przekształcenia Laplace'a następujące rozwiązanie [8]:

$$T(z,t) = \frac{V_0 J_0 b}{2\lambda v\, dt_r}\left[\frac{|b-z|}{b}\left(1-\frac{t}{t_r}\right)+\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{b-z}{b}\times\right.$$
$$\left.\times\left\{\frac{1}{s_n t_r}(1-e^{-s_n t})-e^{-s_n t}\right\}\right], \qquad (3)$$

gdzie: $s_n = (2n+1)^2\left(\frac{\pi}{2b}\right)^2\frac{\lambda}{c\varrho}$.

Oba przedstawione rozwiązania ((3) i (2)) otrzymano przy założeniach idealizujących, odbiegających od rzeczywistych warunków pracy przyrządów półprzewodnikowych. Jest to cena, jaką płaci się za możliwość uzyskania rozwiązania analitycznego.

Rozwiązanie takie daje całościowy obraz badanego zagadnienia (z dokładnością do przyjętych założeń upraszczających) pozwalający na uchwycenie ogólnych zależności rządzących zmianami temperatury w przestrzeni i czasie, co niekiedy jest bardzo przydatne. Jednak, dla problemów bardziej złożonych, uzyskanie rozwiązania analitycznego jest bardzo pracochłonne, a otrzymana postać zwykle na tyle skomplikowana, że aby móc korzystać z niej, staje się nieodzowna pomoc maszyny cyfrowej (np. rozwiązania (3) i (2)). Jeżeli, jak to zwykle bywa, rozwiązanie ma postać szeregu nieskończonego, a przy tym jest to szereg wolnozbieżny, można się spodziewać, że otrzymany wynik będzie obarczony błędem związanym z ograniczeniem się do skończonej ilości wyrazów tego szeregu oraz z kumulacją błędów zaokrągleń (patrz p. 4).

Tych problemów można uniknąć posługując się, dla bardziej skomplikowanych zagadnień, metodami numerycznymi i wykonując obliczenia na e.m.c.

4. ROZWIĄZANIE NUMERYCZNE

Do wyznaczenia rozkładu temperatury możemy zastosować metody numeryczne. Wymaga to przekształcenia ciągłych wyrażeń opisujących problem w wyrażenia dyskretne. Dokonujemy tego wykorzystując znane wzory interpolacyjne [18].

Metoda numeryczna, jako metoda przybliżona, jest obarczona pewnym błędem, na który składają się:
— *błąd metody* wynikający z ograniczenia szeregu interpolacyjnego do skończonej ilości elementów; może on w niektórych przypadkach osiągnąć znaczne rozmiary i dlatego należy uwzględnić go przy doborze przestrzennego i czasowego kroku dyskretyzacji (o metodach oszacowania tego błędu dla zagadnień przepływu ciepła traktuje Dodatek I);

— *błąd zaokrągleń* wynikający z faktu, iż maszyna cyfrowa dokonuje operacji na liczbach o skończonej ilości cyfr; jest on na ogół o kilka rzędów wielkości mniejszy od błędu metody, jednak w pewnych przypadkach może odgrywać znaczną rolę (patrz Dodatek II); oszacowanie jego wartości wymaga z reguły specjalnych metod analizy [19].

Dodatkowym czynnikiem decydującym o dokładności rozwiązania jest tzw. stabilność lub zbieżność metody ([15], [16], [20]). Jeżeli metoda jest niestabilna, to wprowadzony do któregokolwiek węzła mały błąd po kilku krokach iteracyjnych daje decydujący wkład do uzyskanej wartości funkcji w węzłach [18].

Używane w praktyce metody aproksymacji równania przewodnictwa cieplnego (1) są oparte na wzorze interpolacyjnym obciętym po pierwszej różnicy dla pierwszej pochodnej i po drugiej różnicy dla drugiej pochodnej. I tak dla wzoru progresywnego Newtona (4a) pierwsza pochodna będzie wyrażona przez równość (4b) a druga przez (4c) (pełne wyrażenia na pochodne są w Dodatku II):

$$f(m) = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} \Delta^k f(0), \tag{4a}$$

$$f'(m) = \frac{1}{H} \Delta f_0, \tag{4b}$$

$$f''(m) = \frac{1}{H^2} \Delta^2 f_0, \tag{4c}$$

gdzie:

$x = x_0 + mH$,

H — krok dyskretyzacji.

Podstawiając do (1) odpowiednie wyrażenia różnicowe na pochodne (np. (4b) i (4c)) otrzymamy jedną ze znanych postaci dyskretnych równania przewodnictwa ciepła [20]. Pozwala ona na sformułowanie algorytmu obliczeń umożliwiającego rozwiązanie dowolnego problemu brzegowego.

Stosując wzory (4b, c) do jednowymiarowego równania przewodnictwa cieplnego otrzymamy:

$$T(x, t+\Delta t) = \alpha[T(x-\Delta x, t) + T(x+\Delta x, t)] + (1-2\alpha)\, T(x, t) + \frac{\Delta t}{\lambda} g(x, t), \tag{5}$$

gdzie $\alpha = \dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \dfrac{\lambda}{c\varrho}$.

Równanie (5) jest podstawą tzw. „metody nieuwikłanej" rozwiązywania równania przewodnictwa cieplnego. Umożliwia ona, na podstawie znanego rozkładu temperatury w chwili t, wyznaczenie rozkładu temperatury w chwili $t+\Delta t$. Metoda ta jest stabilna tylko dla $\alpha < 0{,}5$ ([12], [20]).

Jeżeli zastąpimy w (4b) różnicę progresywną różnicą wsteczną otrzymamy:

$$T(x, t) = \alpha[T(x-\Delta x, t+\Delta t) + T(x+\Delta x, t+\Delta t)] + (1+2\alpha)\, T(x, t+\Delta t) + \frac{\Delta t}{\lambda} g(x, t+\Delta t). \tag{6}$$

Równanie (6) jest podstawą tzw. „metody uwikłanej". Pozwala ona na podstawie znanego rozkładu temperatury w chwili t wyznaczyć rozkład w chwili $t+\Delta t$, ale na drodze