(który wynika wprost z zależności (4)) i z uprzednio policzonej wartości $E(-1, A)$ szukamy takiego x, aby spełniona była podwójna nierówność

$$AE(x-1, A) < M^* \leqslant AE(x, A).$$

Jeśli $M^* = AE(x, A)$, to przyjmujemy $n_1 = x$ i postępujemy dalej jak w punkcie 4. Jeśli zaś $M^* < AE(x, A)$, to stosujemy metodę aproksymacyjną w celu wyznaczenia n_1, $x-1 < n_1 < x$, i dalej postępujemy jak w wariancie dotyczącym ruchu o charakterze szczytowym.

Zauważmy, iż opisana metoda, chociaż prosta pod względem obliczeniowym, posiada wiele niedostatków. Przede wszystkim dokładność z jaką znajduje się niecałkowite n_1 jest niewielka. Po drugie A jest wyznaczane ze wzoru, który jest uznawany za dobre oszacowanie, ale dla strumienia szczytowego. Dlatego poprawność rezultatów uzyskanych w wyżej opisanym postępowaniu może budzić poważne wątpliwości, chociaż przeprowadzone obliczenia wskazywały na dużą zbieżność wyników z rzeczywistością [13, 18]. W następnym punkcie artykułu przytoczy się inną metodę rozwiązywania omawianego problemu.

6. ROZDZIELANIE STRUMIENIA WYGŁADZONEGO. METODA DOKŁADNA

Rozpatrzmy znowu sytuację pokazaną na rys. 1. Zauważmy ponadto, że układ równań Riordana dotyczy strumienia szczytowego. Dlatego też jest rzączą naturalną wykorzystanie go w teorii wiązki równoważnej do opisu sytuacji, w której $V > M$. Jeśli $V < M$, to właściwszym wydaje się zastosowanie równań (5) i (6) odnoszących się właśnie do strumienia wygładzonego. Przedstawione proste rozumowanie prowadzi do modyfikacji teorii wiązki równoważnej stanowiąc zarazem oczywiste uzupełnienie i rozwinięcie pomysłu Wilkinsona i Bretschneidera [2, 27] (opisana wyżej idea została zaproponowana przez Katza [14] i niezależnie wyprowadzona i rozwinięta przez autora artykułu).

Zatem metodologia postępowania w przypadku strumienia wygładzonego jest następująca. Przede wszystkim mając dane $M = M_1$ oraz $V = V_1$ należy z równań (5) i (6) wyznaczyć A i n_1, które teraz dla uniknięcia niejednoznaczności zapiszemy jako A' i n_1'. Należy przy tym pamiętać, że zachodzą następujące nierówności: $A' > M$ oraz $n_1' > M$ [18]. Następnie korzystamy ze wzorów (7)÷(10). Równocześnie musimy uważać, aby zostały spełnione następujące dwie nierówności

$$N_k \leqslant n_1' \quad \text{oraz} \quad M(k) \leqslant M.$$

Podobnie jak w przypadku układu Riordana układ równań (5) i (6) jest silnie nieliniowy. Zależność (6) można sprowadzić do następującej postaci

$$n_1' = \frac{M-V}{A-M} + M. \tag{13}$$

Formuła (5) cechuje się analogiczną złożonością obliczeniową jak wzór (2). Układ równań (5) i (13) można rozwiązywać iteracyjnie. Za punkt startowy dla A' można przyjąć na przykład wartość (patrz dodatek)

$$A' = \frac{(M-V)(3M+V+3)}{3V} + M. \tag{14}$$

Można też posłużyć się przybliżoną wartością A'. Oblicza się ją ze wzoru (patrz dodatek) słusznego dla $V \geqslant 1{,}5$

$$A' = M + \min\{x_k : x_k > 0, \quad k = 1, 2, 3\}. \tag{15}$$

Zależności pozwalające na wyznaczenie x_k, $k = 1, 2, 3$, zamieszczono w dodatku (wzory (11d)÷(15d)). Tamże wykazano, że chociaż jedno spośród x_1, x_2, x_3 jest dodatnie. Dowodzi to, że prawa strona równości (15) ma sens liczbowy.

Trudno jest określić teoretycznie dokładność przytoczonych wyżej wzorów (14) i (15). W celu wyrobienia poglądu o dokładności wyprowadzonych oszacowań przeprowadzono obliczenia numeryczne. Ich wyniki podsumowano w tabl. 1. Na podstawie materiału zawartego we wspomnianej tablicy można wnioskować, iż przybliżenie określone wzorami (15) i (11d)÷(15d) jest wystarczająco dokładne do obliczeń ręcznych i do szacunkowych obliczeń wykonywanych za pomocą komputera. W przypadku wystąpienia potrzeby uzyskania większej precyzji można go używać jako dobrego punktu startowego dla iteracyjnej metody rozwiązywania układu równań (5) i (13). W tym przypadku użytecznym okazuje się też mniej dokładna aproksymacja zawarta we wzorze (14). Formuła (14) jest o tyle wygodniejsza, iż wymaga znacznie mniejszego nakładu obliczeń niż oszacowanie określone wzorami (15) i (11d)÷(15d). W zakończeniu tego punktu warto nadmienić, iż w tablicy 1 umieszczono jedynie wybrane wyniki spośród 5 tysięcy przypadków przetestowanych za pomocą komputera.

7. WNIOSKI KOŃCOWE

Metoda wiązki równoważnej stanowi niewątpliwie atrakcyjne narzędzie praktyczne pozwalające na projektowanie i optymalizację struktury sieci wiązek międzycentralowych w sieci telefonicznej. Daje ona możliwość sprowadzenia strumienia zgłoszeń o charakterze niepoissonowskim do strumienia poissonowskiego. Dla tego ostatniego istnieje opracowana cała metodologia mająca na celu wyznaczanie przepustowości poszczególnych połączeń, a także charakterystyk strumieni po obsłużeniu ich przez centralę. Jak zostało wykazane w punkcie 3 strumień o charakterze niepoissonowskim często pojawia się w sieci połączeń międzycentralowych. Dokładność omawianej metody w przypadku strumienia o charakterze szczytowym rozważali między innymi Le Gall [17] i Holtzman [10]. Badania wykazały, że wyniki uzyskane przy pomocy sposobu wiązki równoważnej dobrze aproksymują rzeczywistość. Holtzman [10] zwrócił także uwagę na fakt, że jakość przybliżenia rośnie wraz ze wzrostem natężenia obsługiwanego strumienia. Jest to pożądana tendencja potwierdzająca zasadność stosowania metody wiązki równoważnej w rozważaniach natury ekonomicznej, jak chociażby przy modelach minimalizujących koszt sieci telefonicznej. Rola opisywanego tu aparatu na pewno będzie wzrastać wraz z unowocześnianiem sieci telekomunikacyjnych i z oferowaniem przez nie usług nowych rodzajów. Dotyczy to przede wszystkim sieci zintegrowanych pozwalających także na transmisję danych. Z badań Fuchsa i Jacksona [7] oraz Jacksona i Stubbsa [11] wynika, że jedynie w niektórych przypadkach strumienie ruchu generowane przez terminale można uważać za strumienie poissonowskie. Zatem w sieci zintegrowanej nie tylko ruch krążący w sieci ale i strumienie zgłoszeń wchodzące do sieci trzeba będzie sprowadzać do strumieni poissonowskich przy pomocy metody wiązki równoważnej.

Tablica 1

Błąd względny przybliżeń parametru A

V	$z = 0{,}99$			$z = 0{,}90$			$z = 0{,}80$			$z = 0{,}50$		
	A_1^*	A_2^{**}	δ^{***}	A_1	A_2	δ	A_1	A_2	δ	A_1	A_2	δ
2	2,026	2,057	1,087	2,294	2,654	3,500	2,678	3,542	0,821	5,000	9,667	22,139
5	5,061	5,128	0,850	5,683	6,469	4,064	6,560	8,479	3,580	11,600	22,670	6,254
7	7,084	7,176	0,819	7,934	9,012	4,000	9,125	11,770	3,884	15,900	31,330	3,216
10	10,120	10,250	0,989	11,300	12,830	3,428	12,960	16,710	36,709	22,270	44,330	1,583
20	20,230	20,480	1,327	22,500	25,540	12,424	25,660	33,170	26,322	43,200	87,670	79,895
30	30,330	30,720	0,808	33,680	38,260	10,349	38,320	49,630	21,815	63,920	131,000	65,264
40	40,440	40,960	0,829	44,850	50,980	9,047	50,950	66,080	18,921	84,520	174,300	56,397
50	50,540	51,190	0,594	56,010	63,690	8,117	63,570	82,540	17,057	105,000	217,700	49,918
60	60,650	61,430	0,643	67,160	76,410	7,348	76,170	99,000	15,547	125,500	261,000	45,765
70	70,750	71,670	0,537	78,320	89,120	6,882	88,770	115,500	14,424	146,000	304,300	42,799
80	80,860	81,900	0,582	89,470	101,800	6,459	101,400	131,900	13,921	166,400	347,700	39,899
90	90,960	92,140	0,506	100,600	114,600	5,931	113,900	148,400	12,374	186,800	391,000	37,688
100	101,110	102,400	0,891	111,800	127,300	6,138	126,500	164,800	11,937	207,100	434,300	35,419

* A_1 jest wyznaczane ze wzorów (11d) ÷ (15d) i (15)

** A_2 jest wyznaczane ze wzoru (14)

*** $\delta = \frac{|A_1 - A|}{A} \cdot 10^{+3}$ — błąd względny dla A_1 wyrażony w promilach (do wyznaczania wartości dokładnej A natężenia strumienia ruchu wykorzystano program opracowany przez dra T. Stachowiaka)

W punkcie 6 artykułu przedstawiono dokładną metodę postępowania w przypadku strumienia o charakterze wygładzonym. Idea, na której oparto rozumowanie została opracowana przez autora niezależnie od wcześniejszych wyników otrzymanych przez Katza [14]. Uzyskane wzory dokładne tworzą silnie nieliniowy układ dwóch równań z dwoma niewiadomymi. Ponadto oszacowano jeden z pierwiastków wspomnianego układu równań. Z przeprowadzonych obliczeń numerycznych dla 5 tysięcy przypadków wynika, iż wspomniany pierwiastek jest aproksymowany za pomocą wzorów przybliżonych z dokładnością nie mniejszą niż 3 procent. Na tej podstawie należy sądzić, iż otrzymane wyniki będą użyteczne w praktyce telekomunikacyjnej. Potwierdzają to rezultaty obliczeń zamieszczone w pracy [1].

Dodatek

Zajmiemy się teraz wyprowadzeniem przybliżonych wzorów pozwalających na wyznaczenie parametrów wiązki zastępczej w przypadku strumienia wygładzonego. Wartość średnią i wariancję natężenia wspomnianego strumienia zapiszemy jako, odpowiednio, M i V. Przez A i n oznaczymy wartość średnią natężenia zastępczego strumienia poissonowskiego oraz liczbę łączy w wiązce zastępczej. Niech M^* i V^* będą odpowiednimi parametrami strumienia ruchu przelewowego. Z dobrym przybliżeniem [25, 26] można napisać [22]

$$A = V^* + \frac{3V^*}{M^*}\left(\frac{V^*}{M^*} - 1\right), \tag{1d}$$

pamiętając zarazem, iż zachodzi następujący wzór dokładny [16, 20, 25, 26, 27]

$$V^* = M^*\left(1 - M^* + \frac{A}{n+1-A+M^*}\right). \tag{2d}$$

Korzystając z (2d) wzór (1d) daje się przekształcić do następującej postaci

$$A = \left(\frac{n+M^*+1}{n+1-A+M^*} - M^*\right)\left(\frac{3A}{n+1-A+M^*} - 2M^*\right). \tag{3d}$$

Wiemy także, iż [3, 4, 6, 13, 18]

$$M^* = A - M, \tag{4d}$$

$$n - M = \frac{M-V}{A-M}. \tag{5d}$$

Po uwzględnieniu zależności (4d) i (5d) po dokonaniu prostych przekształceń natury algebraicznej z równości (3d) otrzymujemy

$$[(A-M)+M][(A-M)+(M-V)]^2 =$$
$$= (A-M)[(A-M)+M+2V][(V+1)(A-M)+(M-V)]. \tag{6d}$$

Wprowadzimy teraz zmienną pomocniczą $x = A - M$. Wówczas (6d) daje się sprowadzić do następującej postaci

$$x^3V + x^2(MV + 2V^2 + 3V - M) + x(M-V)(3V-2M) - (M-V)^2M = 0. \tag{7d}$$

Jest oczywiste, iż zależność (7d) można potraktować jako równanie. Jego pierwiastek posłuży do oszacowania parametru A strumienia zastępczego, który podany na wiązkę równoważną powinien wytworzyć wygładzony strumień ruchu o momentach natężenia wynoszących, odpowiednio, M i V. W myśl rozważań przeprowadzonych w poprzednich punktach pracy i z uwagi na wyniki opisane w [18] szukamy takiego pierwiastka, który jest rzeczywisty i dodatni. Z teorii równań trzeciego stopnia wynika, że pierwiastki równania (7d) wyrażają się za pomocą funkcji elementarnych jako współczynników, a więc w tym przypadku są uzależnione od M i V. Ponadto rozpatrywane równanie musi mieć chociaż jeden pierwiastek rzeczywisty.

Żmudne przekształcenia algebraiczne pozwalają przedstawić wyróżnik równania (7d) w postaci

$$\Delta = \frac{1}{3}\left(\frac{M-V}{6V}\right)^2 R(M, V), \tag{8d}$$

przy czym

$$R(M, V) = -M^4(4V+1)-2M^3(12V^2+14V+3)-M^2(48V^3-80V^2+6V+9)- \\ -2MV(16V^3+120V^2-36V-27)-9V^2(4V^2+24V+9). \tag{9d}$$

Zarówno wzory definiujące pierwiastki równania sześciennego jak i liczba pierwiastków rzeczywistych tegoż równania zależą od znaku wyróżnika. Jak wynika z formuły (8d) o znaku Δ decyduje znak wyrażenia $R(M, V)$. Stosując metody rachunku różniczkowego można wykazać, iż dla $V \geqslant 1{,}031$ wielomian $48V^3-80V^2+6V+9$ jest rosnącą funkcją zmiennej V; $V = 1{,}5$ jest pierwiastkiem wspomnianego wielomianu. Ponieważ $R(M, V)$ odnosi się do strumienia ruchu o charakterze wygładzonym, więc $M > V$. Potraktujemy $R(M, V)$ jako wielomian względem zmiennej M. Wówczas dla każdego $V \geqslant 1{,}5$ współczynniki omawianego wielomianu są równe zeru, bądź są ujemne. Stąd wniosek, iż dla $M > V \geqslant 1{,}5$ zachodzi nierówność $R(M, V) < 0$, a więc i $\Delta < 0$. Zatem dla $M > V \geqslant 1{,}5$ równanie (7d) ma trzy pierwiastki rzeczywiste.

Przystąpimy teraz do określenia znaku pierwiastków. Oczywiście założymy, iż $M > V \geqslant 1{,}5$. Dla uproszczenia dalszych zapisów lewą stronę wzoru (7d) oznaczymy symbolem $F(x)$. Mamy więc $F(0) = -(M-V)^2M < 0$. Żeby wykazać, iż istnieje chociaż jeden pierwiastek dodatni, wystarczy udowodnić, że istnieje takie x_0, iż dla każdego $x > x_0$ funkcja F jest rosnąca. W tym celu obliczamy pierwszą pochodną funkcji F

$$\frac{dF(x)}{dx} = 3x^2V+2x(MV+2V^2+3V-M)+(M-V)(3V-2M). \tag{10d}$$

Wyróżnik powyższej formy kwadratowej oznaczymy przez $H(M)$ i potraktujemy jako funkcję zmiennej M. Przybiera on postać

$$H(M) = 4[M^2(V^2+4V+1)+MV(4V^2-13V-6)+V^2(4V^2+21V+9)].$$

Zatem znowu otrzymaliśmy formę kwadratową, tym razem względem M. Wyróżnik Δ_H formy kwadratowej $H(M)/4$ wyraża się jako

$$\Delta_H = -3V^3(84V^2+89V+24)$$

i jest w rozważanym przedziale stale ujemny. Zatem łatwo stwierdzić, iż $H(M) > 0$.

W związku z tym forma kwadratowa występująca we wzorze (10d) ma dwa pierwiastki rzeczywiste.

Ustalając M i uzmieniając V wyróżnik wspomnianej przed chwilą formy kwadratowej można zapisać w następujący sposób

$$h(V) = 4V^4+V^3(4M+21)+V^2(M^2-13M+9)+2VM(2M-3)+M^2.$$

Wobec tego

$$\frac{dh(V)}{dV} = 16V^3+3V^2(4M+21)+2V(M^2-13M+9)+2M(2M-3),$$

a ponadto, ponieważ $M > V \geqslant 1{,}5$, więc $3V^2(4M+21) \geqslant 3V(4M+21)$. Zatem słuszne jest następujące oszacowanie

$$\frac{dh(V)}{dV} \geqslant 16V^3+V(2M^2-14M+81)+2M(2M-3) > 0.$$

Funkcja H jest więc w rozpatrywanym przedziale stale rosnąca. Mamy zatem $h(V) < h(M)$. Wobec tego większy z pierwiastków formy kwadratowej występującej w równości (10d) można oszacować od góry za pomocą wyrażenia

$$r(M, V) = \frac{(M-V)(3M+V+3)}{3V} > 0.$$

W związku z powyższym, dla każdego $x > r(M, V)$ funkcja F jest stale rosnąca. Zatem istnieje takie $x > 0$, iż $F(x) = 0$.

Korzystając z teorii równań sześciennych określimy jeszcze pierwiastki równania (7d)

$$x_k = 2\sqrt{a_1^2-a_2}\cos\frac{\varphi+2(k-1)\pi}{3} - a_1, \quad k = 1, 2, 3, \tag{11d}$$

przy czym

$$\varphi = \arccos\frac{3a_1a_2+a_3-2a_1^3}{2\sqrt{(a_1^2-a_2)^3}}. \tag{12d}$$

W powyższych wzorach użyto następujących oznaczeń

$$a_1 = \frac{MV+2V^2+3V-M}{3V}, \tag{13d}$$

$$a_2 = \frac{(M-V)(3V-2M)}{3V}, \tag{14d}$$

$$a_3 = \frac{(M-V)^2M}{V}. \tag{15d}$$

BIBLIOGRAFIA

1. A. Bächle, *On the calculation of full available groups with offered smoothed traffic*, 7th I.T.C., Stockholm, 1973, Doc. 223 (preprint).
2. G. Bretschneider, *Die Berechnung von Leitungsgruppen für überfliessenden Verkehr in Fernsprechwählangen*, N.T.Z., Vol. 9, 1956, No 11, s. 533—540.
3. G. Bretschneider, *Extension of the equivalent random method to smooth traffics*, 7th I.T.C., Stockholm, 1973, Doc. 411 (preprint).
4. J. Chastang, *Contribution to studies of overflow traffic*, Electrical Comm. I.T.T., Vol. 38, 1963, No 1, s. 120—129.
5. R. Fortet, B. Canceill, *Probabilités de pert en sélection conjuguée*, Teleteknik, Vol. 1, 1957, No 1, s. 41—55.
6. A. A. Federicks, *Congestion in blocking systems — a simple approximation technique*, B.S.T.J., Vol. 59, 1980, No 6, s. 805—827.
7. E. Fuchs, P. E. Jackson, *Estimates of distributions of random variables for certain computer communication traffic model*, Comm. A.C.M., Vol. 13, Dec. 1970, s. 752—757.
8. B. V. Gnedenko, *The theory of probability*, Mir, Moscow 1969.
9. B. W. Gniedenko, A. N. Kołmogorow, *Rozkłady graniczne sum zmiennych losowych niezależnych*, PWN, Warszawa 1957.
10. J. M. Holtzman, *The accuracy of the equivalent random method with renewal inputs*, B.S.T.J., Vol. 52, 1973, No 9, s. 1673—1679.
11. P. E. Jackson, C. D. Stubbs, *A study of multiaccess computer communications*, Proc. A.F.I.P.S., 1969, S.J.C.C., Vol. 34, s. 491—504.
12. D. L. Jagerman, *Some properties of the Erlang loss function*, B.S.T.J., Vol. 53, 1974, No. 3, s. 525—551.
13. J. Kacprzyk i in., *Praktyczna metoda wyznaczania kosztu sieci telefonicznej o strukturze hierarchicznej*, Archiwum Elektrotechn. (w druku).
14. S. Katz, *Statistical performance analysis of a switched communications network*, 5th I.T.C., New York 1967, s. 566—575.
15. L. Kosten, *Über Sperrungswahrscheinlichkeiten bei Staffelschaltungen*, E.N.T., Vol. 14, 1937, No 1, s. 5—12.
16. J. Kruithof, *Theoretical and practical aspects of telephone traffic*, Electrical Comm. I.T.T., Vol. 38, 1963, No 2, s. 252—263.
17. P. Le Gall, *Le trafic de débordement*, Ann. Télécommun., Vol. 16, 1961, No. 9—10, s. 226—238.
18. T. Nowicki, W. Stańczak, *Szacowanie kosztu sieci telefonicznej o strukturze hierarchicznej. Podstawy teoretyczne*, Rozprawy Elektrotechn. (w druku).
19. R. M. Potter, *The equivalent non random method and restrictions imposed on renewal overflow systems by the specification of a finite number of overflow traffic moments*, 9th I.T.C., Torremolinos 1979 (preprint).
20. D. A. Rajkow, *O razłożenii zakonow Gaussa i Puassona*, Izd. A.N.S.S.S.R., seria matem., 1938.
21. K. Rahko, *Dimensioning of traffic routes according to the EERT — method and correspondings methods*, 8th I.T.C., Melbourne 1976, Doc. 143 (preprint).
22. Y. Rapp, *Planning of junction network in a multi-exchange area. I. General principles*, Ericsson Tech., Vol. 20, 1964, No 1, s. 77—130.
23. E. Szybicki, *Some numerical methods used for telephone traffic theory applications*, Ericsson Tech., Vol. 20., 1964, No 2, s. 203—230.
24. E. Szybicki, *Numerical methods in the use of computers for telephone traffic theory applications*, Ericsson Tech., Vol. 23, 1967, No 4, s. 439—475.
25. B. Wallström, *Congestion studies in telephone systems with overflow facilities*, Ericsson Tech., Vol. 22, 1966, No 3, s. 187—351.
26. B. Wallström, *Methods for optimizing alternative routing networks*, Ericsson Tech., Vol. 25, 1969, No 1, s. 3—28.
27. R. I. Wilkinson, *Theories for toll traffic engineering in the U.S.A.*, B.S.T.J., Vol. 35, 1956, No 2, s. 421—514.

W. STAŃCZAK

ON EQUIVALENT RANDOM METHOD

Summary

The idea of the equivalent random method consists in substituting the non-Poisson stream for the Poisson one. The latter is more convenient from the designer's point of view. That follows from the fact that the methodology for designing the network with Poisson streams is known. In the case of non-Poisson streams we usually apply the equivalent random method. It allows the use of the methodology mentioned above for non-Poisson streams also. That shows the great importance of the equivalent random method. In the paper the ideas and formulae used in this method are described. They usually lead to systems of highly nonlinear equations. Till now there have been known approximate formulae, which allow to solve fast that system of equations in the case of the peaked stream only. They were derived by Rapp [22]. The non-existence of any similar formulae for the smoothed traffic has implied the great troubles of numerical nature. In the paper such approximate formulae for smoothes traffic are derived.

W. STAŃCZAK

THÉORIE ÉQUIVALENT DE RÉFERENCE DE WILKINSON

Rèsumè

La conception de l'équivalent de rèference de Wilkinson consiste dans le remplacement d'un flot de trafic au caractère de Poisson par un flot non de Poisson. Ce dernier est autant plus avantageux, qu'i existe toute une mèthodologie d'ètablissement d'un projet du rèseau tenant compte du caractère de Poisson de la charge. Dans le cas d'une charge non-Poisson on se sert d'habitude de la mèthode E. R. de Wilkinson. Cela permet d'appliquer la mèthode déjà èlaborèe aux flot de trafic du caractère non-Poisson. Cela prouve de l'importance de la mèthode E. R. Dans l'article on a prèsentè l'idèe et les formules appliquèes dans la mèthode en question. On obtient gènèralement comme rèsultat un système d'èquations fortement non linèaires. Jusqu'alors on ne connaissait que les formules approximatives n'assurant une rapide rèsolution du système d'èquations que dans le cas d'un trafic de dèbordement. C'est Rapp qui les a proposées [22]. Le manque de dèpendances analogues pour le trafic règularisè ètait la cause des difficultés dans le calcul. Dans l'article on a déduit des formules approximatives tenant justement compte du cas du trafic règularisè.

W. STAŃCZAK

METHODE DES VERALLGEMEINERTEN STREUWERTVERFAHRENS

Zusammenfassung

Die Idee eines verallgemeinerten Bündels beruht auf der Ersetzung des Angebotverkehrs, das kein Poissonverkehr ist, durch den angebotenen Poissonverkehr. Dieser ist insofern bequem, daß eine ganze Projektierungsmethodologie für diejenigen Netze besteht, die die Poissener Belastungscharakteristik berücksichtigen. Im Falle von nicht-Poissner Belastungen wird meistens gerade das verallgemeinerte Streuwertverfahren herangezogen. Dies gestattet, die bereits bearbeiteten Verfahren ebenfalls für den Angebotverkehr nicht-Poissner Art anzuwenden, was gleichzeitig den Wert der Methode des verallgemeinerten Streuwertverfahrens bezeugt. Die im Aufsatz genannten Ideen und Formeln wurden bei der erwogenen Methode angewandt. Sie führen meist zu stark unlinearen Gleichungssystemen. Bisher waren nur angenäherte Gleichungen bekannt, die eine schnelle Lösung der erwähnten Gleichungssysteme nur im Falle des überfließenden Verkehrs gestatteten. Sie wurden von Rapp [22] vorgeschlagen. Das Fehlen analoger

Abhängigkeiten für den geglätteten Verkehr verursachte wesentliche Berechnungsschwierigkeiten. Bei vorliegender Bearbeitung wurden angenäherte Gleichungen abgeleitet, die gerade den Fall geglätteten Verkehrs berücksichtigen.

В. СТАНЬЧАК

О МЕТОДЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ЗАМЕН

Р е з ю м е

Идея метода эквивалентных замен заключается в замене непуассновского потока пуассоновским потоком. Последний поток удобен потому, что существует методология проектирования сети с пуассоновской нагрузкой. Когда нагрузка непуассоновская, обыкновенно пользуемся методом эквивалентных замен, что дает возможность употреблять уже составленый метод также для непуассоновских потоков вызовов. Это подтвержает значимость метода эквивалентных замен. Приведены идеи и формулы, которые применяются в обсужденном методе. Они обыкновенно ведут к системе нелинейных уравнений. До сих пор существовали формулы разрешающие эти системы только для пиковой нагрузки. Они предложены Раппом [22]. Отсутствие аналогичных формул для гладкого потока было причиной многих трудностей в вычислениях. В статье выведены приблизительные формулы именно для случая гладкого потока.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1985, 31, z. 1, ss. 211-223

621.376.32

Wpływ współczynnika modulacji na prawdopodobieństwo błędnej decyzji przy optymalnym odbiorze sygnałów binarnej modulacji częstotliwości

TADEUSZ WYSOCKI JR (BYDGOSZCZ)

Instytut Telekomunikacji Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 2.6.1983

Niniejszy artykuł jest poświęcony szacowaniu prawdopodobieństwa błędnej decyzji przy optymalnym odbiorze sygnałów binarnej *FM*. W opracowaniu przeprowadzono szczegółowe rozważania dotyczące przypadku, gdy impulsy sygnału zmodulowanego odpowiadające różnym impulsom w sygnale modulującym nie muszą być względem siebie ortogonalne. Podano ogólny algorytm optymalnego odbioru sygnałów binarnej *FM* oraz zależności umożliwiające oszacowanie górnej granicy prawdopodobieństwa błędnej decyzji w zależności od przyjętego współczynnika modulacji i częstotliwości środkowej sygnału zmodulowanego. W artykule zamieszczono wykresy górnej granicy prawdopodobieństwa błędnej decyzji w funkcji stosunku sygnału do szumu, dla różnych współczynników modulacji.

1. WPROWADZENIE

Binarna modulacja częstotliwości [1, 2, 4] jest szeroko stosowana przy przesyłaniu danych z małymi i średnimi szybkościami. Dla celów transmisji danych stosuje się sygnały *FM* o małych współczynnikach modulacji nie będących liczbami całkowitymi.

W literaturze (np. [3, 4]) problem wyznaczania prawdopodobieństwa błędnej decyzji przy odbiorze optymalnym sygnałów binarnej *FM* jest opracowany dość szczegółowo. Jednakże wszystkie te rozważania dotyczą przypadku, gdy impulsy sygnału zmodulowanego, odpowiadające różnym impulsom sygnału modulującego, tj. 0 lub 1, są względem siebie orotogonalne, lub gdy w sygnale zmodulowanym nie jest zachowana ciągłość fazy.

W niniejszym opracowaniu podamy oszacowanie prawdopodobieństwa błędnej decyzji przy zastosowaniu optymalnej reguły odbioru [3, 4], w przypadku stosowania binarnej modulacji częstotliwości z ciągłą fazą, zależne od przyjętego współczynnika modulacji m, równego [1, 2]

$$m = \frac{f_A - f_Z}{v_m}, \tag{1}$$

gdzie:

$f_A = f_o + \Delta F$ — górna częstotliwość znamienna,
$f_Z = f_o - \Delta F$ — dolna częstotliwość znamienna,
ΔF — dewiacja częstotliwości,
f_o — częstotliwość środkowa[1)],
v_m — szybkość modulacji.

[1)] W literaturze spotyka się również termin częstotliwość nośna.

2. OGÓLNE WŁAŚCIWOŚCI SYGNAŁU BINARNEJ *FM*

Sygnał $X(t)$ binarnej *FM* możemy opisać sumą

$$X(t) = \sum_n g^{(n)}(t-nT); \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

w której $g^{(i)}(t-nT)$ reprezentuje i-ty impuls w ciągu impulsów wyjściowych modulatora. Funkcje $g^{(i)}(t)$ są elementami przestrzeni G; $G = \{g_k(t), k = 1, 2, \ldots\}$, przy czym

$$g^{(i)}(t) = \begin{cases} g_A^{(i)}(t) \text{ — jeżeli sygnał modulujący jest równy 0,} \\ g_Z^{(i)}(t) \text{ — jeżeli sygnał modulujący jest równy 1,} \end{cases} \tag{3}$$

gdzie:

$$g_A^{(i)}(t) = A\cos[2\pi(f_o+\Delta F)t+\varphi_A^{(i)}]h(t), \tag{4}$$

$$g_Z^{(i)}(t) = A\cos[2\pi(f_o-\Delta F)t+\varphi_Z^{(i)}]h(t), \tag{5}$$

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad 0 \leqslant t < T, \\ 0 & \text{gdy} \quad t < 0 \text{ lub } t \geqslant T, \end{cases} \tag{6}$$

$$T = \frac{1}{\nu_m} \text{ — czas trwania pojedynczego impulsu,} \tag{7}$$

A — amplituda sygnału *FM*,

$\varphi_A^{(i)}$ — faza początkowa impulsu $g_A^{(i)}(t)$, element zbioru

$$\Phi_A = \{\varphi_A^{(1)}, \varphi_A^{(2)}, \ldots, \varphi_A^{(i)}, \ldots\},$$

$\varphi_Z^{(i)}$ — faza początkowa impulsu $g_Z^{(i)}(t)$, element zbioru

$$\Phi_Z = \{\varphi_Z^{(1)}, \varphi_Z^{(2)}, \ldots, \varphi_Z^{(i)}, \ldots\}.$$

Ponieważ funkcja cosinus jest funkcją okresową o okresie 2π, możemy więc zapisać

$$\cos(\varphi) = \cos(\bar{\varphi}), \tag{8}$$

gdzie:

$$\bar{\varphi} \overset{\text{def}}{=} \varphi - 2\pi\varepsilon\left(\frac{\varphi}{2\pi}\right), \tag{9}$$

Σ — symbol funkcji entier.

Wielkość $\bar{\varphi}$ będziemy, w dalszej części opracowania, nazywać wartością istotną fazy φ.

Na podstawie (8) i (9) wyrażenia (4) i (5) możemy, bez zmiany ogólności, zapisać w postaci:

$$g_A^{(i)}(t) = A\cos[2\pi(f_o+\Delta F)t+\bar{\varphi}_A^{(i)}]h(t), \tag{10}$$

$$g_Z^{(i)}(t) = A\cos[2\pi(f_o-\Delta F)t+\bar{\varphi}_A^{(i)}]h(t), \tag{11}$$

gdzie $\bar{\varphi}_A^{(i)}$ oraz $\bar{\varphi}_Z^{(i)}$ są, odpowiednio, elementami zbiorów $\bar{\Phi}_A$ oraz $\bar{\Phi}_Z$.

W dalszych rozważaniach będziemy się zajmować tylko przypadkiem, gdy przestrzeń G impulsów wyjściowych modulatora jest przestrzenią skończoną. Ponieważ zakładamy, iż w sygnale zmodulowanym zachowana jest ciągłość fazy, zatem faza początkowa n-tego impulsu w ciągu impulsów wyjściowych modulatora jest równa fazie początkowej impulsu

$(n-1)$-ego, zwiększonej o przesunięcie fazowe wnoszone przez ten właśnie $(n-1)$-y impuls.

Niech impuls o postaci $g_Z^{(i)}(t)$ wprowadza przesunięcie fazowe φ_1. Jest ono równe

$$\varphi_1 = 2\pi(f_o - \Delta F)T = 2n_1\pi + \bar{\varphi}_1; \quad n_1 = 0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Z zależności (1) wynika

$$\Delta F = \frac{m}{2T}. \tag{13}$$

Uwzględniając (10) i (13), przesunięcie fazowe φ_2, wnoszone przez impuls $g_A^{(i)}(t)$, możemy przedstawić w postaci

$$\varphi_2 = 2n_1\pi + \bar{\varphi}_1 + 2\pi m = 2\pi(n_1 + m + r), \tag{14}$$

gdzie

$$r = \frac{\bar{\varphi}_1}{2\pi}. \tag{15}$$

Z zależności (12), (14), (15) wynika, że jeżeli współczynnik modulacji m oraz wielkość r są liczbami wymiernymi, to zbiory $\bar{\Phi}_A$ oraz $\bar{\Phi}_Z$, a więc i przestrzeń G, są skończone. Istnieje bowiem wówczas taka liczba naturalna n_{max}, że po n_{max} krokach sumaryczne przesunięcie fazowe wnoszone przez n_{max} impulsów będzie równe całkowitej wielokrotności 2π, a więc jego wartość istotna (patrz (9)) będzie równa zeru.

Binarna modulacja częstotliwości może być, w ogólnym przypadku, traktowana jako czteroparametrowa modulacja liniowa [3]. Każdy z elementów przestrzeni G możemy bowiem przedstawić jako liniową kombinację następujących funkcji:

$$\eta_1(t) = \cos[2\pi(f_o - \Delta F)t]h(t), \tag{16}$$

$$\eta_2(t) = \cos[2\pi(f_o + \Delta F)t]h(t), \tag{17}$$

$$\eta_3(t) = \sin[2\pi(f_o - \Delta F)t]h(t), \tag{18}$$

$$\eta_4(t) = \sin[2\pi(f_o + \Delta F)t]h(t). \tag{19}$$

Impulsy $g_A^{(i)}(t)$ i $g_Z^{(i)}(t)$ są równe:

$$g_A^{(i)}(t) = A\cos(\bar{\varphi}_A^{(i)})\eta_2(t) - A\sin(\bar{\varphi}_A^{(i)})\eta_4(t), \tag{20}$$

$$g_Z^{(i)}(t) = A\cos(\bar{\varphi}_Z^{(i)})\eta_1(t) - A\sin(\bar{\varphi}_Z^{(i)})\eta_3(t). \tag{21}$$

Jak łatwo można sprawdzić, funkcje η_1, η_2, η_3, η_4 są liniowo niezależne. Przestrzeń G impulsów wyjściowych modulatora można więc odwzorować w zbiór A wektorów czterowymiarowych $\underline{a_k}$[2], takich że

$$\bigwedge_{g_k(t)\in G} \overset{!}{\bigvee_{\underline{a_k}\in A}} g_k(t) = \underline{a_k}\eta(t)], \tag{22}$$

$$k = 1, 2, \ldots, N,$$

gdzie:

N — moc przestrzeni G,

[2] W niniejszym opracowaniu symbolem — będziemy oznaczać wektor wierszowy, a symbolem] wektor kolumnowy.

$$\underline{a_k} = [a_{k,1}, a_{k,2}, a_{k,3}, a_{k,4}], \tag{23}$$

$$\underline{\eta(t)} = [\eta_1(t), \eta_2(t), \eta_3(t), \eta_4(t)], \tag{24}$$

$$\underline{\eta(t)} = \eta(t)]^T.^{3)} \tag{25}$$

3. OPTYMALNA REGUŁA ODBIORU SYGNAŁÓW BINARNEJ *FM*

Z rozważań przeprowadzonych w poprzednim rozdziale wynika, że przestrzeń G impulsów wyjściowych modulatora dzieli się na dwie rozłączne podprzestrzenie G_0 i G_1. Elementy podprzestrzeni G_0 pojawiają się na wyjściu modulatora, jeżeli na jego wejściu pojawia się zero, a elementy podprzestrzeni G_1, jeżeli na wejściu modulatora pojawia się jedynka. Zachodzi przy tym:

$$G_0 \cup G_1 = G, \tag{26}$$

$$G_0 \cap G_1 = \emptyset, \tag{27}$$

gdzie $\emptyset$ oznacza zbiór pusty.

Podprzestrzenie G_0 i G_1 zawierają funkcje opisane zależnościami (10) i (11), przy czym podprzestrzeń G_0 zawiera tylko funkcje opisane zależnością (10), a podprzestrzeń G_1 — funkcje opisane zależnością (11).

Z zależności (22), (26), (27) wynika, iż zbiór A dzieli się na dwa rozłączne podzbiory A_o i A_1, przy czym spełnione są zależności:

$$\bigwedge_{\underline{a_k} \in A_o} \underline{a_k}\eta(t)] \in G_0, \tag{28}$$

$$\bigwedge_{\underline{a_l} \in A_1} \underline{a_l}\eta(t)] \in G_1. \tag{29}$$

Na mocy rozważań przeprowadzonych w niniejszym rozdziale, przy założeniach, że: szum w kanale jest addytywnym, białym szumem gaussowskim o gęstości widmowej S_b; prawdopodobieństwa pojawienia się na wejściu modulatora jedynki i pojawienia się zera są sobie równe i wynoszą $\frac{1}{2}$; funkcja straty [3, 7, 8] jest symetryczna, a przebiegi na wyjściu kanału są obserwowane w sposób ciągły w czasie, optymalna, przy odebranym impulsie $y^{(n)}(t)$, jest następująca reguła decyzyjna [3, 8]:

— nadano impuls odpowiadający zeru, jeżeli

$$\min_{g_m(t) \in G_0} d[y^{(n)}(t), g_m(t)] \leqslant \min_{g_l(t) \in G_1} d[y^{(n)}(t), g_l(t)], \tag{30}$$

— nadano impuls odpowiadający jedynce, jeżeli

$$\min_{g_l(t) \in G_1} d[y^{(n)}(t), g_l(t)] < \min_{g_m(t) \in G_0} d[y^{(n)}(t), g_m(t)], \tag{31}$$

gdzie

$$d[y^{(n)}(t), g_i(t)] = \sqrt{\int_0^T [y^{(n)}(t) - g_i(t)]^2 dt} \tag{32}$$

---

3) T oznacza operację transpozycji macierzy.

oznacza odległość pomiędzy odebranym impulsem $y^{(n)}(t)$ a impulsem odniesienia $g_i(t)$, rozumianą w sensie przestrzeni L^2.

Kwadrat odległości $d[y^{(n)}(t), g_i(t)]$ jest równy

$$d^2[y^{(n)}(t), g_i(t)] = \int_0^T [y^{(n)}(t)]^2 dt + \int_0^T [g_i(t)]^2 dt - 2\int_0^T y^{(n)}(t) g_i(t) dt. \tag{33}$$

Dla binarnej *FM* zachodzi zależność

$$\int_0^T [g_i(t)]^2 dt = E_i \simeq E. \tag{34}$$

Oznacza to, iż energie wszystkich impulsów wyjściowych modulatora są, w przybliżeniu, równe.

Z zależności (34) wynika, że w zależności (33) od określonego impulsu odniesienia $g_i(t)$ zależy tylko ostatni składnik, zależny od iloczynu skalarnego funkcji $y^{(n)}(t)$ i $g_i(t)$, rozumianego w sensie przestrzeni L^2 [6]. Iloczyn skalarny $(y^{(n)}(t), g_i(t))$ jest równy

$$(y^{(n)}(t), g_i(t)) = \int_0^T y^{(n)}(t) g_i(t) dt. \tag{35}$$

Uwzględniając w zależności (35) zależność (22), otrzymujemy

$$(y^{(n)}(t), g_k(t)) = \sum_{j=1}^{4} a_{k,j} \int_0^T y^{(n)}(t) \eta_j(t) dt = \underline{a_k} \underline{\mu^{(n)}}], \tag{36}$$

gdzie:

$a_{k,j}$ — j-ta współrzędna wektora $\underline{a_k}$; $j = 1, 2, 3, 4$,

$$\underline{\mu^{(n)}} = [\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \mu_3^{(n)}, \mu_4^{(n)}], \tag{37}$$

$$\mu_j^{(n)} = \int_0^T y^{(n)}(t) \eta_j(t) dt = (y^{(n)}(t), \eta_j(t)) \tag{38}$$

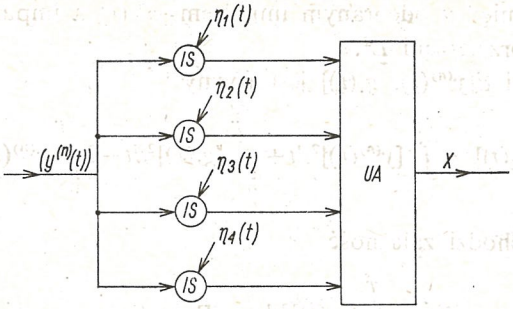
— iloczyn skalarny funkcji $y^{(n)}(t)$ i $\eta_j(t)$.

Z zależności (33) do (38) wynika, iż regułę decyzyjną (30), (31) można zapisać w następującej postaci:

— nadano impuls odpowiadający zeru, jeżeli

$$\max_{\underline{a_k} \in A_0} \underline{a_k} \underline{\mu^{(n)}}] \geqslant \max_{\underline{a_l} \in A_1} \underline{a_l} \underline{\mu^{(n)}}], \tag{39}$$

— nadano impuls odpowiadający jedynce, jeżeli (39) nie zachodzi. Schemat blokowy układu realizującego optymalną regułę odbioru, opartą na nierówności (39), przedstawiony jest na rys. 1. W blokach oznaczonych *IS* realizujących iloczyn skalarny, wyznaczane są współrzędne wektora $\underline{\mu^{(n)}}]$, natomiast w bloku *UA* dokonywane jest sprawdzenie, czy nierówność (39) jest spełniona.



Rys. 1. Schemat blokowy optymalnego odbiornika binarnej *FM*
IS — człon realizujący iloczyn skalarny, *UA* — układ analizujący, $X \in \{0, 1\}$

4. PRAWDOPODOBIEŃSTWO BŁĘDNEJ DECYZJI PRZY ODBIORZE OPTYMALNYM

Prawdopodobieństwo błędnej decyzji P_e jest, w przypadku decyzji binarnych, równe

$$P_e = p_1 \alpha_{1/0} + p_0 \alpha_{0/1}, \tag{40}$$

gdzie:

p_1 — prawdopodobieństwo nadania impulsu odpowiadającego jedynce,
p_0 — prawdopodobieństwo nadania impulsu odpowiadającego zeru,
$\alpha_{1/0}$ — prawdopodobieństwo tego, że przy nadanym impulsie $g_l(t) \in G_1$ podjęto decyzję o nadaniu impulsu odpowiadającego zeru,
$\alpha_{0/1}$ — prawdopodobieństwo tego, że przy nadanym impulsie $g_k(t) \in G_0$ podjęto decyzję o nadaniu impulsu odpowiadającego jedynce.

Przy przyjętej regule decyzyjnej prawdopodobieństwo $\alpha_{0/1}$ jest równe:

$$\alpha_{0/1} = \sum_{g_l(t) \in G_0} p_{gl} P\Big\{ \bigwedge_{g_m(t) \in G_0} \bigvee_{g_j(t) \in G_1} d[y^{(n)}(t), g_m(t)] \geqslant d[y^{(n)}(t), g_j(t)] | g_l(t) \Big\}, \tag{41}$$

gdzie:

p_{gl} — prawdopodobieństwo tego, że jeżeli nadano sygnał należący do G_0, to był on równy $g_l(t)$,
$P\{B|g_l(t)\}$ — prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia B pod warunkiem, że nadano impuls $g_l(t)$.

Korzystając z właściwości prawdopodobieństwa iloczynu i prawdopodobieństwa sumy zdarzeń, z zależności (41) otrzymujemy

$$\alpha_{0/1} \leqslant \sum_{g_l(t) \in G_0} p_{gl} P\Big\{ \bigvee_{g_j(t) \in G_1} d[y^{(n)}(t), g_l(t)] \geqslant d[y^{(n)}(t), g_j(t)] | g_l(t) \Big\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{g_l(t) \in G_0} \sum_{g_j(t) \in G_1} p_{gl} P\big\{ d[y^{(n)}(t), g_l(t)] \geqslant d[y^{(n)}(t), g_j(t)] | g_l(t) \big\}. \tag{42}$$

Z rozważań przeprowadzonych w pracach [3, 8] wynika następująca równość

$$P\{d[y^{(n)}(t), g_l(t)] \geqslant d[y^{(n)}(t), g_j(t)] | g_l(t)\} = G_I\left(\frac{d[g_l(t), g_j(t)]}{2\sigma_z} \right), \tag{43}$$

gdzie:

$$G_I(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^\infty e^{-v^2/2} dv, \tag{44}$$

$$\sigma_Z = \sqrt{S_b}. \tag{45}$$

Uwzględniając zależność (43) w nierówności (42), otrzymujemy

$$\alpha_{0/1} \leqslant \sum_{g_l(t) \in G_0} \sum_{g_j(t) \in G_1} p_{gl} G_I\left(\frac{d[g_l(t), g_j(t)]}{2\sigma_Z}\right). \tag{46}$$

Dla dużych stosunków sygnału do szumu, tj. gdy

$$\frac{E}{S_b} \gg 1, \tag{47}$$

zachodzi następująca zależność (patrz [8] str. 81)

$$\sum_{g_l(t)} \sum_{\substack{g_j(t) \\ j \neq l}} G_I\left(\frac{d[g_l(t), g_j(t)]}{2\sigma_Z}\right) \simeq M_\Delta G_I\left(\frac{\Delta}{2\sigma_Z}\right), \tag{48}$$

gdzie:

$$\Delta = \min_{j \neq l} d[g_l(t), g_j(t)], \tag{49}$$

M_Δ — ilość par impulsów znajdujących się w odległości Δ.

Zatem, przy spełnionym założeniu (47) oraz gdy

$$\bigwedge_{g_l(t) \in G_0} p_{gl} = \frac{1}{\mathcal{N}}, \tag{50}$$

mamy

$$\alpha_{0/1} \leqslant \alpha^*_{0/1} \simeq \frac{M_d}{\mathcal{N}} G_I\left(\frac{d_{min}}{2\sigma_Z}\right), \tag{51}$$

gdzie:

$\mathcal{N}$ — moc przestrzeni G_0,

$$d_{min} = \min_{\substack{g_l(t) \in G_0 \\ g_j(t) \in G_1}} d[g_l(t), g_j(t)], \tag{52}$$

M_d — ilość par impulsów znajdujących się w odległości d_{min}.

Gdy moce przestrzeni G_0 i G_1 są jednakowe, a taki przypadek zachodzi właśnie w przypadku binarnej FM oraz prawdopodobieństwa p_0 i p_1 są sobie równe i równe $\frac{1}{2}$, mamy

$$\alpha_{1/0} = \alpha_{0/1} = P_e. \tag{53}$$

Prawdopodobieństwo błędnej decyzji P_e jest wówczas, przy spełnionym warunku (47), nie większe niż współczynnik P_e^*, określony zależnością

$$P_e^* \simeq \frac{M_d}{\mathcal{N}} G_I\left(\frac{d_{min}}{2\sigma_Z}\right). \tag{54}$$

W celu wyznaczenia odległości d_{min} wyznaczymy minimalną odległość, mogącą występować pomiędzy dwiema funkcjami $g_k(t) \in G_0$ i $g_l(t) \in G_1$. Iloczyn skalarny dwóch dowolnych funkcji $g_i(t) \in G_0$ oraz $g_j(t) \in G_1$ jest równy

$$(g_i(t), g_j(t)) = A^2 \int_0^T \cos\left[2\pi\left(f_o - \frac{m}{2T}\right)t + \bar{\varphi}_i\right]\cos\left[2\pi\left(f_o + \frac{m}{2T}\right)t + \bar{\varphi}_j\right]dt =$$

$$= A^2\left\{\frac{\sin(2\pi m + \Delta\varphi)}{4\pi\frac{m}{T}} - \frac{\sin(\Delta\varphi)}{4\pi\frac{m}{T}} + \frac{\sin(4\pi f_o T + \bar{\varphi}_i + \bar{\varphi}_j)}{8\pi f_o} - \frac{\sin(\bar{\varphi}_i + \bar{\varphi}_j)}{8\pi f_o}\right\}, \tag{55}$$

gdzie

$$\Delta\varphi = \bar{\varphi}_j - \bar{\varphi}_i. \tag{56}$$

Jeżeli zachodzi

$$2f_o T = k; \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{57}$$

lub

$$f_o T \gg 1, \tag{58}$$

to iloczyn skalarny $(g_i(t), g_j(t))$ jest równy

$$(g_i(t), g_j(t)) = \frac{A^2 T}{4\pi m}[\sin(2\pi m + \Delta\varphi) - \sin(\Delta\varphi)]. \tag{59}$$

Jak łatwo sprawdzić, funkcja ta osiąga maksimum, gdy

$$\Delta\varphi = -\pi m + 2k\pi; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{60a}$$

dla $m \in \langle p, p+1)$; $p = 0, 2, 4, \ldots,$

$$\Delta\varphi = -\pi m + (2k+1)\pi; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{60b}$$

dla $m \in \langle q, q+1)$; $q = 1, 3, 5, \ldots$

Z przyjęcia założenia (57) lub (58) wynika, że energia E każdego z impulsów wyjściowych modulatora jest, w przybliżeniu, równa

$$E = \int_0^T [g_l(t)]^2 dt \simeq \frac{1}{2} TA^2; \quad l = 1, 2, \ldots, N. \tag{61}$$

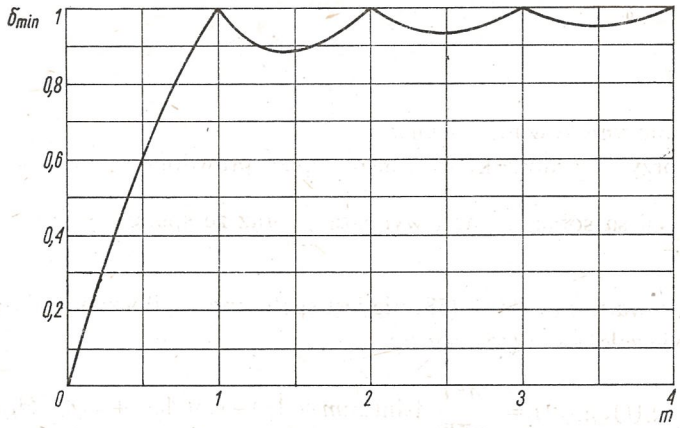
Zatem minimalna odległość między elementami należącymi do podprzestrzeni G_0 i podprzestrzeni G_1 jest nie większa niż

$$d_{min} = A\sqrt{T[1 - |\mathrm{sinc}(\pi m)|]}. \tag{62}$$

Na rysunku 2 przedstawiony jest wykres znormalizowanej odległości δ_{min} między elementami podprzestrzeni G_0 i G_1, równej

$$\delta_{min} = \frac{d_{min}}{A\sqrt{T}} = \sqrt{1 - |\mathrm{sinc}(\pi m)|} \tag{63}$$

w funkcji współczynnika modulacji m, przy spełnionym jednym z warunków (57) lub (58).



Rys. 2. Wykres znormalizowanej, minimalnej odległości δ_{min} w funkcji współczynnika modulacji m
Spełniony przynajmniej jeden z warunków (57), (58)

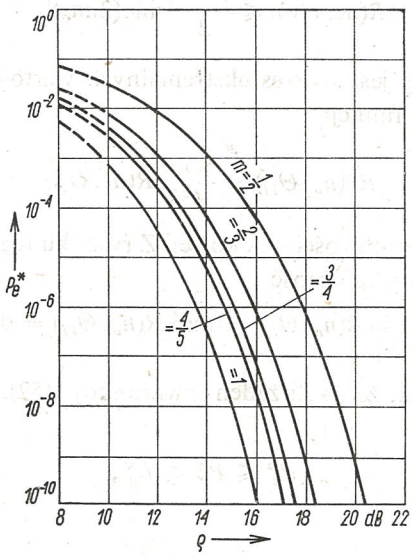
Zatem prawdopodobieństwo błędnej decyzji P_e nie przekracza, przy uczynionych założeniach (47) i (57) lub (58), wartości P_e^*

$$P_e^* \simeq \frac{M_d}{\mathcal{N}} G_I\left(\frac{d_{min}}{2\sigma_Z}\right), \tag{64}$$

gdzie d_{min} — odległość dana zależnością (62).

Na rys. 3 przedstawione są wykresy zależności współczynnika P_e^* od znormalizowanego stosunku sygnału do szumu

$$\varrho = \frac{E}{2S_b}, \tag{65}$$



Rys. 3. Wykresy zależności górnej granicy prawdopodobieństwa błędnej decyzji P_e^* w funkcji znormalizowanego stosunku sygnału do szumu, dla różnych współczynników modulacji

gdy

$$\mathcal{K} = \frac{M_d}{\mathcal{N}} = 1 \tag{66}$$

dla różnych współczynników modulacji m.

Uczyniono przy tym dodatkowo założenia, że prawdopodobieństwa a priori nadawanych informacji są sobie równe i wynoszą $\frac{1}{2}$ oraz że spełniony jest warunek (57) lub (58).

Jeżeli żaden z warunków (57), (58) nie jest spełniony, to iloczyn skalarny $(g_i(t), g_j(t))$ jest, na podstawie zależności (55), równy

$$(g_i(t), g_j(t)) = \frac{A^2T}{4\pi m}[\sin(2\pi m + \Delta\varphi) - \sin(\Delta\varphi)] + R(n_o, \Theta_{ij}), \tag{67}$$

gdzie:

$$R(n_o, \Theta_{ij}) = \frac{A^2T}{8\pi n_o}[\sin(4\pi n_o + \Theta_{ij}) - \sin(\Theta_{ij})], \tag{68}$$

$$n_o = f_o T \text{ — unormowana częstotliwość środkowa,} \tag{69}$$

$$\Theta_{ij} = \overline{\varphi}_i + \varphi_j. \tag{70}$$

Dla ustalonej wartości n_o funkcja $R(n_o, \Theta_{ij})$ przyjmuje wartości ekstremalne, gdy

$$\Theta_{ij} = k\pi - 2\pi n_o; \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{71}$$

Zatem, dla dowolnej, ustalonej wartości parametru Θ_{ij}, funkcja $R(n_o, \Theta_{ij})$ spełnia zależność

$$|R(n_o, \Theta_{ij})| \leqslant \frac{A^2T}{2}|\operatorname{sinc}(2\pi n_o)|. \tag{72}$$

Na rys. 4 przedstawiony jest wykres ekstremalnych wartości (minimalnych i maksymalnych) znormalizowanej funkcji

$$R^*(n_o, \Theta_{ij}) = \frac{1}{A^2T} R(n_o, \Theta_{ij}) \tag{73}$$

w funkcji unormowanej częstotliwości środkowej. Z rysunku tego wiadać, że gdy spełniony jest warunek (57), to zachodzi zależność

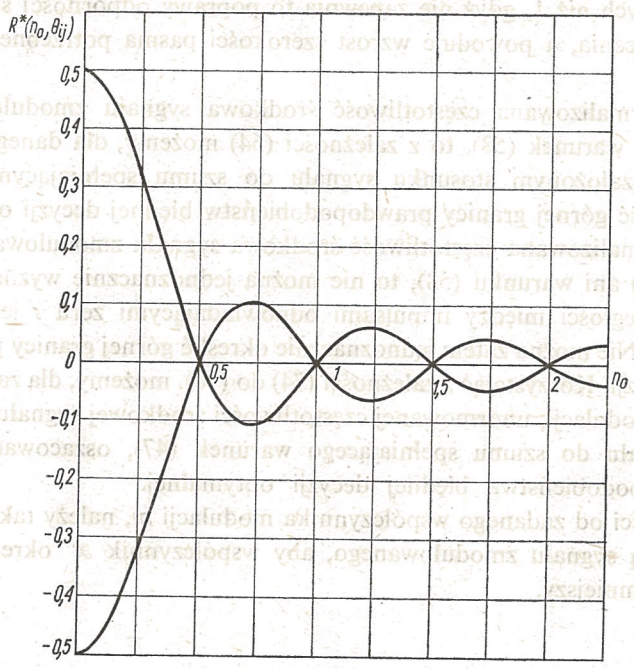
$$\min_{\Theta_{ij}} R(n_o, \Theta_{ij}) = \max_{\Theta_{ij}} R(n_o, \Theta_{ij}) = 0. \tag{74}$$

Z zależności (72) wynika, że jeżeli żaden z warunków (57), (58) nie jest spełniony, to mamy

$$P_d^* \leqslant P_e^* \leqslant P_g^*, \tag{75}$$

gdzie:

$$P_d^* = G_I\left(\frac{d_{min}^*}{2\sigma_z}\right), \tag{76}$$



Rys. 4. Przedział zmienności funkcji $R^*(n_o, \Theta_{ij})$ w funkcji znormalizowanej częstotliwości środkowej sygnału zmodulowanego

$$P_g^* = G_I\left(\frac{\bar{d}_{min}}{2\sigma_Z}\right), \tag{77}$$

$$d_{min}^* = A\sqrt{T}\sqrt{1-|\mathrm{sinc}(\pi m)|-|\mathrm{sinc}(2\pi n_o)|}, \tag{78}$$

$$\bar{d}_{min} = A\sqrt{T}\sqrt{1-|\mathrm{sinc}(\pi m)|+|\mathrm{sinc}(2\pi n_o)|}. \tag{79}$$

Gdy przynajmniej jeden z warunków (57), (58) jest spełniony, to

$$d_{min}^* = \bar{d}_{min} = d_{min}. \tag{80}$$

5. UWAGI I WNIOSKI

1. Przy optymalnym odbiorze sygnałów binarnej modulacji częstotliwości górna granica prawdopodobieństwa błędnej decyzji jest zależna od przyjętego współczynnika modulacji. Zależność ta jest szczególnie silna w przypadku małych współczynników modulacji; $m \leqslant 2$[4].

2. Z wykresów przedstawionych na rysunkach 2 i 3 wynika, że przy zastosowaniu optymalnej reguły odbioru (patrz rozdz. 3) nie jest celowe stosowanie współczynników

[4] Takie właśnie współczynniki modulacji stosowane są w przewodowych systemach transmisji danych.

modulacji większych niż 1, gdyż nie zapewnia to poprawy odporności sygnału zmodulowanego na zakłócenia, a powoduje wzrost szerokości pasma potrzebnego do transmisji sygnału [1, 2].

3. Jeżeli znormalizowana częstotliwość środkowa sygnału zmodulowanego spełnia warunek (57) lub warunek (58), to z zależności (64) możemy, dla danego współczynnika modulacji, przy założonym stosunku sygnału do szumu spełniającym warunek (47), wyznaczyć wartość górnej granicy prawdopodobieństw błędnej decyzji optymalnej.

4. Jeżeli znormalizowana częstotliwość środkowa sygnału zmodulowanego nie spełnia ani warunku (57) ani warunku (58), to nie można jednoznacznie wyznaczyć minimalnej z możliwych odległości między impulsami odpowiadającymi zeru i jedynce w sygnale zmodulowanym. Nie można zatem jednoznacznie określić górnej granicy prawdopodobieństwa błędnej decyzji. Korzystając z zależności (74) do (78), możemy, dla zadanych wartości: współczynnika modulacji, unormowanej częstotliwości środkowej sygnału zmodulowanego i stosunku sygnału do szumu spełniającego warunek (47), oszacować wartość górnej granicy prawdopodobieństwa błędnej decyzji optymalnej.

5. W zależności od zadanego współczynnika modulacji m, należy tak wybierać częstotliwość środkową sygnału zmodulowanego, aby współczynnik $\mathcal{K}$ określony zależnością (66) był jak najmniejszy.

BIBLIOGRAFIA

1. Praca zbiorowa pod kierunkiem Z. Barana, *Podstawy transmisji danych*, WKiŁ, Warszawa 1982.
2. B. P. Lathi, *Systemy telekomunikacyjne*, WNT, Warszawa 1972.
3. J. Seidler, *Systemy przesyłania informacji cyfrowych*, WNT, Warszawa 1976.
4. L. Knoch, T. Ekiert, *Modulacja i detekcja*, WKiŁ, Warszawa 1979.
5. J. Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, PWN, Warszawa 1976.
6. B. Z. Wulich, *Wwiedienije w funkcjonalnyj analiz*, Gosudarstwiennoje Izdatielstwo Fiziko-Matiematiczeskoj Literatury, Moskwa 1958.
7. J. Nowakowski, W. Sobczak, *Teoria informacji*, WNT, Warszawa 1971.
8. J. Seidler, *Statystyczna teoria odbioru sygnałów*, PWN, Warszawa—Wrocław 1963.

T. WYSOCKI

PROBABILITY OF ERRONEOUS DECISION FOR CONTINOUS PHASE BINARY *FSK* OPTIMUM COHERENT DETECTION DEPENDING ON MODULATION FACTOR

Summary

The paper deals with the estimation of probability of an erroneous decision for the optimum detection of the continous phase binary *FSK*. In the paper the detailed consideration, for the case when the modulated signal pulses are not necessarily orthogonal, is presented. The optimum coherent detection of the continous phase binary *FSK* general algorithm and the formulas making possible the estimation of the upper limit of the erroneous decision probability, according to the modulation factor and the normalized carrier frequency, are given. The diagram of the estimated upper limit of the error rates, for the different modulation factors are also presented.

T. WYSOCKI

INFLUENCE DE L'INDEX DE MODULATION SUR LA PROBABILITÉ DE LA DÉCISION ERRONÉE POUR LA RÉCEPTION OPTIMALE DES SIGNAUX DE MODULATION BINAIRE DE FRÉQUENCE

Résumé

Cet article est consacré à l'estimation de la probabilité de la décision erronée pour la réception optimale des signaux de modulation binaire de fréquence. Dans l'élaboration on a délibéré minutieusement le cas où les impulsions du signal modulé, correspondant aux impulsions divereses dans le signal de modulation ne doivent pas être orthogonales entre elles. On a donné l'algorithme général de la réception optimale des signaux de modulation binaire de fréquence et les dépendances permettant l'estimation de la limite supérieure de probabilité de la décision erronée, dependamment d'index de modulation admis et de la fréquence centrale du signal modulé.Dans l'article on a inséré les graphiques de la limite supérieure de probabilité de la décision erronée en fonction du rapport du signal au bruit pour l'index de modulation divers.

T. WYSOCKI

EINFLUß DES MODULATIONSFAKTORS AUF DIE WAHRSCHEINLICHKEIT EINER FEHLENTSCHEIDUNG BEIM OPTIMALEN EMPFANG DER MITTELS DER BINÄRFOLGE FREQUENZMODULIERTEN SIGNALE

Zusammenfassung

In diesem Aufsatz wird die Abschätzung der Wahrscheinlichkeit einer Fehlentscheidung beim optimalen Empfang von binärfrequenzmodulierten Signalen erwogen. Besonders wird der Fall erörtert, wo Impulse eines modulierten Signals, die verschiedenen Impulsen im modulierten Signal entsprechen, nicht unbeding gegeneinander orthogonal sein müssen. Es werden angegeben: allgemeiner Algorithmus des optimalen Empfangs binärfrequenzmodulierter Signale, als auch Abhängigkeiten, die die Abschätzung der Wahrscheinlichkeit einer Fehlentscheidung je nach dem angewandten Modulationsfaktor und der Mittelfrequenz des modulierten Signals ermöglichen. Der Aufsatz enthält Diagramme der Wahrscheinlichkeit einer Fehlentscheidung in Abhängigkeit vom normaliserten Verhältnis des Nutz- und Störsignals, und zwar für verschiedene Modulationsfaktoren.

Т. ВЫСОЦКИ

ВЛИЯНИЕ КОЭФФИЦЕНТА МОДУЛЯЦИИ НА ВЕРОЯТНОСТЬ ЛОЖНОГО РЕШЕНИЯ ПРИ ОПТИМАЛЬНОМ ПРИЕМЕ СИГНАЛОВ ПЛЯ БИНАРНОЙ ЧАСТОТНОЙ МАНИПУЛЯЦИИ

Резюме

Проведена оценка вероятности ложного решения при оптимальном приеме сигналов для бинарной частотной манипуляции. Приведены подробные рассуждения касащиеся случая, когда импульсы сигнала с частотной манипуляцией, соответствующие разным импульсам модулирующего сигнала, не обязятельно ортогональны. Дан общий алгоритм оптимального приема сигналов бинарной ЧМ, о также зависимости позволяющие оценить вероятность ложного решения в зависимости от принятого коэффицента модуляции и средней частоты сигнала ЧМ. Приведены диаграммы вероятности ложного решения от отношения сигнал-шум для нескольких значении коэффицента модуляции.

T. WYSOCKI

INFLUENCE DE L'INDEX DE MODULATION SUR LA PROBABILITÉ DE LA DÉCISION ERRONÉE POUR LA RÉCEPTION OPTIMALE DES SIGNAUX DE MODULATION BINAIRE DE FRÉQUENCE

Résumé

Cet article est consacré à l'estimation de la probabilité de la décision erronée pour la réception optimale des signaux de modulation binaire de fréquence. Dans l'élaboration on a délibéré minutieusement le cas où les impulsions du signal modulé, correspondant aux impulsions diverses dans le signal de modulation ne doivent pas être orthogonales entre elles. On a donné l'algorithme général de la réception optimale des signaux de modulation binaire de fréquence et les dépendances permettant l'estimation de la limite supérieure de probabilité de la décision erronée, dépendamment d'index de modulation admis et de la fréquence centrale du signal modulé. Dans l'article on a inséré les graphiques de la limite supérieure de probabilité de la décision erronée en fonction du rapport du signal au bruit pour l'index de modulation divers.

T. WYSOCKI

EINFLUß DES MODULATIONSFAKTORS AUF DIE WAHRSCHEINLICHKEIT EINER FEHLENTSCHEIDUNG BEIM OPTIMALEN EMPFANG DER MITTELS DER BINÄRFOLGE FREQUENZMODULIERTEN SIGNALE

Zusammenfassung

In diesem Aufsatz wird die Abschätzung der Wahrscheinlichkeit einer Fehlentscheidung beim optimalen Empfang von binärfrequenzmodulierten Signalen erwogen. Besonders wird der Fall erörtert, wo Impulse eines modulierten Signals, die verschiedenen Impulsen im modulierten Signal entsprechen, nicht unbedingt gegeneinander orthogonal sein müssen. Es werden angegeben: allgemeiner Algorithmus des optimalen Empfangs binärfrequenzmodulierter Signale, als auch Abhängigkeiten, die die Abschätzung der Wahrscheinlichkeit einer Fehlentscheidung je nach dem angewandten Modulationsfaktor und der Mittelfrequenz des modulierten Signals ermöglichen. Der Aufsatz enthält Diagramme der Wahrscheinlichkeit einer Fehlentscheidung in Abhängigkeit vom normalisierten Verhältnis des Nutz- und Störsignals, und zwar für verschiedene Modulationsfaktoren.

Т. ВЫСОЦКИ

ВЛИЯНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА МОДУЛЯЦИИ НА ВЕРОЯТНОСТЬ ЛОЖНОГО РЕШЕНИЯ ПРИ ОПТИМАЛЬНОМ ПРИЕМЕ СИГНАЛОВ ПЛЯ БИНАРНОЙ ЧАСТОТНОЙ МАНИПУЛЯЦИИ

Резюме

Проведена оценка вероятности ложного решения при оптимальном приеме сигналов для бинарной частотной манипуляции. Приведены подробные рассуждения касающиеся случая, когда импульсы сигнала с частотной манипуляцией, соответствующие разным импульсам модулирующего сигнала, не обязательно ортогональны. Дан общий алгоритм оптимального приема сигналов бинарной ЧМ, о также зависимости позволяющие оценить вероятность ложного решения в зависимости от принятого коэффициента модуляции и средней частоты сигнала ЧМ. Приведены диаграммы вероятности ложного решения от отношения сигнал-шум для нескольких значений коэффициента модуляции.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1985, 31, z. 1, ss. 225-239

621.395.74

O doborze parametrów charakteryzujących strefowe sieci telefoniczne

TADUSZ STACHOWIAK (WARSZAWA), ELŻBIETA TURSKA (WARSZAWA)

Instytut Podstaw Informatyki Polskiej Akademii Nauk

Otrzymano 22.4.1983

W pracy omówiono metodologię postępowania przy dobieraniu parametrów charakteryzujących najbardziej istotne cechy sieci telefonicznej. Zagadnienie to stanowi podstawę w badaniach nad planowaniem rozwoju poszczególnych fragmentów tej sieci, a więc i całej sieci. Zwrócno uwagę na praktyczne przesłanki doboru zmiennych objaśniających. Podano także formalno-statystyczne kryteria doboru parametrów. Rozważania teoretyczne zostały zilustrowane przykładem. Omówiono w nim dobór istotnych, ze względu na proces projektowania, parametrów opisujących strefowe sieci telefoniczne.

1. WPROWADZENIE

Programowanie rozwoju sieci telefonicznej w skali całego kraju jest zadaniem trudnym i skomplikowanym. Wobec tego w praktyce często rezygnuje się z poszukiwania rozwiązania optymalnego i dąży jedynie do otrzymania projektów suboptymalnych. Takie podejście powoduje istotne zmniejszenie kosztów związanych ze wspomnianym procesem. W związku z tym, wykorzystując różne metody dekompozycji, dokonuje się podziału całej sieci na szereg podsieci. W ten sposób zagadnienie rozbudowy dużej sieci (np. krajowej) sprowadza się do rozwiązania szeregu podzagadnień dotyczących rozwoju tychże podsieci. Zaletą takiego podejścia jest również zwiększenie precyzji prac projektowych. Istotnie, stwarza to możliwość uwzględnienia różnych aspektów lokalnych.

