POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTROTECHNIKI
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

PL ISSN 0035-9386

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XXXII — ZESZYT 1

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1986

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTROTECHNIKI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XXXII — ZESZYT 1

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1986

RADA REDAKCYJNA

Przewodniczący
prof. dr hab. JANUSZ TUROWSKI

Członkowie
prof. dr hab. DANIEL JÓZEF BEM, prof. TADEUSZ CHOLEWICKI — członek rzeczywisty PAN, prof. dr hab. JAROSŁAW JUCHNIEWICZ, prof. dr ZDZISŁAW KACHLICKI, prof. dr hab. TADEUSZ KACZOREK, prof. dr LEONARD KNOCH, doc. dr hab. ANDRZEJ KUSY, prof. JAN MANITIUS, prof. dr WITOLD NOWICKI, prof. dr WITOLD ROSIŃSKI — członek rzeczywisty PAN, prof. dr RYSZARD SIKORA, prof. dr hab. WOJCIECH SOBCZAK, prof. dr STEFAN WĘGRZYN — członek rzeczywisty PAN, prof. dr hab. WIESŁAW WOLIŃSKI

REDAKCJA

po. Redaktora Naczelnego
prof. dr hab. WIESŁAW WOLIŃSKI

Zastępcy Redaktora Naczelnego
prof. dr hab. TADEUSZ KACZOREK
prof. dr RYSZARD SOCHOCKI

Sekretarz odpowiedzialny
mgr KRYSTYNA LELAKOWSKA

ADRES REDAKCJI

00-665 Warszawa, ul. Nowowiejska 15/19
Politechnika, Instytut Telekomunikacji, Gmach Elektroniki, pok. 401

Dyżury Redakcji: środy i piątki, godz. 11—13
tel. 28 89 81 lub 210 07-737

Telefony domowe: po. redaktora naczelnego 12 17 65
zastępca redaktora naczelnego prof. dr hab. TADEUSZ KACZOREK — *48 60 18*

sekretarz odpowiedzialny — 25 29 18

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
Warszawa, Miodowa 10

Nakład 510 (412+98)	Oddano do składania 19.09.1985
Ark. druk. 21,0 Ark. wyd. 26,0	Podpisano do druku w sierpniu 1986 r.
Papier druk. b. sat. kl. IV 70 g 70×100	Druk ukończono we wrześniu 1986 r.
Zamówienie nr 947/12/85	Cena zł 180,— P-25

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1986, 32, z. 1, ss. 3-11

539-219

O numerycznym wyznaczaniu czasu trwania stanów nieustalonych pól opisanych równaniem przewodnictwa

ANDRZEJ BRYKALSKI (SZCZECIN)

Instytut Elektroniki i Informatyki Politechniki Szczecińskiej

Otrzymano 8.08.1984

W pracy rozważono możliwość wykorzystania metody różnic skończonych do wyznaczania czasu trwania stanów nieustalonych pól opisanych równaniem przewodnictwa. Przedstawioną metodę zilustrowano przykładami obliczeniowymi. Dokonano ilościowej analizy porównawczej przedstawionej metody.

1. WSTĘP

Niniejsza praca stanowi kolejną z cyklu publikacji poświęconych wyznaczaniu stałych czasowych pól opisanych równaniem przewodnictwa, jest zarazem pierwszą pracą, w której wykorzystana zostanie „czysto numeryczna" technika do rozwiązywania tego zagadnienia. W pracach [2, 3] przedstawiony został algorytm obliczania czasu trwania stanów nieustalonych opierający się na wariacyjnej metodzie Ritza oraz ogólnej metodzie Galerkina. Z uwagi na analityczno-numeryczny charakter omówionych metod (konieczność obliczania całek), ich efektywne wykorzystanie może w niektórych przypadkach sprawiać trudności.

Wobec coraz powszechniejszego zastosowania techniki cyfrowej, z wykorzystaniem metod numerycznego rozwiązywania zagadnień brzegowych (metody różnic i elementów skończonych), uzasadnione wydaje się dostosowanie istniejących algorytmów do wyznaczania stałej czasowej procesów dyfuzyjnych. W dalszej części pracy przedstawiona zostanie możliwość wykorzystania metody różnic skończonych (MRS). Pomimo obserwowanego w ostatnich latach burzliwego rozwoju metody elementów skończonych (MES), MRS zasługuje ciągle na uwagę, o czym świadczy np. praca [8]. Szerokie teoretyczne opracowanie w literaturze, dokładność spełnienia warunków brzegowych przy skomplikowanym kształcie, łatwość rozwiązania numerycznego oraz zbieżność (na co zwrócono uwagę w książce [11]), czynią MRS ciągle użyteczną dla obliczeń technicznych.

2. ALGORYTM OBLICZANIA STAŁEJ CZASOWEJ METODĄ RÓŻNICOWĄ

Dla przedstawienia metody, rozpatrzone zostanie pewne dwuwymiarowe zadanie modelowe w obszarze D ograniczonym brzegiem S. Ponieważ sformułowanemu niżej

problemowi odpowiada szereg niestacjonarnych zagadnień technicznych np. dyfuzja pola elektromagnetycznego w środowiskach przewodzących, zjawisko osmozy czy nieustalonego przewodzenia ciepła, będzie on rozpatrzony z czysto matematycznego punktu widzenia.

Niech L będzie pewnym operatorem różniczkowym typu eliptycznego, działającym na funkcję $u(x, y, t)$ w obszarze D. Zagadnienie różniczkowe ma postać następującą

$$Lu = c\frac{\partial u}{\partial t} - f, \tag{1}$$

z warunkiem początkowym $u(x, y, 0) = u_0$ i warunkiem brzegowym zawierającym u, $\partial u/\partial n$ lub ich kombinację liniową np.

$$\alpha_1 u + \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial n} = \psi, \tag{2}$$

gdzie c, α_1, α_2 są pewnymi funkcjami charakteryzującymi właściwości fizyczne obszaru D, natomiast f i ψ są w ogólnym przypadku dowolnymi funkcjami wymuszającymi. Celem przeprowadzanego rozumowania jest obliczenie stałej czasowej. Do jej wyznaczenia potrzebna jest jedynie znajomość funkcji $u(x, y, t)$ jako odpowiedzi skokowej [1, 3, 9, 10]. Niech zatem $f = f(x, y)1(t)$ lub $\psi = \psi(x, y)1(t)$.

MRS polega na aproksymacji pochodnych występujących w operatorze L ilorazami różnicowymi, których postać zależy od rodzaju zastosowanej „*siatki*" (w książce [4] omówiono szczegółowo różne rodzaje aproksymacji różnicowych dla siatek prostokątnych, trójkątnych, sześciokątnych itd.). Dla siatki prostokątnej dzielącej obszar D równomiernie w kierunku x z krokiem h_1 i w kierunku y z krokiem h_2 otrzymuje się w każdym węźle wewnętrznym (x_i, y_i), gdzie $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x_i+h_1, y_i, t) - u(x_i-h_1, y_i, t)}{2h_1} \tag{3}$$

oraz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_i+h_1, y_i, t) - 2u(x_i, y_i, t) + u(x_i-h_1, y_i, t)}{h_1^2}. \tag{4}$$

Analogicznie aproksymuje się pochodne względem zmiennej y.

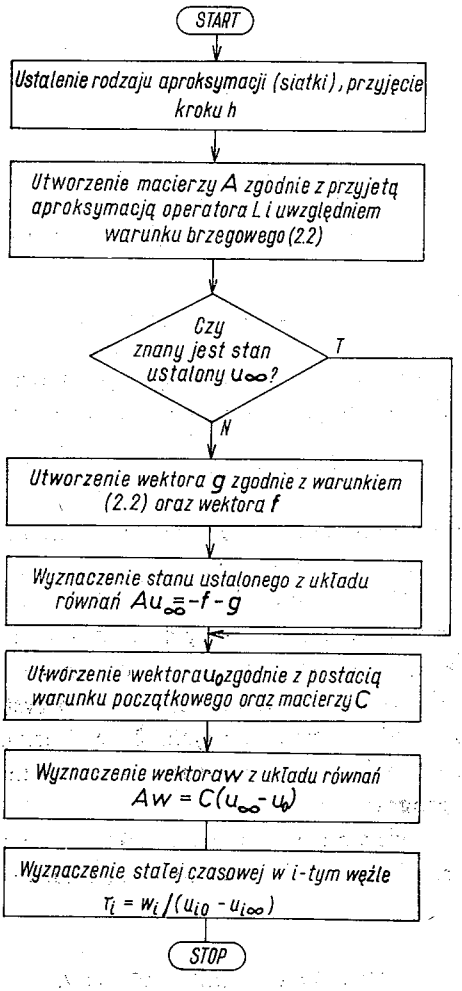
Równanie (1) zostaje w każdym wewnętrznym i-tym węźle siatki zastąpione równaniem różnicowym, w którym lewą stronę stanowi kombinacja liniowa przybliżonych wartości szukanej funkcji u w węźle i-tym oraz w czterech węzłach sąsiednich, natomiast prawa strona jest równa

$$c(x_i, y_i)\frac{du_i}{dt} - 1(t)f_i, \tag{5}$$

gdzie $u_i = u(x_i, y_i, t)$ oraz $f_i = f(x_i, y_i)$.

Po uporządkowaniu wszystkich n równań różnicowych i uwzględnieniu warunku brzegowego (2) otrzymuje się ostatecznie układ równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{C}\frac{d}{dt}\boldsymbol{u} = -1(t)(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}), \tag{6}$$



Rys. 1 Algorytm wyznaczania stałej czasowej za pomocą MRS

gdzie $\boldsymbol{u} = \{u_i(t)\}_{i=1,n}$ jest wektorem wartości szukanej funkcji $u(x, y, t)$ w węzłach $\boldsymbol{f} = \{f_i\}_{i=1,n}$, a $\boldsymbol{C}$ jest macierzą diagonalną z elementami na głównej przekątnej równymi $c(x_1, y_1), \ldots, c(x_n, y_n)$. Macierz $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1,n}$ jest pewną macierzą pięcioprzekątniową, natomiast $\boldsymbol{g} = \{g_i\}_{i=1,n}$ wektorem utworzonym w przypadku niejednorodnego warunku brzegowego ($\psi(x, y) \neq 0$). Szczegóły dotyczące macierzy $\boldsymbol{A}$ i zasad tworzenia wektora $\boldsymbol{g}$ nie zostaną przedstawione w tej pracy. Można je znaleźć w każdej publikacji omawiającej MRS np. [4, 5, 7, 11]. Oznaczając przez $\boldsymbol{u}^*$ transformatę Laplace'a wektora $\boldsymbol{u}$, równanie (6) można zapisać w następującej postaci

$$(\boldsymbol{A} - s\boldsymbol{C})\boldsymbol{u}^* = -\frac{1}{s}(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} + s\boldsymbol{C}\boldsymbol{u}_0), \tag{7}$$

gdzie $\boldsymbol{u}_0$ jest wektorem warunków początkowych $\boldsymbol{u}_0 = (u_{i0}\}_{i=1,n} = \{u_0(x_i, y_i)\}_{i=1,n}$.

Stąd

$$\boldsymbol{u}^* = -\frac{1}{s}(\boldsymbol{A}-s\boldsymbol{C})^{-1}(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}+s\boldsymbol{C}\boldsymbol{u}_0) \tag{8}$$

oraz stan ustalony pola u

$$\boldsymbol{u}_\infty = \lim_{s\to 0} s\boldsymbol{u}^* = -\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}). \tag{9}$$

Uśrednioną stałą czasową pola u w punkcie (x_i, y_i) można obliczyć ze wzoru [1, 2, 3, 9, 10]

$$\tau_i = \lim_{s\to 0} (su_i^*)'/(u_{i0}-u_{i\infty}). \tag{10}$$

Występującą w zależności (10) granicę wyznacza się na podstawie wzorów podanych w [6], dotyczących różniczkowania macierzy. Ostatecznie podobnie jak w pracy [3] otrzymuje się

$$\boldsymbol{w} = \lim_{s\to 0} (s\boldsymbol{u}^*)' = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}[\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})+\boldsymbol{u}_0] = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{u}_\infty-\boldsymbol{u}_0). \tag{11}$$

Wzory (9) oraz (11) pozwalają na wyznaczenie stałej czasowej pola u opisanego równaniem (1). Na ich podstawie skonstruować można algorytm (rys. 1) sprowadzający się do rozwiązania dwóch układów równań algebraicznych, o wspólnej macierzy głównej.

Należy zauważyć, że pierwszy z układów służy do wyznaczenia stanu ustalonego pola u. W niektórych zagadnieniach, gdzie stan ustalony można z góry przewidzieć — krok ten pomija się. Także w wielu innych przypadkach można skorzystać z już gotowego oprogramowania, dotyczącego zagadnień stacjonarnych. Z kolei drugi układ równań, różni się jedynie postacią prawych stron. Dla jego rozwiązania niezbędna jest jedynie nieznaczna modyfikacja istniejących programów.

Dla ilustracji metody rozwiązano niżej kilka przykładów związanych z nieustalonym przewodzeniem ciepła, porównując wyniki obliczeń z rozwiązaniami dokładnymi [7].

3. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

Niestacjonarne, źródłowe pole temperatury T w jednorodnym ośrodku wypełniającym obszar D, przy stałych wartościach parametrów fizycznych, określa równanie zachowania energii [7]:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} T) - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial t} = -q, \tag{12}$$

gdzie $\varkappa$ jest dyfuzyjnością cieplną (współczynnikiem wyrównywania temperatur), natomiast $q = g/\lambda$, przy czym $g > 0$ jest objętościową gęstością mocy, a λ współczynnikiem przewodnictwa cieplnego.

Rozważa się przypadek, kiedy na powierzchni S, która ogranicza obszar D wymiana ciepła z otoczeniem odbywa się zgodnie z prawem Newtona

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T = 0, \tag{13}$$

gdzie α jest współczynnikiem wymiany ciepła oraz zachodzi jednorodny warunek początkowy

$$T(x, y, 0) = 0. \tag{14}$$

Przykład 1

Niech D będzie obszarem prostokątnym $(-a \leqslant x \leqslant a,\ -b \leqslant y \leqslant b)$. W przypadku, gdy $q = const$ istnieje dla tego zagadnienia rozwiązanie analityczne [7], opisujące stan nieustalony pola temperatury $T(x, y, t)$. Obliczona z zależności [1, 2, 3, 9, 10]

$$\tau = \int_0^{\infty} \frac{T(x, y, t) - T(x, y, \infty)}{T(x, y, 0) - T(x, y, \infty)}\, dt, \tag{15}$$

zastępcza stała czasowa przebiegu T jest równa

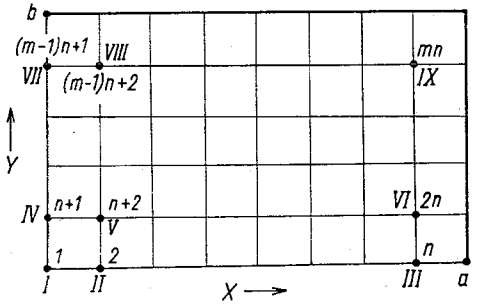
$$\tau = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D_{ij}(x, y)}{\varkappa E_{ij}^2}}{\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D_{ij}(x, y)}{E_{ij}}}, \tag{16}$$

gdzie

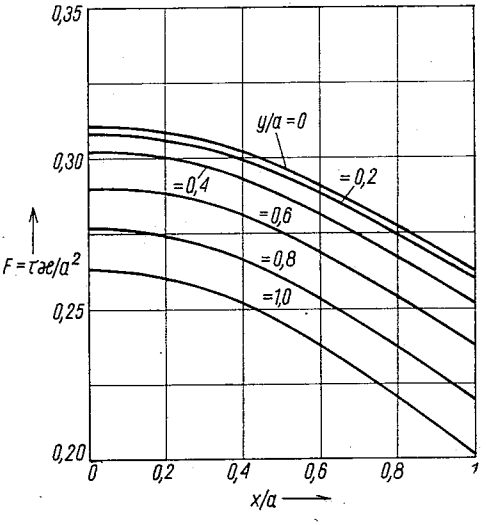
$$D_{ij}(x, y) = \frac{\sin\mu_i \sin\gamma_j \cos\frac{\mu_i}{a} x \cos\frac{\gamma_j}{b} y}{\mu_i \gamma_j \left(1 + \frac{\sin 2\mu_i}{2\mu_i}\right)\left(1 + \frac{\sin 2\gamma_i}{2\gamma_j}\right)},$$

$$E_{ij} = \frac{\mu_i^2}{a^2} + \frac{\gamma_j^2}{b^2},$$

przy czym μ_i, γ_j są kolejnymi dodatnimi pierwiastkami równań $\mu tg\mu = a\sigma$ oraz $\gamma tg\gamma = b\sigma$ $(\sigma = \alpha/\lambda)$.



Rys. 2 Podział rozpatrywanego obszaru siatką kwadratową



Rys. 3 Wykresy funkcji $F = \tau\varkappa/a^2$ dla obszaru kwadratowego $(a = b)$, gdy $a\sigma = 5$

W celu zastosowania MRS obszar D został podzielony siatką kwadratową z krokiem $h = a/n = b/m$. Z uwagi na symetrię zagadnienia rozpatrzono tylko pierwszą ćwiartkę układu $x0y$ (rys. 2). W przedstawionym zagadnieniu występuje dziewięć typów równań różnicowych (rys. 2) tworzących układ (6)

$$
\begin{aligned}
&\text{I} && -4T_1+2T_2+2T_{n+1} = \tilde{f}_1 \\
&\text{II} && T_{k-1}-4T_k+T_{k+1}+2T_{k+n} = \tilde{f}_k && \text{dla } k = 2, \ldots, n-1 \\
&\text{III} && T_{n-1}-\frac{3+4h\sigma}{1+h\sigma}T_n+2T_{2n} = \tilde{f}_n \\
&\text{IV} && T_{k-n}-4T_k+2T_{k+1}+T_{k+n} = \tilde{f}_k && \text{dla } k = ni+1, \text{ gdy } i = 1, \ldots, m-2 \\
&\text{V} && T_{k-n}+T_{k-1}-4T_k+T_{k+1}+T_{k+n} = \tilde{f}_k && \text{dla } k = ni+2, \ldots, n(i+1)-1, \\
& && && \text{gdy } i = 1, \ldots, m-2 \qquad (17) \\
&\text{VI} && T_{k-n}+T_{k-1}-\frac{3+4h\sigma}{1+h\sigma}T_k+T_{k+n} = \tilde{f}_k && \text{dla } k = n(i+1), \text{ gdy } i = 1, \ldots, m-2 \\
&\text{VII} && T_{k-n}-\frac{3+4h\sigma}{1+h\sigma}T_k+2T_{k+1} = \tilde{f}_k && \text{dla } k = (m-1)n+1 \\
&\text{VIII} && T_{k-n}+T_{k-1}-\frac{3+4h\sigma}{1+h\sigma}T_k+T_{k+1} = \tilde{f}_k && \text{dla } k = (m-1)n+2, \ldots, mn-1 \\
&\text{IX} && T_{mn-n}+T_{mn-1}-\frac{2+4h\sigma}{1+h\sigma}T_{mn} = \tilde{f}_{mn}
\end{aligned}
$$

gdzie $\tilde{f}_k = \frac{h^2}{\varkappa}\dot{T}_k - qh^2$.

Obliczenia wykonane zostały wg schematu przedstawionego na rys. 1, przy czym odpowiednie układy równań rozwiązano metodą nadrelaksacji (SOR). Wyniki obliczeń numerycznych porównano z wynikami otrzymanymi wg zależności (16). Przykładowo dla liczby podziałów $m = 5$ oraz 10 otrzymano przybliżenie z błędem względnym δ:
a) obszar o przekroju kwadratowym $a = b$, $a\sigma = 5$:

$$m = 5, \quad 0{,}001 < \delta < 0{,}02$$
$$m = 10, \quad 0{,}0005 < \delta < 0{,}009$$

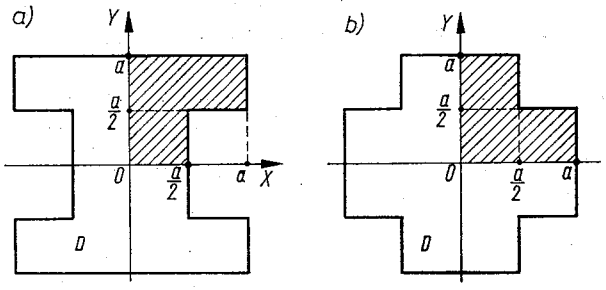
b) obszar o przekroju prostokątnym $a = 2b$, $b\sigma = 5$:

$$m = 5, \quad 0{,}0003 < \delta < 0{,}01$$
$$m = 10, \quad 0{,}0002 < \delta < 0{,}008$$

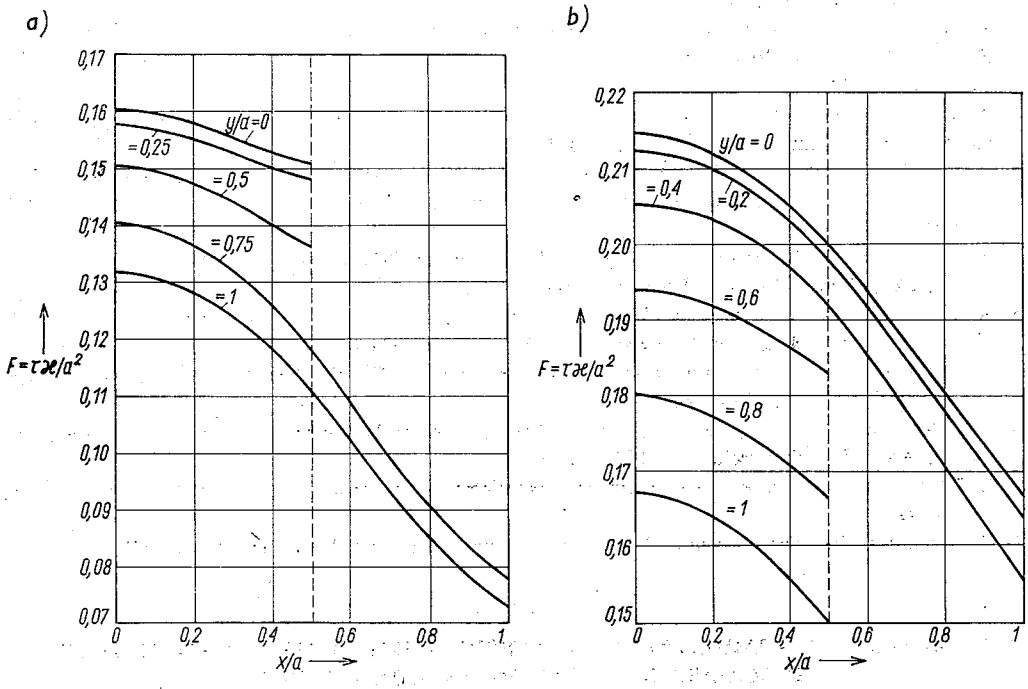
Na rys. 3 przedstawiono rozkład funkcji $F = \tau\varkappa/a^2$ dla przekroju kwadratowego $a = b$, gdy $a\sigma = 5$.

Przykład 2

W przypadku bardziej skomplikowanego brzegu S obszaru D, zadanie poszukiwania dokładnego rozwiązania analitycznego, dla zagadnienia brzegowego (12÷14) i stąd stałej czasowej przebiegu T, napotyka na trudności. Rozpatrzone zostały przykłady, gdy obszar D posiada kształt przedstawiony na rys. 4a i 4b. Obliczona zaproponowaną techniką funkcja $F = \tau\varkappa/a^2$ zilustrowana została na rys. 5a i 5b.



Rys. 4. Przyjęte do obliczeń obszary D



Rys. 5 Wykresy funkcji $F = \tau x/a^2$ dla obszarów przedstawionych na rys. 4ab

4. ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiono algorytm numerycznego obliczania zastępczej stałej czasowej procesów dyfuzyjnych, wykorzystujący metodę różnic skończonych. Pozwala on na wykorzystanie istniejących i dobrze opracowanych metod szybkiego rozwiązywania dużych układów równań algebraicznych z macierzami wstęgowymi np. metody nadrelaksacji (SOR), algorytmu George'a czy algorytmu korzystającego z szybkiej transformaty Fouriera (FFT) [5, 12]. Metodę można z powodzeniem stosować do zagadnień, gdzie uzasadnione jest wprowadzenie równomiernego podziału oraz występująca w równaniu (1) funkcja f jest ciągła. W przeciwnym razie należałoby stosować metodę elementów skoń-

czonych [8]. Obliczenie czasu trwania stanów nieustalonych pól opisanych równaniem przewodnictwa, za pomocą MES będzie stanowiło temat następnej pracy autora.

Artykuł powstał w ramach współpracy z Instytutem Maszyn Matematycznych w Warszawie. Autor składa serdeczne podziękowania Ośrodkowi Obliczeniowemu IMM za umożliwienie realizacji obliczeń ilustrujących rozważania teoretyczne, leżące u podstaw tej pracy.

LITERATURA

1. A. Avramescu, *Eindringzeit des elektromagnetischen Feldes und des Wärmefeldes im Leiter*, ETZ-A 1970, ss. 235—238.
2. A. Brykalski, W. Lipiński, J. Purczyński, *Anwendung der Variationsmethode von Ritz zur Bestimmung der mittleren Zeitkonstante von Diffusionsvorgängen*, Arch. f. Elektrotechn. 66, 1983, ss. 13—18.
3. A. Brykalski, *O pewnej metodzie obliczania zastępczej stałej czasowej procesów dyfuzyjnych*, Rozpr. Elektrotechn. 1985 t. 31, z. 2, s. 305—315.
4. L. Collatz, *Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych*, PWN, Warszawa 1960.
5. M. Dryja, J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*. Cz. 2, WNT, Warszawa 1982.
6. T. Kaczorek, *Macierze w automatyce i elektrotechnice*, WNT, Warszawa 1984.
7. E. Kącki, *Termokinetyka*, WNT, Warszawa 1966.
8. A. Krawczyk, *O metodach elementów i różnic skończonych na przykładzie wyznaczania pola elektrostatycznego*, Rozpr. Elektrotechn. 29, 1983, z. 3, ss. 679—688.
9. W. Lipiński, R. Sikora, *Über die Zeitkonstante der Wirbelströme*, Z. Elektr. Inf. u. — Energietechnik 6, 1976, ss. 305—309.
10. C. I. Mocanu, *Nichtstationäre Stromverdrängung in einer Maschienennut von rechteckigem Querschnitt*, Arch. f. Elektrotechn. 55, 1973, ss. 164—170.
11. J. Turowski, *Obliczenia elektromagnetyczne elementów maszyn i urządzeń elektrycznych*, WNT, Warszawa 1982.
12. D. Young, *Iterative solution of large linear systems*, Academic Press, New York 1971.

A. BRYKALSKI

ON NUMERICAL DETERMINATION OF TRANSIENT PHENOMENA DURATION OF FIELDS DESCRIBED BY EQUATIONS OF CONDUCTIVITY

Summary

In the paper the possibility of utilizing the finite differences method for determination of transient phenomena duration has been considered. The presented method has been illustrated with analytical examples. Quantitative comparative analysis of the proposed method has been carried out.

A. BRYKALSKI

DÉTERMINATION NUMÉRIQUE DE LA DURÉE DES ÉTATS INSTABLES DES CHAMPS DÉCRITS PAR L'ÉQUATION DE CONDUCTIBILITÉ

Résumé

Dans l'étude on a examiné la possibilité d'application de la méthode des différences finies pour la détermination de la durée des états instables des champs décrits par l'équation de conductibilité. La mét-

hode présentée a été illustrée par des exemples de calcul. On a fait une analyse comparative quantitative de la méthode présentée.

A. BRYKALSKI

ÜBER NUMERISCHE BESTIMMUNG DER DAUER VON UNSTATIONÄREN ZUSTÄNDEN DER MITTELS EINER LEITUNGSGLEICHUNG BESCHRIEBENEN FELDER

Zusammenfassung

In dem Artikel wurde die Möglichkeit erwogen, das Verfahren der endlichen Differenzen zur Bestimmung der Dauer von unständigen Zuständen der mittels einer Leitungsgleichung beschriebenen Felder anzuwenden. Die dargestellte Methode wurde an einigen Beispielen erläutert. Es wurde eine vergleichende Mengenanlyse für das erörterte Verfahren gebracht.

А. БРЫКАЛЬСКИ

НУМЕРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ НЕСТАЦИОНАРНОГО СОСТОЯНИЯ ПОЛЯ ОПИСАННОГО УРАВНЕНИЕМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Резюме

Рассмотрена возможность применения разностной схемы для определения продолжительности нестационарного состояния поля описанного уравнением теплопроводности. Представленный метод иллюстрован численными примерами. Проведен количественный сравнимельный анализ представленного метода.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1986, 32, z. 1 ss. 13-21

621.3.05:621.391.3

General solution of telegraphist's equation for nonhomogenous line and non-zero initial conditions

WIESŁAW STAŃCZAK (WARSZAWA)

Instytut Podstaw Informatyki Polskiej Akademii Nauk

Otrzymano 1984.02.06

The telegraphist's equations for a single line are considered. Resistance, inductance, conductance and capacitance per unit of lenght may vary along the line. The equations are solved for arbitrarily chosen initial and boundary conditions. The results obtained are used to verify some assumptions which constitute the foundations of the approximate transmission line theory in presence of small irregularities.

1. PRELIMINARIES

Let us consider a linear system being a single separated transmission line of lenght $l > 0$. By $T = (0, +\infty)$ we denote the time axis. $X = [0, l]$ is here a straight line segment representing the whole transmission line. The performance of this transmission line is described by Maxwell's equations.

In the case considered here they yield a pair of first order partial differential equations (see, e.g. [6]) describing the interdependence between current and voltage over the domain being the Cartesian product $X \times T$. Applying Laplace transform (see, e.g. [2, 5, 7]) to the time domain we obtain

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = R * I + L * (sI - i), \tag{1}$$

$$-\frac{\partial I}{\partial x} = G * U + C * (sU - u), \tag{2}$$

where * denotes the convolution operator, and s is so-called the derivation operator. $U = U(x, s)$ and $u = u(x, 0+)$ are Laplace transform of voltage and the value of voltage at the moment $0+$ (the initial condition), respectively, both taken in each point $x \in X$. The same refers to current, i.e. $I = I(x, s)$ and $i = i(x, 0+)$. Moreover, $R = R(x, s)$, $L = L(x, s)$, $G = G(x, s)$ and $C = C(x, s)$ are Laplace transforms of line electrical parameters per unit length measured at each point $x \in X$, i.e. resistance, inductance, conductance and capacitance, respectively. Couplings are omitted according to the assumption that the line is single and separated.

2. ASSUMPTIONS

Equations (1) and (2) constitute the general form of Laplace transform for telegraphist's equations without couplings. In the classic approaches (see, e.g. [5]) it is assumed that the line is homogeneous, i.e. that R, L, G and C depend upon neither x nor s. Moreover, in many papers and textbooks the initial conditions are taken to be zero. These simplifications lead to the well known pair of first order homogeneous linear ordinary differential equations with constant parameters, and thus to the simple second order homgeneous linear ordinary differential equation with constant parameters, which can be easily solved by quadrature. In fact, R, L, G and C depend on x and on frequency, i.e. upon s. Moreover, by taking $i = u = 0$ for each $x \in X$ we assume that there was no transmission through the line before. The paper deals with a more general case. It is assumed here that the parameters R, L, G and C are independent of the frequency only, which is a good approximation for a narrow-band transmission. Then, from (1) and (2) we obtain a similar pair of equations, where * is replaced by ordinary multiplication (obviously, now $R = R(x)$, $L = L(x)$, $G = G(x)$ and $C = C(x)$). And, in this sense we understand (1) and (2) throughout the remaining part of the paper.

Moreover, we assume that U and I have derivatives of second order, and R, L, $i(x, 0+)$ have first derivatives, and further that $(G^2+C^2)\,(R^2+L^2) > 0$ for each $x \in X$. Finally, it should be pointed out that the linearity of the electrical system considered means that R, L, G and C are independent of U and I.

3. SOME SPECIFIC SOLUTION FOR THE SYSTEM (1)÷(2)

Now, we proceed as in the classic approaches, i.e. we determine I on the basis of (1), obtaining

$$I = \left(L(x)i(x, 0+) - \frac{dU}{dx}\right)\frac{1}{D(x, s)} \tag{3}$$

(since s is a parameter only, then here and throughout the remaining part of the paper we use the ordinary differentiation symbol instead of the partial one), where $D(x, s) = R(x)+sL(x)$. Substituting the result in (2) and denoting $F(x, s) = G(x)+sC(x)$, we easily get

$$-\frac{d}{dx}\left(L(x)i(x, 0+) - \frac{dU}{dx}\right)\frac{1}{D(x, s)} = F(x, s)\,U - C(x)u(x, 0+). \tag{4}$$

Let us denote

$$P(x, s) = \frac{dL(x)i(x, 0+)}{dx} - L(x)i(x, 0+)\frac{d\ln D(x, s)}{dx} - D(x, s)\,C(x)u(x, 0+), \tag{5}$$

and introduce a so-called linear differential operator

$$K[U] = \frac{d^2U}{dx^2} - \frac{d\ln D(x, s)}{dx}\frac{dU}{dx} - D(x, s)F(x, s)\,U. \tag{6}$$

Then, (4) can be rewritten in the form

$$K[U] = P(x, s), \tag{7}$$

i.e. the second order nonhomogeneous differential equation.

