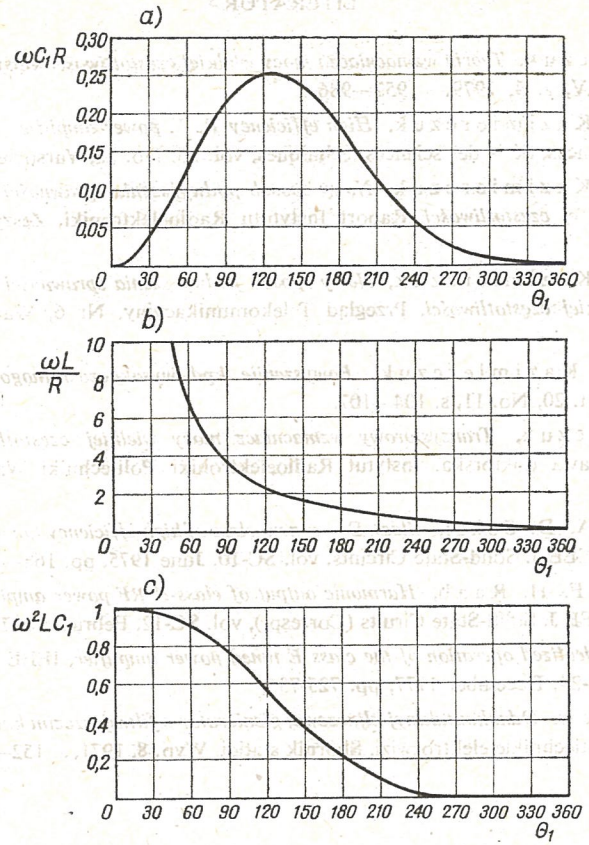


Rys. 10. Zależność wartości elementów obwodu kolektorowego od kąta Θ_1 dla przypadku, kiedy jednocześnie są spełnione warunki (3) i (4)

a) zależność $\omega C_1 R$ od kąta Θ_1, b) zależność $\omega L/R$ od kąta Θ_1, c) zależność $\omega^2 LC_1$ od kąta Θ_1

6. WNIOSKI

Na podstawie przeprowadzonych badań teoretycznych można sformułować optymalne warunki pracy wzmacniacza klasy *E*. Uzyskuje się je wówczas, gdy jednocześnie są spełnione warunki (3) i (4) oraz kąt $\Theta_1 = \pi$. Pierwsze dwa z wymienionych warunków zapewniają dużą sprawność kolektorową, a trzeci — jak wynika z rys. 9 — zapewnia największą moc wyjściową wzmacniacza.

Z przeprowadzonych badań wynika również wniosek, że warunki (3) i (4) zapewniające dużą sprawność kolektorową wzmacniacza teoretycznie można spełnić przy dowolnej wartości kąta Θ_1. W praktyce jednak kąt Θ_1 należy ograniczyć ze względu na moc wyjściową wzmacniacza (rys. 9), trudności realizacji praktycznej elementów obwodu kolektorowego (rys. 10) oraz niebezpieczeństwo przebicia napięciowego lub prądowego tranzystora (rys. 5).

LITERATURA

1. M. Kazimierczuk, *Teoria wzmacniacza mocy wielkiej częstotliwości klasy E*, Rozprawy Elektrotechniczne, t. XXV, z. 4, 1979, s. 957—986.
2. J. Ebert, M. Kazimierczuk, *High efficiency R. F. power amplifier*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences techniques, vol. 25, No. 25, Varsovie 1977, pp. 13—16.
3. J. Ebert, M. Kazimierczuk, *Nowy sposób podwyższenia sprawności rezonansowego wzmacniacza mocy wielkiej częstotliwości*, Raport Instytutu Radioelektroniki, Zeszyt 31, Warszawa 1976, s. 1—19.
4. J. Ebert, M. Kazimierczuk, *Nowy sposób podwyższenia sprawności rezonansowego wzmacniacza mocy wielkiej częstotliwości*, Przegląd Telekomunikacyjny, Nr 6, Warszawa 1977, s. 165—168.
5. J. Ebert, M. Kazimierczuk, *Powyszenije kpd wysokoczastotnogo usilitiela*, Izw. WUZ, Radioelektronika, t. 20, No. 11, s. 104—107.
6. M. Kazimierczuk, *Tranzystorowy wzmacniacz mocy wielkiej częstotliwości o podwyższonej sprawności*, Rozprawa doktorska, Instytut Radioelektroniki Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1977.
7. N. O. Sokal, A. D. Sokal, *Class E — a new class of high-efficiency tuned single-ended switching power amplifiers*, IEEE J. Solid-State Circuits, vol. SC-10, June 1975, pp. 168—176.
8. N. O. Sokal, F. H. Raab, *Harmonic output of class-E RF power amplifiers and load coupling network design*, IEEE J. Solid-State Ciruits (Corresp.), vol. SC-12, February 1977, pp. 86—88.
9. F. H. Raab, *Idealized operation of the class E tuned power amplifier*, IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. CAS-24, December 1977, pp. 725-735.
10. W. B. Kozyriew, *Odnokontaktnyj kljuczewoj gienierator s filtrujuszczim konturom*, Połuprowodnikowyje pribory w tiechnikie elektroswizi, Sbornik statiej, Wyp. 8, 1971, s. 152—166.

M. KAZIMIERCZUK

THEORETICAL ANALYSIS OF CLASS *E* TUNED POWER AMPLIFIER

Summary

Theoretical analysis of a class *E* tuned power amplifier with different switch duty ratio is presented. The collector voltage and current waveforms, the peaks of the collector voltage and current, the amplitudes of the fundamental frequency component of the collector voltage and current, the output power and the output circuit element values are given.

M. KAZIMIERCZUK

ANALYSE THÉORIQUE DES AMPLIFICATEURS CLASSE *E* AVEC TENSION D'ENTRÉE RECTANGULAIRE

Résumé

L'étude est consacrée à l'analyse théorique de l'amplificateur de puissance haute fréquence classe *E* pour le coefficient de remplissage arbitraire de la tension d'entrée rectangulaire. On a déterminé les allures du courant et de la tension du collecteur, les valeurs instantanées maximales de ces allures, les composantes fondamentales du courant et de la tension du collecteur, la puissance de sortie de l'amplificateur et les valeurs optimales des éléments dans le circuit de collecteur.

M. KAZIMIERCZUK

THEORESTISCHE ANALYSE EINES VERSTÄRKERS DER *E*-KLASSE MIT BELIEBIGEM FÜLLFAKTOR DER RECHTECKIGEN STEUERSPANNUNG

Zusammenfassung

Im Aufsatz wurde die theoretische Analyse eines Hochfrequenz-Leistungverstärkers der *E*-Klasse mit beliebigem Füllfaktor der rechteckigen Steuerspannung durchgeführt. Es wurden Stromverläufe und Sammlerspannungen, maximale momentane Werte dieser Verläufe, Ausgangsleistung des Verstärkers und auch Werte von Sammlerkreisteilen bestimmt.

М. КАЗИМЕРЧУК

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСИЛИТЕЛЯ КЛАССА *E* С ПРОИЗВОЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ СКВАЖНОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО УПРАВЛЯЮЩЕГО НАПРЯЖЕНИЯ

Резюме

Представлено теоретическое исследование высокочастотного усилителя мощности класса *E* с произвольным коэффициентом скважности прямоугольного управляющего напряжения. Определены формы коллекторного тока и напряжения, максимальные их значения, основные гармоники тока и напряжения коллектора, колебательную мощность и параметры коллекторной цепи.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1979, 25, z. 4, ss. 1005 — 1012

621.373

Pomiar impedancji wewnętrznej generatorów

MARIAN KĘDZIERSKI (WARSZAWA)

Instytut Elektrotechniki

ZDZISŁAW KUŚMIREK (WARSZAWA)

Instytut Łączności

Otrzymano 26.6.1978

We wstępie wspomniano o powszechnie dotychczas stosowanej analityczno-graficznej metodzie R. W. Buchheima i jej modyfikacjach. W dalszym ciągu pracy autorzy przedstawili nową, unikalną i prostą metodę pomiaru rezystancji, reaktancji i impedancji wewnętrznej źródeł napięciowych i prądowych energii elektrycznej. Jako potwierdzenie rozważań matematycznych podano wyniki pomiarów parametrów wewnętrznych dwóch generatorów o wyjściu transformatorowym i wtórnikowym.

1. WSTĘP

Pomiar rezystancji wewnętrznej źródeł energii elektrycznej od bardzo dawna absorbował metrologów. Już Mance oraz Monro [1, 3] zaproponowali układy do pomiaru rezystancji baterii ogniw, które znajdują zastosowanie do dnia dzisiejszego. Powszechne zastosowanie do pomiaru rezystancji wewnętrznej źródła energii elektrycznej znajduje metoda techniczna polegająca na pomiarze siły elektromotorycznej i napięcia na rezystorze obciążającym dane źródło, np.: pomiar rezystancji ogniw wzorcowych.

Pomiar impedancji wewnętrznej źródeł prądu przemiennego, a zwłaszcza źródeł o częstotliwości akustycznej, zapoczątkował R. W. Buchheim [2] podając metodę analityczno-graficzną stosowaną po dzień dzisiejszy.

Prace (9, 12, 13], prowadzone w Instytucie Łączności, ulepszyły „metodę Buchheima" przez wprowadzenie pojęcia znormowanej impedancji zastępczej źródła i nomogramu dla typowych źródeł stosowanych w telekomunikacji aż do częstotliwości 1,5 MHz. Usprawnienia te są jednak mało uniwersalne wobec istnienia źródeł o nieokreślonej a priori impedancji. Charakter metody analityczno-graficznej nie uległ zasadniczej zmianie i mimo ulepszonego wykresu (okręgi kół o promieniu ~ 2 m) dokładność wyznaczenia impedancji wewnętrznej jest zależna m.in. od kąta przecięcia się okręgów kół.

2. POJĘCIE IMPEDANCJI WEWNĘTRZNEJ ŹRÓDŁA

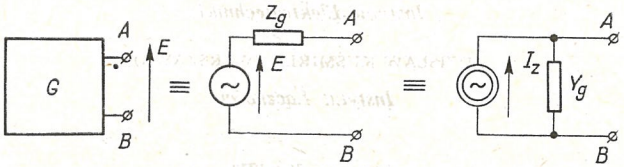
Problem ten ujęto w pracy [14] opierając się na publikacjach [7, 8]. Sformułowania podane w publikacji IEC [8] budzą pewne wątpliwości.

Stosownie do określeń w pracy [14] przyjmujemy, że impedancja wewnętrzna generatora jest reprezentowana przez impedancję Z_g lub admitancję Y_g między zaciskami wyjściowymi A, B generatora G jako źródła napięciowego lub prądowego. Takie określenie jest zgodne z publikacją IEEE [7] i IEC [8] i wyrażają je wzory:

$$\overline{Z}_g = R_g + jX_g \tag{1a}$$

bądź

$$\overline{Y}_g = G_g + jB_g, \tag{1b}$$



Rys. 1. Układy zastępcze źródeł energii elektrycznej

przy czym R_g i X_g oraz G_g i B_g są stałymi skupionymi i są rozumiane jako pojęcia ekwiwalentne, np. [4] i [6].

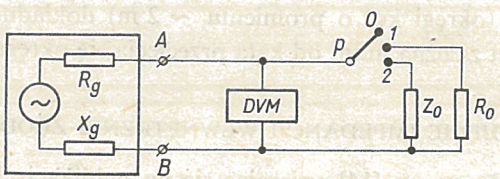
3. MODYFIKACJA UKŁADU BUCHHEIMA

Podstawową wadą metody analityczno-graficznej R. W. Buchheima [2] jest konieczność posługiwania się wykresem w postaci dwóch okręgów kół przecinających się pod kątem zależnym od parametrów impedancji wewnętrznej generatora i impedancji obciążenia. Jeżeli okręgi przecinają się pod małym kątem, to wyznaczenie punktu przecięcia, a więc i określenie składowych impedancji wewnętrznej generatora jest obarczone znacznym błędem (analogia do kąta zbieżności mostków prądu przemiennego). Można poszukiwać punktu przecięcia się okręgów kół na drodze analitycznej, lecz rozwiązanie jest bardzo uciążliwe.

Rozważmy układ pomiarowy jak na rys. 2, w którym zależnie od położenia przełącznika p możliwe są następujące pomiary:

1. SEM generatora,
2. napięcia na rezystorze R_O,
3. napięcia na impedancji $\overline{Z}_O = R + jX$.

Parametry woltomierza cyfrowego wartości skutecznej TRMS nie mają praktycznie wpływu na wyniki pomiaru, a wartości elementów obciążających R_O i Z_O są uwarunkowane względami technicznymi — głównie parametrami generatora.



Rys. 2. Schemat połączeń układu do pomiaru impedancji wewnętrznej generatora

Oznaczenia: G — generator o impedancji wewnętrznej $\overline{Z}_g = R_g + jX_g$,
DVM — woltomierz cyfrowy TRMS, kl. 0,1; 1 MΩ; ~20 pF,
R_O — rezystor obciążający,
Z_O — impedancja obciążająca $\overline{Z}_O = R + jX$,
p — przełącznik kabli koncentrycznych.

W położeniu „0" przełącznika p woltomierz cyfrowy mierzy siłę elektromotoryczną E generatora, w położeniu „1" wskazuje napięcie na rezystancji R_O:

$$U_R = \frac{ER_O}{\sqrt{(R_g+R_O)^2+X_g^2}}, \tag{2}$$

zaś w położeniu „2" wskazuje napięcie

$$U_Z = \frac{E\sqrt{R^2+X^2}}{\sqrt{(R_g+R)^2+(X_g+X)^2}}. \tag{3}$$

Wartości E, U_R i U_Z są modułami wielkości wektorowych (symbolicznych).

Charakter impedancji obciążenia $\overline{Z}_O$ może być zarówno indukcyjny $X = X_L$ jak i pojemnościowy $X = -X_C$.

Przyjmując przykładowo $\overline{Z}_O = \overline{Z}_L = R_L + jX_L$, w równaniach (2) i (3) otrzymujemy układ dwóch równań z niewiadomymi R_g i X_g w postaci:

$$R_g^2 + 2R_O R_g + X_g^2 = \frac{(E^2 - U_R^2)R_O^2}{U_R^2}, \tag{4}$$

$$R_g^2 + 2R_L R_g + X_g^2 + 2X_L X_g = \frac{(E^2 - U_L^2)Z_L^2}{U_L^2}, \tag{5}$$

przy czym $U_Z = U_L$, zaś indeks L wskazuje na indukcyjny charakter obciążenia.

Przyjmując, że $R_L = R_O$, co można z łatwością zawsze dokonać, odejmujemy stronami równanie (4) od równania (5) otrzymując wynik:

$$X_g = \frac{E^2}{2X_L}\left[\left(\frac{Z_L}{U_L}\right)^2 - \left(\frac{R_O}{U_R}\right)^2\right] - 0{,}5\,X_L, \tag{6}$$

$$R_g = \sqrt{\left(\frac{ER_O}{U_R}\right)^2 - X_g^2} - R_O. \tag{7}$$

Wzory (6) i (7) na ekwiwalentną rezystancję R_g i reaktancję X_g generatora jako źródła napięciowego (por. rys. 1) pozwalają obliczyć rezystancję, reaktancję i impedancję wewnętrzną generatora, np. jako funkcję częstotliwości itp.

Otrzymane trzy pomiary mogą być „zapamiętane" i poddane cyfrowej obróbce, w wyniku której otrzymamy praktycznie natychmiast parametry generatora, nawet przy niestabilnym napięciu wyjściowym [1].

Uwzględnienie parametrów wejściowych woltomierza cyfrowego, przewodów łączeniowych, przełącznika koncentrycznego ma sens dla częstotliwości znacznie większych od akustycznych.

[1] przez zastosowanie woltomierza cyfrowego sterowanego mikroprocesorem, np. f-my Schlumberger-Solatron model 7055 lub 7065.

Z uwagi na łatwo dostępne kondensatory, np. dekadowe, może być wygodne zastosowanie obciążenia $\overline{Z}_O = \overline{Z}_C = R_C - jX_C$ z warunkiem koniecznym $R_C = R_O$.

Wzory na ekwiwalentną rezystancję, reaktancję i impedancję wewnętrzną generatora mają analogiczną, lecz nieco inną postać:

$$X_g = \frac{E^2}{2X_C}\left[\left(\frac{R_O}{U_R}\right)^2 - \left(\frac{Z_C}{U_C}\right)^2\right] + 0{,}5\,X_C, \tag{8}$$

$$R_g = \sqrt{\left(\frac{ER_O}{U_R}\right)^2 - X_g^2} - R_O, \tag{9}$$

przy czym: E, U_R, U_C są odpowiednimi napięciami w położeniach przełącznika 0, 1 i 2.

Formalnie rodzaj obciążenia ma wpływ tylko na wyrażenia matematyczne rezystancji, reaktancji i impedancji generatora, natomiast z punktu widzenia fizykalnego sprawa jest bardziej złożona i nie należy stosować obciążenia pojemnościowego dla generatorów o wyjściu transformatorowym (X_g — indukcyjne) z uwagi na możność wystąpienia ferrorezonansu napięcia lub prądu.

4. BADANIA

Sprawdzenie poprzednich rozważań przeprowadzono dla dwóch odrębnych typów generatorów [10, 11], a mianowicie:

1. o wyjściu transformatorowym generator akustyczny ze wzmacniaczem f-my General-Radio typ 1308 A, 200 VA, 4 ... 400 V, 0,05 ... 5 A, 20 Hz ... 20 kHz,
2. o wyjściu wtórnikowym generator f-my Krohn-Hite typ 4200, 0,5 VA, 3,16 mV ... 10 V, 10 Hz ... 10 MHz, $Z_g = 50\Omega \pm 1\%$.

Generator GR 1308 A był obciążany impedancją o charakterze indukcyjnym $\overline{Z}_O = \overline{Z}_L$, natomiast generator f-my Krohn-Hite 4200 — impedancją o charakterze pojemnościowym $\overline{Z}_O = \overline{Z}_C$.

Wyniki pomiarów parametrów generatorów w zależności od częstotliwości podano w tablicach 1 i 2, które zawierają również informacje dotyczące rodzaju i wartości stosowanych obciążeń.

Jak można było przewidzieć generator GR 1308 A o wyjściu transformatorowym wykazuje zmiany zarówno rezystancji jak i reaktancji indukcyjnej, również impedancji nie tylko w zależności od częstotliwości, zakresu napięciowego i prądowego, lecz także od podmagnesowania prądem stałym [2]. W tablicy 1 (poz. [10] i [11] podano przykładowe zmiany rezystancji, reaktancji i impedancji wewnętrznej generatora przy tej samej częstotliwości, dla tych samych położeń przełączników zakresu prądu i napięcia przy samym tylko napięciu sinusoidalnie zmiennym, jak również z podmagnesowaniem prądem stałym o wartości 1 A; w tym przypadku rezystancja, reaktancja i impedancja są znacznie mniejsze.

[2] Generator GR 1308 A jest unikalnym przyrządem, który może być bezpośrednio podmagnesowywany prądem stałym do wartości 5 A.

Tablica 1

Parametry generatora f-my General-Radio, typ 1308 A, nr 01036 Warunki otoczenia: $t_o = 20{,}3°C$; $w_z = 56\%$; b = 752,6 mm Hg

Lp.	f	U	J	R_o	X_L	Z_L	E	U_R	U_L	R_g	X_g	Z_g	Uwagi
—	Hz	V	A	Ω	Ω	Ω	V	V	V	Ω	Ω	Ω	—
1	50	4,0	0,16	92,6	31,42	97,8	4,000	3,966	3,971	0,7938	−0,0729	0,7938	$R_O = R_L$
2	100	,,	0,50	,,	62,83	111,9	4,021	4,006	4,009	0,3467	+0,0794	0,3467	$L = 0{,}1$ H
3	200	,,	1,60	,,	125,7	156,1	4,005	3,990	3,999	0,3481	+0,0021	0,3481	
4	500	,,	5,00	,,	314,2	327,6	4,007	3,995	4,005	0,2761	0,1289	0,3065	
5	1000	40,0	0,50	,,	628,3	635,1	40,08	39,60	39,98	1,1111	1,4543	1,8302	
6	2000	,,	1,60	,,	1256,6	1260,0	40,50	39,96	40,39	1,1917	3,3454	3,5513	
7	5000	,,	5,00	,,	3141,6	3143,0	40,58	39,46	40,47	2,2467	8,5153	8,8067	
8	10000	,,	,,	,,	6283,2	6283,9	40,46	37,36	40,36	6,4800	15,490	16,791	
9	20000	,,	,,	,,	12566,4	12556,7	35,26	37,94	35,21	22,925	17,615	28,911	
10	1000	40,0	5,0	92,6	628,3	635,1	10,027	9,914	10,011	1,0512	0,8834	1,3731	
11	,,	,,	,,	,,	,,	,,	10,022	9,931	10,010	0,8462	0,6574	1,0716	*)

*) Przy dodatkowym podmagnesowaniu prądu stałym 1 A. Obliczane na TI-58.

Tablica 2

Parametry generatora f-my Krohn-Hite, mod. 4200, nr fabr. 1192 Warunki otoczenia: t_o = 20,6°C; w_z = 48%; b = 748,6 mm Hg

Lp.	f	R_O	X_C	Z_C	E	U_R	U_C	R_g	X_g	Z_g	Uwagi
—	Hz	Ω	Ω	Ω	V	V	V	Ω	Ω	Ω	
1	50	50,0	—	—	—	—	—	—	—	—	
2	100	,,	1591,55	1592,34	10,220	5,103	10,205	50,18	+0,02	50,14	$R_C = R_O$
3	200	,,	795,78	797,34	10,220	5,102	10,159	50,16	−0,08	50,16	
4	500	,,	318,31	322,21	10,217	5,100	9,863	50,17	−0,08	50,17	
5	1000	,,	159,11	166,78	10,211	5,097	9,055	50,17	−0,07	50,17	
6	2000,5	,,	79,56	93,96	10,212	5,096	7,488	50,20	−0,06	50,20	
7	15002,2	,,	31,82	59,26	10,212	5,096	5,762	50,20	+0,20	50,20	
8	10001	,,	15,91	62,47	10,210	5,095	5,289	50,19	+1,02	50,20	
9	20000	,,	7,96	50,63	10,199	5,091	5,148	50,14	+2,24	50,20	

Obliczane na HP-65.

Generator K-H 4200 o wyjściu z wtórnika emiterowego wykazuje nieznaczne zmiany rezystancji i impedancji; wprawdzie zmiany reaktancji są znaczne, lecz w badanym zakresie częstotliwości mają one niewielki wpływ na impedancję generatora.

Wyniki podane w tablicach 1 i 2 są tylko ilustracją i potwierdzeniem rozważań teoretycznych. Warto jednak zaznaczyć, że generator f-my Krohn-Hite typu 4200 był również badany przy obciążeniu indukcyjnym, a wyniki pomiarów impedancji były w granicach błędu pomiaru.

5. ZAKOŃCZENIE

Zaproponowana prosta metoda pomiaru parametrów wewnętrznych generatora, polegająca na pomiarze przy pomocy woltomierza cyfrowego TRMS trzech tylko napięć: biegu luzem, napięcia na znanym rezystorze i napięcia na znanej impedancji, jest łatwa do zrealizowania w każdym laboratorium.

Wprawdzie wzory (6) i (7) bądź (8) i (9) są złożone, lecz obecnie przy powszechnym użyciu kalkulatorów, zwłaszcza programowanych, obliczenia nie nastręczają trudności.

Dokładność tej metody technicznej jest określona błędem systematycznym, np. [3]. Autorzy celowo nie podają tych dość długich wyrażeń, lecz przy stosowaniu elementów układu kl. 0,1 błąd ten nie przekracza wartości ~ 0,5% [3)].

Powyższą metodę stosowano również z powodzeniem do pomiaru impedancji regulatorów indukcyjnych oraz rezystancji, reaktancji i impedancji pętli zerowania (bądź uziemienia) w instalacjach elektrycznych. Zwłaszcza w tych ostatnich przypadkach wykazała ona swoje zalety, mimo wahań mierzonych napięć, wywołanych zmianami obciążeń. W tym właśnie przypadku zastosowanie nowoczesnej techniki cyfrowej przez zapamiętanie wy-

[3)] Opracowano również laboratoryjne metody pomiaru parametrów wewnętrznych generatorów typu mostkowego w Instytucie Łączności i typu mostkowo-kompensacyjnego w Instytucie Elektrotechniki.

ników dla np. jednego półokresu i poddanie ich obróbce cyfrowej wydaje się być bardzo dobrym rozwiązaniem dającym praktycznie natychmiast trzy wartości rezystancji, reaktancji i impedancji pętli niezależnie od wahań napięcia sieci.

Proponowana metoda kolejnych pomiarów jest nieporównywalnie szybsza i dokładniejsza od metody podanej przez R. W. Buchheima oraz mniej skomplikowana od kolejnych jej ulepszeń [9, 12, 13].

LITERATURA

1. J. C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, Vol. I, Dover Publ. Inc., New York 1964.
2. R. W. Buchheim, *Determination of internal impedance using semi-graphical procedure*, Communications, October, 1949.
3. D. Karo, *Electrical measurements and the calculation of the errors involved*, P. I. Mac Donald, London 1961.
4. R. G. Fulka, H. P. Hall, *A new system for measuring the inductance of iron-cored coils* G. R. Experimenter, Vol. 36, No 5, May 1962.
5. N. N. Sołowiew, *Izmieritielnaje tiechnika w prowodnej swiazi, Cz. II, Izmierenija napriażenia i soprotiwlenii (prowodnosti)*, Izd. Swiaz, Moskwa 1969.
6. M. Kędzierski, *Metoda pomiaru ekwiwalentnej oporności i indukcyjności maszyn elektrycznych* IEL, NMS 82/71, nr arch. 281/71, Warszawa 1971.
7. *IEEE*: *Standard Dictionary of Electrical and Electronic Terms*, Willey Interscience a divison of John Willey Sons, Inc. New York, London, Sydney 1972.
8. *IEC*: *Audio frequency generators*, Pub. 403, First Edition, Geneve 1972.
9. B. Dąbrowski, Z. Kuśmirek, *Metodyka kontrolowania impedancji wyjściowej źródeł napięć pomiarowych w telekomunikacyjnej służbie pomiarowej*, Inst. Łączności, Warszawa 1972.
10. *Gen. Radio Co*: *Audio oscillator and power amplifier Type 1308-A*, April 1970, West-Concord, Massachussetts.
11. Krohn-Hite Co, *Operating and maintenance mannual. Solid state test oscilator Model 4200 R*, Cambridge Mass. USA, 1973.
12. Z. Gochnio, Z. Kuśmirek, *Metodyka sprawdzania użytkowych generatorów w zakresie częstotliwości do 1,5 MHz w telekomunikacyjnych izbach pomiarowych*, Instytut Łączności, Warszawa 1974.
13. J. Bobieński, *Metodyka pomiaru znormowanej zastępczej impedancji wewnętrznej generatorów stosowanych w telekomunikacji*, Instytut Łączności, Warszawa 1975.
14. Z. Kuśmirek, *Parametry wyjściowe źródeł napięcia. Definicje i metody pomiarowe*, Instytut Łączności, Warszawa 1975.

M. KĘDZIERSKI, Z. KUŚMIREK

INTERNAL IMPEDANCE MEASUREMENT OF GENERATORS

Summary

The introduction mentions the analytic-graphical R. W. Buchheim method and its modifications in common use until now. The authors present a new unique and simple method of measuring internal resistance, reactance and impedance of the electric voltage and current sources.

As confirmation of the mathematical considerations are given the results of measurements of two generators which have transformer and emitter follower outputs.

M. KĘDZIERSKI, Z. KUŚMIREK

MESURAGE DE L'IMPÉDANCE INTERNE DES GÉNÉRATEURS

Résumé

On a cité la méthode grapho-analytique couramment employée par R. E. Buchheim et ses modifications. Ensuite on a présenté une nouvelle méthode, originale et simple, de mesure de la résistance, la réactance et l'impédance interne des sources de tension et de courant de l'énergie électrique.

Les considérations théoriques ont été confirmées par les résultats de mesure des paramètres internes des deux générateurs, l'un à sortie par transformateur et l'autre par étage de charge d'émetteur.

M. KĘDZIERSKI, Z. KUŚMIREK

IMPEDANZMESSUNG BEI GENERATOREN

Zusammenfassung

In der Einführung wurde auf des analytisch-graphische Meßverfahren von R. W. Buchheim und seine Abwandlungen hingewiesen. Im weiteren haben die Verfasser eine neue, einzigartige und einfache Meßmethode zur Bemessung der Wirk-, Blind- und Scheinwiderstände von elektrischen Spannungs- und Stromquellen dargestellt.

Zwecks Begründung der mathematischen Erwägungen sind die Meßergebnisse der Innenparameter zweier Generatoren mit Transformator- und Folgerausgang angeführt worden.

М. КЕНДЗИЕРСКИ, З. КУСЬМИРЕК

ИЗМЕРЕНИЕ ВНУТРЕННЕГО ИМПЕДАНСА ГЕНЕРАТОРОВ

Резюме

Во введении упомянут широко применяемый до настоящего времени аналитическо-графический метод Р. В. Бухгейма и его модификации. Авторы представили новый уникальный и простой метод измерения активного, реактивного и полного внутреннего сопротивления источников напряжения и тока.

В качестве подтверждения математических выкладок представлены результаты измерения внутренних параметров генераторов с трансформатором и с эмиттерным повторителем на выходе.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1979, 25, z. 4, ss. 1013 — 1020

Application of Euler Method in Shape Synthesis for Autonomous Systems

ANDRZEJ SZATKOWSKI (GDAŃSK)
Instytut Technologii Elektronicznej Politechniki Gdańskiej

The paper received 5.6.1978

The paper presents an approximate method od shape synthesis for system $\dot{x} = f(x)$. A solution will be sought by using the Euler method of approximate integration.

1. INTRODUCTION

Consider an autonomous system described by equation

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

where: $x \in E^n$, E^n — n-dimensional Euclidean space and

$$f: E^n \ni x \to E^n. \tag{2}$$

Define $C_n^{(1)}([0, \tau], E^n)$ as n-dimensional Euclidean space of vector functions $x(t) = [x_1(t), \ldots, x_n(t)]^T$ defined in a finite time interval $[0, \tau]$ and possessing continuous derivative for $t \in (0, \tau)$.

The shape synthesis for system (1) is defined in the following way. For a given function $x^o(\cdot) \in C_n^{(1)}$ find a function $f(\cdot)$ such that the system (1) possesses a solution identical to $x^o(\cdot)$ for $t \in [0, \tau]$.

A system (1) possessing the prescribed solution $x^o(\cdot)$ may be used in number of ways. If the problem of the shape synthesis is solved, it is possible to synthesize a large class of function generators in the form of analog circuits. A general analog circuit simulating system (1) is presented in Fig. 1.

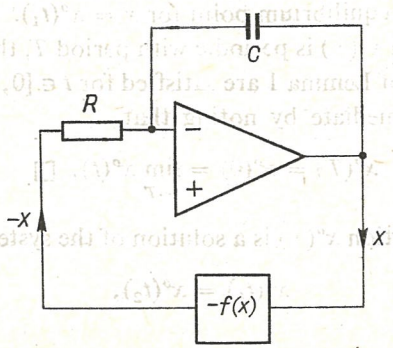


Fig. 1. Analog circuit diagram of system (1)

Many interesting applications of the systems (1) possessing the prescribed solutions are given in [1] and [2].

This paper presents an approximate method of shape synthesis for system (1) by using the Euler method of approximate integration. Some general remarks about the realizability of the shape synthesis are presented.

2. REALIZABILITY CONDITIONS

Let us consider the conditions for the function $x^o(\cdot) \in C_n^{(1)}$ under which there exists system (1) possessing $x^o(\cdot)$ as a solution. The following lemmas are true.

L e m m a 1: If the function $x^o(\cdot)$ is one-to-one and for any $t \in [0, \tau)$

$$\dot{x}^o(t) \neq 0 \tag{3}$$

then there exists a system (1) possessing $x^o(\cdot)$ as a solution, for $t \in [0, \tau)$, $f(x^o(t)) \neq 0$.

Proof: If the function $x^o(\cdot)$ is one-to-one, there exists an inverse function

$$t = t(x) \tag{4}$$

defined in

$$E^n \ni E_{x^o} \triangleq \{x: \exists\, t \in [0, \tau], \quad x = x^o(t)\} \tag{5}$$

and a continuous function $\tilde{t}$

$$t = \tilde{t}(x) \tag{6}$$

defined in E^n and identical to $t(\cdot)$ for $x \in E_x o$. Consider the following system

$$\dot{x} = \dot{x}^o(\tilde{t}(x)). \tag{7}$$

If condition (3) is satisfied, (7) does not possess an equilibrium point for $x \in E_x o$ and for the initial condition $x(0) = x^o(0)$ it possesses a solution identical to $x^o(\cdot)$ for $t \in [0, \tau]$. □

L e m m a 2: If function $x^o(\cdot)$ is constant for $t \geqslant t_1 \in [0, \tau]$, the shape synthesis possesses a solution if function $x^o(\cdot)$ satisfies the conditions of Lemma 1 for $t \in [0, t_1)$.

Proof: The proof follows from the proof of Lemma 1 and from the fact that in this case system (7) possesses an equilibrium point for $x = x^o(t_1)$. □

L e m m a 3: If function $x^o(\cdot)$ is periodic with period T, the shape synthesis possesses a solution if the conditions of Lemma 1 are satisfied for $t \in [0, T)$.

Proof: The proof is immediate by noting that

$$x^o(T) = x^o(0) = \lim_{t \to T} x^o(t). \ \square \tag{8}$$

L e m m a 4: If the function $x^o(\cdot)$ is a solution of the system (1) and for $t_1, t_2 \in [0, \tau]$

$$x^o(t_1) = x^o(t_2), \tag{9}$$

then

$$\dot{x}^o(t_1) = \dot{x}^o(t_2). \tag{10}$$

Proof: Because function $f(\cdot)$ is single-valued, then

$$\dot{x}^o(t_1) = f(x^o(t_1)), \tag{11}$$

$$\dot{x}^o(t_2) = f(x^o(t_2)). \tag{12}$$

Combining (11) and (12) yields

$$\dot{x}^o(t_1) = \dot{x}^o(t_2). \ \square \tag{13}$$

3. FIRST ORDER REALIZATION

Let $n = 1$. Consider equation

$$\dot{x} = f(x) \tag{14}$$

and a function $x^o(\cdot) \in C_1^{(1)}$, $t \in [0, \tau]$. Function $x^o(\cdot)$ is assumed to satisfy the realizability conditions of the shape synthesis. Our purpose is to synthesize system (14), which will possess for the initial condition

$$x(0) = x^o(0) \tag{15}$$

the prescribed solution $x^o(\cdot)$. This problem will be solved by using the Euler method of approximate integration of equation (14). Applying this method for equation (14) we obtain the following relation

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + f(x(t_k)) \cdot \Delta t_k \tag{16}$$

where $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ and the points $t_1, \ldots, t_m$, chosen arbitrarily in $[0, \tau]$, must satisfy the following conditions

$$\begin{aligned} &t_1 = 0, \quad t_m = \tau, \\ &t_1 < t_2 < \ldots t_m. \end{aligned} \tag{17}$$

Define a function $\tilde{f}$ as follows

$$\text{for } x^1 = x^o(t_1) \quad \tilde{f}(x^1) = \frac{x^2 - x^1}{\Delta t_1}, \tag{18}$$

$$\text{for } x^k = x^o(t_k) \quad \tilde{f}(x^k) = \frac{x^{k+1} - x^k}{\Delta t_k}, \tag{19}$$

$k = 1, 2, \ldots, m-1$.

In the next step we construct function $\tilde{f}$ in space E^1 using interpolation technique:

$$\forall x \in E^1 : \tilde{f}(x) = \sum_{j=1}^{m=1} L_j(x) \cdot \tilde{f}(x^j) \tag{20}$$

where

$$L_j(x) = \frac{(x - x^1) \cdot \ldots \cdot (x - x^{j-1}) \cdot (x - x^{j+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x^{m-1})}{(x^j - x^1) \cdot \ldots \cdot (x^j - x^{j-1}) \cdot (x^j - x^{j+1}) \cdot \ldots \cdot (x^j - x^{m-1})} \tag{21}$$

denotes the Lagrangian polynomial.

Note that function $\tilde{f}(\cdot)$ may be written in the form of m-2-order polynomial

$$\tilde{f}(x) = a_{m-2} \cdot x^{m-2} + \ldots a_1 \cdot x + a_o. \tag{22}$$

The coefficients $a_o, \ldots, a_{m-2}$ can be calculated from equation (20). Consider the following equation

$$\dot{x} = \tilde{f}(x). \tag{23}$$

Let $\hat{x}(\cdot)$ denote the solution of (23) for the initial condition (15). Applying the method presented here it is possible to synthesize the system (23) so that the error

$$\delta \triangleq \max_{t \in [0, \tau]} |x^o(t) - \hat{x}(t)| \tag{24}$$

may be arbitrarily small [3]. If the points t_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ are distributed uniformly, the method is of the order τ/m in the sense presented in [3].

Note that for the large values of m the interpolation technique used in the approximate construction of the function $\tilde{f}$ is impractical because of a large degree of polynomial (22).

Much better is the method of least squares. In this case, number of points t_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) satisfies the relation

$$m \gg p. \tag{25}$$

In the following sections we apply this method in order to obtain an approximate form of function $\tilde{f}$.

4. *nTH*-ORDER REALIZATION

Consider an *n-th*-order system (1). Rewrite (1) in a more explicit form

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n), \tag{26}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$. Let $x^o = x^o(t)$ denote a given vector function from space $C_n^{(1)}$. Define a function $\tilde{f} = [\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n]^T$ in the following way:

first step — choose the points $t_1, t_2, \ldots, t_m \in [0, \tau]$ for prescribed value of m,

second step — define

$$a_{i,k} = \frac{x_i^{k+1} - x_i^k}{\Delta t_k}, \tag{27}$$

third step — construct functions $\tilde{f}_i$ using the method of least squares; by assumption $\tilde{f}_i$ are of the form of polynomials

$$\tilde{f}_i(x) = \sum b^i_{l_1, \ldots, l_n} \cdot x_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{l_n}, \quad m \gg p, \quad l_1 + l_2 + \ldots + l_n \leqslant p \tag{28}$$

and the functions

$$F_i(b_i) = \sum_{k=1}^{m-1} [\tilde{f}_i(x_1^k, \ldots, x_n^k) - a_{i,k}]^2, \tag{29}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, are minimized;

fourth step — define the following equation

$$\dot{x} = \tilde{f}(x), \tag{30}$$

$x \in E^n$. Let $\hat{x} = \hat{x}(t)$, $t \in [0, \tau]$ denote the solution of (30) for $x(0) = x^o(0)$. Note that for $m, p \to \infty$ the error $\delta \to 0$.

