POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTROTECHNIKI
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

PL ISSN 0035-9386

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XXX — ZESZYT 1

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1984

WYTYCZNE DLA AUTORÓW

Komitet Redakcyjny prosi o przestrzeganie następujących wytycznych przy przygotowywaniu maszynopisów artykułów nadsyłanych do opublikowania.

1. *Tematyka i charakter artykułów.* Redakcja przyjmuje do druku prace przeglądowe, kompilacyjne i monograficzne, wchodzące w zakres szeroko pojętej elektrotechniki, które powinny jednak zawierać własny wkład twórczy Autora polegający na: oryginalnym ujęciu zagadnienia, własnej klasyfikacji, krytycznej ocenie (teorii lub metod), wyciągnięciu wniosków co do celowości takiego lub innego działania, prognostyce itp. Autorów obowiązuje jak najdalej posunięta zwięzłość.

2. *Wymagania podstawowe.* Artykuły należy nadsyłać w maszynopisie, w dwóch egzemplarzach, w zasadzie w języku polskim; dopuszczalne są jednak również artykuły w językach: angielskim, francuskim, niemieckim i rosyjskim. Maszynopis powinien być napisany jednostronnie przez czarną taśmę, na maszynie do pisania z niezabrudzonymi i nieuszkodzonymi znakami. Dopuszcza się odręczne czytelne uzupełnianie tekstu atramentem lub długopisem kolorem czarnym lub ciemnoniebieskim znaków specjalnych oraz znaków w językach, których alfabetów nie ma na maszynach do pisania, np. znaków matematycznych, chemicznych, liter greckich. Maszynopis powinien być napisany na papierze do maszyny do pisania koloru białego, formatu A4; numeracja ciągła na wszystkich stronach.

3. *Sposób pisania tekstu.* Tekst w maszynopisie powinien być pisany bez używania wyróżnień, a w szczególności nie dopuszcza się spacjowania (rozstrzelenia), podkreślania i pisania tekstów dużymi literami, z wyjątkiem wyrazów, które umownie pisze się dużymi literami (np. FORTRAN). Proponowane wyróżnienia Autor może zaznaczyć w maszynopisie (zwykłym ołówkiem) za pomocą przyjętych znaków adiustacyjnych (podkreślenie linią przerywaną — spacjowanie, podkreślenie linią ciągłą — pogrubienie, podkreślenie wężykiem — kursywa itp.). Na jednej stronie maszynopisu powinno być 30 wierszy po około 60 znaków łącznie z odstępami. Marginesy każdej strony powinny mieć następujące wymiary: górny — ok. 25 mm, lewy — ok. 35 mm. Tekst maszynopisu powinien być napisany z podwójnym odstępem między wierszami; tytuły i podtytuły małymi literami. Akapity należy rozpoczynać z wcięciem równym trzem uderzeniom maszyny do pisania.

4. *Sposób pisania tablic.* Tablice powinny być napisane w układzie zbliżonym do układu zecerskiego. Tytuły rubryk pionowych i poziomych powinny być napisane małymi literami z podwójnym odstępem między wierszami. Przypisy (notki) dotyczące tablic należy pisać bezpośrednio pod tablicą. Tablice należy numerować kolejno liczbami arabskimi; u góry każdej tablicy podać tytuł. Tablice umieścić na końcu maszynopisu.

5. *Sposób pisania wzorów matematycznych.* Rozmieszczenie znaków, cyfr, liter i odstępów powinno być zbliżone do rozmieszczenia elementów druku. Wskaźniki i wykładniki potęg powinny być napisane wyraźnie i być prawidłowo obniżone lub podwyższone w stosunku do linii wiersza podstawowego. Znaki nad literami i cyframi: strzałki, linie, kropki, daszki itp. powinny być napisane dokładnie nad tymi elementami, do których się odnoszą. Numery wzorów należy umieszczać z prawej strony.

6. *Przygotowanie materiału ilustracyjnego.* Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonywać zgodnie z obowiązującymi normami Polskiego Komitetu Normalizacji, Miar i Jakości (oznaczonymi literą E i numeracją od 01200 do 01245; przydatna może się okazać książka K. Michela, T. Sapińskiego: „Rysunek techniczny elektryczny"), na oddzielnych arkuszach, z podaniem kolejnych numerów rysunków. W maszynopisie artykułu na marginesie, obok właściwego tekstu, należy podać jedynie odnośny numer rysunku, a na oddzielnym arkuszu wykaz podpisów pod rysunki. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót: rys.). U samego dołu rysunku (a przy fotografiach na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, tytuł pracy i nazwisko autora. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.

7. *Streszczenia.* Do każdej nadsyłanej pracy należy dołączyć krótkie streszczenie (analizę) w języku polskim (w 5 egz.) oraz streszczenie (w 2 egz.) w językach obcych: angielskim, fran-

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTROTECHNIKI
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XXX — ZESZYT 1

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1984

RADA REDAKCYJNA

Przewodniczący

prof. dr hab. JANUSZ GROSZKOWSKI — członek rzeczywisty PAN

Członkowie

prof. dr hab. LUDWIK BADIAN — członek korespondent PAN, prof. TADEUSZ CHOLEWICKI — członek rzeczywisty PAN, prof. dr ZDZISŁAW KACHLICKI, prof. dr hab. TADEUSZ KACZOREK, prof. dr LEONARD KNOCH, doc. dr hab. ANDRZEJ KUSY, prof. JAN MANITIUS, prof. dr WITOLD NOWICKI, prof. dr WITOLD ROSIŃSKI — członek rzeczywisty PAN, prof. dr JERZY SEIDLER — członek rzeczywisty PAN, prof. dr RYSZARD SIKORA, prof. dr hab. JANUSZ TUROWSKI, prof. dr STEFAN WĘGRZYN — członek rzeczywisty PAN

REDAKCJA

Redaktor naczelny
prof. dr WITOLD NOWICKI

Zastępca redaktora naczelnego
prof. dr hab. TADEUSZ KACZOREK

Sekretarz odpowiedzialny
red. JANINA MATHEISEL

ADRES REDAKCJI

00-661 Warszawa, Plac Jedności Robotniczej 1
Politechnika, Instytut Telekomunikacji, Gmach Elektroniki, pok. 483
Dyżury Redakcji: środy i piątki, godz. 11-13
tel. 28 89 81 lub 210 07-737
Telefony domowe: redaktor naczelny — 17 37 03
zastępca redaktora naczelnego — 44 88 34
sekretarz odpowiedzialny — 33 84 97

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 550	Podpisano do druku w czerwcu 1984
Ark. druk. 18,0 Ark. wyd. 23,5	Oddano do składania 15.VI.1983 r.
Papier druk. b. sat. kl. IV, 70 g, 70×100	Druk ukończono w październiku 1984 r.
Zamówienie nr 4699/12/83. T-76	Cena zł 120,—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1984, 30, z. 1, ss. 1-8

621.318.42/.43

Force Acting on the Core of a Thin ellipsoidal Coil

JAN PURCZYŃSKI (SZCZECIN), PIOTR KRASOŃ (SZCZECIN),
ANDRZEJ BRYKALSKI (SZCZECIN)

Ośrodek Elektronicznej Techniki Obliczeniowej Politechniki Szczecińskiej

The paper received 2.9.1981

In the paper an analysis of the force acting on the core of the coil in shape of a rotation ellipsoid has been performed. The formulas which determine the value of force related to geometrical dimensions have been obtained. Regarding certain limit, one can examine a particular case of the ball core. A numerical analysis of corresponding formulas has been performed and the results have been plotted.

1. INTRODUCTION

This paper is a continuation and development of [3]. In [3] the formulas describing the magnetic field and force in the system consisting of a thin ellipsoidal coil and a ferromagnetic ellipsoid have been obtained. These formulas are used for numerical analysis.

The calculations of the force acting on a ferromagnetic core in shape of a ball are also performed.

2. THE FORCE ACTING ON THE ELLIPSOIDAL CORE

Fig. 1 illustrates the system under investigation. The formulas presented in [3] describing the force acting on the core can be written in more convenient for numerical analysis

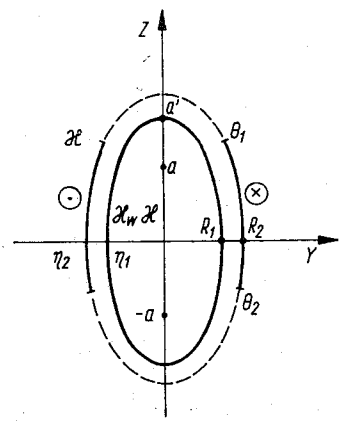


Fig. 1. System under investigation

form

$$F = 2\pi\alpha\varkappa(\varkappa_w - 1)\left(\frac{wI}{l}\right)^2(\zeta_2^2-1)\int_{\mu_1}^{\mu_2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{n(n+1)\sqrt{\zeta_2^2-\mu^2}}\times$$
$$\times\frac{nP_n^1(\zeta_1)\,[P_{n+1}^1(\zeta_1)-\zeta_1 P_n^1(\zeta_1)]Q_n^1(\zeta_2)}{n+1+(\varkappa_w-1)P_n^1(\zeta_1)\,[Q_{n+1}^1(\zeta_1)-\zeta_1 Q_n^1(\zeta_1)]}\times \tag{1}$$
$$\times\,[\mu Q_{n+1}^1(\zeta_2)P_n^1(\mu)-\zeta_2 Q_n^1(\zeta_2)P_{n+1}^1(\mu)]\,d\mu,$$

where

$$C_{2n} = \frac{4n+1}{4^{n+1}n(2n+1)}\alpha\zeta_2\sum_{l=0}^{\infty}\frac{t_l}{\zeta_2^{2l}}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{4n-2k}{2n}\binom{2n}{k}(2n-2k)\times$$
$$\times\sum_{p=0}^{n+l-k-1}\frac{(-1)^p}{2p+3}\binom{n+l-k-1}{p}\left[(1-\mu_2^2)^{p+\frac{3}{2}}-(1-\mu_1^2)^{p+\frac{3}{2}}\right],$$

$$C_{2n+1} = \frac{4n+3}{2^{2n+3}(2n+1)(n+1)}\alpha\zeta_2\sum_{l=0}^{\infty}\frac{t_l}{\zeta_2^{2l}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{4n-2k}{2n}\binom{2n}{k}\times$$
$$\times\frac{4n-2k+1}{n+l-k+1}\left[\sqrt{1-\mu_1^2}\,\mu_1^{2(n+l-k)+1}-\sqrt{1-\mu_2^2}\,\mu_2^{2(n+l-k)+1}+\right.$$
$$+\frac{\operatorname{sign}(n+l-k)+1}{2(n+l-k)+1}\sum_{p=1}^{n+l-k}\frac{\prod_{r=1}^{p}(2n+2l-2k-2r+3)}{2^{p+1}\prod_{r=1}^{p}(n+l-k-r+1)}\times$$
$$\times\left(\sqrt{1-\mu_2^2}\,\mu_2^{2(n+l-k-p)+1}-\sqrt{1-\mu_1^2}\,\mu_1^{2(n+l-k-p)+1}\right)-$$
$$\left.-(2n+2l-2k-1)\,t_{n+l-k}(\arccos\mu_2-\arccos\mu_1)\right],$$

$$t_0 = 1, \quad t_l = -\frac{(2l-3)!!}{2^l l!} \quad \text{for} \quad l \geqslant 1,$$

P_n^1, Q_n^1 are the associate Legendre functions [5], $\mu = \cos\Theta$, $\zeta = \operatorname{ch}\eta$.

Formula (1) has been analysed numerically. The results for various values of magnetic permeability and the parameters $k = \frac{R_1}{a'}$, $m = \frac{R_2}{a'}$ are plotted versus $\Theta_2 - \Theta_1$ in Fig. 2 and Fig. 3. For small values of ζ (small k) the system shown in Fig. 1 can be regarded as an approximation of the cylindrical coil and core (Fig. 4). This system is of frequent occurence in practice.

The criterion of constant value of volumes and areas of the longitudinal sections has been used for defining the dimensions of the model: $R = \frac{3}{8}\pi r'$, $a' = \frac{16}{3\pi^2}l'$. In Fig. 2 and Fig. 3 the mentioned above case is represented by the curves for $k = 0.1$.

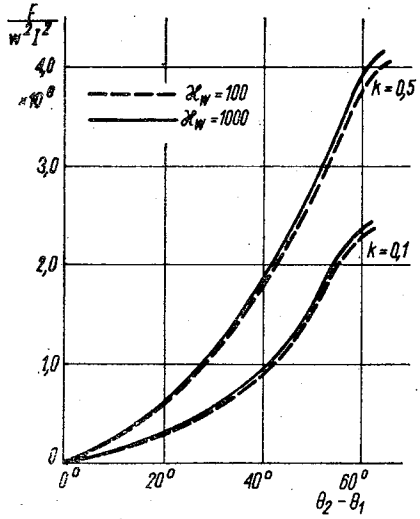


Fig. 2. The force acting on the ellipsoidal core versus $\Theta_2 - \Theta_1$ ($\Theta_2 = 90°$, $m = k + 0.05$)

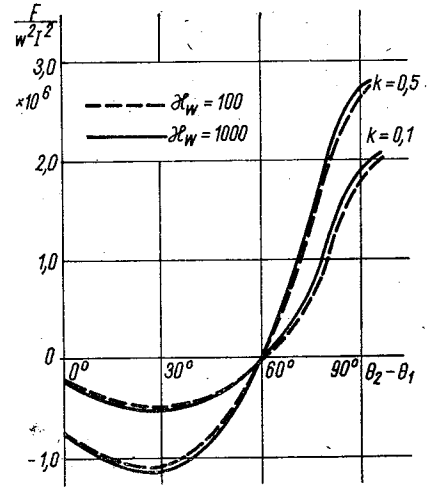


Fig. 3. The force acting on the ellipsoidal core versus $\Theta_2 - \Theta_1$ ($\Theta_2 = 120°$, $m = k + 0.05$)

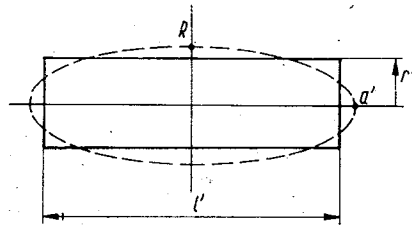


Fig. 4. The model of cylindrical core

3. THE FORCE ACTING BETWEEN THE CIRCULAR LOOP AND THE CORE

According to [3] we have the formula expressing the force acting on the circular loop with an infinitesmal cross section

$$F = -\pi\varkappa(\varkappa_w - 1)w^2 I^2 \frac{(\zeta_2^2-1)(1-\mu_0^2)}{\zeta_2^2-\mu_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)P_n^1(\mu_0)}{n^2(n+1)^2} \times$$
$$\times \frac{nP_n^1(\zeta_1)\,[P_{n+1}^1(\zeta_1) - \zeta_1 P_n^1(\zeta_1)]Q_n^1(\zeta_2)}{n+1+(\varkappa_w-1)P_n^1(\zeta_1)\,[Q_{n+1}^1(\zeta_1) - \zeta_1 Q_n^1(\zeta_1)]} \times \tag{2}$$
$$\times [\mu_0 Q_{n+1}^1(\zeta_2)P_n^1(\mu_0) - \zeta_2 Q_n^1(\zeta_2)P_{n+1}^1(\mu_0)],$$

where

$$\mu_0 = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2).$$

When $\eta \to \infty$ the ellipsoid turns to the ball (Fig. 5). For the values of ζ large enough the functions P_n^1, Q_n^1 have the following asymptotic form [5]:

$$P_n^1(\zeta) = \frac{n}{2^n}\binom{2n}{n}\zeta^n, \quad Q_n^1(\zeta) = -2^n \frac{n+1}{2n+1} \frac{1}{\binom{2n}{n}\zeta^{n+1}}. \tag{3}$$

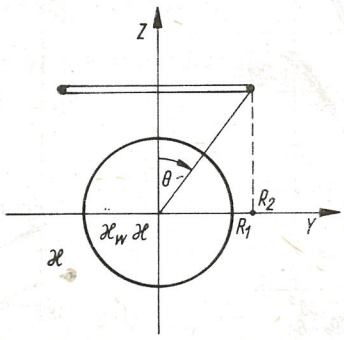


Fig. 5. The ferromagnetic ball in the electromagnetic field due to the circular loop

These formulas allow one to obtain corresponding to (2) formulas for the core in shape of the ball in the form

$$F = \pi\varkappa(\varkappa_w - 1) w^2 I^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin\Theta)^{2n+3}}{n\varkappa_w + n + 1} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2n+1} P_n^1(\cos\Theta) P_{n+1}(\cos\Theta). \tag{4}$$

Numerical calculations have been performed for the ball ($k = 1$) and the longitudinal ellipsoid (other values of k).

The results are presented in Fig. 6. In Fig. 6 force acting on the circular loop of radius $R_2 = 1.05R_1$ (Fig. 5) is plotted versus coordinate z of the center of loop.

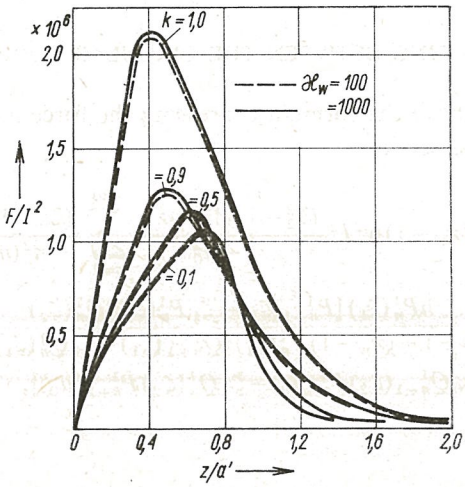


Fig. 6. The force acting on the ellipsoidal and ball cores due to the circular loop

4. CONCLUSION

In the paper forces acting in the system consisting of a ferromagnetic ellipsoidal core and the coil in shape of a part of rotational ellipsoid have been obtained. Numerical calculations have been performed for following values of relative magnetic permeability: $\varkappa_w = 100, 1000, 10^6$.

The results obtained for $\varkappa_w = 1000$ (Fig. 2, Fig. 3) are the same as those for $\varkappa_w = \infty$. The formula expressing force in the system of ferromagnetic ball and circular loop have been obtained with a help of asymptotic expansion of the associate Legendre functions. This formula is the same as derived in [4].

One can apply the results of the paper for obtaining formulas which allow one to determine the force acting between a circular loop and ferromagnetic cylinder.

REFERENCES

1. G. A. Korn, T. M. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, New York, Toronto, London 1961.
2. P. Moon, D. E. Spencer, *Field Theory for Engineers*, Princeton, Toronto, London, New York 1961.
3. J. Purczyński i in., Applied Physics 8, 71—74 (1975).
4. J. Purczyński, R. Sikora; Archiwum Elektrotechniki, 25, 3 (1976).
5. *Tables of Associated Legendre Functions*, New York, Columbia Uniwersity Press, 1945.

J. PURCZYŃSKI, P. KRASOŃ, A. BRYKALSKI

SIŁA DZIAŁAJĄCA NA RDZEŃ CEWKI O KSZTAŁCIE ELIPSOIDY OBROTOWEJ

Streszczenie

W pracy dokonano analizy siły działającej na rdzeń cewki o kształcie elipsoidy obrotowej. Wyprowadzono zależności określające wielkości siły w zależności od wymiarów geometrycznych. Dokonując przejścia granicznego zbadano szczególny przypadek rdzenia kulistego. Przeprowadzono numeryczną analizę otrzymanych wzorów, a wyniki przedstawiono graficznie.

J. PURCZYŃSKI, P. KRASOŃ, A. BRYKALSKI

FORCE AGISSANT SUR LE NOYAU D'UNE BOBINE À FORME D'UN ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION

Résumé

Dans l'article on a analysé la force agissant sur le noyau d'une bobine ayant la forme d'un ellipsoïde de révolution. On a déduit les relations entre la grandeur de la force et les dimensions géométriques. Dans la recherche du point limite de transition on a examiné le cas tout particulier du noyau sphérique. On a fait l'analyse numérique des formules obtenues et on a présenté les résultats sur un graphique.

J. PURCZYŃSKI, P. KRASOŃ, A. BRYKALSKI

DIE AUF EINEN ELLIPSENFÖRMIGEN SPULENDREHKERN WIRKENDE KRAFT

Zusammenfassung

In der Bearbeitung wurde eine Analyse der auf einen ellipsenförmigen Spulenkern wirkende Kraft durchgeführt. Es wurden Beziehungen abgeleitet, die die Kraftgröße in Abhängigkeit von den geometrischen Abmessungen bestimmen. Anhand des Grenzübergangs wurde als Einzelfall ein kugelförmiger Kern betrachtet. Eine numerische Analyse wurde durchgeführt, und die Ergebnisse sind graphisch dargestellt worden.

Я. ПУРЧИНЬСКИ, П. КРАСОНЬ, А. БРЫКАЛЬСКИ

СИЛА ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА СЕРДЕЧНИК КАТУШКИ В ВИДЕ ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ

Резюме

Проведен анализ силы действующей на сердечник катушки в виде эллипсоида вращения. Выведены формулы определяющие величину силы в зависимости от геометрических размеров. С помощью граничного перехода исследован особый случай шарового сердечника. Результаты нумерического анализа представлены на рисунках.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1984, 30, z. 1, ss. 9-30

621.317.08

Analogrechenmessumformer für elektrische Grössen

CZESŁAW SZCZEPANIAK (WARSZAWA)

Instytut Elektrotechniki

Die Arbeit wurde am 15.9.1981 eingesandt

Die auf dem Markt zugänglichen integrierten Analogfunktionsschaltungen, insbesondere Analogmultiplizierer und Effektivwertwandler, ermöglichen den Aufbau elektronischer Messeinrichtungen (darunter Messumformer für elektrische Grössen), die auf Rechenschaltungen beruhen, die analoge mathematische Operationen nach elektrischen Signalen gemäss den definitionalen Gleichungen elektrischer Grössen ausführen. Die in diesem Artikel dargestellten Rechenschaltungen wandeln mehr als 20 elektrischer Grössen in Gleichspannung um. Es wurden auch theoretische und praktische Gleichungen der Umwandlugscharakteristiken und der -fehler Funktions- und Hilfsoperatoren dieser integrierten Analogfunktionsschaltungen angegeben.

1. STAND DER TECHNIK

In der Messtechnik sind zahlreiche Lösungen für Analogmessumformer der elektrischen Grundgrössen bekannt. Diese Mannigfaltigkeit der Lösungen ergibt sich aus den dem technischen Fortschritt entsprechenden Anwendungen, aus verschiedenartigen Techniken und der Ausnutzung verschiedener physikalischer Erscheinungen. Gemäss den bekannten Lösungen beruhen die Messumformer der elektrischen Grössen auf einem indirekten Messverfahren. Das Arbeitsprinzip ergeht nicht aus den definitionelen Gleichungen elektrischer Grössen.

In Messumformern kann man entweder den Teil der Messchaltungen, die die mathematischen Tätigkeiten nach elektrischen Signalen gemäss den definitionalen Gleichungen ausführen, nicht absondern, oder auch die Rechenschaltung der Messumformer wirkt ebenfalls nach indirekten Messverfahren. Ein Beispiel für die Rechenschaltung kann die Multiplizierschaltung sein, die nach dem Prinzip „Time Division Multiplication" arbeitet. In Leistungsmessumformern wird diese Multiplizierschaltung angewendet. Messumformer, die auf indirekten Messmethoden beruhen, sind zum Beispiel Effektivwertmessumformer, die thermische Stromwirkung ausnutzen oder auch die dynamische Stromwirkung ausnutzenden Wirkleistungsmessumformer. Nur für einige elektrische Grössen, wie: Strom, Spannung, Wirk- und Blindleistung, Frequenz und Phase sind vielfaltige Lösungen der Messumformer bekannt, ebenso begrenzte Kenntnisse besitzen wir über einige Gebrauchseigenschaften dieser Messumformer (z.B. schmaler Gebrauchsbereich der Frequenz der Blindleistungsmessumformer und Phasenmessumformer). Die Lösungen für Scheinleistungs- und Wirkleistungsfaktormessumformer sind wenigar bekannt. Messumformer übriger elektrischer Grössen, z.B. Blindleistungsfaktor, Pare-

meter des elektrischen Kreises (d.h. Widerstand, Impedanz, Reaktanz u.dgl.), Faktoren der elektrischen Signale (d.h. Scheitelfaktor, Klirrfaktor, Formfaktor u.dgl.) und anderer Grössen sind völlig unbekannt.

Auf dem Markt sind gegenwärtig integrierte Analogfunktionsschaltungen erhältlich, insbesondere Analogmultiplizierer und Effektivwertwandler. Sie ermöglichen den Aufbau von Analogmessumformer für alle elektrischen Grössen.

Gegenstand des Artikels sind diese Messumformer, die sogenannten Analogrechenmessumformer. Sie beruhen auf direkten Messmethoden und besitzen im Gegenteil zu den bisherigen Messumformern keinerlei Nachteile.

2. DAS ALLGEMEINE PRINZIP DER ANALOGUMWANDLUNG ELEKTRISCHER GRÖSSEN

In der Theorie der Elektrotechnik sind definitionale Gleichungen verschiedener elektrischer Grössen und ihr unterschiedlicher Wert bekannt. Aus diesen Gleichungen ergibt sich, dass die Bestimmung (d.h. Messung oder Umwandlung) verschiedener elektrischer Grössen auf der stetigen Durchführung bestimmter mathematischer Operationen beruht, also zuerst auf den Augenblickswerten der Spannung oder/und des Stroms, später auf den Mittelswerten der Spannung, die man auf Grund ursprünglicher mathematischer Operationen gewinnt. Als Resultat der Durchführung analoger mathematischer Operationen auf Spannung oder/und Strom gewinnt man Gleichspannung mit einem der gewählten Art des Wertes (Mittel, Effektiv, Maximal) der gewählten elektrischen Grössen (Spannung, Strom, Leistung u.dgl.) proportionalen Wert. Das also ist die Analogumwandlung elektrischer Grössen in Gleichspannung. Diese Umwandlung vollzieht sich in Schaltungen die aus entsprechenden Funktionsoperatoren bestehen, die die analogen mathematischen Operationen gemäss den Formeln elektrischer Grössen ausführen.

Zum Aufbau der Schaltungen für die Analogumwandlung elektrischer Grössen, und genauer zur Bildung des Operationsteils dieser Schaltungen sind Funktionsoperatoren notwendig, die solche analogen mathematischen Operationen ausführen, wie: Multiplizierung, Quadrierung, Dividierung, Radizierung, Mittelwertbildung, Berechnung des Effektivwertes, Differenzierung, Summierung u.dgl. Ausserdem sind Hilfsoperatoren notwendig die analoge Operationen ausführen, wie: Mittelwertgleichrichterung, Amplitudendetektion, Amplitudenbegrenzung, Impulsgestaltung u.dgl. Funktionsoperatoren können unter Gebrach verschiedener technischer Mittel und Ausnutzung verschiedenartiger physikalischer Phänomene realisiert werden. Am leichtesten lassen sie sich jedoch derzeit mittels elektronischer Schaltungen verwirklichen und die Ausführung mittels integrierter Technik ist am preiswertesten. Im Ergebnis sind das integrierte analoge Funktionsschaltungen in Form von Analogmultiplizierern und Effektivwertwandlern. In breiter Auswahl werden sie von amerikanischen Firmen hergestellt, besonders von den Firmen ANALOG DEVICES und BURR BROWN.

Integrierte Analogmultiplizierer können in Abhängigkeit von der Einschaltungsart vier analoge mathematische Grundoperationen ausüben, u.zw.: Multiplizierung, Quadrierung, Dividierung und Radizierung. Daher ermöglichen Multiplizierer, sowie Effektivwertwandler, Operationsverstärker und elektronische Elemente (z.B. Dioden, Kondensa-

toren, Resistoren u.dgl.) den Aufbau der Rechenschaltungen zur Umwandlung fast aller — über 20 — elektrischer Grössen in Gleichspannung.

3. PRINZIP DES AUFBAUS SYNTHETISCHER ANALOGER RECHENSCHALTUNGEN DER MESSUMFORMER ELEKTRISCHER GRÖSSEN

In Tabelle 2 werden unter Anwendung graphischer Symbole der fundamentalen Funktions- und Hilfsoperatoren (siehe Tab. 1) Rechenschaltungen für 23 elektrische Grössen dargestellt. Diese Schaltungen führen analoge mathematische Operationen nach definitionalen Gleichungen in elementarer Form aus. Für elektrische Grössen, die in einer Gleichung in zwei verschiedenen Formen beschrieben werden können, werden zwei verschiedene, sich aus diesen Gleichungen ergebende Schaltungen gebracht. Die Arbeitsprinzipien der angegebenen Schaltungen sind allgemeine Prinzipien für Analogmessumformer einzelner elektrischer Grössen, da sich dies aus den Gleichungen dieser Grössen ergibt. Die in Tabelle 2 angeführten Rechenschaltungen sind also Synthetikschaltungen der bekannten und neuen Analogmessumformer elektrischer Grössen.

4. DIE VOLLSTÄNDIGE BLOKSCHALTUNG DER ANALOGRECHENMESSUMFORMER BELIEBIGER ELEKTRISCHER GRÖSSEN

Die erwogenen Synthetikrechenschaltungen ermöglichen den Aufbau der Messumformer, der sogenannten „Analogrechenmessumformer" für alle elektrischen Grössen.

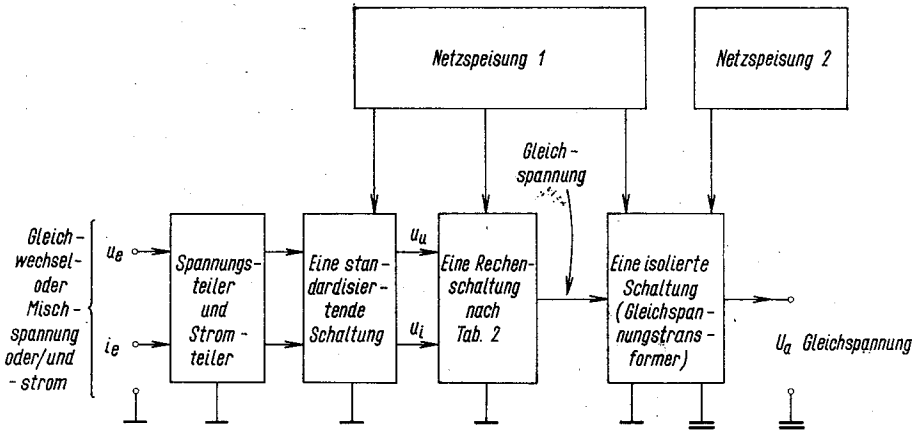


Bild. Blockschaltung eines Analogrechenmessumformers für beliebige elektrische Grössen

Bild 1 zeigt die vollständige Blokschaltung eines Analogrechenmessumformers. Sie besteht aus Eingangsspannungsteiler oder/und Eingangsstromteiler, standardisiertende Schaltung, Rechenschaltung, Gleichspannungstransformer und aus Netzspeisungen. Die Widerstandsteiller bestimmen die Messbereichen, die Eingangsspannung und den Eingangsstrom. Eine standardisiertende Schaltung verstärkt die Ausgangsspannungen der

Tabelle 1

Namen und graphische Symbole der Funktions- und Hilfsoperatoren

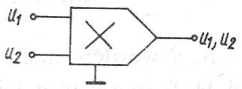
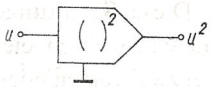
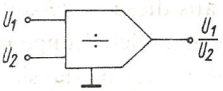
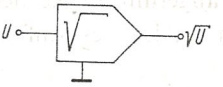
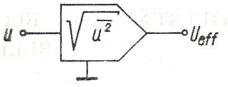
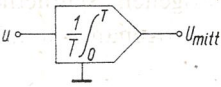
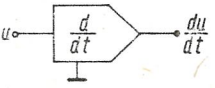
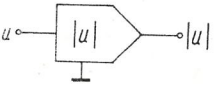
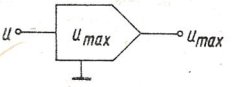
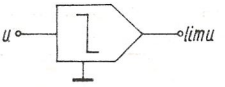
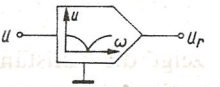
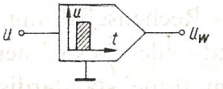
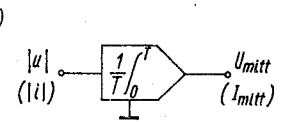
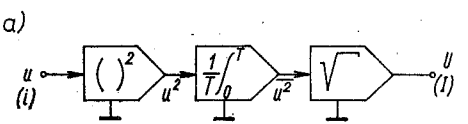
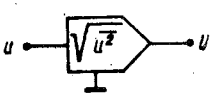
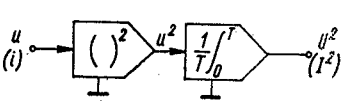
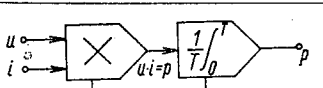
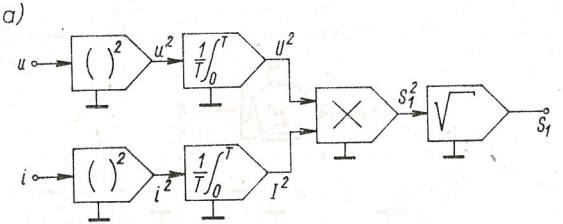
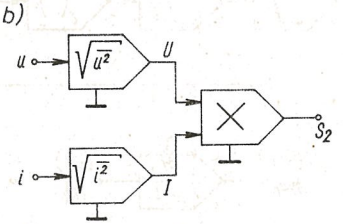
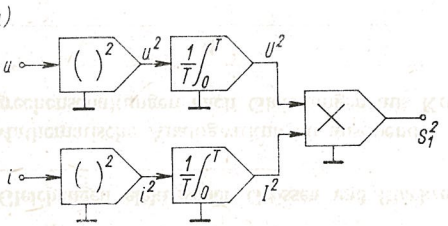
Pos.	Name	Symbol
1	Analogmultiplizierer	
2	Analogquadrierer	
3	Analogdividierer	
4	Analogradizierer	
5	Effektivwertwandler (Effektivwertgleichrichter)	
6	Mittelwertbildner	
7	Differenzierer	
8	Elektronischer Zweiwellengleichrichter	
9	Amplitudendetektor	
10	Amplitudenbegrenzer	
11	Selektiver Dämpfer	
12	Univibrator der pulsierenden Rechteckspannungen um ein gleiches Feld	

Tabelle 2

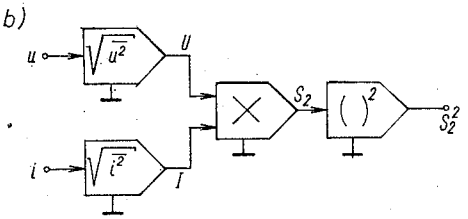
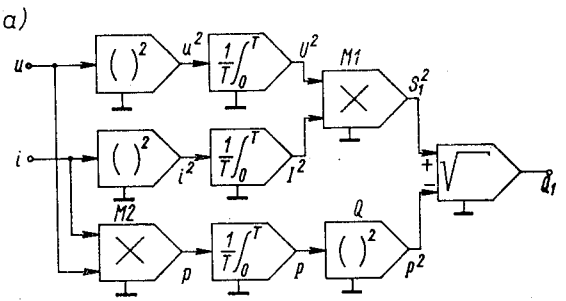
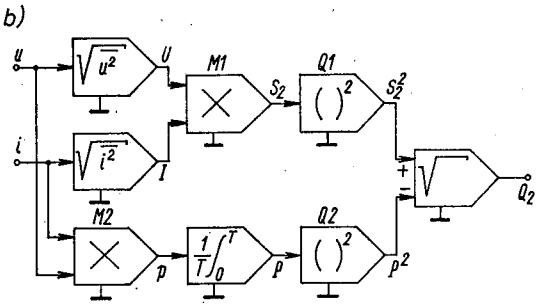
Mathematische Analogwirkungen ausübende definitionale Gleichungen elektrischer Grössen und Blockrechenschaltungen

Pos.	Elektrische Grössen und ihre Symbole	Definitionale Gleichungen in elementaren Formen	Mathematische Analogwirkungen ausübende Analogrechenschaltungen nach Gleichungen aus Kol. 3	Name (oder Funktion) der Schaltung
1	2	3	4	5
1	Mittelwert der gleichgerichteten Spannung (Strom) U_{mttt} (I_{mttt})	$U_{mttt} = \frac{1}{T}\int_0^T \lvert u\rvert dt = \overline{\lvert u\rvert}$	b) 	Mittelwertbildner. Die Umwandlung gleichgerichteter Spannung (Strom)
2	Spannungs- (Strom-) effektivwert U (I)	$U = \sqrt{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt} = \sqrt{\overline{u^2}}$	a) 	Effektivwertwandler
				Integrierte Effektivwertwandler
3	Quadratischer Effektivwert der Spannung (U^2) oder des Stroms (I^2)	$U^2 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt = \overline{u^2}$		Umwandlung des quadratischen Effektivwertes der Spannung oder des Stroms in Gleichspannung
4	Wirkleistung P	$P = \frac{1}{T}\int_0^T uidt = \overline{ui}$		Umwandlung der Wirkleistung in Gleichspannung

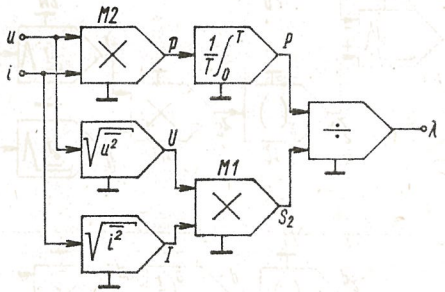
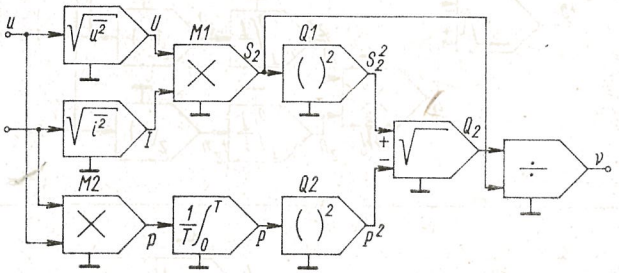
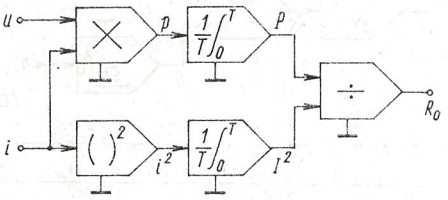
[13]

1	2	3	4	5
5	Quadratischer Wert der Wirkleistung P^2	$P^2 = \left[\frac{1}{T}\int_0^T uidt\right]^2 = (\overline{ui})^2$		Umwandlung des quadratischen Wertes der Wirkleistung in Gleichspannung
6	Scheinleistung S	$S_1 = \sqrt{U^2 I^2} = \sqrt{\overline{u^2}\,\overline{i^2}}$	a) 	Umwandlung der Scheinleistung in Gleichspannung
		$S_2 = UI = \sqrt{\overline{u^2}}\,\sqrt{\overline{i^2}}$	b) 	
7	Quadratischer Wert der Scheinleistung S^2	$S_1^2 = U^2 I^2 = \overline{u^2}\,\overline{i^2}$	a) 	Umwandlung des quadratischen Wertes der Scheinleistung in Gleichspannung

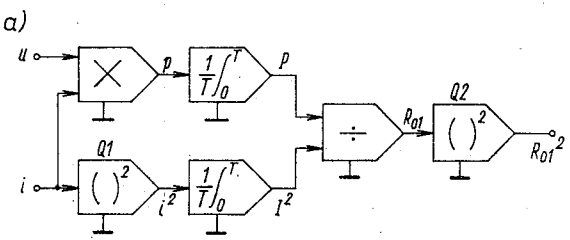
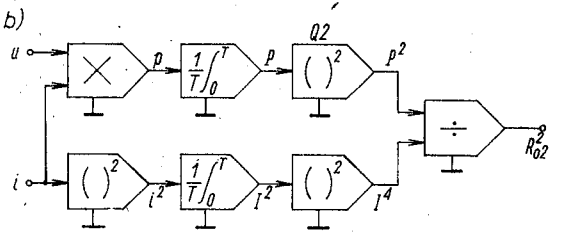
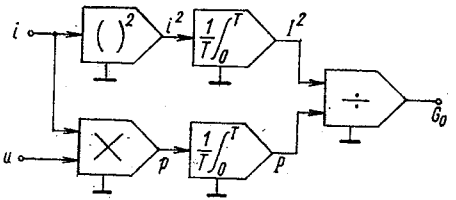
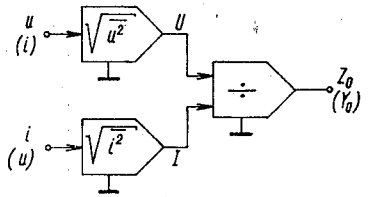
[14]

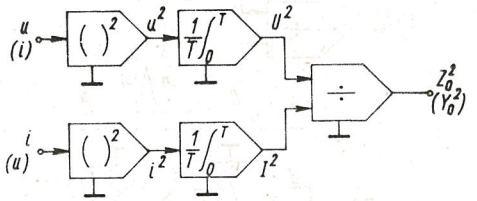
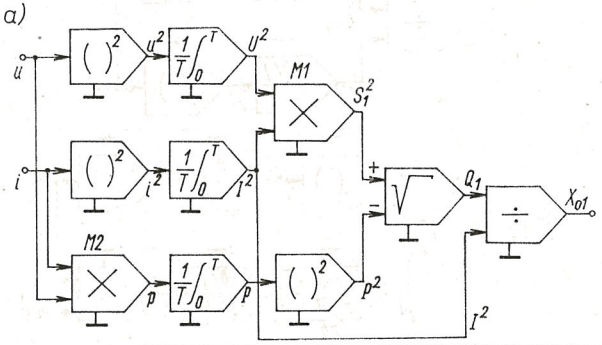
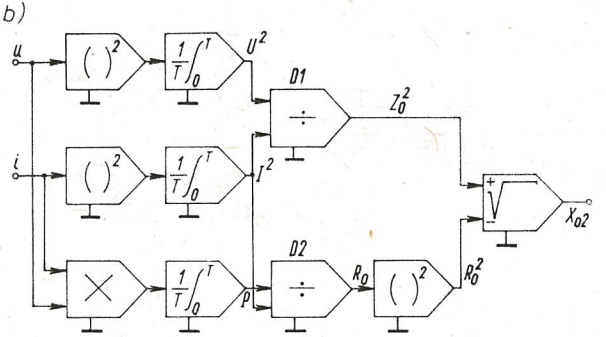
1	2	3	4	5
		$S_2^2 = (UI)^2 = \left(\sqrt{\overline{u^2}}\,\sqrt{\overline{i^2}}\right)^2$	b)  	
8	Blindleistung (Reaktivleistung) Q	$Q_1 = \sqrt{S_1^2 - P^2} = \sqrt{\overline{u^2}\,\overline{i^2} - (\overline{ui})^2}$	a)  	Umwandlung der Blindleistung in Gleichspannung
		$Q_2 = \sqrt{S_2^2 - P^2} = \sqrt{\left(\sqrt{\overline{u^2}}\,\sqrt{\overline{i^2}}\right)^2 - (\overline{ui})^2}$	b)  	

[15]

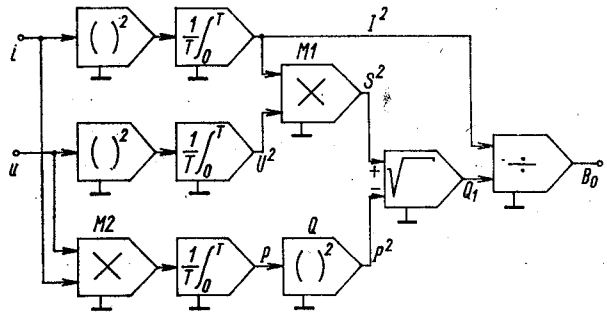
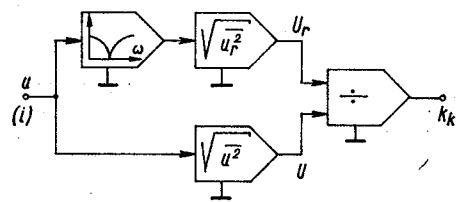
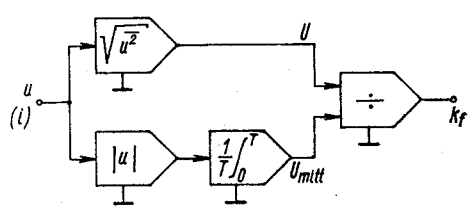
1	2	3	4	5
9	Wirkleistungsfaktor λ	$\lambda = \frac{P}{S_2} = \frac{\overline{ui}}{\sqrt{\overline{u^2}}\sqrt{\overline{i^2}}}$		Rechenschaltung zur Umwandlung des Wirkleistungsfaktors in Gleichspannung
10	Blindleistungsfaktor ν	$\nu = \frac{Q_2}{S_2} = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{\overline{u^2}}\sqrt{\overline{i^2}}\right)^2 - (\overline{ui})^2}}{\sqrt{\overline{u^2}}\sqrt{\overline{i^2}}}$		Rechenschaltung zur Umwandlung des Blindleistungsfaktors in Gleichspannung
11	Widerstand des elektrischen Kreises R_o	$R_o = \frac{P}{I^2} = \frac{\overline{ui}}{\overline{i^2}}$		Umwandlung des Widerstandes des elektrischen Kreises bei Betriebsspannung in Gleichspannung

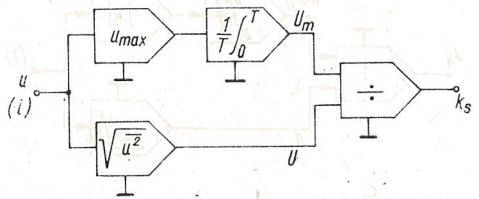
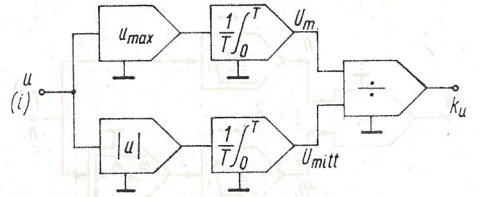
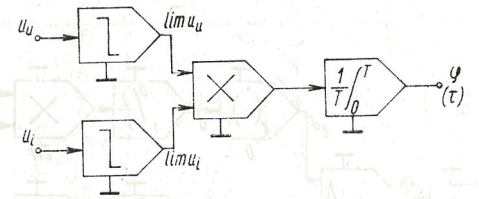
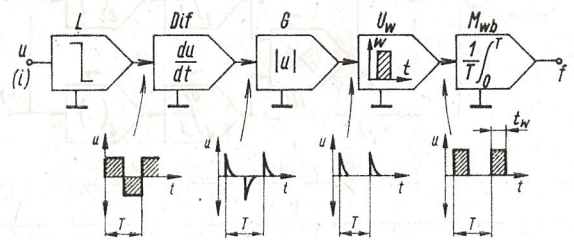
cd. tab. 2

1	2	3	4	5
12	Quadratischer Wert des Widerstandes des elektrischen Kreises R_o^2	$R_{o1}^2 = \left(\frac{P}{I^2}\right)^2 = \left(\frac{\overline{ui}}{\overline{i^2}}\right)^2$	a) 	Umwandlung des quadratischen Wertes des Widerstandes (R_o^2) in Gleichspannung
		$R_{o2}^2 = \frac{P^2}{I^4} = \frac{(\overline{ui})^2}{(\overline{i^2})^2}$	b) 	
13	Konduktanz des elektrischen Kreises G_o	$G_o = \frac{I^2}{P} = \frac{\overline{i^2}}{\overline{ui}}$		Umwandlung der Konduktanz des elektrischen Kreises bei Betriebsspannung in Gleichspannung
14	Impedanz (Admittanz) des elektrischen Kreises Z_o (Y_o)	$Z_o = \frac{U}{I} = \frac{\sqrt{\overline{u^2}}}{\sqrt{\overline{i^2}}}$ $\left(Y_o = \frac{I}{U} = \frac{\sqrt{\overline{i^2}}}{\sqrt{\overline{u^2}}}\right)$		Umwandlung der Impedanz (Admittanz) des elektrischen Kreises bei Betriebsspannung in Gleichspannung

1	2	3	4	5
15	Quadratischer Wert der Impedanz (Admittanz) des elektrischen Kreises $Z_o^2(Y_o^2)$	$Z_o^2 = \frac{\overline{u^2}}{\overline{i^2}}$ $\left(Y_o^2 = \frac{\overline{i^2}}{\overline{u^2}}\right)$		Umwandlung des quadratischen Wertes der Impedanz (Z_o^2) oder der Admittanz (Y_o^2) in Gleichspannung
16	Reaktanz des elektrischen Kreises X_o	$X_{o1} = \frac{Q_1}{I^2} = \frac{\sqrt{\overline{u^2}\overline{i^2} - (\overline{ui})^2}}{\overline{i^2}}$	a) 	Umwandlung der Reaktanz des elektrischen Kreises bei Betriebsspannung in Gleichspannung
		$X_{o2} = \sqrt{Z_o^2 - R_o^2} = \sqrt{\frac{\overline{u^2}}{\overline{i^2}} - \left(\frac{\overline{ui}}{\overline{i^2}}\right)^2}$	b) 	

cd. tab. 2

1	2	3	4	5
17	Suszeptanz des elektrischen Kreises B_o	$B_o = \frac{I^2}{Q_1} = \frac{\overline{i^2}}{\sqrt{\overline{u^2}\overline{i^2} - (\overline{ui})^2}}$		Umwandlung der Suszeptanz des elektrischen Kreises bei Betriebsspannung in Gleichspannung
18	Klirrfaktor der Spannung oder des Stroms k_k	$k_k = \frac{U_r}{U} = \frac{\sqrt{\overline{u_r^2}}}{\sqrt{\overline{u^2}}}$		Umwandlung des Klirrfaktors in Gleichspannung
19	Formfaktor der Spannung oder des Stroms k_f	$k_f = \frac{U}{U_{mitt}} = \frac{\sqrt{\overline{u^2}}}{\overline{\lvert u \rvert}}$		Umwandlung des Formfaktors in Gleichspannung

1	2	3	4	5
20	Scheitelfaktor der Spannung oder des Stroms k_s	$k_s = \frac{U_m}{U} = \frac{\overline{u_{max}}}{\sqrt{\overline{u^2}}}$		Umwandlung des Scheitelfaktors in Gleichspannung
21	Verhältnis k_u der Amplitude zum Mittelwert der Spannung oder des Stroms	$k_u = \frac{U_m}{U_{mitt}} = \frac{\overline{u_{max}}}{\overline{\lvert u \rvert}}$		Umwandlung des Verhältnisses k_u in Gleichspannung
22	Phase (Verschiebung) des Stroms gegen die Spannung $\varphi(\tau)$	$\varphi = \overline{\lim u_u \lim u_i}$		Umwandlung der Phase (Verschiebung) in Gleichspannung
23	Frequenz der Spannung oder des Stroms f	$f = \overline{\frac{t_w}{T} U}$		Umwandlung der Frequenz in Gleichspannung

[20]

Widerstandsteiler zu Warten, die sich für die Bearbeitung mit Hilfe einer Recheschaltung eignen. Ausserdem begrenzt diese Schaltung die an der Rechenschaltung angegebenen Amplituden der Spannungen und meldet mittels Lichtsignal die Überschreitung der Messbereiche der Eingangsspannung und des Eingangsstroms. Die Rechenschaltung führt analoge mathematische Operationen bei einer oder beiden Spannungen aus, von denen eine (u_u) dem Augenblickswert der Eingangsspannung proportional ist, und die zweite (u_i) dem Augenblickswert des Eingangsstroms. Die Rechenschaltung wählt man entsprechend der elektrischen Umwandlungsgrösse aus Tabelle 2. Eine isolierte Schaltung trennt galvanisch den Kreis der Ausgangsspannung von der Kreisen der Eingangsspannung oder/und des Eingangsstroms und der Speisespannung des Messumformers.

Die Genauigkeit der Umwandlung des Analogrechenmessumformers hängt hauptsächlich von der Genauigkeit der Rechenschaltung ab, diese wiederum von den angewandten Funktionsoperatoren.

Gemäss der in Bild 1 gezeigten Blockschaltung wurden Messumformer für: Strom, Spannung, Wirkleistung, Scheinleistung, Blindleistung, Wirkleistungsfaktor, Resistanz, Konduktanz, Impedanz, Admittanz und Scheitelfaktor bearbeitet. Die Schaltungen dieser Messumformer sind in Polen patentiert worden. Einige davon können gleichzeitig einige elektrische Grössen umwandeln, das sind die sogenannten Mehrfunktionenmessumformer. Eine Mehrfunktion des Analogrechenmessumformers erzielt man direkt aus der hierarchischen Struktur der Rechenschaltung (z.B. Umwandlung des Wirkleistungsfaktors $\lambda = P/S$ muss der Umwandlung der Wirkleistung und Scheinleistung vorangehen, die Umwandlung der Scheinleistung $S = UI$ fordert die vorherige Umwandlung der Effektivwertspannung und des Effektivwertstroms).

5. „THEORETISCHE" GLEICHUNGEN DES MITTELWERTES DES PRODUKTES UND DES MITTELWERTES DES QUADRIERUNGSERGEBNISSES

In den in Tabelle 2 dargestellten Synthetikrechenschaltungen mit mathematischen Anfangsoperationen, d.h. mit Operationen, die direkt nach den Augenblickswerten der Spannung oder/und des Stromes durchgeführt werden, sind Operationen des gewonnenen Mittelwertes des Quadrierungsergebnisses und des errechneten Mittelwertes des Produktes enthalten. Die folgenden mathematischen Operationen in diesen Schaltungen werden bereits nach den resultierenden Signalen der beiden anfänglichen Operationen durchgeführt, d.h. nach Signalen der Gleichspannung.

Nicht ideale, d.h. wirkliche, also die mit Fehlern der Multiplizierer belastete Multiplizierung zweier Spannungen kann auf diese Weise zum Ausdruck gebracht werden, dass man eine dieser Spannungen zur Potenz $p \neq 1$ erhebt. Dagegen kann die nicht ideale Quadrierung einer Spannung mit dem Exponenten der Potenz $n \neq 2$ angenommen werden. Dann wird der errechnete Mittelwert des Produktes zweier Spannungen mittels Gleichung

$$(\overline{u_u u_i})' = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{2}{\pi}} u_u^p u_i \, dt \qquad p \neq 1 \tag{1}$$

bestimmt. Das Zeichen „erstens" bedeutet, dass der errechnete Mittelwert des Produktes mit dem Fehler des Multiplizierers behaftet ist.

Dagegen wird der wirkliche gewonnene Mittelwert des Quadrierungsergebnisses mittels Gleichungsmuster

$$(\overline{u^2})' = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^n dt \qquad n \neq 2 \tag{2}$$

bestimmt. Das Zeichen „erstens" bedeutet, dass der gewonnene Mittelwert des Quadrierungsergebnisses samt dem Fehler des Quadrierers errechnet worden ist.

Nimmt man an, dass die Eingangsspannung und der Eingangsstrom, genauer die Spannung u_u proportional der Eingangsspannung und die Spannung u_i proportional dem Eingangsstrom sinusförmig sind oder dass

$$\begin{aligned} u_u &= U_{um}\sin\omega t, \\ u_i &= U_{im}\sin[\omega t \pm (\varphi \pm \Theta)], \end{aligned} \tag{3}$$

wo:

U_{um} und U_{im} — Amplituden der Spannungen u_u und u_i,

φ — Phasenwinkel zwischen den Spannungen u_u und u_i,

Θ — Phasenwinkelfehler des Multiplizierers

sind, so erhält man, nach dem (3) in (1) unterstellt worden ist, die Gleichung

$$(\overline{u_u u_i})' = \frac{2}{\pi} U_{um}^p U_{im}\left[(\cos\varphi\cos\Theta \mp \sin\varphi\sin\Theta)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p\omega t\sin\omega t\,dt \pm\right.$$

$$\left. \pm(\sin\varphi\cos\Theta \pm \cos\varphi\sin\Theta)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p\omega t\cos\omega t\,dt\right]. \tag{4}$$

Die Integrallösungen dieser Gleichung sind Betafunktionen (oder Eulerintegral der Reihe I) [6]. Diese können durch Gammafunktionen (d.h. Eulerintegral der Reihe II) ersetzt werden, und zwar

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p\omega t\sin\omega t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{(1+p)}\omega t\,dt = 2^p B\left(\frac{p+2}{2}, \frac{p+2}{2}\right) = 2^p \frac{G^2\left(\frac{p+2}{2}\right)}{G(p+2)}, \tag{5}$$

sowie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p\omega t\cos\omega t\,dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{p+1}{2}, 1\right) = \frac{1}{2}\frac{G\left(\frac{p+1}{2}\right)G(1)}{G\left(\frac{p+3}{2}\right)}, \tag{6}$$

wo:

B — Betafunktion,

G — Gammafunktion

sind.

Setzt man (5) und (6) in (4) ein so erhält man die Gleichung des errechneten Mittelwertes des Produktes mit den Fehlern der Multiplizierer belasteten Multiplizierung zweier sinusförmiger Spannungen

$$(\overline{u_u u_i})' = \frac{2}{\pi} U_{um}^p U_{im} \left[(\cos\varphi\cos\Theta \mp \sin\varphi\sin\Theta) 2^p \frac{G\left(\frac{p+2}{2}\right)}{G(p+2)} \pm \right.$$

$$\left. \pm (\sin\varphi\cos\Theta \pm \cos\varphi\sin\Theta) \frac{1}{2} \frac{G\left(\frac{p+1}{2}\right) G(1)}{G\left(\frac{p+3}{2}\right)} \right]. \tag{7}$$

Bei $p = 1$ und $\Theta = 0°$ ist der Multiplizierer ideal und der errechnete Mittelwert des Produktes wird in der ersten 1/4 Periode mittels Gleichung

$$\overline{u_u u_i} = \frac{2}{\pi} U_{um} U_{im} \left(\frac{\pi}{4} \cos\varphi \pm \frac{1}{2} \sin\varphi \right) \tag{8}$$

bestimmt, wo die Werte der Gammafunktionen für $p = 1$ den Tabellen in [3] entnommen worden sind.

In gleicher Form wird die Gleichung für den gewonnenen Mittelwert des Quadrierungsergebnisses der sinusförmigen Spannung abgeleitet [11]

$$(\overline{u^2})' = \frac{2}{\pi} U_m^n 2^{n-1} \frac{G^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{G(n+1)}, \tag{9}$$

wo $n \neq 2$ den Exponenten der Potenzer einer mit Fehlern des Quadrierers belasteten Quadrierung ausdrückt (bei $n = 2$ ist die Quadrierung ideal).

Die Gleichungen (7) und (9) sind die sogenannten theoretischen Gleichungen.

Leider bestimmen die Produzenten der Multiplizierer und Quadrierer die Fehler dieser Operatoren mit Hilfe der Potenzexponenten p und n nicht. Sie geben dagegen die Gleichungen der wirklichen Multiplizierung zweier Gleichspannungen und der wirklichen Quadrierung der Gleichspannung an [4]. Diese Gleichungen enthalten die Summanden der partiellen Fehler. Ausserdem bezeichnen sie den Phasenwinkelfehler des Multiplizierers bei Multiplizierung zweier Wechselspannungen in einem bestimmten Frequenzbereich.

6. „PRAKTISCHE" GLEICHUNGEN DES ERRECHNETEN MITTELWERTES DES PRODUKTES UND DES GEWONNENEN MITTELWERTES DES QUADRIERUNGSERGEBNISSES

Die vom Produzenten angegebenen die wirkliche Kennlinie des Multiplizierers bei der Multiplizierung zweier Gleichspannungen beschreibende Gleichung, ist die folgende

$$U_a' = (1 \pm \Delta) K_M (U_1 \pm U_{01})(U_2 \pm U_{02}) \pm U_{a0} \pm N(U_1, U_2), \tag{10}$$

wo:

U_1, U_2 — Eingangsgleichspannungen des Multiplizierers,
U_a — Ausgangsgleichspannung des Multiplizierers,
K_M — Multiplizierungsfaktor,
ΔK_M — Fehler des Multiplizierungsfaktors,
U_{o1}, U_{o2} — Offseteingangsspannungen des Multiplizierers,
U_{ao} — Offsetausgangsspannung des Multiplizierers,
$N(U_1, U_2)$ — Nichtlinearität der Kennlinie des Multiplizierers

sind.

Nach Ausführung der Multiplizierung und Vornachlessigung der bedeutungslosen Ausdrücke gestalte sich die Gleichung folgendermassen

$$U_a' = K_M U_1 U_2 \pm \Delta K_M U_1 U_2 \pm K_M U_1 U_{01} \pm K_M U_2 U_{02} \pm U_{ao} \pm N(U_1, U_2). \tag{11}$$

Der erste Summand der rechten Seite der Gleichung (11) drückt die ideale Multiplizierung aus. Die algebraische Summe der übrigen Summanden der rechten Seite der Gleichung (11) ist der resultierende Fehler Δ_M des Multiplizierers. Diesen Fehler kann man in Einheiten des Nennwertes der Ausgangsspannung des Multiplizierers, oder mittels

$$\Delta_M = \delta_M U_{an} = \delta_M K_M U_{1n} U_{2n} \tag{12}$$

ausdrücken, wo:

δ_M — Grenzamplitudenfehler des Multiplizierers Firmenkataloge,
U_{1n}, U_{2n} — Nennwerte der Eingangsgleichspannungen des Multiplizierers,
U_{an} — Nennwert der Ausgangsspannung des Multiplizierers

sind.

Setzt man (12) in (11) ein, ergibt sich folgende wirkliche Gleichung der Kennlinie des Multiplizierers bei der Multiplizierung der Gleichspannungen

$$U_a' \approx (U_1 U_2)' = K_M U_1 U_2 \pm \delta_M K_M U_{1n} U_{2n} = K_M U_{1n} U_{2n} \left(\frac{U_1 U_2}{U_{1n} U_{2n}} \pm \delta_M \right). \tag{13}$$

Wenn die Eingangsspannungen des Multiplizierers sinusförmige Spannungen mit bestimmten Gleichungen (3) auf Basis der Gleichung (13) sind, so wird die Gleichung des wirklichen errechneten Mittelwertes des Produktes der Spannungen u_u und u_i unter Vernachlässigung des Integralfehlers folgt lauten

$$U_a' \approx (\overline{u_u u_i})' \approx P' = K_M U_{un} U_{in} \left(\frac{U_u U_i}{U_{un} U_{in}} \pm \delta_M \right) (\cos\varphi \cos\Theta \mp \sin\varphi \sin\Theta), \tag{14}$$

wo:

U_u, U_i — Effektivwerte der Eingangsspannungen,
U_{un}, U_{in} — Nennwerte der Spannungen U_n und U_i,
P — Wirkleistung

sind.

Das ist die sogenannte „praktische" Gleichung des wirklichen errechneten Mittelwertes des Produktes zweier sinusförmiger Spannungen u_u und u_i bzw. die Gleichung der Wirkleistung P.

Ebenso wird die „praktische" Gleichung des wirklichen gewonnenen Mittelwertes des Quadrierungsergebnisses der Wechselspannung abgeleitet. Die vom Produzenten angegebene Gleichung, die die reale Kennlinie des Quadrierers bei der Quadrierung einer Gleichspannung beschreibt, ist die folgende

$$U_a' = (1 \pm \Delta) K_Q U_e^2 \pm U_{aO} \pm N(U), \tag{15}$$

wo:

U_e — Eingangsspannung des Quadrierers,
U_a — Ausgangsspannung des Quadrierers,
K_Q — Quadrierungsfaktor,
ΔK_Q — Fehler des Quadrierungsfaktors,
U_{aO} — Offestausgangsspannung des Quadrierers,
$N(U)$ — Nichtlinearität der Kennlinie des Quadrierers

sind.

Die Gleichung (15) kann folgende Form erhalten

$$U_a' = K_Q U_e^2 \pm \Delta K_Q U_e^2 \pm U_{aO} \pm N(U). \tag{16}$$

Die algebraische Summe der zweiten, dritten und vierten Summanden der rechten Seite der Gleichung (16) ist der resultierende Fehler Δ_Q des Quadrierers. Drückt man diesen Fehler in Einheiten des Nennwertes der Ausgangsspannung des Quadrierers aus

$$\Delta_Q = \delta_Q U_{an} = \delta_Q K_Q U_{en}^2, \tag{17}$$

wo:

δ_Q — Grenzfehler des Quadrierers, in Firmenkatalogen angegeben,
U_{an} — Nennwert der Ausgangsspannung,
U_{en} — Nennwert der Eingangsspannung

sind, so wird die „praktische" Gleichung der realen Kennlinie des Quadrierers bei Quadrierung der Gleichspannung

$$U_a' \approx (U_e^2)' = K_Q U_e^2 + \delta_Q K_Q U_{en}^2 = K_Q U_{en}^2 \left(\frac{U_e^2}{U_{en}^2} \pm \delta_Q \right) \tag{18}$$

beschrieben. Die Gleichung (18) ist ebenso für die sinusförmige Eingangsspannung der Quadrierung gültig; wird der Integralfehler nicht berücksichtigt, dann bedeutet U den Effektivwert der Eingangsspannung.

Die „praktische" Gleichung der realen Kennlinie des die mathematische Operation des gewonnenen Mittelwertes des Qudrierungsergebnisses und ferner des die mathematische Operation der Radizierung der Spannung ausübenden Effektivwertwandlers ist

$$U_a' \approx \left(\sqrt{\overline{u_e^2}} \right)' = K_E U_{en} \left(\frac{U_e}{U_{en}} \pm \delta_E \right), \tag{19}$$

wo:

K_E — Skalenfaktor des Effektivwertwandlers,
δ_E — Grenzfehler des Effektivwertwandlers

sind.

7. „PRAKTISCHE" GLEICHUNGEN DER WIRKLICHEN DIVIDIERUNG UND RADIZIERUNG DER GLEICHSPANNUNGEN

Die in Tabelle 2 dargestellten übrigen zwei Funktionsoperatoren in Schaltungen, d.h. die Dividierer und Radizierer üben analoge mathematische Operationen ausschliesslich nach Signalen der Gleichspannung aus. Analog zu den Gleichungen (13) und (18) sind die „praktischen" Gleichungen der wirklichen Kennlinien dieser Operatoren:

für Analogdividierer

$$U_a' \approx \left(\frac{U_1}{U_2}\right)' = K_D\left(\frac{U_1}{U_2}\right)_n\left[\frac{\frac{U_1}{U_2}}{\left(\frac{U_1}{U_2}\right)_n} \pm \delta_D\right], \tag{20}$$

wo:

U_1 — Zählereingangsgleichspannung des Dividierers,
U_2 — Nennereingangsgleichspannung des Dividierers,
K_D — Dividierungsfaktor des Dividierers,
δ_D — Grenzfehler des Dividierers

sind.

für Analogradizierers

$$U_a' \approx (\sqrt{U_e})' = K_R\sqrt{U_{en}}\left(\frac{\sqrt{U_e}}{\sqrt{U_{en}}} \pm \delta_R\right), \tag{21}$$

wo:

K_R — Radizierungsfaktor des Radizierers,
δ_R — Grenzfehler des Radizierers

sind.

8. „PRAKTISCHE" GLEICHUNGEN DER WIRKLICHEN KENNLINIEN DER HILFSOPERATOREN

Die „praktischen" Gleichungen der wirklichen Kennlinien der Hilfsoperatoren kann man auf die gleiche Weise beschreiben und zwar:

für Mittelwertgleichrichter der Spannung

$$U_a' \approx (|\bar{u}_e|)' = \bar{U}' = K_G\bar{U}_n\left(\frac{\bar{U}}{\bar{U}_n} \pm \delta_G\right), \tag{22}$$

wo:

u_e — Augenblickswert der Spannung,
$\bar{U}$ — Mittelwert der Spannung,
K_G — Faktor des Gleichrichters,
δ_G — Grenzfehler des Gleichrichters

sind.

für Amplitudendetektor

$$U_a' \approx U_m' = K_A U_{mn}\left(\frac{U_m}{U_{mn}} \pm \delta_A\right), \tag{23}$$

wo:

U_m — Amplitude der Eingangsspannung,
U_{mn} — Nennwert der Spannung U_m,
K_A — Faktor des Amplitudendetektors,
δ_A — Grenzfehler des Amplitudendetektors

sind, und analog für andere Hilfsoperatoren.

9. VERALLGEMEINERUNGEN DER WIRKUNGSGLEICHUNGEN DER DIE MATHEMATISCHEN ANFANGSOPERATIONEN FÜR MISCHSPANNUNGEN AUSÜBENDEN FUNKTIONSOPERATOREN

Die Gleichungen (14), (18) und (19) der wirklichen Kennlinien der die mathematischen Anfangsoperationen durchführenden Funktionsoperatoren können als Verallgemeinerungen für nichtsinusförmige Spannungen und Ströme gelten unter der Voraussetzung abgeleitet, dass die Eingangsspannungen sinusoidal sind. Nichtsinusförmige Spannung bzw. nichtsinusförmiger Strom werden nämlich von zwei Parameter charakterisiert: dem Frequenzband und dem Scheitelfaktor. Das Frequenzband ergibt sich aus der Fourieranalyse. Für jede periodische Verlaufsart (Rechteck, Dreieck usw.) besteht eine gleichbedeutende Abhängigkeit zwischen Scheitelfaktor und Frequenzband (d.h. der Zahl der Harmonischen). Je grösser der Wert des Scheitelfaktors des Verlaufs ist, desto breiter ist das Frequenzband der Harmonischen dieses Verlaufs.

In den Firmenkatalogen wird das maximal zulässige Frequenzband für Multiplizierer, Quadrierer und Effektivwertwandler angegeben. Dagegen werden die Grenzwerte des Scheitelfaktor für diese Operatoren im Wertverhältnis der Speisespannungen zu den vorausgesetzten Nennwerten der Eingangsspannungen gewonnen. Die Fehler der Duchführung der anfänglichen mathematischen Operationen sind also davon abhängig, ob sich das Frequenzband der Eingangsspannung im zulässigen Frequenzband des Funktionsoperatoren befindet, und ob ein Scheitelfaktor dieser Spannung den zulässigen Wert für den angegebenen Operator nicht überschreitet.

Man kann den Frequenzwert, sich aus der Beschränkung des Frequenzbandes des Operators ergebenden, bei Durchführung der mathematischen Anfangsoperation bei nichtsinusförmiger Spannung berechnen, wenn die Verlaufsart der Spannung und der maximale Frequenzgrenzwert des Funktionsoperators angegeben werden sind. Dieser Fehler ist vom Verhältnis der Obergrenzfrequenz des Operators zur Frequenz der ersten Harmonischen der Spannung (oder von der Funktion der Zahl der Harmonischen der nichtsinusförmigen vom Funktionsoperatoren übertragenen Spannung) und von der Funktion des Scheitelfaktors dieser Spannung abhängig.

Aus Obigem ergibt sich, dass die Gleichungen (14), (18) und (19) auch bei nichtsinusförmigen periodischen Eingangsspannungen gelten, natürlich unter der Voraussetzung, dass die Amplitudenfehler des Multiplizierers ($\delta_M K_M$), des Quadrierers ($\delta_Q K_Q$) und des Effektivwertwandlers ($\delta_E K_E$), sowie den in diesen Gleichungen auftretenden Phasenwinkelfehler des Multiplizierers (Θ) von der Frequenz der Eingangsspannungen abhängig macht, und dass die Scheitelfaktoren der Verlaufe der Eingangsspannungen die zulässigen Werte für diese Operatoren nicht überschreiten.