We begin with the homogeneous equation, i.e.

$$K[U] = 0. \tag{8}$$

Applying the substitutions $h = h(x, s) = \int_0^x D(x, s)dx$ and $U = e = e(h)$, we can rearrange (8) as follows

$$D^2(x, s)\frac{d^2e}{dh^2} - D(x, s)F(x, s)e = 0,$$

and, due to the fact that $D(x, s)$ is non-zero (see Section 2),

$$\frac{d^2e}{dh^2} - \frac{e}{Z^2} = 0, \tag{9}$$

where

$$Z = Z(x) = \sqrt{\frac{D(x, s)}{F(x, s)}} = \sqrt{\frac{R(x)+sL(x)}{G(x)+sC(x)}}$$

is a well known parameter of transmission line called its characteristic impedance. Since Z does not depend upon U as we handle a linear system, i.e. it is not a function of e, then (9) is a second order linear homogeneous ordinary differential equation and we can treat it as an equation with constant coefficients (for reasons, see [3], points 2.75, 2.79 and 2.80 of Chapter 2, Pt. 3). Thus, its general solution takes the form

$$e = S_1 \exp\left(-\frac{h}{Z}\right) + S_2 \exp\left(\frac{h}{Z}\right),$$

where S_1 and S_2 are arbitrarily chosen constants. Therefore,

$$U = S_1 \exp\big(-g(x, s)\big) + S_2 \exp\big(g(x, s)\big) \tag{10}$$

is the general solution for the homogeneous equation (8), where

$$g(x, s) = \frac{1}{Z(x)} \int_0^x D(x, s)dx \tag{11}$$

is some parameter of transmission line, which will be discussed further.

It can be easily verified in a similar way that for I we obtain an equation analogous to (8). Hence, some specific solution for I takes the form identical to that described by (10). It follows from the symmetry of (1) and (2) with respect to U and I.

Let us return to (5). From the definition of $P(x, s)$ it follows that the initial conditions being zero imply $P(x, s) = 0$. Hence, the homogeneous equation (8) can be applied to describe each situation in which $i = u = 0$. Thus, (10) gives the general solution in this case.

4. THE GENERAL SOLUTION FOR THE NONHOMOGENEOUS CASE

To attain the general solution for the nonhomogeneous equation (7) we can use the technique of parameters variation. Considering that now S_j depends on $x, j = 1, 2$, we obtain

$$\exp(-g(x,s))\frac{dS_1(x)}{dx}+\exp(g(x,s))\frac{dS_2(x)}{dx}=0, \tag{12}$$

$$-\exp(-g(x,s))\frac{dS_1(x)}{dx}+\exp(g(x,s))\frac{dS_2(x)}{dx}=P(x,s)\left(\frac{dg(x,s)}{dx}\right)^{-1}. \tag{13}$$

Solving the system (12)÷(13), we get

$$\frac{dS_j(x)}{dx}=\left(j-\frac{3}{2}\right)P(x,s)\left(\frac{dg(x,s)}{dx}\right)^{-1}\exp\left(\left(\frac{3}{2}-j\right)g(x,s)\right), \tag{14}$$

for $j = 1, 2$, i.e.

$$S_j = S_j(x) = K_j + A_j(x), \tag{15}$$

where

$$A_j = A_j(x) = \left(j-\frac{3}{2}\right)\int_0^x P(x,s)\left(\frac{dg(x,s)}{dx}\right)^{-1}\exp\left(\left(\frac{3}{2}-j\right)g(x,s)\right)dx, \tag{16}$$

for $j = 1, 2$. The parameters $K_j = K_j(s), j = 1, 2$, are independent of x and have to be chosen to satisfy the boundary conditions (we recall that the initial conditions are given in terms of i and u). Thus, the general solution of (7) takes the form described by (10), where S_1 and S_2 are determined by (15)÷(16). Obviously, the formula for I is analogous to that for U.

Some special case of the general solution obtained above, namely for constant R, L, G and C, is derived in [5] (see pages 589—591), and the reader is referred there for interpretations.

5. BOUNDARY CONDITIONS

The boundary conditions for the system (1)÷(2) are usually written in the following form (see, e.g. [1, 4, 5])

$$U(0,s) = E(s) - I(0,s)Z_1, \tag{17}$$

$$U(l,s) = I(l,s)Z_2, \tag{18}$$

where $E(s)$ is Laplace transform of the input voltage to the transmission line, and Z_1, Z_2 are impedances of transmitter and receiver, respectively (see Fig. 1). By inserting (10) in (3) and applying (12), we easily get

$$I = \left\{L(x)i(x,0+)+[S_1\exp(-g(x,s))-S_2\exp(g(x,s))]\frac{dg(x,s)}{dx}\right\}\frac{1}{D(x,s)}. \tag{19}$$

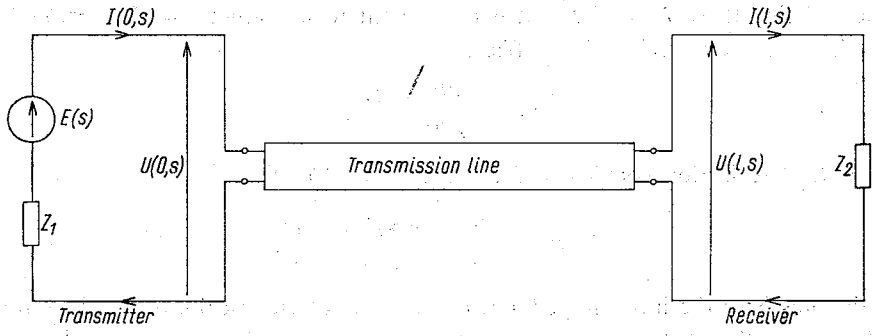


Fig. 1. The interpretation of boundary conditions for the telegraphist's equations

From (11) it follows that $g(0, s) = 0$, and

$$\frac{dg(x,s)}{dx} = \frac{D(x,s)}{Z(x)} - \frac{1}{Z(x)}\left(\frac{dZ(x)}{dx}\right) g(x,s), \tag{20}$$

i.e.

$$\left.\frac{dg(x,s)}{dx}\right|_{x=0} = \gamma(0,s), \tag{21}$$

where

$$\gamma(x,s) = \sqrt{D(x,s)F(x,s)}$$

is a well known parameter of transmission line called its propagation factor. According to (16) we have $A_1(0) = A_2(0) = 0$. Thus, after some simple arithmetic manipulations, the condition (17) can be rewritten as follows

$$K_1 \frac{Z(0)+Z_1}{Z(0)} + K_2 \frac{Z(0)-Z_1}{Z(0)} = E(s) - \frac{L(0)i(0,0+)Z_1}{D(0,s)}. \tag{22}$$

Furthermore, substituting (19) in (18), we easily obtain

$$K_1 \frac{Z(l)-r(l)Z_2}{Z(l)} \exp\big(-g(l,s)\big) + K_2 \frac{Z(l)+r(l)Z_2}{Z(l)} \exp\big(g(l,s)\big) = W(l,s), \tag{23}$$

where

$$W(l,s) = A_1(l) \frac{Z(l)-r(l)Z_2}{Z(l)} \exp\big(-g(l,s)\big) - A_2(l) \frac{Z(l)+r(l)Z_2}{Z(l)} \exp\big(g(l,s)\big) + \frac{L(l)i(0,l)Z_2}{D(l,s)}, \tag{24}$$

and

$$r(x) = \frac{Z(x)}{D(x,s)} \frac{dg(x,s)}{dx}. \tag{25}$$

The system (22) ÷ (23) determines the values of constant coefficients K_1 and K_2 in terms of line parameters (i.e. R, L, C, G, $i(x, 0+)$ and $u(x, 0+)$), transmitter and receiver impedances (Z_1 and Z_2, respectively) and input voltage $E(s)$. Before we give the explicit

formulae defining these K_1 and K_2, it is convenient to introduce so-called reflection coefficients, i.e. the input reflection coefficient

$$M = \frac{Z(0)-Z_1}{Z(0)+Z_1}, \tag{26}$$

and the output reflection coefficient for the xth point of line

$$N(x) = \frac{Z(x)-r(x)Z(x+)}{Z(x)+r(x)Z(x+)}. \tag{27}$$

$Z(x+)$ denotes here the input impedance of this part of electrical circuit which immediately follows the xth point (or the segment $[0, x]$) of transmission line, $x \in X$. For instance, in the special case where $x = l$, we have $Z(x+) = Z_2$, and, moreover

$$N = N(l) = \frac{Z(l)-r(l)Z_2}{Z(l)+r(l)Z_2} \tag{28}$$

Furthermore, we denote

$$H(s) = \left(E(s) - \frac{L(0)i(0,0+)Z_1}{D(0,s)}\right)\frac{Z(0)}{Z(0)+Z_1}, \tag{29}$$

i.e. the effective voltage in the input of line, and

$$V(l,s) = W(l,s)\frac{Z(l)}{Z(l)+r(l)Z_2} \tag{30}$$

which has a similar interpretation as $H(s)$.

Now, we are in a position to write the solutions of (22) ÷ (23) in a relatively brief form. Namely

$$K_1 = \frac{H(s)-MV(l,s)\exp(-g(l,s))}{1-MN\exp(-2g(l,s))}, \tag{31}$$

$$K_2 = \frac{-NH(s)\exp(-g(l,s))+V(l,s)}{1-MN\exp(-2g(l,s))}\exp(-g(l,s)). \tag{32}$$

Summarizing, the solution of the nonhomogeneous equation (7) is given in its general form by (10). The coefficients S_1 and S_2 are described by (15) and (16), where K_1 and K_2 can be determined with the aid of (31) and (32). In other words, we have found the general and complete solution of telegraphist's equations in the case when the parameters R, L, G and C did not depend upon frequency. In the next section we apply this result to verify some assumptions which constitute the foundations of the approximate theory for transmission line with small irregularities.

6. TRANSMISSION LINE WITH SMALL IRREGULARITIES

The cumulative effect of nonhomogenity in a transmission line can be measured as the deviation between a signal sent over this line and a signal passing via a homogeneous line under the assumption that both signals have the same shape and amplitude when they

are generated in the transmitter. Therefore, this deviation evaluated at a point $x \in X$ can be defined as

$$Q(x) = \frac{U(x, s) - (1 - N(x)) U_h(x, s)}{(1 - N(x)) U_h(x, s)}, \tag{33}$$

where the subscript h means that the voltage (and other parameters) is observed in the homogeneous line.

For the sake of simplicity we consider only the case with the zero initial conditions. Let us assume that $Z_h(x) = Z(0) = Z_0$, $Z_{1h} = Z_1$, $E_h(s) = E(s)$, and $\gamma_h(x, s) = \gamma$. Hence (see, e.g. [1, 4, 5]), the voltage in the homogeneous line in absence of echo phenomenon is given by the formula

$$U_h(x, s) = \frac{E(s) Z_0}{Z_1 + Z_0} \exp(-x\gamma). \tag{34}$$

Therefore, from (33) we get

$$Q(x) = \frac{1 - N \exp\big(2(g(x, s) - g(l, s))\big)}{(1 - N(x))\big(1 - MN \exp(-2g(l, s))\big)} \exp\big(x\gamma - g(x, s)\big) - 1. \tag{35}$$

The transmission cables are produced and installed so their lines are sufficiently homogeneous. Small irregularities are frequently caused by defects in geometrical structures of cables. It can be shown (see, e.g. pp. 272—306 and 348—367 in Vol. 1 of [4]) that these defects have the opposite impact on the value of $D(x, s)$ than on $F(x, s)$. Let us assume $x \neq 0$ and rewrite (11) in the form

$$g(x, s) = x D_m(x, s) \sqrt{\frac{F(x, s)}{D(x, s)}}, \tag{36}$$

where

$$D_m(x, s) = \frac{1}{x} \int_0^x D(x, s) dx. \tag{37}$$

From (36) and (37) it follows that $x^{-1} g(x, s)$ can be interpreted as a generalized propagation factor, and its value varies sufficiently small, and we can take $g(x, s) \approx x\gamma$. This result implies that (35) reduces to the following approximate equality

$$Q(x) \approx Y(x) B(x) - 1,$$

where

$$Y(x) = \frac{1 - N \exp\big(2(x - l)\gamma\big)}{1 - MN \exp(-2\gamma l)},$$

i.e. depends upon l, reflection coefficients (input and output) and $\exp(\gamma x)$ only. Thus, irregularities are represented by

$$B(x) = \frac{Z(x) + r(x) Z(x+)}{2r(x) Z(x+)}. \tag{38}$$

The same arguments as for the $g(x, s)$'s estimation yield $\gamma(x, s) \approx \gamma$. Hence, from (25) and (20) we easily get

$$r(x) \approx 1 - \frac{x}{Z(x)} \frac{dZ(x)}{dx}. \tag{39}$$

Therefore, combining (38) and (39), we obtain that $\frac{1}{Z(x)} \frac{dZ(x)}{dx}$ is the main factor describing the small internal irregularities in a transmission line. It confirms the previous results (see, e.g. [4]) derived in a more heuristic way.

ACKNOWLEDGMENTS

I am indebted to Doc. Dr. hab. Mieczysław Rydel, Dept. of Telecommunication, Warsaw Techn. University, for his encouragment to publish these results and for his helpful discussion on the preliminary version of the paper.

Tłumaczenie ang. na prawach rękopisu.

REFERENCES

1. T. Cholewicki, *Elektryczne linie długie i układy drabinkowe niejednorodne*, PWN, Warszawa 1974.
2. G. Doetsch, *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation*, R. Oldenbourg, München 1961.
3. E. Kamke, *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen*, Akademie-Verlag, Leipzig 1959.
4. W. Nowicki, *Podstawy teletransmisji*, WKiŁ, Warszawa 1971, 1974.
5. J. Osiowski, *Zarys rachunku operatorowego. Teoria i zastosowania w elektrotechnice*, WNT, Warszawa 1981.
6. S. A. Schelkunoff, *Conversion of Maxwell's equations into generalized telegraphist's equations*, Bell System Techn. J., Vol. 34, No 5, 1955, pp. 995—1044.
7. A. H. Zemanian, *Distribution theory and transform analysis. An introduction to generalized functions with applications*, McGraw Hill, New York 1965.

W. STAŃCZAK

ROZWIĄZANIE OGÓLNE RÓWNAŃ TELEGRAFISTÓW DLA LINII NIEJEDNORODNEJ PRZY NIEZEROWYCH WARUNKACH POCZĄTKOWYCH

Streszczenie

W artykule rozważa się równania telegrafistów dla pojedynczej linii. Zakłada się, że oporność, indukcyjność, przewodność i pojemność jednostkowa mogą zmieniać się wzdłuż linii. Równania rozwiązuje się przy dowolnych warunkach początkowych i brzegowych. Uzyskane wyniki wykorzystuje się do weryfikacji niektórych założeń leżących u podstaw przybliżonej teorii linii transmisyjnej z małymi niejednorodnościami.

W. STAŃCZAK

RÉSOLUTION GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS DES TÉLÉGRAPHISTES DE LA LIGNE INHOMOGÈNE POUR CONDITIONS INITIALES NON NEUTRES

Résumé

Dans l'article on examine les équations des télégraphistes pour une ligne séparée. On admet que la résistance, l'inductance, la conductibilité et la capacité unitaire peuvent varier le long de la ligne. Les équ-

ations sont résolues pour les conditions initiales et aux limites arbitraires. Les résultats obtenus sont utilisés pour la vérification de certaines hypothèses servant de base à la théorie approximée de la ligne de transmission à petites inhomogénéités.

W. STAŃCZAK

ALLGEMEINE LÖSUNGEN VON TELEGRAPHENGLEICHUNGEN FÜR INHOMOGENE LEITUNGEN BEI NULLABWEICHENDEN ANFANGSBEDINGUNGEN

Zusammenfassung

Im Aufsatz wurden Telegraphengleichungen für eine einzelne Leitung erwogen. Es wurde angenommen, daß Resistanz, Induktivität, Konduktanz und Kapazität längs dieser Einzelleitung variieren können. Die Gleichungen werden bei beliebigen Anfangs- und Randbedingungen gelöst. Die gewonnenen Ergebnisse können zur Verifizierung mancher Voraussetzungen genutzt werden, die Grundlage der angenäherten Theorie der Übertragungsleitung mit geringen Inhomonitäten bilden.

В. СТАНЬЧАК

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ И НЕНУЛЕВЫХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Резюме

Рассматриваются телеграфные уравнения для одиночной линии, предполагая что единочное сопротивление, индуктивность, проводимость и емкость могут изменяться вдоль линии. Эти уравнения решаются для произвольных начальных и краевых условий. Полученные результаты используются для проверки предположений, на которых обоснована приближенная теория линии св язи малыми неоднородностями.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1986, 32, z. 1, ss. 23-30

621.3.08

Błąd graniczny toru przetwarzania określony przez producenta i obliczony na podstawie granicznych błędów przetworników

ROMUALD RAKOWSKI (JELENIA GÓRA)

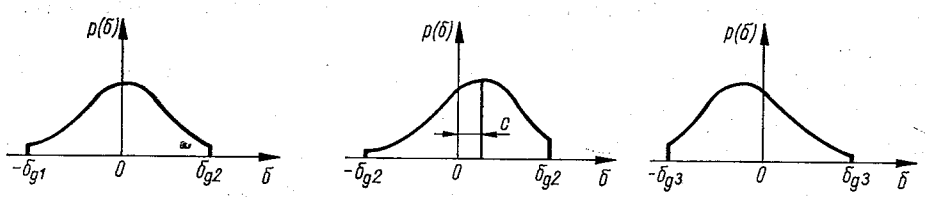
Wyższa Oficerska Szkoła Radiotechniczna

Otrzymano 04.05.1984

Rozpatrzono zagadnienie błędów granicznych układu przetworników. Określono stosunek błędu granicznego toru przetwarzania obliczonego statystycznie do błędu określonego przez producenta dla tego samego zestawu podzespołów. Przedstawiono również zmiany stosunku wymienionych błędów ze wzrostem liczby przetworników.

Przyrządy pomiarowe przedstawiają sobą najczęściej łańcuch przetworników stanowiących tor przesyłania i przetwarzania informacji. Natomiast złożony system pomiarowy zawiera z zasady znacznie większą liczbę podzespołów tworzących wiele torów. Można również wyodrębnić łańcuchy połączonych przetworników na różnym etapie działania w różnych przedziałach czasu. Często te same podzespoły mogą wchodzić po kolei do kilku układów przetwarzania w rozwijającym się procesie działania urządzenia. W artykule poddany zostanie analizie błąd graniczny toru zawierającego m przetworników. Jak wiadomo każdy z nich charakteryzuje się błędem granicznym względnym $\frac{G_i}{x_i}$ lub bezwzględnym G_i.

Błędy przetworników rozkładają się wg krzywych przykładowo przedstawionych na rys. 1 [1], [2]. Z badań [2], [3] wiadomo, że wartości błędu granicznego G_i lub $\frac{G_i}{x_i} = \delta_{gi}$ najczęściej obcinają rozkłady w punkcie 2,8 s, gdzie przez s oznaczono odchylenie średniokwadratowe rozkładu rodziny jednego typu. W najgorszym przypadku dla zachowania poziomu ufności błędów sumowanych statystycznie można przyjąć, że $G = 2{,}0s \div 1{,}8s$.



Rys. 1. Przykłady rozkładów błędów trzech typów przetworników. δ_{g1}, δ_{g2}, δ_{g3} — błędy graniczne określone przez producenta, p(δ) — gęstość prawdopodobieństwa występowania błędów względnych

Znacznie precyzyjniej da się scharakteryzować rozkłady przetworników przedstawione na rys. 1, za pomocą parametru kształtu r i asymetrii q, zdefiniowanych w literaturze [1]:

$$r = \frac{s}{|G|}, \quad q = \frac{c}{|G|}, \tag{1}$$

gdzie c — przesunięcie równe wartości przeciętnej (rys. 1)

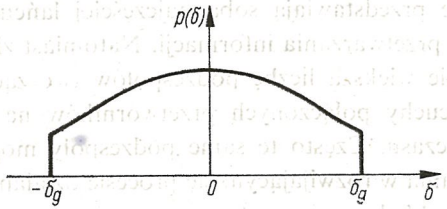
Rozkłady błędów przetworników są przesunięte względem wartości zerowej i obcięte. Ich parametry zawierają się w granicach:

$$0{,}55 \geqslant r \geqslant 0{,}18, \quad 0{,}40 \geqslant q \geqslant -0{,}40 \tag{2}$$

z prawdopodobieństwem $P = 99\%$. Obcięte rozkłady pokazane na rys. 1 powstają w następstwie regulacji przyrządów przez producenta. Postępowanie takie jest podyktowane między innymi względami ekonomicznymi. Egzemplarze o błędach nieco większych od przyjętej wartości: G lub $\pm \delta_g$ reguluje się tak aby mieściły się w przedziale:

$$G_i \geqslant \Delta_i \geqslant -G_i \quad \text{lub} \quad \frac{G_i}{x_i} \geqslant \delta_i \geqslant -\frac{G_i}{x_i}. \tag{3}$$

W praktyce, co wynika z badań [2] przyrządów nowych i eksploatowanych, obcięcia przeważnie nie przekraczają 5% powierzchni rozkładu normalnego, tzn. że regulacji wymaga około 5 produkowanych egzemplarzy. Operacji tej można również dokonywać na elementach składowych aparatury.



Rys. 2. Niewłaściwie uformowany rozkład błędów typu przetwornika. Zbyt duże obcięcia

Gdyby założyć, że obcięcia sięgają $15 \div 30\%$ otrzymalibyśmy rozkład o kształcie przedstawionym na rys. 2. Rodzina przyrządów o nadmiernie obciętym rozkładzie wymagałaby częstych napraw i regulacji. Wiele egzemplarzy charakteryzowałoby się błędami leżącymi blisko granicznych. Prawdopodobieństwo przekroczenia przez te przyrządy wartości G lub δ_g byłoby duże. Poza tym już w produkcji znaczną część przyrządów (przetworników) należałoby regulować w celu wtłoczenia ich do przedziału $G \geqslant \Delta \geqslant -G$. Takie postępowanie nie znajduje uzasadnienia ekonomicznego i nie powinno być stosowane. Zbyt duże obcięcia zwiększają koszt produkcji i obniżają niezawodność metrologiczną. Praktyka ustaliła pewien optymalny kształt w granicach pokazanych na rys. 1 i określonych wyrażeniem (2).

Budując tor pomiarowy z przetworników o znanych $\pm G_i$ lub $\pm \delta_{gi}$ możemy obliczyć błąd całego urządzenia dwiema metodami:

— sumowania algebraicznego:

$$G'_{t,ob} = \pm(|G_1| + |G_2| + \ldots + |G_m|) \text{ dla } y = x_1 + x_2 + \ldots + x_m \tag{4}$$

$$\delta'_{gt,ob} = \pm(|\delta_{g1}| + |\delta_{g2}| + \ldots |\delta_{gm}|) \text{ dla } y = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots x_m \tag{5}$$

— lub statystycznie:

$$G''_{t,ob} = \pm \sqrt{G_1^2 + G_2^2 + \ldots G_m^2} \quad \text{dla } y = x_1 + x_2 + \ldots + x_m \tag{6}$$

$$\delta''_{gt,ob} = \pm \sqrt{\delta_{g1}^2 + \delta_{g2}^2 + \ldots \delta_{gm}^2} \quad \text{dla } y = x_1 \cdot x_2 \ldots x_m \tag{7}$$

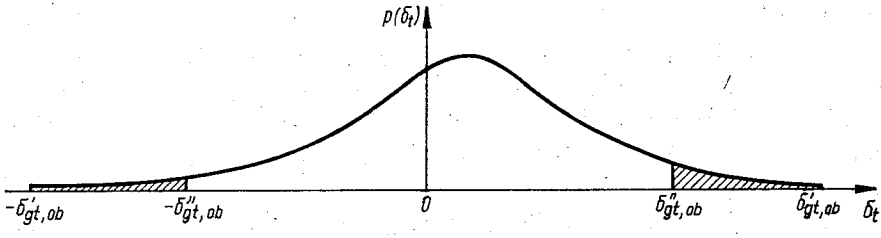
Dla dowolnych zależności $y = f(x_i)$ w przypadku ogólnym:

$$G'_{t,ob} = \pm \left(\left| \frac{\partial y}{\partial x_1} G_1 \right| + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} G_2 \right| + \ldots + \left| \frac{\partial y}{\partial x_m} G_m \right| \right) \tag{8}$$

$$G''_{t,ob} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} G_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} + G_2 \right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_m} G_m \right)^2} \tag{9}$$

przy czym: $\delta'_{gt,ob}$ — błąd graniczny względny toru przetwarzania obliczony metodą sumowania algebraicznego, $\delta''_{gt,ob}$ — błąd graniczny obliczony statystycznie, $G'_{t,ob}$ i $G''_{t,ob}$ — odpowiadające wymienionym błędy bezwzględne. Z ogólnych wzorów (8) i (9) łatwo przechodzi się na wyrażenia operujące błędami względnymi [1].

Rozkład błędów toru pomiarowego zawierającego m przetworników przyjmuje kształt przedstawiony przykładowo na rys. 3 [2].



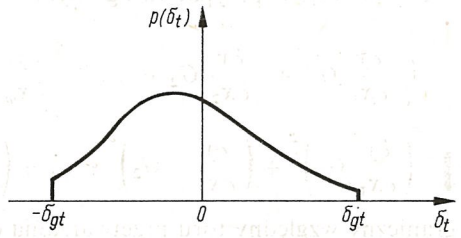
Rys. 3. Rozkład błędów obliczonych toru złożonego z m przetworników

Przyjęcie błędu równego sumie algebraicznej $\pm \delta'_{g_{t,ob}}$ lub $\pm G'_{t,ob}$ byłoby niedorzecznością z punktu widzenia potrzeb praktyki. Wprawdzie prawdopodobieństwo jego zachowania (nieprzekroczenia) jest równe 100% ale prawdopodobieństwo wystąpienia takiego przypadku jest bardzo małe. Wobec tego błąd toru pomiarowego należy określać statystycznie za pomocą wyrażenia (9), którego szczególnym, często występującym przypadkiem, jest wzór (7). Poziom ufności błędów obliczonych statystycznie zawiera się przeważnie w granicach od $P \geqslant 95\%$ do $P \geqslant 99\%$ [1] [2] [3].

Rozkład przedstawiony na rys. 3 dotyczy rodziny układów (torów) określonego typu nie sprawdzanych i nie regulowanych przez producenta. Można również układ przetwarzania zestawić z podzespołów o znanych parametrach, także błędach G_i lub δ_g. Z takim przypadkiem zetkniemy się kiedy układ utworzymy z przetworników wymiennych np. jak to się robi w niektórych nowoczesnych oscyloskopach. Przypadek ten obejmuje również układy budowane w laboratoriach z podzespołów wykonanych fabrycznie.

W torach wykonywanych na stałe z elementów niewymiennych producent przyjmuje błędy graniczne G_t, δ_{gt} dla całego łańcucha i sprawdza dokładność wskazań każdego egzemplarza kanału przetwarzania. Z rozkładu o kształtach zbliżonych do podanego na rys. 3 tworzy się rozkład obcięty, rys. 1. Zestawy o błędach przekraczających $\pm \delta_{gt}$

reguluje się i wtlacza do przedziału $\delta_{gt} \geqslant \delta_t \geqslant -\delta_{gt}$. Rozkład błędów typu torów przetwarzania (o regulowanej dokładności w egzemplarzach niemieszczących się w granicach $\delta_{gt} \geqslant \delta_t \geqslant -\delta_{gt}$) wyrazi się kształtem przedstawionym przykładowo na rys. 4 podobnym do rozkładów na rys. 1.



Rys. 4. Rozkład błędów typu torów przetwarzania o regulowanej dokładności w egzemplarzach przekraczających przyjęte graniczne wartości $\pm\delta_{gt}$

Błąd obliczony statystycznie na podstawie błędów przetworników δ_{gi} najczęściej odbiega od wartości δ_{gt} uzyskanej w wyniku ustaleń w toku produkcji i regulacji niektórych egzemplarzy. Prawdopodobieństwo zachowania błędów sumowanych statystycznie osiąga najczęściej wartość $P_{\delta gt,ob} \geqslant 95\%$, a błędów ustalonych i gwarantowanych przez producenta $P_{\delta gt} = 100\%$. Różnice te spowodowane są sprawdzaniem wskazań i regulacją w egzemplarzach o błędach odbiegających od wartości granicznych δ_{gt}. Użytkownik aparatury powinien widzieć te różnice. Błąd δ_{gt} nie zostanie przekroczony we wszystkich sprawnych egzemplarzach, a błąd obliczony statystycznie $\delta''_{gt,ob}$ w kilku przypadkach $1 \div 5$ na sto będzie nieco większy.

Spróbujmy ocenić stosunek błędu obliczonego $\delta''_{gt,ob}$ do ustalonego δ_{gt} łańcucha przetworników wchodzących w skład toru przetwarzania. Parametry: r, q, s, G, δ_g i c można uśredniać.

Wobec tego otrzymamy:

$$c_{śr} = \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_m}{m} \tag{10}$$

$$\delta_{gśr} = \frac{\delta_{g_1} + \delta_{g2} + \ldots + \delta_{gm}}{m} \tag{11}$$

$$s_{śr} = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_m^2}}{m} \tag{12}$$

$$q_{sr} = \frac{q_1 + q_2 + \ldots + q_m}{m}. \tag{13}$$

Wyrażenia $10 \div 13$ wynikają z prawidłowości powstawania splotów z obciętych i przesuniętych (o wartość c) rozkładów normalnych, rys. 1.

Parametry rozkładu wypadkowego błędów całego toru (splotu) wyniosą:

$$s_t = \sqrt{m} \cdot s_{śr} \tag{14}$$

$$r_t = \frac{s_t}{m\delta_{g\acute{s}r}} = \frac{\sqrt{m}s_{\acute{s}r}}{m\delta g_{\acute{s}r}} = \frac{r_{\acute{s}r}}{\sqrt{m}} \tag{15}$$

$$c_t = mc_{\acute{s}r} \tag{16}$$

$$q_t = \frac{c_{\acute{s}r}}{|\delta_{g\acute{s}r}|}. \tag{17}$$

Określmy następnie rozkład wypadkowy — splot obliczony na podstawie rozkładów granicznych przetworników najmniej korzystnych dla zachowania wysokich poziomów ufności $P_{\delta'_{gt,ob}}$, tzn. dla $r = 0{,}55$, $q = 0{,}40$. Założyliśmy w ten sposób, że wszystkie przetworniki charakteryzują się takimi samymi wartościami r i q, wówczas $q_{\acute{s}r} = 0{,}40$ i $r_{\acute{s}r} = 0{,}55$. Wiadomo, że błędy graniczne dla m przetworników wyniosą:

$$\delta'_{gt,ob} = m\delta_{g,\acute{s}r} \tag{18}$$

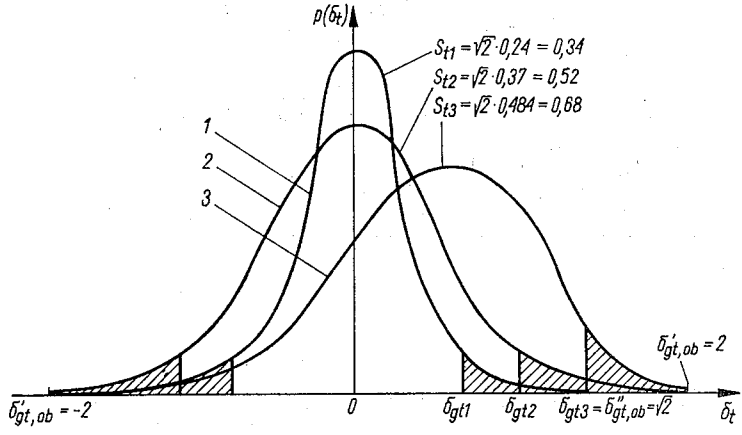
$$\delta''_{gt,ob} = \sqrt{m}\,\delta_{g\acute{s}r}. \tag{19}$$

Przyjmijmy, że $\delta_{g\acute{s}r} = 1$ i utrzymując w mocy założenie, że wszystkie przetworniki charakteryzują się wartościami: $q = 0{,}40$, $r = 0{,}55$ otrzymamy: $q_{\acute{s}r} = 0{,}40$, $r_{\acute{s}r} = 0{,}55$, $\delta'_{gt,ob} = m$, $\delta''_{gt,ob} = \sqrt{m}$, $s_t = \sqrt{m}\,0{,}55$, $c_t = m\ 0{,}4$. Jest to przypadek nierealny przy większej liczbie zmiennych, ponieważ ze wzrostem m, $q_{\acute{s}r} \to 0$ a $r_{\acute{s}r}$ do 0,37 [2] [3].