Poszczególne podsieci niejednokrotnie różnią się między sobą. Inaczej są rozmieszczeni abonenci, inne są warunki naturalne, różny jest charakter gospodarczy i społeczny. Ma to istotny wpływ na strukturę topologiczną i konfigurację podsieci, a także decyduje o racjonalnym doborze systemów teletransmisyjnych i komutacyjnych. Niemniej jednak wśród dużej liczby różnych podsieci można wyróżnić pewne charakterystyczne typy. To nasuwa myśl, aby badania nad rozwojem poszczególnych podsieci ograniczyć do wybranych reprezentatywnych fragmentów tej sieci. Tego typu podejście umożliwia typizację metod projektowania. W takiej sytuacji nie trzeba rozpatrywać każdej podsieci. Wystarczy dla reprezentatywnych obiektów opracować typowe projekty budowy lub rozbudowy. Dodatkowa zaleta to możliwość prowadzenia badań modelowych nad różnymi technikami systemowymi i sprzętowymi możliwymi do zastosowania w sieci. Jako przykład można podać prace nad stopniową cyfryzacją francuskiej sieci telefonicznej [8].

Powyższe uwagi wskazują na konieczność podziału zbioru wszystkich podsieci na rozłączne i niepuste podzbiory czyli klasy. Trzeba tego dokonać w taki sposób, aby w każdej klasie znalazły się jedynie obiekty podobne z punktu widzenia przewidywanego procesu

projektowego. Wyróżniając element reprezentatywny można opracować dla niego typowy projekt rozbudowy. Projekt taki, z ewentualnymi niewielkimi modyfikacjami, znalazłby zastosowanie dla pozostałych podsieci rozpatrywanej klasy. Bardzo ważną rolę w procesie klasyfikacji odgrywa sprawa właściwego doboru parametrów charakteryzujących rozpatrywane podsieci. Ich nieodpowiedni zestaw może mieć poważne następstwa w postaci niezbyt trafnych decyzji dotyczących rozwoju sieci. Potwierdzeniem faktu, że właściwy dobór zmiennych opisujących sieć jest sprawą istotną, są badania przeprowadzone we Francji [1].

W pracy, w oparciu o dane pochodzące z resortu łączności [9, 12], przedstawiono metodologię doboru parametrów opisujących obszary sieci telefonicznej. W postępowaniu tym można wyróżnić dwa zasadnicze etapy. Pierwsza sprawa dotyczy wstępnego doboru parametrów. W tym przypadku chodzi o merytoryczne przesłanki, którymi należy się kierować przy opisywaniu badanych podsieci. W drugim etapie pierwotnie ustalony zbiór parametrów poddaje się obróbce statystycznej. Celem tego postępowania jest analiza wzajemnych zależności między cechami. Z kolei bada się, czy usunięcie jakiegokolwiek z parametrów może wpłynąć w istotny sposób na utratę informacji o rozpatrywanych podsieciach. Praktyczne zastosowanie proponowanej metodologii pokazano na przykładzie zbioru telefonicznych stref numeracyjnych.

2. MERYTORYCZNE PRZESŁANKI DOBORU PARAMETRÓW

Przejdziemy teraz do problemu wyznaczania zbioru parametrów opisujących poszczególne podsieci. Jest to niezwykle ważna faza postępowania. Spotykamy tu liczne kłopoty, gdyż trudno ją sformalizować. Racjonalnie dobrane parametry powinny możliwie wszechstronnie opisywać różne aspekty badanego systemu. Poza tym muszą być związane z konstruowanym modelem. Każdy taki model tworzy się mając z góry wytknięty cel. W związku z tym postuluje się, aby poszczególne parametry w możliwie wyraźny sposób wiązały się z badanym przez nas zjawiskiem. Czasami pod uwagę bierze się i inne cechy, Uwzględnia się je w rozważaniach na podstawie przeświadczenia o ich utajonym związku z budowanym modelem. O istnieniu takich powiązań trzeba decydować arbitralnie. bez uciekania się do jakichkolwiek metod sformalizowanych, bo takich po prostu nie ma. W przypadku wystąpienia wątpliwości lepiej wstępnie uwzględnić daną cechę niż ją pominąć. Istotnie, w pierwszym przypadku, w najgorszym razie zostanie ona pominięta w trakcie wykonywania analizy formalno-statystycznej. Jeżeli zaś nieopatrznie pominiemy jakąś cechę, to jej brak może wypaczyć cały model.

Przy wstępnym doborze cech należy zwracać uwagę i na inne czynniki. Jeden z nich można w skrócie nazwać dostępnością. Mianowicie, mając na uwadze praktyczne zastosowanie konstruowanego modelu trzeba pamiętać, aby wartości parametrów były łatwe do uzyskania bądź za pomocą odpowiednich parametrów, bądź też na podstawie danych statystycznych. Ponadto należy mieć na względzie fakt, że będą one dalej przetwarzane, najczęściej przy wykorzystaniu aparatu statystyki matematycznej. Dlatego użycie tych parametrów, które są niemierzalne (mają charakter jakościowy) znacznie skomplikowałoby dalsze postępowanie.

Najwygodniej jest początkowo wziąć pod uwagę możliwie dużą liczbę dostępnych cech. W trakcie dalszej obróbki niektóre z nich mogą zostać wykluczone. Sprawa jest o tyle istotna, że przyjęcie do rozważań zbyt dużej liczby wzajemnie powiązanych parametrów praktycznie nie zwiększa wiedzy o rozpatrywanym obiekcie. Może być natomiast przyczyną nadmiernego ukrytego wpływu jakiejś cechy na wynik klasyfikacji. Typowym przykładem takiego przypadku jest sytuacja, w której dwie cechy pozostają względem siebie w związku funkcyjnym. Wówczas należy wyeliminować jedną z nich. Trzeba się przy tym znowu kierować dostępnością (łatwością uzyskania) oraz nakładem obliczeń związanych z uzyskaniem wartości liczbowych rozważanej cechy. Po prostu w opisie uwzględniamy ten parametr, który łatwiej wyznaczyć lub wprost zaczerpnąć ze źródeł.

Omówimy teraz zasadnicze przesłanki pozwalające zorientować się, jakie parametry należałoby wstępnie uwzględnić w opisie sieci telefonicznej. Należy bowiem pamiętać, że sieć taka ma rację bytu jedynie wówczas, gdy spełnia postulaty wysuwane przez jej użytkowników. Ogólnie rzecz biorąc dotyczą one realizacji napływających zgłoszeń przy ustalonym poziomie jakości. Zgłoszenia te są wyrażane za pomocą różnych parametrów ruchowych (dotyczących generowanego ruchu). Wiążą się one bezpośrednio z procesem projektowym [15]. Ponadto można je traktować jako pewne syntetyczne wskaźniki opisujące charakter gospodarczo-społeczny obszaru obsługiwanego przez sieć. Z takim podejściem spotykamy się w pracach Luke i Yatrakisa [10, 19]. Istotną sprawą jest także powiązanie ruchowe danej podsieci z resztą sieci.

Ważną grupę cech stanowią parametry opisujące strukturę użytkowników. Wiąże się to z istnieniem tzw. kategorii abonentów. Podział ten wynika z faktu, że średni generowany ruch jest inny dla każdego rodzaju użytkownika. W Polsce wyróżnia się cztery kategorie abonentów sieci telefonicznej: mieszkaniowi, urzędowi, centralkowi oraz użytkownicy automatów telefonicznych. Abonenci mieszkaniowi to po prostu posiadacze prywatnych telefonów. Abonenci urzędowi to użytkownicy aparatów telefonicznych w różnych instytucjach i przedsiębiorstwach, które są bezpośrednio podłączone do centrali miejscowej. Natomiast określenie abonenci centralkowi dotyczy wszystkich tzw. wewnętrznych telefonów — podłączonych do lokalnej centrali (np. w ramach jakiejś instytucji). Jest rzeczą naturalną, że inna będzie struktura abonentów na obszarze wielkomiejskim, inna na terenie silnie uprzemysłowionym, a jeszcze inna w strefie typowo rolniczej.

Określenie liczby użytkowników poszczególnych kategorii nie wystarcza jednak do celów projektowych. Ważne jest też rozmieszczenie abonentów w terenie. Czynnik ten decyduje zarówno o geometrii jak i topologii sieci [15]. Do celów projektowych wykorzystuje się zazwyczaj mapę z naniesioną gęstością użytkowników. W rozpatrywanym przypadku taki parametr jest mało przydatny. Ma on bowiem charakter jakościowy. Dlatego należy go zastąpić parametrem (lub parametrami) o charakterze ilościowym. Na przykład Diallo i Legros [1] we wstępnym modelu brali pod uwagę kilka danych opisujących rozmieszczenie abonentów. W rozważaniach uwzględniali liczbę central głównych, liczbę central satelitarnych, średnią długość połączenia między nimi, a także liczbę tego typu połączeń. W tej pracy z uwagi na brak wyżej wymienionych danych zaproponowano jako wskaźniki rozmieszczenia abonentów inne parametry. Zostały one omówione w punkcie 4 (patrz cechy nr 10, 11, 12 i 13).

3. STATYSTYCZNE METODY DOBORU PARAMETRÓW

Wstępnie określony zbiór parametów należy zbadać od strony formalno-statystycznej. Celem tego postępowania jest próba ewentualnej redukcji niektórych cech. Dzięki temu możemy uprościć konstruowany opis bez utraty istotnych informacji. Czasami bowiem pewien, nawet dosyć ważny z punktu widzenia projektanta, parametr zmienia się nieznacznie w całym zbiorze rozważanych obiektów. Można go więc wyeliminować z dalszych rozważań. Do określenia czy badany parametr zmienia się wystarczająco wyraźnie służy najczęściej tzw. współczynnik zmienności. Jest to stosunek odchylenia standardowego do wartości średniej. Jeżeli ten współczynnik osiąga wartość rzędu pojedynczych procentów, to odpowiadającą mu cechę można, bez żadnych obaw, wyeliminować z dalszych rozważań [7].

Poważnym problemem w trakcie dobierania parametrów modelu jest współliniowość (współzależność) zmiennych objaśniających. W praktyce bowiem bardzo często okazuje się, że uwzględnione w opisie cechy są ze sobą skorelowane. Odpowiada to w pewnym sensie powtarzaniu niektórych informacji o badanym obiekcie. W ten sposób może zostać wypaczony pogląd o analizowanej sieci. Eliminacja współliniowości nabiera zatem istotnego znaczenia. Najczęściej do tego celu stosuje się metody taksonomiczne, analizę czynnikową oraz metody statystyczne [7]. W przypadku algorytmów taksonomicznych postępowanie obejmuje dwa etapy. W pierwszym dokonuje się podziału całego zbioru cech na grupy zawierające zmienne położone blisko siebie w unormowanej przestrzeni obserwacji, a jednocześnie maksymalnie oddalone od zmiennych należących do pozostałych grup. W drugim etapie wybiera się z każdej grupy reprezentatywne cechy i one właśnie stanowią zbiór parametrów. W przypadku, gdy korzystamy z analizy czynnikowej, do eliminowania skutków współzależności cech służą metody ortogonalizacyjne. Polegają one na zastąpieniu skorelowanych zmiennych objaśniających nowymi zmiennymi (jest ich zwykle mniej). Można je wyrazić jako funkcje liniowe pierwotnych zmiennych (cech), a ponadto nie są one skorelowane między sobą. Wśród metod ortogonalizacyjnych na pierwszy plan wysuwa się metoda głównych składowych. Właśnie takie podejście wykorzystali w swoich badaniach Diallo i Legros [1].

Oprócz oczywistych zalet powyższe metody mają pewien mankament. Otóż gdy z jakichś względów zmienimy wstępny zbiór cech (np. przez dołączenie jednej lub kilku cech ważnych z merytorycznego punktu widzenia), to całe postępowanie prowadzące do eliminacji współliniowości trzeba rozpoczynać od nowa. Można tego uniknąć wykorzystując statystyczne metody usuwania współliniowości cech. Takie też podejście proponuje się w tej pracy. W związku z tym zostanie ono szerzej omówione.

Statystyczne metody eliminacji współliniowości polegają na badaniu powiązań między parametrami. Gdy okaże się, że dwie cechy są ze sobą silnie skorelowane, to jedną z nich można wyeliminować. Wstępną fazę tego postępowania stanowi analiza empirycznych rozkładów parametrów. To badanie jest istotne z dwóch powodów. Po pierwsze uzyskane w ten sposób wyniki pozwalają, z pewnym przybliżeniem, przewidzieć z jakiego rodzaju rozkładem mamy rzeczywiście do czynienia. W trakcie analizy szczególną uwagę należy zwracać na symetrię. Jeżeli bowiem rozkład jest symetryczny i jednomodalny, to można przypuszczać, że cecha ma rozkład Gaussa. Gdyby nasza hipoteza się sprawdziła, to dalsze

postępowanie byłoby łatwiejsze, gdyż dla rozkładu normalnego opracowano do tej pory najwięcej testów parametrycznych. Po drugie, znajomość histogramów badanych parametrów ułatwia uchwycenie ewentualnych zależności między odpowiadającymi im cechami. Pozwala także przewidzieć charakter przypuszczalnych związków.

W dalszej kolejności sprawdzamy słuszność naszych przewidywań odnoszących się do postaci rozkładów. Do tego celu używamy testów nieparametrycznych. Pozwalają one ocenić, jak dalece dystrybuanta empiryczna odbiega od dystrybuanty teoretycznej zakładanego rozkładu. Dla zwiększenia wiarygodności rozwiązania proponuje się wykorzystanie dwóch testów zgodności. Pierwszy z nich to znany test Kołmogorowa [13], drugi to test ω^2 [3]. Niech $F(x)$ oznacza dystrybuantę teoretyczną rozkładu Gaussa, a $F_n(x)$ dystrybuantę empiryczną badanej cechy. Niech ponadto wartości tej cechy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą uporządkowane rosnąco, przy czym n — liczba punktów empirycznych. Wówczas dystrybuantę $F_n(x)$ definiuje się następująco [13]

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant x_1, \\ \dfrac{k}{n} & \text{dla } x_k < x \leqslant x_{k+1};\ k = 1, 2, \ldots, n-1, \\ 1 & \text{dla } x > x_n. \end{cases} \tag{1}$$

Statystyka Kołmogorowa ma postać [13]

$$D_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |F(x) - F_n(x)|. \tag{2}$$

Można ją stosować, gdy próbka zawiera co najmniej 50 elementów. Dla dużej wartości n korzysta się ze statystyki $\sqrt{n}D_n$, która ma rozkład Kołmogorowa [20]. Drugim użytym w pracy testem jest test ω^2. Odległość dystrybuanty empirycznej od dystrybuanty teoretycznej rozkładu normalnego określa statystyka [3]

$$\omega^2 = \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[F(x_k) - \frac{2k-1}{2n}\right]^2, \tag{3}$$

gdzie dokładny rozkład ω^2 ma bardzo skomplikowaną postać. Udowodniono jednak, że dla $n > 40$ rozkład iloczynu $n\omega^2$ jest bliski pewnemu rozkładowi granicznemu, dla którego skonstruowane są tablice [3].

Następnie możemy przystąpić do badania ewentualnych współzależności między cechami. Rozpoczynamy od utworzenia diagramów punktowych. Ich analiza pozwala na wstępną ocenę siły i charakteru powiązań. Jeśli punkty układają się dosyć wyraźnie wzdłuż pewnych krzywych, to przewidujemy, że parametry są od siebie uzależnione. Gdy zaś układają się bezładnie albo równomiernie, to wtedy nie należy spodziewać się związków między cechami. Na tym kończymy ocenę jakościową współzależności między parametrami.

Teraz przystępujemy do analizy ilościowej. Najbardziej znanym i najczęściej stosowanym miernikiem statystycznym używanym do zbadania siły wzajemnych powiązań między dwiema zmiennymi losowymi jest współczynnik korelacji liniowej. Jego estymatorem zgodnym jest współczynnik korelacji z próby [13]

$$R(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}, \tag{4}$$

gdzie $\bar{x}$, $\bar{y}$ — wartości średnie (z próby) zmiennych losowych odpowiednio X i Y.

Współczynnik korelacji z próby można uważać za oszacowanie współczynnika korelacji w populacji generalnej. Powstaje więc problem weryfikacji estymatora. Można tego dokonać przy założeniu, że obydwie rozpatrywane cechy mają rozkład normalny lub zbliżony do normalnego. Wówczas używamy statystyki $T = R = \sqrt{\frac{n-2}{1-R^2}}$ [5, 13], przy czym R — zmienna losowa odpowiadająca współczynnikowi korelacji z próbki, zaś n — liczebność próbki. W przypadku gdy współczynnik korelacji liniowej jest równy zeru, to wspomniana statystyka ma rozkład t — Studenta o $n-2$ stopniach swobody [5, 13]. Przedział ufności dla estymatora współczynnika korelacji liniowej można znaleźć korzystając ze spostrzeżenia Fishera, że zmienna losowa $U = 0{,}5\,[\ln(1+R) - \ln(1-R)]$, nawet dla próbek o niewielkiej liczności, ma rozkład bliski normalnemu [5, 13]. Możemy więc łatwo wyznaczyć przedział ufności dla estymatora zmiennej losowej U. Następnie przekształcamy ostatni wzór do postaci $R = \frac{e^{2U}-1}{e^{2U}+1}$. Stąd uzyskujemy przedział ufności dla współczynnika korelacji liniowej.

W przypadku występowania zależności nieliniowej współczynnik korelacji liniowej niezbyt dobrze charakteryzuje siłę powiązania między zmiennymi. Po prostu podaje wartość zaniżoną. Bardziej właściwym, w takiej sytuacji, okazuje się stosunek korelacyjny [3, 17]. Jeżeli badamy zależność zmiennej losowej Y od zmiennej losowej X, to odpowiedni stosunek korelacji oblicza się ze wzoru [3, 17]

$$\eta(Y, X) = \frac{D[\bar{y}(x)]}{D[Y]}, \tag{5}$$

gdzie: $D[\bar{y}(x)]$ — odchylenie standardowe średnich wartości zmiennej Y odpowiadających określonym wartościom zmiennej X, $D[Y]$ — odchylenie standardowe zmiennej losowej Y.

W ogólnym przypadku $\eta(Y, X) \neq \eta(X, Y)$, a ponadto wartości stosunku korelacyjnego należą do przedziału $\langle 0, 1\rangle$. W praktyce podstawę do obliczeń stanowi tablica korelacyjna. Jej kształt w pewnym stopniu zależy od liczności próbki oraz doświadczenia badającego. Jest to niewątpliwie wadą stosunku korelacyjnego. W związku z tym do otrzymywanych rezultatów należy podchodzić z pewną rezerwą. Szczegóły techniczne obliczania stosunku korelacyjnego można znaleźć w [3, 17].

Przedstawione wyżej mierniki korelacji określają współzależność ze stochastycznego punktu widzenia. Często chodzi nam o zbadanie, czy między dwoma parametrami nie występuje związek funkcyjny. Wówczas możemy zastosować jedną spośród dwóch metod. Pierwsza z nich polega na empirycznym dobraniu określonej krzywej. Do tego celu wykorzystujemy wspomniane diagramy punktowe. Dobór krzywej jest dokonywany w sposób subiektywny. Druga metoda różni się od pierwszej tym, że wstępnie określamy jedynie dosyć szeroką klasę funkcji, wśród której będziemy poszukiwać odwzorowania aproksy-

mującego potencjalną zależność. Najczęściej postuluje się, żeby wspomniana funkcja miała postać wielomianową, ale nie musi to być regułą (patrz np. Luke i Yatrakis [10], Welleniuss [18], Yatrakis [19]). Współczynniki będące parametrami rozważanej klasy odwzorowań dobiera się metodami regresji [2]. Stopień dopasowania krzywej regresji do punktów empirycznych określa się przy pomocy tak zwanego współczynnika korelacji krzywoliniowej [14]

$$R_k = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2 - \sum_{i=1}^{n}(\bar{y}_i-\hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})}} \quad (6)$$

Wyrażenie $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$ określa ogólne odchylenie zmiennej Y od wartości średniej, natomiast wielkość $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$ obrazuje odchylenie Y względem dopasowanej krzywej regresji. Ze wzoru (6) wynika, że współczynnik R_k przyjmuje wartość z przedziału $\langle 0, 1\rangle$.

4. PRZYKŁAD

Zajmiemy się teraz krajową siecią telefoniczną. Składa się ona ze 176 stref. Będziemy się starali dobrać parametry opisujące poszczególne strefy. Założymy, że konstruowany model ma na celu wyodrębnienie charakterystycznych obszarów sieci z uwagi na przewidywany proces projektowy, prowadzący do rozbudowy instalacji. A zatem, zgodnie z uwagami przedstawionymi w punkcie 2, będą nas interesować przede wszystkim grupy cech dotyczące:

— liczby i rozmieszczenia abonentów,
— charakteru obszaru obsługiwanego przez sieć strefową,
— ruchu generowanego w strefie i wychodzącego poza nią,
— podziału użytkowników na kategorie.

Dane do obliczeń zaczerpnęliśmy z [9, 12]. Opierając się na sugestiach Luke i Yatrakisa [10] oraz Stone'a [16] przyjęliśmy do wstępnych rozważań trzynaście następujących cech (szczegóły rozumowania prowadzącego do wytypowania takiego właśnie zbioru cech można znaleźć w [15]):

1. stosunek wartości średniej natężenia ruchu telefonicznego wychodzącego poza strefę do wartości średniej natężenia ruchu generowanego w strefie,
2. średnie natężenie ruchu generowanego przez pojedynczego abonenta,
3. średnie natężenie ruchu przypadające na jednego mieszkańca w strefie,
4. stosunek liczby abonentów mieszkaniowych do liczby wszystkich abonentów,
5. stosunek liczby abonentów urzędowych do liczby wszystkich abonentów,
6. stosunek liczby abonentów centralkowych do liczby wszystkich abonentów,
7. stosunek liczby aparatów wrzutowych (automatów telefonicznych) do liczby wszystkich abonentów,
8. gęstość abonentów,

9. gęstość zaludnienia,
10. współczynnik zmienności,
11. współczynnik asymetrii,
12. współczynnik spłaszczenia,
13. współczynnik nierównomierności.

Z nazw o numerach od 1 do 9 łatwo się zorientować, czego one dotyczą. Widać też wyraźnie w jaki sposób wyznacza się ich wartości liczbowe. Przytoczymy więc tu tylko uwagi odnoszące się do pozostałych czterech cech. Charakteryzują one rozmieszczenie abonentów w poszczególnych strefach. Jak wynika z punktu 2, ma to wpływ na rozmieszczenie w terenie zasobów technicznych poszczególnych podsieci. Ponieważ wspomniane cechy wpływają na rozmieszczenie poszczególnych węzłów, więc od nich zależą także koszty ewentualnych połączeń. Istotnie, są one przecież funkcją długości linii. W związku z tym cechy o numerach 10, 11, 12 i 13 mają także pośredni wpływ na topologię połączeń.

Przejdziemy teraz do omówienia sposobów określania wartości liczbowych tych cech. W tym celu wprowadzimy dodatkowe oznaczenia, które będą stosowane w tym punkcie. Otóż i-tą cechę, $i = 1, 2, \ldots, 13$, traktowaną jako zmienną losową, zapiszemy jako C_i. Natomiast $C_i(a)$ oznaczać będzie C_i odniesione do a-tego obiektu (a-tej strefy) wybranego ze zbioru A, który w naszym przypadku jest mnogością wszystkich 176 stref telefonicznych. Realizację $C_i(a)$ dla $a \in A$ zapiszemy jako $c_i(a)$; E oznaczać będzie obliczanie wartości średniej, natomiast D — określenie odchylenia standardowego.

Każda strefa jest w praktyce podzielona na pewną liczbę elementarnych obszarów. Wiąże się to ze strukturą administracyjną kraju. W praktyce są to obszary gmin, miast na prawach gmin i miast wydzielonych. Będą one dalej nazywane komponentami (komponentami stref) zgodnie z terminologią wprowadzoną w [12, 15]. Do nich odniesiemy właśnie definicje C_{10}, C_{11}, C_{12} i C_{13}.

Zajmiemy się teraz zbiorem komponentów dla pewnej ustalonej strefy $a \in A$. Jego liczność oznaczymy przez k. Niech H będzie zmienną losową opisującą gęstość abonentów w poszczególnych komponentach, h_j — jej realizacją dla j-tego komponenta, $j = 1, 2, \ldots, k$, $k > 1$. Możemy teraz przystąpić do zdefiniowania $c_i(a)$, $i = 10, 11, 12$. Przyjmujemy, że $c_{10}(a) = \dfrac{DH}{EH}$. Parametr ten, zwany współczynnikiem zmienności, określa procentową wartość odchylenia standardowego w stosunku do średniej arytmetycznej. Jest to więc unormowana miara rozrzutu gęstości abonentów wokół wartości średniej. Opisuje zatem w pewien sposób nierównomierność rozmieszczenia abonentów.

Następny parametr określamy wzorem

$$c_{11}(a) = \frac{E(H-EH)^3}{D^3 H}. \tag{7}$$

Nosi on nazwę współczynnika asymetrii [5]. Istotnie, w przypadku rozkładu symetrycznego $E(H-EH)^3 = 0$. Im większa wartość $c_{11}(a)$, tym bardziej rozkład abonentów jest asymetryczny. Kolejny parametr, to tak zwany eksces, czyli współczynnik spłaszczenia [5]

$$c_{12}(a) = \frac{E(H-EH)^4}{D^4 H} - 3. \tag{8}$$

Ostatnia cecha dotyczy stopnia odchylenia rozmieszczenia abonamentów od rozkładu normalnego. Niech l_j będzie liczbą użytkowników sieci strefowej zawartych w j-tym komponencie, $j = 1, 2, \ldots, k$. Zatem $l = \sum_{i=1}^{k} l_i$ jest liczbą wszystkich abonentów w strefie. Wprowadzimy teraz ważoną gęstość użytkowników (abonentów)

$$w = \sum_{j=1}^{k} h_j \frac{l_j}{l}. \tag{9}$$

Niech ponadto, dla uproszczenia dalszych zapisów, $h = c_8(a)$ będzie średnią gęstością abonentów w strefie. Wówczas definiujemy $c_{13}(a) = \frac{w}{h}$. Parametr ten określa więc odchylenie gęstości ważonej w od gęstości średniej liczonej w tradycyjny sposób. W pracy [15] wykazano, że $c_{13}(a) \geqslant 1$.

Pozostaje jeszcze do wytłumaczenia dlaczego w konstruowanym przez nas opisie bierzemy pod uwagę aż cztery cechy charakteryzujące nierówmierność rozmieszczenia abonentów. Dzieje się tak dlatego, gdyż jak to wytłumaczono wcześniej, ma to wpływ zarówno na geometrię jak i na topologię sieci strefowej. Każde C_i, $i = 10, 11, 12, 13$, ujmuje inne cechy nierównomierności rozmieszczenia abonentów. W przypadku zaś istnienia zależności między wspomnianymi parametrami będziemy mogli niektóre z nich wykluczyć w trakcie dalszej analizy.

Dysponując wstępnie określonym zbiorem cech przechodzimy teraz do ich analizy formalno-statystycznej. Pierwsza sprawa dotyczy stopnia zróżnicowania parametrów. Wskaźnikami tego zróżnicowania są współczynniki zmienności. Ich wartości dla wszystkich trzynastu cech podano w tablicy 1. Jak widać, współczynnik zmienności dla C_2 wynosi 3,5%. Oznacza to, że wartości przybierane przez C_2 są prawie stałe, niezależnie od badanej strefy. Dlatego eliminujemy C_2 i nie będziemy go rozważać w trakcie dalszej analizy.

Przystępujemy teraz do badania rozkładów cech. Będziemy testowali hipotezę mówiącą, że poszczególne C_i, $i = 1, 3, 4, \ldots, 13$, mają rozkład normalny. Zgodnie z uwagami zawartymi w punkcie 3 użyjemy tu dwóch testów zgodności: Kołmogorowa i testu ω^2. Wartości odpowiednich statystyk przedstawiono w tablicy 2. Dla poziomu istotności 0,05 obszar krytyczny jest dany nierównością $n\omega^2 > 0{,}4614$, w przypadku testu ω^2, zaś dla testu Kołmogorowa — relacją $\sqrt{n} D_n > 1{,}36$ [20], gdzie $n = 176$. Dla poziomu istotności 0,01 mamy, odpowiednio, $n\omega^2 > 0{,}7435$ oraz $\sqrt{n}\, D_n > 1{,}63$. Stąd i z uwagi na wyniki obliczeń zawarte w tablicy 2 przyjmujemy, że C_1 i C_{11} mają rozkład normalny, zaś C_4, C_5 i C_6 zbliżony do normalnego. Jest zatem uzasadnione obliczanie współczynników korelacji liniowej jako mierników współzależności między tymi cechami. Ich wartości przedstawiono w tablicy 3. Z punktu widzenia statystyki miarodajne są współczynniki między C_1, C_4, C_5, C_6 i C_{11}. Z tablicy 3 wynika, że C_5 i C_6 są silnie skorelowane. Widać to też wyraźnie na rys. 1. Stwarza to podstawę do eliminacji jednego z tych parametrów. Z punktu widzenia ich dostępności, w sensie opisanym w punkcie 2, nie występują tu żadne istotne różnice. W związku z tym decyzję podejmujemy arbitralnie. Mianowicie, usuwamy C_5.

Tablica 1

Współczynniki zmienności dla badanych cech

Numer cechy	Współczynnik zmienności [%]
1	19,0
2	3,5
3	40,6
4	22,6
5	17,8
6	15,1
7	13,8
8	175,1
9	100,4
10	71,0
11	64,0
12	156,0
13	91,3

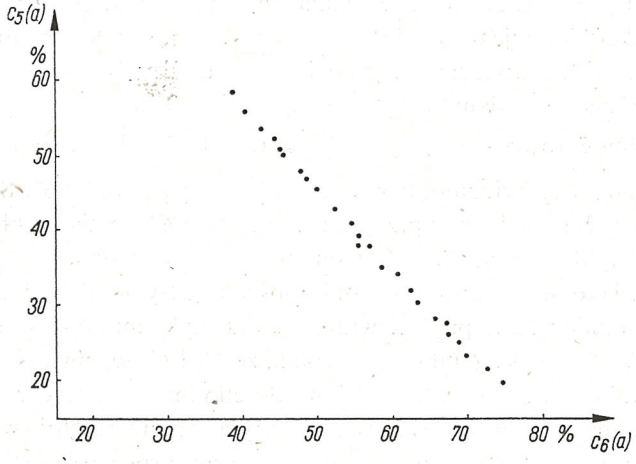
Tablica 2

Wartości statystyk: testu Kołmorogowa i testu ω^2 dla badanych cech

Numer cechy	$\sqrt{n}D_n$	$n\omega^2$
1	0,9289	0,1586
3	1,744	0,9071
4	1,328	0,5619
5	1,597	0,6137
6	1,561	0,6484
7	3,484	4,133
8	4,109	6,173
9	3,315	4,025
10	1,990	1,478
11	1,289	0,448
12	2,249	1,862
13	3,530	4,477

Jeżeli rozkłady cech nie mają charakteru normalnego, to do badania współzależności wykorzystujemy stosunek korelacyjny. Wartości tego wskaźnika zamieszczono w tablicy 4. Wynika z niej, że występuje silna zależność między cechami C_{10} i C_{13} oraz C_{11} i C_{12}. Widać to też wyraźnie na rysunkach 2 i 3. Kierując się zatem zasadą dostępności określoną w punkcie 2 usuwamy z modelu C_{12} i C_{13}.

Nie chcąc pochopnie pominąć żadnego z parametrów zweryfikowaliśmy podjęte uprzednio decyzje dotyczące eliminacji C_5, C_{12}, C_{13}. W tym celu, korzystając z wielomianów ortogonalnych aproksymowaliśmy zależności między parami cech ze zbioru $\{C_i : i = 1, 3, 4, \ldots, 13\}$. Okazało się, że wystarczającą dokładność zapewniły wielomiany



Rys. 1. Zależność między C_5 i C_6

Tablica 3

Wartości współczynników korelacji liniowej między cechami

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
−0,651	−0,745	0,845	−0,803	−0,346	−0,561	−0,578	−0,655	−0,588	−0,537	−0,557	1
	0,410	−0,702	−0,700	0,090	0,710	0,348	0,433	0,239	0,202	0,397	3
		−0,628	0,528	0,605	0,283	0,554	0,556	0,438	0,372	0,470	4
			−0,992	−0,108	−0,622	−0,533	−0,590	−0,479	−0,447	−0,532	5
				0,011	0,632	0,492	0,558	0,454	0,430	0,507	6
					0,042	0,356	0,183	0,126	0,074	0,166	7
						0,724	0,249	0,187	0,173	0,217	8
							0,242	0,209	0,195	0,174	9
								0,795	0,750	0,885	10
									0,958	0,667	11
										0,632	12

Tablica 4

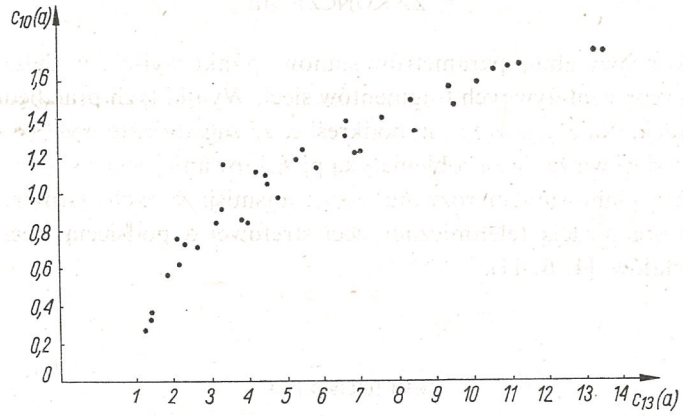
Wartości stosunków korelacyjnych między cechami

	1	3	4	6	7	8	9	10	11	12	13
1		0,615	0,783	0,767	0,323	0,582	0,494	0,629	0,561	0,533	0,528
3	0,635		0,635	0,677	0,224	0,599	0,333	0,501	0,296	0,327	0,419
4	0,771	0,607		0,801	0,335	0,469	0,404	0,598	0,456	0,446	0,457
6	0,791	0,671	0,819		0,216	0,716	0,534	0,599	0,473	0,469	0,493
7	0,249	0,269	0,304	0,189		0,041	0,030	0,163	0,193	0,209	0,592
8	0,713	0,641	0,538	0,761	0,098		0,819	0,322	0,302	0,276	0,401
9	0,593	0,286	0,463	0,507	0,098	0,849		0,255	0,199	0,211	0,281
10	0,616	0,480	0,577	0,584	0,186	0,354	0,275		0,768	0,736	0,862
11	0,566	0,276	0,463	0,453	0,166	0,273	0,221	0,762		0,925	0,708
12	0,540	0,295	0,502	0,477	0,161	0,286	0,202	0,731	0,926		0,725
13	0,564	0,412	0,510	0,530	0,328	0,353	0,211	0,915	0,694	0,689	

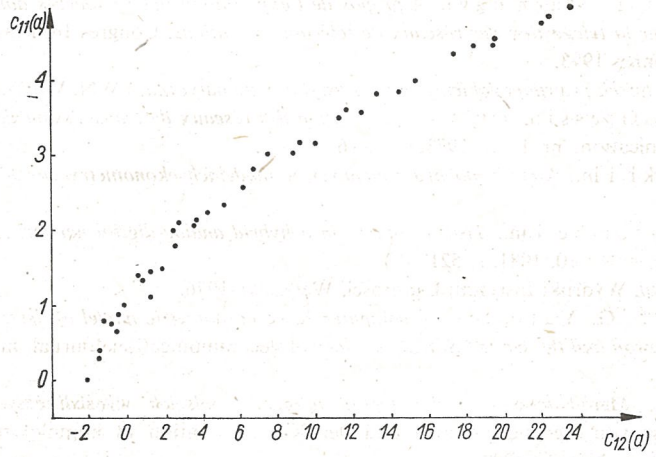
Tablica 5

Wartości współczynników korelacji krzywoliniowej między cechami

	1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1		0,671	0,808	0,851	0,804	0,363	0,752	0,656	0,714	0,593	0,563	0,714
3	0,693		0,571	0,749	0,753	0,213	0,798	0,438	0,480	0,247	0,217	0,488
4	0,748	0,480		0,682	0,575	0,643	0,569	0,633	0,605	0,465	0,427	0,598
5	0,858	0,730	0,846		0,993	0,279	0,826	0,757	0,631	0,489	0,475	0,642
6	0,822	0,729	0,817	0,993		0,286	0,820	0,652	0,595	0,465	0,458	0,613
7	0,447	0,282	0,773	0,133	0,134		0,111	0,550	0,205	0,236	0,227	0,228
8	0,769	0,864	0,415	0,807	0,820	0,137		0,761	0,351	0,198	0,200	0,370
9	0,709	0,387	0,612	0,580	0,564	0,449	0,840		0,382	0,226	0,230	0,386
10	0,696	0,495	0,625	0,608	0,588	0,195	0,542	0,429		0,811	0,783	0,966
11	0,614	0,293	0,499	0,492	0,476	0,138	0,450	0,467	0,804		0,986	0,792
12	0,579	0,255	0,439	0,478	0,472	0,093	0,418	0,436	0,752	0,996		0,745
13	0,631	0,461	0,562	0,570	0,566	0,208	0,469	0,347	0,930	0,682	0,665	



Rys. 2. Zależność między C_{10} i C_{13}



Rys. 3. Zależność między C_{11} i C_{12}

stopnia czwartego. Za wskaźnik dopasowania zależności empirycznej i funkcji aproksymującej przyjęliśmy współczynnik korelacji krzywoliniowej określony przez (6). Jego wartości zestawiono w tablicy 5. Potwierdzają one silną współzależność C_5 i C_6, C_{10} i C_{13} oraz C_{11} i C_{12}. Widać więc wyraźnie, że podjęte uprzednio decyzje były słuszne. A zatem zbiór cech opisujących poszczególne strefy przyjmuje ostatecznie następującą postać $\{C_i: i = 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Cechy te można uważać za podstawę w badaniach nad wyborem reprezentatywnych fragmentów sieci telefonicznej.

5. ZAKOŃCZENIE

Otrzymany końcowy zbiór parametrów stanowi punkt wyjścia w dalszych badaniach nad określeniem reprezentatywnych fragmentów sieci. Wyniki tych prac będą przedmiotem następnej publikacji. Należy jeszcze raz podkreślić, że zagadnienie wyboru reprezentatywnych fragmentów sieci wiąże się z problematyką projektowania sieci cyfrowych [8]. Ponadto są one związane z planowaniem rozwoju sieci transmisji danych. Istnieje bowiem wiele analogii między organizacją telefonicznej sieci strefowej a podsiecią sieci terminalowej z komutacją kanałów [4, 6, 11].

BIBLIOGRAFIA

1. M. L. Diallo, J. F. Legros, *Sampling of French local networks and applications*, Annales des Télécommunications, nr 9—10, 1981, s. 503—520.
2. N. R. Drapper, H. Smith, *Applied Regression Analysis*, John Wiley and Sons, New York 1966.
3. J. W. Dunin-Barkowski, N. W. Smirnow, *Kurs rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej dla zastosowań technicznych*, PWN, Warszawa 1969.
4. G. Fantuzzi, F. Marmuggi, *A propos de l'exploitation des ressources dans l'emploi des miniordinateurs pour la telegestion des réseaux de télécommunications*, Congres Informatique et Télécommunications, Rennes 1973.
5. M. Fisz, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa 1969.
6. G. Gatot, J. Grassin, *ORTI — Optimisation des réseaux de transmission de données*, Annales des Télécommunication, nr 1—2, 1973, s. 2-16
7. T. Grabiński i in., *Metody doboru zmiennych w modelach ekonometrycznych*, PWN, Warszawa 1982.
8. B. Jarry-Lacombe i in., *Traffic routing in a hybrid analog-digital network*, Annales des Télécommunications, nr 9—10, 1981, s. 521—537.
9. *Kartoteka Central*, Wydruki Instytutu Łączności, Warszawa 1976.
10. C. H. Luke, P. G. Yatrakis, *A computer based econometric model of demand for communications between Hawaii and the United States mainland*, Telecommunication Journal, nr 11, 1971, s. 743—746.
11. T. Nowicki, *Metod dekompozycji i metod agregacji bolszich wyczislitielnych sietiej*, Problem Seminar Analyse von Rechnersystemen und der Kommunikation in komplexen Informationsverarbeitungssystemen, Nassau 1982.
12. T. Nowicki i in., *Zbiory danych użytecznych do opisu sieci telekomunikacyjnych*, Opracowanie IOiK PAN i MNSzWiT, Warszawa 1976.
13. Z. Pawłowski, *Statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa 1976.
14. J. H. Pollard, *Numerical and statistical techniques*, Cambridge University Press, Cambridge 1977.
15. T. Stachowiak, *Modele i algorytmy wieloparametrowej klasyfikacji obszarów sieci telekomunikacyjnej*, rozprawa doktorska, Instytut Podstaw Informatyki PAN, Warszawa 1981.
16. R. Stone, *A comparison of the economic structure of regions, based on the concept of distance*, Journal of Regional Sciense, nr 2, 1960, s. 1—20.
17. S. Szulc, *Metody statystyczne*, PWE, Warszawa 1963.
18. B. Welleniuss, *A method for forecasting the demand for urban residential telephone connections*, Telecommunication Journal, nr 6, 1970, s. 262—267.
19. P. G. Yatrakis, *Determinants of the demand for international telecommunications*, Telecommunication Journal, nr 12, 1972, s. 732—746.
20. R. Zieliński, *Tablice statystyczne*, PWN, Warszawa 1972.

T. STACHOWIAK, E. TURSKA

ON SELECTING PARAMETERS CHARACTERIZING TELEPHONE ZONE NETWORKS

Summary

The paper deals with the methodology for selecting parameters describing the most important features of telephone networks. This problem is fundamental in the development planning of zone networks and thus the whole network. Attention is paid to practical aspects of selecting variables. The theoretical and statistical criteria of parameters selection have been presented. These general considerations are illustrated by an example. In this example we consider the selection of parameters describing telephone zone networks important from the point of view of design process.

T. STACHOWIAK, E. TURSKA

CHOIX DES PARAMÈTRES CARACTÉRISTIQUES POUR LES RÉSEAUX DE ZONES TÉLÉPHONIQUES

Résumé

Dans l'article on a discuté la méthodologie du choix des paramètres caractérisant les plus essentiels traits du réseau téléphonique. C'est le problème de base dans les recherches de la planification du développement des parties particulières du réseau et même de tout le réseau. On a attiré l'attention sur les prémisses essentielles du choix des variables explicatives. On a présenté aussi les critères formels-statistiques du choix des paramètres. Les considérations théoriques ont été illustrées par un exemple. On a discuté le choix des plus avantageux, du point de vue du processus de planification, paramètres décrivant les réseaux des zones téléphoniques.

T. STACHOWIAK, E. TURSKA

PARAMETERWAHL FÜR ZONENFERNMELDENETZE

Zusammenfassung

Im Aufsatz wurde die Methodologie des Verfahrens bei der Wahl von den die wesentlichsten Elemente eines Fernmeldenetzes charakterisierenden Parametern erörtert. Dieses Problem stellt die Untersuchungsgrundlage bei der Entwicklungsplanung einzelner Netzfragmente dar, somit des ganzen Netzes. Es wurde auf die praktischen Voraussetzungen bei der Wahl der Erläuterungsvariablen hingewiesen, auch wurden formell-statistische Kriterien der Parameterwahl angeführt. Die theoretischen Erwägungen wurden mittels Beispiele illustriert. Im weiteren wurde die Wahl von hinsichtlich des Projektierungsprozesses wesentlichen Parametern erwogen, die die Zonenfernmeldenetze beschreiben.

Т. СТАХОВЯК, Э. ТУРСКА

ОБ ПОДБОРЕ ПАРАМЕТРОВ ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ТЕЛЕФОННЫЕ ЗОНЫ

Резюме

Приводится методология подбора параметров характеризующих наиболее существенные свойства сети связи. Эта проблема является основной в планировании развития составных частей этой сети, а тем самым и целой сети. Особое внимание уделяется существенным предпосылком подбора переменных обьясняющих. Перечисляются также формально-статистические критерия подбора параметров. Теоретические аспекты поясняются примером. Обсуждается в нем подбор существенных, по отношении к процессу проектирования, параметров характеризующих телефонные зоны.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1985, 31, z. 1, ss. 241-263

621.396.13

Szerokopasmowe systemy radiokomunikacyjne

DANIEL JÓZEF BEM (WROCŁAW)

Instytut Telekomunikacji i Akustyki Politechniki Wrocławskiej

Otrzymano 18.11.1983

Koncepcja szerokopasmowych systemów radiokomunikacyjnych była znana od dawna. Dopiero jednak na początku lat siedemdziesiątych, dzięki ogromnemu postępowi w technologii układów scalonych, systemy szerokopasmowe stały się technicznie realizowalne i ekonomicznie opłacalne. Rozwój systemów szerokopasmowych jest związany przede wszystkim z potrzebami łączności wojskowej. Duża odporność na zakłócenia świadomie wprowadzane przez przeciwnika do środowiska propagacji fal elektromagnetycznych, utrudnienie wykrycia emisji, eliminacja zakłóceń spowodowanych zjawiskiem wielodrogowości, to główne zalety systemów szerokopasmowych w zastosowaniach militarnych. W ostatnich latach pojawiły się próby stosowania systemów szerokopasmowych w łączności cywilnej (radiokomunikacja ruchoma, radiowa służba czasu i systemy nawigacyjne, łączność satelitarna). Celem artykułu jest przedstawienie teoretycznych podstaw działania systemów szerokopasmowych z uwzględnieniem ich praktycznych zastosowań. Omówiono także sposoby rozpraszania widma oraz problem synchronizacji[1].

For congested-band operation, broadband systems appear to offer a more orderly approach to the problem and a potentially higher average traffic volume than narrow-band systems.

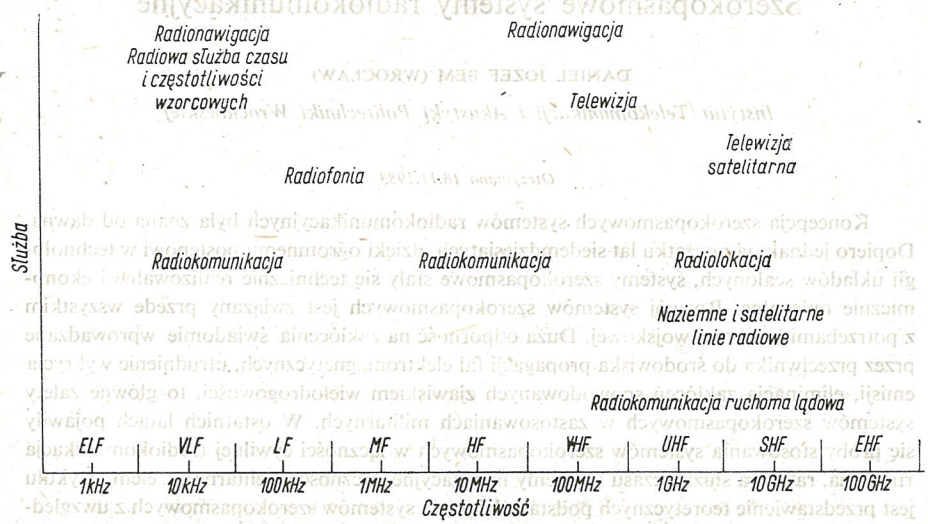
J. P. Costas (1959 r.)

1. WSTĘP

Przed bez mała stu laty została odkryta możliwość użytkowania nowego wówczas zasobu naturalnego, zwanego widmem elektromagnetycznym, charakteryzującego się wzajemnie ze sobą powiązanymi przestrzenią, czasem i częstotliwością. W początkach rozwoju radiotechniki jedynymi ograniczeniami w użytkowaniu widma elektromagnetycznego były tylko te, które wynikały z właściwości naturalnego ziemskiego środowiska elektromagnetycznego i technicznych możliwości budowanych urządzeń. Nieliczne działające wówczas urządzenia mogły być znacznie od siebie oddalone w przestrzeni i (lub) częstotliwości, tak że problem optymalnego wykorzystania widma nie istniał. W miarę postępującego rozwoju radiotechniki sytuacja zaczęła ulegać zmianie. Szybko wzrastała liczba eksploatowanych urządzeń i systemów radiowych oraz zakres wykorzystywanych częstotliwości. Obecnie wykorzystuje się praktycznie częstotliwości od bardzo małych,

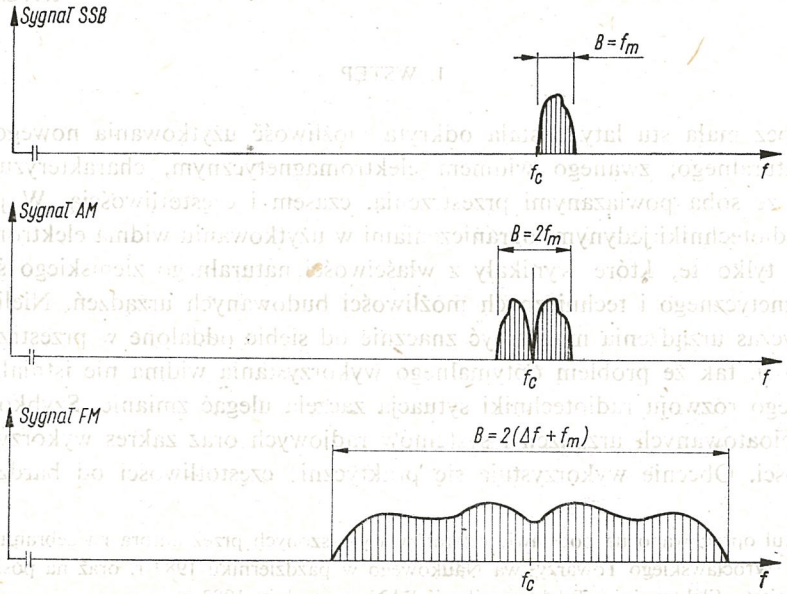
[1] Artykuł opracowano na podstawie referatów wygłoszonych przez autora na zebraniu naukowym Wydziału VI Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego w październiku 1982 r. oraz na posiedzeniu plenarnym Komitetu Elektroniki i Telekomunikacji PAN w grudniu 1983 r.

rzędu pojedynczych kiloherców, aż do częstotliwości bardzo wielkich, rzędu setek gigaherców (rys. 1), a także częstotliwości optyczne. Mimo tak szerokiego widma częstotliwości radiowych, zapotrzebowanie na usługi radiokomunikacyjne przewyższa możliwość jego zaspokojenia. Pojawia się więc niebagatelny problem optymalnego wykorzystania widma.



Rys. 1. Widmo częstotliwości radiowych

Sygnał radiowy zawierający informację zajmuje skończone pasmo w widmie częstotliwości radiowych. Szerokość tego pasma zależy od szerokości pasma sygnału informacji (w pasmie naturalnym) oraz od rodzaju modulacji, tzn. od sposobu nałożenia sygnału informacji na sygnał nośny. Najwęższe pasmo, równe szerokości pasma sygnału informacji,

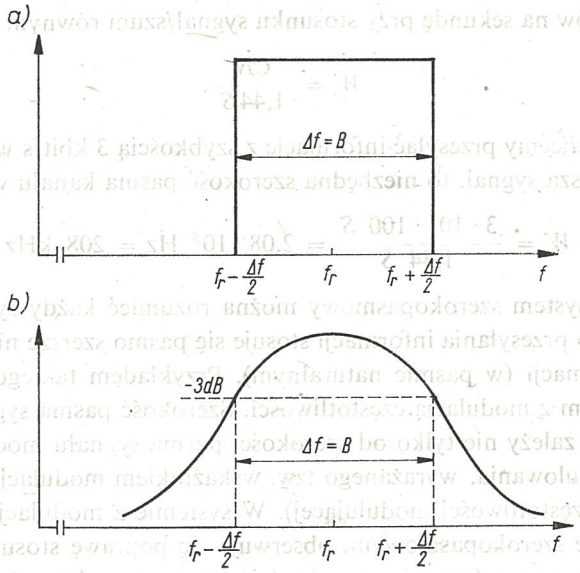


Rys. 2. Widma sygnałów zmodulowanych

zajmuje sygnał jednowstęgowy, stosowany powszechnie w radiokomunikacji krótkofalowej, szersze — sygnał o modulowanej amplitudzie stosowany w radiofonii długo-, średnio- i krótkofalowej, jeszcze szersze — sygnał o modulowanej częstotliwości stosowany m.in. w radiofonii ultrakrótkofalowej (rys. 2).

Do niedawnia dążono do maksymalnego zawężania szerokości pasma sygnałów emitowanych przez radiowe urządzenia nadawcze oraz do powiększania selektywności odbiorników radiowych, tzn. zdolności do wydzielania określonego pasma częstotliwości (rys. 3).

Na przełomie lat pięćdziesiątych i sześćdziesiątych pojawiła się rewolucyjna koncepcja poszerzania szerokości pasma emitowanych sygnałów w celu lepszego wykorzystania widma elektromagnetycznego. Już w roku 1959 J. P. Costas stwierdził, że w zatłoczonym widmie elektromagnetycznym systemy szerokopasmowe są korzystniejsze niż systemy wąskopasmowe [1].



Rys. 3. Krzywe selektywności odbiornika: a) idealna, b) rzeczywista

Praktyczna realizacja systemów szerokopasmowych była jednak w owym czasie niemożliwa ze względu na niedostateczny rozwój technologii elementów i urządzeń elektronicznych. Dopiero w latach siedemdziesiątych dzięki ogromnemu postępowi w technologii układów scalonych systemy szerokopasmowe stały się technicznie realizowalne i ekonomicznie opłacalne.

Działanie systemów szerokopasmowych opiera się na znanym twierdzeniu C. E. Shannona o przepustowości (teoretycznej) kanału telekomunikacyjnego

$$C = W \lg_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right), \tag{1}$$

przy czym:

C — przepustowość kanału w bitach na sekundę,

W — szerokość pasma kanału w Hz,
N — moc szumu,
S — moc sygnału.

Niech C będzie wymaganą przepustowością kanału; dzieląc stronami równanie (1) przez W i zmieniając podstawę logarytmowania, otrzymujemy

$$\frac{C}{W} = 1{,}44 \ln\left(1 + \frac{S}{N}\right). \tag{2}$$

Jeśli stosunek mocy sygnału do mocy szumu jest mały, powiedzmy $S/N \leqslant 0{,}1$, to logarytm w równaniu (2) możemy zastąpić pierwszym wyrazem rozwinięcia w szereg potęgowy; otrzymujemy wówczas

$$\frac{C}{W} = 1{,}44 \frac{S}{N}. \tag{3}$$

Z równania (3) możemy wyznaczyć niezbędną szerokość pasma do transmisji informacji z szybkością C bitów na sekundę przy stosunku sygnał/szum równym S/N

$$W = \frac{CN}{1{,}44S}. \tag{4}$$

Na przykład, jeśli chcemy przesyłać informację z szybkością 3 kbit/s w systuacji, gdy szum stukrotnie przewyższa sygnał, to niezbędna szerokość pasma kanału wynosi

$$W = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 100\ S}{1{,}44\ S} = 2{,}08 \cdot 10^5 \text{ Hz} = 208 \text{ kHz}.$$

Ogólnie przez system szerokopasmowy można rozumieć każdy system telekomunikacyjny, w którym do przesyłania informacji stosuje się pasmo szersze niż pasmo zajmowane przez sygnał informacji (w pasmie naturalnym). Przykładem takiego systemu może być dobrze znany system z modulacją częstotliwości. Szerokość pasma sygnału zmodulowanego w tym systemie zależy nie tylko od szerokości pasma sygnału modulującego, ale także od stopnia wymodulowania, wyrażanego tzw. wskaźnikiem modulacji (stosunek dewiacji częstotliwości do częstotliwości modulującej). W systemie z modulacją częstotliwości, jak w każdym systemie szerokopasmowym, obserwuje się poprawę stosunku sygnał/szum na wyjściu odbiornika w porównaniu z wartością tego stosunku na wejściu odbiornika. Ta poprawa, zwana zyskiem modulacji, wynosi

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{wyj} = \frac{3}{2}\beta^2 \left(\frac{S}{N}\right)_{we}, \tag{5}$$

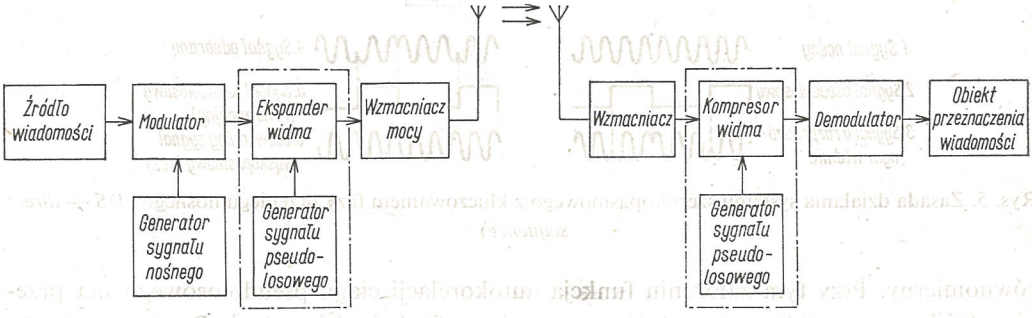
przy czym:

β — wskaźnik modulacji,
$(S/N)_{we}$ — wartość stosunku sygnał/szum na wejściu odbiornika,
$(S/N)_{wyj}$ — wartość stosunku sygnał/szum na wyjściu odbiornika.

Systemy z modulacją częstotliwości i dużym wskaźnikiem modulacji można więc uważać za systemy szerokopasmowe.

W tym opracowaniu nie będziemy jednak zajmowali się systemami z modulacją częstotliwości lub im podobnymi. Przez systemy szerokopasmowe będziemy dalej rozumieli

systemy, w których proces poszerzania (ekspansji) widma jest niezależny od procesu modulacji (w systemie *FM* poszerzenie widma następuje w procesie modulacji). Schemat szerokopasmowej linii radiowej pokazano na rys. 4. W porównaniu z konwencjonalną linią radiową po stronie nadawczej wtrącono ekspander widma, a po stronie odbiorczej — kompresor widma. Ekspansji widma można dokonać w różny sposób, największe znaczenie mają następujące sposoby:



Rys. 4. Schemat blokowy szerokopasmowej linii radiowej (linią przerywaną zaznaczono bloki nie występujące w konwencjonalnej linii radiowej)

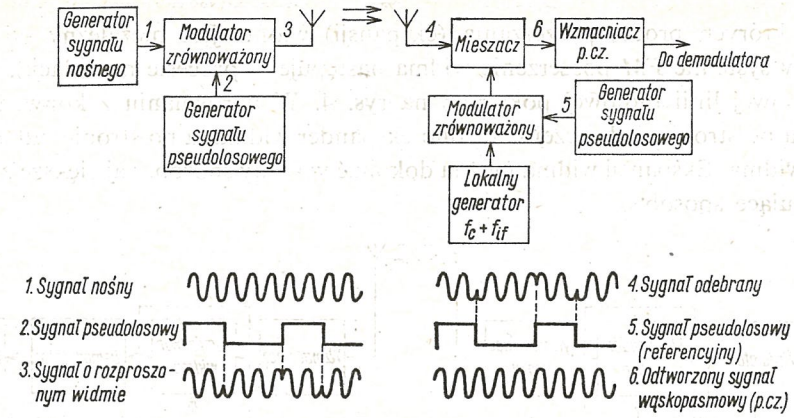
— kluczowanie fazy sygnału nośnego ciągiem pseudolosowym o przepływności znacznie większej niż szerokość pasma sygnału informacji (system *DS — direct sequence*),
— przełączanie częstotliwości sygnału nośnego według pseudolosowego schematu (system *FH — frequency hopping*),
— modulacja częstotliwości w czasie trwania impulsu (*chirp modulation*).

Możliwe są również systemy kombinowane, a także systemy ograniczające czas wysyłania sygnału do pewnych określonych przedziałów (*TH — time hopping*). W dalszym ciągu ograniczymy się do rozważenia systemów *DS* i *FH*.

2. SYSTEMY *DS*

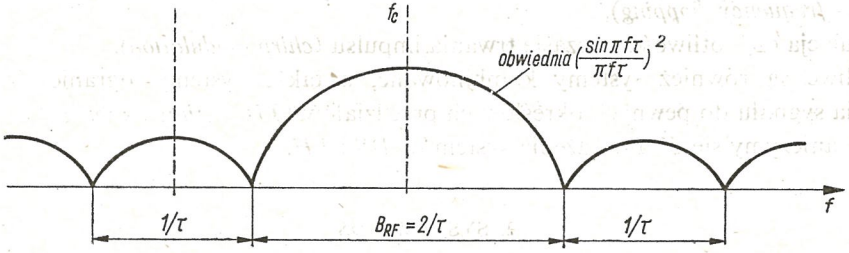
Zasadę działania systemu *DS* objaśnimy na najprostszym przykładzie przedstawionym na rys. 5 [1, 2]. Dla uproszczenia nie będziemy na razie interesować się procesem wprowadzania i wyprowadzania informacji. Ograniczymy się więc do omówienia rozpraszania niemodulowanego sygnału nośnego, a następnie do kompresji tak utworzonego sygnału i odtworzenia przebiegu nośnego. Generator ciągu pseudolosowego wytwarza przebieg prostokątny, przyjmujący tylko wartości $+1$ i -1, przy czym momenty zmiany znaku określa odpowiednia reguła kodowa. W omawianym przykładzie przebieg ten doprowadza się do jednego z wejść modulatora zrównoważonego, w którym następuje kluczowanie fazy sygnału nośnego, doprowadzonego do drugiego wejścia modulatora. Na wyjściu modulatora otrzymujemy sygnał będący iloczynem sygnału nośnego i przebiegu pseudolosowego.

Uczynimy dalej założenie, że odstęp czasu między dwoma dowolnymi zmianami znaku w ciągu pseudolosowym jest całkowitą wielokrotnością pewnego okresu podstawowego τ (okres taktowania), a rozkład prawdopodobieństwa momentu przeskoku jest



Rys. 5. Zasada działania systemu szerokopasmowego z kluczowaniem fazy przebiegu nośnego (*DS — direct sequence*)

równomierny. Przy tym założeniu funkcja autokorelacji ciągu pseudolosowego ma przebieg trójkątny, a widmową gęstość mocy opisuje funkcja $(\sin x/x)^2$. Przyjmuje się, że rozpiętość widma jest określona jako przedział częstotliwości pomiędzy dwoma sąsiednimi zerami obejmujący główne maksimum krzywej (rys. 6), czyli wynosi $2/\tau$. Jak widać, okres taktowania τ decyduje o szerokości pasma emitowanego sygnału B_{RF}. Kluczując na przykład sygnał nośny z częstotliwością $1/\tau = 5$ MHz otrzymujemy sygnał wyjściowy o pasmie $B_{RF} = 10$ MHz.

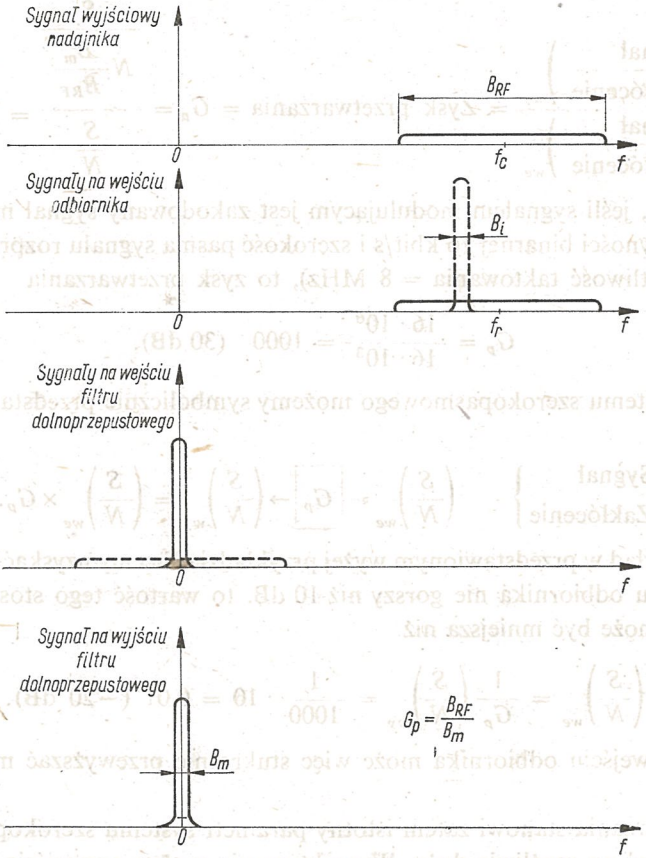


Rys. 6. Widmo sygnału rozproszonego w systemie *DS*

W odbiorniku sygnał szerokopasmowy zostaje poddany operacji analogicznej do stosowanej w nadajniku, tzn. mnoży się go przez sygnał pseudolosowy. Jeśli przebieg ten jest identyczny z przebiegiem stosowanym po stronie nadawczej (tzn. zbudowany w oparciu o ten sam ciąg kodowy i zsynchronizowany), to w wyniku takiego postępowania otrzymujemy z powrotem sygnał nośny (rys. 5).

Gdy w nadajniku do modulatora zrównoważonego doprowadzamy sygnał zmodulowany o rozpiętości widma B_m, to sygnał wyjściowy (którego widmo jest splotem widm sygnałów wymnażanych) zajmuje przedział częstotliwości $B_{RF} = 2/\tau + B_m \approx 2/\tau$, ponieważ zwykle $B_m \ll 2/\tau$. Przykładowo, jeśli sygnałem modulującym jest zakodowany sygnał mowy (modulacja delta) o przepływności 16 kbit/s i częstotliwość taktowania wynosi $1/\tau = 5$ MHz, to szerokość pasma sygnału wyjściowego jest równa $B_{RF} = 2 \cdot 5 \cdot 10^6 + 16 \cdot 10^3 = 10{,}016 \cdot 10^6$ Hz ≈ 10 MHz.

W przypadku zgodności przebiegów pseudolosowych po stronie nadawczej i odbiorczej, na wyjściu odbiornika otrzymujemy z powrotem sygnał modulujący o szerokości pasma B_m i mocy proporcjonalnej do mocy odebranego sygnału szerokopasmowego. Jeśli na wejściu odbiornika oprócz pożądanego sygnału szeropasmowego (tzn. sygnału o znanej sekwencji kodowej) występują inne sygnały (wąskopasmowe lub szerokopasmowe adresowane inną sekwencją kodową), to ich widma ulegają rozproszeniu co najmniej w takim stopniu, w jakim ulega rozproszeniu sygnał po stronie nadawczej [3]. Na wyjście odbiornika przedostaje się więc znikoma część mocy sygnałów niepożądanych (rys. 7).



Rys. 7. Objaśnienie mechanizmu powstawania zysku przetwarzania w systemach *DS*

Opisany efekt wyjaśnia skąd wynika duża odporność systemów szerokopaskowych na zakłócenia — odporność, która umożliwia im poprawną pracę przy stosunku sygnał/szum znacznie mniejszym od jedności. Z powyższym wiąże się pewna miara jakości systemów szerokopasmowych, mianowicie tzw. zysk przetwarzania (*processing gain*), definiowany analogicznie jak zysk modulacji. Załóżmy, że na wejście odbiornika poza rozproszonym sygnałem pożądanym o mocy S działa wąskopasmowy sygnał zakłócający o mocy N (rys. 7). Na wyjściu korelatora sygnał szerokopasmowy ulega skupieniu, jego szerokość pasma zostaje zawężona do wartości B_m, a moc nie ulega zmianie. Sygnał zakłócający zostaje

natomiast rozproszony co najmniej w pasmie o szerokości B_{RF}, tak że gęstość mocy tego sygnału na wejściu filtru donoprzepustowego — przy założeniu równomiernego rozpraszania — wynosi N/B_{RF}. Moc sygnału niepożądanego na wyjściu filtru dolnoprzepustowego (idealnego) jest więc równa NB_m/B_{RF}. Stosunek mocy sygnału użytecznego do mocy sygnału zakłócającego na wyjściu filtru dolnoprzepustowego jest więc większy niż na jego wejściu. Poprawa stosunku sygnał/zakłócenie w wyniku rozpraszania widma sygnału użytecznego w nadajniku i jego skupiania w odbiorniku nosi nazwę zysku przetwarzania

$$\frac{\left(\frac{\text{Sygnał}}{\text{Zakłócenie}}\right)_{wy}}{\left(\frac{\text{Sygnał}}{\text{Zakłócenie}}\right)_{we}} = \text{Zysk przetwarzania} = G_p = \frac{\frac{S}{N\frac{B_m}{B_{RF}}}}{\frac{S}{N}} = \frac{B_{RF}}{B_m}. \tag{6}$$

Przykładowo, jeśli sygnałem modulującym jest zakodowany sygnał mowy (modulacja delta) o przepływności binarnej 16 kbit/s i szerokość pasma sygnału rozproszonego wynosi 16 MHz (częstotliwość taktowania = 8 MHz), to zysk przetwarzania

$$G_p = \frac{16 \cdot 10^6}{16 \cdot 10^3} = 1000 \quad (30 \text{ dB}).$$

Działanie systemu szerokopasmowego możemy symbolicznie przedstawić w następujący sposób

$$\left.\begin{matrix}\text{Sygnał}\\ \text{Zakłócenie}\end{matrix}\right\} \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{we} \circ\!\!-\boxed{G_p}\!\!\rightarrow \left(\frac{S}{N}\right)_{wy} = \left(\frac{S}{N}\right)_{we} \times G_p.$$

Jeśli na przykład w przedstawionym wyżej przykładzie chcemy uzyskać stosunek sygnał/szum na wyjściu odbiornika nie gorszy niż 10 dB, to wartość tego stosunku na wejściu odbiornika nie może być mniejsza niż

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{we} = \frac{1}{G_p}\left(\frac{S}{N}\right)_{wy} = \frac{1}{1000} \cdot 10 = 0{,}01 \quad (-20 \text{ dB}).$$

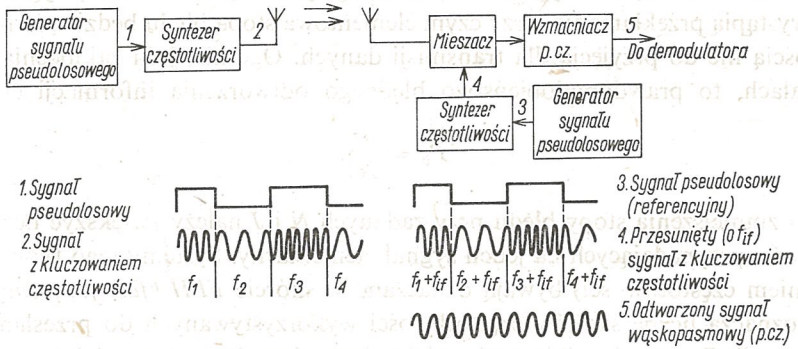
Moc szumu na wejściu odbiornika może więc stukrotnie przewyższać moc sygnału użytecznego!