Die auf dem Markt erhältlichen integrierten Analogmultiplizierer und Analogquadrierer sowie die integrierten Effektivwertwandler haben kleine Amplitudenfehler im Frequenzband bis zu einigen hundert Kilohertz. Man kann also annehmen, dass diese Fehler von der Frequenz unabhängig sind. Der Phasenwinkelfehler der Multiplizierer im Frequenzband ist verhältnismässig klein — kaum einige Kilohertz. Bei grösseren Frequenzen muss man die Abhängigkeit des Phasenwinkelfehlers des Multiplizierers von der Frequenz der Eingangsspannungen berücksichtigen, oder man kompensiert diesen Fehler unter Anwendung des geraden Phasenschiebers (*RC*-Schaltung) in einem der Eingangskanäle des Multiplizierers.

SCHRIFTTUM

1. J. Bazali, *Fehlerdarstellung bei Analog-Multiplikatoren*, Elektronik, 1973, H. 12.
2. G. C. W. Imbens, *Analogmultiplizierer lösen viele Messprobleme*, Elektronik, 1978, H. 4.
3. E. Janke und F. Emde, *Tablicy funkcji s formułami i kriwymi* [*Die Tabeln der Funktionen mit Formeln und Kurven*], Fizmatgiz, Moskau 1959.
4. *Katalogen der Firmen ANALOG DEVICES und BURR BROWN.*
5. *Nonlinear Circuits Handbook. Designing with analog function modules and IC's Analog Devices*, Norwood, Mass., 1974.
6. I. M. Ryzik, I. S. Gradsztejn, *Tablicy integrałow, sum, rjadow i proizwiedienij* [*Die Tabeln der Integralen, Summen, Reihen und Ableitungen*], Gosudarstwiennoje Izd., Moskau-Leningrad 1951,
7. Cz. Szczepaniak, *Mnożniki analogowe elektryczne* [*Elektrische Analogmultiplizierer*], Elektrotechnika, Biuletyn Informacyjny, Instytut Elektrotechniki — Verlag, 1974, nr 4.
8. Cz. Szczepaniak, *Synteza układów analogowych przetworników pomiarowych wielkości elektrycznych* [*Synthese der Schaltungen der Analogmessumformer elektrischer Grössen*], Prace Instytutu Elektrotechniki, 1976, nr 97.
9. U. Tietze, Ch. Schenk, *Analogmultiplizierer mit Stromverteilungssteuerung*, Elektronik, 1971, H. 6.
10. U. Tietze, Ch. Schenk, *Monolitischer Baustein multipliziert, dividiert, quadriert, radiziert*, Elektronik, 1973, H. 9.
11. Ł. I. Wołgin, *Zawisimost pogresznosti izmierenija effektiwnogo znaczenija naprażenij ot wida woltampiernoj charakteristiki detektora* [*Abhängigkeit des Messfehlers der Effektivwertspannungen von der Form der Kennlinien des Gleichrichters*], Priborostrojenije IWUZ, 1964, nr 3.
12. Wong Yu Jen, W. E. Ott, *Function Circuits*, Design and applications, McGraw-Hill Book Co., Burr-Brown, New York 1976.
13. M. Zierpel, *Quadrierer, Radizierer, Dividierer*, Elektronik, 1978, H. 11.

C. SZCZEPANIAK

ANALOG COMPUTING TRANSDUCERS FOR ELECTRICAL QUANTITIES

Summary

Integrated analog function circuits, in particular analog multipliers and *RMS* converters, make it possible to construct electronic measuring instruments (including transducers) for electrical quantities, containing analog function circuits carrying out analog mathematical operations upon electrical signals according to definitional equations of the electrical quantities. In the paper the operational circuits for converting about 20 electrical quantities into *DC* voltage are presented. Further, in the paper the theoretical and practical equations of curves for the converting of the function and auxiliary operators of those circuits are given.

C. SZCZEPANIAK

CONVERTISSEURS ANALOGIQUES OPÉRATIONNELS DE MESURE DES GRANDEURS ÉLECTRIQUES

Résumé

Les circuits analogiques fonctionnels intégrés, accessibles au marché, surtout les multiplicateurs analogiques et convertisseurs de la valeur efficace, créent la possibilité de construction des appareils électroniques de mesure (aussi des transducteurs de mesure des grandeurs électriques), basés sur des systèmes opérationnels effectuant des opérations mathématiques analogiques sur les signaux électriques selon les équations définissant des grandeurs électriques. L'article présente les systèmes opérationn els transformant plus de 20 grandeurs électriques en tension constante et donne les équations théoriques et pratiques des caractéristiques de conversion des opérateurs fonctionnels et auxiliaires de ces systèmes.

C. SZCZEPANIAK

ANALOGOWE OPERACYJNE PRZETWORNIKI POMIAROWE WIELKOŚCI ELEKTRYCZNYCH

Streszczenie

Dostępne na rynku scalone analogowe układy funkcyjne, w szczególności mnożniki analogowe i konwertery wartości skutecznej, umożliwiają budowę elektronicznych urządzeń pomiarowych (w tym przetworników pomiarowych wielkości elektrycznych) opartych na układach operacyjnych wykonujących analogowe operacje matematyczne na sygnałach elektrycznych według równań definicyjnych wielkości elektrycznych. W artykule przedstawiono układy operacyjne przetwarzające ponad 20 wielkości elektrycznych na napięcie stałe oraz podano teoretyczne i praktyczne równania charakterystyk przetwarzania operatorów funkcyjnych i pomocniczych tych układów.

Ч. ЩЕПАНЯК

АНАЛОГОВЫЕ ОПЕРАЦИОННЫЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Резюме

Интегральные аналоговые функциональные схемы особенно аналоговые умножители и конвертеры эффективного значения дают возможность построения электронных измерительных устройств (в том числе измерительных преобразователей для электрических величин) содержащих операционные схемы реализующие аналоговые математические операции на электрических сигналах согласно дефиниционным уравнениям электрических величин. Представлены операционные схемы преобразующие свыше 20 электрических величин на напражения постоянного тока, а также теоретические и практические уравнения характеристик преобразования функциональных и вспомагательных операторов этих схем.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1984, 30, z. 1, ss. 31-40

621.372.6

Formułowanie równań stanu N-wrotnika metodą Rosenbrocka

STANISŁAW BOLKOWSKI (WARSZAWA), MAREK SIWIŃSKI (WARSZAWA),
EWA WOLNIEWICZ (WARSZAWA)

Instytut Elektrotechniki Teoretycznej i Miernictwa Elektrycznego
Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 19.1.1982

W pracy przedstawiono metodę formułowania równań stanu N-wrotnika. Metoda ta — zwana w artykule metodą R' — stosuje się do przypadku $q > p$, w przeciwieństwie do metody przekształcenia t, ograniczonej do przypadków $q \leqslant p$. Składa się z czterech etapów, z których każdy polega na odpowiednim zastosowaniu jednego z trzech rodzajów równoważności układów, zdefiniowanych przez Rosenbrocka. W wyniku otrzymuje się czwórkę macierzy $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$. Pokazano na przykładzie, że po pierwsze możliwe jest rozszerzenie metody na obwody aktywne, po drugie między uzyskanymi zmiennymi stanu a zmiennymi stanu przyjmowanymi zwykle w teorii obwodów istnieje liniowa zależność.

Rozważmy najpierw N-wrotniki liniowe, stacjonarne i pasywne. W świetle charakterystyki pojęcia N-wrotnika, zawartej w [1] i w [5], *N-wrotnikiem transmitancyjnym* nazywać będziemy każde rozcięcie obwodu, takie że:

a) rozcięcie daje podobwód o $2N$ końcówkach ($N \geqslant 2$);
b) końcówki są uporządkowane prądowo w pary spełniające warunek regularności, tzn. gdy danej parze końcówek odpowiada para prądów (i, i'), to $i = -i'$;
c) wśród N par końcówek wyróżnionych jest p par wejściowych i $q = N-p$ par wyjściowych, przy czym zachodzić muszą nierówności: $1 \leqslant p \leqslant N-1$;
d) dana jest *macierz transmitancji* wymiaru $q \times p$, wiążąca transformatę Laplace'a wektora sygnałów wejściowych z transformatą Laplace'a wektora sygnałów wyjściowych.

Wektor sygnałów wejściowych oznaczamy przez $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), \ldots, u_p(t)]^T$, gdzie $u_i(t)$ jest znanym napięciem na i-tych wrotach wejściowych albo znanym prądem tych wrót. Analogicznie, w wektorze $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), \ldots, y_q(t)]^T$ sygnałów wyjściowych $y_j(t)$ jest nieznanym napięciem albo prądem wrót wyjściowych o numerze j. Przy zerowych warunkach początkowych transformaty wektorów $\mathbf{u}(t)$ i $\mathbf{y}(t)$ wiąże równanie

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s), \tag{1}$$

gdzie $\mathbf{G}(s)$ jest *macierzą transmitancji*, wymienioną w punkcie d) definicji N-wrotnika transmitancyjnego.

W artykule zostanie przedstawiona metoda pozwalająca na uzyskanie *opisu stanowego* N-wrotnika przy zadanej jego macierzy transmitancji, tzn. na uzyskanie równań o postaci:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie $\mathbf{x}(t)$ jest n-wymiarowym wektorem stanu, **A**, **B**, **C**, **D** — macierzami o elementach rzeczywistych.

Metoda ta oparta jest na wynikach Rosenbrocka z zakresu ogólnej teorii sterowania (por. [7], [8], [9], [10], [6]) i dlatego będziemy ją dalej nazywać *metoda Rosenbrocka*. Istotne jest, że znajomość struktury wewnętrznej N-wrotnika przy formułowaniu równań stanu metodą Rosenbrocka nie jest wcale potrzebna. W przypadku nieznanej struktury uzyskamy równania dla zmiennych stanu abstrakcyjnych, tzn. wolnych od konkretnej interpretacji elektrycznej.

Niech $\mathbf{G}(s)$ będzie macierzą transmitancji danego N-wrotnika. Jedynym ograniczeniem, nałożonym na macierz $\mathbf{G}(s)$, jest jej *regularność w nieskończoności*. Metoda Rosenbrocka nie stosuje się bowiem do niewłaściwych macierzy transmitancji, tzn. takich, które mają bieguny w nieskończoności ([6], [10]). Ograniczenie to w niewielkim stopniu zmniejsza klasę rozważanych N-wrotników, gdyż większość obwodów elektrycznych (por. [10]) — ogólnie: układów fizycznych — opisanych jest przez właściwe lub półwłaściwe macierze transmitancji (por. [6], [10]).

Wyjściową macierz transmitancji przedstawić można w postaci sumy dwóch składowych (por. [3])

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_w(s) + \mathbf{G}_r, \tag{3}$$

gdzie $\mathbf{G}_w(s)$ jest *właściwą macierzą transmitancji*, gdyż jej elementy są ułamkami algebraicznymi właściwymi, a $\mathbf{G}_r$ — macierzą o elementach rzeczywistych, taką że

$$\mathbf{G}_r = \lim_{s\to\infty} \mathbf{G}(s). \tag{4}$$

Związek macierzy transmitancji z równaniami stanu wyraża równanie

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{1}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}, \tag{5}$$

które — jak wiadomo — wyprowadza się poddając równania (3) transformacji Laplace'a przy zerowych warunkach początkowych i wyznaczając $\mathbf{Y}(s)$ jako funkcję $\mathbf{U}(s)$. Łatwo zauważyć, że

$$\mathbf{G}_w(s) = \mathbf{G}(s\mathbf{1}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}, \tag{6a}$$

$$\mathbf{G}_r = \mathbf{D}. \tag{6b}$$

W pracach [8] i [6] przedstawiono ogólną metodę wyznaczania uporządkowanej trójki macierzy (**A**, **B**, **C**) na podstawie danej właściwej macierzy transmitancji $\mathbf{G}_w(s)$. Ograniczenie rozważań do macierzy właściwych uzasadnia się tam wielkością układów fizycznych o tego typu macierzach transmitancji. Jednakże N-wrotniki mogą mieć macierze transmitancji półwłaściwe, tj. takie, z których daje się wyodrębnić niezerową macierz $\mathbf{G}_r$ (z założenia nie bierzemy pod uwagę niewłaściwych macierzy transmitancji). Jak wynika z równań (4) i (6b) czwartą macierz **D**, zwaną macierzą transmisyjną, znajdujemy jako granicę w nieskończoności macierzy transmitancji $\mathbf{G}(s)$.

Pozostałe macierze: **A**, **B**, **C** wyznaczamy opierając się na metodzie Rosenbrocka z prac [8] i [6], zwanej w [6] metodą przekształcenia t. W metodzie tej punktem wyjścia jest jednak właściwa macierz transmitancji, w której liczba wierszy nie przewyższa liczby kolumn, czyli zgodnie z przyjętymi wcześniej oznaczeniami: $q \leqslant p$. Oznacza to ograni-

czenie rozważań do układów, w których liczba wyjść nie przewyższa liczby wejść. Jeżeli bowiem $q > p$, to $q-p$ wielkości wyjściowych można przedstawić w postaci kombinacji pozostałych p wielkości wyjściowych, czyli w postaci pośredniej zależności od wejść. Dla N-wrotników ograniczenie takie nie wydaje się celowe, bo np. w przypadku obwodu o jednym źródle energii istotne mogą być z elektrycznego punktu widzenia bezpośrednie zależności pomiędzy napięciem lub prądem źródła a napięciami na wielu elementach obwodu. Wtedy liczba wyjść przewyższa liczbę wejść. Warunek $q = p$ byłby tu spełniony, gdyby zastąpić pojędyncze źródło energii równoważną baterią q źródeł połączonych równolegle bądź szeregowo. Nieunikniony byłby wtedy jednak wzrost wymiaru macierzy transmitancji, jak i macierzy **B**, **C**, **D** z równań stanu, co w oczywisty sposób komplikowałoby obliczenia.

Opisanych komplikacji można uniknąć, wprowadzając nieco ogólniejszą wersję metody Rosenbrocka, w której warunek $q \leqslant p$ zostaje uchylony. Tę uogólnioną metodę nazywać będziemy krótko *metodą R'*. Metoda Rosenbrocka, tak jak metoda R', prowadzi do realizacji minimalnej macierzy $\mathbf{G}_w(s)$, czyli do uzyskania takiej trójki (**A**, **B**, **C**), dla której liczba zmiennych stanu jest najmniejsza. Zgodnie z twierdzeniem Kalmana, przytoczonym w [6], najmniejsza liczba zmiennych stanu jest równa stopniowi McMillana $\delta_M\{\mathbf{G}_w(s)\}$ właściwej macierzy transmitancji. Stopniem McMillana $\delta_M\{\mathbf{G}_w(s)\}$ właściwej macierzy transmitancji nazywa się stopień jej wielomianu charakterystycznego. Wielomian charakterystyczny zaś jest to najmniejszy wspólny mianownik wszystkich minorów macierzy $\mathbf{G}_w(s)$, będący wielomianem monicznym.

Niech $M(s)$ będzie najmniejszym wspólnym mianownikiem wszystkich elementów macierzy $\mathbf{G}_w(s)$. Wtedy

$$\mathbf{G}_w(s) = \frac{1}{M(s)}\mathbf{L}(s),$$

gdzie $\mathbf{L}(s)$ nazywa się macierzą licznikową obwodu (por. [6]). Jest to macierz wymiaru $q \times p$ o elementach wielomianowych. Oznaczmy ponadto przez n stopień macierzy $\mathbf{G}_w(s)$

$$n = \delta_M\{\mathbf{G}_w(s)\}.$$

W metodzie R' za punkt wyjścia przyjmujemy macierz:

$$q\left\{\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_q & \overbrace{\mathbf{0}}^{p} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{G}_w(s) \end{array}\right]\right. . \tag{7}$$

Macierz ta drogą przekształceń równoważności (por. [3], [6], [7], [8], [9], [10]) — przez przekształcenie t oraz przez zmiany wymiaru q — doprowadzamy do postaci podstawowej ([10], [3]), czyli — według nomenklatury z [6] — do macierzy systemowej typu 1

$$\left[\begin{array}{c|c} s\mathbf{1}_n - \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{array}\right]. \tag{8}$$

Jest to zawsze możliwe na mocy twierdzeń udowodnionych w pracach [8], [10], [6].

Metoda R' składa się z czterech etapów. W pierwszym etapie z macierzy (7) otrzymuje się macierz o elementach wielomianowych, wykonując następujące przekształcenia

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_w(s) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{1}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{1}_q & \mathbf{G}_w(s) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{1}_q & -\mathbf{G}_w(s) \\ \mathbf{1}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -M(s)\mathbf{1}_q & \mathbf{L}(s) \\ \mathbf{1}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M(s)\mathbf{1}_q & \mathbf{L}(s) \\ -\mathbf{1}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Z teorii macierzy wiadomo ([4], [3], [6], [10]), że dowolną macierz wielomianową $\mathbf{L}(s)$ o wymiarach $q \times p$ rzędu $r \leqslant \min(q, p)$ można przedstawić w postaci

$$\mathbf{L}(s) = \mathbf{M}_s(s)\mathbf{S}(s)\mathbf{N}_s(s).$$

Macierz $\mathbf{S}(s)$ o wymiarach $q \times p$ jest tu postacią kanoniczną Smitha macierzy $\mathbf{L}(s)$

$$\mathbf{S}(s) = \begin{bmatrix} E_1(s) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_2(s) & & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & \dots & E_r(s) & \dots & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

a $\mathbf{M}_s(s)$ i $\mathbf{N}_s(s)$ są wielomianowymi macierzami unimodularnymi o wymiarach $q \times q$ i $p \times p$. Drugi etap przejścia od (7) do (8), w którym wykorzystana jest właśnie postać Smitha, rozpoczyna się od następujących dwu przekształceń

$$\begin{bmatrix} M(s)\mathbf{1}_q & \mathbf{M}_s(s)\mathbf{S}(s)\mathbf{N}_s(s) \\ -\mathbf{1}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M_s^{-1}(s)M(s) & \mathbf{S}(s)\mathbf{N}_s(s) \\ -\mathbf{1}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M(s)\mathbf{1}_q & \mathbf{S}(s)\mathbf{N}_s(s) \\ -\mathbf{M}_s(s) & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Dzieląc teraz wiersz i podmacierzy $[M(s)\mathbf{1}_q, \mathbf{S}(s)\mathbf{N}_s(s)]$ przez wspólny czynnik wielomianu $M(s)$ i wielomianu inwariantnego $E_i(s)$ z przekątnej macierzy $\mathbf{S}(s)$ dla $i = 1, 2, \dots, r$, a pozostałe wiersze — od $r+1$ do q — przez $M(s)$, otrzymujemy macierz

$$\left[\begin{array}{cc|c} \operatorname{diag}[\Psi_1(s), \dots, \psi_r(s)] & \mathbf{0} & \left[\begin{array}{cc} \operatorname{diag}[\varepsilon_1(s), \dots, \varepsilon_r(s)] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{(q-r)\times(p-r)} \end{array}\right] \cdot \mathbf{N}_s(s) \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{q-r} & \\ \hline -\mathbf{M}_s(s) & & \mathbf{0} \end{array}\right] \tag{9}$$

Wielomiany $\psi_i(s)$ i $\varepsilon_i(s)$ w macierzy (9) są wielomianami względnie pierwszymi (por. [10], [8], [6], [3]).

Stosując metodę przekształcenia t dochodzi się do macierzy, której budowa ze względu na warunek $q \leqslant p$ jest prostsza niż macierzy (9). Dlatego w metodzie R' należy wykonać pewne dodatkowe operacje w stosunku do metody przekształcenia t. Po pierwsze, wymnażamy iloczyn macierzy, stanowiący prawą górną podmacierz macierzy (9). Następnie oznaczamy przez $\mathbf{N}_s^*(s)$ macierz powstałą z $\mathbf{N}_s(s)$ przez wykreślenie z niej $(p-r)$ ostatnich wierszy i przestawiamy q pierwszych wierszy i q pierwszych kolumn w macierzy (9), uzyskując macierz

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{1}_{q-r} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \operatorname{diag}[\Psi_1(s), \dots, \Psi_r(s)] & \operatorname{diag}[\varepsilon_1(s), \dots, \varepsilon_r(s)] \cdot \mathbf{N}_s^*(s) \\ \hline -\mathbf{M}_s^*(s) & & \mathbf{0} \end{array}\right].$$

Kończy to drugi etap przekształceń.

W pracy [6] wprowadzona została za Kalmanem równoważna ze sformułowaną tu wcześniej definicja wielomianu charakterystycznego $w[\mathbf{G}_w(s)]$ macierzy $\mathbf{G}_w(s)$, mianowicie

$$w[\mathbf{G}_w(s)] \stackrel{\text{df}}{=} \prod_{i=1}^{r} \psi_i(s).$$

Jeżeli przez δ_i oznaczymy stopień wielomianu $\psi_i(s)$, to stopień macierzy transmitancji $\delta_M\{\mathbf{G}_w(s)\} = \sum_{i=1}^{r} \delta_i$. Jest on jednocześnie równy liczbie zmiennych stanu n w realizacji minimalnej macierzy transmitancji $\mathbf{G}_w(s)$.

W trzecim etapie sprawdzamy najpierw relację między q a n. Jeżeli q jest mniejsze od n, to zwiększamy wymiar q do $q' = n$. Jeżeli natomiast q jest nie mniejsze od n, to wymiar q zachowujemy ten sam, czyli $q' = q$ (inaczej niż w metodzie przekształcenia t). Podmacierz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_{q'-r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \operatorname{diag}[\Psi_1(s), \ldots, \Psi_r(s)] \end{bmatrix}$$

doprowadzamy teraz do postaci kanonicznej Smitha. Następnie, tak jak w pracy [6], przestawiamy różne od jedności czynniki inwariantne postaci Smitha tak, by uzyskać podmacierz pseudodiagonalną

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1(s) & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2(s) & \ldots & \mathbf{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{0} & & \ldots & \mathbf{Q}_h(s) \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Klatki $\mathbf{Q}_i(s)$ są postaciami kanonicznymi Smitha dla macierzy $s\mathbf{1}-\mathbf{A}_i$: macierze $\mathbf{A}_i$ są macierzami stowarzyszonymi czynników inwariantnych o numerach i, h zaś jest liczbą różnych od jedności czynników inwariantnych. W [6] podane są za Rosenbrockiem [8] ogólne wzory na macierze przekształceń sprowadzających podmacierz (10) do postaci:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_{q'-n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & s\mathbf{1}_n - \mathbf{A}' \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Inny algorytm przejścia od podmacierzy (10) do (11) podano w [13] w dowodzie konstruktywnym lematu do jednego z twierdzeń Rosenbrocka.

W czwartym, ostatnim etapie macierz

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{1}_{q'-n} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & s\mathbf{1}_n - \mathbf{A}' & \hat{\mathbf{N}}_s(s) \\ \hline & -\hat{\mathbf{M}}_s(s) & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

przekształcamy do postaci podstawowej

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} s\mathbf{1}_n & -\mathbf{A} & \mathbf{B} \\ & -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

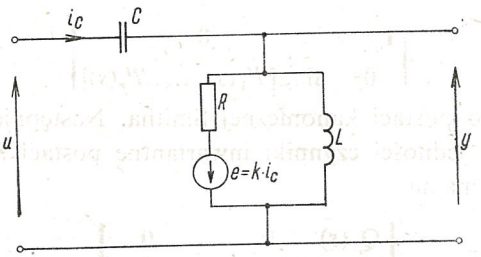
W tym celu odejmujemy pierwsze q kolumn (q wierszy) pomnożone przez odpowiednio dobrane współczynniki wielomianowe od ostatnich p kolumn (q wierszy) tak, by te ostatnie

p kolumn (q wierszy) nie zależało od zmiennej s. Otrzymujemy w ten sposób macierz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_{q'-n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}(s) \end{bmatrix},$$

której podmacierzą jest szukana podstawowa macierz obwodu. Z postaci podstawowej można już bezpośrednio odczytać macierze **A**, **B**, **C**. Trójka macierzy **A**, **B**, **C** wraz z wcześniej wyznaczoną macierzą **D** stanowi komplet macierzy konieczny i wystarczający do sformułowania równań stanu N-wrotnika transmitancyjnego.

Powstaje teraz pytanie, czy metoda R' ma zastosowanie również poza zbiorem N-wrotników transmitancyjnych pasywnych. Odpowiedzią pozytywną na to pytanie jest teza: istnieją N-wrotniki transmitancyjne aktywne, których macierz transmitancji przekształca się metodą R' do postaci podstawowej.



Rys. 1. Czwórnik aktywny, do którego stosuje się metoda R'

Dowód tej tezy przeprowadzimy przez przykład. Rozważmy czwórnik z rys. 1, w którym źródło napięciowe e jest sterowane prądem i_C zgodnie z zależnością: $e = ki_C$. Załóżmy dodatkowo, że współczynnik sterowania k jest różny od R. Transmitancja napięciowa $G(s)$ wyraża się wtedy następującym ułamkiem

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2}{s^2+s\cdot 1/C(R-k)+R/LC(R-k)}.$$

Rozkładając $G(s)$ na transmitancję właściwą i składową stałą otrzymujemy

$$G_w(s) = \frac{-s\cdot 1/C(R-k)-R/LC(R-k)}{s^2+s\cdot 1/C(R-k)+R/LC(R-k)} \quad \text{oraz } G_r = 1,$$

a stąd dalej macierz transmisyjną

$$D = 1.$$

Wielomianem charakterystycznym jest tu po prostu mianownik transmitancji

$$w[G_w(s)] = M(s) = s^2+s\cdot 1/C(R-k)+R/LC(R-k),$$

a zatem stopień transmitancji właściwej

$$n = \delta_M\{G_w(s)\} = 2.$$

Macierz licznikowa obwodu ma wymiary 1×1

$$L(s) = -s\cdot 1/C(R-k)-R/LC(R-k).$$

W pierwszym etapie macierz wymierną

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{-s\cdot 1/C(R-k)-R/LC(R-k)}{s^2+s\cdot 1/C(R-k)+R/LC(R-k)} \end{bmatrix}$$

przekształcamy według schematu z poprzedniego paragrafu w macierz wielomianową

$$\begin{bmatrix} s^2+s\cdot 1/C(R-k)+R/LC(R-k) & -s\cdot 1/C(R-k)-R/LC(R-k) \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Etap drugi pomijamy, gdyż uzyskana macierz spełnia warunki wyjściowe etapu trzeciego. Ponieważ $q < n$ $(q = 1, n = 2)$, zatem zwiększamy wymiar q do $q' = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0, & s^2+s\cdot 1/C(R-k)+R/LC(R-k), & -s\cdot 1/C(R-k)-R/LC(R-k) \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podmacierz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2+s\cdot 1/C(R-k)+R/LC(R-k) \end{bmatrix}$ jest już w postaci kanonicznej Smitha, więc nie potrzebne są dodatkowe przekształcenia. Macierzą stowarzyszoną **A'** wielomianu $s^2+s\cdot 1/C(R-k)+R/LC(R-k)$ jest macierz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -R/LC(R-k) & -1/C(R-k) \end{bmatrix}.$$

Stosując teraz bądź algorytm z [6], [8], bądź z [13] otrzymujemy następującą macierz obwodu

$$\left[\begin{array}{cc|c} s & -1 & 0 \\ \dfrac{R/LC(R-k)}{-1} & \dfrac{s+1/C(R-k)}{0} & \dfrac{-s\cdot 1/C(R-k) \quad -R/LC(R-k)}{0} \end{array}\right].$$

W etapie czwartym doprowadzimy prawą górną podmacierz do postaci niezależnej od zmiennej s. Szukana postać podstawowa macierzy obwodu jest więc następująca

$$\mathbf{P}(s) = \left[\begin{array}{cc|c} s & -1 & -1/C(R-k) \\ \dfrac{R/LC(R-k)}{-1} & \dfrac{s+1/C(R-k)}{0} & \dfrac{-R/LC(R-k) \quad +1/C^2(R-k)^2}{0} \end{array}\right].$$

Równania stanu czwórnika z przykładu przy warunku $k = R$, wyprowadzone metodą R', mają zatem postać

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ -R/LC(R-k), & -1/C(R-k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/C(R-k) \\ -R/LC(R-k)+1/C^2(R-k)^2 \end{bmatrix} u, \quad (12)$$

$$y = [1 \;\; 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [1]u.$$

W przypadku szczególnym, gdy współczynnik sterowania k ma wartość R, obniża się rząd n_a obwodu: $n_a = 1$. Wiele wskazuje na to, że również i w tym przypadku można efektywnie zastosować metodę R'. W wywodzie przy warunku $k = R$ pojawiają się jednak

pewne kwestie, które wymagałyby uprzedniego wyjaśnienia na gruncie teorii sterowania. Obwód z rys. 1 przy $k = R$ jest bowiem szczególnym typem układu w sensie tej teorii, gdyż wejście u nie ma tu wpływu ani na stan $\mathbf{x}$ układu, ani na wyjście y. Znaczyłoby to, że dla pary $\langle u, y\rangle$ transmitancja $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$ jest zerowa.

Pozostaje do wyjaśnienia jeszcze jedna kwestia, mianowicie związek między równaniami stanu uzyskanymi metodą R' a równaniami stanu dla zmiennych stanu o interpretacji elektrycznej w przypadku jawnej struktury N-wrotnika.

Dany jest schemat wewnętrznej struktury czwórnika z przykładu. Na jego podstawie można przyjąć za zmienne stanu wielkości elektryczne: prąd w cewce i_L i napięcie na kondensatorze u_C. Zauważmy, że równania stanu dla zmiennych i_L i u_C, wyprowadzone z równań Kirchhoffa, przy założeniu $R \neq k$, różnią się od równań (12)

$$\begin{bmatrix} \dfrac{di_L}{dt} \\ \dfrac{du_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/L \\ R/C(R-k), & -1/C(R-k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 1/C(R-k) \end{bmatrix} u, \tag{13}$$

$$y = [0 \quad -1] \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + [1]u.$$

Macierz podstawowa $\mathbf{P}_e(s)$ obwodu z przykładu dla zmiennych stanu o interpretacji elektrycznej ma wobec równań (13) postać

$$\mathbf{P}_e(s) = \begin{bmatrix} s\mathbf{1} & -\mathbf{A}_e & \mathbf{B}_e \\ & -\mathbf{C}_e & \mathbf{D}_e \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} s & 1/L & 1/L \\ -R/C(R-k) & s+1/C(R-k) & 1/C(R-k) \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

a macierz podstawowa $\mathbf{P}_a(s)$ tegoż obwodu dla zmiennych abstrakcyjnych wobec równań (12) ma postać

$$\mathbf{P}_a(s) = \begin{bmatrix} s\mathbf{1} & -\mathbf{A} & \mathbf{B} \\ & -\mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} s & -1 & -1/C(R-k) \\ R/LC(R-k) & s+1/C(R-k) & -R/LC(R-k)+1/C^2(R-k)^2 \\ \hline -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Okazuje się, że prawdziwe jest następujące twierdzenie: macierze $\mathbf{P}_e(s)$ i $\mathbf{P}_a(s)$ są podobne, tzn. istnieje taka rzeczywista, nieosobliwa macierz $\mathbf{T}$, że

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\mathbf{1} & -\mathbf{A}_e & \mathbf{B}_e \\ & -\mathbf{C}_e & \mathbf{D}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\mathbf{1} & -\mathbf{A} & \mathbf{B} \\ & -\mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}.$$

Łatwo sprawdzić, że ową macierzą jest

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1/R & -C(R-k)/R \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bezpośrednią konsekwencją podobieństwa macierzy podstawowych jest liniowa zależność między zmiennymi stanu $[i_L, u_C]^T$ a $[x_1, x_2]^T$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix}.$$

W pracy przedstawiono metodę formułowania równań stanu N-wrotnika transmitancyjnego. Metoda ta — zwana w artykule metodą R' — stosuje się do przypadku gdy $q > p$, w przeciwieństwie do metody przekształcenia t. Składa się ona z czterech etapów, z których każdy polega na odpowiednim zastosowaniu jednego z trzech rodzajów równoważności układów, zdefiniowanych przez Rosenbrocka. W wyniku otrzymuje się czwórkę macierzy (**A**, **B**, **C**, **D**). Metodę R' można stosować do obliczeń maszynowych ze względu na łatwość jej algorytmizacji; wygodnie także posługiwać się nią w przypadku obliczeń ręcznych. Pokazano na przykładzie, że po pierwsze: możliwe jest rozszerzenie metody na obwody aktywne; po drugie: między uzyskanymi zmiennymi stanu a zmiennymi stanu przyjmowanymi zwykle w teorii obwodów istnieje liniowa zależność.

LITERATURA

1. S. Bolkowski, *Elektrotechnika teoretyczna, tom 1, Teoria obwodów*, w druku.
2. S. Bolkowski, E. Wolniewicz, *Opis N-wrotnika w przestrzeni stanów*, materiały V Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, Gliwice — Ustroń, 6÷8.05.1981.
3. T. Kaczorek, *Synteza liniowych układów stacjonarnych metodą przestrzeni stanów*, PWN, Warszawa 1975.
4. P. Lankaster, *Theory of Matrices*, Academic Press, New York—London 1969, przekład rosyjski: Nauka, Moskwa 1978.
5. K. Mikołajuk, Z. Trzaska, *Elektrotechnika teoretyczna, Teoria obwodów liniowych*, część 2, wyd. PW, Warszawa 1977.
6. A. Niederliński, *Układy wielowymiarowe automatyki*, WNT, Warszawa 1974.
7. H. H. Rosenbrock, *On linear system theory*, Proc. IEE, vol. 114, 1967, no. 9, pp. 1353—1359,
8. H. H. Rosenbrock, *Transformation of linear constant equations*, Proc. IEE, vol. 114, 1967, no. 4, pp. 541—544.
9. H. H. Rosenbrock, *Properties of linear constant equations*, Proc. IEE, vol. 117, 1970, np. 9 pp. 1717—1720.
10. H. H. Rosenbrock, *State-Space and Multivariable Theory*, Nelson, London 1970.
11. M. Siwiński, *Badanie dynamiki złożonych obwodów elektrycznych z zastosowaniem macierzy wielomianowych*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, 1978.
12. E. Wolniewicz, *A generalization of strict system equivalence with regard to matrices of electric circuits*, Rozprawy Elektrotechniczne, w druku.
13. E. Wolniewicz, *O stosowalności metody Rosenbrocka w teorii obwodów*, praca dyplomowa Politechnika Warszawska, 1980.

S. BOLKOWSKI, M. SIWIŃSKI, E. WOLNIEWICZ

FORMULATING STATE EQUATIONS FOR N-PORTS BY THE ROSENBROCK METHOD

Summary

The paper presents a method of formulating state equations for N-ports. This method — called here the method R' — applies to the case $q > p$, in contradistinction to the method known as „transformation t", confined to cases $q \leqslant p$. Method R' consists of four steps, each being an application of one of the three types of system equivalence defined by Rosenbrock. It leads to a quadruple of matrices (**A**, **B**, **C**, **D**). It is shown by an example that, first, an expansion on active circuits is possible; second, the state variables obtained are linearly dependent on the state variables usually adopted in circuit theory.

S. BOLKOWSKI, M. SIWIŃSKI, E. WOLNIEWICZ

FORMULATION DES ÉQUATIONS D'ÉTAT DE *N*-PORTE PAR MÉTHODE DE ROSENBROCK

Résumé

Dans l'ouvrage on a présenté la méthode de formulation d'état de *N*-porte. Cette méthode, nommée dans l'article la méthode *R'*, est applicable pour le cas de $q > p$, contrairement à la méthode de transformation *t*, limitée aux cas de $q \leqslant p$. La méthode se compose de quatre étapes. Chacune des étapes consiste en application de l'un des trois types d'équivalence des systèmes définis par Rosenbrock. On obtient, pour effet, quatre matrices (**A**, **B**, **C**, **D**). On a montré sur l'exemple, que premièrement — l'extension de la méthode sur les circuits actifs est possible et deuxièmement — il y a une dépendance linéaire entre les variables d'état, obtenues par cette méthode et les variables d'état généralement utilisées pour la théorie des circuits.

S. BOLKOWSKI, M. SIWIŃSKI, E. WOLNIEWICZ

FORMULIERUNG VON ZUSTANDSVARIABLEN FÜR *N*-TORS MITTELS ROSENBROCK-METHODE

Zusammenfassung

In dem Aufsatz wird eine Methode für die Formulierung von Zustandsvariablen für *N*-Tors dargestellt. Diese Methode — im Aufsatz *R'*-Methode genannt — kann auch im Fall $q > p$ angewendet werden im Gegensatz zu der Methode der *t*-Transformation, welche auf die Fälle $q \leqslant p$ beschränkt ist. Die *R'*-Methode besteht aus vier Etappen, deren jede in der Anwendung einer der drei Systemäquivalenzarten beruht. Als Resultat werden vier Matrizen (**A**, **B**, **C**, **D**) gewonnen. Es wird an einem Beispiel gezeigt, daß erstens eine Erweiterung auf aktive Stromkreise möglich ist; zweitens, daß die erhaltenen Zustandsvariablen von den Zustandsvariablen der Stromkreistheorie linear abhängig sind.

С. БОЛЬКОВСКИ, М. СИВИНЬСКИ, Э. ВОЛЬНИЭВИЧ

ФОРМУЛИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ ДВУХ-*N*-ПОЛЮСНИКА МЕТОДОМ РОЗЕНБРОКА

Резюме

Представлен метод формулирования уравнений состояния двух-*N*-полюсника. Этот метод — называемый в статье методом *R'* — применяется в случае $q > p$, в отличие от преобразования *t*, ограниченного для случаев $q \leqslant p$. Состоит он из четырех этапов, из каторых каждый заключается в соответствующем применении одного из видов эквивалентности определённых Розенброком. В результате получается четвёрка матриц (**A**, **B**, **C**, **D**). Показано на примере, что во-первых: метод можно расширить на активные цепи; во-вторых: между полученными переменными состояния и переменными состояния применяемыми обычно в теории цепей существует линейная зависимость.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1984, 30, z. 1, ss. 41-52

621.318.1

Model pierwszego magnesowania materiałów

JANUSZ MIGDALSKI (WARSZAWA)

Otrzymano 11.11.1981

W pracy podano model matematyczny pierwszego magnesowania materiałów umożliwiający formalne wyznaczenie krzywych pierwszego magnesowania. W modelu przyjęto, że materiał magnetyczny jest systemem fizycznym zbudowanym z wielkiej liczby elementów magnetycznych oraz ciał magnetycznych (podsystemów), które dzięki posiadanej strukturze magnetycznej wyznaczają w sposób jednoznaczny wszystkie właściwości omawianego materiału magnetycznego. Dla ilustracji prezentowanej teorii pierwszego magnesowania materiałów podano modele matematyczne pierwszego magnesowania materiałów magnetycznie twardych, o prostokątnej pętli histerezy oraz materiałów typu perminwarowego.

1. WSTĘP

Nauka o magnetyzmie, a dokładniej mówiąc nauka o magnetycznych właściwościach materiałów, pomimo swojego wielkiego dorobku naukowego, podanego chociażby w pracach [1, 3, 6, 14, 16, 17] jest w dalszym ciągu nauką empiryczną [1, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 13].

W odniesieniu do procesu magnesowania materiałów uzewnętrznia się to w ten sposób, że mimo istnienia wielu teorii procesu magnesowania na poziomie zjawisk mikroskopowych [3, 6, 9, 14, 16, 17], brak w dalszym ciągu megaskopowej (makroskopowej) teorii magnesowania materiałów [1, 2, 3, 4, 5, 10, 13, 15]. W efekcie krzywe magnesowania oraz krzywe histerezy materiałów posiadające istotne znaczenie dla zastosowań technicznych podawane są nie w formie analitycznej, lecz graficznej (wykresu) lub w postaci wzorów empirycznych. Przykładowo w pracy [5] podano kilkadziesiąt wzorów empirycznych dla krzywych magnesowania i histerezy materiałów.

W pracy niniejszej, będącej kontynuacją idei zawartych w pracy [11], rozważa się pewien model matematyczny pierwszego magnesowania materiałów umożliwiający ilościowy i jakościowy opis zjawiska pierwszego magnesowania. U podstaw rozważanego modelu matematycznego leży założenie, zgodnie z którym każdy materiał magnetyczny zbudowany jest z elementów i ciał magnetycznych o określonej strukturze magnetycznej wyznaczającej jednoznacznie jego właściwości magnetyczne. Mówiąc inaczej, materiał magnetyczny traktuje się jako system, którego podsystemami są ciała magnetyczne, natomiast elementami — elementy magnetyczne.

Elementy magnetyczne wprowadzone w pracy [11] charakteryzują się tym, że nie posiadają histerezy magnetycznej i mogą znajdować się wyłącznie w dwu wzajemnie wykluczających się stanach magnetycznych, a mianowicie: w stanie orientacji „na prawo" ($\rightarrow$) lub w stanie orientacji „na lewo" ($\leftarrow$). Natomiast ciała magnetyczne zbudowane z takich elementów, zależnie od posiadanej struktury magnetycznej, mogą posiadać histe-

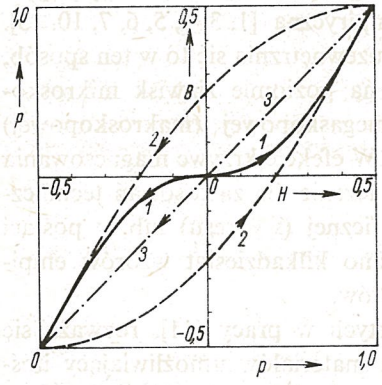
rezę i znajdować się w trzech stanach magnetycznych, nazwanych umownie stanami: a) orientacji „na prawo" (→), b) orientacji „neutralnej" (—) oraz c) orientacji „na lewo" (←).

Z analizy konkretnych modeli ciał magnetycznych przeprowadzonej w [11] stwierdzono, że zjawisko histerezy magnetycznej występuje jedynie w tych materiałach, które zbudowane są z ciał magnetycznych o trzech stanach orientacji, natomiast nie występuje zupełnie w materiałach zbudowanych z ciał magnetycznych o dwu stanach orientacji, tj. ciał o stanach orientacji „na prawo" (→) i „na lewo" (←).

Godny uwagi jest przy tym fakt, że dla materiałów bez histerezy krzywe pierwszego magnesowania i krzywe „histerezy" (magnesowania) nie są identyczne, lecz posiadają różne przebiegi i różne charakterystyki liczbowe (patrz rys. 4).

2. OPIS FENOMENOLOGICZNY PIERWSZEGO MAGNESOWANIA MATERIAŁÓW

Przystępując do opisu fenomenologicznego procesu magnesowania materiałów, a zwłaszcza pierwszego magnesowania, tj. magnesowania zaczynającego się w warunkach początkowych zerowych $B = H = 0$, rozważmy najprostszą unormowaną (bezwymiarową) krzywą pierwszego magnesowania materiału magnetycznego typu Rayleigha podaną na rys. 1.



Rys. 1. Unormowane krzywe pierwszego magnesowania (*1*), histerezy (*2*) i średniego magnesowania (*3*) dla materiału magnetycznego typu Rayleigha otrzymane drogą teoretyczną

Cechą charakterystyczną tej krzywej, jak również innych krzywych pierwszego magnesowania, jest to, że składają się one z dwóch symetrycznych części, a mianowicie: a) krzywej magnesowania „na prawo" (→) oraz b) krzywej magnesowania „na lewo" (←) dających się zapisać analitycznie

$$B = f(H) = \begin{cases} \vec{B} = f(\vec{H}) & \text{dla} \quad 0 \leqslant \vec{H} \leqslant 0{,}5 \\ \overleftarrow{B} = f(\overleftarrow{H}) & \text{dla} \quad -0{,}5 \leqslant \overleftarrow{H} \leqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Krzywe te w punkcie $B = H = 0$ tworzą charakterystyczny punkt przegięcia nie obserwowany dla krzywych średniego magnesowania (patrz rys. 1).

Drugą istotną cechą rozważanej krzywej pierwszego magnesowania jest to, że dla warunków początkowych zerowych, tj. przy braku magnesowania materiału, zachodzą związki

$$B = f(H) = \vec{B} = f(\vec{H}) = \overleftarrow{B} = f(\overleftarrow{H}) = 0. \tag{2}$$

W ujęciu probabilistycznym odpowiada to związkom

$$P = f(p) = \vec{P} = f(\vec{p}) = \overleftarrow{P} = f(\overleftarrow{p}) = 0{,}5, \tag{3}$$

gdzie[1]:

$$\vec{p}+\overleftarrow{p} = 1, \quad \vec{p} = \overleftarrow{p} = 0{,}5, \tag{4}$$

$$\vec{P}+\overleftarrow{P} = 1, \quad \vec{P} = \overleftarrow{P} = 0{,}5. \tag{5}$$

Fizycznie natomiast oznacza to, że wszystkie ciała magnetyczne rozważanego materiału, podobnie jak ich elementy składowe, mogą znajdować się jedynie w dwu stanach orientacji, a mianowicie w stanie orientacji „na prawo" z prawdopodobieństwem $\vec{P} = \vec{p} = 0{,}5$ oraz w stanie orientacji „na lewo" z prawdopodobieństwem $\overleftarrow{P} = \overleftarrow{p} = 0{,}5$. Mówiąc inaczej, dla warunków początkowych zerowych „elementy" i „ciała" magnetyczne mają maksymalne szanse wyboru własnego kierunku orientacji wynoszące

$$P = p = \vec{P} = \vec{p} = \overleftarrow{P} = \overleftarrow{p} = 0{,}5. \tag{6}$$

Z faktu symetrii krzywych pierwszego magnesowania $\vec{B} = f(\vec{H})$ oraz $\overleftarrow{B} = f(\overleftarrow{H})$ możemy wnioskować, że proces magnesowania materiału „na prawo" i „na lewo" przebiega w sposób identyczny.

W wyniku przyłożenia zewnętrznego pola magnetycznego o natężeniu $\vec{H} > 0$ nastąpi wzrost prawdopodobieństwa orientacji wszystkich elementów i ciał magnetycznych „na prawo" z równoczesnym spadkiem prawdopodobieństwa ich orientacji „na lewo". Przy dostatecznie dużej wartości pola magnesującego równej wartości krytycznej $\vec{H} = \vec{H}_k = 0{,}5$ wszystkie elementy i ciała magnetyczne zostaną zorientowane „na prawo", przy czym zjawisko to zajdzie z prawdopodobieństwem równym jedności. Dla przeciwnego kierunku magnesowania proces orientacji elementów i ciał magnetycznych będzie przebiegał analogicznie.

W ujęciu statystycznym[2] proces magnesowania materiału „na prawo" lub „na lewo" można sobie wyobrazić jako proces reorientacji jego N ciał magnetycznych. Jeżeli mamy do czynienia z pierwszym magnesowaniem, to dla materiału magnetycznego średnie liczby ciał mangetycznych zorientowane „na prawo" lub „na lewo" są sobie równe i wynoszą $\vec{N} = \overleftarrow{N} = 0{,}5N$. W wyniku przyłożenia zewnętrznego pola magnetycznego o wartości $\vec{H} > 0$ średnia liczba ciał magnetycznych zorientowanych „na prawo" zwiększy się, $\vec{N} > 0{,}5 > \overleftarrow{N}$, natomiast średnia liczba ciał magnetycznych zorientowanych „na lewo" odpowiednio zmniejszy się ($\overleftarrow{N} < 0{,}5 < \vec{N}$), przy czym ogólna liczba ciał magnetycznych będzie taka sama i równa $\vec{N}+\overleftarrow{N} = N$. Przy dostatecznie dużej wartości pola magnesującego równej wartości krytycznej $\vec{H} = \vec{H}_k$ wszystkie ciała magnetyczne zostaną zorientowane „na prawo" $\vec{N} = N$, w wyniku czego materiał magnetyczny znajdzie się w stanie nasycenia.

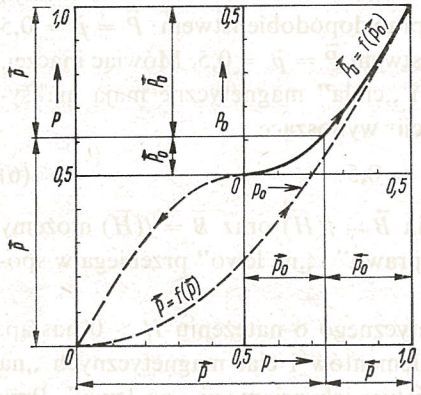
[1] Obszerne omówienie podanych symboli podano w pracy [11].

[2] Obszerne omówienie metod statystycznych dla potrzeb fizyki można znaleźć między innymi w pracach [18] i [19].

W przypadku, gdy znamy prawdopodobieństwa orientacji „na prawo" lub „na lewo" poszczególnych ciał magnetycznych ($P_I = P$ dla $I = 1, 2, \ldots, N$), wówczas dla ustalonej wartości P możemy wyznaczyć średnią liczbę ciał magnetycznych zorientowanych „na prawo" $\vec{N}_S = \vec{P}N$ lub „na lewo" $\overleftarrow{N}_S = \overleftarrow{P}N$.

3. MODEL MATEMATYCZNY PIERWSZEGO MAGNESOWANIA MATERIAŁÓW

Z opisu procesu pierwszego magnesowania, podanego w pkcie 2, możemy zbudować odpowiadający mu model matematyczny. W tym celu rozważmy raz jeszcze krzywe pierwszego magnesowania i histerezy „na prawo" dla materiału typu Rayleigha podane na rys. 2.



Rys. 2. Unormowane krzywe: a) pierwszego magnesowania „na prawo" $\vec{P}_o = f(\vec{p}_o)$ w układzie współrzędnych $\langle p_o, P_o \rangle$ oraz b) histerezy „na prawo" $\vec{P} = f(\vec{p})$ w układzie współrzędnych $\langle p, P \rangle$ dla materiału typu Rayleigha

Należy podkreślić, że między omawianymi krzywymi zachodzą dość istotne związki jakościowe i ilościowe, a mianowicie:

a) krzywa histerezy „na prawo", dana wzorem $\vec{P} = f(\vec{p})$, opisuje proces reorientacji „na prawo" wszystkich ciał magnetycznych materiału w liczbie N, które uprzednio były zorientowane „na lewo",

b) krzywa pierwszego magnesowania, dana wzorem $\vec{P}_o = f(\vec{p}_o)$, opisuje proces reorientacji „na prawo" wszystkich ciał magnetycznych materiału w liczbie $0{,}5N$, które uprzednio były zorientowane „na lewo".

Z podanych faktów wynika, że każda krzywa pierwszego magnesowania materiału może być wyrażona odpowiednio unormowaną krzywą histerezy (i przeciwnie).

Dla procesu pierwszego magnesowania materiału przedstawionego graficznie na rys. 2 możemy zatem napisać następujące związki:

a) przed unormowaniem krzywej pierwszego magnesowania

$$\vec{P}_o = f(\vec{p}_o), \quad 0 \leqslant \vec{p}_o \leqslant 0{,}5; \quad 0 \leqslant \vec{P}_o \leqslant 0{,}5, \tag{7}$$

$$\vec{p}_o + \overleftarrow{p}_o = 0{,}5, \quad \vec{P}_o + \overleftarrow{P}_o = 0{,}5, \tag{8}$$

$$2\vec{p}_o + 2\overleftarrow{p}_o = 1, \quad 2\vec{P}_o + 2\overleftarrow{P}_o = 1, \tag{9}$$

$$\vec{p} = 0{,}5 + \vec{p}_o, \quad \vec{P} = 0{,}5 + \vec{P}_o, \tag{10}$$

b) po unormowaniu krzywej pierwszego magnesowania

$$2\vec{P}_o = f(2\vec{p}_o), \tag{11}$$

$$2(\vec{P}-0{,}5) = f[2(\vec{p}-0{,}5)] = f(2\vec{p}-1). \tag{12}$$

W wyniku redukcji wyrażenia (12) możemy napisać wzór na unormowaną krzywą pierwszego magnesowania „na prawo"

$$\vec{P} = 0{,}5+0{,}5f(2\vec{p}-1), \quad 0{,}5 \leqslant \vec{p} \leqslant 1. \tag{13}$$

Uwzględniając symetrię procesów magnesowania „na prawo" i „na lewo" oraz znane przekształcenia afiniczne typu

$$\vec{p} = 0{,}5+\vec{H}, \quad \vec{P} = 0{,}5+\vec{B}, \tag{14}$$

$$\overleftarrow{p} = 0{,}5-\overleftarrow{H}, \quad \overleftarrow{P} = 0{,}5-\overleftarrow{B}, \tag{15}$$

możemy napisać następujące uogólnione wyrażenia na krzywe pierwszego magnesowania:

$$P = f(p) = \begin{cases} \vec{P} = f(\vec{p}) = 0{,}5+0{,}5f(2\vec{p}-1), & 0{,}5 \leqslant \vec{p} \leqslant 1, \\ \overleftarrow{P} = f(\overleftarrow{p}) = 0{,}5+0{,}5f(2\overleftarrow{p}-1), & 0{,}5 \leqslant \overleftarrow{p} \leqslant 1, \end{cases} \tag{16}$$

oraz

$$B = f(H) = \begin{cases} \vec{B} = f(\vec{H}) = 0{,}5f(2\vec{H}), & 0 \leqslant \vec{H} \leqslant 0{,}5, \\ \overleftarrow{B} = f(\overleftarrow{H}) = -0{,}5f(-2\overleftarrow{H}), & -0{,}5 \leqslant \overleftarrow{H} \leqslant 0. \end{cases} \tag{17}$$

Z otrzymanych wzorów istotnie wynika, że mając dane wyrażenie na unormowaną krzywą histerezy możemy bezpośrednio napisać odpowiednie wzory na unormowane krzywe pierwszego magnesowania (i przeciwnie).

4. MODELE MATEMATYCZNE PIERWSZEGO MAGNESOWANIA NIEKTÓRYCH MATERIAŁÓW MAGNETYCZNYCH

Dla ilustracji podanych zależności matematycznych oraz praktycznych zastosowań przedstawionej teorii wyprowadzone zostaną podstawowe wzory na krzywe pierwszego magnesowania dla niektórych typowych materiałów magnetycznych, a mianowicie:
1) materiałów magnetycznie twardych,
2) materiałów o prostokątnej pętli histerezy,
3) materiałów perminwarowych.

4.1. Krzywa pierwszego magnesowania materiałów magnetycznie twardych

Zgodnie z pracą [11] materiałem magnetycznie twardym nazwano materiał zbudowany z ciał magnetycznie twardych, tj. ciał o szeregowej strukturze magnetycznej, dla którego proces histerezy magnetycznej może być opisany analitycznie wzorami:

$$P = f(p) = \begin{cases} \vec{P} = f(\vec{p}) = \vec{p}^{\,n}, & 0 \leqslant \vec{p} \leqslant 1, \\ \overleftarrow{P} = f(\overleftarrow{p}) = \overleftarrow{p}^{\,n}, & 0 \leqslant \overleftarrow{p} \leqslant 1. \end{cases} \tag{18}$$

oraz

$$B = f(H) = \begin{cases} \vec{B} = f(\vec{H}) = (0{,}5+\vec{H})^n - 0{,}5, & -0{,}5 \leqslant \vec{H} \leqslant +0{,}5, \\ \overleftarrow{B} = f(\overleftarrow{H}) = 0{,}5-(0{,}5-\overleftarrow{H})^n, & -0{,}5 \leqslant \overleftarrow{H} \leqslant +0{,}5. \end{cases} \tag{19}$$

W celu wyprowadzenia wzoru na krzywe pierwszego magnesowania przekształćmy najpierw wyrażenie (18) stosując podstawienia normalizacyjne typu:

$$\vec{p} = 2\vec{p}_o, \quad \vec{P} = 2\vec{P}_o \quad \text{oraz} \quad \overleftarrow{p} = 2\overleftarrow{p}_o, \quad \overleftarrow{P} = 2\overleftarrow{P}_o, \tag{20}$$

$$P = f(p) = \begin{cases} 2\vec{P}_o = f(2\vec{p}_o) = (2\vec{p}_o)^n, & 0 \leqslant \vec{p}_o \leqslant 0{,}5, \\ 2\overleftarrow{P}_o = f(2\overleftarrow{p}_o) = (2\overleftarrow{p}_o)^n, & 0 \leqslant \overleftarrow{p}_o \leqslant 0{,}5. \end{cases} \tag{21}$$

Ażeby jednak wrócić do podstawowego układu współrzędnych, musimy we wzorze (21) wykonać podstawienia typu:

$$\vec{p} = 0{,}5+\vec{p}_o, \quad \vec{P} = 0{,}5+\vec{P}_o \quad \text{oraz} \quad \overleftarrow{p} = 0{,}5+\overleftarrow{p}_o, \quad \overleftarrow{P} = 0{,}5+\overleftarrow{P}_o., \tag{22}$$

$$P = f(p) = \begin{cases} 2(\vec{P}-0{,}5) = f[2(\vec{p}-0{,}5)] = [2(\vec{p}-0{,}5)]^n, & 0{,}5 \leqslant \vec{p} \leqslant 1, \\ 2(\overleftarrow{P}-0{,}5) = f[2(\overleftarrow{p}-0{,}5)] = [2(\overleftarrow{p}-0{,}5)]^n, & 0{,}5 \leqslant \overleftarrow{p} \leqslant 1. \end{cases} \tag{23}$$

Upraszczając wyrażenie (23) otrzymujemy wzór

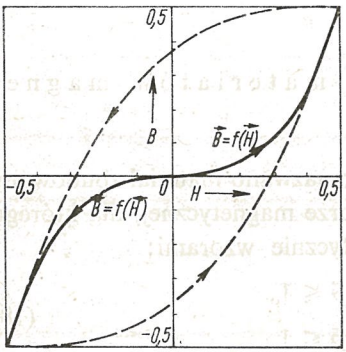
$$P = f(p) = \begin{cases} \vec{P} = 0{,}5+0{,}5(2\vec{p}-1)^n, & 0{,}5 \leqslant \vec{p} \leqslant 1, \\ \overleftarrow{P} = 0{,}5+0{,}5(2\overleftarrow{p}-1)^n, & 0{,}5 \leqslant \overleftarrow{p} \leqslant 1. \end{cases} \tag{24}$$

Uwzględniając symetrię procesów pierwszego magnesowania „na prawo" i „na lewo" oraz znane przekształcenia afiniczne typu

$$\vec{p} = 0{,}5+\vec{H}, \quad \vec{P} = 0{,}5+\vec{B} \quad \text{oraz} \quad \overleftarrow{p} = 0{,}5-\overleftarrow{H}, \quad \overleftarrow{P} = 0{,}5-\overleftarrow{B}, \tag{25}$$

możemy napisać uogólniony wzór na krzywe pierwszego magnesowania materiałów magnetycznie twardych

$$B = f(H) = \begin{cases} \vec{B} = f(\vec{H}) = 0{,}5(2\vec{H})^n, & 0 \leqslant \vec{H} \leqslant 0{,}5, \\ \overleftarrow{B} = f(\overleftarrow{H}) = -0{,}5(-2\overleftarrow{H})^n, & -0{,}5 \leqslant \overleftarrow{H} \leqslant 0. \end{cases} \tag{26}$$



Rys. 3. Unormowane krzywe pierwszego magnesowania $\vec{B} = f(\vec{H}) = 4\vec{H}^3$ oraz $\overleftarrow{B} = f(\overleftarrow{H}) = 4\overleftarrow{H}^3$ dla materiału magnetycznie twardego zbudowanego z ciał magnetycznych o trzech elementach magnetycznych

Linią przerywaną zaznaczono pętlę histerezy

Jako przykład wyznaczmy krzywe pierwszego magnesowania materiału magnetycznie twardego zbudowanego z ciał o trzech ($n = 3$) elementach magnetycznych. Korzystając z wyrażenia (26) możemy napisać

$$B = f(H) = \begin{cases} \vec{B} = f(\vec{H}) = 4\vec{H}^3, & 0 \leqslant \vec{H} \leqslant 0{,}5, \\ \overleftarrow{B} = f(\overleftarrow{H}) = 4\overleftarrow{H}^3, & -0{,}5 \leqslant \overleftarrow{H} \leqslant 0. \end{cases} \tag{27}$$

Przebiegi otrzymanych krzywych podano na rys. 3. Dla uzupełnienia na tym samym rysunku podano również pętlę histerezy rozważanego materiału.

4.2. Krzywa pierwszego magnesowania materiałów o prostokątnej pętli histerezy

Materiałem o prostokątnej pętli histerezy nazwano materiał zbudowany z ciał magnetycznych o strukturze progowej, którego proces histerezy magnetycznej może być opisany analitycznie wzorami [11]:

$$P = f(p) = \begin{cases} \vec{P} = f(\vec{p}) = \vec{p}_i \vec{P}_{,,(k-1)\,z(n-1)\cdots} + (1-\vec{p}_i)\vec{P}_{,,kz(n-1)\cdots}, \\ \overleftarrow{P} = f(\overleftarrow{p}) = \overleftarrow{p}_i \overleftarrow{P}_{,,(k-1)\,z(n-1)\cdots} + (1-\overleftarrow{p}_i)\overleftarrow{P}_{,,kz(n-1)\cdots}, \end{cases} \tag{28}$$

oraz

$$B = f(H) = \begin{cases} \vec{B} = f(\vec{H}) = (0{,}5+\vec{H}_i)\vec{B}_{,,(k-1)\,z(n-1)\cdots} + (0{,}5-\vec{H}_i)\vec{B}_{,,kz(n-1)\cdots}, \\ \overleftarrow{B} = f(\overleftarrow{H}) = (0{,}5-\overleftarrow{H}_i)\overleftarrow{B}_{,,(k-1)z(n-1)\cdots} + (0{,}5+\overleftarrow{H}_i)\overleftarrow{B}_{,,kz(n-1)\cdots} \end{cases} \tag{29}$$

Podane wzory rekurencyjne umożliwiają wyznaczenie dowolnej krzywej pierwszego magnesowania po uprzednim dokonaniu przekształceń omówionych w pkcie 3.

Jako przykład wyznaczmy krzywe pierwszego magnesowania dla materiału zbudowanego z najprostszych ciał magnetycznych, tzn. ciał magnetycznych typu „2 z 3" [11]. Korzystając ze wzoru rekurencyjnego (28) możemy napisać znany wzór

$$P = f(p) = \begin{cases} \vec{P} = f(\vec{p}) = 3\vec{p}^2 - 2\vec{p}^3, & 0 \leqslant \vec{p} \leqslant 1, \\ \overleftarrow{P} = f(\overleftarrow{p}) = 3\overleftarrow{p}^2 - 2\overleftarrow{p}^3, & 0 \leqslant \overleftarrow{p} \leqslant 1, \end{cases} \tag{30}$$

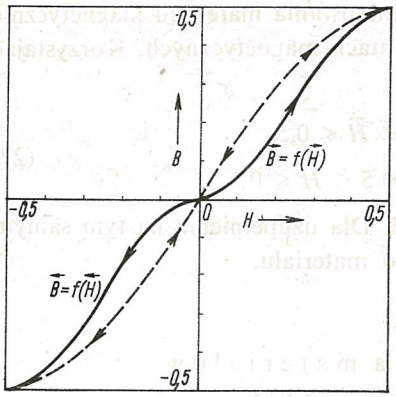
z którego po dokonaniu podstawień omówionych w pkcie 3 możemy otrzymać wyrażenie

$$P = f(p) = \begin{cases} \vec{P} = f(\vec{p}) = 3 - 12\vec{p} + 18\vec{p}^2 - 8\vec{p}^3, & 0{,}5 \leqslant \vec{p} \leqslant 1, \\ \overleftarrow{P} = f(\overleftarrow{p}) = 3 - 12\overleftarrow{p} + 18\overleftarrow{p}^2 - 8\overleftarrow{p}^3, & 0{,}5 \leqslant \overleftarrow{p} \leqslant 1. \end{cases} \tag{31}$$

Uwzględniając symetrię procesów magnesowania oraz znane przekształcenia afiniczne możemy napisać wzór na krzywą pierwszego magnesowania

$$B = f(H) = \begin{cases} \vec{B} = f(\vec{H}) = 6\vec{H}^2 - 8\vec{H}^3, & 0 \leqslant \vec{H} \leqslant 0{,}5, \\ \overleftarrow{B} = f(\overleftarrow{H}) = -6\overleftarrow{H}^2 - 8\overleftarrow{H}^3, & -0{,}5 \leqslant \overleftarrow{H} \leqslant 0. \end{cases} \tag{32}$$

Przebiegi otrzymanych krzywych wraz z „zerową" pętlą histerezy oraz krzywą średniego magnesowania podano na rys. 4. Godny podkreślenia jest tu fakt (patrz rys. 4), że krzywe



Rys. 4. Unormowane krzywe pierwszego magnesowania $\vec{B}=f(\vec{H})=6\vec{H}^2-8\vec{H}^3$ oraz $\overleftarrow{B}=f(\overleftarrow{H})=-6\overleftarrow{H}^2-8\overleftarrow{H}^3$ dla najprostszego materiału o prostokątnej pętli histerezy
Linią przerywaną zaznaczono krzywą histerezy i krzywą średniego magnesowania

pierwszego magnesowania wychodzą poza „obszar" histerezy materiału, ich przebiegi zaś różnią się istotnie od przebiegu „pętli histerezy" i krzywej średniego magnesowania.

4.3. Krzywa pierwszego magnesowania materiałów perminwarowych

Materiałem perminwarowym nazwano materiał zbudowany z ciał magnetycznych dających efekt perminwarowy. Proces histerezy magnetycznej w takich materiałach może być opisany analitycznie wzorami [11]:

$$P=f(p)=\begin{cases}\vec{P}=f(\vec{p})=\vec{p}[1-(1-\vec{p})^{n-1}], & 0\leqslant\vec{p}\leqslant 1,\\ \overleftarrow{P}=f(p)=\overleftarrow{p}[1-(1-\overleftarrow{p})^{n-1}], & 0\leqslant\overleftarrow{p}\leqslant 1,\end{cases}\tag{33}$$

oraz

$$B=f(H)=\begin{cases}\vec{B}=f(\vec{H})=(0{,}5+\vec{H})[1-(0{,}5-\vec{H})^{n-1}]-0{,}5, & -0{,}5\leqslant\vec{H}\leqslant+0{,}5,\\ \overleftarrow{B}=f(\overleftarrow{H})=0{,}5-(0{,}5-\overleftarrow{H})[1-(0{,}5+\overleftarrow{H})^{n-1}], & -0{,}5\leqslant\overleftarrow{H}\leqslant+0{,}5.\end{cases}\tag{34}$$

Przekształcając podane wyrażenia możemy otrzymać następujące wzory rekurencyjne opisujące analitycznie proces pierwszego magnesowania materiałów perminwarowych:

$$P=f(p)=\begin{cases}\vec{P}=f(\vec{p})=0{,}5+(\vec{p}-0{,}5)[1-(2-2\vec{p})^{n-1}], & 0{,}5\leqslant\vec{p}\leqslant 1,\\ \overleftarrow{P}=f(\overleftarrow{p})=0{,}5+(\overleftarrow{p}-0{,}5)[1-(2-2\overleftarrow{p})^{n-1}], & 0{,}5\leqslant\overleftarrow{p}\leqslant 1,\end{cases}\tag{35}$$

oraz

$$B=f(H)=\begin{cases}\vec{B}=f(\vec{H})=\vec{H}[1-(1-2\vec{H})^{n-1}], & 0\leqslant\vec{H}\leqslant 0{,}5,\\ \overleftarrow{B}=f(\overleftarrow{H})=\overleftarrow{H}[1-(1+2\overleftarrow{H})^{n-1}], & -0{,}5\leqslant\overleftarrow{H}\leqslant 0.\end{cases}\tag{36}$$

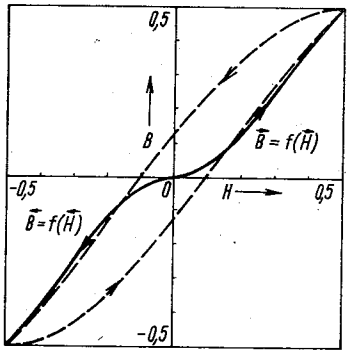
Dla ilustracji otrzymanych zależności wyznaczmy krzywe pierwszego magnesowania materiału perminwarowego zbudowanego z najprostszych ciał perminwarowych, tzn.

z ciał posiadających dokładnie trzy ($n = 3$) elementy magnetyczne. Korzystając z podanych wzorów rekurencyjnych możemy napisać wyrażenia:

$$P = f(p) = \begin{cases} \vec{P} = f(\vec{p}) = 2 - 7\vec{p} + 10\vec{p}^2 - 4\vec{p}^3, & 0{,}5 \leqslant \vec{p} \leqslant 1, \\ \overleftarrow{P} = f(\overleftarrow{p}) = 2 - 7\overleftarrow{p} + 10\overleftarrow{p}^2 - 4\overleftarrow{p}^3, & 0{,}5 \leqslant \overleftarrow{p} \leqslant 1 \end{cases} \tag{37}$$

oraz

$$B = f(H) = \begin{cases} \vec{B} = f(\vec{H}) = 4\vec{H}^2 - 4\vec{H}^3, & 0 \leqslant \vec{H} \leqslant 0{,}5, \\ \overleftarrow{B} = f(\overleftarrow{H}) = -4\overleftarrow{H}^2 - 4\overleftarrow{H}^3, & -0{,}5 \leqslant \overleftarrow{H} \leqslant 0{,}5. \end{cases} \tag{38}$$



Rys. 5. Unormowane krzywe pierwszego magnesowania $\vec{B} = f(\vec{H}) = 4\vec{H}^2 - 4\vec{H}^3$ oraz $\overleftarrow{B} = f(\overleftarrow{H}) = -4\overleftarrow{H}^2 - 4\overleftarrow{H}^3$ dla najprostszego materiału perminwarowego
Linią przerywaną zaznaczono krzywą histerezy

Przebiegi otrzymanych krzywych wraz z pętlą histerezy podano na rys. 5. Osobliwością podanych krzywych pierwszego magnesowania jest fakt, że przecinają one pętlę histerezy i wychodzą poza jej obszar.

LITERATURA

1. R. Bozorth, *Ferromagnetism*, Toronto—New York—London, Van Nostrand Comp. Inc., 1951.
2. T. Cholewicki, *Elektrotechnika teoretyczna*, T. 1/2, Warszawa 1972 i 1973.
3. R. P. Feynman, i in., *Feynmana wykłady z fizyki*, T. 2, cz. 2, PWN, Warszawa 1974.
4. W. P. Głuchow, R. K. Szmidt (Red.), *Normalizacija charaktieristik namagniczywanija*, Zinatnije, Riga, 1974.
5. P. G. Gorodiecki, *Obzor analiticzeskich wyrażenii kriwych namagniczywanija i gistieriezisnych pietieli*, GEI, Moskwa, 1956.
6. J. A. Izjumow, i in., *Polewyje mietody w tieorii fierromagnietizma*, Nauka, Moskwa, 1974.
7. F. Keffer, *Magnetyczne właściwości materiałów*, W: *Istota i właściwości materiałów nowoczesnych*, PWN, Warszawa, 1970.
8. K. A. Kikoin (red.), *Tablicy fiziczeskich wieliczyn. Sprawocznik*, Atomizdat, Moskwa, 1976.
9. E. I. Kondorski, *Zonnaja tieorija magnietizma*, Izd. Moskowskogo Uniwiersitieta, Moskwa, 1976.
10. B. Konorski, *Podstawy elektrotechniki*, T. 1—3, PWN, Warszawa, 1952—1963.
11. J. Migdalski, *Model matematyczny zjawiska histerezy*, Arch. Elektrot., 1976, z. 4.
12. M. Nałęcz, J. Jaworski, *Miernictwo magnetyczne*, WNT, Warszawa, 1968.
13. E. Philippow, *Nichtlineare Elektrotechnik*, Leipzig 1971.
14. K. M. Poliwanow, *Fierromagnietiki*, Goseniergoizdat, Moskwa—Leningrad, 1957.
15. A. Smoliński, *Magnesy i elektromagnesy*. W: *Podstawowe problemy współczesnej techniki*, T. 6, PWN, Warszawa, 1961.

16. S. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna. Cz. 3. Elektryczność i magnetyzm*, PWN, Warszawa, 1973.
17. S. W. Wonsowski, *Magnietizm mikroczastic*, Nauka, Moskwa, 1973.
18. Ch. Kittel, *Thermal Physics*, N.Y.
19. F. Reif, *Fizyka statystyczna*, PWN, Warszawa 1975.