Drugi rozkład graniczny, krańcowy błędów przetworników, najbardziej korzystny dla otrzymania wysokiego poziomu ufności $P_{\delta''_{gt,ob}}$, charakteryzuje się wartościami: $q = 0$, $r = 0{,}18$. Zakładając jak wyżej, że $\delta_{g\acute{s}r} = 1$ i przyjmując jednakowe rozkłady otrzymamy: $\delta'_{gt,ob} = \pm m$, $\delta''_{gt,ob} = \pm\sqrt{m}$, $s_t = \sqrt{m}\cdot 0{,}18$, $c_t = mc_{\acute{s}r} = 0$.

Najczęściej jednak wystąpią rozkłady o parametrach r i q równych lub zbliżonych do wartości średnich, a mianowicie: $r = 0{,}37$ i $q \approx 0$ [3], wtedy dla $\delta_{g,\acute{s}r} = 1$ otrzymamy: $\delta'_{gt,ob} = m$, $\delta''_{gt,ob} = \sqrt{m}$, $s_t = \sqrt{m}\,0{,}37$, $c_t = 0$.

Jak widać z przytoczonych przykładów błędy graniczne sumowane algebraicznie i statystycznie nie ulegają zmianie ze zmianą r i q. Zmieniają się tylko poziomy ufności błędów $\delta''_{gt,ob}$ lub $G''_{t,ob}$.



Rys. 5. Dwa graniczne rozkłady (1, 3) i rozkład pośredni (2) błędów toru składającego się z dwóch przetworników. δ_{gt1}, δ_{gt2}, δ_{gt3} — błędy graniczne określone przez producenta

Sporządźmy wykresy granicznych rozkładów dla $m = 2$ i $\delta_{g.śr} = 1$ toru składającego się tylko z dwóch przetworników, rys. 5. Przypadek największej rozbieżności między rozkładami granicznymi wystąpi właśnie dla dwóch zmiennych, wówczas dwa skrajne rozkłady [3] przetworników będą charakteryzowały się granicznymi wartościami średnimi: a) $q_{śr,g} = 0$, $r_{śr,g} = 0{,}24$ b) $q_{śr,g} = 0{,}2$, $r_{śr,g} = 0{,}484$.

Błędy ustalone przez producenta na poziomie ufności $P_{\delta gt} \geqslant 95\%$ dla trzech rozpatrywanych rozkładów (średniego i dwóch skrajnych) wyniosą:

$$\delta_{gt1} = 2s_{t1} = 0{,}68; \quad \delta_{gt2} = 2s_{t2} = 1{,}04; \quad \delta_{gt3} = 2s_{t3} = 1{,}41,$$

patrz rys. 5.

Rozpiętość między błędami granicznymi ze wzrostem liczby zmiennych (liczby przetworników m) maleje ponieważ $q_{śr} \to 0$ a $r_{śr} \to 0{,}37$. Błąd obliczony $\delta''_{gt,ob} = 1{,}41$, rys. 5. W tym przypadku $\delta''_{gt,ob} = \delta_{gt3}$.

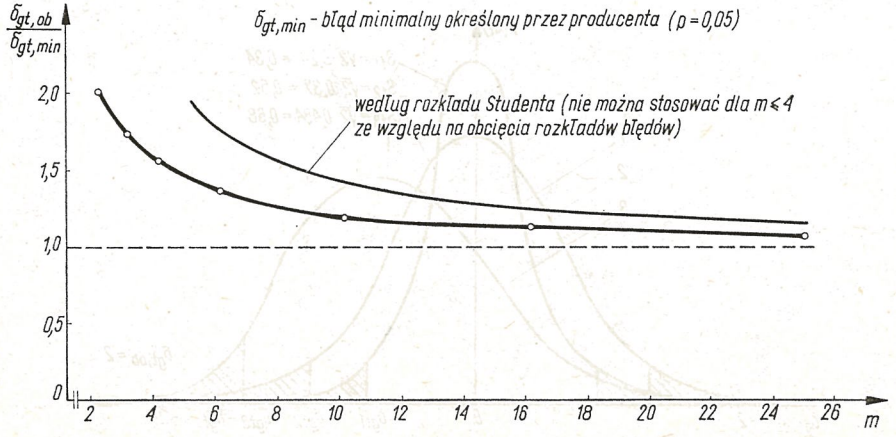
Jeżeli błędy mają być zachowane na tym samym poziomie ufności to stosunek błędów granicznych obliczonych statystycznie lub przyjętych przez producenta w przybliżeniu równy jest stosunkowi odchyleń średniokwadratowych. Korzystając z danych przedstawionych na rys. 5 można napisać:

$$\frac{\delta_{gt3}}{\delta_{gt2}} = \frac{s_{t3}}{s_{t2}} = \frac{\sqrt{m}0{,}484}{\sqrt{m}0{,}37} = 1{,}31 \tag{20}$$

$$\frac{\delta_{gt3}}{\delta_{gt1}} = \frac{s_{t3}}{s_{t1}} = \frac{\sqrt{m}0{,}484}{\sqrt{m}0{,}240} = 2{,}02. \tag{21}$$

Błędy określone (ustalone) przez producenta δ_{gt} będą w najgorszym przypadku dla dwóch zmiennych 2 razy mniejsze od obliczonych $\delta''_{gt,ob}$ na poziomie ufności 95%. W krańcowym przypadku stosunek $\delta''_{gt,ob}/\delta_{gt}$ nie powinien przekroczyć 3.

Jak zmienia się stosunek błędu obliczonego statystycznie $\delta''_{gt,ob}$ do błędu określonego przez producenta δ_{gt} pokazuje wykres na rys. 6. Przez $\delta_{gt\,min}$ rozumie się błąd graniczny



Rys. 6 Wykres stosunku błędu obliczonego statystycznie $\delta''_{gt,ob}$ do minimalnego błędu przyjętego przez producenta $\delta_{gt,min}$. w zależności od liczby przetworników m

najmniejszy ustalony przez wytwarzającego przetworniki dla minimalnych $r_{śr,g}$ zmieniających się ze wzrostem liczby zmiennych m.

Wnioski

1. Błędy graniczne torów pomiarowych ustalone przez producenta δ_{gt} są zachowane, w egzemplarzach sprawnych, z prawdopodobieństwem $P_{\delta_{gt}} = 100\%$.
2. Błędy graniczne obliczone metodą statystyczną $\delta''_{gt,ob}$, toru zbudowanego ze znanych przetworników, będą utrzymane z prawdopodobieństwem $P_{\delta_{gt},ob} \geqslant 95\%$.
3. Błędy ustalone przez wytwórcę δ_{gt} są równe lub mniejsze od 1 do 2 razy od błędów $\delta''_{gt,ob}$ obliczonych metodą statystyczną, w sytuacji najmniej korzystnej dla dwóch zmiennych, (dwóch przetworników). Ze wzrostem liczby zmiennych rozbieżność między δ_{gt} i $\delta''_{gt,ob}$ maleje.
4. Obcięcie, w wyniku regulacji wypadkowego rozkładu błędów toru przetwarzania, zmienia jego parametry r i q w porównaniu do wartości parametrów r i q obliczonych na podstawie danych o rozkładach błędów przetworników składowych.
5. Korzystniej jest ustalać dokładność dla całego toru pomiarowego (określonego typu) obcinając rozkład, od podawania błędów przetworników składowych. W przypadku torów złożonych z podzespołów wymiennych, błąd obliczony statystycznie $\delta''_{gt,ob}$ na podstawie δ_{gi} będzie najczęściej od 1,2 do 1,7 razy większy od błędu ustalonego przez producenta δ_{gt}. Przedział ten określono na podstawie wykresu z rys. 6 zakładając, że tor przetwarzania liczy przeważnie kilka lub kilkanaście przetworników.
6. Rys. 6 pozwala na ocenę maksymalnych różnic jakie mogą wystąpić między błędami obliczonymi statystycznie $\delta''_{gt,ob}$ i określonymi przez producenta δ_{gt} dla tego samego układu przetworników.

Przedstawione zależności mogą przydać się prowadzącym pomiary i producentom aparatury.

LITERATURA

1. Z. Orzeszkowski, *Wybrane działy z teorii pomiarów, cz. I*, PW Wrocław 1974.
2. R. Rakowski, *Badania rozkładów błędów systematycznych wybranych elektronicznych narzędzi pomiarowych i ich zastosowania*, rozprawa doktorska, Politechnika Wrocławska, 1979.
3. R. Rakowski, *Probabilistyczne metody obliczania dokładności pomiarów i układów przetworników, zagadnienia wybrane*, WOSR Jelenia Góra 1984.
4. H. Poleck, *Ergebnissicherheit bei quadratischer Addition von Fehlergrenzen*, VDI — Zeitschtrift, 1965 nr 28.

R. RAKOWSKI

ERROR OF LINE CONVERSE DEFINITED BY PRODUCER AND CALCULATED ON BASIS OF THE BOUNDARY VALUE ERRORS OF CONVERTERS

Summary

The problem of limiting errors of converters system is discussed. The ratio of statistically calculated limiting error of conversion line to the error definited by producer for the same system of converters is presented. There are also presented changes of the mentioned errors'ratio with the increase of number of converters.

R. RAKOWSKI

ERREUR DE LA LIGNE DE CONVERSION DÉTERMINÉE PAR LE PRODUCTEUR ET CALCULÉE À PARTIT DES ERREURS LIMITES DES CONVERTISSEURS

Résumé

On a analysé le problème des erreurs limites du système des convertisseurs. On a déterminé le rapport entre l'erreur limite de la ligne de conversion, calculée par statistique, et l'erreur déterminée par le producteur pour le même ensemble. On a présenté aussi les changements du rapport des erreurs ci-mentionnées dues à l'accroissement du nombre des convertisseurs.

R. RAKOWSKI

FEHLERVERARBEITUNGSBAHN GEMÄß BESTIMMUNG DES HERSTELLERS UND BERECHNUNG AUF GRUND DER WANDLERGRENZFEHLER

Zusammenfassung

Erörtert wurden Probleme der Grenzfehler eines Wandlersystems. Es wurde das Verhältnis eines statistisch berechneten Grenzfehlers der Verarbeitungsbahn zu demjenigen Fehler bestimmt, den der Hersteller für den gleichen Untergruppensatz angegeben hat. Auch die Verhältnisänderungen der genannten Fehler wurden erfaßt, die bei wachsender Wandlerzahl auftreten.

Р. РАКОВСКИ

ОШИБКА ЦЕПИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ОПРЕДЕЛЕННАЯ ПРОДУЦЕНТНЫМ ОТНОШЕНИЕМ И ВЫЧИСЛЕННАЯ НА ОСНОВЕ ГРАНИЧНЫХ ОШИБОК ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

Резюме

Рассмотрена проблема граничных ошибок измерительных преобразователей.

Определено отношение граничной ошибки цепи преобразования рассчитанной статистически к ошибке определённой изготовителем для того же самого комплекта элементов преобразователя.

Представлено также изменение этого отношения при увеличение количества преобразовательных элементов.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1986, 32, z. 1, ss. 31-37

621.3.087.92

Wpływ rezystancji komutatora na dokładność przetwarzania analogowych sygnałów pomiarowych

DOROTA KOZANECKA (ŁÓDŹ)

Instytut Maszyn Przepływowych Politechniki Łódzkiej

Otrzymano 29.05.1984

Przedstawiono teoretyczną analizę wpływu rezystancji kanałów komutatora oraz zmian tych rezystancji na dokładność przenoszenia przez komutator analogowych sygnałów pomiarowych.

1. WSTĘP

Komutatory analogowych sygnałów pomiarowych znajdują szerokie zastosowanie w technice pomiarowej a w szczególności w różnego rodzaju systemach pomiarowych. Podstawowym zadaniem w przypadku pracy komutatora w torze pomiarowym systemu jest przejmowanie informacji o wielkości mierzonej od przetworników pomiarowych i przekazywanie ich do dalszych członów systemu. Komutator stanowi w torze pomiarowym jeden z członów, którego dokładność przetwarzania determinuje dokładność uzyskiwanego wyniku, co związane jest z przejściem sygnału z jego wejścia na wyjście. W komutatorach zadanie to spełnia urządzenie przełączające, którego właściwości wyznaczają wartości rezystancji kluczy w stanie zamkniętym i otwartym. Urządzenie przełączające jest elementem komutatora pozostającym w jednym z dwóch stanów:

— zamkniętym, wówczas dla idealnego komutatora rezystancja kanału jest równa zeru $R_z = 0$,

— otwartym; tzn. dla idealnego komutatora rezystancja kanału jest nieskończenie wielka $R_o = \infty$.

2. RÓWNANIE PRZETWARZANIA KOMUTATORA

Ogólną postać funkcji przetwarzania sygnałów analogowych w komutatorze dla idealnego urządzenia przełączającego można przedstawić zależnością [2]:

$$U_{kwy}(t) = K_k \cdot U_{kwe}(t) \tag{1}$$

w którym: $U_{kwy}(t)$; $U_{kwe}(t)$ — sygnał wyjściowy i wejściowy komutatora, K_k — współ-

czynnik przetwarzania komutatora idealnego, którego wartość przy $R_z = 0$ i $R_o = \infty$ jest równa jedności $K_k = 1$.

W rzeczywistych warunkach pracy komutatora równanie przetwarzania przyjmuje postać:

$$U_{kwy}(t) = K_k(t)\,U_{kwej}(t) + U_{zi}(t) \tag{2}$$

gdzie: $U_{kwej}(t)$ — sygnał wejściowy w kanale zamkniętym, $U_{zi}(t)$ — sygnał, którego źródłem, w zależności od rodzaju urządzenia, są napięcia resztkowe lub efekt pochodzący od zjawiska termoelektrycznego.

Dla komutatorów wolnozmiennych oraz o średniej szybkości działania można założyć [1], [4], że czasy ustalania wartości współczynnika $K_k(t)$ oraz sygnału $U_{kwe}(t)$ są małe w porównaniu z czasem kanałowym T_{kk} i wobec tego na podstawie równania (2) przechodząc do wartości ustalonych w czasie wyznaczyć można bezwzględną wartość statycznego błędu komutatora:

$$\triangle U_{kwy} = \triangle K_k\,U_{kwej} + U_{zi}, \tag{3}$$

którą determinują dwie składowe:
$\triangle K_k U_{wej}$ — składowa multiplikatywna,
U_{zi} — składowa addytywna.

Źródłem tych składowych błędu jest różnica między wartościami idealnymi rzeczywistymi parametrów układu przełączającego. W celu określenia dokładności komutatora wynikającej z operacji przełączania sygnałów pomiarowych wyznaczono stytyczne równanie przetwarzania komutatora sygnałów analogowych pracującego w warunkach rzeczywistych.

Rozpatrzono w tym celu trzy źródła błędu komutatora:
— związane z rzeczywistymi, skończonymi wartościami rezystancji kluczy otwartych i zamkniętych R_o i R_z różnymi od wartości idealnych $R_o \neq \infty$ $R_z \neq 0$,
— związane z odchyleniem tych rezystancji od wartości znamionowych,
— związane z dodatkowym napięciem pojawiającym się przy zamykaniu kanału komutatora (dla kluczy stykowych np. siła termoelektryczna).

Schemat jednostopniowego komutatora o n-wejściach i jednym wyjściu podany jest na rys. 1.

Przy zamkniętym j-tym kluczu sygnał napięciowy na wyjściu komutatora będzie równy:

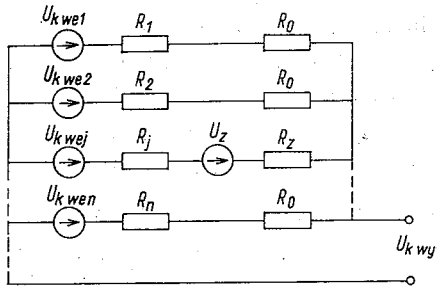
$$U_{kwy} = \sum_{i=1}^{n} \frac{U_{kwei}}{R_i} \sum_{i=1}^{n} R_i \tag{4}$$

Wyrażenie (4) stanowi podstawową zależność dla określenia sygnału wyjściowego z komutatora jako funkcja napięć oraz rezystancji poszczególnych kanałów komutatora. Rezystancja pojedynczego kanału otwartego będzie równa

$$R'_o = R_o + R_p \tag{5}$$

i analogicznie dla kanału zamkniętego

$$R'_z = R_z + R_p \tag{6}$$



Rys. 1. Schemat jednostopniowego komutatora:

$U_{kwe1} = U_{kwe2} = U_{kwe3} = \ldots U_{kwej} = \ldots U_{kwen}$
$R_1 = R_2 = \ldots R_j = \ldots R_n = R_p$ — rezystancja przetwornika pomiarowego;
R_o — rezystancja klucza w stanie otwartym; R_z — rezystancja klucza w stanie zamkniętym; U_z — napięcie dodatkowe związane ze zjawiskiem powstawania siły termoelektrycznej na zamkniętych stykach klucza wynikające z niejednorodności materiałów stykowych oraz nierównomiernego rozkładu temperatury na stykach. Dla kluczy bezstykowych będzie to napięcie resztkowe.

(R_p — rezystancja przetwornika wejściowego). Wobec tego wykorzystując zależności (5) i (6), wyrażenie (4) można napisać w postaci:

$$U_{kwy} = \frac{\dfrac{U_{kwej}+U_z}{R_z+R_p} + \dfrac{\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} U_{kwei}}{R_o+R_p}}{\dfrac{1}{R_z+R_p} + \dfrac{(n-1)}{R_o+R_p}} \tag{7}$$

Suma iloczynów występująca w liczniku wyrażenia (7) została rozbita na dwa składniki:
— pierwszy związany z kanałem zamkniętym tzn. aktualnie współpracującym z przetwornikiem pomiarowym,

$$\frac{(U_{kwej}+U_z)}{R_z+R_p}, \tag{8}$$

— drugi związany z pozostałymi kanałami otwartymi przygotowanymi do komutacji:

$$\frac{\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} U_{kwei}}{R_o+R_p}. \tag{9}$$

Wprowadzając do wyrażenia (7) oznaczenie:

$$\frac{R_p+R_z}{R_p+R_o} = A \tag{10}$$

otrzymuje się:

$$U_{kwy} = \frac{U_{kwej}+U_z}{1+(n-1)A} + \frac{\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} U_{kwej}}{(n-1)+\dfrac{1}{A}}. \tag{11}$$

Dla warunków idealnej komutacji, gdy wartość rezystancji $R_o = \infty$ oraz $R_z = 0$ wartość napięcia na wyjściu komutatora będzie równa napięciu komutowanemu jedynie przez kanał zamknięty „j" bo $A = 0$, a napięcie U_z stanowiące składową addytywną będzie także równe zeru. Oznacza to, że w warunkach idealnej komutacji komutator bez zniekształceń przekazuje sygnał z wejścia na wyjście:

$$U^i_{kwy} = U_{kwe}. \tag{12}$$

Równanie (11) uwzględnia składowe wynikające z wartości rezystancji różnej od rezystancji znamionowej dla warunków idealnej komutacji oraz składowe napięciowe, które mogą pojawić się na wyjściu komutatora, a pochodzą z kanałów nie załączonych w danej chwili.

Zależność (11) jest słuszna przy założeniach:

— rezystancje przetworników załączonych do kolejnych kanałów komutatora są stałe i równe $R_p = const$

— rezystancja klucza w kanale zamkniętym jest stała $R_z = const$

— rezystancje kluczy w kanałach otwartych są stałe $R_o = const.$

— rezystancja układu obciążającego komutator jest stała $R_{obc} = const.$

Dla komutatorów pracujących w warunkach rzeczywistych rezystancje R_z oraz R_o poszczególnych kluczy nie są jednakowe i ich wartości różnią się od wartości znamionowej o $\triangle R_z$ i $\triangle R_o$ co wiąże się z występowaniem kolejnych składowych błędów przetwarzania. Po uwzględnieniu we wzorze (11) zmian rezystancji $\triangle R_z$ oraz $\triangle R_o$ otrzymuje się:

$$U_{kwy} = \frac{U_{kwej} + U_z}{1 + \dfrac{(n-1)(R_p + R_z \pm \triangle R_z)}{R_p + R_o \pm \triangle R_o}} + \frac{\sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} U_{kwei}}{(n-1) + \dfrac{R_p + R_o \pm \triangle R_o}{(R_p + R_z \pm \triangle R_z)}}. \tag{13}$$

We wzorze (13) wartości rezystancji R_z oraz R_o traktować należy jako znamionowe dla danego typu komutatora, natomiast $\triangle R_z$ oraz $\triangle R_o$ stanowić będą wartości odchyłek tych wielkości od wartości znamionowych. Wartość rezystancji przetwornika R_p przyjęto w dalszym ciągu jako stałą $R_p = const$. Po przekształceniu zależności (13) i wprowadzeniu oznaczeń (14)

$$\begin{aligned} \frac{R_o}{R_p + R_o} &= \delta_{R_o} \qquad \frac{R_z}{R_p + R_z} = \delta_{R_z} \\ \frac{R_z}{R_p + R_o} &= \delta'_{R_o} \qquad \frac{R_o}{R_p + R_z} = \delta'_{R_z} \end{aligned} \tag{14}$$

otrzymuje się rzeczywiste równanie przetwarzania dla komutatora w postaci wzoru (15):

$$U_{kwy} = \frac{U_{kwej} + U_z}{1 + (n-1)A}\left[1 \pm \delta_{R_o} \pm \frac{\delta_{R_o}}{1 + (n-1)A}\right] + \frac{\sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} U_{kwei}}{(n-1) + \dfrac{1}{A}}\left[1 \pm \delta_{R_z} \pm \frac{\delta'_{R_z} + (n-1)\delta_{R_z}}{(n-1) + \dfrac{1}{A}}\right] \tag{15}$$

Analiza składowych błędu [3] występujących w drugim składniku prowadzi do wniosku, że

$$\pm \frac{\delta'_{Rz}}{(n-1)+\frac{1}{A}} = \pm \frac{\delta_{R_o}}{(n-1)A+1} \pm \frac{(n-1)\delta_{Rz}}{(n-1)+\frac{1}{A}} = 0, \tag{16}$$

a więc statyczne równanie przetwarzania komutatora sygnałów analogowych pracującego w warunkach rzeczywistych podaje zależność (17)

$$U_{kwy} = \frac{U_{kwej}+U_z}{1+(n-1)A}\left[1 \pm \delta_{R_o} \pm \frac{\delta_{R_o}}{1+(n-1)A}\right] + \\ + \frac{\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} U_{kwei}}{(n-1)+\frac{1}{A}}\left[1 \pm \delta_{Rz} \pm \frac{\delta_{R_o}}{(n-1)A+1}\right]. \tag{17}$$

Jeśli we wzorze (17) wprowadzimy oznaczenie

$$\frac{1}{1+(n-1)A} = K_{k_1}, \tag{18}$$

które stanowić będzie współczynnik przetwarzania dla znamionowych wartości impedancji kanałów: zamkniętego i otwartych, wówczas równanie (17) przyjmie postać:

$$U_{kwy} = (U_{kwej}+U_z)K_{k_1}[1 \pm \delta_{R_o}(1-K_{k_1})] + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} U_{kwei} \cdot A \cdot K_{k_1}(1 \pm \delta_{Rz} \pm \delta_{R_o}K_{k_1}). \tag{19}$$

Równanie to określa rzeczywiste zależności między sygnałem pojawiającym się na wejściu U_{kwe} analogowego komutatora oraz sygnałem U_{kwy} jaki trafia do dalszej części toru pomiarowego przy uwzględnieniu zmian rezystancji urządzenia kluczującego.

Spełniając warunki idealnej komutacji tzn. gdy $R_o = \infty$; $R_z = 0$; $U_z = 0$ współczynniki K_{k_1} oraz A będą równe:

$$K_{k_1} = 1; \quad A = 0 \tag{20}$$

Wówczas spełnione jest równanie (12) tzn. $U^i_{kwy} = U_{kwej}$.

Przedstawione rozważania pozwalają obliczyć błąd statyczny n-wejściowego komutatora dla rzeczywistych warunków pracy

$$\delta_k = \frac{U_{kwy}-U^i_{kwy}}{U^i_{kwy}}. \tag{21}$$

Po podstawieniu (wzory 12 i 19) i dokonaniu przekształceń otrzymuje się w zależność (22) która wyznacza błąd komutatora

$$\delta_k = K_{k_1}[1 \pm \delta_{R_o}(1-K_{k_1})][1+\delta_{Uz}]+(n-1)AK_{k_1}(1 \pm \delta_{Rz} \pm \delta_{R_o}K_{k_1})-1 \tag{22}$$

We wzorze (22) wprowadzono oznaczenie

$$\delta_{U_z} = \frac{U_z}{U_{kwej}}, \tag{23}$$

Określa ono składową względną błędu komutatora, która związana jest z pojawieniem się napięcia U_z w kanale zamkniętym.

3. PODSUMOWANIE

Podana metoda wyznaczenia równania przetwarzania dla komutatorów pracujących w warunkach rzeczywistych umożliwia analizę składowych błędu wynikających ze zmian parametrów stanowiących dane techniczne podawane dla każdego typu komutatora. W związku z tym równanie (22) pozwala ocenić dokładność przetwarzania sygnału wejściowego przekazywanego za pośrednictwem komutatora do dalszych członów toru pomiarowego systemu.

LITERATURA

1. Badźmirowski K., Karkowska H., Karkowski Z. *Cyfrowe systemy pomiarowe*, WNT, W-wa 1979.
2. Bielenkij J. E. *Komutatory analogowych sygnałów na półprowadnikowych elementach*, Energia, Moskwa 1976.
3. Kozanecka D. *Analiza dokładności przetwarzania toru pomiarowego systemu pomiarowo-informacyjnego*. Praca doktorska Politechnika Łódzka, 1983.
4. Rżanek J. *Analiza statycznego błędu komutatora sygnałów analogowych*, PAK nr 9—10, 1981.

D. KOZANECKA

INFLUENCE OF COMUTATOR RESISTANCE ON THE ACCURACY OF TRANSFORMING THE ANALOGUE MEASUREMENT SIGNALS

Summary

The paper presents the theoretical analysis of comutator channels resistances influence (considering changes of these resistances) on the accuracy of transforming the analogue measurment signals.

D. KOZANECKA

INFLUENCE DE LA RÉSISTANCE D'UN COMMUTATEUR SUR LA PRÉCISION DE CONVERSION DES SIGNAUX ANALOGIQUES

Résumé

On a présenté l'analyse théorique de l'influence des valeurs des résistances des chaînes d'un commutateur et de leurs variations sur la précision de la conversion des signaux de mesure analogique.

D. KOZANECKA

EINFLUß DER KOMMUTATORRESISTANZ AUF DIE VERARBEITUNGSGENAUIGKEIT DER ANALOGMEßSIGNALE

Zusammenfassung

Es wurde eine theoretische Analyse des Resiszanzeinflusses der Kommutatorkanäle und der Resistanzwechsel aif die Verarbeitungsgenauigkeit durch einen Analogkommutator der Meßsignale durchgeführt.

Д. КОЗАНЭЦКА

ВЛИЯНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЙ КОММУТАТОРА НА ТОЧНОСТЬ ПЕРЕДАЧИ АНАЛОГОВЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

Р е з ю м е

Представлен теоретический анализ влияния сопротивлений каналов коммутатора а также изменений этих сопротивлений на точность преобразования коммутатором аналоговых измерительных сигналов.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1986, 32, z. 1, ss. 39-52

621.3.082.78

Wykorzystanie funkcji prądowej I do analizy łożyskowania magnetycznego żyrokompasu okrętowego

JAN PURCZYŃSKI (SZCZECIN)

Instytut Automatyki Przemysłowej Politechniki Szczecińskiej

LESZEK KASZYCKI (SZCZECIN)

Instytut Nauk Podstawowych Technicznych WSM w Szczecinie

Otrzymano 15.06.1984

W pracy dokonano analizy pola elektromagnetycznego oraz wyznaczono siłę unoszącą kulę żyroskopową w żyrokompasie okrętowym. Do analizy wykorzystano potencjał skalarny pola magnetycznego oraz funkcję prądową I.

WYKAZ OZNACZEŃ

$\vec{B}$ — wektor indukcji magnetycznej
$\vec{E}$ — wektor natężenia pola magnetycznego
$\vec{F}$ — siła (wartość średnia)
$\vec{H}$ — wektor natężenia pola magnetycznego
I — funkcja prądowa, prąd
$I_o w$ — amperozwoje (wartość skuteczna)
$\vec{J}$ — wektor gęstości prądu
$\vec{K}$ — wektor gęstości powierzchniowej prądu
V — potencjał skalarny pola magnetycznego
r, Θ, φ — współrzędne układu sferycznego
β — kąt
γ — konduktywność
μ — przenikalność magnetyczna
σ — konduktywność powierzchniowa
ω — pulsacja

Uwaga:
Symbole $\vec{B}$, $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{J}$, $\vec{K}$, I, V oznaczają zespoloną wartość chwilową.

1. WSTĘP

Rozwój konstrukcji układów żyroskopowych, a zwłaszcza systemów nawigacji inercyjnej, w coraz większym stopniu wymaga zastosowania urządzeń elektromechanicznych o symetrii kulistej [3], [4], [6], [8], [14], [24].

Pole elektromagnetyczne znajduje zastosowanie w układach łożyskowania magnetycznego oraz wytwarzania złożonego ruchu obrotowego wymienionych urządzeń,

Problem analizy pola elektromagnetycznego w układach o symetrii kulistej posiada obszerną literaturę [2], [5], [7], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22].

Zagadnienie łożyskowania magnetycznego oraz lewitacji kuli przewodzącej rozpatrzono m.in. w pracach [5], [15], [19].

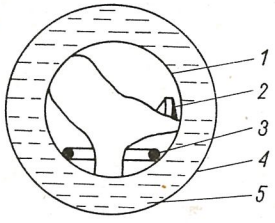
W pracy [19] wyznaczono siły występujące w układzie: masywna kula przewodząca — uzwojenie kuliste z prądem przemiennym.

W pracy [22] dokonano analizy pola elektromagnetycznego oraz określono siłę unoszącą w łożysku elektromagnetycznym o symetrii kulistej. Analizę przeprowadzono przy założeniu występowania silnego zjawiska naskórkowości.

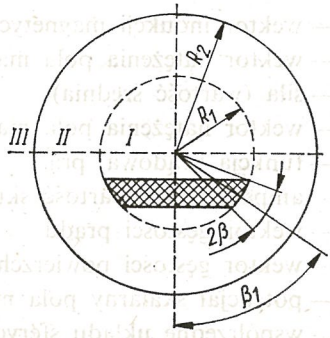
W niniejszej pracy wyznaczono siłę unoszącą działającą na kulę żyroskopową żyrokompasu okrętowego typu „*Kurs*" oraz „*Auschütz*" [3], [11], [24].

2. MODEL MATEMATYCZNY UKŁADU

Na rys. 1 przedstawiono w sposób uproszczony zasadniczą część żyrokompasu okrętowego, układ: kula żyroskopowa — kula naśladująca. Kula żyroskopowa 1 wykonana jest z dwóch cienkościennych mosiężnych czasz, górnej i dolnej, które są ze sobą zespawane. Wewnątrz kuli umieszczone są jej główne części, a mianowicie: dwa żyroskopy 2,



Rys. 1. Uproszczony układ żyrokompasu okrętowego



Rys. 2. Model matematyczny żyrokompasu

cewka wydmuchu elektromagnetycznego 3 oraz olejowy tłumik wahań kuli nie pokazany na rysunku. Zewnętrzna powierzchnia kuli pokryta jest warstwą ebonitu. Kula żyroskopowa jest tak skonstruowana, że przy braku zasilania cewki wydmuchu elektromagnetycznego, osiada na dnie kuli naśladującej. Warunkiem dobrej pracy kuli żyroskopowej jest współśrodkowe położenie z kulą naśladującą. Powyższą współcentryczność zapewnia działanie cewki wydmuchu 3. Podczas pracy kompasu przez cewkę przepływa prąd uisusoiiuiap-

zmienny powodując powstanie siły ponderomotorycznej w układzie: kula żyroskopowa — kula naśladująca, znoszącej ujemną pływalność kuli żyroskopowej.

Na rys. 2 przedstawiono przekrój poprzeczny modelu żyroskopu przyjętego do analizy rozkładu pola elektromagnetycznego. Model składa się z trzech obszarów:

I — kuli żyroskopowej
II — elektrolitu,
III — obszaru zewnętrznego.

Na powierzchni kuli żyroskopowej I rozmieszczone jest uzwojenie unoszące. Natomiast granicę obszarów II i III stanowi kula naśladująca (wykonana w postaci sfery). Analizę rozkładu pola magnetycznego prowadzi się przy następujących założeniach upraszczających:

— kula żyroskopowa posiada przenikalność magnetyczną μ_0 oraz konduktywność znacznie mniejszą od konduktywności kuli naśladującej,
— zaniedbuje się prądy wirowe indukowane w elektrolicie ($\gamma = 0$, $\mu = \mu_0$)
— uzwojenie unoszące wykonane jest w postaci okładu prądowego,
— grubość warstwy modelującej kulę naśladującą jest mniejsza od równoważnej głębokości wnikania fali płaskiej do materiału, z którego wykonana jest kula naśladująca.