Zysk przetwarzania stanowi zatem istotny parametr systemu szerokopasmowego i jest wskazane, aby był on możliwie duży. W praktyce nie można oczywiście zwiększać zysku przetwarzania nieograniczenie. Szerokość pasma sygnału rozproszonego jest ograniczona szybkością kluczowania, czyli częstotliwością podstawową ciągu kodowego. Współczesne układy scalone pozwalają generować takie ciągi o częstotliwości podstawowej dochodzącej do 300 MHz. Występuje tu jednak jeszcze jeden problem: aby generator sygnału pseudolosowego był praktycznie użyteczny, musi on pracować bezbłędnie przez okres kilku — kilkunastu godzin. Dla spełnienia tego wymagania generatory kodowe o dużej częstotliwości podstawowej muszą się odznaczać ogromną niezawodnością. Na przykład generator o częstotliwości 100 MHz wytwarza w ciągu godziny $3{,}6 \cdot 10^{11}$ bitów. Jeśli założymy, że prawdopodobieństwo przekłamania w tym okresie powinno być nie większe niż 0,1, to generator może się mylić raz na 30 tysięcy miliardów bitów (raz na 30 terabitów).

Pozostaje jeszcze zagadnienie synchronizacji generatorów kodowych w nadajniku i odbiorniku, problem kluczowy dla poprawnej pracy systemu i tym trudniejszy do rozwiązania, im większa jest częstotliwość podstawowa tych generatorów: generatory o częstotliwości 100 MHz muszą być zsynchronizowane z dokładnością do 5 ns (pół bita). Tak więc na razie znaczenie praktyczne mają systemy, w których podstawowa częstotliwość kluczowania nie przekracza 100 MHz. Drugim czynnikiem określającym zysk przetwarzania jest szerokość pasma sygnału modulującego B_m. Na przykład do transmisji jednej rozmowy telefonicznej przy zastosowaniu modulacji delta potrzeba kanału o szerokości 16 kHz. Zysk przetwarzania w tym wypadku wynosi $2 \cdot 100 \cdot 10^6/16 \cdot 10^3 = 1{,}25 \cdot 10^4 = 41$ dB. Przy transmisji danych, jeśli użytkownicy systemu godzą się na bardzo wolne przesyłanie informacji, można zmniejszyć szerokość pasma do dziesięciu herców; dalsze zmniejszanie szerokości pasma grozi niestabilnością pracy systemu. Tak więc w obecnym stanie techniki za największą wartość zysku przetwarzania możemy przyjąć $G_p = 2 \times \times 100 \cdot 10^6/10 = 2 \cdot 10^7 = 73$ dB.

3. SYSTEMY *FH*

Zasadę działania systemów szerokopasmowych z kluczowaniem częstotliwości ilustruje rys. 8 [1, 2]. Generator ciągu pseudolosowego steruje syntezer częstotliwości według odpowiedniej reguły kodowej. Częstotliwość wyjściowa zmienia się więc skokowo z okresem τ. Widmo sygnału wyjściowego pokazano na rys. 9. Po stronie odbiorczej sygnał szeroko-



Rys. 8. Zasada działania systemu szerokopasmowego z przełączaniem częstotliwości przebiegu nośnego (*FH — frequency hopping*)

pasmowy jest mieszany z repliką sygnału nadawanego przesuniętą o pewną stałą wartość częstotliwości, tak że iloczyn $\{f_1, f_2, \ldots, f_N\} \times \{f_1+f_{if}, f_2+f_{if}, \ldots, f_N+f_{if}\}$ daje stałą częstotliwość różnicową f_{if} wówczas, gdy ciągi kodowe po stronie nadawczej i odbiorczej są synchroniczne.

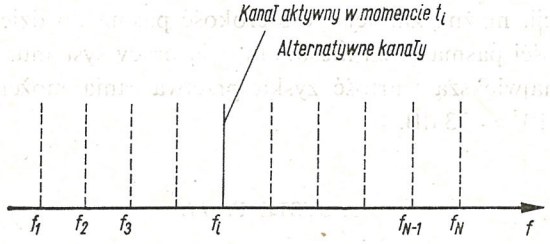
Podobnie jak w systemach *DS*, widmo każdego sygnału nie będącego repliką sygnału odniesienia w odbiorniku ulega rozproszeniu, a szerokość pasma sygnału niepożądanego (po rozproszeniu) jest równa kowariancji obu sygnałów.

Zysk przetwarzania systemów *FH*, w których szerokość pasma pojedynczego kanału jest równa odstępowi między kanałami, jest taki sam jak w systemach *DS*, tzn. jest określony

wzorem (6). Jeśli jednak odstęp między kanałami jest większy niż szerokość kanału (kanały nie stykają się), to zysk przetwarzania wyraża się w następujący sposób

$$G_p = \text{liczba dostępnych kanałów częstotliwościowych} = N. \tag{7}$$

Na przykład mając do dyspozycji 1000 kanałów częstotliwościowych możemy zbudować system o zysku przetwarzania równym 30 dB. Wzór (7) jest oczywiście słuszny także dla systemów, w których odstęp między kanałami jest równy szerokości kanału, mamy bowiem wówczas $B_{RF} = NB_m$, przy czym założono, że szerokość pojedynczego kanału jest równa szerokości pasma zajętego przez sygnał niosący informację.



Rys. 9. Widmo sygnału rozproszonego w systemie *FH*

Systemy *FH* są — w odróżnieniu od systemów *DS* — wrażliwe na zakłócenia wąskopasmowe. Niech w systemie 1000-kanałowym częstotliwość sygnału zakłócającego wpada w jeden z kanałów. Jeśli moc sygnału zakłócającego jest większa od mocy sygnału użytecznego, to wystąpią przekłamania, przy czym elementowa stopa błędu będzie równa 0,001, co jest wartością nie do przyjęcia dla transmisji danych. Ogólnie, jeśli zakłócenia występują w J kanałach, to prawdopodobieństwo błędnego odtworzenia informacji elementarnej

$$P_b = \frac{J}{N}. \tag{8}$$

W celu zmniejszenia stopy błędu przy zadanych N i J należy zwiększyć liczbę skoków częstotliwości przypadających na jeden sygnał elementarny. Systemy tego typu (z szybkim kluczowaniem częstotliwości) bywają oznaczane w skórcie *FFH* (*fast frequency hopping*). Niech m oznacza liczbę skoków częstotliwości wykorzystywanych do przesłania jednego bitu informacji. Po stronie odbiorczej podejmujemy decyzję o obecności sygnału na podstawie odbioru sygnałów w n kanałach (reguła n z m). Prawdopodobieństwo wystąpienia błędu przy tej regule odbioru podlega rozkładowi dwumianowemu

$$P_b = \sum_{i=n}^{m} \binom{m}{n} P^i (1-P)^{m-i}, \tag{9}$$

przy czym $P = J/N$ jest prawdopodobieństwem wystąpienia błędu przy wykorzystywaniu pojedynczego skoku częstotliwości do transmisji jednego bitu informacji ($m = 1$).

W poprzednio rozważanym przykładzie ($J = 1$, $N = 1000$) przy zastosowaniu częstotliwości kluczowania trzykrotnie większej niż szybkość przesyłania informacji ($m = 3$) i podejmowaniu decyzji na podstawie sygnałów odebranych w dwóch kanałach ($n = 2$,

reguła: dwa z trzech) prawdopodobieństwo błędnego odtworzenia informacji elementarnej

$$P_b = 3P^2(1-P)+P^3 = 3 \cdot 0{,}001^2 \cdot 0{,}999+0{,}001^3 \approx 3 \cdot 10^{-6}.$$

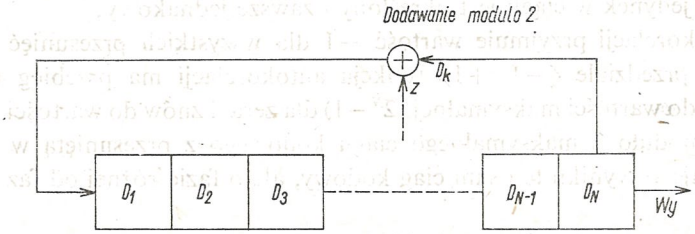
Jak widać zwiększenie częstotliwości kluczowania w istotny sposób wpływa na stopę błędu. Należy jednak zdawać sobie sprawę, że korzyść ta wiąże się nie tylko z koniecznością zastosowania lepszego syntezera częstotliwości (nadążającego za szybszym kluczowaniem), lecz jest także okupiona zwiększeniem szerokości pasma B_{RF}, ponieważ pasmo pojedynczego kanału staje się szersze, a liczba kanałów nie ulega zmianie. Jeśli natomiast chcemy obniżyć stopę błędu nie zmieniając szerokości pasma, to konieczne jest zmniejszenie szybkości przesyłania informacji.

4. KODY

Dobór odpowiednich ciągów kodowych jest niezmiernie ważny do poprawnej pracy systemów szerokopasmowych. Ze względu na korelacyjną metodę odbioru wymaga się, aby reguła tworzenia ciągów kodowych zapewniała dużą wartość funkcji autokorelacji dla $\tau = 0$ i stałą wartość tej funkcji w całym zakresie określoności z wyjątkiem otoczenia punktu $\tau = 0$ oraz małą wartość funkcji korelacji wzajemnej między poszczególnymi ciągami. Spełnienie tych wymagań ułatwia wyodrębnienie w urządzeniu odbiorczym sygnału pożądanego spośród innych sygnałów tego samego systemu i sumujących się z nimi zakłóceń.

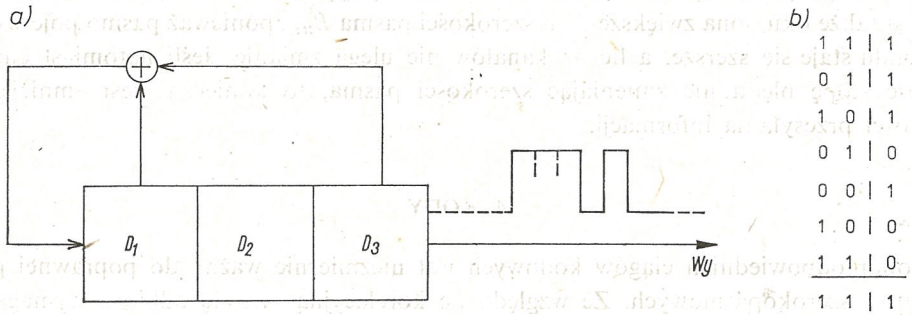
Do ciągów spełniających wspomniane wymagania i równocześnie dających się łatwo generować za pomocą popularnych układów scalonych zalicza się m.in. ciągi liniowe o maksymalnej długości (*maximal linear code sequences*). W dalszym ciągu zajmiemy się tylko tymi ciągami. Trzeba jednak zauważyć, że choć ciągi maksymalne służą doskonale do rozpraszania widma, uodporniając w ten sposób sygnał na zakłócenia, a także zapewniając inne korzyści wynikające ze stosowania systemów szerokopasmowych (np. precyzyjny pomiar odległości), to nie zapewniają one tajemnicy korespondencji. Kody liniowe są łatwe do rozszyfrowania, wystarczy znać krótką sekwencję zawierającą $(2N-1)$ bitów, aby rozszyfrować cały ciąg. Pamiętajmy jednak, że zadaniem systemów szerokopasmowych nie jest utajnienie korespondencji, choć istnieje i taka możliwość, jeśli zamiast kodu liniowego zastosujemy kody odporne na rozszyfrowanie.

Ciągi maksymalne są, zgodnie z nazwą, najdłuższymi ciągami, jakie mogą być generowane za pomocą określonego rejestru przesuwającego. Stosując rejestr binarny zawierający



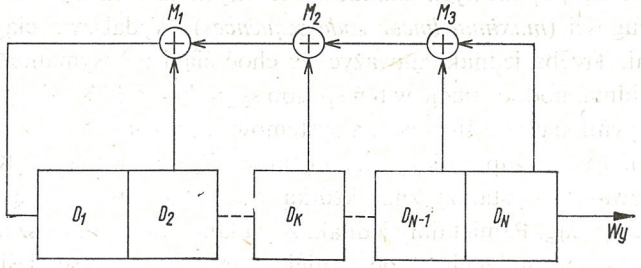
Rys. 10. Prosty układ generatora sygnału pseudolosowego z rejestrem przesuwającym

N stopni, możemy generować ciągi maksymalne o długości (2^N-1) bitów. Prosty układ generatora ciągu kodowego z rejestrem przesuwającym pokazano na rys. 10. Charakter generowanego ciągu kodowego zależy od układu sprzężenia zwrotnego. Na rys. 11 pokazano prosty, trzystopniowy generator ciągu maksymalnego (długość ciągu $= 2^3-1 = 7$) oraz generowany przezeń ciąg kodowy. Możliwe jest oczywiście pobieranie i sumowanie



Rys. 11. Trzystopniowy generator ciągu maksymalnego: a) schemat, b) stany rejestru i generowany ciąg

informacji z kilku stopni, a następnie wykorzystanie tak utworzonego sygnału, jako sygnału sprzężenia zwrotnego (rys. 12). Nie każdy układ sprzężenia zwrotnego zapewnia generację ciągu o maksymalnej długości. W tablicy 1 podano przykładowo dla kilku rejestrów o różnej długości układy połączeń (numery stopni) sprzężenia zwrotnego, zapewniające generację ciągów kodowych o maksymalnej długości.



Rys. 12. Generator sygnału pseudolosowego z wieloma odczepami

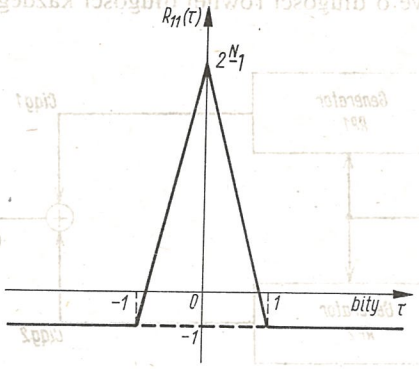
Ciągi o maksymalnej długości charakteryzują się następującymi właściwościami:

— liczba jedynek w ciągu jest zawsze większa o jeden od liczby zer;
— rozkład zer i jedynek w ciągu jest określony i zawsze jednakowy;
— funkcja autokorelacji przyjmuje wartość -1 dla wszystkich przesunięć z wyjątkiem 0 ± 1 bit; w przedziale $\langle -1, +1 \rangle$ funkcja autokorelacji ma przebieg trójkątny od wartości -1 do wartości maksymalnej (2^N-1) dla zera, i znów do wartości -1 (rys. 13);
— sumowanie modulo 2 maksymalnego ciągu kodowego z przesuniętą w fazie repliką tego ciągu daje w wyniku ten sam ciąg kodowy, ale o fazie różnej od faz obu składników;
— każdy możliwy stan rejestru (z wyjątkiem stanu zerowego) występuje raz i tylko raz podczas generacji kompletnego cyklu kodowego.

Tablica 1

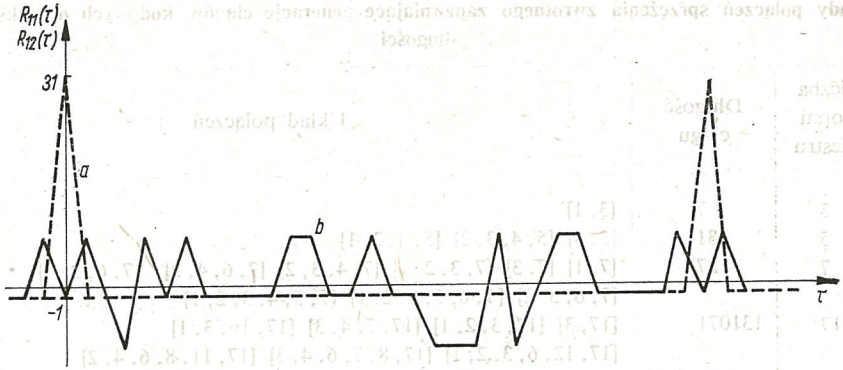
Układy połączeń sprzężenia zwrotnego zapewniające generację ciągów kodowych o maksymalnej długości

Liczba stopni rejestru	Długość ciągu	Układ połączeń
3	7	[3, 1]
5	31	[5, 3] [5, 4, 3, 2] [5, 4, 2, 1]
7	127	[7, 1] [7, 3] [7, 3, 2, 1] [7, 4, 3, 2] [7, 6, 4, 2] [7, 6, 3, 1] [7, 6, 5, 2] [7, 6, 5, 4, 2, 1] [7, 5, 4, 3, 2, 1]
17	131071	[17, 3] [17, 3, 2, 1] [17, 7, 4, 3] [17, 16, 3, 1] [17, 12, 6, 3, 2, 1] [17, 8, 7, 6, 4, 3] [17, 11, 8, 6, 4, 2] [17, 9, 8, 6, 4, 1] [17, 16, 14, 10, 3, 2] [17, 12, 11, 8, 5, 2]
89	618970 019642 690137 449562 $112 \approx \approx 6 \cdot 10^{26}$	[89, 6, 5, 3]



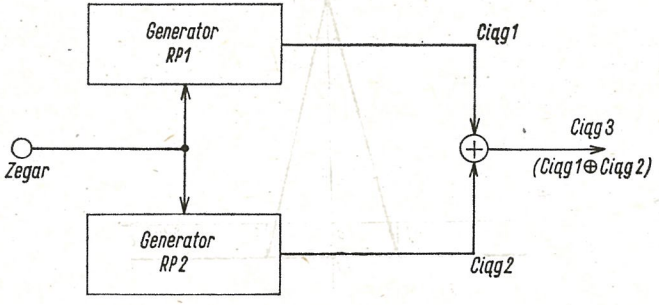
Rys. 13. Funkcja autokorelacji ciągu kodowego o maksymalnej długości

Niestety funkcja korelacji wzajemnej między różnymi ciągami nie daje się opisać w tak prosty sposób jak funkcja autokorelacji. Na rys. 14 pokazano przebieg funkcji korelacji wzajemnej dla dwóch ciągów kodowych generowanych przez rejestr pięciostopniowy. Na tym samym rysunku zaznaczono linią przerywaną przebieg funkcji autokorelacji. Wartość maksymalna funkcji autokorelacji wynosi 31, funkcja korelacji wzajemnej ma dziesięć maksimów o jednakowej wartości równej 7. Wskaźnik dyskryminacji w tym wypadku wynosi tylko 0,23. Przy niekorzystnym stosunku mocy nadajników któreś z maksimów funkcji korelacji wzajemnej może być zinterpretowane przez odbiornik jako maksimum funkcji autokorelacji, co oczywiście doprowadzi do błędnego odbioru.



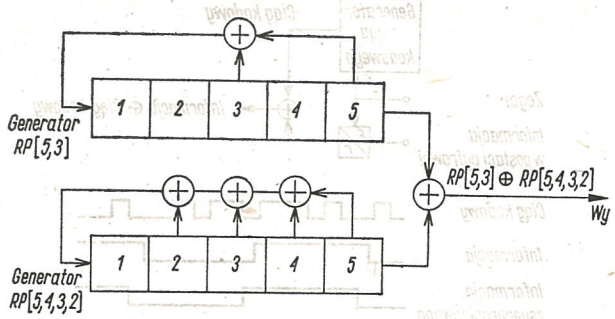
Rys. 14. Funkcje autokorelacji i korelacji wzajemnej dla ciągów generowanych przez rejestr pięciostopniowy
a — funkcja autokorelacji ciągu [5, 3]; b — funkcja korelacji wzajemnej ciągów [5, 3] i [5, 4, 3, 2]

Choć ciągi o maksymalnej długości są szczególnie dogodne do stosowania w systemach szerokopasmowych, to w praktyce wykorzystuje się również ciągi niemaksymalne, ze względu na łatwość generacji różnych ciągów. Przykładem generatora ciągów niemaksymalnych, otrzymywanych w wyniku sumowania dwóch ciągów maksymalnych jest generator Golda (rys. 15). Zmieniając przesunięcie fazy między sumowanymi ciągami otrzymujemy różne ciągi kodowe o długości równej długości każdego ze składników. Przykład



Rys. 15. Generator Golda

generatora Golda złożonego z dwóch rejestrów pięciostopniowych pokazano na rys. 16. Zmieniając przesunięcie fazowe między kodami składowymi od 0 do 30 bitów (przesunięcie o 31 bitów jest równoznaczne z przesunięciem o 0 bitów), otrzymujemy 31 różnych ciągów kodowych. Do tego należy dodać dwa ciągi wyjściowe, razem mamy więc 33 różne ciągi kodowe. Generator Golda umożliwia więc generowanie w łatwy sposób wielu różnych ciągów kodowych. W ogólnym wypadku generator Golda może zawierać więcej niż dwa rejestry, liczba dostępnych kodów jest wówczas równa: $(2^{NR}-1)$ ciągów niemaksymalnych o długości (2^N-1) oraz R ciągów maksymalnych o tej samej długości, przy czym N jest długością rejestru, a R — liczbą rejestrów.



Przesunięcie zerowe

1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0
⊕ 1 1 1 1 1 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 0 0 1 1 1 0
0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 0 0 0 1 0

Przesunięcie 1 bit

1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0
⊕ 1 1 1 1 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1
0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1

Przesunięcie 5 bitów

1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0
⊕ 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 1
1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 0 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 1 1

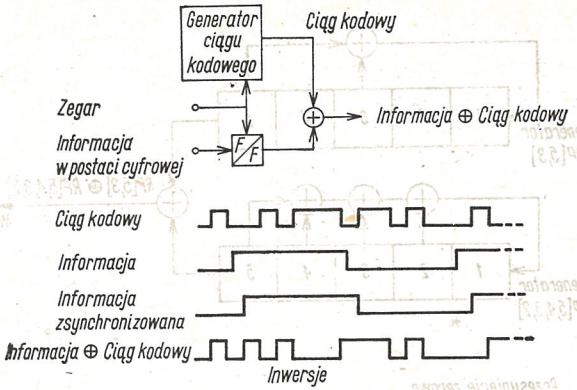
Rys. 16. Generator Golda wykorzystujący dwa generatory ciągów maksymalnych z pięciostopniowymi rejestrami przesuwającymi (RP [5, 3] i RP [5, 4, 3, 2]): a) schemat, b) przykłady generowanych ciągów

5. WPROWADZANIE I WYPROWADZANIE INFORMACJI

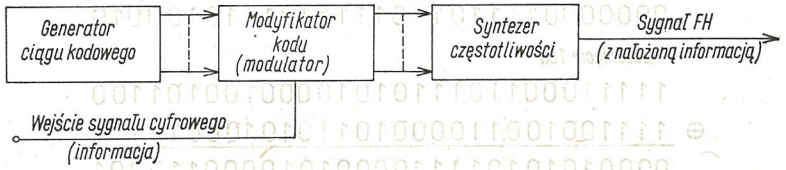
Do przesyłania informacji w szerokopasmowych liniach radiowych można stosować dowolną ze znanych metod modulacji (modulację amplitudy, modulację kąta, modulacje impulsowe). Systemy szerokopasmowe są jednak szczególnie predysponowane do przesyłania informacji cyfrowych. Cyfryzacja wszelkiego rodzaju sygnałów informacyjnych staje się coraz powszechniejsza. Ograniczymy się więc tylko do omówienia przesyłania w szerokopasmowych liniach radiowych informacji pod postacią cyfrową.

W systemach *DS* sygnał cyfrowy zawierający informację dodaje się modulo 2 do ciągu kodowego (rys. 17). Otrzymany w ten sposób zmodyfikowany ciąg kodowy służy do kluczowania fazy sygnału nośnego. W odbiorniku, po kompresji widma, otrzymujemy sygnał wąskopasmowy z kluczowaniem fazy. Sygnał ten poddajemy demodulacji w konwencjonalny sposób, na przykład za pomocą pętli fazowej Costasa. W ten sposób na wyjściu odbiornika odtwarzamy informację, wprowadzoną po stronie nadawczej do układu modyfikatora kodu.

Koncepcję modyfikacji ciągu kodowego do wprowadzania informacji można również stosować w systemach *FH* (rys. 18). Prosty modulator *FH* zawiera trzy części: generator



Rys. 17. Wprowadzenie informacji przez modyfikację ciągu kodowego (dodawanie modulo 2 ciągu informacyjnego do ciągu kodowego) w systemie *DS*



Rys. 18. Wprowadzenie informacji przez modyfikację ciągu kodowego w systemie *FH*

ciągu kodowego, modyfikator kodu (modulator) i syntezer częstotliwości. Liczba n równoległych bitów (liczba linii) na wyjściu generatora ciągu kodowego jest związana z liczbą P dostępnych do wyboru częstotliwości (w syntezerze) w następujący sposób

$$n = \lg_2 P. \tag{10}$$

Linie wyjściowe generatora ciągu kodowego są połączone z modyfikatorem kodu, w którym następuje sumowanie modulo 2 każdego bitu generatora z bitem informacyjnym. Na wyjściu modyfikatora kodu otrzymujemy więc niezmieniony układ bitów, gdy bit informacyjny jest zerem, lub układ dopełniający, gdy bit informacyjny jest jedynką (rys. 19). Na przykład, jeśli na wyjściu generatora występuje ciąg

$$\{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5\} = [1, 0, 1, 1, 0],$$

to na wyjściu modyfikatora kodu otrzymujemy

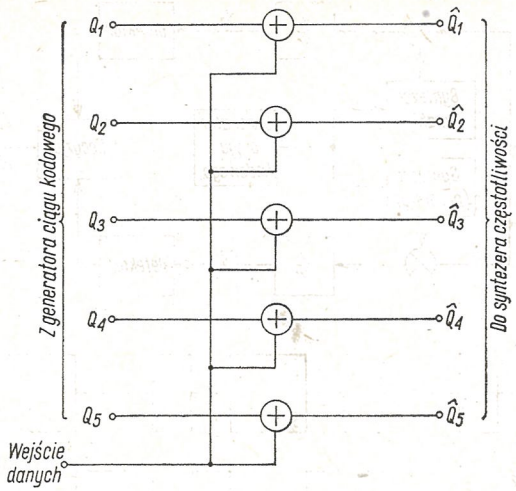
$$\{\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \hat{Q}_3, \hat{Q}_4, \hat{Q}_5\} = \{1, 0, 1, 1, 0\},$$

gdy w ciągu informacyjnym występuje zero (przerwa), lub

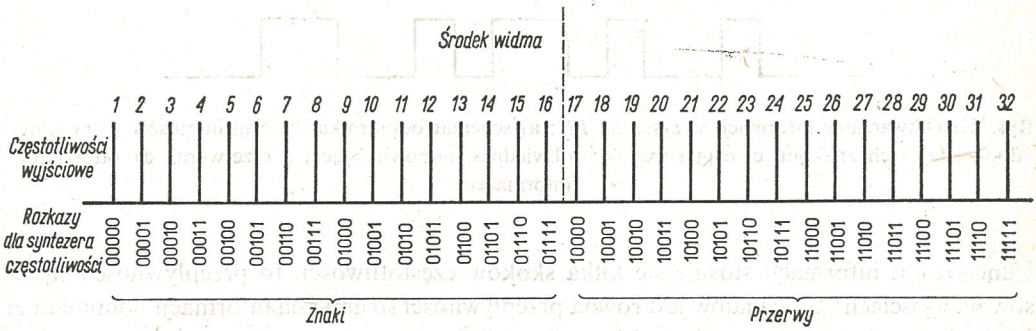
$$\{\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \hat{Q}_3, \hat{Q}_4, \hat{Q}_5\} = \{0, 1, 0, 0, 1\},$$

gdy w ciągu informacyjnym występuje jedynka (znak).

Sygnały z wyjścia modyfikatora kodu sterują syntezer częstotliwości. Rozkład częstotliwości odpowiadających znakom i przerwom (jedynki i zera sygnału informacyjnego) jest w omawianym przykładzie symetryczny (rys. 20). W przedstawionym przykładzie znakowi odpowiada częstotliwość f_{10}, przerwie natomiast — częstotliwość f_{23}. Ta właściwość jest niekorzystna ze względu na łatwość zakłócenia pracy systemu. Urządzenie



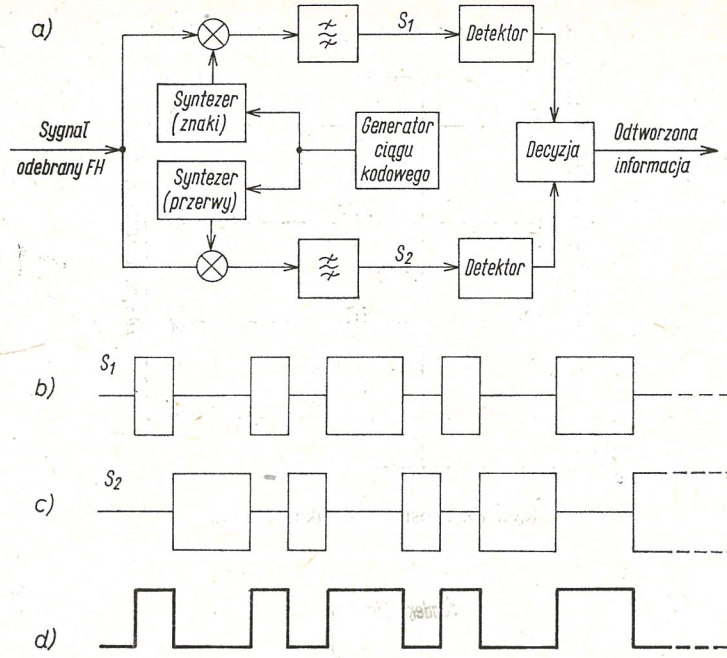
Rys. 19. Prosty modyfikator kodu



Rys. 20. Rozkład częstotliwości na wyjściu syntezera (w określonym momencie występuje tylko jedna częstotliwość; częstotliwości odpowiadające znakom są skojarzone (komplementarne) z częstotliwościami odpowiadającymi przerwom)

zakłócające odbierając częstotliwość f_m może bowiem łatwo określić częstotliwość komplementarną f_n i wysłać sygnał zakłócający o tej częstotliwości. W praktyce stosuje się więc układy, w których zależność między częstotliwościami znaków i przerw jest bardziej skomplikowana.

Odbiornik sygnałów *FH* (rys. 21) składa się z dwóch kanałów. Syntezer jednego kanału generuje częstotliwości odpowiadające znakom (stosownie do sygnałów kodowych z generatora ciągu kodowego), w tym samym czasie drugi syntezer generuje komplementarne częstotliwości odpowiadające przerwom. Jeśli generatory ciągów kodowych po stronie nadawczej i odbiorczej są zsynchronizowane, to na wyjściu korelatora pierwszego kanału otrzymujemy sygnał wówczas, gdy sygnał odebrany (*FH*) odpowiada znakowi (rys. 21b), na wyjściu korelatora drugiego kanału wówczas, gdy odebrany sygnał odpowiada przerwie (rys. 21c). Na wyjściach obu kanałów otrzymujemy więc ciągi impulsów o przepływności równej przepływności strumienia informacji po stronie nadawczej (jeśli do przesłania



Rys. 21. Odtwarzanie informacji w systemie *FH*: a) schemat odbiornika, b) ciąg impulsów (obwiednia) odpowiadających znakom, c) ciąg impulsów (obwiednia) odpowiadających przerwom, d) odtworzona informacja

jednego bitu informacji stosuje się kilka skoków częstotliwości, to przepływność impulsów na wyjściach obu kanałów jest równa przepływności strumienia informacji pomnożonej przez liczbę skoków częstotliwości na jeden bit).

Zauważmy, że strumienie impulsów na wyjściach kanałów są komplementarne, zawierają więc tę samą informację. Do odtworzenia informacji wystarczy zatem użyć odbiornika jednokanałowego (znaki lub przerwy). Odbiornik pokazany na rys. 21 zawiera 100% redundancję, która zmniejsza prawdopodobieństwo popełnienia błędu.

6. SYNCHRONIZACJA

W dotychczasowych rozważaniach pominęliśmy najważniejszy i najtrudniejszy element systemów szerokopasmowych — synchronizację. Odbiór sygnałów szerokopasmowych jest możliwy tylko wówczas, gdy generator ciągu kodowego w odbiorniku jest zsynchronizowany z odbieranym sygnałem szerokopasmowym. Oznacza to, że po stronie odbiorczej musimy znać nie tylko regułę, według której generuje się ciąg kodowy po stronie nadawczej, ale także częstotliwość taktowania oraz fazę ciągu kodowego (w odniesieniu do ciągu referencyjnego w odbiorniku). Zakładaliśmy dotychczas milcząco, że generatory ciągów kodowych w systemie są zsynchronizowane i pozostają w synchronizmie przez cały czas transmisji.

Zastosowanie bardzo stabilnych generatorów w nadajniku i w odbiorniku nie rozwiązuje problemu synchronizacji częstotliwości ze względu na występowanie zjawiska Dopplera. W radiokomunikacji ruchomej występowanie zjawiska Dopplera jest oczywiste, ale nawet w stacjonarnych liniach radiowych należy brać je pod uwagę, ze względu na zmienność warunków propagacji fal elektromagnetycznych. Częstotliwość sygnału odebranego f_r różni się od częstotliwości sygnału nadanego f_t o poprawkę Dopplera f_D

$$f_r = f_t \pm f_D = f_t \pm \frac{v f_t}{c}, \tag{11}$$

przy czym v jest względną prędkością nadajnika i odbiornika, a c — prędkością światła w próżni. Jeśli częstotliwość wyrazić w MHz, a względną prędkość nadajnika i odbiornika w km/s lub w km/h, to poprawkę Dopplera (w Hz) określa relacja

$$f_{D\,[\mathrm{Hz}]} = 0{,}9266 \cdot 10^{-3} f_{t\,[\mathrm{MHz}]} v_{[\mathrm{km/h}]} = 3{,}3356\, f_{t\,[\mathrm{MHz}]} v_{[\mathrm{km/s}]}, \tag{12}$$

przyjęto przy tym $c = 2{,}997924562 \cdot 10^8$ m/s.

Faza ciągu kodowego (pozycja) na wejściu odbiornika zależy od czasu propagacji sygnału na trasie nadajnik-odbiornik. Nawet gdy znana jest długość trasy, to czas propagacji ulega zmianom wskutek zmiennych warunków propagacji sygnału. Wymienione czynniki zmuszają do stosowania po stronie odbiorczej specjalnych układów synchronizacji.

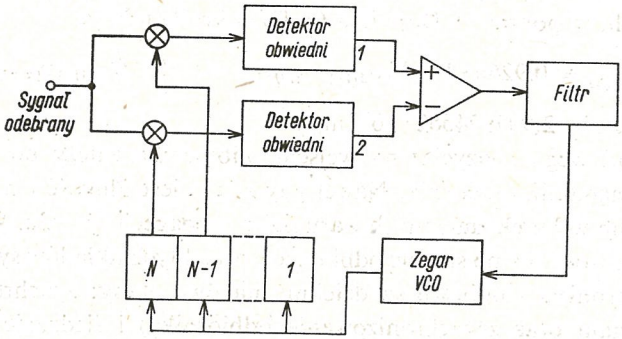
Problem synchronizacji odbiornika dzielimy na dwa etapy: synchronizacja startowa (odnalezienie sygnału oraz zsynchronizowanie odbiornika) i śledzenie (utrzymanie odbiornika w synchronizmie).

6.1. Synchronizacja startowa

Synchronizacja startowa jest najtrudniejszym zadaniem. Odbiornik musi wykryć sygnał pożądany w obecności sygnałów zakłócających i szumu oraz ustawić właściwą częstotliwość i fazę własnego generatora ciągu kodowego. Najprostszym sposobem synchronizacji startowej jest poszukiwanie maksimum funkcji korelacji wzajemnej sygnału odebranego i ciągu referencyjnego przez zmianę fazy własnego generatora ciągu kodowego. Realizację tego sposobu uzyskuje się przez nadanie generatorowi ciągu kodowego w odbiorniku częstotliwości nieco różnej od częstotliwości generatora ciągu kodowego w nadajniku. Wskutek tego ciągi kodowe po stronie nadawczej i odbiorczej jak gdyby „ślizgają się" względem siebie, stąd nazwa odpowiedniego układu — „ślizgający się" korelator. W momencie gdy funkcja korelacji wzajemnej osiągnie maksimum, dokonuje się zrównania częstotliwości obu generatorów i przechodzi do etapu śledzenia. Ta prosta zasada może być stosowana tylko do krótkich ciągów. W przypadku długich ciągów przeszukiwanie może trwać godziny, dni, a nawet lata. W praktyce konieczne jest więc wspomożenie „ślizgającego się" korelatora innym układem ograniczającym zakres przeszukiwania. Jednym z bardzo skutecznych rozwiązań jest nadawanie na początku transmisji specjalnego krótkiego ciągu kodowego (preambuła) umożliwiającego dokonanie synchronizacji startowej w rozsądnym czasie. Możliwe jest również stosowanie specjalnych kodów ułatwiających synchronizację startową.

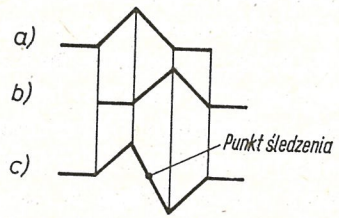
6.2. Śledzenie

Po uzyskaniu synchronizacji startowej odbiornik przechodzi do drugiej fazy synchronizacji — śledzenia. Ze względu na niestabilność generatorów, zjawisko Dopplera, zmiany odległości między nadajnikiem i odbiornikiem oraz zmienność warunków propagacyjnych generator ciągu kodowego w odbiorniku musi stale śledzić za ciągiem kodowym odbieranego sygnału. Jednym z najbardziej rozpowszechnionych sposobów śledzenia jest zastosowanie pętli „opóźnionej". Zawiera ona dwa korelatory, do których doprowadza się sygnał odebrany oraz sygnały odniesienia z lokalnego generatora ciągu kodowego przesunięte o jeden bit (rys. 22). Funkcja korelacji wzajemnej między sygnałem odebranym



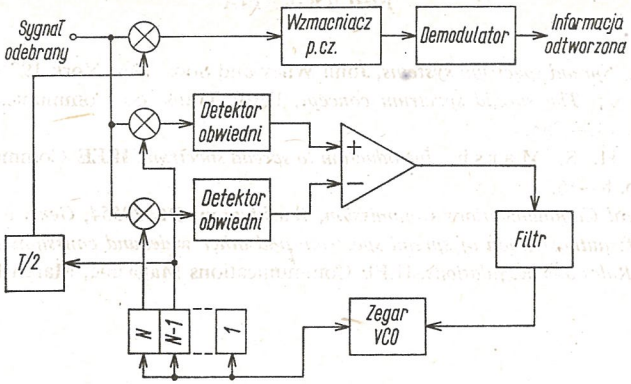
Rys. 22. Pętla „opóźniona"

i każdym z sygnałów referencyjnych ma kształt trójkąta o podstawie równej 2 bitom, z tym że funkcje te są przesunięte względem siebie o jeden bit (rys. 23). Sygnały z wyjścia obu korelatorów odejmuje się od siebie, w wyniku otrzymujemy funkcję trójkątną z dwoma wierzchołkami. Odcinek między wierzchołkami może być wykorzystany do śledzenia (rys. 23c). Opisany układ synchronizuje się z odbieranym ciągiem kodowym z dokładno-



Rys. 23. Sygnały w pętli „opóźnionej": *a* — na wyjściu korelatora 1, *b* — na wyjściu korelatora 2, *c* — różnica sygnałów wyjściowych obu korelatorów

ścią do stałego przesunięcia równego pół bita, co powoduje zmniejszenie sygnału wyjściowego do połowy wartości maksymalnej funkcji korelacji wzajemnej. W celu uniknięcia tej niedogodności stosuje się układ z trzema korelatorami (rys. 24). Do trzeciego korelatora doprowadza się sygnał referencyjny przesunięty o pół bita względem sygnałów doprowadzonych do pozostałych korelatorów. Na wyjściu trzeciego korelatora otrzymujemy sygnał o największej możliwej do uzyskania wartości.



Rys. 24. Pętla „opóźniona" z dodatkowym korelatorem (przesuniętym o pół bita) do odtworzenia informacji

7. ZASTOSOWANIA SYSTEMÓW SZEROKOPASMOWYCH

Rozwój systemów szerokopasmowych jest związany przede wszystkim z potrzebami łączności wojskowej. Duża odporność na zakłócenia świadomie wprowadzane przez przeciwnika do środowiska propagacji fal elektromagnetycznych, utrudnienie wykrycia emisji oraz łatwość realizacji wielodostępu, to główne walory systemów szerokopasmowych w zastosowaniach militarnych (łączność kosmiczna, łączność z obiektami ruchomymi, zwłaszcza z samolotami, i in.). Systemy szerokopasmowe, z racji modulacji kodowej, są szczególnie predysponowane do zastosowań nawigacyjnych zarówno wojskowych, jak i cywilnych. Systemy *DS* są wykorzystywane w programach kosmicznych już od początku lat sześćdziesiątych. W budowanym obecnie globalnym systemie nawigacyjnym *GPS*[2)] stosuje się metody szerokopasmowe do wielokrotnego pomiaru odległości, umożliwiającego określenie pozycji obiektu w skali całego globu z błędem nie większym niż 9 m w płaszczyźnie poziomej i 10 m w płaszczyźnie pionowej w ciągu 90% czasu.

Nie ma jeszcze jasnego obrazu jeśli chodzi o zastosowania cywilne systemów szerokopasmowych. Specjalna komisja powołana przez IEEE [4] przewiduje wykorzystanie technik szerokopasmowych w systemach wielodostępowych o niewielkim zasięgu, takich jak radiotelefonia ruchoma, transmisja danych, systemy przywoławcze i inne. Przewiduje się również dopuszczenie do eksploatacji nielicencjonowanych urządzeń szerokopasmowych o bardzo małym zasięgu (do 1 km), wykorzystywanych do telemetrii, telesterowania (również w gospodarstwach domowych), przywoływania, łączności, lokacji, w systemach alarmowych itp. Komisja wypowiedziała się natomiast sceptycznie odnośnie do możliwości wspólnego wykorzystania widma elektromagnetycznego przez istniejące służby cywilne i nowe służby stosujące techniki szerokopasmowe.

[2)] *GPS — Global Positioning System*, satelitarny globalny system nawigacyjny. Pierwszy etap budowy systemu (6 satelitów) został zakończony w 1979 r. Pełny system (18 satelitów) będzie oddany do eksploatacji w roku 1987.

BIBLIOGRAFIA

1. R. C. Dixon, *Spread spectrum systems*, John Wiley and Sons, New York 1976.
2. R. A. Scholtz, *The spread spectrum concept*, IEEE Trans. on Communications, vol. COM-25, No. 8, 1977, pp. 748—755.
3. C. E. Cook, H. S. Marsh, *Introduction to spread spectrum*, IEEE Communications Magazine, March 1983, pp. 8—16.
4. *Before The Federal Communications Commission, Washington, DC 20554, General Docket No. 81—413. In the matter of: authorization of spread spectrum and other wideband emissions not presently provided for in the FCC Rules and Regulations*, IEEE Communications Magazine, March 1983, pp. 59—63.

D. J. BEM

SPREAD-SPECTRUM SYSTEMS

Summary

Most of the concept of spread-spectrum systems has been understood for many years, but the components and techniques for building systems capable of reliable operation have only been available since the beginning of the 1970's. The initial applications have been, among others, in the area of military antijamming tactical communications, of guidance systems, and of antimultipath systems. Although the current applications for spread-spectrum continue to be primarily for military communications, there is a growing interest in the use of this technique for mobile radio networks, timing and positioning systems, along with some specialized applications in satellite communications, etc. It is the intention of this paper to provide a tutorial treatment of the theory of spread-spectrum communications, including a discussion on the applications referred to above, on the properties of common spreading sequences, and on the techniques that can be used for acquisiton and tracking.

D. J. BEM

SYSTÈMES DE RADIOCOMMUNICATION À BANDE LARGE

Résumé

L'idée des systèmes de radiocommunication à bande large est connue depuis longtemps. Cependant ce n'est qu'au début des années soixante-dix que les systèmes à bande large sont devenus techniquement réalisables et économiquement rentables grâce aux énormes progrès de la technologie des ciruits intégrés. Le développement des systèmes à bande large est lié, avant tout, avec les besoins de la transmission militaire. Une grande résistance au brouillage introduit intentionnellement par l'adversaire dans le milieu de propagation des ondes électromagnétiques, l'empêchement à la détection de l'émission, l'élimination des parasites dûs au phénomène de multiplexage sont les principaux avantages des systèmes à bande large dans la communication civile (radiocommunication mobile, service de l'heure radiophonique, systèmes de navigation, liaisons par satellites artificiels). Le but de l'article est de présenter les bases théoriques de l'action des systèmes à bande large du point de vue de leurs applications pratiques. On a discuté également les moyens de diffusion du spectre ainsi que le problème de synchronisation.

D. J. BEM

BREITBANDIGE FUNKVERKEHRSYSTEME

Zusammenfassung

Der Begriff breitbandiger Funkverkehrsysteme war seit langer Zeit bekannt. Jedoch erst am Anfang der siebziger Jahre wurden die breitbandigen Systeme dank dem riesigen Fortschritt in der Technologie der integrierten Schaltungen technisch realisierbar und ökonomisch rentabel. Die Entwicklung breitbandiger Systeme ist vorwiegend mit Bedürfnissen des Militärverkehrs verbunden. Eine hohe Festigkeit gegen bewußt vom Feind in das Medium der Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen eingeführte Störungen, erschwerter Emissionsnachweis, Beseitigung der durch die Mehrfluterscheinung bewirkten Störungen sind grundsätzliche Vorteile der breitbandigen Systeme in Militäranwendung. In den letzten Jahren kam es zu Versuchen der Anwendung von breitbandigen Systemen im nichtmilitärischem Funkverkehr (beweglicher Funkverkehr, Zeitangabefunkdienst und Navigationssysteme, Satellitenfunk). Ziel des vorliegenden Beitrags ist, theoretische Grundlagen der Wirkung von Breitbandsystemen unter Berücksichtigung ihrer praktischen Anwendung darzustellen. Behandelt werden auch Verfahren zur Spektrumstreuung, wie auch das Problem der Synchronisierung.

Д. Й. БЭМ

ШИРОКОПОЛОСНЫЕ СИСТЕМЫ РАДИОСВЯЗИ

Резюме

Концепция широкополосных систем радиосвязи была уже давно известна. Однако лишь в начале семидесятых годов, благодаря огромному прогрессу в технологии интегральных схем, широкополосные системы стали технически осуществляемыми и экономически окупаемыми. Развитие широкополосных систем связано прежде всего с потребностями воинской связи. Высокая помехоустойчивость на препятствия в обнаружение эмиссии, сознательно вводимые противником в среду распространения электромагнитных волн, устранение помех вызванных явлением многопутности — это главные преимущества широкополосных систем в воинских применениях. В последние годы появились попытки применения широкополосных систем в гражданской связи (подвижная радиосвязь, радиослужба времени и навигационные системы, спутниковая связь). Целью статьи является представление теоретических основ действия широкополосных систем с учётом их практических применений. Обсуждены также способы рассеяния спектра, а также рассмотрена проблема синхронизации.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1985, 31, z. 1, ss. 265-285

621.396.41

Analysis and Stability Considerations of a Random Access System Without Retransmission Discrimination Discipline for Multiple Radio Channels

WOJCIECH SZPANKOWSKI (GDAŃSK), ANDRZEJ KUSIUK (GDAŃSK)

Instytut Telekomunikacji Politechniki Gdańskiej

The paper received 17.9.1982

Packet switching has found widespread application in computer communications. Packet radio is the application of packet switching techniques to radio channels. The paper considers packet switching in multiple radio channels with random access. First, a markovian model and an approximate model called fluid approximation are formulated and numerical results are presented. Then, the paper demonstrates and analyses an important aspect of the dynamic characteristics of packet radio, namely stability considerations. In addition, stability region is determined.

To the author's knowledge, previous studies have been limted to the analysis of single radio channels. Besides, the considerations in the previous papers have concentrated only on demonstrating whether a system is stable or not, while in this paper in addition the stability region is calculated.

1. INTRODUCTION

A computer communication system with radio multiaccess and broadcast channels is considered. Packet switching techniques introduced in that system are combined forms of random access and packet broadcasting [1], [7], [8]. The system consists of two channels: the multiaccess uplink channel used for transmissions from users to the central station (satellite or ground radio station) and broadcast downlink channel for transmissions from the central station to the destination users. It is assumed that the time axis is divided into a contiguous sequence of time slots and packet transmission must fall exactly in one of these slots. If more than one user uses the same slot for transmission then their packets collide and none of them will be correctly received. Of course, the collided packets must be retransmitted. These kinds of systems are known in literatute [1], [7] — [9], [15] as slotted *ALOHA* type systems or shortly *S-ALOHA* systems.

The paper considers a generalized slotted *ALOHA* system. Namely, it is assumed that the multiaccess and the broadcast channels are multiple channels i.e. each of them consists of V independent subchannels. Users have random access to V multiaccess subchannels, that is, they randomly select the slot and the subchannel number on which the packets are transmitted. This generalized system will be called the *S/V-ALOHA* system [17].

The markovian analysis of the *S/V-ALOHA* system is presented. The transit probabilities of the Markov chain describing the behaviour of the system are calculated basing

on the solution of a special combinatorial problem called „random assignment of objects to cells" [17]. Then the stationary probabilities are determined as the solution of a set of linear equations. Having that distribution, other quantities as average and variance of queue length, throughput, average delay and utilization of the channels are calculated In addition, an approximate analysis called fluid approximation [17] is presented. The fluid approximation is verified by the markovian model.

The theoretical importance of the *S/V-ALOHA* system is great mainly because, as shown in [17], the *S/V-ALOHA* system is a part of more complicated systems such as concentrated *ALOHA* system [3], [10], [16], [17] and reservation *ALOHA* system [12], [14], [15], [17], [19]. It appears that the analysis of these more complicated systems bases mainly on the analysis of the *S/V-ALOHA* system [17]. Besides, the method used to determine the transit probabilities of the *S/V-ALOHA* system may be adopted to simplify the analysis of systems proposed in [11], [13].

For the *ALOHA* type system the most interesting problem is the stability considerations. Many author's [2], [4], [8], [20] have given their „own definitions" of that notion but Okham's razor should be used. In particular, Fayolle's et al. [4] stability seems to be based on the stability in the Lagrange sense while Kleinrock's [8] or Carleial's [2] stability comes from the well known in the control theory notion of practical stability [6]. The latter fact is shown in the paper. In addition, the stability region of the *S/V-ALOHA* system is determined i.e. the values of the system parameters which assure stable behaviour of the system are given.

2. THE MODEL

In Fig. 1a a model of the *S/V-ALOHA* system is presented. We consider a user population consisting of M users, all in line of sight and within range of each other. Each such user contains a source of information (*SI*), an input buffer (*IB*) and a transmitter (T). A source of information generates packets of fixed length equal to L bits. Packets are introduced into an input buffer and then are sent into one of the V subchannels of the multiaccess uplink channel called also common channel (*CC*). Packets sent into the common channel may interfere or not. Users are informed after a propagation time delay about it through the central station — working as a relay station — and V subchannels of the broadcast downlink channel called also feedback channel (*FC*). All of the collided packets are retransmitted after a random time delay.

We assume a synchronized structure of the system i.e. the time in each subchannel is divided into fixed-length durations called slots. Of course, V „parallel" subchannels slots create one channel slot called multislot (Fig. 1b). Is is also assumed that capacities of the common channel and feedback channel are constant and equal to C bit/sec. Thus the duration of a slot (multislot) is given by

$$\tau \triangleq \frac{L}{C/V} = V\frac{L}{C}. \tag{2.1}$$

We introduce also a notion of a normalized slot defined as

$$\tau_n = \frac{L}{C}. \tag{2.2}$$

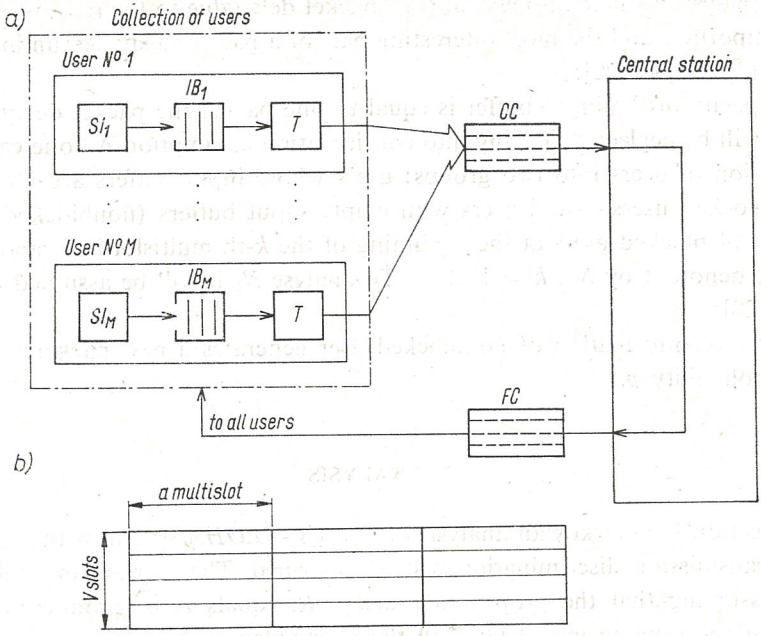


Fig. 1. a) Model of the *S/V-ALOHA* system, b) Structure of slots in the common and feedback channels

It is easy to notice that the slot duration is V times greater than the normalized slot while the propagation delay of $R\tau$ sec. is equal to R normalized slots.

As we have stated, users have random access to the common chanel. It is well known [5] that random access disciplines are characterized by the probability of sending a packet by a user. This probability depends upon the number of users wishing to transmit a packet, the number of attempts to transmit that packet and the slot number. In literature two various random access disciplines are the most interesting. The first, called random access without retransmission discrimination (*ORD*) [17], assumes that all transmissions are submitted to the same rule i.e. each transmitter wishing to send a packet (no matter whether a new or retransmitted packet) reaches an access to the common channel with probability r. The second discipline, called random access with retransmission discrimination (*WRD*) [5], [7], [8], [17], [18], is characterized by allowing a user which has a new packet to immediately attempt to access the channel, but controls retransmissions according to a probability r.

In this paper we consider only the *S/V-ALOHA* system without retransmission discrimination. The analysis of the system with retransmission discrimination may be found in [18]. Thus, we assume that:

A1. Transmitters have random access without retransmission discrimiantion to V subchannels of the common channel, that is:

a) each transmitter first selects with probability r a multislot,

b) the transmitter which has selected a multislot, chooses randomly with probability $1/V$ a slot in the multislot for transmission of its packet.

In the analysis we take into account the packet delay due to the retransmission as the most important and the most interesting part of a packet delay. Assuming that [1] — [4], [7] — [12], [15] — [20]:

A2. The capacity of the input buffer is equal to one packet the packet delay in an input buffer will be neglected. Taking into consideration assumption A2 one can divide the population of users into two groups: users whose input buffers are busy — we call them blocked users — and users with empty input buffers (nonblocked users). The number of blocked users at the beginning of the k-th multislot is a random variable and we denote it by N_k, $k = 1, 2, \ldots$ To analyse N_k it will be assumed that [2], [5], [7] — [20]:

A3. A source of information of nonblocked user generates a new packet in a time slot with probability p.

3. ANALYSIS

In this section the markovian analysis of the *S/V-ALOHA* system with random access without retransmission discrimination will be described. The markovian analysis will be presented assuming that the propagation delay, R, equals zero (ground radio model). However, for the satellite model ($R > 0$) the markovian analysis may be derived if one takes, instead of probabilty r the probability r_1 defined as follows [8], [17]

$$r_1 \triangleq \frac{1}{\frac{1}{r}+R}. \tag{3.1}$$

After the markovian analysis, the fluid approximation will be described.

3.1. The markovian analysis

Let us sonsider the random variable N_k defined as the number of blocked users at the beginning of the k-th multislot. Under assumptions A1—A3 the random variable is an imbedded Markov chain [17]. To analyse it one needs the one-step transition probabilities of N_k. Let us denote by X the random variable representing the number of packets generated by all nonblocked users in a time slot (multislot) and let Y be the random variable denoting the number of successfully sent packets into V subchannels of the common channel in a time slot. Then the transit probabilities of N_k are [17]

$$P(m/n) \triangleq Pr\{N_{k+1} = m | N_k = n\} = \sum_{j=0}^{M-n} Pr\{X = j | N_k = n\} Pr\{Y = n+j-m | N_k = n\}, \tag{3.2a}$$

where

$$n, m \in \{0, 1, \ldots, M\}, \quad 0 \leqslant j \leqslant M-n, \quad 0 \leqslant n+j-m \leqslant V. \tag{3.2b}$$

To find the transit probabilities one must calculate the conditional probabilities of the random variables X and Y. From the assumption A3 one gets

$$Pr\{X = j|N_k = n\} = \binom{M-n}{j} p^j (1-p)^{M-n-j}. \tag{3.3}$$

The conditional mean and variance of X are equal to

$$S_i(n) \triangleq E\{X|N_k = n\} = (M-n)p, \tag{3.4a}$$

$$\sigma_i^2(n) \triangleq \text{var}\{X|N_k = n\} = (M-n)p(1-p). \tag{3.4b}$$

We call the quantity $S_i(n)$ a conditional input rate.

There are some problems in finding the conditional probabilities of Y, $Pr\{Y = i|N_k = n\}$, $i = 0, 1, \ldots, V$. To determine them we introduce a new random variable, W, representing the number of packets introduced into the common channel in a time slot. Then

$$Pr\{Y = i|N_k = n\} = \sum_{k=0}^{n} Pr\{Y = i|N_k = n, W = k\} Pr\{W = k|N_k = n\}. \tag{3.5}$$

Under assumption A1 we have

$$Pr\{W = k|N_k = n\} = \binom{n}{i} r^i (1-r)^{n-i}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n. \tag{3.6}$$

Thus now we only need the probabilities $Pr\{Y = i|N_k = n, W = k\}$. Let us notice that $Pr\{Y = i|N_k = n, W = k\}$ represents the probability of i successful transmissions under the condition that k packets are introduced (in a random mode) into V subchannels. This probability may be calculated basing on the combinatorial model called „the assignment of objects to cells". In that model it is assumed that k objects (packets) are randomly assigned to V cells (subchannels). Each cell is chosen with an equal probability $1/V$. Let $\chi(k)$ denote a random variable representing the number of cells with exactly one object when k objects are used. It is easy to notice that

$$Pr\{Y = i|N_k = n, W = k\} = Pr\{\chi(k) = i\}. \tag{3.7}$$

In Appendix A we have shown that

$$Pr\{\chi(k) = i\} = \frac{(-1)^i V!\, k!}{V^k i!} \sum_{j=i}^{\min\{V,\, k\}} (-1)^j \frac{(V-j)^{k-j}}{(j-i)!(V-j)!(k-j)!}, \tag{3.8a}$$

$$i \in \{0, 1, \ldots, \min\{V, k\}\} \tag{3.8b}$$

and

$$E\chi^{[i]}(k) = \frac{V^{[i]}}{V^i} (k^{[i]}) \left(1 - \frac{i}{V}\right)^{k-i}, \tag{3.9}$$

where

$$x^{[i]} \triangleq \begin{cases} x(x-1) \ldots (x-i+1) & i \leqslant x \\ 0 & i > x. \end{cases} \tag{3.10}$$

From (3.7) and (3.9) the conditional moments of Y may be computed as follows [17]

$$E\{Y^{[k]}|N=n\} = \sum_{i=0}^{n} E\{Y^{[k]}|N=n,\ W=i\}Pr\{W=i|N=n\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} E\chi^{[k]}(i)\binom{n}{i}r^i(1-r)^{n-i} = \frac{V^{i\,k]}}{V^k}n^{[k]}r^k\left(1-\frac{rk}{V}\right)^{n-k}. \tag{3.11}$$

In particular, the conditional throughput $S_o(n) \triangleq E\{Y|N_k=n\}$ and conditional variance $\sigma_o^2(n) \triangleq \mathrm{var}\{Y|N_k=n\}$ are equal to

$$S_o(n) = nr\left(1-\frac{r}{V}\right)^{n-1}, \tag{3.12}$$

$$\sigma_o^2(n) = \left(1-\frac{1}{V}\right)n(n-1)r^2\left(1-\frac{2r}{V}\right)^{n-2} + S_o(n) - S_o^2(n). \tag{3.13}$$

In Fig. 2 the function $S_o(n)$ is plotted for $V=3$ and various values of r. It is easy to notice that for [17]

$$n_{max} = -\frac{1}{\ln(1-r/V)} \tag{3.14}$$

the function $S_o(n)$ reaches the maximum equal to

$$\max_{n>0} S_o(n) = S_o(n_{max}) = \frac{-1}{e(1-r/V)\ln(1-r/V)}. \tag{3.15}$$

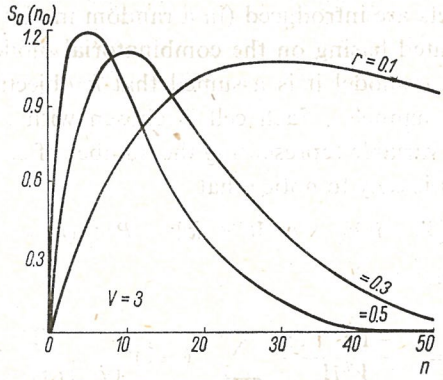


Fig. 2. The conditional throughput $S_o(n)$ as a function of n

Taking into consideration (3.2), (3.3), (3.5) — (3.7) one also gets immediately the following formula for the transit probabilities

$$P(m|n) = \begin{cases} 0 & \text{for } m < n-V, \\ \sum_{i=I_1}^{n}\sum_{j=J_1}^{J_2}\binom{n}{i}r^i(1-r)^{n-i}\binom{M-n}{j}p^j(1-p)^{M-n-j}Pr\{\chi(i)=n+j-m\} & \text{for } m \geqslant n-V, \end{cases} \tag{3.16a}$$

where

$$I_1 \triangleq \max\{0, n-m\}; \quad J_1 \triangleq \max\{0, m-n\}; \quad J_2 = \min\{M-n, V+m-n, i+m-n\} \tag{3.16b}$$

and $Pr\{\chi(i) = n+j-m\}$ is given by Eq. (3.8).

Having $P(m|n)$ the steady state probabilities of N_k i.e.

$$P(n) \triangleq \lim_{k\to\infty} Pr\{N_k = n\} \tag{3.17}$$

are calculated by solving the following set of linear simultaneous equations

$$P(n) = \sum_{m=0}^{M} P(m)P(n/m), \quad n \in \{0, 1, \ldots, M\},$$
$$\sum_{n=0}^{M} P(n) = 1. \tag{3.18}$$

The steady state channel throughput $S_o \triangleq EY$ and expected number of blocked users, EN, can thus be obtained from

$$S_o = \sum_{n=0}^{M} S_o(n)P(n), \tag{3.19}$$

$$EN = \sum_{n=0}^{M} nP(n). \tag{3.20}$$

We also introduce the utilization of the channels, ν, as

$$\nu \triangleq \frac{S_o}{V}. \tag{3.21}$$

It is easy to evaluate the maximum of ν if one notices that [17]

$$0 \leqslant S_o \leqslant \max_{n\geqslant 0} S_o(n). \tag{3.22}$$

From (3.15), (3.21), and (3.22) one gets

$$\nu \leqslant \frac{-r}{V\ln(1-r/V)e(1-r/V)} \leqslant \frac{1}{e(1-r/V)} \tag{3.23a}$$

and for small values of r

$$\max \nu \cong \frac{1}{e} = 0.368. \tag{3.23b}$$

By Litte's result [8] the average delay normalized with respect to the normalized slot duration may be calculated as

$$T = \frac{EN}{\nu} = V\frac{EN}{S_o}. \tag{3.24}$$

Now, the numerical results of the markovian analysis may be presented. In Fig. 3. the steady-state probabilities, $P(n)$, are shown for three values of probability p. Let us notice

that we have three types of distributions, $P(n)$: for $p = 0.02$ (Fig. 3a) the most probable value of N lies below n_{max}; for $p = 0.04$ (Fig. 3b) there exist two very probable values of N; and for $p = 0.06$ (Fig. 3c) the most probable value of N lies above the value n_{max}. We say that the distribution in Fig. 3a is a one-modal function, in Fig. 3b two-modal function and in Fig. 3c one-modal overloaded function. It was noticed [17] that for other values of the parameters M, r and V the distribution of the number of blocked users can be only a one-modal function or/and one-modal overloaded function when p changes from zero to one. Thus we have defined three types of *S/V-ALOHA* systems:

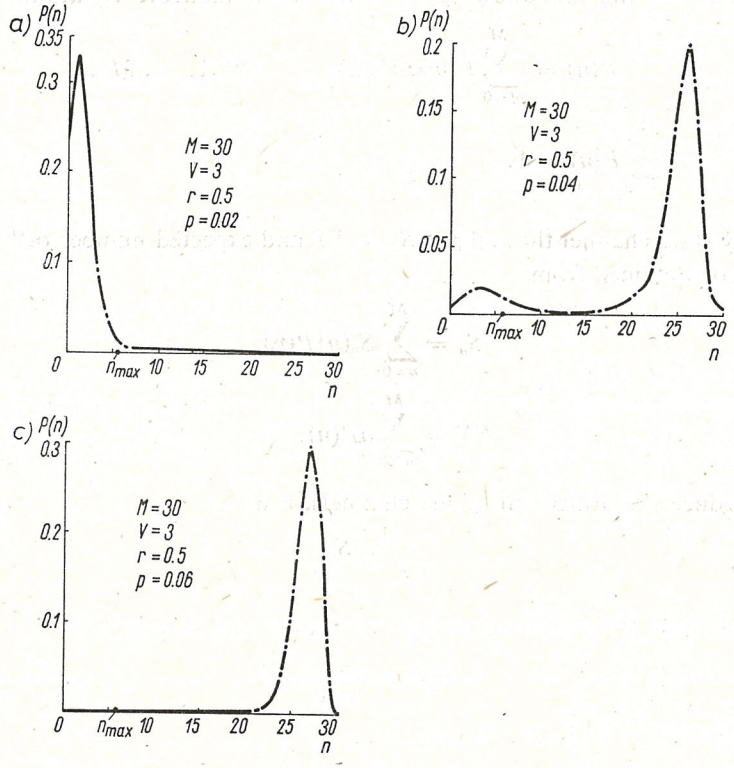


Fig. 3. The stationary distribution of the number of blocked users, $P(n)$, for various values of p

a) type A if for all values of p the distribution of N is a one-modal function,
b) type B if the distribution of N is a one-modal function but for bigger values of p it is a one-modal overloaded function,
c) type C if for some values of p the distribution of N is a two-modal function.

The types of distribution have a big impact on the performance of the system as shown in Fig. 4 and 5. It was noticed [17], and the figures confirm it, that for A-type systems:
a) ν is an increasing function of p for $0 \leqslant p \leqslant 1$ and it reaches the maximum for $p = 1$ (Fig. 4 for $V = 5$),
b) in the relation between T and ν to each value of ν corresponds one and only one value of T.

Other curves in Fig. 4 and 5 represent the performance for the system of B and C-type. In particular, the utilization ratio ν reaches the maximum for p which is less than one, while the relation between the delay T and utilization ν has a bistable character i.e. for one value of ν there exist two values of the delay T. However, there are some differences between curves for systems of type B and C. For systems of type B (Fig. 4, $V = 3$; Fig. 5a, $r = 0.2, 0.3$; Fig. 5b, $V = 3$) the maximum of ν equals approximately $1/e$ (see Eq (3.23)) while for C-type system (Fig. 4, $V = 1$; Fig. 5a, $r = 0.5$; Fig. 5b, $V = 1$) the maximum

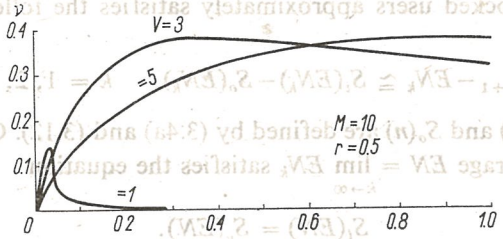


Fig. 4. Utilization of the channels, ν, as a function of p

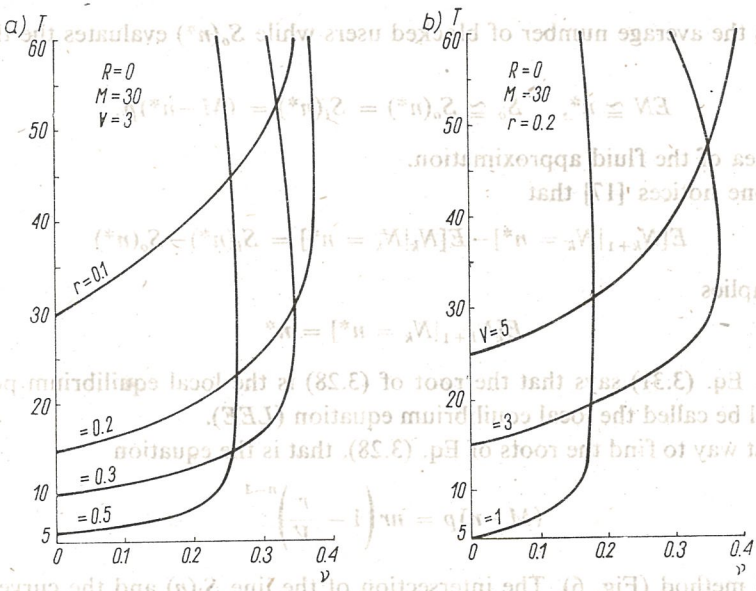


Fig. 5. The expected packet delay, T, as a function of ν

of ν is less than $1/e$. Besides, for the latter case the utilization rapidly decreasses starting from the maximum value because of the avalanche growth in the number of retransmissions. It is easy to notice that the behaviour of the C-type systems is due to the fact that in the distribution of N there are two very probable states (Fig. 3). The system oscillates between them, giving as a result a rapid decrease of ν and, as was shown in [17], a rapid growth of the variance of N.

3.2. The fluid approximation

As it was seen the markovian analysis is very complicated, so an approximation analysis is needed. We shall present here the so called fluid approximation.

In [17] it was shown that if

$$S_o(EN_k) \gg \frac{1}{2}\sigma^2_{N_k} S_o''(EN_k) \tag{3.25}$$

then the average of blocked users approximately satisfies the following difference equation

$$EN_{k+1} - EN_k \cong S_i(EN_k) - S_o(EN_k), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3.26}$$

where the function $S_i(n)$ and $S_o(n)$ are defined by (3.4a) and (3.12). Of course, in the steady state condition, the average $EN = \lim_{k\to\infty} EN_k$ satisfies the equation

$$S_i(EN) = S_o(EN). \tag{3.27}$$

In other words, the root, n*, of equation

$$S_i(n) = S_o(n) \tag{3.28}$$

approximates the average number of blocked users while $S_o(n^*)$ evaluates the throughput, that is

$$EN \cong n^*, \quad S_o \cong S_o(n^*) = S_i(n^*) = (M - n^*)p. \tag{3.29}$$

This is the idea of the fluid approximation.

Now, if one notices [17] that

$$E[N_{k+1}|N_k = n^*] - E[N_k|N_k = n^*] = S_i(n^*) - S_o(n^*) \tag{3.30}$$

then (3.28) implies

$$E[N_{k+1}|N_k = n^*] = n^* \tag{3.31}$$

(see also [2]). Eq. (3.31) says that the root of (3.28) is the local equilibrium point, hence Eq. (3.28) will be called the local equilibrium equation (*LEE*).