J. MIGDALSKI

MATHEMATICAL MODEL OF THE FIRST MAGNETIZATION OF MATERIALS

Summary

A probabilistic model of the first magnetization of materials is presented in the paper, designated as a threshold-structural model — in the category of general systems theory. Properties and assumptions for the presented model are detailed in the author's earlier paper [11].

In the model it is assumed that the magnetic material (as a system), is composed of a great number of magnetic elements (system elements) and magnetic bodies (subsystems). The magnetic elements, described widely in the paper [11] are characterized by their not possessing magnetic hysteresis and (being) in one of two mutually exclusive magnetic states, namely:

(a) state with „right" or positive orientation (→),

(b) state with „left" or negative orientation (←).

With regard to magnetic bodies we shall assume that, depending on their magnetic structure, they can appear in one of three magnetic states, namely:

(A) state with „right" or positive orientation (→),

(B) state with „neutral" or zero orientation (—),

(C) state with „left" or negative orientation (←).

A number of conclusions arise from the analysis of the presented model, especially one connected with the relationship between hysteresis and first magnetization phenomenon.

It has been discovered that suitable formulas for first magnetization formulas can be directly written from given hysteresis formulas (and vice versa). Furthermore it has been stated that magnetic material with self-dual magnetic structure does not reveal magnetic hysteresis.

To illustrate the presented theory precise formulas of the first magnetization for typical magnetic materials are given, namely:

1. For magnetically hard materials, it means materials composed of magnetic bodies with series magnetic structure

$$B = f(H) = \begin{cases} \vec{B} = f(\vec{H}) = \quad 0.5(2\vec{H})^n, & 0 \leqslant \vec{H} \leqslant 0.5, \\ \overleftarrow{B} = f(\overleftarrow{H}) = -0.5(-2\overleftarrow{H})^n, & -0.5 \leqslant \overleftarrow{H} \leqslant 0. \end{cases}$$

2. For materials with rectangular hysteresis loop, it means materials composed of magnetic bodies with threshold magnetic structure

$$B = f(H) = \begin{cases} \vec{B} = f(\vec{H}) = (0.5+\vec{H}_i)\vec{B}_{,,(k-1)z(n-1)\cdots} + (0.5-\vec{H}_i)\vec{B}_{,,kz(n-1)"} \\ \overleftarrow{B} = f(\overleftarrow{H}) = (0.5-\overleftarrow{H}_i)\overleftarrow{B}_{,,(k-1)z(n-1)\cdots} + (0.5+\overleftarrow{H}_i)\overleftarrow{B}_{,,kz(n-1)\cdots} \end{cases}$$

3. For perminvars type materials, it means materials composed of magnetic bodies displaying perminvars effect

$$B = f(H) = \begin{cases} \vec{B} = f(\vec{H}) = \vec{H}[1-(1-2\vec{H})^{n-1}], & 0 \leqslant \vec{H} \leqslant 0.5, \\ \overleftarrow{B} = f(\overleftarrow{H}) = \overleftarrow{H}[1-(1+2\overleftarrow{H})^{n-1}], & -0.5 \leqslant \overleftarrow{H} \leqslant 0. \end{cases}$$

According to the presented formulas, concrete curves of the first magnetization have been calculated for the above mentioned magnetic materials composed of simple magnetic bodies having exactly three

($n = 3$) magnetic elements. Thus, it has resulted in the following 3-degree polynomials, useful for practical application, namely:

1. For magnetically hard material (Fig. 3)

$$B = f(H) = \begin{cases} \vec{B} = f(\vec{H}) = 4\vec{H}^3, & 0 \leqslant \vec{H} \leqslant 0.5, \\ \overleftarrow{B} = f(\overleftarrow{H}) = 4\overleftarrow{H}^3, & -0.5 \leqslant \overleftarrow{H} \leqslant 0. \end{cases}$$

2. For material with a rectangular hysteresis loop (Fig. 4)

$$B = f(H) = \begin{cases} \vec{B} = f(\vec{H}) = \quad 6\vec{H}^2 - 8\vec{H}^3, & 0 \leqslant \vec{H} \leqslant 0.5, \\ \overleftarrow{B} = f(\overleftarrow{H}) = -6\overleftarrow{H}^2 - 8\overleftarrow{H}^3, & -0.5 \leqslant \vec{H} \leqslant 0. \end{cases}$$

3. For perminvare type materials (Fig. 5)

$$B = f(H) = \begin{cases} \vec{B} = f(\vec{H}) = \quad 4\vec{H}^2 - 4\vec{H}^3, & 0 \leqslant \vec{H} \leqslant 0.5, \\ \overleftarrow{B} = f(\overleftarrow{H}) = -4\vec{H}^2 - 4\vec{H}^3, & -0.5 \leqslant \overleftarrow{H} \leqslant 0. \end{cases}$$

Thus, using a microscopic model to the first magnetization, as a model for describing magnetic phenomena at the magnetic elements and bodies level, we receive an elucidation of the observed macroscopic phenomena useful for theory and practice.

Received magnetic curves show qualitative coincidence with experimental curves. It is worth emphasizing that the comparison of the various magnetic materials requires homogeneous evaluation methods. In the paper, this problem has been solved by the normalization of the parameters $\vec{H}$, $\overleftarrow{H}$, $\vec{B}$, $\overleftarrow{B}$, that is, by introducing undimensional (relative) values.

J. MIGDALSKI

MODÈLE DE PREMIÈRE AIMANTATION DES MATÉRIAUX

Résumé

Dans l'article on propose un modèle mathématique de première aimantation des matériaux, qui rend possible la détermination formelle des courbes de première aimantation. On a admis que le matériau du modèle magnétique est un système physique, constitué d'un grand nombre d'éléments magnétiques et de corps magnétiques (sous-systèmes), qui possédant une structure magnétique déterminent de manière univoque toutes les propriétés du matériau en question.

Pour illustrer la théorie présentée de première aimantation des matériaux, on a donné les modèles mathématiques de première aimantation des matériaux magnétiquement durs à cycle d'hystérésis rectangulaire et des matériaux du type perminwar.

J. MIGDALSKI

MODELL FÜR DIE ERSTE STOFFMAGNETISIERUNG

Zusammenfassung

Im obigen Aufsatz wurde ein mathematisches Modell für die erste Stoffmagnetisierung dargestellt, was eine formelle Kurvenbestimmung der ersten Magnetisierung ermöglicht. Für das Modell wurde angenommen, daß der Magnetstoff ein physikalisches System ist, das aus einer großen Zahl von Magnetelementen besteht sowie aus Magnetkörpern (Subsystemen), die auf Grund ihrer Magnetstruktur sämtliche Eigenschaften des erwogenen Magnetstoffes eindeutig bestimmen. Zwecks Veranschaulichung der geschilderten Theorie der ersten Stoffmagnetisierung wurden mathematische Modelle für die erste Magnetisierung von hartmagnetischen Stoffen mit rechteckiger Hysteresisschleife gebracht sowie der Perminvarstofftypen.

Я. МИГДАЛЬСКИ

МОДЕЛЬ ПЕРВОНАЧАЛЬНОГО НАМАГНИЧИВАНИЯ МАТЕРИАЛА

Р е з ю м е

Представлена математическая модель первоначального намагничивания материала позволяющая на формальное определение пробега первоначальной кривой намагничивания. В модели принято, что магнитный материал является физической системой состоящей из большого количества магнитных элементов и магнитных тел, т.е. подсистем магнитная структура которых однозначно определяет все свойства обсуждаемого магнитного материала. Для иллюстрации предлагаемой теории первоначального намагничивания материалов приведены математические модели первоначального намагничивания магнитно твердых материалов с прямоугольным шлейфом гистерезиса и материалов типа перминваров.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1984, 30, z. 1, ss. 53-60

621.3.014.4

Über die Zeitkonstante der Wirbelströme in einer rechteckförmigen Abschirmung

ANDRZEJ BRYKALSKI (SZCZECIN), JAN PURCZYŃSKI (SZCZECIN), WOJCIECH LIPIŃSKI (SZCZECIN)

Ośrodek Elektronicznej Techniki Obliczeniowej Politechniki Szczecińskiej

Die Arbeit wurde am 27.11.1981 eingesandt

Mit Hilfe der Variationsmethode wurden die dynamischen Eigenschaften des nichtstationären, elektromagnetischen Feldes in einer rechteckförmigen ebenen Abschirmung bestimmt. Als Ergebnis wurde eine Näherungslösung des vorliegenden Randwertproblems angegeben, die beliebige Querschnitte von ebenen Schirmhüllen auf ihre Schirmwirkung zu untersuchen gestattet. Bei der Lösung des Randwertproblems entsteht ein unendliches Gleichungssystem. Dieses wurde für den Fall des rechteckigen Schirmes numerisch ausgewertet und graphisch dargestellt.

1. EINLEITUNG

Nach einer e-Funktion verlaufende Ausgleichvorgänge lassen sich bekanntlich sehr bequem und anschaulich durch die Angabe der Zeitkonstante T charakterisieren. Die zeitlich-räumlichen Ausgleichsvorgänge im Inneren ausgedehnter Körper, wie sie bei dem nichtstationären elektromagnetischen Felde, bei der Wärmeleitung im Temperaturfeld, Diffusion im Konzentrationsfeld und ähnlichen „Transportvorgängen" auftreten, die durch die parabolische partielle Dgl. (1) und die zugehörigen Randbedingungen beschrieben wurden

$$\Delta H = \mu\gamma \frac{\partial H}{\partial t}, \tag{1}$$

haben für jeden Raumpunkt P eine eigene Zeitkonstante. Um auch hier eine die zeitliche Gesamtzustandsänderung des Ausgleichsvorgangs charakterisierende Zeitkonstante als einfache Zahl angeben zu können, wurde in [1, 5, 7, 9] eine „mittlere charakteristische Zeit" T nach Gl. (2) definiert

$$T(P) = \int_0^\infty \frac{H(P, t) - H(P, t \to \infty)}{H(P, t = 0) - H(P, t \to \infty)}\, dt \tag{2}$$

und das Eindringen eines nichtstationären elektromagnetischen Feldes in den Leiter untersucht.

In der vorliegenden Arbeit wird die Zeitkonstante des zweidimensionalen nichtstationären Skineffektes für die im Bild 1 angegebene Abschirmung berechnet.

2. PROBLEMSTELLUNG

Eine leitende rechteckförmige Abschirmung befindet sich im elektromagnetischen Feld einer vom $I(t)$ durchflossenen Spule, deren N Windungen sich in den Ebenen $z =$ $=$ const befinden. Die Geometrie der Anordnung und die kartesischen Koordinaten sind im Bild 1 dargestellt. Es wird eine große Länge l der Spule und der Abschirmung

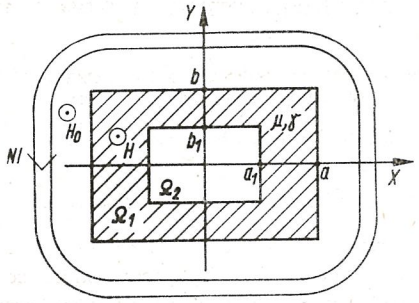


Bild 1. Rechteckförmiger Schirm im elektromagnetischen Feld einer Spule

den Querschnittabmessungen gegenüber vorausgesetzt, d.h $\partial/\partial z = 0$. Die Anordnung wird also als eben betrachtet. Zur Feldbeschreibung kann die z-gerichtete magnetische Induktion angewandt werden, die beim Nichtbestehen eines leitenden Materials im ganzen Raum innerhalb der Spule $H_o(t) = NI/l$ beträgt. Die Permeabilität der angegebenen Anordnung weist überall den konstanten Wert μ auf, und das Randwertproblem für die Feldverteilung wird durch die Gleichung

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \begin{cases} 0 & \text{in} \quad \Omega_2 \\ \mu\gamma \dfrac{\partial H}{\partial t} & \text{in} \quad \Omega_1 \end{cases} \tag{3}$$

beschrieben. Die Randbedingungen lauten

$$H(x = \pm a, y, t) = H(x, y = \pm b, t) = H_0(t) \tag{3a}$$

und es wird im weiteren die folgende Anfangsbedingung

$$H(x, y, t = 0) = 0 \tag{3b}$$

angenommen. Die Bedingungen $H_o(t)$ können als Einheitssprung $1(t)$ angenommen werden und dann bei zeitlich beliebiger Erregung werden die Lösungen mittels des Duhamel-Prinzips bestimmt.

3. LÖSUNG DES RANDWERTPROBLEMS

Die analytische Behandlung wird aus Symmetriegründen auf den Bereich $x \geqslant 0$ und $y \geqslant 0$ beschränkt, und die Lösung des vorliegenden Randwertproblems wird mit Hilfe der von Ritz angebenen Methode [6] in der folgenden angenäherten Form dargestellt

$$H_n(x, y, t) = H_o(t)\varphi_o(x, y) + \sum_{i=1}^{n} A_i(t)\varphi_i(x, y), \tag{4}$$

wobei das Funktionssystem $\{\varphi_i\}$ im Raum L^2 vollständig und linear unabhängig ist. Um die Randbedingungen (3a) zu erfüllen, wird weiterhin angenommen:

$$\varphi_i(x = \pm a, y) = \varphi_i(x, y = \pm b) = 0, \quad \varphi_0(x, y) = 1.$$

Es wird also für die gesuchte Lösung einen Näherungsansatz (4) angegeben, wobei φ_o den inhomogenen und alle φ_i den homogenen Randbedingungen genügen. Die Dgl. (3) und die Forderungen der Stetigkeit des magnetischen Feldes an den inneren Trennstellen zwischen den Wänden der Abschirmung und der Luft können mit Hilfe einer Gebietsmethode wie folgt erfüllt werden. Das Funktionssystem $\{A_i\}$ soll nach [4] folgende Anfangsbedingungen aufweisen:

$$G[A_1(0), \ldots, A_n(0)] = \int\int_{\Omega} [H(x, y, t = 0) - H_n(x, y, t = 0)]^2 d\Omega = \min, \tag{5}$$

wobei $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

Nach Einsetzen der Gl. (4) in Gl. (5) aus der Minimalforderung

$$\frac{\partial G}{\partial A_i(0)} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

ergibt sich $A_i(0) = 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Die Lösung des Problems (3a, b) für die Dgl. (1) ist der Minimierung des folgenden Variationsintegrals äquivalent [4, 8, 11]:

$$F[H] = \int_{\Omega}\int \left[\operatorname{grad}^2 H + 2c(P)\frac{\partial H}{\partial t}\right] d\Omega, \tag{7}$$

wobei

$$c(P) = \begin{cases} 0 & \text{fur} \quad P \in \Omega_2, \\ \mu\gamma & \text{fur} \quad P \in \Omega_1. \end{cases} \tag{8}$$

Wählt man als Koordinatenfunktionen die Funktionen

$$\varphi_i(x, y) = \cos m_i \frac{x}{a}\left(1 - \frac{\operatorname{ch} m_i \frac{y}{a}}{\operatorname{ch} m_i \frac{b}{a}}\right), \tag{9}$$

wobei $m_i = (2i-1)\frac{\pi}{2}$, so ergibt sich nach Einsetzen der Gl. (4) in Gl. (7) und der Integrierung, das Funktional (7) als die Funktion der Veränderlichen A_i

$$F[H_n] = f(A_1, \ldots, A_n). \tag{10}$$

Aus der Minimalforderung $\frac{\partial f}{\partial A_i} = 0$ erhält man ein System der n linearen, gewöhnlichen Differenzialgleichungen der ersten Ordnung

$$a_i A_i + \mu\gamma c_i \frac{dA_i}{dt} = -\mu\gamma b_i \frac{dH_o}{dt}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{11}$$

mit Anfangswerten $A_i(0) = 0$.

Die Koeffizienten a_i, b_i und c_i werden mittels folgender Beziehungen angegeben:

$$a_i = 2m_i^2 r\left(1-\frac{\operatorname{th} m_i r}{m_i r}\right),$$

$$b_i = \frac{4ra^2}{m_i}\left[(-1)^{i+1}\left(1-\frac{\operatorname{th} m_i r}{m_i r}\right)-\sin m_i K\left(M-\frac{\operatorname{sh} m_i rM}{m_i r\operatorname{ch} m_i r}\right)\right], \tag{12}$$

$$c_i = a^2 r\left[2+\frac{1}{\operatorname{ch}^2 m_i r}-3\frac{\operatorname{th} m_i r}{m_i r}-\left(K+\frac{\sin 2m_i K}{m_i}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(2M+\frac{M}{\operatorname{ch}^2 m_i r}-\frac{4\operatorname{sh} m_i rM}{m_i r\operatorname{ch} m_i r}+\frac{\operatorname{sh} 2m_i rM}{2m_i r\operatorname{ch}^2 m_i r}\right)\right],$$

wobei $r=\frac{b}{a}$, $K=\frac{a_1}{a}$, $M=\frac{b_1}{b}$.

Nach Anwendung der Laplaceschen Transformation bei Gl. (11) erhält man folgende Lösung

$$A_i(s) = -\frac{\mu\gamma b_i s H_o(s)}{a_i+\mu\gamma c_i s}. \tag{13}$$

Mit Hilfe der Faltung zweier Funktionen im Orginalbereich ergibt sich [2]

$$A_i(t) = \frac{a_i b_i}{\mu\gamma c_i^2}\int_0^t H_o(\tau)\exp\left(-\frac{t-\tau}{T_i}\right)d\tau, \tag{14}$$

wobei $T_i = \mu\gamma\frac{c_i}{a_i}$.

Das nichtstationäre elektromagnetische Feld wird dann mit Hilfe folgender Beziehung bestimmt

$$H_n(x,y,t) = H_o(t)+\frac{1}{\mu\gamma}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a_i b_i}{c_i^2}\int_0^t H_o(\tau)\exp\left(-\frac{t-\tau}{T_i}\right)d\tau\varphi_i(x,y)\right]. \tag{15}$$

4. MITTLERE ZEITKONSTANTE

Nach Anwendung der Laplaceschen Transformation lautet Gl. (2) [1, 5, 7]:

$$T(P) = \frac{\lim\limits_{s\to 0}[sH(P,s)]'}{H(P,t=0)-H(P,t\to\infty)}. \tag{16}$$

Unter Annahme, daß der Eingangsvorgang $H_o(t)$ mit der mittleren Zeitkonstante T_o anwächst, d.h. $H_o(s)=\frac{H_o}{s(1+sT_o)}$, ergibt sich die Abhängigkeit

$$T_n = T_o-\frac{1}{H_o}\sum_{i=1}^{n}\lim_{s\to 0}[sA_i(s)]'\cos m_i\frac{x}{a}\left(1-\frac{\operatorname{ch} m_i\frac{y}{a}}{\operatorname{ch} m_i\frac{b}{a}}\right), \tag{17}$$

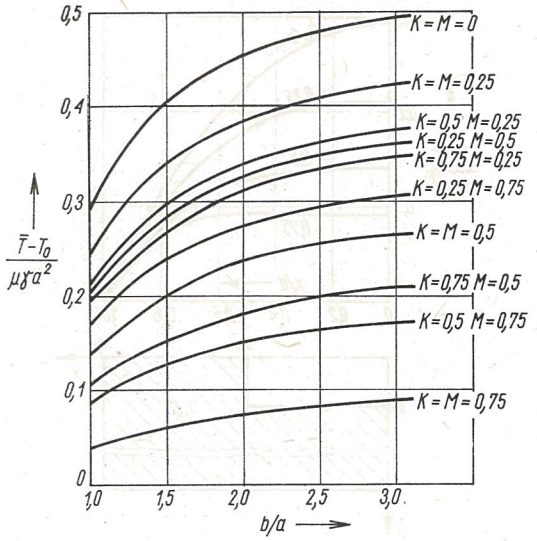


Bild 2. Abhängigkeit der Zeitkonstante von den Parametern $\frac{b}{a}$, $K = \frac{a_1}{a}$ und $M = \frac{b_1}{b}$ im Punkt $x = y = 0$

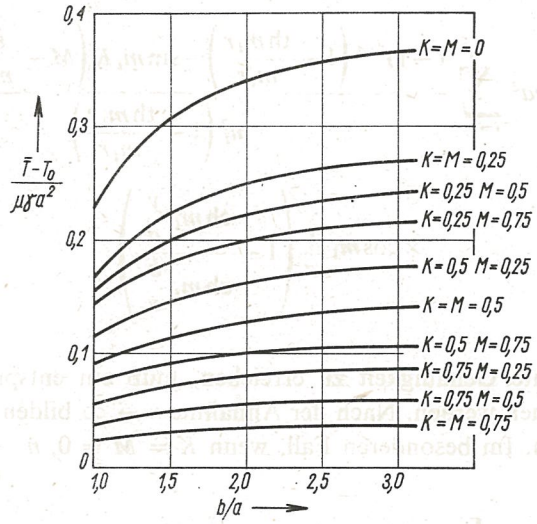


Bild 3. Abhängigkeit der Zeitkanstante von den Parametern $\frac{b}{a}$, $K = \frac{a_1}{a}$ und $M = \frac{b_1}{b}$ im Punkt $x = 0{,}5(a_1 + a)$, $y = 0$

wobei T_n der Näherungswert der Zeitkonstante T ist. Unter Berücksichtigung der Gl. (13) kann man die Beziehung

$$\lim_{s\to 0}[sA_i(s)]' = -\mu\gamma H_o \frac{b_i}{a_i} \tag{18}$$

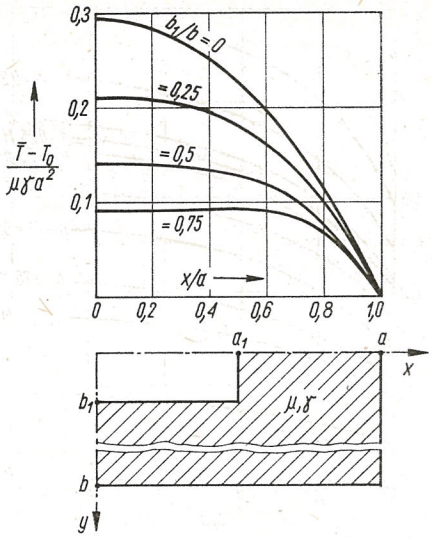


Bild 4. Verteilung der Zeitkonstante auf der x-Achse für die Parameter $\frac{b}{a}=1$, $K=\frac{a_1}{a}=0{,}5$

beweisen. Dann wird schließlich die Lösung

$$T_n = T_o+2\mu\gamma a^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}\left(1-\frac{\operatorname{th} m_i r}{m_i r}\right)-\sin m_i K\left(M-\frac{\operatorname{sh} m_i r M}{m_i r \operatorname{ch} m_i r}\right)}{m_i^3\left(1-\frac{\operatorname{th} m_i r}{m_i r}\right)}\times$$
$$\times\cos m_i\frac{x}{a}\left(1-\frac{\operatorname{ch} m_i\frac{y}{a}}{\operatorname{ch} m_i\frac{b}{a}}\right) \tag{19}$$

gewonnen.

Um die gewünschte Genauigkeit zu erreichen, muß ein entsprechend großer Wert der Zahl n angenommen werden. Nach der Annahme $n\to\infty$ bilden die Näherungen (15) die exakten Lösungen. Im besonderen Fall, wenn $K=M=0$, $n\to\infty$, geht die Formel (19) in

$$T = T_o+\mu\gamma\left[\frac{a^2-x^2}{2}-2a^2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{m_i^3}\cos m_i\frac{x}{a}\frac{\operatorname{ch} m_i\frac{y}{a}}{\operatorname{ch} m_i\frac{b}{a}}\right] \tag{20}$$

über. Die Gl. (20) deckt sich mit der in der Arbeit [9] abgeleiteten Abhängigkeit und bestimmt die mittlere Zeitkonstante der Diffusion des elektromagnetischen Feldes in einem ferromagnetischen, massiven, rechteckförmigen Kern. In Arbeit [9] wurde die Methode der Variablentrennung angewandt. Im Bild 2 und 3 wird die Abhängigkeit

der mittleren Zeitkonstante von den geometrischen Abmessungen in den Punkten $x = y = 0$ und $x = 0{,}5(a_1 + a)$, $y = 0$ dargestellt.

Bild 4 zeigt die Zeitkonstante als Funktion der räumlichen Variablen auf der x-Achse.

5. ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Abhandlung befaßt sich mit der Bestimmung der dynamischen Eigenschaften des nichtstationären elektromagnetischen Feldes innerhalb einer rechteckförmigen ebenen Abschirmung. Nach Auflösung des vorliegenden Randwertproblems wird die mittlere Zeitkonstante bestimmt und nach der numerischen Auswertungen graphisch dargestellt.

SCHRIFTTUM

1. A. Avramanescu, *Eindringzeit der elektromagnetischen Feldes und des Wärmefeldes im Leiter*, ETZ-A 91, 1970, s. 235—238.
2. G. Doetsch, *Handbuch der Laplace Transformation*, Birkhäuser Verlag, Basel 1950—56.
3. L. Hannakam, *Beitrag zur Berechnung transienter Wirbelströme in einer massiven Hohlkugel*, Arch. Elektrotechnik, 54, 1970, s, 1—7.
4. B. Krajewski, *Ein direktes Variationsverfahren zur Behandlung der Wärmeübertragungsprobleme für erzwungene Konvektion*, Int. J. Heat Mass Transfer., 16, 1973, s. 469—483.
5. W. Lipiński, *Über die Eindringzeit des elektromagnetischen Feldes im Leiter*, Z. elektr. Inform.-u Energietechnik, 8, 1978, s. 337—344.
6. S. G. Michlin, *Variationsmethoden in der mathematischen Physik*, (in russisch), Moskau 1970.
7. C. I. Mocanu, *Über die Zeitkonstante des Skineffektes*, ETZ-A, 92, 1971, s. 156—161.
8. S. D. Savakar, *On a variational formulation of a class of thermal entrance problems*, Int. J. Heat Mass Transfer., 13, 1970, s. 1187—1197.
9. R. Sikora, W. Lipiński, *Equivalent time constant of diffusion processes in an area of rectangular cross-section*, (in polnisch), Arch. Elektrotechniki, 25, 1976.
10. W. R. Smythe, *Static and dynamic electricity*, Mc-Graw Hill, New York 1950.
11. O. C. Zienkiewicz, *The finite element method in engineering science*, Hc-Graw Hill, London 1971.

A. BRYKALSKI, J. PURCZYŃSKI, W. LIPIŃSKI

TIME CONSTANT OF EDDY-CURRENTS INDUCED IN RECTANGULAR SCREEN

Summary

This paper deals with the variation method for the calculation of dynamical properties of transient electromagnetic field in a rectangular shield. The method presented in the paper enables the calculations of the shielding effects in a planeparallel shield covering the arbitrary cross sections. The solution of the boundary value problem leads to an infinite system of equations. Results are presented in a series of graphs

A. BRYKALSKI, J. PURCZYŃSKI, W. LIPIŃSKI

CONSTANTE DE TEMPS DES COURANTS DE FOUCAULT DANS UN ÉCRAN RECTANGULAIRE

Résumé

On a déterminé, à l'aide de la méthode de variation, les propriétés dynamiques du champ électromagnétique variable dans un écran plat rectangulaire. On a pris comme résultat la solution approximative

du problème aux limites, qui rend possible l'examen des sections aléatoires des enveloppes plates écranisantes, grâce à leurs propriétés d'écranisation. La résolution du problème aux limites mène à un système d'équations infini, dont l'un, pour le cas de l'écran rectangulaire, a été numériquement résolu et présenté sur un graphique.

A. BRYKALSKI, J. PURCZYŃSKI, W. LIPIŃSKI

O STAŁEJ CZASOWEJ PRĄDÓW WIROWYCH W EKRANIE PROSTOKĄTNYM

Streszczenie

Przy pomocy metody wariacyjnej określone zostały własności dynamiczne nieustalonego pola elektromagnetycznego w płaskim ekranie. Jako wynik podano przybliżone rozwiązanie problemu brzegowego, które umożliwia badanie dowolnych przekrojów płaskich osłon ekranujących, ze względu na ich własności ekranujące. Rozwiązanie problemu brzegowego prowadzi do nieskończonego układu równań, który w przypadku prostokątnego ekranu został numerycznie rozwiązany i przedstawiony graficznie.

А. БРЫКАЛЬСКИ, Я. ПУРЧИНЬСКИ, В. ЛИПИНЬСКИ

О ПОСТОЯННОЙ ВРЕМЕНИ ВИХРЕВЫХ ТОКОВ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ЭКРАНЕ

Резюме

Пользуясь вариационным методом определены динамические свойства переходного процесса электромагнитного поля в плоском, прямоугольном экране. В итоге поданы приближенные решения краевой задачи дающие возможность рассмотривать экранирующие свойства плоских экранов произвольного сечения. Решение краевой задачи ведет к бесконечной системе уравнений, которая решена численным методом. Результаты решения представлены в графической форме.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1984, 30, z. 1, ss. 61-70

621.317.441

Optymalizacja naprężeń mechanicznych w solenoidach generujących silne pola magnetyczne

KAZIMIERZ ADAMIAK (KIELCE)

Instytut Elektrotechniki Politechniki Świętokrzyskiej

Otrzymano 28.5.1981

Jednym z czynników ograniczających maksymalną wartość indukcji w konstrukcjach służących do wytwarzania stałych, silnych pól magnetycznych są naprężenia rozrywające, powodujące niszczenie uzwojeń. W pracy została podjęta próba optymalizacji konstrukcji przez zastosowanie uzwojeń o zmiennej gęstości prądu. Rozkład gęstości prądu dobiera się tak, aby zapewnić równomierność naprężeń rozrywających w najbardziej krytycznym kierunku. Pozwala to na pewne podwyższenie maksymalnej wartości indukcji. Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla dwóch typów uzwojeń: solenoidu Bittera i solenoidu dwusekcyjnego.

1. WSTĘP

Generacja silnych pól magnetycznych jest problemem o bardzo dużym znaczeniu. Trudno sobie wręcz wyobrazić dyscyplinę fizyki stosowanej, w której ten problem nie miałby zastosowania [1]. Konieczność wytwarzania silnych pól występuje też w wielu dziedzinach techniki.

Ze względu na czas trwania silne pola magnetyczne dzieli się na dwie grupy: impulsowe i stałe (czas trwania rzędu co najmniej kilka minut). Metody wytwarzania obu rodzajów pól i problemy przy tym występujące różnią się znacznie. W dalszej części pracy rozważane będą jedynie konstrukcje służące do wytwarzania pól stałych.

Trzy czynniki stanowią główną barierę ograniczającą maksymalną wartość indukcji wytwarzanych pól. Są to: straty mocy i związane z tym problemy chłodzenia uzwojeń, naprężenia mechaniczne powodujące niszczenie uzwojeń oraz konstrukcja odpowiednich źródeł zasilania.

Straty mocy silnie zależą zarówno od typu konstrukcji jak też od parametrów geometrycznych. O jakości rozwiązania decyduje tzw. współczynnik Fabriego będący stosunkiem indukcji w obszarze roboczym do mocy strat cieplnych [1 ÷ 3]. Poszukiwanie maksimum współczynnika Fabriego doprowadziło do powstania wielu rodzajów konstrukcji: solenoidów Bittera, Kelvina, Gaume'a i innych [2, 3]. Ze względu na trudność realizacji skomplikowanych rozkładów gęstości prądów w uzwojeniach, w praktyce stosuje się najczęściej rozwiązanie Bittera.

Równie jednoznacznego rozwiązania nie ma natomiast zagadnienie optymalizacji naprężeń mechanicznych. Przyczyną tego jest być może fakt, że rozwiązanie zależy w równie istotnym stopniu od parametrów geometrycznych i elektrycznych, jak też od mechanicz-

nych. Stosuje się najczęściej trzy sposoby ograniczania naprężeń rozrywających: cewki spiralne [4], solenoid o trapezowym przekroju uzwojeń [5] oraz solenoid dwusekcyjny [6], przy czym wewnętrzna sekcja może mieć zmienną gęstość prądu, dobraną tak, aby naprężenia radialne w płaszczyźnie symetrii były możliwie równomierne [7÷9]. Sposób ostatni wymaga nawinięcia sekcji wewnętrznej folią o zmiennej szerokości.

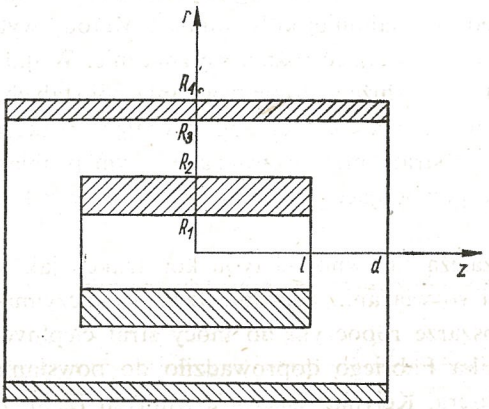
Naprężenia w polu magnetycznym zależą wprost proporcjonalnie od gęstości prądu i indukcji magnetycznej. Dobierając w odpowiedni sposób geometrię uzwojenia i rozkład gęstości prądu osiągnąć można równomierny rozkład naprężeń, a dzięki temu podwyższyć wartość indukcji magnetycznej.

WYKAZ OZNACZEŃ

j, J — gęstość prądu
A — potencjał wektorowy pola magnetycznego
B — indukcja pola magnetycznego
I_0, K_0, I_1, K_1 — zmodyfikowane funkcje Bessela zerowego i pierwszego rzędu, pierwszego i drugiego rodzaju
σ — naprężenia mechaniczne

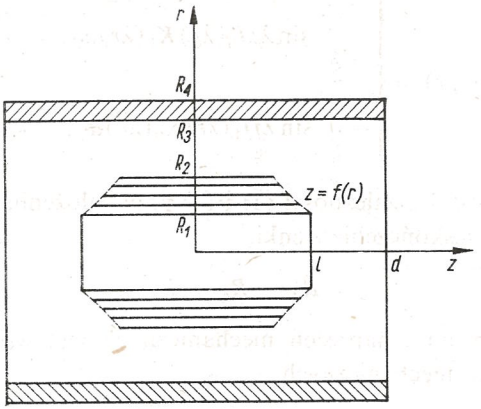
2. UZWOJENIE DWUSEKCYJNE

Do generacji silnych pól magnetycznych stosuje się często uzwojenie składające się z dwóch solenoidów umieszczonych współosiowo [6] (rys. 1). Układ taki ma znacznie korzystniejszy, niż w solenoidzie pojedynczym, rozkład naprężeń promieniowych w płasz-



Rys. 1. Uzwojenie dwusekcyjne do wytwarzania silnych pól magnetycznych

czyźnie symetrii solenoidu wewnętrznego, a więc w najbardziej krytycznym miejscu konstrukcji. Rozkład naprężeń można jeszcze bardziej poprawić stosując solenoid wewnętrzny ze zmienną gęstością prądu [7÷9] (rys. 2).



Rys. 2. Uzwojenie dwusekcyjne z równomiernie obciążoną sekcją wewnętrzną

Zmienną gęstość prądu uzyskuje się nawijając uzwojenie folią o zmiennej szerokości, dzięki temu gęstość prądu zmienia się wzdłuż promienia według zależności

$$j(r) = \frac{j_o}{f(r)}. \tag{1}$$

Funkcję $f(r)$ dobiera się w ten sposób, aby

$$\sigma(r) = \sigma_0 = \text{const}, \quad r \in (R_1, R_2). \tag{2}$$

Problem powyższy został rozwiązany przy przybliżonym opisie pola magnetycznego solenoidu [7, 8], a otrzymane wyniki zweryfikowane metodą dokładną [9].

Celem obecnej pracy jest rozwiązanie zagadnienia w sposób możliwie dokładny.

Wartość potencjału wektorowego pola magnetycznego cienkiej cewki cylindrycznej o długości $2d$ i średnicy $2R$ opisuje wzór [10, 11]

$$A_1 = \frac{\mu I w R}{\pi d} \int_0^\infty \frac{\sin \lambda d}{\lambda} K_1(\lambda R) I_1(\lambda r) \cos \lambda z d\lambda, \quad r \leqslant R, \tag{3a}$$

$$A_2 = \frac{\mu I w R}{\pi d} \int_0^\infty \frac{\sin \lambda d}{\lambda} K_1(\lambda r) I_1(\lambda R) \cos \lambda z d\lambda, \quad r \geqslant R. \tag{3b}$$

Składowa wzdłuż osi z wektora indukcji magnetycznej jest związana z potencjałem wektorowym zależnością

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA). \tag{4}$$

W układzie jak na rys. 2 pole w płaszczyźnie symetrii jest superpozycją od obu uzwojeń:

$$B_z(r) = \frac{\mu_0 I w R}{\pi d} b(d, r, R) + \frac{\mu_0}{\pi} j_0 \int_{R_1}^{R_2} \frac{\varrho}{f(\varrho)} b(f(\varrho), \varrho, r)\, d\varrho, \tag{5a}$$

$$b(f,\varrho,r) = \begin{cases} \int_0^\infty \sin \lambda f I_0(\lambda\varrho) K_1(\lambda r)\, d\varrho, & \varrho \leqslant r, \\ -\int_0^\infty \sin \lambda f I_1(\lambda r) K_0(\lambda\varrho)\, d\varrho, & \varrho \geqslant r. \end{cases} \tag{5b}$$

Wzór (5a) otrzymany został z zależności (3) i (4) przy założeniu, że solenoid zewnętrzny można traktować jako nieskończenie cienki.

$$R_3 = R_4 = R.$$

Składowa promieniowania naprężeń mechanicznych jest wprost proporcjonalna do gęstości prądu i naprężeń mechanicznych

$$\sigma_r(r) = krj(r) B_z(r). \tag{6}$$

Równania (5) i (6) przy założeniach (1) i (2) stanowią nieliniowe równanie całkowe z niewiadomą funkcją $f(r)$ opisującą poszukiwany kształt solenoidu. Po wprowadzeniu parametrów bezwymiarowych i po elementarnych przekształceniach otrzymuje się

$$\int_{1,0}^{r_2} \frac{\varrho}{f(\varrho)}\, b(f(\varrho), \varrho, r)\, d\varrho = A\frac{f(r)}{r} + Bd(d, r_3, r), \tag{7}$$

$r \in (1{,}0, r_2)$,

$r_2 = R_2/R_1$,

$r_3 = R/R_1$,

A, B — stałe.

Uniwersalną metodą rozwiązywania równań nieliniowych typu

$$f(x) = 0 \tag{8}$$

jest metoda kolejnych iteracji. Zerowe przybliżenie x_0 zakłada się dowolnie. Przybliżenie $N+1$ wyznacza się, przy założeniu znajomości przybliżenia N-tego, z zależności

$$x_{N+1} = x_N - \alpha f(x_N), \tag{9}$$

α — jest pewnym parametrem (stałym lub zmiennym w czasie obliczeń).

3. WYNIKI OBLICZEŃ KSZTAŁTU UZWOJENIA DWUSEKCYJNEGO

Równanie (7) zostało zastąpione, przy wykorzystaniu metody różnic skończonych, układem nieliniowych równań algebraicznych i rozwiązane według iteracyjnej zależności (9). Ze względu na wielokrotnie występujące całkowanie niewłaściwe (wzór (5b)) obliczenia wymagały znacznego czasu obliczeń emc. Ponieważ rozważania mają za zadanie zaprezentowanie metody a nie wyczerpujące rozwiązanie problemu, założono małą liczbę punktów dyskretyzacji równania (7) ($n = 5$), dzięki czemu czas pracy emc został znacznie skrócony. Całki występujące we wzorze (5b) obliczono stosując numeryczną metodę Simpsona.

Tablica

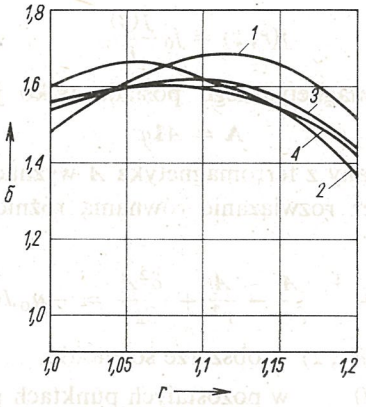
Kształt równomiernie obciążonego uzwojenia dwusekcyjnego

Lp.	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	B %
1	1,2895	1,1352	0,9984	0,8766	0,7677	3,88
2	1,1378	1,0651	0,9992	0,9393	0,8847	5,06
3	1,2270	1,1059	0,9987	0,9034	0,8183	5,74
4	1,2060	1,0965	0,9988	0,9113	0,8326	6,54

Wyniki obliczeń dla $r_1 = 1{,}2$, $r_3 = 2{,}0$, $d = 3{,}0$ oraz różnych wartości α i liczby iteracji zestawiono w tablicy

$$f_i = f(1{,}0 + (i-1)0{,}05).$$

Uzyskane wyniki nie zapewniają co prawda dokładnie równomiernego rozkładu naprężeń ale go znacznie poprawiają (rys. 3). Dzięki temu przy tej samej wartości σ_{max} uzyskuje się wyższą wartość indukcji. Procentowy zysk B zmienia się w granicach od 5,06% do 6,54%.



Rys. 3. Rozkład naprężeń w sekcji wewnętrznej

4. SOLENOID BITTERA Z NIERÓWNOMIERNĄ GRUBOŚCIĄ UZWOJEŃ

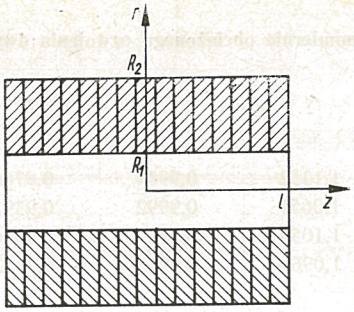
Solenoid Bittera jest cewką składającą się z jednej warstwy zwojów o prostokątnym przekroju poprzecznym. Gęstość prądu spełnia zależność

$$j(r, z) = \frac{j_0}{r}, \tag{10}$$

co wynika z warunku

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0.$$

Naprężenia rozrywające są największe na wewnętrznej powierzchni zwojów i tam też następuje niszczenie konstrukcji. Rozkład naprężeń jest nierównomierny; największa



Rys. 4. Solenoid Bittera

wartość występuje w płaszczyźnie symetrii ($z = 0$), a przy zbliżaniu się do krańców solenoidu monotonicznie maleje. Zastosowanie zwojów o zmiennej grubości powinno pozwolić na ujednorodnienie naprężeń, a przez to na podwyższenie wartości indukcji przy takich samych naprężeniach maksymalnych.

Pierwszym krokiem przy optymalizacji naprężeń jest analiza pola magnetycznego. Analiza taka zostanie przeprowadzona przy założeniu ciągłych zmian gęstości prądu wzdłuż osi z, a więc przy przyjęciu dużej liczby zwojów o pomijalnie małej wysokości

$$j(r, z) = j_0 \frac{f(z)}{r}. \tag{11}$$

Potencjał wektorowy pola magnetycznego posiada tylko jedną składową

$$\mathbf{A} = A\mathbf{1}\varphi. \tag{12}$$

Jeśli solenoid nie jest wykonany z ferromagnetyka A wyznaczyć go można bądź metodą superpozycji [12], bądź przez rozwiązanie równania różniczkowego cząstkowego typu Poissona [10, 11]

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} - \frac{A}{r^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = -\mu_0 J(r, z), \tag{13}$$

$$J(r, z) = \begin{cases} j(r, z) & \text{w obszarze solenoidu,} \\ 0 & \text{w pozostałych punktach przestrzeni.} \end{cases}$$

Rozwiązaniem ogólnym równania (13) jest

$$A = \int_0^\infty [B(\lambda) I_1(\lambda r) + C(\lambda) K_1(\lambda r)] [D(\lambda) \cos \lambda z + E(\lambda) \sin \lambda z] d\lambda. \tag{14}$$

Przedstawiając $J(r, z)$ w postaci całki Fouriera

$$J(r, z) = \frac{2}{\pi r} \int_0^\infty F(\lambda) \cos \lambda z d\lambda, \tag{15}$$

$$F(\lambda) = j_0 \int_0^l f(x) \cos \lambda x dx \tag{17}$$

oraz wykorzystując warunki ciągłości na powierzchniach $r = R_1$ i $r = R_2$ wyznacza się stałe występujące we wzorze (14) i otrzymuje ostateczne wyrażenie opisujące pole w całej przestrzeni, zarówno w obszarze uzwojeń jak też poza nimi.

Do dalszych obliczeń potrzebny będzie tylko potencjał w obszarze $r \leqslant R_1$

$$A_1 = \frac{2\mu_0 j_0 R_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{F(\lambda)}{\lambda} [K_0(\lambda R_1) - K_0(\lambda R_2)] I_1(\lambda r) \cos \lambda z d\lambda. \tag{17}$$

Stąd składowa wzdłuż osi z wektora indukcji

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 j_0 R_1}{\pi} \int_0^l K(x, z) f(x) dx, \tag{18}$$

$$K(x, z) = \int_0^\infty \lambda^{-1} [K_0(\lambda R_1) - K_0(\lambda R_2)] I_0(\lambda R_1) \cos \lambda z \cos \lambda x d\lambda.$$

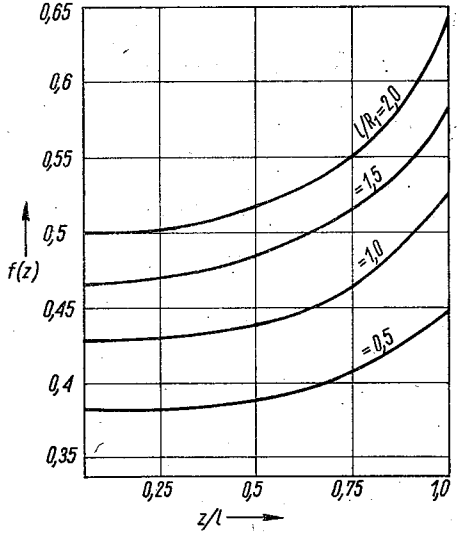
Problem zapewnienia równomierności naprężeń promieniowych wzdłuż długości solenoidu sprowadza się więc do rozwiązania nieliniowego równania całkowego

$$\int_0^l K(x, z) f(x) dx = A f^{-1}(z), \tag{19}$$

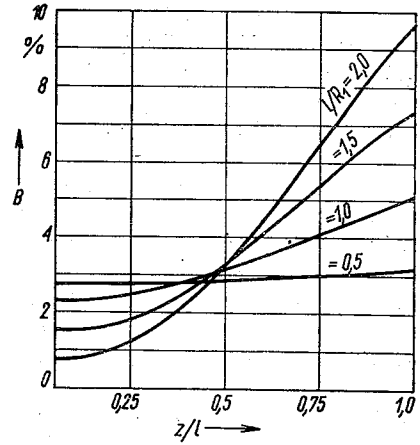
A — stała.

5. WYNIKI OPTYMALIZACJI SOLENOIDU BITTERA

Równanie (19) rozwiązane zostało metodą iteracyjną dla $R_2 = 3R_1$ i różnych l/R_1. Wyniki obliczeń przedstawia rys. 5. Solenoidy z tak dobranymi wartościami gęstości prądów w zwojach spełniają wymaganie równomierności naprężeń na powierzchni we-



Rys. 5. Przebieg funkcji opisującej rozkład gęstości prądu w równomiernie obciążonym solenoidzie Bittera



Rys. 6. Procentowy wzrost wartości indukcji w równomiernie obciążonym solenoidzie Bittera

wnętrznej z bardzo dużą dokładnością (wyższą od 0,1%). Równomierność naprężeń pozwala uzyskać wyższą wartość indukcji na osi przy tych samych wartościach σ_{max} (rys. 6). Procentowy wzrost indukcji B zależy od długości solenoidu (jest największy dla solenoidów krótkich) i odległości od płaszczyzny symetrii. Ostatnie zjawisko powoduje, że solenoid z równomiernymi naprężeniami wytwarza na osi pole bardziej równomierne. Jest to oczywiste, ponieważ wyniki obliczeń są zbliżone do otrzymanych przy syntezie pola jednorodnego na osi [13].

W wyniku obliczeń otrzymane zostało rozwiązanie, w którym zwoje w pobliżu krańców solenoidu mają mniejszą grubość niż w pobliżu płaszczyzny symetrii. Jest to zależność odwrotna, do otrzymanej metodą optymalizacji współczynnika Fabriego (solenoid Gaume'a). Solenoid z równomiernymi naprężeniami ma więc większe straty mocy niż klasyczny solenoid Bittera. Opisaną metodę można wobec tego zastosować tylko wtedy, gdy o maksymalnej wartości indukcji decydują siły rozrywające a nie zależności energetyczne.

6. ZAKOŃCZENIE

Optymalizacja konstrukcji wytwarzających silne pola magnetyczne, w których decydujące znaczenie mają naprężenia mechaniczne, przynosi wzrost maksymalnej wartości indukcji pola magnetycznego. Nie jest to jednak duży wzrost, maksimum 6,5%, w dodatku przynosi niekiedy pogorszenie współczynnika Fabriego, decydującego o wielkości strat mocy. Dlatego problem celowości przeprowadzenia optymalizacji naprężeń nie ma jednoznacznego rozwiązania — każdy przypadek należy rozpatrywać odrębnie.

LITERATURA

1. D. H. Parkinson, B. E. Mulhall, *The generation of high magnetic fields*, New York 1967 (tłum. ros. Moskwa 1971).
2. W. R. Karasik, *Fizika i technika silnych magnitnych polej*, Moskwa 1964.
3. D. B. Montgomery, *Solenoid magnet design*, New York, London, Sydney, Toronto 1969 (tłum. ros. Moskwa 1971).
4. H. Weber, H. J. Schneider-Muntau, G. Landwehr, *Optimisation calculations of polyhelix coils for hybrid magnets*, Appl. Phys., 20, 163—169 (1979).
5. W. A. Ignatczenko, M. M. Karpienko, *O wozmożnosti połuczenia postojannych swierchsilnych magnitnych polej*, Żurn. techn. fiz., 38, 200—204 (1968).
6. P. O. Carden, *Design principles relating to the strength and structure of the ANU 30T electromagnet*, Journ. of Phys. E: Sci. Instr., 5, 654—656 (1972).
7. A. P. Doroszenko, *O reszenii nieliniejnogo integralnogo urawnienia woznikajuszczego pri rasczete rawnonagrużennych obmotok solenoidow*, Żurn. techn. fiz., 48, 1566—1568 (1978).
8. A. P. Doroszenko, i in., *Solenoid s pieremiennoj płotnostiu toka*, Żurn. techn. fiz., 46, 209—211 (1976).
9. G. S. Wejsig, i in., *Dwuchsekcjonnyj solenoid s wnutriennoj rawnonagrużennoj sekcjej i zawisimost moszcznosti potreblajemoj etim solenoidom ot dliny wnutriennoj sekcji*, Żurn. techn. fiz., 44, 662—666 (1974).
10. R. Sikora, W. Lipiński, *Pole magnetyczne w całym obszarze solenoidu Bittera*, Arch. Elektr., 24, 355—362 (1975).

11. W. Lipiński, R. Sikora, *Magnetfeld und Induktivität des Bitterschen Solenoids*, Z. Elektr. Inform- und Energietechnik, 8, 412—418 (1978).
12. F. Melkes, *Výpočet magnetickeho pole bitterových civek*, Elektr. Čas., 26, 392—409 (1975).
13. K. Adamiak, *Tichonov's regularization method applied to the magnetic field on a solenoid axis synthesis*, Arch. f. Elektr., 59, 19—22 (1977).

K. ADAMIAK

OPTIMIZATION OF MECHANICAL STRESSES IN SOLENOIDS GENERATING STRONG MAGNETIC FIELDS

Summary

Tearing stresses, causing the destruction of windings are one of the factors limiting the maximum induction value in devices employed to generate stable, strong magnetic fields. The paper is an attempt to optimize their construction through the application of windings with variable current density. The distribution of current density is selected so as to ensure the uniformity of tearing stresses in the most critical direction. This makes it possible to increase the maximum induction value to some extent. Numerical calculations have been performed for two types of windings: the Bitter solenoid and the double-section solenoid.

K. ADAMIAK

OPTIMISATION DES CONTRAINTES MÉCANIQUES DANS LES SOLENOÏDES CRÉANT DES CHAMPS MAGNÉTIQUES FORTS

Résumé

Un des agents limitant la valeur maximale de l'induction dans les constructions, servant à créer les champs magnétiques constants et forts, est la contrainte de rupture, amenant à la destruction des enroulemennts. On a essayé, dans le travail, d'optimiser la construction en utilisant les enroulements à densité de courant variable. La répartition de la densité de courant est choisie de la sorte, afin d'assurer la répartition uniforme des contraintes de rupture en sens le plus dangereux. Cela permet d'élever la valeur maximale de l'induction. On a fait les calculs numériques pour deux types d'enroulements: du solenoïde de Bitter et du solenoïde à deux sections.

K. ADAMIAK

OPTIMIERUNG MECHANISCHER SPANNUNGEN BEI SOLENOIDEN, DIE STARKE MAGNETFELDER GENERIEREN

Zusammenfassung

Einer der Faktoren, die den Maximalwert der Induktion bei Konstruktionen beschränken, die der Erzeugung fester, starker Magnetfelder dienen, sind Spulen zerreißende Bruchspannungen. Es wurde der Versuch unternommen, die Konstruktion durch Anwendung von Spulen mit veränderlicher Stromdichte zu optimieren. Die Verteilung der Stromdichte wird derartig gewählt, damit die Gleichmäßigkeit der Bruchspannungen in der kritischen Richtung gesichert ist. Diese Maßnahme ermöglicht eine gewisse Erhöhung des Maximalwertes der Induktion. Numerische Berechnungen wurden für zwei Spulentypen durchgeführt: den Bitter-Solenoid und den Zweisektionssolenoid.

К. АДАМЯК

ОПТИМИЗАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В СОЛЕНОИДАХ ГЕНЕРИРУЮЩИХ СИЛЬНЫЕ МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

Р е з ю м е

Одним из факторов ограничивающих максимальное значение индукции в конструкциях предназначенных для генерирования сильных постоянных магнитных полей являются разрывающие механические силы ведущие к разрушению обмоток. Предпринята попытка оптимизации конструкции соленоида путем применения обмоток с изменяющейся плотностью тока. Распределение плотности тока подбирается таким образом, чтобы обеспечить равномерность механических напряжений в наиболее критическом направлении. Позволяет это на некоторое увелечение максимального значения индукции. Числовые расчеты проведены для двух типов обмоток: соленоида Биттера и двухсекционного соленоида.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1984, 30. z. 1, ss. 71-86

621.317.311

Wyznaczanie właściwości metrologicznych komparatora magnetycznego prądów stałych o ułamkowej regulacji przepływu

ZDZISŁAW NAWROCKI (WROCŁAW)

Instytut Metrologii Elektrycznej Politechniki Wrocławskiej

Otrzymano 2.12.1981

W pracy przedstawiono analizę metrologiczną komparatora magnetycznego prądów stałych o ułamkowej regulacji przepływu oraz opisano metodę samowzorcowania umożliwiającą określenie znaku i wyznaczenie wartości błędu komparatora. Podano również zmodyfikowany układ dzielnika prądu pozwalający polepszyć właściwości metrologiczne komparatora.

1. WSTĘP

Komparatory magnetyczne prądów stałych należą do nowej generacji urządzeń pomiarowych realizujących porównanie prądów stałych z niedokładnością od 10^{-8} do 10^{-6} [4, 5]. Komparatory magnetyczne prądów stałych współpracujące z klasycznymi układami pomiarowymi umożliwiają pomiary: prądu i napięcia stałego, rezystancji, ilorazu rezystancji oraz temperatury.

Wpływ właściwości metrologicznych komparatora na niedokładność pomiaru wymienionych wielkości podano w opracowaniu [7]. Z danych literaturowych jak i doświadczeń uzyskanych podczas budowy komparatorów wynika, że właściwości metrologiczne komparatora magnetycznego uzależnione są od:

— przyjętego układu strukturalnego komparatora,
— właściwości materiałów tworzących magnetowody toroidalne,
— sposobu nawoju uzwojeń pomiarowych,
— techniki ekranowania i właściwości materiałów, z których wykonane są ekrany magnetyczne i elektrostatyczne,
— dokładności podziału prądu dzielnika rezystorowego zapewniającego ułamkową regulację przepływu,
— stałości napięcia wymuszającego prąd w uzwojeniu wzbudzającym,
— właściwości wskaźnika zera.

Ponadto istotny wpływ na dokładność określenia właściwości metrologicznych komparatora magnetycznego ma przyjęta metodyka wyznaczania błędów przepływów uzwojeń pomiarowych komparatora. Błędy przepływów uzwojeń pomiarowych komparatora ze względu na ekstremalnie małe wartości wyznacza się przy pomocy metody samowzorcowania [8]. W pracy [8] podano metodykę samowzorcowania komparatorów magnetycznych prądów stałych, umożliwiającą wyznaczanie błędów przepływów uzwojeń pomia-

rowych oraz błędów dekad o całkowitej liczbie zwojów. Opisana metoda pozwala oszacować również błędy przepływu dekad o ułamkowej liczbie zwojów.

W niniejszej pracy przedstawiono metodykę wyznaczania wartości i znaku błędów przepływu dekad komparatora magnetycznego prądów stałych o ułamkowej liczbie zwojów. W opracowaniu podano również zmodyfikowany układ rezystorowego dzielnika prądu, uwzględniający skończone wartości rezystancji uzwojeń, charakteryzujący się znacznie mniejszymi błędami podziału prądu, a tym samym i błędami przepływu aniżeli układ dotychczas stosowany.

Przedstawione w pracy rozważania umożliwiają wyznaczenie znaku i wartości błędów przepływu wszystkich dekad i uzwojeń pomiarowych komparatora, i mają szczególnie duże znaczenie wówczas, gdy komparator ma tylko dwie dekady o całkowitej liczbie zwojów, zaś pozostałe dekady są dekadami o ułamkowej liczbie zwojów.

2. DEFINICJA BŁĘDU KOMPARATORA MAGNETYCZNEGO PRĄDÓW STAŁYCH ORAZ DOKŁADNOŚĆ JEGO WYZNACZANIA

Błąd komparatora magnetycznego prądów stałych jest definiowany zależnością

$$\delta K = \frac{I_X z_X - I_N z_N}{I_N z_N} = \frac{\Delta I z_K}{I_N z_N}, \tag{1}$$

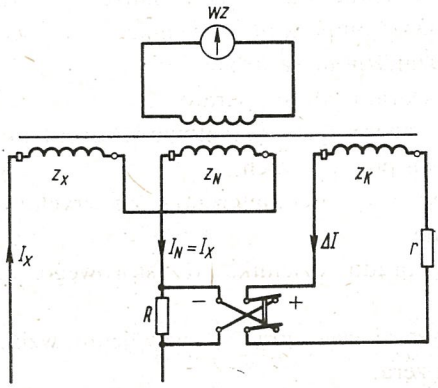
przy czym:

$I_X z_X$ — przepływ uzwojenia pomiarowego X,

$I_N z_N$ — przepływ uzwojenia pomiarowego N,

$\Delta I z_K$ — przepływ uzwojenia kompensacyjnego.

Błędy komparatora magnetycznego prądów stałych, gdy uzwojenia pomiarowe mają taką samą liczbę zwojów, wyznacza się w układzie podanym na rys. 1.



Rys. 1. Układ do wyznaczania błędów komparatora o tej samej liczbie zwojów uzwojeń pomiarowych

Wartość błędu komparatora, przy zrównoważonym wskaźniku zera, określa wyrażenie [8]

$$\delta K = \frac{z_K}{z_N} \frac{r}{R+r}, \tag{2}$$

natomiast niedokładność pomiaru błędu komparatora opisuje relacja [8]

$$\delta(\delta K) = \frac{R}{R+r}(\delta r - \delta R) \approx \left(1 - \frac{r}{R}\right)(\delta r - \delta R), \tag{3}$$

przy czym:

$R \gg r$,

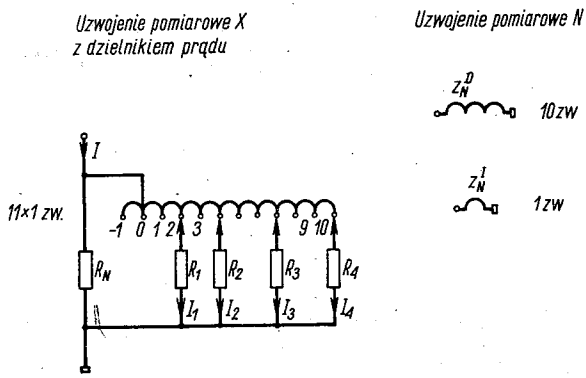
δR, δr — niepewności wykonania rezystorów, odpowiednio R i r.

3. ANALIZA BŁĘDÓW KOMPARATORA MAGNETYCZNEGO O UŁAMKOWEJ REGULACJI PRZEPŁYWU

W komparatorze podanym na rys. 2 wyróżniono uzwojenia pomiarowe N i X.

Uzwojenie pomiarowe N zawiera dwa uzwojenia: $z_N^0 = 10$ zwojów, $z_N^1 = 1$ zwój.

Uzwojenie pomiarowe X, do którego jest dołączony rezystorowy dzielnik prądu, ma jedno uzwojenie z 12 odczepami $z_X = 11$ zwojów.



Rys. 2. Układ komparatora magnetycznego prądów stałych o ułamkowej regulacji przepływu

Analizę właściwości metrologicznych komparatora magnetycznego o ułamkowej regulacji przepływu przeprowadzono stosując zmodyfikowany wzór (1). Przyjęto, że każde z uzwojeń pomiarowych, przez które płynie prąd, wytwarza w magnetowodzie przepływ, różniący się od przepływu występującego w komparatorze idealnym.

Przepływ w magnetowodzie rzeczywistym wywołany prądem I_N płynącym przez uzwojenie pomiarowe N jest równy [8]

$$\Theta_N = I_N z_N (1 + \delta U_N), \tag{4}$$

przy czym:

z_N — liczba zwojów uzwojenia pomiarowego N,

δU_N — błąd względny przepływu uzwojenia pomiarowego N o liczbie zwojów z_N.

Analogicznie do wzoru (4) zapisać można przepływ w magnetowodzie wytworzony prądem I_X przepływającym przez uzwojenie X, przy założeniu, że odłączony jest dzielnik prądu [8]

$$\Theta_X = I_X z_X (1 + \delta D), \tag{5}$$

przy czym:

z_X — liczba zwojów uzwojenia pomiarowego X,

δD — błąd względny podziału przepływu uzwojenia pomiarowego X o liczbie zwojów z_X.

W analizowanym komparatorze przepływ wytwarzany w uzwojeniu X jest regulowany za pomocą czterech dekad, zatem przepływ wytwarzany przez K-tą dekadę określa wzór

$$\Theta_X^K = I_X z_X G^K (1+\delta D_m^K)(1+\delta G^K), \tag{6}$$

przy czym:

G^K — podział prądu K-tej dekady dzielnika rezystorowego,

δG^K — błąd podziału prądu K-tej dekady dzielnika rezystorowego,

δD_m^K — błąd podziału przepływu uzwojenia X K-tej dekady o liczbie zwojów $z_X = m$.

W dalszych rozważaniach wprowadzono pojęcie ziarna regulacji ułamkowej liczby zwojów K-tej dekady opisane symbolem z_X^K powiązane z wielkościami m^K, z_X, G^K zależnością

$$z_X^K m^K = z_X G^K, \tag{7}$$

przy czym m^K — nastawa przełącznika K-tej dekady oraz przyjęto, że w budowanych komparatorach wartości liczbowe m^K i z_X są sobie równe, otrzymano stąd

$$z_X^K = G^K. \tag{8}$$

Podstawiając wyrażenie (7) do wzoru (6) otrzymano przepływ K-tej dekady, który jest równy

$$\Theta_X^K = I_X z_X^K m^K (1+\delta D_m^K)(1+\delta G^K). \tag{9}$$

Ponieważ przepływ wytwarzany przez uzwojenie X jest regulowany za pomocą czterech dekad, stąd po uwzględnieniu wzoru (9) przepływ wypadkowy opisany jest relacją

$$\Theta_X = I_X \sum_{K=I}^{IV} z_X^K m^K (1+\delta D_m^K)(1+\delta G^K), \tag{10}$$

przy czym K — wskaźnik sumowania przepływów.

Błąd komparatora magnetycznego, zgodnie ze wzorem (1), przyjętymi założeniami oraz zależnościami (4) i (10) określa wyrażenie

$$\delta K = \frac{\Theta_X - \Theta_N}{\Theta_N} = \frac{I_X \sum_{K=I}^{IV} z_X^K m^K (1+\delta G^K)(1+\delta D_m^K) - I_N z_N (1+\delta U_N)}{I_N z_N (1+\delta U_N)}. \tag{11}$$

Wyrażenie to dowodzi, że błąd komparatora prądów zależy od błędów przepływów uzwojeń pomiarowych i błędów podziału prądu dzielnika rezystorowego. Uwzględniając zatem, że we wzorze (11) zachodzi równość

$$I_X \sum_{K=I}^{IV} z_X^K m^K = I_N z_N, \tag{12}$$

to wyrażenie (11) można zapisać w postaci

$$\delta K = \frac{\dfrac{\sum_{K=I}^{IV} z_X^K m^K (\delta D_m^K + \delta G^K + \delta D_m^K \delta G^K)}{\sum_{K=I}^{IV} z_X^K m^K} - \delta U_N}{1 + \delta U_N}. \tag{13}$$

Po uwzględnieniu, że: $\delta U_N \ll 1$, $\delta D_m^K \delta G^K \ll \delta D_m^K + \delta G^K$, wzór określający błąd komparatora podaje zależność

$$\delta K = \frac{\sum_{K=I}^{IV} z_X^K m^K (\delta D_m^K + \delta G^K)}{\sum_{K=I}^{IV} z_X^K m^K} - \delta U_N. \tag{14}$$

W powyższym wzorze, w liczniku pod znakiem sumowanie, występują dwie grupy błędów, błędy podziału przepływu uzwojenia X oraz błędy podziału prądu δG^K dzielników rezystorowych. Błędy podziału przepływu δD_m^K czterech dekad określone są parametrami uzwojenia X, a zatem zależą wyłącznie od położenia nastaw przełączników m. Błędy te przyjmują zbliżone wartości. Błędy podziału prądu δG^K uzależnione są od właściwości metrologicznych rezystorów tworzących dzielnik prądu i błędy te w zakresie poszczególnych dekad mają tę samą wartość. Przyjmując, że wartości rezystorów tworzących dzielnik zostaną wyrównane na tym samym poziomie dokładności, to z wzoru (14) wynika, że błąd komparatora δK uzależniony jest głównie od błędów dekad o największych wartościach przepływu.

4. BŁĘDY ELEMENTÓW TWORZĄCYCH KOMPARATOR MAGNETYCZNY PRĄDÓW STAŁYCH O UŁAMKOWEJ REGULACJI PRZEPŁYWU

4.1. Błędy podziału prądu dzielnika rezystorowego

Dołączony do uzwojenia X czterodekadowy dzielnik prądu utworzony przez rezystory R_N, R_1, R_2, R_3 i R_4 umożliwia ułamkową regulację przepływu. W początkowej fazie rozważań przyjęto, że rezystancja uzwojenia X jest równa zeru oraz pominięto rezystancje styków przełączników dekadowych.

Zastępcza rezystyncja dzielnika prądu, po uwzględnieniu powyższego założenia wynosi (rys. 2)

$$R_z = \frac{1}{\dfrac{1}{R_N} + \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4}}. \tag{15}$$

Ponieważ stosunek wartości prądów przepływających przez rezystory dzielnika jest równy

$$\frac{I}{I_1} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{I_2}{I_3} = \frac{I_3}{I_4} = 10, \tag{16}$$

to iloraz wartości rezystancji tych rezystorów przyjmuje wartość

$$\frac{R_z}{R_1} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_2}{R_3} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{1}{10}. \tag{17}$$

Po podstawieniu zależności (17) do wzoru (15) otrzymano relację określającą wartość rezystora R_N

$$R_N = R_1 \frac{1000}{8889}. \tag{18}$$

Przyjmując wartość rezystora $R_1 = 100\ \Omega$ [4, 5], z wyrażenia (18) otrzymano wartość rezystora R_N

$$R_N = 11{,}24986\ \Omega.$$

Analiza układu dzielnika prądu prowadzi do wniosku, że dla zapewnienia poprawności podziału prądu rezystor R_N należy tak dobrać, aby jego rezystancja była nieporównywalnie większa od sumarycznej rezystancji uzwojenia X, a moc wydzielana w tym rezystorze nie przekraczała kilkunastu W. Warunek ten jest spełniony, gdy rezystancja R_1 przyjmuje wartość w przedziale od 50 do 100 Ω.

Niedokładność podziału prądu dzielnika rezystorowego dekady I, przy pominięciu rezystancji uzwojenia X oraz styków przełączników dekadowych, określono z wyrażenia

$$G^{\mathrm{I}} = \frac{I_1}{I} = \frac{R_z}{R_1}, \tag{19}$$

którego różniczka zupełna wynosi

$$\Delta G^{\mathrm{I}} = \frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial R_z}\Delta R_z + \frac{\partial G^{\mathrm{I}}}{\partial R_1} \quad \Delta R_1 = \frac{R_z}{R_1}(\delta R_z - \delta R_1). \tag{20}$$

Stąd błąd podziału prądu dzielnika rezystorowego dekady I podaje wzór

$$\delta G^{\mathrm{I}} = \frac{\Delta G^{\mathrm{I}}}{G^{\mathrm{I}}} = \delta R_z - \delta R_1. \tag{21}$$

Analogicznymi wyrażeniami do relacji (21) opisano błędy podziału prądu dzielników pozostałych dekad.

Niedokładność wyznaczenia rezystancji R_z określono po przeprowadzeniu prostych obliczeń z wyrażenia (15)

$$\delta R_z = \frac{\delta R_N + \frac{R_N}{R_1}(\delta R_1 + 0{,}1\delta R_2 + 0{,}01\delta R_3 + 0{,}001\delta R_4)}{1 + 1{,}111\frac{R_N}{R_1}}. \tag{22}$$

Uwzględniając rezystancję uzwojenia X oraz wyrażenie (17) otrzymuje się przybliżony wzór

$$\delta R_z \approx \frac{\delta R_N + \frac{R_N}{R_1}\left\{m^{\mathrm{I}}\frac{\Delta R_X}{R_1} + \delta R_1 + 0{,}1\left[(m_1 + 0{,}1m^{\mathrm{II}})\frac{\Delta R_X}{R_1} + \right.\right.}{1 + 1{,}111\frac{R_N}{R_1}}$$

$$+\delta R_2\Big]+0{,}01\left[(m_2+0{,}1m_3)\frac{\Delta R_X}{R_1}+\delta R_3\right]+0{,}001\left[(m_4+0{,}1m_5)\frac{\Delta R_X}{R_1}+\delta R_4\right]\Big\}, \tag{23}$$

przy czym: $m^{\mathrm{I}}, \ldots, m^{\mathrm{IV}}$ — nastawy dekad I, ..., IV,

$m_1, \ldots, m_5$ — parametry nastaw dekad,

$m_1 = m^{\mathrm{II}}$, gdy $m^{\mathrm{I}} > m^{\mathrm{II}}$,

$m_1 = m^{\mathrm{I}}$, gdy $m^{\mathrm{I}} < m^{\mathrm{II}}$,

$m_1 = m^{\mathrm{I}} = m^{\mathrm{II}}$, gdy $m^{\mathrm{I}} = m^{\mathrm{II}}$,

ΔR_X — wartość średnia rezystancji jednego zwoju uzwojenia X.

Podobnie określono wartości parametrów nastaw $m_2, \ldots, m_5$. Wartości tych parametrów uzyskać można porównując kolejno odpowiednio nastawy m^{I} i m^{II} z nastawami m^{III} i m^{IV}.