5. EXAMPLE

As an example, consider the case $n = 2$. The functions $x_1^o = x_1^o(t)$, $x_2^o = x_2^o(t)$ are given in Fig. 2. For $m = 38$, $\tau = 9$, $t = 0.25$ and $p = 3$ one obtains

$$\begin{aligned}\tilde{f}_1(x_1, x_2) = {} & 0.4488 - 9.7512 \cdot x_1 + 0.5859 \cdot x_2 + \\ & + 3.2831 \cdot x_1^2 + 1.5582 \cdot x_1 \cdot x_2 + 0.0686 \cdot x_2^2 - 0.2784 \cdot x_1^3 - \\ & - 0.2669 \cdot x_1^2 \cdot x_2 - 0.0783 \cdot x_1 \cdot x_2^2 - 0.0081 \cdot x_2^3,\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}_2(x_1, x_2) = {} & 3.9853 + 12.3123 \cdot x_1 - 0.5355 \cdot x_2 - \\ & - 3.3912 \cdot x_1^2 - 2.7121 \cdot x_1 \cdot x_2 - 0.2735 \cdot x_2^2 + 0.2114 \cdot x_1^3 + \\ & + 0.3866 \cdot x_1^2 \cdot x_2 + 0.1472 x_1 \cdot x_2^2 + 0.0365 \cdot x_2^3.\end{aligned} \tag{32}$$

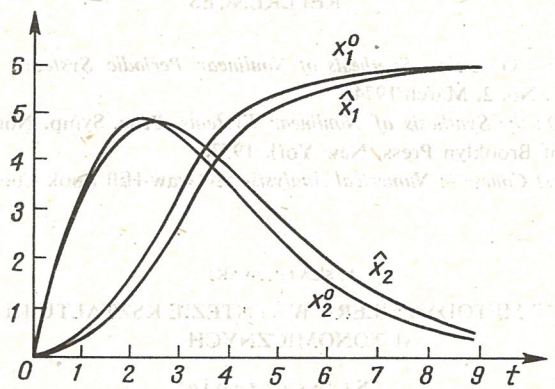


Fig. 2. Functions $x^o(\cdot)$ and $\hat{x}(\cdot)$

A solution $\hat{x} = \hat{x}(t)$ or system (30), for $\tilde{f}$ given in (31) and (32), is drawn in Fig. 2. An analog circuit diagram of the synthesized system is presented in Fig. 3.

6. CONCLUSIONS

In this work, the realizability conditions of the shape synthesis for nonlinear autonomous systems are presented. The method of the shape synthesis described in this work may be used for modeling and simulation of the behaviour of physical systems.

Note, that if function $x^o(\cdot)$ is periodic, the solution $\hat{x}(\cdot)$ must satisfy an additional condition

$$\hat{x}(0) = \hat{x}(T). \tag{33}$$

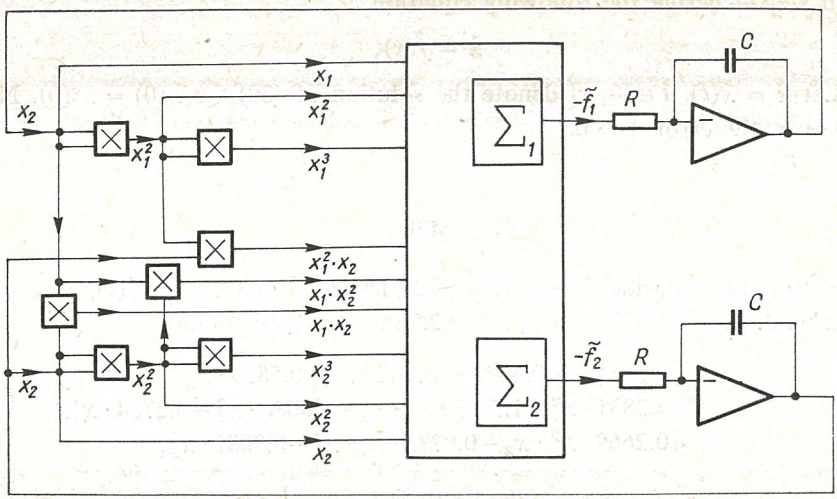


Fig. 3. Analog circuit diagram illustrating the generation of $\hat{x}(\cdot)$

REFERENCES

1. L. O. Chua, D. N. Green, *Synthesis of Nonlinear Periodic Systems.* IEEE Trans. on Circ. and Syst., vol. CAS-21, No. 2, March 1974.
2. L. M. Vallese, *On the Synthesis of Nonlinear Systems*, Proc. Symp. Nonlinear Circuit Analysis, Polytechnic Institute of Brooklyn Press, New York 1953.
3. A. Ralston, *A First Course in Numerical Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York 1965,

A. SZATKOWSKI

ZASTOSOWANIE METODY EULERA W SYNTEZIE KSZTAŁTU DLA UKŁADÓW AUTONOMICZNYCH

Streszczenie

W pracy przedstawiono metodę syntezy nieliniowych układów autonomicznych w oparciu o metodę Eulera przybliżonego całkowania równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. Rozważono warunki realizowalności syntezy oraz zastosowanie przedstawionej metody w syntezie nieliniowych układów analogowych.

A. SZATKOWSKI

APPLICATION DE LA MÉTHODE D'EULER À LA SYNTHÈSE DE LA FORME DANS LES SYSTÈMES AUTONOMIQUES

Résumé

Dans l'étude on présente la méthode de synthèse des systèmes non linéaires autonomiques, en la basant sur la méthode d'Euler de l'intégration approximative des équations différentielles simples du premier ordre. On a examiné les conditions de la réalisation de synthèse ainsi que l'utilisation de la méthode présentée dans la sytnhèse des systèmes analogues non linéaires.

A. SZATKOWSKI

ANWENDUNG DER EULER-METHODE FÜR DIE FORMSYNTHESE AUTONOMER SYSTEME

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die Methode der Synthese von nichtlinearen autonomen Systemen in Anlehnung an die Euler-Methode der approximativen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung dargestellt.

Man hat die Realisationsbendingungen der Synthese sowie die Anwendung der geschilderten Methode bei der Synthese der nichtlinearen Analogsysteme untersucht.

А. ШАТКОВСКИ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЕЙЛЕРА К СИНТЕЗУ ФОРМЫ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

Резюме

Представлен метод синтеза автономных нелинейных систем на основе метода Ейлера приближенного интегрирования дифференциальных обыкновенных уравнений первого порядка. Обсуждены условия реализуемости синтеза и применения представленного метода к синтезу нелинейных аналоговых систем.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1979, 25, z. 4, ss. 1021—1046

621.375.126

Szeregowe obwody rezonansowe wzmacniaczy klasy D_{wcz}

STANISŁAW SYPNIEWSKI (WARSZAWA)

Instytut Łączności

Otrzymano 26.4.1978

Po wprowadzeniu omawiającym zasadę działania tranzystorowych wzmacniaczy wielkiej częstotliwości klasy *D*, o kluczowanym przebiegu napięcia, autor przystępuje do dyskusji czynników decydujących o wyborze szeregowych obwodów rezonansowych, stanowiących charakterystyczny element układu tych wzmacniaczy. Dla unaocznienia zachodzących zależności przedstawiono szczegółowo stosowane rozwiązania techniczne obwodów drgań typu gamma. Po zmodyfikowaniu tego typu obwodu, umożliwiającym uzyskanie regulacji współczynnika transformacji obciążenia, powstaje ekonomicznie uzasadniony wariant szczególnie dogodny dla celów praktycznej realizacji układu wzmacniacza klasy D_{wcz}. Całość rozważań odniesiono do zależności charakterystycznych dla prostego obwodu szeregowego.

W zakończeniu zestawiono wnioski istotne zwłaszcza przy projektowaniu podobnych układów wzmacniaczy. W aneksie zawarto wyprowadzenie przedstawionych zależności matematycznych.

1. WPROWADZENIE

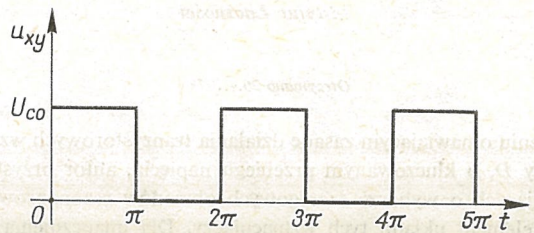
W odróżnieniu od szeroko w radiotechnice stosowanych równoległych obwodów rezonansowych stosunkowo rzadko natrafiamy na układy wzmacniaczy zawierających szeregowe obwody rezonansowe. Jak dotąd jest to zwykle związane z koniecznością selektywnego wyeliminowania drgań o określonej częstotliwości leżącej w paśmie sygnałów wzmacnianych. Obwody szeregowe były zatem nieomal wyłącznie wykorzystywane jako filtry zaporowe lub tzw. eliminatory.

Z chwilą opublikowania [1] w 1959 r. zasady działania układów wzmacniaczy w.cz. o drganiach wzbudzanych metodą przyłożenia na końcówki szeregowego obwodu rezonansowego ciągu impulsów napięcia o przebiegu prostokątnym i właściwej częstotliwości powtarzania, a więc napięcia kluczowanego synchronicznie z jego częstotliwością drgań własnych, stan wspomniany na wstępie uległ zasadniczej zmianie. Nastąpił szybki rozwój nowego rodzaju zastosowań poparty licznymi publikacjami wielu autorów.

Wzmacniacze o kluczowanym przebiegu napięcia, nazywane często wzmacniaczami klasy *D*, dają się realizować specjalnie korzystnie [2] w technice półprzewodnikowych elementów wykorzystywanych jako klucze elektronowe. Układy te ze względu na właściwości dostępnych tranzystorów pracują poprawnie w zakresach częstotliwości leżących zazwyczaj poniżej kilkudziesięciu MHz.

Najdogodniejszą aproksymacją kluczowanego przebiegu napięcia jest fala prostokątna, przedstawiona w uproszczeniu na rys. 1.

W szeregowo-przeciwsobnym wzmacniaczu klasy D_{wcz}, pracującym w układzie według rys. 2, uzyskujemy taką falę na zaciskach xy, do których przyłącza się szeregowy obwód rezonansowy LCr. Przy dostatecznie dużej dobroci Q_L tego obwodu ($Q_L \geqslant 5$), dzięki jego własnościom selektywnym, na szeregowej rezystancji obciążenia r_L wystąpi w tych warunkach nieomal czysto sinusoidalne napięcie w.cz. zawierające składową podstawową fali prostokątnej oraz, jak to wynika z rozkładu Fouriera, jej nieparzyste harmoniczne.



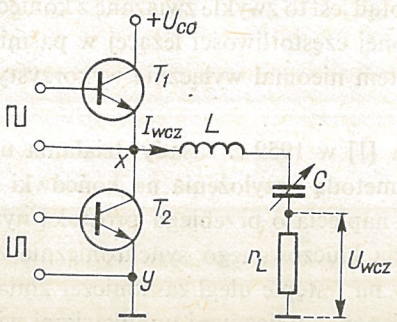
Rys. 1. Aproksymacja przebiegu napięcia kluczowanego

Amplitudy tych harmonicznych wraz ze wzrostem ich rzędu będą zgodnie z przebiegiem krzywej rezonansu, wynikającej z dobroci Q_L obciążonego obwodu drgań, coraz silniej tłumione.

Częstotliwość wytworzonych drgań, dla tego typu wzmacniacza, odpowiada częstotliwości drgań własnych obciążonego obwodu rezonansowego, która jest określona zależnością

$$f_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{[\Sigma(r)]^2}{4L^2}}, \tag{1}$$

gdzie: L, C, $[\Sigma(r)]$ stanowią indukcyjność, pojemność oraz sumę rezystancji szeregowego obwodu drgań.



Rys. 2. Układ szeregowo-przeciwsobnego wzmacniacza klasy D
T_1 — tranzystor ładujący, T_2 — tranzystor rozładowujący pojemność C obwodu drgań

Oba przeciwsobnie kluczujące tranzystory wzmacniacza klasy D_{wcz} powodują na przemian cykliczne ładowanie i rozładowanie kondensatora C obwodu drgań. Ładowanie kondensatora C poprzez tranzystor T_1 odbywa się impulsem ze źródła zasilania U_{co} wzmac-

niacza. Kondensator obwodu drgań rozładowuje się w następnym półokresie poprzez tranzystor T_2 podobnym impulsem odwrotnej kierunkowości. W ten sposób powstaje, złożony z dwu połówek, przepływ prądu w.cz. o kształcie bliskim do sinusoidalnego, gdyż wymuszonym własnościami rezonansowymi obwodu szeregowego.

Amplituda tego prądu, przy stałym napięciu zasilania, wynika z wartości sumy rezystancji w obwodzie. W związku z tym kluczowany wzmacniacz szeregowo-przeciwsobny klasy D_{wcz} możemy uważać, w odróżnieniu od wzmacniaczy konwencjonalnych pracujących w klasach A, B lub C, za źródło napięciowe.

Teoretycznie osiąganą amplitudę sinusoidalnego napięcia w.cz., występującą na rezystancji obciążenia r_L obwodu drgań o odpowiednim Q_L, wyrazimy zgodnie z rozkładem Fouriera zależnością

$$U_{c\,max\,T} = U_{wcz} = \frac{2}{\pi} U_{co} \cong 0{,}637\, U_{co} \tag{2}$$

gdzie U_{co} jest amplitudą fali prostokątnej i przy przyjętych założeniach upraszczających ($\eta = 100\%$) odpowiada napięciu zasilania wzmacniacza.

W warunkach rzeczywistych wartość amplitudy napięcia w.cz. będzie dla takiego wzmacniacza nieco mniejsza. Trzeba bowiem uwzględnić spadek napięcia na szeregowej rezystancji tranzystorów kluczujących, pracujących przy przewodzeniu w stanie nasycenia oraz straty występujące w elementach samego obwodu drgań. W związku z tym użyteczna moc wyjściowa wzmacniacza będzie nieco mniejsza od mocy doprowadzonej ze źródła zasilania i wyniesie

$$P'_{1wcz} = P_o \eta = \frac{1}{2} U_{wcz} I_{wcz} \eta, \tag{3}$$

gdzie:

P_o — moc zasilania wzmacniacza równa $I_{co} U_{co}$,

η — sprawność energetyczna wzmacniacza równa P'_{1wcz}/P_o.

Można udowodnić [2], [3], że sprawność energetyczna wzmacniacza klasy D_{wcz}, o komutowanym napięciu, określa stosunek rezystancji szeregowych w układzie

$$\eta = \frac{r_L}{(r_L + r_Q + r'_c)} = \frac{r_L}{\Sigma(r)}, \tag{4}$$

gdzie:

r_L — szeregowa rezystancja obciążenia użytecznego wzmacniacza,

r_Q — zastępcza rezystancja strat własnych obwodu drgań,

r'_c — zastępcza szeregowa rezystancja elementu kluczującego.

Praktycznie uzyskiwana sprawność energetyczna wzmacniacza klasy D_{wcz} o prawidłowo zaprojektowanych wartościach elementów układu łatwo może osiągać wysokie wartości i zwykle w warunkach laboratoryjnych zawarta jest w granicach od 90% do 95%, co stanowi istotną zaletę tych układów.

Przy obliczeniach szacunkowych wysokosprawnych wzmacniaczy o kluczowanym przebiegu napięcia nie uwzględniamy, w związku z tym, strat występujących w układzie wzmacniacza, a zwłaszcza w jego kluczujących tranzystorach i elementach obwodu drgań, przyjmując sprawność za dostatecznie bliską granicy $\eta = 100\%$.

W niniejszym opracowaniu rozpatrzymy nieco szczegółowiej aspekty dotyczące zagadnienia właściwego wykorzystania szeregowych obwodów rezonansowych w kluczowanych wzmacniaczach tranzystorowych klasy D_{wcz}.

2. GŁÓWNIEJSZE CZYNNIKI WPŁYWAJĄCE NA WYBÓR TYPU OBWODU DRGAŃ

Przy projektowaniu konstrukcji użytkowych, wybór rodzaju rezonansowego obwodu drgań wzmacniacza klasy D_{wcz} jest pod względem elektrycznym uzależniony od szeregu warunków, które powinny być spełnione w układzie. Do głównych z nich zaliczymy:

a) dopasowanie obciążenia do optymalnej rezystancji dynamicznej obwodu,
b) utrzymanie napięć pasożytniczych na wyjściu wzmacniacza na dopuszczalnym poziomie,
c) dopuszczalne tłumienie wstęg bocznych sygnałów modulowanych,
d) sprawność energetyczną i prostotę układową obwodu rezonansowego przy zapewnieniu możliwości wymaganego przestrajania,
e) warunki wynikające z eksploatacji układów wzmacniaczy.

Z powyższego zestawienia wynika, że poza koniecznością optymalnego dopasowania obciążenia we wzmacniaczu, który to warunek jest oczywisty, wszystkie pozostałe wymagają szczegółowego omówienia.

Odnośnie poziomu napięć pasożytniczych należy stwierdzić, że został on dla nadajników ustalony przez Międzynarodowy Regulamin Radiokomunikacyjny (Genewa 1968, Dodatek 4).

Dla interesujących nas najbardziej nadajników radiofonicznych, pracujących w tzw. średniofalowym zakresie częstotliwości (525 kHz do 1605 kHz), w którym łatwo mogą być również wykorzystywane wzmacniacze rezonansowe klasy D_{wcz}, promieniowania niepożądane nie powinny przekraczać poziomu -40 dB względem poziomu emisji podstawowej i jednocześnie ich moc nie powinna być większa od 50 mW [1].

Zawartość harmonicznych w obciążeniu obwodu drgań wzmacniacza, o układzie według rys. 2, wynika jak wiadomo z rozłożenia na szereg Fouriera wyrażenia na prostokątny przebieg napięcia, jakim ten obwód jest pobudzany do drgań oraz z własności filtracyjnych tego obwodu.

Rozkład fali prostokątnej na szereg Fouriera przedstawia znana zależność

$$S = \frac{1}{2}A + \frac{2}{\pi}A\left[\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \frac{1}{(2n-1)}\sin(2n-1)\omega t + \ldots\right], \qquad (5)$$

gdzie A jest amplitudą przebiegu fali prostokątnej.

Natomiast rys. 3 ilustruje wzajemne usytuowanie przebiegów napięć i prądów we wzmacniaczu rezonansowym klasy D_{wcz} [2] przy komutowanym przebiegu napięcia. W związku z tym w napięciu wyjściowym wzmacniacza można oczekiwać głównie harmonicznych nieparzystych napięcia w.cz., z których największa, tzn. trzecia harmoniczna,

[1] Porównaj [4] i [5] str. 390 do 391.
[2] Porównaj [2] str. 16 do 37.

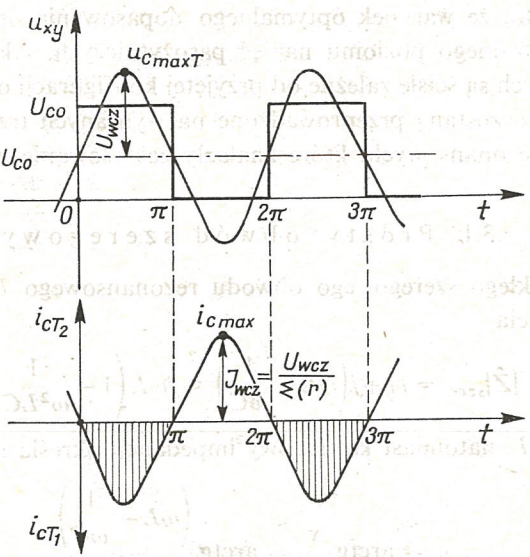
ma amplitudę napięcia równą jednej trzeciej amplitudy napięcia o częstotliwości podstawowej fali prostokątnej doprowadzanej na zaciski xy obwodu drgań typu szeregowego.

Stwierdzenie to możemy zanotować w postaci zależności

$$\frac{U_n}{U_1} = \frac{U_3}{U_1} = \beta_3 = \frac{I_3 r_L}{I_1 r_L} = \frac{I_3}{I_1} = \frac{1}{3}, \tag{6}$$

gdzie:

U_1 — amplituda napięcia o częstotliwości podstawowej,
U_3 — amplituda napięcia trzeciej harmonicznej,
U_n — amplituda napięcia n-tej harmonicznej,
I_1, I_3 — amplitudy prądów harmonicznych,
r_L — rezystancja obciążenia użytecznego wzmacniacza.



Rys. 3. Uproszczony przebieg napięcia kluczowanego oraz przebiegi napięcia i prądu w. cz. występujące w układzie wzmacniacza z rys. 2

Często przy projektowaniu nowych nadajników radiofonicznych stawiany jest dodatkowy warunek zaostrzający wymagania na poziom promieniowań niepożądanych. I tak np. można się spotkać z wymaganiami, według których poziom ten ma nie przekraczać mocy 10 mW.

Jeżeli więc tytułem przykładu przyjąć poziom mocy wyjściowej nadajnika o częstotliwości roboczej 1 MHz na około 1 kW, to w takich warunkach stosunek mocy drgań niepożądanych do mocy drgań o częstotliwości roboczej nadajnika powinien by wynosić

$$\alpha_3 = \frac{P_3}{P_1} \leqslant \frac{10 \cdot 10^{-3}}{1000} = 0{,}01 \cdot 10^{-3} = 10 \cdot 10^{-6}. \tag{7}$$

Powyższy stosunek mocy drgań harmonicznych do podstawowych, występujących w rezystancji obciążenia, można również przedstawić zależnością

$$\alpha_n = \alpha_3 \frac{(I_{r3})^2 r_L}{(I_{r1})^2 r_L} = \left(\frac{I_{r3}}{I_{r1}}\right)^2. \tag{8}$$

Wymagany współczynnik filtracji dla trzeciej harmonicznej napięcia w.cz., występującej na rezystancji obciążenia obwodu rezonansowego, określony w [5], przy uwzględnieniu zależności (6) i (8) możemy obliczyć jako

$$\Phi_n = \Phi_3 \geqslant \frac{(I_3/I_1)}{(I_{r3}/I_{r1})} = \frac{I_3 I_{r1}}{I_1 I_{r3}} = \beta_3 \sqrt{\frac{1}{\alpha_3}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{10 \cdot 10^{-6}}} = \frac{1000}{9{,}5} \cong 105, \quad (9)$$

co odpowiada poziomowi napięć pasożytniczych −40,5 dB, określonemu względem poziomu napięcia o częstotliwości podstawowej, występującego na rezystancji obciążenia r_L.

3. SZCZEGÓŁOWE OMÓWIENIE WŁASNOŚCI OBWODÓW O WYBRANEJ KONFIGURACJI

Ze względu na to, że warunek optymalnego dopasowania obciążenia oraz warunek utrzymania dopuszczalnego poziomu napięć pasożytniczych, jak i dopuszczalnego tłumienia wstęg bocznych są ściśle zależne od przyjętej konfiguracji obwodu rezonansowego, to rozważania dalsze zostaną przeprowadzone na wybranych trzech przykładach szeregowych obwodów rezonansowych, które znalazły zastosowanie w budowie nadajników.

3.1. Prosty obwód szeregowy

Impedancja zwykłego szeregowego obwodu rezonansowego L, C, r_L, jak wiadomo wyraża się zależnością

$$|\hat{Z}|_{szer} = r_L + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \approx j\omega L\left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right), \quad (10)$$

gdyż zwykle $r_L \ll \omega L$, natomiast kąt fazowy impedancji określa równanie

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{x}{r_L} = \operatorname{arctg}\frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{r_L}. \quad (11)$$

Przebieg zmian wartości bezwzględnych impedancji i kąta fazowego dla szeregowego obwodu rezonansowego w funkcji częstotliwości przedstawia rys. 4, a na rys. 5 uwidoczniono wykres wskazowy.

Należy podkreślić, że przebiegi tych zmian są podobne, ale odwrotne, czyli dualne, do występujących dla klasycznych obwodów równoległych.

Jak wiadomo impedancja obwodu szeregowego dla częstotliwości rezonansowej f_o, czyli gdy $\omega_o L = \frac{1}{\omega_o C}$, osiąga minimum i staje się wielkością rzeczywistą, o wartości równej sumie rezystancji szeregowych $\Sigma(r)$.

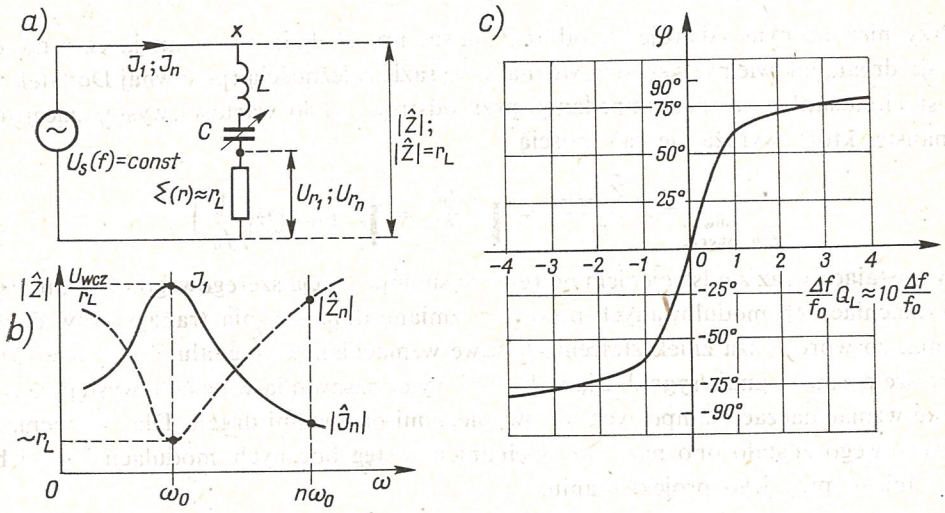
W związku z tym można uważać, że na zaciskach xy wzmacniacza, przy zaniedbaniu strat, przy rezonansie występuje jedynie rezystancja obciążenia użytecznego r_L, która, jak w każdym źródle napięciowym, decyduje o maksymalnej wartości prądu

$$I_{wcz} = \frac{U_{wcz}}{\Sigma(r)} \quad (12)$$

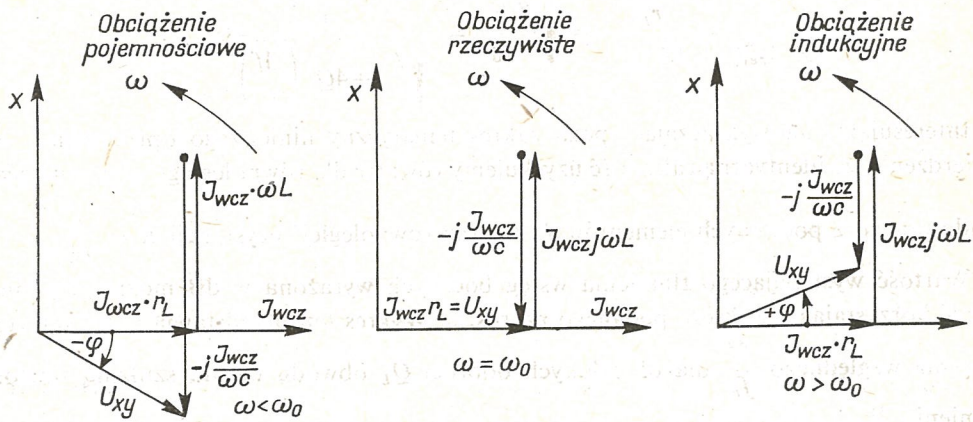
płynącego przez obwód drgań (porównaj rys. 3).

Przy wszelkich innych częstotliwościach wartość bezwzględna impedancji rośnie powodując, zgodnie z własnościami selektywnymi obwodu, spadek wartości prądu.

Stopień wytłumienia harmonicznych wzmacniacza, wymagany przez Regulamin Radiokomunikacyjny, określimy w napięciu występującym na rezystancji obciążenia użytecznego r_L, z bezwzględnej wartości stosunku amplitudy drgań harmonicznych do podstawo-



Rys. 4. Rezonans napięć w prostym szeregowym obwodzie drgań



Rys. 5. Wykresy wskazowe dla prostego szeregowego obwodu drgań

wego. W najbardziej interesującym nas przypadku 3-ciej harmonicznej, jak wynika z obliczeń zamieszczonych w Dodatku 5.1., stosując wzmacniacz klasy D_{wcz}, o komutowanym przebiegu napięcia, wykorzystujący prosty szeregowy obwód drgań otrzymujemy zależność

$$\left|\frac{U_{r3}}{U_{r1}}\right|_{\substack{\text{wzm. z}\\ \text{obw. szer.}}} = \beta_3 \left|\frac{U_{r3}}{U_{r1}}\right|_{\substack{\text{obw.}\\ \text{szer.}}} = \frac{1}{8Q_L}. \tag{13}$$

Oznacza to, że chcąc uzyskać wymienioną uprzednio (9) wartość współczynnika filtracji Φ_3, należy w obciążonym wzmacniaczu z prostym szeregowym obwodem drgań tak ustalić warunki pracy, aby dobroć wspomnianego obwodu przy obciążeniu użytecznym wzmacniacza spełniała nierówność

$$Q_L \geqslant \frac{\Phi_3}{8} \geqslant 13. \tag{14}$$

Przy nieznacznym odstrojeniu od rezonansu, np. o $\pm\Delta f$, impedancja szeregowego obwodu drgań, jak wiemy, wzrasta. Można to wyrazić zależnością (porównaj Dodatek 5.2) w postaci stosunku wartości impedancji przy odstrojeniu do wartości występującej przy rezonansie, który wyraża się zależnością

$$\left|\frac{\hat{Z}}{\hat{Z}_o}\right|_{\substack{\text{obw.}\\ \text{szer.}}} = \frac{|\hat{Z}|_{\text{szer.}}}{r_L} = \sqrt{\frac{I_0^2}{I_1^2}} = \sqrt{1+4Q_L^2\left(\frac{\Delta f}{f_o}\right)^2}. \tag{15}$$

Wzrastająca wraz z odstrojeniem od rezonansu impedancja szeregowego obwodu drgań we wzmacniaczach modulowanych powoduje zmianę dopasowania tranzystorów do obciążenia, co wprowadza zniekształcenia liniowe wzmacnianego sygnału i to tym większe, im szersze pasmo zajmuje sygnał. Zjawisko zmiany dopasowania w paśmie występuje również we wzmacniaczach lampowych, z równoległymi obwodami drgań. Dla wzmacniacza rezonansowego zostało ono nazwane obcinaniem wstęg bocznych modulacji i musi być uwzględniane przy jego projektowaniu.

Wynikające ze wspomnianego obcinania tłumienie, w przypadku prostego obwodu szeregowego, dogodnie jest obliczyć z odwrotności wyrażenia (15) w postaci

$$\left|\frac{\hat{Z}_o}{\hat{Z}}\right|_{\substack{\text{obw.}\\ \text{szer.}}} = \frac{r_L}{|\hat{Z}|_{\substack{\text{obw.}\\ \text{szer.}}}} = \sqrt{\frac{I_1^2}{I_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+4Q_L^2\left(\frac{\Delta f}{f_o}\right)^2}}. \tag{16}$$

Interesujące, ale wykraczające poza zakres tematyczny niniejszego opracowania jest stwierdzenie, że identyczną zależność uzyskujemy również dla równoległego obwodu drgań zbudowanego z podobnych elementów L, C oraz równoległej rezystancji $R = \frac{L}{rC}$.

Wartość występującego tłumienia wstęg bocznych wyrażoną w dB można dogodnie ocenić korzystając z wykresu podanego na rys. 6. Wykres ten przedstawia w funkcji rozstrojenia względnego $\frac{\Delta f}{f_o}$ dla określonych dobroci Q_L obwodu drgań, szukaną wartość tłumienia [3].

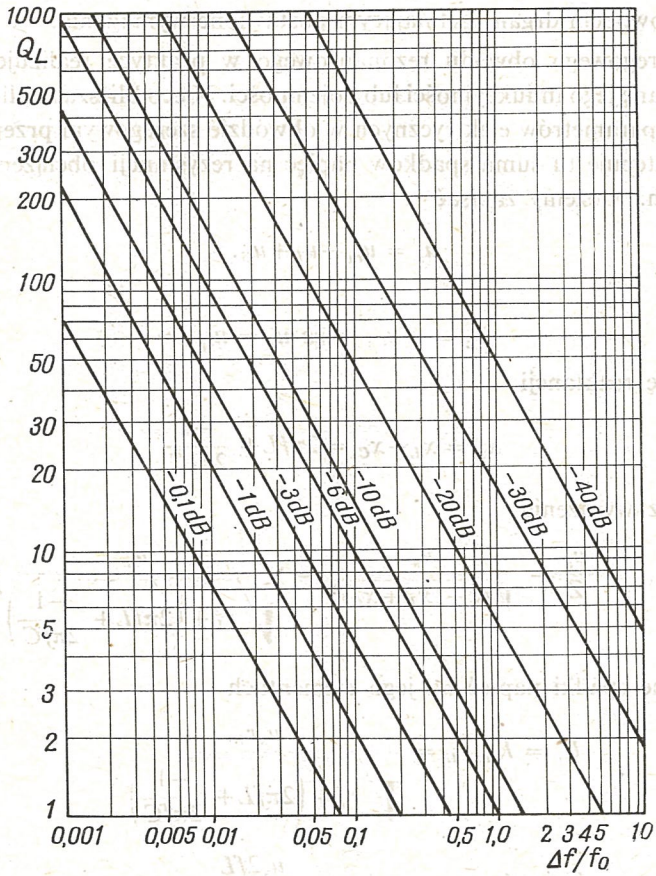
Należy tu zwrócić uwagę, że szeregowy obwód rezonansowy, pracujący zwłaszcza w układzie wzmacniacza mocy klasy D_{wcz}, o komutowanym napięciu, jest stale tłumiony rezystancją zastępczą przewodzenia wewnętrznego r_c' tranzystorów, która jako rezystancja szeregowa dodaje się do rezystancji strat własnych r_Q obwodu drgań i rezystancji r_L stanowiącej właściwe obciążenie użyteczne wzmacniacza.

[3] Porównaj [7] str. 17.

W związku z tym dobroć Q_L obciążonego obwodu drgań wzmacniacza mocy, występująca we wzorze (13), przy obliczeniach dokładnych powinna być określana z zależności

$$Q'_L = \frac{\omega_o L}{(r_L + r_Q + r'_c)} = \frac{\omega_o L}{\Sigma(r)}. \tag{17}$$

Wymagania techniczne na urządzenia nadawcze określają zwykle dopuszczalne tłumienie na krańcach przenoszonego pasma sygnałów modulujących na $\leqslant 1$ dB w stosunku do poziomu występującego przy częstotliwości nośnej.



Rys. 6. Tłumienie wstęg bocznych przez prosty szeregowy obwód drgań we wzmacniaczu klasy D_{wcz} w funkcji rozstrojenia $\frac{\Delta f}{f_o}$ dla określonej dobroci Q_L

Projektując szeregowy obwód drgań zgodnie z omówionymi warunkami (10), (12) okazuje się, że suma rezystancji $\Sigma(r)$ w takim obwodzie może co najwyżej osiągnąć wartość rzędu pojedynczych omów, gdyż poprawnie skonstruowana cewka indukcyjna na ogół będzie miała przy biegu luzem dobroć zawartą w granicach $Q_o \approx 150$ do 300.

Z powyższego wynika, że szeregowy obwód drgań, spełniający postawione wymagania, może szczególnie korzystnie współpracować w układach wzmacniaczy tranzystorowych, które odmiennie aniżeli lampy radiowe z natury rzeczy są czynnymi elementami nielinio-

wymi o niskiej rezystancji optymalnego dopasowania. Ponieważ jednak bezpośrednie niskoomowe obciążenie użyteczne wzmacniaczy w.cz. jest często niedogodne, co wynika z własności układów stanowiących to obciążenie, więc należy się liczyć z potrzebą stosowania czwórników pośredniczących, zapewniających odpowiednią transformację wartości występujących tu rezystancji. Można również stosować obwody szeregowe innej, nieco bardziej złożonej budowy. Zagadnienie powyższe będzie omówione w dalszym ciągu niniejszej pracy.

W rezultacie bez większych trudności można zaprojektować wzmacniacz klasy D_{wcz} z szeregowym obwodem drgań spełniającym postawione wymagania.

Strojenie szeregowego obwodu rezonansowego w praktyce realizuje się najczęściej przez prostą zmianę jego indukcyjności lub pojemności. Nieco bliższą analizę zachodzących przy tym zmian parametrów elektrycznych w obwodzie szeregowym przeprowadzimy pamiętając, że występuje tu suma spadków napięć na rezystancji obciążenia oraz na jego obu reaktancjach. Możemy zapisać

$$u_s = u_{rL} + u_L + u_C. \tag{18}$$

przy rezonansie

$$u_L = -u_C, \text{ więc } u_s = u_{r_L}. \tag{19}$$

Oznaczając sumę reaktancji

$$x_s = x_L + x_C = 2\pi fL + \frac{-1}{2\pi fC} \tag{20}$$

określimy prąd z wyrażenia

$$I_{wcz} = \frac{u_s}{Z} = \frac{u_s}{\sqrt{r_L^2 + (x_L + x_C)^2}} = \frac{u_s}{\sqrt{r_L^2 + \left(2\pi fL + \frac{-1}{2\pi fC}\right)^2}} \tag{21}$$

oraz poszczególne spadki napięć na jego elementach

$$U_r = I_{wcz} r_L = \frac{u_s r_L}{\sqrt{r_L^2 + \left(2\pi fL + \frac{-1}{2\pi fC}\right)^2}}, \tag{22}$$

$$U_L = I_{wcz} x_L = \frac{u_s 2fL}{\sqrt{r_L^2 + \left(2\pi fL + \frac{-1}{2\pi fC}\right)^2}}, \tag{23}$$

$$U_C = I_{wcz} x_C = \frac{u_s(-1/2\pi fC)}{\sqrt{r_L^2 + \left(2\pi fL + \frac{-1}{2\pi fC}\right)^2}}. \tag{24}$$

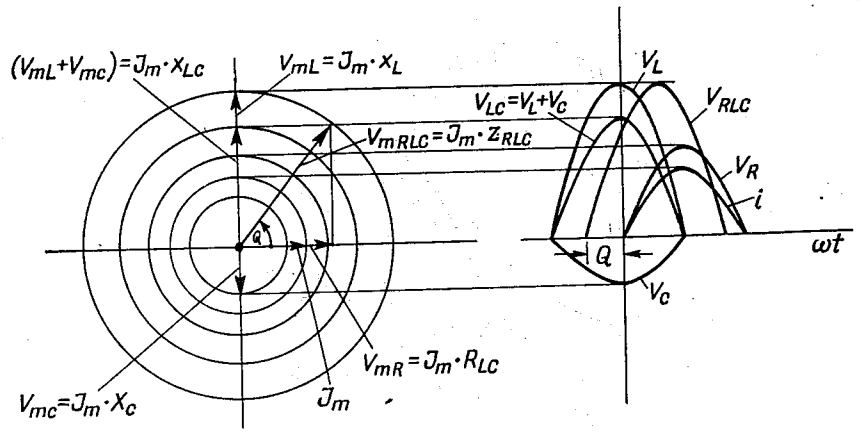
Moc wydzieloną w obwodzie szeregowym wyraża równanie

$$P = \frac{U_m I_m}{2} = \frac{U_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \varphi) = P_{rzecz.} - P_{uroj.}, \tag{25}$$

która dla częstotliwości rezonansowej upraszcza się do postaci

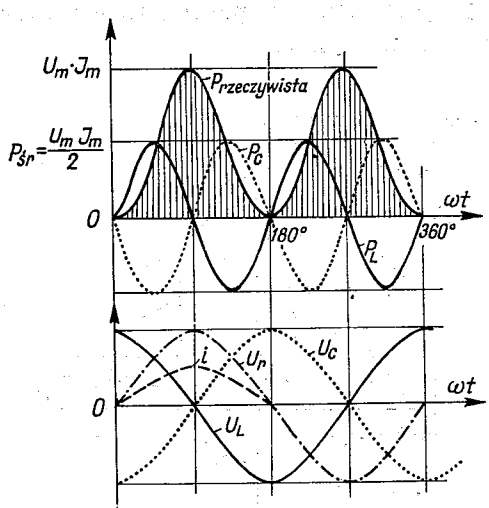
$$P_{rzecz.} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} P\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{2/T} u(t)\ \mathrm{i}\ (t)\,dt = \frac{1}{2}U_m I_m \cos\varphi = U_{sk} I_{sk} \cos\varphi. \qquad (26)$$

Przebieg chwilowych wartości poszczególnych napięć i prądów obwodu szeregowego przy rezonansie ilustruje rys. 7, a mocy rys. 8.