3. ANALIZA POLA MAGNETYCZNEGO ZA POMOCĄ SKALARNEGO POTENCJAŁU POLA MAGNETYCZNEGO I PRĄDOWEJ FUNKCJI J

Przyjęte na wstępie założenia upraszczające pozwalają wykorzystać do analizy pola magnetycznego układu żyrokompasu potencjał skalarny pola magnetycznego, zdefiniowany równaniem

$$\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad} V \tag{1}$$

W obszarach bezprądowych potencjał V spełnia, w układzie współrzędnych sferycznych, równanie Laplace'a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial \Theta^2} + \frac{\operatorname{ctg}\Theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \Theta} + \frac{1}{r^2\sin\Theta}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0, \tag{2}$$

którego rozwiązanie ma ogólną postać [1], [12]

$$V = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}}\right)\cdot P_n^m(\cos\Theta)(\alpha_m\cos m\varphi + \beta_m \sin m\varphi) \tag{3}$$

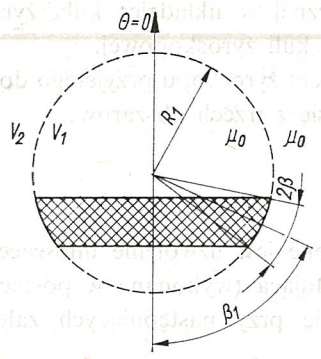
Na wstępie wyznacza się pole wymuszające określone potencjałem V_1 i V_2 (rys. 3) wytworzone przez uzwojenie unoszące.

Wektor gęstości prądu w uzwojeniu unoszącym posiada jedną składową:

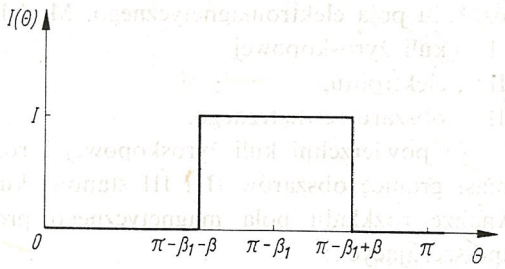
$$\vec{J}(\Theta) = J(\Theta)e^{j\omega t}\vec{1}_\varphi, \tag{4}$$

Gęstość prądu rozwija się w szereg stowarzyszonych funkcji Legendre'a o postaci:

$$J(\Theta) = J\sum_{n=1}^{\infty} C_n P_n^1(\cos\Theta), \tag{5}$$



Rys. 3. Model układu wytwarzającego pole wymuszające



Rys. 4. Rozkład gęstości prądu jako funkcja kąta Θ

gdzie

$$J = \frac{\sqrt{2}J_0 w}{2\beta R_1}.$$

Współczynniki C_n wyznacza się w zależności

$$C_n = \frac{2n+1}{2n(n+1)} \frac{1}{J} \int_0^{\pi} J(\Theta) P_n^1(\cos\Theta) \sin\Theta \, d\Theta \tag{6}$$

Uwzględniając postać wzoru (5) (wymuszenie) oraz ograniczoność potencjału V dla $r = 0$ i $r \to \infty$, przewiduje się następującą postać potencjału V:

$$\begin{aligned} V_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos\Theta) e^{j\omega t}; \quad r < R_1 \\ V_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} (P_n(\cos\Theta) e^{j\omega t}; \quad r > R_1. \end{aligned} \tag{7}$$

Współczynniki a_n i b_n wyznacza się z następujących warunków brzegowych:

$$H_{r1} = H_{r2}; \quad r = R_1 \tag{8a}$$

$$H_{\Theta 1} - H_{\Theta 2} = J(\Theta) e^{j\omega t}; \quad r = R_1. \tag{8b}$$

Ostatecznie potencjał V przyjmuje postać:

$$V_1 = J \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} \frac{1}{R_1^{n-1}} C_n r^n P_n(\cos\Theta) e^{j\omega t} \tag{9a}$$

$$V_2 = -J \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} R_1^{n+2} C_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos\Theta) e^{j\omega t}. \tag{9b}$$

Ze wzorów (1) i (9b) otrzymuje się:

$$H_{r2} = -J \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} \frac{R_1^{n+2}}{r^{n+2}} C_n P_n(\cos\Theta) e^{j\omega t} \tag{10a}$$

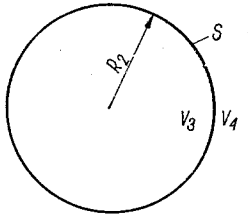
$$H_{\Theta 2} = -J \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} \frac{R_1^{n+2}}{r^{n+2}} C_n P_n^1(\cos\Theta) e^{j\omega t}. \tag{10b}$$

Pole magnetyczne $\vec{H}_2$ indukuje prądy wirowe na powierzchni kuli naśladującej. Pole magnetyczne wytworzone przez te prądy wirowe opisane jest potencjałem skalarnym V_3 i V_4 (rys. 5), który spełnia równanie Laplace'a (2) wszędzie poza powierzchnią S, gdzie jest nieciągły [9, 10]. Na powierzchni S pole magnetyczne opisane jest relacją

$$-\vec{n} \times (\vec{H}_3 - \vec{H}_4) = \vec{K} \tag{11}$$

gdzie:

$\vec{n}$ — wersor w kierunku normalnym zewnętrznym do powierzchni S,
$\vec{H}_3$ i $\vec{H}_4$ — wektory natężenia pola magnetycznego po obydwu stronach rozpatrywanej powierzchni,
$\vec{K}$ — wektor gęstości powierzchniowej prądów wirowych.



Rys. 5. Model służący do wyznaczania pola reakcji prądów wirowych płynących na powierzchni kuli naśladującej

W celu określenia rozpływu prądów wirowych zaindukowanych na powierzchni S wprowadza się prądową funkcję I zdefiniowaną równaniem [9, 10]:

$$\vec{K} = -\vec{n} \times \operatorname{grad} I. \tag{12}$$

Na podstawie (1), (12) z równania (11) otrzymuje się

$$\triangle V = I = V_4 - V_3|_{r=R_2}. \tag{13}$$

Pierwsze prawo Kirchhoffa w postaci różniczkowej wyraża się następująco:

$$\vec{K} = \sigma \vec{E}. \tag{14}$$

Jednocześnie zachodzi związek

$$\operatorname{rot}_r \vec{E} = -\frac{\partial B_r}{\partial t}. \tag{15}$$

Ze wzorów (12), (14) i (15) uzyskuje się

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \Theta^2} + \operatorname{ctg}\Theta \frac{\partial I}{\partial \Theta} + \frac{1}{\sin^2\Theta} \frac{\partial^2 I}{\partial \varphi^2} = \sigma \mu_0 r^2 \frac{\partial H_r}{\partial t}\bigg|_{r=\text{const}}. \tag{16}$$

Zgodnie z zasadą superpozycji pole magnetyczne $\vec{H}$ jest sumą pola zewnętrznego (wymuszenia) $\vec{H}_{zew}$ oraz pola wytworzonego przez prądy wirowe $\vec{H}_{ind}$. Biorąc zatem składową względem osi O_r pola $\vec{H}$, dla analizowanego układu równanie (16) redukuje się do postaci

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \Theta^2} + \operatorname{ctg}\Theta \frac{\partial I}{\partial \Theta} = \sigma \mu_0 R_2^2 \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(H_{r_2} - \frac{\partial V_3}{\partial r} \right) \right]_{r = R_2} \tag{17}$$

Przewiduje się, że potencjały V_3 i V_4 określające pole magnetyczne wytworzone przez prądy wirowe płynące na powierzchni S mają postać:

$$V_3 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\Theta) e^{j\omega t} \qquad r \leqslant R_2, \tag{18a}$$

$$V_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\Theta) e^{j\omega t} \qquad r > R_2 \tag{18b}$$

i spełniają następujące warunki brzegowe:

$$V_4 - V_3 = I|_{r=R_2} \tag{19}$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial r} = \frac{\partial V_4}{\partial r}\bigg|_{r=R_2} \tag{20}$$

Po uwzględnieniu (18a), (18b) i (20) otrzymuje się następującą postać funkcji I:

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n} \cdot \frac{1}{R_z^{n+1}} \cdot D_n \cdot P_n(\cos\Theta) e^{j\omega t}. \tag{21}$$

Ze związku [1, 12]

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \Theta^2} + \operatorname{ctg}\Theta \frac{\partial Y}{\partial \Theta} = -n(n+1) Y, \qquad Y = P_n(\cos\Theta) \tag{22}$$

oraz zależności (10a), (18a), (18b) otrzymuje się

$$I = J \sum_{n=1}^{\infty} \frac{jb\varrho^{n+2} C_n R_2}{jb + (2n+1)} \cdot P_n(\cos\Theta) e^{j\omega t} \tag{23}$$

gdzie: $b = \omega \mu_0 \sigma R_2$; $\varrho = \dfrac{R_1}{R_2}$.

Znajomość funkcji I pozwala określić rozpływ prądów wirowych na powierzchni kuli naśladującej.

Składowe wektora gęstości powierzchniowej prądu oblicza się z zależności

$$K_\Theta = + \frac{1}{r \sin\varphi} \frac{\partial I}{\partial \varphi}, \tag{24}$$

$$K_\varphi = - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial I}{\partial \Theta}.$$

W analizowanym układzie gęstość powierzchniowa prądu wyraża się następująco:

$$K_\Theta = 0,$$

$$K_\varphi = J \sum_{n=1}^{\infty} \frac{jb\varrho^{n+2}c_n}{jb+(2n+1)} P_n^1(\cos\Theta) e^{j\omega t}. \tag{25}$$

Znając rozkład gęstości prądów płynących na powierzchni kuli można wyznaczyć siłę unoszącą kulę żyroskopową. W układzie jak na rys. 2 wypadkowe siły ponderomotoryczne działają wzdłuż osi Z, tzn. $\vec{F}_z = F_z \cdot \vec{1}_z$, $\vec{F} = F \cdot \vec{1}_z$
Zachodzi związek

$$\vec{F} + \vec{F}_z = 0$$

gdzie: $\vec{F}$ — wypadkowa siła działająca na wydrążoną kulę,
$\vec{F}_z$ — wypadkowa siła działająca na uzwojenie unoszące.
Siłę $\vec{F}_z$ oblicza się z następującej zależności:

$$F_z = -\frac{1}{2} R_e \left\{ \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (\vec{K}^* \times \vec{B}_2) r^2 \sin\Theta \, d\varphi \, d\Theta \right\} \Big|_{r=R_2}.$$

Uwzględniając związek

$$(\vec{K}^* \times \vec{B}_2)\vec{1}_z = -K_\varphi^*(B_{r_2}\sin\Theta + B_{\Theta_2}\cos\Theta)$$

otrzymuje się

$$F_z = \frac{1}{2} R_2^2 R_e \left[\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} K_\varphi (B_{r_2}\sin\Theta + B_{\Theta_2}\cos\Theta)\sin\Theta \, d\Theta \, d\varphi \right]. \tag{26}$$

Korzystając ze związków [1, 12]

$$\int_{-1}^{+1} P_n^1(x) P_m^1(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{2n(n+1)}{2n+1} & m = n \end{cases},$$

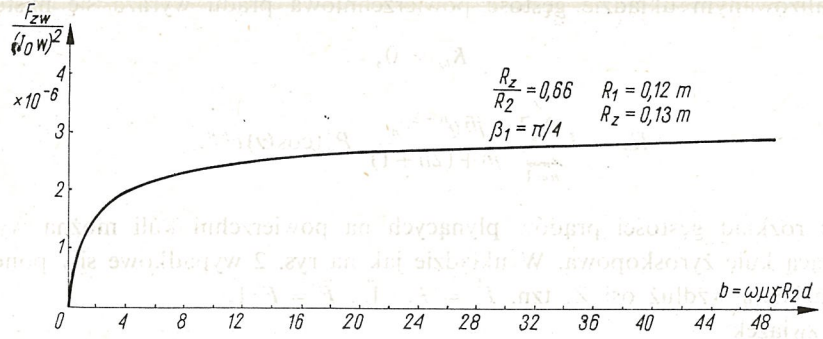
$$xP_n^1(x) = \frac{1}{2n+1}\left[nP_{n+1}^1(x) + (n+1)P_{n-1}^1(x)\right],$$

$$\sqrt{1-x^2}\, P_n(x) = \frac{1}{2n+1}\left[P_{n+1}^1(x) - P_{n-1}^1(x)\right],$$

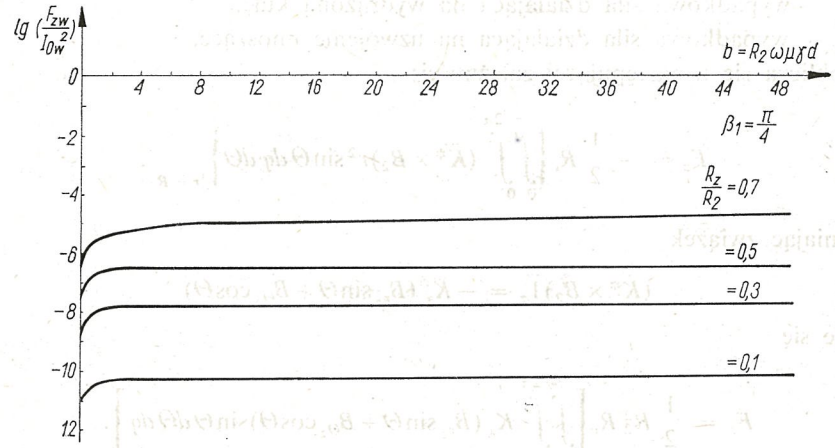
oraz wzorów (10a), (10b), (26) uzyskuje się

$$F_z = -2\pi\mu_0 J^2 R_2^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^2}{b^2+(2n+1)^2} \frac{n(n-1)(n+1)}{(2n-1)(2n+1)} \varrho^{2n-3} C_n C_{n-1}. \tag{27}$$

W przypadku, gdy uzwojenie unoszące przyjmuje kształt zwoju kołowego, czyli $\beta \to 0$ (w praktycznych rozwiązaniach żyrokompasów warunek ten jest dobrze spełniony),



Rys. 6. Zależność siły lewitacji kuli żyroskopowej w funkcji bezwymiarowego parametru $b = \omega\mu_0\sigma R_2$



Rys. 7. Wpływ stosunku promieni zwoju kołowego do promienia kuli naśladującej na przebieg siły unoszenia kuli żyroskopowej

wzór (27) redukuje się do postaci:

$$F_{zw} = \pi\mu_0 (I_0 w)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^2}{b^2+(2n+1)^2} \frac{1}{n} \left(\frac{R_z}{R_2}\right)^{2n+1} (\sin\beta_1)^{-(2n-1)} P_{n-1}^1(\cos\beta_1) P_n^1(\cos\beta_1) \tag{28a}$$

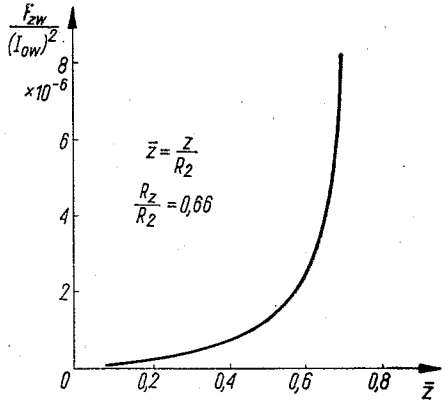
lub

$$F_{zw} = \pi\mu_0 (I_0 w)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^2}{b^2+(2n+1)^2} \frac{1}{n} \varrho^{2n+1} P_{n-1}^1(\cos\beta_1) P_n^1(\cos\beta_1) \sin^2\beta_1, \tag{28b}$$

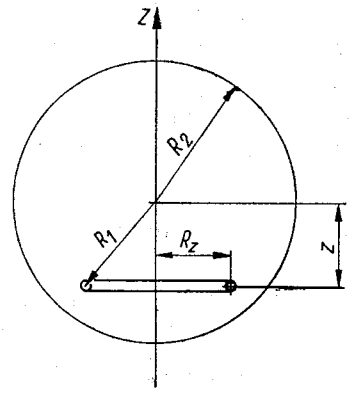
gdzie: R_z — promień zwoju kołowego.

Przeprowadzono analizę numeryczną zależności (28a). W formie wykresów przedstawiono wyniki na rys. 6, 7, 8.

Zależność siły unoszącej kulę żyroskopową w funkcji bezwymiarowego parametru $b = R_2\omega\mu_0\sigma$ przedstawiono na rys. 6 i rys. 7. Na rys. 8 przedstawiono zależność siły



Rys. 8. Siła unosząca kulę żyroskopową w funkcji przesunięcia względnego $\bar{z}$

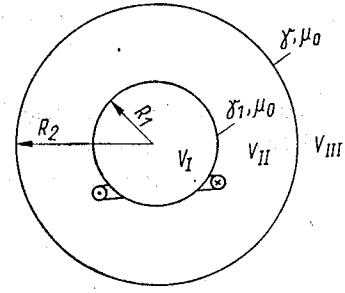


Rys. 9. Model układu: kula naśladująca — uzwojenie unoszące

od przesunięcia względnego $\bar{z} = -\frac{z}{R_2}$, przy bardzo dużej częstotliwości zasilania cewki wydmuchu $\left(\text{we wzorze (28a) czynnik } \frac{b^2}{b^2+(2n+1)^2} \to 1\right)$. Wzajemne położenie kuli naśladującej i uzwojenia unoszącego pokazano na rys. 9.
Z rys. 7 wynika silna zależność siły unoszenia od stosunku promieni $\varrho = R_1/R_2$ kuli żyroskopowej i sfery naśladującej (zaszła konieczność użycia skali logarytmicznej).

4. UWZGLĘDNIENIE SKOŃCZONEJ WARTOŚCI KONDUKTYWNOŚCI KULI ŻYROSKOPOWEJ

Obecnie rozpatrzony zostanie model żyrokompasu okrętowego o mniejszej liczbie założeń upraszczających. Modyfikacja modelu (rys. 10) polega na uwzględnieniu dodatko-



Rys. 10. Udokładniony model żyrokompasu okrętowego

wej cienkościennej kuli mosiężnej o parametrach μ_0, γ_1, do której przylega uzwojenie unoszące. Zakłada się, że wypadkowa siła $\vec{F}$ działająca na kulę żyroskopową jest sumą sił

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{29}$$

gdzie: $\vec{F}_1$ — siła działająca na uzwojenie unoszące przy braku warstwy mosiężnej (rozpatrzona w p. 3).

Siła $\vec{F}_2$ powstaje wskutek oddziaływania prądów wirowych płynących na powierzchni mosiężnej sfery o promieniu R_1 i wypadkowego pola magnetycznego występującego na powierzchni mosiężnej sfery. Zakłada się słabe zjawisko naskórkowości w cienkościennej sferze mosiężnej. Można zatem uważać, że prądy wirowe płynące na powierzchni cienkiej warstwy mosiężnej indukują się pod wpływem składowej względem osi O_r pola $\vec{H}_0$ będącego sumą pól

$$\vec{H}_0 = \vec{H}_{uzw} + \vec{H}_{sfer}, \tag{30}$$

gdzie: $\vec{H}_{uzw}$ jest wektorem natężenia pola magnetycznego wytworzonego przez uzwojenie unoszące. Poprzez pole $\vec{H}_{sfer}$ rozumie się wektor natężenia pola magnetycznego wytworzonego przez prądy wirowe płynące na powierzchni kuli naśladującej.

Na podstawie zależności (10a), (18a), (18b), (30) składowa H_{or} pola wymuszającego $\vec{H}_0$ na powierzchni warstwy mosiężnej ($r = R_1$) wyraża się zależnością:

$$H_0|_{r=R_1} = -J \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} \left[\frac{jb(1-\varrho^{2n+1})+2n+1}{jb+2n+1} \right] C_n P_n(\cos\Theta) e^{j\omega t} \tag{31}$$

Pole magnetyczne wytworzone przez prądy wirowe płynące na powierzchni cienkiej warstwy o promieniu R_1 opisane jest potencjałem skalarnym V o następującej postaci w poszczególnych obszarach (rys. 10)

$$V_{\mathrm{I}} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n r^n P_n(\cos\Theta) e^{j\omega t}; \quad r < R_1, \tag{32a}$$

$$V_{\mathrm{II}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(G_n r^n + \frac{F_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\Theta) e^{j\omega t}; \quad R_1 \leqslant r \leqslant R_2, \tag{32b}$$

$$V_{\mathrm{III}} = \sum_{n-1}^{\infty} \frac{H_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\Theta) e^{j\omega t} \quad r > R_2. \tag{32c}$$

Przy założeniu występowania zjawiska słabej naskórkowości w cienkiej warstwie mosiężnej o promieniu R_1 otrzymuje się

$$G_n = 0, \quad H_n = F_n. \tag{33}$$

Oznacza to, że nie uwzględnia się wpływu prądów wirowych zaindukowanych w sferze mosiężnej na wyznaczony wcześniej rozkład prądów wirowych w kuli naśladującej. Pozostałe warunki brzegowe mają postać:

$$V_{\mathrm{II}} - V_{\mathrm{I}} = I \tag{34}$$

$$\frac{\partial V_{\mathrm{I}}}{\partial r} = \frac{\partial V_{\mathrm{II}}}{\partial r}\bigg|_{r=R_1} \tag{35}$$

Przeprowadzając obliczenia analogiczne jak w p. 3 otrzymuje się następującą postać funkcji prądowej I, opisującej rozkład prądów wirowych na powierzchni warstwy mosiężnej

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n} \frac{1}{R_1^{n+1}} F_n P_n(\cos\Theta) e^{j\omega t}, \tag{36}$$

gdzie:

$$F_n = I\frac{n}{2n+1}\frac{jb_1[jb(1-\varrho^{2n+1})+2n+1]}{(jb_1+2n+1)(jb+2n+1)}R_1^{n+2}C_n \tag{37}$$

$$b_1 = \omega\mu_0\sigma_1 R_1$$

Uwzględniając wzory

$$B_{r\mathrm{II}} = \mu_0 H_{r\mathrm{II}} = -\mu_0\frac{\partial V_{\mathrm{II}}}{\partial r},$$

$$B_{\Theta\mathrm{II}} = \mu_0 H_{\Theta\mathrm{II}} = -\frac{\mu_0}{r}\frac{\partial V_{\mathrm{II}}}{\partial \Theta},$$

na podstawie zależności (32b), (37) składowe wektora indukcji pola magnetycznego w obszarze II przyjmują postać:

$$B_{r\mathrm{II}} = \mu_0 J\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)C_n}{2n+1}\frac{jb_1[jb(1-\varrho^{2n+1})+2n+1]}{(jb_1+2n+1)(jb+2n+1)}\frac{R_1^{n+2}}{r^{n+2}}P_n(\cos\Theta)e^{j\omega t} \tag{38a}$$

$$B_{\Theta\mathrm{II}} = \mu_0 J\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nC_n}{2n+1}\frac{jb_1[jb(1-\varrho^{2n+1})+2n+1]}{(jb_1+2n+1)(jb+2n+1)}\frac{R_1^{n+2}}{r^{n+2}}P_n^1(\cos\Theta)e^{j\omega t}. \tag{38b}$$

Znajomość rozkładu pola magnetycznego wytworzonego przez prądy wirowe płynące na powierzchni kuli żyroskopowej (wzory 38) pozwala obliczyć dodatkową siłę ponderomotoryczną $\vec{F}_2$ działającą wzdłuż osi Z na kulę naśladującą wg wzoru:

$$F_z = -\frac{1}{2}R_2^2 Re\left\{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}K_\varphi^*(B_{r\mathrm{II}}\sin\Theta + B_{\Theta\mathrm{II}}\cos\Theta)\sin\Theta\,d\varphi\,d\Theta\right\}. \tag{39}$$

Dodatkowa siła ponderomotoryczna F_2 działająca na sferę mosiężną wyrazi się zależnością

$$F_2 = -F_z \tag{40}$$

Na podstawie (25), (38), (40) otrzymuje się

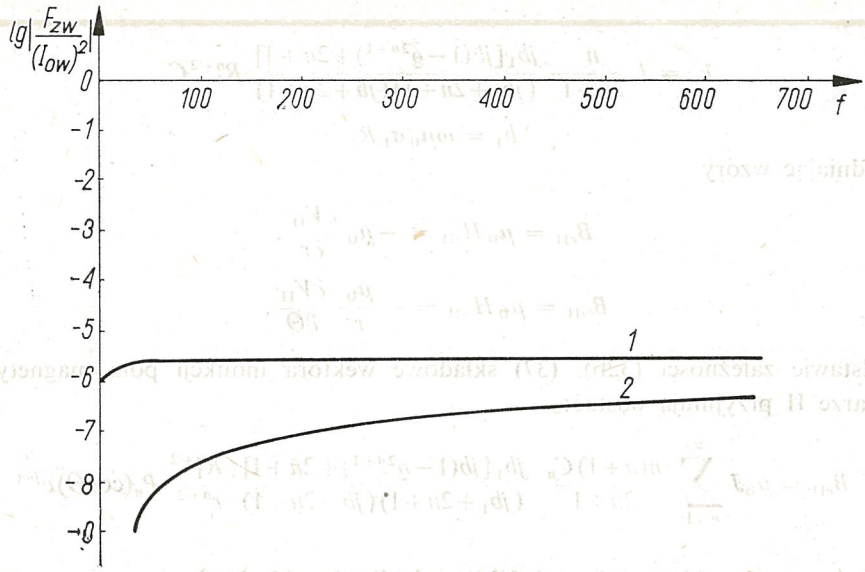
$$F_2 = 2\pi\mu_0 J^2 R_2^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)(n+1)}{(2n-1)(2n+1)}\mathscr{L}^{2n+3}C_nC_{n-1}b_1 bR_e\times$$

$$\times\left[\frac{jb(1-\mathscr{L}^{2n-1})+2n-1}{(-jb+2n+1)(jb+2n-1)(jb_1+2n-1)}\right]. \tag{41}$$

W przypadku zredukowania uzwojenia unoszącego do postaci pojedynczego zwoju kołowego zależność (41) przyjmuje postać:

$$F_{2zw} = -\pi\mu_0(I_0 w)^2\sum_{n=2}^{\infty}Re\left\{\left[\frac{jb(1-\varrho^{2n-1})+2n-1}{(-jb+2n+1)(jb+2n-1)(jb_1+2n-1)}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\frac{b_1 b}{n}\varrho^{2n+1}P_{n-1}(\cos s\beta_1)P_n^1(\cos\beta_1)\sin^2\beta_1\right\}. \tag{42}$$



Rys. 11. Wpływ obecności mosiężnej sfery na siłę unoszenia kuli żyroskopowej (krzywa 1 — model uproszczony, krzywa 2 — dodatkowa siła wynikająca z modelu zmodyfikowanego)

$\frac{R_z}{R_2} = 0{,}66$ $R_1 = 0{,}12$ [m]; $\beta_1 = \frac{\pi}{4}$ $R_2 = 0{,}13$ [m]; 1 — wg wzoru (28a); 2 — wg wzoru (42)

Na rys. 11 przedstawiono zależność siły unoszenia kuli żyroskopowej wyznaczonej na podstawie modelu uproszczonego żyrokompasu (wzór 28a) oraz dodatkowej siły działającej na kulę, wyznaczonej za pomocą modelu zmodyfikowanego (wzór 42) w funkcji częstotliwości. Przy obliczeniach korzystano z zależności $b = \omega\mu_0\sigma R_2 = \omega\mu_0 d_1 \gamma R_2$ oraz $b_1 = \omega\mu_0\sigma_1 R_1 = \omega\mu_0 d_1 \gamma_1 R_1$

gdzie: d i d_1 — grubość kuli naśladującej i kuli mosiężnej.

Obliczenia wykonano dla następujących danych:

$$\gamma = 3{,}3 \cdot 10^7 \frac{1}{\Omega m}; \quad d = 5 \cdot 10^{-3} m; \quad \gamma_1 = 0{,}57 \cdot 10^7 \frac{1}{\Omega m}; \quad d_1 = 2 \cdot 10^{-3} m.$$

Z rys. 11 wynika pomijalnie mała wartość dodatkowej siły wynikającej z uwzględnienia obecności mosiężnej sfery pokrywającej kulę żyroskopową. Dla występujących w praktyce częstotliwości rzędu 300÷400 Hz dodatkowa siła F_2 nie przekracza 10% wartości siły unoszącej wyznaczonej w p. 3, przy czym siły te mają znaki przeciwne.

5. PODSUMOWANIE

W pracy dokonano analizy pola elektromagnetycznego oraz wyznaczono siłę unoszącą kulę żyroskopową w żyrokompasie okrętowym. Do analizy wykorzystano potencjał skalarny pola magnetycznego oraz funkcję prądową I. Wykazano, że pominięcie prądów wirowych indukowanych na powierzchni kuli żyroskopowej nie ma wpływu na wielkość siły ponderomotorycznej. Wniosek ten można uogólnić na prądy wirowe indukowane

w elementach przewodzących znajdujących się wewnątrz kuli żyroskopowej. W celu określenia zasadności zastosowania funkcji prądowej I zostanie przeprowadzona analiza z wykorzystaniem wektorowego potencjału magnetycznego. Będzie to stanowiło temat kolejnej pracy autorów.

LITERATURA

1. M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, New York: Dower 1970.
2. K. Adamiak, J. Purczyński, R. Sikora, *Eine Metallhohkugel in magnetischen Wechselfeld einer kugeligen Spule*, Zeit. Elektr. Inform.-u. Energietechnik, nr 7, 1977.
3. N. F. Babajewa, *Giroskopy*, Mašynostrojenije, Leningrad 1973.
4. W. W. Chruščew, *Električeskije mikromašyny awtomatičeskich ustrojstw*, Eniergija, Leningrad 1976.
5. G. Comenetz, J. W. Salatka, *Ten-gram levitation — molted ingots*, J. of Electroch. Soc., vol. 105, 11 November 1958.
6. K. Dengford, *Datciki inercialnych sistiem na nowych fizičeskich principach*, Woprosy rakietnoj tiechniki, nr 9 i nr 10, 1966.
7. J. Gołębiowski, *Dynamika nieustalonego pola elektromagnetycznego w obszarach przewodzących*, Praca dokrotska, Szczecin 1979.
8. J. A. Gorejštejn, J. A. Šulman, *Inercjalnyje nawigacijonnoje sistiemy*, Mašynostrojenije, Moskwa 1970.
9. M. Gramz, *Obliczanie prądów indukowanych w cienkich przewodnikach poruszających się względem pola magnetycznego*, Praca doktorska, Szczecin, 1976.
10. M. Gramz, J. Purczyński, R. Sikora, *Calculation of eddy currents inducted in thin curved sheets*, Conference on the Computation of Magnetic Field Compumag 78, Grenoble 1978.
11. L. Kaszycki, *Analiza pola elektromagnetycznego układów żyroskopowych i silników indukcyjnych o symetrii kulistej*, Praca doktorska, Szczecin 1983.
12. G. A. Korn, T. M. Korn, *Mathematical handbook for scientists and engineers*, McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto, London 1961.
13. W. Lipiński, R. Sikora, J. Purczyński, *Przykłady obliczeń pola magnetycznego cewek kulistych*, Archiw. Elektrot. t. XXIII, 1974.
14. A. N. Millach, W. A. Barabanow, E. W. Dwoinych, *Trichstiepiennyje električeskije mašyny*, Kijów 1979.
15. E. C. Okres, D. M. Wroughton, *Elektromagnetic levitation of solid and molten metals*, J. of. Applied Physics, vol. 23, nr 5, 1952.
16. J. Purczyński, *Wykorzystanie metody rozdzielania zmiennych i metod wariacyjnych do analizy stacjonarnych pól elektromagnetycznych*, Rozprawa habilitacyjna, Szczecin 1977.
17. J. Purczyński, *Pole magnetyczne silnika elektrycznego o trzech stopniach swobody*, Arch. Elektrot. t. XXIII, z. 2, 1974.
18. J. Purczyński, R. Sikora, *Wpływ reakcji prądów wirowych na pole magnetyczne układów o trzech stopniach swobody*, Arch. Elektrot. 6. XXII, z. 4. 1974.
19. J. Purczyński, R. Sikora, *Straty mocy oraz siły występujące w układzie kula ferromagnetyczna — uzwojenie kuliste*, Arch. Elektrot., t. XXV, z. 3, 1976.
20. R. Sikora, W. Lipiński, J. Purczyński, *Pole magnetyczne cewki o skończonych wymiarach*. Arch. Elektrot., z. 4, 1974.
21. R. Sikora, J. Purczyński, W. Lipiński, *Zastosowanie całkowego przekształcenia Mellina do obliczania pola magnetycznego cewki kulistej*, Arch. Elektrot. T. XXII, z. 4. 1974.
22. R. Sikora, W. Lipiński, *Synteza schematu zastępczego impedancji wewnętrznej łożyska kulkowego*. Prace Naukowe Politechniki Szczecińskiej, Instytut Automatyki Przemysłowej, nr 81, Szczecin 1977.