Ze wzoru (23) wynika, że największy wpływ na błąd δR_z ma rezystancja uzwojenia X w przypadku dekad I i II. Zapisać można zatem z wystarczającą dokładnością, że błąd wyznaczenia rezystancji R_z jest równy

$$\delta R_z \approx \frac{\delta R_N+\frac{R_N}{R_1}\left\{m^{\mathrm{I}}\frac{\Delta R_X}{R_1}+\delta R_1+0{,}1\left[(m_1+0{,}1m^{\mathrm{II}})\frac{\Delta R_X}{R_1}+\delta R_2\right]+0{,}01\delta R_3+0{,}001\delta R_4\right\}}{1+1{,}111\frac{R_N}{R_1}}. \tag{24}$$

Ostatecznie po uwzględnieniu relacji (18) analizowany wzór przyjmuje postać

$$\delta R_z \approx 0{,}8889\delta R_N+0{,}1\left\{m^{\mathrm{I}}\frac{\Delta R_x}{R_1}+\delta R_1+0{,}1\left[(m_1+0{,}1m^{\mathrm{II}})\frac{\Delta R_X}{10R_1}+\delta R_2\right]+\right.$$
$$\left.+0{,}01\delta R_3+0{,}001\delta R_4\right\}. \tag{25}$$

Wpływ skończonej wartości rezystancji uzwojenia X we wzorze (21) opisującym błąd podziału prądu dekady I dzielnika rezystorowego określa wyrażenie

$$\delta G^{\mathrm{I}} = \delta R_z-\left(m^{\mathrm{I}}\frac{\Delta R_x}{R_1}+\delta R_1\right). \tag{26}$$

Podobnie błąd podziału prądu dzielnika rezystorowego dekady II wynosi

$$\delta G^{\mathrm{II}} = \delta R_z-\left[(m_1+0{,}01m^{\mathrm{II}})\frac{\Delta R_X}{R_1}+\delta R_2\right], \tag{27}$$

natomiast błąd podziału prądu dla pozostałych dekad z wystarczającą dokładnością opisują wzory analogiczne do wyrażenia (21).

4.2. Błędy przepływów uzwojeń pomiarowych

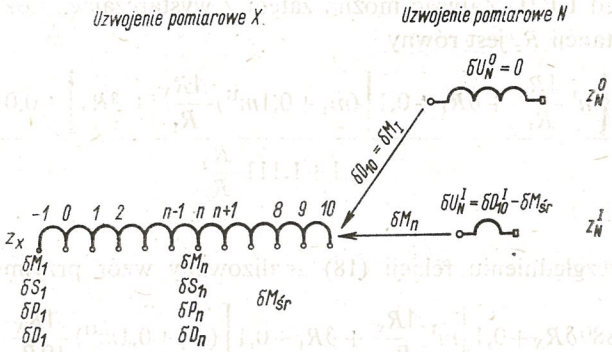
Błędy względne przepływów uzwojenia N i błędy względne podziału przepływów uzwojenia X wyznaczono metodą samowzorcowania [1, 8]. W tej metodzie, przyjęto,

że przepływ uzwojenia z_N^0 jest przepływem odniesienia i do tego przepływu odnoszone będą przepływy uzwojeń pomiarowych z_X i z_N^I.

W pierwszym kroku metody samowzorcowania porównano, w układzie podanym na rys. 1, przepływy uzwojenia z_N^0 i uzwojenia z_X dla nastawy $m = 10$. Błąd porównania wyżej wymienionych przepływów, który jest jednocześnie błędem względnym podziału przepływu uzwojenia z_X dla nastawy $m = 10$, odniesiony do przepływu uzwojenia pomiarowego z_N^0 jest równy

$$\delta M_I = \delta D_{10}^I = \frac{I_X z_X - I_N z_N^0}{I_N z_N^0} = \frac{z_K}{z_N^0} \frac{r}{R+r}. \tag{28}$$

W drugim kroku samowzorcowania, pokazanym na rys. 3, porównywane są przepływy poszczególnych sekcji uzwojenia z_X z przepływem uzwojenia z_N^I. Dla nastaw $m = 0, 1, \ldots, n, \ldots, 10$ uzwojenia z_X otrzymano następujące względne różnice przepływów sekcji $(n-1)$, n i uzwojenia pomiarowego z_N^I: δM_{-1}, $\delta M_1, \ldots, \delta M_n, \ldots, \delta M_{10}$.



Rys. 3. Diagram samowzorcowania komparatora prądów

Wartość średnia względnej różnicy przepływów kolejnych sekcji uzwojenia z_X i uzwojenia pomiarowego z_N^I liczona jest ze wzoru

$$\delta M_{śr} = \frac{1}{10} \sum_{m=1}^{10} \delta M_m. \tag{29}$$

Względne różnice przepływów sekcji uzwojenia z_X i uzwojenia pomiarowego z_N^I skorygowane o wartość średnią względnej różnicy przepływów $\delta M_{śr}$ dla nastaw $m = -1, 1, \ldots, n, \ldots, 10$ określa wyrażenie

$$\delta S_n = \delta M_n - \delta M_{śr}. \tag{30}$$

Błąd podziału przepływu uzwojenia z_X dla nastawy $m = -1$ odniesiony do wartości średniej podaje zależność

$$\delta P_{-1} = \delta M_{-1} - \delta M_{śr}, \tag{31}$$

natomiast rozpatrywany błąd podziału przepływu dla nastaw $m = n$, gdy $n \geqslant 1$, wyraża relacja

$$\delta P_n = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \delta M_m - \delta M_{śr}. \tag{32}$$

Błąd względny podziału uzwojenia z_X dla nastawy $m = -1$ odniesiony do przepływu uzwojenia pomiarowego z_N^0 przyjmuje postać

$$\delta D_{-1}^{\mathrm{I}} = \delta P_{-1} + \delta D_{10}^{\mathrm{I}}. \tag{33}$$

zaś analizowany błąd dla pozostałych nastaw $m = n$ opisuje relacja

$$\delta D_n^{\mathrm{I}} = \delta P_n + \delta D_{10}^{\mathrm{I}}. \tag{34}$$

Ostatecznie błąd przepływu uzwojenia pomiarowego z_N^{I} odniesiony do przepływu uzwojenia pomiarowego z_N^0 podaje wzór

$$\delta U_N^{\mathrm{I}} = \delta D_{10}^{\mathrm{I}} - \delta M_{śr}. \tag{35}$$

Przedstawione wzory oraz relacje podane w rozdziale 4.1 łącznie z zależnością (14) umożliwiają określenie znaku i wyznaczenie wartości błędu komparatora magnetycznego prądów stałych o ułamkowej regulacji przepływu.

5. MINIMALIZACJA BŁĘDÓW PODZIAŁU PRĄDU DZIELNIKA REZYSTOROWEGO

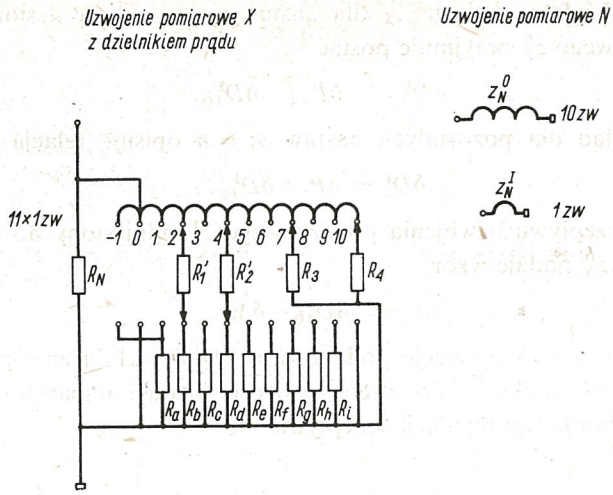
Z rozważań podanych w rozdziale 4.1 wynika, że w rzeczywistym komparatorze magnetycznym prądów stałych błąd podziału prądu uzależniony jest od wartości rezystancji uzwojenia pomiarowego X oraz rezystancji przejścia styków przełączników dekadowych. Rezystancja uzwojenia pomiarowego X w najniekorzystniejszym przypadku, występującym dla nastawy $m = 10$, może przyjmować wartości od kilkunastu do kilkudziesięciu mΩ. W celu uzyskania możliwie małej rezystancji uzwojenia pomiarowego X należy uzwojenie to wykonać przewodem o jak najmniejszej rezystancji. Rezystancja przejścia styków przełącznika dekadowego charakteryzowana jest przez dwie składowe: rezystancję stałą w czasie i rezystancję zmieniającą się. Przełączniki dekadowe o dobrej konstrukcji mają stałą wartość rezystancji na poziomie 0,5 mΩ, zaś wartość zmieniająca się nie przekracza 0,2 mΩ [3]. Składowa rezystancji przejścia przełącznika dekadowego o stałej wartości nie wpływa na błąd podziału prądu, ponieważ wartość tę uwzględnia się podczas wyrównywania rezystorów tworzących dzielnik prądu. Jak podano we wzorze (23) rezystancje uzwojenia pomiarowego X przyjmują wartość zależną od nastaw m. Rezystancje te można odpowiednio skorygować stosując w dzielniku prądu podwójne przełączniki dekadowe i włączając do układu odpowiednio dobrane rezystory.

Celowość stosowania przedstawionego rozwiązania uzależniona jest od wartości błędów podziału przepływu δD_m^K uzwojenia pomiarowego X. Z analizy wzoru (14) wynika, że błąd podziału prądu δG^K dzielnika rezystorowego I dekady nie powinien przekraczać maksymalnej wartości błędu podziału przepływu δD_m^K, $(\delta G^{\mathrm{I}} \leqslant \delta D_m^K|_{max})$. Natomiast między błędami podziału prądu dzielników pozostałych dekad a maksymalną wartością błędu podziału przepływu δD_m^K uzwojenia X powinny zachodzić relacje:

$$\delta G^{\mathrm{II}} \leqslant 10\delta D_m^K|_{max},$$

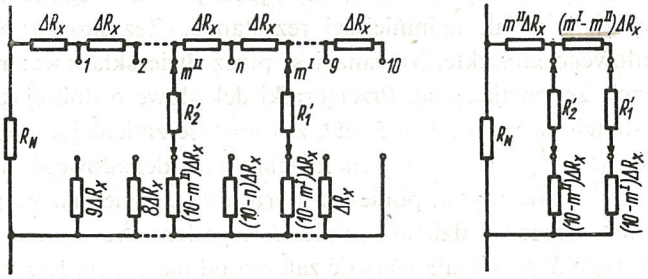
$$\delta G^{\mathrm{III}} \leqslant 100\delta D_m^K|_{max},$$

$$\delta G^{\mathrm{IV}} \leqslant 1000\delta D_m^K|_{max}.$$



Rys. 4. Układ komparatora magnetycznego ze zmodyfikowanym dzielnikiem prądu

Minimalizację błędu podziału prądu δG^K zapewnia układ przedstawiony na rys. 4. W tym układzie w szereg z rezystorami R_1' i R_2' włączono, poprzez podwójne przełączniki dekadowe, dodatkowe rezystory R_a, R_b, ..., R_i, przy czym całkowite wartości rezystancji poszczególnych gałęzi wynoszą odpowiednio $R_1 = 100\ \Omega$ i $R_2 = 1000\ \Omega$. Rezystory R_3 i R_4 nie są korygowane, ponieważ wpływ rezystancji uzwojenia pomiarowego X na błąd podziału prądu dzielników rezystorowych dekad III i IV jest pomijalnie mały.



Rys. 5. Układ dzielnika prądu komparatora magnetycznego pokazanego na rys. 4, dla $m^{\mathrm{I}} > m^{\mathrm{II}}$
a) układ zastępczy, b) układ zredukowany

Błędy dodatkowe zmodyfikowanego rezystorowego dzielnika prądu spowodowane skończoną rezystancją uzwojenia X wyznaczono na podstawie rys. 5. Na rys. 5 podano układ zastępczy rezystorowego dzielnika prądu przedstawionego na rys. 4 dla nastaw $m^{\mathrm{I}} > m^{\mathrm{II}}$, pomijając składowe rezystancji przejścia styków o zmiennej wartości oraz rezystory R_3 i R_4 dekad III i IV. Przyjęto również, że rezystancje kolejnych zwojów uzwojenia X są sobie równe i wynoszą ΔR_X.

Wypadkowa rezystancja obwodu, przez który płynie prąd o wartości $0{,}1I_X$ określona jest zależnością

$$R_{1W} = R_1 + \frac{(R_1 - m^*\Delta R_X)m^*\Delta R_X}{10R_1 - m^*\Delta R_X} \approx R_1 + 0{,}1m^*\Delta R_X, \tag{36}$$

natomiast rezystancja obwodu, przez który płynie prąd o wartości $0{,}01I_X$ jest równa

$$R_{2w} = R_2 + \frac{(R_2 - m^*\Delta R_X)m^*\Delta R_X}{0{,}1R_2 - m^*\Delta R_X} \approx R_2 + 10m^*\Delta R_X, \tag{37}$$

przy czym:

m^* — parametr nastawy, zależny od wartości nastaw m^{I} i m^{II}, określony zależnościami:

$m^* = m^{\mathrm{I}}$, gdy $m^{\mathrm{I}} > m^{\mathrm{II}}$,

$m^* = m^{\mathrm{II}}$, gdy $m^{\mathrm{I}} < m^{\mathrm{II}}$,

$m^* = 10$, gdy $m^{\mathrm{I}} = m^{\mathrm{II}}$,

$$R_1 = R_1' + 10\Delta R_X, \tag{38}$$

$$R_2 = R_2' + 10\Delta R_X. \tag{39}$$

Dodatkowe błędy względne rezystorów tworzących dzielnik prądu $0{,}1I_X$ i $0{,}01I_X$ spowodowane skończoną wartością rezystancji uzwojenia X określono na podstawie wzorów (36) i (37). Wynoszą one odpowiednio dla dekady I

$$\delta R_{1d} = 0{,}1m^*\frac{\Delta R_X}{R_1} \tag{40}$$

oraz dla dekady II

$$\delta R_{2d} = m^*\frac{\Delta R_X}{R_1}, \tag{41}$$

natomiast dodatkowe błędy względne rezystorów R_3 i R_4 wywołane skończoną wartością rezystancji uzwojenia X podają z wystarczającą dokładnością zależności

$$\delta R_{3d} = (m_2 + 0{,}1m_3)\frac{\Delta R_X}{R_1}, \tag{42}$$

$$\delta R_{4d} = (m_4 + 0{,}1m_5)\frac{\Delta R_X}{R_1}, \tag{43}$$

przy czym oznaczenia parametrów nastaw $m_2, \ldots, m_5$ jak we wzorze (23).

Analogicznie do wzoru (23) niedokładności wyznaczenia rezystancji R_z dla analizowanego układu opisuje relacja

$$\delta R_z \approx \frac{\delta R_N + \frac{R_N}{R_1}\left\{0{,}1m^*\frac{\Delta R_X}{R_1} + \delta R_1 + 0{,}1\left(m^*\frac{\Delta R_X}{R_1} + \delta R_2\right) + \right.}{1 + 1{,}111\frac{R_N}{R_1}}$$

$$\left. + 0{,}01\left[(m_2 + 0{,}1m_3)\frac{\Delta R_X}{R_1} + \delta R_3\right] + 0{,}001\left[(m_4 + 0{,}1m_5)\frac{\Delta R_X}{R_1} + \delta R_4\right]\right\}. \tag{44}$$

Błędy podziału prądu zmodyfikowanego dzielnika wyznaczyć można z zależności podobnych do wzorów (26) i (27).

Przeprowadzone rozważania dowodzą, że zaproponowane rozwiązanie układowe dzielnika prądu pokazane na rys. 4 umożliwia zmniejszenie błędu podziału dzielnika prądu spowodowanego skończoną rezystancją uzwojenia X dla dekady I o jeden rząd, natomiast błędy pozostałych dekad przyjmują wartości tego samego rzędu jak w układzie pokazanym na rys. 3.

Podane wyżej wyrażenia pozwalają określić wpływ skończonej wartości rezystancji uzwojenia X na parametry metrologiczne komparatora magnetycznego prądów stałych. Tytułem przykładu w tablicy 1 podano dopuszczalne błędy elementów tworzących 7-dekadowy komparator magnetyczny prądów stałych o niedokładności porównania prądów na poziomie $1 \cdot 10^{-7}$.

Tablica 1

Dopuszczalne błędy przepływu i dzielnika prądu siedmiodekadowego komparatora magnetycznego prądów stałych o dokładności $1 \cdot 10^{-7}$

Dekada	Liczba zwojów	Wpływ błędów poszczególnych dekad na błąd komparatora	Błędy podziału przepływu dekad	Błędy podziału przepływu uzwojeń	Błędy wyrównania dzielnika prądu	Błędy dodatkowe dzielnika prądu
I	10×100	1	10^{-7}	10^{-7}	—	—
II	11×10	10^{-1}	10^{-6}	10^{-6}	—	—
III	11×1	10^{-2}	10^{-5}	10^{-5}	—	—
IV	$11 \times 0{,}1$	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}
V	$11 \times 0{,}01$	10^{-4}	10^{-3}		10^{-4}	10^{-4}
VI	$11 \times 0{,}001$	10^{-5}	10^{-2}		10^{-3}	10^{-3}
VII	$11 \times 0{,}0001$	10^{-6}	10^{-1}		10^{-2}	10^{-2}

Z przedstawionych rozważań oraz parametrów metrologicznych elementów tworzących siedmiodekadowy komparator magnetyczny prądów stałych podanych w tablicy 1 wynika, że w rezystorowym dzielniku prądu największe wymagania stawiane są dzielnikowi dekady IV. Dla zapewnienia dekadzie IV komparatora błędu na poziomie 10^{-4}, poszczególne błędy cząstkowe: błędy podziału przepływu uzwojeń komparatora, błąd rezystorowego dzielnika prądu i dodatkowy błąd dzielnika prądu, nie powinny przekraczać wartości 10^{-5}. Wyznaczono stąd rezystancję jednego zwoju uzwojenia X, która w najniekorzystniejszym przypadku dla $m = 10$ przyjmuje wartości: dla układu podanego na rys. 3 $\Delta R_X \leqslant$ $\leqslant 0{,}1$ mΩ (wartość tę obliczono ze składnika wzoru (26)), natomiast dla zmodyfikowanego dzielnika prądu (rys. 4) $\Delta R_X \leqslant 1$ mΩ (wartość tę określono z relacji (40)).

Uzyskanie rezystancji jednego zwoju uzwojenia o wartości 0,1 mΩ, zaniedbując składową zmienną rezystancji przejścia styków [3], jest stosunkowo trudne, ponieważ należałoby wykonać zwój o długości ca 0,5 m [4] przewodem miedzianym o przekroju 85 mm^2. W zmodyfikowanym układzie dzielnika prądu rezystancja jednego zwoju nie powinna przekraczać 1 mΩ, co przy długości ca 0,5 m daje powierzchnię przewodu miedzianego 8,5 mm^2.

6. BŁĘDY WYKONANEGO KOMPARATORA MAGNETYCZNEGO O UŁAMKOWEJ REGULACJI PRZEPŁYWU

Błąd komparatora o ułamkowej regulacji przepływu, zgodnie ze wzorem (14) jest odpowiednio sumą błędów podziału przepływu δD_m^K uzwojenia X i błędów podziału prądu δG^K dzielnika rezystorowego oraz błędu przepływu uzwojenia pomiarowego N.

Błędy przepływów uzwojeń pomiarowych N i X zbudowanego komparatora wyznaczono na podstawie wzorów podanych w rozdziale 4.2. Obliczone błędy przepływów uzwojeń pomiarowych N są odpowiednio równe:

$$\delta U_N^0 = 0,$$

$$\delta U_N^I = -17 \cdot 10^{-6}.$$

Natomiast błędy podziału uzwojenia pomiarowego X kolejnych nastaw m przyjmują wartości: $\delta D_{-1} = +25 \cdot 10^{-6}$, $\delta D_1 = +33 \cdot 10^{-6}$, $\delta D_2 = +38 \cdot 10^{-6}$, $\delta D_3 = +23 \cdot 10^{-6}$, $\delta D_4 = +11 \cdot 10^{-6}$, $\delta D_5 = +8{,}2 \cdot 10^{-6}$, $\delta D_6 = -5{,}6 \cdot 10^{-6}$, $\delta D_7 = -2{,}3 \cdot 10^{-6}$, $\delta D_8 = -4{,}2 \cdot 10^{-6}$, $\delta D_9 = +1{,}1 \cdot 10^{-6}$, $\delta D_{10} = -2{,}7 \cdot 10^{-6}$.

Błędy podziału prądu dzielnika rezystorowego (rys. 4) wyznaczono na podstawie parametrów metrologicznych rezystorów tworzących dzielnik oraz skończonych wartości rezystancji uzwojenia pomiarowego X i rezystancji przejścia styków przełączników dekadowych. Wartość średnia rezystancji jednego zwoju uzwojenia X wynosi $\Delta R_X = 0{,}92$ mΩ. Rezystory wyrównawcze $R_a, R_b, \ldots, R_i$ wykonano z drutu manganiowego według zależności $R_a = 9\Delta R_X$, $R_b = 8\Delta R_X, \ldots, R_i = \Delta R_X$ z niedokładnością $1 \cdot 10^{-2}$. Rezystory dzielnika prądu R_N, R_1', R_2', R_3 i R_4 wykonano również z manganinu i wyrównano względem rezystora R_N, ($\delta R_N = 0$), w układzie podwójnego mostka transformatorowego [2] w temperaturze $(20{,}00 \pm 0{,}01)$°C [6], z następującymi błędami: $R_1' = +15 \cdot 10^{-6}$, $R_2' = +57 \cdot 10^{-6}$, $R_3 = -340 \cdot 10^{-6}$, $R_4 = +960 \cdot 10^{-6}$. Wartości rezystancji rezystorów R_1' i R_2' wyznaczono ze wzorów (28) i (39) uwzględniając, że rezystancja przejścia styków przełączników dekadowych jest równa 0,5 mΩ. W zbudowanym dzielniku prądu błędy dodatkowe spowodowane siłami termoelektrycznymi i zmianami rezystancji uzwojenia pomiarowego X są pomijalnie małe.

Na podstawie wzorów (44), (26) i (27) oraz podanych parametrów metrologicznych elementów tworzących dzielnik prądu określono błędy podziału prądu, które dla kolejnych dekad, w najniekorzystniejszym przypadku dla $m^I = m^{II}$, wynoszą odpowiednio $\delta G^I \approx -20 \cdot 10^{-6}$, $\delta G^{II} \approx -140 \cdot 10^{-6}$, $\delta G^{III} \approx +240 \cdot 10^{-6}$, $\delta G^{IV} \approx -890 \cdot 10^{-6}$.

Całkowity błąd komparatora magnetycznego prądów stałych wyznaczyć można dla dowolnych nastaw przełączników dekadowych podziału przepływu ze wzoru (14) uwzględniając, że poziom pełzania zera wykonanego komparatora łącznie ze wskaźnikiem zera nie przekracza $\Delta K_D \leqslant \pm 50$ μAz, pamięć magnetyczna komparatora jest mniejsza od wartości $\Delta K_P \leqslant \pm 40$ μAz, a błąd pobudliwości $\delta C \leqslant \pm 1 \cdot 10^{-8}$.

Z podanych wyżej parametrów oraz danych zawartych w tablicy 1 wynika, że wykonany komparator magnetyczny o ułamkowej regulacji przepływu spełnia wymagania jakie postawiono dekadom: V, VI, VII i VIII komparatora o niedokładności porównania prądów $1 \cdot 10^{-7}$.

7. WNIOSKI I UWAGI KOŃCOWE

Przedstawiona w pracy metodyka obliczeń błędów komparatora magnetycznego prądów stałych o ułamkowej regulacji przepływu umożliwia określenie znaku i wyznaczenie wartości błędów podziału poszczególnych dekad uzwojenia pomiarowego X i błędów przepływu uzwojenia pomiarowego N. Sprecyzowanie znaku i wartości błędu komparatora pozwala na znaczne zmniejszenie niedokładności porównania prądów, a tym samym zredukowanie błędów układów pomiarowych, w których stosowane są komparatory [7]. Podane w opracowaniu zależności mogą znaleźć zastosowanie zarówno do oceny właściwości metrologicznych komparatorów, jak i podczas ich projektowania i budowy.

Poprawność przeprowadzonych obliczeń sprawdzić można przez porównanie obliczonych błędów podziału przepływów dekad z wynikami pomiarów:
— dekady I o nastawie $m = -1$ z dekadą II o nastawie $m = 10$,
— dekady II o nastawie $m = -1$ z dekadą III o nastawie $m = 10$,
— dekady III o nastawie $m = -1$ z dekadą IV o nastawie $m = 10$.

Przedstawione w pracy rozważania są uzupełnieniem metody samowzorcowania wielodekadowych komparatorów magnetycznych prądów stałych [8]. W pracy [8] opisano zasadę samowzorcowania wielodekadowych komparatorów, przy czym pokazano, że istnieje możliwość metrologicznego opisu błędów podziału przepływów dekad o całkowitej liczbie zwojów oraz oszacowania wartości błędów podziału przepływu dekad o ułamkowej liczbie zwojów. Opisane w pracy rozważania oraz analiza podana w [8] pozwalają na określenie właściwości metrologicznych wszystkich dekad komparatora jak i uzwojeń pomiarowych N.

Przeprowadzona analiza metrologiczna komparatora magnetycznego prądów stałych wskazała na konieczność zmodyfikowania rezystorowego dzielnika prądu. Zaproponowany i pokazany na rys. 4 układ dzielnika prądu umożliwia znaczne polepszenie parametrów metrologicznych komparatora.

W pracy wykazano również, że błędy podziału prądu dzielników pokazanych na rys. 2 i 4, a tym samym błędy dekad o ułamkowej wartości przepływów są uzależnione od nastaw dekad o większych wartościach przepływu. Wynika stąd, że dalszą znaczną poprawę parametrów metrologicznych komparatora magnetycznego prądów stałych o ułamkowej wartości przepływu uzyskać można wykonując cztery uzwojenia pomiarowe X, każde o liczbie $z_X = 11$ zwojów, które współpracować będą z poszczególnymi dekadami. Rezystancje tych uzwojeń należy również, podobnie jak pokazano na rys. 4, korygować za pomocą zestawów rezystorów wyrównawczych.

Podana w pracy analiza metrologiczna komparatora magnetycznego prądów stałych dowodzi, że skończone wartości rezystancji uzwojeń dekad o ułamkowej regulacji przepływu mogą być źródłem błędów komparatora magnetycznego o znaczących wartościach.

LITERATURA

1. I. I. Hill, T. A. Deacon, *Theory, design and measurement of inductive voltage dividers*, Proc. IEE, vol. 115, 1968, Nr 5, pp. 727—735.
2. J. Jaskulski, *Termometryczny mostek prądu przemiennego*, Pomiary, Automatyka, Kontrola, 1978, nr 6, ss. 170—171.

3. M. Kędzierski, S. Domasławski, *Opracowanie wytycznych do konstrukcji przełączników do mierników elektrycznych i elektrycznych układów pomiarowych*, Warszawa, Instytut Elektrotechniki, 1968.
4. N. L. Kusters, *A current comparator for the precision measurement of D-C ratios*, IEEE Trans. on Communication and Elektronics, vol. CE-83, 1964, January, pp. 22—27.
5. N. L. Kusters, M. P. MacMartin, *A direct-current-comparator bridge for measuring shunts up to* 20 000 *ampers*, IEEE Trans. an Instr. and Measurement, vol. IM-18, 1969, December, pp. 266—271.
6. M. Lisowski, K. Nowak, *Regulator temperatury współpracujący z termostatem*, Pomiary, Automatyka, Kontrola, 1981, nr 6, ss. 209—211.
7. Z. Nawrocki, *Analiza metrologiczna układów pomiarowych z komparatorami magnetycznymi prądów stałych*, Rozprawy Elektrotechniczne, z. 1, 1983, ss. 183-200.
8. Z. Nawrocki, *Metodyka samowzorcowania komparatorów magnetycznych prądów stałych*, Rozprawy Elektrotechniczne, z. 3, 1983, ss. 781-793.

Z. NAWROCKI

CALCULATION OF METROLOGICAL PROPERTIES OF MAGNETIC DIRECT CURRENT COMPARATORS WITH FRACTIONAL MAGNETIC FLUX CONTROL

Summary

A metrological analysis of the magnetic dc comparator with the fractional magnetic flux contro has been presented. A method of the selfcalibration which enables the calculation of the sign and the value of the comparator error has been described. The modified current divider circuit has been given. This circuit improves the metrological properties of the comparator.

Z. NAWROCKI

DÉTERMINATION DES PARTICULARITÉS DE MESURAGE D'UN COMPARATEUR MAGNÉTIQUE DES COURANTS CONTINUS À RÉGULATION D'ÉCOULEMENT FRACTIONNAIRE

Résumé

Dans le travail on a présenté l'analyse métrologique d'un comparateur magnétique des courants continus à régulation d'écoulement fractionnaire et on a décrit la méthode d'autoétalonnage, facilitant la détermination du signe et l'évaluation de l'erreur du comparateur. Aussi, a-t-on donné le système modifié du diviseur de courant permettant d'améliorer les particularités de mesurage du comparateur.

Z. NAWROCKI

BESTIMMUNG DER METROLOGISCHEN EIGENSCHAFTEN EINES MAGNETISCHEN GLEICHSTROMKOMPARATORS MIT BRUCHREGULATION DES MAGNETISCHEN FLUSSES

Zusammenfassung

Im Aufsatz wurde eine metrologische Analyse eines magnetischen Gleichstromkomparators mit Bruchregulation des magnetischen Flusses dargestellt. Die Methode für Selbstkalibrierung wurde beschrieben. Diese Methode gestattet die Bestimmung des Vorzeichens und des Wertes des Komparatorfehlers. Ein modifiziertes Stromteilersystem wurde gebracht, das die metrologischen Eigenschaften des Komparators verbessert.

З. НАВРОЦКИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАГНИТНОГО КОМПАРАТОРА ПОСТОЯННОГО ТОКА С ДРОБНОЙ РЕГУЛИРОВКОЙ ПОЛНОГО ТОКА

Р е з ю м е

Представлен метрологический анализ магнитного компаратора постоянного тока с дробной регулировкой полного тока, а также описан метод автокалибровки позволяющий определить знак и величину ошибки компаратора. Описана также модифицированная схема делителя тока позваляющего улучшить метрологические свойства компаратора.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1984, 30, z. 1, ss. 87-100

621.313.323

Synteza optymalnego regulatora wzbudzenia silnika synchronicznego

KRZYSZTOF ZAWIRSKI (POZNAŃ)
Instytut Elektrotechniki Przemysłowej Politechniki Poznańskiej

Otrzymano 8.7.1981

Przedstawiona w artykule metoda syntezy regulatora wzbudzenia silnika synchronicznego bazuje na minimalizacji kwadratowego wskaźnika jakości, który uwzględnia wahania mocy biernej i czynnej silnika. W wyniku syntezy otrzymuje się regulator o stałych nastawach, optymalizujący oddziaływanie na sieć przy udarowo-zmiennym obciążeniu. Obliczenie optymalnych nastaw regulatora przeprowadzono na maszynie cyfrowej, strukturę sprzężeń zwrotnych i współczynniki wagi w kryterium jakości wybrano na podstawie symulacji własności dynamicznych układu na maszynie analogowej.

1. WSTĘP

Zakres zastosowań napędów synchronicznych poszerzył się zdecydowanie dzięki wprowadzeniu tyrystorowych układów automatycznej regulacji wzbudzenia (*ARW*). Szybko działające układy *ARW* umożliwiają stosowanie silników synchronicznych do napędu urządzeń o udarowo — zmiennym momencie obciążenia, takich jak klatki walcownicze, kruszarki młotkowe itp. [5, 7]. Aktualny problem niekorzystnego oddziaływania na sieć zasilającą napędów tyrystorowych prądu stałego, masowo instalowanych w zakładach przemysłowych, skłania do podjęcia badań nad możliwością wykorzystania silnika synchronicznego w podwójnej roli: jako napędu urządzeń o zmiennym obciążeniu i równocześnie jako nadążnego kompensatora mocy biernej. Układ regulacji wzbudzenia tak wykorzystanego silnika powinien wypełnić dwa zadania:

1) przy udarowym obciążeniu skutecznie tłumić wahania mocy biernej i czynnej, które są przyczyną kołysań amplitudy i fazy napięcia, a tym samym ujemnie wpływają na pracę pozostałych odbiorników energii zasilanych ze wspólnego węzła;
2) zapewnić szybkie generowanie mocy biernej silnika nadążające za zmianami kompensowanej mocy biernej przekształtnika tyrystorowego.

W literaturze prezentuje się zwykle typowe struktury układu regulacji przewidziane dla układu kompensującego szybko zmienną moc bierną przekształtnika przy pomocy kompensatorów synchronicznych [1, 7]. Układ regulacji odpowiedni dla kompensatorów okazuje się niewystarczający dla silników synchronicznych pracujących z obciążeniem, a zwłaszcza obciążeniem udarowo-zmiennym, gdyż nie zapewnia skutecznego tłumienia kołysań wirnika [1, 6, 7]. Pożądane jest zatem opracowanie metody projektowania układów *ARW*, które sprostałyby tym wysokim wymaganiom. Niniejsza praca przedstawia próbę wykorzystania w procesie syntezy metody, polegającej na minimalizacji całkowego

kwadratowego wskaźnika jakości, który uwzględnia wahania mocy biernej i czynnej silnika. Zadanie syntezy znacznie upraszcza się, jeżeli we wskaźniku wystąpi typowa forma kwadratowa, zawierająca obok kwadratów odchyleń zmiennych stabilizowanych również składnik kwadratu odchylenia zmiennej sterującej, reprezentujący tzw. koszt sterowania [8, 9]

$$J = \int_0^\infty [h_q(\Delta q)^2 + h_p(\Delta p)^2 + r(\Delta i_{fzad})^2]\,dt, \tag{1}$$

gdzie oznaczono:

h_q, h_p — współczynniki wagi mocy biernej i czynnej,

r — współczynnik wagi zmiennej sterującej,

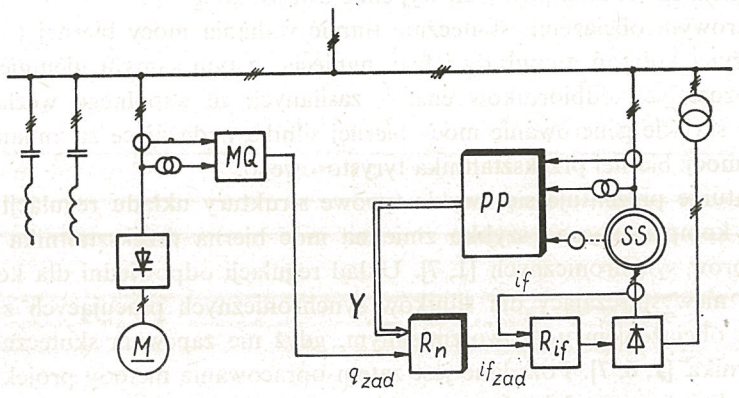
Δq, Δp — odchylenia mocy biernej i mocy czynnej od wartości w stanie ustalonym,

Δi_{fzad} — odchylenie zadanego prądu wzbudzenia od wartości w stanie ustalonym.

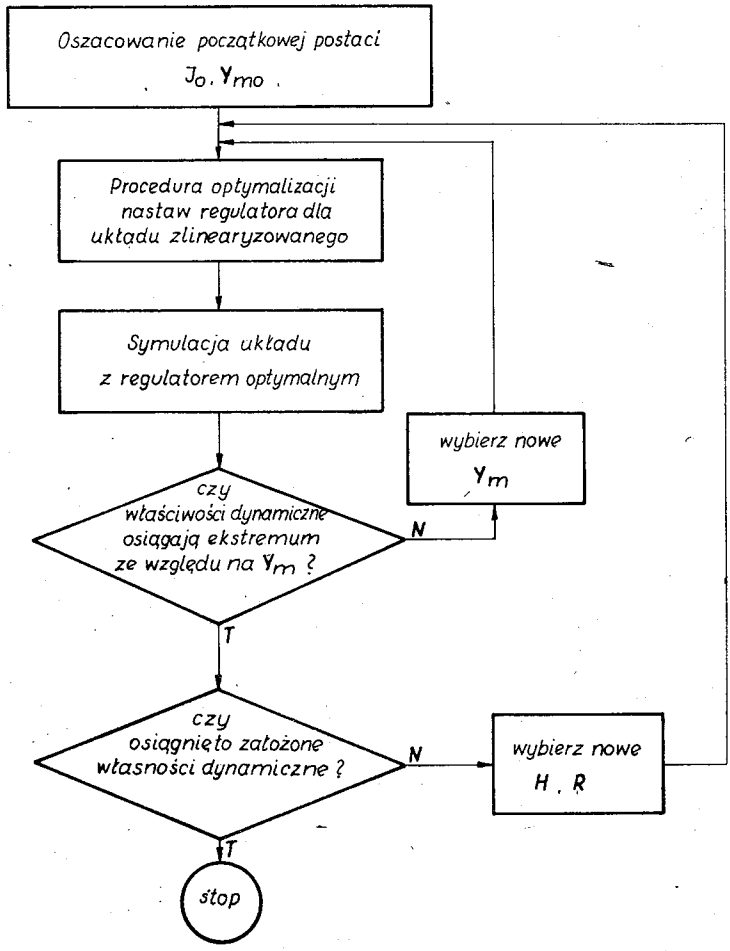
Minimalizacja tak sformułowanego wskaźnika zapewnia, w przypadku wystąpienia procesu przejściowego wywołanego udarowym obciążeniem, szybkie tłumienie odchyleń mocy biernej i czynnej od stanu ustalonego — przy jednoczesnym ograniczeniu wahań prądu wzbudzenia. Dobór współczynników wagi h_q, h_p i r pozwala na kształtowanie odpowiednich proporcji między tłumieniem mocy biernej i mocy czynnej oraz wymuszonymi przez regulator zmianami prądu wzbudzenia.

2. ALGORYTM SYNTEZY

Proponowana struktura regulacji jest hierarchiczna, zawiera wewnętrzną (podporządkowaną) pętlę regulacji prądu wzbudzenia i zewnętrzną pętlę regulacji z regulatorem nadrzędnym (rys. 1). Regulator prądu wzbudzenia dobiera się według kryterium modułu, natomiast regulator nadrzędny projektuje się tak, aby minimalizował wskaźnik (1) [8, 9]. Syntezę regulatora nadrzędnego przeprowadzono wykorzystując metodę Davisona i Raua, która stanowi modyfikację klasycznej metody sterowania optymalnego układów liniowych [2]. Zastosowanie tej metody, wymagającej linearyzacji równań układu, prowadzi do



Rys. 1. Schemat struktury optymalizowanego układu regulacji wzbudzenia silnika synchronicznego R_n — regulator nadrzędny, R_{if} — regulator prądu wzbudzenia, MQ — miernik mocy biernej, PP — przetwornik pomiarowy



Rys. 2. Ogólny schemat blokowy algorytmu syntezy regulatora wzbudzenia

prostego łatwo realizowalnego regulatora optymalnego ze sprzężeniami jedynie od wybranych zmiennych wyjściowych, które uznano za łatwe do zmierzenia. Stanowi to istotną zaletę przyjętej metody, gdyż w klasycznym rozwiązaniu zagadnienia regulator optymalny wymaga sprzężeń od wszystkich zmiennych stanu. Metoda Davisona i Raua polega na poszukaniu optymalnych nastaw przy narzuconej strukturze regulatora i założonych wartościach współczynników wagi we wskaźniku jakości. Brak ogólnej metody wyboru struktury regulatora dla złożonego układu nieliniowego, jak i nieznajomość prostych zależności między własnościami układu a wyborem współczynników wagi, zmusza do przebadania szeregu wariantów drogą modelowania własności dynamicznych.

Schemat ogólny algorytmu syntezy przedstawia rys. 2. W algorytmie wyróżnić można dwa zasadnicze etapy: etap I polega na optymalizacji nastaw regulatora dla układu zlinearyzowanego przy założonej strukturze sprzężeń zwrotnych i przyjętych wartościach współczynników wagi, etap II prowadzi do wyboru struktury sprzężeń i właściwych współczynników na drodze badań dokładniejszego, nieliniowego modelu układu.

Realizacja etapu I wymaga zapisania zlinearyzowanych równań różniczkowych w postaci macierzowej

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t)+\mathbf{B}\mathbf{U}(t)+\mathbf{D}\mathbf{V}(t), \qquad (2)$$
$$\mathbf{X}(0) = 0,$$

gdzie oznaczono:

X — wektor stanu,
U — wektor sygnałów sterujących,
V — wektor zakłóceń impulsowych,
A, B, D — macierze stałych współczynników.

Opis matematyczny obiektu wywodzi się z klasycznego układu równań różniczkowych Parka [5] uzupełnionych równaniami zamkniętej pętli regulacji prądu wzbudzenia [8]. W zapisie równań przyjęto następujący wektor stanu

$$\mathbf{X}^T = [\Psi_d, \Psi_q, \Psi_f, \Psi_D, \Psi_Q, \Theta, s, i_f, u_F], \qquad (3)$$

gdzie oznaczają:

$\Psi_d, \Psi_q, \Psi_f, \Psi_D, \Psi_Q$ — strumienie skojarzone uzwojeń stojana w osiach d i q, uzwojenia wzbudzenia, oraz uzwojeń klatek rozruchowych,
Θ — kąt mocy,
s — poślizg,
i_f — prąd wzbudzenia,
u_F — napięcie z filtru pomiarowego prądu wzbudzenia.

W rozważanym układzie wektor sterowań **U** sprowadza się do pojedynczego sygnału — zadanego prądu wzbudzenia, a wektor zakłóceń **V** do jednej zmiennej — momentu obciążenia m_z.

Zakłada się strukturę regulatora optymalnego opisaną równaniem

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}\mathbf{Y}_m(t), \qquad (4)$$

gdzie **K** jest macierzą stałych współczynników wzmocnienia, a $\mathbf{Y}_m$ jest wektorem wybranych do sprzężenia zwrotnego mierzalnych zmiennych wyjściowych, opisanych równaniem

$$\mathbf{Y}_m(t) = \mathbf{C}_m\mathbf{X}(t), \qquad (5)$$

w którym $\mathbf{C}_m$ jest macierzą stałych współczynników.

Poszukuje się regulatora, który w procesie przejściowym, wywołanym impulsowym zakłóceniem **V**, minimalizuje wskaźnik jakości (1). Wskaźnik ten w ogólniejszym zapisie macierzowym przyjmuję postać

$$J(\mathbf{K}) = \int_0^\infty [\mathbf{Y}^T(t)\mathbf{H}\mathbf{Y}(t)+\mathbf{U}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{U}(t)]dt, \qquad (6)$$

gdzie oznaczono:

H — symetryczna macierz współczynników wagi zmiennych stabilizowanych, dodatnio półokreślona,
R — symetryczna macierz współczynników wagi zmiennych sterujących, dodatnio określona,

$\mathbf{Y}$ — wektor zmiennych wyjściowych stabilizowanych, opisany równaniem

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t), \tag{7}$$

w którym $\mathbf{C}$ oznacza macierz stałych współczynników.

Uwzględniając postać macierzową (6) wskaźnika jakości (1) należy przyjąć:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{Y}(t) &= \begin{bmatrix} \Delta q(t) \\ \Delta p(t) \end{bmatrix}, \quad & \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} h_q & 0 \\ 0 & h_p \end{bmatrix}, \\ \mathbf{U}(t) &= \Delta i_{f\,zad}(t), & \mathbf{R} &= r. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Rozwiązanie zagadnienia przedstawione w pracy [2] oparte jest na założeniu równomiernego rozkładu zakłóceń $\mathbf{V}$ i braku ograniczeń nałożonych na sygnał $\mathbf{U}$, dzięki czemu problem syntezy sprowadza się do znalezienia minimum (ze względu na $\mathbf{K}$) średniej wartości wskaźnika (6) — $\tilde{J}(\mathbf{K})$, którą określa równanie

$$\tilde{J}(\mathbf{K}) = tr\{\mathbf{D}^T\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{K})\mathbf{D}\}, \tag{9}$$

gdzie symbol tr oznacza ślad macierzy, a kwadratowa macierz $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{K})$ jest rozwiązaniem równania Lapunowa

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}_m)^T\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{K})+\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{K})(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}_m) = -(\mathbf{C}^T\mathbf{H}\mathbf{C}+\mathbf{C}_m^T\mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{C}_m). \tag{10}$$

Wyznaczenie minimum $\tilde{J}(\mathbf{K})$ przeprowadza się na maszynie cyfrowej znaną metodą Rosenbrocka, automatycznego poszukiwania ekstremum funkcji bez ograniczeń [2, 4]. Wyliczenie macierzy $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{K})$ sprowadza się do rozwiązania równania Lapunowa według algorytmu Davisona i Mana [3]. Algorytm ten stanowi procedurę iteracyjną, w której kolejne przybliżenia wyznacza się z zależności

$$\boldsymbol{\Gamma}_{k+1} = (\mathbf{P}^T)^{2^k}\boldsymbol{\Gamma}_k\mathbf{P}^{2^k}+\boldsymbol{\Gamma}_k \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Macierz $\mathbf{P}$ określona jest równaniem

$$\mathbf{P} = \left(\mathbf{I}-\frac{g}{2}\mathbf{M}+\frac{g^2}{12}\mathbf{M}^2\right)^{-1}\left(\mathbf{I}+\frac{g}{2}\mathbf{M}+\frac{g^2}{12}\mathbf{M}^2\right), \tag{12}$$

gdzie oznaczają:

$\mathbf{M}$ — macierz opisana zależnością $(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}_m)$,

$\mathbf{I}$ — macierz jednostkowa,

g — mały parametr szacowany na podstawie wartości własnych macierzy $\mathbf{M}$.

Pierwsze przybliżenie $\boldsymbol{\Gamma}_o$ określone jest zależnością

$$\boldsymbol{\Gamma}_o = g(\mathbf{C}^T\mathbf{H}\mathbf{C}+\mathbf{C}_m^T\mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K}\mathbf{C}_m). \tag{13}$$

Algorytm optymalizacji nastaw zaprogramowano w języku ALGOL na komputerze ODRA 1204. II etap syntezy zrealizowany został na zestawie maszyn analogowych MEDA 41 TC — MEDA 42 TA. Model analogowy zbudowano na podstawie równań Parka (model nieliniowy) z uwzględnieniem modelu wzbudnicy tyrystorowej. Założony program badań wymagał skonstruowania na maszynie analogowej generatora zakłóceń impulsowych oraz bloków wyliczających badane wskaźniki jakości.

3. WYNIKI BADAŃ MODELOWYCH

Do badań wybrano silnik synchroniczny typu GAKw 1920 o danych znamionowych: 2900 kVA, 300 obr/min, $\cos\varphi = 0{,}8$ poj. Biorąc pod uwagę możliwości pomiarowe oraz uwarunkowaną nimi prostą realizację regulatora, ograniczono wybór $\mathbf{Y}_m$ do następujących siedmiu zestawów zmiennych wyjściowych:

$$\begin{aligned} &A-\mathbf{Y}_{mA} = [w, q, p, \dot{p}]^T, \quad && D-\mathbf{Y}_{mD} = [w, q, \Theta, s]^T, \\ &B-\mathbf{Y}_{mB} = [w, q, \dot{p}]^T, && E-\mathbf{Y}_{mE} = [w, q, s]^T, \\ &C-\mathbf{Y}_{mC} = [w, q, p]^T, && F-\mathbf{Y}_{mF} = [w, q, \Theta]^T, \\ & && G-\mathbf{Y}_{mG} = [w, q]^T. \end{aligned} \tag{14}$$

Obok takich zmiennych jak moc bierna (q), moc czynna (p), kąt mocy (Θ), poślizg (s), wprowadzono pochodną mocy czynnej ($\dot{p}$) i dla uzyskania astatyzmu regulacji — całkę z uchybu mocy biernej (w). Przyjmując wektory sprzężeń zwrotnych (14) obliczono optymalne nastawy regulatora dla wielu wersji wskaźnika jakości różniących się współczynnikami wagi, a następnie zbadano uzyskane efekty optymalizacji symulując udarowe obciążenie silnika. Jako miarę tłumienia wahań mocy biernej i mocy czynnej przyjęto całkowe wskaźniki J_q i J_p, które stanowią składowe optymalizowanego kryterium (1)

$$\begin{aligned} J_q &= \int_0^\infty (\Delta q)^2 dt, \\ J_p &= \int_0^\infty (\Delta p)^2 dt. \end{aligned} \tag{15}$$

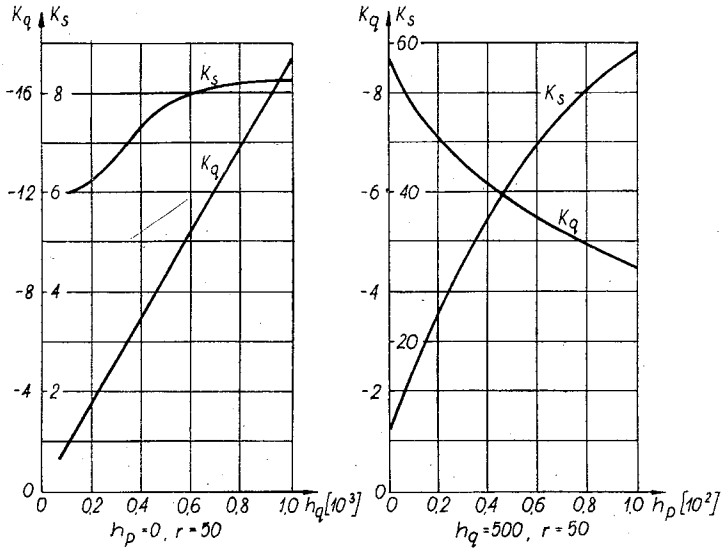
Przykładowe wyniki analizy dla kryterium o współczynnikach wagi: $h_q = 500$, $h_p = 25$, $r = 50$, zamieszczono w tablicy 1. Wybór najlepszego wariantu na podstawie wyników z tablicy 1 jest niejednoznaczny. Wskaźnik wyliczany w procesie syntezy — $\tilde{J}$ skłania do wyboru wariantów o dużej liczbie sygnałów sprzężeń zwrotnych (warianty A, D), co jest zrozumiałe, gdyż są one zbliżone do klasycznego regulatora optymalnego ze sprzężeniami od wszystkich zmiennych stanu. Analiza wskaźnika J_q prowadzi do uznania

Tablica 1

Wartości wskaźników jakości wyznaczone dla układu ARW z różnymi wariantami wektora $\mathbf{Y}_m$

Wskaźniki jakości	Warianty $\mathbf{Y}_m$						
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
$\tilde{J}$	2,744	2,826	2,753	2,741	2,744	2,820	2,828
J_q	2,715	0,575	0,962	1,178	0,627	0,592	0,402
J_p	158,3	160,3	152,6	151,4	151,7	157,1	158,3

Wskaźnik $\tilde{J}$ jest uśrednionym wskaźnikiem wyliczanym w procesie optymalizacji nastaw na modelu liniowym, a wskaźnik J_q i J_p, określone wzorami (15), wyznaczono na modelu nieliniowym przy udarze obciążenia o amplitudzie równej momentowi znamionowemu silnika i czasie trwania udaru 0,23 s



Rys. 3. Wykresy zależności nastaw regulatora od współczynników wagi h_q i h_p
K_q — współczynnik wzmocnienia uchybu mocy biernej, K_s — współczynnik wzmocnienia sygnału poślizgu

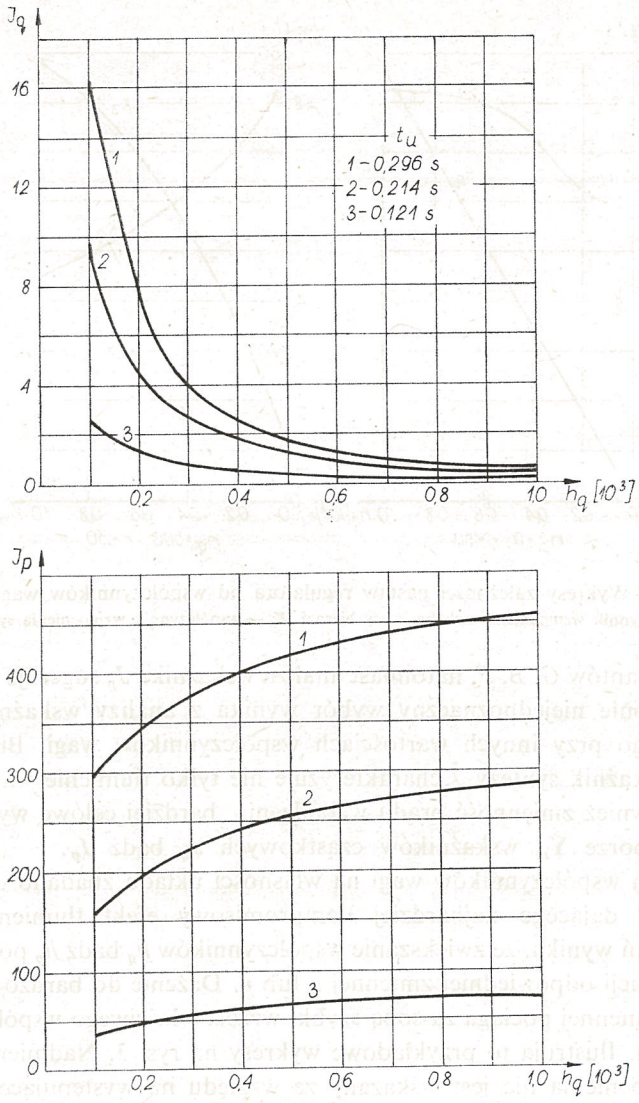
za najlepsze wariantów *G*, *B*, *F*, natomiast analiza wskaźnika J_p sugeruje wybór wariantów *D*, *E*, *C*. Podobnie niejednoznaczny wybór wynika z analizy wskaźników dla układu optymalizowanego przy innych wartościach współczynników wagi. Biorąc pod uwagę, że całkowity wskaźnik syntezy $\tilde{J}$ charakteryzuje nie tylko tłumienie wahań mocy biernej i czynnej ale również zmienność prądu wzbudzenia, bardziej celowe wydaje się uwzględnienie przy wyborze $\mathbf{Y}_m$ wskaźników cząstkowych J_q bądź J_p.

Wpływ zmian współczynników wagi na własności układu zbadano dla wariantu *E* — $\mathbf{Y}_{mE} = [w, q, s]^T$, dającego najbardziej kompromisowy efekt tłumienia mocy biernej i czynnej. Z badań wynika, że zwiększanie współczynników h_q bądź h_p powoduje oczywistą poprawę stabilizacji odpowiedniej zmiennej q lub p. Dążenie do bardzo silnego tłumienia stabilizowanej zmiennej pociąga za sobą szybki wzrost właściwego współczynnika wzmocnienia regulatora. Ilustrują to przykładowe wykresy na rys. 3. Nadmierny wzrost współczynników wzmocnienia nie jest wskazany ze względu na występujące w rzeczywistych torach pomiarowych źródła zakłóceń. Nawet w układzie modelowanym na maszynie

Tablica 2

Zestawienie współczynników wagi dla typowych wariantów układu

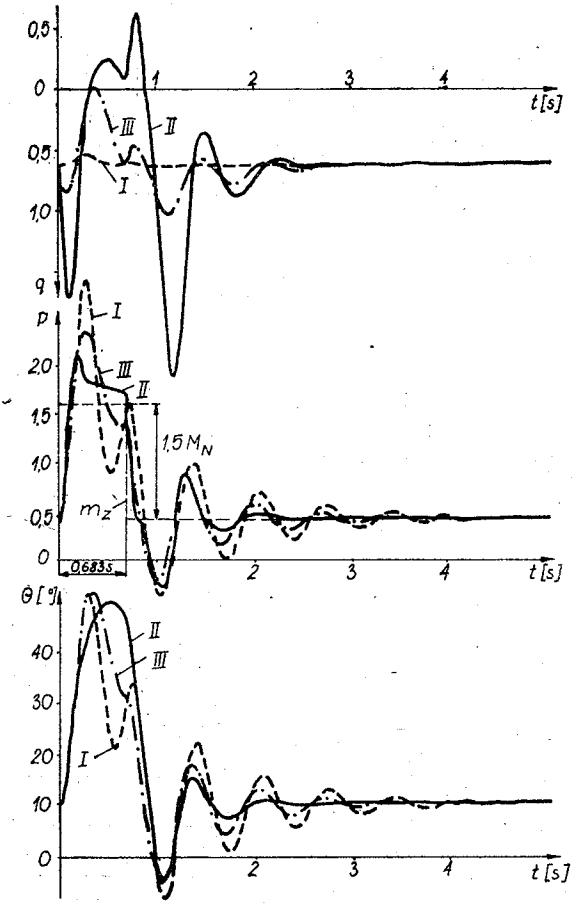
Wariant *J*	współczynniki wagi		
	h_q	h_p	r
I	1000	0	50
II	0	10000	50
III	500	500	50



Rys. 4. Wykresy zależności wskaźników J_q i J_p od współczynnika wagi h_q
Udar obciążenia $\Delta m_z = 1{,}5M_N$, moment ustalony $M_0 = 0{,}5M_N$, zadana moc bierna $q_{zad} = Q_N$, $h_p = 0$, $r = 50$; J_q i J_p — w jednostkach względnych

analogowej, a więc w sytuacji kiedy zakłócenia występują w ograniczonym stopniu, można było sporadycznie obserwować oscylacyjną pracę spowodowaną dużym wzmocnieniem zakłóceń.

Charakterystyczną cechą opisanej metody optymalizacji jest trudność w uzyskaniu jednocześnie skutecznego tłumienia wahań mocy biernej i mocy czynnej. Zwiększanie któregokolwiek współczynnika wagi powoduje poprawę tłumienia jednej zmiennej a pogorszenie tłumienia drugiej. Efekt ten można zaobserwować na wykresach wskaźników J_p i J_q na rys. 4.



Rys. 5. Przebiegi czasowe mocy biernej (q), mocy czynnej (p) i kąta mocy (Θ) przy udarowym obciążeniu silnika $\Delta m_z = 1{,}5\ M_N$, dla trzech wariantów układu *ARW* (I, II, III)
Ustalony moment $M_0 = 0{,}5 M_N$, zadana moc bierna $q_{zad} = Q_N$; q i p — w jednostkach względnych

Projektowane układy regulacji wzbudzenia, zależnie od uzyskiwanych własności, można podzielić na trzy grupy:

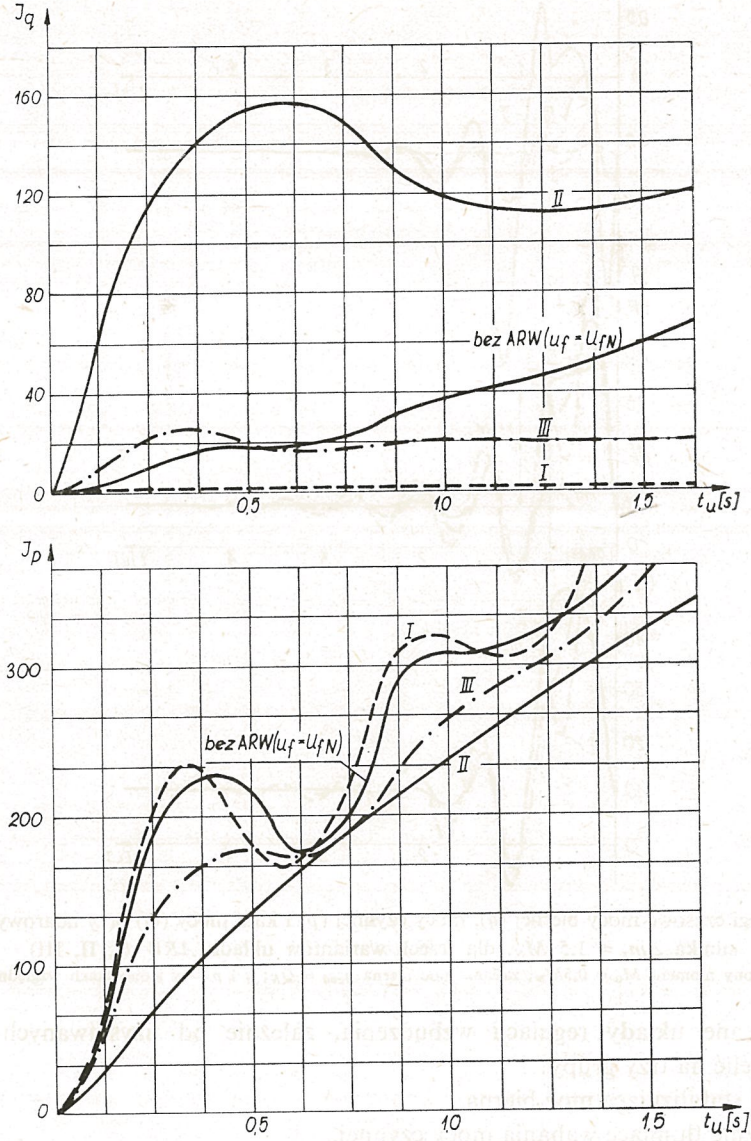
I — dobrze stabilizujące moc bierną,

II — skutecznie tłumiące wahania mocy czynnej,

III — kompromisowe, czyli projektowane z założeniem jednoczesnego tłumienia wahań mocy biernej i mocy czynnej.

Przykładowe wartości współczynników wagi układów wybranych jako reprezentatywne dla danej grupy zestawiono w tablicy 2. Różnice własności dynamicznych tych układów można zaobserwować na wykresie przebiegów czasowych q, p, Θ zarejestrowanych przy udarowym obciążeniu silnika (rys. 5). Pełniejszą informację o tłumieniu wahań mocy biernej i czynnej zawierają wykresy zależności wskaźników J_q i J_p od czasu trwania udaru (rys. 6). Z wykresów tych wynika, że:

— wariant I najlepiej stabilizuje moc bierną a najgorzej moc czynną, gorzej niż silnik bez *ARW*;

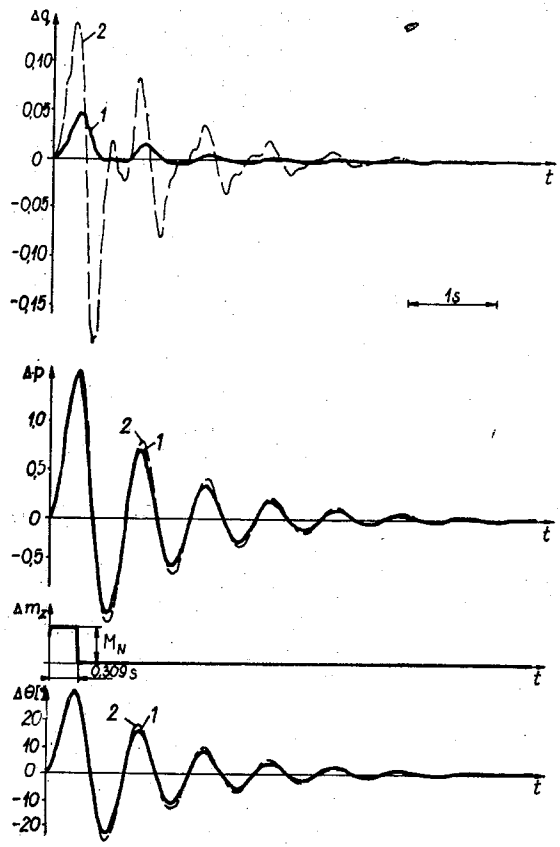


Rys. 6. Wykresy zależności wskaźników J_q i J_p od czasu trwania udaru obciążenia dla różnych wariantów *ARW*

Udar obciążenia $\Delta m_z = M_N$, moment ustalony $M_0 = 0{,}5M_N$, zadana moc bierna $q_{zad} = Q_N$; J_q i J_p — w jednostkach względnych

— wariant II najskuteczniej tłumi wahania mocy czynnej a najgorzej stabilizuje moc bierną, gorzej niż silnik bez *ARW*;

— wariant III daje efekt kompromisowy, tzn. moc bierną stabilizuje gorzej niż wariant I ale lepiej niż wariant II, wahania mocy czynnej tłumi lepiej niż wariant I ale gorzej niż wariant II, zachowuje się w każdym z tych przypadków korzystniej niż silnik bez *ARW*.



Rys. 7. Przebiegi czasowe uchybu mocy biernej (Δq), przyrostu mocy czynnej (Δp) i przyrostu kąta mocy ($\Delta\Theta$) przy udarowym obciążeniu silnika $\Delta m_z = M_N$, $q_{zad} = Q_N$

1 — układ optymalizowany według I wariantu wskaźnika z tablicy 2, *2* — układ dobrany według metody standardowej

Własności zoptymalizowanych układów porównano z własnościami układu zaprojektowanego według tradycyjnej metody opisanej w [7]. Przykładowe przebiegi przedstawia rysunek 7. Układ zoptymalizowany według proponowanej metody zapewnia znacznie lepszą stabilizację mocy biernej oraz bardziej skuteczne tłumienie wahań mocy czynnej i kąta mocy. Z przeprowadzonych badań wynika, że zoptymalizowane układy dają wyraźnie lepsze efekty również przy nadążaniu za sygnałem kompensowanej mocy biernej.

4. WNIOSKI

Przedstawiona metoda syntezy prowadzi do prostej realizacji układu *ARW* z regulatorem o stałych nastawach, a jednocześnie zapewnia dobre tłumienie wahań mocy biernej lub czynnej silnika.

W procesie syntezy możliwe jest kształtowanie proporcji między tłumieniem wahań mocy biernej a tłumieniem wahań mocy czynnej.

Uzyskanie jednocześnie dobrego tłumienia wahań mocy biernej oraz mocy czynnej wydaje się niemożliwe przy przyjętym prostym układzie regulacji; można natomiast zaprojektować wersje o działaniu kompromisowym.

Metoda może być szczególnie efektywna, jeśli przy znajomości a priori struktury regulatora synteza ogranicza się do optymalizacji jego nastaw.

LITERATURA

1. K. Bisztyga i in., *Układ regulacji wzbudzenia silnika synchronicznego dla szybkiej kompensacji mocy biernej*, Zeszyty naukowe AGH Elektryfikacja i Mechanizacja Górnictwa i Hutnictwa, Zeszyt 80, Kraków 1976.
2. E. J. Davison, N. S. Rau, *The optimal output feedback control of a synchronous machines*, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. 90, No. 5, 1971.
3. E. J. Davison, F. T. Man, *The numerical calculation of* $A^TQ+QA=-C$, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 13, August 1968.
4. W. Findeisen i in., *Metody obliczeniowe optymalizacji*, Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1974.
5. T. Kaczmarek, *Dynamika indukcyjnych silników synchronizowanych z automatyczną regulacją wzbudzenia*, Rozprawy Nr 71, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 1975.
6. T. Orzechowski, *Synteza regulatora prądu wzbudzenia silnika synchronicznego (z uwzględnieniem kompensacji mocy biernej)*, Rozprawa doktorska, AGH, Kraków 1977.
7. O. S. Vajntrub i in., *Sistema upravlenija sinchronnym dvigatelem s podčinennoj strukturoj regulirovanija*, Električestvo, No 4, 1975.
8. K. Zawirski, *Optymalna regulacja wzbudzenia silników synchronicznych przy kwadratowym wskaźniku jakości*, Rozprawa doktorska, Politechnika Poznańska, 1979.
9. K. Zawirski, *Regulacja wzbudzenia silnika synchronicznego optymalna ze względu na oddziaływanie na sieć zasilającą*, Archiwum Elektrotechniki, z.1, 1981.

K. ZAWIRSKI

OPTIMAL CONTROL SYNTHESIS OF SYNCHRONOUS MOTOR EXCITATION

Summary

The described synthesis method of synchronous motor excitation controller is based on minimization of quadratic performance index. In cost functions of performance index active and reactive power oscillations are taken into account. The controller with constant settings, obtained as a synthesis result, minimizes negative motor influence on supplying network. The calculation of the optimal controller settings has been realized on digital computer. The feedback structure and weight coefficients in performance index have been chosen as a result of model testing on an analog computer.

K. ZAWIRSKI

SYNTHÈSE DU RÉGULATEUR D'EXCITATION OPTIMAL DU MOTEUR SYNCHRONE

Résumé

La méthode présentée dans l'article de la synthèse du régulateur d'excitation du moteur synchrone, consiste en minimisation de l'indice carré de qualité, qui réagit aux variations des puissances active et réactive du moteur. Grâce à la synthèse, on obtient un régulateur à réglages fixés, optimisant l'action

exercée par la charge variable de choc sur le réseau. Le calcul des réglages optimaux du régulateur a été fait à l'aide d'un calculateur numérique et on a choisi la structure des rétroactions et les facteurs de poids du critère de performance par voie de simulation des propriétés dynamiques du système en se servant d'un calculateur analogique.

K. ZAWIRSKI

SYNTHESE EINES OPTIMALEN ERREGUNGSREGLERS EINES SYNCHRONMOTORS

Zusammenfassung

Es wurde im Artikel eine Methode für die Synthese eines Erregungsreglers eines Synchronmotors dargestellt. Diese Methode basiert auf dem Minimum des quadratischen Qualitätsfaktors, der die Schwankungen der Blind- und Wirkleistung des Motors berücksichtigt. Dank der Synthese wird ein Regler mi konstanten Einstellungen gewonnen, der optimale Netzwirkungen des Motors bei wechselnden, sprungartigen Belastungen ergibt. Die Berechnungen der optimalen Reglereinstellungen erfolgen mit Hilfe eines Digitalrechners; die Struktur der Rückkopplung sowie der Gewichtsfaktor bezüglich des Qualitätskriteriums werden anhand der Simulation des Systems auf dem Analogrechner gewählt.

К. ЗАБИРСКИ

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА ВОЗБУЖДЕНИЯ СИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЬЯ

Резюме

Представленный метод синтеза регулятора возбуждения синхронного двигателя состоит в минимизации квадратического критерия качества, в котором учитываются колебания активной и реактивной мощности. Синтез приводит к постоянным коэффицентам усиления регулятора, который улучшает воздействие двигателя на питающую сеть. Вычисление коэффицентов усиления осуществлено на цифровой вычислительной машине. Структуру обратных связей и весовые коэффициенты в указателе качества выбираются на основе модельных исследований на аналоговой вычислительной машине.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1984, 30, z. 1, ss. 101-120

621.313.333

Zależność przeciążalności dynamicznej indukcyjnych silników synchronizowanych od parametrów układu

ROMAN MUSZYŃSKI (POZNAŃ)

Instytut Elektrotechniki Przemysłowej Politechniki Poznańskiej

Otrzymano 29.7.1981

W pracy przedstawiono wyniki badania wpływu parametrów indukcyjnego silnika synchronizowanego, obciążenia udarowego i układu automatycznej regulacji wzbudzenia na przeciążalność i właściwości dynamiczne układu. Przy zastosowaniu aparatu matematycznego planowania eksperymentu znaleziono uogólnioną zależność analityczną wiążącą bezpośrednio przeciążalność dynamiczną ze wszystkimi parametrami układu

1. WSTĘP

Łączne rozpatrywanie zagadnień napędu elektrycznego i gospodarki energią elektryczną prowadzi do wniosku, że dla średniej i dużej mocy napęd synchroniczny powinien być w przyszłości stosowany częściej niż dotychczas. Wskazują na to techniczno-ekonomiczne zalety silników synchronicznych (*SS*), a mianowicie: wysoka sprawność, możliwość uzyskania dużej przeciążalności statycznej i dynamicznej oraz regulowana kompensacja mocy biernej. Niekiedy, szczególnie w warunkach ciężkiego rozruchu i słabej sieci oraz obciążeń udarowych o dużej amplitudzie, najlepszy okazuje się napęd za pomocą indukcyjnego silnika synchronizowanego (*ISS*) [4], który będąc półśrodkiem, ma jednak dobre własności rozruchowe silników pierścieniowych i cechy *SS* — po synchronizacji. Polska jest jednym z krajów produkujących *ISS*.

Potrzeba oddzielnego rozpatrywania dynamiki układów z *ISS* wynika z różnic konstrukcyjnych między *ISS* a *SS* [4]. Szczególne znaczenie dla dynamiki *ISS* mają mniejsze (niż w przypadku *SS*) stałe czasowe ekwiwalentnego uzwojenia wzbudzenia i lepsze tłumienie oscylacji wirnika.