Rys. 7. Wykres wskazowy potencjałów, napięć i prądów w szeregowym obwodzie rezonansowym

Przy strojeniu indukcyjnym szeregowego obwodu rezonansowego otrzymujemy przebiegi [4] określonych powyżej parametrów przedstawione na rys. 9. Należy zauważyć, że U_C osiąga maksimum przy rezonansie, dla $\omega = \omega_o$, wówczas gdy U_L dopiero powyżej tej wielkości. Wynika to z faktu, że U_L rośnie wraz z rosnącym L powyżej rezonansu jeszcze



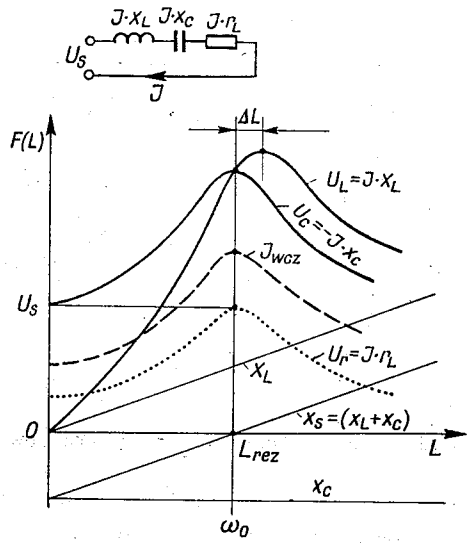
Rys. 8. Przebieg napięć i prądów oraz mocy chwilowej w szeregowym obwodzie rezonansowym

[4] Porównaj [6] str. 246 do 252.

tak długo, dopóki X_L rośnie szybciej aniżeli zmaleje I_{wcz}. Prąd I_{wcz} osiąga oczywiście maksimum przy częstotliwości rezonansowej ω_o.

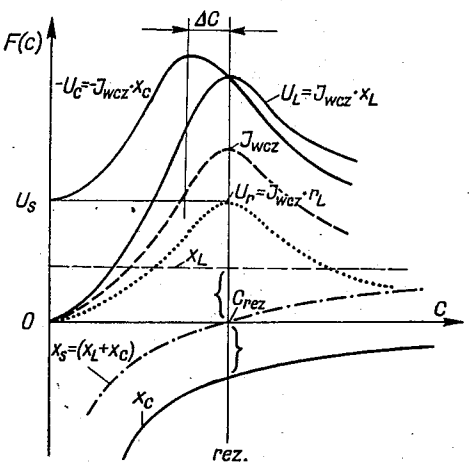
Różniczkując i przyrównując do zera $\frac{dU_L}{dX_L} = 0$ znajdujemy wartość $X_L = \frac{-(r_L^2+X_C^2)}{X_C}$ odpowiadającą maksimum U_L przy strojeniu indukcyjnym. Z powyższego łatwo określimy

$$L = L_{rez} + \Delta L = C(r_L^2+X_C^2). \tag{27}$$



Rys. 9. Rezonans szeregowy — strojenie indukcyjne

Analogiczne przebiegi występujące przy strojeniu pojemnością przedstawia rys. 10. Gdy na obwód szeregowy wprowadzamy napięcie o zmiennej częstotliwości, to przebieg omawianych parametrów ilustruje rys. 11.

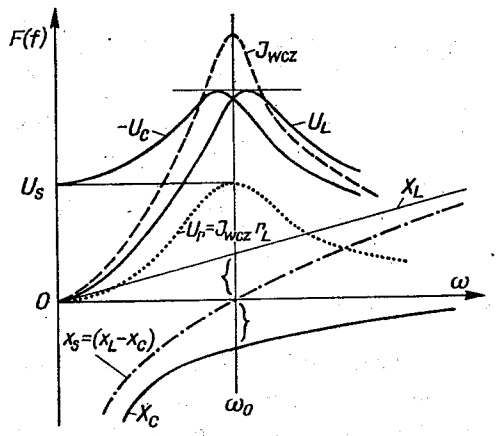


Rys. 10. Rezonans szeregowy — strojenie pojemnościowe

Żeby w całym paśmie użytkowanych częstotliwości moc oddawana przez wzmacniacz klasy D_{wcz} z szeregowym obwodem drgań nie ulegała zmianom oraz warunki jego pracy były możliwie stałe, co stanowi często spotykane wymaganie eksploatacyjne, to trzeba aby

$$r_L = \frac{\omega_o L}{Q_L} = \frac{1}{\omega_o C Q_L} = \frac{1}{Q_L}\sqrt{\frac{L}{C}} = \text{const.} \tag{28}$$

Choć impedancja wejściowa szeregowego obwodu drgań, dostrojonego do częstotliwości rezonansowej, jest zawsze równa rezystancji szeregowej r_L, niezależnie od wartości stosunku indukcyjności do pojemności L/C, a więc niezależnie od sposobu przestrajania,



Rys. 11. Rezonans szeregowy przy zmianie częstotliwości pobudzenia

to jednak przy strojeniu jednym elementem obwodu, a więc przy zmianie L lub C, ulega zmianie dobroć obwodu Q_L, a więc i jego sprawność, co oczywiście powoduje w rezultacie zmianę mocy oddawanej wzmacniacza, zmianę stopnia tłumienia harmonicznych itp.

Natomiast zachowując stałość dobroci Q_L obciążonego obwodu drgań, uzyskiwaną przez równoczesną zmianę jego indukcyjności i pojemności, czyli spełniając warunek

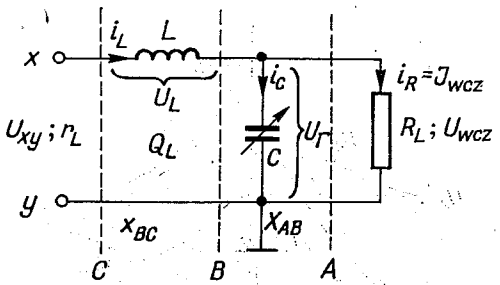
$$\frac{L}{C} = \text{const}, \tag{29}$$

można przy przestrajaniu uzyskać pełną stałość mocy oddawanej wzmacniacza oraz stałość pozostałych parametrów charakteryzujących jego warunki pracy. Konstrukcyjnie jest to wykonalne np. przez mechaniczne sprzężenie napędów kondensatora obrotowego i wariometru, ale stanowi sporą komplikację i podnosi koszt urządzenia. Z tego względu w praktyce godzimy się zwykle na ograniczoną zmianę parametrów wzmacniacza strojonego, w określonym podzakresie częstotliwości roboczych, wzamian za co zyskujemy możliwość uproszczenia jego konstrukcji.

W urządzeniach radiofonicznych, pracujących całymi latami na uzgodnionych międzynarodowo częstotliwościach roboczych, trudności te oczywiście nie występują.

3.2. Szeregowy obwód drgań typu gammà

Rezystancje użyteczne typowych układów wyjściowych, stosowanych powszechnie w technice urządzeń nadawczych, mogące stanowić obciążenie wzmacniacza rezonansowego, charakteryzują się zwykle wielokrotnie większymi wartościami aniżeli to wynikało z warunku bezpośredniego dopasowania dla optymalnego wykorzystania mocy oddawanej tranzystorów wzmacniacza klasy D_{wcz} z prostym szeregowym obwodem drgań. Specjalnie wyraziście występuje ta dysproporcja w przypadku użycia takiego wzmacniacza do wysterowania np. siatki lampowego wzmacniacza mocy większego nadajnika lub obwodów dostrojczych systemu antenowego.



Rys. 12. Szeregowy obwód rezonansowy typu gamma

W Instytucie Łączności opracowano [5] jeszcze w 1969 r. wzmacniacz mocy klasy D_{wcz} z szeregowym obwodem rezonansowym według skarłowaciałej odmiany obwodu typu $\pi 1$, w której dla dopasowania stosunkowo dużej rezystancji obciążenia R_L do optymalnej i stosunkowo niskiej rezystancji dynamicznej elementu nieliniowego (tranzystora) o $r_L \ll R_L$, znika pojemność C_{CD}, a magazynem energii elektrycznej pozostaje pojemność C_{AB}. W ten sposób obwód typu $\pi 1$ przekształcony został w obwód dwuelementowy, który jest od strony wejścia równoważny szeregowemu obwodowi rezonansowemu, a równocześnie na swym wejściu zapewnia znaczną transformację „w dół" rezystancji obciążenia.

Powstały w ten sposób obwód typu gamma (rys. 12) można określić jako odwrotny do znanego w technice lampowej czwórnika typu L.

Stosując metodę graficznego obliczania obwodów rezonansowych [6] można narysować szkic w półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej o współrzędnych impedancji (r, jx), z którego odczytujemy zależności geometryczne uwidocznione na rys. 13

$$(\omega_o L)^2 = r_L R_L - r_L, \tag{30}$$

$$(\omega_o L)^2 = R_L r_L - r_L^2,$$

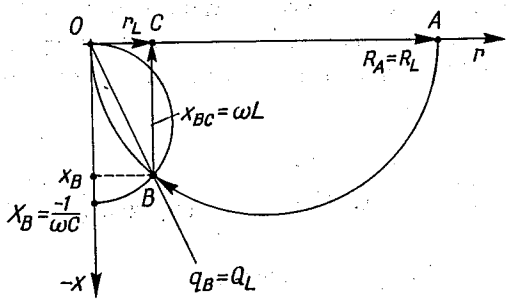
$$\left(\frac{\omega_o L}{r_L}\right)^2 = \frac{R_L}{r_L} - 1,$$

$$Q_L^2 = \frac{R_L}{r_L} - 1. \tag{31}$$

[5] Porównaj [8] str. 21 do 22 oraz str. 60 do 61.

[6] Porównaj [5] str. 164 do 174 oraz [9] str. 181 do 218.

Ze względu na swe własności obwód typu gamma można używać we wzmacniaczu klasy D_{wcz}. Wówczas obwód ten będzie pobudzany do drgań prostokątnym przebiegiem komutowanego napięcia, gdyż wzmacniacz klasy D możemy uważać za źródło o charakterze napięciowym. Równocześnie uzyskujemy możliwość dopasowania stosunkowo dużej wartości rezystancji R_L do niskooporowych z natury tranzystorowych wzmacniaczy mocy. Prąd, jaki płynie przez obwód szeregowy, tak jak w każdym źródle napięciowym jest określony jedynie przez sumę rezystancji tego obwodu.

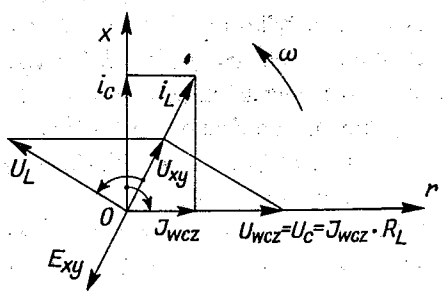


Rys. 13. Wykres impedancji obwodu typu gamma

Ponieważ w tym obwodzie, jak to wynika z zależności geometrycznych, $R_L = r_L(Q_L^2+1) \approx r_L Q_L^2$, więc ze względu na to, iż zwykle $Q_L \geqslant 10$, to można z dostateczną dokładnością posługiwać się wzorem przybliżonym

$$r_L \approx \frac{R_L}{Q_L^2}, \tag{32}$$

a jak z niego widać uzyskiwana transformacja rezystancji jest rzędu 100. Pozwala to, nawet w przypadku tranzystorowych wzmacniaczy mocy, na dość dogodne rozwiązanie szeregu układów nadawczych.



Rys. 14. Wykres wskazowy dla szeregowego obwodu rezonansowego typu gamma

Wykres wskazowy dla szeregowego obwodu drgań typu gamma przedstawiony jest na rys. 14. Jak z niego widać, w odróżnieniu od prostego obwodu szeregowego, kąt fazowy występujący przy rezonansie pomiędzy napięciem U_{xy} a napięciem wyjściowym U_{wcz}, występującym na rezystancji obciążenia R_L, podobnie jak w obwodach typu π1 dochodzi do wartości bliskich 90°.

Dane o stopniu wytłumienia harmonicznych, uzyskiwanym przy stosowaniu obwodu rezonansowego typu gamma, zamieszczono w Dodatku 5.1; rezultat końcowy może być przedstawiony następującą zależnością

$$\left|\frac{U_{R3}}{U_{r1}}\right|_{\Gamma} = \frac{1}{nQ_L\left(n-\frac{1}{n}\right)}. \tag{33}$$

Zawartość trzeciej harmonicznej na wyjściu wzmacniacza klasy D_{wcz}, o komutowanym napięciu przy stosowaniu obwodu typu gamma, obliczymy wprowadzając współczynnik β_3, czyli analogicznie, jak to wykonaliśmy przy rozpatrywaniu prostego obwodu szeregowego

$$\left|\frac{U_{R3}}{U_{r1}}\right|_{\substack{\text{wzmac.}\\ \text{z obw. }\Gamma}} = \beta_3\left|\frac{U_{R3}}{U_{r1}}\right|_{\Gamma} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{3Q_L\left(3-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{24Q_L}. \tag{34}$$

Przyjmując, jak poprzednio $Q_L \geqslant 10$, otrzymamy

$$\left|\frac{U_{R3}}{U_{r1}}\right|_{\substack{\text{wzmac.}\\ \text{z obw. }\Gamma}} \approx \frac{1}{240},$$

co odpowiada poziomowi napięć niepożądanych −47,5 dB.

Porównując ze sobą wyrażenia (13) i (32) spostrzegamy, że obwód typu gamma jest n-krotnie skuteczniejszy od rozpatrywanego uprzednio prostego szeregowego obwodu rezonansowego L, C, r_L.

Chcąc uzyskać jeszcze większe odfiltrowanie składowych harmonicznych należy zastosować bardziej złożony obwód rezonansowy, jak np. szeregowo-równoległy układ według Baxandalla [1], lub układy łańcuchowe gamma $+\pi 1$.

Ogólnie można również zalecić podwyższanie dobroci Q_L obciążonego obwodu drgań. Jednak ze względu na równoczesny wzrost strat w obwodzie, jaki z tą zmianą jest zwykle związany, takie postępowanie stwarza tylko niewielką możliwość dalszej poprawy stopnia odfiltrowania składowych harmonicznych nadajnika. W przypadku szczególnie trudnym, zwykle w szereg z rezystancją obciążenia użytecznego wzmacniacza włącza się filtry zaporowe, strojone na poszczególne harmoniczne częstotliwości roboczej.

Dla szeregowego obwodu drgań typu gamma, w związku z bardziej wysmukłym w stosunku do prostego obwodu szeregowego przebiegiem krzywej rezonansu, wyrażenie na tłumienie wstęg bocznych będzie miało inną postać. Zgodnie z zależnościami wyprowadzonymi w Dodatku 5.2 dla obwodu typu gamma, otrzymujemy wzór

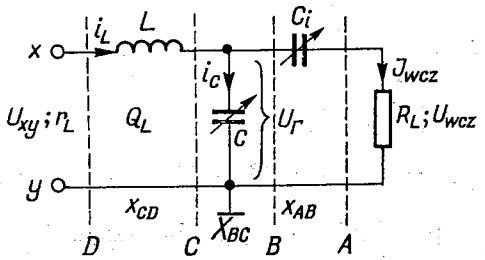
$$\left|\frac{\hat{Z}_o}{\hat{Z}}\right|_{\Gamma} = \frac{r_L}{|\hat{Z}|_{\Gamma}} = \frac{1}{\sqrt{1+2\left(\frac{\Delta f}{f_o}\right)+4Q_L^2\left(\frac{\Delta f}{f_o}\right)^2}}. \tag{35}$$

Porównywując ze sobą wzory (16) i (35) łatwo zauważymy, że wzmacniacz klasy D_{wcz} z obwodem typu gamma, przy sygnałach modulowanych amplitudowo, będzie w nieco większym stopniu tłumił wstęgi boczne aniżeli to ma miejsce w przypadku wzmacniacza

z prostym obwodem szeregowym. Zakładamy, że oba zbudowane są z identycznych elementów L, C i pracują przy tych samych częstotliwościach rezonansowych f_o oraz dobroci Q_L obwodu.

3.3. Regulacja współczynnika transformacji

Obwód typu gamma, jak to wynika z (32), zapewnia stały i proporcjonalny do Q_L^2 stopień transformacji równoległej rezystancji obciążenia R_L na szeregową rezystancję wejściową r_L. W niektórych przypadkach uzyskiwany tą drogą stopień transformacji może być zbyt wysoki nawet dla wzmacniaczy tranzystorowych. W związku z tym może się okazać celowe zastosowanie uwidocznionej na rys. 15 modyfikacji układu. Jak ze wspomnia-



Rys. 15. Zmodyfikowany obwód rezonansowy typu gamma

nego rysunku widać, proponowana modyfikacja układu charakteryzuje się wprowadzeniem dodatkowego kondensatora C_i włączonego szeregowo z rezystancją obciążenia użytecznego R_L. Kondensator ten spełnia równocześnie dwie funkcje, a mianowicie uniemożliwia powstanie zwarcia wzmacniacza dla składowej stałej oraz pozwala na regulację stopnia transformacji rezystancji obciążenia.

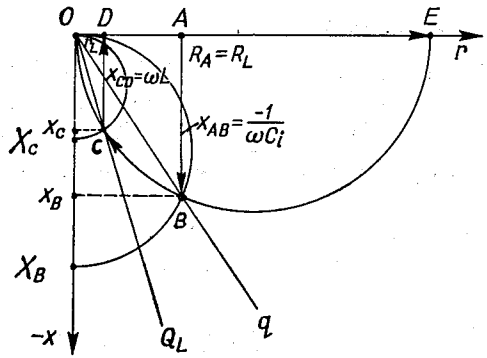
Działanie izolujące jest oczywiste z rozpatrzenia układu i bardzo istotne dla jego działania, gdyż odcina drogę upływu, który mógłby powstać poczynając od źródła zasilania U_{co} wzmacniacza poprzez tranzystor T1 w chwili jego przewodzenia, cewkę obwodu drgań i rezystor obciążenia użytecznego R_L, aż do zacisku uziemienia. We wzmacniaczach mocy straty powstające wskutek upływu na wskazanej drodze mogą mieć decydujący wpływ na sprawność energetyczną układu.

Działanie regulacyjne nie jest od razu oczywiste i wymaga omówienia. Okazuje się, że we wzmacniaczach klasy D_{wcz} dla dopasowania mniejszych, aniżeli wynikających ze stosunku Q_L^2 rezystancji obciążenia, można uzyskać wymagane obniżenie stopnia transformacji przez dobranie odpowiedniej wartości pojemności kondensatora izolującego C_i.

Dla udowodnienia postawionej tezy dogodnie jest zastosować wspomnianą uprzednio metodę graficznego obliczania obwodów rezonansowych.

Rysujemy szkic w półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej, o współrzędnych impedancji (r, jx), podany na rys. 16. Na szkicu tym odcinek $\overline{OA}$ odpowiada zadanej, niewielkiej równoległej rezystancji obciążenia R'_L. Łuk koła o średnicy $\overline{OE}$ odpowiada stałej, równoległej rezystancji, o umownej i dostatecznie wysokiej wartości obciążenia (R_L), występu-

jącej na zaciskach pojemności C prostego obwodu drgań typu gamma. Odcinek $\overline{AB}$ przedstawia poszukiwaną wartość reaktancji $x_{AB} = \dfrac{-1}{\omega_0 C_i}$ kondensatora izolującego C_i. Reaktancja ta decyduje o wymaganym stopniu transformacji równoległej rezystancji obciążenia R_L na rezystancję szeregową r_L widzianą od strony wejścia, której wartość powinna od-



Rys. 16. Wykres impedancji zmodyfikowanego obwodu rezonansowego typu gamma

powiadać optymalnemu dopasowaniu tranzystorów wzmacniacza klasy D_{wcz}. Odcinek $\overline{OD}$ stanowi miarę rezystancji wejściowej r_L, a odcinek $\overline{CD}$ odpowiada szeregowej reaktancji $x_{CD} = \omega_0 L$ cewki indukcyjnej obwodu drgań. Łuk $\overset{\frown}{BC}$ jest w tych warunkach miarą równoległej reaktancji pojemności C obwodu drgań, którą trzeba obliczyć analitycznie z zależności

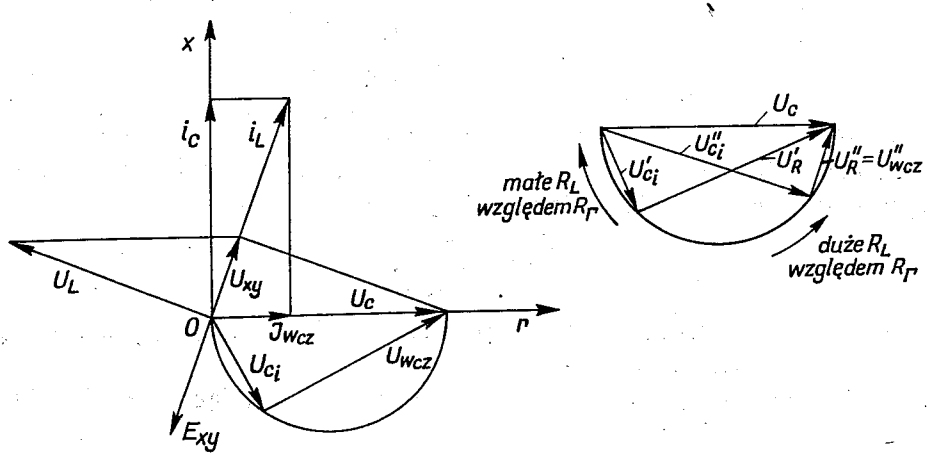
$$X_{BC} = \frac{X_B X_C}{X_B - X_C} = \frac{-1}{\omega_0 C}. \tag{36}$$

Nachylenie odcinka $\overline{OC}$ określa wartość współczynnika reaktancyjności $q = \dfrac{x}{r_L} = \dfrac{R_L}{X}$ obwodu drgań odpowiadającego jego dobroci Q_L.

Stopień wytłumienia harmonicznych przez zmodyfikowany obwód szeregowy typu gamma może być określony jako współmierny do uzyskiwanego dla zwykłego obwodu typu gamma. Jednak kąt fazowy powstający pomiędzy napięciem wejściowym U_{xy} oraz wyjściowym $U_{wcz} = U_{R_L}$, w opisywanym przypadku będzie na ogół mniejszy, aniżeli występujący w zwykłym obwodzie typu gamma.

Przy zmianie częstotliwości rezonansowej obwodu drgań, wychodząc z analogicznych jak poprzednio (porównaj (28)) przesłanek, należy dążyć do zachowania warunku $Q_L =$ $=$ const. W rezultacie będzie to wymagać równoczesnego przestrajania zarówno L jak i C oraz każdorazowego dostrojenia wartości C_i. W praktyce, upraszczając obsługę, zwykle rezygnujemy przynajmniej z jednego z trzech elementów strojonych, godząc się tym samym kompromisowo z określonymi zmianami Q_L oraz pewnym niedopasowaniem wartości obciążenia w użytkowanym podzakresie częstotliwości roboczych opisywanego wzmacniacza.

Na rys. 17 uwidoczniono wykres wskazowy zmodyfikowanego obwodu typu gamma, z którego można odczytać przewidywany kierunek zmian kąta fazowego, występujący wraz ze zmianą stopnia transformacji.



Rys. 17. Wykres wskazowy dla zmodyfikowanego obwodu typu gamma przy zmianie stopnia transformacji i zachowaniu $U_C = U_r = \text{const}$
1) gdy małe R_L, to $U_{wcz} \approx U_r$ oraz C_i jest duże,
2) gdy duże R_L, to $U_{wcz} < U_r$ oraz C_i jest małe

4. WNIOSKI

1. Szeregowe obwody rezonansowe najdogodniej pobudzać do drgań własnych napięciem o przebiegu prostokątnym i częstotliwości powtarzania odpowiadającej częstotliwości tych drgań.

2. Proste obwody szeregowe w zastosowaniu do wzmacniaczy klasy D_{wcz} o komutowanym napięciu w wersji tranzystorowej są niedogodne ze względu na to, że przy wymaganej dobroci $Q_L \geqslant 10$ uzyskiwane wartości rezystancji dynamicznej r_L, tych obwodów są zbyt małe w stosunku do wartości potocznie używanych obciążeń.

3. Celem optymalnego dopasowania do powszechnie stosowanych rezystancji obciążenia użytecznego należy używać obwodu rezonansowego typu gamma, lub jego opisanej modyfikacji umożliwiającej łatwą regulację współczynnika transformacji równoległej rezystancji obciążenia R_L.

4. Zarówno prosty szeregowy obwód rezonansowy, jak i obwód typu gamma, zastoowane we wzmacniaczu tranzystorowym klasy D_{wcz}, jak wykazano mogą zapewnić wymagane przepisami tłumienie zawartości harmonicznych, występujących w napięciu wyjściowym wzmacniacza na rezystancji obciążenia oraz dostatecznie płaską charakterystykę zniekształceń liniowych, przy modulacji amplitudowej stosowanej w radiofonii.

5. Przedstawione w niniejszej pracy szeregowe obwody rezonansowe stanowią optymalnie prostą konfigurację układową, zrealizowaną przy użyciu minimalnej liczby elementów składowych, dzięki czemu warunek ich sprawności energetycznej oraz łatwości przestrajania wzmacniacza kluczowanego są równocześnie spełnione.

5. DODATEK

5.1. Obliczanie zawartości harmonicznych w napięciu wyjściowym wzmacniacza klasy D_{wcz} przy wybranych rodzajach obwodów rezonansowych

5.1.1. Prosty obwód szeregowy

Zawartość harmonicznych w napięciu w.cz., występującym na co najwyżej kilkuomowej rezystancji obciążenia r_L szeregowego obwodu drgań, obliczamy ze stosunku prądów zasilających ten obwód ze źródła napięcia o stałej amplitudzie $U(f)$, czyli

$$\frac{I_n}{I_1} = \frac{r_L}{|\hat{Z}|_{szer.}},$$

który dla częstotliwości harmonicznych odpowiada przebiegowi krzywej rezonansu prądów, przedstawionej na rys. 4.

Zawartość harmonicznych w napięciu w.cz. na rezystancji obciążenia r_L obwodu szeregowego można wyrazić jako stosunek

$$\left|\frac{U_{r_n}}{U_{r_1}}\right|_{\substack{obw.\\szer.}} = \frac{I_n r_L}{I_1 r_L} = \frac{I_n}{I_1} = \frac{I_{rn}}{I_{r1}},$$

gdyż dla tego obwodu $I_{r_n} = I_n$ oraz $I_{r_1} = I_1$.

Po uwzględnieniu powyższego otrzymujemy zależność podstawową

$$\left|\frac{U_{r_n}}{U_{r_1}}\right|_{\substack{obw.\\szer.}} = \frac{I_n}{I_1} = \frac{r_L}{|\hat{Z}|_{szer.}}. \tag{a}$$

Impedancja obwodu szeregowego wynosi

$$\hat{Z}_{szer.} = r_L + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \approx j\omega L\left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right), \text{ gdyż } r_L \ll \omega L.$$

Moduł tego wyrażenia dla n-tej harmonicznej określa zależność

$$|\hat{Z}_n|_{szer.} = n\omega_o L\left(1 - \frac{1}{n^2\omega_o^2 LC}\right) = n\omega_o L\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \omega_o L\left(n - \frac{1}{n}\right),$$

gdyż $n = \dfrac{\omega}{\omega_o}$ oraz przy rezonansie $\omega_c^2 LC = 1$.

Po podstawieniu otrzymujemy wyprowadzoną zależność podstawową w postaci

$$\left|\frac{U_{r_n}}{U_{r_1}}\right|_{\substack{obw.\\szer.}} = \frac{r_L}{|\hat{Z}|_{szer.}} = \frac{r_L}{n\omega_o L\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{Q_L\left(n - \dfrac{1}{n}\right)}. \tag{b}$$

Dla najbardziej interesującej nas, ze względu na zastosowania praktyczne, 3-ciej harmonicznej, czyli dla $n = \dfrac{\omega_3}{\omega_o} = 3$ mamy

$$\left|\frac{U_{r_3}}{U_{r_1}}\right|_{\substack{obw.\\szer.}} = \frac{r_L}{|\hat{Z}_3|_{szer.}} = \frac{3}{8Q_L}.$$

Realizując wzmacniacz klasy D_{wcz} o prostokątnym przebiegu komutowanego napięcia pobudzającego prosty szeregowy obwód rezonansowy do drgań możemy oczekiwać, że, jak wynika z rozkładu Fouriera, amplituda trzeciej harmonicznej napięcia wyjściowego będzie trzykrotnie mniejsza od amplitudy drgań podstawowych U_{wcz}.

Przy typowej wartości dobroci $Q_L \approx 10$ obciążonego obwodu drgań otrzymujemy zatem dla wzmacniacza stosunek

$$\left|\frac{U_{r_3}}{U_{r_1}}\right|_{\substack{\text{wzmac.}\\ \text{z obw.}\\ \text{szer.}}} = \beta_3 \left|\frac{U_{r_3}}{U_{r_1}}\right|_{\substack{\text{obw.}\\ \text{szer.}}} = \frac{1}{8Q_L} \approx \frac{1}{80} \text{ czyli } -38 \text{ dB}.$$

Stwierdzamy równocześnie, że szeregowy obwód rezonansowy może zapewnić wytłumienie 3-ciej harmonicznej napięcia wynoszące tylko

$$-38 \text{ dB} + 9{,}5 \text{ dB} = -28{,}5 \text{ dB},$$

gdyż trzykrotne zmniejszenie amplitudy 3-ciej harmonicznej (9,5 dB), wynikające z wprowadzenia przebiegu prostokątnego na ten obwód, nie zawdzięczamy jego własnościom selekcyjnym a specyfice napięciowego źródła zasilania, jakim jest wzmacniacz klasy D_{wcz}.

5.1.2. Szeregowy obwód typu gamma

Zawartość harmonicznych w wyjściowym napięciu w.cz. na równoległym obciążeniu R_L obwodu typu gamma, osiągającym łatwo wartość kilkuset omów, można obliczyć rozpatrując dzielnik napięcia utworzony z reaktancji x_1 oraz równolegle połączonych reaktancji X_C i równoległej rezystancji R_L, do jakiego sprowadza się skarłowaciały obwód typu $\pi 1$, o konfiguracji według rys. 10.

W związku z tym stosunek napięć o częstotliwości podstawowej na wyjściu i wejściu wspomnianego dzielnika określa zależność

$$\left|\frac{U''_{wcz}}{U'_{wcz}}\right|_1 = \frac{j\dfrac{R_L X_C}{R_L + jX_C}}{jx_L + j\dfrac{R_L X_C}{R_L + jX_C}}. \tag{c}$$

Zmniejszenie składowych harmonicznych (rzędu n) napięcia, występującego na wyjściu wspomnianego dzielnika, wyrazimy zależnością

$$\left|\frac{U''_{wcz}}{U'_{wcz}}\right|_n = \frac{j\dfrac{1}{n} R_L X_C}{\left(R_L + j\dfrac{1}{n} X_C\right)\left(jnx_L + j\dfrac{\dfrac{1}{n} R_L X_C}{R_L + \dfrac{X_C}{n}}\right)} = \frac{1}{n} \frac{jR_L X_C}{x_L X_C + j\left(nx_L + \dfrac{x_C}{n}\right) R_L}. \tag{d}$$

Tłumienie harmonicznych przez obwód rezonansowy typu gamma należy obliczyć [2] dzieląc moduł wyrażenia (d) przez moduł wyrażenia (*c*). W wyniku otrzymujemy stosunek

$$\left|\frac{U_{R_n}}{U_{R_1}}\right|_{\substack{\text{obw.}\\ \text{gamma}}} = \frac{\left|\frac{U''_{wcz}}{U'_{wcz}}\right|_n}{\left|\frac{U''_{wcz}}{U'_{wcz}}\right|_1} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{x_L^2 X_C^2 + (x_L + X_C)^2 R_L^2}{x_L^2 X_C^2 + \left(nx_L + \frac{X_C}{n}\right)^2 R_L^2}}. \tag{e}$$

Podstawiając $x_L = \omega_o L$; $X_C = \dfrac{1}{\omega_o C}$ oraz zważywszy, że w obwodzie gamma przy rezonansie spełniony jest również warunek $\omega_o L = \dfrac{1}{\omega_o C}$ otrzymujemy

$$\left|\frac{U_{R_n}}{U_{R_1}}\right|_{\substack{\text{obw.}\\ \text{gamma}}} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\frac{L^2}{C^2} + \left(\omega_o L - \frac{1}{\omega_o C}\right)^2 R_L^2}{\frac{L^2}{C^2} + \left(n\omega_o L - \frac{1}{n\omega_o C}\right)^2 R_L^2}}. \tag{f}$$

Ponieważ dla obwodu gamma mamy specyficzną zależność (30)

$$R_L = Q_L^2 r_L, \text{ więc } \omega_o C = \frac{Q_L}{R_L} \text{ oraz } \omega_o L = \frac{R_L}{Q_L} \text{ jak i } \frac{L}{C} = \left(\frac{R_L}{Q_L}\right)^2.$$

Wobec tego wyrażenie (f) na tłumienie harmonicznych można uprościć do postaci

$$\left|\frac{U_{R_n}}{U_{R_1}}\right|_{\substack{\text{obw.}\\ \text{gamma}}} = \frac{R_L^2}{nQ_L^2\sqrt{\frac{R_L^4}{Q_L^4} + \left(\frac{nR_L}{Q_L} - \frac{R_L}{nQ_L}\right)^2 R_L^2}}, \tag{g}$$

a pomijając wartości mniejszych rzędów otrzymać wyrażenie końcowe

$$\left|\frac{U_{R_n}}{U_{R_1}}\right|_{\substack{\text{obw.}\\ \text{gamma}}} \approx \frac{R_L^2}{nQ_L^2\sqrt{\frac{R_L^2}{Q_L^2}\left(n - \frac{1}{n}\right)^2 R_L^2}} = \frac{1}{nQ_L\left(n - \frac{1}{n}\right)}. \tag{h}$$

Porównując ze sobą wyrażenia (h) i (b) widzimy, że pod względem wytłumienia składowych harmonicznych obwód typu gamma jest *n*-krotnie skuteczniejszy od rozpatrywanego uprzednio prostego szeregowego obwodu rezonansowego LCr_L. W związku z tym dla trzeciej harmonicznej obwód typu gamma o dobroci $Q_L \approx 10$ zapewnia wytłumienie wynoszące

$$\left|\frac{U_{R_3}}{U_{R_1}}\right|_{\substack{\text{obw.}\\ \text{gamma}}} = \frac{1}{30\left(3 - \frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{80} \text{ czyli } -38 \text{ dB}.$$

Natomiast zawartość 3-ciej harmonicznej na wyjściu wzmacniacza klasy D_{wcz} o komutowanym napięciu z wyżej omawianym obwodem drgań wyniesie

$$\left|\frac{U_{R_3}}{U_{R_1}}\right|_{\substack{\text{wzmac.}\\ \text{z obw.}\\ \text{gamma}}} = \left|\frac{U_{R_3}}{U_{R_1}}\right|_{\substack{\text{obw.}\\ \text{gamma}}} = \frac{1}{3}\frac{1}{80} = \frac{1}{240} \text{ czyli } -47{,}5 \text{ dB}.$$

5.2. Obliczanie tłumienia wstęg bocznych

5.2.1. *Prosty obwód szeregowy*

Impedancja szeregowego obwodu rezonansowego (10) osiąga wartość minimalną r_L dla częstotliwości rezonansowej f_o (porównaj rys. 4), gdy $\omega_o L = \frac{1}{\omega_o C}$. Natomiast przy nieznacznym odstrojeniu od rezonansu, np. o Δf, impedancja ta wzrasta zgodnie z przebiegiem krzywej rezonansu uzależnionej, jak wiadomo, od dobroci Q_L obciążonego obwodu drgań.

Tłumienie wstęg bocznych obwodu szeregowego określimy ze stosunku impedancji tego obwodu przy rezonansie do impedancji przy określonym odstrojeniu

$$\left|\frac{\hat{Z}_o}{\hat{Z}}\right|_{\substack{\text{bw.}\\ \text{szer.}}} = \frac{r_L}{|\hat{Z}|_{\substack{\text{obw.}\\ \text{szer.}}}}. \tag{i}$$

Moduł impedancji tego obwodu wyraża zależność

$$|\hat{Z}|_{\substack{\text{obw.}\\ \text{szer.}}} = \sqrt{r_L^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2};$$

podstawiając $\omega = \omega_o + \Delta\omega$ oraz $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ otrzymujemy po przekształceniu

$$|\hat{Z}| = r_L \sqrt{1 + \frac{1}{r_L^2}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = r_L \sqrt{1 + Q_L^2\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)^2} =$$

$$= r_L \sqrt{1 + 4Q_L^2\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_o}\right)^2} = r_L \sqrt{1 + 4Q_L^2\left(\frac{\Delta f}{f_o}\right)^2},$$

zatem tłumienie wstęg bocznych prostego obwodu szeregowego określa zależność

$$\left|\frac{\hat{Z}_o}{\hat{Z}}\right|_{\substack{\text{obw.}\\ \text{szer.}}} = \frac{r_L}{|\hat{Z}|_{\substack{\text{obw.}\\ \text{szer.}}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4Q_L^2\left(\frac{\Delta f}{f_o}\right)^2}}. \tag{j}$$

5.2.2. *Szeregowy obwód typu gamma*

Postępując analogicznie do omówionego uprzednio obwbdu określimy impedancję obwodu typu gamma jako

$$\hat{Z}_\Gamma = jx_L + \frac{jX_C R_L}{R_L + jX_C} = \frac{-\frac{L}{C} + jR_L\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R_L - j\frac{1}{\omega C}}$$

oraz moduł tej impedancji

$$|\hat{Z}|_r = \sqrt{\frac{\frac{L^2}{C^2}+R_L^2\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}{R_L^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}} = \frac{1}{Q_L}\sqrt{(\omega L)^2+Q_L^2\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{Q_L}\sqrt{\frac{L}{C}\left\{\left[1+2\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_o}\right)+\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_o}\right)^2\right]+4Q_L^2\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_o}\right)^2\right\}} \approx r_L\sqrt{1+2\left(\frac{\Delta f}{f_o}\right)+4Q_L^2\left(\frac{\Delta f}{f_o}\right)^2},$$

w związku z czym tłumienie wstęg bocznych dla obwodu typu gamma będzie miało postać

$$\left|\frac{\hat{Z}_o}{\hat{Z}}\right|_{\substack{\text{obw.}\\\text{gamma}}} = \frac{r_L}{|\hat{Z}|_{\substack{\text{obw.}\\\text{gamma}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+2\left(\frac{\Delta f}{f_o}\right)+4Q_L^2\left(\frac{\Delta f}{f_o}\right)^2}}, \tag{k}$$

gdzie r_L stanowi przetransformowaną wartość równoległego obciążenia R_L widzianą od strony źródła pobudzającego ten obwód do drgań.