The easiest way to find the roots of Eq. (3.28), that is the equation

$$(M - n)p = nr\left(1 - \frac{r}{V}\right)^{n-1} \tag{3.32}$$

is a graphical method (Fig. 6). The intersection of the line $S_i(n)$ and the curve $S_o(n)$ give us the root of (3.32). We may distinguish three cases. In Fig. 6a the *LEE* has one root denoted by n_o (operating point) which satisfies the inequality

$$n_0 \leqslant n_{max}. \tag{3.33}$$

In Fig. 6b we have three roots n_o, n_c, n_s called operating point, congestion point and saturation point respectively. Finnaly, in Fig. 6c the equation (3.32) has exactly one root, n_s, (saturation point) which satisfies

$$n_s > n_{max}. \tag{3.34}$$

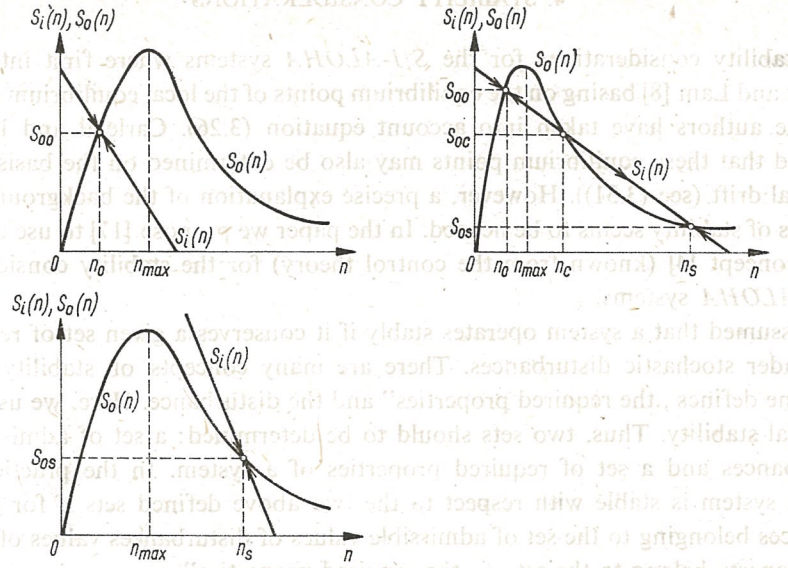


Fig. 6. Types of the roots of the local equilibrium equation

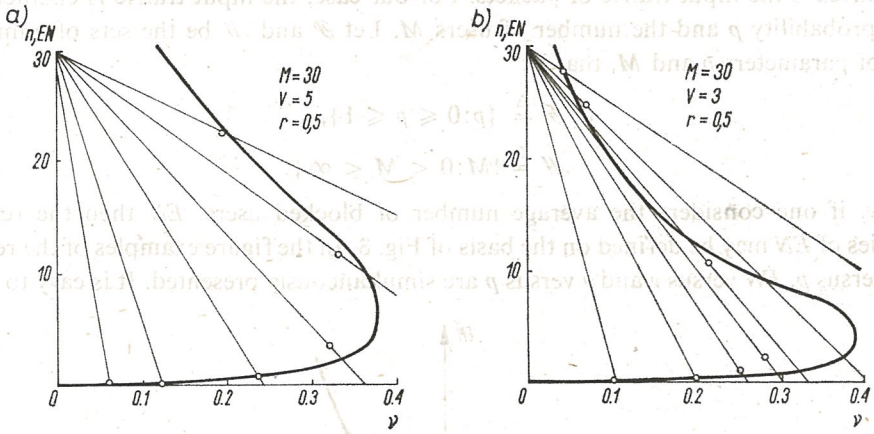


Fig. 7. Examples of verification the fluid approximation by the markovian model (dots)

It is also easy to notice [8], [17] that the operating point n_o and the saturation point n_s are stable equilibrium points of difference equation (3.26), while the congestion point n_c is an unstable point (see also arrows in the figure).

It is clear that for a unique solution of the local equilibrium equation (Fig. 6a, c) the fluid approximation should evaluate the performance of the system well, while in the case of three solutions the approximation should be bad. Fig. 7 confirms this. In that figure the markovian results are marked by dots on the input rate line. In Fig. 7a the local equilibrium equation has for all p only one root which quite well approximates the markovian model. In Fig. 7b we present the situation where three roots of Eq. (3.32) exist. Then the differences between the markovian model and the fluid approximation are important.

4. STABILITY CONSIDERATIONS

The stability considerations for the *S/1-ALOHA* systems where first introduced by Kleinrock and Lam [8] basing on the equilibrium points of the local equilibrium equation — in fact the authors have taken into account equation (3.26). Carleial and Hellman [2] have noted that these equilibrium points may also be determined on the basis of average conditional drift (see (3.31)). However, a precise explanation of the backgrounds of these definitions of stability seems to be needed. In the paper we propose [17] to use the practical stability concept [4] (known from the control theory) for the stability considerations of the *S/V-ALOHA* systems.

It is assumed that a system operates stably if it conserves a given set of required properties under stochastic disturbances. There are many concepts of stability depending on how one defines „the required properties" and the disturbance. Here, we use a concept of practical stability. Thus, two sets should to be determined: a set of admissible values of disturbances and a set of required properties of a system. In the practical stability concept a system is stable with respect to the two above defined sets if for each of the disturbances belonging to the set of admissible values of disturbances values of the chosen system property belong to the set of „the required properties".

In stochastic systems, such as *S/V-ALOHA* system, it is assumed that a source of disturbances is the input traffic of packets. For our case, the input traffic is characterized by the probability p and the number of users M. Let $\mathscr{P}$ and $\mathscr{M}$ be the sets of admissible values of parameters p and M, that is:

$$\mathscr{P} \triangleq \{p: 0 \leqslant p \leqslant 1\}, \tag{4.1}$$

$$\mathscr{M} \triangleq \{M: 0 < M < \infty\}. \tag{4.2}$$

Now, if one considers the average number of blocked users, EN then the required properties of EN may be defined on the basis of Fig. 8. In the figure examples of the relation of EN versus p, EN versus ν and ν versus p are simultaneously presented. It is easy to notice

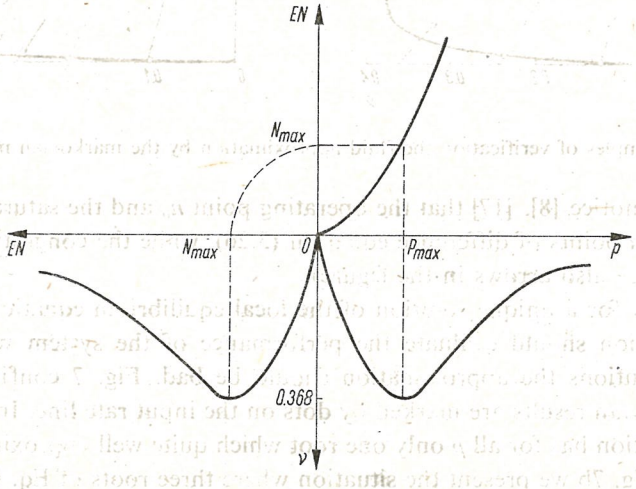


Fig. 8. A calculation of N_{max}

that there exists such a value p_{max} of the parameter p for which the utilization ν reaches the maximum. For $p > p_{max}$ the utilization ν is a decreasing function of p while the average EN increases with p. Hence, one may find such a value N_{max} of the average of blocked users, EN, for which the utilization reaches maximum (see relation EN versus ν in Fig. 8). Of course, from the practical point of view the required properties of EN may be now defined as

$$\mathcal{N}_1 = \{EN: EN \leqslant N_{max}\} \tag{4.3}$$

because for $EN > N_{max}$ the utilization (throughput) degradation takes place.

Now, one says that the system is stable with respect to $(\mathcal{P}, \mathcal{N}_1)$ if the following property holds

$$p \in \mathcal{P} \Rightarrow EN \in \mathcal{N}_1 \tag{4.4}$$

or the system is stable with respect to $(\mathcal{M}, \mathcal{N}_1)$ if

$$\mathcal{M} \in \mathcal{M} \Rightarrow EN \in \mathcal{N}_1. \tag{4.5}$$

However, it is troublesome to use this definition for the stability considerations of the *S/V-ALOHA* system. This comes from the fact that the relation between EN and ν is determined by the markovian model which is quite complicated. The fluid approximation may be used here. We have seen (Fig. 7) that the stationary performance is well evaluated by the roots of the local equilibrium equation if the solution is unique. If the *LEE* has three roots the stationary performance lies between the two stable roots of the equation, however, the system has a tendency to approach the saturation point. The last statement may be shown if one considers the conditional variance of a random variable $\Delta N = N_{k+1} - N_k$, that is

$$\sigma^2_{\Delta N}(n) \triangleq \operatorname{var}\{N_{k+1} - N_k | N_k = n\}. \tag{4.6}$$

In [17] it was proved that

$$\sigma^2_{\Delta N}(n_o) > \sigma^2_{\Delta N}(n_s) \geqslant 0. \tag{4.7}$$

Eq. (4.7) shows that the state n_s is „more stable" than the state n_o, in that sense, that the system tries to stay in n_s for a long time. This comes from the fact the dispersion of number of blocked users around the stable root n_s is less than around the stable root n_o, as Eq. (4.7) states, hence it is more difficult to move out from point n_s (one may notice that if $\sigma^2_{\Delta N}(n_s) = 0$ then the system would stay in state n_s with probability one).

Of course, the state n_s is characterized by small value of utilization and a big value of EN. In other words, three solutions of the *LEE* imply a rapid growth of the average delay and a rapid decrease of utilization ν. Therefore, the system with three roots of the *LEE* may be defined as unstable [8], [17]. This statement confirms Fig. 9, where the average delay versus the number of users, M, for constant value of $S_o(n_o)$ is plotted. It can be noticed that when the number of users is greater than a critical value M^*_{cr}, for which the local equilibrium equation has three roots, then throughput-delay performance degradation takes place.

If one also notices that the value N_{max}, required in the definition of stability, may be approximated by n_{max} (see Eq. (3.14)) then it is possible to given a new definition of the system stability. Let us define a set $\mathcal{N}$ as

$$\mathcal{N} \triangleq \{n: 0 \leqslant n \leqslant n_{max}\}. \tag{4.8}$$

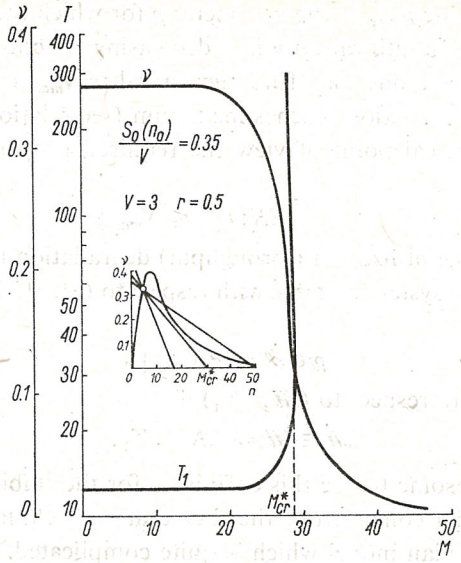


Fig. 9. Channel performance versus M at $S_o(n_o)$ = constant

Hence, the system *S/V-ALOHA* is stable with respect to sets $(\mathscr{P}, \mathscr{N})$ or $(\mathscr{M}, \mathscr{N})$ if the local equilibrium equation has exactly one root of type n_o (operating point) for each p belonging to $\mathscr{P}$ or each M belonging to $\mathscr{M}$.

According to both of these definitions only systems of type *A*, described in the previous section, are stable. However, it should be interesting to find such subsets $\mathscr{P}_s$ and $\mathscr{M}_s$ of sets $\mathscr{P}$ and $\mathscr{M}$ for which *B* and *C*-type systems will be stable with respect to $(\mathscr{P}_s, \mathscr{N})$ or $(\mathscr{M}_s, \mathscr{N})$. The values of parameters p and M which assure the stability of the *S/V-ALOHA* system determine a so called stability region. To find it, according to the second definition of stability, it is enough to calculate such values of p and M which assure exactly one root of type n_o in the local equilibrium equation.

In Appendix *B* it is shown that *LEE* has exactly one root of type n_o if one of the following conditions is satisfied:

1°

$$0 < M \leqslant M_{cr} \triangleq \frac{-1}{\ln(1-r/V)}\left[1+\frac{r}{e(1-r/V)}\right] \tag{4.9a}$$

and

$$0 \leqslant p \leqslant 1, \tag{4.9b}$$

2°

$$M_{cr} < M \leqslant M^*_{cr} \triangleq \frac{-4}{\ln(1-r/V)} \tag{4.10a}$$

and

$$0 \leqslant p \leqslant p_{cr}(M) \triangleq \frac{-r}{[M\ln(1-r/V)+1]e\ln(1-r/V)}, \tag{4.10b}$$

3°

$$M^*_{cr} < M < \infty \tag{4.11a}$$

and

$$0 \leqslant p \leqslant p^*_{cr}(M) \triangleq \frac{n_2 r(1-r/V)^{n_2-1}}{M-n_2} \tag{4.11b}$$

where

$$n_2 = \frac{M}{2} + \sqrt{\frac{M^2}{4} + \frac{M}{\ln(1-r/V)}}. \tag{4.11c}$$

Thus the stability region is determined. In Fig. 10 the stability region is plotted on the p-M plane for $V = 3$ and $r = 0.3$. It is clear that for an increasing value of V and decreasing value of r the stability region is enlarged.

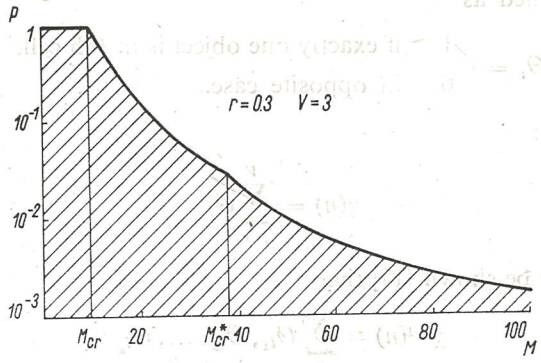


Fig. 10. The stability region (dashed)

5. CONCLUSIONS

In the paper the generalized slotted *ALOHA* system called *S/V-ALOHA* system is considered. The markovian analysis and fluid approximation are presented. Besides, we have dealt with stability considerations. We have proposed to use a practical stability concept to explain the backgrounds of the *S/V-ALOHA* stability. Finnaly, the stability region is determined.

Appendix A

Random assignment n objects to V cells

Consider a model with n objects and V cells. Objects are independently assigned to cells and each cell is chosen with a probability equal to $1/V$. Let $\chi(n)$ denote a random variable representing the number of cells with exactly one object. One wants to find the distribution of $\chi(n)$, which is equivalent to finding the folowing generating function

$$G(z) = \sum_{k=0}^{V} Pr\{\chi(n) = k\} z^k. \tag{A1}$$

Of course, developing the Taylor series in point $z = 1$ the function $G(z)$ may be rewritten as

$$G(z) = \sum_{k=0}^{V} \frac{1}{k!} \frac{d^k G(z)}{dz^k}\bigg|_{z=1} (z-1)^k \tag{A2}$$

and if one notices that

$$E\chi^{[k]}(n) \triangleq \frac{d^k G(z)}{dz^k}\bigg|_{z=1} = E\chi(n)[\chi(n)-1]\ldots[\chi(n)-k+1] \tag{A3}$$

then

$$G(z) = \sum_{k=0}^{V} \frac{1}{k!} E\chi^{[k]}(n)(z-1)^k. \tag{A4}$$

To find $G(z)$ one needs the k-th moment of $\chi(n)$ i.e. $E\chi^{[k]}(n)$. Let us introduce V new random variables defined as

$$\Theta_i = \begin{cases} 1 & \text{if exactly one object is in } i\text{-th cell,} \\ 0 & \text{in opposite case.} \end{cases} \tag{A5}$$

Of course,

$$\chi(n) = \sum_{i=1}^{V} \Theta_i \tag{A6}$$

and, in general, it may be shown [17] that

$$\chi^{[k]}(n) = \sum_{\mathscr{A}_k} \Theta_{i_1}, \Theta_{i_2}, \ldots, \Theta_{i_k} \tag{A7}$$

where $\mathscr{A}_k$ is a set of all k-variations of a set $\{1, 2, \ldots, V\}$. Taking now into consideration (A5) and (A7) it is easy to prove that

$$E\chi^{[k]}(n) = \sum_{\mathscr{A}_k} Pr\{\Theta_{i_1} = 1, \Theta_{i_2} = 1, \ldots, \Theta_{i_k} = 1\} = V^{[k]} Pr\{\Theta_1 = 1, \Theta_2 = 1, \ldots, \Theta_k = 1\} \tag{A8}$$

where

$$V^{[k]} \triangleq \begin{cases} V(V-1)\ldots(V-1+k) & k \leqslant V, \\ 0 & k > V. \end{cases} \tag{A9}$$

Hence, from the assumption about independent assignment of objects to cells it follows that

$$Pr\{\Theta_1 = 1, \Theta_2 = 1, \ldots, \Theta_k = 1\} = \frac{n^{[k]}}{V^k}\left(1 - \frac{k}{V}\right)^{n-k}. \tag{A10}$$

From (A8) and (A10) one immediately obtains

$$E\chi^{[k]} = \frac{V^{[k]}}{V^k} n^{[k]}\left(1 - \frac{k}{V}\right)^{n-k} \tag{A11}$$

and from (A4)

$$G(z) = \sum_{k=1}^{V} \frac{V^{[k]}}{V^k} n^{[k]}\left(1 - \frac{k}{V}\right)^{n-k} \frac{(z-1)^k}{k!}. \tag{A12}$$

In addition, Eq. (A1) implies that the probabilities $Pr\{\chi(n) = k\}$ may be obtained as the coefficients of z^k in the function $G(z)$. Hence, from (A12) after some calculations one gets

$$Pr\{\chi(n) = k\} = \frac{(-1)^k V!n!}{V^n k!} \sum_{j=k}^{\min\{V,n\}} (-1)^j \frac{(V-j)^{n-j}}{(j-k)!(V-j)!(n-j)!} \tag{A13a}$$

where

$$k \in \{0, 1, \ldots \min\{V, n\}\}. \tag{A13b}$$

Appendix B

Analysis of the local equilibrium equation

Consider the local equilibrium equation (*LEE*) that is

$$nr\left(1 - \frac{r}{V}\right)^{n-1} = (M-n)p \tag{B1}$$

where r, V, M, and p are parameters of the equation. It will be assumed that r and V are fixed and we would like to find such values of p and M which assure that the soltuion of (B1) is unique and of type n_o. Let us recall that n_o is such a root of *LEE* that

$$0 \leqslant n_o \leqslant n_{max} \tag{B2}$$

where n_{max} defined by Eq. (3.14) is the value for which the conditional throughput $S_o(n)$ reaches the maximum.

First, we find such a value M_{cr} of M that for each p and $M < M_{cr}$ the solution of (B1) is of type n_o i.e. it satisfies (B2). From Fig. B1 it is easy to notice that M_{cr} is calculated as

$$M_{cr} = n_{max} + S_o(n_{max}) \tag{B3}$$

and taking into consideration Eqs. (3.14) and (3.15) one gets

$$M_{cr} = \frac{-1}{\ln(1-r/V)}\left[1 + \frac{r}{e(1-r/V)}\right]. \tag{B4}$$

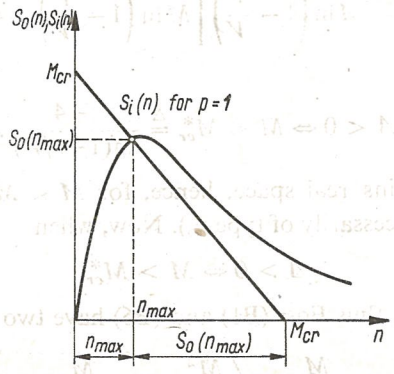


Fig. B1. A calculation of M_{cr}

Now, consider a case when $M > M_{cr}$ and first we try to find the conditions on p and M that Eq. (B1) has exactly two solutions (see Fig. B2a). For that case, the roots n_1 and n_2 of *LEE* should additionally be the solutions of the following equation

$$\left.\frac{dS_o(n)}{dn}\right|_{n=n_1,n_2} = \left.\frac{dS_i(n)}{dn}\right|_{n=n_1,n_2} \tag{B5}$$

that is, the equation

$$r\left(1-\frac{r}{V}\right)^{n-1}\left[1+n\ln\left(1-\frac{r}{V}\right)\right] = -p \tag{B6}$$

as seen in Fig. B2a. Besides, Eqs. (B1) and (B6) determine the values p_{cr}^{*} and p_{cr}^{**} of parameter p as it is shown in Fig. B2a. To find these values one should divide (B1) into (B6) yielding to the equation

$$n^2\ln\left(1-\frac{r}{V}\right) - nM\ln\left(1-\frac{r}{V}\right) - M = 0 \tag{B7}$$

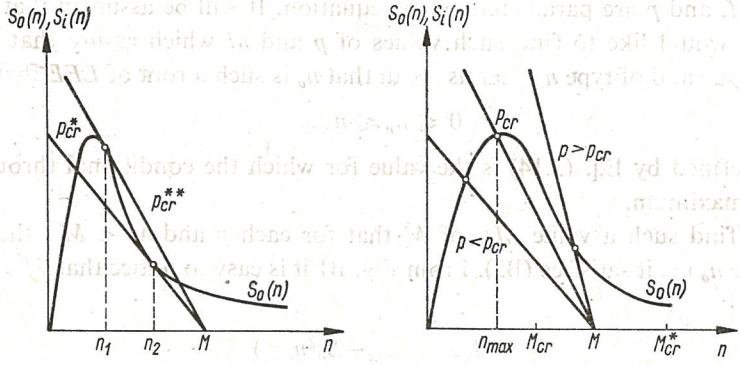


Fig. B2. a) An example of exactly two roots of the local equilibrium equation, b) A calculation of p_{cr}

from which n_1 and n_2 may be calculated. Let us notice that the number of solutions of (B7), hence (B1) and (B6), depends on

$$\Delta = M\ln\left(1-\frac{r}{V}\right)\left[M\ln\left(1-\frac{r}{V}\right)+4\right]. \tag{B8}$$

Of course, for

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow M < M_{cr}^{*} \triangleq \frac{-4}{\ln(1-r/V)}. \tag{B9}$$

Eq. (B8) has no solutions ins real space, hence, for $M < M_{cr}^{*}$ and $0 \leqslant p \leqslant 1$ the *LEE* has exactly one root (not necessarily of type n_o). Now, when

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow M > M_{cr}^{*} \tag{B10}$$

Eqs. (B7) has two solutions, thus Eqs. (B1) and (B6) have two solutions

$$n_1 = \frac{M}{2} - \sqrt{\frac{M^2}{4} + \frac{M}{\ln(1-r/V)}}, \tag{B11a}$$

$$p_{cr}^{**}(M) = \frac{n_1 r(1-r/V)^{n_1-1}}{M-n_1} \tag{B11b}$$

or

$$n_2 = \frac{M}{2} + \sqrt{\frac{M^2}{4} - \frac{M}{\ln(1-r/V)}}, \tag{B12a}$$

$$p_{cr}^{*}(M) = \frac{n_2 r(1-r/V)^{n_2-1}}{M-n_2}. \tag{B12b}$$

Therefore, for $M > M_{cr}^{*}$ the local equilibrium equation has exactly one root of type n_o if

$$p \leqslant p_{cr}^{*}(M). \tag{B13}$$

Let us return now to the case where $\Delta < 0$ (see Fig. B2b). We have so far proved that for $M < M_{cr}^{*}$ the *LEE* has exactly one solution. Now, we try to determine such value $p_{cr}(M)$ leading to the solution of type n_o for $p < p_{cr}(M)$ (Fig. B2b). It was shown that for $M \leqslant M_{cr} < M_{cr}^{*}$ and $0 \leqslant p \leqslant 1$ the solution of *LEE* is always of type n_o. Now we assume that $M_{cr} < M \leqslant M_{cr}^{*}$ and calculate $p_{cr}(M)$. From Fig. B2b it is easy to notice that

$$P_{cr}(M) = \frac{S_o(n_{max})}{M-n_{max}} = \frac{-r}{[M\ln(1-r/V)+1]e(1-r/V)}. \tag{B14}$$

Thus, we have determined the stability region, that is, we have proved Eqs. (4.9)—(4.11) in the text.

REFERENCES

1. N. Abramson, *Packet switching with satellites*, Proceedings of AFIPS, vol. 42, pp. 695—702, 1973.
2. A. Carleial, M. Hellman, *Bistable behaviour of ALOHA-type systems*, IEEE Trans. on Commun., vol. COM-23, No. 4, pp. 401—410, April 1975.
3. J. Derosa, L. Ozarow, *Packet switching in a processing satellite*, Proceedings of IEEE, vol. 66, No. 1, pp. 100—102, January 1978.
4. G. Fayolle et al., *Stability and optimal control of the packet switching broadcast channel*, JACM 24, No. 3, pp. 375—386, 1977.
5. M. Ferguson, *On the control, stability, and waiting time in a slotted ALOHA random access system*, IEEE Trans. on Commun., vol. COM-23, No. 11, pp. 1308—1311, November 1975.
6. L. Grippo, F. Lampariello, *Practical stability of discrete-time systems*, Journal of the Franklin Inst., vol. 32, pp. 213—224, September 1976.
7. L. Kleinrock, S. Lam, *Packet switching in a slotted satellite channel*, Proceedings of AFIPS, vol. 42, pp. 703—710, 1973.
8. L. Kleinrock, S. Lam, *Packet switching in a multiaccess broadcast channel: Performance evaluation*, IEEE Trans. on Commun., vol. COM-23, No. 4, pp. 410—422, April 1975.
9. H. Kobayashi et al., *An approximate method for design and analysis of an ALOHA system*, IEEE Trans. on Commun., vol. COM-25, No. 1, pp. 148—157, January 1977.
10. M. Molle, *Analysis of concentrated ALOHA packet satellite links*, Master Thesis, University of California, Los Angeles 1978.
11. H. Okada et al., *Analysis of framed ALOHA channel in satellite packet switching networks*, Proc. of the ICCC-78, pp. 617—622, 1978.

12. L. Roberts, *Dynamic allocation of satellite capacity through packet reservation*, Proc. of AFIPS, vol. 42, pp. 711—716, 1973.
13. I. Rubin, *Group random access disciplines for multi-access broadcast channels*, IEEE Trans. on Information Theory, vol. IT-24, No. 5, pp. 578—592, September 1978.
14. I. Rubin, *Access-control disciplines for multi-access communication channels: reservation and TDMA schemes*, IEEE Trans. Information Theory, vol. IT-25, No. 5, pp. 516—536, September 1979.
15. W. Szpankowski, K. Ono, Y. Urano, *Simulation and analysis of satellite packet switching computer networks*, Proc. of the ICCC-78, pp. 609—615, Kyoto 1978.
16. W. Szpankowski, K. Pawlikowski, *An approximate analysis of a packet switching with multiple satellite channels*, Systems Science, vol. 5, No. 3, pp. 299—313, 1979.
17. W. Szpankowski, *Statistics analysis of multiaccess systems with random access and feedback*, Ph. D dissertation, University of Gdańsk, 1980.
18. W. Szpankowski, *Analysis and stability considerations of a: concentrated ALOHA system*, Proceedings of International Conference PERFORMANCE'81, Amsterdam 1981, pp. 33—49.
19. F. Tobagi, L. Kleinrock, *Packet switching in a radio channel: Part III — Polling and (dynamic) split-channel reservation multiple access*, IEEE Trans. on Commun., vol. COM-24, No. 8, pp. 832—845, 1976.
20. F. Tobagi, L. Kleinrock, *Packet switching in a radio channel: Part IV — Stability considerations and dynamic control in carrier sense multiple access*, IEEE Trans. on Commun., vol. COM-25, No. 10, pp. 1103—1119, October 1977.

W. SZPANKOWSKI, A. KUSIUK

ANALIZA SYSTEMU WIELODOSTĘPOWEGO Z WIELOKROTNYM KANAŁEM RADIOWYM ORAZ ZE ZDALNYM DOSTĘPEM SWOBODNYM BEZ WYRÓŻNIANIA RETRANSMISJI

Streszczenie

W artykule rozważono komutacje pakietów w wielodostępowym systemie z wielokrotnym kanałem radiowym oraz ze zdalnym dostępem swobodnym bez wyróżniania retransmisji. Podano analizę markowską systemu, jak również rozważono model przybliżony oparty na średnich przepływach. Dodatkowo rozpatrzono problem stabilności systemu, tzn. podano definicje systemu stabilnego w sensie stabilności praktycznej oraz obliczono stabilności. Wyniki analityczne zilustrowano licznymi przykładami obliczeń numerycznych.

W. SZPANKOWSKI, A. KUSIUK

ANALYSE DU SYSTÈME MULTIACCESSIBLE À CANAL DE RADIO MULTIPLE AVEC ACCÈS ALÉATOIRE SANS CONSIDÉRATION DE RETRANSMISSIONS

Résumé

Dans l'article on a considéré la commutation des paquets dans un système multiaccesssible à canal de radio avec accès aléatoire sans considération de retransmissions. On a présenté l'analyse Markovienne du système et on a aussi considéré le modèle approximatif basé sur les flots moyens. En plus, on a considéré le problème de stabilité du système, c'est à dire on a défini le système stable dans le sens de la stabilité pratique et on calculé le domaine de stabilité. Les résultats analytiques ont été illustrés par des exemples numériques.

W. SZPANKOWSKI, A. KUSIUK

ANALYSE EINES SYSTEMS MIT MEHREREN ZUTRITTSMÖGLICHKEITEN UND VIELMALIGEM FUNKKANAL SOWIE FREIEM FERNZUTRITT OHNE HERVORHEBUNG DER WIEDERÜBERTRAGUNG

Zusammenfassung

Im Artikel wurden Paketvermittlungen in einem System mit mehreren Zutritsmöglichkeiten und vielmaligem Funkkanal sowie freiem Fernzutritt ohne Hervorhebung der Wiederübertragung untersucht. Es wurde die Markov'sche Analyse angeführt, auch wurde ein angenähertes Modell erwogen, das auf mittleren Zwischenflüssen beruht. Zusätzlich wurde das Stabilitätsproblem untersucht, d.h. es wurde die Definition der Stabilität des Systems im praktischen Stabilitätssinn angegeben, und die Stabilitätszone berechnet. Analytische Ergenisse wurden mittels zahlreicher Beispiele numerischer Berechnungen illustriert.

В. ШПАНКОВСКИ, А. КУСЮК

АНАЛИЗ МНОГОДОСТУПНОЙ СИСТЕМЫ СО СВОБОДНЫМ МНОЖЕСТВЕННЫМ ДОСТУПОМ БЕЗ ВЫДЕЛЕНИЯ ПОВТОРНОЙ ПЕРЕДАЧИ В МНОГОКРАТНЫЙ РАДИОКАНАЛ

Резюме

Рассмотрена коммутация пакетов в многодоступной системе с многократным радиоканалом и дистанционным свободным доступом без выделения повторной передачи. Приведен марковский анализ системы и рассмотрена приблизительная модель обоснованная на флюйдальном анализе. Дополнительно рассмотрена проблема стабильности системы т.е. приведена дефиниция системы стабильной в смысле практической стабильности и расчитан диапазон стабильности. Аналитические результаты иллюстрированы многочисленными примерами числовых расчетов.

TREŚĆ

S. Bolkowski, E. Wolniewicz: Rząd *N*-wrotnika opisanego macierzą transmitancji a wymiar jej minimalnej realizacji 3

M. Komorowski: Metoda ułamków łańcuchowych i trójkąt Pascala 13

J. Sikora, J. Skoczylas, J. Sroka, A. Toboła, S. Wincenciak: Metoda *SVD* w zagadnieniach odwrotnych aproksymowanych metodą elementów skończonych 25

S. Iskierka: Numeryczna analiza pracy łożyska indukcyjnego z symetrycznym i niesymetrycznym okładem prądu wzbudzenia 33

Z. Manitus: Obliczanie rozrzutu parametrów maszyn elektrycznych 43

A. Patyk: Niektóre macierze transformacyjne i przekształcenia w analizie przetworników asynchronicznych 51

W. Morzuch: Dynamika wirników klatkowych silników asynchronicznych 69

J. Anuszczyk: Wyznaczanie przemagnesowania obrotowego w jarzmie silnika indukcyjnego metodą schematu reluktancyjnego 83

Z. Nowacki: Układy napędowe prądu stałego sterowane mikroprocesorami 99

M. Turowski, M. Kopeć: Program do szybkiej analizy pola rozproszenia transformatorów metodą sieci reluktancyjnych 115

W. Sitek: Wpływ położenia wtrąciny gazowej na przebieg wyładowań niezupełnych 129

A. Sobieszczuk: Podstawowe pole temperaturowe w katodzie łuku elektrycznego z uwzględnieniem pola temperaturowego plamek elementarnych 137

K. Domke: Współczynnik konfiguracji skrętki grzejnej jako czynnik determinujący zależność pomiędzy mocą a temperaturą skrętki 163

E. Z. Pawlak: Przewodnictwo cienkich polikrystalicznych warstw związków półprzewodnikowych 175

W. Stańczak: O metodzie wiązki równoważnej 195

T. Wysocki jr: Wpływ współczynnika modulacji na prawdopodobieństwo błędnej decyzji przy optymalnym odbiorze sygnałów binarnej modulacji częstotliwości 211

T. Stachowiak, E. Turska: O doborze parametrów charakteryzujących strefowe sieci telefoniczne 225

D. J. Bem: Szerokopasmowe systemy radiokomunikacyjne 241

W. Szpankowski: Analysis and Stability Considerations of a Random Access System Without Retransmission Discrimination Discipline for Multiple Radio Channels 265

CONTENTS — TABLES DES MATIÈRES — INHALT

S. Bolkowski, E. Wolniewicz: Order of an *N*-Port and Dimension of Minimal Realization of Its Transfer Function Matrix 10

Rang de *N*-port décrite avec la matrice de transmittance et la dimension de sa réalisation minimale 10

Ordnung eines mittels Transferfunktionsmatrix beschriebenen *N*-Tors und Dimension der Minimalrealisation seiner Matrix 11

M. Komorowski: Continued Fractions Method and Pascal's Triangle 22

Méthode de fractions continues et le triangle arithmétique de Pascal 22

Methode der Kettenbrüche und das Pascal'sche Dreieck 23

J. Sikora, J. Skoczylas, J. Sroka, A. Toboła, S. Wincenciak: Singular Values Decomposition in Inverse Problems Aproximated With Finite Element Method . . . 32

Méthode de décomposition de la valeur singulière (*SVD*) dans les problemèmes inverses approximatifs par méthode des éléments finis 32

SVD-Methode für inverse Probleme, die mit der Methode finiter Elemente approximiert werden 32

S. Iskierka: Numerical Analysis of Induction Bearing Work With Symmetrical and Asymmetrical Exciting Current Density Distribution 41

Analyse numérique de la marche du palier inductif avec symétrique et asymétrique densité linéique de courant d'excitation 42
Numerische Arbeitsanalyse eines Induktionslagers mit symmetrischem und unsymmetrischem Erregerstrombelag 42
Z. Manitius: Calculations of Electric Machines' Parameter Dispersion 48
Calcul de la dispersion des paramètres des machines électriques 49
Berechnungen der Parameterdispersion von elektrischen Maschinen 49
A. Patyk: Some Transformation Matrices and Conversions in the Analysis of Asynchronous Converters 66
Certaines matrices de transformation dans l'analyse des convertisseurs asynchrones 67
Gewählte Transformationsmatrizen und Transformationen bei Analyse von Asynchronwandlern 67
W. Morzuch: Dynamics of Squirrel Cage Rotors of Asynchronous Motors 80
Dynamique des rotors à cage des moteurs asynchrones 81
Dynamik der Käfigläufer von Asynchronmotoren 81
J. Anuszczyk: Evaluation of Rotary Magnetization in Stator Yoke of Induction Motor by Equivalent Reluctance Network 98
Méthode du schéma de réluctance pour le calcul de la magnétisation rotatoire dans le carcasse du moteur à induction 98
Reluktanzschemamethode für Bestimmung der Drehmagnetisierung im Magnetjoch eines Induktionsmotors 98
Z. Nowacki: Microprocessor Controlled DC-Motor Drive Systems 112
Système de commande du moteur électrique à courant continu à l'aide des microprocesseurs 113
Mittels Mikroprozessoren gesteuerte Gleichstromantribe 113
M. Turowski, M. Kopeć: Program for Fast Stray-Field Analysis in Power Transformers With the Aid of the Method of Equivalent Reluctance Scheme 126
Programme d'une analyse rapide du champ de fuites des transformateurs par méthode des circuits équivalente de réluctance 126
Programm für eine schnelle Streufeldanalyse bei Leistungstransformatoren unter Anwendung equivalenter Reluktanznetze 127
W. Sitek: Effect of Location of a Cavity on Partial Discharge Development 134
Influence de la situation de la cavité gazeuse sur le parcours des décharges imparfaites 135
Einfluss der Lage eines Luftspalts auf den Verlauf von Teilentladungen 135
A. Sobieszczuk: Fundamental Thermal Field at Electric Arc Cathode Taking Into Account Thermal Fields of Elementary Spots 160
Champ de base de température dans la cathode de l'arc électrique surtout dans les taches élémentaires 161
Grundtemperaturfeld in der Kathode des Lichtbogens unter Berücksichtigung des Temperaturdeldes der elementaren Flekcs 161
K. Domke: Coefficient of Heater Coil Configuration as Factor Determining Dependence Between Coil Temperature and Power 173
Coefficient de configuration de l'enroulement de chauffage comme agent déterminante la dépendence entre la puissance et al température de l'enroulement 173
Formfaktor der Heizwindel als entscheidender Faktor für die Abhängigkeit Leistung-Windeltemperatur 174
E. Pawlak: Conductivity of Thin Polycrystalline Films of Semi-Conductor Compounds 193
Conductibilité des couches minces polycristallines des composés semiconducteurs 193
Stromleitung in dünnen polykristallischen Schichten von Halbleiterverbindungen 193
W. Stańczak: On Equivalent Random Method 208
Théorie équivalent de réference de Wilkinson. 208
Methode des verallgemeinerten Streuwertverfahrens 208
T. Wysocki: Probability of Erroneous Decision for Continuous Phase Binary *FSK* Optimum Coherent Detection on Modulation Factor 222

Influence de l'index de modulation sur la probabilité de la décision erronée pour la réception optimale des signaux de modulation binaire de fréquence 223
Einfluss des Modulationsfaktors auf die Wahrscheinlichkeit einer Fehlentscheidung beim optimalen Empfang der mittels der Binärfolge frequenzmodulierten Signale 223
T. Stachowiak, E. Turska: On Selecting Parameters Characterizing Telephone Zone Networks 239
Choix des paramètres caractéristiques pour les reseaux de zones téléphoniques 239
Parameterwahl für Zonenfernmeldenetze 239
D. J. Bem: Spread-Spectrum Systems 262
Systèmes de radiocommunication à bande large 262
Breitbandige Funkverkehrssysteme 263
W. Szpankowski, A. Kusiuk: Analiza systemu wielodostępowego z wielokrotnym kanałem radiowym oraz ze zdalnym dostępem swobodnym bez wyróżniania retransmisji 284
Analyse du système multiaccessible à canal de radio multiple avec accès aléatoire sans considération de retransmissions 284
Analyse eines Systems mit mehreren Zutrittsmöglichkeiten und vielmaligem Funkkanal sowie freiem Fernzutritt ohne Hervorhebung der Wiederübertragung 285

СОДЕРЖАНИЕ

С. Больковски, Э. Вольневич: Ряд многополюсника описанного матрицей передаточной функции и размер ее минимальной реализации 11
М. Коморовски: Метод цепных дробей и треугольник Паскаля 23
Я. Сикора, Е. Скочиляс, Я. Срока, А. Тобола, С. Винценцяк: Метод *СИД* для некорректных задач аппроксимированых методом конечных элементов 32
С. Искерка: Вычислительный анализ работы индукционного подшипника с симметричной и несимметричной линейной нагрузкой возбуждения 42
З. Манитиюс: Расчеты дисперсии параметров электрических машин 49
А. Патык: Некоторые преобразовательные матрицы и преобразования в анализе асинхронных преобразователей 67
В. Можух: Динамика роторов с беличьей клеткой асинхронных электродвигателей . . 82
Я. Анущик: Метод эквивалентной релюктанционной схемы для определения вращающегося магнитного поля в ярме статора асинхронного двигателя 98
З. Новацки: Электроприводы постоянного тока управляемые микропроцессорами . . 113
М. Туровски, М. Копэць: Программа для быстрого анализа поля рассеяния трансформаторов методом релюктанционных схем 127
В. Ситек: Влияние локализации воздушного включения на течение частичных разрядов и срок службы изоляции 135
А. Собещук: Основное температурное поле катода электрической дуги с учётом температурного поля элементарных пятен 161
К. Домке: Коэффициент конфигурации спирального нагревателя, как фактор определяющий зависимость температуры от мощности питания 174
Э. Павляк: Проводимость тонких поликристаллических пленок полупроводниковых соединении 193
В. Станьчак: О методе эквивалентных замен 209
Т. Высоцки: Влияние коэффициента модуляции на вероятность ложного решения при оптимальном приеме сигналов для бинарной частотной манипуляции 223
Т. Стаховяк, Э. Турска: Об подборе параметров характеризующих телефонные зоны 239
Д. Й. Бэм: Широкополосные системы радиосвязи 264
В. Шпанковски, А. Кусюк: Анализ многодоступной системы со свободным множественным доступом без выделения повторной передачи в многократный радиоканал 285

Cena zł 160,—

Rozprawy Elektrotechniczne

Kwartalnik

CZASOPISMO
ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

Warunki prenumeraty
Cena prenumeraty krajowej
półrocznie zł 320,—
rocznie zł 640,—

Prenumerata **na kraj** przyjmowana jest:
— do dnia 10 listopada na I półrocze roku następnego i na cały rok następny,
— do dnia 1 czerwca na II półrocze roku bieżącego.

Instytucje i zakłady pracy zamawiają prenumeratę w miejscowych Oddziałach RSW „Prasa-Książka-Ruch", w miejscowościach zaś, w których nie ma Oddziałów RSW — w urzędach pocztowych i u doręczycieli. Czytelnicy indywidualni opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych i u doręczycieli.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki **za granicę** przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch", Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1153-201045-139-11, w terminach podanych dla prenumeraty krajowej.

Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN, Pałac Kultury i Nauki, 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki".

Subscription orders for all the magazines published in Poland available through the local press distributors or directly through the Foreign Trade Enterprise Ars Polona, 00-068 Warszawa, Krakowskie Przedmieście 7, Poland. Our bankers: Bank Handlowy Warszawa S.A.

Rozpr. Elektrot. T. 31, z. 1, 1—288, Warszawa 1985

Index 37483

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTROTECHNIKI
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

PL ISSN 0035-9386

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XXXI — ZESZYT 2

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1985

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTROTECHNIKI
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XXXI — ZESZYT 2

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1985

RADA REDAKCYJNA

Przewodniczący

prof. dr hab. JANUSZ TUROWSKI

Członkowie

prof. dr hab. DANIEL JÓZEF BEM, prof. TADEUSZ CHOLEWICKI — członek rzeczywisty PAN, prof. dr ZDZISŁAW KACHLICKI, prof. dr hab. TADEUSZ KACZOREK, prof. dr LEONARD KNOCH, doc. dr hab. ANDRZEJ KUSY, prof. JAN MANITIUS, prof. dr WITOLD NOWICKI, prof. dr WITOLD ROSIŃSKI — członek rzeczywisty PAN, prof. dr RYSZARD SIKORA, prof. dr hab. WOJCIECH SOBCZAK, prof. dr STEFAN WĘGRZYN — członek rzeczywisty PAN

REDAKCJA

Redaktor naczelny

prof. dr WITOLD NOWICKI

Zastępca redaktora naczelnego

prof. dr hab. TADEUSZ KACZOREK

Sekretarz odpowiedzialny

red. JANINA MATHEISEL

ADRES REDAKCJI

00-661 Warszawa, Plac Jedności Robotniczej 1
Politechnika, Instytut Telekomunikacji, Gmach Elektroniki, pok. 401

Dyżury Redakcji: środy i piątki, godz. 11-13
tel. 28 89 91 lub 210 07-737

Telefony domowe: redaktor naczelny — 17 37 03
zastępca redaktora naczelnego — 44 88 34
sekretarz odpowiedzialny — 33 84 97

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 520	Oddano do składania 11.XII.1984 r.
Ark. druk. 20,5 Ark. wyd. 25,0	Podpisano do druku w listopadzie 1985 r.
Papier druk. b. sat. kl. IV, 70 g, 70×100	Druk ukończono w styczniu 1986.
Zamówienie nr 7173/12/84	Cena zł 160,— N-49

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1985, 31, z. 2, ss. 291—303

621.317.332.1

Quasi-zrównoważone metody pomiaru impedancji

BRUNON SZADKOWSKI (GLIWICE)

Instytut Metrologii Elektrycznej i Elektronicznej Politechniki Śląskiej

Otrzymano 23.1.1984

W pracy przedstawiono próbę ogólnego, teoretycznego opisu quasi-zrównoważonych metod pomiaru impedancji. Określono metodykę tworzenia odpowiednich realizacji układowych i wskazano przykłady nowych rozwiązań.

1. WPROWADZENIE

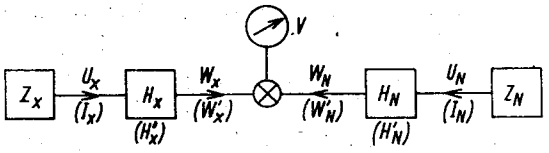
Metody quasi-zrównoważone znane są w literaturze jako pewne modyfikacje metody mostkowej prądu przemiennego i przeznaczone są do pomiaru dowolnej, lecz tylko jednej składowej mierzonej impedancji Z_x [3], [6]. Odpowiednie realizacje układowe nazywane są mostkami quasi-zrównoważonymi lub mostkami pozornie zrównoważonymi. Pomiar wybranej składowej Z_x polega na sprowadzeniu mostka do pewnego stanu, różniącego się od stanu zerowego i nazywanego stanem quasi-równowagi, a następnie na wyznaczeniu mierzonej składowej Z_x z obowiązującego w osiągniętym stanie równania quasi-równowagi. Jest to procedura podobna do stosowanej w mostkach zrównoważonych. Można ogólnie stwierdzić, że mostki quasi-zrównoważone są pewną modyfikacją mostków zrównoważonych. Nasuwa się stąd przypuszczenie, że w wyniku odpowiedniej modyfikacji innych układów zrównoważonych (nie mostkowych) mogłyby być utworzone inne, nieznane dotychczas układy quasi-zrównoważone.

Celem niniejszego opracowania jest podjęcie próby ogólnego, teoretycznego opisu metod quasi-zrównoważonych i określenie metodyki tworzenia odpowiednich rozwiązań układowych. W literaturze znane są tylko opisy poszczególnych rozwiązań mostków quasi-zrównoważonych, przy czym nie ma ogólnej teorii, wspólnej dla całej klasy tego typu mostków. Nie została w pełni ujawniona metodyka tworzenia przyjętych rozwiązań. Można jedynie przypuszczać, że poszczególne mostki zostały zaproponowane w wyniku analizy wykresów wskazowych mostka typu Wheatstone'a oraz intuicyjnego znajdowania zależności określających stany quasi-równowagi, przydatne do pomiaru wybranej składowej Z_x.

Podjętą w dalszych rozważaniach próbę ogólnego ujęcia metod quasi-zrównoważonych, nie tylko mostkowych, oparto na znanych w literaturze uogólnieniach odnoszących się do metod zerowych (zrównoważonych) [5], [1], [2], [4].

2. UOGÓLNIONE RÓWNANIA STANÓW QUASI-RÓWNOWAGI

W pracy [5] wykazano, że zrównoważone układy mostkowe oraz równoprądowe i równonapięciowe komparatory impedancji mogą być sprowadzone do ogólnego schematu strukturalnego, przedstawionego na rys. 1. Bloki Z_x oraz Z_N reprezentują obwody, w których wytwarzane są sygnały U_x, I_x oraz U_N, I_N podlegające dalszemu przetwarzaniu,



Rys. 1. Ogólny schemat strukturalny układów komparacji impedancji Z_x i Z_N
U_x, U_N, (I_x, I_N) — spadki napięć lub prądy impedancji mierzonej Z_x i wzorcowej Z_N; H_x, H_N — transmitancje przetworników; W_x, W_N — sygnały wyjściowe, podlegające detekcji; V — wskaźnik zera

przy czym $U_x/I_x = Z_x$ oraz $U_N/I_N = Z_N$. W przypadku gdy przez impedancję mierzoną Z_x i wzorcową Z_N wymuszony jest przepływ tego samego prądu $I_x = I_N$ (komparacja równoprądowa), przetwarzaniu podlegają sygnały napięciowe U_x, U_N i zachowana jest zależność: $U_x/U_N = Z_x/Z_N$. Natomiast w przypadku komparacji równonapięciowej (tzn. przy wymuszeniu równości napięć $U_x = U_N$), przetwarzaniu podlegają sygnały prądowe I_x, I_N i zachowana jest zależność: $I_N/I_x = Z_x/Z_N$.

Sygnały wyjściowe z przetworników określone są zależnościami:

— przy przetwarzaniu równoprądowym

$$W_x = U_x H_x \quad \text{i} \quad W_N = U_N H_N, \tag{1}$$

— przy przetwarzaniu równonapięciowym

$$W'_x = I_x H'_x \quad \text{i} \quad W'_N = I_N H'_N. \tag{2}$$

Po podzieleniu stronami i uwzględnieniu obowiązujących zależności $U_x/U_N = Z_x/Z_N$ lub $I_N/I_x = Z_x/Z_N$, z równań (1) i (2) otrzymujemy równania przetwarzania układów zrealizowanych według schematu z rys. 1:

$$\frac{W_x}{W_N} = Z^o \frac{H_x}{H_N}, \tag{3}$$

lub

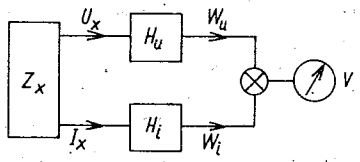
$$\frac{W'_N}{W'_x} = Z^o \frac{H'_N}{H'_x}, \tag{4}$$

przy czym $Z^o = \dfrac{Z_x}{Z_N}$.

Schemat z rys. 1 reprezentuje tylko te układy, w których dokonywane jest jednoczesne porównanie impedancji Z_x z impedancją wzorcową Z_N. W literaturze znane są ponadto układy, w których w czasie pomiaru nie jest używany wzorzec [1], [2]. Są to pewne odmiany układów Logana [4], które można sprowadzić do schematu strukturalnego, przedstawionego na rys. 2 [1]. Odpowiednie równanie przetwarzania układów zrealizowanych

według schematu z rys. 2 określa zależność

$$\frac{W_u}{W_i} = Z_x \frac{H_u}{H_i}. \tag{5}$$



Rys. 2. Ogólny schemat strukturalny zrównoważonych układów Logana
U_x, I_x — spadek napięcia i prąd płynący przez mierzoną impedancję Z_x; H_u, H_i — transmitancje przetworników; W_u, W_i — sygnały wyjściowe, podlegające detekcji; V — wskaźnik zera

Równania przetwarzania (3), (4) i (5) są analogiczne pod względem postaci funkcyjnych i dalsze ich rozważania można przeprowadzić łącznie, korzystając z ogólnego zapisu

$$\frac{W_1}{W_2} = Z \frac{H_1}{H_2}, \tag{6}$$

przy czym: $Z = Z_x/Z_N$ — w przypadku układów zrealizowanych według schematu z rys. 1, lub $Z = Z_x$ — w przypadku układów zrealizowanych według schematu z rys. 2.

Równanie (6) jest uogólnionym równaniem przetwarzania dowolnych układów pomiarowych, o strukturach odpowiadających schematom z rys. 1 i 2. W stanie równowagi, gdy wskaźnik zera V wskazuje osiągnięcie stanu $W_1 - W_2 = 0$, równ. (6) przekształca się do zależności (7), zwanej równaniem równowagi

$$Z = \frac{H_2}{H_1}. \tag{7}$$

W celu przystosowania układów o strukturach przedstawionych na rys. 1 i 2 do pomiarów quasi-zrównoważonych, należy zastąpić wskaźnik zera V innym detektorem, zdolnym do wykrywania innych relacji między sygnałami W_1 i W_2 niż relacja równowagi: $W_1 - W_2 = 0$. Odpowiednie relacje, zwane stanami quasi-równowagi, powinny być tak dobrane, aby po ich osiągnięciu możliwe było wyznaczenie jednej ze składowych mierzonej impedancji Z: Re Z, Im Z, $|Z|$ lub kąta fazowego impedancji φ.

Uogólnione równanie przetwarzania (6) można przedstawić w postaci:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{W_1}{W_2}\right) + j\,\mathrm{Im}\left(\frac{W_1}{W_2}\right) = \mathrm{Re}\left(Z\frac{H_1}{H_2}\right) + j\,\mathrm{Im}\left(Z\frac{H_1}{H_2}\right), \tag{8}$$

lub

$$\left|\frac{W_1}{W_2}\right| e^{j\alpha} = |Z| \frac{|H_1|}{|H_2|} e^{j(\varphi+\psi)}, \tag{9}$$

gdzie: $\alpha = \arg \frac{W_1}{W_2}$; $\varphi = \arg Z$; $\psi = \arg \frac{H_1}{H_2}$.

W celu wyznaczenia poszczególnych składowych impedancji Z należy zażądać, aby odpowiednie składowe ilorazu sygnałów wyjściowych W_1/W_2 sprowadzone były do z góry

zadanych wartości k, l, m, n:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{W_1}{W_2}\right) = k, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{W_1}{W_2}\right) = l, \tag{10), (11}$$

$$\left|\frac{W_1}{W_2}\right| = m, \quad \arg\left(\frac{W_1}{W_2}\right) = n, \tag{12), (13}$$

przy czym: k, l, m, n — liczby rzeczywiste.

Równania (10)÷(13) są uogólnionymi równaniami stanów quasi-równowagi, które mogą być osiągane w dowolnym układzie zrealizowanym według schematów z rys. 1 i 2 w wyniku zmian transmitancji przetworników (H_1, H_2). Do wykrywania stanów quasi-równowagi mogą być stosowane detektory fazoczułe, komparacyjne, różnicowe itp. Detektory takie stosowane są również w wielu innych układach pomiarowych; bliższe ich omówienie wykracza poza przyjęty zakres rozważań.

Podstawiając wartości k, l, m, n do równań (8) i (9) otrzymuje się szczegółowe równania, zwane równaniami quasi-równowagi, z których można obliczyć składowe impedancji Z przy znanych transmitancjach H_1 i H_2.

Wyznaczenie żądanej składowej impedancji Z w opisany wyżej sposób możliwe jest tylko pod warunkiem odpowiedniego doboru transmitancji H_1 i H_2. Wyjaśnienie tego zagadnienia wymaga oddzielnego rozważenia każdego ze stanów quasi-równowagi, określonych równaniami (10)÷(13).

3. DETEKCJA STANU Re $(W_1/W_2) = k$

W tym przypadku równanie quasi-równowagi ma ogólną postać

$$\mathrm{Re}\left(Z\frac{H_1}{H_2}\right) = k. \tag{14}$$

W celu wyznaczenia składowej Re Z, transmitancje H_1 i H_2 powinny być tak dobrane, aby równ. (14) przybrało postać Re Z = const. W ogólnym przypadku postać taką uzyskamy, jeśli spełniona będzie zależność

$$Z\frac{H_1}{H_2} = aZ - b, \tag{15}$$

gdzie: a, b — liczby rzeczywiste, bowiem wówczas Re $(Z\,H_1/H_2) = a\,\mathrm{Re}\,Z - b$, a równanie quasi-równowagi (14) będzie miało żądaną postać

$$\mathrm{Re}\,Z = \frac{b+k}{a}. \tag{16}$$

Dobór transmitancji H_1 i H_2 według równ. (15) wygodniej jest zastąpić doborem sygnałów W_1 i W_2. Uwzględniając w równ. (15) obowiązujące, uogólnione równanie przetwarzania (równ. 6)

$$\frac{W_1}{W_2} = Z\frac{H_1}{H_2},$$

otrzymamy zależność równoważną

$$\frac{W_1}{W_2} = aZ - b \tag{17}$$

określającą wymagany dobór sygnałów W_1 i W_2 podlegających detekcji.

Dobierzmy sygnały W_1 i W_2 w następujący sposób:

$$W_1 = a\frac{W_1}{H_1} - b\frac{W_2}{H_2} \tag{18}$$

oraz

$$W_2 = \frac{W_2}{H_2}. \tag{19}$$

Przypomnijmy, że wyrażenia W/H występujące w równaniach (18), (19) oznaczają sygnały na wejściach przetworników, tzn. U_x, I_x, U_N lub I_N. Następnie obliczmy iloraz dobranych sygnałów, uwzględniając równ. (6)

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{a\frac{W_1}{H_1} - b\frac{W_2}{H_2}}{\frac{W_2}{H_2}} = \frac{a\frac{W_1}{H_1}\frac{H_2}{W_2} - b}{1} = aZ - b.$$

Przedstawione obliczenie dowodzi, że jeśli sygnały W_1 i W_2 utworzone będą z pierwotnych sygnałów napięciowych i prądowych w sposób określony równaniami (18) i (19), to przy detekcji stanu Re $(W_1/W_2) = k$ spełnione będzie równanie quasi-równowagi (16), umożliwiające wyznaczenie składowej Re Z.

W przypadku układów jednoczesnego porównania z wzorcem (rys. 1), gdzie $Z = Z_x/Z_N$, istotny jest ponadto odpowiedni dobór Z_N. Można łatwo wykazać, że wyznaczenie składowej Re Z_x z równ. (16) możliwe jest tylko przy doborze wzorca o charakterze rezystacyjnym ($Z_N = R_N$). Wówczas

$$\mathrm{Re}\, Z_x = R_N\frac{b+k}{a}.$$

Zastosowanie wzorca o charakterze reaktancyjnym ($Z_N = \pm jX_N$) powoduje, że równ. (16) przyjmuje postać

$$\mathrm{Im}\, Z_x = \mp X_N\frac{b+k}{a}.$$

Jest to najprostszy sposób pomiaru składowej Im Z_x, w układach przeznaczonych do pomiaru Re Z.

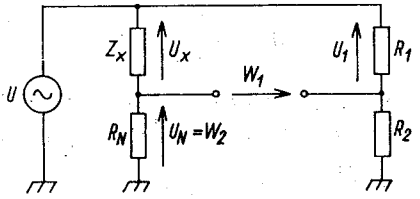
Przykładem ilustrującym przydatność przedstawionych wywodów do wyprowadzania szczegółowych rozwiązań układowych, może być wyprowadzenie znanego z literatury układu mostka quasi-zrównoważonego (rys. 3) [3], który odpowiada strukturze z rys. 1 stosowanej w warunkach równoprądowych.

W strukturach równoprądowych pierwotnymi sygnałami są spadki napięć U_x i U_N. Detekcji powinny podlegać sygnały W_1 i W_2, utworzone zgodnie z równ. (18) i (19) z odpowiednich kombinacji sygnałów U_x i U_N. Wobec tego z równ. (19) dobieramy wprost:

$W_2 = U_N$, natomiast w celu zrealizowania równ. (18) tworzymy dodatkowy dzielnik rezystancyjny, zasilany sumą napięć $U_x + U_N = U$ i jako sygnał W_1 przyjmujemy różnicę napięć

$$W_1 = U_x - U_1 = U_x - \frac{R_1}{R_1+R_2}(U_x+U_N) = aU_x - bU_N,$$

gdzie: $a = \frac{R_2}{R_1+R_2}$; $b = \frac{R_1}{R_1+R_2}$ — parametry dzielnika R_1, R_2.



Rys. 3. Schemat mostka quasi-zrównoważonego

Przyjmijmy, że detekcja stanu Re $(W_1/W_2) = k$ dokonywana będzie przy $k = 0$, np. za pomocą wskaźnika przesunięcia fazowego $\pi/2$. W takim przypadku, wynik pomiaru obliczamy z zależności (16)

$$\mathrm{Re}\, Z = \frac{b+0}{a} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Stosując wzorzec o charakterze rezystancyjnym R_N i uwzględniając, że Re $Z = R_x/R_N$, otrzymujemy ostatecznie

$$R_x = R_N \frac{R_1}{R_2}.$$

W analogiczny sposób można tworzyć inne układy, odpowiadające schematom strukturalnym z rys. 1 i 2, z zastosowaniem różnych detektorów i przetworników U/W, I/W. Przykłady nowych układów przedstawiono w p. 5.

Detekcja stanu Re $(W_1/W_2) = k$ umożliwia również wyznaczanie składowej Im Z. Przeprowadzając podobne rozumowanie jak dla składowej Re Z, otrzymujemy następujące warunki:

— wymagany dobór transmitancji lub sygnałów

$$Z\frac{H_1}{H_2} = jaZ - b = \frac{W_1}{W_2}, \tag{20}$$

— realizacja doboru sygnałów

$$W_1 = ja\frac{W_1}{H_1} - b\frac{W_2}{H_2}, \tag{21}$$

$$W_2 = \frac{W_2}{H_2}, \tag{22}$$

— odpowiednie równanie quasi-równowagi (równ. 14 po uwzględnieniu zależności 20)

$$\mathrm{Im}\, Z = -\frac{b+k}{a}. \tag{23}$$

Przystosowanie układu z rys. 3 do wyznaczania Im Z według omawianego sposobu wymagałoby dodatkowo zastosowania przesuwnika fazowego, zmieniającego o $\pi/2$ kąt fazowy spadku napięcia na oporniku R_2.

Wyznaczenie modułu impedancji $|Z|$ w układach z detekcją stanu Re $(W_1/W_2) = k$ możliwe jest tylko przy $k = 0$ i wymaga spełnienia innych warunków, a mianowicie:
— wymagany dobór transmitancji lub sygnałów

$$Z\frac{H_1}{H_2} = \frac{aZ-b}{c(Z+1)} = \frac{W_1}{W_2}, \tag{24}$$

gdzie c — liczba rzeczywista,
— realizacja doboru sygnałów

$$W_1 = a\frac{W_1}{H_1} - b\frac{W_2}{H_2}, \tag{25}$$

$$W_2 = c\left(\frac{W_1}{H_1} + \frac{W_2}{H_2}\right), \tag{26}$$

— odpowiednie równanie quasi-równowagi (wyznaczone z równ. 14 po uwzględnieniu równ. 24 oraz warunku $k = 0$)

$$ac(\mathrm{Re}^2 Z + \mathrm{Im}^2 Z) + \mathrm{Re}\, Z(ac-bc) - bc = 0,$$

skąd po wprowadzeniu dodatkowego wymagania, aby $a = b$, otrzymujemy

$$|Z|^2 = 1. \tag{27}$$

Pomiar $|Z|$ w układzie z rys. 3 wymagałby dobrania innego sygnału W_2 — może to być spadek napięcia z dowolnego fragmentu dzielnika R_1; R_2, a ponadto dla spełnienia dodatkowego wymagania $a = b$ należy dobrać $R_1 = R_2$. Uwzględniając, że w układzie z rys. 3 $Z_N = R_N$, z równania (27) otrzymujemy

$$|Z_x| = R_N. \tag{27a}$$

Pozostaje jeszcze wyjaśnić, czy omawiany stan quasi-równowagi Re $(W_1/W_2) = k$ umożliwia wyznaczenie kąta fazowego impedancji Z lub odpowiednich współczynników $Q = 1/D = \mathrm{Im}\, Z/\mathrm{Re}\, Z$, gdzie: Q — dobroć, D — współczynnik strat.

Z analizy równ. (14) wynika, że jest to możliwe tylko w przypadku $k = 0$. Wówczas równ. (14) przyjmuje postać

$$\frac{\mathrm{Re}\, Z(p_1p_2+q_1q_2) - \mathrm{Im}\, Z(q_1p_2-p_1q_2)}{p_2^2+q_2^2} = 0, \tag{28}$$

gdzie: $p_1+jq_1 = H_1$; $p_2+jq_2 = H_2$,
skąd otrzymujemy

$$Q = \frac{1}{D} = \frac{p_1p_2+q_1q_2}{q_1p_2-p_1q_2}. \tag{29}$$

Układ z rys. 3 należałoby przekształcić tak, aby uzyskać sygnały: $W_1 = U_x(p_1+jq_1)$ oraz $W_2 = U_N(p_2+jq_2)$, co oznacza przejście do rozwiązania „niemostkowego", z aktywnymi przetwornikami U/W, I/W.

4. DETEKCJA INNYCH STANÓW QUASI-RÓWNOWAGI

Rozważenie pozostałych stanów quasi-równowagi, określonych równaniami (11)÷(13), pod względem ich przydatności do wyznaczania składowych Re Z, Im Z, $|Z|$, Q, może być przeprowadzone w analogiczny sposób jak rozważania przedstawione w p. 3. W dalszym ciągu ograniczono się do skrótowego przedstawienia końcowych rezultatów takich rozważań.

a) Detekcja stanu Im $(W_1/W_2) = l$

W celu wyznaczenia składowej Re Z należy:

— dobrać transmitancje (sygnały W_1 i W_2) według zależności:

$$Z\frac{H_1}{H_2} = jaZ-jb = \frac{W_1}{W_2}, \tag{30}$$

$$W_1 = ja\frac{W_1}{H_1}-jb\frac{W_2}{H_2}, \tag{31}$$

$$W_2 = \frac{W_2}{H_2}, \tag{32}$$

— obliczyć wynik z równania quasi-równowagi Im $(Z\,H_1/H_2) = l$, które po uwzględnieniu równ. (30) przyjmuje postać

$$\mathrm{Re}\,Z = \frac{b+l}{a}. \tag{33}$$

Przystosowanie układu z rys. 3 do podanych warunków pomiaru polegałoby na dodatkowym zastosowaniu dwóch przesuwników fazowych, zmieniających o $\pi/2$ kąty fazowe spadków napięć na opornikach R_1 i R_2.

W celu wyznaczenia składowej Im Z otrzymujemy następujące warunki pomiaru:

— wymagany dobór transmitancji lub sygnałów W_1 i W_2:

$$Z\frac{H_1}{H_2} = aZ-jb = \frac{W_1}{W_2}, \tag{34}$$

$$W_1 = a\frac{W_1}{H_1}-jb\frac{W_2}{H_2}, \tag{35}$$

$$W_2 = \frac{W_2}{H_2}, \tag{36}$$

— równanie quasi-równowagi (Im $(Z\,H_1/H_2) = l$ z uwzględnieniem równ. 34)

$$\mathrm{Im}\,Z = \frac{b+l}{a}. \tag{37}$$

Pomiar Im Z w układzie z rys. 3 wymagałby zastosowania dodatkowego przesuwnika fazowego, zmieniającego o $\pi/2$ kąt fazowy spadku napięcia na oporniku R_1.

Wyznaczenie modułu $|Z|$ wymaga:

— detekcji stanu Im $(W_1/W_2) = 0$, tzn. $l = 0$;

— doboru transmitancji (lub sygnałów W_1 i W_2) według zależności:

$$Z\frac{H_1}{H_2} = \frac{jaZ-jb}{c(Z+1)} = \frac{W_1}{W_2}, \tag{38}$$

$$W_1 = ja\frac{W_1}{H_1} - jb\frac{W_2}{H_2}, \tag{39}$$

$$W_2 = c\left(\frac{W_1}{H_1} + \frac{W_2}{H_2}\right); \tag{40}$$

— dodatkowego spełnienia warunku $a = b$;

— obliczenia wyniku z równania quasi-równowagi

$$|Z|^2 = 1. \tag{41}$$

Układ z rys. 3 należałoby uzupełnić dwoma przesuwnikami fazowymi $\pi/2$ dla spadków napięć na opornikach R_1, R_2; jako sygnał W_2 — spadek napięcia z dowolnego fragmentu dzielnika R_1, R_2; niezbędna jest ponadto symetryzacja dzielnika, tzn. $R_1 = R_2$.

Wyznaczenie wartości $Q = 1/D = \text{Im } Z/\text{Re } Z$ możliwe jest tylko w przypadku detekcji Im $(W_1/W_2) = 0$, tzn. $l = 0$. Odpowiednie równanie quasi-równowagi ma postać

$$Q = \frac{1}{D} = \frac{p_1q_2 - q_1p_2}{p_1p_2 + q_1q_2}, \tag{42}$$

gdzie: $H_1 = p_1 + jq_1$; $H_2 = p_2 + jq_2$.

Układ z rys. 3 należałoby przekształcić do rozwiązania „niemostkowego", z aktywnymi przetwornikami U/W, I/W.

b) Detekcja stanu $|W_1/W_2| = m$

W tym przypadku możliwe jest tylko wyznaczenie modułu $|Z|$. Odpowiednie równanie quasi-równowagi wynika z podstawienia wartości m do równania przetwarzania (9) i ma postać

$$|Z| = m\frac{|H_2|}{|H_1|}. \tag{43}$$

Na ogół przyjmuje się $m = 1$.

c) Detekcja stanu arg $(W_1/W_2) = n$

Detekcja takiego stanu stosowana jest do wyznaczania składowych impedancji Z tylko przy $n = 0$ oraz $n = \pi/2$. Wymienione przypadki są równoważne detekcji stanów Im $(W_1/W_2) = 0$ oraz Re $(W_1/W_2) = 0$, omówionych w p. 4a oraz p. 3.

5. PRZYKŁADY NOWYCH ROZWIĄZAŃ UKŁADOWYCH

Na szczególną uwagę zasługują układy zawierające aktywne przetworniki U/W, I/W z wzmacniaczami operacyjnymi. Układy takie stosowane są w pomiarach zrównoważo-

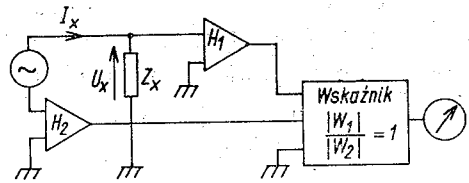
nych (i innych), natomiast ich przystosowanie do pomiarów quasi-zrównoważonych nie było dotychczas prezentowane w literaturze. Znane są tylko mostki quasi-zrównoważone, które są układami zbudowanymi na przetwornikach pasywnych.

Najprostszym rozwiązaniem quasi-zrównoważonego układu z wzmacniaczami operacyjnymi jest układ przedstawiony na rys. 4. Jest to układ zrealizowany według struktury przedstawionej na rys. 2, z detekcją stanu $|W_1/W_2| = 1$, umożliwiający pomiar modułu Z_x. Sprowadzenie układu do stanu quasi-równowagi odbywa się za pomocą jednego elementu nastawnego, umieszczonego w dowolnym z przetworników H_1 lub H_2. Odpowiednie równanie quasi-równowagi (por. p. 4b, równ. 43) określa zależność

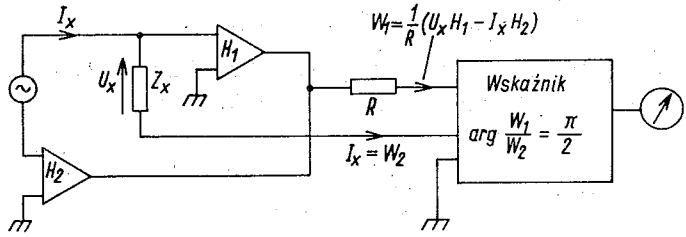
$$|Z_x| = \frac{|H_2|}{|H_1|}.$$

Zauważmy, że gdyby w układzie z rys. 4 zastosować detekcję stanu $\arg(W_1/W_2) = \pi/2$, co byłoby równoważne detekcji stanu $\mathrm{Re}(W_1/W_2) = 0$, to otrzymalibyśmy nowy układ, umożliwiający wyznaczenie dobroci Q lub współczynnika strat $D = 1/Q$ badanej impedancji Z_x (por. p. 3, równ. 28 i 29).