Z punktu widzenia eksploatacji napędu ważnym wskaźnikiem jest przeciążalność dynamiczna. Znajomość tego wskaźnika, jak i jego zależności od parametrów silnika, obciążenia i układu automatycznej regulacji wzbudzenia (*ARW*), jest niezbędna dla właściwego doboru napędu w warunkach obciążeń udarowo-zmiennych.

Wykaz oznaczeń

Skróty

ARW — automatyczna regulacja wzbudzenia
ISS — indukcyjny silnik synchronizowany

SEM — siła elektromotoryczna
SS — silnik synchroniczny

Symbole wielkości i parametry

α' — parametr uogólniony
Θ — kąt obciążenia
Ψ — strumień skojarzony
i — prąd — wartość chwilowa
I — prąd — wartość ustalona
k — współczynnik sprzężenia magnetycznego, współczynnik ograniczenia (indeks jest symbolem wielkości ograniczanej)
k' — parametr uogólniony
m — moment — wartość chwilowa
M — moment — wartość ustalona
p — przeciążalność
r — przeciążalność dynamiczna względna (odniesiona do przeciążalności statyczne przy znamionowym wzbudzeniu)
R — rezystancja
s — poślizg
t — czas
T — parametr uogólniony
T_m — stała rozruchowa
u — napięcie — wartość chwilowa
U — napięcie — wartość ustalona
w — parametr uogólniony
X — reaktancja
z — parametr uogólniony

Symbole od a do m oznaczają także czynniki (zmienne) w postaci standaryzowanej.

Indeksy

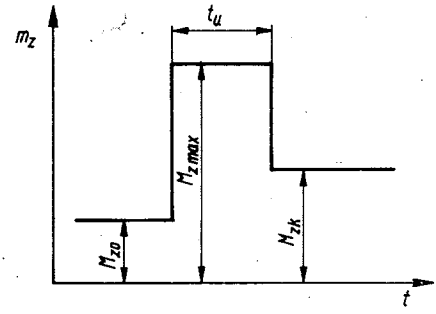
σ — rozproszenie
b — składowa bierna
d — uzwojenie w osi podłużnej
dyn — dynamiczny
I — prąd
k — końcowy
m — mechaniczny, magnesujący (główny, wzajemny)
N — znamionowy
o — początkowy, ustalony
ogr — ograniczenie
q — uzwojenie w osi poprzecznej
r — wirnik

s — stojan, silnik
st — statyczny
u — udar
U — napięcie
z — zakłóceniowy, obciążeniowy
zad — zadany
$*$ — „gwiazdka" — wielkość z charakterystyki uniwersalnej obwodu magnetycznego
$'$ — „prim" — oznaczenie niektórych parametrów uogólnionych

2. PRZECIĄŻALNOŚĆ DYNAMICZNA

Przeciążalność dynamiczna charakteryzuje zdolność silnika do pokonywania obciążeń dynamicznych przy zachowaniu stabilności. Zależy ona w odróżnieniu od przeciążalności statycznej nie tylko od parametrów silnika i zasilania. Dla jednoznaczności określenia przeciążalności dynamicznej należy podać całokształt warunków, w jakich przebiega elektromagnetyczny i mechaniczny proces przejściowy oraz sformułować kryterium stabilności dynamicznej.

Na warunki przebiegu procesu przejściowego, poza parametrami silnika i sieci zasilającej wpływają parametry układu obciążającego silnik, warunki początkowe stanu przejściowego i przebieg obciążenia, a także struktura i parametry układu wzbudzenia (*ARW*). W pracy rozpatruje się przeciążalność dynamiczną momentem i zakłada się:
— stałość napięcia sieci zasilającej i nieregulowanego źródła wzbudzenia,
— strukturę regulowanego źródła wzbudzenia — jak w punkcie 3,
— prostokątny przebieg momentu obciążenia z różnymi (ogólnie) wartościami momentu początkowego i końcowego (rys. 1),
— warunki początkowe procesu przejściowego odpowiadające stanowi ustalonej pracy synchronicznej z momentem początkowym M_{zo}.



Rys. 1. Przebieg momentu obciążenia przy wyznaczaniu przeciążalności dynamicznej

Jako kryterium utraty stabilności dynamicznej przyjęto przekroczenie przez silnik w procesie przejściowym granicznej wartości kąta obciążenia $\Theta = \pi$ [4].

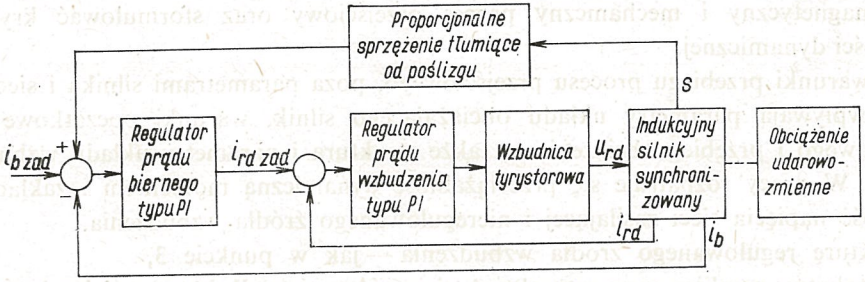
Parametry silnika, udaru obciążenia oraz układu regulacji wzbudzenia są zmiennymi, w funkcji których określa się przeciążalność dynamiczną. Wyraża się ona największą

wartością amplitudy udaru $M_{z\max}$ (rys. 1), odniesioną do wartości znamionowej momentu M_N, która działając na silnik w czasie t_u nie powoduje utraty stabilności dynamicznej. W pracy niniejszej odnosi się przeciążalność dynamiczną do statycznej przy znamionowym wzbudzeniu i wyraża wskaźnikiem

$$r = \frac{p_{dyn}}{p_{st}} = \frac{M_{z\max}}{M_{z\,st}}. \tag{1}$$

3. UKŁAD REGULACJI WZBUDZENIA

Warunkiem niezawodnej i ekonomicznej pracy *ISS* przy obciążeniach udarowo zmiennych jest funkcjonowanie szybkiego układu *ARW*. W pracy [6] dokonano wyboru struktury takiego układu przy uwzględnieniu całokształtu zadań stawianych regulacji wzbudzenia *ISS*. Okazuje się, że dostatecznie dobre właściwości posiada układ *ARW* o strukturze hierarchicznej (rys. 2) strojony przy zastosowaniu klasycznych kryteriów modułu i symetrii.



Rys. 2. Struktura układu *ARW*

Jest to układ regulacji mocy biernej (prądu biernego) z podporządkowaną regulacją prądu wzbudzenia. Dla tłumienia kołysań wirnika i wahań mocy czynnej dodane jest sprzężenie stabilizujące (regulator poślizgu). W zależności od współczynnika tego sprzężenia układ może pełnić rolę stabilizatora mocy biernej lub dobrze tłumić kołysania wirnika albo realizować zadanie pośrednie przy dużej, w każdym przypadku, przeciążalności dynamicznej.

Nastawy regulatorów zależą bezpośrednio od parametrów silnika i punktu pracy, dla którego zostały dobrane.

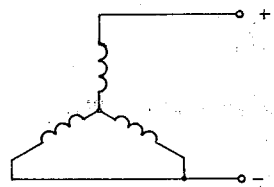
4. DOPUSZCZALNE UPROSZCZENIA RÓWNAŃ

Korzystanie z pełnego modelu jest pracochłonne i nie zawsze celowe [8]. Dla rozwiązania zadania wystarczy model dostatecznie adekwatny do obiektów fizycznych ze względu na badanie przeciążalności dynamicznej. Dla jego uzyskania badano dopuszczalność niektórych uproszczeń równań różniczkowych silnika [6].

Stwierdzono, że dążąc do dużej adekwatności modelu (błąd poniżej 4%), nie można w ogólnym przypadku stosować uproszczeń równań stojana podlegających na pomijaniu

SEM transformacji, zależności *SEM* rotacji od poślizgu i rezystancji stojana, ani pomijać nieliniowych obwodów magnetycznych silnika. Jak wynika z przeprowadzonych badań [6] największe błędy w modelach uproszczonych powstają wtedy, gdy w stanach przejściowych, wywołanych obciążeniem udarowym, osiągane są duże poślizgi, tj. przy małych momentach bezwładności i dużych amplitudach udaru.

Potrzeba uwzględnienia nasycenia głównego obwodu magnetycznego oraz obwodów magnetycznych strumieni rozproszenia stojana i wirnika wynika z dużych zakresów zmian strumienia głównego i prądów uzwojeń spowodowanych regulacją wzbudzenia i udarami obciążenia. Stwierdzono również [6], że naturalna elastyczność członów mechanicznych ma mały wpływ na przeciążalność dynamiczną i można korzystać z założenia o idealnej sztywności połączeń mechanicznych.



Rys. 3. Połączenie uzwojeń wirnika w pracy synchronicznej

Za punkt wyjścia przyjęto pełne równania *ISS* zapisane przy zastosowaniu transformacji Parka dla zwykłych założeń upraszczających oraz dla dodatkowych założeń jednakowej szczeliny w osiach d i q (wobec cylindrycznej budowy wirnika *ISS*) i połączenie uzwojeń wirnika jak na rys. 3 (daje ono dobre własności dynamiczne [4] i jest stosowane w produkowanych w kraju *ISS*), w ogólnie przyjętych jednostkach bazowych według [4, 9] w postaci, jak w pracy [6]. Następnie w sposób [5] wprowadzono do modelu, wynikające z nasycenia, indukcyjności dynamiczne własne i wzajemne [2, 3] dla głównego obwodu magnetycznego i dla obwodów rozproszenia stojana i wirnika.

5. PARAMETRY UOGÓLNIONE UKŁADU

W celu badania wpływu parametrów układu na jego dynamikę i ustalenia zależności przeciążalności dynamicznej od parametrów, korzystnie jest zminimalizować liczbę parametrów i wybrać je w taki sposób, aby zmieniały się one w możliwie wąskim zakresie dla całej grupy silników. W związku z tym przyjęty układ równań silnika zapisano przy zastosowaniu specjalnych jednostek bazowych w postaci [6]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\Psi_{sd}}{dt} - (1-s)\Psi_{sq} + \alpha'_s i_{sd} &= u_{sd}, \\ \frac{d\Psi_{sq}}{dt} + (1-s)\Psi_{sd} + \alpha'_s i_{sq} &= u_{sq}, \\ \frac{d\Psi_{rd}}{dt} + \alpha'_r i_{rd} &= \frac{\alpha'_r}{k'_s} w, \end{aligned}\right|$$

$$\frac{d\Psi_{rq}}{dt}+\alpha'_r i_{rq}=0,$$

$$i_{sd}=\frac{\Psi_{sd}-k'_s\Psi_{md}}{\overset{*}{X}_{\sigma s}},$$

$$i_{sq}=\frac{\Psi_{sq}-k'_s\Psi_{mq}}{\overset{*}{X}_{\sigma s}},$$

$$i_{rd}=\frac{\Psi_{rd}-k'_r\Psi_{md}}{\overset{*}{X}_{\sigma r}},$$

$$i_{rq}=\frac{\Psi_{rq}-k'_r\Psi_{mq}}{\overset{*}{X}_{\sigma r}},$$

$$T\frac{ds}{dt}+\Psi_{sd}i_{sq}-\Psi_{sq}i_{sd}=m_z,$$

$$\Theta=\int s\,dt,$$

$$u_{sd}=-\sin\Theta,$$

$$u_{sq}=\cos\Theta,$$

$$\Psi_{md}=\overset{*}{X}_m i_{md},$$

$$\Psi_{mq}=\overset{*}{X}_m i_{mq},$$

$$\Psi_m^2=\Psi_{md}^2+\Psi_{mq}^2,$$

$$\overset{*}{X}_m=f(\overset{*}{\Psi}_m^2),$$

$$\overset{*}{\Psi}_m=(1+k'_s)\Psi_m,$$

$$i_{md}=i_{sd}+i_{rd},$$

$$i_{mq}=i_{sq}+i_{rq},$$

$$i_s^2=i_{sd}^2+i_{sq}^2,$$

$$i_r^2=i_{rd}^2+i_{rq}^2,$$

$$\frac{1}{\overset{*}{X}_{\sigma s}}=f(\overset{*}{i}_s^2),$$

$$\frac{1}{\overset{*}{X}_{\sigma r}}=f(\overset{*}{i}_r^2),$$

$$\overset{*}{i}_s=(1+k'_s)i_s,$$

$$\overset{*}{i}_r=(1+k'_s)i_r.$$

(2)

W równaniach tych występują parametry uogólnione silnika, które wyrażają się przy pomocy parametrów dla ogólnie przyjętego układu jednostek bazowych [4, 9] zależnościami:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_s' &= \frac{\alpha_s}{1-k_s}, \quad \alpha_s = \frac{R_s}{X_{so}}, \\ \alpha_r' &= \frac{\alpha_r}{1-k_r}, \quad \alpha_r = \frac{R_r}{X_{ro}}, \\ k_s' &= \frac{k_s}{1-k_s}, \quad k_s = \frac{X_{mo}}{X_{so}}, \\ k_r' &= \frac{k_r}{1-k_r}, \quad k_r = \frac{X_{mo}}{X_{ro}}, \\ w &= \frac{k_r' U_{rdN}}{\alpha_r' U_s}, \\ T &= \frac{T_m X_{\sigma so}}{U_s^2}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Tablica 1

Zakresy parametrów *ISS*, obciążenia udarowego i układu ARW przyjmowane w badaniach

Parametr	Jednostka	Zakres	Wartość dla środka przekrojów	Uwagi
α_s', α_r'	Specjalny układ jednostek bazowych	0,035÷0,115	0,075	Silnik
k_s', k_r'		10÷24	17	
w		2,85÷3,75	3,3	
T		50÷1000	500	
$z_o = \frac{M_{zo}}{M_{zst}}$, $z_k = \frac{M_{zk}}{M_{zst}}$	[−]	0÷0,8	0,4	Obciążenie udarowe
t_u	[s]	0,2÷5	0,75	
$k_I = \frac{I_{rdogr}}{I_{rdN}}$	[−]	1,5÷5	3	Układ *ARW*
$\frac{k_U}{k_I} = \frac{\frac{U_{rdogr}}{U_{rdN}}}{k_I}$		1÷1,5	1,2	
$i_{b\,zad}$, i_{bo}	Specjalny układ jednostek bazowych	0÷0,2	0,1	
$\frac{1}{\sin\Theta_o}$		1÷5	2,5	

Tablica 2

Dane *ISS* produkcji krajowej (Dolnośląskie Zakł. Wytwórcze Maszyn Elektrycznych, EMA-DOLMEL)

Lp.	Typ		Moc [kW]	Prędkość obrotowa [obr/min]	Stojan		Wirnik		Wzbudzenie		Współczynnik mocy (poj.)	Przeciążalność w pracy		Moment zamachowy GD^2 [kGm²]	Parametry uogólnione						$M_{z\,st}$
					Napięcie [kV]	Prąd [A]	Napięcie [V]	Prąd [A]	Napięcie [V]	Prąd [A]		asynchronicznej	synchronicznej		α'_s	α'_r	k'_s	k'_r	w	T	
					Dane znamionowe [10, 11]										Specjalny układ jednostek bazowych						
1		1612r	2000	500	6	225	1820	720	26	1300	0,9	2,0	1,5	4300	0,052	0,056	13,8	14,8	2,89	62,1	0,193
2		1612s	2500	500	6	280	2220	740	28	1300	0,9	1,9	1,4	5200	0,045	0,048	13,2	14,2	2,83	63,0	0,197
3		1612t	3150	500	6	352	2860	747	33	1360	0,9	2,1	1,5	6100	0,043	0,046	14,6	15,6	3,03	53,4	0,192
4		1732r	400	187,5	6	48	803	384	32	755	0,9	1,8	1,9	5500	0,101	0,110	11,7	12,7	3,46	61,2	0,265
5	SASe-	1732s	500	187,5	6	59	1040	387	34	725	0,9	2,0	1,9	6300	0,093	0,100	13,2	14,2	3,52	51,0	0,242
6	SYSe-	1732t	630	187,5	6	74	1200	418	38	770	0,9	1,8	1,8	7100	0,083	0,090	11,9	12,9	3,42	50,3	0,259
7		1732u	800	187,5	6	93	1670	375	43	750	0,9	2,2	1,8	9050	0,078	0,084	14,7	15,7	3,69	41,9	0,231
8		1832r	1000	187,5	6	116	1515	510	34	1015	0,9	2,0	1,8	14700	0,063	0,068	13,4	14,4	3,63	59,6	0,248
9		1832s	1250	187,5	6	144	1850	520	38	990	0,9	2,0	1,8	18300	0,060	0,065	13,5	14,5	3,49	59,3	0,237
10		1832t	1600	187,5	6	184	2380	515	49	1010	0,9	2,1	1,8	22400	0,062	0,067	14,2	15,2	3,58	54,3	0,232
11		148	400	750	6	52	750	325	16,5	762	0,8	2,9	1,65	1000	0,098	0,103	17,4	18,4	3,03	114	0,162
12		156	800	1000	6	103	1410	344	24	820	0,8	2,8	1,65	1130	0,072	0,076	16,9	17,9	3,08	118	0,170
13		158r	800	750	6	104	1500	363	20,7	855	0,8	3,0	1,75	2600	0,057	0,060	18,0	19,0	3,39	143	0,177
14	SAS	158s	1000	750	6	127	1800	329	21	802	0,8	3,5	1,75	2500	0,063	0,066	21,5	22,5	3,12	95,0	0,137
15		1512r	400	500	6	52	910	305	20	725	0,8	2,6	1,8	1800	0,075	0,080	15,6	16,6	3,49	101	0,207
16		1712r	2000	500	6	258	2000	655	23,5	1440	0,8	2,3	1,75	7340	0,041	0,044	13,9	14,9	3,06	92,2	0,204
17		1832r	400	187,5	6	55	855	345	31,8	795	0,8	1,95	1,85	8100	0,091	0,099	11,0	12,1	3,41	82,9	0,277
18		1832t	630	187,5	6	84	1370	325	39,5	778	0,8	2,1	1,9	11240	0,076	0,082	12,3	13,3	3,52	68,5	0,260

W zapisie równań (2) i (3) wielkości związane z charakterystykami obwodów magnetycznych odniesiono do ich wartości przy biegu jałowym w pracy asynchronicznej (charakterystyczne wartości oznaczono dodatkowym indeksem o, a nad symbolami wielkości odniesionych umieszczono gwiazdkę). Zastosowanie tak rozumianych wielkości względnych umożliwia posłużenie się uniwersalnymi charakterystykami obwodów magnetycznych.

Parametry silnika, obciążenia udarowego i układu *ARW* zestawiono wraz z zakresami ich zmian w tablicy 1. Pierwsze pięć parametrów dotyczy silnika, ich zakresy obejmują wszystkie *ISS* produkowane w Polsce (tabl. 2) [10, 11]. Dwa z nich (α') zależą głównie od rezystancji uzwojeń, dalsze dwa (k') — od współczynników sprzężeń. Piąty parametr (w) związany jest z poziomem znamionowego napięcia wzbudzenia względem napięcia stojana. Na parametr uogólniony T ma wpływ sumaryczna bezwładność mechaniczna układu.

Jako parametry obciążenia udarowego (rys. 1) przyjęto czas trwania obciążenia udarowego t_u oraz z_o i z_k, jako wartości momentu początkowego M_{zo} i końcowego M_{zk} odniesione do wartości maksymalnej momentu statycznego, którą można wyznaczyć przy pomocy zależności [6]

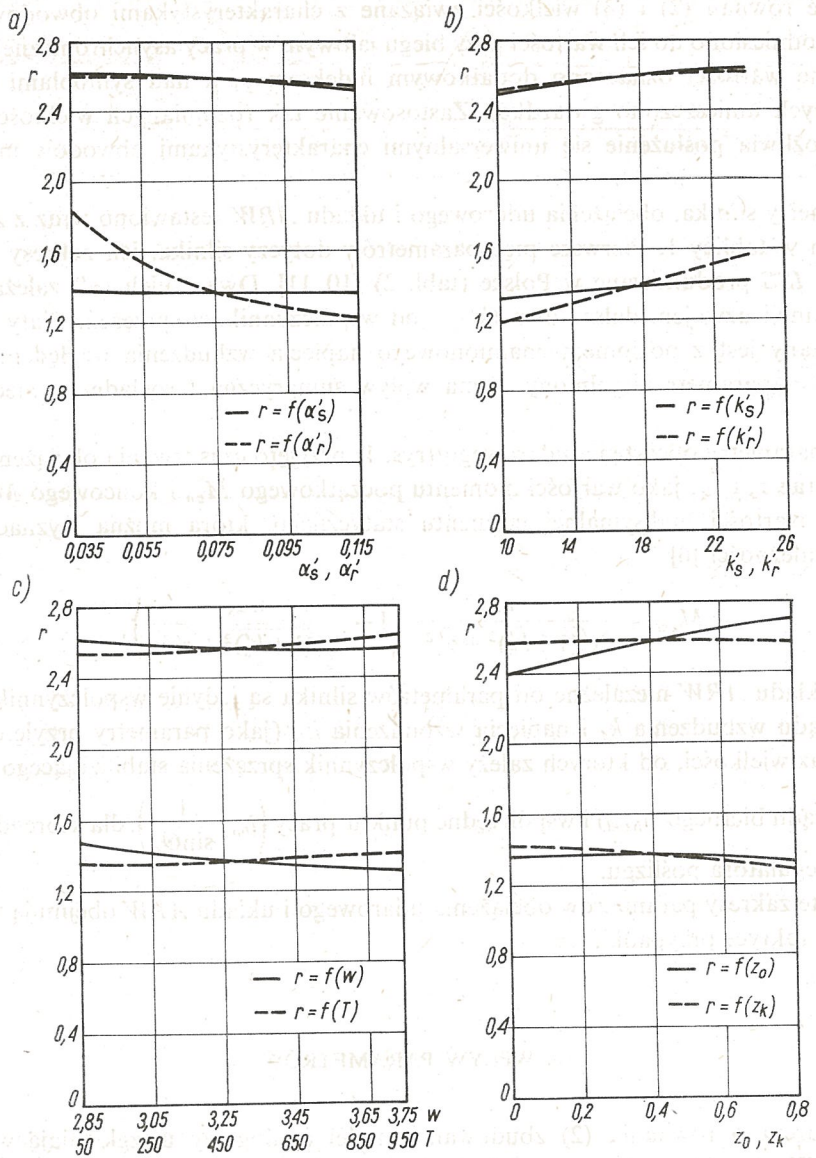
$$M_{zst} = \frac{w}{\sqrt{(1+k'_s)^2+\alpha'^2_s}}\left(1-\frac{w\alpha'_s}{\sqrt{(1+k'_s)^2+\alpha'^2_s}}\right). \tag{4}$$

Dla układu *ARW* niezależne od parametrów silnika są jedynie współczynniki ograniczenia prądu wzbudzenia k_I i napięcia wzbudzenia k_U (jako parametry przyjęto k_I oraz k_U/k_I) oraz wielkości, od których zależy współczynnik sprzężenia stabilizującego: wartość zadana prądu biernego (i_{bzad}) i współrzędne punktu pracy $\left(i_{bo}, \frac{1}{\sin\Theta_o}\right)$, dla którego dobrano nastawę regulatora poślizgu.

Przyjęte zakresy parametrów obciążenia udarowego i układu *ARW* obejmują wszystkie realne w praktyce przypadki.

6. WPŁYW PARAMETRÓW

W oparciu o równania (2) zbudowano model analogowy uwzględniający również układ *ARW* o strukturze jak na rys. 2 i badano na nim, w układzie z *ARW* i bez regulacji, wpływ zmian pojedynczych parametrów na wskaźnik r. Przy tym pozostałe parametry, w ramach jednej charakterystyki, miały stałe wartości, odpowiadające środkowi przekrojów (przedostatnia kolumna w tabl. 1). Charakterystyki te (rys. 4 i 5) są przekrojami powierzchni r, przechodzącymi w przestrzeni parametrycznej przez ten sam punkt, określony tu jako środek przekrojów. Punkt ten starano się tak wybrać, aby uzyskana dla niego wartość wskaźnika r nie odbiegała zbyt daleko od średniej arytmetycznej z wartości r uzyskanych dla skrajnych wartości parametrów przyjmowanych w badaniach (tabl. 1). Jest wtedy największe prawdopodobieństwo, że uzyska się informacje o średnim wpływie parametrów i o średniej krzywiźnie powierzchni r.



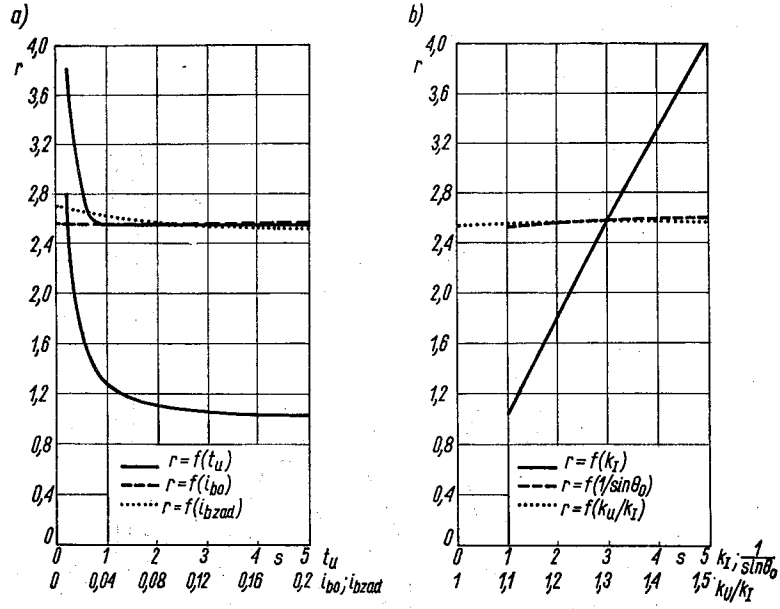
Rys. 4. Środkowe przekroje powierzchni odpowiedzi dla parametrów: α'_s, α'_r, k'_s, k'_r, w, T, z_o, z_k
Górne linie na wykresach dotyczą układu z regulacją wzbudzenia, dolne — bez regulacji

Na uzyskanych wykresach na uwagę zasługują:

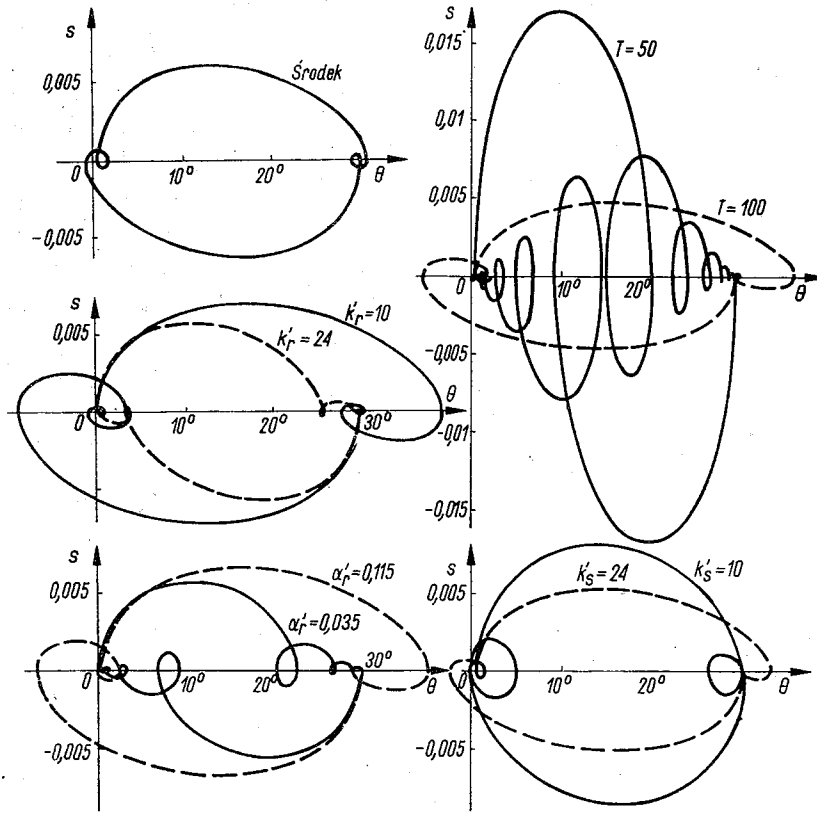
— duży wpływ parametrów związanych z wirnikiem (α'_r, k'_r) w układzie bez regulacji wzbudzenia, który ulega w znacznym stopniu redukcji w obecności *ARW*,

— bardzo duży wpływ ograniczenia prądowego (współczynnik k_I) i mały wpływ pozostałych parametrów układu *ARW*.

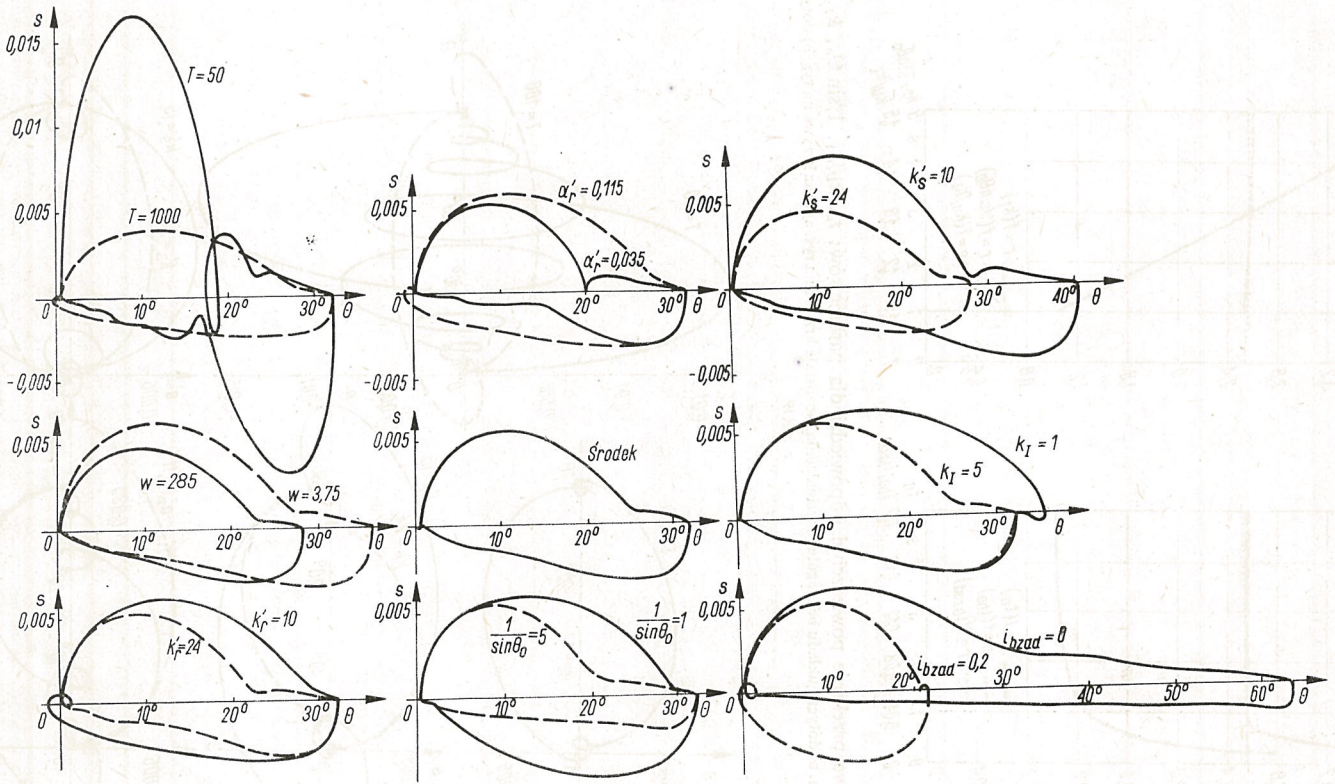
W trakcie badań przekrojowych wykreślono również portrety fazowe $s = f(\Theta)$. Krzywe te (rys. 6 i 7) zdjęto w czasie skokowej zmiany obciążenia od zera do połowy wartości



Rys. 5. Środkowe przekroje powierzchni odpowiedzi dla parametrów: t_u, k_U/k_I, $1/\sin\Theta_o$, k_I, i_{bzad}, i_{bo}
Dolna krzywa na rys. a) dotyczy układu bez regulacji wzbudzenia, pozostałe krzywe na rys. a) oraz krzywe na rys. b) dotyczą układu z *ARW*



Rys. 6. Wpływ parametrów na portrety fazowe układu bez regulacji wzbudzenia
Przy krzywych nie podano parametrów ze środka przekrojów wg tablicy 1



Rys. 7. Wpływ parametrów na portrety fazowe układu z *ARW*

Przy krzywych nie podano parametrów ze środka przekrojów wg tablicy 1

maksymalnego momentu statycznego (przy nieregulowanym — znamionowym wzbudzeniu), a po osiągnięciu stanu ustalonego — ponownie do zera. Dla wybranych parametrów zamieszczono po trzy portrety: dwa dla wartości skrajnych (nałożone na rysunkach jeden na drugi) i jeden (wspólny dla wszystkich parametrów) dla wartości ze środka przekrojów.

Zamieszczone portrety fazowe pozwalają analizować wpływ parametrów uogólnionych na charakter ruchu wirnika w pełnym zakresie zmian parametrów. W układzie bez regulacji wzbudzenia (rys. 6), ze zmianą parametrów następują dość duże zmiany w kształcie krzywych fazowych. Regulacja wzbudzenia w znacznym stopniu kompensuje ten wpływ. Portrety fazowe przyjmują wtedy (rys. 7) w przybliżeniu kształt charakterystyczny dla układu drugiego rzędu z dużym tłumieniem.

7. WIELOMIAN APROKSYMUJĄCY ZALEŻNOŚĆ PRZECIĄŻALNOŚCI DYNAMICZNEJ OD PARAMETRÓW

Badanie wpływu parametrów metodą wyznaczania przekrojów powierzchni r nie daje całościowej oceny. Kształt powierzchni od przekroju do przekroju może się zmieniać w znacznym stopniu. Możliwość pełnej oceny wpływu parametrów i ich współdziałań daje aparat matematyczny planowania eksperymentu [1, 7], który pozwala znaleźć bezpośrednią, dostatecznie dokładną zależność przeciążalności dynamicznej od parametrów w postaci wielomianu aproksymującego. Zastosowanie tej metody [6] dało wielomiany, których człony zestawiono w tablicy 3. W członach wielomianów występują czynniki (oznaczone małymi literami), które przyporządkowano parametrom układu zgodnie z tablicą 4. Wzory z tablicy 4 uzyskano w wyniku przekształcenia zmiennych i standaryzacji czynników. Celem przekształcenia zmiennych jest linearyzacja zależności wskaźnika od parametru. Standaryzację zaś stosuje się dla uproszczenia obliczeń i interpretacji wyników. Polega ona na sprowadzeniu wszystkich czynników do wielkości bezwymiarowych przyjmujących, dla całego zakresu zmian parametrów, wartości od -1 do $+1$.

Wielomiany, których człony zestawiono w tablicy 3, opisują wiarygodnie powierzchnię r dla fragmentu przestrzeni czynnikowej obejmującej wszystkie *ISS* produkowane w kraju i możliwe w praktyce parametry obciążenia udarowego i układu *ARW* (tabl. 1). Wiarygodność ich sprawdzono [6] przez zestawienie statystyczne wartości r przewidzianych wielomianami aproksymującymi z wartościami uzyskanymi na modelu analogowym. Sprawdzenie obejmowało 102 punkty dla układu bez regulacji i 110 punktów dla układu z *ARW*. Przy tym punkty w przestrzeni czynnikowej rozłożone były w przybliżeniu równomiernie wewnątrz i na granicy obszaru wyznaczonego zakresem zmian parametrów. Ocenę wielomianów podano w tablicy 5.

Współczynniki wielomianów dzięki standaryzacji czynników mają określoną interpretację, która pozwala całościowo ocenić wpływ wszystkich parametrów i ich współdziałań na przeciążalność dynamiczną. Współczynnik stały określa w przybliżeniu wartość średnią wskaźnika w całym obszarze zmian parametrów.

Współczynniki przy wyrazach liniowych wyrażają średnie nachylenie wszystkich przekrojów powierzchni r w kierunku wyznaczonym osią danego

Tablica 3

Zestawienie członów wielomianu aproksymującego zależność wskaźnika r od czynników (parametrów układu)

Człony	Układ bez regulacji wzbudz.		Układ z *ARW*	
	Ilość	postać	Ilość	postać
Stały	1	1,895	1	3,04
Liniowe	9	$0{,}867a_1+0{,}262b+0{,}288c_1+$ $+0{,}286d_1-0{,}224e_1-0{,}194f+$ $-0{,}121g-0{,}076h_1+0{,}006i$	11	$0{,}52a_2+0{,}48b+1{,}13j+$ $+0{,}13d_2-0{,}39e_2-0{,}17g+$ $-0{,}05c_2+0{,}06h_2-0{,}06i+$ $+0{,}01k+0{,}02m$
Współdziałania I rzędu	29	$0{,}275a_1b+0{,}242a_1c_1+$ $+0{,}252a_1d_1-0{,}231a_1e_1+$ $-0{,}189a_1f-0{,}112a_1g+$ $-0{,}081a_1h_1+0{,}070bc_1+$ $+0{,}030bd_1-0{,}086be_1+$ $-0{,}178bf-0{,}032bg+$ $-0{,}089bh_1+0{,}076bi+$ $+0{,}089c_1d_1-0{,}103c_1e_1+$ $-0{,}007c_1f-0{,}035c_1g+$ $-0{,}103c_1h_1-0{,}077d_1e_1+$ $-0{,}034d_1f-0{,}182d_1g+$ $+0{,}053e_1f+0{,}038e_1g+$ $+0{,}059e_1h_1-0{,}056e_1i+$ $+0{,}022fg+0{,}026fh_1+$ $+0{,}020gh_1$	33	$0{,}47a_2b-0{,}02a_2j+$ $+0{,}08a_2d_2-0{,}26a_2e_2+$ $-0{,}11a_2g-0{,}06a_2c_2+$ $-0{,}05a_2h_2-0{,}01a_2i+$ $-0{,}06a_2k+0{,}02a_2m+$ $+0{,}18bj-0{,}04bd_2+$ $-0{,}04bg+0{,}03bc_2+$ $+0{,}09bh_2-0{,}01bi+$ $+0{,}02bk-0{,}15je_2+$ $-0{,}04jg+0{,}08jc_2+$ $+0{,}06jh_2-0{,}10ji+$ $-0{,}09jl-0{,}05d_2e+$ $+0{,}02d_2g+0{,}03e_2g+$ $+0{,}05e_2h_2-0{,}04e_2i+$ $+0{,}13e_2l-0{,}06gc_2+$ $-0{,}06gi-0{,}08c_2k+$ $+0{,}05h_2l$
Współdziałania II rzędu	24	$0{,}051a_1e_1f+0{,}035a_1e_1g+$ $+0{,}025a_1fh_1+0{,}017a_1gh_1+$ $+0{,}018be_1g+0{,}039be_1f+$ $+0{,}025bfh_1+0{,}015bgh_1+$ $+0{,}009a_1c_1f-0{,}029a_1c_1g+$ $-0{,}068a_1d_1e_1-0{,}045a_1d_1h_1+$ $-0{,}008bc_1f-0{,}006bc_1g+$ $-0{,}006bd_1e_1-0{,}057bd_1h_1+$ $-0{,}053c_1d_1e_1-0{,}009c_1d_1f+$ $-0{,}011c_1d_1g-0{,}004c_1d_1h_1+$ $+0{,}028c_1e_1f+0{,}016c_1e_1g+$ $+0{,}017d_1e_1g+0{,}040d_1e_1g$	5	$0{,}04bij+0{,}01d_2im+$ $-0{,}02a_2d_2g-0{,}04a_2e_2m+$ $-0{,}02e_2h_2l$

czynnika. Dzieląc średni przyrost wskaźnika r przy zmianie czynnika o 1 przez współczynnik stały, otrzymuje się względny wpływ czynnika (parametru).

Z tablicy 6 widać, że w układzie bez regulacji wzbudzenia największy wpływ na wskaźnik r ma czas trwania obciążenia udarowego (45,8%), na drugim miejscu są parametry związane z obwodem wirnika α_r' (15,2%) i k_r' (15,1%).

Tablica 4

Zestawienie wzorów na czynniki w postaci standaryzowanej

Parametr	Czynnik	
	Układ z *ARW*	Układ bez regulacji
t_u	$a_2 = \frac{0{,}0801}{t_u^2} - 1{,}00$	$a_1 = \frac{0{,}417}{t_u} - 1{,}08$
T	$b = 0{,}0815\sqrt{T} - 1{,}58$	
α'_r	$c_2 = 25\alpha'_r - 1{,}88$	$c_1 = \frac{0{,}101}{\alpha'_r} - 1{,}88$
k'_r	$d_2 = 1{,}15\sqrt{k'_r} - 4{,}64$	$d_1 = \frac{k'_r}{7} - 2{,}43$
k'_s	$e_2 = 4{,}64 - 1{,}15\sqrt{k'_s}$	$e_1 = 2{,}43 - \frac{k'_s}{7}$
z_k	*)	$f = 3{,}13z_k^2 - 1$
w	$g = 2{,}22w - 7{,}33$	
z_o	$h_2 = 2{,}5z_o - 1$	$h_1 = 3{,}13z_o^2 - 1$
α'_s	$i = 25\alpha'_s - 1{,}88$	
k_I	$j = 1{,}98\sqrt{k_I} - 3{,}42$	
k_U/k_I	$k = 4k_U/k_I - 5$	
$i_{b\,zad}$	$l = 10i_{b\,zad} - 1$	
$\frac{1}{\sin\Theta_o}$	$m = \frac{0{,}5}{\sin\Theta_o} - 1{,}5$	
i_{bo}	*)	

*) Ze względu na bardzo mały wpływ parametru nie ujęto w badaniach

Tablica 5

Ocena wielomianów aproksymujących

Wielomian dla układu	bez regulacji	z *ARW*
Błąd średniokwadratowy [%]	4,0	3,9
Błąd maksymalny [%]	12,7	12,6
Względna ilość punktów, w których błąd przekracza dwukrotnie wartość błędu średniokwadratowego [%]	7,8	4,5

Tablica 6

Średni procentowy wpływ parametrów układu na wskaźnik r

Parametr	α'_s	α'_r	k'_s	k'_r	w	T	z_o	z_k	t_u	k_I	k_U/k_I	$i_{b\,zad}$	i_{bo}	$1/\sin\Theta_o$
Układ z *ARW*	−2,0	−1,6	12,8	4,3	−5,6	15,8	2,0	*)	−17,1	37,2	0,3	0,1	*)	0,7
Układ bez regulacji	0,3	−15,2	11,8	15,1	−6,4	13,8	−4,0	−10,2	−45,8					

*) Ze względu na mały wpływ ujawniony w badaniach przekrojowych parametrów nie ujęto w doświadczeniu czynnikowym.

Tablica 7

Procentowy wpływ współdziałań I rzędu na wskaźnik r

Parametry współdziałające	t_u T	t_u k'_r	t_u α'_r	t_u k'_s	t_u z_k	k'_r w	T z_k	t_u w	α'_r k'_s	α'_r z_o	t_u T	t_u k'_s	T k_I
Wpływ [%]	−14,5	−13,3	12,8	−12,2	10,0	−9,6	−9,4	5,9	−5,4	5,4	−15,5	−8,6	−5,9
Układ	bez regulacji wzbudzenia										z *ARW*		

Regulacja wzbudzenia zmniejsza znacznie średni wpływ czasu trwania udaru (17,1%) oraz parametrów obwodu wirnika α'_r (1,6%) i k'_r (4,3%). Na pierwsze miejsce w tym przypadku wysuwa się parametr k_I (37,2%) związany z poziomem ograniczenia prądu wzbudzenia.

Dość duży wpływ (rzędu kilkunastu %) ma w obu przypadkach parametr T (związany z bezwładnością układu) oraz k'_s (zależny od współczynnika sprzężenia stojana).

Na uwagę zasługują różne wartości dla układu z regulacją wzbudzenia i bez regulacji, przy parametrach z_o i z_k.

Współczynniki przy współdziałaniach I rzędu określają wartość zmiany średniego nachylenia przekroju powierzchni odpowiedzi wzdłuż osi jednego czynnika przy przesunięciu wzdłuż osi drugiego czynnika od środka do granicy obszaru. Dzieląc tę wartość zmiany nachylenia przez człon stały otrzymuje się względny wpływ współdziałań czynników. W tablicy 7 zestawiono wartości wpływu najwięcej znaczących współdziałań (których wpływ przekracza 5%). Z danych tych wynika, że największe zróżnicowanie średnich nachyleń charakterystyk powoduje czynnik czasu trwania obciążenia udarowego t_u. Dotyczy to głównie charakterystyk w funkcji parametru T oraz k'_s w obu układach oraz funkcji parametrów obwodu wirnika k'_r i α'_r dla układu bez regulacji wzbudzenia. Z pozostałych współdziałań I rzędu duże znaczenie dla układu bez regulacji wzbudzenia mają te współdziałania, w których występują parametry obwodu wirnika i obciążenia udarowego. Żadne z tych ostatnich nie występują w układzie z *ARW*, gdzie pojawia się natomiast współdziałanie T z k_I.

Wpływ współdziałań II rzędu w obu układach jest poniżej 4%.

Regulacja wzbudzenia podnosząc wartość średnią wskaźnika r zmniejsza wpływ większości parametrów i dzięki rozdzieleniu wpływów parametrów powoduje częściową kompensację krzywizny powierzchni r. Stąd układ z *ARW* jest „łatwiejszy" do opisania prostym wielomianem, niż układ bez regulacji.

8. WNIOSKI

1. Przeciążalność dynamiczna *ISS* jest funkcją wielu parametrów, z których decydujący wpływ, w przyjętym zakresie zmian parametrów, ma czas trwania obciążenia udarowego i bezwładność mechaniczna układu.

2. Dla układu bez regulacji wzbudzenia dodatkowo duży wpływ mają parametry obwodu wirnika.

3. Wprowadzenie regulacji wzbudzenia powoduje wzrost przeciążalności dynamicznej od wartości średniej, wynoszącej dla przyjętego zakresu zmian parametrów około 1,90 do około 3,04 (wartości odniesione do maksymalnego momentu statycznego przy znamionowym wzbudzeniu). Jednocześnie ulega redukcji wpływ wielu parametrów i ich współdziałań na przeciążalność. Szczególnie zmniejsza się wpływ parametrów obwodu wirnika i obciążenia udarowego.

4. Całościowa ocena wpływu parametrów i ich współdziałań jest możliwa przy zastosowaniu aparatu matematycznego planowania eksperymentu, który w połączeniu z elementami teorii podobieństwa optymalizuje proces badania układu.

LITERATURA

1. *Experimental designs in industry*, Praca zbiorowa (ed. V Chew), John Wiley and Sons, Inc., New York, Champan and Hall, London 1958.
2. R. V. Filc, *Differencialnyje uravnenija naprjaženij nasyščenych nejavnopoljusnych mašin peremennogo toka*, IVUZ Elektromechanika, No 11, 1966.
3. R. V. Filc, L. I. Gluchivskij, *Osnovnyje položenija magnitonelinejnoj teorii javnopoljusnoj sinchronnoj mašiny*, Električestwo, No 6, 1970.
4. T. Kaczmarek, *Dynamika indukcyjnych silników synchronizowanych z automatyczną regulacją wzbudzenia*, Politechnika Poznańska, Rozprawy, Nr 71, 1975.
5. *Modelirowanie asinchronnych elektroprivodov s tiristornym upravleniem*, Praca zbiorowa, Energija, Moskwa 1977.
6. R. Muszyński, *Przeciążalność dynamiczna indukcyjnych silników synchronizowanych*, Rozprawa doktorska, Politechnika Poznańska, 1980.
7. W. W. Nalimow, N. A. Czernowa, *Statystyczne metody planowania doświadczeń ekstremalnych*, WNT, Warszawa 1967.
8. D. Nells, *Com parison of the various mathematical generator models for the calculation of transien electromechanical phenomena*, 4-th Power System Computation Conference, Grenoble, 1972, paper 31/1, Vol. 3, Session 3.1.
9. K. Pawluk, S. Bednarek, *Rozruch i stany asynchroniczne silników synchronicznych*, WNT Warszawa 1968.
10. *Silniki indukcyjne trójfazowe o mocy 200÷5000 kW*, Katalog 35-M, Warszawa, Wydawnictwa Przemysłu Maszynowego WEMA, 1969.
11. *Silniki indukcyjne trójfazowe o mocy 250÷6300 kW na napięcie 6000 V*, Katalog SWW 1111-3, Warszawa, Wydawnictwa Przemysłu Maszynowego WEMA, 1973.

R. MUSZYŃSKI

DEPENDENCE OF OVERLOAD CAPACITY OF SYNCHRONIZED INDUCTION MOTORS ON SYSTEM PARAMETERS

Summary

In this article the investigation results of parameter influence of synchronized induction motor, shock load and excitation control system on overload capacity and dynamical properties have been presented. The analytic, direct and generalized dependence of overload capacity on all system parameters using mathematical apparatus of experiments design has been found.

R. MUSZYŃSKI

DÉPENDANCE DE LA CAPACITÉ DE SURCHARGE DYNAMIQUE DES MOTEURS ASYNCHRONES SYNCHRONISÉS DES PARAMÈTRES DU SYSTÈME

Résumé

Dans l'étude on a présenté les résultats des recherches sur l'influence des paramètres du moteur asynchrone synchronisé, de la charge de choc et du système de réglage automatique d'excitation sur la surcharge et les propriétés dynamiques du système. En se servant de l'appareil mathématique du planning de l'expériment on a trouvé la relation analytique généralisée liant directement la surcharge dynamique à tous les paramètres du système.

R. MUSZYŃSKI

ABHÄNGIGKEIT DER DYNAMISCHEN ÜBERLASTBARKEIT DER SYNCHRONISIERTEN ASYNCHRONMOTOREN VON DEN PARAMETERN DES SYSTEMS

Zusammenfassung

Es wurden im Artikel die Untersuchungsergebnisse hinsichtlich des Parametereinflusses eines synchronisierten Asynchronmotors, der Stoßbelastung und des Erregerstromreglers auf Überlastbarkeit und dynamische Eigenschaften des Systems dargestellt. Mit Hilfe des mathematischen Apparates für Versuchsplanung wurde ein analytischer, verallgemeinerter und unmittelbarer Zusammenhang zwischen der dynamischen Überlastbarkeit und allen Parametern des Systems ermittelt.

Р. МУШИНЬСКИ

ЗАВИСИМОСТЬ ПЕРЕГРУЗОЧНОЙ СПОСОБНОСТИ АСИНХРОННЫХ СИНХРОНИЗИРОВАННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ОТ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ

Резюме

Представлены результаты исследований влияния параметров асинхронного синхронизированного двигателя, ударной нагрузки и системы автоматического регулирования возбуждения на перегрузочную способность и динамические свойства системы. С помощью математического аппарата планирования эксперимента найдена обобщенная аналитическая и непосредственная зависимость перегрузочной способности от всех параметров системы.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1984, 30, z. 1, ss. 121-136

621.314.5

Modelowanie układów przekształtnikowych metodą wyboru systemu dynamicznego

TERESA ORŁOWSKA-KOWALSKA (WROCŁAW), LESZEK SZTYLIŃSKI (WROCŁAW)

Instytut Układów Elektromaszynowych Politechniki Wrocławskiej

Otrzymano 6.8.1979

Artykuł dotyczy modelowania układów przekształtnikowych współpracujących z przetwornikami elektromechanicznymi metodą wyboru systemu dynamicznego opisującego układ w dowolnym przedziale czasowym $T_{t_1 t_2}$. Metoda umożliwia analizę układów w stanach statycznych i dynamicznych. Została zilustrowana na przykładzie układu 3-fazowy prostownik sterowany — silnik prądu stałego. Wprowadzenie pewnych modyfikacji do programu symulującego daje możliwość badania złożonych układów przekształtnikowych, w których występuje skończona ilość znanych struktur połączeń elementów półprzewodnikowych.

1. WSTĘP

Modelowanie matematyczne układów elektromechanicznych zasilanych z przekształtników tyrystorowych jest w chwili obecnej najskuteczniejszą metodą badania procesów dynamicznych zachodzących w takich układach. Wykorzystuje się wszystkie dostępne techniki modelowania: analogową, cyfrową i hybrydową. W przypadku stosowania techniki analogowej i hybrydowej na szczególną uwagę zasługują prace [3, 19, 20], w których przedstawiono ogólną metodykę modelowania przekształtników tyrystorowych, przy czym w pracach [19, 20] rozważano jedynie przypadki obciążenia układu tyrystorowego obwodem *RL*, natomiast w pracy [3] rozważono również współpracę przekształtnika tyrystorowego z elektromechanicznym przetwornikiem energii, ale dla przypadku $\omega = \text{const}$. Spośród wymienionych trzech technik modelowania, najbardziej interesującą wydaje się być technika modelowania cyfrowego, m.in. ze względu na: dużą ilość i łatwość dostępu do maszyn cyfrowych, łatwość wyboru na drodze logicznej aktualnej struktury układu, możliwość analizy skomplikowanych układów zaworowych.

Niezależnie od stosowanej techniki modelowania, modele przekształtników tyrystorowych powinny spełniać określone wymagania. Wynikają one z funkcji, jakie przekształtnik pełni w układzie i z zakresu zjawisk jakie model ma odwzorowywać. W przypadku układów elektromechanicznych, modele matematyczne powinny być takie, aby można było stosować je do badania podstawowych zjawisk zachodzących w tych układach; przede wszystkim elektromechanicznych i elektromagnetycznych procesów przejściowych oraz procesów regulacyjnych w zautomatyzowanych układach napędowych. Równocześnie modele te powinny uwzględniać cechy charakterystyczne przekształtnika tyrystorowego: dyskretny charakter sterowania i niepełną sterowalność.

Wyróżnia się trzy podstawowe grupy metod matematycznego modelowania procesów przejściowych w układach przekształtnikowych:

1 — metody odwzorowujące kształt napięcia wyjściowego,

2 — metody parametryczne,

3 — metody zmiennej struktury.

Modele matematyczne grupy pierwszej oraz ich reprezentacje komputerowe odtwarzają jedynie kształt napięć wyjściowych przekształtników, bez możliwości modelowania napięć i prądów w gałęziach tyrystorowych. Metoda ta jest efektywna dla układów tyrystorowych, w których przełączenia tyrystorów wywołują jedynie zmiany napięcia wyjściowego, nie wpływając bezpośrednio na prądy [11, 12].

Metody parametryczne (metody pełnej struktury) oraz metody zmiennej struktury wymagają opisania przekształtnika tyrystorowego układem równań różniczkowych. Równania te są tworzone na podstawie informacji o topologii obwodu i o parametrach jego elementów. W przypadku metod grupy drugiej program obliczeniowy ma do czynienia z maksymalną liczbą równań różniczkowych, których parametry ulegają zmianie w zależności od stanu poszczególnych zaworów [2, 4, 8, 18]. Powoduje to określone trudności obliczeniowe przy sprowadzeniu układu równań różniczkowych do postaci kanonicznej, ponieważ procedura ta wymaga odwracania macierzy wysokich rzędów o elementach różniących się istotnie pod względem wartości.

Metody grupy trzeciej są bardziej efektywne, bo w zależności od zmian struktury obwodu elektrycznego przekształtnika powodowanych przez zmiany stanu elementów zaworowych, wszystkie gałęzie zawierające nieprzewodzące w danej chwili zawory zostają wyeliminowane z obwodu, co pozwala na wykonywanie obliczeń przy minimalnym rzędzie układu równań różniczkowych [1, 13, 15÷17].

W metodach stałej, jak i zmiennej struktury zachodzi konieczność utworzenia analitycznych procedur automatycznego formowania układów równań różniczkowych na podstawie informacji o topologii obwodu elektrycznego przekształtnika i o parametrach jego elementów. Metody te są bardzo czasochłonne i wymagają rezerwowania dość znacznego obszaru pamięci maszyny cyfrowej [1, 2, 4, 8, 13, 15÷18]. Z tego względu należy je stosować w przypadkach wybitnie uzasadnionych. Dla układów, których działanie jest znane i można przewidzieć kolejne, możliwe do zaistnienia zmiany struktur wywołane przełączaniem elementów półprzewodnikowych, korzystniejsze jest stosowanie algorytmów prostszych i tańszych. Do takich należy przedstawiona w artykule metoda wyboru systemu dynamicznego, która stanowi próbę usystematyzowania i uogólnienia dość często stosowanego sposobu postępowania przy modelowaniu cyfrowym prostszych układów przekształtnikowych, w których występuje skończona ilość znanych struktur połączeń elementów półprzewodnikowych.

2. OPIS METODY WYBORU SYSTEMU

2.1. Podstawowe definicje i twierdzenia

Ogólna koncepcja modelowania przekształtników tyrystorowych metodą wyboru systemu sprowadza się do opisania działania układu za pomocą zbioru charakterystycznych

systemów dynamicznych S^i_{Tn} (i-ty system z n zaworami opisujący daną strukturę połączeń) określonych definicją 1.

Definicja 1. System S^i_{Tn} jest systemem dynamicznym, jeżeli istnieją dwie rodziny odwzorowań:

1 — rodzina funkcji odpowiedzi

$$\varrho = \{\varrho_t : X_t \times U_{tt'} \to Y_{t'}\}, \tag{1}$$

2 — rodzina funkcji przejścia na odcinku czasowym $[t, t']$

$$\Phi = \{\varphi_{tt'} : X_t \times U_{tt'} \to X_{t'};\ t' \geqslant t\} \tag{2}$$

przyporządkowująca stanowi (obiektowi stanu) w chwili t i przebiegowi wejściowemu na odcinku czasowym $[t, t']$ stan (element obiektu stanu) w chwili t';

oraz gdy są spełnione następujące warunki:

a) $\varrho_t(x_t, u_t)/T_t = \varrho_{t'}\big(\varphi_{tt'}(x_t, u_{tt'}), x_{t'}\big)$, (3)
gdzie $u_t = u_{tt'} \circ u_{t'}$,

b) $\varphi_{tt}(x_t, u_{tt'}) = \varphi_{t't''}\big(\varphi_{tt'}(x_t, u_{tt'}), u_{t't''}\big)$, (4)
gdzie $u_{tt''} = u_{tt'} \circ u_{t't''}$,

c) $\varphi_{tt}(x_t, u_{tt}) = x_t$, (5)

gdzie:

X_t — obiekt stanu (stan) w chwili t,
$U_{tt'}$ — zbiór sterowań wejściowych na odcinku $[t, t']$,
x_t — element obiektu stanu w chwili t,
$u_{tt'}$ — element ze zbioru sterowań na odcinku $[t, t']$,
$Y_{t'}$ — zbiór stanów końcowych w chwili t'.

Definicja ta odpowiada ściśle definicji systemu dynamicznemu podanej przez Kalmana [3].

W układach z zaworami półprzewodnikowymi można wyróżnić następujące zbiory systemów S^i_{Tn}:

1 — zbiór systemów S^i_{Tn}, w strukturze których wszystkie elementy zaworowe znajdują się w stanie przewodzenia lub są spolaryzowane zaporowo

$$L = \bigcup_{i=1}^{l} S^i_{Tn}; \quad l \in I_L, \tag{6}$$

2 — zbiór systemów S^i_{Tn}, w strukturze których co najmniej jeden z elementów zaworowych jest w stanie komutacji

$$K = \bigcup_{i=1}^{k} S^i_{Tn}; \quad k \in I_K, \tag{7}$$

przy czym zbiory indeksów I_L i I_K tworzą pokrycie pewnego zbioru I.

Podział taki wynika z tego, że opis zaworów w czasie komutacji wymaga specjalnego podejścia. W zależności od dokładności opisu, można przedstawić zawór półprzewodnikowy jako:

a) idealny klucz [16],
b) klucz o małej rezystancji w stanie przewodzenia i dużej rezystancji w stanie zaporowym [14],

c) klucz o małej rezystancji w stanie przewodzenia i dużej indukcyjności w stanie zaporowym [2],

d) opis funkcyjny rezystancji zaworu [9]

$$R = R(\alpha, i),$$

e) źródło prądowe podczas komutacji i idealny (lub nieidealny) klucz w pozostałych stanach [6],

f) odwzorowanie własności fizycznych zaworu [7].

Opisy a)÷d) nie powodują istotnych różnic w procedurze automatycznej generacji równań, natomiast opisy e) i f) wymagają innych algorytmów. Przy korzystaniu z opisu e) celowe jest stosowanie połączenia metody automatycznej generacji równań z metodą wyboru systemu.

Oznaczmy przez S_{Tn} sumę systemów S^i_{Tn}

$$S_{Tn} = \bigcup_{i=1}^{n} S^i_{Tn}; \quad i \in I. \tag{8}$$

Aby system S_{Tn} ($i \geqslant 2$) był systemem dynamicznym, konieczne jest spełnienie twierdzenia 1.

T w i e r d z e n i e 1. System S_{Tn} jest systemem dynamicznym niecyklicznym, jeżeli każdy z systemów S^i_{Tn} jest dynamiczny oraz jeżeli jest spełniony warunek dla l — 1 systemów ($l = \operatorname{card} I$)

$$(\forall i \in I)(\exists t^* \in T_t)(\exists j \in I;\ i \neq j)\left[\left(\mathbf{y}_i(t^*) = \mathbf{y}_j(t^*)\right) \wedge \left(\mathbf{x}_i(t^*) = \mathbf{x}_j(t^*)\right)\right], \tag{9}$$

gdzie: $\mathbf{y}_i(t^*)$, $\mathbf{y}_j(t^*)$, $\mathbf{x}_i(t^*)$, $\mathbf{x}_j(t^*)$ — wektory wyjść i stanów i-tego i j-tego systemów.

Dowód. Niech S^i_{Tn}, $i \in I$ będą systemami dynamicznymi zgodnie z definicją 1. Załóżmy, że tw. 1 jest nieprawdziwe. W wyniku tego istnieją takie chwile t^*, w których nie są spełnione warunki a), b), c) def. 1, czyli system S_{Tn} nie jest dynamiczny.

Uwaga: w przypadku systemu cyklicznego warunek (9) jest spełniony przez l systemów ($l = \operatorname{card} I$).

2.2. Współpraca przetwornika elektromechanicznego z przekształtnikiem tyrystorowym

Niech przetwornik elektromechaniczny (*EPE*) będzie opisany następującym równaniem różniczkowym

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{B}\mathbf{x}(t) + \mathbf{U}(t), \tag{10}$$

gdzie:

$\mathbf{x}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}(t)$ — wektor i pochodna wektora stanu o wymiarze $(n \times 1)$.

$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — macierz parametrów o wymiarze $(n \times n)$,

$\mathbf{U}(t)$ — wektor wymuszeń o wymiarze $(n \times 1)$,

a przekształtnik tyrystorowy (PT) równaniem różniczkowym

$$\mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{B}_1 \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{U}_1(t), \tag{11}$$

gdzie:

$\mathbf{x}_1(t)$, $\dot{\mathbf{x}}_1(t)$ — wektor i pochodna wektora stanu o wymiarze $(m \times 1)$,

$\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$ — macierze parametrów o wymiarze $(m \times m)$,

$\mathbf{U}_1(t)$ — wektor wymuszeń o wymiarze $(m \times 1)$.

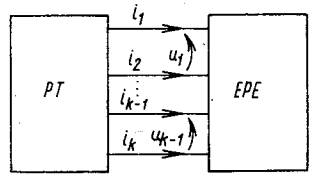
Ponieważ istnieją więzy napięciowe i prądowe pomiędzy przekształtnikiem i elektromechanicznym przetwornikiem energii (rys. 1), to wektory $\mathbf{u}(t)$ i $\mathbf{u}_1(t)$ w równaniach (10) i (11) można przedstawić w następującej postaci:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{u}''(t), \tag{12}$$

$$\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_1'(t) + \mathbf{u}_1''(t), \tag{13}$$

gdzie

$$\mathbf{u}''(t) = \mathrm{col}(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, 0, \ldots, 0) = \mathbf{u}_1''(t).$$



Rys. 1. Ilustracja więzów prądowych i napięciowych w układzie tyrystorowym
PT — przekształtnik tyrystorowy, *EPE* — elektromechaniczny przetwornik energii

W wyniku wyeliminowania z równań (10) i (11) napięć $u_1, \ldots, u_{k-1}$ otrzymuje się

$$\mathbf{A}_o \dot{\mathbf{x}}_o(t) = \mathbf{B}_o \mathbf{x}_o(t) + \mathbf{u}_o(t), \tag{14}$$

gdzie:

$\mathbf{x}_o(t)$, $\dot{\mathbf{x}}_o(t)$ — wektor i pochodna wektora stanu układu *PT-EPE* o wymiarze $(l \times 1)$; $l = m+n-k+1$;

$\mathbf{A}_o$, $\mathbf{B}_o$ — macierze parametrów o wymiarze $(l \times l)$;

$\mathbf{u}_o(t)$ — wektor wymuszeń o wymiarze $(l \times 1)$.

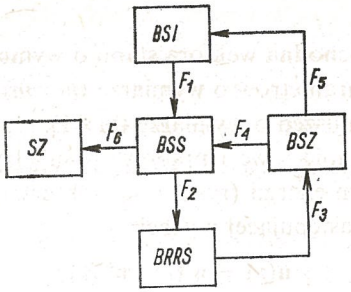
Podobne rozważania można przeprowadzić dla układów niestacjonarnych.

Ponieważ równanie (11) jest uzależnione od stanu zaworów, to dla każdej konfiguracji połączeń otrzyma się inną postać równania (14). Układy rzeczywiste opisane równaniem (14) spełniają na pewnym odcinku czasowym definicję 1.

2.3. Funkcje przejścia między systemami

Po opisaniu poszczególnych systemów S_{Tn}^i można przejść do określenia zasad przechodzenia od dowolnego systemu S_{Tn}^i do dowolnego systemu S_{Tn}^j.

Na rysunku 2 przedstawiono schemat blokowy ilustrujący omawianą metodę modelowania, w którym *BSI* oznacza blok sterowania impulsami, *BSS* — blok sterowania systemami, *BRRS* — blok rozwiązujący równania opisujące system S_{Tn}^i, *BSZ* — blok sprzężenia zwrotnego, *SZ* — stan zabroniony, $F_1, \ldots, F_6$ — informacje przesyłane między systemami (funkcje przejścia).



Rys. 2. Schemat blokowy przepływu informacji przy modelowaniu metodą wyboru systemu dynamicznego

2.3.1. Blok sterowania impulsami

Blok ten ma za zadanie określenie, na który tyrystor został podany impuls bramkowy. W tym celu ustala się podzbiór I_1 zbioru indeksów I ($I = \{1, 2, \ldots, n\}$, n — ilość tyrystorów).

Funkcja sterująca danym tyrystorem ma postać następującą

$$u_i(t) = \delta\left(t - \sum_{k=0}^{\infty} T_i^k\right), \tag{15}$$

gdzie:

T_i^k — czas pomiędzy impulsami k i $(k+1)$,

$$\delta\left(t - \sum_{k=0}^{\infty} T_i^k\right) = \begin{cases} 1 & \sum_{k=0}^{\infty} T_i^k \leqslant t \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} T_i^k + h_o, \\ 0 & \text{pozostałe}, \end{cases} \tag{16}$$

h_o — czas trwania impulsu.

W celu określenia podzbioru I_1 badamy czy w danym momencie $t \geqslant 0$ jest spełniona równość

$$u_i^*(t) = 1.$$

Informacją wyjściową z bloku *BSI* jest wektor o elementach (0, 1)

$$\mathbf{F}_1 = \mathrm{col}(w_1, w_2, \ldots, w_n), \tag{17}$$

przy czym $w_i = u_i^*(t)$.

2.3.2. Blok sterowania systemami

Blok *BSS* ma za zadanie przeanalizowanie m wektorów warunków pracy zaworów $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$, gdzie:

$$\mathbf{b}_i = \mathrm{col}(b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{il_j}), \tag{18}$$

l_j — wymiar wektora $\mathbf{b}_i$,

$$b_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ warunek spełniony}, \\ 0 \text{ warunek niespełniony}, \end{cases}$$

oraz wyznaczenie wektora funkcji boolowskich, których argumentami są elementy wektorów $\mathbf{b}_i$ oraz wektora $\mathbf{F}_1$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} f_1(w_1, b_{11}, b_{21}, \ldots, b_{k1}) \\ \vdots \\ f_p(w_p, b_{1p}, b_{2p}, \ldots, b_{kp}) \end{bmatrix}, \tag{19}$$

gdzie $p = \sup_{i \in I} \{l_1, l_2, \ldots, l_k, n\}$.

Następnym krokiem jest ustalenie odwzorowania

$$\mathbf{g}: \mathbf{B} \to G, \quad G \subset N. \tag{20}$$

W zbiorze $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ występują dwa podzbiory G_1 i G_2 tworzące pokrycie G, przy czym G_1 jest zbiorem stanów zabronionych, a G_2 — zbiorem sterującym wyborem systemu S^i_{Tn}. Wielkością wyjściową F_2 bloku *BSS* jest liczba $g_i \in G$.

2.3.3. Blok rozwiązywania równań systemu

Blok ten po otrzymaniu informacji F_2 ma za zadanie określić wielkości wyjściowe oraz nowe stany na podstawie równań opisujących dany system:

$$\left.\begin{aligned} &\varrho(g_i): x_t \times u_t \to y_t, \\ &\varphi(g_i)_{tt'}: x_t \times u_{tt'} \to x_{t'}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Informacją wyjściową tego bloku jest wektor

$$\mathbf{F}_3 = \mathrm{col}(x_t^1, \ldots, x_t^l, y_t^1, \ldots, y_t^k), \tag{22}$$

gdzie:

l — wymiar wektora stanu,

k — wymiar wektora wyjść.

2.3.4. Blok sprzężenia zwrotnego

Blok ten ma za zadanie określenie wektora sprzężenia zwrotnego dla n elementów zaworowych

$$\mathbf{F}_5 = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x_t, y_t) \\ h_2(x_t, y_t) \\ \vdots \\ h_n(x_t, y_t) \end{bmatrix} \tag{23}$$

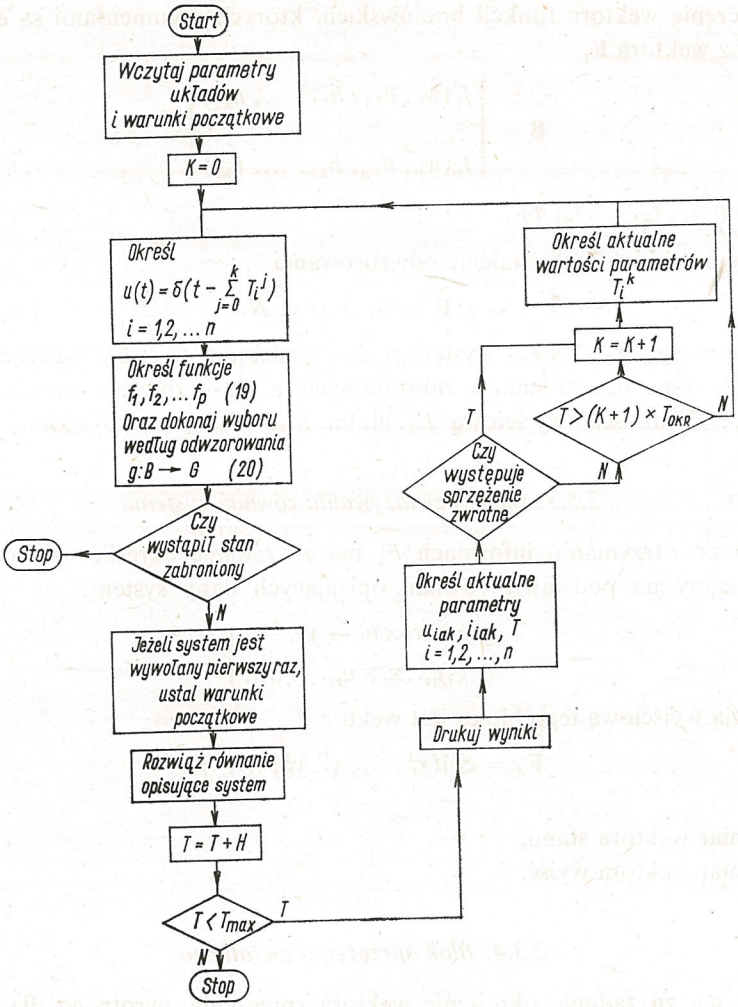
oraz określenie wektorów $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$ dla każdego bloku *BSS*, czyli podanie informacji

$$F_4 = (\mathbf{b}_1 \cup \mathbf{b}_2 \cup \ldots \cup \mathbf{b}_m). \tag{24}$$

2.3.5. Stan zabroniony

Przejście w stan zabroniony (*SZ*) powoduje zakończenie procedury obliczeniowej.