5.3. Przesunięcie fazy wprowadzane przez obwód drgań

5.3.1. Prosty obwód szeregowy

Przy rezonansie, gdy $X = 0$, czyli dla $\omega_o L = \frac{1}{\omega_o C}$, przesunięcie fazy wprowadzane przez prosty szeregowy obwód drgań zanika i $\varphi = 0°$. Przy rozstrojeniu $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{x}{r_L}$ zgodnie z zależnością (11).

5.3.2 Szeregowy obwód typu gamma

Obwód typu gamma powoduje powstawanie przesunięcia fazowego pomiędzy napięciem wejściowym U_{xy} a napięciem wyjściowym U_{wcz} na rezystancji obciążenia R_L. Przesunięcie to można obliczyć rozpatrując dzielnik napięcia złożony z reaktancji x_1 oraz równolegle połączonych reaktancji X_C i rezystancji obciążenia R_L (porównaj wzór (c) z rozdziału 5.1.2) analogicznie do obwodu typu $\pi 1$.

Ze względu na to [7], że $X_C = -\frac{R_L x_L}{R_L+N}$,

gdzie $N = \sqrt{r_L R_L - x_L^2}$ oraz biorąc pod uwagę zależność (30), tangens kąta fazowego można wyrazić równaniem

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{x_L}{r_L R_L - x_L^2} = \pm\frac{x_L}{r_L} = \pm Q_L. \tag{1}$$

[7] Porównaj [7] str. 24 do 27.

W realizowanych wzmacniaczach rezonansowych klasy D_{wcz} omawiany kąt fazowy ma zwykle wartość ponad 85°, co wynika również z rozpatrzenia wykresu wskazowego dla tego typu wzmacniacza (porównaj rys. 14).

LITERATURA

1. P. J. Baxandall, *Transistor sine-wave LC oscillators*, Proc. IRE, part B, sup. 16, May 1959, s. 748—758.
2. S. Sypniewski, *Analiza pracy stopnia końcowego nadajnika radiofonicznego wykorzystującego układy klasy D we wzmacniaczu rezonansowym i modulatorze*, Rozprawa doktorska, W-wa, IŁ, marzec 1976.
3. M. R. Osborn, *Design of tuned transistor power amplifier*, Electronic Eng., August 1968, s. 436—443.
4. *Zalecenie CCIR* (Oslo 1966).
5. S. Ryżko, J. Ebert, *Wzmacniacze rezonansowe i generatory mocy w. cz.*, WNT, 1968, s. 1—423.
6. R. Vail Charless, *Circuits in Electrical Engineering*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1957, s. 1—560.
7. T. Zagajewski, *Nadajniki radiowe*, PWT, 1961, s. 1—515.
8. S. Sypniewski, *Półprzewodnikowe wzmacniacze rezonansowe klasy D*, Prace Instytutu Łączności, Zeszyt 4 (68), 1972, s. 1—67.
9. J. Ebert, A. Fiok, *Obliczanie wzmacniaczy i generatorów mocy wielkiej częstotliwości*, WNT, 1971, s. 1—282.

S. SYPNIEWSKI

IN-SERIES RESONANCE CIRCUITS IN CLASS *D* HIGH FREQUENCY AMPLIFIERS

Summary

Following the introduction, which describes the principle of operation of class *D* switched mode solid state tuned amplifiers, the author discusses the factors determinning the selection of in-series resonance circuits that constitute a characteristic element of the system of these amplifiers.

Technical solutions of gamma type vibration circuits are presented in detail in order to make the dependence occurring more noticeable. Owing to a modification of this type of circuit that makes it possible to requlate the coefficient of load transformation, there occurs an economically justified variant, particularly suitable for the realization of a class *D* amplifier system. All considerations refer to dependences characteristic of a simple in-series circuit.

The final part lists conclusions particularly important when designing similar amplifier systems. The annex contains the derivation of the mathematical dependences presented.

S. SYPNIEWSKI

AMPLIFICATEUR HAUTE FRÉQUENCE À TRANSISTORS CLASSE *D* AVEC COMMUTATION DE LA TENSION

Résumé

Ayant présenté, dans l'introduction, le principe du fonctionnement des amplificateurs haute fréquence à transistors classe *D*, avec commutation de la tension, on a discuté les agents décidant du choix des circuits résonnants série, constituant un élément caractéristique de ces amplificateurs.

Afin de mettre en évidence les relations qui s'y produisent, on a présenté en détail les solutions techniques des circuits oscillants du type gamma, actuellement appliquées. Grâce à la modification de ce type du circuit, permettant d'obtenir le réglage du coefficient de transformation de la charge, on a réalisé un nouveau type du circuit de l'amplificateur classe D_{hf}, justifié du point de vue d'économie et particulièrement convenable à l'application pratique. On a rapporté l'ensemble des délibérations aux relations caractéristiques pour le simple circuit série.

A la fin, on a comparé les conclusions essentielles surtout pour établissement des projets de pareils circuits d'amplificateurs. Dans l'annexe on a inclus la déduction des relations mathématiques présentées.

S. SYPNIEWSKI

HALBLEITER RESONANZVERSTÄRKER DER *D*-KLASSE BETRIEBEN MIT KOMMUTIERTET SPANNUNG

Zusammenfassung

Nach einführender Erwägung des Funktionsprinzips von Hochfrequenz-Halbleitertrioden der *D*-Klasse mit Schlüsselspannungverlauf geht der Verfasser zur Diskussion über die entscheidenden Faktoren bei der Wahl von Resonanzschwingungskreisen über, die die charakteristische Eigenschaft dieser Verstärker bilden.

Zwecks Darstellung der eintretenden Abhängigkeiten werden die angewandten technischen Lösungen für die Gamma-Schwingungskreise näher beschrieben. Nach Modifizierung derartiger Kreise, die die Erreichung der Regelung des Belastungsumspannungsfaktors ermöglichen, entsteht eine für praktische Realisierungszwecke eines Verstärkersystems der *D*-Klasse besonders günstige, ökonomisch begründete Variante desselben. Die gesamten Erwägungen wurden auf die für den einfachen Schwingungskreis charakteristischen Abhängigkeiten bezogen.

Abschließend wurden Folgerungen erstellt, die besonders wesentlich für die Projektierung dieser Verstärkersysteme sind. Im Anhang hat man mathematische Ableitungen für die Abhängigkeiten aufgeführt.

С. СЫПНЕВСКИ

ТРАНЗИСТОРНЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ УСИЛИТЕЛИ РАБОТАЮЩИЕ В КЛЮЧЕВОМ РЕЖИМЕ КЛАССА *Д*

Резюме

После обсуждения принципа действия транзисторных усилителей в.ч. класса *Д* работающих в ключевом режиме автор дискутирует факторы определяющие избрание сериесных резонансных контуров являющихся характеристическим элементом таких усилителей. Для илюстрации наличных зависимостей представлено подробно техническое решение колебательных схем типа гамма. После модификации схемы этого типа позволяющей получать возможность регуляции коэффициента трансформации нагрузки получается экономически обоснованный вариант особо пригодный для практического синтеза схемы усилителя в.ч. класса *Д*. Все рассуждения касаются зависимостей свойственных простому сериесному контуру. В заключение сопоставлены существенные заключения для проектирования усилителей рассмотренного типа. В приложении приведен вывод использованных математических зависимостей.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1979, 25, z. 4, ss. 1047 — 1060

51:621.374

Wybrane własności niektórych funkcji boolowskich wielu zmiennych

MARIAN ŻENKIEWICZ (TORUŃ)

Ośrodek Badawczo-Rozwojowy „Metalchem"

Otrzymano 2.2.1978

W artykule dokonano analizy funkcji boolowskich, które znalazły zastosowanie w budowie modułów logicznych. Przeprowadzono klasyfikację tych funkcji oraz podano związki analityczne zachodzące pomiędzy poszczególnymi funkcjami. Określono algorytm generowania funkcji funkcjonalnie pełnych trzech zmiennych i klas abstrakcji ze względu na relację permutacyjnej równoważności. Przedstawiono wnioski z analizy aktualnego stanu wykorzystania aparatu teoretycznego w praktyce.

1. WSTĘP

Dynamiczny rozwój układów logicznych spowodował konieczność stworzenia odpowiednich podstaw teoretycznych, umożliwiających stosowanie aparatu matematycznego w dziedzinie syntezy i analizy układów logicznych. Problemy, jakie były i są nadal aktualne w dziedzinie budowy i projektowania kombinacyjnych układów logicznych, można podzielić na trzy podstawowe grupy.

1° Budowa modelu matematycznego układu i jego optymalizacja. Rozwiązanie tego zagadnienia wymaga określenia własności funkcji boolowskich i wyodrębnienia pewnych klas funkcji, których bramki logiczne mogą znaleźć zastosowania praktyczne. W dalszym etapie należy sformułować kryteria optymalizacji układu i zastosować je przez wykonanie odpowiednich operacji na modelu matematycznym.

2° Projektowanie układu w oparciu o wyniki analizy z punktu 1. Wymaga to szerokiej znajomości zagadnień technicznych, głównie z dziedziny automatyki i elektroniki.

3° Budowa modelu fizycznego układu i dokładna jego analiza, a w dalszym etapie uruchomienie produkcji układu przystosowanego do pracy zgodnie z przyjętymi założeniami. Prawidłowe rozwiązanie tych problemów wymaga dużego doświadczenia i znajomości z dziedziny technologii, wytwarzania oraz budowy układów logicznych.

Zrozumiałe jest, że przedstawiony wyżej podział ma charakter umowny. Można jednak wyraźnie zaobserwować, że wyniki prac badawczych w każdej z wymienionych grup zagadnień powodują zmiany kierunku i natężenia prac w pozostałych grupach. Szczególnie wyraźny jest wpływ postępu w dziedzinie technologii i metod wytwarzania elementów elektronicznych oraz w dziedzinie budowy modułów logicznych. Rozwój mikroelektro-

niki i wzrost integracji układów scalonych (LSI) spowodował nie tylko zmiany w metodach projektowania, lecz stał się również stymulatorem badań w kierunku wyboru optymalnych modułów logicznych. Potwierdzeniem tej tezy jest m.in. gwałtowny rozwój prac w dziedzinie mikroprocesorów.

W dalszej części artykułu zajmować się będziemy niektórymi własnościami funkcji boolowskich wielu zmiennych. Dokładna znajomość tych zagadnień jest szczególnie potrzebna projektantom, gdyż umożliwia właściwy dobór bramek i układów logicznych oraz budowę układów optymalnych w sensie przyjętego kryterium. W dalszej części pracy pojęcie „funkcja" używane będzie w znaczeniu „funkcja boolowska wielu zmiennych".

2. ZWIĄZKI POMIĘDZY FUNKCJAMI STOSOWANYMI W AUTOMATYCE

W niniejszym rozdziale dokonano próby znalezienia zależności pomiędzy funkcjami, które znalazły praktyczne zastosowania. Podstawowym założeniem jest fakt, że wartość sygnału na wyjściu z bramki logicznej jest funkcją liczby sygnałów wejściowych przyjmujących wartość jeden (lub zero).

Dowolna funkcja może być jednoznacznie określona na jeden z następujących sposobów:

1° za pomocą tablicy, w której przedstawione są wszystkie n-elementowe ciągi wartości argumentów i podane są wartości funkcji odpowiadające poszczególnym ciągom,

2° przez podanie analitycznego opisu za pomocą symboli operacji boolowskich i zbioru zmiennych,

3° przez podanie dwóch spośród trzech zbiorów P, Q, R,

gdzie:

$P = \{F^{-1}(1)\} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in B^n | F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1\}$,

$Q = \{F^{-1}(0)\} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in B^n | F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0\}$,

$R = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in B^n | F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — nie jest określona$\}$,

a poszczególne symbole mają następujące znaczenie:

$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — określona funkcja,

$B = \{0, 1\}$ — zbiór wartości argumentów funkcji F,

B^n — iloczyn kartezjański zbioru B,

α_i — wartość zmiennej x_i, $\alpha_i \in \{0, 1\}$,

$\cup$ — „suma",

przy czym łatwo zauważyć, że:

— $P \cup Q \cup R = B^n$ dla funkcji całkowicie określonej wystarczy podać jedynie zbiór P lub Q,

— ciągi wartości argumentów $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ można zastąpić odpowiadającymi im liczbami dziesiętnymi;

4° za pomocą tablic Karnaugha, lub za pomocą diagramów Veitcha.

Inne sposoby przedstawiania funkcji, jak np. za pomocą macierzy, grafów lub n-sześcianów mają znikome zastosowania praktyczne.

W dalszej części pracy będziemy korzystać jedynie z dwóch pierwszych form zapisu.

Funkcje, których bramki logiczne znalazły praktyczne zastosowania, tworzą następujący zbiór:

$L = \bigcup_{i=1}^{7} F_i$ — indeks i oznacza kolejne funkcje.

Przed podaniem opisu funkcji zbioru L wprowadzimy następujące oznaczenia:

W_i — wartość funkcji F_i dla pewnego zestawu argumentów

$$W_i \in \{0, 1\},$$

l_{i1} — liczba zmiennych przyjmująca w pewnym zestawie argumentów funkcji F_i wartość 1,

l_{i0} — liczba zmiennych przyjmująca w pewnym zestawie argumentów funkcji F_i wartość 0,

$\geqslant$ — relacja słabej nierówności określona w zbiorze liczb naturalnych,

„+", „$\cdot$" — operacja „suma" i „iloczyn" boolowski określone w zbiorze B,

$\boxplus$ — operacja dodawania określona w zbiorze liczb naturalnych.

Funkcje zbioru L zostały jednoznacznie zdefiniowane w tablicy 1 na dwa sposoby: za pomocą wzorów oraz za pomocą W_i, l_{i1}, l_{i0}. Jedynie funkcja F_7 nie może być jednoznacznie zdefiniowana za pomocą zestawu liczb W_i, l_{i1}, l_{i0}. Dla omawianych funkcji n-zmiennych całkowicie określonych, oczywista jest zależność:

$$l_{i1} \boxplus l_{i0} = n \text{ dla każdego } n.$$

Zbiór L można podzielić na trzy podzbiory L_1, L_2, L_3 takie, że:

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$$

oraz:

$$L_1 = \{F_1, F_3, F_4, F_6\},$$
$$L_2 = \{F_2, F_5\},$$
$$L_3 = \{F_7\}.$$

Pomiędzy funkcjami zbioru L_i zachodzą następujące związki:

1° każda z funkcji przyjmuje jedną z wartości (0 lub 1) tylko dla jednego zestawu wartości argumentów, natomiast dla wszystkich pozostałych zestawów wartości argumentów każda z funkcji przyjmuje wartość przeciwną (1 lub 0),

2° spełnione są następujące zależności:

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{F_6(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$
$$F_3(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{F_4(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

oraz:

$$F_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) = \overline{F_3(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$
$$F_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) = \overline{F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Pomiędzy funkcjami zbioru L_2 zachodzą następujące związki:

1° wartość funkcji F_2 uzależniona jest jedynie od liczby zmiennych przyjmujących w danym zestawie wartości zmiennych wartość 1, natomiast wartość funkcji F_5 zależy jedynie od liczby zmiennych przyjmujących w danym zestawie wartości zmiennych wartość 0,

Tablica 1

Zestawienie funkcji zbioru L.

	Nazwa funkcji	Określenie funkcji za pomocą wzoru	Określenie funkcji za pomocą liczb W_i, l_{i1}, l_{i0}		Uwagi
			$W_i = 0$	$W_i = 1$	
1	Iloczyn n-zmiennych	$F_1 = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$	$l_{10} \geqslant 1$	$l_{10} = 0$	
2	Antyrównoważność n-zmiennych	$F_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$	$l_{21} = 2k$	$l_{21} = 2k \boxplus 1$	$k = 0,1,2\ldots$
3	Suma n-zmiennych	$F_3 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$	$l_{31} = 0$	$l_{31} \geqslant 1$	
4	Funkcja Pierce'a n-zmiennych	$F_4 = \overline{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}$	$l_{41} \geqslant 1$	$l_{41} = 0$	
5	Równoważność n-zmiennych	$F_5 = x_1 \odot x_2 \odot \ldots \odot x_n$	$l_{50} = 2k \boxplus 1$	$l_{50} = 2k$	$k = 0, 1, 2 \ldots$
6	Funkcja Sheffera n-zmiennych	$F_6 = \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_2}$	$l_{60} = 0$	$l_{60} \geqslant 1$	
7	Funkcja negacji sumy iloczynów	$F_7 = \overline{x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4 + \ldots + x_{n-1} x_n}$	$l_{71} \geqslant k \boxplus 1$	$l_{71} \leqslant 1$	dla $n = 2k$
		$F_7 = \overline{x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4 + \ldots + x_n \cdot x_n}$	$l_{70} \leqslant k$	$l_{70} = n$	dla $n = 2k \boxplus 1$

2° funkcja F_2 zmienia swoją wartość na przeciwną przy zmianie o nieparzystą liczbę ilości argumentów przyjmujących wartość 1, natomiast funkcja F_5 zmienia swoją wartość na przeciwną przy zmianie o nieparzystą liczbę ilości argumentów przyjmujących wartość 0; zatem:

$$(F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{F_2(y_1, y_2, \ldots, y_n)}) \Leftrightarrow$$
$$|l_{21}(x) - 1_{21}(y)| = 2k \boxplus 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

oraz

$$(F_5(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{F_5(y_1, y_2, \ldots, y_n)}) \Leftrightarrow$$
$$|l_{50}(x) - l_{50}(y)| = 2k \boxplus 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

gdzie:

„$-$" — jest operacją odejmowania określoną w zbiorze liczb całkowitych,
$|\ldots|$ — oznacza wartość bezwzględną liczby całkowitej
$l_{21}(x)$ — liczba zmiennych x_i przyjmujących wartość 1;

3° można wykazać, że:

$F_2 = F_5$ dla $n = 2k \boxplus 1$

i

$F_2 = \bar{F}_5$ dla $n = 2\ m$.

Dowodząc zależności 3° można rozróżnić dla dowolnej liczby argumentów dwa przypadki.

a) Niech $n = 2k$. Wtedy może zachodzić:

$l_{21} = l_{51} = 2k_1 \boxplus 1$, stąd $W_2 = l$

i

$l_{20} = l_{50} = 2k_2 \boxplus 1$, stąd $W_5 = 0$,

lub

$l_{21} = l_{51} = 2m_1$, stąd $W_2 = 0$

i

$l_{20} = l_{50} = 2m_2$, stąd $W_5 = 1$.

b) Niech $n = 2k \boxplus 1$. Wtedy może zachodzić:

$$l_{21} = l_{51} = 2k_1 \boxplus 1, \quad \text{stąd } W_2 = 1$$

i

$$l_{20} = l_{50} = 2k_2; \quad \text{stąd } W_5 = 1,$$

lub:

$$l_{21} = l_{51} = 2m_1, \quad \text{stąd } W_2 = 0$$

$$l_{20} = l_{50} = 2m_2 \boxplus 1, \quad \text{stąd } W_5 = 0.$$

Porównując wyżej przedstawione zależności otrzymujemy dowód własności 3°.

Ważną własnością funkcji należących do zbiorów L_1 i L_2 jest fakt, że dla dowolnej permutacji argumentów, wartość funkcji nie ulega zmianie. Własności tej nie posiada funkcja F_7.

Poza omówionymi funkcjami istotne znaczenie w teorii układów logicznych mają funkcje: majorytarna, minorytarna i progowa. Funkcje te nie mogą być jednoznacznie określone przez podanie liczb W_i, l_{i1}, l_{i0}.

Korzystając z podanych związków i zależności można upraszczać układy logiczne przez równoważną zamianę poszczególnych bramek logicznych.

3. FUNKCJE FUNKCJONALNIE PEŁNE

Znane twierdzenie Posta [1] podaje warunki, jakie musi spełniać zbiór funkcji, aby był funkcjonalnie pełny. Jednak bardziej interesujące jest dokonanie analizy własności pojedynczych funkcji, które są funkcjonalnie pełne. Dotychczas jedynie funkcja Pierce'a i funkcja Sheffera, które są funkcjonalnie pełne, znalazły szerokie zastosowania praktyczne. Brak jest natomiast szczegółowej analizy pozostałych funkcji funkcjonalnie pełnych n-zmiennych. Przyczyną tego stanu jest fakt, że liczba funkcji funkcjonalnie pełnych rośnie bardzo szybko wraz ze wzrostem liczby zmiennych i wynosi:

$$N(n) = 2^p(2^p - 1),$$

gdzie:

$p = 2^{(n-1)} - 1$,

n — liczba zmiennych.

Stąd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{2^{2^n}} = 1/4$$

gdzie 2^{2^n} jest liczbą wszystkich funkcji boolowskich n-zmiennych.

Zatem prawie czwartą część liczby wszystkich funkcji stanowią funkcje funkcjonalnie pełne.

Algorytm generowania funkcji funkcjonalnie pełnych może być zbudowany w oparciu o następujące twierdzenie.

T w i e r d z e n i e. Funkcja boolowska jest funkcjonalnie pełna wtedy i tylko wtedy, gdy nie zachowuje zera i jedynki oraz gdy nie jest samodualna.

Szkic dowodu.

1. Warunek konieczny. Załóżmy, że dana funkcja zachowuje np. zero. Wtedy zgodnie z [4] funkcja ta należy do zamkniętej ze względu na operację superpozycji i podstawiania klasy funkcji zachowujących zero i nie może stanowić funkcji funkcjonalnie pełnej.

2. Warunek wystarczający. Zakładając, że dana funkcja spełnia warunek konieczny udowodnimy, że przez zastosowanie operacji podstawiania można uzyskać funkcję Sheffera lub funkcję Pierce'a. Wprowadzimy następującą definicję: dwa zestawy wartości argumentów danej funkcji nazywamy parą komplementarną, jeżeli wszystkie odpowiadające sobie w obu zestawach argumenty przyjmują wartości przeciwne.

Z założenia mamy:

$$f(0, 0, \ldots, 0) = 1; \quad f(1, 1, \ldots, 1) = 0,$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)}.$$

Stąd istnieje taka para komplementarna $(K_I, K_J) \in B^n$, gdzie:

$$K_I = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$
$$K_J = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n), \quad K_I, K_J \in B^n,$$

że: $f(K_I) = f(K_J)$.

Załóżmy, że:

$$f(K_I) = f(K_J) = 1.$$

Niech X oznacza zbiór wszystkich argumentów danej funkcji. Podzielmy zbiór X na dwie klasy rozłączne V i W tak, że

$$V = \{x_1 \in X | x_i = 0 \quad \text{dla} \quad K_I \quad \text{i} \quad x_i = 1 \text{ dla } K_J\},$$
$$W = X \backslash V.$$

Podstawimy za wszystkie zmienne $x_i \in V$ zmienną x, a za wszystkie zmienne $x_i \in W$ zmienną y. Wtedy w sumowo-iloczynowej postaci kanonicznej danej funkcji znikną wszystkie wyrazy, w których pojawią się człony $x \cdot \bar{x}$ lub $y \cdot \bar{y}$.

Funkcja przyjmuje wartość 1 tylko dla trzech zestawów wartości argumentów (0, 0, ..., 0); (K_I); (K_J) i ma postać funkcji Sheffera, gdyż:

$$F(x, y) = \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y + x \cdot \bar{y} = \overline{x \cdot y}$$

Przy założeniu $f(K_I) = f(K_J) = 0$ postępując analogicznie otrzymamy funkcję Pierce'a.

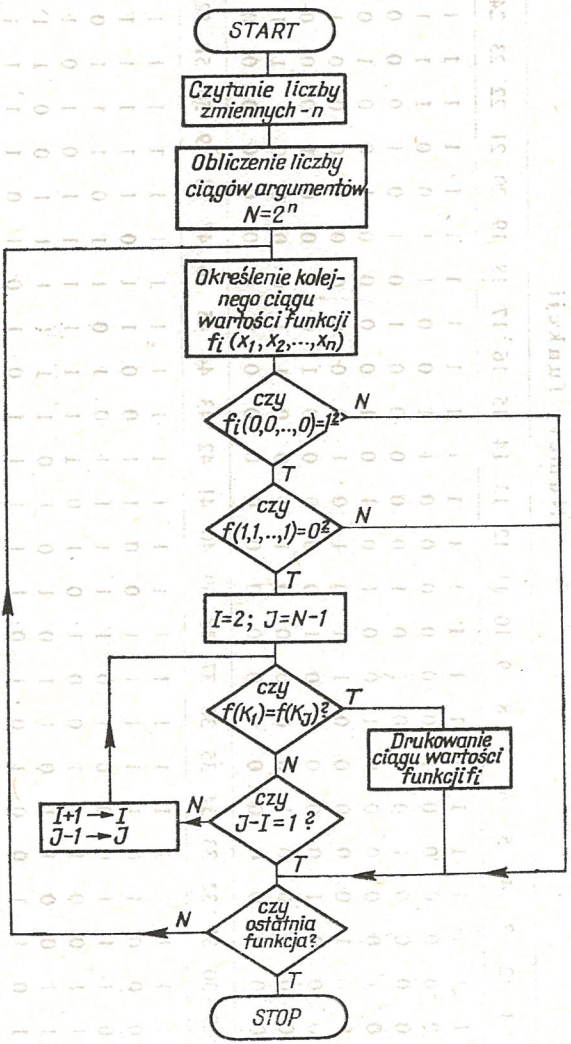
Szczegółowy dowód twierdzenia zilustrowany odpowiednim przykładem przedstawiono w pracy [2].

Korzystając z treści podanego wyżej twierdzenia można określić w prosty sposób algorytm generowania funkcji funkcjonalnie pełnych, który przedstawiono na rys. 1.

Dla funkcji trzech zmiennych liczba funkcji funkcjonalnie pełnych wynosi:

$$N(3) = 2^3(2^3-1) = 56 \quad (p = 2^{(3-1)}-1 = 3).$$

Korzystając z algorytmu z rys. 1 wyznaczono i przedstawiono w tablicy 2 wszystkie funkcje funkcjonalnie pełne trzech zmiennych.



Rys. 1. Algorytm generowania funkcji funkcjonalnie pełnych

Oznaczmy symbolem H zbiór wszystkich funkcji funkcjonalnie pełnych dla ustalonego n. W zbiorze tym można określić relację dwuargumentową, którą nazwiemy „relacją permutacyjnej równoważności" i oznaczać będziemy symbolem „$\sim$". Definicja tej relacji jest następująca.

Tablica 2

Zbiór wszystkich funkcji funkcjonalnie pełnych trzech zmiennych

Zmienne	Numery funkcji																											
x_1 x_2 x_3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
0 0 0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0 0 1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0 1 0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1
0 1 1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
1 0 0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
1 0 1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0
1 1 0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
1 1 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

x_1 x_2 x_3	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
0 0 0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0 0 1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
0 1 0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0 1 1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
1 0 0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1 0 1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
1 1 0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
1 1 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Relacja permutacyjnej równoważności „~" zachodzi pomiędzy funkcjami F_m i F_n należącymi do zbioru H wtedy i tylko wtedy, jeżeli istnieje taka permutacja $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ argumentów $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tych funkcji, że:

$$F_m(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}) = F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Można udowodnić [2], że relacja „~" jest relacją typu równoważności. Zatem zgodnie z zasadą abstrakcji (zasada identyfikacji elementów równoważnych [3]) relacja „~" ustala podział zbioru H na niepuste i rozłączne podzbiory, tj. klasy abstrakcji relacji „~", w taki sposób, że dwie dowolne funkcje zbioru H należą do tej samej klasy abstrakcji wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$F_m \sim F_n.$$

Pojęcie relacji permutacyjnej równoważności określonej na zbiorze H może być rozszerzone na zbiór wszystkich funkcji boolowskich przy zachowaniu tej samej formy definicji.

Z przedstawionych wyżej własności wynika praktyczny wniosek, że każdą z funkcji należących do danej klasy abstrakcji można zrealizować za pomocą jednej i tej samej bramki logicznej, w której poszczególne wejścia muszą być jednoznacznie oznaczone ze względu na konieczność odpowiedniej permutacji zmiennych wejściowych.

Obecnie jako przykład, przedstawimy sposób określania klas abstrakcji dla funkcji funkcjonalnie pełnych trzech zmiennych. Analizując sumowo-iloczynowe postacie kanoniczne funkcji przedstawionych w tablicy 2, widzimy, że istnieje tylko jedna funkcja F_1 przyjmująca tylko dla jednego zestawu wartości argumentów wartość 1. Jest to funkcja:

$$F_1 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3.$$

Ponieważ wyraz $\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$ nie zmienia swojej postaci przy permutacji zmiennych, a operacja „ · " jest przemienna, pierwszą klasę abstrakcji H_1 tworzy jedynie funkcja F_1.

Wybierzmy z tablicy 2 funkcje przyjmujące wartość 1 dla dwóch zestawów wartości argumentów, tj. posiadające w sumowo-iloczynowej postaci kanonicznej po dwa wyrazy iloczynowe. Zgodnie z numeracją przedstawione w tablicy 2 funkcje tworzą zbiór:

$$A = \bigcup_{i=2}^{7} F_i.$$

Podczas dalszej analizy funkcji należących do zbioru A nie ma potrzeby zajmować się wyrazem $\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$ gdyż wyraz ten nie zmienia swojej postaci przy permutacji zmiennych. Przedmiotem analizy będzie sześć permutacji trzech zmiennych:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3;\ x_1 \cdot x_3 \cdot x_2;\ x_2 \cdot x_1 \cdot x_3;\ x_2 \cdot x_3 \cdot x_1;\ x_3 \cdot x_1 \cdot x_2;\ x_3 \cdot x_2 \cdot x_1.$$

Oznaczmy klasę abstrakcji, do której należy funkcja F_2 przez H_2. Funkcja F_2 ma postać:

$$F_2 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3.$$

Dokonując kolejnych permutacji zmiennych w drugim wyrazie iloczynowym funkcji F_2 otrzymujemy funkcje F_4 i F_6, przy czym:

$$F_4 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3,$$

$$F_6 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3.$$

Stąd mamy:

$$H_2 = \{F_2, F_4, F_6\}.$$

Oznaczmy klasę abstrakcji, do której należy funkcja F_3 przez H_3

$$F_3 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3.$$

Postępując analogicznie jak z funkcją F_2 otrzymamy:

$$H_3 = \{F_3, F_5, F_7\}.$$

Następnie wybieramy z tablicy 2 funkcje przyjmujące wartość 1 dla trzech zestawów wartości argumentów. Funkcje te, zgodne z numeracją przedstawioną w tablicy 2, tworzą zbiór:

$$Z = \bigcup_{i=8}^{22} F_i.$$

Każda z funkcji posiada trzy iloczynowe wyrazy kanoniczne, lecz dla dalszej analizy wystarczy wziąć tylko po dwa wyrazy, gdyż wyraz $\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$ nie zmienia swojej postaci przy permutacji zmiennych.

Oznaczmy klasę abstrakcji, do której należy funkcja F_8 przez H_4. Funkcja F_8 ma następującą postać:

$$F_8 = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3.$$

Biorąc dwa ostatnie wyrazy tej funkcji i dokonując kolejnych permutacji zmiennych otrzymujemy funkcje F_{13} i F_{16}, przy czym:

$$F_{13} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3,$$

$$F_{16} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3.$$

Stąd mamy:

$$H_4 = \{F_8, F_{13}, F_{16}\}.$$

Biorąc kolejno funkcje F_9, F_{10}, F_{20} i postępując podobnie otrzymujemy:

$$H_5 = \{F_9, F_{14}, F_{19}\},$$

$$H_6 = \{F_{10}, F_{11}, F_{12}, F_{15}, F_{17}, F_{18}\},$$

$$H_7 = \{F_{20}, F_{21}, F_{22}\}.$$

Pozostałe klasy abstrakcji zostały określone tą samą metodą. Wyniki przedstawiono w tablicy 3.

4. WNIOSKI KOŃCOWE

Wyniki niniejszej pracy pozwalają na sformułowanie następujących wniosków.

1° Funkcja, która nie zachowuje zera, nie zachowuje jedynki i nie jest samodualna, jest funkcją niemonotoniczną i nieliniową. Funkcja ta jest funkcją funkcjonalnie pełną. Wniosek wynika z porównania twierdzenia podanego w pracy z twierdzeniem Posta o zbiorze funkcji funkcjonalnie pełnym.

Tablica 3

Zbiór klas abstrakcji wyznaczonych przez relację permutacyjnej równoważności

Klasa abstrakcji	Reprezentant klasy abstrakcji	Zbiór funkcji danej klasy abstrakcji (numeracja wg tabl. 2)
H_1	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$	1
H_2	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$	2, 4, 6
H_3	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$	3, 5, 7
H_4	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$	8, 13, 16
H_5	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$	9, 14, 19
H_6	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$	10, 11, 12, 15, 17, 18
H_7	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$	20, 21, 22
H_8	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$	24, 26, 28, 30, 32, 34
H_9	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$	23, 25, 27, 29, 31, 33
H_{10}	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$	36, 41, 46
H_{11}	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$	37, 38, 39, 42, 44, 45
H_{12}	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$	47, 48, 49
H_{13}	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$	35, 40, 43
H_{14}	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$	51, 53, 55
H_{15}	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$	50, 52, 54
H_{16}	$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 + \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$	56

2° Podział zbioru funkcji funkcjonalnie pełnych przez relację permutacyjnej równoważności na klasy abstrakcji pozwala ograniczyć analizę funkcji funkcjonalnie pełnych do funkcji będących reprezentantami poszczególnych klas abstrakcji.

LITERATURA

1. C. W. Jabłoński, *O supierpoziciach funkcji ałgiebry łogiki*, Matiematiczeskij sbornik, I. A. N. SSSR, Moskwa 1952.
2. M. Żenkiewicz, *Funkcjonalnie pełne zbiory funkcji boolowskich i ich praktyczne zastosowania w automatyce*, Praca dyplomowa ZSM UMK, Toruń 1977.
3. H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, P.W.N., Warszawa 1971.
4. E. N. Wawiłow, G. P. Portnoj, *Sintiez schiem eliektronnych cifrowych maszin*, Izdatielstwo „Sovietskoje Radio", Moskwa 1963.

M. ŻENKIEWICZ

SELECTED PROPERTIES OF CERTAIN BOOLEAN FUNCTIONS WITH MANY VARIABLES

Summary

An analysis of the Boolean functions which found application in the logic modulus construction is made. The classification of these functions is made and analytical relations occurring between particular functions are given. The algorithm of the generating of functions functionally full of three variables is determined as well as abstraction classes in consideration of relation of permutational equivalence. Conclusions of the analysis of the present state of utilisation of the theoretical apparatus in practice are presented.

M. ŻENKIEWICZ

PROPRIÉTÉS CHOISIES DE CERTAINES FUNCTIONS BOOLIENNES DE MULTIPLES VARIABLES

Résumé

Dans l'article on a analysé les fonctions booliennes appliquées dans la structure des modules logiques. On a établi la classification de ces fonctions et on a donné les relations analytiques existant parmi les fonctions particulières. On a déterminé l'algorithme de génération des fonctions fonctionnellement pleines de trois variables et des classes d'abstraction en égard à relation d'équivalence permutatique. On a présenté les conclusions de l'analyse de l'état actuel d'utilisation de l'appareil théorique dans la pratique.

M. ŻENKIEWICZ

EINIGE GEWÄHLTE EIGENSCHAFTEN MANCHER BOOL-FUNKTIONEN MIT VIELEN VARIABLEN

Zusammenfassung

Im vorliegenden Beitrag sind Bool-Funktionen analysiert worden, die bei Aufstellung von logischen Modulen Anwendung finden. Diese Modulen wurden klassifiziert, und die unter den einzelnen Funktionen auftretenden analytischen Zusammenhänge angeführt. Im weiteren wurde der Algorithmus für die Genera-

lisierung der Funktion von funktionell vollen drei Veränderlichen und der Klassen ihrer Abstraktion unter dem Gesichtspunkt der Relation der Permutationsgleichwertigkeit bestimmt. Es wurden Schlußfolgerungen auf Grund der Analyse des aktuellen Ausnutzungsstandes des theoretischen Apparates in der Praxis gezogen.

М. ЖЕНКЕВИЧ

ИЗБРАНИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИИ БУЛЯ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Р е з ю м е

В статье проведён анализ функций алгебры логики, которые применяются для построения бесконтактных систем управления. Производится классификация этих функции, а также приводятся аналитические зависимости, существующие между отдельными функциями. Определяется алгоритм создавания функционально полных функций трёх переменных и классов абстракции соотношения перестановочной эквивалентности. Представляются выводы, следующие из анализа современного состояния использования теоретического аппарата в практике.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1979, 25, z. 4, ss. 1061 — 1090

621.372.54

Szeregi do obliczania dokładniejszych wartości eliptycznej stałej modularnej $q = q(k)$ w zastosowaniu do filtrów elektrycznych

OLGIERD PRZESMYCKI (WARSZAWA)

Instytut Telekomunikacji Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 4.9.1978

Wskazano ogólną metodę wyznaczania wartości współczynników szeregów określających zależność eliptycznej stałej modularnej q (i stowarzyszonej z nią stałej q') od modułu k (lub komodułu $k' = \sqrt{1-k^2}$). Podano takie szeregi z wyznaczonymi wartościami pierwszych 14-tu współczynników, tj. o siedem więcej, niż było dotychczas znane. W wyniku umożliwiono znajdowanie dokładniejszych wartości stałej q (i q') dla danego k (lub k') i — co za tym idzie — dokładniejszych wartości m.in. funkcji eliptycznych sn, cn i dn Jacobiego, parametrów filtrów eliptycznych itp.