Innym, bardziej złożonym, jest układ przedstawiony na rys. 5. Reprezentuje on również strukturę z rys. 2, lecz realizuje detekcję $\arg(W_1/W_2) = \pi/2$ i przeznaczony jest do



Rys. 4. Układ quasi-zrównoważony do pomiaru modułu Z_x



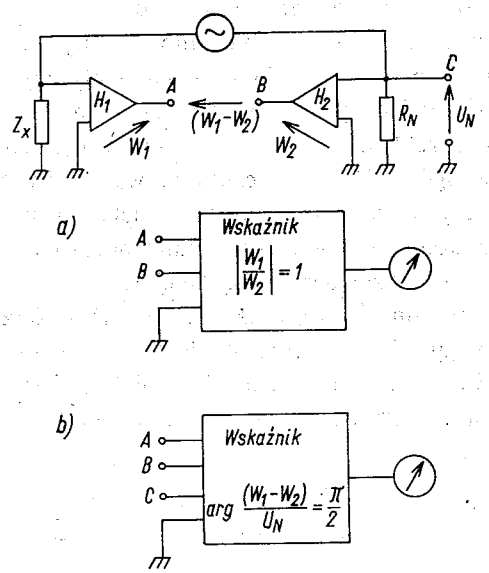
Rys. 5. Układ quasi-zrównoważony do pomiaru $\mathrm{Re}\, Z_x$

pomiaru składowej $\mathrm{Re}\, Z_x$. Zastosowany detektor stwierdza stan równoważny stanow $\mathrm{Re}(W_1/W_2) = 0$. Zgodnie z rozważaniami w p. 3 detekcji powinny podlegać sygnały, których stosunek określony jest zależnością $aZ_x - b$ (gdzie a, b — liczby rzeczywiste). Warunek ten w przedstawionym układzie spełniają sygnały W_1 (różnica dwóch sygnałów) oraz $W_2 = I_x$. Odpowiednie równanie quasi-równowagi określa zależność

$$\mathrm{Re}\, Z_x = \frac{H_2}{H_1},$$

przy czym: H_1 i H_2 powinny być liczbami rzeczywistymi.

Przedstawione na rys. 4 i 5 układy reprezentują strukturę z rys. 2. W ramach tej samej struktury możliwe jest zaproponowanie dalszych, nowych rozwiązań, polegających na innym doborze sygnałów podlegających detekcji oraz stwierdzaniu innych stanów quasi-równowagi. Odpowiednie zasady postępowania, uwzględniające możliwości pomiaru dowolnych składowych impedancji Z_x, opisano w p. 3 i 4. Przedstawianie wszystkich, możliwych rozwiązań uznano za niecelowe. Podobne możliwości występują w przypadku realizacji układów według struktury z rys. 1 (jednoczesne porównanie impedancji mierzo-



Rys. 6. Układ quasi-zrównoważony z udziałem wzorca R_N
(a), (b) — rodzaje wskaźników i sposób ich przyłączenia w przypadku pomiaru modułu Z_x lub składowej Re Z_x

nej Z_x z wzorcową Z_N). Na rys. 6 przedstawiono jedno z możliwych rozwiązań, z dwoma wariantami detekcji (a), (b), umożliwiającymi pomiar $|Z_x|$ lub Re Z_x. Wskaźniki stanów quasi-równowagi przyłączane są odpowiednio do punktów A, B, C zaznaczonych na schemacie. Odpowiednie równania quasi-równowagi dla każdego sposobu detekcji (a), (b) można wyprowadzić analogicznie jak w przypadku układów z rys. 4 i 5, otrzymując następujące zależności:

ad (a): $$|Z_x| = R_N \frac{|H_2|}{|H_1|},$$

ad (b): $$\mathrm{Re}\, Z_x = R_N \frac{H_2}{H_1},$$

przy czym: H_1 i H_2 powinny być liczbami rzeczywistymi.

Sprowadzenie układu z rys. 6 do stanu quasi-równowagi wymaga regulacji jednym elementem nastawnym (H_1, H_2 lub R_N). Układ z wskaźnikiem (b) może być również wykorzystany do pomiaru składowej urojonej Im Z_x. W tym celu należałoby zastąpić opornik wzorcowy R_N kondensatorem wzorcowym C_N. Omawiany układ jest układem równoprądowym (por. rys. 1). Podobne rozwiązania można zaproponować dla struktur równonapięciowych.

6. UWAGI I WNIOSKI KOŃCOWE

Przedstawione rozważania wykazały, że możliwy jest jednolity opis matematyczny metod quasi-zrównoważonych, pojmowanych szerzej niż dotychczas, lecz zachowujących taką samą procedurę pomiarów jak w znanych z literatury mostkach quasi-zrównoważonych. Zaproponowany opis matematyczny pozwolił na ujawnienie metodyki tworzenia różnych rozwiązań układowych. Stosując tę metodykę, wyprowadzono przykładowo znany układ mostkowy oraz inne, nie znane dotychczas układy.

W toku rozważań świadomie nie podejmowano dyskusji właściwości metrologicznych omawianych metod. Przedstawiony, ogólny opis matematyczny stwarza możliwości przeprowadzenia takich dyskusji i mogą one być przedmiotem odrębnych, obszernych prac. Sformułowane równania przetwarzania, równania stanów oraz równania quasi-równowagi umożliwiają dokonanie ogólnych analiz czułości, warunków bezpośredniego odczytu, zakresu pomiarowego czy wpływów niektórych wielkości na dokładność pomiarów. Umożliwiają również dokonanie ilościowych analiz porównawczych różnych rozwiązań układowych i wskazanie rozwiązania najkorzystniejszego.

O zastosowaniach metod quasi-równoważonych w dużej mierze decydować będą właściwości detektorów stanu quasi-równowagi. Wydaje się, że stosowane coraz powszechniej w innych układach obwody fazoczułej detekcji napięć lub prądów będą mogły spełnić odpowiednie wymagania w układach quasi-zrównoważonych.

BIBLIOGRAFIA

1. L. Hirszberg, *Analiza procesu równoważenia układów Logana*, rozprawa doktorska, Polit. Śląska, Gliwice, 1979.
2. J. Hoja, *Analiza i badania układów pomiarowych składowych impedancji na liniowych funktorach scalonych*, VIII międzyuczelniana Narada Metrologów, mat. konf., Łódź, 1973.
3. K. B. Karandiejew, *Pomiary elektryczne metodami mostkowymi i kompensacyjnymi*, WNT, W-wa 1969.
4. M. A. Logan, *An AC-bridge for semiconductor resistivity measurements using a four-point probe*, Bell System Technical Journal, may 1961.
5. M. Miłek, *Komparacja wielkości elektrycznych i magnetycznych*, Zesz. Nauk. Polit. Śl., Gliwice, nr 696, z. 77, 1981.
6. M. Pluciński i in., *Podstawy metrologii elektrycznej*, skrypty centralne wyższych studiów technicznych dla pracujących, Polit. Śl., nr 1078/66, Gliwice 1982.

B. SZADKOWSKI

QUASIBALANCED METHODS OF IMPEDENCE MEASUREMENT

Summary

The paper presents an attepmt at a universal theoretical description of quasibalanced methods of impedence measurement. General quidelines for realization of circuits meeting the requirements of the methods have been laid down. Examples with solutions are discussed.

B. SZADKOWSKI

MÉTHODES QUASI-ÉQUILIBRÉES DE MESURE DE L'IMPÉDANCE

Résumé

Cet ouvrage est un essai de la description théorique, universelle des méthodes quasi-équilibrées de mesure de l'impédance. On a précisé la méthodologie de former les réalisations correspondantes des circuits et on a montré les exemples de nouvelles réalisation.

B. SZADKOWSKI

QUASIANGEGLICHENE METHODEN FÜR IMPEDANZMESSUNG

Zusammenfassung

Im obigen Aufsatz wird ein Versuch einer universalen theoretischen Darstellung der quasiangeglichenen Methoden für Impedanzmessung geschildert. Die Methodik der Bildung entsprechender Schaltungsrealisationen wird bestimmt, und Beispiele neuer Lösungen werden gebracht.

Б. ШАДКОВСКИ

КВАЗИУРАВНОВАШЕННЫЕ МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ИМПЕДАНСА

Резюме

Представлена попытка общего теоретического описания квазиуравновешенных методов измерения импеданса. Определена методика составления соответственных схем и представлены примеры новых решений.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1985, 31, z. 2, ss. 305—315

539.219.3

O pewnej metodzie obliczania zastępczej stałej czasowej procesów dyfuzyjnych

ANDRZEJ BRYKALSKI (SZCZECIN)

Instytut Elektroniki i Informatyki Politechniki Szczecińskiej

Otrzymano 7.2.1984

W pracy przedstawiono metodę obliczania zastępczej stałej czasowej procesów dyfuzyjnych umożliwiającą uwzględnienie warunku brzegowego rodzaju pierwszego, drugiego lub trzeciego oraz tzw. mieszanego zagadnienia brzegowego. Metoda może być stosowana dla niestacjonarnych pól źródłowych i bezźródłowych oraz pozwala uwzględnić niejednorodne własności środowiska.

1. WSTĘP

Niniejsza praca stanowi kontynuację, a zarazem rozszerzenie tematu podjętego w artykułach [2, 3], w których zaproponowana została metoda wariacyjna Ritza do obliczania zastępczej stałej czasowej przebiegów opisanych jednorodnym równaniem dyfuzji

$$\Delta U = c\frac{\partial U}{\partial t}, \tag{1.1}$$

spełniających warunek brzegowy pierwszego rodzaju

$$U(P, t) = U_0(t), \quad P \in \Gamma, \tag{1.2}$$

gdzie Γ jest brzegiem obszaru Ω i jednorodny warunek początkowy.

W wielu zagadnieniach praktycznych pojawia się problem wyznaczenia przebiegu aperiodycznego, spełniającego warunek brzegowy rodzaju drugiego, trzeciego lub tzw. warunek mieszany. W pracy przedstawiona zostanie metoda, opierająca się na metodzie Galerkina [4, 9, 10], pozwalająca wyznaczyć zastępczą stałą czasową stanu nieustalonego pól źródłowych i bezźródłowych, przy niejednorodnych warunkach brzegowych różnego rodzaju, uwzględniająca niejednorodne właściwości obszaru Ω. Metoda zilustrowana zostanie przykładami obliczeniowymi, których szczególne przypadki porównane zostaną z wynikami metod analitycznych.

2. PRZYPADEK OGÓLNY

Niech dwukrotnie różniczkowalna funkcja $U(P, t)$ spełnia w każdym punkcie P obszaru dwuwymiarowego Ω, ograniczonego odcinkami gładką krzywą Γ, niejednorodne równanie dyfuzji

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} U) = c\frac{\partial U}{\partial t} - q, \tag{2.1}$$

gdzie $\lambda = \lambda(P)$, $c = c(P)$, $q = q(P, t)$, warunek początkowy

$$U(P, 0) = U^*(P) \tag{2.2}$$

oraz mieszany warunek brzegowy

$$U(P, t) = U_0(P, t), \quad P \in \Gamma_1, \tag{2.3}$$

$$\lambda\frac{\partial U}{\partial n} + \sigma U = \omega(P, t), \quad P \in \Gamma_2, \tag{2.4}$$

przy czym $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Wybierając ciąg funkcji bazowych $\{\varphi_i(P)\}_{i=1,n}$ tworzących podprzestrzeń H_n rzeczywistej, unormowanej przestrzeni $H(\Omega)$, funkcji określonych w Ω, rozwiązanie zagadnienia brzegowego (2.1) do (2.4) można przedstawić w następującej przybliżonej postaci [4, 9, 10]

$$\tilde{U}(P, t) = \varphi_0(P, t) + \langle \boldsymbol{\Phi}(P), \boldsymbol{\Psi}(t) \rangle. \tag{2.5}$$

Symbol $\langle . , . \rangle$ oznacza iloczyn skalarny wektorów n-wymiarowych $\left(\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)$. Występująca we wzorze (2.5) funkcja $\varphi_0(P, t)$ spełnia warunek (2.3). Funkcje $\{\psi_i(t)\}_{i=1,n}$ wyznaczyć można stosując ogólną metodę Galerkina [4, 6], prowadzącą ostatecznie do układu liniowych równań różniczkowych, zwyczajnych

$$\sum_{j=1}^{n} \psi_j \left(\iint_{\Omega} \lambda \operatorname{grad}\varphi_i \operatorname{grad}\varphi_j d\Omega + \int_{\Gamma_2} \sigma \varphi_i \varphi_j d\Gamma \right) + \sum_{j=1}^{n} \frac{d\psi_j}{dt} \iint_{\Omega} c\varphi_i \varphi_j d\Omega =$$

$$= \iint_{\Omega} \left[\left(q - c\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} \right) \varphi_i - \lambda \operatorname{grad}\varphi_0 \operatorname{grad}\varphi_i \right] d\Omega + \int_{\Gamma_2} (\omega - \sigma\varphi_0)\varphi_i d\Gamma, \tag{2.6}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Warunki początkowe funkcji $\boldsymbol{\Psi}(0)$ wyznacza się np. z kryterium najmniejszych kwadratów [2, 3, 6]. Wektor $\boldsymbol{\Psi}(0)$ dobiera się w ten sposób, aby spełniony był warunek

$$\iint_{\Omega} w(P)[\tilde{U}(P, 0) - U^*(P)]^2 d\Omega = \text{minimum},$$

z którego otrzymuje się układ liniowych równań algebraicznych [6]

$$\sum_{j=1}^{n} \psi_{jo} \iint_{\Omega} w(P)\varphi_i \varphi_j d\Omega = \iint_{\Omega} w(P) U^*(P) \varphi_i d\Omega, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.7}$$

gdzie $\psi_{jo} = \psi_j(0)$, natomiast $w(P)$ jest funkcją wagi.

Dla badania własności dynamicznych obiektu istotne znaczenie posiada znajomość odpowiedzi skokowej. Znając jej transformatę Laplace'a $U(P, s) = \mathcal{L}[U(P, t)]$ można obliczyć z całki Duhamela odpowiedź na dowolne wymuszenie. Z tego względu w dalszej części pracy przyjęto, że $U(P, t)$ jest odpowiedzią skokową na jeden z przebiegów: $q(P, t) = q_o(P)\,1(t)$, $\varphi_o(P, t) = \varphi_{oo}(P)\,1(t)$ lub $\omega(P, t) = \omega_o(P)\,1(t)$. Po zastosowaniu obustronnej transformaty Laplace'a do równania (2.6) otrzymuje się układ równań

$$\sum_{j=1}^{n} \psi_j(s)\left(\iint_{\Omega} \lambda \operatorname{grad}\varphi_i \operatorname{grad}\varphi_j d\Omega + \int_{\Gamma_2} \sigma\varphi_i\varphi_j d\Gamma\right) + s\sum_{j=1}^{n} \psi_j(s) \iint_{\Omega} c\varphi_i\varphi_j d\Omega =$$

$$= \iint_{\Omega}\left[\left(\frac{q_o}{s} - c\varphi_{oo}\right)\varphi_i - \frac{1}{s}\lambda \operatorname{grad}\varphi_{oo}\operatorname{grad}\varphi_i\right] d\Omega + \tag{2.8}$$

$$+\frac{1}{s}\int_{\Gamma_2} (\omega_o - \sigma\varphi_{oo})\varphi_i d\Gamma + \sum_{j=1}^{n} \psi_{jo} \iint_{\Omega} c\varphi_i\varphi_j d\Omega, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

który w zapisie macierzowym przyjmuje następującą postać

$$(\mathbf{A} + s\mathbf{C})\mathbf{\Psi}(s) = \frac{1}{s}(\mathbf{B} + s\mathbf{D}), \tag{2.9}$$

gdzie

$$a_{ij} = \iint_{\Omega} \lambda \operatorname{grad}\varphi_i \operatorname{grad}\varphi_j d\Omega + \int_{\Gamma_2} \sigma\varphi_i\varphi_j d\Gamma, \tag{2.10}$$

$$c_{ij} = \iint_{\Omega} c\varphi_i\varphi_j d\Omega, \tag{2.11}$$

$$b_i = \iint_{\Omega} (q_o\varphi_i - \lambda \operatorname{grad}\varphi_{oo}\operatorname{grad}\varphi_i) d\Omega + \int_{\Gamma_2} (\omega_o - \sigma\varphi_{oo})\varphi_i d\Gamma, \tag{2.12}$$

$$d_i = \sum_{j=1}^{n} \psi_{jo} \iint_{\Omega} c\varphi_i\varphi_j d\Omega - \iint_{\Omega} c\varphi_{oo}\varphi_i d\Omega. \tag{2.13}$$

Z zależności (2.13) oraz równania (2.7) wynika postać funkcji wagi $w(P)$ występującej w kryterium (2.7). Po przyjęciu, że $w(P) = c(P)$, ze wzoru (2.13) otrzymuje się

$$d_i = \iint_{\Omega} c[U^*(P) - \varphi_{oo}(P)]\varphi_i d\Omega. \tag{2.14}$$

Rozwiązanie układu równań (2.9) przedstawić można następująco

$$\mathbf{\Psi}(s) = \frac{1}{s}(\mathbf{A} + s\mathbf{C})^{-1}(\mathbf{B} + s\mathbf{D}). \tag{2.15}$$

Z rozwiązania (2.15) wynika wartość funkcji $\mathbf{\Psi}(t)$ w stanie ustalonym

$$\mathbf{\Psi}(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} [s\mathbf{\Psi}(s)] = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}. \tag{2.16}$$

3. ZASTĘPCZA STAŁA CZASOWA

Numeryczne rozwiązanie układu równań różniczkowych napotyka często na trudności obliczeniowe (związane np. ze stabilnością metod). Tematowi efektywnych metod rozwiązywania układów równań różniczkowych zwyczajnych, poświęconych zostało szereg prac (m.in. [4, 6, 13]), w których omówiono metody opierające się na aproksymacji wielomianami Padé lub Czebyszewa, czy tzw. metody A-stabilne [4, 6].

W pracach [8, 11, 12] wprowadzono pojęcie zastępczej stałej czasowej

$$\tau(P) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int_0^\infty \frac{U(P,t)-U(P,t\to\infty)}{U(P,t\to 0)-U(P,t\to\infty)}\,dt, \tag{3.1}$$

parametru pozwalającego w wygodny sposób określić czas trwania stanu nieustalonego. Funkcję $U(P,t)$ można wówczas przedstawić w postaci

$$U(P,t) \approx [U(P,t\to\infty)-U^*(P)]\left[1-\exp\left(-t/\tau(P)\right)\right]+U^*(P). \tag{3.2}$$

Rozwiązanie układu równań różniczkowych (2.6) dane jest w postaci operatorowej (2.15). Do obliczenia zastępczej stałej czasowej funkcji $\tilde{U}(P,t)$ wykorzystany zatem zostanie wzór

$$\tau(P) = \frac{\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{\partial}{\partial s}\left[sU(P,s)\right]}{U(P,t\to 0)-U(P,t\to\infty)}, \tag{3.3}$$

wynikający z zależności (3.1). Ze wzorów (2.5), (2.16) i (3.3) otrzymuje się

$$\tau(P) = \frac{\left\langle \boldsymbol{\Phi}(P), \lim\limits_{s\to 0}\dfrac{d}{ds}\left[s\boldsymbol{\Psi}(s)\right]\right\rangle}{U^*(P)-\varphi_{oo}(P)-\left\langle \boldsymbol{\Phi}(P), \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right\rangle}. \tag{3.4}$$

Ze wzorów podanych w [7] wynika

$$\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left[s\boldsymbol{\Psi}(s)\right] = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{D}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}). \tag{3.5}$$

Stąd

$$\tau(P) = \frac{\left\langle \boldsymbol{\Phi}(P), \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{D}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})\right\rangle}{U^*(P)-\varphi_{oo}(P)-\left\langle \boldsymbol{\Phi}(P), \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right\rangle}. \tag{3.6}$$

Ostatnia zależność pozwala obliczyć w prosty i szczególnie do obliczeń numerycznych użyteczny sposób, zastępczą stałą czasową przebiegu opisanego równaniami (2.1) do (2.4). Można wykazać, że macierz $\mathbf{A}$, poprzez przekształcenia nie zmieniające rzędu, daje się sprowadzić do macierzy Gramma. Ponieważ ciąg $\{\varphi_i(P)\}_{i=1,n}$ tworzy układ liniowo niezależny, wyznacznik Gramma jest niezerowy. Istnieje zatem macierz odwrotna [7], a rozważany problem posiada jedno i jednoznaczne rozwiązanie.

W przypadku, gdy $\Gamma_2 = \emptyset$ (brak warunku brzegowego (2.4)), przy założeniu wymuszenia przez funkcję $U_o(P,t) = U_o = \text{const}$ (skok stałej wartości na brzegu), otrzymuje

się dla pola bezźródłowego

$$\varphi_{oo} = U_o, \quad b_i = 0, \tag{3.7}$$

$$U^*(P) = 0, \quad d_i = -U_o \int\int_{\Omega} c\varphi_i d\Omega.$$

Stąd

$$\tau(P) = -\frac{1}{U_o}\langle \mathbf{\Phi}(P), \mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}\rangle.$$

Należy zauważyć, że ostatnie wyrażenie jest równoważne ogólnej zależności podanej w pracach [2, 3], słusznej jedynie dla pól bezźródłowych, przy stałym warunku brzegowym pierwszego rodzaju.

4. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

Przedstawione niżej przykłady obliczeniowe mają na celu jedynie ilustrację metody, jej zbieżności oraz pokazania możliwości jakie ona stwarza. Ograniczono się zatem tylko do przypadków jednowymiarowych, chociaż zaproponowaną metodę, podobnie jak ogólną metodę Galerkina, z powodzeniem stosować można do zagadnień wielowymiarowych.

Przykład 1

Dane jest bezźródłowe pole $U(\varrho, t)$ opisane równaniem

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varrho^2} = c\frac{\partial U}{\partial t}, \tag{4.1}$$

gdzie $\varrho \in \langle 0, 1\rangle$, spełniające zerowy warunek początkowy i mieszany warunek brzegowy

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=0} = \omega, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial \varrho} + \sigma U\right)_{\varrho=1} = 0. \tag{4.2}$$

W interpretacji fizycznej zagadnienie (4.1) i (4.2) opisuje proces nagrzewania się płyty strumieniem cieplnym wnikającym przez powierzchnię $\varrho = 0$, podczas gdy powierzchnia $\varrho = 1$ oddaje ciepło zgodnie z prawem Newtona [5].

W przypadku, gdy $c(\varrho) = \text{const}$, rozwiązanie zagadnienia brzegowego (4.1) do (4.2) można przedstawić w formie analitycznej

$$U(\varrho, t) = -\omega\left(\frac{1}{\sigma} + 1 - \varrho\right) + 2\omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\gamma_n\varrho \exp\left(-\gamma_n^2 \frac{t}{c}\right)}{\gamma_n^2\left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n}\right)}, \tag{4.3}$$

gdzie γ_n są kolejnymi, dodatnimi pierwiastkami równania $\gamma \operatorname{tg}\gamma = \sigma$.

Wówczas obliczona ze wzoru (3.1) zastępcza stała czasowa jest równa

$$\tau(\varrho) = cf(\varrho), \tag{4.4}$$

gdzie

$$f(\varrho) = \frac{2}{\frac{1}{\sigma}+1-\varrho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\gamma_n\varrho}{\gamma_n^4\left(1+\frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n}\right)}.$$

Znalezienie rozwiązania analitycznego $U(\varrho, t)$ i stąd zastępczej stałej czasowej, w przypadku dowolnej funkcji $c(\varrho)$ napotyka na trudności (nawet dla tak nieskomplikowanego obszaru); można natomiast zastosować wyżej opisaną metodę.

Niech

$$c(\varrho) = \sum_{p=0}^{k} \alpha_p \varrho^p. \tag{4.5}$$

Po założeniu funkcji bazowych w postaci

$$\varphi_i = \varrho^{i-1}, \tag{4.6}$$

obliczone z zależności (2.10) do (2.14) elementy odpowiednich macierzy są równe

$$a_{ij} = \sigma + \int_0^1 \varphi_i'\varphi_j' d\varrho = \sigma + \begin{cases} 0, & i+j \leqslant 3, \\ \dfrac{(i-1)(j-1)}{i+j-3}, & i+j > 3, \end{cases} \tag{4.7}$$

$$c_{ij} = \int_0^1 c\varphi_i\varphi_j d\varrho = \sum_{p=0}^{k} \frac{\alpha_p}{i+j+p-1}, \tag{4.8}$$

$$b_i = \begin{cases} -\omega, & i = 1, \\ 0, & i \neq 1, \end{cases} \tag{4.9}$$

$$d_i = 0. \tag{4.10}$$

Na podstawie zależności (3.6) oraz (4.5) do (4.10) przeprowadzone zostały obliczenia numeryczne dla kilku postaci funkcji $c(\varrho)$. Dla przypadku $c(\varrho) = \text{const}$ wyniki obliczeń porównane zostały z wynikami uzyskanymi ze wzoru (4.4). Tablica 1 przedstawia wyniki kolejnych przybliżeń ($n = 2, 3, \ldots$) dla kilku wartości σ, w różnych punktach $\varrho \in \langle 0, 1\rangle$ i stanowi ilustrację zbieżności metody oraz jej skuteczności. Dla $n = 6$ uzyskano przybliżenie z błędem względnym nie przekraczającym 10^{-6}.

Na rys. 1 przedstawiono wykresy funkcji $f(\varrho)$ (por. wzór (4.4)) dla różnych postaci funkcji $c(\varrho)$.

Przykład 2

Dane jest źródłowe pole $U(\varrho, t)$ opisane równaniem

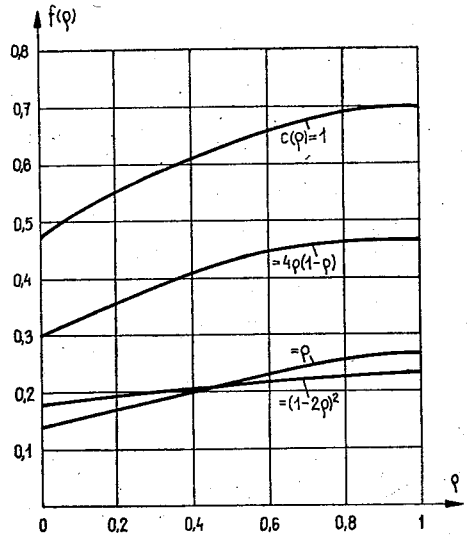
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial U}{\partial \varrho} = c\frac{\partial U}{\partial t} - q, \tag{4.11}$$

gdzie $\varrho \in \langle 0, 1\rangle$, spełniające zerowy warunek początkowy i warunek brzegowy trzeciego

Tablica 1

Wyniki kolejnych przybliżeń funkcji $f(\varrho)$ w płycie nieskończonej $(c)\varrho) = \text{const}$)

σ	n \ ϱ	0	0,25	0,5	0,75	1
1	2	1,1667	1,2143	1,2778	1,3667	1,5000
	3	1,1667	1,2946	1,4028	1,4792	1,5000
	4	1,1667	1,2991	1,4028	1,4729	1,5000
	5	1,1667	1,2991	1,4028	1,4729	1,5000
	Rozw. dokł.	1,1667	1,2991	1,4028	1,4729	1,5000
5	2	0,47778	0,48947	0,50952	0,55185	0,70000
	3	0,47778	0,55855	0,63452	0,69769	0,70000
	4	0,47778	0,56678	0,63452	0,68032	0,70000
	5	0,47778	0,56678	0,63452	0,68032	0,70000
	Rozw. dokł.	0,47778	0,56678	0,63452	0,68032	0,70000
10	2	0,40303	0,40882	0,41944	0,44524	0,60000
	3	0,40303	0,47500	0,54444	0,60595	0,60000
	4	0,40303	0,48419	0,54444	0,58363	0,60000
	5	0,40303	0,48419	0,54444	0,58363	0,60000
	Rozw. dokł.	0,40303	0,48419	0,54444	0,58363	0,60000



Rys. 1. Rozkład funkcji $f(\varrho)$ w płycie nieskończonej dla kilku postaci funkcji $c(\varrho)$ i $\sigma = 5$

rodzaju

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \varrho}+\sigma U\right)_{\varrho=1}=0. \tag{4.12}$$

Zagadnienie brzegowe (4.11) i (4.12) opisuje zjawisko nagrzewania się nieskończenie długiego walca, w przypadku występowania wewnętrznych źródeł ciepła i w warunkach oddawania ciepła do otoczenia przez powierzchnię boczną według prawa Newtona [5].

Rozwiązanie analityczne tego problemu, w przypadku, gdy $c(\varrho)=\text{const}$ i $q(\varrho)=\text{const}$ ma następującą postać

$$U(\varrho,t)=\frac{1}{4}q\left(1-\varrho^2+\frac{2}{\sigma}\right)-2q\sigma\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_o(\gamma_n\varrho)\exp\left(-\gamma_n^2\frac{t}{c}\right)}{\gamma_n^2(\sigma^2+\gamma_n^2)J_o(\gamma_n)}, \tag{4.13}$$

gdzie γ_n są kolejnymi, dodatnimi pierwiastkami równania $\sigma J_o(\gamma)=\gamma J_1(\gamma)$.

Stąd funkcja $f(\varrho)$ (por. wzór (4.4)) dla tego zagadnienia

$$f(\varrho)=\frac{8\sigma}{1+\frac{2}{\sigma}-\varrho^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_o(\gamma_n\varrho)}{\gamma_n^4(\sigma^2+\gamma_n^2)J_o(\gamma_n)}. \tag{4.14}$$

Niech w ogólnym przypadku funkcja $c(\varrho)$ dana będzie wzorem (4.5), natomiast

$$q(\varrho)=\sum_{p=0}^{l}\beta_p\varrho^p. \tag{4.15}$$

Zakładając funkcje bazowe w postaci (4.6) otrzymuje się z (2.10) do (2.14)

$$a_{ij}=\sigma+\int_0^1\varphi_i'\varphi_j'\varrho\,d\varrho=\sigma+\begin{cases}0, & i+j=2,\\ \dfrac{(i-1)(j-1)}{i+j-2}, & i+j\neq 2,\end{cases} \tag{4.16}$$

$$c_{ij}=\int_0^1 c\varphi_i\varphi_j\varrho\,d\varrho=\sum_{p=0}^{k}\frac{\alpha_p}{i+j+p}, \tag{4.17}$$

$$b_i=\int_0^1 q\varphi_i\varrho\,d\varrho=\sum_{p=0}^{l}\frac{\beta_p}{i+p+1}, \tag{4.18}$$

$$d_i=0. \tag{4.19}$$

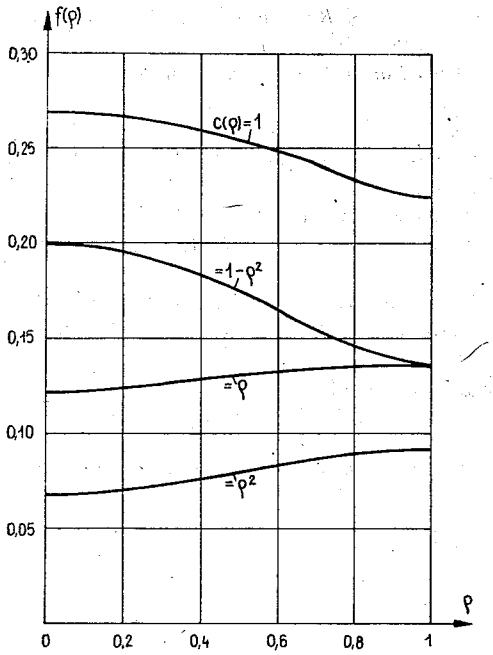
Wyniki kolejnych przybliżeń ($n=2,3,\ldots$) dla $c(\varrho)=\text{const}$ i $q(\varrho)=\text{const}$ zestawiono w tablicy 2 i porównano z wynikami uzyskanymi ze wzoru (4.14). Dla $n=6$ uzyskano przybliżone rozwiązanie z błędem względnym mniejszym niż 10^{-5}.

Na rys. 2 i 3 przedstawiono wykresy funkcji $f(\varrho)$ dla różnych postaci funkcji $c(\varrho)$ i dwóch wybranych rozkładow funkcji wymuszającej $q(\varrho)$.

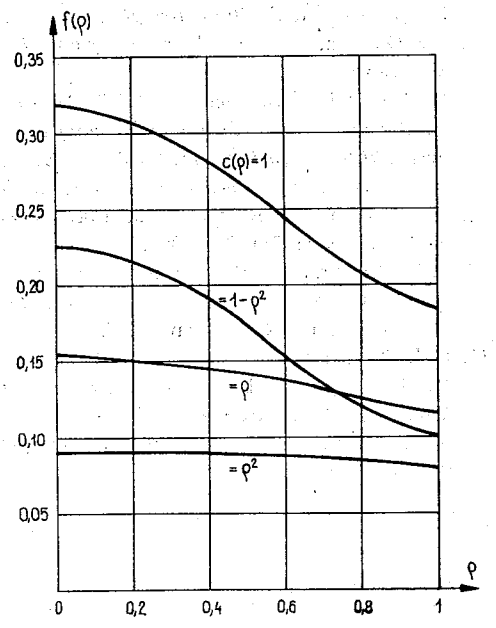
Tablica 2

Wyniki kolejnych przybliżeń funkcji $f(\varrho)$ w walcu nieskończenie długim ($c(\varrho)$. $q(\varrho) = \text{const}$)

σ	n \ ϱ	0	0,25	0,5	0,75	1
1	2	0,63333	0,62963	0,62500	0,61905	0,61111
	3	0,65000	0,64255	0,63636	0,63077	0,62500
	4	0,64524	0,64392	0,63766	0,62985	0,62500
	5	0,64583	0,64370	0,63778	0,62991	0,62500
	Rozw. dokł.	0,64584	0,64370	0,63778	0,62991	0,62500
5	2	0,25385	0,25079	0,24583	0,23636	0,21111
	3	0,27857	0,26355	0,25217	0,24179	0,22500
	4	0,26837	0,26656	0,25528	0,23913	0,22500
	5	0,26964	0,26607	0,25557	0,23928	0,22500
	Rozw. dokł.	0,26964	0,26607	0,25557	0,23928	0,22500
10	2	0,20942	0,20741	0,20385	0,19583	0,16111
	3	0,23750	0,22033	0,20790	0,19706	0,17500
	4	0,22560	0,22386	0,21165	0,19356	0,17500
	5	0,22708	0,22329	0,21201	0,19377	0,17500
	Rozw. dokł.	0,22708	0,22329	0,21201	0,19377	0,17500



Rys. 2. Rozkład funkcji $f(\varrho)$ wzdłuż promienia walca nieskończenie długiego dla kilku postaci funkcji $c(\varrho)$, $\sigma = 5$ i $q(\varrho) = 1$



Rys. 3. Rozkład funkcji $f(\varrho)$ wzdłuż promienia walca nieskończenie długiego dla kilku postaci funkcji $c(\varrho)$, $\sigma = 5$ i $q(\varrho) = \varrho^2$

5. ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiona została numeryczna metoda wyznaczania zastępczej stałej czasowej procesów opisanych równaniem przewodnictwa. Z rozwiązania równania (2.1), otrzymanego za pomocą ogólnej metody Galerkina, wyprowadzono zależności określające rozkład zastępczej stałej czasowej niestacjonarnego pola $U(P, t)$. Zaproponowana metoda pozwala na uwzględnienie niejednorodnych właściwości rozpatrywanego obszaru (założono dowolną postać funkcji $\lambda(P)$ i $c(P)$ w równaniu przewodnictwa), warunku brzegowego zarówno rodzaju pierwszego, drugiego jak i trzeciego (stanowiąc uogólnienie metody podanej w pracach [2, 3]) oraz może być stosowana do przypadku pól źródłowych i bezźródłowych. Metodę zilustrowano przykładami obliczeniowymi świadczącymi o jej prostocie, a zarazem użyteczności do praktycznych obliczeń numerycznych.

Praca powstała w ramach współpracy z Instytutem Maszyn Matematycznych w Warszawie. Autor dziękuje Instytutowi za okazaną pomoc w realizacji programu badawczego, a w szczególności za udostępnienie kilku systemów komputerowych.

BIBLIOGRAFIA

1. M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, New York 1970.
2. A. Brykalski, P. Krasoń, *A direct variational method for the determination of the equivalent time constant of diffusion processes*, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 26, No. 3, pp. 445—449, 1983.
3. A. Brykalski i in., *Anwendung der Variationsmethode von Ritz zur Bestimmung der mittleren Zeitkonstante von Diffusionsvorgängen*, Arch. f. Elektrotechn., 66 (1983), 13—18.
4. M. Dryja, J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, Cz. 2, WNT, Warszawa 1982.
5. E. Kącki, *Termokinetyka*, WNT, Warszawa 1966.
6. A. Krawczyk, *Zastosowanie metody elementów skończonych do niestacjonarnych zagadnień elektrodynamiki technicznej*, Rozpr. Elektr., t. 29, z. 2, 1983, ss. 331—334.
7. P. Lancaster, *Theory of matrices*, Academic Press, New York 1969.
8. W. Lipiński, R. Sikora, *Über die Zeitkonstante der Wirbelströme*, Z. Elektr. Inf.-u. Energietechnik, 6 (1976), 305—309.
9. S. G. Michlin, *Wariacjonnyje mietody w matiematiczeskoj fizikie*, Izd. Nauka, Moskwa 1970.
10. S. G. Michlin, C. L. Smolicki, *Metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych*, PWN, Warszawa 1972.
11. C. I. Mocanu, *Über die Zeitkonstante des Skineffektes*, ETZ-A, 92 (1971), 156—161.
12. R. Sikora, W. Lipiński, *Zastępcza stała czasowa procesów dyfuzyjnych w obszarze o przekroju prostokąta*, Arch. Elektr., t. 25, 1976.
13. R. S. Varga, *Functional analysis and approximation theory in numerical analysis*, SIAM, Philadelphia 1971.

A. BRYKALSKI

ON A CERTAIN METHOD OF COMPUTING A VICARIOUS TIME CONSTANT FOR DIFFUSION PROCESSES

Summary

The paper presents a method for determination of an equivalent time constant for diffusion processes, which permits consideration of boundary conditions of the first, second and third kind, as well as to handle the, so called, mixed boundary problem. The method may be applied to both source and source-free unsteady fields and makes it possible to consider heterogenous features of the area.

A. BRYKALSKI

MÉTHODE DE CALCULER LA CONSTANTE ÉQUIVALENTE DE TEMPS DES PROCESSUS DE DIFFUSION

Résumé

On a présenté dans l'étude la méthode de calculer la constante équivalente de temps des processus de diffusion rendant possible la prise en considération de la condition aux limites du premier, deuxième ou troisième genre ainsi que le problème aux limites mixtes. La méthode peut être appliquée pour les champs non stationnaires aux sources et sans sources et permet de tenir compte des propriétés hétérogènes du milieu.

A. BRYKALSKI

BERECHNUNGSMETHODE DER MITTLEREN ZEITKONSTANTE BEI DIFFUSIONSPROZESSEN

Zusammenfassung

In der Bearbeitung wurde die Bestimmungsmethode für die mittlere Zeitkonstante bei Diffusionspro zessen dargestellt, die die Berücksichtigung der ersten, zweiten und dritten Bedingungsart sowie der sog. gemischten Randbedingung ermöglicht. Die Methode kann für nichtstationäre Quellen- und Unquellenfelder angewandt werden, und gestattet, inhomogene Eigenschaften eines Raumes zu berücksichtigen.

А. БРЫКАЛЬСКИ

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ПОСТОЯННОЙ ВРЕМЕНИ, ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Резюме

Представлен метод вычисления эквивалентной постоянной времени диффузионных процессов, позволяющий учесть краевые условия первого, второго или третьего рода, а также так называемую смешанную краевую задачу. Метод может быть применен к основанным и не основанным на источниках нестационарным полем и позволяет учесть неоднородные свойства среды.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1985, 31, z. 2, ss. 317—324

621.3.013

Feldschwächung durch leitende zylindersymmetrische Schirmung von Magnetfeldern

WOJCIECH LIPIŃSKI (SZCZECIN)

Politechnika Szczecińska

SŁAWOMIR ISKIERKA (CZĘSTOCHOWA)

Instytut Elektroenergetyki Politechniki Częstochowskiej

Otrzymano 2.2.1984

In der vorliegenden Arbeit wird die Feldverteilung in einer zylindersymmetrischen Abschirmung von Magnetfeldern analysiert. Es werden analytische und numerische Lösungen des Problems mit Hilfe des Galerkinschen Verfahrens angegeben, womit das lineare Randwertproblem zu einem linearen Gleichungssysteme abgeleitet wird.

1. PROBLEMSTELLUNG

Eine zylindersymmetrische Anordung besteht gemäß Abb. 1 aus einer leitenden Schirmung, derer Permeabilität μ mit der des umgebenden Luftraumes übereinstimmt. Der

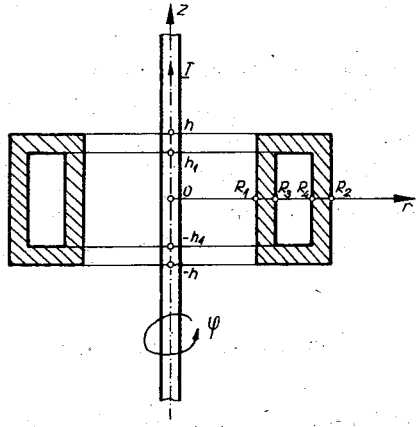


Abb. 1.

Abb. 1. Bezeichnung der zylindrischen Koordinaten und der geometrischen Abmessungen zylindersymmetrischer Abschirmung

Mittelpunkt der Schirmung geht auf das zylindrische Koordinatensystem zurück und entlang der z-Achse erstreckt sich ein vom Wechselstrom $i(t) = \mathrm{Re}[I\sqrt{2}\exp(i\omega t)]$ durchflossener Leiter. Auf Grund der angenommenen Symmetrie hat der Vektor der magnetischen Feldstärke nur eine Komponente in Richting der φ-Achse und die beiden in der Abschirmung induzierten Komponenten der Stromdichte $J(r, z)$ verlaufen in den Ebenen $\varphi = \text{const}$.

Zu bestimmen sind die in die Wände der zylindrischen Schirmhülle induzierten Wirbelströme und ihre Abschirmwirkung.

Der Vektor der magnetischen Feldstärke erfüllt im leitenden Gebiet die stationäre Skingleichung und die Laplace'sche Gleichung in der Luft

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - \frac{H}{r^2} = \begin{cases} j\omega\mu_0 \varkappa H(r, z) \\ 0 \end{cases}, \tag{1}$$

$$\vec{H} = \vec{e}_\varphi \cdot H.$$

Auf Grund des Durchflutungsgesetzes kann die φ-Komponente der magnetischen Feldstärke auf Grenzflächen der Abschirmung wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned} H &= \frac{I}{2\pi R_1} \quad \text{für} \quad r = R_1 \quad \text{und} \quad |z| \leqslant h, \\ H &= \frac{I}{2\pi R_2} \quad \text{für} \quad r = R_2 \quad \text{und} \quad |z| \leqslant h, \\ H &= \frac{I}{2\pi r} \quad \text{für} \quad R_1 \leqslant r \leqslant R_2 \quad \text{und} \quad z = \pm h. \end{aligned} \tag{2}$$

Die Wirbel des Verktors der magnetischen Feldstärke ergeben die r- und z-Komponente der Wirbelströme

$$\vec{J} = \mathrm{rot}\,\vec{e}_\varphi\, H = -\frac{\partial H}{\partial z} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH) \cdot \vec{e}_z. \tag{3}$$

Für eine numerische Behandlung dieses Randwertproblems wird die Methode der finiten Elemente mit Hilfe des Galerkin-Verfahrens und der linearen Interpolation innerhalb des Elementes angewandt. Im Fall der analytischen Lösung wird im ganzen untersuchten Gebiet eine Interpolation höherer Ordnung mit trygonometrischen und Besselschen Polynomen angenommen und die unbekannten Koeffizienten werden aus dem mit Hilfe des Galerkin-Verfahrens entstehenden Gleichungssystem ausgewertet.

2. ANALYTISCHE LÖSUNG

Mittels eines Produktansatzes und Trennung der Variablen (r, z) findet man die allgemeine Lösung der Gl. (1)

$$[C_{1n} I_1(\beta r) + C_{2n} K_1(\beta r)] \cos Nz, \quad \text{mit} \beta^2 = j\omega\mu_0 \varkappa + N^2. \tag{4}$$

Im nichtstationären Zustand ergibt sich für die Gleichung

$$\nabla^2 H - \frac{1}{r^2} H = \begin{cases} \mu_0 \varkappa \dfrac{\partial H}{\partial t} \\ 0 \end{cases} \tag{5}$$

eine Lösung in der Form

$$[C_{1nm} J_1(Mr) + C_{2nm} Y_1(Mr)] \cos Nz \exp\left(\frac{-N^2 - M^2}{\mu_0 \varkappa} t\right). \tag{6}$$

Die Lösungen (4) und (6) können dann angewandt werden, wenn es gelingt, die Forderungen der Stetigkeit des magnetischen Feldes an den Trennstellen zwischen den Wänden der Abschirmung und der Luft zu erfüllen. In diesem Fall erweist sich die Bestimmung der Feldverteilung an Hand des Galerkin-Verfahrens vielfach als zweckmäßig und die Lösung kann wie folgt angenommen werden

$$H(r, z) = \frac{I}{2\pi r} + \frac{I}{2\pi} \sum_{n=1}^{n_0} \sum_{m=1}^{m_0} a_{nm} \varphi_{nm}(r, z), \tag{7}$$

wobei φ_{nm} — Funktionensystem

$$\varphi_{nm}(r, z) = Z_1(N_n r) \cos(M_m z) = \left[J_1(Nr) - \frac{J_1(NR_2)}{Y_1(NR_2)} Y_1(Nr)\right] \cos Mz \tag{8}$$

mit den aus der Randbedingung (2) vorgegebenen Eingewerten

$$\cos M_m h = 0 \to M_m = \frac{2m-1}{2h}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, \tag{9}$$

$Z_1(N_n R_2) = 0$, $Z_1(N_n R_1) = 0 \to$ die positiven Nullstellen $n = 1, 2, 3, \ldots$ der Zylinderfunktionen erster Ordnung.

Das Funktionensystem φ_{nm} erfüllt die folgenden Orthogonalitätsrelationen:

$$\frac{1}{h} \int_{-h}^{h} \cos\left(\frac{2m-1}{2h} \pi z\right) \cos\left(\frac{2l-1}{2h} \pi z\right) dz = \begin{cases} 1 & m = l \\ 0 & m \neq 1 \end{cases}, \tag{10}$$

$$A_n(R_1, R_2) = \int_{R_1}^{R_2} r Z_1(N_n r) Z_1(N_k r) dr = \begin{cases} \dfrac{r^2}{2} Z_o(Nr) Z_2(Nr) \Big|_{R_1}^{R_2} & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}.$$

Die Lösung (7) wird in die Gl. (1) eingesetzt

$$\sum_{n=1}^{n_0} \sum_{m=1}^{m_0} a_{nm}(-N^2 - M^2) \varphi_{nm}(r, z) = \begin{cases} j\omega\mu_0 \varkappa \left[\dfrac{1}{r} + \displaystyle\sum_{n=1}^{n_0} \sum_{m=1}^{m_0} a_{nm} \varphi_{nm}(r, z)\right. \\ 0 \text{ — in der Luft} \end{cases} \tag{11}$$

und die beiden Seiten der Gl. (11) mit $r\varphi_{kl}(r, z)$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$, $l = 1, 2, 3, \ldots$, multiplieziert und über den Bereich $R_1 < r < R_2$, $-h < z < h$ integriert. Nach der Berücksichtigung der Orthogonalitätsrelationen (10) erhält man das folgende Gleichungs-

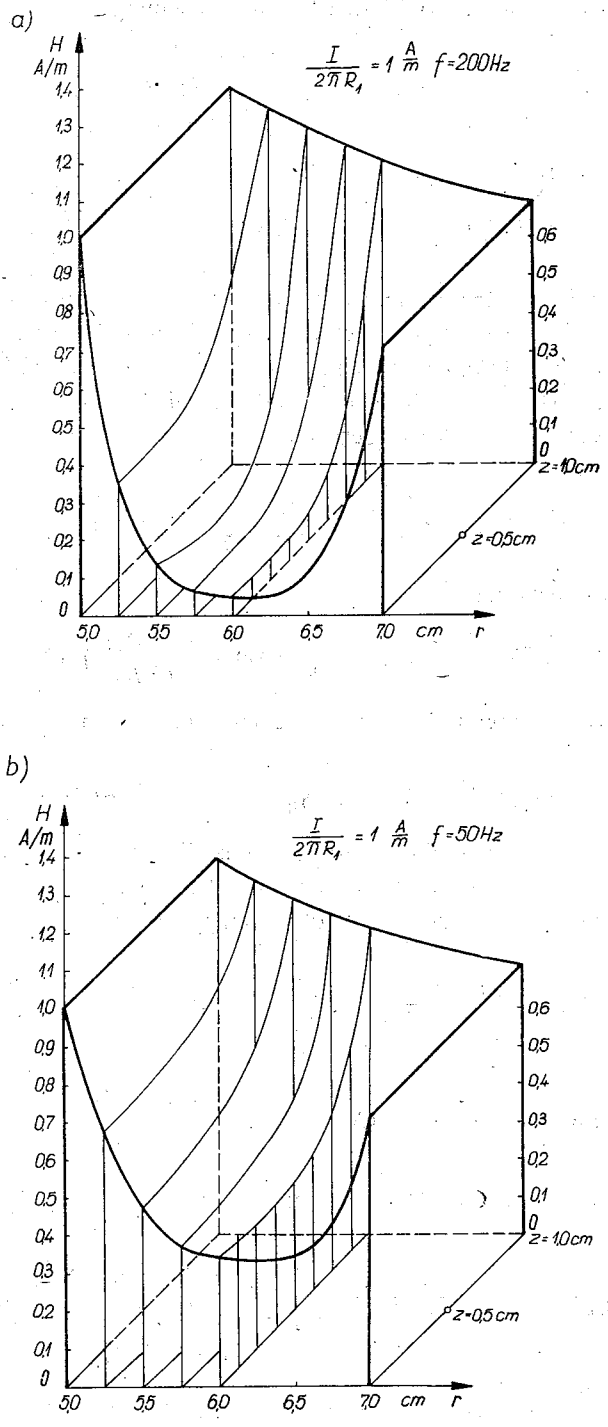


Abb. 2. Ergebnisse der numerischen Auswertung der Feldverteilung

system zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten a_{nm}

$$a_{kl}(-K^2-L^2)A_k(R_1, R_2) = b_{kl}+\sum_{n=1}^{n_0}\sum_{m=1}^{m_0} a_{nm}\lambda_{nmkl}, \tag{12}$$

wobei:

$$b_{kl} = j\omega\mu_0\varkappa\int_{S_1}\varphi_{kl}(r, z)drdz, \tag{12a}$$

$$\lambda_{nmkl} = j\omega\mu_0\varkappa\int_{S_1} r\varphi_{nm}(r, z)\varphi_{kl}(r, z)drdz, \tag{12b}$$

S_1 — Querschnitt der Abschirmung der Leitfähgkeit $\varkappa$.

Die Integration in den Beziehungen (12a) und (12b) kann man mittels der in [3] angegebenen Formeln (2.85) durchfüren. In der vorliegenden Bearbeitung wurden die Koeffizienten b_{kl}, λ_{nmkl} numerisch mit Hilfe der Simpson-Regel ausgewertet und nach der Prüfung der Konvergenz des Gleichungssystems (12) für die Parameter

$$h = 1 \text{ cm}, \quad h_1 = 0{,}5 \text{ cm}, \quad R_1 = 5 \text{ cm}, \quad R_2 = 7 \text{ cm}, \quad R_3 = 5{,}5 \text{ cm},$$
$$R_4 = 6{,}5 \text{ cm}, \quad \varkappa = 5{,}7\cdot 10^{-7}\ \Omega^{-1}\ \text{m}^{-1}, \quad f = 50 \text{ und } 200 \text{ Hz} \tag{13}$$

ist festgestellt worden, daß für die übliche technische Genauigkeit das System bis zu 121 Gleichungen benötigt werden soll. Die Zahl der notwendigen Gleichungen wächst für größere Werte der Kreisfrequenz schnell an. Die Ergebnisse der numerischen Auswertung wurden in der Abb. 2 dargestellt.

Das Gleichungssystem (11) kann man auch auf Grund des Galerkinschen Verfahrens

$$\int_S\left[\nabla^2 H-\frac{1}{r^2}H-\begin{pmatrix} j\omega\mu_0\varkappa \\ 0\end{pmatrix}H\right]\varphi_{kl}(r, z)rdrdz = 0, \tag{14}$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots, \quad l = 1, 2, 3, \ldots,$$

mit dem im Funktional (14) angenommenen Funktionensystem (8) gewinnen [4, 6].

3. NUMERISCHE LÖSUNG

Die numerische Lösung der Aufgabe wird mit Hilfe der Methode der finiten Elemente durchgefürt, die sich seit den frühen 60-er Jahren zu einem universal einseztbaren Hilfsmittel zur Lösung der verschiedenartigen Randwetraufgaben der Ingenieurpraxis entwickelt hat. Es lassen sich drei Berechnungsgänge dieser Methode unterscheiden:

a) Das untersuchte Gebiet wird mittels gewähletr Punkte Δr_m, Δz_m gitterförmig unterteilt, wobei das Gitter dreieckig angenommen wird (Abb. 3). Für die Lösung wird der Näherungsansatz

$$H(r, z) = \frac{I}{2\pi r^*}+[N_i, N_j, N_k]\cdot\begin{bmatrix} H_i \\ H_j \\ H_k\end{bmatrix} \tag{15}$$

angegeben, wobei:

$$N_m = \frac{1}{2S_e}(a_m + b_m r + c_m z), \quad m = i, j, k, \tag{16}$$

$$2S_e = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_i & r_j & r_k \\ z_i & z_j & z_k \end{vmatrix},$$

a_m, b_m, c_m — die mittels ausgewählter Punkte des Gitters bestimmten Koeffizienten.

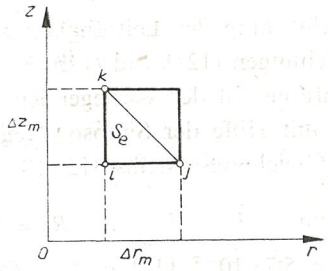


Abb. 3. Diskretisierung mittels eines Dreiecksgitters

b) Nach der Anwendung des Galerkin'schen Verfahrens im Innern eines Elementes

$$F^e = \int_{S_e} \left[\nabla^2 HH^* - \frac{1}{r^2} HH^* - \begin{pmatrix} j\omega\mu_0 \varkappa \\ 0 \end{pmatrix} HH^* \right] r dr dz \tag{17}$$

lautet das gesamte Funktionale wie folgt

$$F = \sum_{e=1}^{e_0} F^e. \tag{18}$$

Unter Berücksichtigung der Bedingungen

$$\sum_{e=1}^{e_0} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F^e}{\partial H_i} \\ \dfrac{\partial F^e}{\partial H_j} \\ \dfrac{\partial F^e}{\partial H_k} \end{bmatrix} = 0 \tag{19}$$

werden $3 \cdot e_0$-Bestimmungsgleichungen für die Werte H_i, H_j, H_k gewonnen.

c) Das entstehende Gleichungsystem (19) wird iterativ mit Hilfe des Rechners RIAD 32 gelöst. Die numerische Auswettung der Feldverteilung wird mit $\Delta r = \Delta z = 1$ mm und für 441 Gleichungen durchgefürt und die gewonnenen Ergebnisse stimmen mit den in der Abb. 2 angegebenen ($\pm 2\%$) überein.

4. ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Berechnung der Feldverteilung in der leitenden zylindersymmetrischen Abschirmung von Magnetfeldern. Es wurden analytische und numerische Lösungen des Problems mit Hilfe des Galerkin'schen Verfahrens angeneben, die das lineare Randwertproblem auf lineare Gleichungssysteme führen. Die Anwendung im ganzen Raum finiter Ausdrücke höherer Approximation hat die Möglichkeit erhöhter Berechnungsgenauigkeit zur Folge.

SCHRIFTTUM

1. J. F. Abel, *Introduction to the finite element method*, Von Nostrand Reinhold Ltd, New York 1972.
2. H. Eckhard, F. Holzman, *Bestimmung der Stromwärmeverluste in einer Kreisscheibe*, ETZ-A, 94, 1973, Heft 1.
3. I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Tabele of integrals, series and products*, Moskwa 1951, Academic Press, New York 1965.
4. L. Hannakam, *Wirbelströme in einem massiven Zylinder bei beliebig geformter erregender Leiterschleife*, Archiv für Elektrotechnik, 55, 1973, s. 207—215.
5. L. W. Kantorowitsch, W. I. Krylow, *Näherungsmethoden der höheren Analysis*, Berlin, VEB Deutscher Verlag d. Wissenschaften, 1956.
6. S. G. Michlin, C. L. Smolicki, *Metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych*, PWN, Warszawa 1972.
7. J. A. Nitsche, *L-Convergence of finite element Galerkin approximations for parabolic problems*, R.A.I.R.O. Analyse numérique (Numerical Analysis), vol. 13, no. 1, 1979, s. 31—54.
8. P. Rolicz, *Non-steady state in a conducting ring enclosing a conductor with a current*, Z. elektr. Inform. — u. Energietechnik, Leipzig, 8, 1978, 5, s. 419—426.
9. R. Sikora i in., *Die analytische Bestimmung des magnetischen Feldes und der Wirbelstromverluste in der leitenden Kreisscheibe als Lösung des Dirichlet-Problems für die Helmholtzsche Gleichung*, Archiv für Elektrotechnik, 57, 1975, s. 247—251.
10. O. C. Zienkiewicz, *The finite element method in engineering science*, Mc Graw-Hill, London 1971.

W. LIPIŃSKI, S. ISKIERKA

EFFICIENCY OF SHIELDING FROM ELECTROMAGNETIC FIELDS WITH THE USE OF AN AXIALLY SYMMETRICAL SCREEN

Summary

The paper analyzes field distribution in an axially symmetrical electromagnetic screen. Analytic and numerical solutions are given, which, with the use of Galerkin method, reduce the problem of boundary value to a system of linear equations.

W. LIPIŃSKI, S. ISKIERKA

EFFICASITÉ DU BLINDAGE À L'AIDE DE L'ÉCRAN AXIALEMENT SYMÉTRIQUE CONTRE LES CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES

Résumé

Dans ce travail on a analysé la répartition du champ dans l'écran axialement symétrique et électromagnétique. On a formulé les solutions analytiques et numériques du problème lesquelles, avec la méthode de Galerkin, réduisent la question au système linéaire des équations.

W. LIPIŃSKI, S. ISKIERKA

SKUTECZNOŚĆ EKRANOWANIA EKRANEM OSIOWOSYMETRYCZNYM OD PÓL ELEKTROMAGNETYCZNYCH

Streszczenie

W przedłożonej pracy przeanalizowano rozkład pola w osiowosymetrycznym ekranie elektromagnetycznym. Zostały podane analityczne i numeryczne rozwiązania problemu, które przy zastosowaniu metody Galerkina sprowadzają zagadnienie brzegowe do liniowego układu równań.

В. ЛИПИНЬСКИ, С. ИСКЕРКА

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ЭКРАНИРОВАНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ЭКРАНА

Резюме

Подвергнуто анализу распределение поля в осесимметрическом электромагнитном экране. Приведены аналитические и числовые решения проблемы, которые при применении метода Галеркина сводят граничные задачи к линейной системе уравнений.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1985, 31, z. 2, ss. 325—333

621.3.08

Entropijne błędy przyrządów pomiarowych

ROMUALD RAKOWSKI (JELENIA GÓRA)
Wyższa Oficerska Szkoła Radiotechniczna

Otrzymano 13.7.1983

Przedstawiono ocenę dokładności przyrządów pomiarowych z punktu widzenia teorii informacji. Opierając się na wynikach badań rozkładów błędów różnych typów narzędzi obliczono entropie i entropijne błędy. Podano zależność niepewności pomiarów od parametrów rozkładów. Scharakteryzowano jedną z własności metrologicznych aparatury pomiarowej — straty informacji.

Błędy i związane z nimi niedokładności przyrządów pomiarowych można określać w oparciu o podstawowe prawa i zależności teorii informacji. W technice potrzebne informacje uzyskujemy najczęściej za pomocą przyrządów pomiarowych. Jeżeli entropię wielkości mierzonej z sygnału na wejściu przyrządu oznaczymy przez $H(x)$, a entropię z rozkładu błędów przez $H(\Delta)$ to ilość uzyskanych informacji I w wyniku pomiaru wyniesie

$$I = H(x) - H(\Delta). \tag{1}$$

Zmniejszona zostanie nieoznaczoność z wartości $H(x)$ do wartości $H(\Delta)$. Wiedząc, że pomiarowe urządzenie charakteryzuje się losowymi błędami [1] [2] w przedziale $+G \geqslant \geqslant \Delta \geqslant -G$ (gdzie G — graniczne błędy określone przez producenta) nie możemy twierdzić, że poprawna wartość równa się dokładnie wskazanej x_n. Można stwierdzić tylko, że leży ona gdzieś w przedziale ograniczonym $x_n \pm G$. Pozostanie nadal nieoznaczoność równa entropii $H(\Delta)$. Entropia ta może być określona na podstawie znanych rozkładów błędów niezależnie od charakteru rozkładu mierzonej wielkości x [3].

W literaturze [3] wprowadzono pojęcie entropijne miary błędów Δ_ε, δ_ε

$$\Delta_\varepsilon = \frac{1}{2}\exp H(\Delta): \delta_\varepsilon = \frac{1}{2}\exp H(\delta). \tag{2}$$

Entropia z równomiernego rozkładu błędów wynosi

$$H(\Delta) = -\int_{\bar{G}}^{G} \frac{1}{2G}\ln\frac{1}{2G} = \ln 2G, \tag{3}$$

gdzie $2G$ — szerokość przedziału.

Stąd

$$2|G| = e^{H(\Delta)},$$

$$|G| = \Delta_\varepsilon = \frac{1}{2}\exp H(\Delta). \tag{4}$$

Entropijna miara błędów Δ_ε jest równa połowie szerokości przedziału rozkładu równomiernego $2\Delta_\varepsilon$ tak dobranego, aby entropia równała się entropii z rozkładu błędów $H(\Delta)$. Jeżeli błędy przyrządu o dowolnym rozkładzie charakteryzuje się entropią $H(\Delta)$, to przedział nieokreśloności $2\Delta_\varepsilon$ obliczony za pomocą wzoru (2) jest niezależny od kształtu rozkładu, zależy tylko od wartości entropii $H(\Delta)$. W ten sposób w rezultacie wprowadzenia pojęcia entropijnego błędu otrzymujemy możliwość zamiany dowolnego przedziału błędów o dowolnym rozkładzie przedziałem błędów równomiernego rozkładu o równoważnej entropii.

Przeprowadzone liczne badania rozkładów błędów [1] [5] rodzin przyrządów różnych typów, umożliwiły dokładniejsze obliczanie entropijnych błędów i strat informacji. W wyniku tych badań ustalono między innymi graniczne wartości parametru kształtu r i asymetrii q, słuszne dla całej populacji przyrządów używanych w technice pomiarowej. Parametry r i q zdefiniowano w literaturze [1]:

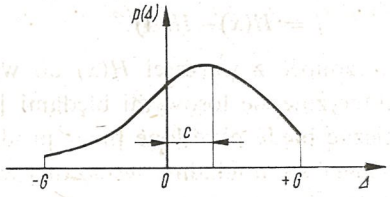
$$r = \frac{s}{|G|}, \quad q = \frac{c}{|G|}, \tag{5}$$

gdzie:

s — odchylenie średnie kwadratowe,

c — przesunięcie maksimum rozkładu względem wartości zerowej błędów, rys. 1,

G — wartość graniczna błędu podana przez producenta, wynikająca z klasy przyrządu.



Rys. 1. Przykład rozkładu błędów Δ rodziny przyrządów analogowych jednego typu
$p(\Delta)$ — gęstość prawdopodobieństwa

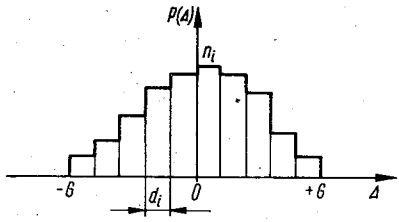
Posługując się maszyną cyfrową można obliczyć entropie z rozkładów błędów $H(\Delta)$ (straty informacji w kanale jakim jest przyrząd pomiarowy) i entropijną wartość błędów Δ_ε, dla różnych rozkładów spotykanych w technice pomiarowej, tzn. określić $H(\Delta)$ i Δ_ε w zależności od r i q:

$$H(\Delta) = f(r, q), \quad \Delta_\varepsilon = f(r, q). \tag{6}$$

Aby ułatwić obliczanie $H(\Delta)$, należy scharakteryzować rozkład błędów przyrządu określonego typu histogramem podanym przykładowo na rys. 2, na którym oznaczono:

$p(\Delta) = \frac{n_i}{nd_i}$ — gęstość prawdopodobieństwa,

n — wielkość próby (liczba przyrządów sprawdzanych),
n_i — liczba przyrządów o wartości błędów znajdujących się w przedziale d_i,
d_i — szerokość słupka, przedziały różnicowe, na które podzielono zakres wartości parametru informacji (tym razem błędów).



Rys. 2. Histogram rozkładu błędów podstawowych próby z populacji przyrządów jednego typu — d_i — przedział różnicowy, rozróżnialność

Entropia z histogramu rozkładu $p(\Delta)$, rys. 2, wyniesie

$$H(\Delta) = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n} \ln \frac{n}{n_i} + \ln d. \tag{7}$$

Obliczenia $H(\Delta)$ i Δ_ε przeprowadzono w oparciu o wyrażenie (7). Jak wiadomo z badań, wartości parametru kształtu r i asymetrii q przyrządów analogowych mieszczą się w przedziałach [5]:

$$0{,}5 \geqslant r \geqslant 0{,}2, \quad 0{,}35 \geqslant q \geqslant -0{,}35.$$

W obliczeniach przedziały te rozszerzono w celu dokładniejszego rozpatrzenia przebiegu charakterystyk i umożliwienia odczytywania $H(\Delta)$ i Δ_ε dla przyrządów o nadmiernie długiej eksploatacji, których parametry mogą odbiegać od normy (wychodzić poza przyjęte granice).

Uzyskane wartości entropii z rozkładów błędów przyrządów pomiarowych analogowych w zależności od r i q podano w tablicy 1. Obrazują one straty informacji w pomiarze bezpośrednim. Są miarą nieokreśloności jaka pozostaje po odczytaniu wartości wskazanej.

W tablicy 2 podano entropijne wartości błędów Δ_ε — połówki przedziałów rozkładów jednostajnych równoważnych pod względem strat informacji.

Na rys. 3÷4 przedstawiono wykresy funkcji $H(\Delta) = f(r, q)$ i $\Delta_\varepsilon = f(r, q)$. Umożliwiają one wygodne odczytywanie entropijnych wartości błędów i entropii (nieokreśloności pomiarów przyrządami analogowymi) dla różnych rozkładów błędów, różnych parametrów r i q. Wielkości Δ_ε powiązano z błędami granicznymi G podanymi przez producentów aparatury.

Nieco inaczej wygląda sposób postępowania przy obliczaniu strat informacji w przyrządach cyfrowych na początkowych wartościach zakresów. Producenci przyrządów cyfrowych podają błędy w postaci dwóch składowych: analogowej (oznaczmy ją przez Ga) i cyfrowej — błędów zliczania kwantowania (oznaczmy graniczną wartość tego błędu przez Gc).

Tablica 1

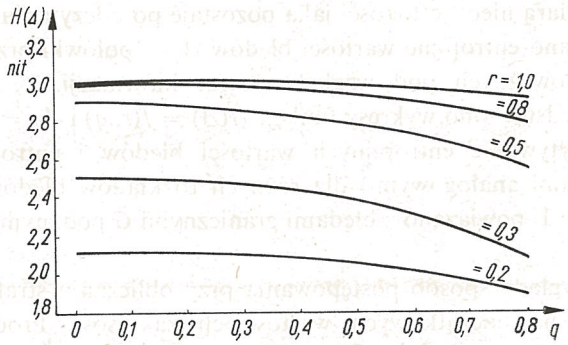
Entropie $H(\Delta)$ z rozkładów błędów analogowych przyrządów pomiarowych wyrażone w nitach. W obliczeniach przyjęto: $d = 0{,}1\ G$ — rozróżnialność, przedział różnicowy parametru informacji

r \ q	0	0,2	0,4	0,5	0,8
0,2	2,1117	2,1117	2,1102	2,0610	1,8454
0,3	2,509	2,4826	2,4446	2,4050	2,1280
0,4	2,7310	2,7010	2,6520	2,5412	2,3531
0,5	2,8896	2,8580	2,7957	2,7301	2,5163
0,8	3,0123	0,0070	2,9653	2,9251	2,8632
1,0	3,0298	3,0120	3,0071	2,9712	2,9466

Tablica 2

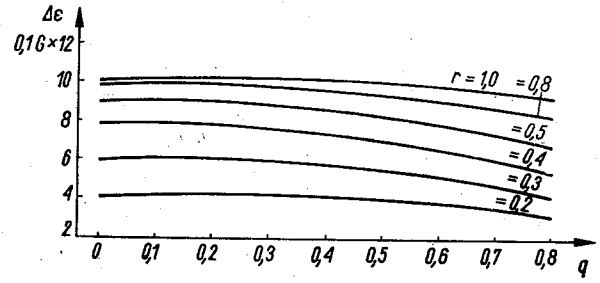
Entropijne wartości błędów Δ_ε przyrządów analogowych w zależności od parametrów rozkładów r i q, $d = 0{,}1\ G$

r \ q	0	0,2	0,4	0,5	0,8
0,2	0,413 G	0,413 G	0,412 G	0,393 G	0,316 G
0,3	0,615 G	0,600 G	0,575 G	0,555 G	0,421 G
0,4	0,776 G	0,760 G	0,700 G	0,655 G	0,530 G
0,5	0,900 G	0,870 G	0,820 G	0,765 G	0,620 G
0,8	1,015 G	1,010 G	0,970 G	0,930 G	0,875 G
1,0	1,035 G	1,015 G	1,010 G	0,975 G	0,950 G



Rys. 3. Wykresy entropii z rozkładów błędów przyrządów analogowych w zależności od parametru kształtu r i asymetrii q

$H(\Delta) = (q)$, $r = \text{const}$, $d = 0{,}1\ G$



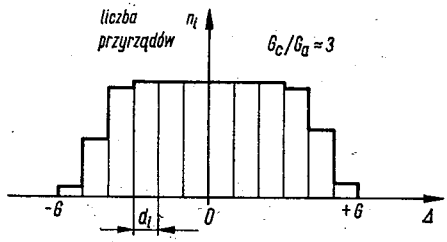
Rys. 4. Wykresy entropijnej wartości błędów $\Delta_\varepsilon = f(q)$ przyrządów analogowych
r = const, d = 0,1 G

Wartość składowej Gc zależy od zakresu pomiarowego. Natomiast graniczna wartości składowej analogowej Ga zmienia się jednocześnie ze zmianą wartości mierzonej. Dla każdego pomiaru można bez kłopotu określić stosunek Gc/Ga.