23. W. R. Smythe, *Static and dynamic electricity*, McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto, London, 1950.
24. Praca zbiorowa *Urządzenia nawigacyjne*, Wydawnictwo Morskie, Gdynia 1967.

J. PURCZYŃSKI, L. KASZYCKI

APPLICATION OF CURRENT FLOW FUNCTION *I* TO THE ANALYSIS OF GYROMAGNETIC COMPASS BEARINGS

Summary

In the paper the analysis of magnetic field has been accomplished and levitational force acting on gyro-ball in gyromagnetic compass. The scalar magnetic potential and current flow function *I* have been applied to the analysis.

J. PURCZYŃSKI, L. KASZYCKI

UTILISATION DE LA FONCTION DU COURANT *I* POUR L'ANALYSE DU PALIER MAGNÉTIQUE DU GYROCOMPAS DE NAVIRE

Résumé

Dans le travail on analyse le champ électromagnétique et on détermine la force entraînant la sphère gyroscopique dans un gyrocompas de navire. Dans l'analyse on utilise le potentiel scalaire du champ électromagnétique et la fonction du courant.

J. PURCZYŃSKI, L. KASZYCKI

ANWENDUNG DER STROMFUNKTION *I* ZUR ANALYSE DER MAGNETLAGERUNG EINES SCHIFFSKREISELKOMPASSES

Zusammenfassung

In dem Artikel wurde das elektromagnetische Feld analysiert und die Hebekraft der Girokugel im Schiffskreiselkompass bestimmt. Zur Analyse wurde das Skalarpotential des Magnetfeldes sowie die Stromfunktion *I* angewandt.

Я. ПУРЧИНЬСКИ, Л. КАШИЦКИ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИИ ТОКА *I* ДЛЯ АНАЛИЗА МАГНИТНОЙ ПОДВЕСКИ КОРАБЕЛЬНОГО ГИРОКОМПАСА

Резюме

Проведен анализ электромагнитного поля, а также определена сила подвески шара гироскопа в гирокомпасе корабля. Для анализа использован скалярный потенциал магнитного поля и функция тока *I*.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1986, 32, z. 1, ss. 53-68

621.3.049.77

Wybrane zagadnienia związane z wpływem promieniowania jądrowego na układy scalone

JANUSZ WISŁOWSKI (WARSZAWA)

Instytut Technologii Elektronowej

Otrzymano 18.12.1984

Zagadnienia odporności na radiację są obecnie szeroko badane w czołowych firmach elektronicznych na świecie. Służą one nie tylko bezpośrednio odbiorcom specjalnym, ale stanowią jeden ze sposobów podnoszenia jakości nowoczesnych wyrobów MOS. W ramach pracy dokonano przeglądu piśmiennictwa, omówiono metodologię pomiarów odporności na radiację pamięci statycznych MOS RAM i dokonano wyrywkowych pomiarów tej odporności.

1. WSTĘP

Rozwój technologii i konstrukcji układów scalonych charakteryzuje się stałym zmniejszaniem wymiarów w strukturze półprzewodnikowej i wzrostem skomplikowania układowego. W drugiej połowie lat siedemdziesiątych nastąpiło zahamowanie szybkości wzrostu skali integracji układów scalonych związane z wpływem promieniowania jądrowego. Problemy spowodowane oddziaływaniem lub możliwością oddziaływania promieniowania jądrowego na elementy i podzespoły półprzewodnikowe muszą uwzględniać konstruktorzy i technolodzy układów oraz konstruktorzy systemów kompleksu wojskowo-kosmicznego.

2. ŹRÓDŁA PROMIENIOWANIA JĄDROWEGO

W wyniku promieniotwórczości lub reakcji jądrowych powstaje promieniowanie jądrowe, to jest strumień cząstek jądrowych, w tym i kwantów promieniowania emitowanych na skutek zmian zachodzących w strukturze jądra. Podczas przemian promieniotwórczych powstaje promieniowanie α, β i γ a w wyniku reakcji jądrowych powstaje m.in. silny strumień neutronów (promieniowanie n). Cząstki α (jądra helu) powstałe w wyniku rozpadu promieniotwórczego jąder mają energię od 1,83 do 11,65 MeV. Cząstki β (elektrony e^- lub pozytony e^+) powstałe w wyniku rozpadu promieniotwórczego mają

energię od 0,02 do 13,4 MeV. Elektrony występujące w promieniowaniu kosmicznym oraz przyspieszane w akceleratorach mogą mieć energię o wiele wyższą, przekraczającą nawet znacznie 1 GeV.

Podczas promieniotwórczego rozpadu jąder występuje promieniowanie γ o energiach kwantu zazwyczaj od 10 keV do 5 MeV, choć zdarza się promieniowanie o minimalnej energii kwantu, np. 70 eV. Przy reakcjach jądrowych występuje też promieniowanie γ o większych energiach — do 20 MeV. W promieniowaniu kosmicznym występują kwanty promieniowania elektromagnetycznego o znacznie większych energiach. Można je także otrzymać stosując hamowanie naładowanych cząstek. Uzyskuje się wtedy kwanty promieniowania γ o energiach kwantu kilkunastu i więcej GeV. Ze względu na energię kwantu, promieniowanie γ dzielimy na miękkie (do 100 keV), które jest identyczne z promieniowaniem rentgenowskim i twarde (o energii większej od 100 keV).

Neutrony w dużych ilościach powstają w wyniku reakcji rozszczepienia ciężkich jąder lub termojądrowej reakcji syntezy jąder lekkich. Obecnie często wspominana w prasie codziennej jest bomba neutronowa. W wyniku reakcji izotopów wodoru i litu wytwarzany jest strumień neutronów prędkich, przejmujący znaczną część energii wybuchu.

3. ZAGROŻENIA RADIACYJNE DLA PRACUJĄCEJ APARATURY ELEKTRONICZNEJ

W kosmosie od lat trwają badania przydatności układów elektronicznych w warunkach stałej radiacji. Równolegle zagrożenie wybuchem wojny jądrowej zmusza konstruktorów sprzętu wojskowego do zapewnienia pracy układów elektronicznych nawet w przypadku wybuchu jądrowego w pobliżu stanowisk dowodzenia. Dlatego układy elektroniczne kompleksu wojskowo-kosmicznego muszą charakteryzować się odpowiednią odpornością na promieniowanie jądrowe. Jej wartość zależy od zastosowania i znacznie przewyższa poziomy przyjęte w sprzęcie cywilnym (odporność na promieniowanie jądrowe charakteryzuje jakość technologii i umożliwia jej szybką ocenę). Badania radiacyjne elementów i podzespołów elektroniki są prowadzone od lat. Pierwszym sygnałem o zagrożeniu informacji przechowywanej w pamięciach przez zjawiska radiacyjne były błędy w funkcjonowaniu aparatury sztucznych satelitów po zainstalowaniu na ich pokładzie pierwszych układów scalonych wielkiej skali integracji (LSI) [22].

Kolejnym zagrożeniem dla aparatury elektronicznej jest impuls elektromagnetyczny. Powstaje on w wyniku oddziaływania promieni γ na atomy zawarte w atmosferze. Szczególnie intensywne oddziaływanie występuje w wyniku wybuchu jądrowego poza atmosferą. Impuls elektromagnetyczny przekracza wtedy 50 kV/m, przy czasie narastania około 10 ns. Nie jest on groźny dla istot żywych, ale uszkadza wszystkie układy elektroniczne małej mocy bez specjalnych zabezpieczeń i ekranów, a w szczególności scalone układy unipolarne, bardziej wrażliwe na przepięcia i przetężenia. Niszczy on także układy elektryczne [8].

Szeroko zakrojone badania radiacyjne układów scalonych są prowadzone w szeregu firmach. Szczególnie zainteresowanie dotyczy nowych układów NMOS, które są najbardziej ekonomiczne oraz układów CMOS, które charakteryzują się minimalnym poborem mocy w stanie gotowości. Jak wiadomo zjawiska radiacyjne oddziaływują na układy scalone MOS przede wszystkim przez wbudowanie ładunku w tlenku i przez efekty po-

wierzchniowe. Natomiast układy bipolarne są mniej czułe na radiację i dawki do 10 kGy[1] nie zmieniają ich parametrów [12].

Źródłem promieniowania powodującego zmiany parametrów układów scalonych MOS mogą być czynniki „*zewnętrzne*" i „*wewnętrzne*", wbudowane w procesach technologicznych powstawania układu. Jako czynniki zewnętrzne można wymienić promieniowanie kosmiczne, pracę w pobliżu aparatury przemysłowej lub laboratoryjnej wykorzystującej izotopy promieniotwórcze, pracę w pobliżu reaktorów jądrowych, czy wybuch jądrowy. Jednak najwięcej miejsca w publikacjach dotyczących odporności radiacyjnej układów scalonych poświęca się obecnie problemom odporności na radiację „*wewnętrzną*". W drugiej połowie lat siedemdziesiątych wzrost gęstości upakowania doprowadził do zjawiska, które zmniejszyło szybkość wzrostu złożoności układów scalonych. Błędy przypadkowe (ang. soft error) powodowane cząstkami α emitowanymi z obudowy i sposoby zapobiegania im stały się przedmiotem zainteresowania czołowych firm elektronicznych. Rozwój technologii zwiększył także podatność na narażenia radiacyjne podczas procesów wytwarzania układów scalonych.

Tak więc, jak to już nie raz zdarzyło się w postępie techniki, konieczne jest zatem wykorzystanie wyników i metodyki badań elementów przeznaczonych do zastosowań specjalnych także i w sprzęcie cywilnym. Bowiem cząstki α emitowane z obudowy wywierają identyczny wpływ na układy scalone jak ciężkie jony promieniowania kosmicznego, a narażenia radiacyjne w procesach trawienia suchego, elektronolitografii i implantacji są zbliżone do oddziaływania miękkiego promieniowania γ.

4. EMISJA CZĄSTEK α Z MATERIAŁÓW NATURALNYCH

Promieniotwórczość naturalna związana jest z atomami znajdującymi się w przyrodzie, powstałymi bez ingerencji człowieka, np. ^{40}K, ^{222}Rn, ^{226}Ra, ^{232}Th, ^{235}U, ^{238}U. Znane są cztery szeregi promieniotwórcze:

— uranowo-radowy, rozpoczynający się od uranu ^{238}U; podczas kolejnych przemian promieniotwórczych każdy wyjściowy atom emituje 8 cząstek alfa, stając się izotopem ołowiu ^{206}Pb;

— torowy, rozpoczynający się od toru ^{232}Th; podczas kolejnych przemian promieniotwórczych każdy wyjściowy atom emituje 6 cząstek α, produktem końcowym jest trwały izotop ołowiu ^{208}Pb;

— uranowo-aktynowy, rozpoczynający się od izotopu uranu ^{235}U; podczas kolejnych przemian promieniotwórczych każdy wyjściowy atom emituje 7 cząstek α, produktem końcowym jest trwały izotop ołowiu ^{207}Pb;

— neptunowy (w przyrodzie występujący w znikomych ilościach), rozpoczynający się od izotopu neptunu ^{237}Np; podczas kolejnych przemian promieniotwórczych każdy wyjściowy atom emituje 7 cząstek α, produktem końcowym jest trwały izotop bizmutu ^{209}Bi.

Szeregi uranowo-aktynowy, a zwłaszcza neptunowy są w przyrodzie rzadko spotykane.

[1] W dodatku zamieszczono legalne jednostki związane z promieniowaniem.

Dlatego o emisji cząstek α z materiałów decyduje zawartość długożyciowych izotopów ^{238}U i ^{232}Th.

Rozkład promieniotwórczy podlega prawu wykładniczemu. Literą λ oznacza się stałą rozpadu. Jeżeli N_0 oznacza początkową liczbę atomów, liczba atomów wyjściowego izotopu, które nie uległy przemianie w chwili t, wynosi

$$N(t) = N_0 \cdot \exp(-\lambda t).$$

Liczba rozpadów izotopu wyjściowego wynosi

$$\Delta N = N_0 - N(t) = N_0(1 - e^{-\lambda t})_{t \ll T} = N_0 \lambda t$$

a w czasie 1 s $-\Delta N/t = \lambda N_0$, gdzie T okres połowicznego zaniku. Z tych wzorów można szacunkowo określić średnią liczbę emisji cząstek na sekundę z 1 g materiału skorupy ziemskiej w następujący sposób: liczba atomów izotopu wyjściowego w 1 g pierwiastka wynosi $\frac{N_A}{A}$; gdzie N_A — liczba Avogadro, A — masa atomowa.

Wyjściowa liczba atomów w 1 g materiału skorupy ziemskiej wynosi $N_0 = p_A \frac{N_A}{A}$, p_A — zawartość izotopu wyjściowego w skorupie ziemskiej: dla uranu $p_{238} \approx 3 \cdot 10^{-6}$, a dla toru $p_{232} \approx 8 \cdot 10^{-8}$ [3].

Liczba emitowanych cząstek α wynosi więc dla każdego z omawianych izotopów $N_\alpha = \frac{N_A}{A} p_A n_A \frac{\ln 2}{T}$ i jest wyrażana w 1/g.s. We wzorze przez n_A oznaczono liczbę cząstek emitowanych podczas kolejnych przemian w całym szeregu rozpoczynającym się izotopu o masie atomowej A. Dla ^{238}U uzyskuje się

$$N_\alpha^U = \frac{6 \cdot 10^{23}}{238\text{g}} 3 \cdot 10^{-6} \cdot 8 \cdot \frac{0{,}693}{4{,}5110 \cdot 10^9 \text{ lat}} \approx 0{,}3/\text{g.s, dla } ^{232}Th$$

$$N_\alpha^{Th} = \frac{6 \cdot 10^{23}}{232\text{g}} 8 \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot \frac{0{,}693}{1{,}39 \cdot 10^{10} \text{ lat}} \approx 0{,}2/\text{g.s.}$$

Przy założeniu średniej gęstości skorupy ziemskiej 2,5 g/cm^3, liczba emitowanych cząstek α z objętości 1 cm^3 wynosi średnio $N_\alpha = N_\alpha^U \cdot 2{,}5$ g/cm$^3 + N_\alpha^{Th} \cdot 2{,}5$ g/cm^3 = $= 0{,}75$ (cm$^3 \cdot$s $+ 0{,}5$) cm$^3 \cdot$s $N_\alpha \approx 1{,}2/\text{cm}^3 \cdot$s. Cząstki α mają ograniczony zasięg. W krzemie wynosi on około $l \sim 25$ μm, dla energii, z którymi emitowane są cząstki. Dla takiego zasięgu, przy wyznaczonej średniej liczbie emitowanych cząstek, można oszacować strumień cząstek przechodzący przez powierzchnię 1 cm^2: $\Phi = \frac{n_\alpha l}{\pi} \approx 10^{-3}/\text{cm}^2 \cdot$s. Dla przeciętnego więc materiału przez powierzchnię 1 cm^2 w przybliżeniu raz na tysiąc sekund przechodzi cząstka α emitowana przez atom naturalnego szeregu promieniotwórczego. Ponieważ jednak na obudowy układów scalonych stosuje się różne materiały, istnieje niebezpieczeństwo zastosowania także i materiału o większej zawartości uranu, czy toru, a wtedy strumień cząstek alfa może znacznie wzrosnąć. Ale i ta średnia wartość strumienia cząstek α (10^{-3}/cm$^2 \cdot$s) jest znacznie większa od strumienia składowej jądrowej promieniowania kosmicznego na powierzchni Ziemi, z której większość stanowią protony, nie powodujące błędów przypadkowych [22].

5. EMISJA CZĄSTEK α Z MATERIAŁÓW OBUDÓW

Rozwój techniki półprzewodnikowej doprowadził do znacznego zwiększenia liczby elementów w układzie scalonym, m.in. dzięki zmniejszeniu wymiarów elementów. Zwiększa to niezawodność systemów elektronicznych i poprawia parametry elektryczne tak układu jak i systemu. Szybkość wzrostu skali integracji ograniczają liczne problemy, na które natrafili projektanci: konstrukcyjne, technologiczne, związane tak z jakością materiałów, jak i przede wszystkim z urządzeniami technologicznymi, pomiarowe, niezawodnościowe oraz także radiacyjne. Fragmentarycznie zasygnalizowano te problemy w [26].

Problemy związane z odpornością na radiację najszybciej wystąpiły w pamięciach dynamicznych MOS RAM. Związane jest to z małym poborem mocy przez te układy i niewielkimi pojemnościami węzłowymi. Wzrost skali integracji wraz ze zmniejszeniem wymiarów komórki zmniejsza pobór mocy, pojemności węzłowe, a w związku z tym mniejszy jest ładunek magazynowany w węźle.

Już wprowadzenie do produkcji pamięci dynamicznych (DRAM) 16 K spowodowało szerokie zainteresowanie problemami związanymi z jednej strony z radiacyjnym wpływem niektórych operacji technologicznych na tlenek, a przede wszystkim z wpływem cząstek α. Cząstki te pochodzą z rozpadu radioaktywnego zawartych w obudowie pierwiastków promieniotwórczych.

Określono, że dopuszczalny strumień tych cząstek, który wywołuje liczbę błędów 0,1%/1000 h dla pamięci DRAM 16 K jest rzędu $0{,}1/cm^2 \cdot h$, a dla pamięci DRAM 64 K jest rzędu $0{,}01/cm^2 \cdot h$ [7]. Dlatego podjęto prace mające na celu wykrycie zawartości uranu i toru w różnych materiałach stosowanych do produkcji układów scalonych.

Wykrycie ilościowe materiałów promieniotwórczych w materiałach służących do produkcji podzespołów półprzewodnikowych jest trudne. Ich wpływ istnieje już przy zawartości 10^{-8} atomów promieniotwórczych. Aby określić ich ilość stosuje się analizy:

Tablica 1

Analiza materiałowa zawartości atomów uranu i toru uzyskana metodą spektroskopii i wyniki pomiarów emisji cząstek α w wybranych materiałach obudów wg [16]

Materiał			Zawartość		Emisyjność
			U.10^6	Th.10^6	α/cm².h
Ceramika		A	2,5	0,6	0,6
		B			0,3
		C			0,5
Szkło		A	12	6	29
		B	2,5	3	5,2
		C	17	6	45
		D	12	6	18
		E			32
Żywica	epoksydowa				1,7
	silikonowa				1,3
Złocone wieczko					0,04—1

Tablica 2

Zawartość uranu i toru w materiałach stosowanych przy produkcji układów scalonych wg [7]

Materiał		Zawartość U.10^9	Zawartość Th.10^9
Ceramika	Al_2O_3 o małej zawartości ZrO_2 (A)	500	90
	,, ,, ,, ,, (B)	850	500
	,, ,, ,, Na (A)	110	—
	,, ,, ,, ,, (H)	180	—
	,, (A)	290	—
	,, (B)	190	—
	Szafir	5	—
Wieczko	Fe, Ni, Co — stop	1	2
	Stop 42	0,5	0,5
	Stop Au-Sn	<1	<1
Materiał zabezpieczający	Żywica silikonowa (A)	5	2
	,, ,, (B)	⩽ 5	⩽ 4
	Poliimid	< 3	< 3
Plastyk na obudowy	Żywica epoksydowa (A) z 60—70% SiO_2	30	10
	,, ,, (B) ,, ,,	120	300
	,, silikonowa ,, ,,	800	5000
	SiO_2 jako wypełniacz	90	460
Podłoże	Si	< 0,5	< 0,5
Metale	Mo	80	90
	Mo taśma	60	80
	Al	3	< 10
	Au	1	2
Emulsja światłoczuła	Fotoemulsja (A)	< 3	< 3
	,, (B)	< 3	< 3
	Emulsja do elektronolitografii (A)	1	2
	,, ,, (B)	1	2

radioaktywacyjną, fluorofotometryczną, absorpcyjną, spektrofotometryczną i wtórną spektroskopię jonową, która jest najprostsza, ale ogranicza zakres pomiarowy do $5 \cdot 10^{-6}$. Po zastosowaniu separacji uranu i toru, można granicę wykrywalności tych pierwiastków znacznie przesunąć — do 0,2 ng [7].

Oczywiście w zależności od obróbki chemicznej i stosowanych materiałów wyjściowych, materiały stosowane w procesach technologicznych mogą się różnić znacznie zawartością pierwiastków szeregu promieniotwórczego. Zatem dla takiej samej ilości pierwiastka wyjściowego szeregu promieniotwórczego (U, Th) w materiale obudowy ich emisyjność może się różnić (np. szkło A i D w tabeli 1). Dlatego teoretyczne wyliczenie emisyjności materiałów na podstawie wyznaczenia zawartości uranu i toru obarczone może być błędem w granicach jednego rzędu wielkości.

W piśmiennictwie podano dwie tablice określające poziom substancji radioaktywnych

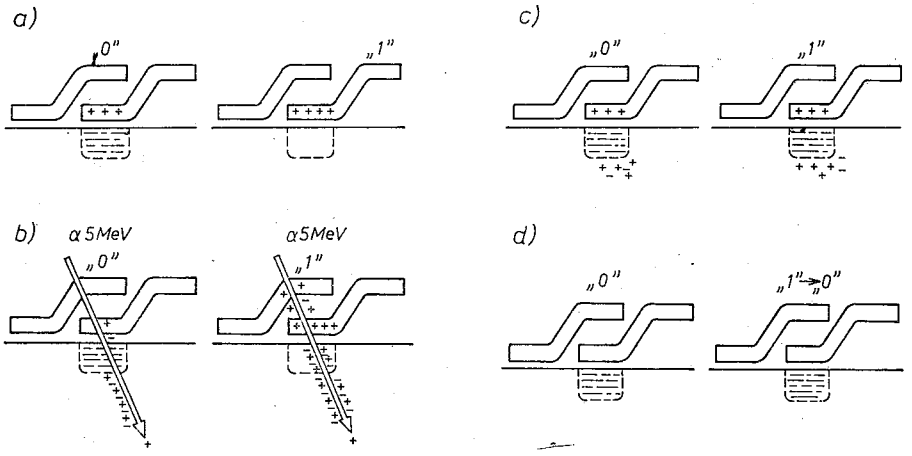
w materiałach stosowanych w technice półprzewodnikowej. Należy pamiętać, że u innych producentów wyniki mogą znacznie się różnić.

6. BŁĘDY PRZYPADKOWE

Pamięci dynamiczne wymagają odświeżania informacji, przechowywanej w komórce w postaci zgromadzonego ładunku. W układach NMOS RAM i CCD, ładunkiem jest porcja elektronów magazynowana w studni potencjału w krzemie typu p, pod dodatnio polaryzowaną bramką. Przechowywany ładunek wynosi od 50 000 do 3 mln elektronów. Liczba tych elektronów, określająca zmianę stanu jest zmniejszana przez następujące efekty: niecałkowite przesunięcie ładunku do wzmacniaczy odczytu linii bitów, generację termiczną. Zależy bardzo silnie od czułości wzmacniaczy odczytu. Liczbę ładunków rozróżniającą stany „0" i „1" określa się jako ładunek krytyczny (Q_{kr}).

Jak wiadomo oświetlenie lub wysoka temperatura może spowodować wypełnienie studni potencjałów elektronami. Podobny efekt może nastąpić w wyniku jonizacji radiacyjnej, tak przez hamowaną cząstkę α, jak i przez inne cięższe cząstki. Przyjmuje się, że cząstka α w krzemie generuje na swojej drodze średnio 2,5 mln. par elektron-dziura [21]. Cząstki α mogą więc powodować błędy przypadkowe. Są to niepowtarzalne, jednobitowe błędy w pamięci. Brak jest defektów fizycznych związanych z tym błędem. Nie następuje błąd trwały — zmiana parametrów komórki. Po powtórnym zapisie prawdopodobieństwo powtórnego błędu przypadkowego jest takie samo dla tego bitu, jak i dla innych bitów. Zjawisko to nie może być usunięte przez standardową redukcję szumów. Tylko właściwy projekt konstrukcyjno-technologiczny uwzględniający występowanie w materiałach obudowy emisji cząstek α może wyeliminować te błędy.

Błędy przypadkowe nie występowały, lub ze względu na minimalną częstotliwość występowania, były niezauważone w pamięciach 1K DRAM MOS. Występują one w pamięciach DRAM i CCD począwszy od pojemności 4K, choć sygnalizowane jest także ich -występowanie w pamięciach MOS RAM o obniżonym poborze mocy. Należy spodzie



Mechanizm powstania błędu przypadkowego komórki w wyniku przelotu cząstki α. Szczegółowy opis w tekście

wać się, że wystąpią one przy zmniejszeniu minimalnych wymiarów nie tylko we wszystkich układach MOS, ale i w bipolarnych. Nie rozwiązanie problemów związanych z odpornością układów scalonych na promieniowanie cząstek α emitowanych z obudowy utrudniło wprowadzenie na rynek pamięci DRAM 64K w końcu lat siedemdziesiątych.

Błędy przypadkowe dzielimy na błędy komórek i błędy odświeżania. Na rys. 1. przedstawiono sposób powstawania typowego błędu komórki. W pamięci dynamicznej NMOS stanowi „0" odpowiada ładunek elektronów zgromadzonych w studni potencjału w krzemie typu *p* pod dodatnio polaryzowaną bramką. Stanowi „1" odpowiada pusta studnia potencjału. Przedstawiono to na pierwszej części rysunku oznaczonej literą a. W chwili przejścia cząstki α, ewentualnie jonu o dostatecznej energii, (rys. 1b), wokół trajektorii powstają pary elektron-dziura. Ich liczba zależy od energii cząstki, dla cząstek o maksymalnej energii powstaje kilka milionów takich par. Następnie ładunki te rozpływają się po całym obszarze *p*, przy czym dodatnio naładowane dziury odpychane są od dodatnio polaryzowanej bramki, a elektrony są przez nią przyciągane. Powoduje to unoszenie dziur poza obszar warstwy zubożonej do obszaru typu *n* (składowa unoszenia prądu). Dodatkowe elektrony powstałe w wyniku jonizacji przy przelocie cząstki α pozostają w studni potencjału. Prąd unoszenia trwa nanosekundy. Stan komórek w tym momencie przedstawia rys. 1c. Prąd dyfuzyjny, związany z dyfuzją elektronów z obszaru typu *n* w pobliżu obszaru typu *p* trwa kilka mikrosekund (składowa dyfuzyjna prądu). Po tym czasie wszystkie niezrekombinowane elektrony znajdują się w studni potencjału, a dziury opuściły ten obszar. Współczynnik efektywności zbierania ładunku jest bliski jedności ze względu na niewielką rekombinację nośników.

Stan obu komórek w kilka mikrosekund po przelocie cząstki α przedstawia rys. 1d. W obu studniach potencjału istnieje ładunek elektronów. Jeżeli jest on dostatecznie duży, obie komórki są w stanie odpowiadającym zeru logicznemu. W wyniku przelotu cząstki α nastąpiło więc przejście komórki, w której zapisana była jedynka logiczna, w stan zera logicznego. Natomiast komórka, w której było zapisane zero logiczne, pomimo przejścia cząstki alfa nie zmieniła stanu logicznego. Opisany powyżej błąd komórki występuje w pamięciach dynamicznych, a także w statycznych pamięciach RAM w przypadku, gdy impuls ładunku w niewłączonym tranzystorze spowoduje regeneracyjną zmianę stanu komórki. W tym przypadku odgrywa rolę tylko prąd unoszenia, który musi być dostatecznie duży.

W powstaniu błędów przypadkowych w pamięciach dynamicznych oprócz prądu unoszenia odgrywają rolę prądy dyfuzyjne, tj. ładunek zebrany z obszaru zubożonego. Jest on szczególnie istotny przy długim czasie odświeżania.

Podobny mechanizm powstania błędu przypadkowego, jak w przypadku błędu przypadkowego komórki w pamięci dynamicznej, występuje w niej także i w przypadku błędu przypadkowego odświeżania. Cząstka α powoduje w tym przypadku zmianę stanu w kondensatorze związanym z pojemnością węzła linii odczytu. Zmienia się wówczas jej stan, o ile występuje wtedy sygnał odświeżania. Powoduje on zmianę stanu komórki podłączonej do tej linii. W takim przypadku obserwuje się zmianę stanów pamięci dynamicznych z zera na jedynkę i z jedynki na zero logiczne. Wtedy stosunek zmian stanów z zera na jedynkę do ich łącznej liczby daje informację o stosunku błędów przypadkowych komórek do łącznej liczby wszystkich błędów przypadkowych.

Do powstania błędów przypadkowych w typowych komórkach pamięci dynamicznych 64K jest wymagana siła hamująca kilka MeV/μm, którą zapewniają atomy o liczbie atomowej większej równej 2 i energii początkowej co najmniej kilka MeV. Dlatego w obecnych pamięciach błędów tych nie powodują często występujące w promieniowaniu kosmicznym protony. Liczba błędów zależy od rodzaju komórki (technologia, konstrukcja), strumienia i energii promieniowania, ładunku krytycznego, wydajności zbierania ładunku.

Jedna cząstka α może spowodować błąd przypadkowy w niektórych czułych pamięciach dynamicznych 4K. Błędy te występowały w pierwszych opracowanych pamięciach dynamicznych 16K i 64K.

Badania czułości w większości pamięci nie wykazały błędów komórek, natomiast występowały w nich błędy odczytu. Obserwowano zmiany obu stanów logicznych. Rodzaj pracy wpływa na częstość błędów, gdyż występują one tylko w stanie aktywnym wzmacniaczy odczytu. Obserwowano maksimum błędów dla energii cząstek 3—5 MeV przy kącie padania cząstki na powierzchnię 50—60 deg [16]. Zakłada się, że poziom błędów przypadkowych wynoszący 0,1%/1000 h jest dopuszczalny, choć czasem może być on niedostateczny [11].

Oczyszczenie materiałów z U i Th o trzy rzędy jest mało prawdopodobne. Bardziej prawdopodobny jest postęp w zakresie zmian czułości i detekcji błędów, oraz korekcji błędów przypadkowych. Konstrukcyjnie odporność na jony o dużej energii podnosi się zwiększając pojemności węzłowe, stosując metalowe linie bitów zamiast zagrzebanych, pokrywając warstwy polikrzemu krzemkami metali trudnotopliwych, albo densyfikując je wygrzewaniem laserowym [18].

Jednak najlepszym zabezpieczeniem struktur przed błędami przypadkowymi jest stosowanie poliimidu. Pokrycie struktury warstwą 45—55 μm zmniejsza energię cząstek α o największej energii do 2 MeV; nie powodują one wtedy błędów przypadkowych.

7. WPŁYW PROMIENIOWANIA NA WŁAŚCIWOŚCI STRUKTUR MIS

Cząstki β i γ oraz protony mają za małe straty energii w krzemie aby spowodować błędy przypadkowe. Jednak ich silny strumień może trwale uszkodzić układy MIS.

Doświadczenia wykazały, że promieniowanie powoduje w izolatorze elementów MOS dwa efekty: 1 — pułapkowanie dodatnich ładunków w dielektryku, 2 — wzrost gęstości stanów powierzchniowych. Dodatnie ładunki w tlenku zmieniają charakterystykę przyrządu. Stany powierzchniowe powodują wzrost rekombinacji powierzchniowej i w przypadku pułapkowania zmieniają napięcie progowe. Zachodzące zmiany są funkcją rodzaju izolatora, dawki promieniowania, polaryzacji bramki w czasie naświetlania, technologii wytwarzania izolatora przyrządu, jak i obróbki termicznej. Energia progowa dla efektów powierzchniowych w tranzystorach MOS wynosi około 9 eV [14]. Pojawienie się ładunku wywołanego promieniowaniem zależy od całkowitej dawki pochłoniętej a nie od mocy promieniowania. Ładunek pojawia się przy dawce rzędu 10 Gy, następnie narasta, osiągając nasycenie dla dawki pochłoniętej 10^4—10^6 Gy, czemu odpowiada np. strumień 10^{13} p/cm^2. Począwszy od dawki pochłoniętej 10^4—10^5 Gy zachodzą zmiany w przestrzen-

nym rozkładzie ładunku i interpretacja wyników pomiarowych może nastręczać trudności [14].

Zmiany technologiczne w procesach wytwarzania układów scalonych MOS doprowadziły do operacji, które powodują radiacyjne narażenia tlenku: implantacji, trawienia suchego, elektronolitografii czy rentgenolitografii. Tak więc nie tylko zastosowanie układów scalonych w kosmosie, ale i sam proces wytwarzania zmuszają do analizy wpływu radiacji na układy MOS.

Implantacja powoduje przesunięcie atomów, pierwotną i wtórną jonizację. W kolejnych operacjach technologicznych występuje wygrzewanie w temperaturze 1100 K lub wyższej. Usuwa ono większość pułapek i stany powierzchniowe oraz ładunek stały. Aby usunąć neutralne pułapki elektronowe, powodowane uszkodzeniami sieci krystalicznej należałoby długo wygrzewać płytki w temperaturze 1300 K. Najkorzystniejszym jest wykonanie nowego tlenku, a jeśli to niemożliwe, to minimalizacja implantowanej dawki.