Rozpatrzono istotne problemy praktyczne metod numerycznych obliczania stałej q (i stałej q') opartych na zastosowaniu podanych szeregów z uwzględnionymi wartościami pierwszych 14-tu współczynników. Zamieszczono przykładowe obliczenia określonych parametrów filtrów eliptycznych, przeprowadzone zgodnie z tymi metodami.

1. POJĘCIA PODSTAWOWE

W telekomunikacji jako filtrów elektrycznych nieraz używa się filtrów eliptycznych, czyli takich filtrów elektrycznych, których określone parametry (jak klasa lub stopień i częstotliwości charakterystyczne) wyrażają się przez funkcje eliptyczne [1]. Przy obliczaniu takich właśnie filtrów oblicza się dla danego, rzeczywistego modułu k rzeczywistą jego funkcję $q = q(k)$, zwaną eliptyczną stałą modularną [2]. Oblicza się też wtedy moduł k dla danej wartości stałej q.

Stała $q = q(k)$ jest określona jako:

$$q = q(k) = \exp(-\pi K'/K), \tag{1}$$

gdzie: π — ludolfina ($\pi = 3.14159\ldots$), a $K = K(k)$ i $K' = K'(k)$ — następujące całki:

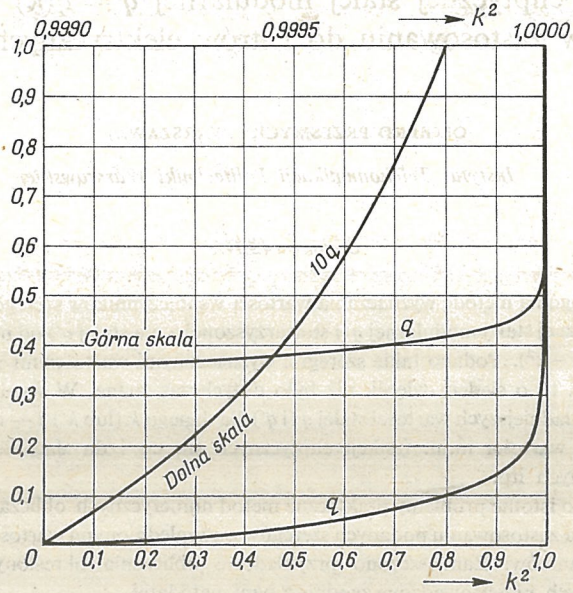
$$K = K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}, \tag{2}$$

[1] Por. np. [3, rozdz. VI i VIII], [4]÷[7], [8, rozdz. III, p. B], [11], [12], [17, rozdz. 7], [18, rozdz. 7] i [19]÷[21].

[2] Wszystkie rozpatrywane w tej pracy wielkości przyjmuje się za rzeczywiste. Stałą q w szeregu prac oznacza się przez h (np. w [2], [11], [17], [18] i [22]).

$$K' = K'(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}, \tag{3}$$

czyli całki eliptyczne zupełne pierwszego rodzaju (tu podane w postaci normalnej, trygonometrycznej) modułu k i komodułu (modułu dopełniającego) k' [3].



Rys. 1. Zależność q od k^2 (wg [10, str. 52])

Moduł k i komoduł k' związane są ze sobą zależnością:

$$k^2 + k'^2 = 1, \tag{4}$$

przy czym każdy z nich zawiera się w przedziale $\langle 0, 1\rangle$ [4].

Stała q zawiera się również w przedziale $\langle 0, 1\rangle$. Jest ona przy tym równa 0 dla $k = 0$ (tj. dla $k' = 1$), bo wówczas $K = \pi/2$ i $K' = \infty$; jest ona równa 1 dla $k = 1$ (tj. dla $k' = 0$), bo wtedy $K = \infty$ i $K' = \pi/2$.

Ze wzrostem k stała q monotonicznie rośnie, i to poza bezpośrednim otoczeniem punktu $k = 1$ bardzo powoli, natomiast w tym otoczeniu — niezmiernie szybko (rys. 1)

Wprowadzimy wielkości $\varepsilon = \varepsilon(k)$ i $\eta = \eta(k)$ określone jako:

$$\varepsilon = \varepsilon(k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\sqrt[4]{1-k^2}}{1+\sqrt[4]{1-k^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}, \tag{5}$$

$$\eta = \eta(k) = (k/4)^2 = (1-k'^2)/16, \tag{6}$$

[3] Omawiane całki traktujemy tutaj jako funkcje zmiennej k. Zauważmy jednak, że $K(k) = K'(k')$ i $K'(k) = K(k')$.

[4] Z granicznymi wartościami k (i k'), równymi 0 i 1, nie ma się do czynienia przy obliczaniu filtrów. Tutaj je jednak uwzględniamy, by pokazać, jak zachowują się dla nich określone funkcje k (i ewent. k').

gdzie ε — jak widać — zawiera się w przedziale od 0 (przy $k = 0$) do 1/2 (przy $k = 1$), η zaś — w przedziale od 0 (przy $k = 0$) do 1/16 (przy $k = 1$).

Posługując się podanymi np. w [22] (w p. 179 na str. 594) związkami pomiędzy wielkościami $\sqrt{k}$ i $\sqrt{k'}$ a funkcjami teta: ϑ_2, ϑ_3 i ϑ_4, i podanymi np. również w [22] (w p. 176 na str. 587) rozwinięciami funkcji ϑ_2, ϑ_3 i ϑ_4 w szeregi, otrzymuje się ważne dla $k < 1$ następujące zależności, z których korzysta się przy obliczaniu ε i η dla danego q:

$$\varepsilon = \varepsilon(q) = \frac{\sum_{v=1}^{\infty} q^{(2v-1)^2}}{1+2\sum_{v=1}^{\infty} q^{4v^2}} = \frac{q+q^9+q^{25}+q^{49}+q^{81}+q^{121}+\ldots}{1+2(q^4+q^{16}+q^{36}+q^{64}+q^{100}+\ldots)}, \tag{7}$$

lub

$$\varepsilon = \varepsilon(q) = q\,\frac{1+\sum_{v=1}^{\infty} q^{4v(v+1)}}{1+2\sum_{v=1}^{\infty} q^{4v^2}} = q\,\frac{1+q^8+q^{24}+q^{48}+q^{80}+q^{120}+\ldots}{1+2(q^4+q^{16}+q^{36}+q^{64}+q^{100}+\ldots)} \tag{8}$$

oraz

$$\eta = \eta(q) = q\left[\frac{1+\sum_{v=1}^{\infty} q^{v(v+1)}}{1+2\sum_{v=1}^{\infty} q^{v^2}}\right]^4 = q\left[\frac{1+q^2+q^6+q^{12}+q^{20}+q^{30}+\ldots}{1+2(q+q^4+q^9+q^{16}+q^{25}+\ldots)}\right]^4. \tag{9}$$

Występujące w (8) i (9) szeregi są bardzo szybko zbieżne, ponieważ potęga q szybko w tych szeregach wzrasta (zwłaszcza w szeregach w (8)), a q nie przekracza nawet wartości 0.35316 ... dla $k = \sin 88° \approx 0.99939$ ... [23, str. 351]. Zatem przy obliczaniu ε i η na podstawie (8) i (9), zachowuje się w tych szeregach wyrazy ze stosunkowo małymi potęgami q. I tak, gdy np. obliczenia ε prowadzi się wg (8) z 13-cyfrową dziesiętną arytmetyką zmiennego przecinka [5] przy $k = \sin 88°$, czyli w myśl [23, str. 351] przy $q = 0.35316\,56482\,96$ ..., to w szeregach licznika i mianownika (8) prócz jedności zachowuje się tylko wyrazy z potęgami q nie większymi odpowiednio niż 24 i 16, wtedy bowiem

$$q^{24} \approx 1.42 \cdot 10^{-11} \text{ i } 2q^{16} \approx 1.17 \cdot 10^{-7},$$

natomiast

$$q^{48} \approx 2.01 \cdot 10^{-22},\quad q^{80} \approx 6.89 \cdot 10^{-37} \text{ itd.}$$

oraz

$$2q^{36} \approx 1.07 \cdot 10^{-16},\quad 2q^{64} \approx 2.35 \cdot 10^{-29} \text{ itd.},$$

a zatem odrzucone wyrazy (wyrazy z potęgami q większymi niż 24), jako znajdujące się na dalekich pozycjach dziesiętnych, nie mają już wpływu na rezultat końcowy obliczeń (przy wskazanej precyzji rachunku).

[5] W takiej właśnie arytmetyce wykonuje się obliczenia m.in. za pomocą minikalkulatorów elektronicznych firmy Texas Instruments typów SR-50, SR-50A i SR-51A.

Jeżeli obliczenia η prowadzi się wg (9) z wymienioną arytmetyką również przy $k = \sin 88°$, to w szeregach licznika i mianownika (9) prócz jedności zachowuje się tylko wyrazy z potęgami q nie większymi odpowiednio niż 20 i 25, bo wówczas

$$q^{20} \approx 9.11 \cdot 10^{-10} \quad \text{i} \quad 2q^{25} \approx 1.00 \cdot 10^{-11},$$

natomiast

$$q^{30} \approx 2.75 \cdot 10^{-14}, \quad q^{42} \approx 1.04 \cdot 10^{-19} \text{ itd.}$$

oraz

$$2q^{36} \approx 1.07 \cdot 10^{-16}, \quad 2q^{49} \approx 1.42 \cdot 10^{-22} \text{ itd.},$$

a więc odrzucone wyrazy (z potęgami q większymi niż 25), jako znajdujące się na dalekich pozycjach dziesiętnych, też nie mają wpływu na wynik końcowy obliczeń.

Gdy znane są wartości ε i η, na ich podstawie można obliczyć k posługując się wynikającymi z (5) i (6) zależnościami postaci:

$$k = k(\varepsilon) = \sqrt{1 - \left(\frac{1-2\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)^4} \tag{10}$$

i

$$k = k(\eta) = 4\sqrt{\eta}. \tag{11}$$

Wartość k dla danego q dogodnie jest obliczać wg wzoru:

$$k = k(q) = \frac{4\sqrt{ab(a^2+4b^2)}}{(a+2b)^2}, \tag{12}$$

który wywodzi się z (10) i (7), i w którym:

$$a = 1+2\sum_{v=1}^{\infty} q^{4v^2} = 1+2(q^4+q^{16}+q^{36}+q^{64}+q^{100}+\ldots) \tag{13}$$

oraz

$$b = q\sum_{v=1}^{\infty} q^{4v(v-1)} = q(1+q^8+q^{24}+q^{48}+q^{80}+q^{120}+\ldots). \tag{14}$$

Zajmiemy się teraz zasadniczymi zależnościami, zwłaszcza szeregami, wykorzystywanymi przy obliczaniu stałej q na podstawie zadanych wartości k lub k'.

Otóż analizując (7) bądź (8) można dowieść [2, § 45, str. 159], że przy $k < 1$ stała q wyraża się w zależności od ε szeregiem postaci:

$$q = q(\varepsilon) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v \varepsilon^{4v+1} = c_0\varepsilon + c_1\varepsilon^5 + c_2\varepsilon^9 + \ldots, \tag{15}$$

gdzie współczynniki c_v ($v = 0, 1, 2, \ldots$) są określonymi liczbami naturalnymi [6].

[6] Zgodnie np. z [2, § 45, str. 159] jest: $c_0 = 1$, $c_1 = 2$, $c_2 = 15$ i $c_3 = 150$.

Porównując (8) z (9) i uwzględniając (15) można też dowieść, że przy $k < 1$ stała q wyraża się w zależności od η następująco:

$$q = q(\eta) = \eta\Big(\sum_{v=0}^{\infty} c_v \eta^v\Big)^4 = \eta(c_0 + c_1\eta + c_2\eta^2 + \ldots)^4, \tag{16}$$

gdzie współczynniki c_v są identyczne z odpowiednimi (mającymi taki sam indeks v) współczynnikami c_v występującymi w (15).

Korzystając z (15) i (5) lub z (16) i (6) oblicza się stałą $q = q(k)$ dla wartości k niezbyt dużych (czyli wartości k' niezbyt małych).

Dla wartości k większych (k' mniejszych), stałą $q = q(k)$ oblicza się ze wzoru:

$$q = \exp(\pi^2/\ln q'), \tag{17}$$

wynikającego ze związku [23, str. 359] [7]

$$\Big(\ln\frac{1}{q}\Big)\cdot\Big(\ln\frac{1}{q'}\Big) = \pi^2. \tag{18}$$

Jest

$$q' = q'(k) = q(k') = \exp(-\pi K/K'). \tag{19}$$

Jeżeli zatem wprowadzi się wielkości:

$$\varepsilon' = \varepsilon'(k) = \varepsilon(k') = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\sqrt[4]{1-k'^2}}{1+\sqrt[4]{1-k'^2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} \tag{20}$$

i

$$\eta' = \eta'(k) = \eta(k') = (k'/4)^2 = (1-k^2)/16, \tag{21}$$

na podstawie (8)÷(16) otrzyma się ważne dla $k > 0$ ($k' < 1$) następujące zależności:

$$\varepsilon' = \varepsilon'(q') = q'\,\frac{1+\sum_{v=1}^{\infty} q'^{4v(v+1)}}{1+2\sum_{v=1}^{\infty} q'^{4v^2}} = q'\cdot\frac{1+q'^8+q'^{24}+q'^{48}+q'^{80}+q'^{120}+\ldots}{1+2(q'^4+q'^{16}+q'^{36}+q'^{64}+q'^{100}+\ldots)}, \tag{22}$$

$$\eta' = \eta'(q') = q'\times$$

$$\times\left[\frac{1+\sum_{v=1}^{\infty} q'^{v(v+1)}}{1+2\sum_{v=1}^{\infty} q'^{v^2}}\right]^4 = q'\left[\frac{1+q'^2+q'^6+q'^{12}+q'^{20}+q'^{30}+\ldots}{1+2(q'+q'^4+q'^9+q'^{16}+q'^{25}+\ldots}\right]^4, \tag{23}$$

$$k' = k'(\varepsilon') = \sqrt{1-\left(\frac{1-2\varepsilon'}{1+2\varepsilon'}\right)^4}, \tag{24}$$

$$k' = k'(\eta') = 4\sqrt{\eta'}, \tag{25}$$

$$k' = k'(q') = \frac{4\sqrt{a'b'(a'^2+4b'^2)}}{(a'+2b')^2}, \tag{26}$$

[7] W (17) i (18) symbol ln oznacza logarytm naturalny, czyli logarytm o podstawie $e = 2.71828\ldots$

$$q' = q'(\varepsilon') = \sum_{v=0}^{\infty} c_v \varepsilon'^{4v+1} = c_0 \varepsilon' + c_1 \varepsilon'^5 + c_2 \varepsilon'^9 + \ldots, \tag{27}$$

$$q' = q'(\eta') = \eta' \Big(\sum_{v=0}^{\infty} c_v \eta'^v \Big)^4 = \eta'(c_0 + c_1 \eta' + c_2 \eta'^2 + \ldots)^4, \tag{28}$$

gdzie:

$$a' = 1 + 2 \sum_{v=1}^{\infty} q'^{4v^2} = 1 + 2(q'^4 + q'^{16} + q'^{36} + q'^{64} + q'^{100} + \ldots), \tag{29}$$

$$b' = q' \sum_{v=1}^{\infty} q'^{4v(v-1)} = q'(1 + q'^8 + q'^{24} + q'^{48} + q'^{80} + q'^{120} + \ldots), \tag{30}$$

a współczynniki c_v są identyczne z odpowiednimi (posiadającymi taki sam indeks v) współczynnikami c_v, występującymi w (15) i (16).

Wielkość q' zwie się eliptyczną stałą modularną stowarzyszoną z q (lub komplementarną).

Stosując (20) i (21) oblicza się ε' i η' dla danego k lub k', gdzie

$$k' = \sqrt{1 - k^2}, \tag{31}$$

przy czym ε' (i η') zachowuje się w funkcji k' tak, jak ε (i η) w funkcji k.

Wykorzystując (27) lub (28) oblicza się q' dla danego ε' lub η', przy czym zachowanie się q' w funkcji k' jest dokładnie takie, jak zachowanie się q w funkcji k.

Korzystając z (22) i (23) oblicza się ε' i η' dla znanego q'. Przy tym, ze względu na szybką zbieżność szeregów, występujących w (22) i (23), w szeregach tych zachowuje się wówczas stosunkowo małą liczbę początkowych wyrazów (postępuje się zatem wtedy tak, jak w przypadku obliczeń ε i η prowadzonych wg (7)÷(9), o czym mówiliśmy wyżej).

W oparciu o (24), (25) i (26) oblicza się k' dla znanego odpowiednio ε', η' i q', przy czym od k' przechodzi się do k posługując się wzorem:

$$k = \sqrt{1 - k'^2}, \tag{32}$$

który, podobnie jak i wzór (31), łatwo otrzymuje się z (4).

Gdy zna się wartość q', odpowiadającą jej wartość q oblicza się za pomocą wzoru (17), gdzie wg [15, str. 2] z dokładnością do 32 cyfr znaczących jest [8]:

$$\pi^2 = 9.86960\ 44010\ 89358\ 61883\ 44909\ 99876\ 2. \tag{33}$$

Analizując m.in. (18) i (4) bez trudu można stwierdzić, że — w szczególności — dla $k = k' = \sqrt{2}/2$, czyli dla $k^2 = k'^2 = 1/2$, jest [9]:

$$q = q' = \exp(-\pi) = 0.04321\ 39182\ 63772\ 24977\ 44177\ 37171\ 728\ \ldots \tag{34}$$

Uwzględnienie tego pozwala kontrolować jakość opracowywanych dla komputerów programów służących do obliczania stałych q i q' dla zadanych wartości k i k'.

[8] Zauważmy, że w [15, str. 1] podana jest wartość π z dokładnością do ponad 700 cyfr znaczących.

[9] Podaną tu wartość $\exp(-\pi)$ zaczerpnięto z [15, str. 1], gdzie znaleźć można jeszcze 17 dalszych jej cyfr znaczących. Zauważymy, że następną cyfrą liczby podanej w (34) jest 0.

2. NIEKTÓRE ASPEKTY PRAKTYCZNE METOD NUMERYCZNYCH BEZPOŚREDNICH I POŚREDNICH OBLICZANIA q

Zajmiemy się tutaj istotnymi problemami praktycznymi metod numerycznych obliczania stałej q, opartych na zależnościach (15) i (5), (16) i (6), (17), (27) i (20) oraz (17), (28) i (21), przy czym metody tego rodzaju, oparte na (15) i (5) lub (16) i (6) nazwiemy *metodami bezpośrednimi* (odpowiednio *typu A* lub *typu B*) (*obliczania q*), a oparte na (17), (27) i (20) lub (17), (28) i (21) — *metodami pośrednimi* (odpowiednio *typu A* lub *typu B*) (*obliczania q*) [10].

Otóż od razu zauważymy, że wyżej wymienione zależności są zależnościami dokładnymi [11] (w odpowiednich przedziałach k). Zatem w oparciu o te zależności można by obliczać wartości dokładne q w przypadku, gdyby było można i wykonywać działania nieskończone, i wykonywać działania dokładnie (tzn. bez błędów obcięcia albo zaokrąglenia [12], i — oczywiście — bez pomyłek, których jednak w całej tej pracy nie będziemy uwzględniali, bo nie są one nierozerwalnie związane z procesem obliczeń i łatwo można je wykryć i wyeliminować). Taka możliwość istnieje w teorii. W praktyce ona nie istnieje. Godząc się z tym, w praktyce, w przypadku szeregów (15) i (27), jak również i szeregów w (16) i (28) — zastępuje się działania nieskończone przybliżonymi działaniami skończonymi poprzez zachowanie w tych szeregach t pierwszych wyrazów i odrzucenie wszystkich wyrazów dalszych. A więc zależności: (15), (16), (27) i (28) zastępuje się wówczas odpowiednio zależnościami:

$$q = q(\varepsilon) \approx \sum_{v=0}^{t-1} c_v \varepsilon^{4v+1}, \tag{35}$$

$$q = q(\eta) \approx \eta \Big(\sum_{v=0}^{t-1} c_v \eta^v \Big)^4, \tag{36}$$

$$q' = q'(\varepsilon') \approx \sum_{v=0}^{t-1} c_v \varepsilon'^{4v+1}, \tag{37}$$

$$q' = q'(\eta') \approx \eta' \Big(\sum_{v=0}^{t-1} c_v \eta'^v \Big)^4, \tag{38}$$

gdzie t jest określoną liczbą naturalną.

Reasumując, obliczenia q w praktyce prowadzi się w poszczególnych metodach numerycznych, wymienionych powyżej, w oparciu o następujące zależności: 1° w metodzie bezpośredniej typu A — w oparciu o (35) i (5), 2° w metodzie bezpośredniej typu B —

[10] W dalszym ciągu często będziemy pomijać te części terminów kilkuwyrazowych, które podane są pomiędzy nawiasami.

[11] Ta sama uwaga dotyczy także innych podanych wcześniej zależności, które zawierają znak $=$, a nie znak $\approx$.

[12] Por. np. [13, p. 1.1.3, str. 101], [24] i [25, str. 10].

w oparciu o (36) i (6), 3° w metodzie pośredniej typu A — w oparciu o (17), (37) i (20) oraz 4° w metodzie pośredniej typu B — w oparciu o (17), (38) i (21).

Jak widać, omawiane metody numeryczne są metodami numerycznymi przybliżonymi i pozwalają obliczać wartości q nawet w teorii (tzn. nawet przy dokładnym wykonywaniu działań) jedynie przybliżone [13].

Rozpatrując powyższe metody obliczania q łatwo jest stwierdzić co następuje:

1) w tych metodach warunkiem koniecznym otrzymania dostatecznie dokładnego wyniku (wyniku, dostatecznie mało różniącego się od dokładnej wartości stałej q) jest uwzględnienie w (35) ÷ (38) dostatecznie dużej liczby t pierwszych wyrazów szeregów z (15), (16), (27) i (28), i to w (36) i (38) na ogół większej niż w (35) i (37), albowiem szeregi w (16) i (28) są wolniej zbieżne;
2) metody pośrednie są ogólnie biorąc mniej dogodne niż metody bezpośrednie, bo wymagają użycia jednego wzoru więcej, i to wzoru, w którym trzeba obliczać m.in. wartości funkcji $\ln x$ i $\exp x$ [14].

Reasumując, obliczenia q dla danego k (lub k') dogodnie jest prowadzić metodami bezpośrednimi, przy czym gdy k jest duże, co np. w przypadku filtrów najczęściej ma miejsce, liczba t, zwłaszcza w metodzie typu B (a więc w (36)), musi być przyjmowana dość duża po to, żeby otrzymany wynik był dostatecznie dokładny (przy wystarczająco dużej precyzji rachunku). Tego ostatniego warunku bardzo często nie można spełnić, znane są bowiem (podane w literaturze) wartości tylko 7 pierwszych współczynników c_v, a mianowicie [23, str. 359], [6, str. 395], [17, str. 285]:

$$\left.\begin{aligned} &c_0 = 1, \quad c_1 = 2, \quad c_2 = 15, \quad c_3 = 150, \\ &c_4 = 1707, \quad c_5 = 20910, \quad c_6 = 2\,68616. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

3. OGÓLNA METODA WYZNACZANIA WARTOŚCI c_v I WARTOŚCI c DLA $v = 0(1)13$

Wskażemy ogólną metodę wyznaczania wartości c_v i podamy je dla $v = 0(1)13$.

Otóż interesujące wartośei c_v ($v = 0, 1, 2, \ldots$) można wyznaczyć metodą współczynników nieoznaczonych posługując się np. szeregiem (15) i wynikającyn z (7) równaniem postaci:

$$q+q^9+q^{25}+q^{49}+q^{81}+ \ldots = \varepsilon+2\varepsilon q^4+2\varepsilon q^{16}+2\varepsilon q^{36}+2\varepsilon q^{64}+ \ldots, \tag{40}$$

jeżeli w (15) zachowa się wyrazy z potęgami ε nie większymi od określonej wybranej potęgi $n_s = 4v+1$ (zależnej od liczby wyznaczanych współczynników c_v) i — nadto — w szeregach licznika i mianownika (7), a w konsekwencji i w (40), zachowa się wyrazy z potęgami q od 1 do co najmniej n_s. Podstawiając uzyskany z (15) szereg skończony w miejsce q do odpowiedniego równania jak (40), otrzyma się wtedy równanie, z przyrównania

[13] Warto wspomnieć, że również przybliżoną metodą numeryczną obliczania stałej q jest metoda oparta na zastosowaniu wzoru (1) i wzorów: $K = K(k) = \pi/2\mu(1, k')$ oraz $K' = K'(k) = \pi/2\mu(1, k)$, gdzie $\mu(1, k')$ oraz $\mu(1, k)$ są to wprowadzone przez Gaussa średnie arytmetyczno-geometryczne odpowiednio wartości: 1 i k' oraz 1 i k (por. np. [2, § 46, str. 160], [6, str. 394] i [1, p. 17.6 na str. 598]). Tej metody obliczeń q tu nie rozpatrujemy, jako na ogół mniej dogodnej.

[14] Mowa tu — oczywiście — o wzorze (17).

współczynników którego, występujących przy takich samych potęgach ε, dostaje się układ równań pozwalający wyznaczyć szukane wartości c_v [15]. I tak, tą właśnie metodą, przy przyjęciu $n_s = 53$, otrzymano, że:

$$\left.\begin{aligned} &c_o = 1, \quad c_1 = 2, \quad c_2 = 15, \quad c_3 = 150, \\ &c_4 = 1707, \quad c_5 = 20910, \quad c_6 = 2\,68616, \\ &c_7 = 35\,67400, \quad c_8 = 485\,55069, \quad c_9 = 6734\,58874, \\ &c_{10} = 94815\,57398, \quad c_{11} = 13\,51195\,29972, \\ &c_{12} = 194\,49975\,39623, \quad c_{13} = 2823\,51727\,53886, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

czyli prócz wartości $c_o \div c_6$ jak w (39) znaleziono nadto wartości $c_7 \div c_{13}$, które dotychczas nie były znane.

Z (35) i (36) po przyjęciu $t = 14$ i uwzględnieniu (41) otrzymuje się odpowiednio:

$$\begin{aligned} q = q(\varepsilon) \approx \varepsilon(1 &+ 2\varepsilon^4 + 15\varepsilon^8 + 150\varepsilon^{12} + 1707\varepsilon^{16} + \\ &+ 20910\,\varepsilon^{20} + 2\,68616\,\varepsilon^{24} + 35\,67400\,\varepsilon^{28} + \\ &+ 485\,55069\,\varepsilon^{32} + 6734\,58874\,\varepsilon^{36} + 94815\,57398\,\varepsilon^{40} + \\ &+ 13\,51195\,29972\,\varepsilon^{44} + 194\,49975\,39623\,\varepsilon^{48} + \\ &+ 2823\,51727\,53886\,\varepsilon^{52}) \end{aligned} \tag{42}$$

i

$$\begin{aligned} q = q(\eta) \approx \eta(1 &+ 2\eta + 15\,\eta^2 + 150\,\eta^3 + 1707\,\eta^4 + \\ &+ 20910\,\eta^5 + 2\,68616\,\eta^6 + 35\,67400\,\eta^7 + \\ &+ 485\,55069\,\eta^8 + 6734\,58874\,\eta^9 + 94815\,57398\,\eta^{10} + \\ &+ 13\,51195\,29972\,\eta^{11} + 194\,49975\,39623\,\eta^{12} + \\ &+ 2823\,51727\,53886\,\eta^{13})^4. \end{aligned} \tag{43}$$

Z (37) i (38) po wykonaniu analogicznych czynności dostaje się odpowiednio:

$$\begin{aligned} q' = q'(\varepsilon') \approx \varepsilon'(1 &+ 2\,\varepsilon'^4 + 15\,\varepsilon'^8 + 150\,\varepsilon'^{12} + 1707\,\varepsilon'^{16} + \\ &+ 20910\,\varepsilon'^{20} + 2\,68616\,\varepsilon'^{24} + 35\,67400\,\varepsilon'^{28} + \\ &+ 485\,55069\,\varepsilon'^{32} + 6734\,58874\,\varepsilon'^{36} + 94815\,57398\,\varepsilon'^{40} + \\ &+ 13\,51195\,29972\,\varepsilon'^{44} + 194\,49975\,39623\,\varepsilon'^{48} + \\ &+ 2823\,51727\,53886\,\varepsilon'^{52}) \end{aligned} \tag{44}$$

i

$$\begin{aligned} q' = q'(\eta') \approx \eta'(1 &+ 2\eta' + 15\,\eta'^2 + 150\,\eta'^3 + 1707\,\eta'^4 + \\ &+ 20910\,\eta'^5 + 2\,68616\,\eta'^6 + 35\,67400\,\eta'^7 + \\ &+ 485\,55069\,\eta'^8 + 6734\,58874\,\eta'^9 + 94815\,57398\,\eta'^{10} + \\ &+ 13\,51195\,29972\,\eta'^{11} + 194\,49975\,39623\,\eta'^{12} + \\ &+ 2823\,51727\,53886\,\eta'^{13})^4. \end{aligned} \tag{45}$$

[15] Widać, że otrzymanie jawnych wzorów na współczynniki c_v jest dość trudne.

Stosując (42) i (5), lub (43) i (6) można obliczać wartości przybliżone stałej q w metodach bezpośrednich, stosując zaś (44) i (20), lub (45) i (21) — wartości przybliżone stałej q' w metodach pośrednich. Obliczenia te można prowadzić wychodząc z zadanych wartości tak k, jak i k' (umożliwiają to wzory: (5), (6), (20) i (21)), przy czym przejście od q' do q dokonuje się w oparciu o (17), ewentualnie z uwzględnieniem wartości π^2 z (33), jeżeli 32-cyfrowa dokładność π^2 wystarcza (por. notkę 8).

Wartości występujących w (42)÷(45) szeregów, dla znanych wartości ε, η, ε' i η' wygodnie jest obliczać wg schematu Hornera [25, p. 3.2 na str. 40], w szczególności traktując szeregi w (42) i (44) jako wielomiany odpowiednio zmiennych ε^4 i ε'^4.

4. OSZACOWANIE DOKŁADNOŚCI METOD OBLICZANIA q I q' OPARTYCH NA ZASTOSOWANIU ZALEŻNOŚCI (42)÷(45)

Oszacujemy dokładność przybliżeń stałej q otrzymywanych ze wzorów (42) i (5), (43) i (6), (17), (44) i (20) oraz (17), (45) i (21) przy założeniu, że wartość π w (17) jest dokładna i wszystkie obliczenia są wykonywane dokładnie (w tym obliczenia wartości funkcji $\ln x$ i $\exp x$ w (17)). Ta dokładność, będąca dokładnością metod znajdowania stałej q w oparciu o wymienione wzory — jest identyczna z dokładnością metod znajdowania stałych q i q' w oparciu o wzory (42)÷(45) [16]. Ta ostatnia dokładność jest z kolei dokładnością, z jaką suma S_1 wszystkich wyrazów danego szeregu skończonego z (42), (43), (44) lub (45) przybliża sumę S_2 wszystkich wyrazów odpowiedniego szeregu nieskończonego z (15), (16), (27) lub (28), tzn. jest określona przez odwrotność różnicy sum S_2 i S_1.

Dokładnej wartości $\delta = S_2 - S_1$ dla $k \in (0, 1)$ lub $k' \in (0, 1)$ nie znamy i w ogóle nie jesteśmy w stanie obliczyć. Oszacujemy δ za pomocą pierwszego brakującego w (42)÷(45) wyrazu odpowiedniego szeregu nieskończonego, tj. wyrazu: $c_{14}\varepsilon^{56}$, $c_{14}\eta^{14}$, $c_{14}\varepsilon'^{56}$ lub $c_{14}\eta'^{14}$ odpowiednio w przypadku (42), (43), (44) lub (45).

Oszacujemy najpierw dokładność rozważanych metod znajdowania stałych q i q' pod względem jakościowym, traktując przy tym q jako funkcję modułu k, a q' — jako funkcję komodułu k'. Otóż, jeżeli uwzględnimy informacje podane wcześniej o zachowaniu się szeregów (15) i (27), szeregów z (16) i (28) oraz wielkości $\varepsilon(k)$, $\eta(k)$, $\varepsilon'(k')$ i $\eta'(k')$ odpowiednio z (5), (6), (20) i (21), bez trudu dojdziemy do następujących ważnych stwierdzeń:

1) dokładność metody wyznaczania q (lub q'), opartej na stosowaniu (42) lub (43) (lub (44) albo (45)), jest przy $k \approx 0$ (lub przy $k' \approx 0$) niezmiernie duża, a przy wzroście k (lub k') szybko ona maleje;
2) dokładność metody wyznaczania q (lub q'), opartej na użyciu (43) (lub (45)) jest dla danej wartości $k > 0$ (lub $k' > 0$) znacznie mniejsza, aniżeli metody wyznaczania q (lub q'), opartej na użyciu (42) (lub (44));
3) dokładność metod wyznaczania q i q', opartych na zastosowaniu kolejno (42) i (44) (lub (43) i (45)) jest taka sama odpowiednio dla wartości k i k', sobie równych.

[16] Na ogół w przypadku metod numerycznych przybliżonych operuje się pojęciem nie dokładności, lecz błędu takich metod (por. np. [25, p. 1.1, str 9]). Błąd stanowi odwrotność dokładności, o jakiej tutaj mówimy.

Oznaczając omawianą dokładność przez D można naszkicować jej przebiegi w funkcji k lub k' typowe — zgodne z podanymi na rys. 2.

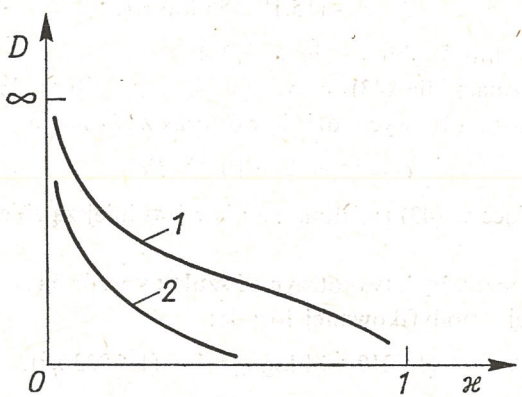
By móc szacować dokładność rozważanych metod pod względem ilościowym, wyprowadzimy w miarę proste wzory, pozwalając szacować raczej z niedomiarem niż z nadmiarem liczbę N cyfr znaczących dokładnych tych przybliżeń q (lub q'), jakie można by obliczyć za pomocą (42) (lub (44)) i (43) (lub (45)) dla danego k lub k', prowadząc rachunki w dziesiętnej arytmetyce dokładnie [17].

Wzór taki dla przypadku (42) wyprowadzimy żądając, żeby brakujący w szeregu z (42) wyraz $c_{14}\varepsilon^{56}$ stanowił określoną, dostatecznie małą część największego spośród wyrazów tego szeregu (tj. wyrazu $c_0 = 1$), a mianowicie żądając, żeby

$$c_{14}\varepsilon^{56} = 3 \cdot 10^{-(N+1)}c_0. \tag{46}$$

Z obserwacji zachowania się ilorazów c_v/c_{v-1} przy $v = 1, 2, \ldots, 13$ (tabl. 1) oszacujemy wartość $c_{14}/c_{13} \approx 14.6$, a
stąd — przy uwzględnieniu wartości c_{13} z (41) — wartość

$$c_{14} \approx 14.6\, c_{13} \approx 4.12233\,5222 \cdot 10^{14}. \tag{47}$$



Rys. 2. Przebiegi typowe dokładności D metod znajdowania q w oparciu o (42) i (5) (krzywa *1*) lub w oparciu o (43) i (6) (krzywa *2*) w funkcji $\varkappa = k$ oraz dokładności D metod znajdowania q' w oparciu o (44) i (20) (krzywa *1*) lub w oparciu o (45) i (21) (krzywa **2**) w funkcji $\varkappa = k'$.

Uwzględniając wartości c_0 z (41) i c_{14} z (47) w równaniu (46), i biorąc logarytm dziesiętny obu stron tego równania, po prostych przekształceniach otrzymamy następujący szukany wzór na N dla (42):

$$N \approx -(15.10 + 56 \log \varepsilon), \tag{48}$$

gdzie ε oblicza się wg (5) dla danego k lub k'.

Oczywiście liczba N musi być całkowita. Gdy więc z (48) otrzyma się liczbę niecałkowitą, trzeba ją zaokrąglić do najbliższej liczby całkowitej. To zaokrąglenie dokonuje się

[17] Mówimy, że dana liczba przybliżona (dane przybliżenie liczby dokładnej) ma N cyfr znaczących dokładnych, jeżeli błąd bezwzględny tej liczby nie przekracza połowy jedności pozycji, określonej przez N-tą cyfrę znaczącą, licząc od lewej do prawej. Tak więc liczba przybliżona mająca N cyfr znaczących dokładnych stanowi wynik obcięcia odpowiedniej liczby dokładnej po N-tej cyfrze znaczącej i poprawnego zaokrąglenia (por. np. [16, str. 15] i [25, str. 23]).

Tablica 1

Ilorazy c_v/c_{v-1} współczynników c_v i c_{v-1} z (41)

v	c_v/c_{v-1}	v	c_v/c_{v-1}
1	2	8	13.61077...
2	7.5	9	13.87000...
3	10	10	14.07889...
4	11.38	11	14.25077...
5	12.24956...	12	14.39464...
6	12.84629...	13	14.51681...
7	13.28066...		

zgodnie z ogólnie znaną i stosowaną regułą poprawnego zaokrąglania (por. np. [25, str. 23]). Zgodnie z tą regułą np. liczby (ułamki dziesiętne): 10.32, 10.50 i 10.52 zaokrągla się więc odpowiednio do następujących liczb całkowitych: 10, 11 i 11.

Przez analogię do (48) można napisać następujący wzór na N obowiązujący dla (44):

$$N \approx -(15.10+56 \log \varepsilon'), \tag{49}$$

gdzie ε' dla danego k' lub k oblicza się wg (20).

Wzór na N obowiązujący dla (43) otrzymuje się w sposób analogiczny do wyżej opisanego, z tym, że zamiast z (46) wychodzi się wówczas z równania

$$c_{14}\eta^{14} = 2.5 \cdot 10^{-(N+2)}c_o, \tag{50}$$

ze względu na występującą w (43) zmienną η a nie ε i wolniejszą zbieżność odpowiedniego szeregu.

Wychodząc z (50) można by łatwo otrzymać szukany wzór na N dla (43), który jednak podamy w następującej zmodyfikowanej formie:

$$N \approx -(16.219+14 \log \eta)-\log (1+823\,\eta^2), \tag{51}$$

pozwalającej dość dokładnie szacować N nawet w zakresie stosunkowo dużych wartości k, bo dla $k \leqslant \sqrt{0.72} = 0.8485\ldots$. A więc wzór (51) obowiązuje dla wartości $k^2 \leqslant 0.72$, przy czym występującą w tym wzorze wielkość η oblicza się wg (6) dla danego k lub k'.