Na rys. 3 przedstawiono ogólny schemat programu obliczeniowego realizującego uogólniony model układu przekształtnikowego.



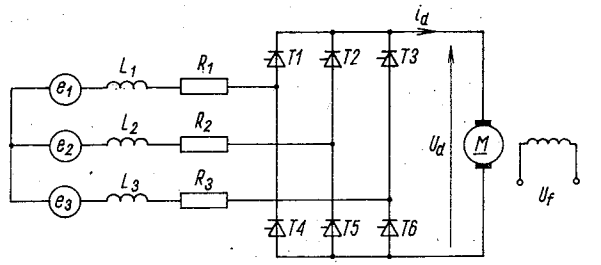
Rys. 3. Ogólny schemat programu obliczeniowego realizującego uogólniony model układu przekształtnikowego

3. PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA METODY

Modelowanie metodą wyboru systemu zastosowano do analizy procesów przejściowych w układzie napędowym trójfazowy prostownik sterowany — silnik obcowzbudny prądu stałego (rys. 4).

Model matematyczny silnika prądu stałego jest przedstawiony układem równań (25):

$$\begin{cases} L\dfrac{di_d}{dt} = -c_E\phi\omega - Ri_d + u_d, \\ J\dfrac{d\omega}{dt} = c_M\phi i_d - M_o. \end{cases} \tag{25}$$



Rys. 4. Schemat ideowy układu 3-fazowy prostownik sterowany — silnik prądu stałego

Równania różniczkowe opisujące przekształtnik tyrystorowy w przypadku, gdy nie występuje proces komutacji mają postać następującą:

$$\begin{cases} (L_i - L_j)\dfrac{di_1}{dt} = -(R_i + R_j)i_1 + e_i - e_j + u_d, \quad i \neq j \in \{1, 2, 3\}, \\ i_1 = i_d, \end{cases} \tag{26}$$

a w czasie komutacji dwufazowej:

$$\begin{cases} -L_i\dfrac{di_2}{dt} + (L_i + L_j)\dfrac{di_1}{dt} = -(R_i + R_j)i_1 + R_k i_2 + e_i - e_j + u_d, \\ -L_i\dfrac{di_1}{dt} + (L_i + L_k)\dfrac{di_2}{dt} = -(R_i + R_k)i_2 + R_1 i_1 + e_i - e_k, \\ i_1 + i_2 = i_d, \\ i \neq j \neq k \in \{1, 2, 3\}. \end{cases} \tag{27}$$

Po redukcji u_d z równań (25) i (26) oraz (25) i (27) otrzymuje się równania systemów S^i_{T6} zgodnie z (14):
S^1_{T6} — silnik odłączony od PT

$$\begin{cases} J\dfrac{d\omega}{dt} = -M_o, \\ \dfrac{di_1}{dt} = 0, \\ \dfrac{di_2}{dt} = 0, \end{cases} \tag{28}$$

przy czym warunki początkowe są następujące:

$$\omega(t_+) = \omega(t_-), \quad i_1(t_+) = i_1(t_-) = 0, \quad i_2(t_+) = i_2(t_-) = 0,$$

$x(t_-)\big(x(t_+)\big)$ — końcowa (początkowa) wartość zmiennej w systemie poprzednim (następnym);

S^2_{T6} — silnik współpracuje z PT i nie występuje proces komutacji

$$\begin{cases} L_{zi}\dfrac{di_1}{dt} = -R_{zi}i_1 - c_E\phi\omega + e_{zi}, \\ \dfrac{di_2}{dt} = 0 \\ J\dfrac{d\omega}{dt} = c_M\phi i_d - M_o, \end{cases} \tag{29}$$

przy czym warunki początkowe są następujące:

$$\omega(t_+) = \omega(t_-),\ i_1(t_+) = i_1(t_-) = i_d,\ i_2(t_+) = i_2(t_-) = 0,$$

L_{zi}, R_{zi}, e_{zi} — wielkości zastępcze dla i-tego systemu zależnego od konfiguracji połączeń;

S^3_{T6} — silnik współpracuje z PT i występuje proces komutacji

$$\begin{aligned} L^1_{zi}\frac{di_1}{dt} + L^2_{zi}\frac{di_2}{dt} &= R^1_{zi}i_1 + R^2_{zi}i_2 - c_E\phi\omega + e^1_{zi}, \\ L^1_{zi}\frac{di_2}{dt} + L^3_{zi}\frac{di_2}{dt} &= R^3_{zi}i_1 + R^1_{zi}i_2 - e^2_{zi}, \\ J\frac{d\omega}{dt} &= c_M\phi(i_1 + i_2) = M_o, \end{aligned} \tag{30}$$

przy czym warunki początkowe są następujące:

$$\omega(t_+) = \omega(t_-), \quad i_1(t_+) = i_1(t_-) = i_d, \quad i_2(t_+) = i_2(t_-) = 0,$$

L^j_{zi}, R^j_{zi}, $j \in \{1, 2, 3\}$ oraz e^1_{zi} i e^2_{zi} — wielkości zastępcze dla i-tego systemu.

Przyjmuje się, że funkcja sterująca tyrystorem ma następującą postać (układ bez sprzężeń zwrotnych)

$$u_i(t) = \delta\Big(t - \sum_{k=0}^{\infty} T_i^k\Big).$$

Wówczas dla i-tego tyrystora wystarczy rozpatrzyć dwa czasy T_i^0 i T_i^1, gdzie T_i^0 — czas do pojawienia się pierwszego impulsu, T_i^1 — czas między impulsem pierwszym i drugim.

Wektory warunków $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ mają postać:

$$\mathbf{b}_1 = \mathrm{col}(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{16}),$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathrm{col}(b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{26}); \quad \mathbf{b}_3 = [b_{31}],$$

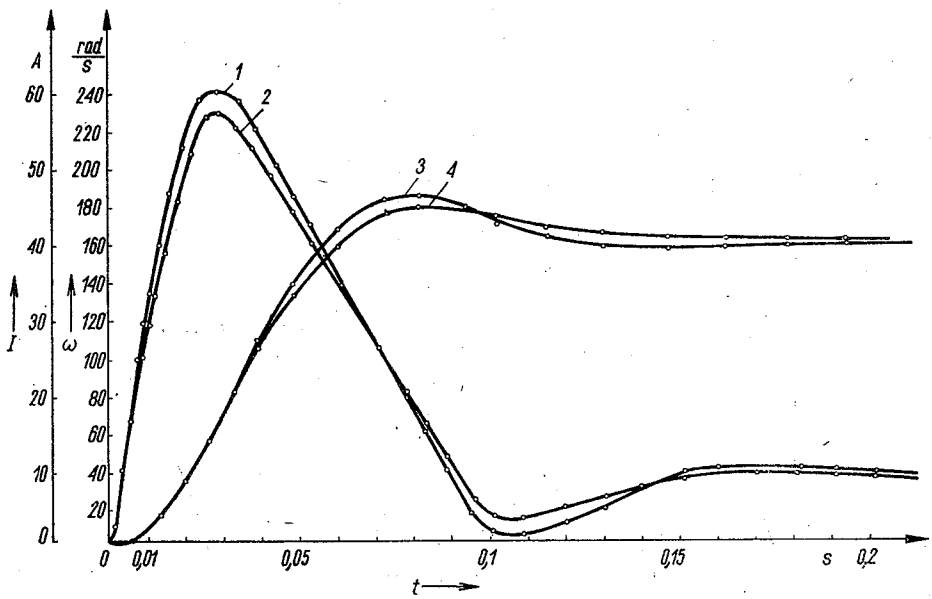
przy czym:

$$b_{1i} = \begin{cases} 1 & u_{i(ak)} > 0 \\ 0 & u_{i(ak)} \leqslant 0 \end{cases}; \quad b_{2i} = \begin{cases} 1 & i_{i(ak)} > i_h \\ 0 & i_{i(ak)} \leqslant i_h \end{cases}; \quad b_{3i} = \begin{cases} 1 & T_k < T_{kd} \\ 0 & T_k \geqslant T_{kd} \end{cases};$$

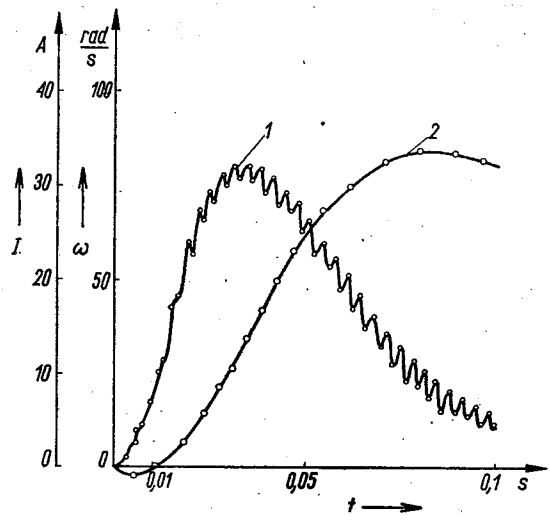
gdzie:

$u_i(ak)$ — napięcie anoda-katoda i-tego tyrystora,

$i_i(ak)$ — prąd główny i-tego tyrystora,



Rys. 5. Przebiegi prądu (*1*, *2*) i prędkości (*3*, *4*) przy obciążeniu $M_o = M_n$ i $\alpha = 0°$ bez uwzględnienia (*1*, *3*) i z uwzględnieniem komutacji (*2*, *4*)



Rys. 6. Przebiegi prądu (*1*) i prędkości (*2*) przy obciążeniu $M_o = M_n$ i $\alpha = 60°$ bez uwzględnienia komutacji

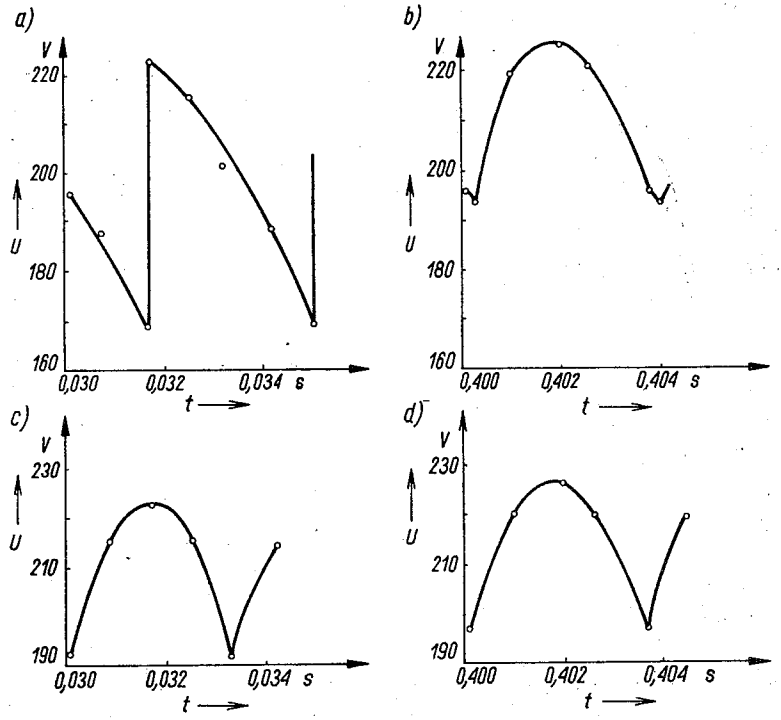
i_h — prąd podtrzymania tyrystora,

T_k — czas trwania komutacji,

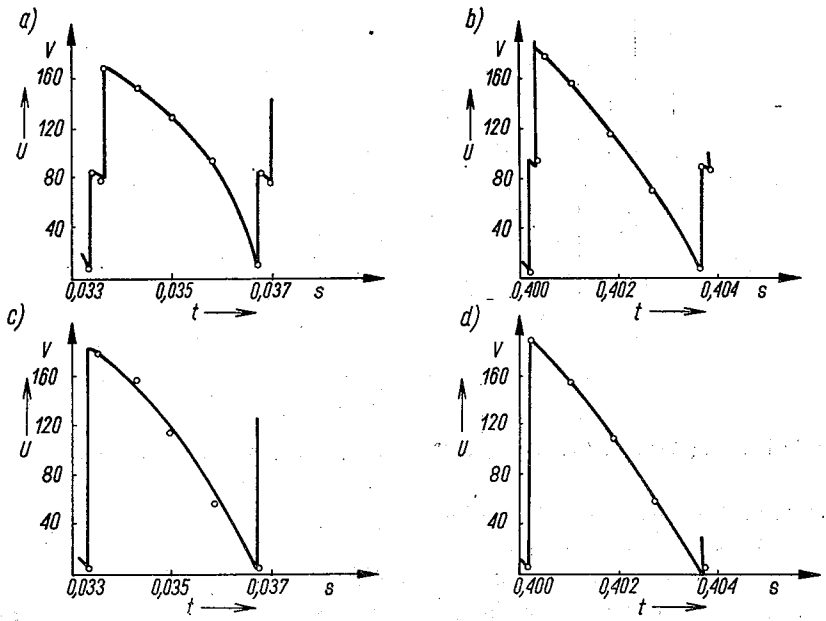
T_{kd} — dopuszczalny czas trwania komutacji.

Dla tak założonych warunków, funkcja boolowska i-tego tyrystora ma postać:

$$\begin{cases} f_i(w_i, b_{1i}, b_{2i}) = b_{2i} \vee (\overline{w}_i \wedge \overline{b}_{1i} \wedge \overline{b}_{2i}), & i = 1, 2, \ldots, 6, \\ f_7 = b_{31}. \end{cases}$$



Rys. 7. Przebiegi napięcia na zaciskach silnika przy $\alpha = 0°$: z uwzględnieniem komutacji: a) przy $I \approx I_{max}$, b) w stanie ustalonym; bez uwzględnienia komutacji c) przy $I \approx I_{max}$, d) w stanie ustalonym



Rys. 8. Przebiegi napięcia na zaciskach silnika przy $\alpha = 60°$: z uwzględnieniem komutacji a) przy $I \approx I_{max}$, b) w stanie ustalonym; bez uwzględnienia komutacji c) przy $I \approx I_{max}$, d) w stanie ustalonym

Odwzorowanie $\mathbf{g}:\mathbf{b} \to G$ jest następujące

$$\mathbf{g} = [f_1+f_4; \quad f_2+f_5; \quad f_3+f_6] \cdot \mathbf{C},$$

gdzie: $\mathbf{C}$ — wektor wag. postaci

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Jeżeli $g_1 = 0$, system opisuje równanie (28),
$g_2 = 2$, system opisuje równanie (29),
$g_1 = 3$, system opisuje równanie (30),
g_1 — pozostałe — stan zabroniony.

Przeprowadzono symulację w maszynie cyfrowej układu PT — silnik prądu stałego PZMb44a o parametrach: $P_n = 1{,}5$ kW; $u_n = 220$ V; $I_n = 8{,}6$ A; $\omega_n = 157$ rad/s; $I_{fn} = 0{,}4$ A; $\phi_n = 24 \cdot 10^{-3}$ Wb; $J = 0{,}015$ Nms^2, $R = 2{,}1\ \Omega$; $L = 0{,}042$ H.

Badania przeprowadzono przy zasilaniu silnika z trójfazowego prostownika sterowanego przy różnych kątach wysterowania α, z uwzględnieniem i bez uwzględnienia komutacji, przy różnych wartościach aktywnego momentu obciążenia. Przykładowe wyniki obliczeń pokazane na rys. 5÷8 są zgodne z przebiegami otrzymywanymi w rzeczywistych układach prostownik tyrystorowy — silnik prądu stałego.

4. PODSUMOWANIE

Zaprezentowana metoda umożliwia analizę przebiegów dynamicznych układów o małej ilości elementów zaworowych i układów, w których występuje skończona ilość znanych struktur połączeń elementów półprzewodnikowych. Metoda ta jest przeznaczona głównie do symulacji cyfrowej układów tyrystorowych. Może ona znaleźć zastosowanie w przypadkach, w których wymagany jest model zaworów w postaci źródła prądowego, np. w analizie przepięć układu podczas komutacji.

Należy zwrócić uwagę, że w modelowanych układach spełnienie twierdzenia 1 jest z reguły niemożliwe. Z tego też względu należy dążyć do minimalizacji wektorów błędów:

$$\boldsymbol{\delta}_1 = |\mathbf{y}^i(t^*) - \mathbf{y}^j(t^*)|,$$

$$\boldsymbol{\delta}_2 = |\mathbf{x}^i(t^*) - \mathbf{x}^j(t^*)|$$

przy przejściu od systemu S^i_{Tn} do S^j_{Tn}.

Opracowany program symulacyjny, realizowany w maszynie cyfrowej ODRA 1325 w języku FORTRAN, po wprowadzeniu pewnych modyfikacji (zmiana podprogramów realizujących kolejne struktury połączeń), umożliwia badania również bardziej złożonych układów przekształtnikowych, które charakteryzują się skończoną ilością systemów potrzebnych do ich opisania.

LITERATURA

1. J. C. Bowers, S. R. Sedore, *SCEPTRE-A Computer Program for Circuit and Systems Analysis*, Printice-Hall, 1977.
2. U. Celtekligil, *Computations of nonlinear differential equations for SCR circuits with the help of fictious inductances in the equivalent circuits of SCR's*, IEEE Trans. Ind. Electron. and Contr. Inst., vol. IECI-22, No 2, 1975.
3. J. Deskur, *Modelowanie hybrydowe przekształtników tyrystorowych*, rozpr. dokt. 1977.
4. H. Eisenach, H. Hofmeister, *Use of digital simulation in designing power electronics circuits*. Siemens Forsch. u. Entwickl. Ber., Bd. 3, No 5, 1974.
5. R. E. Kalman i in., *Topics in mathematical system theory*, Mc Grow-Hill Book Comp., 1969,
6. Kobayashi, *Analysis of turn-off overvoltage of thyristor valve*, Elect. Engin. in Jap., vol. 96B, No 5, 1976.
7. Z. Korzec, *Methodes d'analyse des properitiés dynamiques des dispositifs semiconductors*, PWN, Confer. Fascicule 67, 1967.
8. E. Kumzin, A. Ragozin, *Cislennoje modelirovanie pierechodnych processov električeskich mašin soderžaščich ventilnyje preobrazovateli*, Električestvo, No 5, 1978.
9. S. W. Kurapow, *Principy matematičeskovo modelirovanija vypriamitelnych schem na cifrowych vyčislitelnych mašinach*, Električestvo, 1971, No 11.
10. T. Kutman, *A method of digital computation for SCR circuits*, IEEE Trans. Ind. Electr. and Contr, Instr., vol. IECI-21, May 1974.
11. T. A. Lipo, P. C. Krause, *Analysis and simplified representation of a rectifier-invertor induction motor drive*, IEEE Trans. Power App. Syst., vol. PAS-88, No 5, 1969.
12. J. H. Murphy, *The analysis of inverter-fed induction motors*, Int. J. Elect. Eng. Educ., vol. 13, 1976.
13. P. Mutschler, *Verfahren zur digitalen Simulation beliebiger Stromrichterschaltungen*, Elektrotechn. Z., A95, No 11, 1974.
14. S. Navratil, *Nachbildung einiger Gleichrichterschaltungen im stationären und nicht-stationären Betrieb auf dem elektronischen Analogrechner*, Acta Tech. CSAV, 1966.
15. T. Orłowska-Kowalska i in., *Modelowanie obwodu mocy układu prostownik-falownik napięciowy*, Mater. Symp. „Metody Matematyczne w Elektrotechnice", MME-10, 1981.
16. G. N. Revankar, *Digital computation of SCR chopper circuits*, IEEE Trans. Ind. Electr. and Contr. Instr., vol. IECI-20, Feb. 1973.
17. G. N. Revankar, *Computer analysis of SCR circuits*, IEEE Trans. Ind. Electron. Contr. Instr., vol. IECI-22, No 1, 1975.
18. B. Williams, R. Smith, *Fast digital computations of 3-phase thyristor bridge circuits*, Proc. IEE, vol. 120, 1973.
19. B. Winiarski, *Analiza procesów fizycznych w przekształtnikach tyrystorowych*, Prace Inst. Elektrot., z. 79, 1973.
20. B. Winiarski, *Modele matematyczne przekształtników tyrystorowych i ich odwzorowanie za pomocą maszyn hybrydowych*, Prace Nauk. Polit. Warsz., Elektryka, Nr 36, 1974.

T. ORŁOWSKA-KOWALSKA, L. SZTYLIŃSKI

MODELLING OF THYRISTOR SYSTEMS BY CHOICE OF DYNAMIC SYSTEM METHOD

Summary

The paper deals with digital modelling of practical thyristor circuit-electrical machine systems by the choice of a dynamic system method. In the method the dynamic system describes the thyristor driving circuit in any time interval $T_{tt'}$. The method makes possible the analysis of dynamic and steady-state performances of thyristor-machine systems. Its application has been illustrated for the three-phase full-wave

controlled rectifier bridge supplying a d.c. motor. After introducing some modifications in simulation program, the method makes possible the analysis of more complicated thyristor systems with a finite number of known connections of *SCR* elements.

T. ORŁOWSKA-KOWALSKA, L. SZTYLIŃSKI

MODELAGE DES SYSTÈMES DE CONVERTISSEURS STATIQUES PAR MÉTHODE DE SÉLECTION DU SYSTÈME DYNAMIQUE

Résumé

Dans l'étude on a présenté le modèle des systèmes de convertisseurs statiques collaborant avec des transducteurs électromécaniques par méthode de sélection du système dynamique, qui décrit le système en certain intervalle de temps $T_{tt'}$. Cette méthode rend possible l'analyse des systèmes dans les régimes statiques et dynamiques. Elle a été illustrée par l'exemple du système: redresseur triphasé à semi-conducteur commandé — moteur à courant continu. En se servant de cette méthode, après l'avoir légèrement modifiée, on peut analyser des systèmes de convertisseurs statiques compliqués au nombre fini de structures connues de connexions des éléments en semi-conducteur.

T. ORŁOWSKA-KOWALSKA, L. SZTYLIŃSKI

SIMULATION VON ANLAGEN DER LEISTUNGSELEKTRONIK MITTELS WAHL DES DYNAMISCHEN SYSTEMS

Zusammenfassung

Der Artikel betrifft die Simulation leistungselektronischer Anlagen mittels Wahl eines dynamischen Systems in der Zeit $T_{tt'}$. Die Methode gestattet, statische und dynamische Zustände zu analysieren. Als Beispiel für die Simulation wird die Zusammenarbeit einer sechspulsigen Brückenschaltung mit einem Gleichstrommotor beschrieben. Mit Hilfe dieser Methode ist es möglich, komplizierte leistungselektronische Anlagen mit endlicher Zahl bekannter Schaltungsstrukturen von Halbleiterelementen zu untersuchen.

Т. ОРЛОВСКА-КОВАЛЬСКА, Л. ШТЫЛИНЬСКИ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТИРИСТОРНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ВЫБОРА ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Резюме

Представлены проблемы моделирования тиристорных цепей питающих электрические машины при использовании метода выбора динамической системы описывающей цепь в любом интервале времени $T_{tt'}$. Метод дает возможность анализировать свойства тиристорной системы в статических и динамических режимах. Применение метода представлено для трёхфазного управляемого выпрямителя и двигателя постоянного тока. После введения некоторых модификацией в симуляционную программу, можно анализировать даже сложные тиристорные системы с конечным числом известных структур соединения полупроводниковых элементов.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1984, 30, z. 1, ss. 137-146

621.314.224.8

Modelowanie analogowe układu przekładnik prądowy — obciążenie nieliniowe

ZBIGNIEW PIOTROWSKI (ŁÓDŹ), JAN KASPRZAK (ŁÓDŹ)
Instytut Podstaw Elektrotechniki Politechniki Łódzkiej

Otrzymano 8.7.1981

W artykule przedstawiono zastosowanie maszyny analogowej do analizy procesów transformacyjnych zachodzących w układzie przekładnik prądowy — obciążenie nieliniowe. Opracowano model analogowy układu umożliwiający badania w szerokim zakresie przetężeń w stanach statycznych.

1. WSTĘP

Spotykane dość często przypadki występowania, w przekładnikach prądowych stosowanych do zabezpieczeń, nieliniowych obciążeń rezystancyjnych lub impedancyjnych skłaniają do zbadania i oceny procesów transformacyjnych zachodzących w tak obciążonym przekładniku. Analityczne poszukiwanie rozwiązania jest trudne [8], szczególnie w przypadku, gdy na skutek znacznych przetężeń przekładnik ulega nasyceniu. Trudności te eliminuje zastosowanie maszyny analogowej dającej bezpośredni wgląd w procesy transformacji zachodzące w modelu analogowym rzeczywistego układu. Jakkolwiek istnieje przy tego typu badaniach cały szereg założeń upraszczających koniecznych do skonstruowania modelu w ramach ograniczonych możliwości narzuconych dostępnym typem maszyny analogowej, to jednak — zwłaszcza na etapie ogólnego rozeznania zagadnienia — uzyskuje się w szybki i prosty sposób wyniki umożliwiające jakościową interpretację zachodzących procesów.

W artykule przedstawiono model analogowy układu przekładnik prądowy — obciążenie nieliniowe umożliwiający realizację badań w szerokim zakresie przetężeń. Badania były następnie przeprowadzone na maszynie analogowej Meda 41TA, ale model jest wystarczająco ogólny, aby można go było wykorzystać przy zastosowaniu innych typów maszyn.

2. KONSTRUOWANIE MODELU

2.1. Założenia

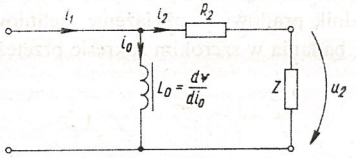
1) Model analogowy przekładnika prądowego współpracującego z nieliniowym obciążeniem obliczony jest w oparciu o uproszczony schemat zastępczy przedstawiony na

rysunku 1 i opisany równaniami (1) oraz (2)

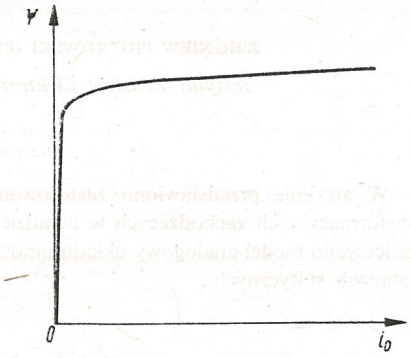
$$L_o \frac{di_o}{dt} = R_2 i_2 + u_2, \tag{1}$$

$$i_1 = i_o + i_2. \tag{2}$$

2) Dana jest charakterystyka magnesowania rdzenia $\psi = f(i_o)$ obliczona dla wartości maksymalnych strumienia i prądu (rys. 2).

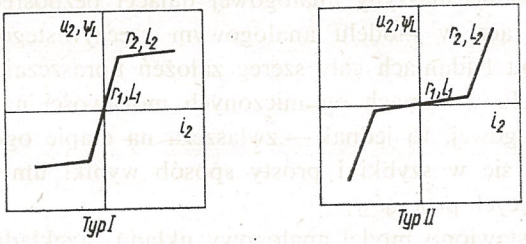


Rys. 1. Schemat zastępczy układu



Rys. 2. Charakterystyka magnesowania rdzenia

3) Modelowane elementy nieliniowego obciążenia stanowią aproksymacje odcinkowo-liniowe nieliniowych rezystancji i indukcyjności zgrupowanych w dwóch typach: I i II (rys. 3). Modele obciążeń Z_R i Z_{RL} posiadają możliwość regulowania punktów załamania charakterystyk oraz parametrów dynamicznych r_1, r_2, L_1, L_2 poprzez zmianę elementów modelu i jego nastaw.



Rys. 3. Charakterystyki elementów nieliniowego obciążenia

u_2 — napięcie na nieliniowym elemencie rezystancyjnym obciążenia o symbolu Z_R, Ψ_L — strumień skojarzony z nieliniową indukcyjnością L tworzącą wraz z szeregową liniową rezystancją R_L element rezystancyjno-indukcyjny obciążenia o symbolu Z_{RL}, i_2 — prąd wtórny,
r_1, r_2 — rezystancje dynamiczne obciążenia Z_R,
L_1, L_2 — indukcyjności dynamiczne obciążenia Z_{RL}

4) Model układu uwzględnia odmiany różniące się doborem parametrów i rodzajem aproksymacji charakterystyki magnesowania, tak aby umożliwić pełne wykorzystanie maszyny analogowej dla przykładowo trzech zakresów przetężeń:

odmiana A — dla przetężeń nie powodujących nasycenia przekładnika,

odmiana B — dla prądów pierwotnych powodujących nasycenie rdzenia,

odmiana C — dla prądów pierwotnych powodujących bardzo znaczne nasycenie rdzenia.

2.2. Równania układu w skali zmiennych maszynowych. Schematy analogowe

Model I — przekładnik prądowy z obciążeniem Z_R

Przekształcając równanie (1) otrzymuje się zależność

$$\frac{d\psi}{dt} = i_2 R_2 + u_2(i_2), \tag{3}$$

gdzie $\psi = f(i_o)$ jest nieliniową funkcją określającą kształt charakterystyki magnesowania przekładnika, a $u_2 = f(i_2)$ określa charakterystykę obciążenia Z_R.

Ponadto założono, że prąd pierwotny określony jest zależnością [8]

$$i_1 = -I_{1m}\cos\omega t. \tag{4}$$

Po scałkowaniu stronami równania (3) otrzymano

$$\psi = R_2 \int_0^t i_2\,dt + \int_0^t u_2(i_2)\,dt + \psi_o.$$

Przyjmując $\psi_o = \psi(o) = 0$, ostatecznie otrzymuje się

$$\psi = R_2 \int_0^t i_2\,dt + \int_0^t u_2(i_2)\,dt. \tag{5}$$

Oznaczając indeksem M zmienne w skali maszynowej można napisać odpowiednie równania w skali tych zmiennych

$$\psi_M = R_{2M} \int_0^{T_M} I_{2M}\,dT_M + \frac{\alpha_\psi}{\alpha_{u_2}\alpha_t} \int_0^{T_M} U_{2M}\,dT_M, \tag{6}$$

$$I_{1M} = \frac{\alpha_i}{\alpha_{i_o}} I_{0M} + I_{2M}, \tag{7}$$

przy czym występujące w nich współczynniki zamiany skal są następujące:

$$\alpha_\psi = \frac{\psi_M}{\psi}, \quad \alpha_i = \frac{I_M}{i}, \quad \alpha_{i_o} = \frac{I_{0M}}{i_o}, \quad \alpha_{U_o} = \frac{U_{2M}}{U_2}, \quad \alpha_t = \frac{T_M}{t}.$$

Równanie maszynowe funkcji wymuszającej (4) po dobraniu współczynnika zamiany skali czasu

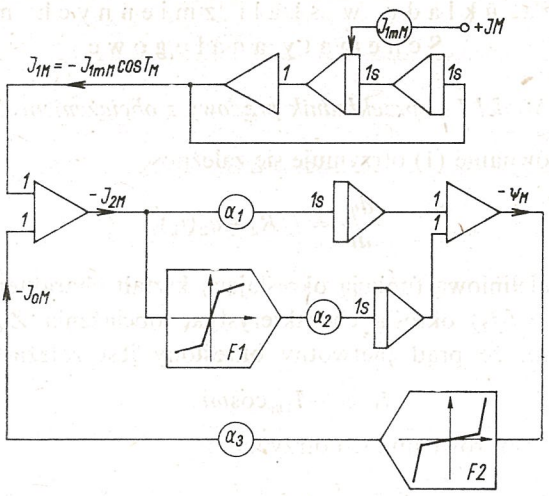
$$\alpha_t = \frac{T_M}{t} = 314,$$

otrzymuje się w następującej postaci

$$I_{1M} = -I_{1mM}\cos T_M. \tag{8}$$

Na podstawie równań (6), (7), (8) skonstruowano schemat analogowy układu (rys. 4), w którym przyjęto następujące oznaczenia na współczynniki stałe:

$$\alpha_1 = R_2 \frac{\alpha_\psi}{\alpha_i \alpha_t} = R_{2M}, \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_\psi}{\alpha_{u_0}}, \quad \alpha_3 = \frac{\alpha_i}{\alpha_{i_o}}.$$



Rys. 4. Schemat analogowy układu z obciążeniem Z_R

Blok $F1$ modeluje charakterystykę obciążenia Z_R, a blok $F2$ charakterystykę magnesowania przekładnika.

Model II — przekładnik prądowy z obciążeniem Z_{RL}

Przekształcając równanie różniczkowe (1) otrzymuje się równanie

$$\frac{d\psi}{dt} = i_2 R_2 + i_2 R_L + \frac{d\psi_L}{dt}, \tag{9}$$

gdzie R_L stanowi liniową rezystancję obciążenia Z_{RL}, a $\frac{d\psi_L}{dt}$ napięcie na nieliniowej indukcyjności L obciążenia Z_{RL}.

Po scałkowaniu stronami równania (9) i przyjęciu stałej całkowania $\psi_o = \psi(0) = 0$ otrzymano

$$\psi = R_2 \int_0^t i_2\,dt + R_L \int_0^t i_2\,dt + \psi_L(i_2). \tag{10}$$

Przyjmując współczynniki zamiany skal takie jak dla modelu I oraz dodatkowo

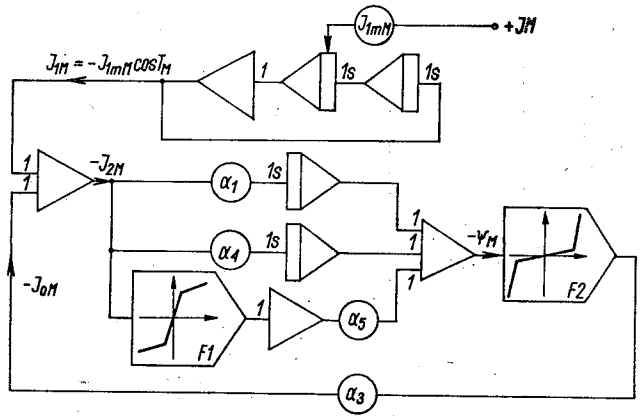
$$\alpha_{\psi_L} = \frac{\psi_{LM}}{\psi_L}$$

otrzymano równanie w skali zmiennych maszynowych o postaci

$$\psi_M = R_{2M} \int_0^{T_M} I_{2M}\,dT_M + R_{LM} \int_0^{T_M} I_{2M}\,dT_M + \frac{\alpha_\psi}{\alpha_{\psi_L}} \psi_{LM}. \tag{11}$$

Równanie (2) oraz funkcje wymuszające mają taką samą postać jak równania (7) i (8) w modelu I.

Na podstawie równań (11), (7) i (8) skonstruowano schemat analogowy układu (rys. 5), w którym blok $F1$ modeluje charakterystykę nieliniowej indukcyjności L obciążenia Z_{RL}, a blok $F2$ charakterystykę magnesowania przekładnika.



Rys. 5. Schemat analogowy układu z obciążeniem Z_{RL}

Współczynniki stałe oznaczono następująco:

$$\alpha_1 = R_2 \frac{\alpha_\psi}{\alpha_i \alpha_t} = R_{2M}, \quad \alpha_4 = R_L \frac{\alpha_\psi}{\alpha_i \alpha_t} = R_{LM}, \quad \alpha_5 = \frac{\alpha_\psi}{\alpha_{\psi_L}}, \quad \alpha_3 = \frac{\alpha_i}{\alpha_{i_o}}.$$

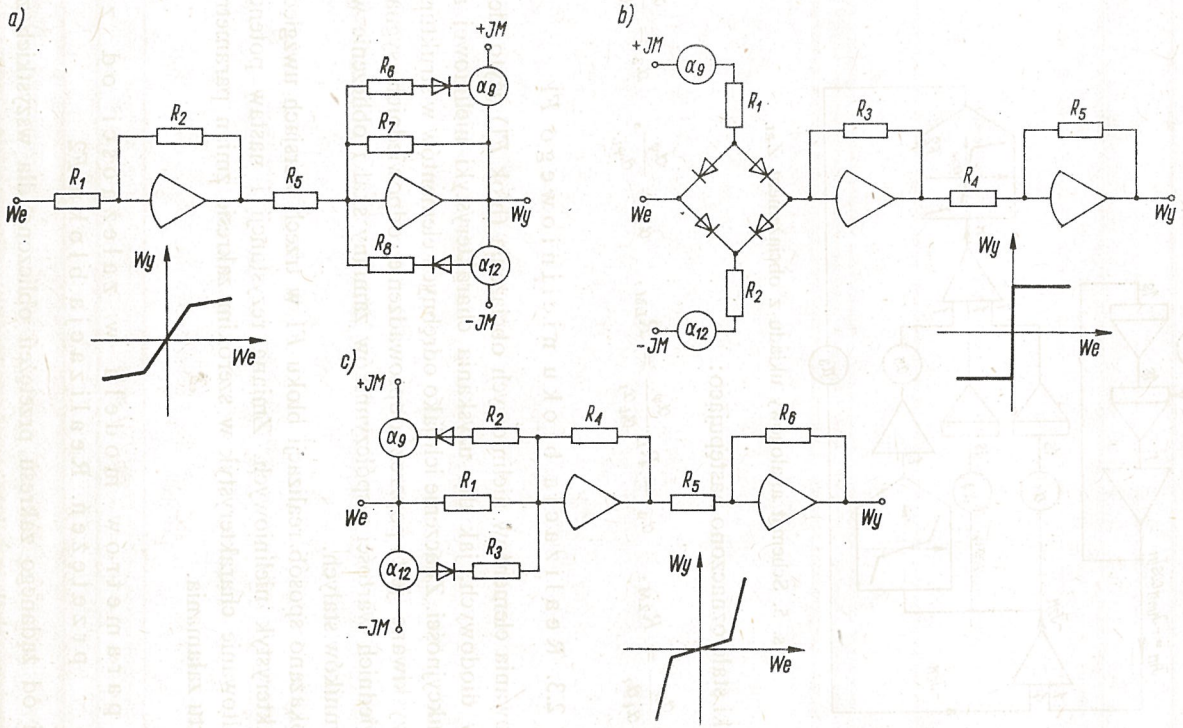
2.3. Realizacja bloku nieliniowego $F1$

Do zamodelowania elementów nieliniowych obciążenia (blok $F1$) użyto identycznych przekształtników diodowych, jak dla uzyskania charakterystyki nieliniowej rezystancji i nieliniowej indukcyjności. Znaczenie ich jako odrębnych elementów w strukturze modelu analogowego uzyskiwane jest poprzez doprowadzenie odpowiednich sygnałów oraz dobranie odpowiednich wartości współczynników zamiany skal i obliczenie właściwych nastaw współczynników stałych.

Na rys. 6 pokazano sposób realizacji bloku $F1$ w trzech wersjach uwzględniających oba typy charakterystyk nieliniowych. Zmiana rezystancji i nastaw potencjometrów umożliwia kształtowanie charakterystyk w szerokim zakresie zmian parametrów dynamicznych i punktu załamania.

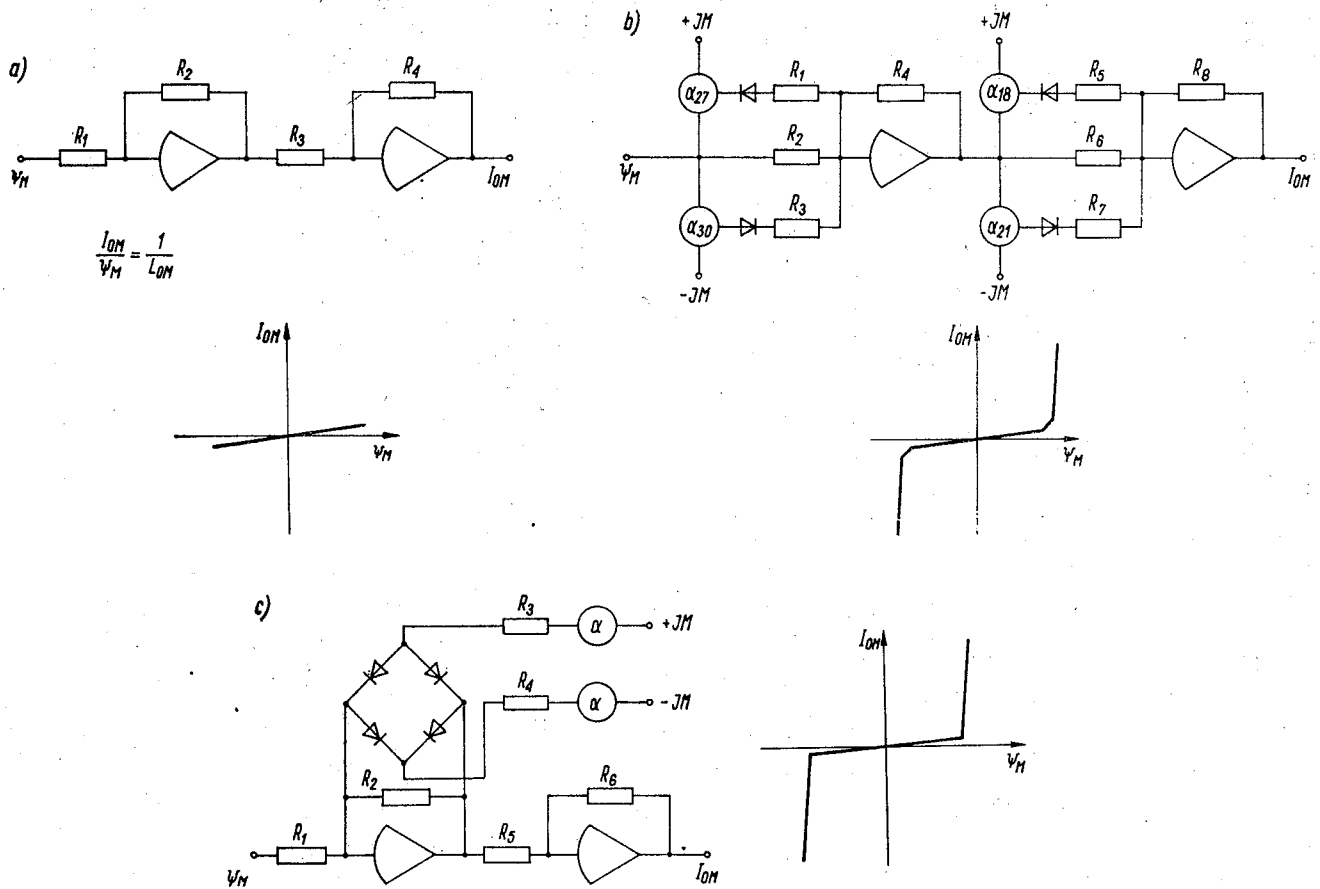
2.4. Dobór parametrów modelu w zależności od zakresu przetężeń. Realizacja bloku $F2$

W zależności od żądanego zakresu przetężeń obliczono dla wszystkich zmiennych współczynniki zamiany skal, przyjmując za podstawę wartości maksymalne prądu pierwotnego i wtórnego oraz prądu jałowego osiągane w poszczególnych możliwych zakresach przetężeń. Dobór współczynników należy podporządkować zasadzie kompromisu między zachowaniem możliwie największej uniwersalności nastaw a właściwym wykorzystaniem pola pracy maszyny dla poszczególnych zakresów. I tak przykładowo, w stosunku do



Rys. 6. Realizacja bloku F_1

a), b) — realizacja charakterystyk typu I, c) — realizacja charakterystyk typu II



Rys. 7. Realizacja bloku F_2

a) — odmiana *A*, b) — odmiana *B*, c) — odmiana *C*

nastaw dla odmiany *A* modelu, odmiana *B* różni się zmianą współczynnika zamiany skali α_{i_o}, nastawą potencjometru α_{16} oraz realizacją bloku *F*2. Natomiast w odmianie *C* ulegają zmianie współczynniki zamiany skal α_i, α_u, α_{i_o}, α_{ψ_L}, nastawy wszystkich potencjometrów oraz realizacja bloku *F*2.

Na rys. 7 pokazano sposoby realizacji bloku *F*2 dla poszczególnych odmian *A*, *B* i *C* modelu analogowego.

3. PODSUMOWANIE

Przedstawiona w artykule metodyka konstruowania modelu analogowego układu przekładnik prądowy — obciążenie nieliniowe umożliwia uzyskanie modelu, który pozwala na dokonanie oceny własności transformacyjnych przekładnika pracującego w bardzo szerokim zakresie przetężeń w stanach statycznych, a przy zmianie generatora funkcji wymuszającej prąd pierwotny również i w stanach dynamicznych. Prostota modelu sprawia, że daje się go wykorzystać przy użyciu nieskomplikowanych maszyn analogowych, takich jak np. Meda 41TA.

Wykonane badania modelu analogowego układu przekładnik prądowy — obciążenie nieliniowe umożliwiło zbadanie wpływu wszystkich podstawowych parametrów na pracę układu. Wykryto przy tym wiele nieopisanych dotychczas w literaturze zjawisk. Uzyskane liczne informacje na temat pracy omawianego układu wymagają odrębnego opracowania. Obecnie wymienimy pokrótce niektóre bardziej interesujące.

a) Zastosowanie odmiany *B* i *C* modelu analogowego umożliwiło badanie układu przekładnik nieliniowy — obciążenie nieliniowe w zakresie przetężeń przekraczających ponad pięćdziesięciokrotnie wartość pierwotnego prądu znamionowego przekładnika.

b) Zarejestrowane przebiegi strumienia ψ, prądów i_1, i_2, i_o oraz napięcia na obciążeniu u_2 umożliwiły wgląd w procesy transformacyjne w stanie głębokiego nasycenia.

c) Łatwość doboru i możliwość zmiany wartości parametrów nieliniowego obciążenia pozwoliły ocenić wpływ poszczególnych parametrów na stan nasycenia rdzenia przekładnika oraz wartość i kształt jego prądu jałowego i wtórnego. Uzyskane wyniki pozwalają wnioskować o możliwości znacznego polepszenia dokładności transformacji przez odpowiednią modyfikację charakterystyki elementów nieliniowego obciążenia.

LITERATURA

1. A. Koszmider, J. Kasprzak, *Wyznaczanie charakterystyk przetężeniowych przekładnika prądowego za pomocą maszyn matematycznych*, Prace IPE P.Ł., Łódź, 1974.
2. G. Korn, M. Korn, *Electronic Analog and Hybrid Computers*, Mc Graw-Hill, Inc., 1964.
3. R. Kochenburger, *Modelowanie układów dynamicznych przy użyciu maszyn matematycznych*, WNT, Warszawa 1975.
4. J. Mędrzycki, *Technika analogowa i hybrydowa*, WNT, Warszawa 1974.
5. O. Palusiński i in., *Modelowanie analogowe i hybrydowe. Zadania i problemy*, WNT, Warszawa 1976.
6. W. Starczakow, *Przekładniki*, PWT, Warszawa 1959.

7. J. Kasprzak, *Analiza pracy przekładnika prądowego z nieliniowym obciążeniem*, Rozprawa doktorska, Łódź 1978.
8. Z. Piotrowski, J. Kasprzak, *Analiza pracy układu przekładnik prądowy — obciążenie nieliniowe*. Rozpr. Elektrot., z. 3, 1983.

Z. PIOTROWSKI, J. KASPRZAK

ANALOGUE SIMULATION OF CURRENT TRANSFORMER — NONLINEAR BURDEN SYSTEM

Summary

The application of an analogue computer in order to analyse transformation processes taking place in „current transformer — nonlinear burden" configuration is presented. The paper shows a simulation design technique of the system under study. The designed simulation makes possible steady state research in a large overcurrent range.

Z. PIOTROWSKI, J. KASPRZAK

SIMULATION ANALOGIQUE DU SYSTÈME TRANSFORMATEUR DE COURANT — CHARGE NON-LINÉAIRE

Résumé

L'auteur a présenté l'application du calculateur analogique à l'analyse du processus de transformation, ayant lieu dans le système transformateur de courant — charge non-linéaire. On a créé le modèle analogique du réseau, permettant d'examiner largement la surintensité dans le régime permanent.

Z. PIOTROWSKI, J. KASPRZAK

ANALOGMODELLIERUNG DES SYSTEMS STROMWANDLER — NICHTLINEARE BELASTUNG

Zusammenfassung

Im Artikel wurde die Anwendung eines Analogrechners für die Analyse der Transformationsprozesse im System Stromwandler — nichtlineare Belastung dargestellt. Es wurde ein Analogmodell für das System ausgearbeitet, das Untersuchungen des Überstromgebietes in statischen Zuständen im breiten Bereich ermöglicht.

З. ПИОТРОВСКИ, Я. КАСПШАК

АНАЛОГОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ТРАНСФОРМАТОР ТОКА — НЕЛИНЕЙНАЯ НАГРУЗКА

Резюме

Дан пример использования аналоговой ЭВМ в анализе процессов трансформации трансформаторов тока работающих при нелинейной нагрузке. Разработана аналоговая модель системы в которой можно провести исследования в широком диапазоне сверхтоков.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1984, 30, z. 1, ss. 147-168

621.314.224.8

Mechanizm i skutki oddziaływania obcego obwodu wielkoprądowego na przekładnik prądowy zwojnicowy

WALENTY STARCZAKOW (ŁÓDŹ)

Instytut Podstaw Elektrotechniki Politechniki Łódzkiej

Otrzymano 26.3.1982

W pracy przedstawiono próbę wyjaśnienia mechanizmu oddziaływania obcego obwodu wielkoprądowego na przekładnik prądowy zwojnicowy, a także oceniono skutki tego oddziaływania. Za podstawę przeprowadzonych rozważań teoretycznych posłużyły wyniki pomiarów wykonanych w układzie modelowym. W pomiarach uwzględniono zarówno przypadek szeregowego, jak i równoległego połączenia cewek uzwojenia wtórnego przekładnika.

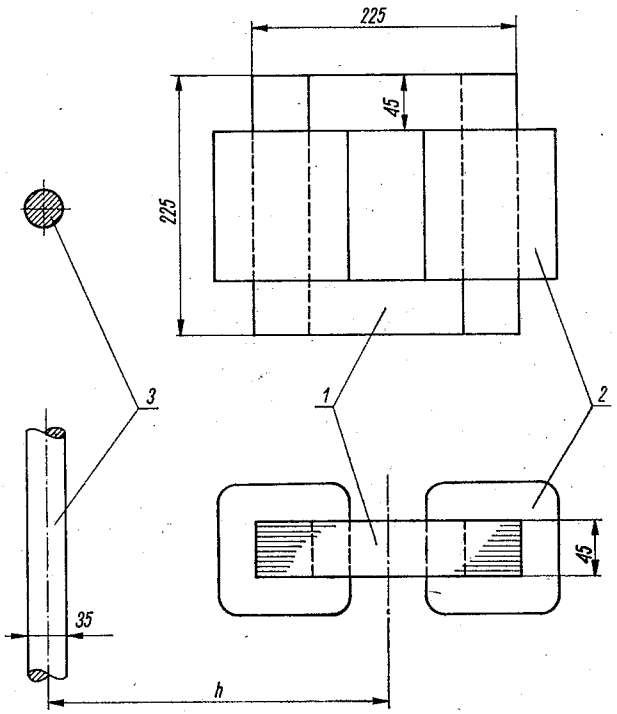
1. WSTĘP

Przedstawiając w niniejszej pracy próbę wyjaśnienia mechanizmu oraz oceny skutków oddziaływania obcego obwodu wielkoprądowego na przekładnik prądowy zwojnicowy, autor miał podstawy sądzić, że będzie ona stanowiła istotne uzupełnienie informacji, jakie na temat oddziaływania obcych pól magnetycznych na przekładniki prądowe zawiera aktualnie dostępna w tym zakresie literatura [1 ÷ 15]. Próba powyższa została oparta na wynikach odpowiednio zaprogramowanych badań, przeprowadzonych w układzie według rys. 1.

Badany przekładnik prądowy zwojnicowy ma kwadratowy rdzeń ramkowy, zaplatany z pasków o szerokości 45 mm i o długości 180 mm. Jako materiał rdzeniowy posłużyła anizotropowa taśma o grubości 0,33 mm walcowana na zimno ze stali krzemowej. Na obydwu pionowych kolumnach rdzenia mieszczą się jednakowe komplety trzech cewek, spośród których dwie mają po 50 zwojów przewodu miedzianego o przekroju 2,54 mm², natomiast trzecia — 100 zwojów przewodu miedzianego o przekroju 1,27 mm².

Uzwojenie pierwotne badanego przekładnika, którego przekładnia znamionowa wynosiła 5 A/5 A, można było formować drogą szeregowego łączenia dwóch cewek 50-zwojowych, mieszczących się każda na innej kolumnie rdzenia. Cewkami powyższymi można było poza tym posługiwać się również w celu pośredniego pomiaru amplitud działających w tychże kolumnach rdzenia wypadkowych strumieni magnetycznych.

W odniesieniu do formowania uzwojenia wtórnego możliwe były dwa warianty. Wariant pierwszy polegał na stosowaniu szeregowego łączenia dwóch pozostałych cewek 50-zwojowych, mieszczących się każda na innej kolumnie rdzenia. W wariancie natomiast drugim łączono ze sobą równolegle obydwie cewki 100-zwojowe, mieszczące się również każda na innej kolumnie rdzenia. W ten sposób jednakowa znamionowa liczba zwojów obydwu



Rys. 1. Szkic badanego układu (wymiary w mm)
1 — rdzeń przekładnika, *2* — uzwojenia przekładnika, *3* — szyna obcego obwodu wielkoprądowego

uzwojeń przekładnika, odpowiadająca obydwu wariantom uformowania uzwojenia wtórnego, wynosiła $z_{1n} = z_{2n} = 100$.

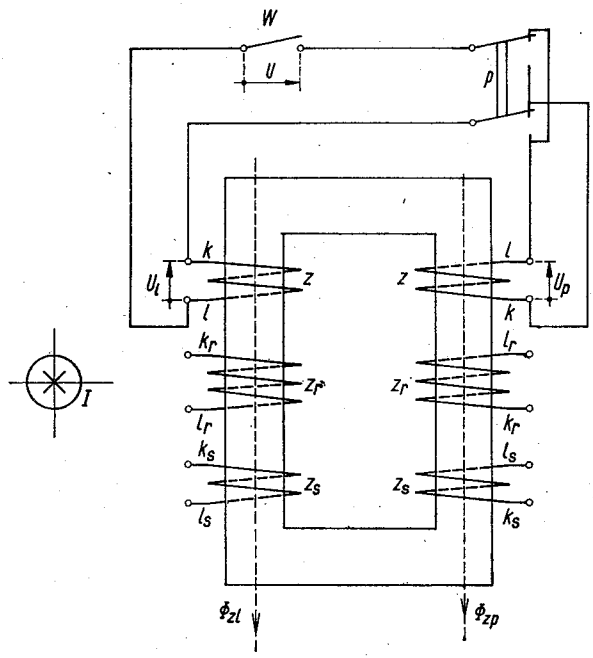
Elementem obcego obwodu wielkoprądowego w badanym układzie był prostoosiowy przewód miedziany, mający postać pręta o średnicy 35 mm, ułożony w sposób pokazany na rys. 1.

Badania zostały wykonane w pięciu niżej omówionych etapach.

2. ETAP PIERWSZY

W tym etapie badań, wykonanych w warunkach otwarcia wszystkich uzwojeń przekładnika, w pierwszej kolejności wyznaczono amplitudy Φ_{zlm} oraz Φ_{zpm} strumieni magnetycznych, wzbudzonych w pionowych kolumnach rdzenia przekładnika przez prąd o wartości skutecznej $I = 2000$ A i o częstotliwości 50 Hz płynący w pobliskim przewodzie szynowym obcego obwodu wielkoprądowego, położonym w odległości $h = 200$ mm od przekładnika.

Posługując się schematem zastępczym badanego układu, przedstawionym na rys. 2, zakładano — w przybliżeniu — pełne skojarzenie wyżej wspomnianych strumieni z odnośnymi cewkami pomiarowymi, liczącymi po $z = 50$ zwojów.



Rys. 2. Schemat uproszczony układu stosowanego w etapie pierwszym badań

Pomierzono wartości skuteczne napięć występujących na zaciskach obydwu cewek pomiarowych, a także wartości skuteczne ich sumy (górne położenie przełącznika P) oraz różnicy (dolne położenie przełącznika P), odwzorowane przez wartość skuteczną napięcia występującego na zaciskach wyłącznika W.

Otrzymano niżej podane wyniki:

$$U_l = 1{,}55 \text{ V},$$
$$U_p = 0{,}66 \text{ V},$$
$$|\underline{U}_l + \underline{U}_p| = 2{,}21 \text{ V},$$
$$|\underline{U}_l - \underline{U}_p| = 0{,}89 \text{ V}.$$

Na ich podstawie obliczono amplitudy strumieni magnetycznych, wnikających do poszczególnych kolumn pionowych rdzenia, jak następuje:

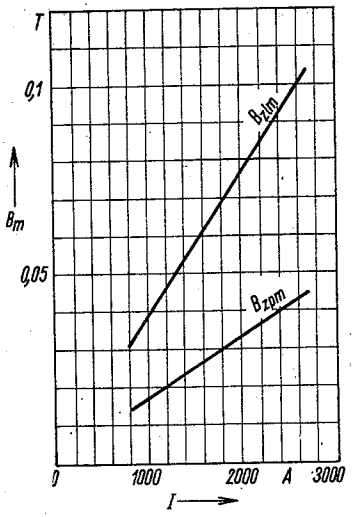
$$\Phi_{zlm} = \frac{U_l}{4{,}44fz} = \frac{1{,}55 \text{ V}}{4{,}44 \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 50} = 139 \text{ } \mu\text{Wb}, \tag{1}$$

$$\Phi_{zpm} = \frac{U_p}{4{,}44fz} = \frac{0{,}66 \text{ V}}{4{,}44 \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 50} = 59{,}4 \text{ } \mu\text{Wb}. \tag{2}$$

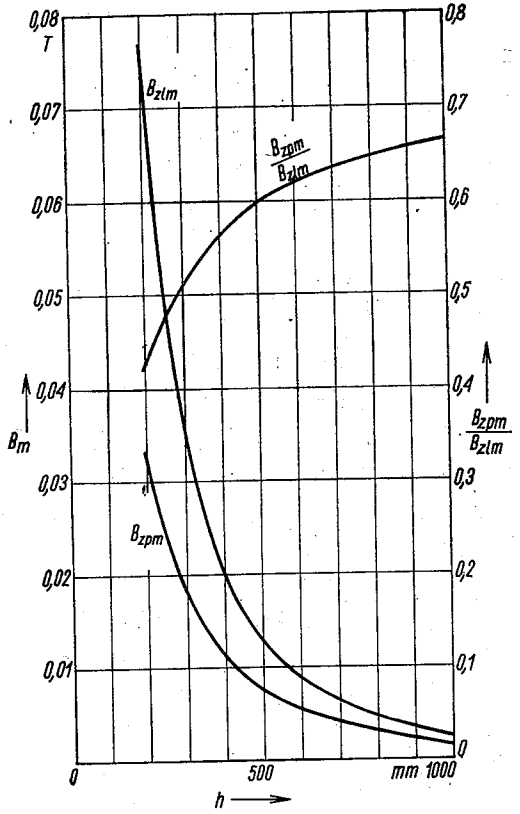
Jeżeli się uwzględni, że czynny przekrój rdzenia przekładnika wynosi $s_{Fe} = 18{,}2 \text{ cm}^2$, można obliczyć amplitudy występujących w pionowych kolumnach rdzenia indukcji jak niżej:

$$B_{zlm} = \frac{\Phi_{zlm}}{s_{Fe}} = \frac{139 \cdot 10^{-6} \text{ Vs}}{18{,}2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 0{,}0763 \text{ T}, \tag{3}$$

$$B_{zpm} = \frac{\Phi_{zpm}}{s_{Fe}} = \frac{59{,}4 \cdot 10^{-6} \text{ Vs}}{18{,}2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 0{,}0326 \text{ T}. \tag{4}$$



Rys. 3. Charakterystyki uzyskane w etapie pierwszym badań (h = 200 mm)



Rys. 4. Charakterystyki uzyskane w etapie pierwszym badań (I = 2000 A)

Wyniki pomiarów napięć U_l oraz U_p pozwoliły stwierdzić, że strumienie magnetyczne, wnikające z zewnątrz do kolumn pionowych rdzenia przekładnika, mają niejednakowe amplitudy, przy czym znacznie większa jest amplituda strumienia wnikającego do kolumny lewej, położonej bliżej zewnętrznego przewodu.

Wyniki natomiast pomiarów sumy $|\underline{U}_l+\underline{U}_p|$ oraz różnicy $|\underline{U}_l-\underline{U}_p|$ tychże napięć świadczą o tym, że obydwa powyższe strumienie zewnętrzne mają jednakowe fazy. Jeżeli się przy tym uwzględni, że drogi zamknięte tych strumieni wokół szyny sąsiedniej przebiegają głównie w powietrzu, można z całą pewnością twierdzić o pełnej zgodności wyżej wspomnianych faz z fazą prądu I.

Wyniki kolejnych pomiarów i obliczeń, przeprowadzonych w tym etapie badań, raz przy zmianie wartości skutecznej prądu I od 800 A do 2700 A (przy h = 200 mm), a drugi raz — przy zmianie odległości h od 200 mm do 1000 mm (przy I = 2000 A), zostały przedstawione na rys. 3 i na rys. 4.

Jak widać (rys. 3), przy h = const amplitudy indukcji B_{zlm} oraz B_{zpm} są proporcjonalne do wartości skutecznej prądu I w szynie sąsiedniej. W miarę natomiast oddalania tej szyny od przekładnika, przy I = const (rys. 4), amplitudy indukcji bardzo silnie maleją, przy czym podział sumarycznego strumienia zewnętrznego na obydwie pionowe kolumny rdzenia staje się coraz bardziej równomierny, o czym świadczy wzrastająca wartość stosunku B_{zpm}/B_{zlm}.

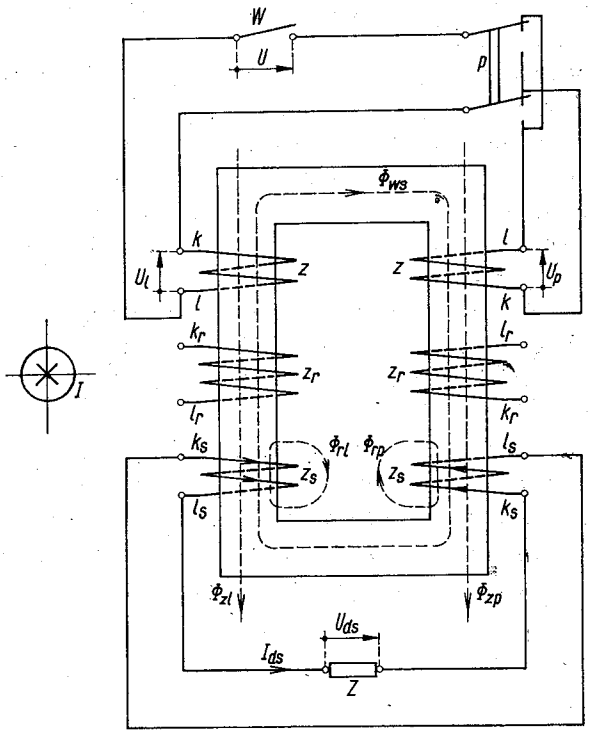
3. ETAP DRUGI

W tym etapie badań obwód wtórny przekładnika, uformowany w postaci szeregowego połączenia dwóch cewek 50-zwojowych (rys. 5), został zamknięty początkowo przez odbiornik o module impedancji Z = 1,2 Ω, charakteryzujący się współczynnikiem mocy $\cos\psi$ = 0,8 ind.

Pomiary wartości skutecznych napięć, występujących w tym przypadku na zaciskach obydwu cewek pomiarowych, a także wartości skutecznych sumy i różnicy tych napięć oraz wartości skutecznej napięcia występującego na zaciskach odbiornika, dały — w warunkach I = 2000 A oraz h = 200 mm — następujące wyniki:

$$U_l = 1{,}11 \text{ V},$$
$$U_p = 1{,}1 \text{ V},$$
$$|\underline{U}_l+\underline{U}_p| = 2{,}21 \text{ V},$$
$$|\underline{U}_l-\underline{U}_p| = 0{,}012 \text{ V},$$
$$U_{ds} = 0{,}0067 \text{ V},$$

Oznaczałoby to, że sumaryczny strumień magnetyczny, wnikający z zewnątrz do rdzenia przekładnika, pozostaje ten sam co w etapie pierwszym badań (przy I = 2000 A oraz przy h = 200 mm), ale tym razem dzieli się on niemal równomiernie na obydwie pionowe kolumny tego rdzenia. Wyjaśnienie powyższego zjawiska oparto na niżej podanym rozumowaniu.



Rys. 5. Schemat uproszczony układu stosowanego w etapie drugim badań

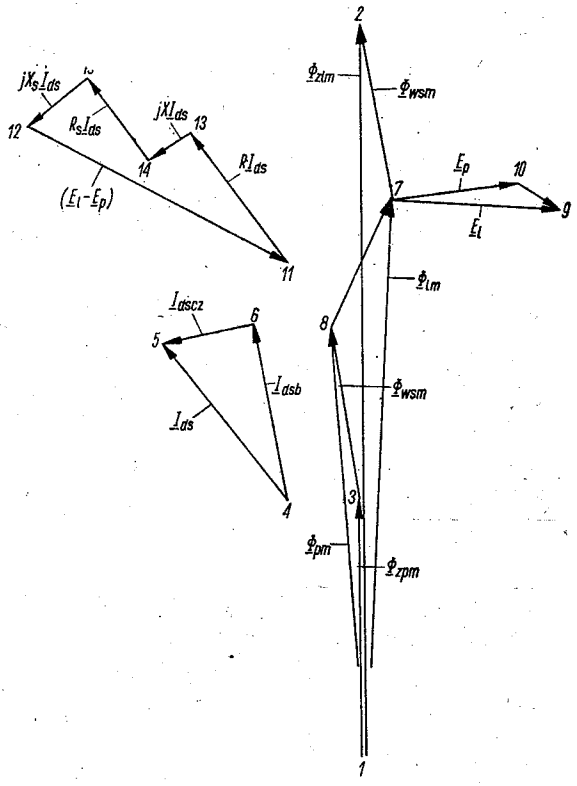
Siły elektromotoryczne, które w warunkach otwarcia obwodu wtórnego przekładnika byłyby indukowane w poszczególnych cewkach uzwojenia wtórnego przez odnośne strumienie zewnętrzne, działałyby w tym obwodzie przeciwsobnie. Wartość skuteczna siły elektromotorycznej, indukowanej przez strumień Φ_{zl} w cewce mieszczącej się na lewej kolumnie pionowej rdzenia, wynosiłaby $E_{zl} = 1{,}55$ V. Byłaby ona zatem znacznie większa od wartości skutecznej siły elektromotorycznej, indukowanej przez strumień Φ_{zp} w cewce mieszczącej się na prawej kolumnie pionowej rdzenia, która wynosiłaby $E_{zp} = 0{,}66$ V.

Powyższe zależności wyznaczają zwrot prądu I_{ds}, indukowanego w zamkniętym obwodzie wtórnym badanego przekładnika prądowego, przez pole magnetyczne prądu I sąsiedniej obcej szyny. Z istnieniem prądu I_{ds} jest związane występowanie niewielkich strumieni rozproszenia Φ_{rl} oraz Φ_{rp}, zamykających się głównie przez powietrze, a także występowanie stosunkowo znacznego strumienia wyrównawczego Φ_{ws}, który zostaje wzbudzony w zamkniętym obwodzie magnetycznym rdzenia przez amperozwoje $I_{ds}z_2$ (przy czym $z_2 = 2z_s = 2 \cdot 50 = 100$).

Na podstawie rys. 5 można napisać następujące zależności dla amplitud strumieni wypadkowych, działających w poszczególnych kolumnach pionowych rdzenia:

$$\underline{\Phi}_{lm} = \underline{\Phi}_{zlm} - \underline{\Phi}_{wsm}, \tag{5}$$

$$\underline{\Phi}_{pm} = \underline{\Phi}_{zpm} + \underline{\Phi}_{wsm}, \tag{6}$$



Rys. 6. Wykres wskazowy dotyczący etapu drugiego badań

przy czym:

$$\Phi_{lm} = \frac{U_l}{4{,}44fz} = \frac{1{,}11\ \text{V}}{4{,}44 \cdot 50\ \text{s}^{-1} \cdot 50} = 100\ \mu\text{Wb}, \tag{7}$$

$$\Phi_{pm} = \frac{U_p}{4{,}44fz} = \frac{1{,}1\ \text{V}}{4{,}44 \cdot 50\ \text{s}^{-1} \cdot 50} = 98{,}4\ \mu\text{Wb}. \tag{8}$$

Jeżeli — zgodnie z otrzymanymi wynikami pomiarów — przyjmiemy, że

$$\Phi_{lm} \approx \Phi_{pm} \approx \frac{\Phi_{zlm}+\Phi_{zpm}}{2} = \frac{139+59{,}4}{2}\ \mu\text{Wb} = 99{,}2\ \mu\text{Wb}, \tag{9}$$

wówczas wartość amplitudy strumienia wyrównawczego można określić jak następuje

$$\Phi_{wsm} = \frac{\Phi_{zlm}-\Phi_{zpm}}{2} = \frac{139-59{,}4}{2}\ \mu\text{Wb} = 39{,}8\ \mu\text{Wb}. \tag{10}$$

Strumień wyrównawczy Φ_{ws}, nakładający się w zamkniętym obwodzie magnetycznym rdzenia przekładnika na wnikający do tego rdzenia z zewnątrz sumaryczny strumień magnetyczny, wzbudzony przez prąd I sąsiedniej obcej szyny, wymusza niemal równomierny podział tego strumienia zewnętrznego na obydwie pionowe kolumny rdzenia. Znacznemu wyrównaniu amplitud Φ_{lm} oraz Φ_{pm} strumieni wypadkowych odpowiada

analogiczne wyrównanie wartości skutecznych sił elektromotorycznych E_l oraz E_p, indukowanych tymi strumieniami w cewkach uzwojenia wtórnego badanego przekładnika. Znikomo mała różnica wartości skutecznych powyższych sił elektromotorycznych, wynosząca

$$|\underline{E}_l - \underline{E}_p| = |\underline{U}_l - \underline{U}_p| = 0{,}012 \text{ V}, \tag{11}$$

zapewnia jednak zrównoważenie napięć, które występują w obwodzie wtórnym przekładnika w związku z przepływem w nim prądu o znikomo małej wartości skutecznej

$$I_{ds} = \frac{U_{ds}}{Z} = \frac{0{,}0067 \text{ V}}{1{,}2\Omega} = 0{,}0056 \text{ A}, \tag{12}$$

całkowicie jednak wystarczającej na wzbudzenie przez znikomo małe amperozwoje $I_{ds} = 0{,}0056 \text{ A} \cdot 100 = 0{,}56$ A strumienia wyrównawczego o dostatecznie dużej amplitudzie $\Phi_{wsm} = 39{,}8$ μWb.