Trawienie suche odbywa się przy niewielkich energiach jonów ~ 1 keV. Wywołuje łagodne promieniowanie X i ultrafioletowe, oraz zniszczenia sieci krystalicznej do głębokości kilku nm. Po wtopieniu metalizacji ładunek stały i szybkie stany powierzchniowe ulegają likwidacji. Pozostałe uszkodzenia tlenku w warstwie 2,5 nm (i związane z nimi pułapki neutralne) można strawić. Zmniejszyć uszkodzenia radiacyjne trawienia jonowego można przez wzrost ciśnienia i zmniejszenie energii jonów, lub pokrycie tlenku bramkowego cienką warstwą polikrzemu.

Elektronolitografia jest dokładniejsza od fotolitografii. Naświetlenie emulsji pokrywającej płytkę ze strukturami zapewnia strumień elektronów o energii około 25 keV i strumieniu ładunku około 10^{-5} C/cm^2, co odpowiada strumieniowi $6 \cdot 10^{13}$ e/cm^2 i dawce pochłoniętej 10^5 Gy. Nie niszcząc sieci krystalicznej strumień elektronów powoduje jonizację i wbudowywuje ładunek na międzypowierzchni Si-SiO_2. Pojawiają się też szybkie stany powierzchniowe, które nasycają się przy strumieniu 10^{14} e/cm^2. Korzystne jest wygrzewanie po elektronolitografii w jak najwyższej temperaturze. Wprawdzie bowiem już wygrzewanie w 450 °C usuwa ładunek i stany powierzchniowe, ale w przypadku dużej dawki mogą występować przesunięcia sieci i pułapki neutralne. Korzystne jest też zwiększenie czułości emulsji, aby strumień elektronów był mniejszy od 10^{14} e/cm^2 [9].

Różni autorzy podają różne sposoby zwiększania odporności układów scalonych na radiację. Poza wymienionymi już, strawianiem tlenku i wytwarzaniem nowego, wygrzewaniem w trakcie procesów produkcyjnych, stosuje się implantację krzemu pod tlenkiem polowym, co znacznie zwiększa odporność na radiację. Przeprowadzono próby z innymi dielektrykami np. Al_2O_3, Si_3N_4, Si_2ON_2, ale przy większej odporności na radiację charakteryzują się one trudniejszą technologią i/lub większą niestabilnością. Struktury MOS Si o orientacji ⟨100⟩ są bardziej odporne, bo zawierają mniej stanów powierzchniowych. Istnieje optymalny poziom domieszkowania chlorem przy utlenianiu. Chlor geteruje jony metali, redukuje stany powierzchniowe i zwiększa czas życia nośników w krzemie, dzięki czemu tlenek jest stabilny. Natomiast nadmiar Cl trawi Si i może kumulować się na międzypowierzchni Si-SiO_2.

W warunkach silnej radiacji najkorzystniejsze jest stosowanie komplementarnych układów CMOS/SOS lub CMOS/SOI, w których tranzystory mogą być odizolowane dielektrycznie, a rozmiary ich obszarów aktywnych są najmniejsze.

8. METODOLOGIA BADAŃ

Badania niezawodnościowe dzielimy na:
— badania wytrzymałości,
— badania odporności.

Pomiar wytrzymałości układu scalonego polega na poddaniu go narażeniom (np. udarom mechanicznym, cyklom temperaturowym, słonej mgle czy umieszczeniu go przez określony czas w polu promieniowania) przy odłączonym zasilaniu.

Pomiar odporności układu scalonego polega na poddaniu go narażeniom (np. temperaturowym, czy umieszczeniu go przez określony czas w polu promieniowania) przy włączonym zasilaniu, zgodnym z warunkami technicznymi.

Najbardziej istotne z punktu widzenia zastosowania, jest zachowanie funkcjonalnych parametrów pracujących układów scalonych. Zaletą tego pomiaru jest zgodność wyników z rzeczywistą odpornością badanych układów. Poważną wadę stanowią trudności pomiarowe.

W ITE CEMI podjęto badania w celu określenia wpływu promieniowania jądrowego na układy unipolarne produkcji krajowej. Wybrano najostrzejszy z punktu widzenia odporności pamięci sposób pomiaru — zapisany wzór szachownicy. W przypadku zmian zapisanego wzoru odporność na radiację byłaby większa, nawet o rząd wielkości. Do badań wykorzystano układy pamięci statycznej MCY 7102 [9]. Jest to układ LSI, łatwo dostępny, a dzięki jego regularnej strukturze możliwe jest łatwe umiejscowienie błędu. Dlatego zdecydowano się prowadzić badania na wybranych próbkach tych pamięci. Ze względu na początkowo bardzo wysoką cenę układów MCY 7102, przyjęto możliwie małą jednorazową badaną populację — 12 sztuk. W przypadku jednorodności partii dla takiej próbki możliwe jest wyciągnięcie pewnych wniosków statystycznych.

Na rynku brak było urządzenia przenośnego do pomiarów próbek 12 sztuk pamięci statycznej 1K. Wykonano więc specjalizowany tester, umożliwiający pomiar funkcjonalny w grupach pamięci A, B, C i D [1]. W IBJ, obecnie Instytucie Chemii i Techniki Jądrowej, w Zakładzie I, opracowano stanowisko do napromieniowania. Jego konstrukcja i parametry zostały opisane dokładnie w [25].

Opracowana metodologia pomiarów odporności na radiację scalonych pamięci statycznych polega na umieszczeniu płytki z próbką 12 sztuk układów w kasecie ekranowej cegłami ołowiowymi. Kaseta jest tak skonstruowana, że nad każdym układem scalonym znajduje się źródło izotopowe β. Dawka pochłonięta wynosi 23 mGy/s na poziomie obudowy układu scalonego, a 4 mGy/s na poziomie powierzchni struktury układu scalonego, przy uwzględnieniu ekranowania przez materiał obudowy plastykowej. Do układów dochodzi wiązka przewodów (27 sztuk), zapewniająca ich poprawną pracę. W trakcie naświetlania, co pewien okres czasu, mierzy się liczbę błędów przypadkowych i trwałych, sprawdzając stan pamięci czy zapisuje się wzór szachownicy zaczynającej się od jedynki, a na koniec sprawdza się, czy zapisuje się wzór szachownicy zaczynającej się od zera. Płytka z próbką 12 sztuk układów może być także umieszczona na specjalnej konstrukcji mechanicznej w polu promieniowania γ i n oraz w akceleratorze elektronów. Pomiary w polu promieniowania γ i n są jednak stosunkowo niebezpieczne dla obsługi.

9. WYNIKI

Ze względu na brak doświadczeń krajowych wstępne badania miały na celu określenie dawek niszczących. Badano jedną z partii informacyjnych. Stwierdzono trwałe zapisywanie się informacji w niektórych komórkach już przy dawce pochłoniętej 25 Gy promieniowania γ. Przy takiej dawce zachodziła regeneracja układu podczas wygrzewania. Większe dawki promieniowania γ (150 Gy) powodowały trwałe uszkodzenie, nie ustępujące po wygrzewaniu. Stwierdzono, że częściej zapisuje się trwale jedynka niż zero.

Następne pomiary przeprowadzono w polu promieniowania zmieniając co 1 minutę stan komórek z „1" na „0" i odwrotnie. Pomimo dużej dawki, która niszczyła układy w przypadku nie zmieniania zapisanego wzoru, pracowały one poprawnie nawet przy dawce pochłoniętej 350 Gy, przy pojedynczych błędach przypadkowych lub trwałych powyżej 150 Gy. Tak więc przy zmianie stanów komórek w pamięci statycznej, takim, że 50% czasu zapisana jest „0", a 50% czasu zapisana jest „1" logiczna, uzyskuje się kilkukrotny wzrost odporności układów na promieniowanie.

Badania na akceleratorze elektronów wykazały, że zbyt duża moc dawki pochłoniętej (8,5 Gy/μs) przebija tlenek, uszkadzając znaczną część komórek już po jednym impulsie o czasie trwania 1 μs, pomimo małej łącznej dawki.

Seria pomiarów ze źródłami izotopowymi wykazała, że powyżej dawki 50 Gy (ten i dalsze wyniki dotyczące źródeł izotopowych β odnoszą się do dawki na powierzchni układu scalonego) następuje gwałtowny przyrost błędów. Zdarzają się często „uszkodzenia wczesne" jednej — kilkudziesięciu komórek, na długo przed gwałtownym wzrostem liczby błędów.

Najciekawsze wyniki uzyskano w ostatniej serii badań. Porównano odporność i wytrzymałość układów na promieniowanie β, γ, n. Próbki zawierały po 3 układy: partia A- MCY 8102L, zgodne z WT, grupa D, partia B- MCY 7102 z serii informacyjnej, grupa A, partia C- MCY 7102 otrzymana jako braki, dobre funkcjonalnie, partia D- MCY 8102L, niezgodne z WT, dobre funkcjonalnie w przypadku rozszerzenia w stosunku do grupy D granic testowania.

Próbki po 12 sztuk poddano napromieniowaniu w polu promieniowania. Uzyskano informację, ze względu na ograniczoną liczbę badanych układów tylko jakościową, a nie statystyczną. Można jednak stwierdzić, że dla promieniowania β układy partii A są znacznie lepsze od pozostałych. Uległy one uszkodzeniu pomiędzy dawką 70 a 150 Gy. Pozostałe układy uległy uszkodzeniu pomiędzy 15 a 60 Gy. Dla promieniowania γ różnice były mniejsze, ale i tak układy partii A były bardziej odporne, niż pozostałe układy (40—70 Gy w stosunku do 25—40 Gy). Dla neutronów prędkich najbardziej odporne były układy także partii A, które ulegały uszkodzeniom pomiędzy 20—70 Gy, podczas gdy pozostałe uległy uszkodzeniu pomiędzy 0,2 a 7 Gy.

Stosunkowo wiarygodne statystycznie porównanie 12 sztukowych partii B i D w polu promieniowania β wykazało, że błędy dla większości układów partii D występują powyżej dawki pochłoniętej 30 Gy, gdy dla partii B poniżej 15 Gy. Mniejsza różnica występuje dla uszkodzeń trwałych, które dla dawki 30 Gy występują w 25% układów partii D i w 66% układów partii B.

Na tej podstawie można ocenić, że prawdopodobnie badana partia układów MCY

8102L zgodna z WT, ma dużo lepsze parametry odporności na radiację, niż te parametry dla pozostałych badanych partii. Dokładne wyniki będą mogły zostać podane po uzyskaniu większej liczby układów MCY 8102L.

Wytrzymałość układów na radiację jest w zasadzie o niecały rząd wielkości lepsza od ich odporności. Badanie to jednak nie jest praktyczne, gdyż nie odpowiada typowym warunkom pracy układu (brak pola elektrycznego w tlenku).

Przeprowadzono wygrzewanie układów. Stwierdzono, że błędy zaczynają ustępować już przy 70 deg, a najwięcej ich ustępuje przy wygrzewaniu w 170 deg. Począwszy od 200 deg liczba błędów zaczęła narastać tak w układach, jak i wzrastała liczba układów wykazujących błędy, co związane jest ze znacznym przekroczeniem dopuszczalnej maksymalnej temperatury przechowywania układów MCY 7102. Układy wygrzewano w ustalonej temperaturze przez 30 minut, po czym temperaturę podnoszono o 20—30 deg i ponawiano cykl pomiarowy. Z układów napromieniowanych źródłem izotopowym β (dawka 145 Gy) z partii D zregenerowano 7 na 11 układów, podobnie z partii B (7 na 11). Z układów zapisanych, napromieniowanych źródłem γ, (dawka 60 Gy), zregenerowano z partii B 3 na 4 układy, a z partii D 3 na 8 układów.

Pomiary kondensatorów MOS wykonanych łącznie z pamięciami MCY 7102 (SP-14), wykazały wyniki zgodnie z teorią [2]. Kilkudziesięciominutowe napromieniowanie zmienia parametry generacyjno-rekombinacyjne, natomiast istotne przesunięcie charakterystyki C-V i pojawienie się histerezy następuje po około 20 h napromieniowania źródłami izotopowymi β (odpowiednio $\sim$ 50 Gy i $\sim$ 1,5 kGy).

Porównawcze badania pamięci na ramie trwałości nie przyniosły oczekiwanych wyników ze względu na zbyt krótki dotychczasowy czas badań i niewielką populację badanych układów.

Wyniki wskazują, że odporność badanych układów jest niegorsza od wyników uzyskanych w 1978 r. na Zachodzie [19], a dla partii MCY 8102L znacznie lepsza. Przeprowadzone badania wykazują możliwość oceny odporności partii w ciągu kilku godzin.

10. ZAKOŃCZENIE

Przedstawiona analiza piśmiennictwa miała na celu przedstawienie szeregu zagadnień związanych z problematyką odporności układów scalonych na radiację. Jest oczywiste, że mały zespół nie był w stanie wykonać tych prac, które np. poprzedziły pierwszą publikację [16] z zakresu błędów przypadkowych — miliona elemento—godzin w polu promieniowania. Ponieważ jednak wydaje się, że w chwili obecnej wyniki badań odporności układów scalonych na promieniowanie jądrowe ukierunkowywują postęp technologiczny i służą przy ocenie jakości tych wyrobów, podjęto wstępnie tę szeroką tematykę.

Na zakończenie pragnę podziękować kolegom mgr inż. M. Jagusztynowi za dostarczenie jednorodnych próbek pamięci i za pomoc oraz krytyczne uwagi w trakcie prowadzenia tematu, dr inż. J. Marczewskiemu za trud włożony w pomiary struktur próbnych oraz dr W. Wrońskiemu za doskonałą współpracę podczas wykonywania badań na terenie IChTJ.

Dodatek

LEGALNE JEDNOSTKI ZWIĄZANE Z PROMIENIOWANIEM

Układ SI wprowadzono stosunkowo niedawno. Większość piśmiennictwa powstała przed kilku laty. Równocześnie tradycja sprawia, że w użyciu jeszcze często używane są jednostki niedopuszczalne w układzie SI. Dlatego poniżej podano jednostki legalne oraz wzory, za pomocą których można inne jednostki przeliczyć na obowiązujące:

— strumień cząstek, wyrażony w $1/m^2$, lub $1/cm^2$,
— gęstość strumienia cząstek, wyrażana w $1/m^2 \cdot s$, lub $1/cm^2 \cdot s$,
— energia cząstek, wyrażana w elektronowoltach, 1 eV $\approx 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J,
— aktywność ciała promieniotwórczego, wyrażona w bekerelach (Bq), zastępuje 1 Ci = = 37 GBq, 1/s = 1 Bq, 1 Rd = 1 MBq, gdzie Curie (Ci) ilość dowolnego radiojądra, która daje $3{,}7 \cdot 10^{10}$ rozpadów/s,
— gęstość mocy promieniowania jonizującego, inaczej gęstość strumienia energii, lub natężenie promieniowania, wyrażone w W/m^2, zastępuje dawniej stosowane 1 erg/ $/cm^2 \cdot s$ = 1 mW/m^2,
— dawka ekspozycyjna, inaczej ekspozycja, wyrażona w kulombach na kilogram, zastąpiła 1 R = 0,258 mC/kg, gdzie rentgen R jest ilością promieniowania X lub γ, która w wyniku towarzyszącej mu emisji korpuskularnej wytwarza w 0,001293 g suchego powietrza jony w ilości odpowiadającej 1 jednostce elektrostatycznej ładunku [5],
— dawka pochłonięta, inaczej kerma, wyrażona w grejach (Gy), zastąpiła 1 erg/g = = 0,1 mGy i 1 rad = 0,01 Gy,
— moc dawki pochłoniętej w Gy/s zastępuje 1 rad/s = 0,01 Gy/s i 1 erg/g · s = 0,1 mGy/s,
— energia przekazana, lub integralna dawka pochłonięta, wyrażona w dżulach, zastępuje 1 g · rad = 10 μJ,
— moc dawki ekspozycyjnej lub moc ekspozycji wyrażona w A/kg, zastępuje 1 R/s = = 0,258 mA/kg,
— stała właściwa promieniowania γ, wyrażana w $C \cdot m^2/kg$, zastępuje 1 $R \cdot m^2$/Ci.h $\approx$ $\approx 2 \times 10^{-18}$ $C \cdot m^2/kg$.

LITERATURA

1. H. Adamkiewicz i in., *Urządzenie do pomiaru niezawodności pamięci statycznych RAM — MCY 7102*, Prace ITE, 1983, z. 11/12, s. 101—116.
2. J. Diggle, A. Vijh, *Oxides and oxides films*, M. Dekker, New York, 1976.
3. *Encyklopedia fizyki współczesnej*, PWN, Warszawa 1983.
4. R. Freeman, A. Holmes — Siedle, *Simple model for predicting radiation effeets in MOS devices*, Trans. Nucl. Sc., 1978, 6, p. 1216—1225.
5. M. Haissinsky, *Chemia jądrowa i jej zastosowania*, PWN, Warszawa 1959.
6. K. Hoffman, *Trends in dynamic MOS — RAM, Eurocon'80*, Stuttgart, p. 103—5.
7. N. Honma, et al., *U and Th analysis of LSI constituent materials*, Rev. El. Commun Lab., 1982, 3, p. 503—50.
8. M. Heitzmann, *Immunite a l'IEM dans les systemes instalation terrestres*, Compatibilite Electromagnetic, Tregaster, France, 30.05—4.06, 1983, G5.

9. M. Jagusztyn, *Statyczne pamięci MOS — RAM MCY 7102*, Syst. Mikroproc., 1981, 8, s. 5—24.
10. A. Jakubowski, *Podstawowe właściwości struktury metal-dielektryk-półprzewodnik (MIS) oraz metody ich określania*, Prace ITE, 1982, z. 5—7.
11. H. Katto et al., *64 K RAM rebuffs external noise*, Electronics, 1980, 17, p. 103—6.
12. S. K. Khobare, *Effect of gamma irradiation on the low frequency (1/f) noise of linear IC' s*; Reliability physics study, Microelectr. Reliab. 1982, 3, p. 353—356.
13. S. B. Ko, *Observation of alpha particle effects in the charge-coupled image sensor*, Trans. Nucl. Sc. 1980, 6, p. 1500—1505.
14. J. P. Lisovskij, R. O. Litvinov, *Dejstvije jonizurujuszczego izłuczenija na MDP-struktury*, Poł. Tech. Mikroel., 1974, 18, s. 67—79.
15. A. Loidl, R. Zwick, *Investigation of the radiation resistivity of LSI IC CMOS-RAM's*, Trans. Nucl. Sc. 1982, 2, p. 1046—1050.
16. T. C. May, M. H. Woods, *Alpha-particle-induced soft errors in dynamic memories*, Trans. Electr. Dev. 1979, 1, p. 1—9.
17. J. C. Pickel, J. T. Blanford, *Cosmic-ray-induced errors in MOS devices*, Trans. Nucl. Sc. 1980, 2, p. 1006—1013.
18. J. G. Posa, *A special report: What to expect next in dynamic RAM's*, Electronics, 1980, 12, s.119—129.
19. M. Schlenther, et al. *In „situ" radiation tolerance tests of MOS RAM's*, Trans. Nucl. Sc. 1978, 6, p. 1209—1212.
20. L. L. Sivo, J. C. Peden, *Cosmic ray induced errors in stative MOS memory cells*, Trans. Nucl. Sc. 1979, 6, p. 5042—5046.
21. K. H. Url, D. G. Edwars, *Investigation of alpha-particle-induced errors in a 65536-bit VMOS dynamic memory*, Siem. For. 1980, 3, s. 128—131.
22. J. T. Wallmark, S. M. Marcus, *Minimum size and maximum packing density of nonredundant semiconductor devices*, Proc. Inst. Radio Eng., 1962, 3, p. 286—298.
23. B. Vavilov, *Dejstvije izłuczenij na połuprowodniki*, Gos. Iz. Fiz.-Mat. Lit., Moskva 1963.
24. J. Wisłowski, *Modelowanie niezawodności układów scalonych*, Prace ITE, z. 1, 1984, s. 23—40.
25. J. Wisłowski, W. Wroński, *Metodologia pomiaru wpływu promieniowania jądrowego na układy scalone*, Prace ITE, 1983, 8, s. 19—27.
26. J. Wisłowski, *Wybrane zagadnienia związane z niezawodnością układów scalonych*, Elektronizacja, 1982, 1—6, s. 21—22.
27. D. S. Yaney et al., *Alpha-particle tracks in silicon and their effect on dynamic MOS RAM reliability*, Trans. Electr. Dev. 1979, 1, p. 10—15.

J. WISŁOWSKI

CHOSEN PROBLEMS RELEVANT TO THE INFLUENCE OF NUCLEAR RADIATION ON INTEGRATED CIRCUITS

Summary

Nowadays, the problems of radiation resistance are examined in a number of outstanding electronics companies all over the world. They directly serve not only for special consignee, but they are one of ways to raise quality of modern products MOS. The paper contains literature review, measurments methodology of radiation resistance of statical stores MOS RAM, and random measurments of that resistance are given.

J. WISŁOWSKI

PROBLÈMES CHOISIS LIÉS AU RAYONNEMENT NUCLÉAIRE SUR LES CIRCUITS INTÉGRÉS

Résumé

Les problèmes de stabilité des circuits intégrés MOS sous rayonnement sont actuellement largement examinés par des firmes électroniques du monde entier. Ils sont importants non reulement pour les usagers

spéciaux, mais ils constituent aussi un des moyens de perfectionner la qualité de la production moderne MOS. Dans ce travail on a passé en revue les plus importantes publications, on a décrit la méthodologie du mesurage de la stabilité des mémoires statiques MOS RAM sous le rayonnement et on a fait quelques mesures de cette stabilité.

J. WISŁOWSKI

GEWÄHLTE PROBLEME, DIE IM ZUSAMMENHANG MIT DEM EINFLUß DER KERNSTRAHLUNG AUF INTEGRIERTE SYSTEME STEHEN

Zusammenfassung

Den Beständigkeitsproblemen gegen Strahlung wird z.Z. allseitig nachgeforscht seitens der führenden elektronischen Betriebe in aller Welt. Sie dienen nicht nur unmittelbar den Sondernutzern, sondern stellen eine der qualitätshebenden Weisen von modernen MOS-Erzeugnissen dar. Im Rahmen der vorliegenden Sachbearbeitung wurde eine Übersicht über die Fachliteratur getätigt, die Meßmethodologie der Beständigkeit gegen Speicherstrahlung der statischen MOS RAM erörtert, und stichweise Messungen dieser Beständigkeit durchgeführt.

Я. ВИСЛОВСКИ

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ КАСАЮЩИЕСЯ ВЛИЯНИЯ ЯДЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СХЕМЫ

Резюме

Проблемы радиационной стойкости интегральных схем широко исследуются предприятиях электронной техники всего мира. Эти исследования используются не только милитарной и космической промышленности, но являются олним из средств повышения качества интегральных схем, МОП. Приведен обзор литературы, представлена методология измерений радиационной стоцкости статических ЗУ с произвольной выборкой МОП и подведены итоги проведеных исследований стойкости.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1986, 32, z. 1, ss. 69 79

621.314

Uwagi o teorii elektromechanicznego przetwarzania energii

WŁODZIMIERZ PRZYBOROWSKI (WARSZAWA)

Instytut Maszyn Elektrycznych Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 1982.12.22

W pracy przedstawiono uwagi o teorii elektromechanicznego przetwarzania energii, odnośnie stosowanej nomenklatury oraz dyskursywnych prezentacji tej teorii w zakresie postulatów, wyprowadzanych równań i formułowanych zasad.

1. UWAGI WSTĘPNE

Można ogólnie stwierdzić, że teoria elektromechanicznego przetwarzania energii zajmuje się badaniami funkcji i relacji fizykalnych ujmujących cechy wyłącznie właściwe układom i systemom elektromechanicznym oraz określających wielkości determinujące stany i procesy przemian energii w tych systemach. Wśród podzespołów układów elektromechanicznych szeroką klasę stanowią maszyny elektryczne. Maszyny te są obiektami fizyczno-technicznymi, a więc jako takie zawierają usystematyzowane zbiory elementów (części) mechanicznych i obwodów elektromagnetycznych, które sprzężone są wzajemnymi oddziaływaniami pól mechanicznych, magnetycznych i elektrycznych (sił wewnętrznych, indukcji, prądów objętościowych itp.), jako oddziaływań wewnętrznych oraz poddane są oddziaływaniom zewnętrznym — momentom napędowo-obciążeniowym, napięciom lub prądom zasilającym. Teoria elektromechanicznego przetwarzania energii nie jest ogólną teorią maszyn elektrycznych, bowiem dotyczy przede wszystkim problematyki stanów nieustalonych wielkości elektro-kinetycznych (tzw. stanów dynamicznych) tych maszyn, pozostawiając poza zakresem zastosowań zasadnicze zagadnienia konstrukcyjne i problemy zjawisk poza elektro-kinetycznych (wibracyjnych, wentylacyjnych, cieplnych).

Konstytuowanie teorii do opisu stanów dynamicznych określonych przetworników, które zespalają zjawiska elektromagnetyczne i mechaniczne, wymaga sformułowania osobliwych założeń i równań, tak aby były one dostatecznie operatywne w zastosowaniu do poszczególnych zagadnień jak i w ogólnych analizach elektro-kinetycznego problemu sprzężonego, oraz technicznych zastosowaniach tej teorii. Powyższe wymogi oraz złożoność rozpatrywanych problemów skłaniają do przyjęcia dyskretnych modeli maszyn i stosownego dla tych modeli opisu formalnego oraz operowania wielkościami, które

(w kontekście stosowanego formalizmu) unifikują oddziaływania zjawisk fizycznych o różnej naturze.

W przedstawionych uwagach o teorii elektromechanicznego przetwarzania energii zasygnalizowano pewne sprawy dotyczące stosowanej w tym zagadnieniu nomenklatury, nie zawsze adekwatnej do mianowanych wielkości. Zaprezentowano ponadto pewną hierarchię poszczególnych elementów teorii abstrahując od aspektu fizykalnego zagadnień, lecz nadając jednocześnie określone interpretacje fizykalne związkom i równaniom wynikowym. Zwrócono przy tym uwagę na pewnego rodzaju dyskursywność opisu, co ze względów metodyczno-dydaktycznych wydaje się niezwykle ważne. Należy przy tym zasygnalizować, że w obszernej bibliografii zagadnień elektromechanicznego przetwarzania energii nie poświęcono większej uwagi omawianym problemom. Natomiast, zarówno w podręcznikach i monografiach [4, 5, 6, 8, 9, 10, 12], jak również przeglądowych i syntetycznych artykułach [1, 2, 3, 11] dostrzec można pewną zawiłość wywodów, przez co zatraca się przejrzystość w zakresie przyjmowanych założeń i postulatów teorii oraz wynikania określonych związków i równań.

2. UWAGI O DYSKRETYZACJI

Wobec złożoności i specyficznych sprzężeń zjawisk elektromagnetokinetycznych zachodzących w stanach dynamicznych maszyn elektrycznych odstępuje się od ujęcia polowego i kontinualnego modelu ustroju maszyny postulując pewną *integrację* tych zjawisk. Przyjmuje się również określone integracje struktur maszyn elektrycznych odnośnie obwodów elektrycznych, magnetycznych i elementów mechanicznych. Ponieważ jednak maszyna elektryczna jest obiektem fizycznym — ustrojem o parametrach rozłożonych — to określona integracja jest w dosłownym znaczeniu transformacją całkową wielkości polowych i parametrów rozciągłych w struktury dyskretne i charakterystyczne dla tych struktur wielkości fizykalne. Należy w tym miejscu zaznaczyć, że podstawy metodologiczne i formalne dyskretyzacji ustroju fizycznego i zjawisk polowych zachodzących w tych ustrojach zawierają się w procedurach wyboru tak zwanych współrzędnych uogólnionych i przyjęciu więzów [6, 8]. Więzy są związkami (algebraicznymi lub różniczkowymi) uwarunkowanymi specyficzną budową układów i ograniczającymi postacie funkcji określających procesy przemian energii w tych układach. Przyjęcie współrzędnych uogólnionych i więzów zadaje oczywiście rozważanym układom określoną liczbę stopni swobody.

Nie wnikając w tym miejscu w szczegóły metod i formalizmu dyskretyzacji ustroju rozciągłego można ogólnie stwierdzić, że dyskretyzacja z zadaniem współrzędnych uogólnionych polega na przedstawieniu szeregami funkcyjnymi $f(x, y, z, t) = \sum_k w_k(t) S_k(x, y, z)$ wielkości pól fizykalnych (np. pola gęstości prądów [6]), gdzie współczynniki $w_k(t)$ tych szeregów są właśnie współrzędnymi uogólnionymi. Wymiar dyskretyzacji, co formalnie odpowiada ograniczeniu wyrazów szeregu, ustala się wespół z nałożonymi więzami dyskretyzacyjnymi w odniesieniu do fizykalnego aspektu zagadnienia i z dostateczną dla celów technicznych dokładnością. Tak więc w wyniku określonych procedur w miejsce gęstości prądów, natężeń pól elektrycznych i magnetycznych lub indukcji otrzymuje się wielkości prądów obwodowych, napięć i strumieni skojarzonych. Ponadto parametry

charakteryzujące ustroje przestrzenne zastępuje się tak zwanymi parametrami obwodowymi (opornościami, współczynnikami indukcyjności własnej i wzajemnej). W trakcie powyższych operacji dokonuje się więc jednych z pierwszych i zasadniczych idealizacji rozważanych układów w zakresie geometrii, struktury pól fizykalnych i związków materiałowych. Należy oczywiście przy tym przestrzegać uwzględnienia odpowiednich atrybutów ustroju rzeczywistego. Przy transformacji w reprezentację dyskretną pewnych cech ustrojów rzeczywistych bierze się również pod uwagę reguły interpretacyjne oraz metody indentyfikacji wprowadzanych wielkości fizykalnych i parametrów modeli układów zastępczych. Decyduje to bowiem o możliwościach weryfikacji postulowanych modeli i metod analizy.

Konkludując można stwierdzić, że odwzorowanie w reprezentację dyskretną ustroju rzeczywistego oznacza przejście od przestrzennych parametrów układu i czasowo-przestrzennych wielkości fizykalnych określających stan układu w relacje i funkcje zależne tylko od jednej zmiennej czasowej. W sensie formalnym oznacza to opis modelu skończoną liczbą funkcji *stanu* — wyznaczających zachowanie się modelu, które to funkcje określone są układem równań różniczkowych zwyczajnych. Wypada nadmienić, że opis formalny modelu kontinualnego wymaga stosowania równań różniczkowych cząstkowych względnie różniczkowo-całkowych. Nasuwa się w tym miejscu dość trywialna uwaga, że sposób i struktura tworzonego modelu fizykalnego implikują określone formy opisu matematycznego „*zachowania się*" modelu. Zwane jest to niekiedy tworzeniem tak zwanego modelu matematycznego. Kończąc powyższe rozważania należy zaznaczyć, że uwagi dotyczące dyskretyzacji mają charakter sygnalny, bowiem w dalszym ciągu (jak również w wielu zagadnieniach szczegółowych) przyjmuje się a proiri pewną dyskretyzację ustrojów rzeczywistych. Natomiast w zagadnieniach szczegółowych dynamiki układów elektromechanicznych problemem pozostaje wybór współrzędnych uogólnionych i sformułowanie równań więzów dla tych wielkości.

3. UWAGI O ELEMENTACH TEORII

3.1. Przestrzenie funkcyjne

Punktem wyjścia wszelkiego rodzaju teorii *fizykalnych* jest określenie pojęć pierwotnych stanowiących podstawę systemu formalnego danej teorii, a jednocześnie skorelowanych z terminami i postulatami określonej dyscypliny fizykalno-technicznej. Pojęciami tymi są przede wszystkim czas i przestrzeń. W sensie matematycznym mówiąc o przestrzeni ma się na myśli pewną topologię przestrzeni, jednakże w teoriach polowych przestrzeń utożsamia się z przestrzenią wypełnioną przez ciało fizyczne. Tak więc z reguły rozważa się „*zwykłą*" przestrzeń trójwymiarową parametryzowaną ortogonalnym (zazwyczaj kartezjańskim) układem współrzędnych.

W rozważanym problemie wprowadza się jednowymiarową przestrzeń czasu T — jako przestrzeń bazową, której punkty t zwane są chwilami. Ponadto wprowadza się przestrzeń funkcyjną Z zwaną fazową, której współrzędnymi są pewne funkcje $\xi_k(t)$ (zmiennej t) i ich pochodne czasowe $\dot{\xi}_k(t)$. Zatem podstawą teorii przemian elektromechanicznych

jest przestrzeń bez topologii zwana przestrzenią stanową, która jest produktem $T \times Z$ — przestrzeni czasu T i przestrzeni fazowej Z funkcji $\langle \xi_k(t); \dot{\xi}_k(t) \rangle$ charakteryzujących funkcjonalność układu. Można ogólnie stwierdzić, że funkcje $\xi_k(t) (k = 1, \ldots, N)$ wyznaczają zachowanie się układu. Są to tak zwane współrzędne uogólnione stanu zależne od zmiennej t przestrzeni bazowej T, lecz niezależne wzajemnie od siebie. Tak więc stanem układu w chwili t_0 nazywa się uporządkowany zbiór współrzędnych $\{\xi_1(t_0), \ldots, \xi_N(t_0)\}$. Natomiast zachowanie układu jest przebiegiem w czasie stanów tego układu.