Przez analogię do (51) napiszemy następujący wzór na N ważny dla (45) przy $k'^2 \leqslant 0.72$ (tj. przy $k' \leqslant 0.8485\ldots$):

$$N \approx -(16.219+14 \log \eta')-\log(1+823\,\eta'^2), \tag{52}$$

gdzie η' oblicza się wg (21) dla danego k' lub k.

Zwrócimy uwagę, że w zależnościach: (48), (49), (51) i (52) występują logarytmy dziesiętne, a nie inne i że w zależnościach (51) i (52) można pomijać ostatni wyraz, gdy odpowiednio wartości k i k' są dostatecznie małe (np. mniejsze od 0.2).

Warto przypomnieć, iż przy wyprowadzaniu podanych wyżej wzorów na N założono. iż obliczenia przybliżeń q (ewent. q') są wykonywane wg (42) i (5) lub wg (43) i (6) (ewent. wg (44) i (20) lub wg (45) i (21)) dokładnie, tzn. bez błędów obcięcia albo zaokrąglenia. W praktyce dokładne wykonywanie tych obliczeń oczywiście nie jest możliwe, a jest możliwe ich wykonywanie tylko z ograniczoną, np. μ-cyfrową dziesiętną precyzją. Jeżeli μ jest

dostatecznie duże, wyżej wymienione błędy praktycznie nie wpływają na rezultaty końcowe obliczeń. Wtedy więc można wystarczająco dokładnie szacować N za pomocą (48) lub (49) (ewent. za pomocą (51) lub (52)). Zatem wtedy można wystarczająco dokładnie szacować liczbę N cyfr znaczących dokładnych tych przybliżeń q (ewent. q'), jakie dla danego k lub k' oblicza się wg (42) i (5) lub wg (43) i (6) (ewent. wg (44) i (20) lub wg (45) i (21)). Taka sytuacja ma miejsce, gdy μ jest dostatecznie duże w porównaniu do N obliczonego za pomocą odpowiedniego ze wzorów: (48), (49), (51) lub (52), a mianowicie, gdy μ jest większe od N np. o kilka.

W tabl. 2 podano wartości N obliczone wg (48) i (5) dla wartości $k^2 = 0.972(0.001)0{\cdot}999$ i odpowiednie wartości N dokładne (oznaczone przez N_d), określone w drodze analizy wyników obliczeń q przeprowadzonych dla tych samych wartości k^2 wg (42) i (5), i rów-

Tablica 2

Maksymalna osiągalna liczba cyfr znaczących dokładnych (N, N_d) wartości przybliżonych stałej q obliczanych wg (42) i (5) dla $\varkappa^2 = k^2 = 0.972(0.001)\,0.999$ i również wartości przybliżonych stałej q' obliczanych wg (44) i (20) dla $\varkappa^2 = k'^2 = 0.972(0.001)0.999$

$\varkappa^2$	$\varkappa$	N	N_d
0.972	0.98590 060...	23	24
0.973	0.98640 762...	23	23
0.974	0.98691 438...	22	23
0.975	0.98742 088...	22	23
0.976	0.98792 712...	22	22
0.977	0.98843 310...	22	22
0.978	0.98893 882...	22	22
0.979	0.98944 428...	21	21
0.980	0.98994 949...	21	21
0.981	0.99045 444...	21	21
0.982	0.99095 913...	20	20
0.983	0.99146 356...	20	20
0.984	0.99196 774...	20	20
0.985	0.99247 166...	20	20
0.986	0.99297 532...	19	20
0.987	0.99347 873...	19	19
0.988	0.99398 189...	18	19
0.989	0.99448 479...	18	19
0.990	0.99498 743...	18	18
0.991	0.99548 982...	17	18
0.992	0.99599 196...	17	17
0.993	0.99649 385...	16	16
0.994	0.99699 548...	16	16
0.995	0.99749 686...	15	15
0.996	0.99799 799...	14	14
0.997	0.99849 887...	13	13
0.998	0.99899 949...	12	12
0.999	0.99949 987...	11	11

nież wg (17), (44) i (20) w arytmetyce dziesiętnej 28-cyfrowej (przy użyciu komputera CDC 6400).

Podane w tabl. 2 wartości N i N_d obowiązują także i w przypadku odpowiednich wartości q' obliczanych wg (44) i (20), co w tej tablicy zostało uwzględnione.

W tabl. 3 podano wartości N obliczone za pomocą (51) i (6) dla wartości $k^2 = 0.025(0.001)0.721$ i odpowiednie wartości N dokładne (oznaczone przez N_d), które ustalono w drodze analizy wyników obliczeń q wykonanych dla tych samych wartości k^2 wg (43) i (6), wg (42) i (5), jak również i wg (17), (44) i (20) w arytmetyce dziesiętnej 28-cyfrowej (przy zastosowaniu komputera CDC 6400).

Tablica 3

Maksymalna osiągalna liczba cyfr znaczących dokładnych (N, N_d) wartości przybliżonych stałej q obliczanych wg (43) i (6) dla $\varkappa^2 = k^2 = 0.025(0.001)0.721$ i również wartości przybliżonych stałej q' obliczanych wg (45) i (21) dla $\varkappa^2 = k'^2 = 0.025(0.001)0.721$

$\varkappa^2$	N	N_d
0.025÷0.027	23	24÷23
0.028÷0.032	22	23÷22
0.033÷0.038	21	22
0.039÷0.044	20	21÷20
0.045÷0.052	19	20÷19
0.053÷0.062	18	19÷18
0.063÷0.073	17	18÷17
0.074÷0.086	16	17÷16
0.087÷0.102	15	16÷15
0.103÷0.120	14	15÷14
0.121÷0.141	13	14÷13
0.142÷0.166	12	13÷12
0.167÷0.195	11	12÷11
0.196÷0.230	10	11÷10
0.231÷0.270	9	10÷9
0.271÷0.317	8	9÷8
0.318÷0.371	7	8÷7
0.372÷0.434	6	7÷6
0.435÷0.507	5	6÷5
0.508÷0.591	4	5÷4
0.592÷0.689	3	4÷3
0.690÷0.721	2	3÷2

Podane w tabl. 3 wartości N i N_d obowiązują także i w przypadku odpowiednich wartości q', obliczanych wg (45) i (21), co w tej tablicy uwzględniono.

Porównanie zamieszczonych w tabl. 2 i także w tabl. 3 odpowiednich par liczb N i N_d świadczy o stosunkowo bardzo dużej dokładności podanych wyżej wzorów na N, co najmniej w zakresie uwzględnionych w tych tablicach wartości k^2 (i k'^2).

Obserwacja znajdujących się w tabl. 2 i tabl. 3 wyników (liczb N i N_d) daje pojęcie o dokładności przybliżeń q (i q') osiągalnej przy stosowaniu wzorów (42) i (5), lub wzorów (43) i (6) (albo też wzorów (44) i (20) oraz (45) i (21)) w zakresie wartości k^2 (albo k'^2) stosunkowo bardzo dużych, tj. z punktu widzenia tej dokładności najbardziej krytycznych.

Jak wiadomo, przy obliczeniach, zwłaszcza automatycznych, odejmowanie od siebie liczb bliskich jest źródłem największych błędów. Należy więc w miarę możności unikać sytuacji odejmowania od siebie dwu bliskich sobie liczb i np. wzór

$$z = \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}, \tag{53}$$

przy $\alpha \approx \beta$, zastępować następującym wzorem równoważnym:

$$z = \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}, \tag{54}$$

który jest mniej czuły na błędy.

W liczniku wzoru (5) przy $k \approx 0$ występuje sytuacja odejmowania od siebie dwu bliskich sobie liczb. A więc przy $k \approx 0$ wzór ten dogodnie jest zastępować równoważnym mu i przy $k \approx 0$ mniej czułym na błędy wzorem postaci:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{k^2}{(1+\sqrt{k'})^2(1+k')}, \tag{55}$$

lub q zamiast za pomocą (42) i (5) obliczać za pomocą zależności (43) i (6), które do tego właśnie celu (obliczeń q przy $k \approx 0$) zostały w tej pracy podane [18].

Dość dogodnym do obliczeń ε wzorem, równoważnym wzorowi (5), jest wzór:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+1/\sqrt{k'}}, \tag{56}$$

który przy $k \approx 0$ jest bardziej czuły na błędy niż (55), jednakże na ogół mniej czuły niż (5).

Dla dość dużych wartości k z reguły dokładniejsze wyniki otrzymuje się z (56) i z (5), aniżeli z (55).

Ze wzorów (55) i (56) w drodze zastąpienia k przez k' oraz k' przez k, można otrzymać następujące wzory na ε', równoważne wzorowi (20):

$$\varepsilon' = \frac{1}{2} \cdot \frac{k'^2}{(1+\sqrt{k})^2(1+k)}, \tag{57}$$

$$\varepsilon' = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+1/\sqrt{k}}, \tag{58}$$

które pod względem czułości na błędy zachowują się w funkcji k' tak samo, jak wzory (55) i (56) w funkcji k.

Za pomocą (42)÷(45), na skutek zastosowania w szeregach zwiększonej liczby wyrazów, oczywiście można obliczać przybliżenia q i q' znacznie dokładniejsze (znacznie

[18] Podobnie (45) i (21) podano w celu umożliwienia obliczeń przybliżeń q' możliwie dokładnych przy $k' \approx 0$.

bliższe wartościom dokładnym q i q') niż za pomocą stosowanych dotychczas odpowiednio następujących zależności [19]:

$$q = q(\varepsilon) \approx \varepsilon(1+2\varepsilon^4+15\varepsilon^8+150\varepsilon^{12}+1707\varepsilon^{16}+ +20910\varepsilon^{20}+2\,68616\varepsilon^{24}), \tag{59}$$

$$q = q(\eta) \approx \eta(1+2\eta+15\eta^2+150\eta^3+1707\eta^4+ +20910\eta^5+2\,68616\eta^6)^4, \tag{60}$$

$$q' = q'(\varepsilon') \approx \varepsilon'(1+2\varepsilon'^4+15\varepsilon'^8+150\varepsilon'^{12}+1707\varepsilon'^{16}+ +20910\varepsilon'^{20}+2\,68616\varepsilon'^{24}), \tag{61}$$

$$q' = q'(\eta') \approx \eta'(1+2\eta'+15\eta'^2+150\eta'^3+1707\eta'^4+ +20910\eta'^5+2\,68616\eta'^6)^4. \tag{62}$$

W istocie, wykonując obliczenia q, np. w arytmetyce dziesiętnej 13-cyfrowej przy użyciu minikalkulatora elektronicznego firmy Texas Instruments typu SR-50A, dla $k^2 = 0.999$ (tj. dla $k \approx 0.9995$) z (56) otrzymuje się wartość

$$\varepsilon = 0.34902\ 04427\ 887,$$

która — jak się okazuje — ma wszystkie cyfry znaczące dokładne [20], a stąd w oparciu o (42) i (59) — odpowiednio wartości (po przyjęciu dla c_{13} zaokrąglonej wartości: $2.82351\ 72753\ 89 \cdot 10^{13}$ i przy zastosowaniu schematu Hornera):

$$q = 0.36073\ 78778\ 881 \tag{63}$$

$$q = 0.36073\ 76304\ 173 \tag{64}$$

z których pierwsza ma 11 cyfr po kropce dziesiętnej dobrych (równających się odpowiednim cyfrom wartości dokładnej q), a druga — ich tylko 6. Rzeczwiścyie, wartość dokładna q dla $k^2 = 0.999$ wynosi

$$q = 0.36073\ 78778\ 85982\ 91022\ 3\ldots,$$

co ustalono wykonując odpowiednie obliczenia wg (17), (44) i (20) w arytmetyce dziesiętnej 28-cyfrowej (przy użyciu komputera CDC 6400). W (63) i (64) cyfry niedobre oznaczono podkreśleniem.

Przy łącznym stosowaniu tego samego typu (A lub B) metod bezpośredniej i pośredniej obliczania q, najmniej dokładne przybliżenia q otrzymuje się w otoczeniu punktu $k = k' = \sqrt{2}/2$ (jeżeli — oczywiście — poszczególne obliczenia wykonuje się z jednakową precyzją dla wszystkich w grę wchodzących wartości k lub k'). Nie trudno stwierdzić, iż np. dla $k = k' = \sqrt{2}/2$ przybliżenie q obliczone za pomocą (42) i (5) może zawierać ok. 60 cyfr znaczących dokładnych, gdy tymczasem obliczone za pomocą (59) i (5) — dwa razy mniej takich cyfr. Widać stąd, jak duży zysk w dokładności wyników

[19] W [23, str. 359] podano informację taką, że za pomocą zależności (59) i (5) dla $k > \sin 70° \approx$ $\approx 0.939692\ldots$ jest trudno lub nawet wręcz nie można wyznaczyć (obliczyć) wartości q z 16 cyframi znaczącymi dokładnymi. Być może tak jest, ale za pomocą (42) i (5), jak to widać z tabl. 2, można obliczać q z nie mniej niż z 16 cyframi znaczącymi dokładnymi nawet dla wartości k sięgających ok. $0.99699\ 5\ldots \approx$ $\approx \sin 85{,}6°$.

[20] Wartość dokładna ε dla $k^2 = 0.999$ wynosi: $\varepsilon = 0.34902\ 04427\ 88676\ldots$

obliczeń q i q' stał się możliwy do osiągnięcia, dzięki wyznaczeniu wartości $c_7 \div c_{13}$ i uwzględnieniu ich w szeregach, zwłaszcza w (42) i (44). Fakt ten tak silnie tu podkreślamy, ponieważ wiele różnorodnych zadań naukowych i technicznych rozwiązuje się przy zastosowaniu funkcji eliptycznych [14] i numeryczne rozwiązanie tych zadań nieraz wymaga znajomości stosunkowo bardzo dokładnych wartości stałych q i q'. Podane wyżej zależności i metody z pewnością pozwolą znaleźć te rozwiązania. W szczególności pozwolą one znajdować (obliczać) wartości tak często używanych funkcji eliptycznych Jacobiego: sn (sinus amplitudy), cn (cosinus amplitudy) i dn (delta amplitudy) dokładniejsze niż znajdujące się w najdokładniejszych znanych tablicach tych funkcji, podanych w [23] [21], jak również znajdować wartości określonych przez te funkcje m.in. parametrów filtrów eliptycznych dokładniejsze i odpowiadające większym stopniom niż podane np. w [5], [7], [19] i [21].

5. WZORY SŁUŻĄCE DO OBLICZANIA PRZYBLIŻONYCH WARTOŚCI ELIPTYCZNYCH FUNKCJI JACOBIEGO: $\mathrm{sn}(u, k)$, $\mathrm{cn}(u, k)$ i $\mathrm{dn}(u, k)$

Przypomnimy, iż przy $k < 1$, stosunkowo bardzo dokładne przybliżenia funkcji: $\mathrm{sn} = \mathrm{sn}(u, k)$, $\mathrm{cn} = \mathrm{cn}(u, k)$ i $\mathrm{dn} = \mathrm{dn}(u, k)$ można obliczać korzystając z następujących zależności (por. np. [9, p. 8.191 i p. 8.192 na str. 937] [22]):

$$\mathrm{sn}(u, k) = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}} \frac{\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v+1} q^{v(v-1)} \sin(2v-1)\frac{\pi u}{2K}}{1+2\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v} q^{v^2} \cos\frac{v\pi u}{K}} =$$

[21] W tablicach w [23] podane są wartości funkcji sn, cn i dn z 12 cyframi znaczącymi dokładnymi dla kąta modularnego $\Theta = \arcsin k = 1°(1°)89°$. Zauważymy, że interpolacja w tych tablicach jest niezmiernie uciążliwa i w szeregu przypadków nie prowadzi do zadowalająco dokładnych rezultatów.

[22] W [9, p. 8. 192. 1, str. 937] w wykładniku potęgi q występuje błąd, który usunięto w liczniku (65). Zależności (65)÷(67) można przedstawić w zmodyfikowanej formie uwzględniając, że:

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{q}} \frac{1+2\sum_{v=1}^{\infty} q^{v^2}}{\sum_{v1=}^{\infty} q^{v(v-1)}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{q}} \frac{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\ldots}{1+q^2+q^6+q^{12}+q^{20}+\ldots},$$

$$\sqrt{\frac{k'}{k}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{q}} \frac{1+2\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v} q^{v^2}}{\sum_{v=1}^{\infty} q^{v(v-1)}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{q}} \frac{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-+\ldots}{1+q^2+q^6+q^{12}+q^{20}+\ldots},$$

$$\sqrt{k'} = \frac{1+2\sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v} q^{v^2}}{1+2\sum_{v=1}^{\infty} q^{v^2}} = \frac{1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}-+\ldots}{1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\ldots}.$$

$$= \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}} \frac{\sin\frac{\pi u}{2K} - q^2\sin\frac{3\pi u}{2K} + q^6\sin\frac{5\pi u}{2K} - q^{12}\sin\frac{7\pi u}{2K} + - \ldots}{1 - 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi u}{K} + - \ldots}, \tag{65}$$

$$\mathrm{cn}(u,k) = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{2\sqrt[4]{q}\sum_{v=1}^{\infty} q^{v(v-1)}\cos(2v-1)\frac{\pi u}{2K}}{1+2\sum_{v=1}^{\infty}(-1)^v q^{v^2}\cos\frac{v\pi u}{K}} =$$

$$= \sqrt{\frac{k'}{k}}\, 2\sqrt[4]{q} \frac{\cos\frac{\pi u}{2K} + q^2\cos\frac{3\pi u}{2K} + q^6\cos\frac{5\pi u}{2K} + q^{12}\cos\frac{7\pi u}{2K} + \ldots}{1 - 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi u}{K} + - \ldots}, \tag{66}$$

$$\mathrm{dn}(u,k) = \sqrt{k'} \frac{1+2\sum_{v=1}^{\infty} q^{v^2}\cos\frac{v\pi u}{K}}{1+2\sum_{v=1}^{\infty}(-1)^v q^{v^2}\cos\frac{v\pi u}{K}} =$$

$$= \sqrt{k'} \frac{1 + 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} + 2q^9\cos\frac{3\pi u}{K} + \ldots}{1 - 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi u}{K} + - \ldots}, \tag{67}$$

a przy $k' < 1$ — z podobnego kształtu zależności ze stałą q' i funkcjami hiperbolicznymi (por. [23, str. 361]).

Występujące w powyższych zależnościach szeregi nieskończone są dość szybko zbieżne. Gdy więc te zależności wykorzystuje się do obliczania przybliżonych wartości funkcji sn, cn i dn, w tych szeregach zachowuje się na ogół dość małą liczbę początkowych wyrazów.

Jak wiadomo, pomiędzy funkcjami: $\mathrm{sn}(u,k)$, $\mathrm{cn}(u,k)$ i $\mathrm{dn}(u,k)$ zachodzą następujące proste związki (por. np. [9, p. 8.154, str. 930]):

$\mathrm{sn}^2(u,k) + \mathrm{cn}^2(u,k) = 1,$

$\mathrm{dn}^2(u,k) + k^2\mathrm{sn}^2(u,k) = \mathrm{dn}^2(u,k) + (1-k'^2)\mathrm{sn}^2(u,k) = 1.$

Jeżeli więc zna się wartość k lub k' i wartość dowolnej jednej spośród tych funkcji, w oparciu o te związki nie trudno obliczyć wartości obu pozostałych funkcji.

6. PRZYKŁADY OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH Z DZIEDZINY FILTRÓW ELIPTYCZNYCH

Na zakończenie podamy jeszcze 2 przykłady obliczeń numerycznych z dziedziny filtrów eliptycznych, mianowicie przykłady obliczeń określonych parametrów takich filtrów przy zastosowaniu m.in. zależności (42), (43), (65) i (67). Wszystkie obliczenia w tych przykładach wykonane są przy użyciu minikalkulatora elektronicznego firmy Texas Instruments typu SR-50A w charakterystycznej dlań arytmetyce dziesiętnej 13-cyfrowej (zatem w (42) i (43) zamiast dokładnej wartości współczynnika c_{13} przyjęto jego wartość

przybliżoną, równą 2.82351 72753 89 · 10^{13}), przy czym rezultaty poszczególnych obliczeń podano z 10 cyframi znaczącymi takie, jakie można otrzymać na wyświetlaczu wymienionego minikalkulatora bezpośrednio po wykonaniu danych obliczeń, tj. bez naciśnięcia klawiszy: „−", „EE" i „=", co spowodowało by pojawienie się na wyświetlaczu dalszych cyfr rezultatu. Podana ostatnia (dziesiąta licząc od lewej do prawej) cyfra znacząca rezultatów jest więc zaokrąglona stosownie do wartości cyfry odrzuconej — jedenastej, zgodnie z regułą poprawnego zaokrąglenia. Dla wygody w przykładach nie rozróżniono w symbolice rozwiązań dokładnego i przybliżonego, tzn. przed wartością przybliżoną, otrzymaną z obliczeń, podano znak „=" zamiast znaku „≈", jak to zrobiono już m.in. w (63) i (64).

Dokładność otrzymanych wyników omówiono w p. 7.

Przykład 1. Metodą parametrów falowych projektowany jest filtr eliptyczny reaktancyjny dolnoprzepustowy drabinkowy symetryczny (oporowo) składający się z ogniw konwencjonalnych (tj. pochodnych i ewent. podstawowych), który ma pasmo przepustowe (praktyczne) zawarte w przedziale częstotliwości f od 0 do $f_p = 100$ kHz, pasmo tłumieniowe (praktyczne) — w przedziale częstotliwości od $f_t = 100.6$ kHz do ∞ i którego tłumienność skuteczna A_s w pierwszym z tych pasm powinna być nie większa niż $A_{sp} = 0.15$ Np, natomiast w drugim — nie mniejsza niż $A_{st} = 3.6$ Np [23]. Zgodnie z tą metodą ([17], [11]), należy wyznaczyć: 1° klasę tłumieniową n filtru, 2° parametry m_i jego ogniw ($i = 1, 2, \ldots, n$), 3° częstotliwość graniczną f_o, 4° klasę oporową n_o i 5° parametry (ewent. parametr) impedancji falowych znormalizowanych częstotliwościowo (względem częstotliwości granicznej f_o) i oporowo (względem rezystancji roboczych $R_1 = R_2 = R$).

Rozwiązanie. Najpierw obliczymy minimalną tłumienność falową filtru wymaganą w paśmie tłumieniowym:

$$A_t = A_{st} + \ln 2 = 4.29314\ 7181 \text{ Np}, \tag{68}$$

jak również iloczyn współczynnika wykorzystania teoretycznego pasma przepustowego k_p przez współczynnik wykorzystania teoretycznego pasma tłumieniowego k_t:

$$k_p k_t = f_p/f_t = 0.99403\ 57853. \tag{69}$$

Klasa n jest określona jako:

$$n = \frac{\ln q_A}{\ln q_t}, \tag{70}$$

gdzie:

q_t — eliptyczna stała modularna q odpowiadająca modułowi $k = k_t$,

q_A — analogiczna stała odpowiadająca modułowi $k = k_A$.

Moduł k_A jest funkcją A_t postaci:

$$k_A = \sqrt{1 - \operatorname{th}^4 \frac{A_t}{2}}. \tag{71}$$

[23] Tu i w przykładzie 2 zakłada się, że wartości zadane są dokładne.

Wobec tego w myśl (5) i (6) jest:

$$\varepsilon_A = \varepsilon(k_A) = \frac{1}{2}\exp(-A_t), \tag{72}$$

$$\eta_A = \eta(k_A) = \frac{1}{16}\left(1-\text{th}^4\frac{A_t}{2}\right). \tag{73}$$

Podstawiając wartość A_t z (68) do (72) znajdziemy

$$\varepsilon_A = 6.83093\ 0612 \cdot 10^{-3}. \tag{74}$$

Podstawiając ε_A z (74) do (42) dostaniemy (przy zastosowaniu schematu Hornera [24])

$$q_A = q(\varepsilon_A) = 6.83093\ 0642 \cdot 10^{-3}. \tag{75}$$

Przyjmiemy wstępnie, że $k_p = k_t$. Zatem wg (69) będzie

$$k_t^2 = 0.99403\ 57853, \tag{76}$$

tzn.

$$k_t = 0.99701\ 34329. \tag{77}$$

Stąd wg (5)

$$\varepsilon_t = \varepsilon(k_t) = 0.28253\ 39345,$$

co uwzględnione w (42) daje:

$$q_t = q(\varepsilon_t) = 0.28631\ 85088. \tag{78}$$

Podstawiając wartości q_A i q_t z (75) i (78) do (70) otrzymamy

$$n = 3.98696\ 0924.$$

Wielkość n, jak wiemy, musi być liczbą całkowitą (w przypadku filtrów symetrycznych). Dlatego przyjmiemy $n = 4$ i zachowując wartości A_t i q_A jak w (68) i (75), skorygujemy wartość k_t.

Z (70) mamy wzór:

$$q_t = \sqrt[n]{q_A}, \tag{79}$$

z którego dla $n = 4$ i wartości q_A jak w (75) znajdziemy skorygowaną — ostateczną wartość

$$q_t = 0.28748\ 81637, \tag{80}$$

a stąd — w oparciu o (7) i (10), uwzględniając (4) — skorygowane wartości:

$$\varepsilon_t = 0.28362\ 67084,$$

$$k_t'^2 = \left(\frac{1-2\varepsilon_t}{1+2\varepsilon_t}\right)^4 = 5.81269\ 7049 \cdot 10^{-3},$$

$$k_t' = 7.62410\ 4570 \cdot 10^{-2}, \tag{81}$$

$$\sqrt{k_t'} = 0.27611\ 78113, \tag{82}$$

$$k_t = \sqrt{1-k_t'^2} = 0.99708\ 94157. \tag{83}$$

[24] Schemat ten stosowano i w dalszych obliczeniach wykonywanych wg (42) i (43).

Aby sprawdzić, czy wartość q_t z (80) została obliczona poprawnie, obliczymy A_t ze wzoru:

$$A_t = \ln \frac{1+2(q_t^{4n}+q_t^{16n}+q_t^{36n}+q_t^{64n}+\ldots)}{2(q_t^{n}+q_t^{9n}+q_t^{25n}+q_t^{49n}+\ldots)} \tag{84}$$

i porównamy otrzymany wynik z (68).

Z (84) dla $n = 4$ i wartości q_t jak w (80) dostaje się $A_t = 4.29314\ 7181$ Np, czyli wartość zgodną z podaną w (68) [25].

Dzieląc (69) przez (83) znajdziemy

$$k_p = 0.99693\ 74558, \tag{85}$$

a stąd, ewent. z (83), uwzględniając, że $k_p = f_p/f_o$, $k_t = f_o/f_t$, $f_p = 100$ kHz i $f_t = 100.6$ kHz — częstotliwość graniczną

$$f_o = f_p/k_p = f_t k_t = 100.30719\ 52 \text{ kHz}.$$

Parametry m_i ogniw filtru są określone jako

$$m_i = dn(u, k_t), \tag{86}$$

przy czym

$$u = \frac{2i-1}{2n} K_t, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{87}$$

gdzie K_t — całka eliptyczna jak w (2) dla $k = k_t$, tzn. $K_t = K(k_t)$.

Na mocy (67), wyrażając kąty w stopniach a nie w radianach, mamy stąd

$$m_i = \sqrt{k_t'}\,\frac{1+2q_t\cos\alpha_i+2q_t^4\cos 2\alpha_i+2q_t^9\cos 3\alpha_i+\ldots}{1-2q_t\cos\alpha_i+2q_t^4\cos 2\alpha_i-2q_t^9\cos 3\alpha_i+-\ldots}, \tag{88}$$

gdzie

$$\alpha_i = \frac{2i-1}{n}\cdot 90°, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{89}$$

Kładąc w (89) $n = 4$, otrzymujemy:

$$\alpha_1 = 22.5°, \quad \alpha_2 = 67.5°, \quad \alpha_3 = 112.5°, \quad \alpha_4 = 157.5°,$$

co uwzględnione w (88) łącznie z wartościami $\sqrt{k_t'}$ z (82) i q_t z (80), daje

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= 0.88927\ 17049,\\ m_2 &= 0.43383\ 82715,\\ m_3 &= 0.17573\ 60996,\\ m_4 &= 0.85734\ 25341\cdot 10^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

[25] Zauważymy, że w klasie $n = 4$ w myśl [18, str. 353] obowiązuje wzór:

$$A_t = 2\,\mathrm{arth}\,\frac{\sqrt[4]{8\sqrt{k_t'}(1+k_t')}}{1+\sqrt{k_t'}},$$

który stosując łatwo można by sprawdzić, czy np. wartość k_t' z (81) została obliczona poprawnie (okazałoby się, że tak istotnie jest).

Warto wspomnieć, iż przy obliczaniu wartości $m_1 \div m_4$ z (90), w szeregach licznika i mianownika (88) zachowano tylko po 6 początkowych wyrazów (czyli prócz 1 zachowano tylko wyrazy ze stałą q_t w potędze nie większej niż 25), bowiem $q_t^{25} \approx 2.92 \cdot 10^{-14}$, a już $q_t^{36} \approx 3.24 \cdot 10^{-20}$.

Aby sprawdzić, czy wartości $m_1 \div m_4$ z (90) są obliczone poprawnie, można by dla nich (i dla k'_t z (81)) obliczyć tłumienność falową A filtru, np. dla częstotliwości $f = f_t$, ze wzoru

$$A = \ln \prod_{i=1}^{4} \frac{k'_t + m_i}{k'_t - m_i}$$

oraz dla częstotliwości $f = \infty$ –ze wzoru

$$A = \ln \prod_{i=1}^{4} \frac{1 + m_i}{1 - m_i}$$

i zbadać, czy otrzymane wartości A są dostatecznie bliskie wartości A_t z (68), co musi być spełnione. Okazało by się, że tak istotnie jest (z błędem bezwzględnym co do modułu równym ok. $1 \cdot 10^{-9}$ Np).

Klasę oporową n_o i parametry znormalizowanych impedancji falowych filtru wyznaczymy wychodząc z warunku, że w paśmie przepustowym (praktycznym) maksymalna tłumienność wynikająca z niedopasowania

$$A_{sn\,max} = \ln \frac{1}{2}\left(\Theta + \frac{1}{\Theta}\right) \tag{91}$$

nie może przekraczać wartości $A_{sp} = 0.15$ Np.

W klasie $n_o = 1$ jest

$$\Theta = 1/\sqrt[4]{1 - k_p^2}.$$

Stąd po podstawieniu wartości k_p z (85) mamy

$$\Theta = 3.57592\ 4092,$$

co uwzględnione w (91) daje $A_{sn\,max} \approx 0.66$ Np, czyli wartość większą od A_{sp}. Wnosimy stąd, że klasa $n_o = 1$ jest za niska.

Zbadamy, czy klasa $n_o = 2$ jest wystarczająco wysoka. Jak wiemy, w klasie n_o przy wartościach $m_i < 1/\sqrt{2}$ jest

$$\Theta = \Theta_i = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{k'_{pi}} + \frac{1}{\sqrt{k'_{pi}}}\right)}, \tag{92}$$

gdzie

$$k'_{pi} = \frac{m_i^2}{1 - m_i^2}, \tag{93}$$

przy czym oprócz warunku:

$$A_{sn\,max\,i} = \ln \frac{1}{2}\left(\Theta_i + \frac{1}{\Theta_i}\right) \leqslant A_{sp}, \tag{94}$$

nadto musi być spełniony warunek:

$$k_{pi} = \sqrt{1-k_{pi}'^2} \geqslant k_p. \tag{95}$$

Łatwo stwierdzić, iż parametr m_3 z (90) te warunki spełnia (spośród parametrów m_i z (90) jedynie on, gdyż $m_1 > 1/\sqrt{2}$, natomiast w przypadku m_2 jest $A_{sn\,max\,2} \approx$ $\approx 7.6\,\mathrm{m\,Np} < A_{sp}$, ale $k_{p2} \approx 0.97275 < k_p$ oraz w przypadku m_4 jest $A_{sn\,max\,4} \approx 0.348\ \mathrm{Np} > A_{sp}$, chociaż $k_{p4} \approx 0.99997 > k_p$), albowiem w jego przypadku:

$$\Theta = \Theta_3 = 1.70004\ 5235, \tag{96}$$

$$A_{sn\,max\,3} = 0.13464\ 66544\ \mathrm{Np} < A_{sp} = 0.15\ \mathrm{Np},$$

$$k_{p3} = 0.99949\ 21073 > k_p = 0.99693\ 74558.$$

A zatem ustalamy, że klasa oporowa filtru $n_o = 2$ i że parametrami jego znormalizowanych impedancji falowych są parametry $\Theta = \Theta_3$ i $m = m_3$ o wyżej podanych wartościach (odpowiednio jak w (96) i (90)).

W ten sposób rozwiązaliśmy postawione w przykładzie 1 zadanie: wyznaczyliśmy wszystkie szukane parametry filtru.

Przykład 2. Metodą parametrów roboczych projektowany jest filtr eliptyczny reaktancyjny dolnoprzepustowy [26], który ma pasmo przepustowe zawarte w przedziale częstotliwości f od 0 do $f_p = 60$ kHz, pasmo tłumieniowe — od $f_t = 60.15$ kHz do ∞ i którego tłumienność skuteczna A_s w pierwszym z tych pasm powinna być nie większa niż $A_{sp} = 0.12$ dB, natomiast w drugim — nie mniejsza niż $A_{st} = 20$ dB [27]. Należy wyznaczyć stopień n tego filtru i jego parametry a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ dla przypadku a jak w [19, rozdz. III, p. E, str. 294].

Rozwiązanie. Najpierw wyznaczymy stopień n filtru określony zależnością:

$$n = \frac{\ln q_A}{\ln q_f}, \tag{97}$$

gdzie:

q_A — eliptyczna stała modularna q odpowiadająca modułowi $k = k_A$,

q_f — analogiczna stała odpowiadająca modułowi $k = k_f$.

Moduł k_A związany jest z wielkościami A_{sp} i A_{st} (wyrażonymi w decybelach) i z maksymalnym odchyleniem Δ ([19, rozdz. III, p.E, str. 294], [7, str. 7]) wzorem:

$$k_A = \Delta^2 = \sqrt{\frac{10^{A_{sp}/10}-1}{10^{A_{st}/10}-1}}. \tag{98}$$

Moduł k_f związany jest z częstotliwościami f_p i f_t zależnością:

$$k_f = f_p/f_t. \tag{99}$$

[26] Jak wiadomo, filtry eliptyczne projektowane metodą parametrów roboczych zwane są filtrami Cauera i oznaczane są przez C ([5], [7], [12], [19], [20]).

[27] Por. notkę 23.

Podstawiając wartości $A_{sp} = 0.12$ dB i $A_{st} = 20$ dB do (98) znajdziemy:

$$k_A^2 = 2.82992\ 9103 \cdot 10^{-4}.$$

Stąd wg (6)

$$\eta_A = \eta(k_A) = 1.76870\ 5690 \cdot 10^{-5},$$

tak iż zgodnie z (43) [28]:

$$q_A = q(\eta_A) = 1.76895\ 6002 \cdot 10^{-5}. \tag{100}$$

Podstawiając $f_p = 60$ kHz i $f_t = 60.15$ kHz do (99) otrzymamy:

$$k_f = 0.99750\ 62344.$$

Stąd wg (5)

$$\varepsilon_f = \varepsilon(k_f) = 0.29009\ 78745,$$

co uwzględnione w (42) daje

$$q_f = q(\varepsilon_f) = 0.29444\ 21240. \tag{101}$$

Podstawiając wartości q_A z (100) i q_f z (101) do (97) znajdziemy

$$n = 8.94968\ 4463.$$

Jak wiemy, n musi być liczbą całkowitą. Wobec tego przyjmiemy $n = 9$. Zachowując przy tym $A_{st} = 20$ dB i częstotliwość graniczną

$$f_o = \sqrt{f_p f_t} = 60.07495\ 318 \text{ kHz}, \tag{102}$$

nieco zwiększymy k_f i odpowiednio zmniejszymy A_{sp}, co jest korzystne, bo A_s będzie mniejsze niż 0.12 dB w paśmie przepustowym poszerzonym w stosunku do zadanego i A_s będzie nie mniejsze niż 20 dB w paśmie tłumieniowym również poszerzonym w stosunku do zadanego.

Założymy

$$k_f = \sin 86^\circ = 0.99756\ 40503, \tag{103}$$

wobec czego pasmo przepustowe filtru będzie występowało w przedziale częstotliwości f od 0 do

$$f_p' = f_o \sqrt{\sin 86^\circ} = 60.00173\ 879 \text{ kHz}, \tag{104}$$

a pasmo tłumieniowe — w przedziale częstotliwości od

$$f_t' = f_o / \sqrt{\sin 86^\circ} = 60.14825\ 692 \text{ kHz} \tag{105}$$

do $f = \infty$.

Podstawiając $k_f = \sin 86^\circ$ do (5) dostaniemy

$$\varepsilon_f = \varepsilon(k_f) = \frac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{\cos 86^\circ}}{1 + \sqrt{\cos 86^\circ}} = 0.29106\ 75758, \tag{106}$$

[28] Stałą q_A zamiast wg (42) obliczamy tu wg (43), ponieważ wartość k_A jest bardzo mała i wobec tego wg (43) otrzymujemy wynik wystarczająco dokładny.

skąd na podstawie (42)

$$q_f = q(\varepsilon_f) = 0.29548\ 83856. \tag{107}$$

W myśl (97) zachodzi zależność:

$$q_A = q_f^n. \tag{108}$$

Podstawiając wartość q_f z (107) i $n = 9$ do (108) znajdziemy wartość:

$$q_A = 1.71736\ 9465 \cdot 10^{-5},$$

a stąd w oparciu o (9) — wartość

$$\eta_A = \eta(q_A) = 1.71713\ 3539 \cdot 10^{-5},$$

dla której z (11) otrzymuje się

$$k_A^2 = k(\eta_A) = 2.74741\ 3662 \cdot 10^{-4}. \tag{109}$$

Rozwiązując (98) względem A_{sp} mamy

$$A_{sp} = 10 \log[1 + \Delta^4(10^{A_{st}/10} - 1)], \quad \Delta^4 = k_A^2. \tag{110}$$

Podstawiając wartość $A_{st} = 20$ dB i wartość k_A^2 z (109) do (110) znajdziemy, że w paśmie przepustowym (dla $f \in < 0, f_p' >$) maksymalna tłumienność skuteczna filtru będzie wynosiła

$$A_{sp} = 0{,}11654\ 75504 \text{ dB}, \tag{111}$$

czyli rzeczywiście będzie mniejsza od zadanej, jak to zapowiadaliśmy.

Wiedząc, że $n = 9$ i $k_f = \sin 86°$ możemy obliczyć parametry a_i filtru ze wzoru:

$$a_i = \begin{cases} \sqrt{k_f}\,\mathrm{sn}\left(\dfrac{i}{n}K_f, k_f\right) & \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ \sqrt{k_f} & \text{dla } i = n, \end{cases} \tag{112}$$

gdzie K_f — całka eliptyczna jak w (2) dla $k = k_f$, tzn. $K_f = K(k_f)$.