Zależności, występujące w tym etapie badań, przedstawiono za pomocą wykresu wskazowego na rys. 6. W celu uzyskania większej wyrazistości obrazu nadano na tym wykresie odcinkom $\overline{8\,7}$ oraz $\overline{10\,9}$ przesadnie duże wymiary w porównaniu z odcinkami pozostałymi.

Na rys. 6 wskazy $\overrightarrow{1\,2} = \underline{\Phi}_{zlm}$ oraz $\overrightarrow{1\,3} = \underline{\Phi}_{zpm}$ przedstawiają strumienie zewnętrzne wzbudzane w pionowych kolumnach rdzenia przekładnika przez prąd I sąsiedniej obcej szyny w przypadku, gdy wszystkie uzwojenia tego przekładnika są otwarte.

Prąd I_{ds} w obwodzie wtórnym przekładnika, załączonym na odbiornik o module impedancji $Z = 1{,}2\ \Omega$, jest zobrazowany przez wskaz $\overrightarrow{4\,5} = \underline{I}_{ds}$. Wskazy $\overrightarrow{4\,6} = \underline{I}_{dsb}$ oraz $\overrightarrow{6\,5} = \underline{I}_{dscz}$ przedstawiają odpowiednio składowe bierną i czynną tego prądu. Strumień wyrównawczy jest odwzorowany przez wskazy $\overrightarrow{7\,2} = \overrightarrow{3\,8} = \underline{\Phi}_{wsm}$, których fazy są zgodne z fazą składowej biernej I_{dsb} prądu I_{ds}. Wskazy strumieni wypadkowych $\overrightarrow{1\,7} = \underline{\Phi}_{lm}$ oraz $\overrightarrow{1\,8} = \underline{\Phi}_{pm}$, działających w pionowych kolumnach rdzenia przekładnika, spełniają zależności (5) i (6).

Wskazy $\overrightarrow{7\,9} = \underline{E}_l$ oraz $\overrightarrow{7\,10} = \underline{E}_p$ sił elektromotorycznych, indukowanych w cewkach uzwojenia wtórnego przekładnika przez powyższe strumienie, są oczywiście opóźnione względem wskazów tych strumieni o kąt prosty. W celu uzyskania większej wyrazistości obrazu, wskaz $\overrightarrow{10\,9} = (\underline{E}_l - \underline{E}_p)$ wypadkowej siły elektromotorycznej, indukowanej w zamkniętym obwodzie wtórnym przekładnika przez pole magnetyczne prądu I sąsiedniej obcej szyny, jest na wykresie wskazowym (rys. 6) powtórzony — w odpowiednio powiększonej skali — przez wskaz $\overrightarrow{12\,11} = (\underline{E}_l - \underline{E}_p)$.

Do zobrazowania bilansu napięć obwodu wtórnego, wyrażonego równaniem

$$(\underline{E}_l - \underline{E}_p) + (R + jX)\underline{I}_{ds} + (R_s + jX_s)\underline{I}_{ds} = 0, \tag{13}$$

służą dodatkowo wskazy:

$$\overrightarrow{11\,13} = R\underline{I}_{ds},$$

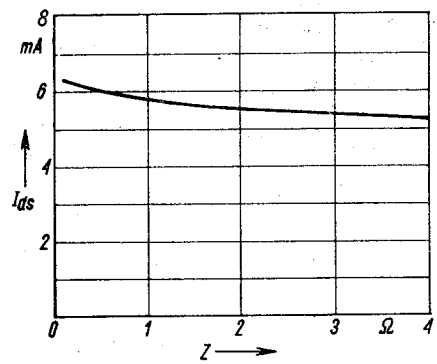
$$\overrightarrow{13\,14} = jX\underline{I}_{ds},$$

$$\overrightarrow{14\,15} = R_s\underline{I}_{ds},$$

$$\overrightarrow{15\,12} = jX_s\underline{I}_{ds}.$$

przy czym R, X oraz R_s, X_s oznaczają odpowiednio rezystancje i reaktancje odbiornika oraz uzwojeń wtórnych przekładnika.

Wyniki dodatkowych pomiarów, wykonanych w warunkach $I = 2000$ A oraz $h = 200$ mm — przedstawione na rys. 7 — pozwalają stwierdzić, że zmiany wartości modułu impedancji Z odbiornika w dość szerokich granicach (od 0,1 Ω do 4 Ω) powodują jedynie stosunkowo nieznaczne zmiany wartości skutecznej prądu I_{ds}, przy czym wartość ta jest oczywiście największa przy zwarciu obwodu wtórnego ($Z = 0$).



Rys. 7. Charakterystyka $I_{ds} = f(Z)$ uzyskana w etapie drugim badań ($I = 2000$ A, $h = 200$ mm)

Wyniki pomiarów i obliczeń, wykonanych w etapie drugim badań, upoważniają do sformułowania niżej podanych wniosków, dotyczących przypadku, gdy obwód pierwotny badanego przekładnika prądowego jest otwarty:

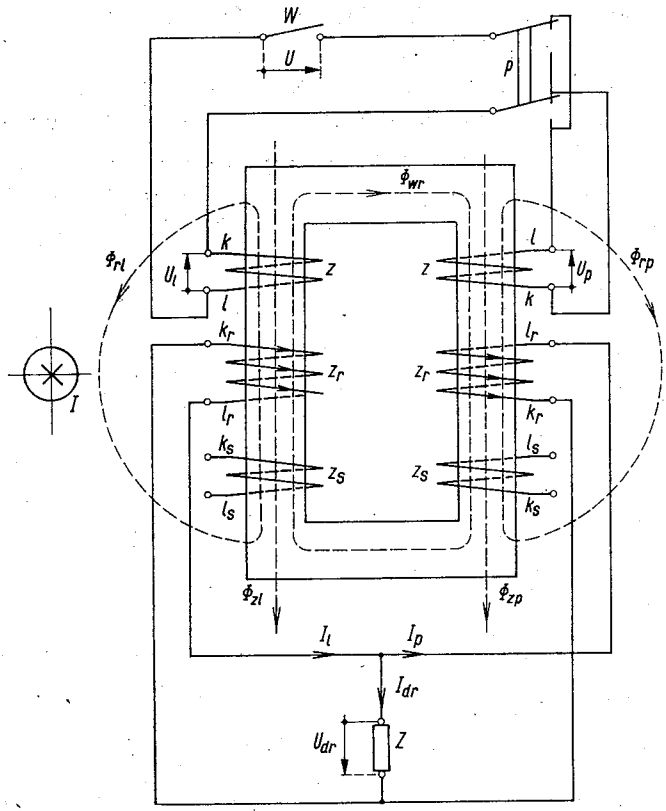
1. zamknięty obwód wtórny, o szeregowym układzie cewek uzwojenia wtórnego, działa w taki sposób, że nie zmienia praktycznie sumarycznego strumienia zewnętrznego, który — w związku z oddziaływaniem prądu sąsiedniej obcej szyny — wnikałby do rdzenia badanego przekładnika w przypadku otwarcia obwodu wtórnego, wymusza natomiast niemal równy podział tego strumienia na obydwie pionowe kolumny rdzenia,

2. powyższe działanie wyrównujące jest wynikiem indukowania w zamkniętym obwodzie wtórnym przekładnika, przez pole magnetyczne prądu sąsiedniej obcej szyny, określonego prądu o znikomej wprawdzie wartości skutecznej, który jednak wzbudza w rdzeniu tego przekładnika okrężny strumień wyrównawczy powodujący przesunięcie nadmiaru zewnętrznego strumienia magnetycznego z lewej do prawej kolumny tego rdzenia.

4. ETAP TRZECI

W tym etapie badań posłużono się układem, którego schemat uproszczony przedstawiono na rys. 8.

Uzwojenie wtórne badanego przekładnika prądowego, zamknięte początkowo przez odbiornik o module impedancji $Z = 1{,}2$ Ω, charakteryzujący się współczynnikiem mocy $\cos\psi = 0{,}8$ ind, jest w tym przypadku utworzone przez równoległe połączenie obydwu cewek 100-zwojowych, mieszczących się każda na innej pionowej kolumnie rdzenia. Jak poprzednio, pomierzono wartości skuteczne napięć, występujących w warunkach $I =$



Rys. 8. Schemat uproszczony układu stosowanego w etapie trzecim badań

= 2000 A oraz $h = 200$ mm na zaciskach obydwu cewek pomiarowych, a także wartości skuteczne sumy i różnicy tych napięć. Poza tym pomierzono również wartości skuteczne prądów płynących w obydwu cewkach uzwojenia wtórnego oraz wartość skuteczną napięcia występującego na zaciskach odbiornika. Otrzymano wyniki następujące:

$$U_l = 0{,}51 \text{ V},$$

$$U_p = 0{,}5 \text{ V},$$

$$|\underline{U}_l + \underline{U}_p| = 1{,}01 \text{ V},$$

$$|\underline{U}_l - \underline{U}_p| = 0{,}011 \text{ V},$$

$$I_l \approx I_p = 1{,}8 \text{ A},$$

$$U_{dr} = 0{,}0068 \text{ V}.$$

Na podstawie rys. 8 można napisać następujące zależności:

$$\underline{\Phi}_{lm} = \underline{\Phi}_{zlm} - \underline{\Phi}_{wrm} - \underline{\Phi}_{rlm}, \tag{14}$$

$$\underline{\Phi}_{pm} = \underline{\Phi}_{zpm} + \underline{\Phi}_{wrm} - \underline{\Phi}_{rpm}, \tag{15}$$

z których wynika, że w rdzeniu, oprócz strumieni Φ_{zl} oraz Φ_{zp}, wzbudzonych w jego pionowych kolumnach przez prąd I sąsiedniej szyny, działa strumień wyrównawczy Φ_{wr},

wzbudzony w zamkniętym obwodzie magnetycznym rdzenia przez znikomo małe

$$\underline{I}_{dr} z_r = (\underline{I}_l - \underline{I}_p) z_r, \tag{16}$$

amperozwoje a także działają stosunkowo znaczne strumienie rozproszenia Φ_{rl} oraz Φ_{rp}, wzbudzone odpowiednio przez znaczne amperozwoje $I_l z_r$ oraz $I_p z_r$. Powyższe strumienie zamykają się na zewnątrz rdzenia przez powietrze.

Amplitudy strumieni wypadkowych, działających w pionowych kolumnach rdzenia przekładnika, mają następujące wartości:

$$\Phi_{lm} = \frac{U_l}{4{,}44fz} = \frac{0{,}51 \text{ V}}{4{,}44 \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 50} = 45{,}9 \ \mu\text{Wb}, \tag{17}$$

$$\Phi_{pm} = \frac{U_p}{4{,}44fz} = \frac{0{,}5 \text{ V}}{4{,}44 \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 50} = 45 \ \mu\text{Wb}. \tag{18}$$

Jeżeli się zatem uwzględni, że

$$\Phi_{lm} \approx \Phi_{pm}, \tag{19}$$

$$\Phi_{rlm} \approx \Phi_{rpm} \text{ (z uwagi na zależność } I_l \approx I_p), \tag{20}$$

wówczas na podstawie wzorów (14) i (15) można napisać

$$\underline{\Phi}_{zlm} - \underline{\Phi}_{wrm} \approx \underline{\Phi}_{zpm} + \underline{\Phi}_{wrm}. \tag{21}$$

Oznaczałoby to, że strumień wyrównawczy Φ_{wr} wymusza niemal równy podział sumarycznego strumienia zewnętrznego pomiędzy obydwie pionowe kolumny rdzenia. Amplitudę strumienia wyrównawczego określa przy tym analogiczna do wzoru (10) zależność

$$\Phi_{wrm} \approx \frac{\Phi_{zlm} - \Phi_{zpm}}{2} = \frac{139 - 59{,}4}{2} \mu\text{Wb} = 39{,}8 \ \mu\text{Wb}. \tag{22}$$

Z zależności (14) i (15) wynika poza tym, że — podzielony niemal równo pomiędzy obydwie kolumny pionowe rdzenia — sumaryczny strumień zewnętrzny doznaje w każdej kolumnie identycznego zmniejszenia przez działające w tych kolumnach stosunkowo znaczne strumienie rozproszenia Φ_{rl} oraz Φ_{rp}. Amplitudy tych strumieni można na podstawie zależności (14) i (15) określić — w przybliżeniu — jak następuje

$$\Phi_{rlm} \approx \Phi_{rpm} \approx \frac{(\Phi_{zlm} + \Phi_{zpm}) - (\Phi_{lm} + \Phi_{pm})}{2} =$$

$$= \frac{(139 + 59{,}4) - (45{,}9 + 45)}{2} \mu\text{Wb} = 53{,}75 \ \mu\text{Wb}. \tag{23}$$

Powyższe strumienie rozproszenia, powodujące wypchnięcie znacznej części sumarycznego strumienia zewnętrznego poza obręb rdzenia, są przejawem tego, że zamknięty obwód uzwojenia wtórnego, uformowany przez równoległe połączenie cewek mieszczących się na przeciwległych kolumnach rdzenia i wiodący prąd o stosunkowo znacznej wartości skutecznej ($I_l \approx I_p \approx 1{,}8$ A), stanowi dla tego rdzenia dość silnie działający ekran elektromagnetyczny względem pola magnetycznego prądu I sąsiedniej obcej szyny.

Praktycznemu wyrównaniu amplitud Φ_{lm} oraz Φ_{pm} strumieni wypadkowych odpowiada analogiczne wyrównanie wartości skutecznych E_l oraz E_p sił elektromotorycznych, indu-

kowanych w odnośnych cewkach uzwojenia wtórnego tymi strumieniami. Znikoma różnica tych sił elektromotorycznych, której wartość skuteczna wynosi

$$|\underline{E}_l - \underline{E}_p| = |\underline{U}_l - \underline{U}_p| \frac{z_r}{z} = 0{,}011 \text{ V} \frac{100}{50} = 0{,}022 \text{ V}, \tag{24}$$

powoduje w zamkniętym obwodzie, utworzonym przez odbiornik oraz 100-zwojową cewkę mieszczącą się na lewej kolumnie pionowej rdzenia, przepływ prądu

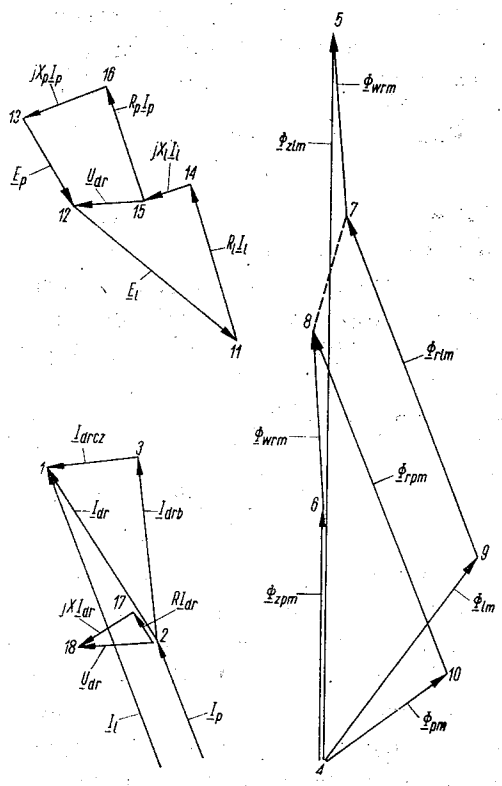
$$\underline{I}_{dr} = \underline{I}_l - \underline{I}_p. \tag{25}$$

Znikomo mała wartość skuteczna tego prądu, wynosząca w rozważanym przypadku

$$I_{dr} = \frac{U_{dr}}{Z} = \frac{0{,}0068 \text{ V}}{1{,}2\Omega} = 0{,}00566 \text{ A}, \tag{26}$$

wystarcza jednak do wzbudzenia przez znikomo małe amperozwoje $I_{dr}\, Zr = 0{,}00566 \text{ A} \times \times 100 = 0{,}566$ A strumienia wyrównawczego o dostatecznie dużej amplitudzie $\Phi_{wrm} \approx \approx 39{,}8\ \mu$Wb.

Zależności, występujące w tym etapie badań, zostały szkicowo zilustrowane na wykresie wskazowym na rys. 9. W celu uzyskania większej wyrazistości obrazu nadano odcinkowi $\overline{7\,8}$ przesadnie duże wymiary w porównaniu z odcinkami pozostałymi. Wskazy prądów I_l oraz I_p przedstawiono za pomocą linii równoległych, kończących się odpowiednio



Rys. 9. Wykres wskazowy dotyczący etapu trzeciego badań

w punktach 1 oraz 2. Wskaz $\overrightarrow{2\,1} = \underline{I}_{dr}$ przedstawia płynący przez odbiornik znikomo mały prąd spełniający zależność (25). Składowe bierna i czynna tego prądu są przedstawione odpowiednio przez wskazy $\overrightarrow{2\,3} = \underline{I}_{drb}$ oraz $\overrightarrow{3\,1} = \underline{I}_{drcz}$.

Wskazy $\overrightarrow{4\,5} = \underline{\Phi}_{zlm}$ oraz $\overrightarrow{4\,6} = \underline{\Phi}_{zpm}$ obrazują strumienie zewnętrzne, które są wzbudzane w pionowych kolumnach rdzenia przez prąd I sąsiedniej obcej szyny w przypadku, gdy wszystkie uzwojenia przekładnika są otwarte.

Wskazy $\overrightarrow{7\,5} = \overrightarrow{6\,8} = \underline{\Phi}_{wrm}$ przedstawiają strumień wyrównawczy, wzbudzony w zamkniętym obwodzie magnetycznym rdzenia przekładnika przez znikomo małe amperozwoje $I_{dr}\,z_r$ (przy czym $z_r = z_{2n} = 100$). Faza tego strumienia jest zgodna z fazą składowej biernej I_{drb} prądu I_{dr}.

Wzbudzone stosunkowo znacznymi amperozwojami $I_l z_r$ oraz $I_p z_r$ strumienie rozproszenia, przenikające pionowe kolumny rdzenia i zamykające się na zewnątrz niego przez powietrze, są pokazane w postaci wskazów $\overrightarrow{9\,7} = \underline{\Phi}_{rlm}$ oraz $\overrightarrow{10\,8} = \underline{\Phi}_{rpm}$. Ich fazy są zgodne odpowiednio z fazami prądów $\underline{I}_l$ oraz $\underline{I}_p$.

Wskazy $\overrightarrow{4\,9} = \underline{\Phi}_{lm}$ oraz $\overrightarrow{4\,10} = \underline{\Phi}_{pm}$ przedstawiają strumienie wypadkowe, działające odpowiednio w lewej i w prawej pionowych kolumnach rdzenia. Indukowane przez powyższe strumienie w cewkach uzwojenia wtórnego siły elektromotoryczne są przedstawione odpowiednio przez wskazy $\overrightarrow{12\,11} = \underline{E}_l$ oraz $\overrightarrow{13\,12} = \underline{E}_p$.

W zamkniętym obwodzie obydwu cewek uzwojenia wtórnego płynie prąd lokalny, spełniający zależność

$$\underline{I}_p = \underline{I}_l - \underline{I}_{dr}. \tag{27}$$

Do zobrazowania bilansu napięć tego zamkniętego obwodu, wyrażonego za pomocą wzoru

$$\underline{E}_l + \underline{E}_p + (R_l + jX_l)\underline{I}_l + (R_p + jX_p)\underline{I}_p = 0, \tag{28}$$

służą dodatkowo (rys. 9) następujące wskazy:

$$\overrightarrow{11\,14} = R_l \underline{I}_l,$$
$$\overrightarrow{14\,15} = jX_l \underline{I}_l,$$
$$\overrightarrow{15\,16} = R_p \underline{I}_p,$$
$$\overrightarrow{16\,13} = jX_p \underline{I}_p,$$

przy czym R_l, X_l oraz R_p, X_p oznaczają odpowiednio rezystancje i reaktancje poszczególnych cewek uzwojenia wtórnego badanego przekładnika.

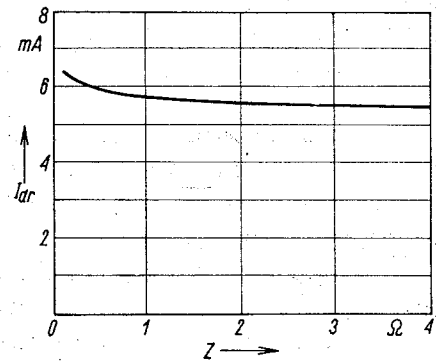
Wskazy $\overrightarrow{15\,12} = \overrightarrow{2\,18} = \underline{U}_{dr} = Z\underline{I}_{dr}$ obrazują napięcie na zaciskach odbiornika, spełniające zależność

$$\underline{U}_{dr} = Z\underline{I}_{dr} = (R + jX)\underline{I}_{dr}, \tag{29}$$

przy czym stronie prawej zależności odpowiadają wskazy:

$$\overrightarrow{2\,17} = R\underline{I}_{dr},$$
$$\overrightarrow{17\,18} = jX\underline{I}_{dr}.$$

Przedstawione na rys. 10 wyniki dodatkowych pomiarów, wykonanych w warunkach $I = 2000$ A oraz $h = 200$ mm, pozwalają stwierdzić, że zmiany wartości modułu impedancji Z odbiornika w dość szerokich granicach (od 0,1 Ω do 4 Ω) powodują jedynie nieznaczne zmiany wartości skutecznej prądu I_{dr}, przy czym wartość ta jest oczywiście największa w przypadku zwarcia zacisków wtórnych przekładnika ($Z = 0$).



Rys. 10. Charakterystyka $I_{dr} = f(Z)$ uzyskana w etapie trzecim badań ($I = 2000$ A, $h = 200$ mm)

Wyniki pomiarów i obliczeń, uzyskane w etapie trzecim badań, upoważniają do sformułowania niżej przytoczonych wniosków, dotyczących przypadku, gdy obwód pierwotny badanego przekładnika prądowego jest otwarty.

1. Zamknięty obwód wtórny przekładnika prądowego, o równoległym układzie cewek uzwojenia wtórnego, wykazuje — w warunkach istnienia prądu w sąsiedniej obcej szynie — działanie dwojakie. Po pierwsze jest to działanie wyrównujące przez to, że wymusza niemal równy podział pomiędzy obydwie pionowe kolumny rdzenia sumarycznego zewnętrznego strumienia magnetycznego, który — w związku z istnieniem prądu w sąsiedniej obcej szynie — wnikałby do tego rdzenia w przypadku otwarcia obydwu cewek uzwojenia wtórnego. Po drugie jest to działanie ekranujące rdzeń przekładnika względem pola magnetycznego prądu obcej szyny, powoduje bowiem znaczne — a przy tym niemal identyczne — zmniejszenie amplitud obydwu praktycznie wyrównanych już części składowych sumarycznego zewnętrznego strumienia magnetycznego.

2. Działanie wyrównujące jest wynikiem przepływu w zamkniętym obwodzie, uformowanym przez mieszczącą się na lewej kolumnie pionowej rdzenia cewkę uzwojenia wtórnego przekładnika oraz przez przyłączony do zacisków wtórnych przekładnika odbiornik, określonego prądu o znikomej wartości skutecznej, wzbudzającego w rdzeniu przekładnika okrężny strumień wyrównawczy, który z kolei powoduje przesunięcie nadmiaru zewnętrznego strumienia z lewej kolumny rdzenia do kolumny prawej. Natomiast wyżej wspomniane działanie ekranujące jest wynikiem przepływu w zamkniętym obwodzie obydwu cewek uzwojenia wtórnego okrężnego prądu lokalnego, o znacznej wartości skutecznej, wzbudzającego strumienie rozproszenia o znacznych — a przy tym praktycznie jednakowych — amplitudach, które powodują wypchnięcie jednakowych części obydwu strumieni zewnętrznych z kolumn poza rdzeń.

5. ETAP CZWARTY

W etapach drugim i trzecim badań — gdy uzwojenie pierwotne przekładnika prądowego było otwarte — stwierdzono, że przez przyłączony do zacisków wtórnych przekładnika odbiornik płynie określony prąd, który wzbudza w zamkniętym obwodzie magnetycznym rdzenia strumień wyrównawczy, wymuszający niemal równy podział sumarycznego strumienia zewnętrznego pomiędzy obydwie pionowe kolumny tego rdzenia. W przypadku zwarcia obwodu uzwojenia pierwotnego drogą zamknięcia wyłącznika W przy dolnym położeniu przełącznika P (rys. 5 i rys. 8), musiałby również w tym uzwojeniu popłynąć pewien prąd, przy czym ten sam co poprzednio strumień wyrównawczy byłby tym razem wynikiem wspólnego działania zarówno prądu obwodu wtórnego, jak i prądu obwodu pierwotnego. Byłoby to oczywiście równoznaczne ze zmniejszeniem wartości skutecznej prądu I_{ds} (p. 3) oraz prądu I_{dr} (p. 4) odpowiednio do wartości I'_{ds} oraz I'_{dr}, spełniających następujące zależności:

$$2\underline{I}_{ds}z_s = 2\underline{I}'_{ds}z_s + 2\underline{I}_{Is}z, \tag{30}$$

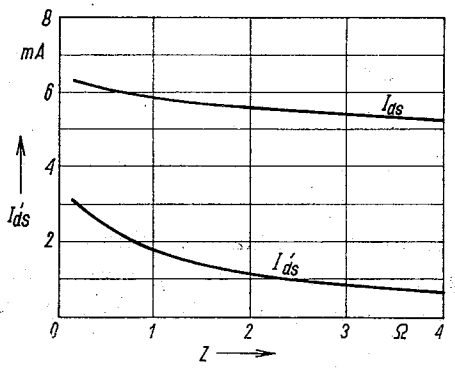
$$\underline{I}_{dr}z_r = \underline{I}'_{dr}z_r + 2\underline{I}_{Ir}z, \tag{31}$$

przy czym I_{Is} oraz I_{Ir} oznaczają odpowiednio wartości skuteczne prądu w obwodzie pierwotnym. Wartości te są największe wówczas, gdy obwód pierwotny jest zwarty. Równocześnie w tym właśnie przypadku wartości skuteczne I'_{ds} oraz I'_{dr} są najmniejsze.

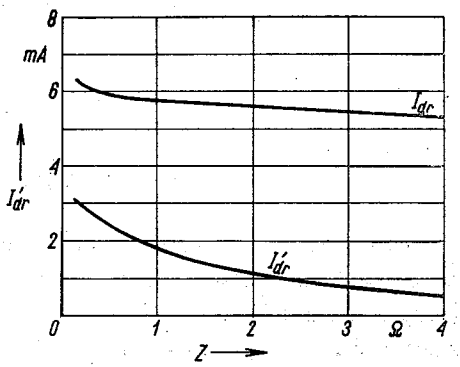
Włączenie do obwodu pierwotnego określonej dodatkowej impedancji spowodowałoby zmniejszenie wartości I_{Is} lub I_{Ir} a tym samym wzrost wartości I'_{ds} lub I'_{dr}.

Wreszcie otwarcie obwodu wtórnego, czemu teoretycznie odpowiadałaby nieskończenie wielka wartość modułu impedancji tego obwodu, powoduje zanik prądu w tym obwodzie, a tym samym wystąpienie największych wartości skutecznych I_{ds} lub I_{dr}.

Posługując się układami z rys. 5 oraz rys. 8 pomierzono napięcia występujące na zaciskach odbiornika w przypadku zwarcia uzwojenia pierwotnego, wyznaczając tym samym wartości I'_{ds} oraz I'_{dr}. W warunkach $I = 2000$ A oraz $h = 200$ mm stosowano przy tym



Rys. 11. Porównanie charakterystyki $I'_{ds} = f(Z)$, dotyczącej obwodu pierwotnego zwartego, z charakterystyką $I_{ds} = f(Z)$, dotyczącą obwodu pierwotnego otwartego



Rys. 12. Porównanie charakterystyki $I'_{dr} = f(Z)$, dotyczącej obwodu pierwotnego zwartego, z charakterystyką $I_{dr} = f(Z)$, dotyczącą obwodu pierwotnego otwartego

zmianę modułu impedancji odbiornika Z w zakresie od 0,1 Ω do 4 Ω przy $\cos\psi = 0{,}8$ ind.

Wyniki tych dodatkowych pomiarów są przedstawione na rys. 11 oraz rys. 12, na których — dla porównania — podano również wyniki uzyskane w etapach drugim i trzecim badań (w warunkach otwarcia uzwojenia pierwotnego).

6. ETAP PIĄTY

W przypadku ustalonej pracy przekładnika prądowego każdej określonej wartości skutecznej prądu pierwotnego odpowiada oczywiście określona wartość zespolona impedancji zamkniętego obwodu, do którego włączone jest uzwojenie pierwotne. W związku z tym należałoby oczekiwać, że dodatkowy prąd, będący wynikiem oddziaływania pola magnetycznego prądu sąsiedniej obcej szyny, który nakłada się na prąd wtórny przekładnika, będzie miał wprawdzie wartość skuteczną mniejszą od odpowiadającej przypadkowi otwarcia obwodu pierwotnego, ale z pewnością większą od odpowiadającej przypadkowi zwarcia tego obwodu.

W celu sprawdzenia słuszności powyższego oczekiwania zastosowano sposób pomiaru wartości skutecznej I_d prądu dodatkowego, nakładającego się na prąd wtórny przekładnika, oparty na niżej przytoczonym rozumowaniu.

Przyjmijmy, że — przy określonej wartości skutecznej I_1 prądu pierwotnego oraz przy określonej wartości Z modułu impedancji odbiornika, charakteryzującego się współczynnikiem mocy $\cos\psi = 0{,}8$ ind — zostały pomierzone błędy przekładnika, które wyniosły:

$\Delta I'$ oraz δ_i' — w przypadku $I = 0$,

$\Delta I''$ oraz δ_i'' — w przypadku np. $I = 2000$ A, $h = 200$ mm.

Posłużmy się następnie wykresem wskazowym, przedstawionym szkicowo na rys. 13, na którym przyjęta została określona skala błędów prądowych $\mu_\Delta \left(\mathrm{w}\,\frac{\mathrm{mm}}{\%}\right)$. Tym samym zostały jednoznacznie określone skale dla błędów kątowych i dla prądów według zależności:

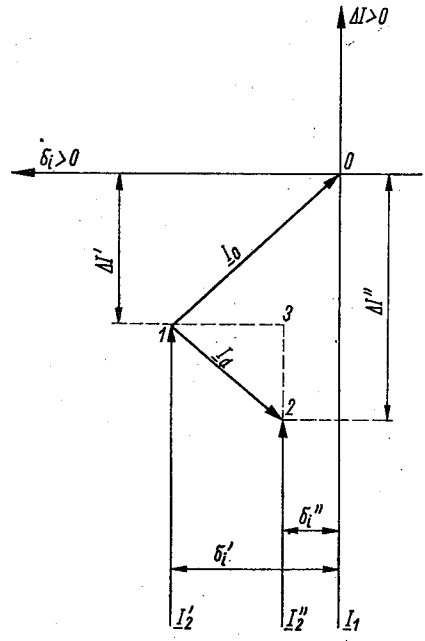
$$\mu_\delta = \mu_\Delta \frac{100\%}{3440\ \mathrm{min}} \left(\mathrm{w}\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{min}}\right), \tag{32}$$

$$\mu_I = \mu_\Delta \frac{100\%}{I_2} \left(\mathrm{w}\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{A}}\right). \tag{33}$$

Na powyższym wykresie punkt środkowy 0 prostokątnego układu współrzędnych ΔI oraz δ_i jest jednocześnie wierzchołkiem położonego pionowo wskazu I_1 prądu pierwotnego (przy założeniu jednakowej liczby zwojów obydwu uzwojeń przekładnika, spełniających zależność $z_1 = z_{1n} = z_2 = z_{2n}$).

Punkt 1 tegoż wykresu, o współrzędnych $\Delta I'$ oraz δ_i', jest wierzchołkiem skazu $\underline{I}_2'$ prądu płynącego przez odbiornik, przyłączony do zacisków wtórnych przekładnika, w przypadku gdy $I = 0$. W ramach wykresu obydwa wskazy, $\underline{I}_1$ oraz $\underline{I}_2'$, są praktycznie biorąc do siebie równoległe.

Punkt 2 omawianego wykresu, o współrzędnych $\Delta I''$ oraz δ_i'', jest wierzchołkiem wskazu I_2'' prądu wtórnego, który przepływa przez odbiornik w przypadku, gdy np. $I =$ $= 2000$ A oraz $h = 200$ mm.



Rys. 13. Wykres wskazowy ilustrujący sposób wyznaczania prądu dodatkowego I_d

Jeżeli — w przybliżeniu — przyjmiemy, że wskaz prądu jałowego $\overrightarrow{1\,0} = \underline{I}_o$ pozostaje w obu przypadkach niezmieniony, wówczas zależność

$$\underline{I}_2'' = \underline{I}_2' + \underline{I}_d \tag{34}$$

pozwoli określić wskaz $\overrightarrow{1\,2} = \underline{I}_d$ prądu dodatkowego, który nakłada się w odbiorniku na prąd wtórny w związku z oddziaływaniem na przekładnik pola magnetycznego prądu I sąsiedniej obcej szyny. Przybliżony charakter zależności (34) wynika przy tym stąd, że domagnesowujące działanie na rdzeń przekładnika strumieni zewnętrznych, wzbudzonych w jego pionowych kolumnach przez prąd I sąsiedniej obcej szyny, zmienia w określony sposób własności magnetyczne rdzenia, powodując tym samym zmianę wartości skutecznej oraz fazy prądu jałowego, przedstawionego przez wskaz $\overrightarrow{1\,0} = \underline{I}_o$.

Z wykresu wskazowego według rys. 13 wynika, że wartość skuteczna I_d prądu dodatkowego może być wyznaczona z trójkąta prostokątnego 1 2 3, o znanych długościach jego przyprostokątnych. Zachodzą bowiem zależności następujące:

$$\overline{2\,3} = \mu_\Delta |\Delta I'' - \Delta I'|, \tag{35}$$

$$\overline{1\,3} = \mu_\delta |\delta_i'' - \delta_i'|, \tag{36}$$

a tym samym

$$I_d = \frac{\sqrt{[\mu_\Delta|\Delta I'' - \Delta I'|]^2 + [\mu_\delta|\delta_i'' - \delta_i'|]^2}}{\mu_I} = I_2 \sqrt{\left|\frac{\Delta I'' - \Delta I'}{100\%}\right|^2 + \left|\frac{\delta_i'' - \delta_i'}{3440 \text{ min}}\right|^2}. \tag{37}$$

Tablica 1

Wyniki pomiarów i obliczeń dotyczące przypadku szeregowego połączenia cewek uzwojenia wtórnego (h = 200 mm)

I_1 A	Z Ω	I = 0		I = 2000 A		I_{ds} A
		$\Delta I'$ %	δ_i' min	$\Delta I''$ %	δ_i'' min	
1	0,1	−0,3	+21	−0,72	+6,2	0,0062
	0,6	−0,79	+31,2	−1,18	+18,5	0,0057
	1,2	−1,32	+41	−1,7	+29	0,0053
	2,4	−2,12	+53	−2,48	+42,7	0,0051
	4	−3,03	+62,4	−3,35	+53	0,0049
5	0,1	−0,26	+12,5	−0,32	+9,7	0,0050
	0,6	−0,56	+14,1	−0,6	+12,4	0,0039
	1,2	−0,88	+15,2	−0,91	+14,5	0,0034
	2,4	−1,37	+17	−1,39	+15,9	0,0031
	4	−2,05	+19,5	−2,09	+19,6	0,0028

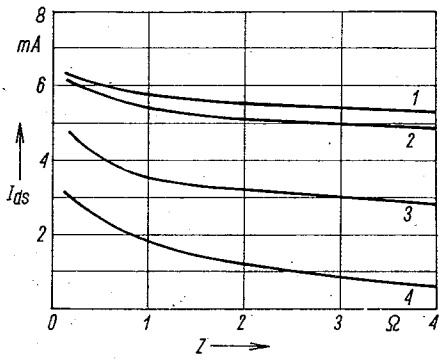
Tablica 2

Wyniki pomiarów i obliczeń dotyczące przypadku równoległego połączenia cewek uzwojenia wtórnego (h = 200 mm)

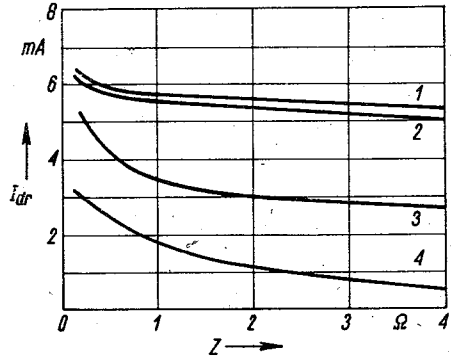
I_1 A	Z Ω	I = 0		I = 2000 A		I_{dr} A
		$\Delta I'$ %	δ_i' min	$\Delta I''$ %	δ_i'' min	
1	0,1	−0,31	+21,8	−0,79	+6,9	0,0063
	0,6	−0,80	+31	−1,2	+18,2	0,0057
	1,2	−1,31	+41,2	−1,71	+28,3	0,0055
	2,4	−2,14	+53,8	−2,49	+43,5	0,0052
	4	−2,98	+63	−3,31	+53,8	0,0051
5	0,1	−0,28	+12,2	−0,31	+10,3	0,0055
	0,6	−0,54	+14	−0,59	+13	0,0040
	1,2	−0,84	+15,5	−0,87	+13,8	0,0033
	2,4	−1,4	+16,8	−1,42	+15,2	0,0029
	4	−2,02	+19,8	−2,06	+19,3	0,0027

Korzystając z wyżej omówionego przybliżonego sposobu wyznaczania wartości skutecznej prądu dodatkowego I_d, wykonano pomiary błędów przekładnika prądowego badanego w obydwu przypadkach ukształtowania jego uzwojenia wtórnego. Wyniki pomiarów podano w tabl. 1 oraz w tabl. 2, zaznaczając również wartości I_{ds} oraz I_{dr} obliczone za pomocą wzoru (37). Wyciągnięcie odpowiednich wniosków ułatwia interpretacja graficzna powyższych wyników, przedstawiona na rys. 14 oraz na rys. 15.

Jeżeli przez Z_I oznaczyć moduł impedancji obwodu pierwotnego przekładnika prądowego, wówczas najwyżej położona krzywa *1* odpowiada przypadkowi otwarcia tego obwodu ($Z_I = \infty$). Najniżej natomiast położona krzywa *4* odpowiada przypadkowi



Rys. 14. Wykres ilustrujący wyniki otrzymane w etapie piątym badań w przypadku szeregowego połączenia cewek uzwojenia wtórnego



Rys. 15. Wykres ilustrujący wyniki otrzymane w etapie piątym badań w przypadku równoległego połączenia cewek uzwojenia wtórnego

zwarcia ($Z_I = 0$). Pomiędzy tymi dwiema skrajnymi krzywymi leżą krzywe *2* i *3*, odpowiadające określonym warunkom pracy ustalonej badanego przekładnika prądowego. Krzywa *2* dotyczy przypadku, gdy prąd pierwotny $I_1 = 1$ A był pobierany z sieci 220 V, czemu odpowiada moduł impedancji obwodu pierwotnego $Z_I \approx 220\,\Omega$. Natomiast krzywa *3* dotyczy przypadku pobierania z tej samej sieci prądu pierwotnego o wartości skutecznej $I_1 = 5$ A, czemu odpowiada moduł impedancji obwodu pierwotnego przekładnika wynoszący $Z_I \approx 44\,\Omega$.

7. UWAGI KOŃCOWE

Na podstawie wyników badań przeprowadzonych w układzie według rys. 1 można stwierdzić, że oddziaływanie obcego obwodu wielkoprądowego na przekładnik prądowy zwojnicowy, w przypadku szeregowego połączenia cewek uzwojenia wtórnego tego przekładnika wywołuje dwa zjawiska.

Pierwszym spośród nich jest przepływ dodatkowego prądu przez odbiornik, przyłączony do zacisków wtórnych tego przekładnika. Drugim natomiast jest wystąpienie w pionowych kolumnach rdzenia tego przekładnika strumieni domagnesowujących. W przypadku natomiast równoległego połączenia cewek uzwojenia wtórnego dochodzi do tego zjawisko trzecie, polegające na przepływie w zamkniętym obwodzie tych cewek okrężnego prądu lokalnego.

Odnośnie do płynącego przez odbiornik prądu dodatkowego należy zauważyć, że spełnia on tę samą rolę zarówno w przypadku szeregowego jak i równoległego połączenia cewek uzwojenia wtórnego. Rola ta polega przy tym na wzbudzaniu w zamkniętym obwodzie magnetycznym rdzenia przekładnika okrężnego strumienia wyrównawczego, który wymusza niemal równy podział wnikającego do tego rdzenia sumarycznego strumienia zewnętrznego, wzbudzonego przez obcy obwód wielkoprądowy, pomiędzy obydwie pionowe kolumny tego rdzenia.

Największa wartość, jaką — niezależnie od sposobu połączenia cewek uzwojenia wtórnego przekładnika — może przybierać amplituda strumienia wyrównawczego, równa

się połowie różnicy amplitud obydwu strumieni zewnętrznych, które byłyby wzbudzone w pionowych kolumnach rdzenia przekładnika przez prąd obcej szyny sąsiedniej w warunkach otwarcia wszystkich uzwojeń tego przekładnika. W związku z tym największa wartość skuteczna jaką może osiągać prąd dodatkowy, odpowiadająca oczywiście największej amplitudzie strumienia wyrównawczego, jest — w przybliżeniu — taka sama zarówno w przypadku szeregowego jak i w przypadku równoległego połączenia cewek uzwojenia wtórnego. Wynika to bowiem stąd, że liczba zwojów uzwojenia wiodącego prąd dodatkowy w obydwu powyższych przypadkach jest taka sama. Nieznaczne natomiast różnice wartości skutecznych prądu dodatkowego w obydwu przypadkach mogą wynikać jedynie z pewnej odmienności warunków domagnesowania rdzenia, wpływających na wartość reluktancji drogi strumienia wyrównawczego w tym rdzeniu.

Wyniki przeprowadzonych badań pozwalają wnioskować, że wartość skuteczna prądu dodatkowego jest tym mniejsza, im mniejsza jest wartość skuteczna prądu płynącego w sąsiedniej obcej szynie, a także im bardziej oddalona jest ta szyna od badanego przekładnika. Poza tym zmniejszeniu wartości skutecznej prądu dodatkowego w nieznacznym stopniu sprzyja wzrost modułu impedancji odbiornika, przyłączonego do zacisków wtórnych przekładnika (rys. 7 i rys. 10). W znacznym natomiast stopniu sprzyja temu zmniejszeniu zmniejszenie modułu impedancji całego obwodu pierwotnego przekładnika (rys. 14 i rys. 15).

Prąd dodatkowy, nakładając się w przyłączonym do zacisków wtórnych przekładnika prądowego odbiorniku na prąd wtórny, wywiera jednoznacznie niekorzystny wpływ na wierność odwzorowania przez ten prąd wtórny zarówno wartości skutecznej jak i fazy prądu pierwotnego. Jest to najbardziej znaczącym skutkiem oddziaływania obcego obwodu wielkoprądowego na przekładnik prądowy zwojnicowy.

Rozważając z kolei zjawisko domagnesowania pionowych kolumn rdzenia przekładnika stwierdzić należy, że w przypadku szeregowego połączenia cewek uzwojenia wtórnego występuje ono w znacznie większej skali, aniżeli w przypadku równoległego połączenia tych cewek. W przypadku bowiem szeregowego połączenia cewek uzwojenia wtórnego największa wartość, jaką mogą osiągać niemal jednakowe amplitudy zewnętrznych strumieni domagnesowujących, równa jest połowie sumy niejednakowych amplitud strumieni zewnętrznych, które wnikałyby do pionowych kolumn rdzenia w warunkach otwarcia wszystkich uzwojeń przekładnika. W przypadku natomiast równoległego połączenia cewek uzwojenia wtórnego największa wartość osiągana przez niemal jednakowe amplitudy zewnętrznych strumieni domagnesowujących jest znacznie mniejsza od połowy sumy niejednakowych amplitud strumieni zewnętrznych, które wnikałyby do pionowych kolumn rdzenia w warunkach otwarcia wszystkich uzwojeń przekładnika. Wynika to stąd, że uzwojenie wtórne działa w tym przypadku jako ekran elektromagnetyczny rdzenia względem wnikającego do tego rdzenia pola magnetycznego obcego obwodu wielkoprądowego.

Domagnesowanie kolumn pionowych rdzenia przekładnika prądowego powoduje określone zmiany wypadkowej reluktancji obwodu magnetycznego dla strumienia roboczego, czemu odpowiadają określone zmiany wartości skutecznej i fazy prądu jałowego, a tym samym określone zmiany błędów prądowego i kątowego, jakie cechowałyby przekładnik nie wystawiony na działanie obcego obwodu wielkoprądowego. Wprawdzie skala tych zmian w obydwu przypadkach łączenia cewek uzwojenia wtórnego przekładnika

jest różna, jednakże w obydwu tych przypadkach zmiany powyższe na ogół są nieporównanie mniejsze od zmian błędów spowodowanych przepływem przez odbiornik prądu dodatkowego (tab. 1 oraz tab. 2).

Jeżeli wreszcie chodzi o okrężny prąd lokalny, płynący — w przypadku równoległego połączenia cewek uzwojenia wtórnego przekładnika prądowego — w zamkniętym obwodzie tych cewek, osiągać on może tym większą wartość skuteczną, im większa jest wartość skuteczna prądu płynącego w sąsiedniej obcej szynie, a także im bliżej przekładnika jest ta szyna położona oraz im mniejszy jest moduł impedancji wyżej wspomnianego obwodu zamkniętego.

Powyższy prąd lokalny powoduje występowanie nierównomiernego podziału prądu wtórnego pomiędzy obydwie połączone równolegle cewki uzwojenia wtórnego. W związku z tym, że ani charakteru ani skali tej nierównomierności — zależnych zarówno od położenia obcej szyny jak też od wartości skutecznej oraz fazy płynącego w niej prądu — nie można z góry przewidzieć, przyjęto w praktyce wykonywać obydwie równolegle połączone cewki uzwojenia wtórnego przekładnika tym samym przewodem, o przekroju pozwalającym na trwałe obciążenie pełnym znamionowym prądem wtórnym.

LITERATURA

1. W. W. Afanasjew i in., *Transformatory toka*, Eniergia, Leningrad 1980.
2. R. Bauer, *Die Messwandler, Grundlagen, Anwendung und Prüfung*, Springer Verlag, Berlin 1953.
3. Z. Dmochowski, *Metoda określania wpływu szyn toru wielkoprądowego na pracę przekładników prądowych*, Materiały Konferencji Przekładnikowej Łódź, 1971.
4. J. Goldstein, *Die Messwandler, Ihre Theorie und Praxis*, Birkenhäuser, Basel 1952.
5. J. Kopeček, M. Dvořak, *Pristrojové transformátory (měřici a jistici)*, Československa Akademie Věd, Praha 1966.
6. J. N. Kątargin, *Wlijanje wniesznich magnitnych polej na transformatory toka*, Izw. Wyssz. Uczebn. Zawied, Elektromechanika, Nr 1, 1964.
7. J. N. Katargin, *Wlijanje sosiedniego toka na transformator toka s razjomnym sierdiecznikom*, Izw. Wyssz. Uczebn. Zawied., Energetika, Nr 10, 1964.
8. E. W. Kolesnikow i in., *Issledowanje wlijanja wniesznich magnitnych polej na rabotu transformatorow toka*, Izw. Wyssz. Uczebn. Zawied., Elektromechanika, Nr 4, 1972.
9. R. A. Pfunter, *The Accuracy of Current Transformers Adjaced to High-Current Basses*, AIEE Transaction, Vol. 70, 1951.
10. W. W. Rogoza, *Wlijanje wniesznich magnitnych polej na transformatory toka*, Problemy Techniczesk. Elektrodinamiki, Kijew 1970.
11. W. Starczakow, *Sposób badania wpływu sąsiedniej szyny na pracę przekładnika prądowego*, Zeszyty Naukowe PŁ, Elektryka, z. 50, 1977.
12. W. Starczakow, *Oddziaływanie indukcyjne pobliskiej obcej szyny na obwód wtórny przekładnika prądowego*, Zeszyty Naukowe PŁ, Elektryka, z. 59, 1978.
13. W. Starczakow, *Zależność błędów przekładnika prądowego szynowego od położenia przewodu powrotnego*, Zeszyty Naukowe PŁ, Elektryka, z. 68, 1980.
14. A. A. Woskriesienskij, *Ob uczetie wnieszniego magnitnogo pola pri rasczotie pogriesznostiej transformatorow toka*, Elektriczeskije Stancji, Nr 2, 1972.
15. W. W. Zacharow, *Rasczot namagniczivanja ferromagnitnych kolec wnieszniim polem*, Elektriczestwo, Nr 4, 1965.

W. STARCZAKOW

MECHANISM AND EFFECT OF INFLUENCE OF EXTERNAL HIGH CURRENT CIRCUIT ON CURRENT TRANSFORMER WITH MULTI-TURN PRIMARY WINDING

Summary

The paper attempts to explain the influence of external high current circuit on a current transformer with multi-turn primary winding. The result of this influence has been evaluated. Theoretical considerations have been based on results of measurements of model arrangement. The coils of secondary winding have been connected both in series and in parallel during the evaluation.

W. STARCZAKOW

MÉCANISME ET EFFETS DE L'INFLUENCE DU CIRCUIT ÉTRANGER DE COURANT FORT SUR LE TRANSFORMATEUR DE COURANT DE L'ENROULEMENT

Résumé

L'étude susdite présente, à titre d'essai, l'explication du mécanisme de l'influence du circuit étranger de courant fort sur le transformateur de courant du primaire et aussi l'appréciation de ces effets. Dans l'analyse théorique on s'est servi des résultats de mesures exécutés sur une maquette concrète. Dans les mesures du transformateur contrôlé, on a pris en considération le cas de couplage des bobines secondaires aussi bien en série qu'en parallèle.

W. STARCZAKOW

MECHANISMUS UND EINWIRKUNGSEFFEKT EINES FREMDSTARKSTROMKREISES AUF DEN WICKELSTROMWANDLER

Zusammenfassung

In der Bearbeitung wurde ein Versuch unternommen, die Einwirkung eines Fremdstarkstromkreises auf den Wickelstromwandler zu erklären. Es wurden auch die Folgen dieser Einwirkung abgeschätzt. Als Basis für die durchgeführten theoretischen Erwägungen wurden die Meßergebnisse einer Modellanlage ausgenutzt. Die Messungen am Stromwandler berücksichtigten sowohl die Reihenschaltung, als auch die Parallelschaltung der sekundären Wicklungen.

В. СТАРЧАКОВ

МЕХАНИЗМ И РЕЗУЛЬТАТЫ ВОЗДЕЙСТВИЯ ПОСТОРОННЕЙ ЦЕПИ СВЕРХМОЩНОГО ТОКА НА КАТУШЕЧНЫЙ ТРАНСФОРМАТОР ТОКА

Резюме

Представлена попытка выяснения механизма воздействия посторонней цепи, обтекаемой переменным током очень большого значения, на катушечный трансформатор тока, а также проведена оценка результатов этого воздействия. Основой теоретических выводов являлись результаты измерений осуществленных на соответствующей конкретной модели. В пределах этих измерений учтены не только случай последовательного, но также и случай паралельного соединения катушек вторичной обмотки испытываемого трансформатира тока.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1984, 30, z. 1, ss. 169-178

621.317.31.014.33

Propagacja udaru wzdłuż jednożyłowego kabla podziemnego

JERZY BAJOREK (RZESZÓW)

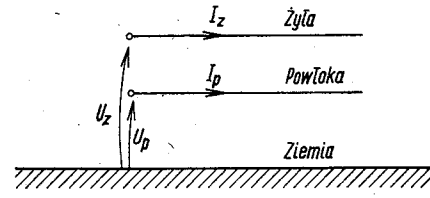
Instytut Elektrotechniki Politechniki Rzeszowskiej

Otrzymano 12.11.1981

W pracy przeanalizowano charakterystyki udarowe jednożyłowego kabla podziemnego wykorzystując teorię modów (rodzajów) dla równań macierzowych kabla. Zależące od częstotliwości macierze: impedancyjną i admitancyjną dla współosiowego kabla podziemnego, złożonego z żyły i powłoki, wyprowadzono z równań Maxwella.

1. WSTĘP

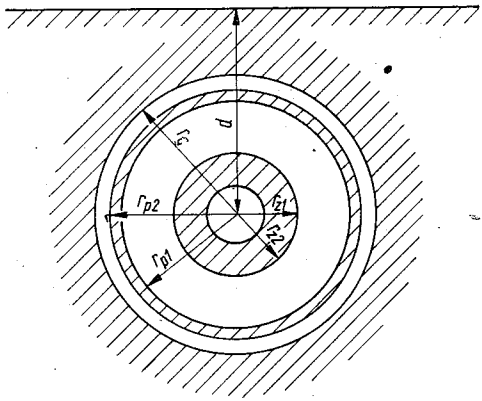
Rozchodzenie się fal elektromagnetycznych wzdłuż linii elektroenergetycznych, a w tym zagadnieniu zjawiska związane z propagacją przepięć atmosferycznych i łączeniowych, są szeroko omawiane w literaturze sięgającej swymi źródłami do prac z połowy ubiegłego stulecia. Obszerny przegląd literatury z tego zakresu podaje w swoich monografiach J. L. Jakubowski [1, 2]. W ostatnich latach opublikowano wiele nowych prac, które są uściśleniem bądź rozwinięciem prac wcześniejszych. W większości tych prac nowe podejście do klasycznych już sformułowań problemu propagacji przebiegów przejściowych w liniach elektroenergetycznych było możliwe dzięki wykorzystaniu maszyn cyfrowych. Przykładem mogą być tutaj pozycje [3, 4, 5, 6, 7, 8] spisu literatury. Wspólną cechą tych prac jest badanie przebiegów czasowych w linii elektroenergetycznej w oparciu o ich charakterystyki widmowe, z uwzględnieniem zależności parametrów linii od częstotliwości.



Rys. 1. Prądy i napięcia w badanym kablu

W prezentowanej pracy omówiono charakterystyki widmowe macierzy impedancyjnej i admitancyjnej kabla podziemnego, które można otrzymać z równań Maxwella przy stosunkowo słabych założeniach upraszczających. Charakterystyki te są punktem wyjścia dla analizy rozwiązania równań wiążących ze sobą prądy i napięcia żyły i powłoki kabla oraz otaczającej go ziemi (rys. 1). Przekrój badanego kabla przedstawiony jest na rys. 2. Żyła o promieniach r_{z1} i r_{z2} (żyła może posiadać kanał olejowy lub kanał chłodzenia wewnętrznego) wykonana jest z materiału o konduktywności σ_z i otoczona jest dielektrykiem o przenikalności dielektrycznej ε_1. Powłoka o promieniach r_{p1} i r_{p2} wykonana jest z ma-

teriału o konduktywności σ_p i pokryta jest dielektrykiem o przenikalności dielektrycznej ε_2. Zewnętrzny promień kabla, czyli promień otaczającego kabel gruntu, wynosi r_g, a konduktywność gruntu wynosi σ_g. Kabel zakopany jest na głębokości d pod powierzchnią ziemi. Przyjmujemy, że pod względem własności magnetycznych cały układ jest jednorodny i liniowy, opisany przenikalnością magnetyczną μ_o.



Rys. 2. Przekrój badanego kabla

Przebiegi prądów i napięć wzdłuż kabla z osią pokrywającą się z osią z układu współrzędnych walcowych (r, φ, z) można otrzymać korzystając z charakterystyk widmowych tych wielkości:

$$i(z,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I(z, j\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

$$u(z,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(z, j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \tag{1}$$

Charakterystyki widmowe prądów i napięć (lub potencjałów przewodów) można otrzymać wychodząc z równań Maxwella dla wektorów natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ i natężenia pola magnetycznego $\vec{H}$. Przyjmując, że długość fali odpowiadająca pulsacji ω jest znacznie większa od wymiarów poprzecznych kabla oraz pomijając wpływ niesymetrii wprowadzonej przez powierzchnię ziemi na rozkład pola elektromagnetycznego w kablu [9] można równania Maxwella dla składowych wektorów pola elektromagnetycznego w dielektryku sprowadzić do postaci [10]:

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = -j\omega \varepsilon E_r, \tag{2}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial z} = j\omega \mu_o H_\varphi \tag{3}$$

oraz przyjąć, że składowa kątowa wektora natężenia pola magnetycznego jest w obydwu dielektrykach określona zależnością

$$H_\varphi(r) = \frac{I}{2\pi r}, \tag{4}$$

w której I jest wypadkowym prądem w przewodnikach otoczonych dielektrykiem.

2. RÓWNANIA IMPEDANCYJNE

Całkując równanie (3) od powierzchni zewnętrznej żyły do powierzchni wewnętrznej powłoki otrzymujemy

$$-\frac{d}{dz}(U_z-U_p) = E_z(r_{z2})-E_z(r_{p1})+j\omega\mu_o\frac{I_z}{2\pi}\ln\frac{r_{p1}}{r_{z2}}, \tag{5}$$

gdzie U_z i U_p są napięciami żyły i powłoki (rys. 1). Postępując podobnie dla warstwy zewnętrznej dielektryka otrzymujemy

$$-\frac{d}{dz}U_p = E_z(r_{p2})-E_z(r_g)+j\omega\mu_o\frac{I_z+I_p}{2\pi}\ln\frac{r_g}{r_{p2}}. \tag{6}$$

Składową osiową wektora natężenia pola elektrycznego na powierzchni żyły i powłoki wyznaczamy korzystając z rozwiązania dla składowej osiowej wektora gęstości prądu [10]. Dla zewnętrznej powierzchni żyły otrzymujemy związek

$$E_z(r_{z2}) = \frac{I_z k_z}{2\pi r_{z2}\sigma_z}\frac{I_o(k_z r_{z2})K_1(k_z r_{z1})+I_1(k_z r_{z1})K_o(k_z r_{z2})}{I_1(k_z r_{z2})K_1(k_z r_{z1})-I_1(k_z r_{z1})K_1(k_z r_{z2})} = Z_1 I_z, \tag{7}$$

w którym:

$$k_z = \sqrt{j\omega\mu_o\sigma_z},$$

I_o, I_1, K_o, K_1 — zmodyfikowane funkcje Bessela pierwszego i drugiego rodzaju, zerowego i pierwszego rzędu,

Z_1 — pomocnicze oznaczenie współczynnika przy prądzie żyły (bywa też nazywany impedancją powierzchniową żyły ze względu na wymiar fizyczny Ω/m).

Dla powierzchni wewnętrznej i zewnętrznej powłoki otrzymujemy natomiast zależności:

$$E_z(r_{p1}) = \frac{1}{2\pi D_p\sigma_p}\left\{\frac{I_z+I_p}{r_{p1}r_{p2}}-\frac{I_z k_p}{r_{p1}}[I_o(k_p r_{p1})K_1(k_p r_{p2})+\right.$$

$$\left.+I_1(k_p r_{p2})K_o(k_p r_{p1})]\right\} = -Z_2 I_z - Z_3 I_p, \tag{8}$$

$$E_z(r_{p2}) = \frac{1}{2\pi D_p\sigma_p}\left\{\frac{(I_z+I_p)k_p}{r_{p2}}[I_o(k_p r_{p2})K_1(k_p r_{p1})+I_1(k_p r_{p1})K_o(k_p r_{p2})]-\right.$$

$$\left.-\frac{I_z}{r_{p1}r_{p2}}\right\} = Z_4 I_z + Z_5 I_p, \tag{9}$$

w których:

$$k_p = \sqrt{j\omega\mu_o\sigma_p},$$

$$D_p = I_1(k_p r_{p2})K_1(k_p r_{p1})-I_1(k_p r_{p1})K_1(k_p r_{p2}),$$

Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 — pomocnicze oznaczenia współczynników przy prądach I_z i I_p.

Składnik $E_z(r_g)$ można powiązać z prądem żyły i powłoki kabla zależnością podaną w literaturze dla przewodu z prądem pod powierzchnią ziemi [9, 11]

$$E_z(r_g) = -\frac{(I_z+I_p)k_g^2}{2\pi\sigma_g}\int_0^\infty \left\{\frac{\exp\left[-r_g\sqrt{u^2+k_g^2}\right]-\exp\left[-(2d-r_g)\sqrt{u^2+k_g^2}\right]}{\sqrt{u^2+k_g^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\exp\left[-(2d-r_g)\sqrt{u^2+k_g^2}\right]}{u+\sqrt{u^2+k_g^2}}\right\} du = -Z_6(I_z+I_p), \tag{10}$$

w której:

$k_g = \sqrt{j\omega\mu_o\sigma_g}$,

Z_6 — pomocnicze oznaczenie współczynnika przy prądzie żyły i powłoki, impedancja zewnętrzna dla prądu żyły i powłoki.

Podstawiając zależności (7), (8), (9) i (10) do wzorów (5) i (6) można je sprowadzić do postaci

$$-\frac{d}{dz}\begin{bmatrix}U_z\\U_p\end{bmatrix} = [Z]\begin{bmatrix}I_z\\I_p\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}z_{zz} & z_{zp}\\ z_{pz} & z_{pp}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_z\\I_p\end{bmatrix}, \tag{11}$$

w której:

$$z_{zz} = Z_1+Z_2+Z_4+Z_6+\frac{j\omega\mu_o}{2\pi}\ln\frac{r_{p1}r_g}{r_{z2}r_{p2}},$$

$$z_{zp} = Z_3+Z_5+Z_6+\frac{j\omega\mu_o}{2\pi}\ln\frac{r_g}{r_{p2}},$$

$$z_{pz} = Z_4+Z_6+\frac{j\omega\mu_o}{2\pi}\ln\frac{r_g}{r_{p2}},$$

$$z_{pp} = Z_5+Z_6+\frac{j\omega\mu_o}{2\pi}\ln\frac{r_g}{r_{p2}}.$$

Równanie (11) i wyrażenia na poszczególne elementy macierzy impedancyjnej, otrzymane w omawianym przypadku z równania Maxwella, są zbieżne z wynikami przedstawionymi przez Ametaniego [12] na schemacie obwodowym. Schemat taki wymaga wprowadzenia abstrakcyjnych pojęć, takich jak: prądy powierzchniowe (w całym zakresie częstotliwości), wewnętrzne impedancje dla powierzchni przewodników i impedancje wzajemne w przewodnikach, podczas gdy przedstawione powyżej całkowanie równania Maxwella jest przekształceniem naturalnym i w omawianym przypadku bardzo prostym.

3. RÓWNANIA ADMITANCYJNE

Całkując równanie (2) od powierzchni zewnętrznej żyły do powierzchni wewnętrznej powłoki otrzymujemy

$$\frac{d}{dz}\frac{I_z}{2\pi}\ln\frac{r_{p1}}{r_{z2}} = -j\omega\varepsilon_1(U_z-U_p). \tag{12}$$

Podobnie, dla warstwy dielektryka o przenikalności dielektrycznej ε_2 otrzymujemy

$$\frac{d}{dz}\frac{I_z+I_p}{2\pi}\ln\frac{r_g}{r_{p2}} = -j\omega\varepsilon_2 U_p. \tag{13}$$

Równania te można przedstawić w postaci równania macierzowego

$$-\frac{d}{dz}\begin{bmatrix}I_z\\I_p\end{bmatrix} = [Y]\begin{bmatrix}U_z\\U_p\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y_{zz} & y_{zp}\\y_{pz} & y_{pp}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_z\\U_p\end{bmatrix}, \tag{14}$$

w którym:

$$y_{zz} = -y_{zp} = -y_{pz} = j\omega C_{zp},$$
$$y_{pp} = j\omega(C_{zp}+C_{pg}),$$

a C_{zp} i C_{pg} są klasycznie określonymi pojemnościami na jednostkę długości warstwy dielektryka między żyłą a powłoką

$$C_{zp} = \frac{2\pi\varepsilon_1}{\ln\frac{r_{p1}}{r_{z2}}}$$

oraz między powłoką a ziemią

$$C_{pg} = \frac{2\pi\varepsilon_2}{\ln\frac{r_g}{r_{p2}}}.$$

Otrzymane z równania Maxwella (2) wyrażenie na elementy macierzy admitancyjnej można otrzymać również na schemacie obwodowym z dyskretnymi pojemnościami dla odcinka kabla o długości Δz przy $\Delta z \to 0$ [12].

4. ROZWIĄZANIE DLA MODÓW PROPAGACJI

Układ równań (11) i (14) można sprowadzić do równania dla wektora napięć

$$\frac{d^2}{dz^2}\begin{bmatrix}U_z\\U_p\end{bmatrix} = [Z][Y]\begin{bmatrix}U_z\\U_p\end{bmatrix} = [P]\begin{bmatrix}U_z\\U_p\end{bmatrix}. \tag{15}$$

Określając dla macierzy $[P]$ macierz wartości własnych $[L]$ i macierz wektorów własnych $[A]$ możemy napisać [8]

$$[P] = [A][L][A]^{-1} = [A]\begin{bmatrix}\lambda_o & 0\\0 & \lambda_1\end{bmatrix}[A]^{-1} \tag{16}$$

oraz

$$\frac{d^2}{dz^2}\begin{bmatrix}U_o\\U_1\end{bmatrix} = [L]\begin{bmatrix}U_o\\U_1\end{bmatrix}, \tag{17}$$

gdzie

$$\begin{bmatrix}U_o\\U_1\end{bmatrix} = [A]^{-1}\begin{bmatrix}U_z\\U_p\end{bmatrix} \tag{18}$$

jest wektorem napięć związanych z dwoma modami (rodzajami) propagacji.

Wprowadzając pojęcie stałych propagacji γ, stałych tłumienia α i prędkości propagacji v określonych zależnościami

$$\gamma_o = \alpha_o + j\frac{\omega}{v_0} = \sqrt{\lambda_o}, \qquad \gamma_1 = \alpha_1 + j\frac{\omega}{v_1} = \sqrt{\lambda_1}, \tag{19}$$

można rozwiązanie równania (17) przedstawić w postaci

$$U_o(z, j\omega) = U_0'(j\omega)\ \exp[-\gamma_o(j\omega)z] + U_0''(j\omega)\ \exp[\gamma_o(j\omega)z],$$
$$U_1(z, j\omega) = U_1'(j\omega)\ \exp[-\gamma_1(j\omega)z] + U_1''(j\omega)\ \exp[\gamma_1(j\omega)z]. \tag{20}$$

Jest to ogólna postać rozwiązania dla zerowego i pierwszego modu propagacji, dla których stałe U_0', U_0'', U_1', U_1'' należy wyznaczyć z nałożonych na linię warunków brzegowych.

Znając rozwiązania dla napięć $U_0(z, j\omega)$ i $U_1(z, j\omega)$ można przy pomocy zależności odwrotnej do zależności (18) otrzymać charakterystyki widmowe napięć żyły i powłoki, a następnie według zależności (1) obliczyć funkcje czasu $u_z(z, t)$ i $u_p(z, t)$. Dla obliczenia funkcji czasu na podstawie danych charakterystyk widmowych można wykorzystać metodę *FFT* [13], metodę *EFT* [14], lub jej modyfikację [15]. Ostatnia z wymienionych metod wyróżnia się efektywnością przy badaniach przebiegów typu udar znormalizowany.

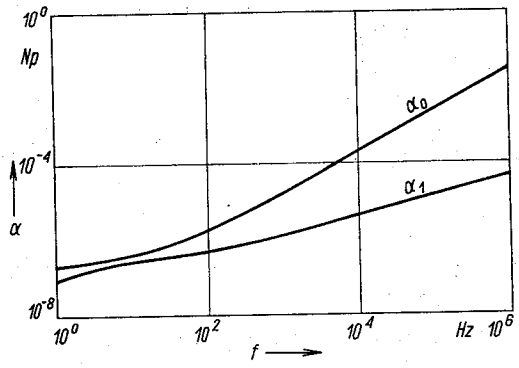
5. UDAR ZNORMALIZOWANY W KABLU BEZ FAL ODBITYCH

Analizę przebiegu przejściowego wzdłuż kabla podziemnego według przedstawionego powyżej toku postępowania prześledzimy na przykładzie propagacji udaru znormalizowanego, przybliżonego zależnością analityczną [2]

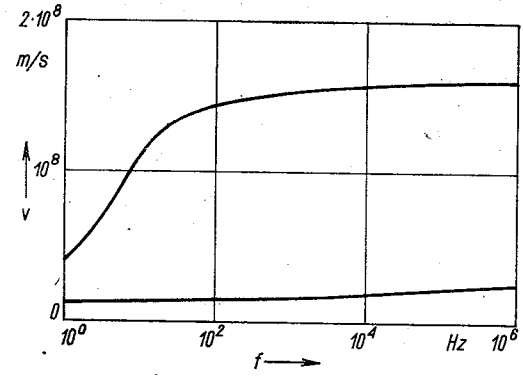
$$u(t) = 1{,}038U_m[\exp(-1{,}46 \cdot 10^4 t) - \exp(-2{,}38 \cdot 10^6 t)] \tag{21}$$

wzdłuż kabla wysokiego napięcia o danych:

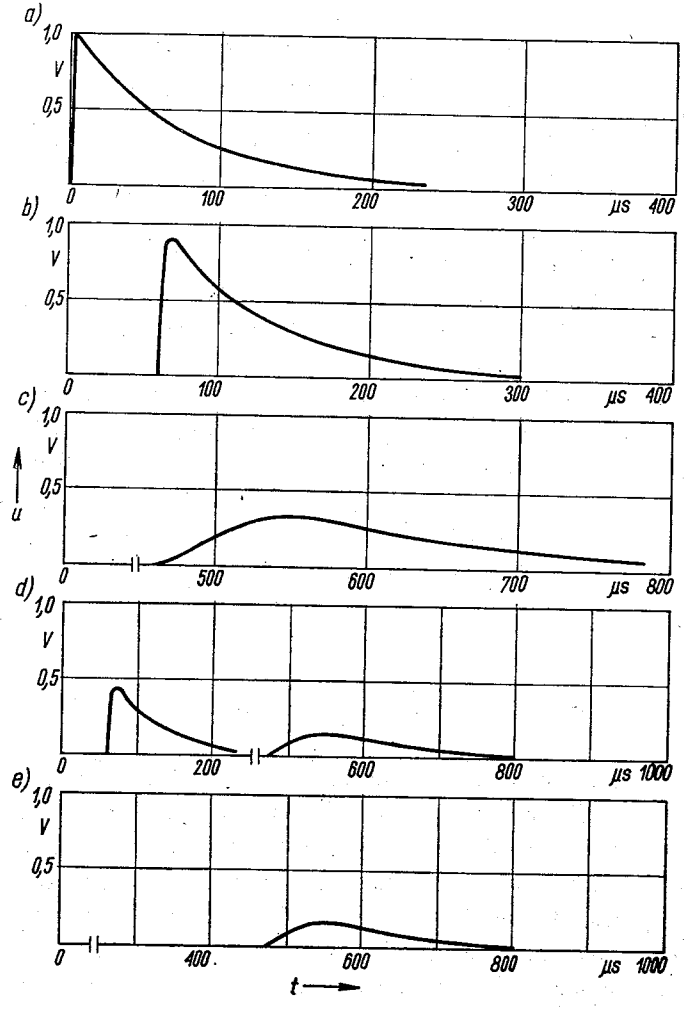
$$r_{z1} = 0{,}006\ \text{m}, \quad r_{z2} = 0{,}02\ \text{m}, \quad \sigma_z = 56 \cdot 10^6\ \text{S/m},$$
$$r_{p1} = 0{,}053\ \text{m}, \quad r_{p2} = 0{,}059\ \text{m}, \quad \sigma_p = 35 \cdot 10^6\ \text{S/m},$$
$$r_g = 0{,}065\ \text{m}, \quad d = 0{,}6\ \text{m}, \quad \sigma_g = 0{,}05\ \text{S/m},$$
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 3{,}5\varepsilon_o.$$



Rys. 3. Charakterystyki częstotliwościowe stałych tłumienia badanego kabla dla dwóch modów propagacji



Rys. 4. Charakterystyki częstotliwościowe prędkości propagacji w badanym kablu dla dwóch modów propagacji



Rys. 5. Odkształcenie udaru znormalizowanego w badanym kablu (opis w tekście)

Danym tym odpowiadają charakterystyki częstotliwościowe stałych tłumienia i prędkości propagacji dla dwóch modów propagacji przedstawione na rys. 3 i 4.