Określone współrzędne w odniesieniu do elementów mechanicznych odpowiadają położeniom (x) lub pędom (p), a odnośnie obwodów elektromagnetycznych — ładunkom (q) lub strumieniom skojarzonym (ψ). Liczba tych współrzędnych (N) odpowiada liczbie stopni swobody układu elektromechanicznego.

Wymienione współrzędne są oczywiście paralelne (np. $q \leftrightarrow \psi$) i stosowane są w zależności od dogodności obliczeń w odniesieniu do postawionego zagadnienia, przy czym jeżeli jedne z wielkości przyjmuje się za współrzędne podstawowe układu ($\xi = \langle x, q \rangle$), to drugie ($\xi^* = \langle p, \psi \rangle$) noszą nazwę współrzędnych sprzężonych.

Jak już uprzednio zaznaczono, oprócz określania układu elektromechanicznego współrzędnymi uogólnionymi $\xi_k(t)$, stosuje się również pochodne czasowe tych wielkości $\dot{\xi}_k(t)$ zwane prędkościami uogólnionymi. Interpretacja fizykalna prędkości uogólnionych jest naturalna, a zatem $\xi = \langle \dot{x}, i \rangle$, czyli $\dot{x}$ — oznacza prędkość (ruchu postępowego lub obrotowego), i — prądy obwodów elektrycznych. Analogicznie $\xi^* = \langle F, U \rangle$ interpretuje się jako siły lub momenty mechaniczne F oraz napięcia U.

Oprócz zmiennych funkcyjnych $\xi_k(t)$ o przypisanym powyżej znaczeniu formalno-fizykalnym operuje się również wielkościami zwanymi parametrami charakteryzującymi cechy konstrukcji, struktury i ukonstytuowania ustroju układu elektromechanicznego. W przypadku ogólnym parametry mogą zależeć od zmiennej t lub funkcji układu $\xi_k(t)$.

W kontekście parametrów układu należy wspomnieć o zależnościach wiążących parametry i zmienne funkcyjne

$$\begin{aligned} \xi^* &= P\dot{\xi}, \\ \dot{\xi} &= P^{-1}\dot{\xi}^*. \end{aligned} \tag{1}$$

W notacji oznaczeń wielkości fizykalnych ($P\langle L, m \rangle$) wyrażenia (1) (w przypadku liniowym) można przykładowo napisać w postaci

$$\begin{aligned} \psi &= Li, \\ p &= m\dot{x}. \end{aligned} \tag{1a}$$

W zależności od rozpatrywanego zagadnienia wygodniej jest niekiedy posługiwać się wyrażeniami odwrotnymi P^{-1} (w znaczeniu funkcji odwrotnej), co oznacza tak zwane kocharakterystyki.

Można w tym miejscu stwierdzić, że do postulatów fizykalnych prezentowanego ujęcia zalicza się parametry układów, którymi są np.: (m, I) bezwładności elementów mechanicznych, (R) rezystancje obwodów elektrycznych, (L) indukcyjności tych obwodów, (Λ) permeancje obwodów magnetycznych. Parametry te wraz z cechami elementów układu ujętymi w charakterystyki oddziaływań stanowią o właściwościach układu. Właściwości te determinują zachowanie się układu charakteryzowanego funkcjami $\langle \xi_k(t), \dot{\xi}_k(t) \rangle$ lub

$\langle \xi_k^*(t), \dot{\xi}_k^*(t) \rangle$, które wspólnie z więzami określają przemiany energetyczne i zmiany stanów układu.

Badania układu elektromechanicznego (w zakresie jego przemian elektromagnetycznych i kinetycznych) dotyczą zachowania się w czasie ukonstytuowanego modelu tego układu na przyjęte w modelu oddziaływania. W sensie formalnym sprowadza się to do rozwiązania równań dla funkcji $\xi_k(t)$, $(\xi_k^*(t))$ określających ten model.

Badanie układu w funkcyjnej zależności od czasu odnosi się naturalnie do pewnego stanu początkowego, który odpowiada stanowi w pewnej początkowej chwili t_0. Wspomniane powyżej oddziaływania, zwane w rozważanym ujęciu siłami uogólnionymi, są pojęciami pierwotnymi teorii, a w sensie fizykalnym oznaczają np. momenty (siły) działające na elementy mechaniczne lub napięcia działające w obwodach elektrycznych układu elektromechanicznego.

W powyższych uwagach parokrotnie wymienione było pojęcie energii. Należy podkreślić, że wielkość całkowitej energii układu istotnie charakteryzuje zmiany stanów układu. Jest to bowiem wielkość, która unifikuje oddziaływania elektro-mechaniczne maszyn elektrycznych, a przepływ jej jest miarą zmian elektro-kinetycznych. Wymaga się przy tym, żeby energia była tzw. „funkcją stanu", co oznacza niezależność jej od historii procesu, a więc zależność od chwilowego stanu układu nie zaś od stanu poprzedniego oraz możliwość dowolnej kolejności sumowania poszczególnych rodzajów energii. Forma funkcyjna energii, czyli jej zależność od zmiennych $\xi_k(t)$ lub $\dot{\xi}_k(t)$, umożliwia klasyfikację elementów układu w sensie potencjalności lub kinematyczności.

W zakończeniu powyższych rozważań należy zwrócić uwagę na pewne sprawy dotyczące nomenklatury. Niektóre bowiem pojęcia i wielkości określające przemiany stanów układów elektromechanicznych mianuje się nazwami o znaczeniu geometryczno-mechanicznym. Posługując się pojęciami geometryczno-mechanicznymi przeprowadza się również klasyfikację równań lub wyrażeń, których sens fizykalny jest zupełnie odmienny od stosowanych określeń. Dotyczy to takich określeń jak: ruch, tor, więzy kinematyczne, itp. Nieadekwatność tych określeń jako nazw wielkości elektromagnetycznych jest oczywista i może niekiedy wywoływać nieporozumienia. Wydaje się więc, że naturalnym sposobem uniknięcia nieporozumień i nadania sformułowaniom jednoznaczności będzie stosowanie określeń o znaczeniu ogólnym — proces, przemiana oraz używanie nazw pochodnych (w zakresie podstaw słowotwórczych i formantów) od nazw dotyczących pojęć elektromagnetycznych, np.: więzy prądowe.

3.2. Uwagi o formalizmie w teorii

Podobnie jak w teoriach polowych, gdzie punktem wyjścia postępowania formalnego jest pewien funkcjonał określony pewną funkcją $\mathscr{L}(\xi, \dot{\xi}, t)$ charakteryzującą wszystkie właściwości fizykalne układu (modelu), również w niniejszych rozważaniach wprowadza się funkcjonał określony na przestrzeni bazowej z dziedziną w przestrzeni funkcyjnej, którą jest przestrzeń fazowa Z, zatem

$$\mathscr{S} = \int_{t_0}^{t} \mathscr{L}(\xi_1, \ldots \xi_N; \dot{\xi}_1, \ldots, \dot{\xi}_N; t)\, dt. \tag{2}$$

Funkcja $\mathscr{L}$ jest naturalnie różniczkowalną funkcją wszystkich argumentów przestrzeni stanowej $T \times Z$. Funkcjonał (2) zwany jest funkcjonałem działania.

Przechodząc do następnych zależności należy określić postulaty teorii, które wespół z zastosowanym aparatem formalnym są podstawą do wyprowadzenia równań teorii.

Do zasadniczych stwierdzeń zalicza się:

1 — stwierdzenie o jednoznacznym opisie procesów elektromechanicznych przez funkcje przestrzeni fazowej $\langle \xi_k(t), \dot{\xi}_k(t) \rangle$;

2 — zasadę stacjonarnego działania orzekającą, że gdy na układ nie działają siły zewnętrzne, to równania dla zmiennych stanu zwane równaniami procesu (ruchu i przemian elektromagnetycznych) są warunkiem koniecznym ekstremum funkcjonału działania. Tak więc zasada ta żąda, aby zmienne stanu były miejscem stacjonarności funkcjonału działania. Widać stąd, że aparatem formalnym teorii jest „formalizm wariacyjny". Tak więc należy obliczyć wariację funkcjonału działania (2) spowodowaną wariacją $\delta\xi_k$. Należy przy tym podkreślić, że dokonywanie wariacji funkcji $\delta\xi_k$ pozostaje bez wpływu na przestrzeń bazową T. Wobec powyższego

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathscr{L}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta\mathscr{L}\, dt, \tag{3}$$

gdzie $\mathscr{L}$ traktuje się jako funkcję niezależnych argumentów.

Zatem

$$\delta\mathscr{L} = \sum_k \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \xi_k} \delta\xi_k + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\xi}_k} \delta\dot{\xi}_k \right]. \tag{4}$$

Przedstawiając wariację funkcji $\mathscr{L}$ w postaci

$$\delta\mathscr{L} = \sum_k \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \xi_k} \delta\xi_k - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\xi}_k} \right) \delta\xi_k + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\xi}_k} \delta\xi_k \right) \right], \tag{5}$$

można wariację funkcjonału działania zapisać jako

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta\mathscr{L}\, dt = \sum_k \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \xi_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\xi}_k} \right) \right] \delta\xi_k\, dt + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\xi}_k} \delta\xi_k \Big|_{t_0}^{t_1} \right\}. \tag{6}$$

Wyrażając zasadę stacjonarnego działania w sposób formalny można stwierdzić, że gdy nie występują siły zewnętrzne, to wariacja funkcjonału działania nie może zależeć od wariacji $\delta\xi_k$ postaci zmiennych stanu wewnątrz przestrzeni bazowej T. Zatem całka we wzorze (6) ma być równa zeru dla dowolnych funkcji $\delta\xi_k$, a więc również dla funkcji przyjmujących zero na krańcach przedziału czasowego $\langle t_0, t_1 \rangle$. Stąd otrzymuje się równania

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \xi_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\xi}_k} \right) = 0. \tag{7}$$

Są to równania Eulera-Lagrangea zagadnienia wariacyjnego dla funkcjonału działania.

Powyższy układ równań w odniesieniu do wielkości fizykalnych przy odpowiedniej postaci funkcji $\mathscr{L}$ (funkcjonału działania $\mathscr{S}$), przyjmuje ogólną postać obwodowych równań Kirchhoffa dla wielkości elektrycznych i równań Newtona dla wielkości mechanicznych. Należy jednak podkreślić, że równania te są wzajemnie sprzężone. Oznacza to, że w układzie równań jednego rodzaju (np. elektrycznych) są składniki zawierające funkcje drugiego rodzaju (np. współrzędne mechaniczne) lub współczynniki zależne od tych funkcji — i na odwrót.

Nie wypisując tych równań w jawnej postaci oznaczeń wielkości fizykalnych wypada jednak wspomnieć, że posługując się przedstawionym formalizmem można stosunkowo łatwo wyznaczyć człony sprzęgające efekty elektromagnetyczne z mechanicznymi [1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12].

Jeżeli na układ działają (uogólnione) siły zewnętrzne (siły — momenty obciążeniowe lub napędowe, napięcia źródłowe), to równania (7) nie są spełnione, czyli prawe strony równań są różne od zera. Można wówczas napisać

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \xi_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\xi}_k}\right) = -Q_k \tag{8}$$

gdzie Q_k są siłami uogólnionymi.

Tak więc związek (8) można traktować jako opisujący właściwości sił działających na proces układu o określonej postaci funkcjonału działania. Siły te są pojęciami pierwotnymi teorii i z reguły w zagadnieniach praktycznych zadana jest ich postać w formie wyrażeń bądź równań.

Nietrudno zauważyć, że pewne elementy lub podukłady układu elektromechanicznego mogą nie doznawać oddziaływania sił. Wówczas równania (8) dla zmiennych stanu odpowiednich elementów stają się jednorodne (7).

Należy w tym miejscu zaznaczyć, że powyższy sposób postulowania sił zewnętrznych w równaniach (8) przemian układów elektromechanicznych pozwala uniknąć niezręcznego związku zespalającego wariację funkcjonału działania z formą pracy wirtualnej sił zewnętrznych oddziaływujących na układ [6, 8]. Wielkości te bowiem różnią się pojęciowo oraz operatory wariacji i wirtualny są odrębne, chociaż w niektórych przypadkach operatory te można utożsamiać.

W prezentacjach ujęcia kompilującego wariacje energii i prace wirtualne zatraca się orientacje co do układu pojęć pierwotnych i postulatów teorii. Nasuwają się pytania czy postulatem jest zasada stacjonarnego działania, czy zasada prac przygotowawczych — wirtualnych? Jednocześnie wątpliwe metodologicznie wydaje się takie łączenie tych zasad, bowiem zasady te z odpowiednimi układami postulatów i pojęć pierwotnych mogą stanowić alternatywne sformułowanie elektromechaniki, a przy pewnych warunkach — mogą to być sformułowania równoważne. Połączenie tych zasad byłoby jednakże poprawne, gdyby przy postulowaniu jednej druga wynikałaby jako twierdzenie teorii — co w cytowanych pracach nie jest przedstawione, a czego w ogólnym przypadku nie można dokonać (udowodnić). Zwrócenie uwagi na te sprawy w zagadnieniach elektromechaniki jest szczególnie istotne, ponieważ wariacje lub operacje wirtualne dokonywane są na wielkościach o różnych znaczeniach fizykalnych, lecz sprzężonych w tych samych związkach i równaniach.

4. UWAGI O ZASADZIE ZACHOWANIA ENERGII

Ostatnią kwestią powyższych rozważań jest zasada zachowania energii. Naturalną konsekwencją przedstawionych wywodów jest wynikanie tej zasady z przyjętej aksjomatyki teorii, sformułowanych stwierdzeń i uzyskanych równań. Jednakże w wielu prezentacjach omawianej teorii elektromechanicznego przetwarzania energii spotyka się przyjmowanie zasady zachowania energii jako punktu wyjścia — postulatu teorii — i dedukowanie stąd równań procesów elektromechanicznych. Nie dyskutując w tym miejscu aspektu metodologicznego tych ujęć łatwo zauważyć, że naturalnym postępowaniem jest określenie niezmienniczości funkcjonału działania względem odpowiedniej grupy przekształceń dla zmiennych przestrzeni bazowej — co określa twierdzenie E. Noethera.

Postępując zatem formalnie i sprawdzając niezmienniczość funkcjonału działania (3) względem infinitezymalnego przekształcenia

$$\hat{t} = t + \delta t \tag{9}$$

otrzymuje się

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_k \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\xi}_k}\dot{\xi}_k - \mathscr{L}\right) = 0. \tag{10}$$

Przekształcenie (9) w interpretacji fizykalnej odpowiada warunkowi jednorodności przestrzeni czasu T, co z reguły postuluje się w teoriach fizykalnych. Równanie (10) oznacza stałość w czasie pewnej wielkości, którą byłoby można mianować energią układu.

Poza określonym powyżej postępowaniem można również wyznaczyć odpowiednie prawa zachowania wychodząc z wariacji funkcjonału rozszerzonej postaci równań procesów elektromechanicznych. Tak więc w przypadku działania na układ zewnętrznych sił uogólnionych, równanie analogiczne do (10) ma postać

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_k \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\xi}_k}\dot{\xi}_k - \mathscr{L}\right) = \sum_k Q_k \dot{\xi}_k, \tag{11}$$

czyli gdy na układ działają siły zewnętrzne, to zmiana energii równa jest oddziaływaniu źródeł energii, a więc mocy sił zewnętrznych. W powyższych interpretacjach używa się nazwy energii, lecz wyrażenia w nawiasach równań (10) i (11) są pewnymi funkcjami nie mającymi bezpośredniego związku z całkowitą energią układu. Zatem zależności te nie odnoszą się wprost do klasycznej formy odpowiedniej zasady zachowania. Odnośną formę zasady zachowania energii można uzyskać dokonując formalnych transformacji (Legendre'a) zmiennych stanu przy wykorzystaniu zmiennych stowarzyszonych.

Transformacja Legendre'a umożliwia zmianę odpowiednich funkcji stanu przez zmienne stowarzyszone ($\{\xi_1, \ldots, \xi_N; \dot{\xi}_1, \ldots, \dot{\xi}_N\} \Rightarrow \{\xi_1^*, \ldots, \xi_N^*; \dot{\xi}_1^*, \ldots, \dot{\xi}_N^*\}$) według następującej zależności

$$\mathscr{L} = \sum_k \dot{\xi}_k \xi_k^* - \mathscr{H}(\xi_1, \ldots, \xi_N; \xi_1^*, \ldots, \xi_N^*). \tag{12}$$

Korzystając z wyrażenia (12) i równań (7), (8) otrzymuje się układ tak zwanych równań kanonicznych Hamiltona

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \xi_k^*} = \dot{\xi}_k; \qquad -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \xi_k} = \dot{\xi}_k^* - Q_k. \tag{13}$$

Po zastosowaniu zależności (13) równania (10) i (11) sprowadzają się do postaci

$$\frac{d\mathscr{H}}{dt} = \sum_k Q_k \dot{\xi}_k, \tag{14}$$

bądź

$$\frac{d\mathscr{H}}{dt} = 0, \tag{15}$$

przy braku sił zewnętrznych.

Określając funkcję $\mathscr{H}$ jako całkowitą energię układu można już bezpośrednio uznać równania (14), (15) jako lokalne postacie zasady zachowania energii.

5. UWAGI KOŃCOWE

Sprzężenie procesów elektrycznych i mechanicznych w układach elektromechanicznych zmusza do wypracowywania dość ogólnych metod badawczych o szczególnej operatywności, umożliwiających integralne ujęcie tych zagadnień. Dokonuje się więc przede wszystkim transformacji układu rzeczywistego w model o parametrach skupionych w oparciu o określone zasady dyskretyzacji oraz korzysta się z metod elektrotechniki i mechaniki analitycznej z zastosowaniem formalizmu wariacyjnego.

Wobec uprzedności rozwoju metod mechaniki analitycznej oraz ich dużej efektywności nastąpiło silne obciążenie pojęciami i strukturami tej dyscypliny zagadnień elektromechanicznych. Rzutuje to na konwencje zapisu określonych formalizmów jak również stosowaną nomenklaturę. Nieadekwatność semantyczna niektórych określeń przeniesionych z mechaniki na teren elektromechaniki może wywoływać nieporozumienia, co ze względów chociażby dydaktycznych jest bardzo niekorzystne. Wydaje się więc, że niektóre określenia należy skorygować i uściślić — co w pewnym zakresie podjęto w niniejszej pracy.

W pracy przedstawiono również elementy strukturalne teorii w zakresie pojęć pierwotnych, odpowiednich przestrzeni — bazowej i funkcyjnej, postulatów teorii i stosowanego formalizmu. Wydaje się bowiem, że dotychczasowe prace z zakresu zagadnień elektromechaniki nie eksponują hierarchiczności konstrukcji tej teorii.

W ostatnim punkcie pracy zaprezentowano przejście do związków określających zasadę zachowania energii na podstawie reguł (twierdzenie E. Noethera) niezmienniczości funkcjonału działania względem określonej grupy przekształceń, którą interpretuje się jako postulat jednorodności czasu. Ujęcie takie, stosowane w teoriach kontinualnych [7], wydaje się być brakującym elementem w pracach poświęconych teorii elektromechanicznego przetwarzania energii.

Ponieważ celem niniejszych rozważań było sprecyzowanie pewnych pojęć właściwych zagadnieniom i formom opisu przemian energii w układach elektromechanicznych oraz przedstawienie zwartych struktur formalnych wywodów teorii, przeto ograniczono się do spraw podstawowych nie podejmując pewnych zagadnień specjalnych. Do zagadnień tych można by zaliczyć między innymi układy z więzami nieholonomicznymi. Należy jednak wspomnieć, że znaczna grupa maszyn elektrycznych charakteryzuje się tym typem więzów w odniesieniu do funkcji (współrzędnych uogólnionych) elektrycznych. W przypadku więzów nieholonomicznych przedstawione powyżej postępowanie w zasadzie nie

ulega istotnej zmianie pod względem metodycznym i formalnym poza pewnym „*uogólnieniem*" współrzędnych uogólnionych i rozszerzeniem struktury równań Eulera-Lagrange'a [1, 6, 8]. Jednakże interesującym i istotnym problemem jest dyskretyzacja układów z powyższym rodzajem więzów, bowiem w przypadku ogólnym otrzymuje się przeliczalną liczbę równań więzów, co związane jest z geometrią i strukturą obwodów elektrycznych i fizykalnymi wielkościami polowymi (gęstością prądu) [8].

Wobec pojawiających się różnych trudności w powyżej przedstawionych problemach wydaje się, że istotny postęp będzie można osiągnąć włączając nowe metody formalne, spośród których znaczne efekty mogą rokować metody geometryczne — a więc pewna geometryzacja przestrzeni funkcyjnej $\mathscr{Z}$. O ile jednakże zadanie metryki dla funkcji kinematycznych jest naturalne i stosunkowo proste, to metryzacja zmiennych elektromagnetycznych może napotkać trudności operacyjne (rachunkowe) i nie znaleźć łatwych interpretacji fizykalnych.

LITERATURA

1. A. Jagiełło, T. Sobczyk, *Podstawy teorii maszyn elektrycznych i systemów elektromechanicznych*, Zesz. Nauk. AGH, nr 705, z. 105, Kraków 1978.
2. W. Kołek, A. Puchała, *Syntetyczna teoria przetwarzania energii elektromechanicznej*, Zesz. Nauk. AGH, nr 209, Automatyka z. 3, Kraków 1969.
3. W. Kołek, *Metody badań poznawczych i techniczne problemy elektromechaniki*, Mechanika teoretyczna i stosowana, t. 17, z. 1, 1979.
4. W. Latek, *Maszyny elektryczne* t. 1, Wydawnictwa PW, Warszawa 1972.
5. J. Meisel, *Zasady elektromechanicznego przetwarzania energii*, WNT, Warszawa 1970.
6. J. I. Nejmark, N. A. Fufajew, *Dynamika układów nieholonomicznych*, PWN, Warszawa 1971.
7. J. W. Nowożiłow, J. A. Jappa, *Elektrodynamika*, Nauka, Moskwa 1978.
8. A. Puchała, *Dynamika maszyn i układów elektromechanicznych*, PWN, Warszawa 1977.
9. S. Seely, *Elektromechaniczeskoje prieobrazowanije energii*, Energija, Moskwa 1968.
10. R. Sochocki, *Wstęp do teorii elektromechanicznego przetwarzania energii*, Wydawnictwa PW, Warszawa 1975.
11. L. Szklarski, *Dynamiczne równania ruchu układów elektromechanicznych*, [w:] *Dynamika układów elektromechanicznych*, PWN, Warszawa—Kraków 1963.
12. D. C. White, H. H. Woodson, *Elektromechanical energy conversion*, J. Wiley, London 1959.

W. PRZYBOROWSKI

COMMENTS ON THEORY OF ELECTROMECHANICAL CONVERSION OF ENERGY

Summary

The paper presents comments on the theory of electromechanical conversion of energy regarding to nomenclature applied, discursive presentation of the theory within the range of postulates, derived equations and principles formulated.

W. PRZYBOROWSKI

REMARQUES SUR LA THÉORIE ÉLECTROMÉCANIQUE DE LA CONVERSION D'ÉNERGIE

Résumé

Dans l'article on a présenté les remarques sur la théorie électromécanique de la conversion d'énergie du point de vue de la nomenclature appliquée et aussi des présentations consécutives de cette théorie dans la sphère des postulats, des équations établies et des principes formulés.

W. PRZYBOROWSKI

BEMERKUNGEN BETREFFS DER THEORIE DER ELEKTROMAGNETISCHEN ENERGIEVERARBEITUNG

Zusammenfassung

In dem Artikel werden Bemerkungen über die Theorie der elektromechanischen Energieverarbeitung geschildert bezüglich der angewandten Nomenklatur sowie diskutiver Darstellungen dieser Theorie im Bereich von Forderungen, abgeleiteten Gleichungen und formulierten Grundsätzen.

В. ПШИБОРОВСКИ

ЗАМЕЧАНИЯ К ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭНЕРГИИ

Резюме

Представлены замечания к теории электромеханического преобразования энергии, относящиеся к применяемой номенклатуре, а также к логическим последствиям постулатов, выведенных уравнений и формулированных принципрв теории.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1986, 32, z. 1. ss. 81-94

621.3.05

Improving statical stability of ac system by joint usage of controlled dc link

ELŻBIETA SYKULSKA (ŁÓDŹ)

Instytut Elektroenergetyki Politechniki Łódzkiej

Otrzymano 22.6.1983

The paper describes the results of statical stability examinations of parallel alternating and direct current transmission system, by means of variables state method. The influence of different system parameters and the effect of various regulators on the stability limits are examined quantitatively. The improvement in stability resulting from itervention in the hv dc control is shown graphically in terms of system parameters and control settings.

1. INTRODUCTION

The steady-state stability of an uncontrolled power system can be substantially improved by the use of control devices incorporated in the system. The stable operation region can be artificially enlarged or its shape changed deliberately giving new dynamic stability limits. In a purely ac system these control devices consist of excitation controllers and governors. The improvement of the stability limit with a dc link added is first of all due to the fact that the ac line angle is reduced because of the power taken by the dc link. The appropriately selected feedback control strategy offers an additional mode of control

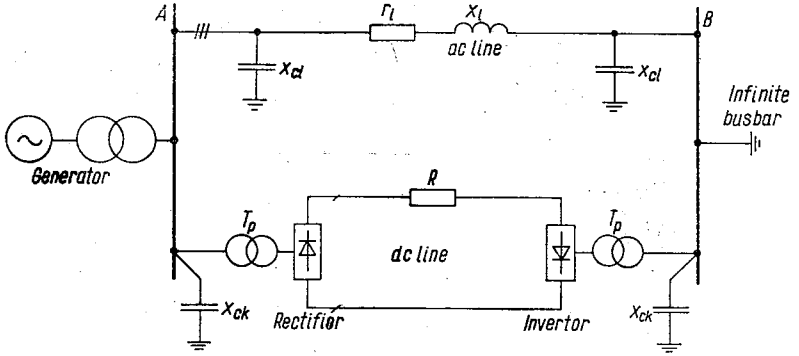


Fig. 1. Simplified, 1-machine, infinite busbar ac-dc system

but the effect on the overall system of the control of reference current depends significantly on the operating conditions and interaction with other system regulators.

The aim of this paper is to give a detailed quantitative and qualitative description of parellel ac-dc system behaviour in view of steady-state and dynamic stability. The analysis is based on the stete-space method presented in preceding paper [7]. The simplified system under consideration is shown in Fig. 1. All results are obtained from the specially developed computer program, the description of which may be found in Reference [6].

2. STABILITY ANALYSIS

The steady-state and dynamic stability of the system has been examined separately for a wide range of variations of system parameters and control settings. The stability limit curves are plotted in terms of the real power P and reactive power Q outputs of the machine. In order to simplify the description of any particular system configuration studied, the following symbols are used:

G — generator
ACL — alternating current transmission lines
DCL — direct current link
AVR — automatic voltage regulator
GV — governor
DCC — dc link feedback control.

For example: G+ACL+DCL means „*uncontrolled parallel ac-dc system*".

The steady-state stability limits for various generators, the data of which are given in Table 1, lie fairly close to each other as shown in Fig. 2 (P and Q are given in '*per unit*' system). For the purpose of further analysis it is therefore sufficient to choose one typical machine e.g. the one described in detail in References [4, 5], and the results will be valid for any generator listed in Table 1.

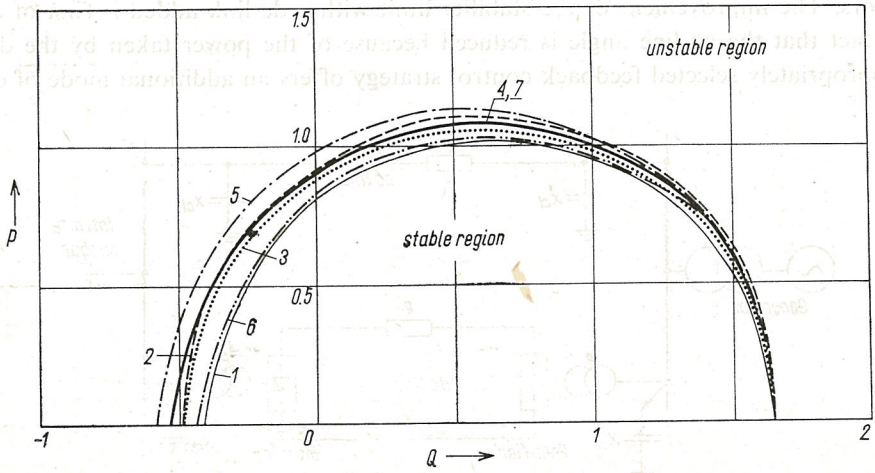


Fig. 2. System configuration: G+ACL
Steady-state stability-limit curves for various generators (as listed in Table 1)

Table 1

Illustrative generators data

No	1	2	3	4	5	6	7
generator type	GTHW-360	[2]	GTHW-160	[4]	TBB-300	TBB-500	TBB-800
x_d	2.60	2.10	2.127	2.0	1.70	2.46	2.34
x_q	2.48	2.10	2.127	1.70	1.70	2.46	2.34
x'_d	0.33	0.48	0.239	0.232	0.260	0.355	0.379
T'_{p0} s	8.67	4.7	7.0	6.0	6.4	5.6	5.0
M	0.00577	0.015	0.0137	0.0337	0.00173	0.001515	0.00135

The crucial parameter which influences stability limits of a pure ac system is the lenght of the ac transmission line, which is shown in Fig. 3. The ac transmission line impedances considered would represent a wide range of line lengths subject to rated voltage and power as summarized in Table 2. For example $x_1 = 0{,}6$ for GTHW-360 generator means approximately 680 km of single-circuit 400 kV line or 350 km of double-circuit 220 kV one. Moreover, given the particular system one can easily estimate via Fig. 3 and Table 2, whether steady-state stability may cause a severe problem.

Further calculations showed negligible effect of system damping coefficient on the stability limits. This conclusion agrees e.g. with Kończykowski [3] and Laughton [4] but contradicts Goudie [2], who does not substantiate his results, however.