Maksymalna wartość entropii z rozkładu składowej analogowej występuje dla: $q = 0$, $r = 0{,}5$. Największa wartość $H(\Delta)$ jest równoznaczna z największą niepewnością pomiaru. Użytkownik aparatury przeważnie nie zna dokładnie wartości parametrów r i q składowej analogowej. Należy więc przyjąć rozkład najmniej korzystny pod względem niepewności (strat informacji), tzn. rozkład o największej wartości $H(\Delta)$ jako graniczny.

Jak wiadomo składowa cyfrowa Gc charakteryzuje się rozkładem równomiernym [4]. W celu określenia entropii $H(\Delta)$ przyrządu cyfrowego obliczono sploty rozkładów równomiernego i normalnego dla różnych spotykanych w praktyce pomiarowej stosunków składowych Gc/Ga. Następnie dla splotów różniących się stosunkiem Gc/Ga i wartościami r i q składowej analogowej obliczono $H(\Delta)$ i entropijne błędy Δ_ε.

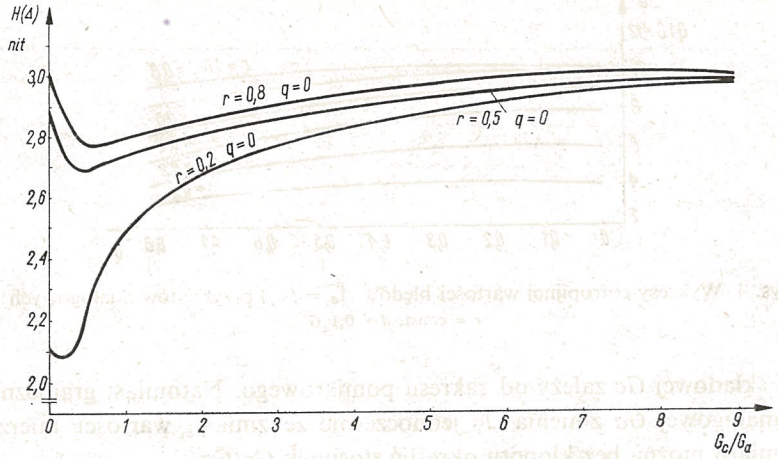
Do obliczenia entropii $H(\Delta)$ wykorzystywano histogram rozkładu błędów-splotu składowej cyfrowej i analogowej. Przykład takiego histogramu zamieszczono na rys. 5.



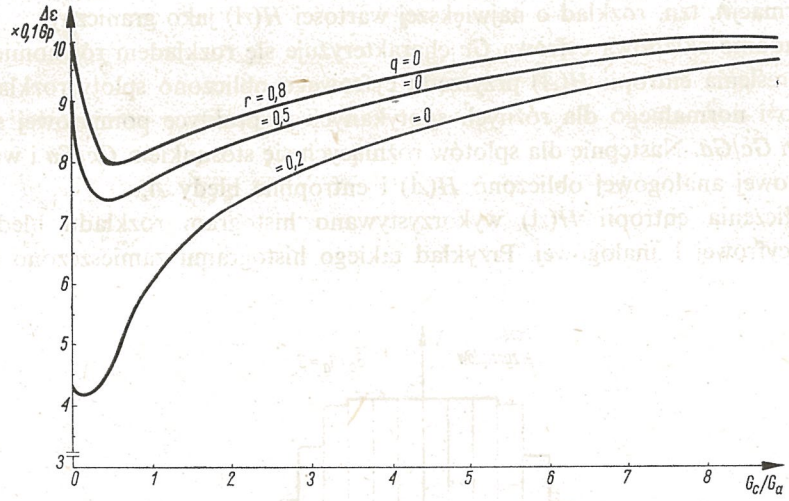
Rys. 5. Przykład histogramu rozkładu błędów przyrządu cyfrowego pomiarów na początkowych wartościach zakresów dla stosunku $Gc/Ga = 3$

Po obliczeniu $H(\Delta)$ można za pomocą wyrażenia (2) obliczyć entropijną wartość błędów Δ_ε. Wyniki badań i obliczeń $H(\Delta)$ i Δ_ε przyrządów cyfrowych zamieszczono w tablicy 3 i w postaci wykresów na rys. 6, 7.

Parametr określony entropijnym błędem Δ_ε jest parametrem nowym, dotychczas rzadko stosowanym. Jego przydatność wymaga więc głębszego uzasadnienia. Miarą strat informacji jest entropia z rozkładu błędów. Jak wiadomo rozkłady błędów są różne,



Rys. 6. Wykresy entropii z rozkładów błędów przyrządów cyfrowych
$H(\Delta) = f(Gc/Ga, r, q)$, $d = 0{,}1\ G_p$, G_p — błąd graniczny przyrządu



Rys. 7. Wykresy entropijnych wartości błędów przyrządów cyfrowych
$\Delta_\varepsilon = f(Gc/Ga, r, q)$; $G_p = Ga + Gc$

najczęściej: normalne, normalne obcięte (w różnym stopniu), sploty równomiernych z normalnymi i inne. Porównywanie informacyjne dokładności na podstawie rozkładów jest praktycznie niemożliwe.

Wprowadzenie entropijnych błędów — sprowadzenie dowolnych rozkładów do rozkładów równomiernych — umożliwia natychmiastowe (bez obliczeń) porównywanie dokładności informacyjnej. Ten przyrząd powoduje większe straty, którego przedział odpowiadający błędowi entropijnemu jest szerszy. W skali liniowej straty są o tyle większe,

Tablica 3

Entropijne wartości błędów Δ_ε przyrządów cyfrowych dla różnych stosunków Gc/Ga w zależności od r i q składowej analogowej, $\Delta_\varepsilon = f(Gc/Ga, r)$; $q = 0$, $d = 0{,}1\ G_p$ — przedział różnicowy

r, q \ Gc/Ga	0	1/4	1/3	1/2	1	2	4	∞
$r = 0{,}2$ $q = 0$	0,418 G_p	0,408 G_p	0,406 G_p	0,606 G_p	0,605 G_p	0,730 G_p	0,804 G_p	1,0 G_p
$r = 0{,}5$ $q = 0$	0,900 G_p	0,768 G_p	0,750 G_p	0,735 G_p	0,780 G_p	0,815 G_p	0,890 G_p	1,0 G_p
$r = 0{,}8$ $q = 0$	1,01 G_p	0,895 G_p	0,885 G_p	0,800 G_p	0,840 G_p	0,873 G_p	0,932 G_p	1,0 G_p

G_p — błąd graniczny przyrządu cyfrowego

o ile przedział jest szerszy. Ułatwienie, jakie wprowadza pojęcie entropijnego błędu w obliczaniu strat informacji, przedstawmy za pomocą prostych przykładów.

Przykład 1. Obliczmy straty informacji pomiaru woltomierzem o błędzie granicznym $G = 100$ mV. Przyjmijmy przedział rozróżnialnych poziomów $d = 10$ mV. Zakładamy, że mierzący nie zna rozkładów błędów. Wobec tego przyjmujemy, że $\Delta_\varepsilon = 0{,}9\ G$. Graniczne straty informacji wyniosą:

$$H(\Delta) = \ln 2\Delta_\varepsilon = \ln 2 \cdot 0{,}9G = \ln 2 \cdot 0{,}9 \cdot 10 = 2{,}89 \text{ nit.}$$

Wprowadzenie entropijnego błędu umożliwia również dokładniejsze i mniej pracochłonne obliczanie ilości informacji dostarczanej przez przyrząd pomiarowy, według wzoru

$$I = \ln \frac{X_{max} - X_{min}}{2\Delta_\varepsilon}, \tag{8}$$

przy założeniu, że każda wartość mierzonej wielkości występuje z jednakowym prawdopodobieństwem, gdzie X_{max}, X_{min} — graniczne wskazania.

Dla przybliżenia przekazywanych treści rozwiążmy jeszcze dwa przykłady.

Przykład 2. Obliczmy ilość informacji, którą jest w stanie dostarczyć przyrząd pomiarowy charakteryzujący się następującymi parametrami: $X_{max} = 30$ działek, $X_{min} = 0$ $G = 0{,}5$ działki. Z tablicy 1 odczytujemy graniczny entropijny błąd: $\Delta_\varepsilon = 0{,}9\ G$. Ilość informacji

$$I = \ln \frac{I_{max} - X_{min}}{2\Delta_\varepsilon} = \ln \frac{30 \text{ działek}}{0{,}9 \text{ działki}} = 3{,}507 \text{ nit.}$$

Przykład 3. Obliczmy ilość informacji dostarczonych przez przyrząd pomiarowy. Przyjmijmy, że eksploatator zna parametry rozkładów błędów, które wynoszą: $q = 0$, $r = 0{,}3$. Załóżmy następujące parametry przyrządu: $X_{max} = 30$ działek, $X_{min} = 0$ działek, $G = 0{,}5$ działki. W celu rozwiązania zadania odczytujemy z tablicy 2 wartość entropijnego błędu, $\Delta_\varepsilon = 0{,}615\ G$. Ilość uzyskanych informacji dla jednostajnego rozkładu sygnału wyniesie

$$I = \ln \frac{X_{max} - X_{min}}{2\Delta_\varepsilon} = \ln \frac{30 \text{ działek}}{0{,}615 \text{ działki}} = 3{,}887 \text{ nit.}$$

Wnioski

1. Tablice 1÷3 i wykresy z rys. 3, 4, 6, 7 umożliwiają odczytywanie wartości entropii i entropijnych błędów przyrządów w zależności od zmian parametrów r i q. Pozwala to na ocenę własności metrologicznych z punktu widzenia teorii informacji.

2. Największe wartości entropii $H(\Delta)$ i entropijnego błędu Δ_ε występują w przyrządach analogowych, których rozkłady nie są przesunięte, $q = 0$ i charakteryzują się maksymalną wartością parametru kształtu $r = 0{,}5$. Wobec tego, z punktu widzenia teorii informacji, rozkład o parametrach: $q = 0$, $r = 0{,}5$ można uważać za najbardziej niekorzystny (największe straty informacji podczas pomiaru). Użytkownik aparatury, który nie zna rozkładów błędów przyrządów (co występuje najczęściej), może korzystać z wartości granicznej (maksymalnej) błędu entropijnego $\Delta_\varepsilon = 0{,}9\ G$, która w przyrządach analogowych nie zostanie przekroczona. Stwierdzenie powyższe i powiązanie błędu entropijnego Δ_ε z błędem granicznym G podawanym przez producenta, powinno mieć istotne znaczenie dla praktyki pomiarowej.

3. Zamieszczone w artykule wykresy funkcji dotyczące przyrządów cyfrowych $\Delta_\varepsilon = f(Gc/Ga, r, q)$ i $H(\Delta) = f(Gc/Ga, r, q)$ umożliwiają odczytywanie (bez dokonywania pracochłonnych obliczeń) wartości entropijnego błędu Δ_ε w zależności od zmian stosunku Gc/Ga dla różnych q i r składowej analogowej. Stosunek Gc/Ga jest łatwy do określenia zależy od wartości wielkości mierzonej i zakresu pomiarowego.

4. Użytkownik aparatury w celu określenia maksymalnych wartości Δ_ε powinien korzystać z krzywej $\Delta_\varepsilon = f(Gc/Ga\ r, q)$ dla: $q = 0$, $r = 0{,}5$ (rys. 7). Krzywa ta pozwala odczytać wartości graniczne, które nie zostaną przekroczone w przyrządach cyfrowych o dowolnych parametrach r i q składowej analogowej. Wykresy zamieszczone na rys. 6÷7 pozwalają na ocenę własności metrologicznych przyrządów cyfrowych z punktu widzenia teorii informacji.

5. Wartości Δ_ε przyrządów cyfrowych i analogowych ułatwiają obliczanie entropijnych błędów pomiarów pośrednich.

6. Wartości Δ_ε umożliwiają dokładniejsze obliczanie ilości informacji dostarczonych przez przyrząd pomiarowy.

BIBLIOGRAFIA

1. Z. Orzeszkowski, *Podstawy metrologii elektrycznej*, Politechnika Wrocławska, Wrocław 1977
2. R. Rakowski, *Statystyczne metody obliczania błędów pomiarów przyrządami elektrycznymi*, WOSR Jelenia Góra, 1981.
3. P. W. Nowickij, *Asnowy informacjonnej tieorii izmierytielnych ustrojstw*, 1968.
4. A. Chwaleba i in., *Metrologia elektryczna*, WNT, Warszawa 1979.
5. R. Rakowski, *Badanie rozkładu błędów systematycznych wybranych elektronicznych narzędzi pomiarowych i ich zastosowania*, cz. I i II, rozprawa doktorska, Politechnika Wrocławska, 1979.
6. S. Jankowski, M. Lepa, *Zastosowanie informacyjnej teorii pomiarów do bdadań dokładności przyrządów pomiarowych*, Rozprawy Elektrotechniczne, z. 2, 1976.

R. RAKOWSKI

ERRORS DUE TO ENTROPY IN MEASUREMENT INSTRUMENTS

Summary

An assessment of accuracy of measurment is offered from the standpoint of theory of information. An analysis of the distribution of errors for different types of measurement instruments has led the author to formulate an assessment of entropy and entropy related errors. The author shows how the measurement errors depend on the parameters of the distribution. One metrological characteristic of the masurement instruments has been studied in depth — loss of information.

R. RAKOWSKI

ERREURS ENTROPIQUES DES APPAREILS DE MESURE

Résumé

On a présenté l'estimation de la précision de mesure du point de vue de la théorie de l'information. Prenant pour base les résultats de l'examen de la répartition des erreurs de différents types d'appareils, on a calculé l'entropie et les erreurs entropiques. On a présenté la dépendence de l'inexactitude des mesures des paramètres des répartitions. On a caractérisé une des propriétés métrologiques de l'appareillage de mesure — pertes d'information.

R. RAKOWSKI

ENTROPIEFEHLER DER MEßGERÄTE

Zusammenfassung

Es wurde die Genauigkeit von Meßgeräten vom Gesichtspunkt der Theorie der Informatik eingeschätzt In Anlehnung an die Untersuchungsergebnisse im Bereich der Fehlerverteilung verschiedenartiger Geräte wurden die Entropie und Entropiefehler berechnet. Es wurde die Abhängigkeit der Meßunsicherheit von den Verteilungsparametern angegeben. Charakterisiert wurde eine der metrologischen Eigenschaften des Meßgeräts — die Informationsverluste.

Р. РАКОВСКИ

ЭНТРОПИЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ ОШИБОК ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

Резюме

Представлена оценка точности измерительных приборов с точки зрения теории информации. Опираясь на результатах исследований распределений ошибок различных типов приборов вычислено энтропию и энтропийные ошибки. Подана зависимость ненадёжности измерений от параметров распределений. Схарактеризировано одно из метрологических свойств измерительной аппаратуры — потери информации.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1985, 31, z. 2, ss. 335—354

621.365

The Determination of Continuously Non-Measurable Temperature in Selected Thermal Objects

LECH BOROWIK (CZĘSTOCHOWA)

Instytut Elektroenergetyki Politechniki Częstochowskiej

Otrzymano 26.7.1983

In several thermal systems as e.g. in salt-bath electrical furnaces, metal melting furnaces and others, due to the chemically agressive media, high vacuum or other constructional requirements no permanently built-in temperature sensors can be installed.

The purpose of the paper presented is to analyze the possibility of indirect determination of the temperature by applying one of the extrapolation metods, basing on the measurements executed by several sensors placed outside the dangerous area. Nine different extrapolation methods were examined, but following the assumed criteria, five of them were eliminated and four others were investigated in a more detailed way. The two most important criteria were to minimize the total number of nesessary sensors and to keep the first sensor as distant as possible from the high-temperature zone.

The optimum and minimum number of sensors were determined for each practical application. The results of the failure of the first sensor closest to the furnace high-temperature zone, were considered.

Though the experimental part of the work was limited to measurement in electrical furnaces, the application field of the chosen methods may be widely ectended, covering many other thermal systems in which for technical reasons the direct continuous temperature measurement is not possible.

1. INTRODUCTION

In industrial practice there exist thermal objects, in which permanent installation of a temperature sensor proves difficult, or even impossible in some cases. The most frequent causes of these difficulties consist in the thermal aggressiveness of the charge or the atmosphere in the object [20], [24], [25], and the pressure differing from the atmospheric pressure. An example of such a thermal object, which creates similar difficulties, may be the salt-bath hardening furnace or the induction holder furnace.

In a way the problem may be solved by applying the non-contact method of temperature measurement [17]. Using pyrometers, however, does not ensure sufficient accuracy of measurement. The inaccuracies are caused by the surface being coated with all sorts of impurities introduced along with the charge, by undulation of the surface of molten metal or salt, by absorption of radiation due to steam, smoke and dust.

In this paper a possibility of determining the non-measurable temperature in an indirect way has been analysed which depends on temperature measurements at those points of the object where sensors can be installed permanently. We have also analysed the way of choosing a method with regard to the constructional and technical data of the object. The influence of the number of temperature sensors and of the place of their installation upon the value of errors has been discussed for various methods.

The list of symbols applied

λ — specific thermal conductivity
b — coefficient
ϑ — temperature
q — density of heat flux
α — surface film conductance
$d_{1,2}$ — thickness of layers of refractory and heat-insulating materials
α_k — heat transfer coefficient by convection
α_r — heat transfer coefficient by radiation
x — the coordinate of a temperature sensor as measured from the inner surface of the chamber lining
$\Delta\vartheta$ — absolute error of a method
n — number of sensors
τ — time
a_i, b_i — polynomial coefficients
Φ — rational function
μ, ν — degree of rational function
IW — method of polynomial interpolation
IWR — method of rational interpolation
RPW — method of uniform approximation by polynomials
DC — method of two sensors
m — degree of polynomial interpolation

2. THE CLASSIFICATION OF METHOD

Information about methods of determining the continuously non-measurable temperature in thermal objects has been gathered from available Polish and foreign publications; some other methods were also selected and adapted to the new applications. These methods have been classified (vide fig. 1). The group of interpolation methods [5], [21] includes only those which are particularly suitable in technical applications. Quite frequently the polynomial interpolation is applied [5], which is characterised by considerable simplicity of calculations. The rational interpolation method [27] is another efficient interpolation method suitable for great temperature gradients, found in transient states of operating objects. The spline function interpolation method and the method of uniform approximation by polynomials [2], [5] are both methods which enable extrapolation by

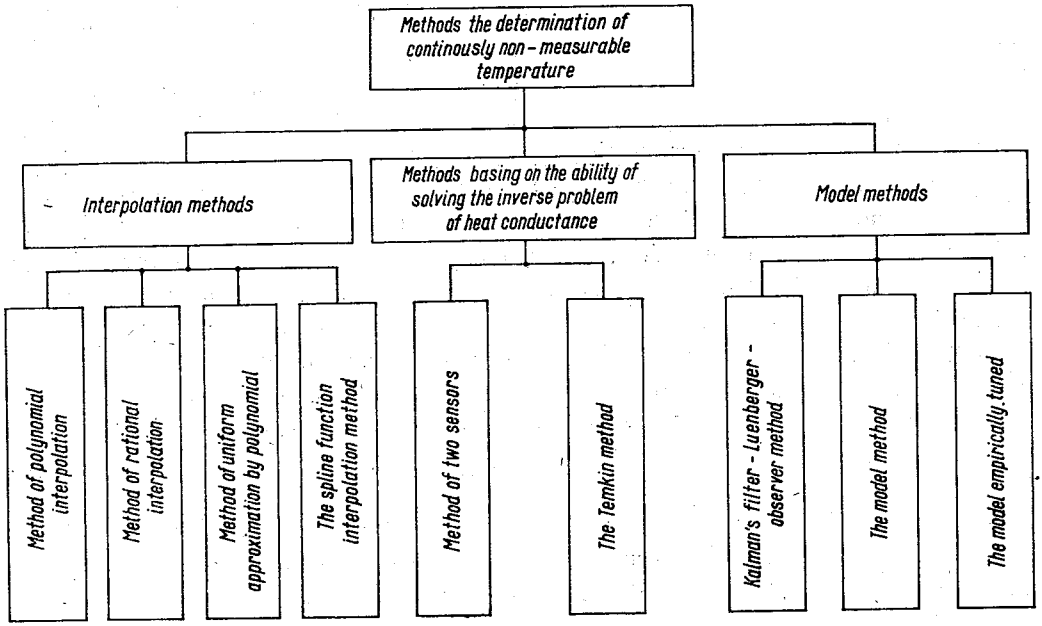


Fig. 1. The classification of methods of determining the continuously non-measurable temperature

a function which is not only concurrent with the investigated one at interpolation nodes (measurement points), but within the whole approximation range as well.

From among the methods which base on the ability of solving the inverse problem of heat conductance, the Temkin method [30] and the method of two sensors [11], [18], were selected. These methods allow to determine the boundary conditions of heat exchange (among others surface temperature) from the known temperatures at some points of the body, the differential equation describing the heat exchange with the surroundings and the thermophysical properties of the material.

Among model methods the following have been rated: Kalman's filter-Luenberger-observer method [6], [7], [12], [13], the analogue *RC* model, Beuken Model [26] or the digital model method [4], [26] and a method which relies or a model empirically tuned to the basis of known characteristics of the object [1].

This classification is an attempt at dividing the methods of determining the continuously non-measurable temperatures into certain groups which approach the problem in a similar manner. In the available Polish and foreign literature we have not encountered a classification which would comprehensively draw up the methods of determining the continuously non-measurable temperature in thermal objects on the basis of known temperatures in their brick-lining or construction.

3. SIMLIFYING ASSUMPTIONS AND LIMITATIONS OF THE RESEARCH WORK

1) The objects we are taking interest in respond to the necessary assumptions [8] which permits us to replace them by a two-layer plate.

2) For the sake of simplification, a two-layer plate with the thickness of layers amounting to 10 cm has been assumed for theoretical considerations.

3) No account has been taken of the influence of thermal contact resistance at the borders of layers.

4) The range of temperature in the systems has been assumed as 20—1200°C.

5) The influence of the charge has been omitted. The coefficient of heat transfer between the charge and the inner wall surface has been assumed as $\alpha = \infty$. For liquid charges it has been assumed that the charge undergoes perfect mixing, in consequence of which the temperature of the charge is identical at each point of the heating chamber and equals the temperature of the wall.

6) The research was resticted to thermal objects with non-metallic walls (mostly made from ceramic materials). The materials are isotropic and homogeneous.

7) The following range of λ has been presupposed for the materials applied:

$$\lambda = \lambda_o + b\vartheta,$$

$$0{,}17 \leqslant \lambda_o \leqslant 1 \ [\mathrm{W/mK}], \quad b \in \langle 0{,}13 - 0{,}475 \rangle 10^{-3} \ [\mathrm{W/mK^2}].$$

8) The measurements have been restricted to the course of the natural heating up of the object, the constant power with the transition to the constant temperature control.

9) Systematic errors of the method are the primary object of consideration in this paper.

10) The thermal inertia of the temperature sensors has been omitted.

11) It has been assumed that the admissible number of sensors to be installed in the object is equal to $n \leqslant 6$.

12) It has been assumed that the minimum distance of the first sensor from the inner surface of the heating chamber amounts to 1 cm. The change of this distance due to the wasing out of the furnace lining by molten charge has been taken into consideration.

13) In the calculations the differences of tenperature inside measuring holes have not been taken into account [29], [32].

4. NUMERICAL CALCULATIONS

4.1. The criteria of assessing the usability of methods

The criteria of assessing the usability of methods are:

— the error of method in the thermal steady state;
— the necessary number of sensors;
— the requirements concerning the place of installation of the first sensor;
— the necessity of knowing the physical properties of the constructional materials of the object;
— the dynamic errors of method;
— the possibility of hand-operated or automatic up dating of the system on the basis of the comparative short-time measurements;
— the behaviour of the system in case of a damage to the first sensor;
— simplicity of the system.

The criteria of assessing the usability of methods have been listed in order of their importance, which has been determined with due consideration of future practical application, expected difficulties and the requirements of the user. It should be added that it is the user who will verify the importance of the particular criteria, adapting them to a specific thermal system and technical and operational conditions.

4.2. The initial choice of methods

On the grounds of the presupposed simplifying assumptions and limitations of the research work, and after a consideration of the criteria of usability, we have initially chosen those methods which served the best task that had been set from them. From among the methods presented, four have been selected, namely:

— the polynomial interpolation method,
— the rational interpolation method,
— the method of uniform approximation by polynomials,
— the method of two sensors.

Considering the necessity of knowing the thermophysical properties of the constructional materials, the group of model method and Temkin's method have been excluded from further analysis. This approach results from the generally inadequate accuracy of the measuring methods, a considerable dispersion of physical properties, even within one lot of products, and from the complex dependence of properties upon temperature and on a number of other factors, among others, dependence upon the time of work, which underlies for the process of thermal ageing of refractory and heat-insulatin materials. These methods are therefore more labour-consuming and more expensive, and sometimes, the measurement of heat properties cannot be carried out at all.

The interpolation method projecting the temperature field by means of so-called spine function [27] has also been excluded from further analysis because one cannot meet the requirements of the method itself concering the knowledge of the value of the second derivatives of temperature at points inaccessible to measurement.

4.3. The numerical model

The analysis of errors of the initially selected methods has been carried through on the grounds of the results of numerical calculations for the four sets of data included in the presupposed range of properties. Sets *A*, *B* are models of salt-bath furnaces, while sets *C* and *D* are models of induction holder furnaces. The thermal objects, as a rule, posses brick linings made from two layers of materials, the geometrical dimentions of which make it possible for the lining system of the object to be reduced to a flat two-layer plate of infinite dimentions, with a normal being perpendicular to the direction of heat flow. Such a simplification allows to assume unidirectional heat flow in the calculations and to omit the effect of corners.

In order to work out the model, the finite difference method has been made use of [4], [9], [11]. The following conditions have been assumed:

$$\text{initial } \vartheta_1(0, x) \equiv \vartheta_2(0, x) = \vartheta_0, \tag{1}$$

$$\text{boundary conditions } x = 0 \quad q = \text{const}, \tag{2}$$

$$x = d\lambda_1 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x}, \tag{3}$$

$$x = d_1 + d_2 \quad -\frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} = \frac{\alpha}{\lambda_2} [\vartheta_2(\tau, d_1 + d_2) - \vartheta_0]. \tag{4}$$

The presented boundary conditions are right for the time from the moment of the start to the moment of obtaining the required temperature. In the following stage in the heating chamber of the object, constant temperature is kept, so condition (2) changes into condition:

$$x = 0 \quad \vartheta_1(\tau, 0) = \vartheta_r = \text{const}. \tag{5}$$

The heat transfer coefficient from the outer surface of the furnace into the surroundings was calculated according to the equation:

$$\alpha = \alpha_k + \alpha_r \tag{6}$$

$$\alpha_k = 1{,}1 \quad \sqrt[3]{|\vartheta - \vartheta_0|} \tag{7}$$

α_r — calculated according to the law of Stefan-Boltzman.

The calculations of the temperature to be determined were carried out at discrete time intervals, not longer than three minutes per 48 hours. That time enabled the model-object to reach a thermally steady state.

4.4. The polynomial interpolation method [5]

In the polynomial interpolation method, for each discrete time interval the distribution of temperature is treated as a function of only one geometrical variable. The interpolation polynomial is calculated every time, whereas Neville-Aitken algorithm [27] has proved to be the most suitable for the purpose. It allows to determine temperature without having to calculate the polynomial. Basing on formulae:

$$\vartheta_{i,0} = \vartheta_i,$$

$$\vartheta_{i,k} = \vartheta_{i,k-1} + \frac{\vartheta_{i,k-1} - \vartheta_{i-1,k-1}}{\frac{x_{i-k}}{x_i} - 1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant i, \tag{8}$$

this algorithm consists in setting up a symmetrical table which includes the values of the interpolation polynomial $\vartheta_{i_0 i_1 \ldots i_k}$ at fixed point x

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
x_0	$f_0 = \vartheta_0(x)$			
		$\vartheta_{01}(x)$		
x_1	$f_1 = \vartheta_1(x)$		$\vartheta_{012}(x)$	
		$\vartheta_{12}(x)$		
x_2	$f_2 = \vartheta_2(x)$			$\vartheta_{0123}(x)$
		$\vartheta_{23}(x)$	$\vartheta_{123}(x)$	
x_3	$f_3 = \vartheta_3(x)$			

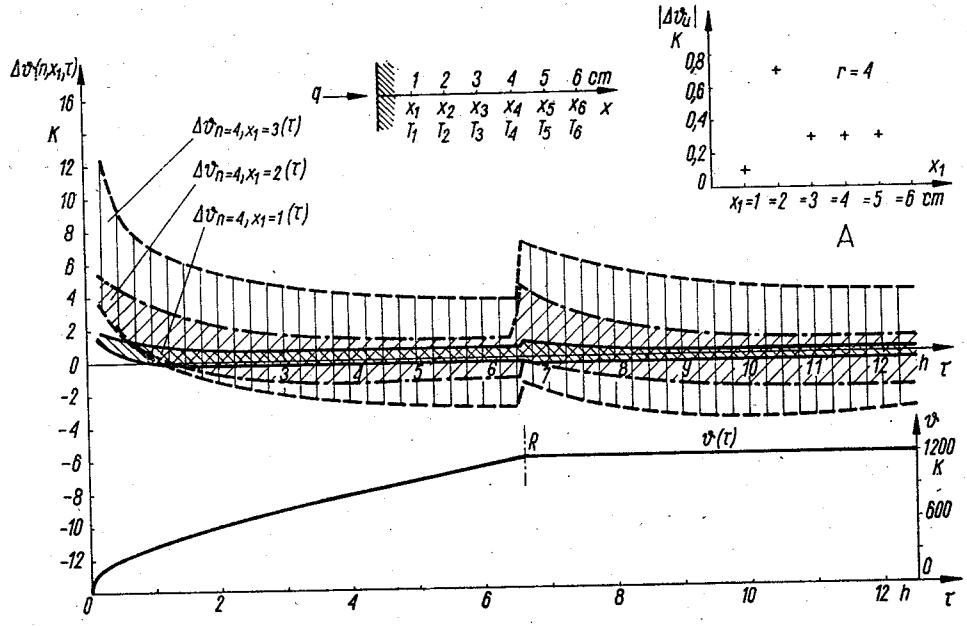


Fig. 2. The areas of the values of the method of absolute errors for the polynomial interpolation method $[\Delta\vartheta(n, x_1, \tau)$ „A", $n = 4 = \text{const}, x_1 = 1, 2, 3$ cm]

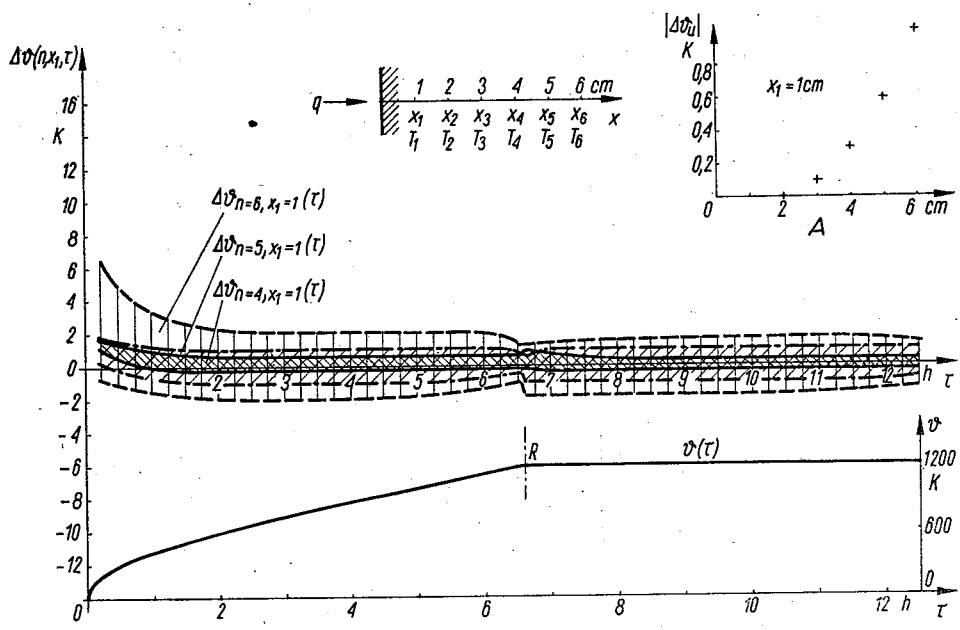


Fig. 3. The areas of the values of the method of absolute errors for the polynomial interpolation method $[\Delta\vartheta(n, x_1, \tau)$, „A", $x_1 = 1$ cm $= \text{const}, n = 4, 5, 6]$

Fig. 2 and 3 illustrate the dependence of the absolute error of the method in the function of heating-up time for a different number of sensors and of the variable of distance of the first sensor from the inner surface the heating chamber. As the calculated curves of errors were broken curves, in order to facilitate the analysis, we replaced them with error areas, bordered by envelopes of the broken curve. The nature of the curves of errors resulted first of all from the numerical discrete process of calculation and from the characteristics of the method itself. Numerical calculations were executed for all possible combinations of distributing sensors in the first layer of the brick lining. The presented diagrams illustrate the dependencies of the method error for four measuring sensors, as the distance of the first sensor x_1 is being changed, and the method error for changing number of sensors n, $x_1 = 1$ cm. These diagrams exemplify the characteristics of the polynomial interpolation method — which, among other things, consist in minimizing errors for the system of four sensors — and show the influence of distance x_1 upon the value of the error.

4.5. The rational interpolation method [27]

The interpolation function in the rational interpolation method is the quotient of two polynomials, in which the degree of the numerator equals μ and the degree of the denominator equals ν at the most

$$\Phi_{\parallel}^{\mu\nu}(x) = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ \dots\ +a_\mu x^\mu}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ \dots\ +b_\nu x^\nu} = \frac{P^{\mu\nu}(x)}{Q^{\mu\nu}(x)}. \tag{9}$$

In practical applications of the rational interpolation the following sequence is particularly recommended (μ, ν): $(0,0) \rightarrow (0,1) \rightarrow (1,1) \rightarrow (1,2) \rightarrow (2,2) \rightarrow (2,3)$, which corresponds to the „zigzag path" in fig. 4. In order to calculate the value of the rational interpolation function for $x = 0$ (the inner surface of the heating chamber), we are applying

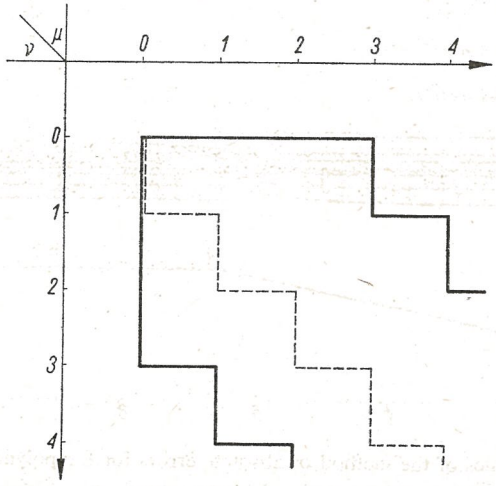


Fig. 4. The degree of the rational interpolation function

he Neville algorithm. The algorithm is described by the formulae:

$$\vartheta_{i,0} = \vartheta_i(x_i) = f_i, \tag{10}$$

$$\vartheta_{i,-1} = 0, \tag{11}$$

$$\vartheta_{i,k}(0) = \vartheta_{i,k-1} + \frac{\vartheta_{i,k-1} - \vartheta_{i-1,k-1}}{\frac{x_{i-k}}{x_i}\left[1 - \frac{\vartheta_{i,k-1} - \vartheta_{i-1,k-1}}{\vartheta_{i,k-1} - \vartheta_{i-1,k-2}}\right] - 1}, \tag{12}$$

for $1 \leqslant k \leqslant i, \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n.$

It should be mentioned that this algorithm is introduced under the assumption that no so-called pathological cases appear, i.e. the cases for which the denominator of the rational function equals 0 do not obtain. Such point is called the non-reachable point of the method [5].

A full range of calculations has been carried out for this method, and in fig. 5 we have presented the characteristic dependencies of the method error in the function of the distance

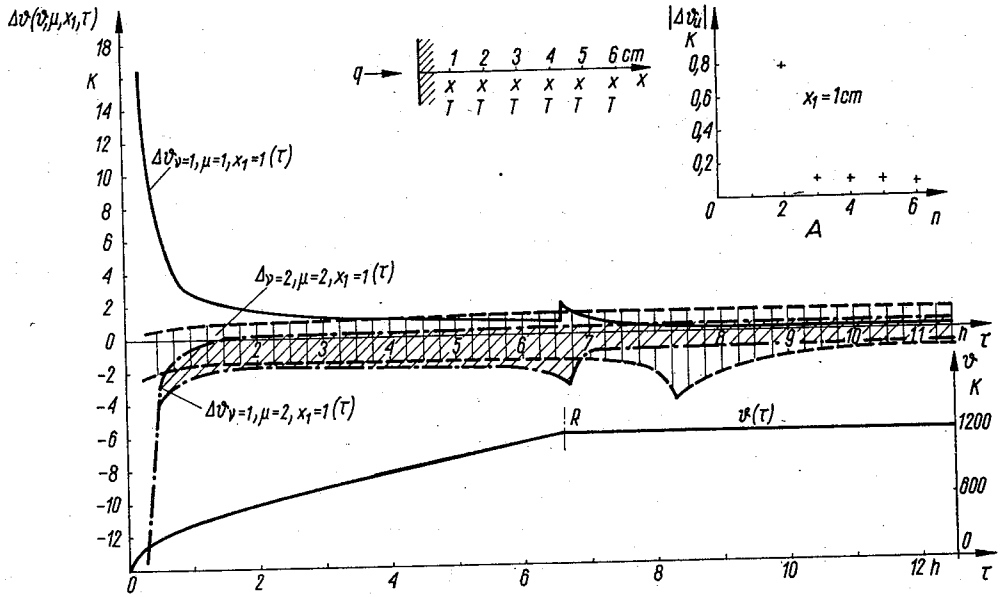


Fig. 5. The areas of the values of the method of absolute errors for the rational interpolation method $[\Delta\vartheta(\mu, \nu, x_1, \tau)$, „A", $x_1 = 1$ cm = const, $\mu = 1, 2$, $\nu = 1, 2$

of the first sensor x_1 and the number of sensor n. In the right-hand upper corner of the figure the dependence of the error of this method on x_1 and n for the thermally steady state has been presented. The presented diagrams are functions of method errors for rational function of (μ, ν), (0,1), (1,1), (1,2), (2,2) degree, the permanent distance of the first sensor being $x_1 = 1$ cm. A degree of the rational function higer than (2,2) or a greater distance of first sensor than 1 cm caused, for these sets of data, the appearance of non-reachable points of the method. This disqualified the method from further considerations.

4.6. The method of uniform approximation by polynomials [2], [5]

The method makes its aim to approximate function $f(x)$ by polynomial $P(x)$ in such a way that the deviation in the whole range of the approximation should be smaller than the admissible value. That such a polynomial exists is proved by the theorem of Weierstrass [2], whereas the so-called Tchebishev's Alternans Theorem is its sufficient condition.

Tchebishev's Theorem

Among polynomials of a degree not higher than m there exists a best approximation polynomial $P_m(x)$ of continuous function $f(x)$ in a given set; this is true if and only if there exists in that set a system $m+2$ of points $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m+1}$ (Tchebishev's Alternans), such that the difference $f(x)-P(x)$ assumes successively values L and $-L$ where

$$L = \max_i |f(x)-P(x)|. \tag{13}$$

Unfortunatly there do not exist simple ways of constructing an exact alternans. They are very difficult to find and very labour-consuming. For that reason approximate constructions of the alternans and connected constructions of the best approximation polynomial are commonly used. The algorithm of such a construction was given by Remez [23]. For any system of measuring points in the range $\langle a, b\rangle$, put in increasing order, it is calculated:

$$D_m(x, \vartheta) = \begin{vmatrix} \vartheta(x_0) & 1 & x_0 \ldots x_0^m \\ \vartheta(x_1) & 1 & x_1 \ldots x_1^m \\ \hline \vartheta(x_{m+1}) & 1 & x_{m+1} \ldots x_{m+1}^m \end{vmatrix}, \tag{14}$$

$$D_{m,i}(x) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 x_0^2 & \ldots & x_0^m \\ \hline 1 & x_{i-1} x_{i-1}^2 & \ldots & x_{i-1}^m \\ 1 & x_{i+1} x_{i+1}^2 & \ldots & x_{i+1}^m \\ \hline 1 & x_{m+1} x_{m+1}^2 & \ldots & x_{m+1}^m \end{vmatrix}, \tag{15}$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots, m+1,$$

$$k = \pm 1, \quad \operatorname{sgn} k = \operatorname{sgn} D_m(x, \vartheta), \tag{16}$$

the non-negative number is calculated:

$$e_m(\vartheta, x) = \frac{|D_m(\vartheta, x)|}{\sum_{i=0}^{m+1} D_{m,i}(\vartheta, x)}. \tag{17}$$

The arrangement of points $x_0, x_1, \ldots, x_{m+1}$ should be chosen in such a way as to make sure that e_m reaches the highest value, only then can we approach Tchebishev's exact alternans most accurately [22]. It might intuitively appear that while increasing the number of point-sensors, the resulting polynomial approaches the best approximation polynomial. It is so in fact. Such a proposition, along with its proof, is mentioned in [2].

Having chosen the arrangement of points most closely approaching the alternans, we can calculate the „corrected" values of temperature at measuring points:

$$\vartheta_m(x_i) = \vartheta(x_i) + (-1)^{i+1} k e_m(\vartheta, x), \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots, m+1. \tag{18}$$

Choosing the initial $(m+1)$ interpolation nodes, the Neville-Aitken algorithm was further used for the polynomial interpolation method. As in the former interpolation methods, for each discrete time interval the distribution of temperature was treated as the function of geometrical variable only.

Numerical calculations were carried through for four sets of data for changing number of sensors $n \in (4 \div 9)$ and the variable distance of first sensor x_1. The temperature was always extrapolated with the use of polynomials of $(2 \div 7)$ degree. Fig. 6 exemplifies the results of the calculations for polynomials of $(3 \div 5)$ degree. A higher degree of the inter-

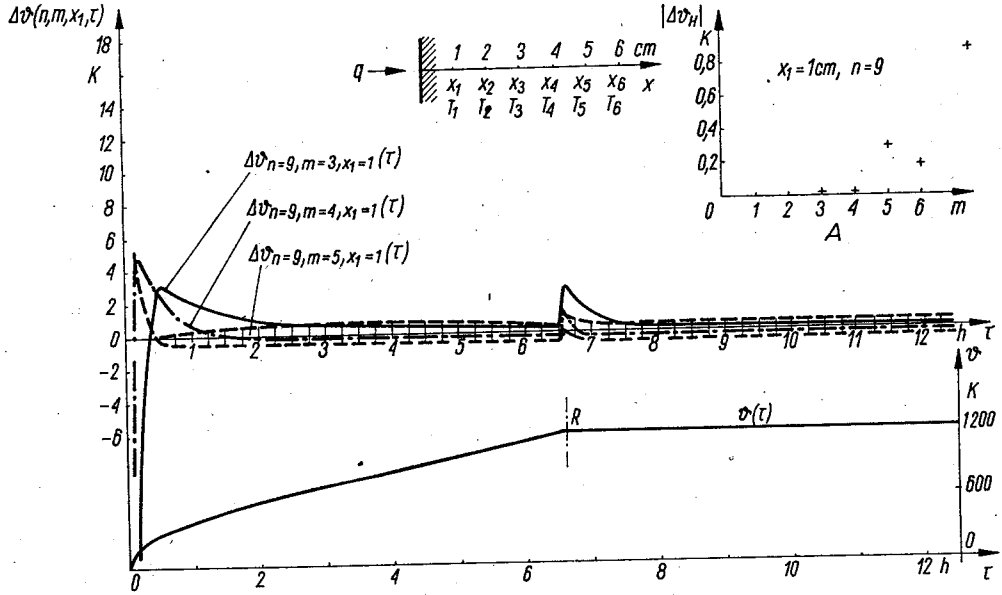


Fig. 6. The areas of the values of the method of absolute errors for the method of uniform approximation by polynomials $[\Delta\vartheta(n, m, x_1, \tau)$, „A", $n = 9$, $x_1 = 1$ cm = const, $m = 3, 4, 5, 6]$.

polation polynomial, the number of sensors being unchanged, produced an increase of errors both in the dynamic state and in the thermally steady state. In the same figure have been represented the dependencies of the absolute values of method errors $|\Delta\vartheta_u|$ for the thermally steady state in the function of the number of sensors n, the degree of interpolation polynomial m and the distance of the first sensor x_1.

4.7. The method of two sensors [10], [18]

The method of two sensors is a method deduced from the assumption that thermal properties of construction materials are independent of temperature. The method was orignally applied to determine the drop of temperature on the thermal contact resistance

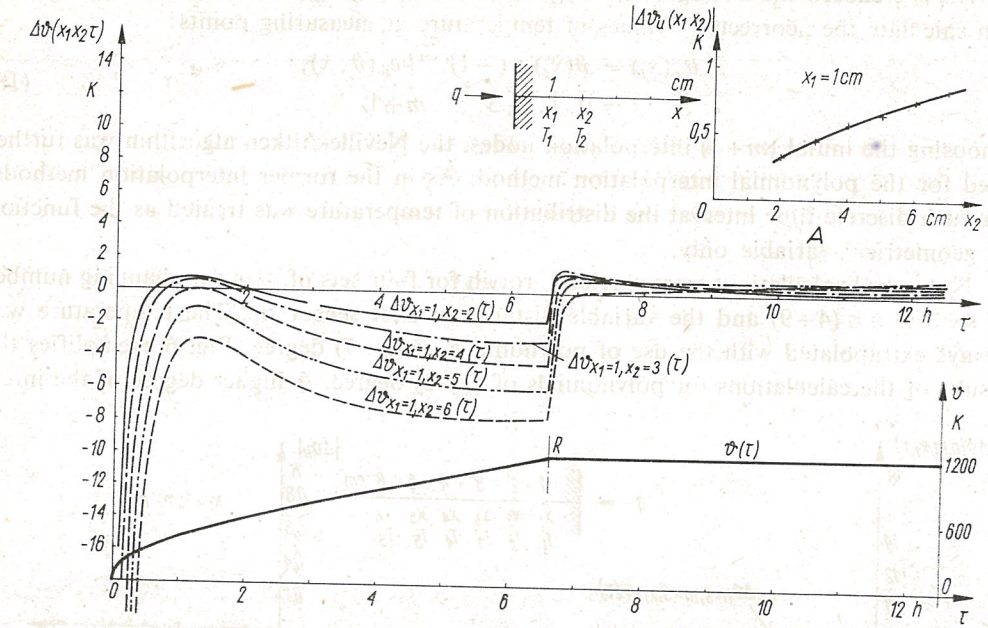


Fig. 7. The dependence of the method of absoulte errors for the method of two sensors [$\Delta\vartheta(x_1, x_2, \tau)$, „A", $x_1 = 1$ cm = const, $x_2 = 2, 3, 4, 5, 6$ cm]

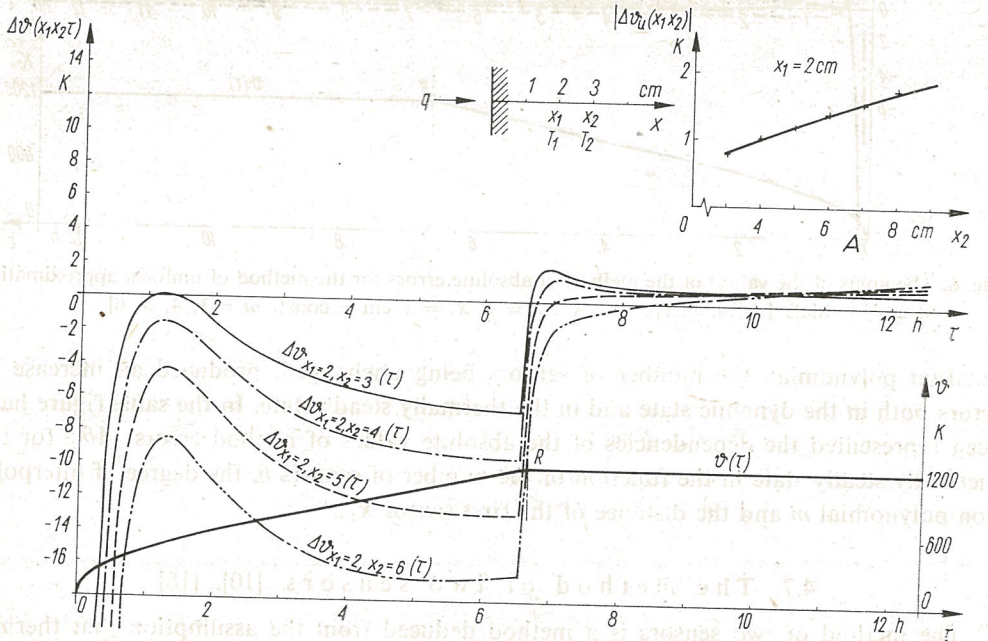


Fig. 8. The dependence of the method of absolute errors for the method of two sensors [$\Delta\vartheta(x_1, x_2, \tau)$, „A", $x_1 = 2$ cm = const, $x_2 = 3, 4, 5, 6$ cm]

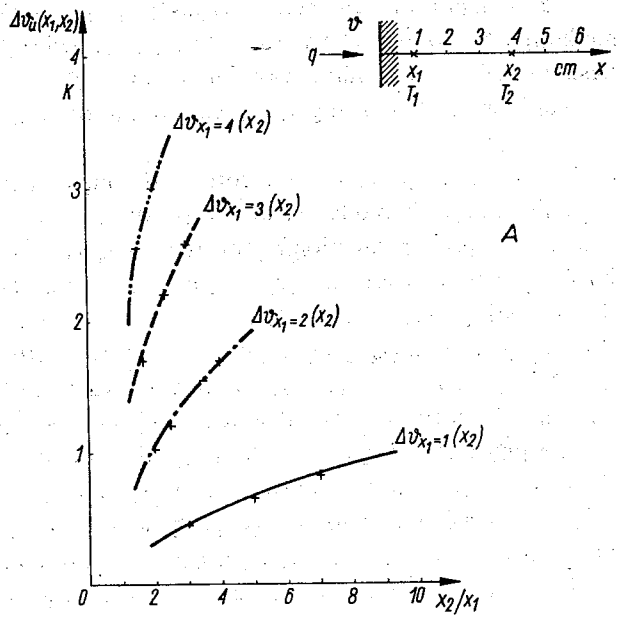


Fig. 9. The dependence of the method of absolute errors for the method of two sensors in the thermal steady state [$\Delta\vartheta(x_1, x_2)$, „A"]

[10] between materials, the thermal properties of which depended in an essential way on working temperature. Since, in the course of this study, rather good results had been achieved, we decided to examine the possibility of applying this method to solve our problem.

The final formula includes only geometrical coordinates of measuring points and values of temperatures at these points:

$$\vartheta(0, \tau) = \vartheta_1 \left[\frac{x_2}{x_2 - x_1} - \frac{x_1}{x_2 - x_1} \sqrt[3]{\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}} \right]^3. \tag{19}$$

In fig. 7 and 8 we have presented the dependence of the absolute error of the method examined in the function of time and the coordinates of the placement of sensor x_1 and x_2. In fig. 9 the dependence of the method error in the thermally steady state has been presented. Numerical calculations were carried through for all possible combinations of sensors, and the enclosed diagrams fully illustrate the characteristics of errors of the method. The coordinate of the placement of the first sensor x_1 exerts a substantial influence upon the value of the error. It is several times greater than the influence of second coordinate.

5. A COMPARISON OF THE INITIALLY SELECTED METHODS AND THE SELECTION OF OPTIMUM METHODS IN THE ASSUMED RANGE OF APPLICATIONS

The selection of optimum methods was understood as the choice of a method of methods, which, while minimizing the costs and expenditure of labour connected with their

designing, installation and operation, ensured sufficiently exact results of determining temperature. The methods were compared according to the assumed criteria of evaluation, with decisive emphasis placed on: 1 — static error of the method, 2 — necessary number of sensors and 3 — requirements cocerning the place of installation of the measuring sensors.

In table 1 have been set forth the absolute errors of the method in thermally steady state for the four initially chosen methods depending on distance x_1, and the minimum number of sensors ensuring proper functioning of the measuring system. The results obtained from each of the methods were convergent with each other. The values of errors were relatively small, amounting to $x_1 \leqslant 4$ cm, $\delta\vartheta_u \leqslant 1{,}5\,\%$ for all the methods and for all the sets of data. The number of measuring sensors for these methods amounted to: DC — 2, IW — 2, IWR — 3, RPW — 4. The requirements concerning the place of installation of the first sensor x_1 which ensures sufficient precision, were differentiated, and shown to depend on the physical properties of the brick lining materials of the thermal object. These requirements were found to be practically feasible.

In the transient state, which is understood here as the state of a thermal object while it is being heated up from the beginning to its reaching 2/3 of the temperature required, the requirements of the methods concerning the number of measuring sensors and the places of their installation were generally greater for tall the methods. All the same, these requirements should be regarded as practically feasible. The accuracy of the methods used were comparable. The error of the method in the most favourable systems amounted to about 1%. All the initially selected methods were methods which did not require the knowledge of the thermophysical properties of the constructional materials of the object. The methods, except for the one involving two sensors, were considerably flexible, as proved by the case of a measuring sensor being damaged. The error of the method rose only insignificantly, if in the original system at least one more sensor than is necessary had been included. The introduction of corrections into calculating system, due e.g. to the changing properties of the object, did not entail any structural changes of the object. The methods allow for correction of the coefficients of the system by taking periodic measurements with a portable thermometer.

Summing up, it has been found that for the investigated thermal objects, accepting the assumptions and limitations of the research, the most suitable methods are: the polynomial interpolation method and the method of two sensors. It does not mean that the rational interpolation method and the method of uniform approximation by polynomials should be rejected. Those methods are also serviceable; nevertheless they require more expenditure of labour or mechanized work without offering distinctly better results.

6. THE ANALYSIS OF ACCURACY OF DETERMINING THE CONTINUOUSLY NON-MEASURABLE TEMPERATURE

The main purpose of the research was to select a method, which would minimize its own errors. The remaining sources of errors affected the results irrespective of the method employed and their quantitative influence was similar for each method. It should be added

Table 1

Absolute errors of the method in the thermally steady state for the four initially chosen methods of the determination of continuously non-measurable temperature

x_1	Data *A*				Data *B*				Data *C*				Data *D*			
	absolute errors in the thermal steady state															
	IW $n=2$	*IWR* $n=3$	*RPW* $n=4$	*DC* $n=2$	*IW* $n=2$	*IWR* $n=3$	*RPW* $n=4$	*DC* $n=2$	*IW* $n=2$	*IWR* $n=3$	*RPW* $n=4$	*DC* $n=2$	*IW* $n=2$	*IWR* $n=3$	*RPW* $n=4$	*DC* $n=2$
cm	K															
1	0,1	0,10	0,012	0,32	0,3	0,01	−1,910	1,4	0,4	−0,18	0,337	1,2	0,0	0,0	0,0	0,13
2	0,4	0,10	0,087	0,78	1,5	0,61	0,0	4,47	1,67	0,15	0,112	4,3	0,0	0,31	0,212	0,41
3	0,3	0,71	−0,30	1,50	3,0	0,63	0,0	8,68	3,18	−0,33	0,50	9,2	0,0	0,95	−0,60	0,52
4	0,7	−0,30	−0,30	2,05	5,0	2,61	−3,625	14,70	5,5	−0,17	0,112	16,7	0,4	−1,10	0,625	0,25
5	1,2	2,81	−0,30	3,30	7,5	4,10	−1,225	21,62	8,5	−1,23	2,0	27,1	0,9	2,10	2,375	0,97
6	1,8	0,64	2,312	3,53	11,7	4,10	−1,225	29,85	12,7	−0,81	5,5	41,9	0,3	2,22	−12,53	0,55
7	2,5	3,67		4,58	15,2	9,83		40,22	17,6	−0,27		61,6	1,0	5,88		0,03
8	2,5			4,92	20,8			51,0	23,6			87,5	1,0			0,47

IW — the polynomial interpolation method, *IWR* — the rational interpolation method, *RPW* — the method of uniform approximation by polynomials, *DC* — the method of two sensor

that the method error constituted only a small percentage in the entire value of error arising while determining temperature. For this analysis those phenomena and sources of errors were chosen, which, in the writer's view, could in propitions conditions affect the value of the entire error. These are:

1) the error of the method [3],
2) the tolerance of the distance of the installation of sensors [3],
3) the influence of the distribution of temperature measured in holes,
4) the influence of the leakage conductance of the brick lining [31],
5) the influence of the ageing of the brick lining [3],
6) the influence of the heterogeneity of the lining material of the object [3],
7) the errors of calculating systems [15], [19],
8) the influence of the direct induction heating of the sensors [16].

While analizing the influence of the above-mentioned sources and applying certain requirements and recommendations, the accuracy of determination of the continuously non-measurable temperature for the investigated objects amounted to:

$$0{,}2\% \leqslant \delta_u \leqslant 6\% \text{ — for the thermally steady state,}$$

$$7\% \leqslant \delta \leqslant 26\% \text{ — for the transient state.}$$

The investigations on real objects confirmed the numerical results obtained [3].

7. CONCLUSIONS AND FINAL REMARKS

1. In the paper a few methods of indirect determination of non-measurable temperature have been suggested. Technical conditions enabling application of the method suggested have been qualified.

2. A hierarchy of the criteria of usefulness of the particular methods have been laid down, a hierarchy was adapted with regard to the technical and technological properties of the objects investigated.

3. On the basis of numerical calculations and measurements of real objects, particular methods have been compared; for each of them an optimum number of sensors was established, the method errors were minimized, both for the thermally steady state the transient state. Thus for the thermally steady state the particular methods require: IW — 2, DC — 2, IWR — 3, RPW — 9 measuring sensors. In the dynamic state the number respectively amounts to: IW — 4, DC — 2, IWR — 3, RPW — 9 sensors.

4. The methods suggested determine the non-measurable temperature with a method error $\leqslant 0{,}2\%$, the requirements of the methods being pracitically feasible. In the transient state this error amounts to 1%.

5. The distance of installation of the first sensor decisively affects the value of the method error. This dependence is particularly evident in the initial stage of heating-up. In the thermally steady state this influence decreases, but as the distance grows, the errors increase.

6. In the course of the numerical calculations carried through and measurements made on really existing objects, we have found that pathological points of the method

appear when the investigated temperature is determined by means of the rational interpolation method.

7. All the methods sugessted, except the *DC* method, were relatively insensible to the damage of the first sensor. By equipping each sensor with a contrivance to detect its damage and excluding it then from the calculating system, the methods prove to be nearly equally accurate.

8. As the result of a metrological analysis carried through, it has been found that the method error, the tolerance of the installation of sensors, any heterogeneity of the object and the measuring system decisively participate in pushing up the total error of the determination.

9. In the calculations and measurements carried through, the entire error of determing the non-measurable temperature amounted to: $0{,}2\% \leqslant \delta_u \leqslant 6\%$ in the thermally steady state and $7\% \leqslant \delta \leqslant 26\%$ in the dynamic state.

10. The methods suggested are simple and cheap both in the stage of designing, in installation and operating.

REFERENCES

1. I. R. Ashcroft, P. A. Norris, *Heat flux pyrometer*, Inst. Phys. Conf., Ser. 1975, No. 26.
2. J. S. Berezin, E. P. Ziddkov, *Metody vycislenii*, Moscow, 1959.
3. L. Borowik, *Wyznaczanie temperatury niemierzalnej w sposób ciągły w wybranych obiektach elektrotermicznych*, Doctoral thesis, Łódź 1982.
4. L. Collatz, *Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych*, PWN, Warszawa 1960.
5. B. P. Demodowicz i in., *Metody numeryczne*, part 2, PWN, Warszawa 1960.
6. D. Gilles, *Modellbildung, ein Hilfsmittel der Messtechnik*, Technisches Messen, 1979, No 6, part 1.
7. D. Gilles, *Modellbildung, ein Hilfsmittel der Messtechnik*, Technisches Messen, 1979, No 7/8, part 2.
8. M. Ichikava i in., *Theoretical analysis of heating up time for empty furnaces*, VI Inter. Congress Electrothermics, Berighton, 1968, ref. No 605.
9. K. Januszkiewicz, *Metoda numeryczna na obliczanie rozgrzewu elektrycznego pieców oporowych komorowych*. Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, Elektryka, 57, 1978.
10. N. A. Yarisev, O. W. Minin, *Extrapoliacionnyi metod izmereniia temperatury i teplego potoka*, I. W. Priborostroenie, 1969, No 1.
11. K. Januszkiewicz, *Analiza numeryczna przepływu ciepła przez płaską płytę dwuwarstwową w stanie cieplnie ustalonym*, Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, Elektryka, 65, 1979.
12. T. Kaczorek, *Teoria układów regulacji automatycznej*, WNT, Warszawa 1974.
13. T. Kaczorek, *Synteza liniowych układów stacjonarnych metodą przestrzeni stanów*, PWN, Warszawa 1975.
14. R. E. Kalman, *A new approach to linear filtering and prediction problems*, Journal of Basic Engineering, ASME, 1966, No 3.
15. Z. Kulka, M. Nadachowski, *Liniowe układy scalone i ich zastosowanie*, WKŁ, Warszawa 1977.
16. L. Michalski, K. Eckersdorf, *Temperature measurement of induction hardened workpieces*, Materiały z Sampozjum n.t. Pomiary temperatury IMEKO TC12, Karolve Vary, 1981.
17. L. Michalski, K. Eckersdorf, *Pomiary temperatury*, WNT, Warszawa 1969.
18. O. V. Minin, *O redukcji odnoi obrotnoi zadaci teploprovodnosti k poluobrotnoi*, Ingenerno-phizicheskii journal, 1973, No 6.
19. B. M. Olivier, J. M. Cage, *Electronic measurements and instrumentation*, Inter-University Electronics Series, vol. 12, Mc Graw-Hill Inc., 1971.

20. Opracowanie wykonane dla Pabianickiej Fabryki Narzędzi przez Zespół Elektrotermii Politechniki Łódzkiej, Łódź 1975.
21. R. Orłowski, J. Hawryluk, *Modelowanie cyfrowe*, WNT, Warszawa 1971.
22. S. Paszkowski, *Zastosowanie numeryczne wielomianów i szeregów Czebyszewa*, PWN, Warszawa 1975.
23. E. J. Remez, *Obschie vycisletenie metody chebishevkovo pribijenia*, Moscow, 1957.
24. B. Sochor, *Elektryczne piece oporowe*, PWN, Warszawa 1958.
25. B. Sochor i in., *Regulacja i regulatory temperatury w elektrycznych urządzeniach grzejnych*, PWN, Warszawa 1960.
26. B. Staniszewski, *Wymiana ciepła — Podstawy teoretyczne*, PWN, Warszawa 1979.
27. J. Stoer, *Einführung in die numerische Matematik, I*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1972, 1976.
28. A. A. Sholohov, *Iskazenia temperaturnogo pola v tverdom tele s izolirovannym oblastiami priyamougolnoy formy*, Ingenerno-phizicheskii journal, 1961, No 9.
29. T. R. Thomas, *Extrapolation errors in thermal contact resistance measurements*, Journal of Heat Transfer, 1970, Vol. 13.
30. A. G. Temkin, *Obratnye metody teploprovadnosti*, Moscow, Energiya, 1973.
31. W. Trimak, E. Edwards, *Large recording potentiometer error causes by furnace leakage currents*, Review of Scientific Instruments, 1960, No 1.
32. S. J. Wilcox, M. Rohsenow Warren, *Film condensation of potassium using copper condensing block for wall-temperature measurement*, Journal of Heat Transfer, 1970, No 8.

L. BOROWIK

WYZNACZANIE TEMPERATURY NIEMIERZALNEJ W SPOSÓB CIĄGŁY W WYBRANYCH OBIEKTACH TERMICZNYCH

Streszczenie

W praktyce przemysłowej istnieją systemy cieplne, między innymi takie, jak hartowniczy piec solny, indukcyjny piec topielny, w których nie istnieje możliwość umieszczenia czujnika pomiarowego na stałe. Przyczynami tych trudności są: chemicznie agresywny wsad, wysoka próżnia oraz szereg innych wymogów konstrukcyjnych. Celem niniejszego artykułu jest analiza możliwości pośredniego wyznaczania szukanej temperatury stosując jedną z metod ekstrapolacyjnych, wykorzystujących pomiary temperatury w punktach poza strefą niebezpieczną. Rozważono 9 różnych metod, z których, uwzględnajając przyjęte kryteria, wyeliminowano 5. Pozostałe 4 zostały szczegółowo przebadane. Za najważniejsze kryteria uznano: minimalizację koniecznej liczby czujników oraz wymagania dotyczące dystansu pomiędzy pierwszym czujnikiem, a ścianą wewnętrzną pieca. Dla każdej z proponowanych metod określono minimalnie niezbędną oraz optymalną liczbę czujników. Przeanalizowano wpływ, na wartość błędu metody, przypadku uszkodzenia pierwszego czujnika. Mimo, że praktyczna część pracy zawiera tylko pomiary i analizę dla pieców elektrycznych wybrane metody mogą znaleźć szerokie zastosowanie i w innych obiektach termicznych jak również w innych urządzeniach technicznych, w których pomiar temperatury jest utrudniony lub niemożliwy.

L. BOROWIK

INDICATION DE LA TEMPÉRATURE IMMESURABLE DANS LES DISPOSITIFS THERMIQUES CHOISIS PAR MODE CONTINU

Résumé

Dans la pratique industrielle existent des systèmes thermiques comme four à bain de sel, four à induction à canal submergé, dans lesquels il n'est pas possible de mettre le capteur de mesurage au fixe. Les causes de ces difficultés sont: charge chimiquement agressive, vide élevé et plusieurs exigences de construction. Le but de cet article est d'analyser les possibilités de l'indication intermédiaire de la tem-

pérature cherchée, en utilisant une des méthodes d'extrapolation, permettant de mettre à profit les tempèratures prises dans les points situés hors de la zone dangereuse. On a considéré neuf méthodes différentes, parmi lesquelles, vu des critères admis, on a éliminé cinq. Les quatre autres ont été soigneusement examinées. On a admis, comme critères les plus importants: minimisation de la quantité nécessaire de capteurs et les exigences concernant la distance entre le premier capteur et la paroi intérieure du four.

Pour chacune parmi les méthodes proposées on a défini la quantité nécessaire de capteurs minimale et maximale. On a analysé l'influence de l'endommagement du premier captuer sur la grandeur de l'ereur de la méthode. Bien que la partie pratique de l'élaboration contienne seulement les mesures et l'analyse pour les fours électriques, les méthodes choisies peuvent trouver une large application aussi dans d'autres appareils thermiques, ainsi que dans d'autres installations techniques, pour lesquelles la prise de la température est entravée ou impossible.

L. BOROWIK

BESTIMMUNG DER KONTINUIERLICH UNMEßBAREN TEMPERATUR IN THERMISCHEN OBJEKTEN

Zusammenfassung

In der industriellen Praxis gibt es Wärmesysteme, u.a. Härtesalzbadeöfen und Induktionsschmelzöfen, an denen es nicht möglich ist, stationäre Meßfühler anzubringen. Zu den Ursachen dieser Schwierigkeiten gehören: chemisch aggressive Beschickung, Hochvakuum und verschiedene bautechnische Anforderungen. Der Zweck dieses Beitrages ist, die Möglichkeiten indirekter Bestimmung der gesuchten Temperatur auszuwerten. Es wurde eins der Exploatationsverfahren angewandt, das die Temperaturmessungen außerhalb der Gefahrzone ausnutzt. Unter Berücksichtigung der vorausgesetzten Kriterien wurden 9 verschiedene Verfahren bewertet. Davon mußten 5 Verfahren ausgeschieden werden. Als die wichtigsten Kriterien werden angenommen: Minimalisierung der benötigten Fühlerzaghl und Anforderungen in bezug auf die Entfernung zwischen dem ersten Meßfühler und der Innenwand des Ofens. Für jedes vorgeschlagene Verfahren wurde die optimale (minimal unentbehrliche) Anzahl von Meßfühlern bestimmt, und der Einfluß der Beschädigung des ersten Meßfühlers auf den Fehlerwert des Verfahrens analysiert. Wenn auch der praktische Teil Messungen und Analyse nur für Elektroöfen beinhaltet, können die gewählten Verfahren ebenfalls bei anderen thermischen Einrichtungen angewandt werden, bei denen die Temperaturmessung erschwert bzw. unmöglich ist.

Л. БОРОВИК

НЕПРЕРЫВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕИЗМЕРЯЕМОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ В ИЗБРАННЫХ ТЕРМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ

Резюме

В промышленности практически имеются термические системы, в частности, закалочная соляная печь-ванна, индукционная плавильная печь, в которых нет возможности длительного пребывания измерительного датчика. Причины этого являются химически агрессивная шихта, высокий вакуум, а также ряд конструкционных требований. Целью настоящей статьи является анализ косвенного определения искомой температуры одним из экстраполяционных методов, использующих измерения температуры в пунктах вне опасной зоны. Рассматривается 9 разных методов, из которых, учитывая приятые критерии, устранено 5. Остальные 4 тщательно исследованы. Важнейшими критериями считаются: минимализация необходимого числа датчиков, а также требования к дистанции между первым датчиком и внутренней кладкой печи. Для каждого из предлагаемых методов определено необходимое, а также оптимальное число датчиков. Проанализирован фактор погрешности метода и случай повреждения первого датчика. Несмотря на то, что практическая часть работы содержит лишь измерения и анализ для электропечей, избранные методы могут найти применение также и в других термических объектах, а также в других технических установках, в которых измерение температуры затруднительно или прямо невозможно.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1985, 31, z. 2, ss. 355—371

621.313.333

Pewne uwagi o możliwości stosowania obliczeń przybliżonych przy wyznaczaniu pola elektromagnetycznego i charakterystyk silnika indukcyjnego liniowego metodą całkowego przekształcenia Fouriera

KAZIMIERZ ADAMIAK (KIELCE), MACIEJ WŁODARCZYK (KIELCE)

Instytut Elektrotechniki Politechniki Świętokrzyskiej

Otrzymano 7.12.1983

Podstawową trudnością przy stosowaniu całkowego przekształcenia Fouriera do analizy pola elektromagnetycznego w silniku indukcyjnym liniowym (*LIM*) jest dokonanie transformacji odwrotnej. Stosowana zwykle metoda residuów wymaga bowiem znalezienia pierwiastków pewnego nieliniowego równania zmiennej zespolonej. Często pierwiastki te oblicza się w sposób przybliżony. W pracy dokonana została ocena dokładności pierwiastków przybliżonych oraz zbadany został wpływ błędu w wyznaczeniu pierwiastków na obliczoną wartość potencjału wektorowego pola magnetycznego i siły ciągu silnika indukcyjnego liniowego.