Jeżeli przyjmiemy, że badamy propagację fali głównej przed wystąpieniem odbić fali od końców linii, to z zależności (20) otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} U_o(z,j\omega) \\ U_1(z,j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp[-\gamma_o(j\omega)z] & 0 \\ 0 & \exp[-\gamma_1(j\omega)z] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0'(j\omega) \\ U_1'(j\omega) \end{bmatrix}, \tag{22}$$

przy czym

$$\begin{bmatrix} U_0'(j\omega) \\ U_1'(j\omega) \end{bmatrix} = [A]^{-1} \begin{bmatrix} U_z(0,j\omega) \\ U_p(0,j\omega) \end{bmatrix}$$

oraz

$$\begin{bmatrix} U_z(z,j\omega) \\ U_p(z,j\omega) \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} U_o(z,j\omega) \\ U_1(z,j\omega) \end{bmatrix}.$$

Stąd wektor charakterystyk widmowych napięcia żyły i powłoki w dowolnym punkcie linii powiązany jest z charakterystykami widmowymi napięć żyły i powłoki na początku linii zależnością

$$\begin{bmatrix} U_z(z,j\omega) \\ U_p(z,j\omega) \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} \exp[-\gamma_o(j\omega)z] & 0 \\ 0 & \exp[-\gamma_1(j\omega)z] \end{bmatrix} [A]^{-1} \begin{bmatrix} U_z(0,j\omega) \\ U_p(0,j\omega) \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Wyniki obliczeń według zależności (23) i (1) dla udaru znormalizowanego w punkcie $z = 10$ km badanego kabla, dla różnych kombinacji zasilania żyły i powłoki, przedstawiono na rys. 5. W obliczeniach przyjęto, że w zależności (21) $U_m = 1$. Przejścia z charakterystyk widmowych na funkcje czasu dokonano przy pomocy algorytmu opisanego w [15]. Przebieg a) na rys. 5 jest badanym udarem na początku linii kablowej. Przebieg b) jest przebiegiem na żyle przy warunkach brzegowych $u_z(0, t) = u(t)$, $u_p(0, t) = 0$. Przebieg c) jest przebiegiem na żyle (praktycznie pokrywającym się z przebiegiem na powłoce) przy warunkach brzegowych $u_z(0, t) = u_p(0, t) = u(t)$. Przebieg d) jest przebiegiem na żyle, a przebieg e) jest przebiegiem na powłoce przy warunkach brzegowych $u_z(0, t) = u(t)$, $u_p(0, t) = \frac{1}{2}u(t)$.

6. PODSUMOWANIE

Przedstawione ujęcie przebiegów przejściowych w pojedynczym kablu może być w prosty sposób uogólnione na układy wieloprzewodowe. Zasadniczym problemem pozostaje wyznaczenie macierzy impedancyjnej i admitancyjnej dla badanego układu przewodów. Stosunkowo dobrze określone są te macierze dla układu kabli jednożyłowych [12]. Analiza kabli wielożyłowych prowadzona jest natomiast przy stosunkowo silnych założeniach upraszczających i można się spodziewać, że w dziedzinie tych kabli będą prowadzone dalsze prace uściślające dotychczasowe metody analizy ich pola elektromagnetycznego.

LITERATURA

1. J. L. Jakubowski, *Fale wędrowne w układach elektroenergetycznych*, PWN, Warszawa 1962.
2. J. L. Jakubowski, *Podstawy teorii przepięć w układach elektroenergetycznych*, PWN, Warszawa 1968.
3. G. L. Wilson i in., *Transmission Line Models for Switching Studies*, IEEE Trans., PAS-93 (1974), No 1, 383—395.
4. W. S. Meyer, H. W. Dommel, *Numerical Modelling of Frequency-dependent Transmission-line Parameters in an Electromagnetic Transients Program*, IEEE Trans., PAS-93 (1974), No 5, 1401—1409.
5. L. M. Wedepohl, C. S. Indulkar, *Switching Overvoltages in Short Crossbonded Cable Systems Using the Fourier Transform*, Proc. IEE, 122 (1975), No 11, 1217—1221.
6. G. W. Brown, R. G. Rocamora, *Surge Propagation in Three-phase Pipe-type Cables*, IEEE Trans., PAS-95 (1974), No 1, 89—95.
7. R. Schinzinger, A. Ametani, *Surge Propagation Characteristics of Pipe Enclosed Underground Cables*, IEEE Trans., PAS-97 (1978), No 5, 1680—1687.
8. A. Ametani, *Wave Propagation Characteristics of Cables*, IEEE Trans., PAS-99 (1980), No 2, 499—505.
9. J. Bajorek, *On Validity of Thin-wire Approximation for Cable Ground Return Impedance*, Arch. Elektr., 31 (1982), z. 1/2, 223–225.
10. S. A. Schelkunoff, *The Electromagnetic Theory of Coaxial Transmission Lines and Cylindrical Schields*, Bell Syst. Techn. Jour., 13 (1934), 532—578.
11. M. Krakowski, *Impedancje równoległych obwodów ziemnopowrotnych zawierających przewody podziemne*, Arch. Elektr., 17 (1968), No 4, 737—750.
12. A. Ametani, *A General Formulation of Impedance and Admitance of Cables*, IEEE Trans., PAS-99 (1980), No 3, 902—910.
13. A. Ametani, *The Application of the Fast Fourier Transform to Electrical Transient Phenomena*, Int. Jour. Electr. Educ., 10 (1972), No 4, 277—287.
14. A. Ametani, K. Imanishi, *Development of Exponential Fourier Transform and Its Application to Electrical Transients*, Proc. IEE, 126 (1979), No 1, 51—56.
15. J. Bajorek, *Szybki algorytm przekształcenia Laplace'a dla analizy przebiegów przejściowych w liniach elektroenergetycznych*, Rozpr. Elektr., 28 (1982), z. 1–2, 155–169.

J. BAJOREK

SURGE PROPAGATION ON SINGLE-CORE UNDERGROUND CABLE

Summary

Surge propagation characteristics of a single-core underground cable are analysed in the paper employing modal theory for cable matrix equations. The frequency-dependent impedance and admittance matrices for the coaxial underground cable consisting of a core and sheath are derived from Maxwell's equations.

J. BAJOREK

PROPAGATION DE L'IMPULSION LE LONG D'UN CÂBLE SOUTERRAIN UNICONDUCTEUR

Résumé

Mettant à profit la théorie des modes pour les équations matricielles du câble, on a analysé les caractéristiques de l'impulsion d'un câble souterrain uniconducteur. Les matrices dépendant de la fréquence à savoir: impédance et admittance d'un câble souterrain coaxial, constitué d'un fil et d'une gaine, ont été déduites des équations de Maxwell.

J. BAJOREK

STOßAUSBREITUNG LÄNGS EINES EINLEITERKABELS

Zusammenfassung

Im vorliegenden Aufsatz wurden Stoßcharakteristiken eines Einleiterkabels analysiert unter Anwendung der Moditheorie für Matrixgleichungen für Kabel. Die von der Frequenz abhängigen Matrizen, d.h. die aus Kabelader und -hülle bestehenden Impedanz- sowie Admittanzmatrix für das Erdkoaxialkabel wurden von der Maxwell-Gleichung abgeleitet.

Е. БАЙОРЭК

ПЕРЕНОС УДАРА ВДОЛЬ ОДНОЖИЛЬНОГО ПОДЗЕМНОГО КАБЕЛЯ

Резюме

Ударные характеристики одножильного подземного кабеля проанализированы с помощью модальной теории для матричных уравнений кабеля. Зависимые от частоты матрицы комплексного сопротивления и коплексной проводимости для коаксиального подземного кабеля состоящего из жилы и оболочки выведены из уравнений Максвелла.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1984, 30, z. 1, ss. 179-190

621.3.019.3

Konstrukcja etykietowanej sieci Petriego tolerującej uszkodzenia

JERZY KALINOWSKI (WARSZAWA)

Otrzymano 12.12.1981

Praca ta przedstawia metodę projektowania systemu cyfrowego tolerującego uszkodzenia, przy wykorzystaniu modelu jakim jest sieć Petriego. W pierwszym etapie dla danej sieci znajduje się homomorficzny obraz, którego znakowania osiągalne spełniają żądaną własność kodu detekcyjno-korygującego. Dla tak skonstruowanej tzw. kodowej sieci Petriego, wprowadza się nadmiarowe przejścia i miejsca oraz warunki, które umożliwią korygujące działanie modelu.

1. WPROWADZENIE

Jedną z metod zwiększania niezawodności systemów cyfrowych jest projektowanie systemów tolerujących uszkodzenia. Działanie takich systemów polega na tym, że po wystąpieniu uszkodzenia określonego rodzaju system przerywa pracę zachowując informacje o swoim stanie w momencie przerwania, lub kontynuuje poprawną pracę [6].

Sieć Petriego jest formalnym modelem przepływu informacji, szczególnie wygodnym do opisu złożonych systemów asynchronicznych i charakteryzujących się działaniem współbieżnym. Projektowanie systemów cyfrowych tolerujących uszkodzenia może wymagać stworzenia odpowiedniego modelu — sieci Petriego tolerujących uszkodzenia. Efektywne rozwiązanie tego problemu wymaga (jak to pokazano w [3, 6]) wprowadzenia rozszerzonego modelu, takiego jak np. etykietowane sieci Petriego.

W pracy tej przedstawiono metodę projektowania etykietowanych sieci Petriego tolerujących uszkodzenia. Najpierw dla danej sieci znajduje się homomorficzną sieć, której znakowania osiągalne spełniają żądaną własność kodu detekcyjno-korygującego. Dla tak skonstruowanej sieci wprowadza się nadmiarowe przejścia i miejsca oraz warunki, które umożliwią korekcyjne działanie modelu.

2. ETYKIETOWANA SIEĆ PETRIEGO

Definicja 1. Znakowaną siecią Petriego nazywamy uporządkowaną piątkę $SP = \langle P, T, \alpha, \beta, M_0 \rangle$, gdzie:

P — niepusty skończony zbiór miejsc,

T — niepusty skończony zbiór przejść taki, że $P \cap T = \emptyset$,

$\alpha: P \times T \to N$ — funkcja incydencji miejsc z przejściami,

$\beta: T \times P \to N$ — funkcja incydencji przejść z miejscami,

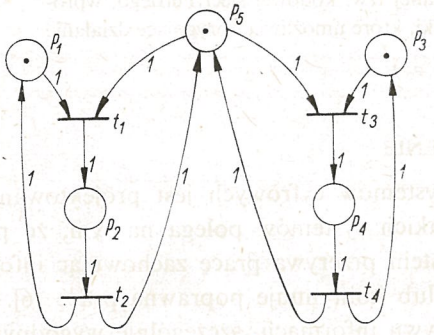
$M_0: P \to N$ — funkcja znakowania początkowego sieci,

$N = 0, 1, \ldots$

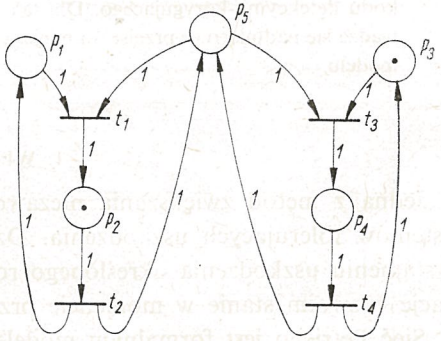
Zbiorami miejsc wejściowych i wyjściowych przejścia $t \in T$ są odpowiednio zbiory:

$$\begin{aligned} \mathrm{Inp}(t) &= \{p \in P | \alpha(p, t) > 0\}, \\ \mathrm{Out}(t) &= \{p \in P | \beta(t, p) > 0\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Obrazem sieci SP jest dwudzielny skierowany graf ważony, w którym wierzchołki odpowiadające miejscom przedstawia się w postaci okręgów, zaś wierzchołki reprezentujące przejścia — jako kreski. Istnieje łuk pomiędzy wierzchołkami odpowiadającymi miejscu p i przejściu t (przejściu t i miejscu p), jeżeli $p \in \mathrm{Inp}(t)$ (lub $p \in \mathrm{Out}(t)$), przy czym waga łuku jest równa $\alpha(p, t)$ (lub $\beta(t, p)$). Znakowaniu początkowemu M_0 odpowiadają kropki zwane znacznikami, umieszczone w okręgach przyporządkowanych miejscom, przy czym liczba kropek w miejscu $p \in P$ jest równa $M(p)$. Przykład znakowanej sieci Petriego pokazany jest na rys. 1.



Rys. 1. Przykładowa znakowana sieć Petriego SP modelująca wzajemne wykluczanie dwóch procesów



Rys. 2. Sieć SP z rys. 1 po zapaleniu przejścia t_1

W celu przedstawienia dynamicznych własności sieci Petriego należy określić warunki zmiany stanu sieci, wyznaczonego przez jej aktualne znakowanie. Mianowicie przejście $t \in T$ jest przygotowane do zapalenia przez znakowanie M, jeżeli

$$(\forall p \in \mathrm{Inp}(t))\,(M(p) \geqslant \alpha(p, t)). \tag{2}$$

Zapaleniem przygotowanego przejścia $t \in T$ jest przekształcenie znakowania M w znakowanie $M' = F(M, t)$ takie, że

$$M'(p) = \begin{cases} M(p) & \text{dla } \forall p \notin (\mathrm{Inp}(t) \cup \mathrm{Out}(t)), \\ M(p) - \alpha(p, t) & \text{dla } \forall p \in (\mathrm{Inp}(t) - (\mathrm{Inp}(t) \cap \mathrm{Out}(t)), \\ M(p) + \beta(t, p) & \text{dla } \forall p \in (\mathrm{Out}(t) - (\mathrm{Inp}(t) \cap \mathrm{Out}(t))), \\ M(p) - \alpha(p, t) + \beta(t, p) & \text{dla } \forall p \in (\mathrm{Inp}(t) \cap \mathrm{Out}(t)). \end{cases} \tag{3}$$

Sekwencją zapalającą ze znakowania M_{j_0} nazywamy dany ciąg przejść $\sigma = t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_l}$, jeżeli istnieje sekwencja znakowań $M_{j_0}, M_{j_1}, \ldots, M_{j_l}$ taka, że $(1 \leqslant k \leqslant l)(M_{j_k} = F(M_{j_{k-1}}, t_{i_k}))$. Zatem znakowanie $M_{j_l} = F(M_{j_0}, \sigma)$ jest osiągalne ze znakowania M_{j_0} poprzez sekwencję zapalającą σ. Zbiór wszystkich znakowań osiągalnych ze znakowania M_0 oznaczamy jako $\bar{M}_0$.

Macierzą incydencji sieci SP jest macierz $C_{m,n} = [c_{ij}]$ określona następująco

$$c_{ij} = \beta(t_j, p_i) - \alpha(p_i, t_j), \tag{4}$$

przy czym $m = |P|$, $n = |T|$. Sieć, dla której $(\forall\, t \in T)(\mathrm{Inp}(t) \cap \mathrm{Out}(t) = \emptyset)$ nazywamy czystą siecią Petriego. Taką sieć można opisać jednoznacznie przez podanie macierzy incydencji C oraz znakowania początkowego M_0, tzn. $SP = \langle C, M_0 \rangle$.

Niech $V^k = [v_i]$ będzie jednostkowym wektorem takim, że:

$$v_i = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i = k, \\ 0 & \text{gdy } i \neq k. \end{cases} \tag{5}$$

Zapalenie przygotowanego przejścia t_k można przedstawić jako następujące przekształcenie wektora M reprezentującego aktualne znakowanie sieci SP

$$M' = M + C \cdot V^k. \tag{6}$$

Dla sieci SP z rys. 1 znakowanie M_0 przygotowało do zapalenia przejścia t_1 i t_3. Rys. 2 pokazuje tę sieć po zapaleniu przejścia t_1, przy czym powstałe znakowanie jest $M' = M_0 + C \cdot V^1$.

Niech będzie dana znakowana sieć Petriego $SP = \langle P, T, \alpha, \beta, M_0 \rangle$. Wówczas:

1. sieć SP jest ograniczona, jeżeli

$$(\exists k \in N)(\forall p \in P)(\forall M \in \bar{M}_0)\,(M(p) \leqslant k), \tag{7}$$

2. sieć SP jest żywa, jeżeli

$$(\forall t \in T)(\forall M \in \bar{M}_0)(\exists \sigma)(\exists M', M'' \in \bar{M}_0)\,\big((M' = F(M, \sigma)) \wedge (M'' = F(M', t))\big). \tag{8}$$

Badanie obu podanych własności stanowi jeden z podstawowych celów analizy sieci. Projektując systemy cyfrowe jesteśmy zainteresowani przede wszystkim konstrukcją takich systemów, których model dany w postaci sieci Petriego jest żywy i ograniczony. Dlatego też badanie obu tych cech stanowi główne kryterium poprawności funkcjonalnej modelu, jakim jest znakowana sieć Petriego. Problem ten jak i inne własności sieci Petriego są szczegółowo przedstawione w [1, 4].

Niech będzie dana sieć $SP = \langle P, T, \alpha, \beta, M_0 \rangle$ oraz sieć $SP' = \langle P', T', \alpha', \beta', M_0' \rangle$. Sieć SP jest homomorficznym obrazem sieci SP, jeśli istnieją przekształcenia $\varphi: T \to T'$ oraz $g: \bar{M}_0 \to \bar{M}_0'$ takie, że

$$\big(M_i = F(M, t)\big) \to \big(g(M_i) = F\big(g(M), \varphi(t)\big)\big). \tag{9}$$

Dla danej czystej sieci Petriego $SP = \langle C, M_0 \rangle$ niech będzie dane przekształcenie $g: N^n \to N^{n'}$ takie, że $(\forall M \in \bar{M}_0)\,(g(M) > 0)$. Wówczas g nazywamy liniowym homomorfizmem sieci $SP = \langle C, M_0 \rangle$ na sieć $SP' = \langle g(C), g(M_0) \rangle$.

Przedstawiona znakowana sieć Petriego jest dogodnym narzędziem modelowania procesów składających się również ze zdarzeń współbieżnych. Na ogół (jak to jest na przykład pokazane w [5]), przejścia w sieci odpowiadają zdarzeniom występującym w procesie, zaś miejsca i umieszczone w nich znaczniki określają warunki wystąpienia zdarzenia. Jednakże często trzeba modelować systemy, które ściśle współpracują z otoczeniem i których działanie jest zależne od dodatkowych warunków, określonych przez wewnętrzny stan systemu. W tym celu należy użyć rozszerzonego modelu, jakim jest etykietowana sieć Petriego [8].

Niech będzie dany zbiór etykiet $E \subseteq PR \times A$, przy czym:

PR — zbiór warunków logicznych zależnych od otoczenia oraz stanu sieci,

A — zbiór akcji.

Definicja 2. Etykietowaną siecią Petriego jest uporządkowana dwójka $ESP = \langle SP, f \rangle$, gdzie:

SP — znakowana sieć Petriego,

$f: T \to E$ — funkcja etykietująca, przypisująca każdemu przejściu $t \in T$ etykietę $\langle pr(t), a(t) \rangle$, przy czym $pr(t) \in PR$ jest warunkiem logicznym zapalenia przejścia t, zaś $a(t) \in A$ jest akcją wykonywaną przez system każdorazowo, gdy zapala się przejście t.

Przejście $t \in T$ etykietowanej sieci Petriego ESP może się zapalić, jeżeli jest przygotowane do zapalenia przez aktualne znakowanie M i jeżeli jest spełniony warunek logiczny $pr(t)$.

3. KONSTRUKCJA KODOWEJ SIECI PETRIEGO

Projektowanie systemów cyfrowych tolerujących uszkodzenia (ang. *fault-tolerant*) często może wymagać stworzenia specjalnego modelu — sieci Petriego tolerującej uszkodzenia. Konstruowanie takiego modelu składa się z 4 etapów, szczegółowo przedstawionych w [6]:

1. identyfikacji uszkodzeń, których wystąpienie winno być tolerowane przez model,
2. określenie metod detekcji uszkodzeń,
3. wyznaczenie procedury przywrócenia poprawnej pracy sieci po wystąpieniu uszkodzenia,
4. oceny osiągniętych rezultatów tolerowania uszkodzeń.

Proponowana metoda projektowania systemu cyfrowego tolerującego uszkodzenia, przy wykorzystaniu modelu jakim jest sieć Petriego, oparta jest o własności kodowe zbioru znakowań osiągalnych. Dlatego też zakłada się w niej tolerowanie wszystkich uszkodzeń powodujących powstanie znakowań niezgodnych z rozkładem znaczników, wynikającym z zapalających się przejść. Z 4 klas uszkodzeń prezentowanych w [6], dwie winny być tolerowane przez projektowany model:

1. uszkodzenia znakowania polegające na zmianie znakowania sieci mimo braku zapalenia jakiegokolwiek przejścia $t \in T$,
2. uszkodzenia zapalania, które polegają na powstawaniu znakowań niezgodnych ze znakowaniami odpowiadającymi zapalającym się przejściom.

Detekcja uszkodzeń będzie realizowana zgodnie z koncepcją przedstawioną w [2], poprzez przekształcenie danej czystej sieci Petriego w sieć, której znakowania osiągalne spełniają charakterystyczną własność kodu detekcyjno-korygującego. Otrzymany w ten sposób model będzie dalej zwany kodową siecią Petriego. W celu określenia zasad projektowania kodowej sieci Petriego, należy ustalić jakie własności powinien spełniać żądany model.

Wagą wektora K, $K \in N^n$ nazywamy liczbę jego niezerowych składowych. Odległością $d(K_1, K_2)$ dwóch wektorów K_1, $K_2 \in N^n$ jest waga ich różnicy. Dla danego kodu $\mathcal{K} =$

$= \{K_i\}$ odległość minimalna jest zdefiniowana jako:

$$d(\mathscr{K}) = \operatorname{Min}(d(K_i, K_j)), \quad K_i, K_j \in \mathscr{K}, \quad K_i \neq K_j. \tag{10}$$

Twierdzenie [7]. Dany kod koryguje wszystkie błędy krotności k (i mniejszej), jeżeli jego odległość minimalna $d(\mathscr{K}) \geqslant 2k+1$.

Ponieważ w proponowanej metodzie projektowania etykietowanej sieci Petriego tolerującej uszkodzenia żądana jest własność korygowania niepoprawnych znakowań, zatem będą stosowane kody o odległości $d(\mathscr{K}) \geqslant 3$.

Lemat 1. Niech będzie dana znakowana sieć Petriego SP oraz jej macierz incydencji C. Wówczas minimalna odległość $d(C)$ przestrzeni znakowań sieci, równa odległości kolumn macierzy C, jest nie większa od minimalnej odległości $d(SP)$ zbioru znakowań osiągalnych

$$d(C) \leqslant d(SP) = \operatorname{Min}(d(M_i, M_j)), \quad M_i, M_j \in \overline{M}_0 \wedge M_i \neq M_j. \tag{11}$$

Lemat ten jest konsekwencją własności (6) i jego szczegółowy dowód jest przeprowadzony w [2]. Wynika z niego, że aby zaprojektować sieć $SP' = \langle C', M_0' \rangle$, której znakowania osiągalne tworzą kod o zadanej odległości minimalnej, wystarczy zapewnić odpowiednie własności macierzy C'. W celu konstrukcji sieci SP' wykorzystuje się liniowy homomorfizm g dany w postaci macierzy $G_{n',n} = [g_{ij}]$ (n' jest równe liczbie miejsc w sieci SP') taki, że:

$$C' = G \cdot C, \tag{12}$$

$$M_0' = G \cdot M_0. \tag{13}$$

Z własności (12) wynika, że odległość kolumn macierzy C' jest nie mniejsza od odległości kolumn macierzy G. Zatem w celu otrzymania sieci Petriego charakteryzującej się zdolnością korygowania niepoprawnych znakowań, należy skonstruować macierz G liniowego homomorfizmu g o zadanej minimalnej odległości kolumn. W tym celu skorzystajmy z ortogonalnych własności macierzy G i kontrolnej macierzy kodu H. Mianowicie kontrolna macierz kodu $H_{n',(n'-n)}$ jest macierzą, której kolumny są ortogonalne do kolumn macierzy G, tzn. $G \cdot H^T = 0$.

Lemat 2 [2]. Kod $\mathscr{K}$ ma odległość minimalną co najmniej równą d, jeżeli wszystkie kombinacje $d-1$ (lub mniej) wierszy kontrolnej macierzy kodu H są liniowo niezależne.

Niech $E_{n,n}$ będzie jednostkową macierzą diagonalną. Wówczas kontrolną macierz kodu można przedstawić w postaci [7]

$$H^T = [-F_{n,(n'-n)}, E_{(n'-n),(n'-n)}]. \tag{14}$$

W ten sposób macierz liniowego homomorfizmu G jako ortogonalna do macierzy H będzie dana jako

$$G = \begin{bmatrix} E_{n,n} \\ F_{n,(n'-n)} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Jeżeli macierz H została skonstruowana tak, aby spełnić własność niezależności $d-1$ wierszy, to zgodnie z lematem 2 zbiór znakowań osiągalnych sieci SP' (otrzymanej z sieci

SP zgodnie z (12) i (13)) będzie miał odległość równą co najmniej d. Sprawdzenie, czy aktualne znakowanie M' sieci SP' należy do zakodowanego zbioru znakowań osiągalnych, polega na obliczeniu syndromu S zdefiniowanego jako

$$S = H^T \cdot M'. \tag{16}$$

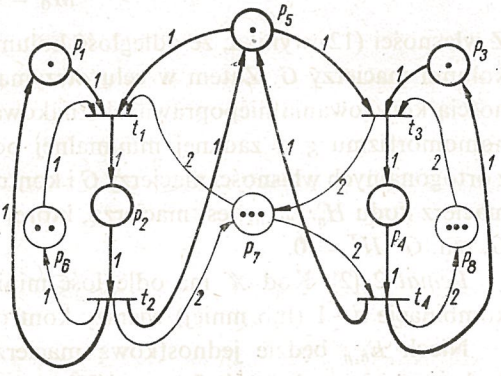
Pamiętając o tym, że kod był skonstruowany tak, że $M' = G \cdot M$ i o ortogonalności macierzy H i G, dla znakowań osiągalnych należących do kodu syndrom S powinien być równy zeru.

Przykład. Dla sieci SP z rys. 1 załóżmy tolerowanie wszystkich jednokrotnych uszkodzeń, tzn. będą korygowane niepoprawne znakowania związane z błędną liczbą znaczników w jednym miejscu. Zatem minimalna odległość zbioru znakowań osiągalnych $d(SP')$ projektowanej sieci SP' musi być równa conajmniej 3. W celu konstrukcji liniowego homomorfizmu G należy określić macierz H w ten sposób, aby jej wiersze były parami niezależne. Postulat ten spełnia następująca macierz (przy założeniu $n' = 8$)

$$H^T = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Wówczas zgodnie z zależnością (15) macierz $G_{5,8}$ jest dana jako

$$G = \begin{bmatrix} E_{5,5} \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{18}$$



Rys. 3. Kodowa sieć Petriego SP' utworzona przez liniowy homomorfizm sieci SP z rys. 1 (sieć SP jest zaznaczona pogrubioną linią)

Kodowa sieć Petriego skonstruowana zgodnie z (12) i (13) ma macierz incydencji C' określoną następująco

$$C' = G \cdot C = \begin{bmatrix} C \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Jej znakowanie początkowe jest równe $M'_0 = G \cdot M_0 = [10101233]$. Sieć ta jest przedstawiona na rys. 3.

Prezentowana metoda konstruowania kodowej sieci Petriego wykorzystuje własności detekcyjne kodu liniowego. Jednakże cel ten może być osiągnięty poprzez wykorzystanie bardziej złożonych kodów, jak np. kody cykliczne.

4. KORYGOWANIE USZKODZEŃ

Otrzymany kodowy model umożliwia detekcję uszkodzeń poprzez wyznaczenie dla aktualnego znakowania M' sieci SP' syndromu $S = H^T \cdot M'$. Jeżeli wartość syndromu jest równa zeru, znakowanie to jest uznane za poprawne. W przypadku przeciwnym, tzn. $S \neq 0$, bieżące znakowanie sieci SP' jest niepoprawne i o ile jest to możliwe, należy je skorygować.

Wyznaczenie błędnego rozmieszczenia znaczników przeprowadza się w sposób następujący. Niech wektor $Z_{n'} = [z_i]$ reprezentuje błędny rozkład znaczników w poszczególnych miejscach sieci SP' tak, że

$$z_i = \begin{cases} 0 \text{ gdy liczba znaczników w miejscu } p_i \text{ jest prawidłowa,} \\ k \text{ gdy w miejscu } p_i \text{ jest „nadmiarowo” } k \text{ znaczników,} \\ -k \text{ gdy „brakuje” } k \text{ znaczników w miejscu } p_i. \end{cases} \tag{20}$$

Z każdym takim błędnym rozkładem znaczników Z, który winien być korygowany, jest skojarzony różny syndrom $S = H^T \cdot Z$. W ten sposób wartość syndromu S określa niepoprawne rozmieszczenie znaczników $Z(S)$. Zatem w celu skorygowania niepoprawnego znakowania M' sieci SP', należy wykonać następujące działanie

$$M'_{skorygowane} = M' - Z(S). \tag{21}$$

Korygowanie niepoprawnych znakowań sieci SP' jest przeprowadzane przez redundancyjny układ korekcyjny i przekształcenie otrzymanej sieci SP'' w etykietowaną sieć Petriego ESP''. Mianowicie dla każdego miejsca $p_i \in P'$ wprowadza się dwa incydentne z nim przejścia. Jedno z nich $t_{i+} \in T_+$ doprowadza „brakujące” znaczniki do miejsca $p_i(\beta(t_{i+}, p_i) = 1)$, drugie zaś $t_{i-} \in T_-$ usuwa „nadmiarowe” znaczniki z tego miejsca $(\alpha(p_i, t_{i-}) = 1)$. Do sieci SP' wprowadza się także dodatkowe miejsce kontrolne p_k (przy czym $M'(p_k) = 1$), które określa warunki przygotowania do zapalenia przejść korygujących w ten sposób, że

$$(\forall t \in T_+ \cup T_-)(\alpha(p_k, t) = 1 \wedge \beta(t, p_k) = 1). \tag{22}$$

Dla tak otrzymanej sieci SP'', dla każdego przejścia $t \in T''$ określa się etykiety w postaci warunków $pr(t)$ zapalenia tego przejścia. Warunki te są następujące:

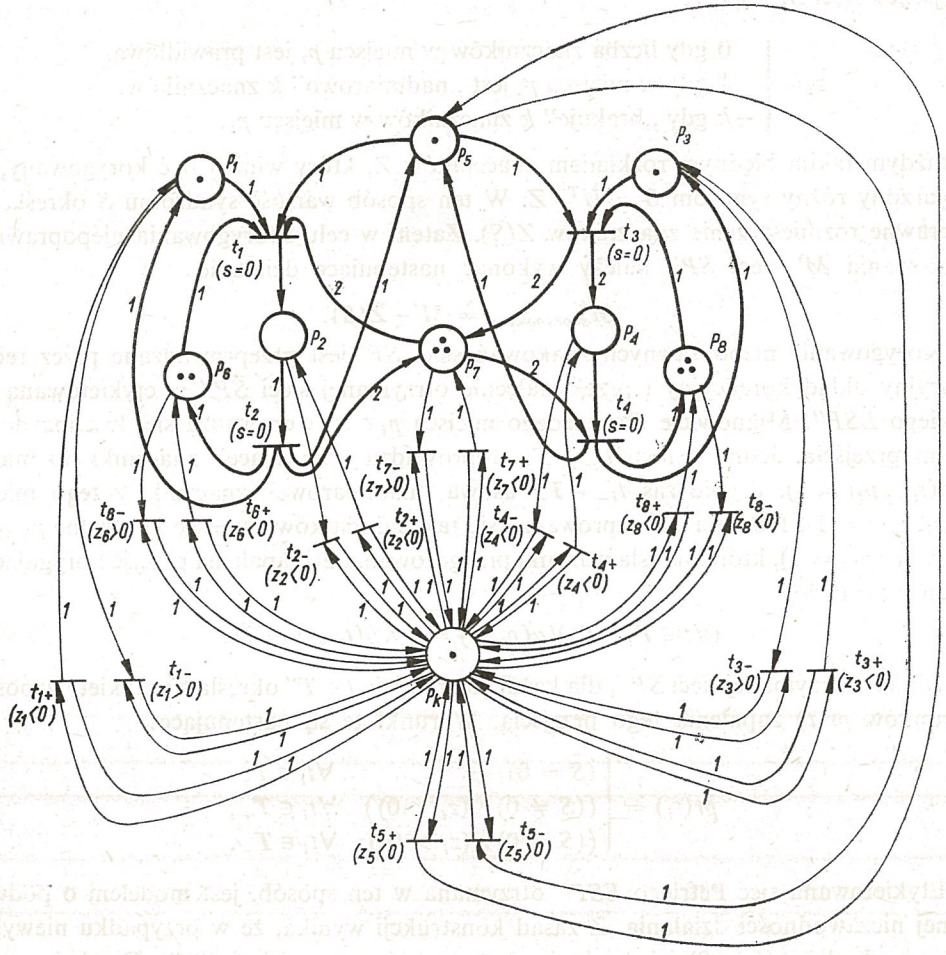
$$pr(t_i) = \begin{cases} (S = 0) & \forall t_i \in T, \\ ((S \neq 0) \wedge (z_i < 0)) & \forall t_i \in T_+, \\ ((S \neq 0) \wedge (z_i > 0)) & \forall t_i \in T_-. \end{cases} \tag{23}$$

Etykietowana sieć Petriego ESP'' otrzymana w ten sposób, jest modelem o podwyższonej niezawodności działania. Z zasad konstrukcji wynika, że w przypadku niewykrywania uszkodzeń $(S = 0)$ jej działanie ogranicza się do podsieci ESP'. Detekcja uszkodzenia, o ile sieć nie jest w stanie skorygować aktualnego znakowania M', prowadzi do

zastoju w sieci *ESP''*. W przypadku wykrycia błędnego rozkładu znaczników Z, którego wystąpienie winno być tolerowane, sieć *ESP''* przechodzi do skorygowania znakowania M', zgodnie z zależnością (21). Korekcja znakowania odbywa się w sposób krokowy, tzn. każdorazowe zapalenie przejścia korygującego usuwa (wprowadza) tylko jeden znacznik. Układ korygujący będzie działać do momentu, aż syndrom znakowania generowanego w sposób krokowy będzie równy zeru.

Dla sieci *SP'* z rys. 3 korygująca etykietowana sieć Petriego *ESP''* jest przedstawiona na rys. 4. Zgodnie z założeniami sieć ta koryguje błędne rozkłady znaczników Z o wadze 1 (błędy jednokrotne). Rozkłady te wraz ze skojarzonymi z nimi syndromami są zawarte w tablicy 1. Logiczne warunki zapalania przejść zostały określone zgodnie z zależnością (23). Łatwo zauważyć, że nieetykietowana sieć *SP''* z rys. 4 jest nieograniczona. Jednakże określanie etykiet zgodnie z zasadami projektowymi czyni sieć *ESP''* żywą i ograniczoną.

Zaprojektowana sieć Petriego *ESP''* zgodnie z założeniami toleruje klasę uszkodzeń, polegających na powstawaniu nieprawidłowych znakowań w podsieci *ESP'*. Dodatkowo



Rys. 4. Etykietowana sieć Petriego *ESP''* tolerująca jednokrotne uszkodzenia (sieć *ESP'* jest zaznaczona pogrubioną linią)

Tablica 1

Tolerowane błędne rozkłady znaczników i skojarzone z nimi syndromy

Z								S		
k	0	0	0	0	0	0	0	$-k$	$-2k$	$-k$
0	k	0	0	0	0	0	0	$-k$	0	$-2k$
0	0	k	0	0	0	0	0	0	$-k$	$-k$
0	0	0	k	0	0	0	0	$-k$	$-2k$	0
0	0	0	0	k	0	0	0	$-k$	0	$-k$
0	0	0	0	0	k	0	0	k	0	0
0	0	0	0	0	0	k	0	0	k	0
0	0	0	0	0	0	0	k	0	0	k

pewna część uszkodzeń o krotności większej niż 1 także jest wykrywana i ich wystąpienie prowadzi do zastoju w sieci. Jednakże wprowadzenie znacznej redundancji ma też negatywny wpływ na niezawodność otrzymanego modelu.

Przy wystąpieniu uszkodzenia w układzie korygującym, krańcowym efektem będzie utrata zdolności korekcyjnych skonstruowanej sieci. Jednak w konsekwencji każde wykryte uszkodzenie będzie prowadziło do zastoju w sieci (tzw. *deadlocku*). Tak też będzie się działo w przypadku „zgubienia" znacznika w miejscu p_k.

Zaprojektowany model nie toleruje 2 rodzajów uszkodzeń, szczegółowo opisanych w [6]:

1. uszkodzeń przygotowania przejścia (polegają na tym, że bieżące znakowanie sieci teoretycznie przygotowujące do zapalenia dane przejście, w rzeczywistości nie pozwala na jego zapalenie),
2. uszkodzeń przejścia (polegają na niezapalaniu się przejść, mimo spełnienia warunków przygotowania do zapalenia).

Redundancja wprowadzona do pierwotnej sieci *SP* ma istotny wpływ na częstość występowania tych uszkodzeń. Dodatkowe miejsca (a wraz z nimi dodatkowa incydencja) zwiększają prawdopodobieństwo wystąpienia uszkodzenia przygotowania przejścia. Wprowadzenie etykiet w postaci warunków zapalania przejść może spowodować wzrost prawdopodobieństwa występowania uszkodzeń przejść. Jednak wydaje się, że podwyższenie niezawodności, wynikające z tolerowania określonych uszkodzeń, przeważy te niedogodności.

5. ZAKOŃCZENIE

W pracy tej została przedstawiona konstrukcja etykietowanej sieci Petriego tolerującej uszkodzenia, w oparciu o kodowe własności modelu, prezentowane w [2]. Opracowanie efektywnego algorytmu wyznaczania niezawodności modelu danego w postaci sieci Petriego pozwoliłoby na kompleksową ocenę prezentowanej metody. Osiągnięcie własności tolerowania określonych uszkodzeń wymaga wprowadzenia do pierwotnego modelu znacznej redundancji. Fakt ten skłania do projektowania sieci Petriego wykrywających i korygujących uszkodzenia tylko w wybranych, „newralgicznych" częściach sieci.

LITERATURA

1. J. L. Peterson, *Petri nets*, Computing Surveys, Vol. 9, Nr 3, September 1977, s. 223—250.
2. J. Sifakis, *Homomorphism of Petri Nets: Applications to the realization of fault tolerant systems*, Rapport de Researche — RR90, Institut Polytechnique de Grenoble, Octobre 1977.
3. W. L. Heimerdinger, *A Petri net approach to system level fault tolerance analysis*, Naval Research contract N000014-75-C-DO-111 Honeywell Systems and Research Systems, 1975.
4. W. Zuberek, *Analiza efektywności jednostek centralnych maszyn cyfrowych oraz niektóre sposoby jej zwiększania*, Rozprawa doktorska, Instytut Informatyki Wydziału Elektroniki PW, 1976.
5. J. Godlewska, J. Kalinowski, *Zastosowanie sieci Petriego do modelowania złożonych systemów telekomunikacyjnych*, Przegląd Telekomunikacyjny, Nr 7, 1980.
6. J. Kalinowski, *O możliwości wykorzystania sieci Petriego do projektowania niezawodnych systemów cyfrowych*, Rozprawy Elektrotechniczne, Nr 1, 1983.
7. J. Dróżdż, *Podstawy kodowania nadmiarowego*, Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1978.
8. J. M. Ayache, M. Diaz, R. Valette, *A methodology for specifying control in electronic switching systems*, International Switching Symposium, Paris, May 1979.

J. KALINOWSKI

DESIGN OF FAULT TOLERANT LABELLED PETRI NET

Summary

A method of fault tolerant digital system design has been presented. This method applies the Petri net model. At the first stage the homeomorphic image is found for the given net. Reachable markings of the image satisfy the desired property of detective-correcting code. For the so constructed coded Petri net redundant places and transitions as well as conditions have been introduced. This redundancy makes possible the correcting action of the model.

J. KALINOWSKI

CONSTRUCTION DU RÉSEAU ÉTIQUETÉ DE PETRI TOLÉRANT LES DÉFAUTS

Résumé

Cet article présente la méthode de construction d'un système numérique tolérant les défauts. Premièrement, on trouve pour le réseau donné une image homomorfique. Les marques accessibles de cette image satisfont la propriété désirée du code détecteur-correctif. Pour ce réseau, appelé réseau codé de Petri, on introduit des transmissions et des places supplémentaires ainsi que les conditions assurant le fonctionnement correctionnel du modèle.

J. KALINOWSKI

PROJEKTIERUNG EINES FEHLERTOLERIERENDEN PETRI-NETZES

Zusammenfassung

Im Aufsatz wird eine Projektierungsmethode für fehlertolerierende Digitalschaltungen erwogen. Als Modell für die Schaltungen wird das Petri-Netz angewandt. In der ersten Etappe wird das homomorphische Bild des Netzes geschaffen, dessen Markierung die Bedingungen für die erforderlichen Eigen-

schaften des fehlerkorrigierenden Codes erfüllen. Für das derartig konstruierte Netz werden redundante Transitionen und Stellen sowie Bedingungen eingeführt, die die korrigierende Leistungsfähigkeit des Modells ermöglichen.

Е. КАЛИНОВСКИ

ПОСТРОЕНИЕ УСЛОВНОЙ САМОПРОВЕРЯЕМОЙ СЕТИ ПЕТРИ

Резюме

Представлен метод проектирования самопроверяемых логических схем и использованием модели в качестве сети Петри. В первом этапе для данной сети построен гамоморфический образ, для которого достигаемые маркировки проявляют свойства корегирующего кодирования. Для построенной таким образом сети Петри введены избыточные места и транзиции а также условия, которые делают возможным корегирующие действие модели.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1984, 30, z. 1, ss. 191-218

621.3.016.2

Metody minimalizacji błędu średniokwadratowego estymatorów gęstości widmowej mocy otrzymanych metodą bezpośrednią *DFT* Część I. Podstawy teoretyczne

JERZY DOMAGAŁA (KRAKÓW)

Instytut Elektroniki AGH

Otrzymano 5.2.1982

W artykule tym przedstawiono metody minimalizacji wariancji oraz obciążenia estymatorów *GWM* otrzymanych metodą bezpośrednią *DFT*. Przedstawiono metodę uśredniania estymatorów widma w dziedzinie czasu oraz częstotliwości. Rozpatrzono wpływ wymienionych metod, okna modyfikacyjnego oraz stopnia skorelowania analizowanego procesu na wzajemną korelację estymatorów widma. Wykazano, wbrew panującym opiniom, że metoda bezpośrednia *DFT* przy umiejętnym jej stosowaniu pozwala osiągnąć lepsze wyniki estymacji niż uzyskane metodami klasycznymi, np. Blackmana-Tukey'a.

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

$x(i)$ — dyskretna postać czasowa sygnału
$X(k)$ — dyskretna postać częstotliwościowa widma amplitudowego sygnału
$G(k)$ — gęstość widmowa mocy *GWM*
$g(k)$ — unormowana gęstość widmowa mocy *gwm*
$R(i)$ — funkcja autokowariancji sygnału
$\varrho(i)$ — funkcja autokorelacji (unormowana funkcja autokowariancji) sygnału
$H(k)$ — dyskretna charakterystyka częstotliwościowa filtru (okno częstotliwościowe)
$d(i)$ — okno danych (*data window*)
$\lambda(i)$ — okno korelacyjne (*lag window*)
$\lambda_0(i)$ — unormowane okno korelacyjne
i, l, s, m, n — dyskretny czas
p, q, k — dyskretna częstotliwość
N, L — długość dyskretnego szeregu czasowego (ilość próbek)
Δt — krok dyskretyzacji w dziedzinie czasu
η — współczynnik utraty rozdzielczości częstotliwościowej
Q_o — współczynnik kompensacji wariancji
M — krotność uśredniania w dziedzinie czasu
Q — krotność uśredniania w dziedzinie częstotliwości
r — parametr „pokrycia" (*overlap*)
$F(r)$ — współczynnik redukcji liczby stopni swobody
J — współczynnik jakości okna

$B(k)$ — błąd obciążenia estymatorów widma
$b(k)$ — znormalizowany błąd obciążenia estymatorów widma
$\varepsilon^2(k)$ — znormalizowany błąd średniokwadratowy estymatora widma
COV — kowariancja
VAR — wariancja
COR — korelacja
BT — metoda Blackmana-Tukey'a estymacji widma
DFT — Dyskretna Transformacja Fouriera
FFT — Szybka Transformacja Fouriera
IDFT — Odwrotna Dyskretna Transformacja Fouriera
$\hat{y}$ — estymator prawdziwej wartości Y

1. WARIANCJA ESTYMATORÓW WIDMA

1.1. Uśrednianie w dziedzinie czasu [1, 2, 3, 4, 5, 6]

Uzyskany w toku procedury *DFT* estymator *GWM* $\hat{G}(k)$ [7]

$$\hat{G}(k) = \frac{2}{N\Delta t}[\hat{X}(k)\hat{X}^*(k)], \tag{1}$$

gdzie:

$$\hat{X}(k) = \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} x(i) d_o(i) \exp(-j2\pi ki/N), \qquad d_o(i) = \frac{d(i)}{\sqrt{Q_o}},$$

$\hat{X}^*(k)$ — wielkość zespolona, sprzężona z $\hat{X}(k)$,
jest zmienną losową o rozkładzie χ^2 i dwóch stopniach swobody. Dlatego też wariancja (błąd losowy) estymatora jest bardzo duża i dla dużych wartości N równa się praktycznie wartości samego estymatora, co dla procesu nieskorelowanego można wyrazić wzorem [8]

$$\varepsilon_o^2 = 1 + \frac{1}{N^2}\left[\frac{\sin 2\pi k}{\sin(2\pi k/N)}\right]^2, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N/2-1, \tag{2}$$

gdzie ε_o^2 — unormowany błąd średniokwadratowy estymatora *GWM*.

Rezultat ten ma istotne znaczenie, oznacza bowiem, że jeśli $x(i)$ jest dyskretnym gaussowskim szumem białym, to odchylenie standardowe σ_x estymatora jest nie mniejsze od wielkości estymowanej. Ponadto, chociaż błąd ten maleje ze wzrostem N, to jednak w granicy nie osiąga wartości zero, lecz dąży do jedności.

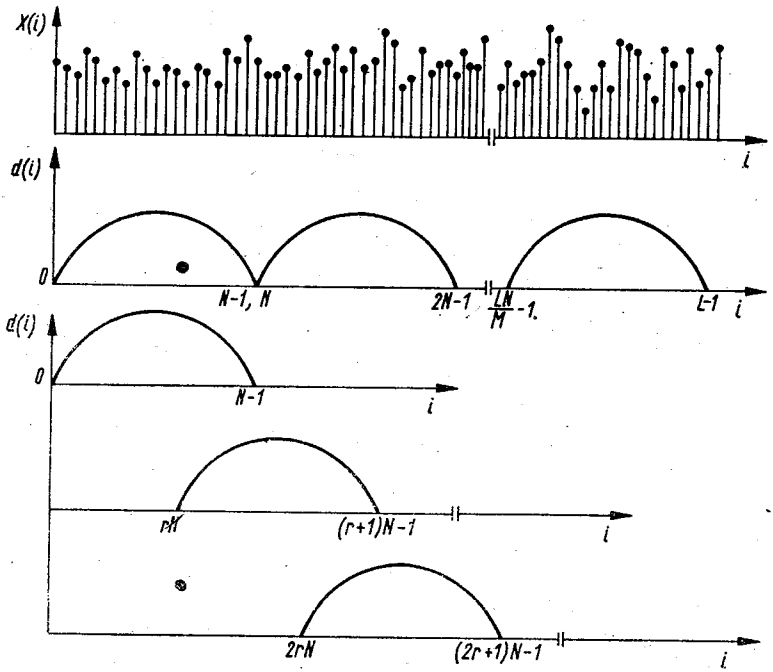
W zasadzie w każdym przypadku analizy widmowej wynik taki jest nie do przyjęcia. Istnieją praktycznie dwa rozwiązania pozwalające uzyskać estymatory o dużo większej liczbie stopni swobody:
a) uśrednianie estymatorów widma $\hat{G}(k)$ w dziedzinie czasu i,
b) uśrednianie estymatorów widma $\hat{G}(k)$ w dziedzinie częstotliwości k.

W wyniku przeprowadzenia procedur uśredniających błąd średniokwadratowy oszacowania estymatora $\hat{G}(k)$ ulega redukcji, zgodnie ze wzorem

$$\varepsilon_M^2 = \frac{\varepsilon_o^2}{M}, \tag{3}$$

gdzie M — krotność uśredniania.

Procedura uśredniania estymatorów widma w dziedzinie czasu polega na podziale analizowanego szeregu czasowego $x(i)$ o długości L na M odcinków o długości N, określonej przez wymaganą rozdzielczość analizy. Transformacja takiego szeregu czasowego przez okno danych (rys. 1a) powoduje utratę znacznej części informacji zawartej w pier-

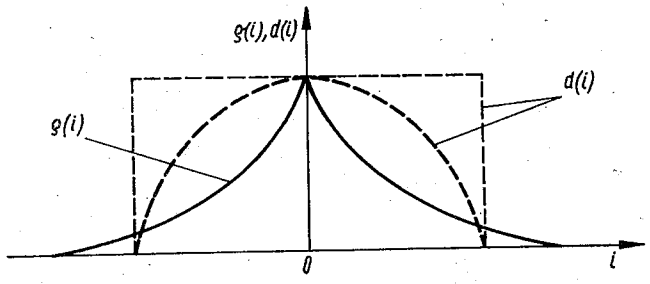


Rys. 1. Transformacja „surowego" szeregu czasowego przez okno danych
a) analiza niezachodzących na siebie odcinków szeregu $x(i)$,
b) analiza zachodzących na siebie odcinków szeregu $x(i)$

wotnym szeregu $x(i)$. Wprawdzie efekt ten jest kompensowany poprzez współczynnik kompensacji wariancji Q_o, jednakże kompensacja ta ma charakter ekstrapolacji właściwości analizowanego sygnału na czas analizy $T = N\Delta t$, na podstawie jego właściwości w efektywnym czasie analizy $T_{eff} = K\Delta t$ (przy czym $K \leqslant N$). Tak więc proces liniowej „transmisji" sygnału poprzez okno danych $d(i)$ prowadzi zawsze do wygładzania i uśredniania właściwości sygnału. W wielu przypadkach analiza tego typu nie jest właściwa, prowadząc do błędnych wyników. Można również sądzić, że uzyskany w toku takiej procedury estymator widma $\hat{G}(k)$ nie będzie optymalny z punktu widzenia możliwej do uzyskania przy danej długości realizacji L i wymaganej rozdzielczości Δf liczby stopni swobody.

Należy również zauważyć, że jest to istotna różnica w stosunku do metody estymacji *GWM* poprzez wygładzanie funkcji autokowariancji $R(i)$ procesu losowego; obcięcie tej

funkcji poprzez okno danych nie powoduje tak znacznej utraty informacji, gdyż jest ona zawarta głównie w jej środkowej części (rys. 2). Fakt ten powoduje, że wielu autorów [9, 10, 11, 12] poddaje krytyce (aczkolwiek jak się okazuje nieuzasadnionej) metodę



Rys. 2. Transformacja funkcji autokorelacji przez okno danych

modyfikacji liniowej szeregów czasowych. Najczęściej wysuwa się tu zarzuty, że modyfikacja liniowa pogarsza rozdzielczość analizy częstotliwościowej, nie prowadząc w zamian do redukcji wariancji estymatorów. Wyraża to wyprowadzona przez Sloana [12] nierówność określająca relację ilości stopni swobody estymatora widma otrzymanego procedurą modyfikacji liniowej k_L i kwadratowej k_Q

$$k_Q \geqslant k_L. \tag{4}$$

Stwierdza się również, że powoduje ona wspomnianą utratę informacji — przykładowo stosując okno Hanna do modyfikacji szeregu 1, 0, 0 ... 0, −1 otrzymuje się szereg zerowy. W istocie bowiem, warunek liniowej modyfikacji

$$\frac{1}{Q_o}\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} d^2(i) = 1 \tag{5}$$

zapewnia zachowanie mocy „średnio" (*on average*), podczas gdy w metodzie modyfikacji kwadratowej, warunek $d(0) = 1$ gwarantuje zachowanie wyrażonej przez $R(0)$ mocy dowolnej realizacji sygnału.

Celem uniknięcia wspomnianej utraty informacji poddaje się zwykle analizie zachodzące na siebie segmenty badanego szeregu. Procedura ta (rys. 1b) znana jest pod nazwą metody Welcha [13]. Ważnym zagadnieniem, związanym ze stosowaniem metody Welcha, jest określenie w jakim stopniu analiza zachodzących na siebie segmentów badanego szeregu czasowego wpływa na korelację (a tym samym na zmniejszenie liczby stopni swobody), będących przecież zmiennymi losowymi estymatorów widma $\hat{G}_r(k)$.

Dla ogólnego przypadku, dowolnego stacjonarnego sygnału $x(i)$ funkcję korelacji estymatorów widma amplitudowego $\hat{X}(k)$ można zapisać równaniem

$$C(r) = \frac{\mathrm{COV}[\hat{X}(k)\hat{X}_r(k)]}{\mathrm{VAR}[\hat{X}(k)]}, \tag{6}$$

gdzie:

$$\hat{X}(k) = \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} d_o(i)x(i)\exp(-j2\pi ki/N),$$

$$\hat{X}_r(k) = \Delta t \sum_{i=rN}^{(r+1)N-1} d_o(i-rN)x(i)\exp(-j2\pi ki/N),$$

$$0 < r \leqslant 1.$$

Dla dowolnego procesu losowego kowariancja $\mathrm{COV}[\hat{X}(k)\hat{X}_r(k)]$ przyjmuje postać

$$\mathrm{COV}[\hat{X}(k)\hat{X}_r(k)] = \Delta t \sum_{i=-(N-1)}^{N-1} \varrho(rN+i)\lambda_o(i)\exp[-j2\pi k(rN+i)/N], \tag{7}$$

gdzie

$$\lambda_o(i) = \frac{1}{NQ_o} \sum_{s=0}^{N-|i|-1} d(s)d(s+|i|)$$

jest znormalizowanym oknem korelacyjnym.

Ostatecznie pozwala to wyrazić korelację estymatorów widma amplitudowego równaniem

$$\mathrm{COR}[\hat{X}(k)\hat{X}_r(k)] = \frac{\sum_{i=-(N-1)}^{N-1} \varrho(rN+i)\lambda_o(i)\exp[-j2\pi k(rN+i)/N]}{\sum_{i=-(N-1)}^{N-1} \varrho(i)\lambda_o(i)\exp(-j2\pi ki/N)}. \tag{8}$$

Widoczne jest, że swój wkład w statystyczną zależność otrzymanych z zachodzących na siebie segmentów szeregu czasowego estymatorów widma mają:
a) korelacja własna procesu $\varrho(i)$, wyrażająca jego „pamięć",
b) modyfikacja liniowa poprzez okno danych $d(i)$,
c) wartość parametru „pokrycia"[1] r segmentów czasowych.

Tablica 1

Stopień skorelowania estymatorów widma $X(k)$ sygnału losowego o GWM typu $1/f^{\alpha}$ wyznaczonych z sąsiednich segmentów szeregu czasowego z zastosowaniem modyfikacji Hanna

α	0	1	2
$C(r=1)$	0,961 *E*-13	0,915 *E*-08	0,402 *E*-07

Dla najprostszego przypadku, gdy badany proces jest nieskorelowanym szumem białym o zerowej wartości średniej, równanie powyższe sprowadza się do prostej postaci

$$C(r) = \sum_{i=0}^{N-rN-1} d(i)d(rN+i) \Big/ \sum_{i=0}^{N-1} d^2(i), \tag{9}$$

co faktycznie odpowiada równaniu definiującemu znormalizowane okno korelacyjne $\lambda_o(i)$.

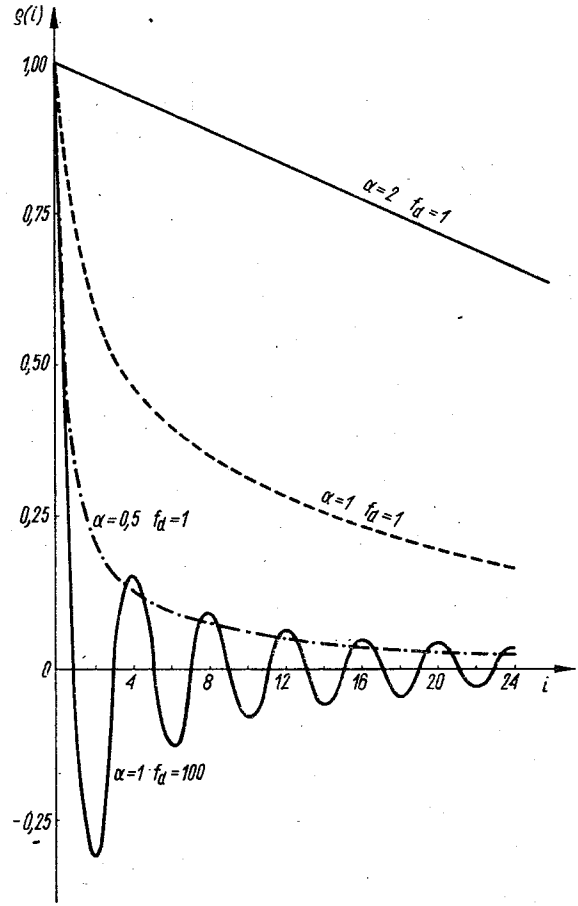
[1] Ang. — *overlapping*, franc. — *empiétement*.

Tablica 2

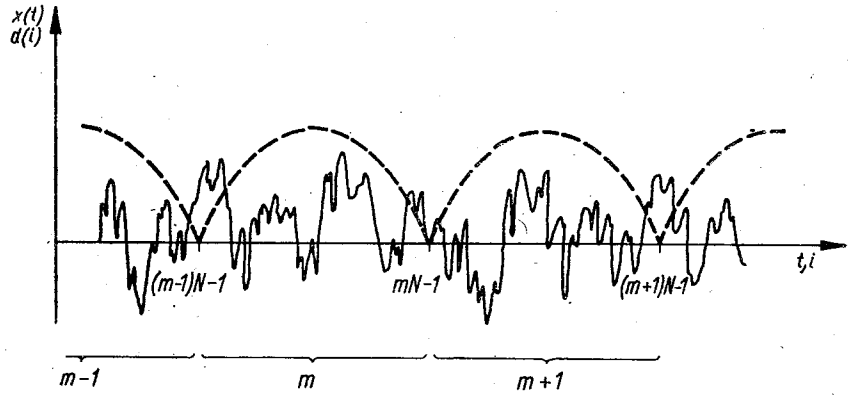
Podstawowe parametry wybranych okien danych

Okno	Pasmo szumowe [bin]	$C(r)$		Współcz. jakości J_r $r = 0{,}5$	Poziom listków bocznych [dB]	Nachylenie charakterystyk [dB/dek]
		$r = 0{,}25$	$r = 0{,}5$			
Prostokątne	1,00	0,750	0,500	1,000	13	20
Trójkątne	1,33	0,719	0,250	1,007	27	40
Hann	1,50	0,659	0,167	1,001	32	60
Bingham	1,08	0,742	0,457	1,033	14	60
Hamming	1,36	0,707	0,235	1,000	43	20
Gauss $\gamma = 0{,}5$	1,70	0,570	0,101	1,022	57	20
Blackman	1,73	0,567	0,090	1,021	58	60
Blackman-Harris						
a)	1,71	0,572	0,096	1,019	72	20
b)	2,00	0,460	0,038	1,076	92	20
Riesz	1,20	0,765	0,344	1,013	21	40
Riemann	1,30	0,734	0,274	1,007	26	40
Parzen	1,92	0,493	0,050	1,056	53	80
Bohman	1,79	0,545	0,074	1,027	46	80
Poisson $\alpha = 3$	1,65	0,548	0,151	1,074	24	20
Dolph $\alpha = 3$	1,51	0,647	0,163	1,001	60	00
Kaiser $\alpha = 3$	1,80	0,539	0,074	1,033	69	20
Barcilon $\alpha = 3$	1,56	0,630	0,142	1,002	53	20
Papoulis	1,23	0,755	0,318	1,006	23	40

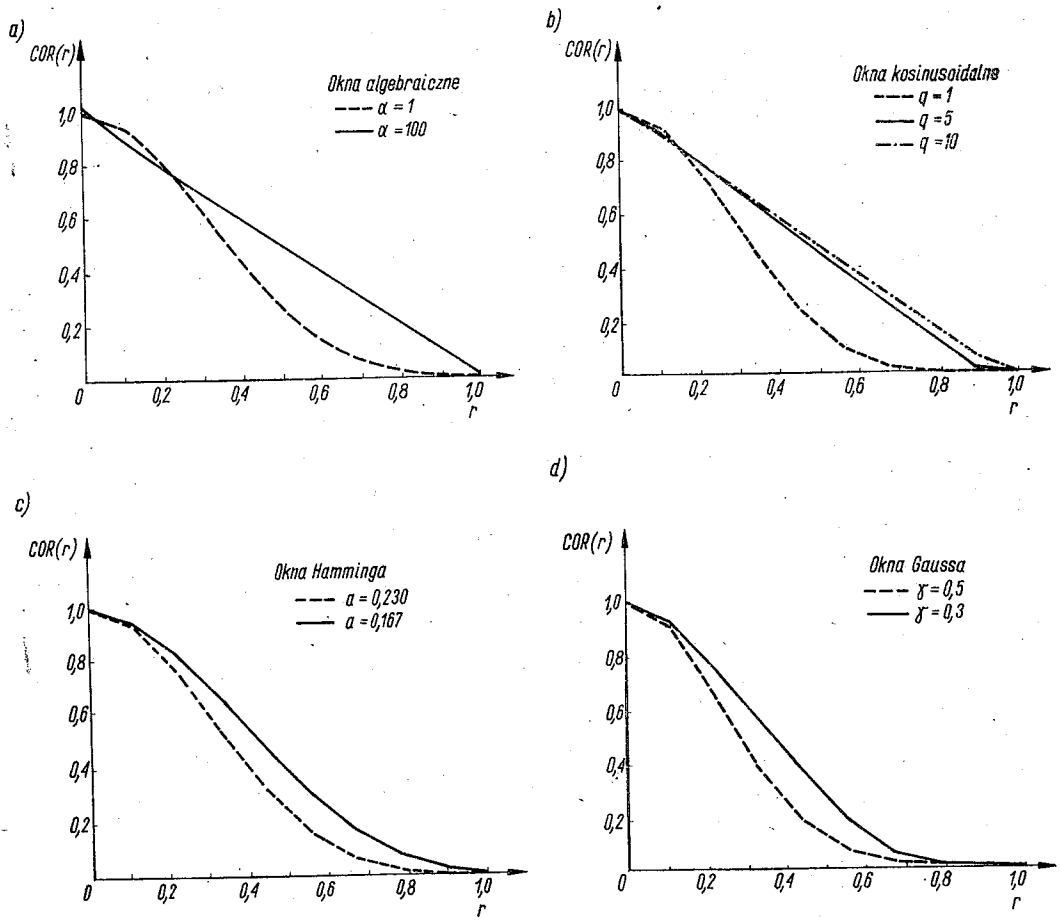
Wpływ stopnia skorelowania procesu losowego na wartość korelacji $C(r)$ estymatorów widma jest nieznaczny i uwidacznia się w zasadzie dla dużych wartości parametru r. Przykładowo, w tablicy 1 przedstawiono wartości funkcji $C(r = 1)$ na przykładzie modyfikacji oknem Hanna $N = 100$-elementowych segmentów sygnału dyskretnego o GWM typu $G(f) = Af^{-\alpha}$. Jest to logiczne, ponieważ tylko dla procesu silnie skorelowanego (rys. 3) kolejne, początkowe wyrazy sekwencji szeregu czasowego $x_m(i)$ będą skorelowane z koń-



Rys. 3. Funkcje autokorelacji szerokopasmowego sygnału losowego o *GWM* typu $1/f^{\alpha}$
f_d — dolna częstotliwość graniczna sygnału



Rys. 4. Ilustracja graficzna wpływu „pamięci" własnej procesu na stopień skorelowania widma $C(r)$

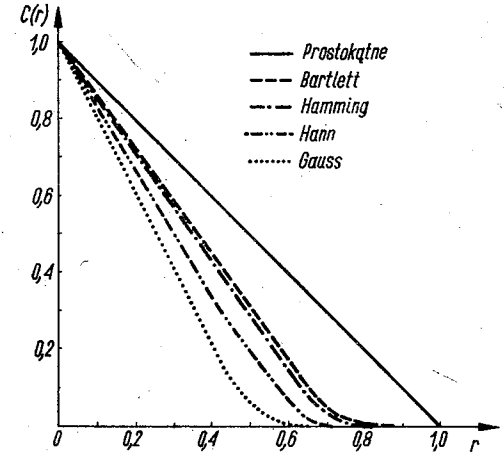


Rys. 5. Funkcja korelacji estymatorów widma $X(k)$ sygnału o GWM typu $1/f$ analizowanego z zastosowaniem modyfikacji liniowej poprzez: a) okna algebraiczne, b) okna kosinusoidalne, c) okna Gaussa, d) okna Hamminga

cowymi wyrazami sekwencji $x_{m-1}(i)$ (rys. 4). Stąd

$$C(r) = \begin{cases} 0 \text{ dla } \alpha = 0 \text{ proces biały,} \\ \neq 0 \quad = f(\alpha, N) \text{ dla procesów kolorowych.} \end{cases} \tag{10}$$

Zasadniczy jednakże wpływ na korelację estymatorów widma ma okno modyfikujące oraz wartość parametru r. Zależność tę, w postaci wykresów funkcji $C = f(r)$ dla klasycznych rodzin okien danych przedstawiono na rys. 5. Jest oczywiste, że z punktu widzenia stabilności estymatorów widma, najlepszymi będą te okna modyfikacyjne, dla których funkcja korelacji $C(r)$ będzie funkcją silnie malejącą, przy r zmierzającym do jedności. Spośród prezentowanych okien klasycznych, niewątpliwie kryterium temu odpowiada okno Gaussa (rys. 6). Wartości funkcji $C(r)$ dla większości okien danych przedstawione są w tablicy 2.



Rys. 6. Porównanie stopnia skorelowania estymatorów widma $X(k)$ wprowadzanego poprzez wybrane okna modyfikujące

Zgodnie ze wzorem (3), wariancja uśrednionego M-krotnie estymatora *GWM* $\hat{G}(k)$ zmniejszy się tyleż krotnie, przy założeniu jednak, że każdy z M estymatorów jest zmienną losową niezależną statystycznie. Zastosowanie procedury Welcha, skutkiem wpływu wymienionych trzech czynników, prowadzi do uzyskania skorelowanych estymatorów, stąd też sumaryczna liczba stopni swobody estymatora uśrednionego jest mniejsza od $2M$. Współczynnik redukcji liczby stopni swobody uśrednionego estymatora widma amplitudowego $(\hat{X}k)$ można wyrazić wzorem

$$F(r) = \sum_{j=-(M-1)}^{M-1} \left(1 - \frac{|j|}{M}\right) C(jr), \tag{11}$$

przy czym, ponieważ można przyjąć, że $C(jr) = 0$ dla $|jr| \geqslant 1$, stąd równanie to jest równoważne postaci

$$F(r) = \sum_{j=-\mathrm{Ent}[1/r]}^{\mathrm{Ent}[1/r]} \left(1 - \frac{|j|}{M}\right) C(jr), \tag{12}$$

gdzie Ent[·] oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej w nawiasie kwadratowym.

Dla najbardziej typowych przypadków analizy sygnałów losowych metodą *DFT* Welcha współczynnik ten przyjmuje wartości odpowiednio:

$$\begin{aligned} F(0{,}25) &= 1+2[C(0{,}25)+C(0{,}5)+C(0{,}75)]-\frac{2}{M}[C(0{,}25)+C(0{,}5)+C(0{,}75)], \\ F(0{,}5) &= 1+2C(0{,}5)-\frac{2}{M}C(0{,}5), \\ F(0{,}75) &= 1+2C(0{,}75)-\frac{2}{M}C(0{,}75). \end{aligned} \tag{13}$$

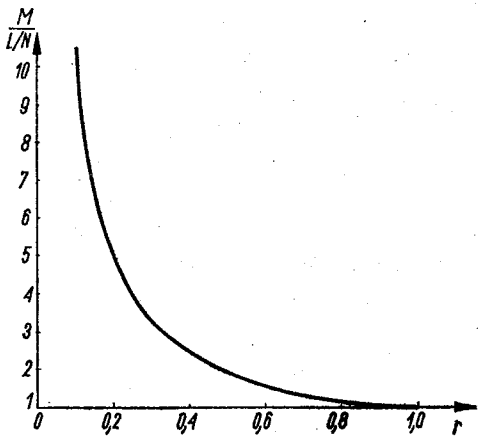
Ujemne człony równań mogą być pominięte, jeśli liczba uśrednianych segmentów jest większa od dziesięciu. Praktycznie, również dla dobrych okien, wartości funkcji korelacji dla $r \geqslant 0{,}75$ są małe, stąd też można je zaniedbać.

Znormalizowany błąd średniokwadratowy estymatora widma amplitudowego można więc zapisać równaniem

$$\varepsilon_M^2 = \frac{\varepsilon_o^2}{M} F(r). \tag{14}$$

Występująca w tym równaniu krotność uśredniania M jest oczywiście funkcją parametru r i wyraża się wzorem

$$M = \frac{L-(1-r)N}{rN}. \tag{15}$$



Rys. 7. Zależność względnej krotności uśredniania M_o od parametru r

Jest to funkcja silnie rosnąca ze zmniejszaniem się r (rys. 7), co wprawdzie zwiększa krotność uśredniania, ale — co równie istotne — zwiększa w analogicznym stopniu czas obliczeń. Jest oczywiste, że analiza zachodzących na siebie segmentów szeregu czasowego nie ma najmniejszego sensu, gdy stosuje się okno prostokątne (bądź inne, o zbliżonych własnościach funkcji $C(r)$, co ma miejsce dla okien o dużym współczynniku prostokątności, np. dla szczególnie chętnie stosowanego okna Binghama). Przypadek taki jest ewidentnym błędem, bowiem prowadzi tylko do zwiększenia czasu obliczeń, nie dając w zamian żadnego wzrostu stabilności uśrednianego estymatora. Przykładowo dla $r = 0{,}5$ i okna prostokątnego

$$\frac{F(r)}{M} = [1+2C(0{,}5)]0{,}5L\frac{1}{N} = \frac{L}{N}, \tag{16}$$

a więc uzyskany wzrost liczby stopni swobody jest analogiczny jak w przypadku analizy kolejnych, niezachodzących na siebie L/N sekwencji szeregu czasowego, podczas gdy czas obliczeń wzrasta dwukrotnie. Jest to zresztą intuicyjnie oczywiste, ponieważ nie jest możliwe uzyskanie więcej informacji o danym sygnale losowym (w tym przypadku przez kilkakrotną analizę tego samego fragmentu sygnału — rys. 8), niż jest jej w nim zawarte.

Wybór odpowiedniej racjonalnie uzasadnionej wartości parametru r oraz, co równie ważne, właściwego okna modyfikacyjnego nie jest więc obojętnym w analizie widmowej sygnałów losowych, zwłaszcza gdy dysponuje się ograniczoną długością badanego szeregu $x(i)$, bądź też ograniczonym czasem na dokonanie tej analizy. Jest zatem konieczny kom-