Przy obliczaniu wartości funkcji $sn(iK_f/n, k_f)$ posłużymy się zależnością (65), zgodnie z którą, i przy uwzględnieniu, że $q = q_f$ — będziemy mieli:

$$\mathrm{sn}\left(\frac{i}{n}K_f, k_f\right) =$$

$$= \frac{2\sqrt[4]{q_f}}{\sqrt{k_f}} \frac{\sin\dfrac{i}{n}90° - q_f^2 \sin\dfrac{3i}{n}90° + q_f^6 \sin\dfrac{5i}{n}90° - q_f^{12}\sin\dfrac{7i}{n}90° + - \ldots}{1 - 2q_f \cos\dfrac{i}{n}180° + 2q_f^4 \cos\dfrac{2i}{n}180° - 2q_f^9 \cos\dfrac{3i}{n}180° + - \ldots}. \tag{113}$$

Podstawiając do wzoru (113) wartości: $n = 9$, $i = 1(1)8$, q_f z (107), $k_f = \sin 86°$ oraz odrzucając w tym wzorze wyrazy z potęgami q_f większymi niż 30 (gdyż np. $\sin 10° \approx$ ≈ 0.1736, $q_f^{20} \approx 2.575 \cdot 10^{-11}$, $q_f^{25} \approx 5.801 \cdot 10^{-14}$, $q_f^{30} \approx 1.307 \cdot 10^{-16}$, natomiast $q_f^{36} \approx$ $\approx 8.699 \cdot 10^{-20}$, $q_f^{42} \approx 5.790 \cdot 10^{-23}$ itd.), otrzymamy, że

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sn}\left(\frac{1}{9}K_f, k_f\right) &= 0.42221\ 42596,\\
\operatorname{sn}\left(\frac{2}{9}K_f, k_f\right) &= 0.71693\ 48734,\\
\operatorname{sn}\left(\frac{3}{9}K_f, k_f\right) &= 0.87494\ 55901,\\
\operatorname{sn}\left(\frac{4}{9}K_f, k_f\right) &= 0.94785\ 43414,\\
\operatorname{sn}\left(\frac{5}{9}K_f, k_f\right) &= 0.97915\ 04049,\\
\operatorname{sn}\left(\frac{6}{9}K_f, k_f\right) &= 0.99214\ 98851,\\
\operatorname{sn}\left(\frac{7}{9}K_f, k_f\right) &= 0.99743\ 67795,\\
\operatorname{sn}\left(\frac{8}{9}K_f, k_f\right) &= 0.99947\ 26131.
\end{aligned}\right\} \tag{114}$$

Stąd na podstawie (112), uwzględniając, że $\sqrt{k_f} = \sqrt{\sin 86^\circ} = 0.99878\ 12825$, dostaniemy:

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= 0.42169\ 96997,\\
a_2 &= 0.71606\ 11323,\\
a_3 &= 0.87387\ 92786,\\
a_4 &= 0.94669\ 91747,\\
a_5 &= 0.97795\ 70971,\\
a_6 &= 0.99094\ 07347,\\
a_7 &= 0.99622\ 11858,\\
a_8 &= 0.99825\ 45384,\\
a_9 &= 0.99878\ 12825.
\end{aligned}\right\} \tag{115}$$

Parametry a_v z (115) z indeksami parzystymi ($v = 2, 4, \ldots, 8$) stanowią znormalizowane częstotliwości zer tłumienności skutecznej A_s obliczanego filtru w paśmie przepustowym i równocześnie odwrotności znormalizowanych częstotliwości biegunów tej tłumienności w paśmie tłumieniowym. Wynika to bezpośrednio z następującego wzoru na tłumienność A_s omawianego filtru w zależności od częstotliwości znormalizowanej $\Omega = f/f_o$ [29]:

$$A_s = A_s(\Omega) = 10 \log[1 + |\varphi(\Omega)|^2], \tag{116}$$

przy czym:

$$|\varphi(\Omega)|^2 = \varrho^2\Omega^2 \prod_{v=1}^{4} \left(\frac{a_{2v}^2 - \Omega^2}{1 - a_{2v}^2\Omega^2}\right)^2, \tag{117}$$

$$\varrho^2 = \sqrt{(10^{A_{sp}/10} - 1)\cdot(10^{A_{st}/10} - 1)}, \tag{118}$$

[29] Z (116) i (117) widać, że zero A_s występuje tu także dla $\Omega = 0$, a biegun A_s — dla $\Omega = \infty$.

gdzie A_{sp} ma wartość jak w (111), $A_{st} = 20$ dB oraz pasmo przepustowe występuje dla $\Omega \in \langle 0, \Omega'_p \rangle$, pasmo tłumieniowe — dla $\Omega \in \langle \Omega'_t, \infty \rangle$, a $\Omega'_p = f'_p/f_o = \sqrt{\sin 86°} = 0.99878\ 12825$ i $\Omega'_t = f'_t/f_o = 1/\sqrt{\sin 86°} = 1.00122\ 0205$.

Parametry a_v z (115) z indeksami nieparzystymi ($v = 1, 3, \ldots, 9$) przedstawiają znormalizowane częstotliwości maksymalnej tłumienności A_s filtru w paśmie przepustowym i jednocześnie odwrotności znormalizowanych częstotliwości minimalnej tłumienności A_s filtru w paśmie tłumieniowym. Uwzględniając to i fakt, że maksima A_s w paśmie przepustowym powinny być równe wartości A_{sp} z (111) oraz minima A_s w paśmie tłumieniowym powinny wynosić $A_{st} = 20$ dB, za pomocą (116)÷(118) można by sprawdzić, czy poszczególne parametry a_v z (115) obliczone są poprawnie.

Poprawność obliczeń wartości $a_1, a_3, \ldots, a_9$ z (115) można też skontrolować badając, czy obowiązująca dla rozważanego filtru równość [19, str. 294, wzór (39)], [7, str. 7]:

$$\Delta = (a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 \cdot a_7)^2 \cdot a_9 \tag{119}$$

przy wartości $\Delta^4 = k_A^2$ jak w (109) — zachodzi (z wystarczającą dokładnością). Obliczając lewą stronę (119) (na podstawie k_A^2 jak w (109)) otrzymujemy wartość 0.12874 51903, a obliczając prawą stronę (119) (na podstawie odpowiednich wartości a_v z (115)) — również wartość 0.12874 51903 [30]. Zatem wartości $a_1, a_3, \ldots, a_9$ z (115) możemy uznać za obliczone poprawnie. Przeprowadzając stosowne obliczenia wg (116)÷(118) moglibyśmy stwierdzić, że wszystkie wartości z (115) obliczone są poprawnie.

W ten sposób rozwiązaliśmy postawione w przykładzie 2 zadanie, a mianowicie wyznaczyliśmy wszystkie żądane parametry filtru.

7. ZAKOŃCZENIE

Kończąc poinformujemy, jak dokładne są te parametry filtrów, wyznaczone w przykładach 1 i 2 (p. 6), które podane są w formie ułamków dziesiętnych z dziesięcioma cyframi znaczącymi [31]. Otóż parametry te różnią się od wartości dokładnych nie więcej niż o połowę jedności na dziesiątej cyfrze znaczącej (licząc od lewej do prawej), czyli je przedstawiają z dokładnością do 10 cyfr znaczących [32]. Rozważane parametry mają więc maksymalną graniczną dokładność osiągalną przy zastosowaniu 10 cyfr znaczących.

Tak wysoką dokładność omawianych parametrów w granicach użytej precyzji rachunku — mimo stosowania (zwłaszcza w przykładzie 2 przy dużej wartości modułu $k = k_f = \sin 86°$) metody bezpośredniej obliczania stałej modularnej $q = q_f$ — uzyskano dzięki obliczaniu tej stałej za pomocą szeregu (42), a nie szeregu (59). Rzeczywiście, w przykładzie 2 przy wykonywaniu obliczeń za pomocą wymienionego wyżej minikalkulatora

[30] W wyniku obliczeń lewej i prawej strony (119) otrzymuje się z 13 cyframi po kropce dziesiętnej odpowiednio wartości: 0.12874 51902 617 i 0.12874 51902 578, które, jak widać, różnią się od siebie tylko o $3.9 \cdot 10^{-12}$.

[31] Parametry, będące liczbami całkowitymi (klasy $n = 4$ i $n_0 = 2$ w przykładzie 1 oraz stopień $n = 9$ w przykładzie 2), są dokładne.

[32] O tym, że wartości np. sinusa amplitudy z (114) ten warunek spełniają, łatwo można się przekonać porównując je z odpowiednimi wartościami podanymi w [23] na str. 342 i 344.

otrzymano przy $k = \sin 86°$ w oparciu o (42) i (5) następującą wartość stałej q z 13 cyframi po kropce dziesiętnej:

$$q = 0.29548\ 83855\ 580, \tag{120}$$

gdy tymczasem w oparciu o (59) i (5) w tych samych warunkach otrzymanoby wartość:

$$q = 0.29548\ 83844\ 284. \tag{121}$$

Wartość dokładna q dla $k = \sin 86°$ wynosi [23, str. 343]:

$$q = 0.29548\ 83855\ 58691\ \ldots,$$

wobec czego wartość q z (120) ma 12 cyfr po kropce dziesiętnej dobrych, a wartość q z (121) — tylko 8 (w (120) i (121) cyfry niedobre zaznaczono podkreśleniem). Jasne jest, że parametry $a_1, a_2, \ldots, a_9$ obliczone za pomocą (112) i (113) przy wyjściu z wartości q z (121) [33] byłyby mniej dokładne niż podane w (115), nawet wtedy, gdyby te obliczenia były wykonane dokładnie.

Warto wspomnieć, że zgodnie z tabl. 2 przy $k = \sin 86° = 0.99756\ 405\ \ldots$ [34] za pomocą (42) można by wyznaczyć stałą q z $14 \div 15$ cyframi znaczącymi dokładnymi, co pozwoliłoby na znalezienie wartości parametrów $a_1, a_2, \ldots, a_9$ filtru w przykładzie 2 z ok. 13 cyframi znaczącymi dokładnymi. W tym celu w przykładzie 2 należałoby prowadzić obliczenia z odpowiednio dużą precyzją (np. z precyzją ok. 18-tu cyfr dziesiętnych).

W ten sposób na konkretnych przykładach obliczeń numerycznych z dziedziny filtrów eliptycznych pokazano, w jak dużym stopniu przy wartościach modułu k nawet bardzo zbliżonych do jedności można zwiększyć dokładność wyznaczanych parametrów takich filtrów, jeżeli eliptyczną stałą modularną q oblicza się korzystając z szeregu (42) zamiast z szeregu (59). Tak więc w szczególności z szeregu (42) dogodnie jest korzystać w praktyce zamiast z szeregu (59) w celu osiągnięcia większej dokładności wyników.

LITERATURA

1. M. Abramowitz and I. A. Stegun (Eds), *Handbook of Mathematical Functions*, Natl. Bur. of Standards, Vol. 55, Washington 1970.
2. N. I. Ahijezer, *Elementy tieorii ellipticzeskich funkcji*, Izd. Nauka, Moskwa 1970.
3. W. Cauer, *Theorie der Linearen Wechselstromschaltungen*, Akademie—Verlag, Berlin 1954.
4. P. Coulombe, *Calcul rationnel des filtres en échelle*, Bull. Soc. Franc. Électr., t. 6, Paris 1946, s. 103—110.
5. E. Christian, E. Eisenmann, *Filter Design Tables and Graphs*, J. Wiley and Sons, N. York 1966.
6. V. Fetzer, *Die praktische Berechnung der elliptischen Funktion „sn" von Jakobi...*, A.E.Ü, n° 7, 1953, s. 393—401.
7. E. Glowatzki, *Sechsstellige Tafel der Cauer-Parameter*, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München 1955.

[33] Wykonując obliczenia wg (8) i (10) łatwo można by stwierdzić, że wartości q z (121) odpowiada kąt modularny $\Theta = \text{arc sin } k$ z dokładnością do 10 cyfr znaczących równy 85.99999 995°.

[34] Redakcja — stosując się do życzenia Autora — zgodziła się w drodze wyjątku na zastosowanie w niniejszym artykule kropek dziesiętnych zamiast przecinków dziesiętnych, będących w powszechnym użyciu w Polsce (*przyp. Red.*)

8. W. Golde, C. Norek, S. Paszkowski, *Zarys teorii aproksymacji i jej zastosowań w elektrotechnice*, P.W.N., Warszawa—Wrocław 1958.

9. I. S. Gradstejn, I. M. Ryżik, *Tablicy integralow, summ, rjadow i proizwiedienii*, Gos. Izd. Fiziko-matiematiczeskoj literatury, Moskwa 1962.

10. E. Jahnke, F. Emde, *Tafeln Höherer Funktionen*, Fünfte Auflage, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1952.

11. S. S. Kogan, *Teoria i raszczot filtrow dla ustanowok dalniej swiazi*, Swiazizdat, Moskwa 1950.

12. E. Kudrewicz, *Zastosowanie metody parametrów roboczych Cauera...*, Prace I. T. R., zeszyt 1, Warszawa 1957, s. 71—83.

13. J. Legras, *Praktyczne metody analizy numerycznej*, W. N. T., Warszawa 1974.

14. R. Oberhettinger, W. Magnus, *Zastosowania funkcji eliptycznych w fizyce i technice*, P.W.N., Warszawa 1963.

15. J. Peters, J. Stein, *Matiematiczeskije tablicy*, Biblioteka matiematiczeskich tablic, wypusk 34, Wyczyslitielnyj Centr A.N. S.S.S.R., Moskwa 1965.

16. G. N. Położy, N. A. Pachariewa, I. Z. Stiepanienko i inni, *Metody przybliżonych obliczeń*, W.N.T., Warszawa 1966.

17. O. Przesmycki, *Filtry elektryczne*, WKiŁ, Warszawa 1962.

18. O. Przesmycki, *Projektirowanije elektriczeskich lestniczych filtrow*, Izd. Swiaź, Moskwa 1968

19. R. Saal, E. Ulbrich, *On the Design of Filters by Synthesis*, IRE Trans. on Circuit Theory, vol. CT-5, Dec. 1958, s. 284—327.

20. R. Saal, *Der Entwurf von Filtern mit Hilfe des Kataloges normierter Tiefpasse*, Telefunken G.M.B.H., Backnang/Württ. 1963.

21. J. K. Skwirzyński, *Design Theory and Data for Electrical Filters*, D. Van Nostrand Comp. LTD, London 1965.

22. W. I. Smirnow, *Matematyka wyższa*, tom 3, część druga, P.W.N., Warszawa 1965.

23. G. W. and R. M. Spenceley, *Smithsonian Elliptic Functions Tables*, Smithsonian Inst., Washington 1947

24. J. H. Wilkinson, *Błędy zaokrągleń w procesach algebraicznych*, P.W.N., Warszawa 1967.

25. J. R. Zuber, *Metody numeryczne i programowanie*, Wydawn. Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1976.

O. PRZESMYCKI

SERIES FOR CALCULATING MORE PRECISE VALUES OF MODULAR ELLIPTIC FUNCTION $q = q(k)$ AS APPLIED TO ELECTRIC FILTERS

Summary

A general method is indicated for determining the values of coefficients of series, determining the dependence of modular elliptic function q (and of function q' coupled with it) on modulus k (or on complementary modulus $k' = 1-k^2$). Such series are presented, together with the determined values of the first 14 coefficients that is 7 more than had so far been known. As a result it has become possible to determine a more precise value of function q (and of q') for a given k (or k') and, what follows, more precise values of, amongst others, elliptical functions sn, cn and dn of Jacobi, of elliptical filter parameters, etc.

Essential practical problems of numerical methods of calculating function q (and q') are discussed based on the application of the series given, the values of the first 14 coefficients having been taken into account. An example is given of a calculation of specific parameters of elliptical filters; the calculation was made according to these methods.

O. PRZESMYCKI

SÉRIES POUR CALCULER AVEC PRÉCISION LES VALEURS DE LA CONSTANTE ELLIPTIQUE MODULAIRE $q = q(k)$ UTILISÉES DANS LES FILTRES ÉLECTRIQUES

Résumé

On a présenté la méthode générale de désignation des valeurs des coefficients des séries, définissant la relation entre la constante elliptique modulaire q (et son adjointe constante q') et le module k (ou le module $k' = \sqrt{1-k^2}$). On a donné de pareilles séries avec les valeurs de 14 premiers coefficients définies, c'est à dire, sept coefficients de plus de ceux que l'on connaissait jusqu'alors. Cela a permis de calculer avec plus de précision la valeur de la constante q(et q') pour k donné (ou k') et, ce qui en suit, aussi les valeurs des fonctions elliptiques sn, cn et dn de Jacobi, des paramètres des filtres elliptiques etc.

On a étudié les essentiels problèmes pratiques des méthodes numériques de calcul de la constante q (et q'), basées sur l'application des séries ci-dessus citées ou sont pris en considération les valeurs de 14 premiers coefficients. En se servant de ces méthodes on y a inclus, à titre d'exemple, les calculs des paramètres des filtres elliptiques.

O. PRZESMYCKI

REIHEN ZUR BERECHNUNG GENAUER WERTE DER ELLIPTISCHEN MODULKONSTANTE $q = q(k)$ ZUR ANWENDUNG BEI ELEKTRISCHEN FILTERN

Zusammenfassung

Es wurde auf die allgemeine Bestimmungsmethode für den Wert von Koeffizientenreihen hingewiesen, die die Abhängigkeit der elliptischen Modulkonstante q (und der mit ihr verbundenen Konstante q') von dem Modul k (bzw. Komodul $k' = \sqrt{1-k^2}$) bezeichnet. Es wurden derartige Reihen unter Bestimmung von Werten für die ersten 14 Koeffizienten angeführt, dh. um 7 Wertbestimmungen mehr, als bisher bekannt. In dessen Ergebnis ist es möglich, genauere Werte für die Konstante q (und q') für das gegebene k (oder k') zu ermitteln, und — was hieraus ergeht — auch genauere Werte u.a. für elliptische Jacobi-Funktionen sn, cn und dn, Parameter von elliptischen Filtern u.dgl. zu erhalten.

Im weiteren wurden die wesentlichen praktischen Probleme der numerischen Methoden zur Berechnun, der Konstante q (oder Konstante q') erwogen, die sich auf die Anwendung der angeführten Reihen stützt unter Berücksichtigung der Werte der ersten 14 Koeffizienten.

Abschließend wurden Beispiele für die Berechnung der gemäß obigen Methoden bestimmten Parameter von elliptischen Filtern angeführt.

О. ПШЕСМЫЦКИ

РЯДЫ ДЛЯ РАСЧЕТА УТОЧНЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ МОДУЛЯРНОЙ ПОСТОЯННОЙ $q = q(k)$ В ПРИМЕНЕНИИ К ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ФИЛЬТРАМ

Резюме

Приведен общий метод определения значений коэффициентов рядов определяющих зависимость эллиптической модулярной постоянной q (и ассоциированной постоянной q') от модуля k (или комодуля $k' = \sqrt{1-k^2}$). Приведены такие ряды с вычисленными значениями первых 14 коэффициентов, т. е. на 7 больше известного до сих пор решения. В результате представлена возможность уточнения значения постоянной q (и q') для данного значения k (или k') и, что отсюда вытекает уточненных значений эллиптический функций *sn*, *cn* и *dn* Якоби, параметров эллиптических фильтров и т. п.

Рассмотрены существенные практические проблемы числовых методов расчета постоянной q (ип остоянной q') обоснованных на применении приведенных рядов с учетом значений первых 14 коэффициентов. Приведены примеры расчетов определенных параметров эллиптических фильтров проведенных этим методом.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1979, 25, z. 4, ss. 1091—1103

621.387.322.2

Analiza stabilności stabilizatorów dużych prądów z obciążeniem inercyjnym

IRENEUSZ KRYSIŃSKI (WROCŁAW), BOGUSŁAW WOLSZCZAK (WROCŁAW)

Instytut Telekomunikacji i Akustyki Politechniki Wrocławskiej

Otrzymano 5.6.1978

W pracy przedstawiono metodę projektowania elementów członów korekcyjnych poprawiających stabilność stabilizatorów pracujących z obciążeniem inercyjnym. Warunki stabilności analizowano na podstawie logarytmicznych charakterystyk amplitudowo-fazowych układu otwartego stabilizatora. Układy korekcyjne oraz wartości ich elementów określono na podstawie analizy wrażliwości modułu i fazy wzmocnienia układu otwartego na zmiany parametrów poszczególnych elementów stabilizatora. Podano przykład projektowania korektora do stabilizatora prądu od 0 do 100 A o mocy 3 kW i stabilności 10^{-5} zasilającego elektromagnes laboratoryjny.

1. WSTĘP

Projektowanie stabilizatora prądu dużej mocy i dokładności pracującego z obciążeniem inercyjnym wymaga starannego wyboru poszczególnych elementów układu w celu zapewnienia wymaganej dokładności statycznej i określonych właściwości dynamicznych. Potrzeba specjalnego projektowania i wykonania tego rodzaju stabilizatora wynika często z trudności w uzyskaniu odpowiedniego zasilacza w produkcji seryjnej, przystosowanego do pracy z danym obciążeniem zespolonym. Obciążeniem takim są na ogół cewki elektromagnesów laboratoryjnych charakteryzujące się małą rezystancją i dużą indukcyjnością.

Zasilanie elektromagnesu laboratoryjnego wymaga przeważnie dostarczenia dużej mocy do obciążenia. W związku z tym wykonanie wersji prototypowych jak i praktyczne eksperymentowanie jest bardzo kosztowne i pracochłonne. Dlatego korzystnie jest zmniejszyć zakres eksperymentów konstrukcyjno-pomiarowych przez zastąpienie ich modelowaniem układów stabilizatorów na EMC.

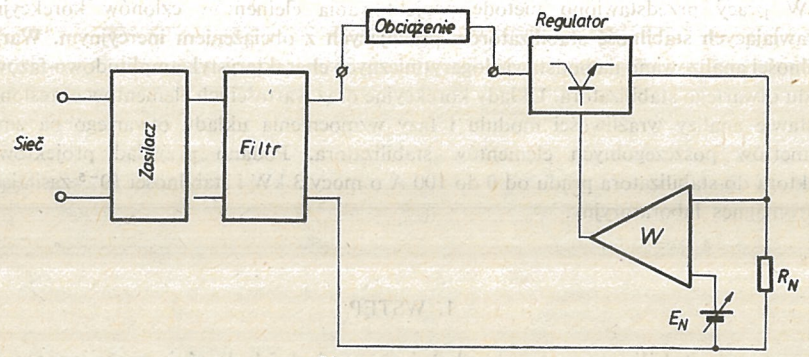
Najwięcej trudności podczas projektowania nastręczają zagadnienia związane z dynamiką układu i zapewnieniem stabilnej pracy. Trudności te są tym większe im większa jest wymagana dokładność statyczna stabilizatora. Projektowanie i analizowanie właściwości dynamicznych tego rodzaju stabilizatorów można przeprowadzić w oparciu o logarytmiczne charakterystyki amplitudowo-fazowe układu otwartego. Na ich podstawie można sądzić o stabilności układu i jego właściwościach dynamicznych. W celu poprawy jakości stabilizatora, charakterystyki te można odpowiednio ukształtować przez dobór

elementów układu, ich konfiguracji (topologii układu) i przez wprowadzenie specjalnych układów korekcyjnych. Na tym etapie dogodnym narzędziem analitycznym jest analiza wrażliwości funkcji transmitancji stabilizatora na zmiany wartości parametrów poszczególnych elementów układu (metodykę postępowania przedstawiono poniżej).

2. MODEL STABILIZATORA I METODA ANALIZY WARUNKÓW STABILNOŚCI

Jedną z możliwych realizacji stabilizatora prądu dużej mocy jest konfiguracja przedstawiona na schemacie blokowym — rys. 1 [6, 7, 8, 9]. Realizacja poszczególnych bloków, tzn. konfiguracje elementów układów elektronicznych i ich początkowe wartości parametrów zależą od danych techniczno-eksploatacyjnych projektowanego stabilizatora.

Przedmiotem dalszych rozważań jest stabilizator prądu od 0 do 100 A mocy 3 kW i współczynniku stabilności 10^{-5} [8].



Rys. 1. Schemat blokowy stabilizatora prądu

Na rysunku 2 przedstawiono małosygnałowy model projektowanego stabilizatora, gdzie tranzystory i kondensatory elektrolityczne zastąpiono odpowiednimi modelami [10, 11, 12]. Model wzmacniacza operacyjnego μA 741 przyjęto według [1]. W powstałej w ten sposób sieci elektrycznej po rozwarciu pętli sprzężenia zwrotnego można wydzielić dwie pary zacisków $0-1$ i $0-2$, a więc potraktować układ jako czwórnik. Transmitancję napięciową tego czwórnika obliczono za pomocą EMC według algorytmu małosygnałowego [3] z następującej zależności [2]:

$$Ku_{12}(\omega) = Ku(\omega) = \frac{\partial U_2}{\partial U_1} = -\frac{Y'_{21}}{Y'_{22}+Y_{00}}, \tag{1}$$

gdzie:

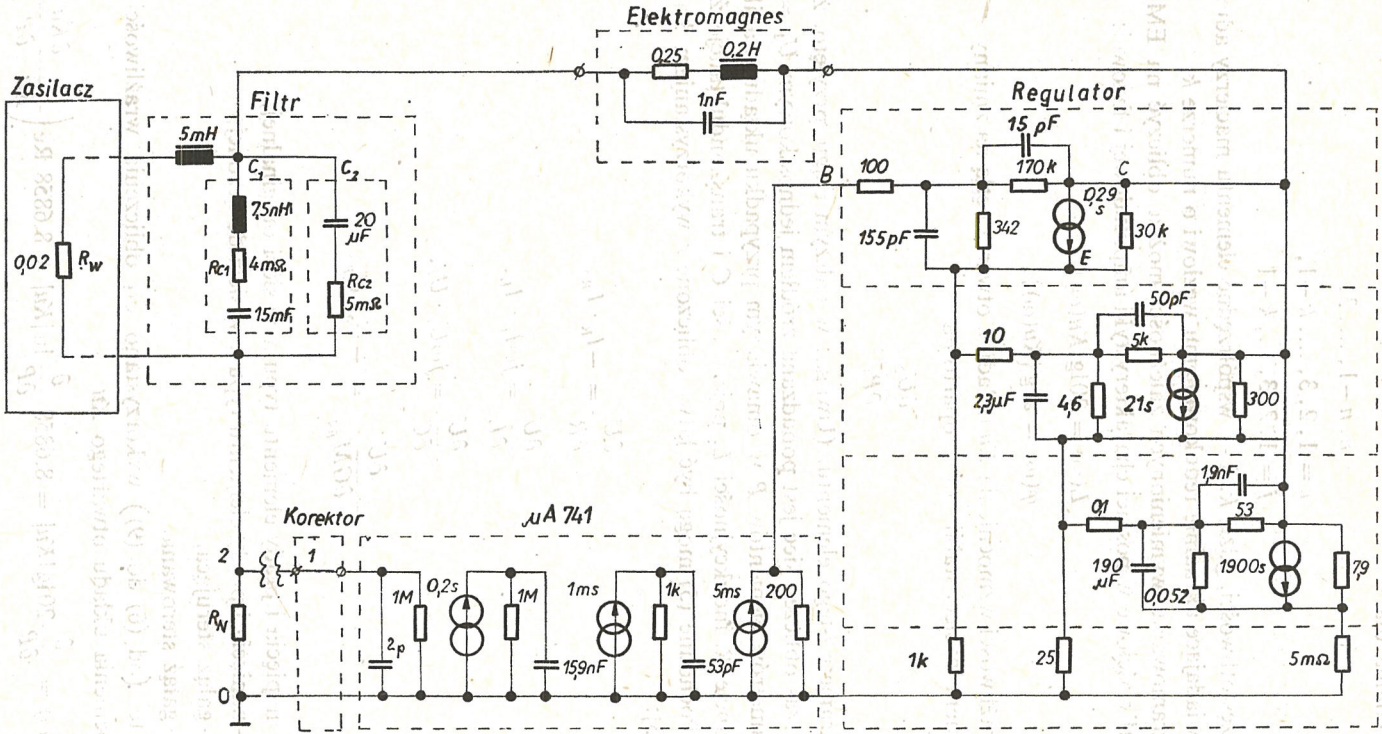
Ku_{12} — transmitancja napięciowa czwórnika równoważnego,

U_1, U_2 — napięcia wejściowe i wyjściowe czwórnika,

Y'_{ij} — elementy macierzy admitancyjnej czwórnika ekwiwalentnego po zredukowaniu węzłów wewnętrznych analizowanej sieci.

Elementy Y_{ij} macierzy admitancyjnej czwórnika po redukcji węzłów wewnętrznych uzyskuje się z następującej formuły [2]:

$$Y'_{ij} = Y_{ij} - \frac{Y_{kj}Y_{ik}}{Y_{kk}}, \tag{2}$$



Rys. 2. Ekwiwalentny schemat elektryczny stabilizatora prądu do obliczania transmitancji napięciowej otwartej pętli

wykonując działania dla

$$k = n, n-1, \ldots, 3,$$
$$i = 1, 2, 3, \ldots, k-1,$$
$$j = 1, 2, 3, \ldots, k-1$$

przy każdej częstotliwości, gdzie k, k — współrzędne elementu macierzy admitancji węzłowych, odpowiadające aktualnie redukowanemu węzłowi o numerze k.

Po zaprogramowaniu wymienionych zależności można obliczyć na EMC charakterystyki częstotliwościowe w postaci charakterystyki amplitudowej i fazowej:

$$L(\omega) = 20\lg|Ku(\omega)|, \tag{3}$$

$$\varphi(\omega) = \arg\{Ku(\omega)\}. \tag{4}$$

Analizę wrażliwości wzmocnienia Ku układu z otwartą pętlą na zmiany wartości parametrów P elementów sieci stabilizatora oparto na

$$\frac{\partial U_2}{\partial P_i}, \tag{5}$$

gdzie P_i — parametr i-tego elementu. (Uwaga: w dalszym ciągu przyjęto, że $U_2 = Ku$, ponieważ podczas obliczeń sieć jest pobudzana źródłem jednostkowym $U_1 = 1$ V.)

Zbiór parametrów elementów P w omawianym przypadku układu stabilizatora stanowią: rezystancje R, indukcyjności L, pojemności C i transkonduktancje źródeł sterowanych GM. Pochodne (5) mogą być łatwo obliczone z wykorzystaniem koncepcji sieci dołączonej [13]:

$$\frac{\partial U}{\partial R} = -I_R \cdot \underline{I}_R, \tag{6}$$

$$\frac{\partial U}{\partial L} = j\omega I_L \cdot \underline{I}_L, \tag{7}$$

$$\frac{\partial U}{\partial C} = j\omega U_c \cdot \underline{U}_c, \tag{8}$$

$$\frac{\partial U}{\partial GM_{pq}} = -U_q \cdot \underline{U}_p, \tag{9}$$

gdzie:

U_x, I_x — napięcia i prądy elementu typu x w sieci oryginalnej,
$\underline{U}_x, \underline{I}_x$ — napięcia i prądy elementu typu x w sieci dołączonej,
q — gałąź sterująca,
p — gałąź sterowana.

Pochodne te (od (6) do (9)) wykorzystano do obliczenia wrażliwości logarytmu modułu wzmocnienia układu otwartego Ku

$$S_m^P(\omega) = \frac{\partial}{\partial P} 20\lg|Ku| = 8{,}6858 \frac{\partial}{\partial P} \ln|Ku| = 8{,}6858\ \mathrm{Re}\left(\frac{1}{Ku}\frac{\partial Ku}{\partial P}\right) \tag{10}$$

oraz wrażliwości fazy

$$S_\varphi^P(\omega) = \frac{\partial}{\partial P} \arg(Ku) = \frac{\partial}{\partial P} \mathrm{Im}\{\ln(Ku)\} = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{Ku}\frac{\partial Ku}{\partial P}\right). \tag{11}$$

W celu zaobserwowania wpływu rozrzutu wartości poszczególnych parametrów elementów sieci na wzmocnienie *Ku*, współczynniki wrażliwości S_m^P i S_φ^P (zależności (10) i (11)) wykorzystano do obliczenia jego zmian procentowych, określanych jako

$$\Delta M_i(\omega) = S_{m^i}^{P_i}(\omega)\frac{P_i}{100\%}\,[\mathrm{dB}/\%], \tag{12}$$

$$\Delta\varphi_i(\omega) = S_{\varphi^i}^{P_i}(\omega)\frac{P_i}{100\%}\cdot k\,[\mathrm{deg}/\%], \tag{13}$$

gdzie:

ΔM_i — przyrost logarytmu modułu wzmocnienia *Ku* pętli spowodowany jednoprocentową zmianą wartości parametru P_i dla określonej pulsacji ω,

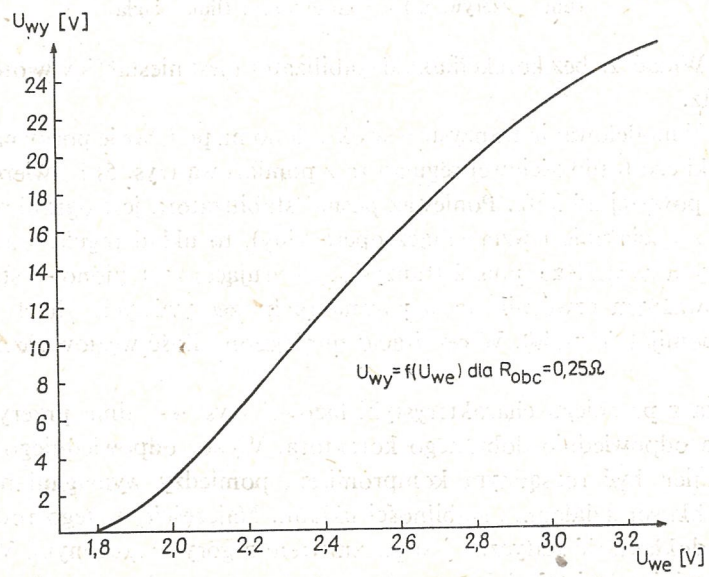
$\Delta\varphi_i$ — przyrost fazy wzmocnienia *Ku* pętli spowodowany jednoprocentową zmianą wartości parametru P_i dla określonej pulsacji ω,

$k = 57{,}2957\ldots$ — współczynnik zamiany radianów na stopnie kątowe.

3. UKŁAD KOREKCYJNY

Omawiany stabilizator pracuje w warunkach dużych zmian prądów obciążenia (0 ÷ ÷100 A), które pociągają za sobą zmiany parametrów tranzystorów — w szczególności tranzystorów w układzie regulatora — rys. 2. A więc regulator nie będzie pracował w warunkach stałych, lecz w układzie podlegającym pewnym zmianom amplitudowo-fazowym w zależności od prądu obciążenia. W związku z tym dobierając charakterystykę układu korekcyjnego rozpatrzono tzw. „najgorszy przypadek", który może się zdarzyć podczas regulacji prądu wyjściowego.

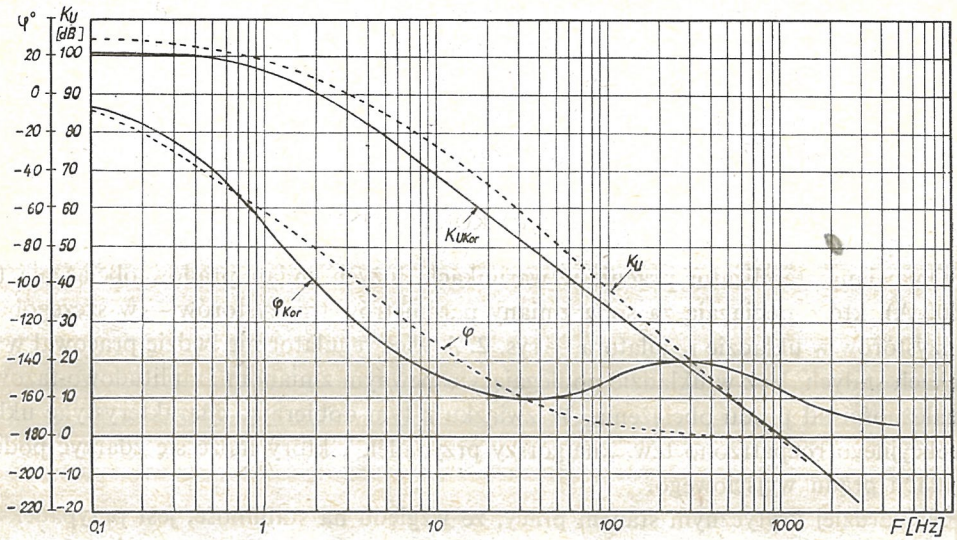
Najbardziej krytycznym stanem pracy, ze względu na stabilność, jest przypadek gdy wystąpi maksymalne wzmocnienie pętlowe. Z rys. 3, gdzie zamieszczono charakterystykę



Rys. 3. Charakterystyka statyczna napięcia wyjściowego układu regulatora $U_{wy} = f(U_{we})$ od napięcia wejściowego

pomiarową układu regulatora $U_{wy} = f(U_{WE})$ wynika, że maksymalne wzmocnienie wystąpi w środku zakresu regulowanych prądów, co odpowiada wartości prądu obciążenia $I_{oo} =$ = 50 A. Dla tej wartości prądu określono parametry modeli tranzystorów w bloku regulatora — rys. 2.

W celu określenia odpowiedniej charakterystyki korektora niezbędna jest znajomość charakterystyki amplitudowo-fazowej układu stabilizatora z otwartą pętlą. Posługując się programem analizy zmiennoprądowej opartym na zależnościach (1) i (2) obliczono przebieg transmitancji widmowej układu otwartego przedstawionej na rysunku 4 (linia



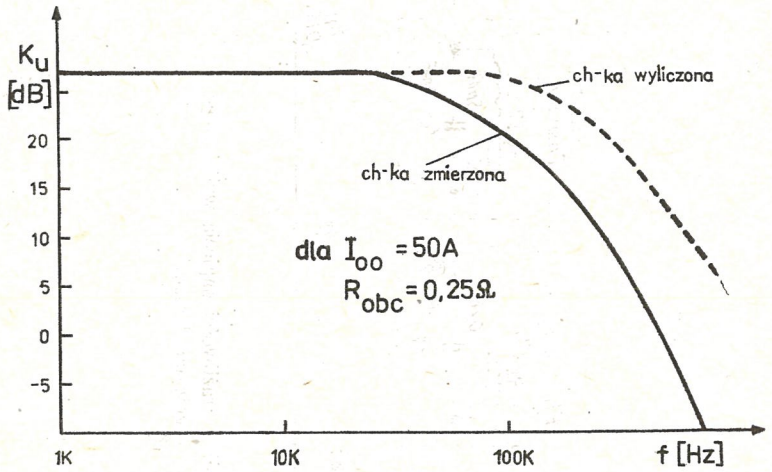
Rys. 4. Porównanie przebiegów transmitancji widmowej układu otwartego stabilizatora bez korektora (linia przerywana) i z korektorem (linia ciągła)

przerywana). Widać, że bez korekcji układ stabilizatora jest niestabilny w otoczeniu częstotliwości 1 kHz.