1. WSTĘP

Zjawiska elektromagnetyczne występujące w silnikach indukcyjnych liniowych mają dość skomplikowany charakter z powodu występowania efektów brzegowych: podłużnego i poprzecznego. Jednoczesne uwzględnienie wszystkich tych efektów jest trudne, ponieważ należałoby rozważać pole trójwymiarowe w obiekcie o bardzo zawiłej geometrii. Dlatego bardzo często idealizuje się problem, uwzględniając zmienność składowych pola elektromagnetycznego tylko względem jednej lub dwóch zmiennych przestrzennych. Wśród dwuwymiarowych modeli obliczeniowych *LIM* najczęściej stosowane są: metoda oparta na wykorzystaniu szeregów Fouriera [1] i metoda wykorzystująca całkowe przekształcenie Fouriera [2]. Po zastosowaniu którejkolwiek z metod, pole w silniku jest opisywane za pomocą szeregu. Szeregi te różnią się jednak zasadniczo zarówno zbieżnością jak i trudnościami przy obliczaniu poszczególnych wyrazów szeregu.

Metoda szeregów Fouriera wymaga założenia, że uzwojenie wzbudzenia jest ułożone okresowo w odległości τ_s jedno od drugiego [1]. Założenie to jest oczywiście fikcyjne i dlatego τ_s powinno być tak duże, aby wpływ sąsiednich uzwojeń pierwotnych był pomijalny. Metoda szacowania wielkości podana została przez Northa [1], a w pracy [3] opisany został dokładniejszy sposób wyznaczenia odległości τ_s. Wartość τ_s szybko rośnie

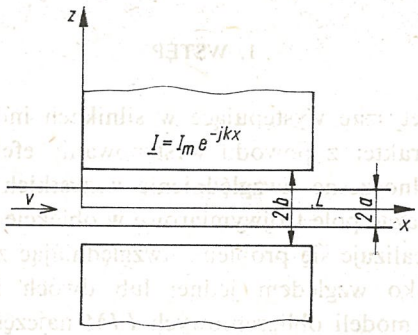
ze wzrostem prędkości silnika v. Zbieżność szeregów opisujących pole elektromagnetyczne w silniku zależy od τ_s. Im większe τ_s tym zbieżność ta jest wolniejsza. Dla dużych prędkości silnika czas pracy komputera może więc być znaczny.

Stosując metodę całki Fouriera nie jest potrzebne założenie o okresowości wzbudzenia. W końcowym wyniku pojawiają się jednak pierwiastki pewnego nieliniowego równania zespolonego. Rozwiązanie tego równania wiąże się z dużymi trudnościami, dlatego często stosuje się metodę przybliżoną, po założeniu, że argument funkcji trygonometrycznych jest mały. Metodę taką stosował Yamamura [2], dla którego wartości przybliżone były punktem wyjściowym do poszukiwania wartości dokładnej metodą iteracyjną. Autor nie znalazł jednak nigdzie ogólnych wniosków na temat dokładności pierwiastków przybliżonych oraz odpowiedzi na pytanie jaki jest wpływ tej dokładności na obliczone pole i osiągi *LIM*. Niniejsza praca jest próbą odpowiedzi na powyższe pytania. Będzie to jednocześnie próba określenia kryterium wyboru jednej z dwóch metod, w skrócie powyżej omówionych, dla silnika o założonych parametrach.

2. ANALIZA POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO W SILNIKU INDUKCYJNYM LINIOWYM METODĄ CAŁKI FOURIERA

Rozważany będzie model silnika indukcyjnego liniowego przedstawiony na rys. 1. Zakłada się, że:

— szerokość silnika jest bardzo duża, dzięki czemu problem można traktować jako dwuwymiarowy,



Rys. 1. Model płaskiego, dwustronnego silnika indukcyjnego liniowego

— rdzeń żelaza części pierwotnej i część wtórna są nieskończenie długie,
— przenikalność magnetyczna stojana jest bardzo duża ($\mu_{Fe} \to \infty$),
— część wtórna porusza się względem części pierwotnej z prędkością v,
— uzwojenie (prąd wzbudzenia skierowany wzdłuż osi y) zastępuje się nieskończenie cienkim okładem prądowym o rozkładzie sinusoidalnym

$$\underline{I}(x) = I_m e^{-jkx}. \tag{1}$$

Składowa wzdłuż osi y potencjału wektorowego pola magnetycznego spełnia równanie

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}=\begin{cases} j\omega\mu\gamma A-\mu\gamma v\dfrac{\partial A}{\partial x} & \text{w części wtórnej,}\\ 0 & \text{w szczelinie powietrznej,}\end{cases} \tag{2}$$

oraz warunki brzegowe

$$\left.\frac{\partial A}{\partial z}\right|_{z=0}=0, \tag{3a}$$

$$\left.\frac{\partial A}{\partial z}\right|_{z=b}=\begin{cases}\mu_0 I, & x\in(0,L),\\ 0, & x\in(0,L),\end{cases} \tag{3b}$$

i warunki ciągłości na powierzchni $z = a$

$$\underline{A}_1=\underline{A}_2, \tag{4a}$$

$$\frac{\partial \underline{A}_1}{\partial z}=\frac{\partial \underline{A}_2}{\partial z}. \tag{4b}$$

Rozwiązanie równania (2) uzyskuje się najwygodniej metodą całkowego przekształcenia Fouriera. Po jego zastosowaniu, rozwiązaniu otrzymanych równań różniczkowych zwyczajnych i dokonaniu transformacji odwrotnej otrzymuje się następujące wyniki [2]:
dla $x \leqslant 0$

$$\underline{A}_n(x,z)=\mu_0 I\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\exp\left(-j(k+p_{2i})L\right)-1}{k+p_{2i}}\,\frac{F_n(p_{2i},z)}{H(p_{2i})}\exp(jp_{2i}x), \tag{5a}$$

dla $x \geqslant L$

$$\underline{A}_n(x,z)=\mu_0 I\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1-\exp\left(-j(k+p_{2i-1})L\right)}{k+p_{2i-1}}\,\frac{F_n(p_{2i-1},z)}{H'(p_{2i-1})}\exp(jp_{2i-1}x), \tag{5b}$$

dla $0 \leqslant x \leqslant L$

$$\underline{A}_n(x,z)=\mu_0 I\left\{\frac{F_n(-k)}{H(-k)}\exp(-jkx)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\exp\left(-j(k+p_{2i},z)L\right)}{k+p_{2i}}\times\right.$$

$$\left.\times\,\frac{F_n(p_{2i},z)}{H'(p_{2i})}\exp(jp_{2i}x)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{k+p_{2i-1}}\,\frac{F_n(p_{2i-1},z)}{H'(p_{2i-1})}\exp(jp_{2i-1}x)\right\}, \tag{5c}$$

gdzie:

$\underline{A}_1(x,z)$ — potencjał w obszarze bieżni,
$\underline{A}_2(x,z)$ — potencjał w szczelinie powietrznej,
p_i — pierwiastki równania

$$H(p)=0. \tag{6}$$

Indeksem nieparzystym oznaczone zostały pierwiastki z częścią urojoną dodatnią, a nieparzystym z częścią urojoną ujemną. Problem znalezienia pierwiastków równania (6) jest

główną trudnością omawianej metody. Zdecydowana większość autorów prac poświęconych silnikom liniowym zakłada jednak, że wystarcza znaleźć dwa pierwsze, lub nawet tylko jeden, pierwiastki równania i uwzględnić pierwsze człony sum występujących we wzorach (5). Nasar i Del Cid [4] podają, że założenie takie, dla silnika o pewnych parametrach, jest przyczyną błędu przy wyznaczaniu osiągów silnika nie większego niż 1%. Niekiedy zakłada się też, że [2]

$$\begin{aligned} (b-a)p &\ll 1, \\ aq &\ll 1. \end{aligned} \tag{7}$$

Wtedy

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -j\mu\gamma va \pm \sqrt{\Delta}/2b, \\ \Delta &= -(\mu\gamma va)^2 - 4jba\omega\mu\gamma. \end{aligned} \tag{8}$$

3. PORÓWNANIE DOKŁADNEJ I PRZYBLIŻONEJ WARTOŚCI PIERWIASTKÓW RÓWNANIA $H(p) = 0$

Równanie (6) rozwiązane zostało numeryczną metodą Newtona, tzn. stosowany był proces iteracyjny

$$p^{n+1} = p^n - H(p^n)/H'(p^n). \tag{9}$$

Jako przybliżenie zerowe przyjmowane były przybliżone wartości parametrów p_1 i p_2 otrzymane ze wzoru (8). Obliczenia przeprowadzono dla następujących parametrów silnika:

$a = 0{,}001 \div 0{,}03$ m,
$b = 0{,}002 \div 0{,}06$ m,
$\omega = 314 \div 1884$ s^{-1},
$\mu\gamma = 37{,}68$ (aluminium) lub 59,0 (miedź),
$v = 2 \div 50$ m/s.

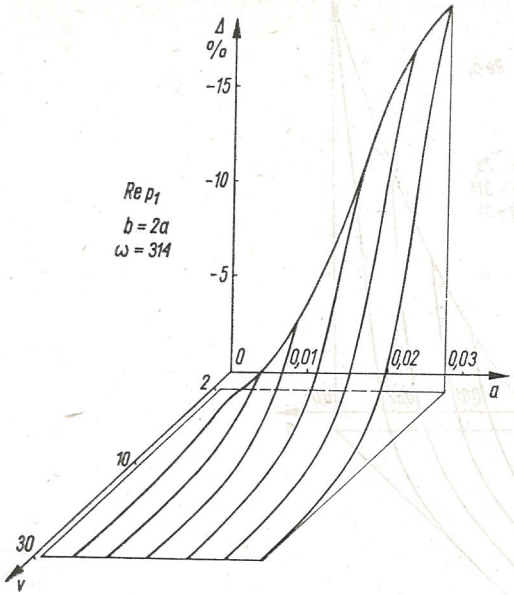
Rys. 2 przedstawia błąd części rzeczywistej pierwiastka przybliżonego p_1

$$\Delta = \mathrm{Re}\left\{\frac{p_{1d} - p_{1p}}{p_{1d}}\right\} 100\%, \tag{10}$$

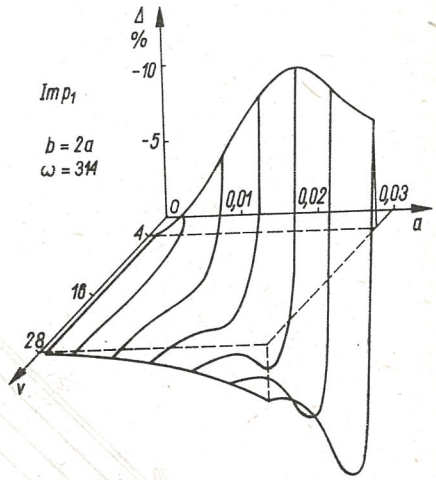
gdzie:

p_{1d} — dokładna wartość pierwiastka p_1,
p_{1p} — przybliżona wartość pierwiastka p_1.

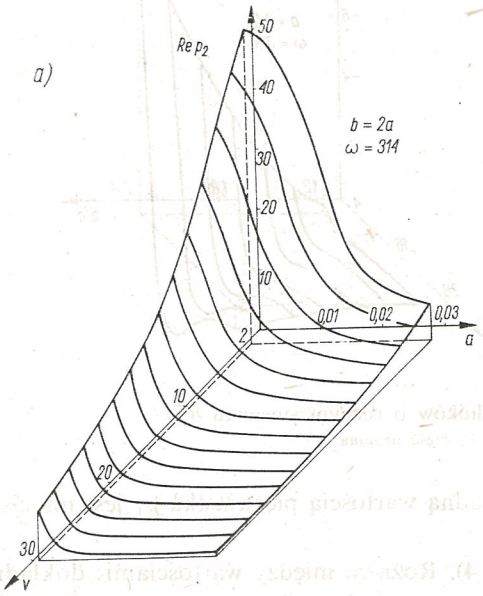
Założono, że bieżnia wykonana jest z aluminium, $\omega = 314$ s^{-1} oraz $b/a = 2$. Parametrem zmiennym w czasie obliczeń były: prędkość bieżni v oraz grubość bieżni a. Błąd Δ silnie zależy od v i a; dla małych a Δ jest bardzo małe. Jeśli $a < 0{,}005$ m, wtedy Δ nie przekracza wartości 0,5%. Dla małych prędkości v i dużych a błąd Δ jest bardzo duży i może osiągnąć wartość kilkudziesięciu procent. Jednak ze wzrostem v, niezależnie od wartości a, Δ maleje do zera. Podobnie zachowuje się błąd części urojonej pierwiastka p_1. Z tą jednak różnicą, że Δ może mieć wartość zarówno dodatnią jak i ujemną, oraz że dla tych samych v błąd części urojonej jest większy niż części rzeczywistej. Stwierdzić więc można, że dla parametrów silnika zazwyczaj spotykanych w praktyce $a < 0{,}02$ m oraz dla

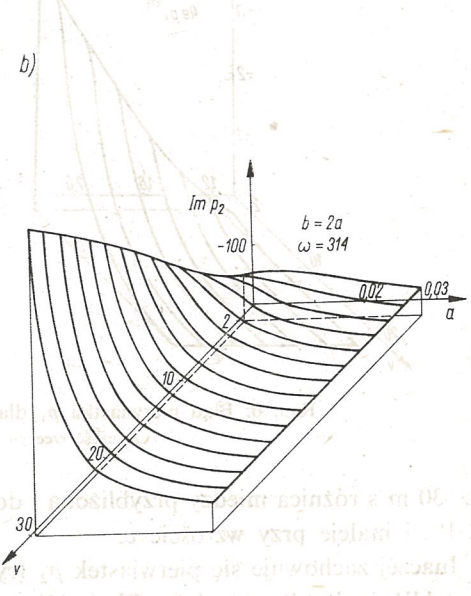


Rys. 2. Błąd części rzeczywistej pierwiastka przybliżonego p_1

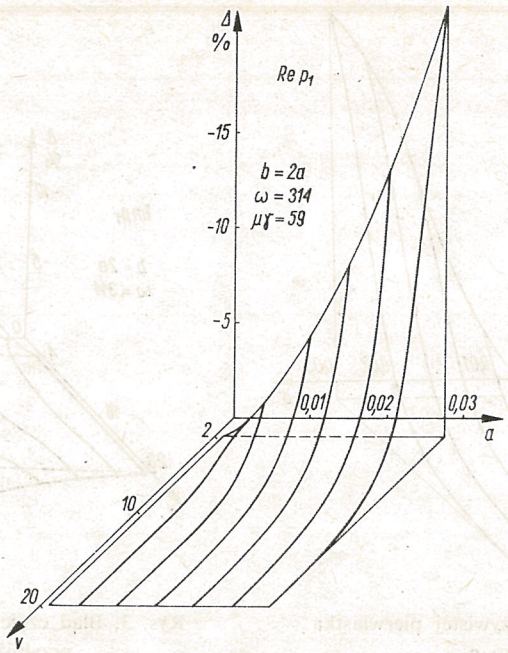


Rys. 3. Błąd części urojonej pierwiastka przybliżonego p_1

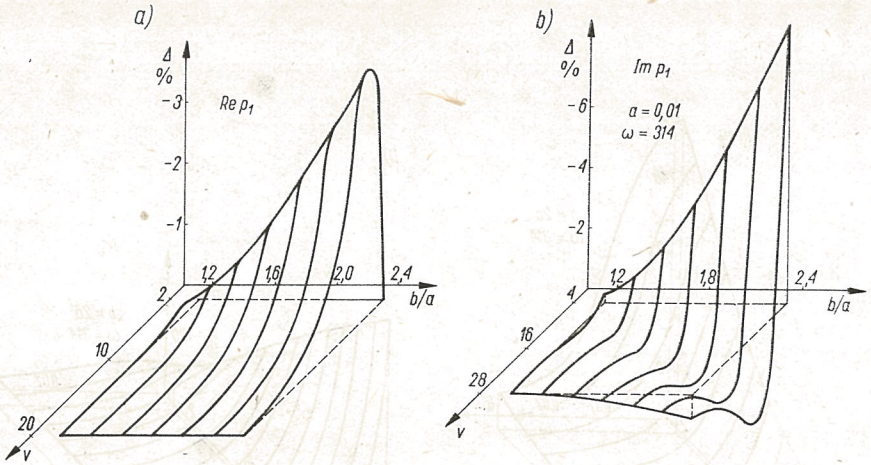




Rys. 4. Zależność pierwiastka p_2 od a i v
a) część rzeczywista, b) część urojona



Rys. 5. Błąd pierwiastka p_1 dla bieżni wykonanej z miedzi
a) część rzeczywista, b) część urojona



Rys. 6. Błąd pierwiastka p_1 dla silników o różnym stosunku b/a
a) część rzeczywista, b) część urojona

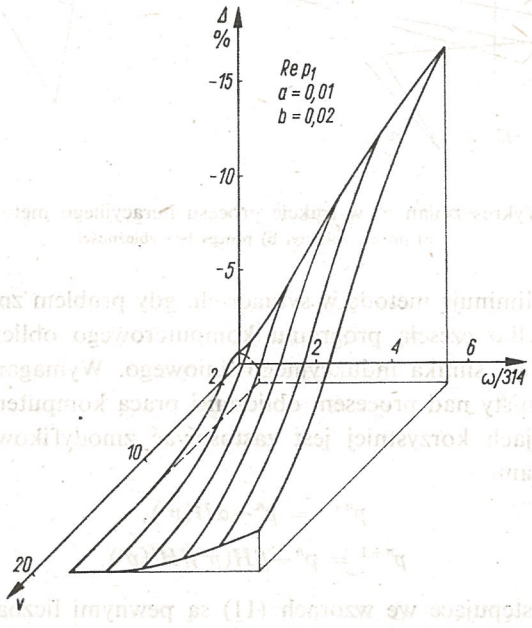
$v > 30$ m/s różnica między przybliżoną i dokładną wartością pierwiastka p_1 jest mniejsza od 1% i maleje przy wzroście v.

Inaczej zachowuje się pierwiastek p_2 (rys. 4). Różnica między wartościami: dokładną i przybliżoną jest bardzo duża. Błąd obliczony ze wzoru (10) osiągnąć może nawet wartość kilkuset procent. Wartość przybliżona p_{2p} jest zbliżona do wartości dokładnej p_{2d} dla

$a = 0{,}001$ m. Przy rosnącej grubości bieżni a część rzeczywista i urojona p_2 szybko maleje. Przybliżone wartości p_{2p} są więc użyteczne jedynie dla małych a.

Dla bieżni wykonanej z miedzi błąd Δ dla pierwiastka p_1 zachowuje się podobnie jak dla bieżni z aluminium (rys. 5) lecz dla takich samych v i a błąd Δ ma wartość większą.

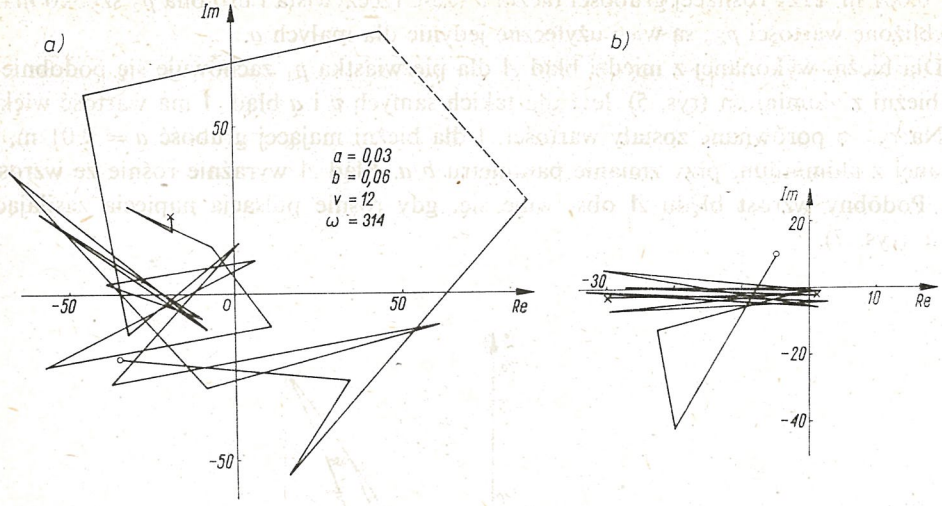
Na rys. 6 porównane zostały wartości Δ dla bieżni mającej grubość $a = 0.01$ m, wykonanej z aluminium, przy zmianie parametru b/a. Błąd Δ wyraźnie rośnie ze wzrostem b/a. Podobny wzrost błędu Δ obserwuje się, gdy rośnie pulsacja napięcia zasilającego silnik (rys. 7).



Rys. 7. Zależność błędu pierwiastka p_1 od pulsacji
a) część rzeczywista, b) część urojona

Proces iteracyjny (10) okazał się mało efektywny dla równania (6). Bardzo często w czasie obliczeń obserwowano brak zbieżności procesu iteracyjnego lub otrzymywano w wyniku nie najbliższy pierwiastek, a któryś dalszy, czasem leżący wręcz po przeciwnej stronie osi rzeczywistej. Aby to zobrazować, sporządzony został rys. 8, pokazujący jak zmienia się p^n w trakcie wykonywania obliczeń dla pewnych wartości parametrów a, b, v, ω i $\mu\gamma$ oraz różnych p^0. Proces pokazany na rys. 8a zaczyna się od wartości $p^0 = -35{,}0 \div 20{,}0$ i jest zbieżny, lecz wartości p^n zmieniają się bardzo silnie w trakcie obliczeń. Dopiero, gdy pewne p^n znajdzie się w bliskim otoczeniu rozwiązania dokładnego, zbieżność poprawia się i proces szybko się kończy.

Gdy $p^0 = (-10, 10)$, wtedy proces iteracyjny nie jest zbieżny. Po kilkunastu iteracjach kolejne wartości p^n ustalają się w dwóch punktach (zaznaczonych na wykresie krzyżykami) i oscylują między nimi.



Rys. 8. Wykres zmian p^n w trakcie procesu iteracyjnego metodą Newtona
a) proces zbieżny, b) proces bez zbieżności

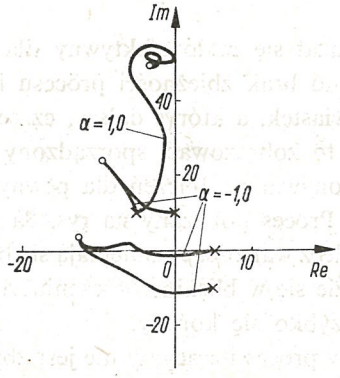
Powyższe wady eliminują metodę w sytuacjach, gdy problem znalezienia pierwiastków równania (6) jest tylko częścią programu komputerowego obliczającego pole elektromagnetyczne lub osiągi silnika indukcyjnego liniowego. Wymagany byłby bowiem osobisty nadzór programisty nad procesem obliczeń i pracą komputera.

W takich sytuacjach korzystniej jest zastosować zmodyfikowany proces iteracyjny określony zależnościami

$$p^{n+1} = p^n - \alpha H(p^n), \tag{11a}$$

$$p^{n+1} = p^n - \beta H(p^n)/H'(p^n). \tag{11b}$$

Parametry α i β występujące we wzorach (11) są pewnymi liczbami rzeczywistymi. Ich wartość nie jest z góry określona, lecz trzeba je dobrać metodą prób. Próby obliczeń wy-



Rys. 9. Przebieg zmodyfikowanego procesu iteracyjnego
x — przybliżenie zerowe, o — wynik

konane przez autorów tej pracy wskazują, że α i β powinny spełniać warunki

$$\alpha \leqslant 1{,}0,$$
$$\beta \leqslant 0{,}001.$$

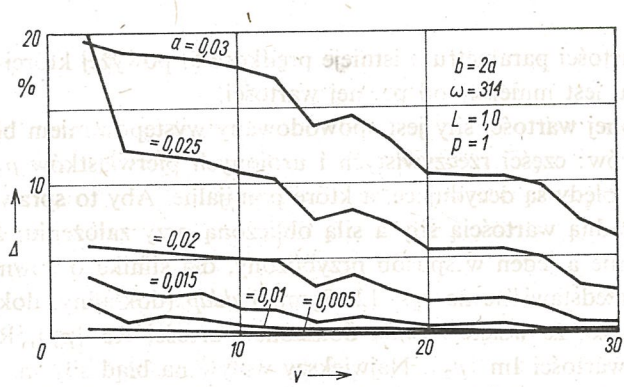
Rys. 9 pokazuje zmiany p'' w trakcie procesu iteracyjnego (11a). Widać, że obliczenia uległy znacznemu „uspokojeniu", dzięki czemu zmniejsza się niebezpieczeństwo otrzymania w wyniku obliczeń innego pierwiastka niż to było oczekiwane. Nie zaobserwowano też w żadnym przypadku takiego braku zbieżności jak poprzednio. Proces może być jednak rozbieżny, jeśli niewłaściwie przyjęty został znak α.

4. WPŁYW BŁĘDU W OKREŚLENIU PIERWIASTKÓW p_1 i p_2 NA OBLICZONĄ WARTOŚĆ POLA I SIŁY

Aby ocenić jaki jest wpływ błędu w określeniu pierwiastków równania (6) na charakterystyki silnika, obliczone zostały rozkłady potencjału wektorowego pola magnetycznego i siła ciągu dla dokładnej i przybliżonej wartości pierwiastków p_1 i p_2. Potencjał wektorowy pola magnetycznego był wyznaczany na powierzchni bieżni w obszarze pod uzwojeniem. Wykres maksymalnego błędu między wartością przybliżoną i dokładną

$$\Delta = \max_{x \in (0, L)} b(x),$$
$$b(x) = \frac{A_d(x) - A_p(x)}{A_d(x)} \, 100\%, \tag{12}$$

dla pierwiastków omówionych na rys. 2, 3 i 4 oraz dla silnika o parametrach $L = 1{,}0$ m, $\tau = 0{,}5$ m (jedna para biegunów, prędkość synchroniczna 50 m/s) przedstawiony został na rys. 10. Zgodnie z przewidywaniami błąd Δ zależy od a i v. Dla $a < 0{,}005$ m błąd jest



Rys. 10. Maksymalny błąd przybliżonej wartości potencjału wektorowego na powierzchni bieżni

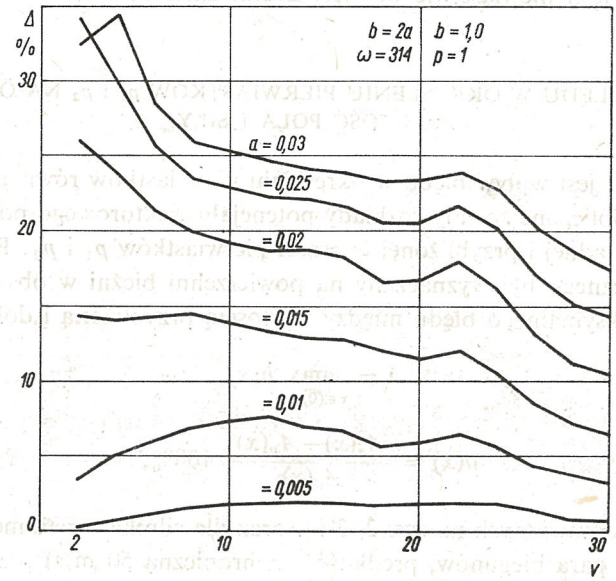
pomijalny w całym zakresie prędkości, rośnie przy a rosnącym oraz maleje dla dużych prędkości bieżni. Maksimum błędu występuje zawsze na krańcach silnika — na wejściu lub na wyjściu.

Podobnie przeprowadzone obliczenia dla siły ciągu przedstawia rys. 11

$$\Delta = \frac{F_I - F_p}{F_I} 100\%; \tag{13}$$

F_I — wartość siły ciągu przy założeniu, że uwzględnione zostały 2 pierwsze dokładne pierwiastki równania (6),

F_p — przybliżona wartość siły ciągu.



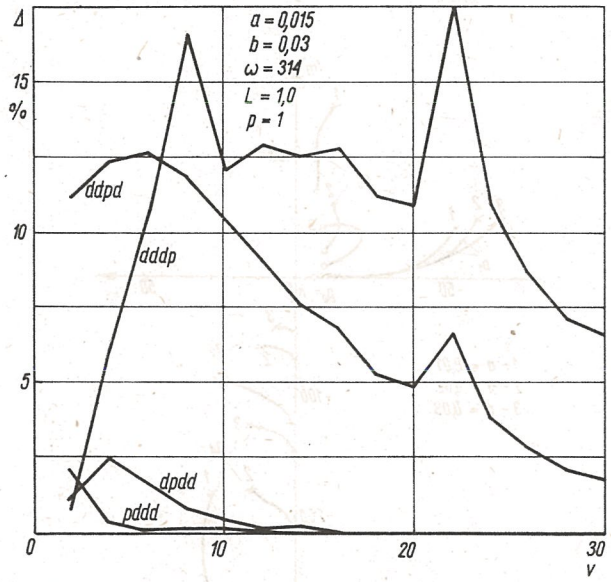
Rys. 11. Błąd przybliżonej wartości siły ciągu po uwzględnieniu dwóch pierwszych pierwiastków równania (6)

Dla każdej wartości parametru a istnieje prędkość v, powyżej której błąd przybliżonej wartości siły ciągu jest mniejszy od pewnej wartości.

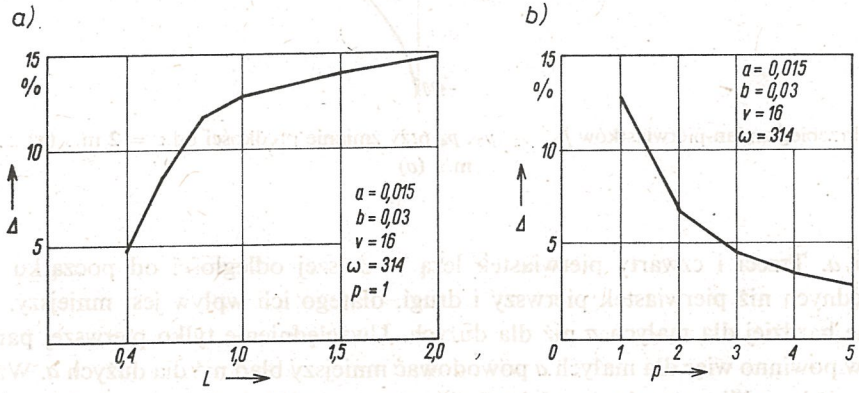
Błąd przybliżonej wartości siły jest spowodowany występowaniem błędu w określeniu czterech parametrów: części rzeczywistych i urojonych pierwiastków p_1 i p_2. Z rys. 11 nie wynika, które błędy są decydujące, a które pomijalne. Aby to sprawdzić, wyznaczono błąd między dokładną wartością siły a siłą obliczoną przy założeniu, że trzy parametry są zadane dokładnie a jeden w sposób przybliżony, dla silnika o pewnych parametrach. Wyniki zostały przedstawione na rys. 12. Symbol *dddp* (dokładny, dokładny, dokładny, przybliżony) oznacza, że wzięte zostały dokładne wartości Re $\{p_1\}$, Re $\{p_2\}$ i Im $\{p_1\}$ oraz przybliżone wartości Im $\{p_2\}$. Największy wpływ na błąd siły ma część rzeczywista i urojona pierwiastka p_2. Błąd spowodowany przybliżeniem pierwiastka p_1 jest znacznie mniejszy.

Wartości pierwiastków równania (6) nie zależą od długości uzwojenia silnika L oraz od podziałki biegunowej τ, a więc w konsekwencji od prędkości synchronicznej silnika. Zaprezentowane powyżej obliczenia dotyczyły tylko silnika o prędkości synchronicznej

$v_z = 50$ m/s i $2p = 2$. Wpływ p i L na błąd Δ przedstawia rys. 13. Zarówno długość silnika L jak i par biegunów p mają duży wpływ na wartość błędu Δ. Błąd ten jest mniejszy, jeśli mniejsza jest długość L i większa liczba par biegunów p, a więc dla silników o małej prędkości synchronicznej.



Rys. 12. Wpływ błędu obliczenia poszczególnych składników pierwiastków p_1 i p_2 na błąd siły

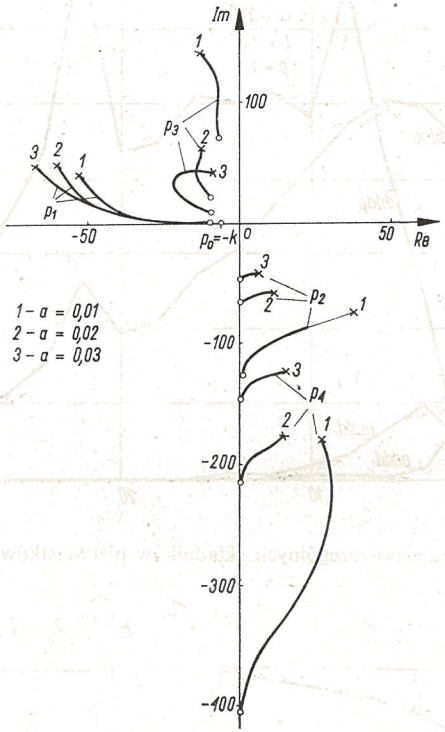


Rys. 13. Wpływ długości silnika i liczby par biegunów na błąd siły

5. UWZGLĘDNIENIE DALSZYCH PIERWIASTKÓW RÓWNANIA (6)

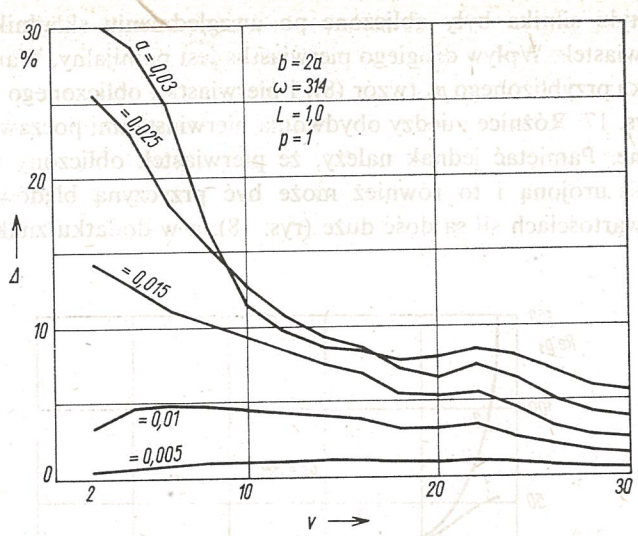
Równanie (6) ma nieskończenie dużą liczbę pierwiastków. Uwzględnienie tylko dwóch musi oczywiście powodować błędy. Wielkość tego błędu zostanie oszacowana przez obserwację wpływu jaki na obliczoną wartość siły mają składniki zawierające trzeci i czwarty

pierwiastek równania (6). Druga para pierwiastków wyznaczona była według procesu iteracyjnego (9) po założeniu pewnych, innych niż dla pierwszej pary, wartości początkowych. Na rys. 14 przedstawiono zakres zmian części rzeczywistej i urojonej czterech pierwszych pierwiastków przy zmianie prędkości od 2 m/s (x) do 30 m/s (0) dla różnych

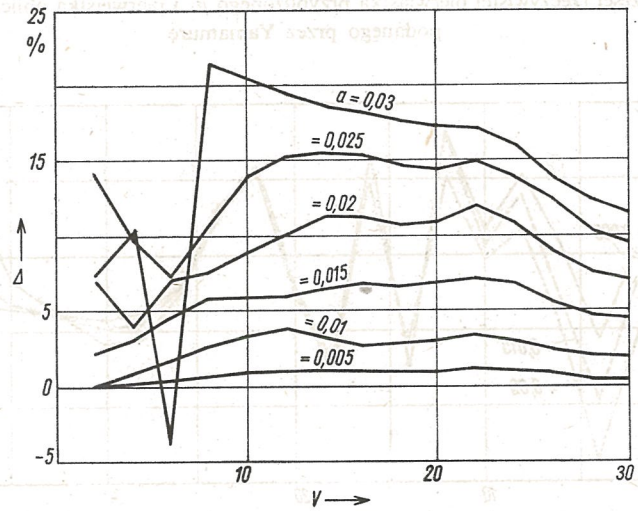


Rys. 14. Przebieg zmian pierwiastków p_1, p_2, p_3, p_4 przy zmianie prędkości od v = 2 m/s (x) do v = 30 m/s (o)

wartości a. Trzeci i czwarty pierwiastek leżą w dalszej odległości od początku układu współrzędnych niż pierwiastek pierwszy i drugi, dlatego ich wpływ jest mniejszy. Jest to widoczne bardziej dla małych a niż dla dużych. Uwzględnienie tylko pierwszej pary pierwiastków powinno więc dla małych a powodować mniejszy błąd niż dla dużych a. Względną różnicę między obliczonymi wartościami siły przy uwzględnieniu czterech i dwóch pierwiastków pokazuje rys. 15. Uwzględniając tylko dwa pierwiastki popełnia się błąd, który maleje przy wzroście prędkości, a rośnie przy zwiększaniu parametru a. Błąd ten jest szczególnie duży przy małych prędkościach v. W takim przypadku może się również zdarzyć, że wynik otrzymany po uwzględnieniu czterech pierwiastków jest bliższy wynikowi przybliżonemu niż dokładnemu, otrzymanemu po uwzględnieniu tylko dwóch pierwszych, dokładnych pierwiastków (rys. 16). Wyznaczanie dokładnych wartości pierwiastków równania (6) jest więc w takim przypadku niecelowe.



Rys. 15. Względna różnica między wartościami siły otrzymanymi po uwzględnieniu czterech i dwóch pierwiastków



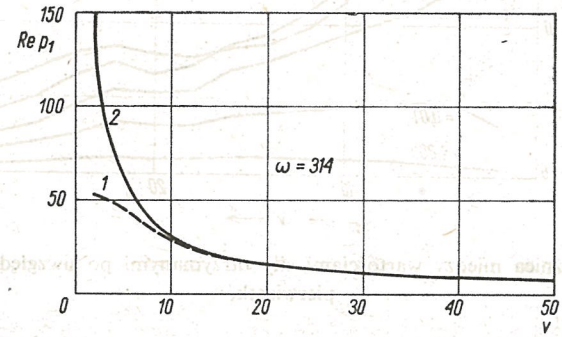
Rys. 16. Różnica między przybliżoną wartością siły i dokładną po uwzględnieniu czterech pierwiastków

6. ANALIZA DOKŁADNOŚCI OBLICZEŃ SIŁY CIĄGU WEDŁUG ZALEŻNOŚCI YAMAMURY [2]

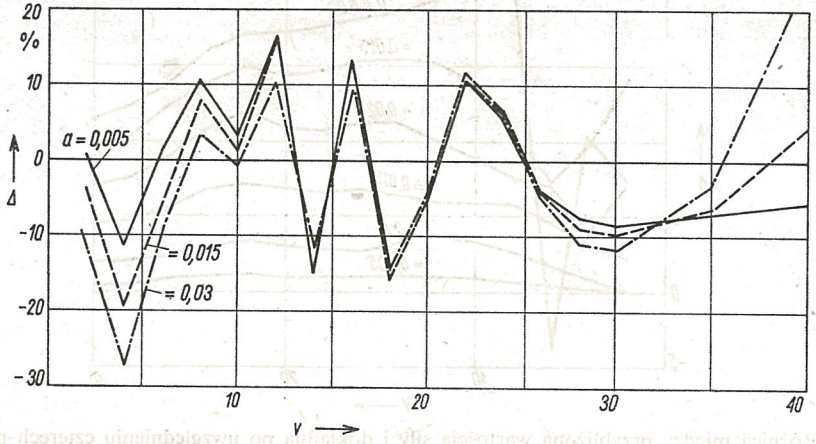
Yamamura [2] zastosował następujące przybliżenie do wyznaczenia pierwszego pierwiastka równania (6)

$$p_1 = \frac{\pi}{\tau(1-s)} = -\frac{100\pi}{v}. \tag{14}$$

Charakterystyki silnika były obliczone po uwzględnieniu składników zawierających jedynie ten pierwiastek. Wpływ drugiego pierwiastka jest pomijalny. Wartość części rzeczywistej pierwiastka przybliżonego p_1 (wzór (8)) i pierwiastka obliczonego według wzoru (14) są podane na rys. 17. Różnice między obydwoma pierwiastkami począwszy od $v = 14$ m/s są niezauważalne. Pamiętać jednak należy, że pierwiastek obliczony według wzoru (8) zawiera też część urojoną i to również może być przyczyną błędów. Dlatego różnice w obliczonych wartościach sił są dość duże (rys. 18), a w dodatku znak tej różnicy często



Rys. 17. Wykres części rzeczywistej pierwiastka przybliżonego p_1 i pierwiastka obliczonego według wzoru podanego przez Yamamurę

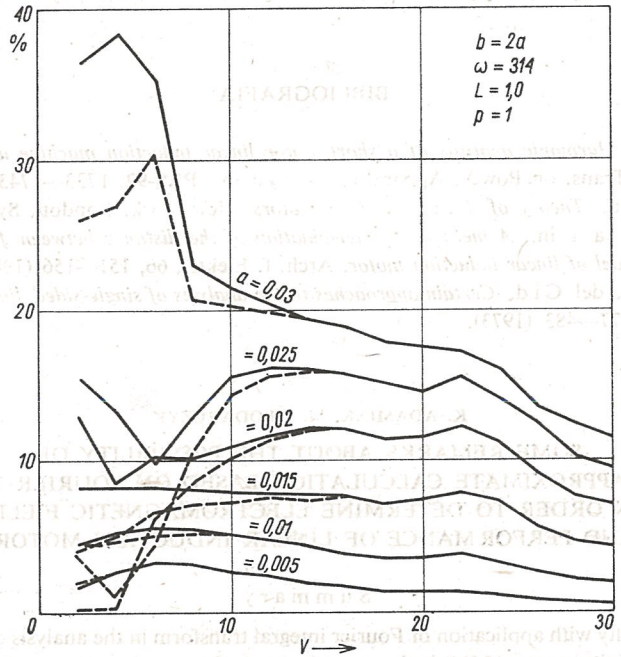


Rys. 18. Różnice między wartościami siły wyznaczonej dla pierwiastka według wzoru (8) i według wzoru (14)

się zmienia. Trudno wobec tego nawet oszacować możliwą wartość błędu dla założonych parametrów silnika. Dla dużych prędkości v różnice między obydwoma wartościami sił maleją. Rozbieżności jakie występują na wykresie dla $v = 40$ m/s spowodowane są tym, że charakterystyki siły przechodzą przez wartość $F = 0$. Niewielkie różnice bezwzględne są wtedy przyczyną dużych różnic względnych.

Nasuwa się pytanie, czy nie warto byłoby stosować wzorów zawierających tylko pierwszy pierwiastek, obliczony w sposób przybliżony lub dokładny. Błąd między dokładną

wartością sił i przybliżoną uzyskaną po uwzględnieniu tylko pierwszego pierwiastka przedstawia rys. 19. Pominięcie wpływu drugiego pierwiastka obliczonego w sposób przybliżony nie powoduje istotnych błędów i dlatego metoda jest dopuszczalna biorąc pod uwagę



Rys. 19. Błąd między wartością siły obliczonej po uwzględnieniu czterech dokładnych pierwiastków i wartością przybliżoną po uwzględnieniu jednego (dokładnego lub przybliżonego) pierwiastka

pewne uproszczenie obliczeń. Jeśli jednak drugi pierwiastek jest obliczany w sposób dokładny, to jego opuszczenie jest przyczyną dość poważnych błędów, z wyjątkiem przypadku, gdy prędkość jest mała ($v \leqslant 6$ m/s).

7. WNIOSKI

Uproszczone wzory do obliczeń pola i osiągów silników liniowych otrzymane po przybliżonym rozwiązaniu równania (6) i uwzględnieniu tylko pierwszej pary pierwiastków nie powoduje istotnych błędów, jeśli szczelina ma małą grubość lub prędkość silnika jest duża. W pozostałych przypadkach konieczne jest obliczenie dokładnej wartości pierwszej pary pierwiastków. Dla dużych szczelin i małych prędkości duży wpływ mają też człony zawierające dalsze pierwiastki równania (6).

Porównując metodę całki i szeregów Fouriera ustalić można następujące obszary zastosowań obu metod. W obszarze I (małe a lub duże v) korzystniejsza jest metoda całki Fouriera. Wystarcza bowiem zastosować przybliżone wartości tylko pierwszej pary pierwiastków równania (6). Dzięki temu końcowy wzór opisujący pole lub osiągi jest

bardzo prosty. Metoda szeregów Fouriera daje w takim przypadku wyniki opisywane sumami wolnozbieżnymi.

W obszarze II (duże a i małe v) metoda całki Fouriera jest mało korzystna, ponieważ należy uwzględnić kilka dokładnych pierwiastków. Metoda szeregów Fouriera jest wtedy korzystniejsza. Szeregi opisujące rozwiązanie są w obszarze II szybciej zbieżne.

BIBLIOGRAFIA

1. G. G. North, *Harmonic analysis of a short stator linear induction machine using a transformation technique*, IEEE Trans. on Power, Apparatus and Systems, PAS-92, 1733—1743 (1973).
2. S. Yamamura, *Theory of linear induction motors*, New York, London, Sydney, Toronto 1972.
3. E. A. Mendrela i in., *A method of determination of the distance between fictitions primaries in computational model of linear induction motor*, Arch. f. Elektr., 66, 151—156 (1983).
4. S. A. Nasar, L. del Cid, *Certain approaches to the analysis of single-sided linear induction motors*, Proc. IEE 120, 477—483 (1973).

K. ADAMIAK, M. WŁODARCZYK

SOME REMARKS ABOUT THE POSSIBILITY OF APPLYING APPROXIMATE CALCULATION BASED ON FOURIER TRANSFORM IN ORDER TO DETERMINE ELECTROMAGNETIC FIELDS AND PERFORMANCE OF LINEAR INDUCTION MOTORS

Summary

The main difficulty with application of Fourier integral transform in the analysis of the electromagnetic field in a linear induction motor (*LIM*) is the necessity to perform an inverse transformation. The residue theorem, usually applied for this purpose, requires that the roots of a certain complex non-linear equation have to be found. As they cannot be computed directly, results of an approximate calculation are normally offered in their place. Accuracy evaluation of the approximate roots is endeavored in the paper, and the influence of errors in determination of roots value on the calculated magnetic vector potential and motor thrust is studied.

K. ADAMIAK, M. WŁODARCZYK

QUELQUES REMARQUES SUR LA POSSIBILITÉ DE L'APPLICATION DES CALCULS APPROXIMATIFS À LA DÉTERMINATION DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE ET DES CARACTÉRISTIQUES DU MOTEUR À INDUCTION LINÉAIRE PAR MÉTHODE INTÉGRAL DE LA TRANSFORMATION DE FOURIER

Résumé

La principale difficulté à laquelle on se heurte dans l'application de la transformation de Fourier à l'analyse du champ électromegnétique d'un moteur à induction linéaire (*LIM*) est l'obtention de la transformation réciproque. Dans la méthodc des résidue, appliquée d'habitude, il est indispensable de trouver des racines d'une équation non linéaire de la variable complexe. Ces racines sont souvent calculées par mode approximatif. Dans l'étude on a estimé l'exactitude des racines approximatives et on a examiné l'influence de l'erreur dans la détermination des racines sur la valeur obtenue par des calculs du potentiel vectoriel du champ magnétique et sur la valeur de la force réactive d'un moteur linéaire à induction.

K. ADAMIAK, M. WŁODARCZYK

EINIGE BEMERKUNGEN ZUR ANWENDUNGSMÖGLICHKEIT ANGENÄHERTER BERECHNUNGEN BEI BESTIMMUNG EINES ELEKTROMAGNETISCHEN FELDES UND DER CHARAKTERISTIKEN EINES LINEAREN INDUKTIONSMOTORS MITTELS DER METHODE INTEGRIERTER FOURIER-TRANSFORMATION

Zusammenfassung

Die Grundschwierigkeit bei Anwendung der integrierten Fourier-Transformation zur Analyse eines elektromagnetischen Feldes bei einem linearen Induktionsmotor (*LIM*) besteht in der Durchführung einer inversen Transformation. Die meist angewandte Residualmethode benötigt nämlich, daß Wurzeln einer unlinearen Gleichung einer komplexen Variablen gewonnen werden. Diese Wurzeln werden of annährend berechnet. Im obigen Artikel wurde die Genauigkeit der angenäherten Wurzelwerte eingeschätzt sowie der Einfluß des Fehlers bei der Wurzelberechnung auf den errechneten Potentialwert des vektoriellen Magnetfeldes und der Schubkraft eines linearen Induktionsmotors untersucht.

К. АДАМЯК, М. ВЛОДАРЧИК

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ РАСЧЕТОВ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ХАРАКТЕРИСТИК АСИНХРОННОГО ЛИНЕЙНОГО ДВИГАТЕЛЯ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Резюме

Главным затруднением при применении интегрального преобразования Фуръе к анализу электромагнитного поля в асинхронном линейном двигателе является проведение обротной трансформации. Применяемый обычно метод вычета тебует однако определения корней некоторого нелинейного уравнения комплексной переменной. Часто эти кории вычисляютая приблизительными методами. Проведена оценка точности приближенных корней и исследовано влияние ошибки определения корней на вычисленное значение векторного потенциала магнитного поля и силы тяги асинхронного линейного электродвигателя.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1985, 31, z. 2, ss. 373—403

621.313.13

Silniki elektryczne o dwóch stopniach swobody mechanicznej

ERNEST A. MENDRELA (KIELCE)

Instytut Elektrotechniki Politechniki Świętokrzyskiej

GRZEGORZ KAMIŃSKI (WARSZAWA)

Instytut Maszyn Elektrycznych Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 2.2.1984

W artykule przedstawiono przeglądowo prace z zakresu silników o dwóch stopniach swobody mechanicznej prowadzone w kraju i za granicą ze szczególnym uwzględnieniem tych pierwszych. We wstępie, uwzględniając strukturę geometryczną, wyszczególniono trzy grupy maszyn: silniki płaskie typu *X-Y*, silniki o strukturze cylindrycznej — obrotowo-liniowe oraz silniki kuliste, podając schematycznie ich przykładową konstrukcję. Następnie, na przykładzie wyidealizowanego silnika o nieskończonych wymiarach przedstawiono elementy teorii silnika indukcyjnego o dwóch stopniach swobody mechanicznej. W drugiej części artykułu omówiono zagadnienia konstrukcyjne i przedstawiono własności elektromechaniczne wykonanych w metalu modeli silników.

1. WPROWADZENIE

Silniki elektryczne o jednym stopniu swobody mechanicznej to najszerzej stosowane maszyny zarówno w układach napędu elektrycznego jak i w układach automatyki jako silniki wykonawcze. W przeważającej części spotykane w tej grupie silniki posiadają strukturę geometryczną cylindryczną (maszyny wirujące i liniowe tubowe) i płaską (silniki liniowe płaskie). Silniki te są używane jako napęd nie tylko w mechanizmach, w których napędzany element wykonuje ruch prosty, lecz również tam, gdzie występują ruch złożony wiertarki, obrabiarki, rejestratory *X-Y*, urządzenia przewijakowe, mieszadła, żyroskopy. W tym drugim przypadku złożony ruch napędzanego elementu uzyskuje się przez zastosowanie odpowiedniej przekładni mechanicznej lub użycie większej liczby silników. Zastosowanie jednego silnika bez użycia przekładni jest możliwe, o ile silnik ten charakteryzuje się więcej niż jednym stopniem swobody mechanicznej.

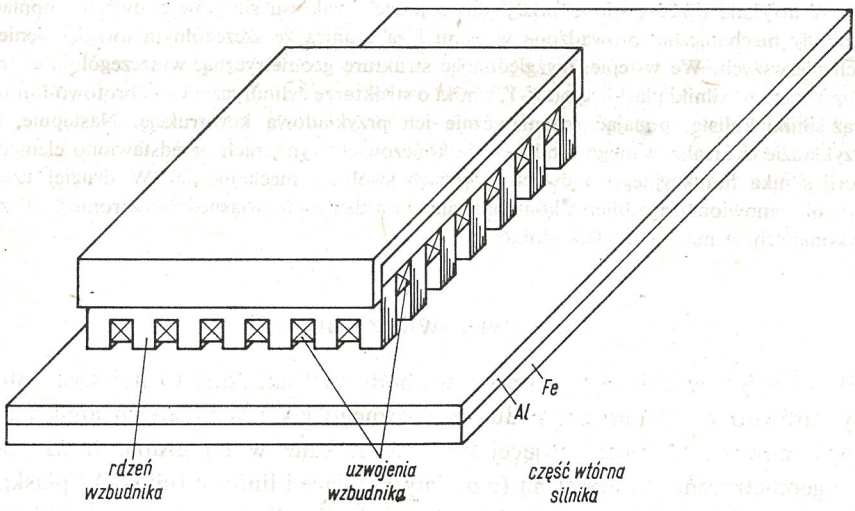
Przedmiotem niniejszego artykułu są silniki elektryczne o dwóch stopniach swobody mechanicznej (SoDSSM). Zasadniczą cechą tych silników, która zarazem definiuje tę grupę maszyn, jest możliwość wykonywania przez część ruchomą ruchu, którego kierunek zmienny w czasie pracy określony jest dwiema współrzędnymi przestrzennymi.

Biorąc pod uwagę strukturę geometryczną, SoDSSM można podzielić na:
— silniki liniowe typu *X-Y* — struktura płaska,
— silniki kuliste — struktura sferyczna,
— silniki obrotowo-liniowe — struktura cylindryczna.

Wśród spotykanych odmian w zakresie wymienionych struktur są prawie wyłącznie silniki indukcyjne z nieuzwojoną częścią wtórną oraz silniki reluktancyjne w wersji silników synchronicznych lub skokowych.

W przypadku silników indukcyjnych o dwóch stopniach swobody mechanicznej SIoDSSM złożony ruch części wtórnej uzyskuje się poprzez wytworzenie siły elektromagnetycznej o zmiennym kierunku działania. Siłę taką mogą wytworzyć dwa pola magnetyczne o krzyżujących się ze sobą kierunkach poruszania, lub jedno pole o zmiennym kierunku ruchu. Dwa pola magnetyczne można wytworzyć dwoma niezależnie od siebie zasilanymi uzwojeniami, które mogą znajdować się w dwu oddzielnych wzbudnikach lub w jednym wzbudniku, umieszczając je jedno nad drugim.

Przykładem drugiego rozwiązania w wersji silnika indukcyjnego płaskiego *X-Y* jest konstrukcja pokazana schematycznie na rys. 1 [1]. Część pierwotna silnika wyposażona

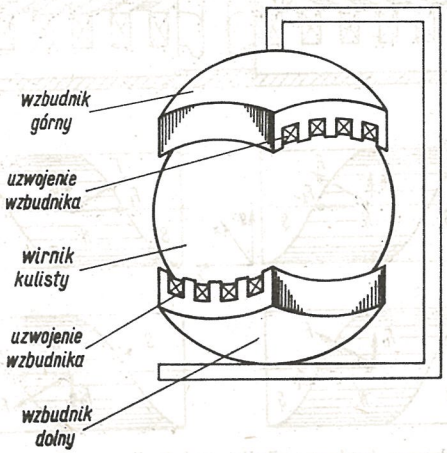


Rys. 1. Schemat budowy płaskiego silnika indukcyjnego *X-Y* [1]

jest w dwa niezależne od siebie uzwojenia trójfazowe umieszczone w prostopadłych do siebie żłobkach. Część wtórną stanowi dwuwarstwowy układ z blachą miedzianą lub aluminiową w górnej i z blachą żelazną w dolnej części. Wytworzone przez uzwojenia pola biegnące współdziałające z indukowanymi w części wtórnej prądami dają siły skierowane do siebie prostopadle. Regulując wartości tych sił przez zmianę warunków zasilania zmienia się siłę wypadkową zarówno co do wartości jak i zwrotu, co wpływa na zmianę kierunku poruszania się silnika.

Jak już wspomniano, dwa uzwojenia mogą być umieszczone w dwu oddzielnych wzbud-

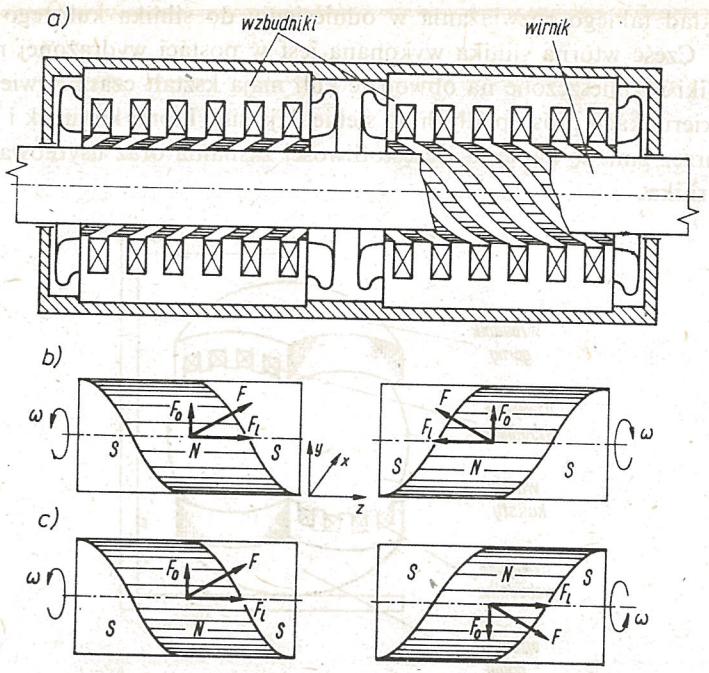
nikach. Przykład takiego rozwiązania w odniesieniu do silnika kulistego pokazany jest na rys. 2 [2]. Część wtórna silnika wykonana jest w postaci wydrążonej metalowej kuli. Dwa wzbudniki rozmieszczone na obwodzie kuli mają kształt czasz. Dwie siły działające na wirnik w kierunkach prostopadłych do siebie dają siłę, której kierunek i wartość można zmieniać poprzez zmianę napięcia i częstotliwości zasilania oraz usytuowanie wzbudnika względem wirnika.



Rys. 2. Schemat budowy silnika indukcyjnego kulistego [2]

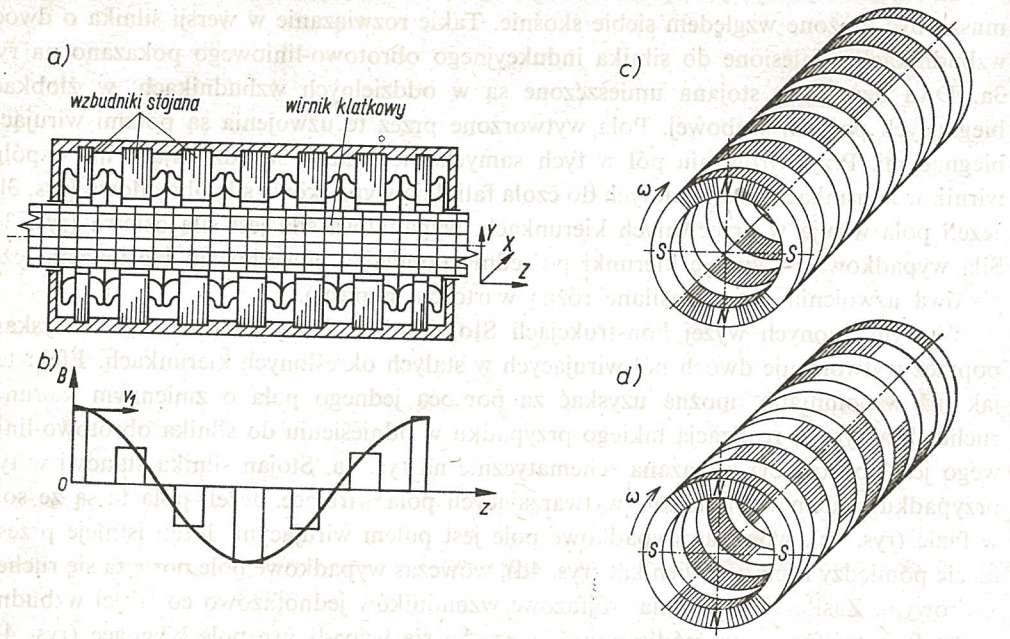
Uzwojenia wytwarzające pola niekoniecznie muszą być do siebie prostopadłe, lecz muszą być ułożone względem siebie skośnie. Takie rozwiązanie w wersji silnika o dwóch wzbudnikach odniesione do silnika indukcyjnego obrotowo-liniowego pokazano na rys. 3a. Dwa uzwojenia stojana umieszczone są w oddzielnych wzbudnikach, w żłobkach biegnących po linii śrubowej. Pola wytworzone przez te uzwojenia są polami wirująco-biegnącymi. Przy wirowaniu pól w tych samych kierunkach siły działające na wspólny wirnik w kierunkach prostopadłych do czoła fali dają wypadkową siłę obwodową (rys. 3b). Jeżeli pola wirują w przeciwnych kierunkach, wypadkowa siła jest siłą osiową (rys. 3c). Siła wypadkowa przyjmuje kierunki pośrednie pomiędzy obwodowym i osiowym, jeżeli obydwa uzwojenia będą zasilane różną wartością napięcia.

W wymienionych wyżej konstrukcjach SIoDSSM zmienny kierunek siły uzyskano poprzez wytworzenie dwóch pól wirujących w stałych określonych kierunkach. Efekt ten, jak już wspomniano, można uzyskać za pomocą jednego pola o zmiennym kierunku ruchu. Praktyczną realizacją takiego przypadku w odniesieniu do silnika obrotowo-liniowego jest konstrukcja pokazana schematycznie na rys. 4a. Stojan silnika stanowi w tym przypadku siedem wzbudników wytwarzających pola wirujące. Jeżeli pola te są ze sobą w fazie (rys. 4c), wówczas wypadkowe pole jest polem wirującym. Jeżeli istnieje przesunięcie pomiędzy nimi o pewien kąt (rys. 4d), wówczas wypadkowe pole porusza się ruchem śrubowym. Zasilając uzwojenia trójfazowe wzbudników jednofazowo co trzeci wzbudnik różną fazą trójfazowego źródła napięcia uzyska się wypadkowe pole biegnące (rys. 4b). Przesunięcie pól można uzyskać mechanicznie poprzez obrót wzbudników, lub elektrycznie poprzez odpowiedni układ połączeń uzwojeń wzbudników.



Rys. 3. Schemat budowy silnika indukcyjnego obrotowo-liniowego

a) silnik dwuwzbudnikowy o śrubowo ułożonych uzwojeniach, b) powstawanie siły obwodowej, c) powstawanie siły osiowej

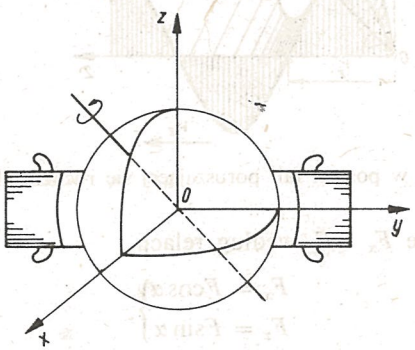


Rys 4. Schemat budowy silnika indukcyjnego obrotowo-liniowego

a) wytwarzającego pole wirująco-biegnące z wirnikiem klatkowym, b) wytwarzanie pola biegnącego, c) wytwarzanie pola wirującego, d) powstawanie pola wirująco-biegnącego

Wirniki wszystkich wersji indukcyjnych SoDSSM mogą być wykonane z materiałów jednorodnych jedno lub wielowarstwowych, lub w formie wirnika klatkowego. W tym drugim przypadku klatka przypomina siatkę nałożoną na powierzchnię wirnika (rys. 4a).

W literaturze [4, 5] w odniesieniu do silników kulistych używa się też nazwy „silniki o trzech stopniach swobody mechanicznej". Nazwę tę przyjęto z uwagi na możliwość wirowania kulistego wirnika w osi o zmiennym położeniu określonym trzema współ-



Rys. 5. Silnik kulisty we współrzędnych prostokątnych [5]

rzędnymi x, y, z (rys. 5). Według przyjętej tutaj definicji silniki takie wchodzą w klasę silników o dwóch stopniach swobody, gdyż ruch wirnika określony jest dwiema współrzędnymi sferycznymi φ i Θ.

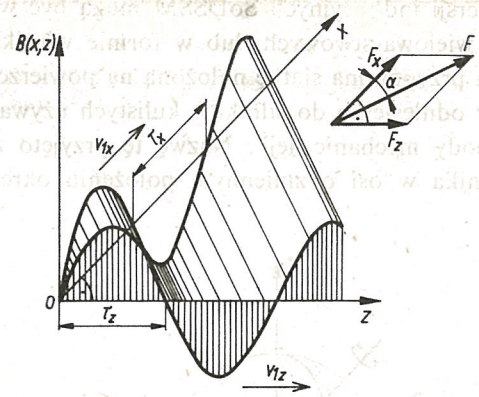
Ruch prosty pola i części wtórnej względem tylko jednej współrzędnej można rozpatrywać jako szczególny przypadek ruchu złożonego określonego dwiema współrzędnymi przestrzennymi. Z tego też względu w następnym rozdziale omówiona zostanie krótko teoria silnika indukcyjnego o polu magnetycznym poruszającym się podobnie jak część wtórna ruchem złożonym. W trzecim rozdziale omówione zostaną praktyczne rozwiązania konstrukcyjne SoDSSM wraz z podaniem ich charakterystyk elektromechanicznych.

2. ZARYS TEORII SILNIKA INDUKCYJNEGO O DWÓCH STOPNIACH SWOBODY MECHANICZNEJ

Przedmiotem niniejszych rozważań niech będzie silnik indukcyjny o nieskończonych wymiarach, którego pole magnetyczne w szczelinie w postaci fali porusza się w kierunku pośrednim pomiędzy dwiema współrzędnymi przestrzennymi x, z (rys. 6). Ilustracją takiego silnika może być silnik płaski nieskończenie długi i szeroki o skośnym uzwojeniu lub nieskończenie długi silnik obrotowo-liniowy o uzwojeniu skręconym, jak to ma jeden z tworników silnika pokazany na rys. 3. Pole takiego silnika opisuje funkcja

$$B_y = B_{ym} \exp j \left[\omega t - \frac{\pi}{\tau_x} x - \frac{\pi}{\tau_z} z \right]. \tag{1}$$

Wytworzone w części wtórnej prądy, o kierunku równoległym do czoła fali, dają w wyniku oddziaływania z polem siłę F skierowaną prostopadle do czoła fali (rys. 6). Siłę tę można



Rys. 6. Pole w postaci fali poruszającej się ruchem złożonym [17]

rozłożyć na dwie składowe F_x i F_z według relacji

$$\left.\begin{aligned} F_x &= F\cos\alpha \\ F_z &= F\sin\alpha \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

$$\frac{F_x}{F_z} = \operatorname{ctg}\alpha. \tag{3}$$

Ponieważ z rys. 6 wynika

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\tau_z}{\tau_x}, \tag{4}$$

zatem stosunek

$$\frac{F_x}{F_z} = \frac{\tau_z}{\tau_x} \tag{5}$$

jest wartością stałą, niezależną od warunków zasilania i obciążenia silnika.

Ruch silnika wywołany siłą elektromagnetyczną F odbywa się w kierunku przemieszczania się fali. Parametry ruchu zależą od obciążenia silnika. Ogólnie, prędkość części wtórnej zmienia się w trakcie pracy tak co do modułu jak i kierunku. Poślizg części wtórnej musi zatem uwzględniać te dwie zmiany. Podobnie jak w teorii klasycznych silników, poślizg można zdefiniować wzorem (rys. 7)

$$s_{xz} \overset{\text{df}}{=} \frac{v_{1n} - v_n}{v_{1n}}, \tag{6}$$

gdzie v_{1n} i v_n są odpowiednio prędkościami pola i części wtórnej na kierunku normalnym do czoła fali. Na rys. 7 widać, że wartość prędkości silnika poruszającego się synchronicznie z polem będzie zależała od jego kierunku ruchu. I tak, prędkości synchroniczne w kierunkach osi x i z równe prędkościom fazowym pola w tych osiach

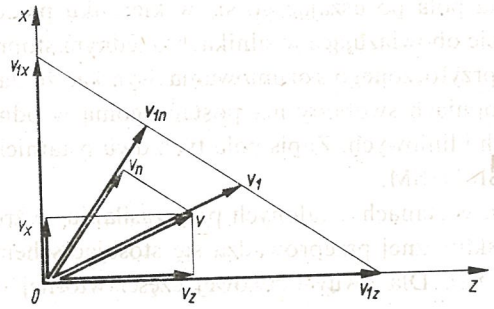
$$v_{1x} = 2\tau_x f \quad \text{i} \quad v_{1z} = 2\tau_z f \tag{7}$$

są różne od prędkości synchronicznej na kierunku rozchodzenia się fali równej v_{1n}. We wzorze (6) prędkości części wtórnej v odniesiono do kierunku propagacji fali, gdzie jest

ona równa v_{1n}, gdyż składowa styczna do czoła fali v_{1t} w przypadku rozważanego tutaj silnika o nieskończonych wymiarach twornika nie wpływa na parametry ruchowe maszyny.

Biorąc pod uwagę relacje zachodzące pomiędzy prędkościami (rys. 7) otrzymuje się po przekształceniach trygonometrycznych zależność (7)

$$s_{xz} = 1 - \frac{v_x}{v_{1x}} - \frac{v_z}{v_{1z}}. \tag{8}$$



Rys. 7. Objaśnienie do wzoru (6) na poślizg przy ruchu złożonym części wtórnej

Taką samą relację (8) otrzymuje się wychodząc ze wzoru

$$s_{xz} \overset{\text{df}}{=} \frac{v_1 - v}{v_1}. \tag{9}$$

Poślizg s_{xz} jest zatem funkcją dwu składowych prędkości części wtórnej v_x i v_z. W przypadku gdy jedna z nich jest równa zeru (np. gdy zablokowany zostanie jeden z kierunków ruchu), wzór (8) przyjmuje postać znaną z teorii silników liniowych i obrotowych. Jeżeli praca silnika odbywa się przy stałej wartości poślizgu, jedna ze składowych prędkości części wtórnej zależy liniowo od drugiej. Przykładowo, dla silnika w wersji synchronicznej (np. silnika reluktancyjnego), kiedy $s_{xz} = 0$, zachodzi relacja

$$v_x = \frac{\tau_x}{\tau_z} v_{1z} - v_z. \tag{10}$$

Odnosząc to np. do silnika obrotowo-liniowego, zmniejszenie prędkości osiowej v_z, np. wymuszone ze strony obciążenia, powoduje zwiększenie prędkości obwodowej v_x i odwrotnie. Zachodzi więc oddziaływanie jednej prędkości z drugą, co może być wykorzystane np. w układach automatyki.

Patrząc na rys. 6 można zauważyć, że przy zmianie kierunku poruszania się fali, gdy jej długość pozostaje niezmieniona, zmianie ulegają podziałki biegunowe τ_x i τ_z. W przypadku obrotu fali w kierunku osi x, podziałka τ_x ulega zmniejszeniu, natomiast τ_z — zwiększeniu. Gdy fala przyjmie kierunek poruszania się zgodny z kierunkiem osi x, wówczas podziałka τ_x jest równa połowie długości fali, a podziałka τ_z jest równa nieskończoności. Podstawiając do funkcji (1) $\tau_z = \infty$, zapis pola wyrażony dwiema współrzędnymi przestrzennymi przechodzi w zapis pola silników konwencjonalnych

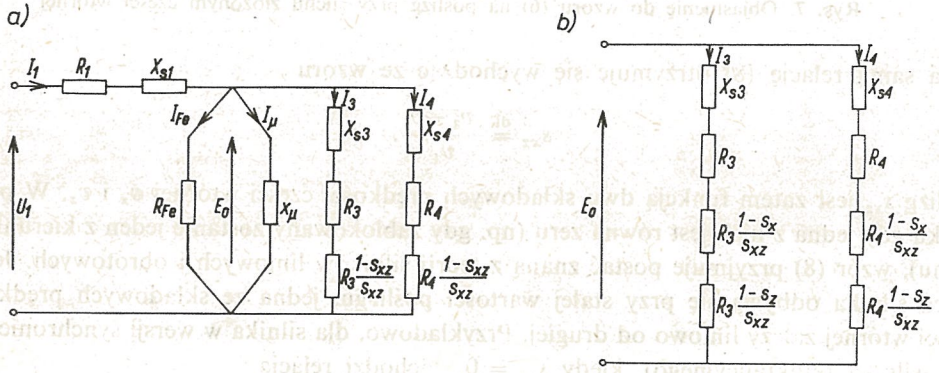
$$B_y = B_{ym} \exp j\left[\omega t - \frac{\pi}{\tau_x} x\right]. \tag{11}$$

Z uwagi na to, że prędkość pola w kierunku osi z jest wtedy równa $v_{1z} = \infty$ (wzór (7)), poślizg części wtórnej przyjmuje postać

$$s_{xz} = 1 - \frac{v_x}{v_{1x}}. \tag{12}$$

Składowa siły $F_z = F_x \frac{\tau_x}{\tau_z}$ po wstawieniu $\tau_z = \infty$ jest równa zeru. Podobnie wszystkie relacje obowiązujące dla pola poruszającego się w kierunku pośrednim pomiędzy osiami x i z przechodzą w relacje obowiązujące w silnikach o jednym stopniu swobody mechanicznej, jeżeli $\tau_x = \infty$. Z przytoczonego rozumowania wynika, że zapis matematyczny pola dla silnika o dwóch stopniach swobody ma postać ogólną w odniesieniu do zapisu pola dla silników obrotowych i liniowych. Zapis pola tych dwu ostatnich jest szczególnym przypadkiem zapisu pola SIoDSSM.

Analizę pracy silnika w stanach ustalonych przy zasilaniu ze źródła napięcia przemiennego o stałej wartości skutecznej przeprowadza się stosując schemat maszyny o parametrach skupionych (rys. 8a). Dla dwuwarstwowej części wtórnej obwód reprezentowany



Rys. 8. Schemat zastępczy

a) silnika indukcyjnego o dwóch stopniach swobody mechanicznej z dwuwarstwową częścią wtórną [35], b) część wtórna z wyodrębnionymi rezystancjami odpowiadającymi mocom mechanicznym ruchu względem osi x i z [35]

jest przez dwie gałęzie. Parametry R i X_s tych gałęzi oblicza się z parametrów pola elektromagnetycznego [8] wyzaczonych uprzednio z równań Maxwella dla pola o ruchu złożonym [9]. Z uwagi na zjawisko naskórkowości, parametry te są funkcjami poślizgu.

Występujące w schemacie silnika (rys. 8a) rezystancje $R_3 \frac{1-s_{xz}}{s_{xz}}$ i $R_4 \frac{1-s_{xz}}{s_{xz}}$ odpowiadają mocy mechanicznej ruchu złożonego. Moc ta jest sumą mocy mechanicznej ruchu prostego w kierunku osi x i z

$$P_{mxz} = P_{mx} + P_{mz} = mI^2R\frac{1-s_{xz}}{s_{xz}}. \tag{13}$$

Korzystając ze wzoru (8) i przyjmując oznaczenia

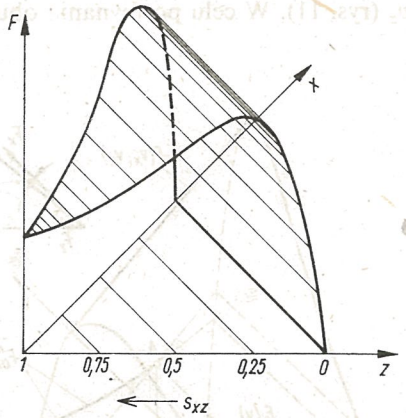
$$s_x = 1 - \frac{v_x}{v_{1x}} \quad \text{i} \quad s_z = 1 - \frac{v_z}{v_{1z}}, \tag{14}$$

zależność (13) można przedstawić w postaci

$$P_{mx}+P_{mz}=mI^2R\frac{1-s_x}{s_{xz}}+mI^2R\frac{1-s_z}{s_{xz}}. \tag{15}$$

Gałęzie obwodu zastępczego wirnika po dokonanym rozdzieleniu mocy mechanicznej pokazane są na rys. 8b.

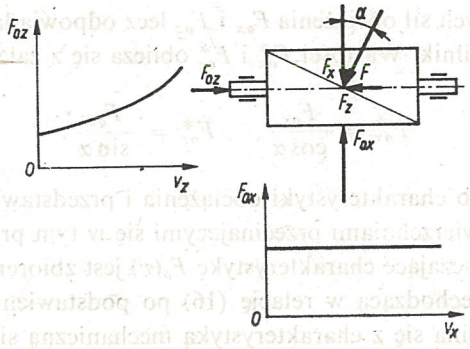
Z uwagi na możliwość pracy przy różnych kierunkach ruchu wirnika określonych płaszczyzną x, z charakterystyki elektromechaniczne silnika, rysowane w funkcji poślizgu s_{xz} lub prędkości składowych v_x i v_z, mają kształt powierzchni a nie krzywych jak w sil-



Rys. 9. Charakterystyka siły w funcji poślizgu ruchu złożonego części wtórnej [16]

nikach o jednym stopniu swobody mechanicznej. Przykładowo na rys. 9 pokazano charakterystykę siły F w funkcji poślizgu.

Praca ustalona silnika z obciążeniem, zależy od charakterystyk mechanicznych elementów takiego zespołu. W przypadku rozważanego tutaj silnika, punkt pracy ustalonej zespołu na charakterystykach mechanicznych, będzie funkcją prędkości v_x i v_z. Określenie takiego punktu zostanie przedstawione na przykładzie SIOL. Analizując ten problem zakłada się obciążenie silnika dwiema maszynami, niezależnie na kierunku ruchu osiowego i obrotowego wirnika, których charakterystyki mechaniczne $F_{ox}=f(v_x)$ i $F_{oz}=f(v_z)$ pokazane są na rys. 10. Stan ustalony zespołu występuje wówczas, kiedy wypadkowa siła

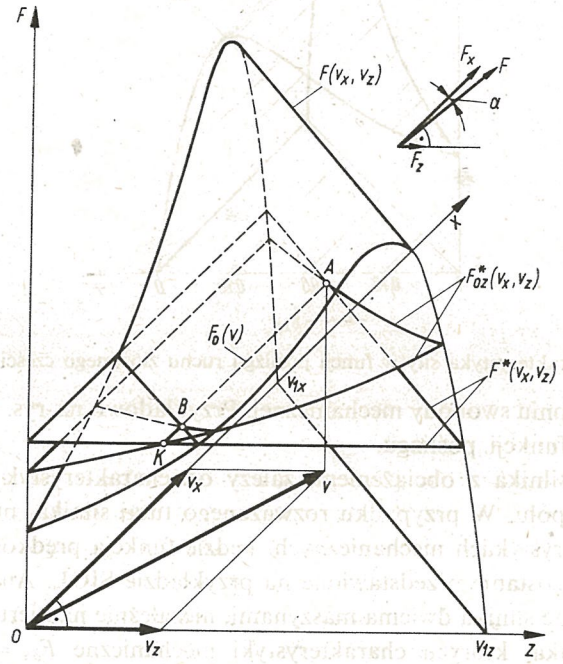


Rys. 10. Charakterystyki obciążenia SoDSSM

obciążająca jest równa co do wartości i kierunku, lecz przeciwna co do zwrotu sile elektromagnetycznej silnika. Kierunek działania wypadkowej siły obciążającej jest zgodny z kierunkiem siły rozwijanej przez silnik, jeśli pomiędzy siłami składowymi zachodzi relacja

$$\frac{F_x}{F_z} = \frac{F_{ox}}{F_{oz}} = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\tau_z}{\tau_x}. \tag{16}$$

Chcąc na charakterystykach obciążenia wyznaczyć graficznie punkt pracy, w którym spełniona jest powyższa relacja, obydwie charakterystyki rysuje się na wspólnym wykresie w funkcji składowych v_x i v_z (rys. 11). W celu porównania obu charakterystyk w wykresie



Rys. 11. Określenie punktu pracy zespołu maszyn SIoDSSM i obciążenia [17]

nie rysuje się rzeczywistych sił obciążenia F_{ox} i F_{oz} lecz odpowiadające im siły na kierunku siły F rozwijanej przez silnik. Wartości F^*_{ox} i F^*_{oz} oblicza się z zależności

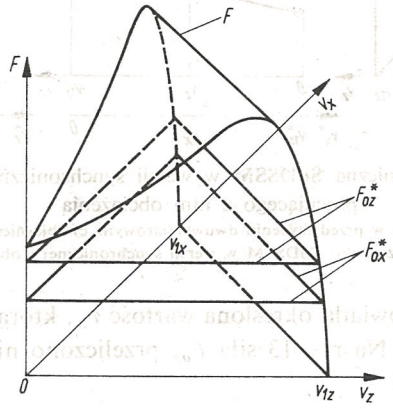
$$F^*_{ox} = \frac{F_{ox}}{\cos\alpha}, \qquad F^*_{oz} = \frac{F_{oz}}{\sin\alpha}. \tag{17}$$

Przeliczone w ten sposób charakterystyki obciążenia i przedstawione w funkcji prędkości v_x i v_z na rys. 11 są powierzchniami przecinającymi się w tym przypadku wzdłuż odcinka KA. Przecięcie to, wyznaczające charakterystykę $F_o(v)$ jest zbiorem punktów spełniających równość $F_{ox} = F_{oz}$, przechodzącą w relację (16) po podstawieniu (17). Otrzymana charakterystyka $F_o(v)$ przecina się z charakterystyką mechaniczną silnika w punktach A i B, gdzie zachodzi stan równowagi układu. Taki stan równowagi statycznej nie zawsze jest

możliwy do osiągnięcia. Ma to miejsce wtedy, gdy obie charakterystyki obciążenia F_{ox} i F_{oz} nie przecinają się ze sobą, np. gdy są do siebie równoległe (rys. 12).

W celu sprawdzenia, czy wyznaczone punkty A i B równowagi układu odpowiadają pracy stabilnej, można dla istniejącego tutaj przypadku

$$\frac{dF_{ox}}{dv_x} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{dF_{oz}}{dv_z} > 0$$



Rys. 12. Przykład braku możliwości osiągnięcia pracy stabilnej zespołu SIoDSSM wraz z obciążeniem

stosować znane z teorii maszyn wirujących kryterium stabilności statycznej, określone nierównością

$$\frac{dF(v)}{dv} < \frac{dF_o(v)}{dv}. \tag{18}$$

W myśl tego kryterium, punkt A na rys. 11 jest punktem pracy stabilnej, natomiast punkt B jest punktem pracy niestabilnej układu.

W przypadku SOL w wersji synchronicznej, jeżeli praca odbywała się na stabilnej części charakterystyki kątowej, punkt pracy zespołu maszyn: silnik i obciążenie leży na płaszczyźnie przechodzącej przez prostą poślizgu $s_{xz} = 0$ (rys. 13a). To samo można przedstawić na wykresie dwuwymiarowym, jak to ilustruje rys. 13b. Na rysunku tym na wspólnej osi odniesiono dwie prędkości. Jest to możliwe, gdyż dla poślizgu $s_{xz} = 0$ ze wzoru (8) otrzymuje się

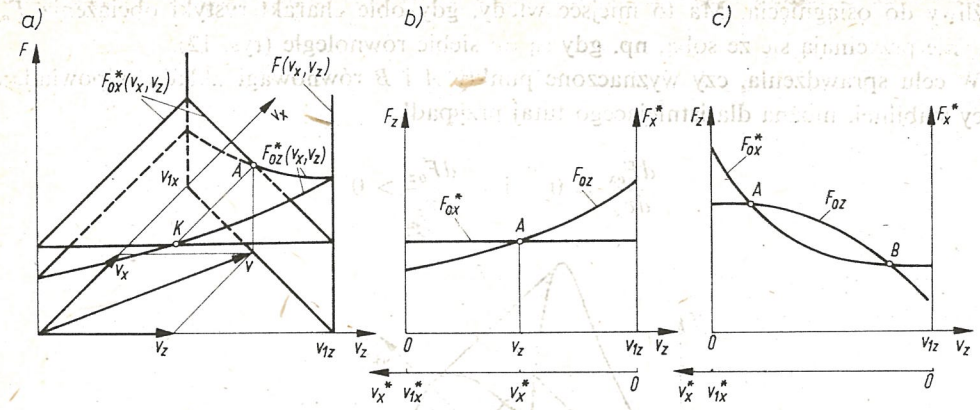
$$\frac{v_x}{v_{1x}} = 1 - \frac{v_z}{v_{1z}}. \tag{19}$$

Oznaczając

$$v_x = v_x \frac{\tau_z}{\tau_x}, \tag{20}$$

ze wzoru (19) otrzymuje się zależność

$$v_x = v_{1z} - v_z, \tag{21}$$



Rys. 13. Charakterystyka mechaniczna SoDSSM w wersji synchronicznej oraz charakterystyki współpracującego z nim obciążenia

a) w przedstawieniu trójwymiarowym, b) w przedstawieniu dwuwymiarowym, c) objaśnienie do określenia warunku stabilności statycznej zespołu: SoDSSM w wersji synchronicznej i obciążenia

czyli każdej wartości v_z odpowiada określona wartość v_x, która jest przeliczoną na stronę prędkości v_z prędkością v_x. Na rys. 13 siłę F_{ox} przeliczono nie na stronę siły F, lecz je składowej F_z, według relacji

$$F_{ox}^* = F_{ox}\frac{\tau_x}{\tau_z} \tag{22}$$

wynikającej z zależności (5).

W celu określenia warunków pracy stabilnej silnika synchronicznego niech będą dane charakterystyki obciążenia jak na rys. 13c, przecinające się w dwu punktach A i B. Rozważając pracę w punkcie A można zauważyć, że jest to punkt pracy stabilnej. Praca zespołu maszyn powróci do pierwotnego stanu w punkcie A po zaniknięciu uprzednio wprowadzonego zaburzenia. Punkt B jest punktem pracy niestabilnej. Z rys. 13c można określić następująco sformułowany warunek stabilności statycznej

$$\frac{\mathrm{d}F_{oz}}{dv_z} > \frac{dF_{ox}^*}{dv_z}, \tag{23}$$

lub po wstawieniu (21) do (23)

$$\frac{dF_{oz}}{dv_z} > -\frac{dF_{ox}^*}{dv_x^*}, \tag{24}$$

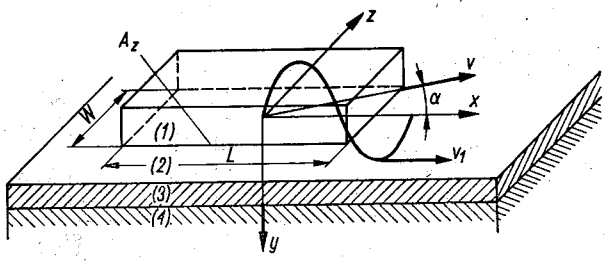
który muszą spełniać obie charakterystyki obciążenia. Nierówność (24) po przekształceniu przyjmuje postać

$$\frac{dF_{oz}}{dv_z} + \left(\frac{\tau_x}{\tau_z}\right)^2 \frac{dF_{ox}}{dv_x} > 0. \tag{25}$$

Charakterystyki obciążenia pokazane na rys. 11 spełniają powyższą nierówność.

Dotychczasowe rozważania dotyczyły silnika o nieskończonych wymiarach wzbudnika i części wtórnej. W praktycznych rozwiązaniach SIoDSSM, skończone wymiary wzbud-

nika będą przyczyną efektów brzegowych, mających przy dużych prędkościach istotny wpływ na własności elektromechaniczne silnika. Metody uwzględniania tych zjawisk w obliczaniu pola elektromagnetycznego i charakterystyk elektromechanicznych są liczne i należą do nich tak metody numeryczne [10], [11] jak i analityczne [12], [13]. Do tych drugich należy również metoda szeregu Fouriera, która pozwala w prosty sposób zaadoptować analizę przeprowadzoną dla silnika o nieskończonych wymiarach. Metodę tę za-



Rys. 14. Model obliczeniowy SIoDSSM uwzględniający skończone wymiary wzbudnika [17]

stosowano do analizy SIOL o dwóch wzbudnikach w pracach [7], [14]. Dla zilustrowania praktycznego zastosowania tej metody do rozważań wzięto silnik o skończonej szerokości i długości wzbudnika (rys. 14). Uzwojenie wzbudnika w przyjętym modelu zostało sprowadzone do nieskończenie cienkiej warstwy prądowej, przylegającej do gładkiej powierzchni wzbudnika o okładzie prądowym określonym funkcją

$$A_z = A_{zm} \exp j\left[\omega t - \frac{\pi}{\tau_x} x\right]. \tag{26}$$

Część wtórna porusza się względem wzbudnika z prędkością v w kierunku tworzącym z kierunkiem poruszania się pola kąt α. Uwzględniając skończone wymiary warstwy prądowej, okład prądowy zapisany podwójnym szeregiem Fouriera przyjmuje postać

$$A_z = \sum_k \sum_l A_{zmkl} \exp j\left[\omega t - \frac{\pi}{\tau_x} x\right] \cos\left[k \frac{\pi}{\tau_{sx}} x\right] \cos\left[l \frac{\pi}{\tau_{sz}} z\right]; \tag{27}$$

kl-tą harmoniczną można przedstawić za pomocą czterech fal poruszających się ruchem złożonym. Zatem funkcja (27) przyjmuje postać

$$A_z = \sum_u \sum_p \sum_k \sum_l \frac{1}{4} A_{zmkl} \exp j\left[\omega t - \frac{\pi}{\tau_{xku}} x - \frac{\pi}{\tau_{zlp}} z\right], \tag{28}$$

gdzie:

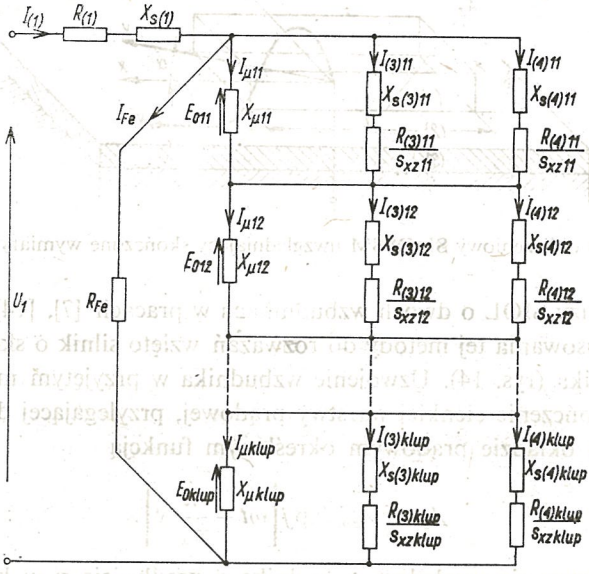
$$A_{zmkl} = \frac{16}{\pi^2 kl} \sin\left(k \frac{\pi L}{2\tau_{sx}}\right) \sin\left(l \frac{\pi W}{2\tau_{sz}}\right) A_{zm}, \tag{29}$$

$$\tau_{xku} = \frac{1}{\dfrac{1}{\tau_x} + \dfrac{ku}{\tau_{sx}}}, \quad \tau_{zlp} = \frac{\tau_{sz}}{lp}, \tag{30}$$

przy czym k, $l = 1, 3, 5, 7, \ldots$, a $u, p = 1, -1$.

W powyższych wzorach τ_{sx} i τ_{sz} są podziałkami w modelu przyjętym dla metody szeregu Fouriera [15], a L i W długością i szerokością wzbudnika.

Silnik o okładzie prądowym zapisanym funkcją (28) można traktować jako szereg silników harmonicznych o dwóch stopniach swobody mechanicznej o różnej licznie par biegunów i sztywno sprzężonych wirnikach. Analizę pracy takiego silnika wieloharmonicznego można przeprowadzić bazując na schemacie zastępczym pokazanym na rys. 15.



Rys. 15. Schemat zastępczy SIoDSSM uwzględniający skończone wymiary wzbudnika [35]

Na podstawie tej metody przeprowadzono analizę pracy następujących silników: SIOL o dwóch wzbudnikach [7], [14], SIOL z polem wirująco-biegnącym [16], SIOL dwuuzwojeniowego [17] i silnika o wirniku kulistym [18] przy uwzględnieniu efektów skończonych wymiarów wzbudników.

3. WŁASNOŚCI ELEKTROMECHANICZNE SoDSSM

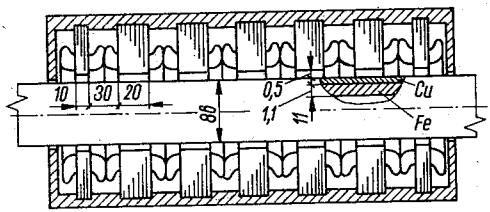
Wśród wykonanych w metalu SoDSSM jedne z nich powstały z myślą o zastosowaniu jako napęd dla określonego mechanizmu, inne zrobiono w celu eksperymentalnego określenia własności mechanicznych i na tej podstawie zaprononowano użycie ich jako napędu w niektórych urządzeniach. Zatem, te drugie nie wyszły poza etap wstępnych prac laboratoryjnych. W rozdziale tym przedstawione zostaną własności elektromechaniczne niektórych wykonanych SoDSSM takich, które reprezentują daną wersję konstrukcyjną z podanych we wstępie rozwiązań. Nie wszystkie możliwe typy konstrukcyjne będą omówione, ponieważ niektóre z nich nie zostały wykonane. Wśród prezentowanych tutaj rozwiązań są silniki obrotowo-liniowe i kuliste.

3.1. Silniki obrotowo-liniowe

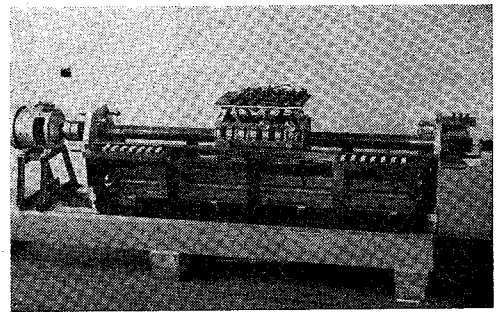
W tej grupie maszyn można wyróżnić silniki obrotowo-liniowe: 1) z polem wirująco-biegnącym, 2) dwuwzbudnikowe i 3) dwuuzwojeniowe.

3.1.1. *SOL z polem wirująco-biegnącym*

Budowa takiego silnika pokazana jest na rys. 4a. Silnik taki wykonano w celach badawczych w Instytucie Elektrotechniki Politechniki Świętokrzyskiej w wersji indukcyjnej i reluktancyjnej. Główne wymiary silnika pokazano na rys. 16. Wykonany model na stanowisku pomiarowym przedstawia rys. 17. Na stanowisku tym, opisanym szczegółowo



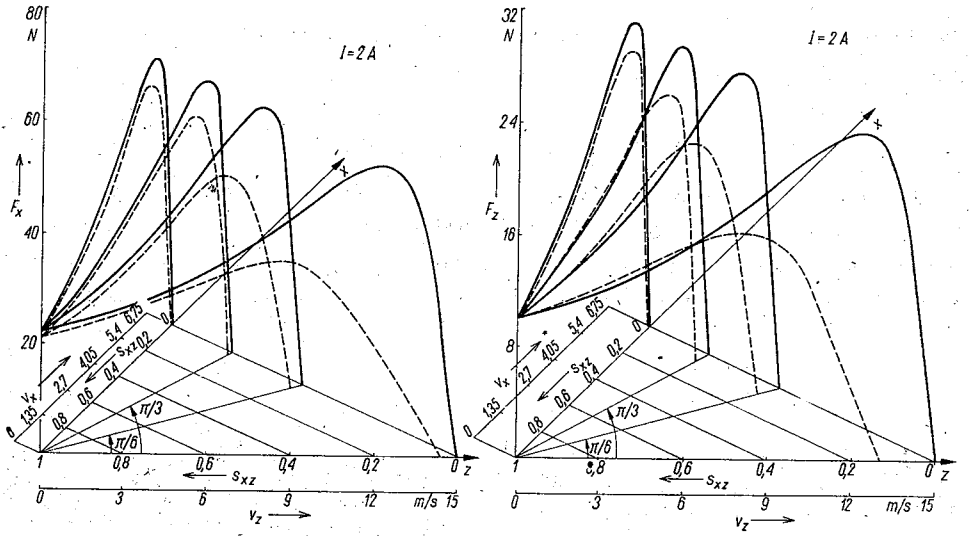
Rys. 16. Główne wymiary modelu SIOL z polem wirująco-biegnącym [16]



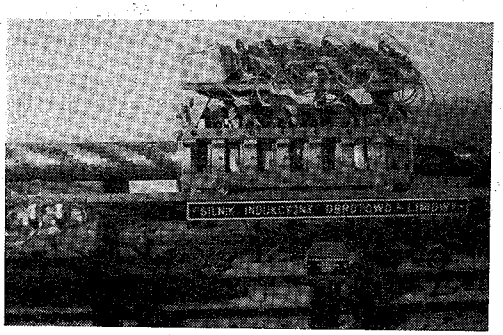
Rys. 17. Model SIOL z polem wirująco-biegnącym o ruchomych wzbudnikach [19]

w [19], wirnik o długości 2 m miał możliwość wykonywania tylko ruchu obrotowego, a stojan — liniowego z możliwością oscylacji. Wirnik badanego modelu był obciążany prądnicą wirującą a stojan induktorami silnika liniowego, których pole oddziaływało na płytę miedzianą podwieszoną do dolnej części stojana. Określone przesunięcie pól wirujących wzbudników uzyskiwano elektrycznie przez zmianę układu połączeń uzwojeń wzbudników i mechanicznie przez obrót wzbudników. Ten pierwszy sposób pozwalał na skokową zmianę obrotu co 60°. Mechanicznie można było uzyskać dowolne przesunięcie. Ta zmiana przesunięcia fazowego pól powodowała zmianę skrętu linii śrubowej biegunów, czyli zmianę wartości podziałki osiowej τ_z przy niezmienionej podziałce obwodowej τ_x. Stąd zmianie ulegała prędkość synchroniczna v_{1z} i stosunek $\frac{F_x}{F_z}$. Na rys. 18 przedstawiono przykładowo charakterystyki mechaniczne silnika obliczone dla sił składowych: obwodowej F_x i osiowej F_z z uwzględnieniem i bez uwzględnienia zjawisk krańcowych skończonej długości stojana przy stałej wartości prądu stojana i kącie przesunięcia pól sąsiednich wzbudników równym 60° [16]. Z wykresów można zauważyć wpływ zjawisk krańcowych, które powodują znaczne osłabienie siły przy dużych prędkościach liniowych. Ponieważ w praktyce prędkości te będą nieduże, wpływ zjawisk krańcowych jest nieznaczny.

Synchroniczna odmiana silnika z wirnikiem reluktancyjnym pokazana jest na rys. 19. Wirnik tego silnika składa się ze stalowego dwumetrowego trzpienia i nałożonych nań pierścieni z wydatnymi czterema biegunami. Obracając pierścieniami można uzyskać



Rys. 18. Charakterystyki mechaniczne SIOL z polem wirująco-biegnącym liczone przy uwzględnieniu (— — —) i bez uwzględnienia (—) zjawisk krańcowych
a) siła obwodowa, b) siła osiowa [16]



Rys. 19. Model SOL z polem wirująco-biegnącym z wirnikiem reluktancyjnym [17]

żądaną wartość osiowej podziałki biegunowej τ_z. Badania przeprowadzone na tym silniku pozwoliły na zademonstrowanie wzajemnej liniowej zależności prędkości obrotowej i liniowej przy stałym poślizgu w myśl relacji (8). Relacja ta w tym przypadku, przy $s_{xz} = 0$, przybiera formę

$$v_z = \frac{v_{z1}}{n_1}(n_1 - n). \tag{31}$$

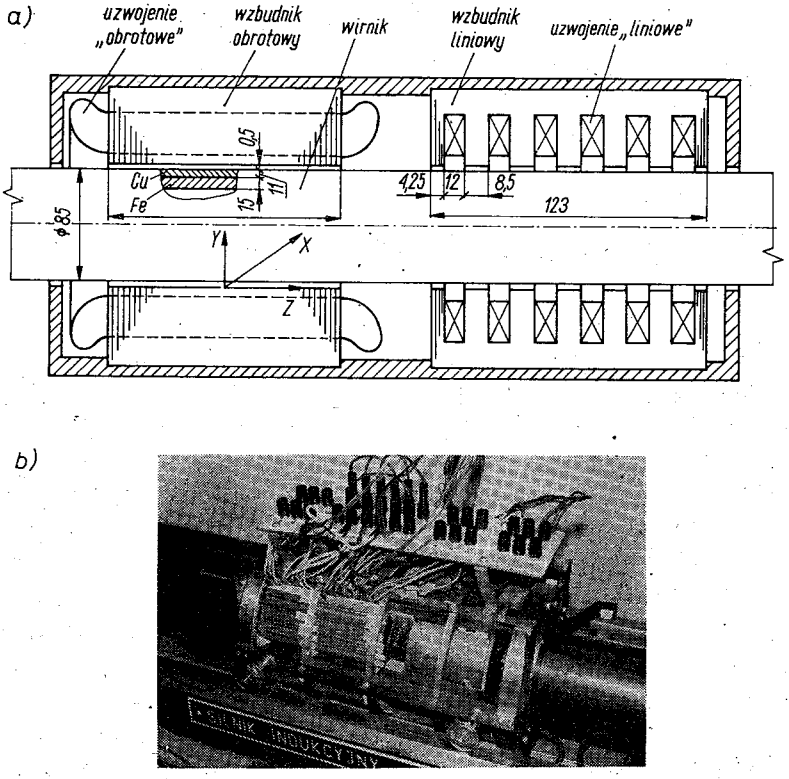
Doświadczenie przeprowadzono na pokazanym na rys. 17 stanowisku, na którym stojan miał możliwość ruchu liniowego, a wirnik — obrotowego. W czasie eksperymentu, wirnik poruszając się synchronicznie z polem, napędzany był z zewnątrz z prędkością obrotową raz powyżej, drugi raz poniżej wartości synchronicznej n_1. Zmiany te wywoływały oscylacyjny ruch liniowy stojana w myśl relacji (31). Sprzężenie obu prędkości za pomocą

swego rodzaju przekładni magnetycznej może być cenną cechą, która może być wykorzystana w niektórych układach automatyki.

Pole wirująco-biegnące można również uzyskać za pomocą wzbudników z polem biegnącym rozmieszczonych symetrycznie na obwodzie wirnika wzdłuż jego osi. Tego typu konstrukcja silnika jest przedmiotem pracy [6], [20], gdzie przedstawiono charakterystyki elektromechaniczne eksperymentalne i teoretyczne, obliczone bez uwzględnienia zjawisk krańcowych.

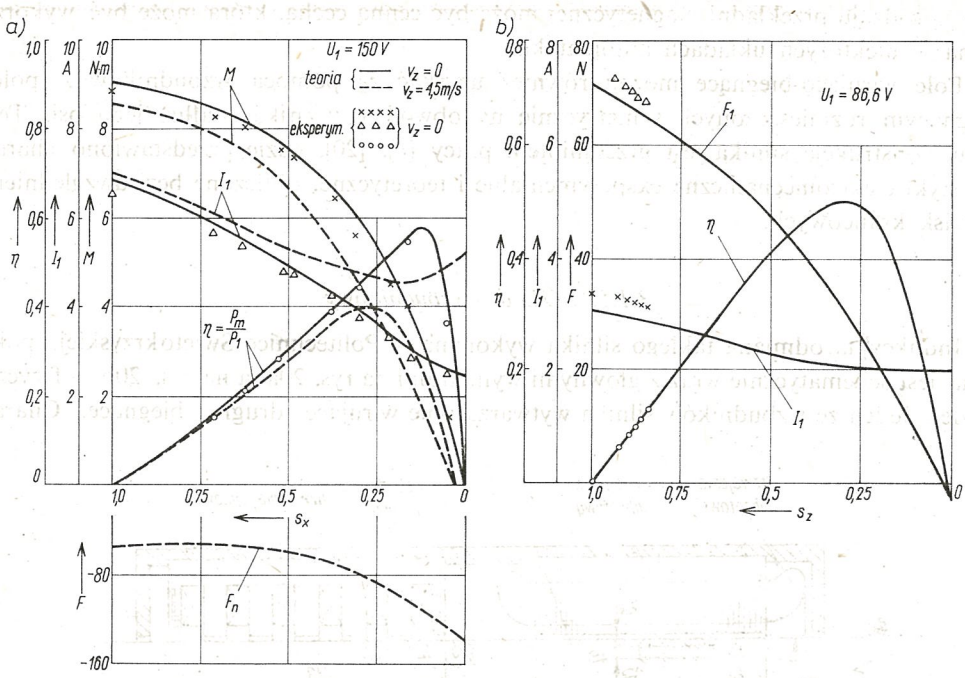
3.1.2. SOL dwuwzbudnikowy

Indukcyjna odmiana takiego silnika wykonana w Politechnice Świętokrzyskiej, pokazana jest schematycznie wraz z głównymi wymiarami na rys. 20a, a na rys. 20b — fizyczny model. Jeden ze wzbudników silnika wytwarza pole wirujące, drugi — biegnące. Charak-



Rys. 20. Model SIOL o dwu wzbudnikach
a) schemat budowy wraz z głównymi wymiarami, b) model silnika [7]

terystyki mechaniczne silnika przy zasilaniu ze źródła prądowego przedstawiono w [7], a rozkłady pola magnetycznego, sił i strat w wirniku zamieszczono w [14]. Tutaj, na rys. 21a i b przytoczone są wybrane charakterystyki elektromechaniczne obu wzbudników, obliczone przy zasilaniu ze źródła napięciowego przy użyciu przedstawionego na rys. 15



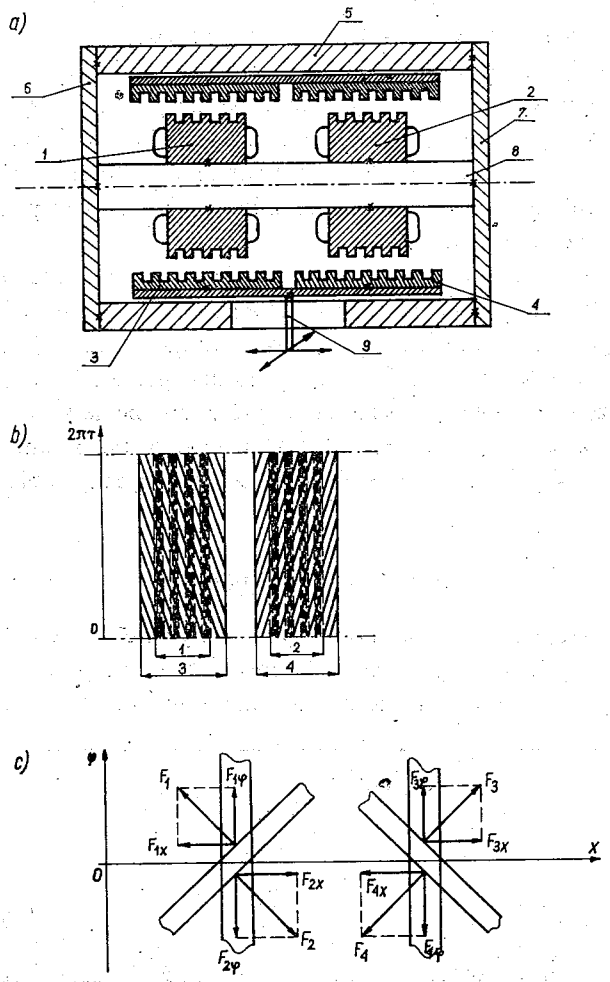
Rys. 21. Charakterystyki elektromechaniczne SIOL o dwu wzbudnikach
a) wzbudnik „obrotowy" b) wzbudnik „liniowy" [21]

schematu zastępczego uwzględniającego efekty krańcowe wzbudników. Charakterystyki te, przedstawione szerzej w pracy [21] porównano z wynikami badań laboratoryjnych. Z uwagi na ograniczoną długość wirnika, ustalona prędkość liniowa w czasie badań nie przekraczała 1 m/s. Z przytoczonych wyników widać wpływ osiowego ruchu wirnika na własności elektromechaniczne wzbudnika obrotowego. Jego wynikiem jest również powstanie osiowej siły hamującej F_h. Wpływ ten wywołany jest skończoną długością tego wzbudnika i jest niewielki przy małych prędkościach liniowych; nie ma wpływu ruchu obrotowego na własności wzbudnika liniowego z uwagi na jego zamknięty obwód.

W silniku tym nie ma wzajemnego sprzężenia wielkości ruchu obrotowego i liniowego, jak to ma miejsce w silniku z polem wirująco-biegnącym. Prędkość i siłę ruchu liniowego można regulować niezależnie od momentu i prędkości obrotowej.

W ośrodku kieleckim przeprowadzone były również badania silnika dwuwzbudnikowego z wirnikiem klatkowym i reluktancyjnym. Badania na tego samego typu silniku z wymienionymi wirnikami prowadzone były również w Instytucie Maszyn Elektrycznych Politechniki Warszawskiej.

Wśród rozwiązań konstrukcyjnych silnika dwuwzbudnikowego reluktancyjnego na uwagę zasługuje silnik do napędu skrzyni przekładniowej pojazdów samochodowych [22] wykonany w Uniwersytecie Technicznym w Compiegne we Francji. Jedna z wersji silnika pokazana jest schematycznie na rys. 22a. Dwa wzbudniki silnika, wytwarzające pola wirujące, osadzone są na wałku przymocowanym nieruchomo do obudowy zewnętrznej.



Rys. 22. Reluktancyjny SOL o dwóch wzbudnikach

a) schemat budowy: *1* i *2* — wzbudniki, *3* i *4* — użłobkowane cylindryczne elementy wirnika, *5* — tuleja, *6* i *7* — tarcze łożyskowe, *8* — wałek, *9* — czop [22], b) układ zębów wzbudników i cylindrów wirnika, c) układ sił działających na elementy wirnika

Powierzchnie zewnętrzne wzbudników użłobkowane są w kierunku obwodowym. Pomiędzy cylindryczną obudową a wzbudnikami znajduje się część ruchoma silnika, którą stanowi tuleja z dwoma użłobkowanymi śrubowo ferromagnetycznymi cylindrami, z których każdy współpracuje z oddzielnym wzbudnikiem. Śrubowe nacięcia tworzą w jednym cylindrze gwint prawo- w drugim lewoskrętny (rys. 22b). Dzięki takiemu układowi zębów wzbudników i cylindrów ruchomej tulei na każdy z cylindrów, przy wytworzonych polach wirujących, działa siła reluktancyjna, skierowana prostopadle do linii śrubowej zębów i zawierająca siłę obwodową F_φ i osiową F_x (rys. 22c). Stosując różne kombinacje w zasilaniu wzbudników można uzyskać złożony ruch wirnika. I tak:

a) zasilając jeden ze wzbudników, uzyskuje się ruch śrubowy opisany w pracy [23],

b) przy zasilaniu obu wzbudników, z których każdy wytwarza pole wirujące w tym samym kierunku, na wirnik działa wypadkowa siła obwodowa $F_\varphi = F_{1\varphi} + F_{3\varphi}$ lub $-F_\varphi = F_{2\varphi} + F_{4\varphi}$,

c) w przypadku pól wirujących w kierunkach przeciwnych, siła wypadkowa jest siłą osiową $F_x = F_{2x} + F_{3x}$ lub $-F_x = F_{1x} + F_{4x}$.

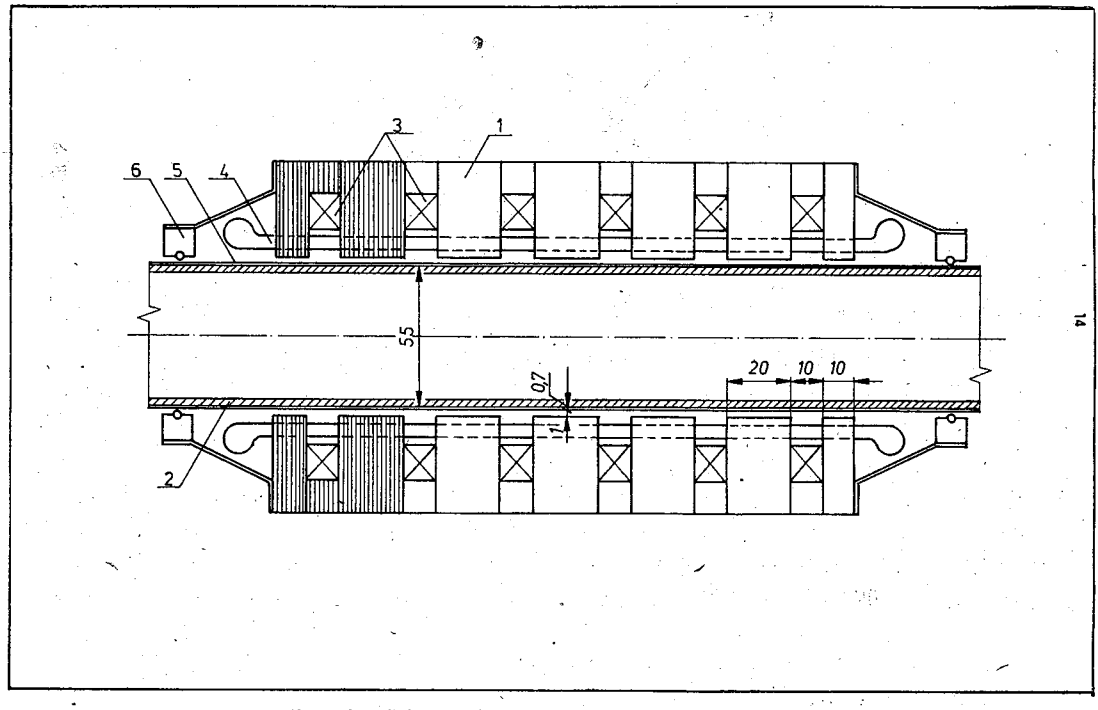
Siła działająca na wirnik, przenoszona jest na zewnątrz poprzez przymocowany do niego czop. Jej wartość zależy od napięcia zasilania wzbudników. W silniku modelowym przy zasilaniu napięciem $U = 20$ V, $I = 6{,}6$ A, maksymalne wartości były równe $F_x = 85$ N, $F_\varphi = 25$ N [22]. Zasilanie impulsowe wzbudników prądem stałym pozwala uzyskać duże wartości sił przy małych skokach wirnika.

Silnik reluktancyjny w innym wykonaniu posiada wzbudniki jako elementy zewnętrzne przymocowane do tulei obudowy, natomiast użłobkowane elementy wirnika przymocowane są do ruchomego wałka umieszczonego w osi podłużnej silnika.

Opisany silnik może być wykonany w wersji indukcyjnej klatkowej. W tym przypadku w żłobkach obu części wirnika umieszczone są pręty miedziane zwarte na zewnątrz pierścieniami. Wadą przedstawionego silnika reluktancyjnego jest ograniczona długość przesuwu osiowego, wynikająca z niewielkiej długości cylindrycznych elementów wirnika.

3.1.3. *SOL dwuuzwojeniowy*

Pierwsze konstrukcje tego silnika powstały w Instytucie Maszyn Elektrycznych Politechniki Warszawskiej [24], [25]. Schemat budowy wykonanego w tym ośrodku silnika pokazany jest na rys. 23. Obwód magnetyczny wzbudnika składa się z blach krążkowych

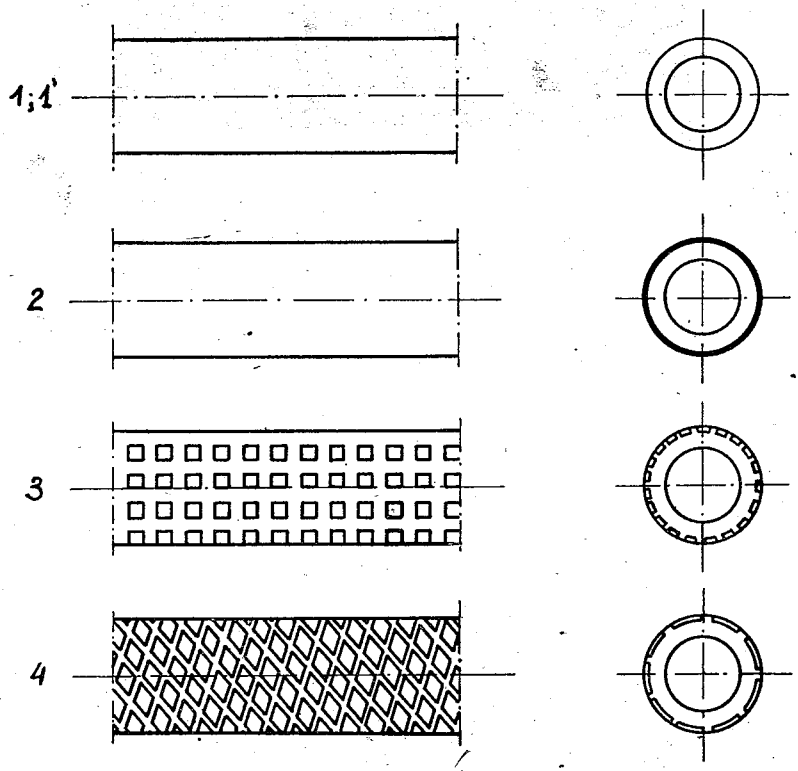


Rys. 23. Schemat budowy SIOL dwuuzwojeniowego

1 — wzbudnik, *2* — rura stalowa wirnika, *3* — uzwojenie „liniowe", *4* — uzwojenie „obrotowe", *5* — warstwa miedzi, *6* — łożysko [26]

o mniejszej i większej średnicy wewnętrznej. W obwodzie tym umieszczone są dwa uzwojenia o prostopadłych do siebie bokach cewek. Jedno z uzwojeń wykonane podobnie do uzwojeń silników indukcyjnych obrotowych wytwarza pole wirujące, drugie, typowe dla silników liniowych tubowych, umieszczone na zewnątrz pierwszego, wytwarza pole biegnące.

Wirnik wykonano w kilku odmianach konstrukcyjnych (rys. 24): *1* — w postaci gładkiej rury stalowej i aluminiowej, *2* — w formie rury stalowej, pokrytej galwanicznie mie-

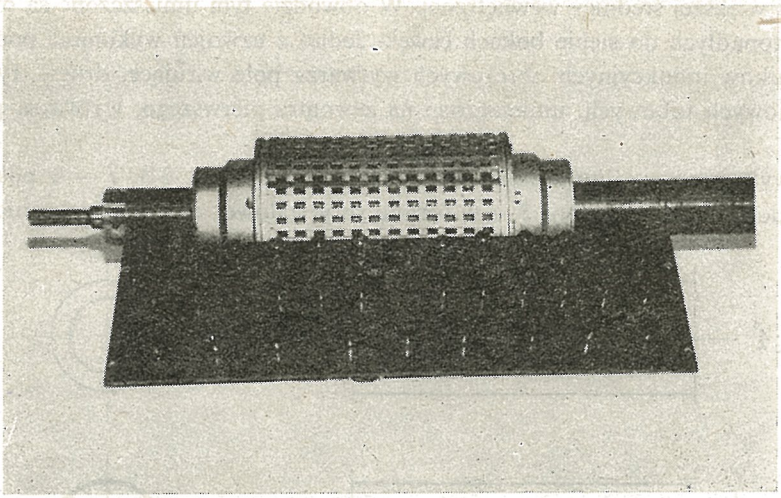


Rys. 24. Schemat budowy wirników

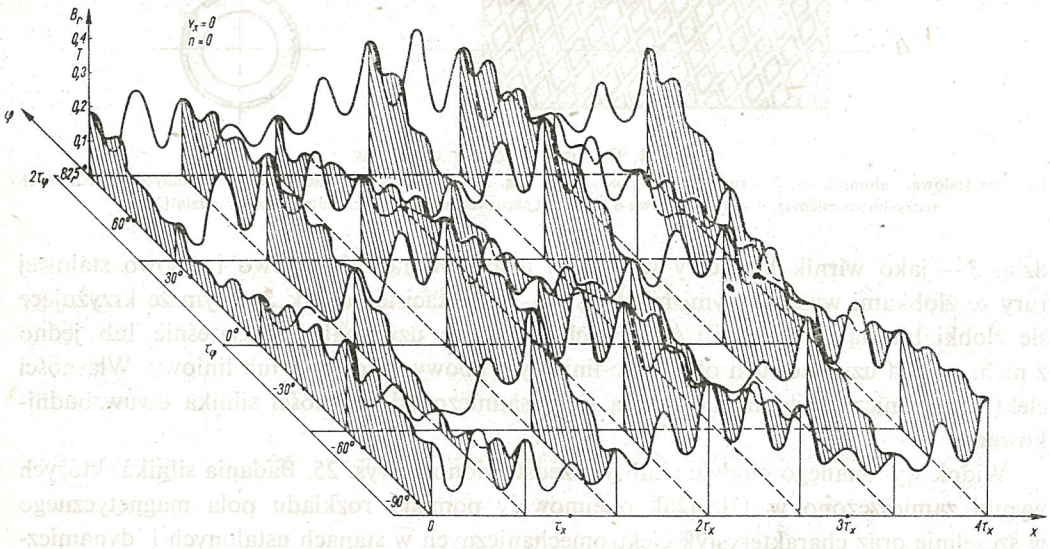
1 — rura stalowa, aluminiowa, *2* — rura stalowa pokryta miedzią, *3* — rura stalowa o żłobkach prostopadłych wypełnionych natryskowo miedzią, *4* — rura stalowa o żłobkach skośnych wypełnionych natryskowo miedzią [26]

dzią, *3* — jako wirnik klatkowy w postaci użłobkowanej obwodowo i osiowo stalowej rury ze żłobkami wypełnionymi miedzią, *4* — w postaci takiej jak *3*, z tym że krzyżujące się żłobki biegną wzdłuż linii śrubowych. Zasilając uzwojenia jednocześnie lub jedno z nich, można uzyskać ruch obrotowo-liniowy śrubowy, obrotowy lub liniowy. Własności elektromechaniczne silnika nie różnią się zasadniczo od własności silnika dwuwzbudnikowego.

Widok wykonanego modelu silnika przedstawiono na rys. 25. Badania silnika, których wyniki zamieszczono w [3], [26], obejmowały pomiary rozkładu pola magnetycznego w szczelinie oraz charakterystyk elektromechanicznych w stanach ustalonych i dynamicznych. Przykładowy powierzchniowy rozkład pola magnetycznego w szczelinie silnika z wirnikiem warstwowym (rys. 24 — 2) zmierzony przy równoczesnym zasilaniu uzwojeń

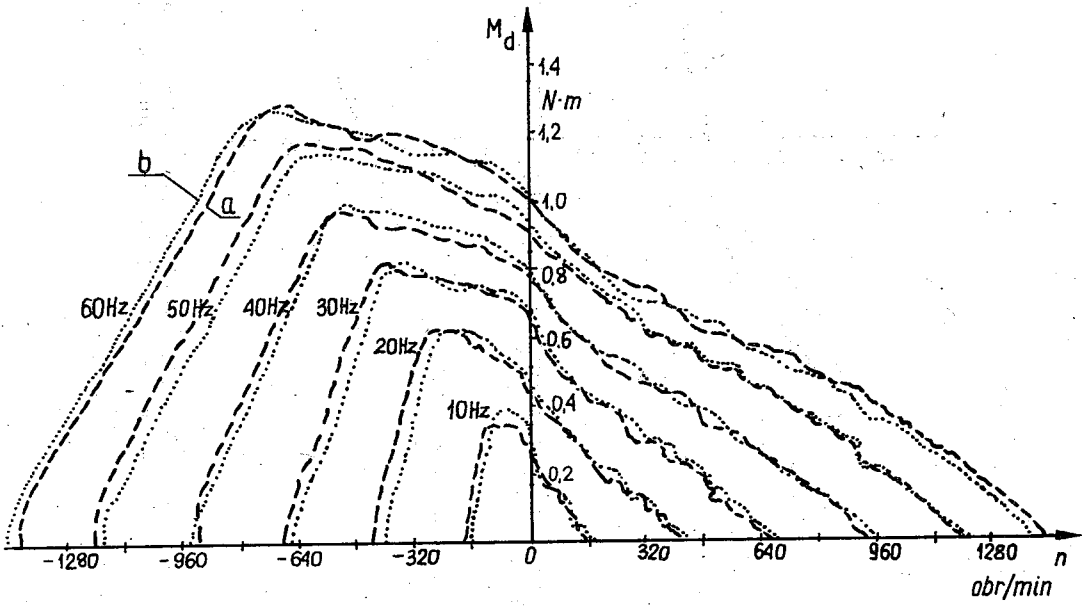


Rys. 25. Model SIOL dwuuzwojeniowego [26]



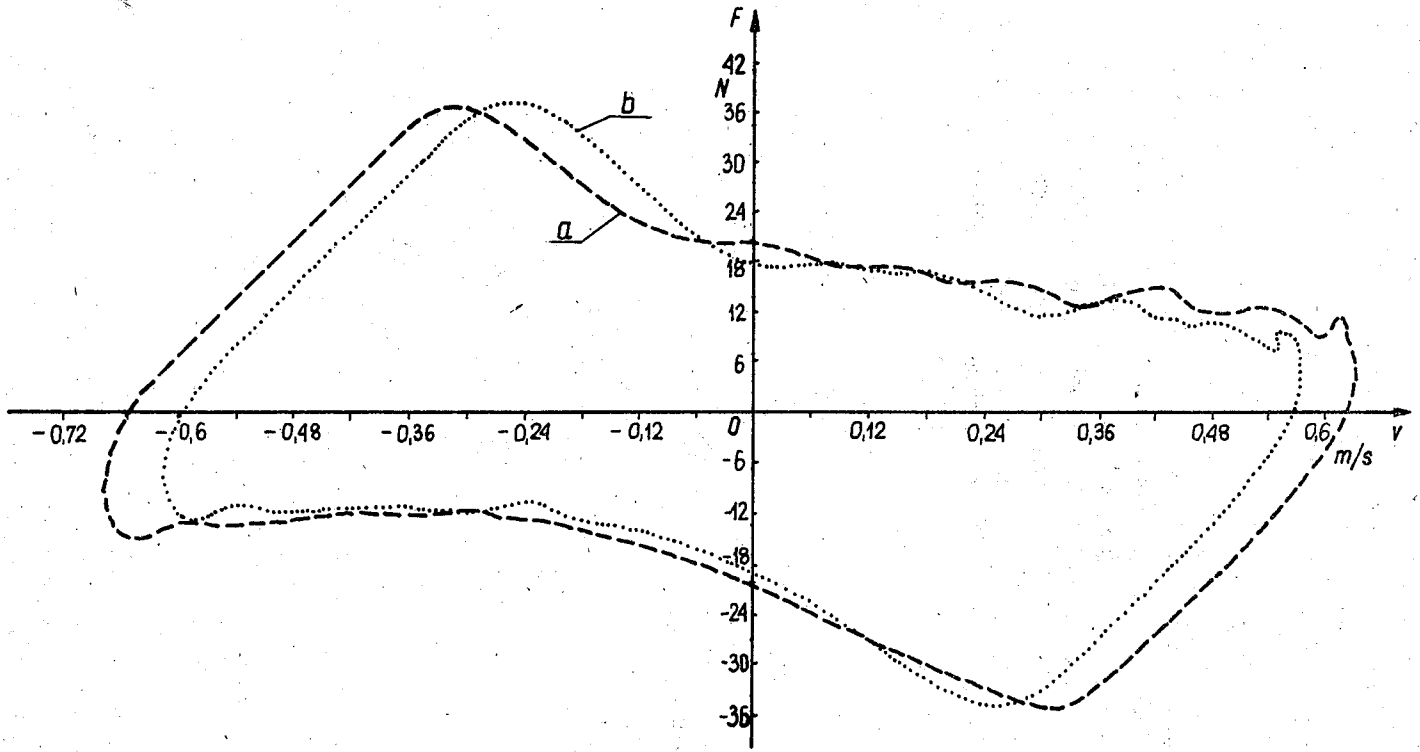
Rys. 26. Rozkład powierzchniowy indukcji magnetycznej pomierzony w szczelinie SIOL dwuuzwojeniowego przy zasilaniu obu uzwojeń [26]

napięciem o częstotliwości 50 Hz przedstawiono na rys. 26. Na obwiedniach funkcji pola w obu osiach widać większe wgłębienia i spiętrzenia indukcji. Są one wynikiem nakładania się różno- lub jednakoimiennych biegunów pól obu uzwojeń. Przy zasilaniu każdego z uzwojeń różną częstotliwością, spiętrzenia te przemieszczają się po powierzchni, natomiast przy zasilaniu tą samą częstotliwością — są nieruchome, powodując lokalne nasycenia obwodu magnetycznego. Charakterystyki momentu dynamicznego M_d oraz siły osiowej F_d przy zasilaniu jednego i dwóch uzwojeń silnika, przedstawiono na rysunkach 27 i 28. Różnice w odpowiadających sobie charakterystykach tak momentu jak i siły wskazują na pewne wzajemne oddziaływanie pól obu uzwojeń. Oddziaływanie pola wirującego na ruch liniowy wywołany polem biegnącym jest większe. Powodowane jest to efektami krańcowymi pola wirującego, które to pole przy poosiowym ruchu wirnika daje siłę hamującą. Pewna siła hamująca od tego pola wywołana jest również harmonicznymi żłobków uzwojenia liniowego i jest większa przy większym rozwarciu tych żłobków. Z uwagi na koncentryczne uzwojenie wytwarzające pole biegnące, nie ma oddziaływania na krańcach tego pola na ruch obrotowy. Widoczne nieznaczne oddziaływanie na moment wynika z harmonicznych pola biegnącego, pochodzących od żłobków uzwojenia obrotowego.



Rys. 27. Charakterystyki dynamiczne momentu M_d pomierzone przy zasilaniu a) jednego uzwojenia, b) obu uzwojeń SIOL dwuuzwojeniowego [3]

Analiza teoretyczna zjawisk zachodzących w tego rodzaju silniku jest bardziej złożona od analizy w SOL dwuwzbudnikowym, gdyż musi uwzględniać w opisie matematycznym jednocześnie pola od dwóch uzwojeń przy złożonym ruchu wirnika. W pracach teoretycznych w Politechnice Warszawskiej, analizę zjawisk przeprowadzono dwiema metodami: obwodową i polową. Stosując pierwszą z nich, model silnika zastąpiono siecią przestrzenną o gałęziach zawierających elementy skupione. Analizę przeprowadzono



Rys. 28. Charakterystyki dynamiczne siły osiowej F_a pomierzone przy zasilaniu
a) jednego uzwojenia, b) obu uzwojeń SIOL dwuuzwojeniowego [3]

przy zasilaniu ze źródła napięciowego, pomijając zjawiska krańcowe [26]. W drugim przypadku posłużono się metodą elementów skończonych, uwzględniając skończone wymiary wzbudnika przy założeniu ruchu prostego wirnika [27].

Wśród ośrodków krajowych zajmujących się tego typu silnikiem należy wymienić Instytut Elektrotechniki Politechniki Świętokrzyskiej, gdzie prowadzone ostatnio prace miały charakter doświadczalny i teoretyczny [17]. Rozważania teoretyczne, obejmujące wyznaczanie pola elektromagnetycznego i charakterystyk elektromechanicznych przy zasilaniu ze źródła prądowego oparto o teorię pola. Posługując się metodą szeregu Fouriera, uwzględniono efekty krańcowe wywołane skończoną długością wzbudnika przy ruchu obrotowo-liniowym wirnika.

Za granicą SOL dwuuzwojeniowym zajmowano się w Uniwersytecie Technicznym w Compiegne we Francji. W pracach teoretycznych analizując pole metodą elementów skończonych w układzie płaskim uwzględniano nasycenia obwodu magnetycznego [36].

3.2. Silniki kuliste

Jak już wspomniano we wstępie, silniki o strukturze sferycznej nazywane są w literaturze silnikami o trzech stopniach swobody mechanicznej. Są to maszyny małej mocy, mające zastosowanie głównie w układach automatyki jako transformatory kątowe lub przetworniki sygnałów [29], [30] oraz jako napęd w urządzeniach żyroskopowych [31]. Literatura z tej dziedziny maszyn nie jest zbyt obszerna. Szczególnie skąpe są informacje na temat konstrukcji tych silników. W zakresie analizy teoretycznej należy specjalnie wymienić pracę A. N. Miljacha [4] oraz książkę [5] napisaną w ostatnich latach przy współudziale tego samego autora, a prezentującą prace zespołu naukowego Ukraińskiej Akademii Nauk. Przedstawiona tam analiza pracy silników z wirnikiem kulistym, bazuje na metodzie obwodowej przemian elektromechanicznych.

W Polsce, silnikami o wirniku kulistym rozpoczęto się zajmować stosunkowo niedawno. Analizę pracy przetwornika o wirniku kulistym, przeprowadzoną w oparciu o uogólnioną teorię elektromechanicznego przetwarzania energii bez odniesienia do określonej konstrukcji podano w pracy doktorskiej Politechniki Śląskiej [32]. W Instytucie Elektrotechniki Politechniki Świętokrzyskiej zaproponowano nowe konstrukcje silników indukcyjnych z wirnikiem kulistym w opisie patentowym [2], a analizę pola elektromagnetycznego w takich konstrukcjach podano w [18]. W ostatnich latach, silnikami kulistymi rozpoczęto się zajmować również w Instytucie Maszyn Elektrycznych Politechniki Warszawskiej. Z prac krajowych w tej dziedzinie są to najbardziej zaawansowane prace i obejmują propozycje nowych rozwiązań konstrukcyjnych [33], wykonanie i badania tychże konstrukcji [34] oraz niepublikowane wybrane zagadnienia, które są w stadium opracowania i obliczeń teoretycznych.

W niniejszym rozdziale omówione zostaną niektóre zagadnienia konstrukcyjne wraz z podaniem możliwości pracy silnika indukcyjnego, wykonanego i badanego w ośrodku warszawskim.

Z uwagi na strukturę sferyczną i konieczność zapewnienia silnikowi o takiej strukturze możliwości ruchu w dowolnym, określonym dwiema współrzędnymi sferycznymi kierunku,

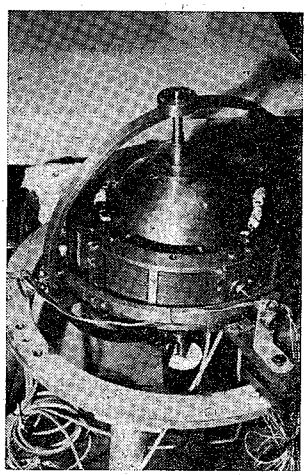
istniejące problemy konstrukcyjne dotyczą zarówno budowy wzbudników i wirników jak i sposobu ich zawieszenia.

Konstrukcja samego silnika może przyjmować dwie wersje:

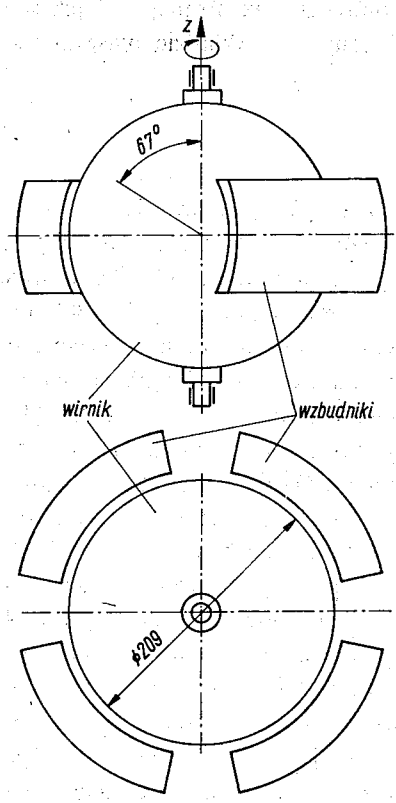
a — wewnętrzny kulisty wirnik, na powierzchni którego znajduje się jeden lub więcej wzbudników,

b — nieruchomy wirnik (część wtórna), wewnątrz którego znajduje się ruchomy kulisty wzbudnik z dwoma lub więcej uzwojeniami.

Wśród spotkanych zawieszeń wirnika można wyróżnić zawieszenie elektrodynamiczne, elektrostatyczne, poduszkę powietrzną, podwójny przegub Cardana oraz zawieszenie na specjalnych łożyskach.



Rys. 29. Model silnika indukcyjnego kulistego [34]

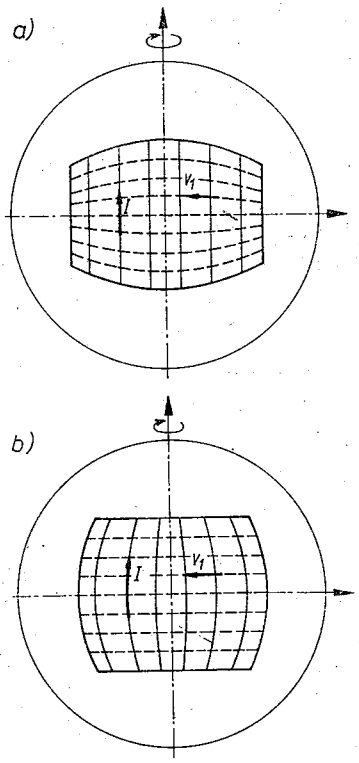


Rys. 30. Schemat budowy silnika indukcyjnego kulistego

Model silnika indukcyjnego pokazany na rys. 29 wykonany był według wersji a — z zawieszeniem na podwójnym przegubie Cardana. Stojan silnika przedstawionego schematycznie na rys. 30 stanowią cztery modułowe wzbudniki, rozmieszczone symetrycznie na obwodzie kulistego wirnika. Wzbudniki te, które są wymienne, wykonane były w wersjach z jednym i z dwoma uzwojeniami trójfazowymi. W tej drugiej wersji uzwojenia krzyżowały się pod kątem prostym, dając pola poruszające się w kierunkach do siebie prostopadłych.

Wzbudniki z jednym uzwojeniem wytwarzały również pola biegnące w kierunkach do siebie prostopadłych, przy czym każde o jednym kierunku poruszania.

We wzbudnikach istotne znaczenie ma konstrukcja pakietu blach i ułożenie uzwojenia. Na rys. 31a uzwojenie umieszczone jest w żłobkach biegnących równoleżnikowo. Kierunki poruszania się pola w poszczególnych punktach czaszowej powierzchni wzbudnika zbie-



Rys. 31. Obraz rozpływu prądu we wzbudniku o jednym uzwojeniu silnika kulistego
a) kierunek równoleżnikowy, b) kierunek południkowy

gają się południkowo. W układzie uzwojeń na rys. 31b, prądy w uzwojeniu mają kierunek południkowy, natomiast lokalne prędkości posiadają kierunek równoleżnikowy. Kierunek prędkości punktów na powierzchni wirnika, obojętnie czy położenie osi wirowania jest zgodne z osiami symetrii wzbudnika czy jest skośne względem nich, jest równoleżnikowy

Z powyższego omówienia wynika, że przypadek zgodności kierunków lokalnych prędkości pola i wirnika jest niezmiernie rzadki przy zmianach położenia osi wirowania. Dokładna analiza pola w takim silniku powinna zatem uwzględniać oprócz zjawisk brzegowych na krańcach wzbudników również lokalne prędkości, ich kierunki i wartości dla pola i wirnika. Jest to zagadnienie niezmiernie trudne, a jego stopień trudności powiększa się przy analizie stanów dynamicznych. Każde rozważanie teoretyczne ponadto powinno być ujęte przestrzennie i uwzględniać geometrię wzbudników aktualnie analizowanego silnika.

W literaturze nie można spotkać rozważań teoretycznych uwzględniających wszystkie zjawiska. W opracowaniu krajowym [18] jakkolwiek przy analizie pola elektromagnetycznego uwzględniono zjawisko brzegowe na czterech krawędziach wzbudnika, to jednak przyjęto nie lokalne lecz średnie, różne względem siebie wartości i kierunki prędkości wzbudnika i wirnika. Taką analizę można traktować jako pierwsze przybliżenie, które daje wyniki tym zgodniejsze z rzeczywistością, im mniejsza jest powierzchnia czasz wzbudnika.

Pewną próbę dokładniejszej analizy zjawisk podjęto w [33] za pomocą metody sieci zastępczej z elementami skupionymi, uwzględniając konstrukcję wzbudników i kinematykę silnika.

Pokazane na rys. 29 stanowisko pomiarowe silnika, na skutek zawieszenia wirnika w przegubie Cardana, umożliwiało przemieszczanie się osi wirowania w zakresie kąta stożkowego równego 67°. Wirnik wykonany został z dwu półkul stalowych, pokrytych galwanicznie miedzią. Układy pomiarowe stanowiska zapewniają pomiar: indukcji magnetycznej w szczelinie, prędkości obrotowej, położenia osi wirnika oraz momentu rozwijanego przez silnik. Wyniki wstępnych badań eksperymentalnych zamieszczono w opracowaniu [34]. Z uwagi na to, że rozpoczęte w ośrodku warszawskim prace są w fazie początkowej, należy się w przyszłości spodziewać szerszych i bogatszych opracowań teoretycznych i eksperymentalnych z zakresu silników kulistych.

4. ZAKOŃCZENIE

Przedstawiony materiał z zakresu silników o dwóch stopniach swobody mechanicznej prezentuje w sposób ogólny aktualnie prowadzone prace teoretyczne i doświadczalne w kraju i za granicą. Ramy niniejszego artykułu nie pozwalają na omówienie wszystkich zagadnień, zarówno teoretycznych jak i konstrukcyjno-pomiarowych. Szereg z nich potraktowano fragmentarycznie, a niektóre tylko w postaci wzmianki literaturowej. Najobszerniej przedstawiono prace krajowe prowadzone głównie w dwóch ośrodkach: w Instytucie Elektrotechniki Politechniki Świętokrzyskiej w Kielcach i w Instytucie Maszyn Elektycznych Politechniki Warszawskiej. Sumaryczne ujęcie prac ośrodka kieleckiego znajduje się w monografii [17]. W ośrodkach krajowych, prace koncentrują się głównie na silnikach indukcyjnych obrotowo-liniowych i kulistych. Za granicą, z dostępnej autorom literatury wynika fakt szerszego zainteresowania tego typu silnikami w Uniwersytecie w Compiegne we Francji i w ZSRR (silniki kuliste).

Część prezentowanych w artykule silników znalazła konkretne zastosowanie użytkowe. Inne, jakkolwiek wykonane w metalu, powstały jedynie w celach badawczych. Trudno obecnie ocenić ich pełną wartość użytkową z uwagi na podstawowy charakter tych prac. Być może, że bogatsza prezentacja własności elektromechanicznych silników szerzej zainteresuje potencjalnych użytkowników i wytwórców tych maszyn.