Dokładność modelowania tranzystorów określono na podstawie porównania obliczonej charakterystyki częstotliwościowej regulatora z pomiarową (rys. 5) i stwierdzono rozbieżność dopiero powyżej 25 kHz. Ponieważ pasmo stabilizatora jest ograniczone do 1 kHz (głównie przez obciążenie i wzmacniacz operacyjny), to układ regulatora (38 tranzystorów połączonych równolegle plus 2 tranzystory sterujące) zastąpiono — stosując formułę (2) — równoważnym czwórnikiem o parametrach rzeczywistych (do 1 kHz składowa urojona jest pomijalnie mała). W rezultacie zmniejszono ilość węzłów sieci z 21 do 10 — rys. 6.

Jak wynika z przebiegu charakterystyki fazowej (rys. 4 — linia przerywana), stabilizator wymaga odpowiednio dobranego korektora. Wybór odpowiedniego członu korekcyjnego powinien być rozsądnym kompromisem pomiędzy wymaganiami dokładności statycznej, szybkości działania i stabilności układu. Najczęściej w tego rodzaju stabilizatorach prądu dokładność statyczna jest parametrem z góry narzuconym. Wówczas układ korekcyjny powinien być tak dobrany, aby przy danym wysokim współczynniku wzmocnienia statycznego układu otwartego osiągnąć dobre właściwości dynamiczne stabiliza-

tora. Można to osiągnąć przez odpowiednie ukształtowanie charakterystyki amplitudowo-fazowej, tj. otrzymanie dużej pulsacji granicznej modułu przy zachowaniu odpowiedniego zapasu fazy,



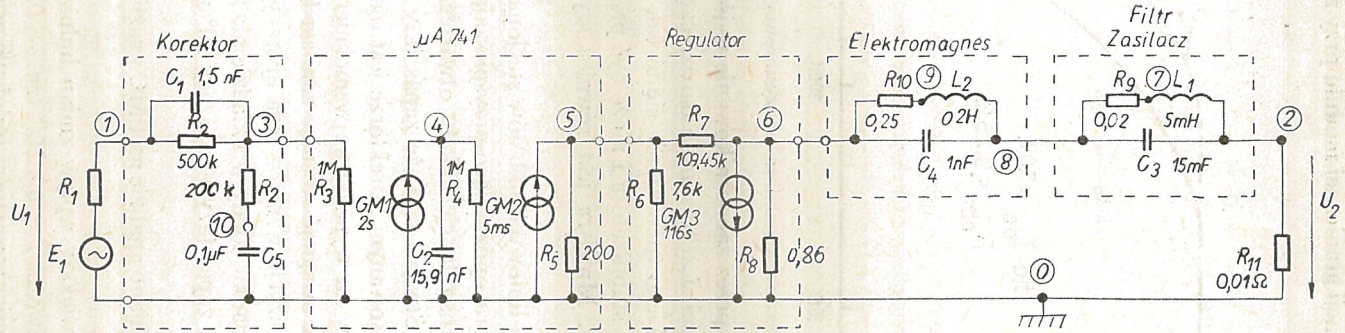
Rys. 5. Charakterystyki częstotliwościowe regulatora tranzystorowego — zmierzona i wyliczona

Zapas fazy można powiększyć przez zabocznikowanie wyjścia stabilizatora kondensatorem o odpowiednio dużej wartości. Jest to sposób bardzo często praktykowany. Jednak w precyzyjnych stabilizatorach takiego rozwiązania się unika, ponieważ kondensator ten zmniejsza impedancję wewnętrzną stabilizatora i może być przyczyną płynięcia do obciążenia niekontrolowanych prądów. Mniejsza jest również szybkość sterowania prądem obciążenia.

Posługując się metodą korekcji liniowych układów stacjonarnych [5] określono strukturę i wartość elementów korektora opóźniająco-przyśpieszającego fazę (PID) — rys. 6. Następnie obliczono na EMC transmitancję układu otwartego skorygowanego tym korektorem (rys. 4 — linia ciągła). Stwierdzono, że zapas fazy wzrósł do 20°. Uzyskanie większego zapasu fazy przy zastosowanym korektorze jest ograniczone dlatego, że wartość rezystora R_2 mającego wpływ na wypadkowe wzmocnienie układu otwartego musi być stała. Lepsze rezultaty można osiągnąć stosując zamiast biernego korektora *PID* — regulator *PID* [4] wykonany przy użyciu wzmacniacza operacyjnego w układzie przedstawionym na rys. 7. Jednak w przypadku, kiedy w układzie nie zachodzą nagłe zmiany obciążenia oraz wielkości sterującej, zapas fazy wynoszący 20° może być zupełnie wystarczający.

Układ z korektorem (rys.6) poddano analizie na EMC wrażliwości opartej na podanych zależnościach (6) ÷ (13).

W rezultacie ustalono, że największy wpływ zmian indukcyjności obciążenia L_2 na zapas fazy zachodzi dla częstotliwości $f = 0{,}8$ Hz, tzn. — 0,2794 deg/% (tabl. 1), tak więc kilkudziesięcio-procentowe zmiany wartości indukcyjności elektromagnesu nie spowodują niestabilnej pracy stabilizatora (duży zapas fazy na małych częstotliwościach — rys. 4). Na wyższych częstotliwościach (patrz tabl. 1) wpływ zmian indukcyjności na charakterystykę fazową jest pomijalnie mały.



Rys. 6. Uproszczony schemat ekwiwalentny stabilizatora dla analizy wrażliwości napięcia wyjściowego pętli otwartej na zmiany wartości parametrów poszczególnych elementów

Tablica 1

Tabulogramy wyjściowe programu analizy wrażliwości

Analizowano sieć stabilizatora z rys. 6 przy częstotliwościach krytycznych 0,8 Hz, 50 Hz i 1000 Hz. Elementami układu korekcyjnego są: *R2*, *R12*, *C1* *C5*

F = 0,8 Hz

	DLOG|V|/%	DFI/%
R 1	-6.787E-10	-1.658E-09
R 2	-3.405E-02	-8.123E-02
R 3	2.641E-02	-4.170E-02
R 4	8.631E-02	-4.550E-02
R 5	7.627E-02	-3.032E-02
R 6	2.003E-03	-7.961E-04
R 7	8.584E-03	3.111E-02
R 8	4.765E-02	1.759E-01
R 9	-8.433E-04	5.709E-03
R10	-1.053E-02	7.088E-02
R11	8.644E-02	2.835E-03
R12	-2.598E-03	1.014E-02
L 1	-1.088E-03	-6.991E-03
L 2	-4.321E-02	-2.794E-01
C 1	-4.642E-05	8.467E-04
C 2	-5.513E-04	-4.550E-02
C 3	-3.952E-06	1.678E-05
C 4	-3.113E-10	-6.084E-10
C 5	-1.019E-02	-1.136E-01
GM 4	8.686E-02	-2.829E-12
GM 5	8.686E-02	0.000E 00
GM 8	7.841E-02	-3.117E-02

F = 50 Hz

	DLOG|V|/%	DFI/%
R 1	-1.306E-09	-1.698E-09
R 2	-6.076E-02	1.101E-01
R 3	1.076E-02	-8.901E-03
R 4	3.347E-03	-1.103E-01
R 5	7.177E-02	-9.786E-04
R 6	1.885E-03	-2.570E-05
R 7	1.321E-02	1.004E-03
R 8	7.377E-02	5.677E-03
R 9	-3.063E-08	4.461E-06
R10	-5.491E-06	2.288E-03
R11	8.686E-02	9.152E-05
R12	5.344E-02	3.064E-02
L 1	-5.311E-05	-1.587E-05
L 2	-8.718E-02	-9.103E-03
C 1	3.933E-03	9.444E-02
C 2	-8.351E-02	-1.103E-01
C 3	-3.935E-04	-5.142E-05
C 4	-1.721E-06	-8.934E-08
C 5	-4.929E-04	3.740E-02
GM 4	8.686E-02	-1.553E-12
GM 5	8.686E-02	0.000E 00
GM 8	7.378E-02	-1.006E-03

F = 1000 Hz

	DLOG|V|/%	DFI/%
R 1	-3.563E-09	-1.277E-08
R 2	5.321E-03	4.571E-02
R 3	4.532E-03	-3.532E-02
R 4	8.702E-06	-5.735E-03
R 5	7.177E-02	-4.837E-05
R 6	1.885E-03	-1.270E-06
R 7	1.321E-02	4.964E-05
R 8	7.378E-02	2.806E-04
R 9	-3.427E-17	1.033E-12
R10	-1.362E-08	1.149E-04
R11	8.686E-02	4.523E-06
R12	2.294E-02	-1.750E-01
L 1	-2.459E-10	-3.339E-12
L 2	-8.755E-02	-4.515E-04
C 1	3.265E-02	-1.654E-01
C 2	-8.685E-02	-5.735E-03
C 3	-7.281E-07	-3.772E-09
C 4	-6.913E-04	-1.750E-06
C 5	1.407E-04	8.029E-04
GM 4	8.686E-02	3.249E-12
GM 5	8.686E-02	-1.040E-11
GM 8	7.378E-02	-4.973E-05

Obserwując przebieg charakterystyki fazowej układu z korektorem (rys. 4) ustalono dwie krytyczne częstotliwości 50 Hz i 1000 Hz, tzn. takie, przy których zapas fazy jest minimalny. Wyniki analizy wrażliwości przedstawiono w tabl. 1, gdzie kolumny liczb opisane jako DLOG|V|/% i DFI/% odpowiadają zależnościom $\Delta M_i(\omega)$[dB/%] (12) i $\Delta\varphi_i(\omega)$[deg/%] (13). Opis elementów dotyczy oznaczeń na rys. 6.

Na podstawie wyników analizy wrażliwości (tabl. 1) można oszacować wpływ rozrzutów produkcyjnych wszystkich elementów układu.

Przykładowo rozpatrzono wpływ rozrzutu elementów korektora, czyli *R2*, *R12*, *C1* i *C5*. Załóżmy, że wszystkie te elementy mają tolerancję 10%, więc wystarczy liczby z kolumny drugiej DFI/% pomnożyć przez 10, by otrzymać odchylenie $\Delta\varphi$ spowodowane 10-procentową zmianą parametru.

W analizie tolerancji stosowane jest pojęcie maksymalnego odchylenia

$$|\Delta y| = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial y}{\partial P_i}\right| \cdot |\Delta P_i|, \tag{14}$$

gdzie:

y — zmienna wyjściowa analizowanej sieci,

P_i — parametr i-tego elementu sieci.

W rozważanym przypadku zmienną wyjściową jest faza, a parametrami tylko elementy korektora *R2*, *R12*, *C1* i *C5*

$$|\Delta\varphi| = \sum_{i=1}^{4} |(\mathrm{DFI}/\%)_i| \cdot 10. \tag{15}$$

Podstawiając do zależności (15) wartości liczbowe z tabulogramu (tabl. 1) odpowiadające elementom $R2$, $R12$, $C1$ i $C5$ otrzymano:

$$|\Delta\varphi(50\,\text{Hz})| \simeq 1{,}7 \text{ deg}/10\%,$$

$$|\Delta\varphi(1000\,\text{Hz})| \simeq 3{,}75 \text{ deg}/10\%.$$

Zauważamy, że zastosowanie elementów RC z tolerancją 10-procentową w obwodzie korektora w tzw. „najgorszym przypadku" nie naruszy warunku stabilności. Postępując podobnie można przeanalizować wpływ pozostałych parametrów i określić ich tolerancje.

4. PODSUMOWANIE

Zaletą modelowania na EMC stabilizatorów dużej mocy i dokładności jest przyspieszenie procesu projektowania i wyeliminowanie znacznej liczby kosztownych i pracochłonnych eksperymentów.

Jako podstawę do badania własności dynamicznych stabilizatora wykorzystano logarytmiczne charakterystyki amplitudowo-fazowe jego sieci elektrycznej układu otwartego. W tym celu konieczne było określenie parametrów modeli poszczególnych tranzystorów, kondensatorów elektrolitycznych, elektromagnesu i wzmacniacza operacyjnego.

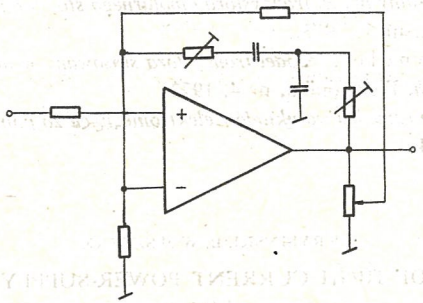
W przypadku tranzystorów bloku regulatora obliczono ich parametry przy obciążeniu regulatora od 1 A do 100 A i okazało się, że największe wzmocnienie regulatora występuje przy obciążeniu 50 A — rys. 3. Pracę w tych warunkach przyjęto jako najgorszy przypadek ze względu na stabilność układu.

Dużym udogodnieniem procesu projektowania jest stosowanie uproszczeń analizowanych sieci. Biorąc to pod uwagę, sieć wielotranzystorowego układu regulatora zastąpiono odpowiednim tranzystorem ekwiwalentnym (po redukcji węzłów wewnętrznych według formuły (2)). Po obliczeniu na EMC okazało się, że w paśmie $0 \div 1$ kHz składowe urojone admitancji czwórnika równoważnego regulatora (rys. 2) są pomijalnie małe, a więc można go zastąpić odpowiednim układem bezinercyjnym (uwidocznionym na rys. 6). Co więcej, okazało się, że znajomość pojemności modeli tranzystorów pracujących w bloku nie musi być dokładna.

Dla uzyskanej w ten sposób sieci równoważnej (rys. 6) obliczono układy korektorów RC. Dobór wartości elementów RC korektora oraz ich tolerancji oparto na przedstawionej analizie wrażliwości funkcji układowej na zmiany parametrów elementów układu.

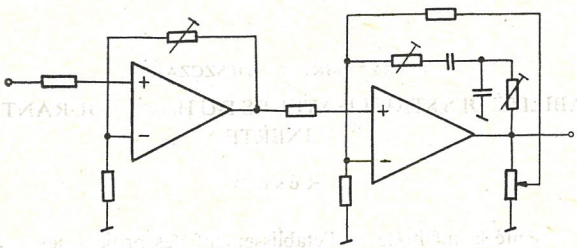
Zastosowany w przykładzie bierny korektor PID spowodował, że układ jest stabilny, a zapas fazy wynosi 20°. Dalsze zwiększenie zapasu fazy jest utrudnione ze względu na ograniczenia nałożone dla elementów korektora (a zwłaszcza dla rezystora R_2 mającego wpływ na wypadkowe wzmocnienie). Lepsze wyniki można otrzymać stosując regulator PID [4] wykonany przy użyciu wzmacniacza operacyjnego, w którym elementy korekcyjne występują w ujemnym sprzężeniu zwrotnym (rys. 7). W przypadku, kiedy zastosowanie jednego wzmacniacza operacyjnego jako regulatora okaże się niewystarczające ze względu na wzmocnienie, wówczas należy użyć dwóch regulatorów: PD (proporcjonalno-różniczkujący) i PI (proporcjonalno-całkujący) jak na rys. 8.

Wykonane pomiary na modelu stabilizatora prądu potwierdziły dobrą zbieżność wyników obliczonych i zmierzonych. Dotyczy to zarówno poszczególnych elementów, jak i całego układu zastępczego stabilizatora.



Rys. 7. Regulator *PID*

Na koniec należy zaznaczyć, że powodzenie w dobrym wykonaniu stabilizatora zależy również od prawidłowego montażu, mającego na celu uniknięcie szkodliwych sprzężeń elektrycznych między poszczególnymi elementami. Zjawiska te są trudne do uwzględnienia w układzie zastępczym stabilizatora. W tym przypadku jest nieodzowne doświadczenie konstruktora.



Rys. 8. Wzmacniacz próbkujący wraz z regulatorem *PID*

LITERATURA

1. R. W. Brown, *Component models for computer aided circuit design: part 4, integrated circuits*, Electronic components, 7 August 1971.
2. M. Grobelny, *Zarys liniowej teorii układów elektronicznych*, WKŁ, Warszawa 1976.
3. M. Grobelny, *Projektowanie układów elektronicznych za pomocą komputerów*, WKŁ, Warszawa 1973.
4. P. Herrmann, *Der Operationsverstärker als elektronischer Regler*, 2 Teil, Elektronik, 1973, Heft 2.
5. T. Kaczorek, *Teoria układów regulacji automatycznej*, WNT, Warszawa 1974.
6. T. Konopiński, *Źródła zasilające*. W pracy zbiorowej: *Poradnik inżyniera radioelektryka*, WNT. Warszawa 1969.
7. I. Krysiński, *Wpływ szybkich zmian napięcia zasilającego na pracę półprzewodnikowego stabilizatora prądu o dużej dokładności do zasilania elektromagnesów*, Praca doktorska, PWr., 1969.
8. I. Krysiński, *Precyzyjny stabilizator prądu stałego o danych*: $I_{wy} = 0 - 100$ A, $U_{wy} = 0 - 30$ V *współczynnik niestabilności* 10^{-5}, raport nr I28/R-098/77, Inst. Telekom. i Akustyki PWr., Wrocław 1977.

9. B. Pałczyński, W. Stefański, *Półprzewodnikowe stabilizatory napięcia i prądu stałego*, Wyd. MON, Warszawa 1971.
10. J. Stanclik, M. Szafarz, *Modelowanie kondesatora elektrolitycznego w zadanym obszarze warunków pracy*, Archiwum Elektrotechniki, t. XXIV, z. 3, 1975.
11. B. Wolszczak, *Uniwersalny model tranzystora bipolarnego stosowany w programach analiz układów elektronicznych*, Elektronika, nr 7, 1973.
12. B. Wolszczak, J. Stanclik, *Model tranzystora stosowany w analizie układów elektronicznych za pomocą maszyn cyfrowych*, Elektronika, nr 4, 1972.
13. B. Wolszczak, *Analiza czułościowa układów elektronicznych za pomocą EMC*, Archiwum Elektrotechniki, t. XIII, z. 1, 1974.

I. KRYSIŃSKI, B. WOLSZCZAK

ANALYSIS OF STABILITY OF HIGH CURRENT POWER-SUPPLY HAVING THE INERTIAL LOAD

Summary

The paper deals with methods of improvement of dynamic properties of high-power and high-accuracy current regulators working with the inertial load. Stability conditions of the regulator network were analysed with the aid of its logarithmic gain-phase characeteristics. The sensitivity analysis of the open-loop voltage with respect to the changes of the network elements parameters is given. There is given an example of these design techniques to the high-power current regulator from 0 to 100 A, 3 kW of power, with stabilization coefficient 10^{-5}, feeding the laboratory electromagnet.

I. KRYSIŃSKI, B. WOLSZCZAK

ANALYSE DE LA STABILITÉ DES STABILISATEURS DU HAUT COURANT SOUS UNE CHARGE INERTE

Résumé

Dans l'étude on a présenté la méthode de l'établissement des projets des éléments pour les réseaux correcteurs améliorant la stabilité des stabilisateurs sous une charge inerte. On a analysé les conditions de stabilité, en se basant sur les caractéristiques logarithmiques de la réponse en amplitude et en phase du stabilisateur au circuit ouvert. On a défini les circuits de correction et les valeurs de leurs éléments à partir de l'analyse de la sensibilité du module et de la phase de l'amplification du circuit ouvert aux changements des paramètres des éléments particuliers du stabilisateur. On a présenté, à titre d'exemple, le projet d'un correcteur pour stabilisateur du courant de zéro à 100 A, à puissance de 3 kW et avec stabilité 10^{-5}. Le stabilisateur est destiné pour électro-aimant de laboratoire.

I. KRYSIŃSKI, B. WOLSZCZAK

STABILITÄTSANALYSE VON STABILISIERUNGSRÖHREN GROßER STRÖME MIT TRÄGER BELASTUNG

Zusammenfassung

In vorliegender Bearbeitung wurde eine Projektierungsmethode für Korrektorelemente geschildert, die die Stabilität der mit träger Belastung betriebenen Stabilisierungsröhren verbessern. Die Bedingungen für die Stabilität wurden auf Grund logarithmischer Amplituden- und Phasenkurven eines offenen Kreises der Stabilisierungsröhren analysiert. Korrektionssysteme und Werte deren Elemente wurden auf Grund

der Analyse des Empfindlichkeitsmoduls und der Verstärkungsphase des offenen Kreises hinsichtlich Parameteränderungen der einzelnen Elemente der Stabilisierungsröhren bestimmt. Es wurde ein Beispiel für die Projektierung eines Korrektors für eine Stromstabilisierungsröhre von 0 bis 100 A mit Leistungsfähigkeit 3 kW und Stabilität 10^{-5} angeführt, die ein Laborelektromagnet mit Strom versorgt.

И. КРЫСИНСКИ, Б. ВОЛЬЩАК

АНАЛИЗ СТАБИЛЬНОСТИ СТАБИЛИЗАТОРОВ БОЛЬШИХ ТОКОВ С ИНЕРЦИОННОЙ НАГРУЗКОЙ

Р е з ю м е

Представлен метод проектирования элементов корректирующих контуров улучшающих стабильности стабилизаторов работающих с инерционной нагрузкой. Условия стабильности анализировались на основании логарифмических амплитудно-фазовых характеристик разомкнутой цепи стабилизатора. Корректирующие контуры и значения их элементов определены путем анализа чувствительности по модулю и фазе усиления разомкнутого контура на изменения параметров отдельных элементов стабилизатора. Приведен пример проектирования корректора стабилизатора тока от 0 до 100 а мощностью 3 квт и стабильности 10^{-5} питающего лабораторный электромагнит.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1979, 25, z. 4, ss. 1105—1107

KOMUNIKATY *Z życia PTETS (4)*

Działalność Polskiego Towarzystwa Elektrotechniki Teoretycznej i Stosowanej w roku 1978 i plan na rok 1979

W dniu 20 grudnia 1978 r. odbyło się w Warszawie Zebranie Plenarne Zarządu Głównego z udziałem Głównej Komisji Rewizyjnej PTETS, które przyjęło sprawozdania Oddziałów i Zarządu Głównego za rok 1978 oraz zatwierdziło plan na rok 1979.

Kolejny XVI Zjazd Delegatów Towarzystwa [1], [2], [3], odbędzie się na początku roku 1980.

Sprawozdanie za rok 1978

W roku 1978 odbył się XV Zjazd Delegatów PTETS [3], 8 zebrań organizacyjnych Zarządu Głównego, 1 zebranie Głównej Komisji Rewizyjnej i 60 zebrań organizacyjnych w Oddziałach. Liczba członków Towarzystwa wzrosła o 26 — do stanu obecnego 540 osób, w tym Gdańsk — 59, Gliwice — 50, Kraków — 54, Łódź — 54, Poznań — 63, Szczecin — 19, Warszawa — 152, Wrocław — 89.

Na 55 zebraniach naukowych, w których uczestniczyło łącznie 1.178 osób, wygłoszono 65 referatów, w tym w poszczególnych Oddziałach: Gdańsk — 8, Gliwice — 3, Kraków — 7, Łódź — 7, Poznań — 6, Szczecin — 14, Warszawa — 3, Wrocław — 17. Wśród referentów było 16 osób z zagranicy. Tematyka referatów obejmowała zagadnienia elektrodynamiki, elektrotechniki teoretycznej, teorii sterowania i regulacji, informatyki, automatyki, maszyn elektrycznych i innych.

W dalszym ciągu w działalności PTETS znaczną rolę odgrywają sympozja i seminaria naukowe, w których coraz bardziej zarysowuje się specjalizacja poszczególnych ośrodków naukowych, utrzymujących przez kilka lat to samo podstawowe hasło konferencji. W roku 1978 było to:

1. Metody matematyczne w elektrotechnice — VII Sympozjum, zorganizowane przez Oddział Warszawski 29.V — 3.VI.1978 r. w Otmuchowie. Przy udziale 150 uczestników, wygłoszono 70 referatów.
2. Zjawiska elektromagnetyczne w obwodach nieliniowych — Modele matematyczne — V Sympozjum zorganizowane przez Oddział Poznański 21—22 kwietnia 1978 r., z 25 referatami i 32 uczestnikami.
3. Mikroprocesory i ich zastosowanie — Kolokwium zorganizowane przez Oddział Łódzki 21 września 1978 r. Wygłoszono 12 referatów przy udziale 49 osób.

4. Informatyka w medycynie — Seminarium zorganizowane przez Oddział Gdański PTETS w dniu 19 — 20 września 1978 r. Przy udziale 136 uczestników, wygłoszono 10 referatów.

W roku 1978 Zarząd Główny PTETS zorganizował 1 konkurs naukowy. W konkursie tym, pod hasłem „Zastosowanie metod optymalizacji w elektrotechnice", nagrody otrzymali:

I — Dr inż. Lesław Olbrycht z Oddziału Gdańskiego za pracę „*Optymalizacja wyboru i rozmieszczenia słupów jako element hierarchicznego wyznaczania trasy linii elektroenergetycznej*",

II — Doc. dr Andrzej Marusak z Oddziału Warszawskiego za pracę „*Synteza i optymalizacja dynamiczna nowego układu regulacji prędkości obrotowej silnika synchronicznego o sterowaniu zewnętrznym*",

III — Dr inż. Zygmunt Leszczyński z Oddziału Łódzkiego za pracę „*Optymalizacja termodynamiczna struktur układowych*".

Akcja wydawnicza obejmowała druk materiałów sympozjów i sesji naukowej w Łodzi, Poznaniu, Warszawie, Szczecinie oraz druk komunikatu sprawozdawczego [3].

Plan na rok 1979

Przewiduje się wzrost liczby członków Towarzystwa do 569. Odbędzie się 81 zebrań naukowych oraz następujące sympozja i seminaria:

1. Międzynarodowe seminarium z podstaw elektrotechniki i teorii obwodów (Gliwice, kwiecień 1979 r.),
2. Metrologia elektryczna w kriotechnice (Wrocław, 1979 r.),
3. Problemy wyładowań niezupełnych w układach elektroizolacyjnych (Kraków, czerwiec 1979 r.),
4. Zjawiska elektromagnetyczne w obwodach nieliniowych — Obwody z półprzewodnikami (Poznań, 25—27 października 1979 r.),
5. Metody matematyczne w elektrotechnice (Warszawa wspólnie z WSI w Opolu, 21—26 maja 1979 r.),
6. Optymalizacja (Warszawa, 5—8 czerwca 1979 r.),
7. Fizyka i elektronika w medycynie (Gdańsk, 1979 r.),
8. Systemy telekomunikacyjne i teorie obwodów (Poznań, 1979 r.).

Konkursy naukowe organizują:

1. Zarząd Główny n.t. „Zastosowanie modelowania i symulacji w urządzeniach elektrycznych",
2. Oddział Łódzki n.t. „Mikroprocesory i ich zastosowanie".

W celu rozszerzenia kręgu uczestników konkursów PTETS, postanowiono, że do konkursów za rok 1979 i 1980 można będzie zgłaszać prace nie publikowane lub publikowane,

nie wcześniej niż 3 lata łącznie z rokiem zamknięcia konkursu (dawniej był 1 rok), przy czym prace zgłaszane na Sympozja PTETS będą za zgodą Autora kierowane równocześnie na odpowiedni konkurs.

Na rok 1980 przewiduje się wstępnie zorganizowanie ogólnopolskiego konkursu naukowego Zarządu Głównego z zakresu *numerycznej analizy pól fizycznych w maszynach i urządzeniach elektrycznych i elektronicznych.*

Bibliografia

1. *XV lat Polskiego Towarzystwa Elektrotechniki Teoretycznej i Stosowanej*, Komunikat 1, Rozprawy Elektrotechniczne, 1976, **22** nr 3 ss. 749—750.
2. *Działalność PTETS w roku 1976 i plan na rok 1977*, Komunikat 2, Rozprawy Elektrotechniczne, 1977, **23**, nr 2, ss. 479—481.
3 *XV Zjazd Delegatów PTETS*, Komunikat 3, Rozprawy Elektrotechniczne, 1978, **24**, nr 3, ss. 763—766

J.T.

TREŚĆ

J. Groszkowski: Na ćwierćwiecze ROZPRAW ELEKTROTECHNICZNYCH 793
W. Nowicki: Pierwsze dwudziestopięciolecie ROZPRAW ELEKTROTECHNICZNYCH, czasopisma Polskiej Akademii Nauk (1955—1979) 795
W. J. Wolski: Analiza sieciowa układów nieliniowych z zastosowaniem szeregów Volterry 805
S. Stróżecki: Metoda dekompozycji zbioru elementów na silnie związane podzbiory 827
Z. Trzaska: Applications of Bond Graphs to Linear Network Studies 835
R. Małecki: Uogólniony algorytm obliczania rozkładu początkowego napięcia w transformatorach 849
R. Małecki: Model przepięciowy transformatora w postaci linii długiej zbocznikowanej pojemnościami wzdłużnymi 857
K. Musierowicz: Analiza przepięć rezonansowych w warunkach niesymetrii admitancji doziemnych trójfazowej sieci elektroenergetycznej 869
W. Nakwaski: Zjawiska rekombinacyjne w półprzewodnikach. I. Rekombinacja promienista i niepromienista, emisja spontaniczna i stymulowana 887
W. Nakwaski: Zjawiska rekombinacyjne w półprzewodnikach. II. Rekombinacja w obszarze złącza *p-n*, laser złączowy. 923
F. Balik: Pewne uogólnienie funkcji kary i jej zastosowanie do optymalizacji charakterystyk układów elektronicznych 945
M. Kazimierczuk: Teoria wzmacniacza mocy wielkiej częstotliwości klasy *E* 957
M. Kazimierczuk: Analiza teoretyczna wzmacniacza klasy *E* przy dowolnym współczynniku wypełnienia prostokątnego napięcia sterującego 987
M. Kędzierski, Z. Kuśmirek: Pomiar impedancji wewnętrznej generatorów 1005
A. Szatkowski: Application of Euler Method in Shape Synthesis for Autonomous Systems 1013
S. Sypniewski: Szeregowe obwody rezonansowe wzmacniaczy klasy D_{wcz} 1021
M. Żenkiewicz: Wybrane własności niektórych funkcji boolowskich wielu zmiennych . . . 1047
O. Przesmycki: Szeregi do obliczania dokładniejszych wartości eliptycznej stałej modularnej $q = q(k)$ w zastosowaniu do filtrów elektrycznych 1061
I. Krysiński, B. Wolszczak: Analiza stabilności stabilizatorów dużych prądów z obciążeniem inercyjnym 1091
Komunikat: Działalność Polskiego Towarzystwa Elektrotechniki Teoretycznej i Stosowanej w roku 1978 i plan na rok 1979 1105

TREŚĆ — CONTENTS — TABLE DES MATIÈRES — INHALT

W. J. Wolski: Circuit Analysis of Nonlinear Network Using Volterra Series 825
Analyse de réseau des systèmes non linéaires avec application des séries de Volterra 826
Netzwerkanalyse nichtlinearer Schaltungen unter Anwendung von Volterra-Reihen 826
S. Stróżecki: Method of Decomposition of the Set in Firmly Connected Subsets 833
Méthode de décomposition de l'ensemble d'élements sur les sous-ensembles fortement liés 833
Methode für die Dekompensation einer Elementensammlung in stark miteinander verbundene Teilsammlungen 833
Z. Trzaska: Zastosowanie grafów wiązań do badania liniowych układów elektrycznych 847
Graphes de liaison appliqués à l'analyse des circuits électiques linéaires 847
Anwendung von Bindungsgraphen zur Untersuchung linearer Elektrosysteme 848

R. Małecki: General Algorithm of Calculation of Initial Distribution in Transformers 854
Algorithme généralisé de calcul de répartition initiale de la tension dans les transformateurs 854
Der verallgemeinerte Algorithmus für die Berechnung der Ausgangsverteilung der Spannung in Transformatoren 854

R. Małecki: Overvoltage Model of Transformer in the Shape of Long Line Shunted by Longitudinal Capacitance 867
Modèle de transformateur shunté en long avec capatité longitudinale pour le calcul de la tension 868
Überspannungsmodell eines Transformators in Form einer mit Längskapazitäten überbrückten langen Leitung 868

K. Musierowicz: Analysis of Resonant Overvoltages on 3-Phase Network During Temporary Unbalance of Admittance to Earth 885
Analyse des surtensions de résonance dans les réseaux triphasés dans les contitions d'asymétrie des admittances par rapport à la terre 885
Resonansüberhöhungsanalyse unter Bedingungen unsymmetrischer Erdadmittanz im elektroenergetischen Dreiphasennetz 886

W. Nakwaski: Recombination Phenomena in Semiconductors. I. Radiative and Nonradiative Recombination, Spontaneous and Stimulated Emission 920
Phénomènes de recombinaison dans les semi-conducteurs. I. Recombinaison radiante et non-radiative, émission spontanée et stimulée 920
Rekombinationsprozesse in Halbleitern. I. Strahlende und nichtstrahlende Rekombination, spontane und stimulierte Emission 921

W. Nakwaski: Recombination Phenomena in Semiconductors. II. Recombination in the *p-n* Junction Area, Laser Diode 942
Phénomènes de recombinaison dans les semi-conducteurs. II. Recombinaison dans le domaine de la jonction *p-n*, laser de jonction 942
Rekombinationsprozesse in Halbleitern. II. Rekombination im *p-n*-Verbindungsraum, der Verbindungslaser 943

F. Balik: A Generalization of Penalty Function and Its Application to Optimization of Characteristics of Electronic Systems 955
Certaine généralisation de la fonction de pénalité et son application à l'optimisation des caractéristiques des systèmes électroniques 955
Verallgemeinerung der Straffunktion und ihre Anwendung für die Optimierung von Charakteristiken elektronischer Schaltungen 955

M. Kazimierczuk: Theory of the Class *E* Tuned Power Amplifier 986
Théorie des amplicateurs de puissance haute fréquence classe *E* 986
Theorie eines Hochfrequenz-Leistungsvertärkers der Klasse *E* 986

M. Kazimierczuk: Theoretical Analysis of Class *E* Tuned Power Amplifier 1002
Analyse théorique des amplificateurs classe *E* avec tension d'entrée rectangulaire 1002
Theoretische Analyse eines Verstärkers der *E*-Klasse mit beliebigem Füllfaktor der rechteckigen Steuerspannung 1003

M. Kędzierski, Z. Kuśmirek: Internal Impedance Measurement of Generators 1011
Mesurage de l'impédance interne des générateurs 1012
Impedanzmessung bei Generatoren 1012

A. Szatkowski: Zastosowanie metody Eulera w syntezie kształtu dla układów autonomicznych 1018
Application de la méthode d'Euler à la synthèse de la forme dans les systèmes autonomiques . . 1018
Anwendung der Euler-Methode für die Formsynthese autonomer Systeme 1019

S. Sypniewski: In-Series Resonance Circuits in Class *D* High Frequency Amplifiers 1045
Amplificateur haute fréquence à transistors classe *D* avec commutation de la tension 1045
Halbleiter Resonanzverstärker der D-Klasse betrieben mit kommutierter Spannung 1046

M. Żenkiewicz: Selected Properties of Certain Boolean Functions With Many Variables 1058
Propriétés choisies de certaines fonctions booliennes de multiples variables 1058
Einige gewählte Eigenschaften mancher Bool-Funktionen mit vielen Variablen 1058
O. Przesmycki: Series for Calculating More Precise Values of Modular Elliptic Function $q = q(k)$ as Applied to Electric Filters 1089
Séries pour calculer avec précision les valeurs de la constante elliptique modulaire $q = q(k)$ utilisées dans les filtres électriques 1090
Reihen zur Berechnung genauer Werte der elliptischen Modulkonstante $q = q(k)$ zur Anwendung bei elektrischen Filtern 1090
I. Krysiński, B. Wolszczak: Analysis of Stability of High Current Power-Supply Having the Inertial Load 1102
Analyse de la stabilité des stabilisateurs du haut courant sous une charge inerte 1102
Stabilitätsanalyse von Stabilisierungsröhren grosser Ströme mit träger Belastung 1102

СОДЕРЖАНИЕ

В. Вольски: Цепной анализ нелинейных систем с использованием рядов Вольтерра . . 826
С. Стружецки: Метод разбивки множества элементов на сильно связанные подмножества 833
З. Тжаска: Применение теории графов связи к анализу линейных электрических цепей 848
Р. Малэцки: Обобщенный алгоритм расчета начального распределения напряжения в трансформаторах 855
Р. Малэцки: Модель трансформатора в виде длинной линии шунтированной продольными емкостями для расчета перенапряжений 868
К. Мусерович: Анализ резонансных перенапряжений в условиях временной несимметрии проводимостей фаз на землю в высоковольтных сетях 886
В. Наквацки: Рекомбинационные явления в полупроводниках. I. Излучательная и безизлучательная рекомбинация, спонтанная и вынужденная эмиссия 921
В. Наквацки: Рекомбинационные явления в полупроводниках. II. Рекомбинация в пределах p-n перехода 943
Ф. Балик: Одно из обобщений штрафной функции и её применение в оптимизации характеристик электронных схем 955
М. Казимерчук: Теория высокочастотного усилителя мощности класса E 986
М. Казимерчук: Теоретическое исследование усилителя класса E с произвольным коэффициентом скважности прямоугольного управляющего напряжения 1003
М. Кендзиерски, З. Кусьмирек: Измерение внутреннего импеданса генераторов 1012
А. Шатковски: Применение метода Ейлера к синтезу формы автономных систем . . 1019
С. Сыпневски: Транзисторные резонансные усилители работающие в ключевом режиме класса Д 1046
М. Женкевич: Избранные свойства некоторых функции Буля многих переменных . 1058
О. Пшесмыцки: Ряды для расчета уточненных значений эллиптической модулярной постоянной $q = q(k)$ в применении к эллиптическим фильтрам 1090
И. Крысински, Б. Вольщак: Анализ стабильности стабилизаторов больших токов с инерционной нагрузкой 1103

Cena zł 40.—

Rozprawy Elektrotechniczne

Kwartalnik

WARUNKI PRENUMERATY CZASOPISMA

Cena prenumeraty rocznej zł 160.—
„ „ półrocznej zł 80.—

Prenumeratę przyjmują Oddziały RSW „Prasa—Książka—Ruch" oraz urzędy pocztowe i doręczyciele w terminach:
— do dnia 25 listopada na styczeń, I-szy kwartał, I-sze półrocze i cały rok następny,
— do dnia 10 każdego miesiąca (z wyjątkiem grudnia) poprzedzającego okres prenumeraty.

Jednostki gospodarki uspołecznionej, instytucje i organizacje społeczno-polityczne oraz wszelkiego rodzaju inne zakłady pracy, składają zamówienia w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa—Książka—Ruch".

Zakłady pracy w miejscowościach, w których nie ma Oddziałów RSW oraz prenumeratorzy indywidualni zamawiają prenumeratę w urzędach pocztowych lub u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 50% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1153-201045-131-11 w terminach podanych dla prenumeraty krajowej. Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Dom Książki".

A subscription order stating the period of time along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona-Ruch, 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, Poland. Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A., 7 Traugutt Street, 00-067 Warszawa Poland.

Rozpr. Elektrot. T. 25, z. 4, 791—1110, Warszawa 1979
Index 37483