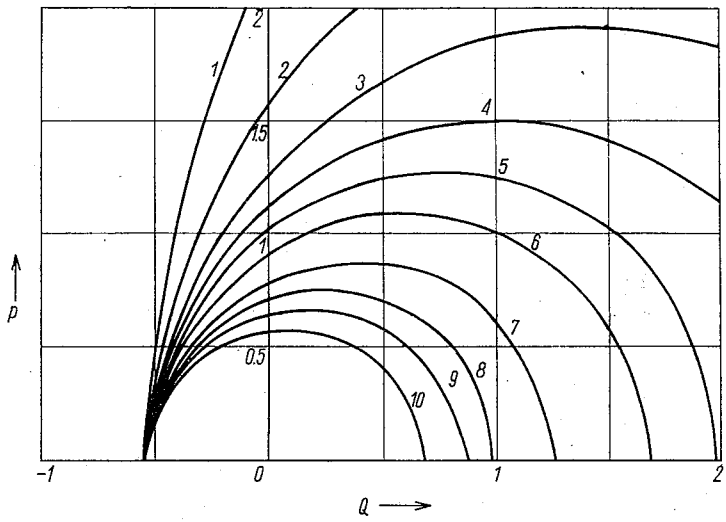


Fig. 3. System configuration: G+ACL
Steady-state stability-limit curves versus ac line reactance
1. $x_1 = 0{,}1$ 2. $x_1 = 0{,}2$ 3. $x_1 = 0{,}3$ 4. $x_1 = 0{,}4$
5. $x_1 = 0{,}5$ 6. $x_1 = 0{,}6$ 7. $x_1 = 0{,}8$ 8. $x_1 = 1{,}0$
9. $x_1 = 1{,}2$ 10. $x_1 = 1{,}5$

Table 2

AC transmission line lengths for various line reactances

Generator			AC line									
					line length [km]							
S_n [MVA]	P_n [MW]	U_n [kV]	Voltage [kV]	Number of circuits	$x_1 = 0{,}1$	$x_1 = 0{,}2$	$x_1 = 0{,}3$	$x_1 = 0{,}4$	$x_1 = 0{,}5$	$x_1 = 0{,}6$	$x_1 = 0{,}8$	$x_1 = 1{,}0$	$x_1 = 1{,}2$
235	200	15,75	220	1	50	99	149	198	248	297	396	495	594
426	360	22	220	1	27	55	82	109	136	163	218	272	327
				2	58	116	174	232	291	349	465	581	698
			400	1	114	227	341	454	568	682	909	1136	1363
				2	228	454	682	908	1136	1364	—	—	—
705	600	24	400	1	68	136	203	271	339	407	542	678	813
				2	136	271	406	542	678	813	1084	1355	—
			750	1	261	522	782	1043	1304	1564	—	—	—
776	660	23	400	1	62	123	185	247	308	370	494	617	740
				2	124	246	370	494	616	740	988	1234	1480
			750	1	237	474	711	948	1185	1422	—	—	—

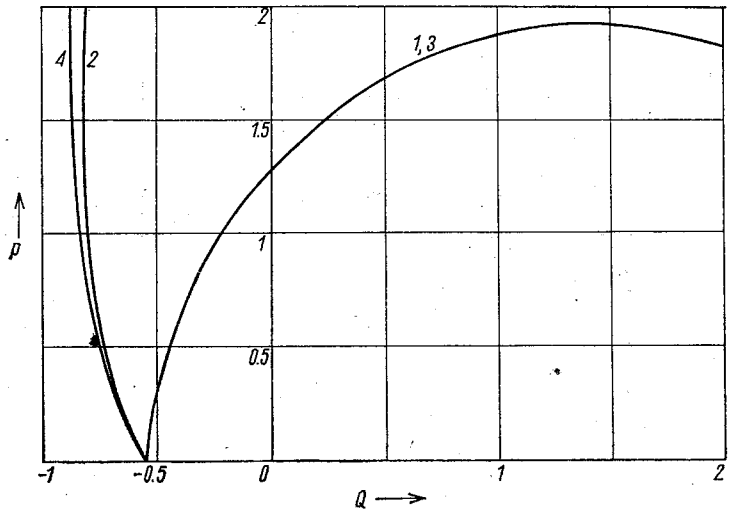


Fig. 4. Effect of ac system regulators on stability limits ($x_1 = 0{,}3$)
1. System configuration: G+ACL
2. System configuration: G+ACL+AVR
3. System configuration: G+ACL+GV
4. System configuration: G+ACL+AVR+GV

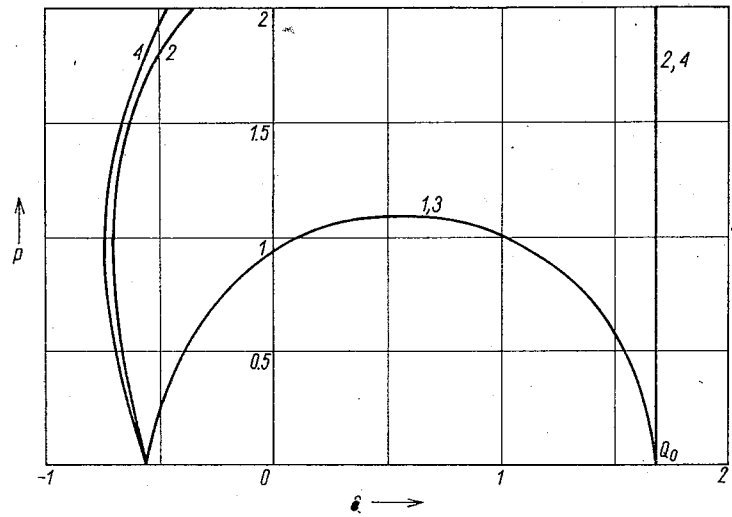


Fig. 5. Effect of ac system regulators on stability limits ($x_1 = 0{,}6$)
1. System configuration: G+ACL
2. System configuration: G+ACL+AVR
3. System configuration: G+ACL+GV
4. System configuration: G+ACL+AVR+GV

In a purely ac system stability may be improved by the use of voltage regulator (Figs. 4,5,6). Considerable improvement is achieved in either negative- and positive-Q regions, though no change occurs in the limit value Q_0.

The governor may be assumed either absent or, if present, it has been found to have little influence on stability limits (see Figs. 4,5,6).

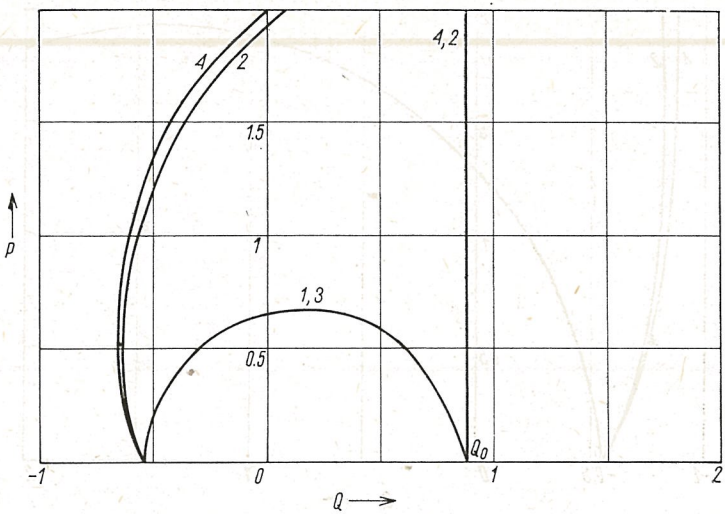


Fig. 6. Effect of ac system regulators on stability limits ($x_1 = 1{,}2$)

1. System configuration: G+ACL
2. System configuration: G+ACL+AVR
3. System configuration: G+ACL+GV
4. System configuration: G+ACL+AVR+GV

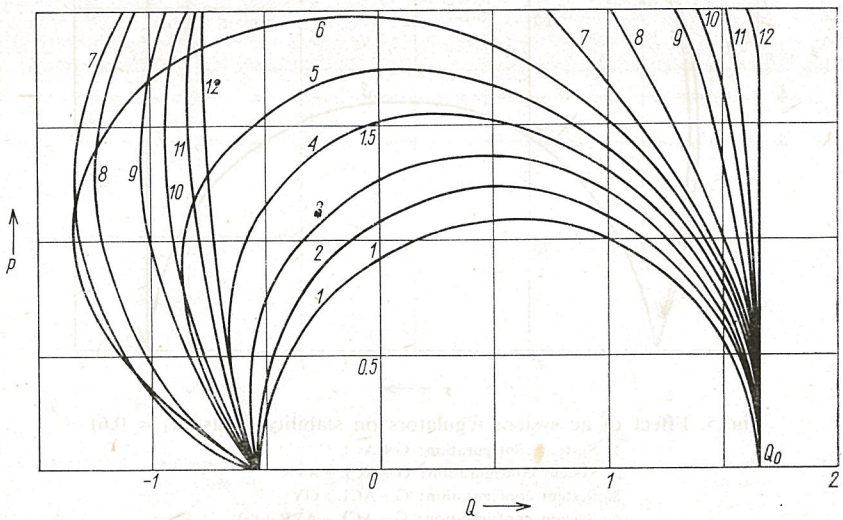


Fig. 7. System configuration: G+ACL+AVR

Stability limits for the system equipped with simplified voltage regulator described by a function $\frac{G_1+G_2p}{1+\tau_1 p}$

($x_1 = 0{,}6$)

1. without AVR 2. $G_1 = G_2 = 1$ 3. $G_1 = G_2 = 2$ 4. $G_1 = G_2 = 3$
5. $G_1 = G_2 = 4$ 6. $G_1 = G_2 = 5$ 7. $G_1 = G_2 = 7$ 8. $G_1 = G_2 = 10$
9. $G_1 = G_2 = 20$ 10. $G_1 = G_2 = 30$ 11. $G_1 = G_2 = 50$ 12. $G_1 = G_2 = 100$

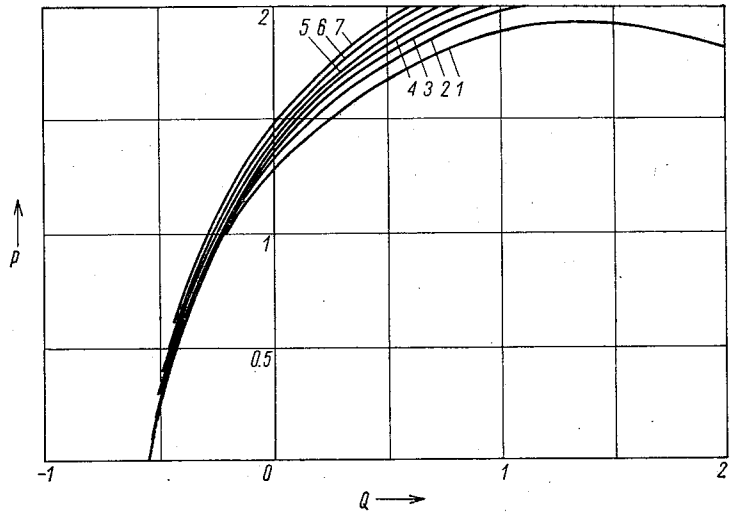


Fig. 8. System configuration: G+ACL+DCL
Steady-state stability-limit curves for different dc power levels ($x_1 = 0{,}3$)
1. $P_{DC} = 0$ 2. $P_{DC} = 0{,}1$ 3. $P_{DC} = 0{,}2$ 4. $P_{DC} = 0{,}3$
5. $P_{DC} = 0{,}4$ 6. $P_{DC} = 0{,}5$ 7. $P_{DC} = 0{,}6$

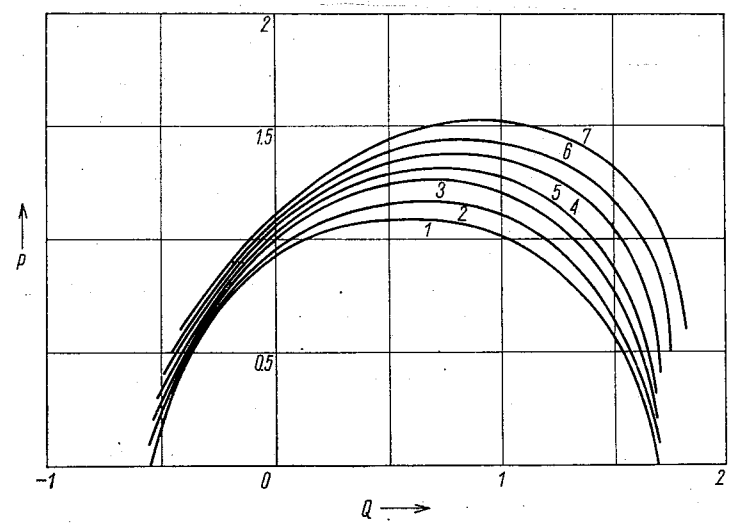


Fig. 9. System configuration: G+ACL+DCL
Steady-state stability-limit curves for different dc power levels ($x_1 = 0{,}6$)
1. $P_{DC} = 0$ 2. $P_{DC} = 0{,}1$ 3. $P_{DC} = 0{,}2$ 4. $P_{DC} = 0{,}3$
5. $P_{DC} = 0{,}4$ 6. $P_{DC} = 0{,}5$ 7. $P_{DC} = 0{,}6$

The description of either voltage regulator and governor, with which the generator is equipped, may be found in References [4, 5].

It is sometimes convenient to represent the voltage regulator by a simplified transfer function of the form $\frac{G_1 + G_2 p}{1 + \tau_1 p}$ [1, 2]. From Figures 7 and 5 it is easily seen that, by appropriate choice of voltage regulator parameters G_1 and G_2, a much greater gain in sta-

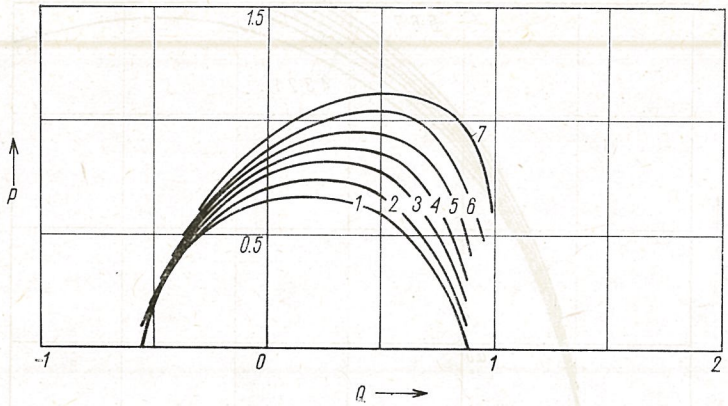


Fig. 10. System configuration: G+ACL+DCL
Steady-state stability-limit curves for different dc power levels ($x_1 = 1{,}2$)
1. $P_{DC} = 0$ 2. $P_{DC} = 0{,}1$ 3. $P_{DC} = 0{,}2$ 4. $P_{DC} = 0{,}3$
5. $P_{DC} = 0{,}4$ 6. $P_{DC} = 0{,}5$ 7. $P_{DC} = 0{,}6$

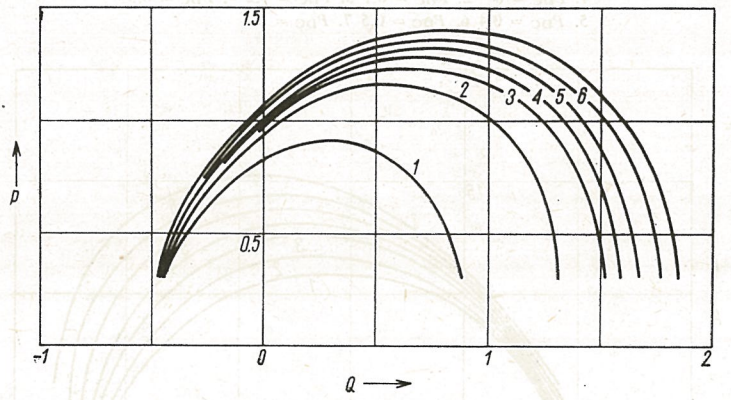


Fig. 11. System configuration: G+ACL+DCL
Effect of shunt capacitive reactance on stability ($x_1 = 0{,}6$, $P_{DC} = 0{,}3$)
1. $x_c = 1$ 2. $x_c = 2$ 3. $x_c = 3$ 4. $x_c = 4$ 5. $x_c = 5{,}8$ 6. $x_c = 10$ 7. $x_c = 50 \div 500$

bility may be achieved in the negative-Q region, and $G_1 = G_2 = 5 \div 7$ seem to be the most advisable values. One must also remember that for $G_2 > G_1$ the system is unstable, hence $G_2 < G_1$ is eventually used ($G_1 = G_2$ is not recommended).

The foregoing analysis gives the basis for an investigation of a dc link influence on the overall system stability.

For the system without special controllers the improvement of the stability limit with a dc link added is almost entirely due to the ac line angle reduction because of the power taken by the dc link. From Figs. 8, 9 and 10 it may also be seen that the higher the ac line reactance the greater the effect of the dc link. The curves were plotted on the assumption of full invertors reactive power compensation, which for $P_{DC} = 0.3$ was estimated to be $x_c = 5.8$. However, compensation has detrimental effect on stability, as shown in Fig. 11.

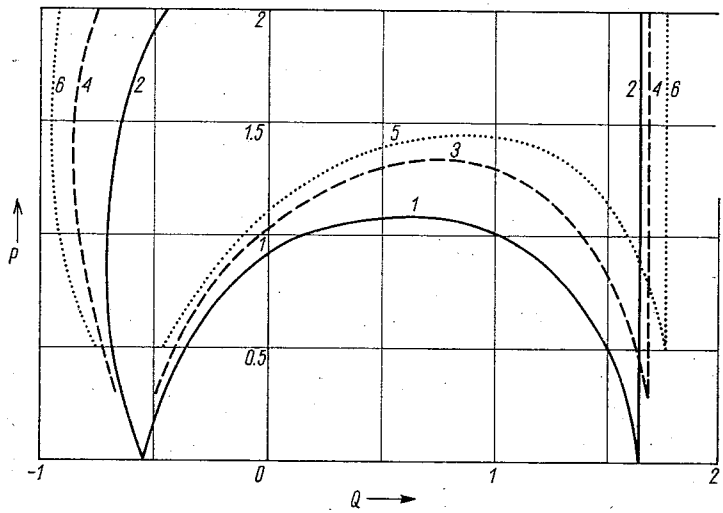


Fig. 12. Steady-state stability-limit curves

1. $P_{DC} = 0$ system configuration: G+ACL
2. $P_{DC} = 0$ system configuration: G+ACL+AVR+GV
3. $P_{DC} = 0{,}3$ system configuration: G+ACL+DCL
4. $P_{DC} = 0{,}3$ system configuration: G+ACL+DCL+AVR+GV
5. $P_{DC} = 0{,}5$ system configuration: G+ACL+DCL
6. $P_{DC} = 0{,}5$ system configuration: G+ACL+DCL+AVR+GV

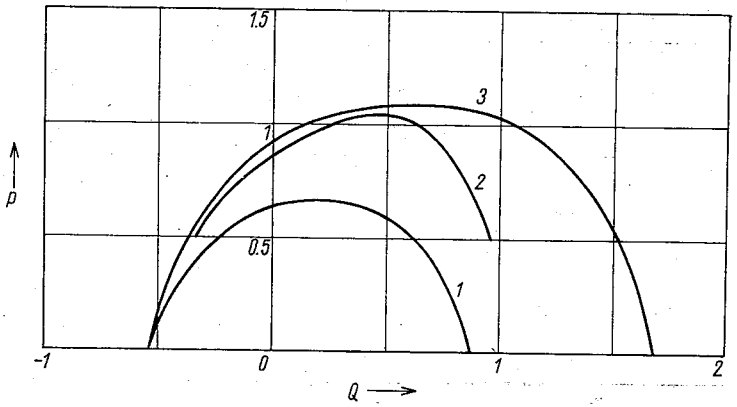


Fig. 13. Steady-state stability-limit curves

1. $P_{DC} = 0$ $x_1 = 1, 2$ (one ac line) system configuration: G+ACL
2. $P_{DC} = 0, 5$ $x_1 = 1, 2$ (ac line+dc link) system configuration: G+ACL+DCL
3. $P_{DC} = 0$ $x_1 = 0, 6$ (two ac lines) system configuration: G+ACL

A dc link improves the stability of the ac system equipped with voltage regulator and governor (Fig. 12) and it is specifically worth noticing the change of stability in the positive-Q region, the improvement that could not be accomplished by pure ac controllers.

So far only the absolute effect of adding the dc link has been considered. The relative effect may be verified by comparing the dc transmission with an equivalent-capacity ac system. In both examples (Figs. 13 and 14) another ac transmission line leads to better stability than the dc link without special controller.

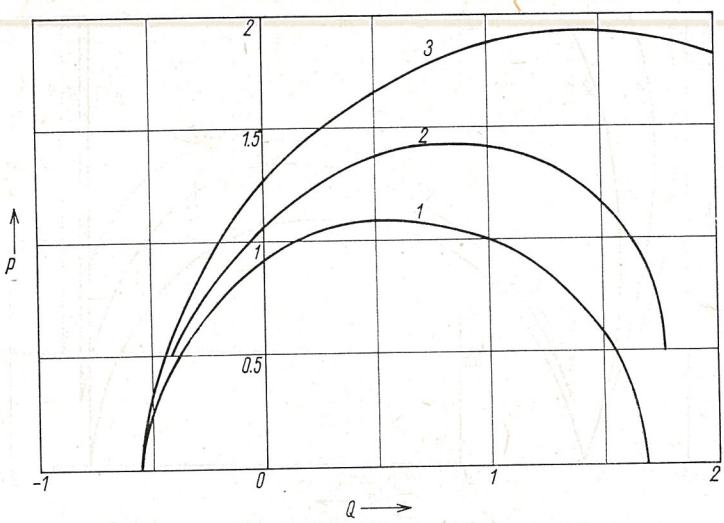


Fig. 14. Steady-state stability-limit curves

1. $P_{DC} = 0$ $x_1 = 0{,}6$ (one ac line) system configuration: G+ACL
2. $P_{DC} = 0{,}5$ $x_1 = 0{,}6$ (ac line+dc link) system configuration: G+ACL+DCL
3. $P_{DC} = 0$ $x_1 = 0{,}3$ (two ac lines) system configuration: G+ACL

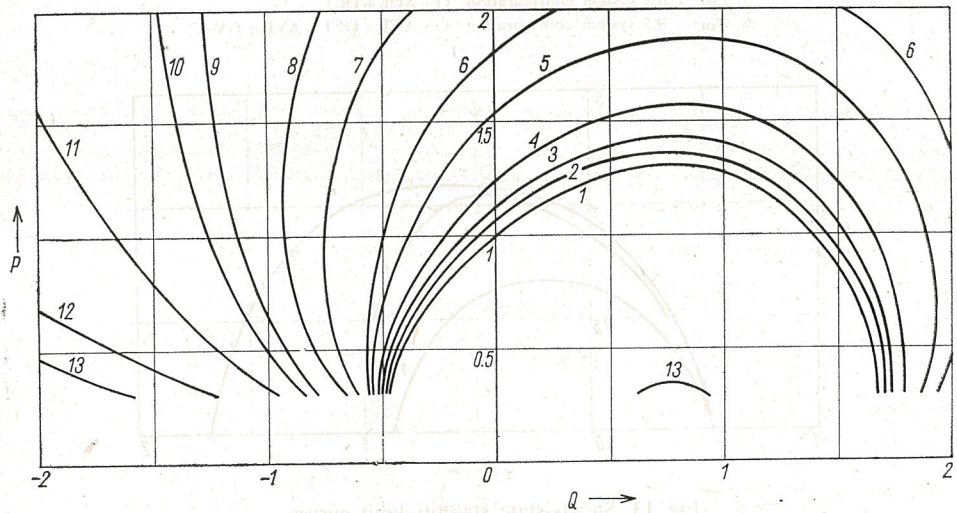


Fig. 15. System configuration: G+ACL+DCL+DCC

Stability limits with different values of K_1 ($K_2 \geqslant 0$, $P_{DC} = 0{,}3$, $x_1 = 0{,}6$).

1. $K_1 = 0$ 2. $K_1 = 0{,}01$ 3. $K_1 = 0{,}05$ 4. $K_1 = 0{,}1$ 5. $K_1 = 0{,}2$
6. $K_1 = 0{,}3$ 7. $K_1 = 0{,}5$ 8. $K_1 = 0{,}7$ 9. $K_1 = 1{,}0$ 10. $K_1 = 1{,}2$
11. $K_1 = 2{,}0$ 12. $K_1 = 5{,}0$ 13. $K_1 = 10{,}0$

A substantial improvement in system stability may be achieved by adding a special current reference feedback control [7]

$$I_{DC\,ref} = I'_{DC\,ref} + K_1(\Delta\delta) + K_2(\Delta\dot{\delta})$$

As K_1 increases (while $K_2 \geqslant 0$) the stable region also increases (Fig. 15) and for $K_1 \approx 2 \div 5$ the system is stable for all $P \leqslant 2$, $Q \in \langle -1{,}2 \rangle$, which was possible with no other controllers.

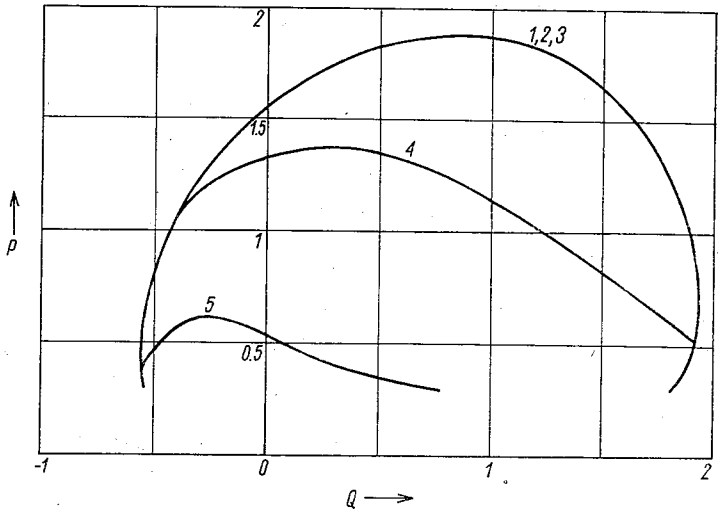


Fig. 16. System configuration: G+ACL+DCL+DCC
Stability limits with different values of K_2
(P_{DC} = 0,3, x_1 = 0,6, K_1 = 0,2).
1. K_2 = 0,2 2. K_2 = 0 3. K_2 = −1,0 4. K_2 = −2,0 5. K_2 = −5,0

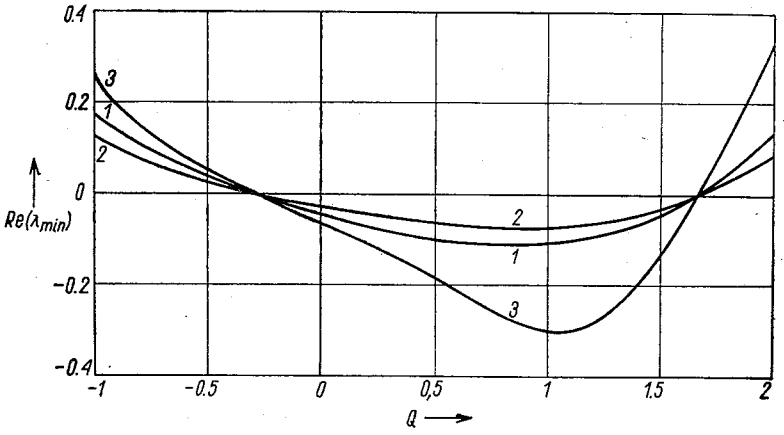


Fig. 17. System configuration: G+ACL+DCL+DCC
Locus of the real part of the critical eigenvalues
(P = 1,0, P_{DC} = 0,3, x_1 = 0,6, K_1 = 0,1)
1. K_2 = 0 2. K_2 = 1,0 3. K_2 = −1,0

The value as small as $K_1 = 0.3$ is sufficient to improve stability in the positive-Q region. However, K_1 must not be increased too much as instability occurs for $K_1 > 8$ in some parts of the positive-Q region.

The positive K_2 parameter does not influence the stability limits, and negative K_2 has detrimental effect on stability, as shown in Fig. 16. On the contrary, negative K_2 improves system damping by lessening the real part of critical eigenvalue (see examples in Figs. 17 and 18).

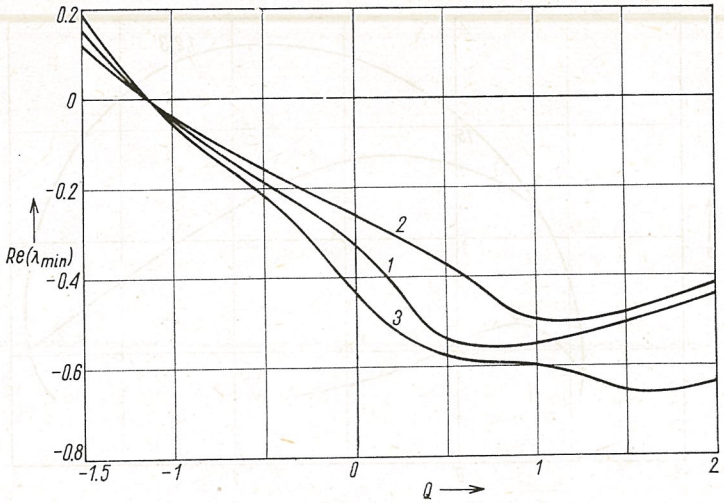


Fig. 18. System configuration: G+ACL+DCL+DCC
Locus of the real part of the critical eigenvalues
(P = 1,0, P_{DC} = 0,3, x_1 = 0,6, K_1 = 1,0).
1. K_2 = 0 2. K_2 = 1,0 3. K_2 = −1,0

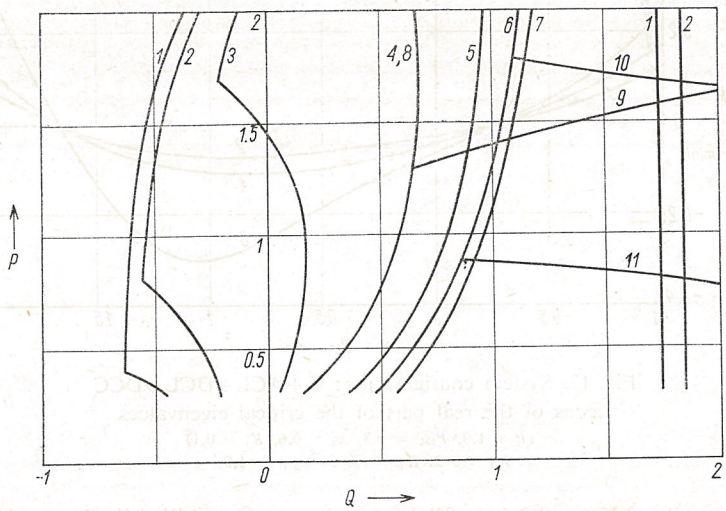


Fig. 19. System configuration: G+ACL+DCL+AVR+GV+DCC

Stability limits for the system equipped with simplified AVR $\left(\frac{G_1+G_2p}{1+\tau_1 p}\right)$ and dc link feedback control

(P_{DC} = 0,3, x_1 = 0,6, G_1 = 30, G_2 = 15).
1. $K_1 = K_2$ = 0,1 2. $K_1 = K_2$ = 0,2 3. $K_1 = K_2$ = 0,5 4. $K_1 = K_2$ = 1,0
5. $K_1 = K_2$ = 2,0 6. $K_1 = K_2$ = 5,0 7. $K_1 = K_2$ = 10,0
8. K_1 = 1,0 K_2 = −0,1 9. K_1 = 1,0 K_2 = −1,0
10. K_1 = 5,0 K_2 = −1,0 11. K_1 = 5,0 K_2 = −2,0

The addition of current reference feedback control to the system already equipped with voltage regulator and governor changes system performance. If the ac controllers settings are kept unchanged (i.e. as for the system without the dc link), stability in the negative-Q region is reduced, while the stability in the positive-Q region is improved (Fig. 19). The complex dynamic interaction of all the regulators necessitates coordination of their settings with regard to stability. Since this coordination strongly depends upon particular circumstances and requirements, no further generalization is possible and each case should be dealt with seperately, e.g. using the method proposed in [7].

3. CONCLUSION

This paper has demonstrated the use of the state-space method, developed and outlined in previous paper [7], in analysing steady-state and dynamic stability of parallel ac-dc power systems. The advantage of this method, being numerical in nature and unrestricted to degree of modelling complexity, provides specific results with all interactions accounted for. A relatively simple case of a single machine tied to an infinite busbar through parallel ac-dc lines has been studied in detail. However, the use of the state-space approach and eigenvalue analysis makes it easy to expand the system matrix in terms of system parameters. The techniques set forth are general and may be easily extended to any number of machines and dc links in any combination, taking account of the dynamic interaction between machine controls and the controls associated with dc link.

A variety of illustrative examples have been presented in order to examine the influence of system parameters and control settings on the stability limits under various corcumstances. It appears reasonable to conclude that dc modulation using current reference feedback control strategy is a very effective means of improving system stability.

It is not the intention to draw broad or specific conlusions here relative to effects of varying all system parameters; nevertheless, several remarks and comments have been made. One area specifically mentioned in the paper and appearing to be an important one to investigate, is the co-ordination of the ac and dc control settings from the point of view of stability. There has been no attempt here to solve this problem, since regulators can not be designed purely in terms of stability.

Finally, it is hoped that the results obtained in this paper will aid in establishing more confidence when analysis is extended to more complex systems, each of which must be studied as a separate problem.

REFERENCES

1. S. Bernas, Z. Ciok, *Modele matematyczne elementów systemu elektroenergetycznego*, WNT, Warszawa 1977.
2. D. B. Goudie, *Steady-state stability of parallel hv ac-dc power-transmission systems*, Proc. IEE, Vol. 119, No 2, 1972.
3. S. Kończykowski, *Podstawy stabilności układów elektroenergetycznych*, WNT, Warszawa 1974.
4. M. A. Laughton, *Matrix analysis of dynamic stability in synchronous multimachine systems*, Proc. IEE, Vol. 113, No 2, 1966.
5. G. Shackshaft, *General-purpose turbo-alternator model*, Proc. IEE, Vol. 110, No 4, 1963.

6. E. Sykulska, *Badanie równowagi statycznej układu przesyłowego prądu przemiennego oraz równoległego układu przesyłowego prądu stałego za pomocą metody zmiennych stanu*, Rozprawa doktorska, PŁ, Łódź, 1980.
7. E. Sykulska, *A State-Space Computer Study of HV AC-DC Power Transmission Systems*, Rozprawy Elektrotechniczne (zgłoszone do druku).

E. SYKULSKA

POPRAWA STABILNOŚCI STATYCZNEJ UKŁADU PRZESYŁOWEGO PRĄDU PRZEMIENNEGO ZA POMOCĄ STEROWANEJ LINII PRĄDU STAŁEGO

Streszczenie

W artykule opisano wyniki badań stabilności statycznej równoległego układu przesyłowego prądu przemiennego i prądu stałego za pomocą metody zmiennych stanu. Zbadano wpływ parametrów układu i nastaw regulatorów na przebieg granic stabilności oraz przydyskutowano sposoby poprawy stabilności systemu ze szczególnym uwzględnieniem możliwości wynikających z regulacji w układzie prądu stałego.

E. SYKULSKA

CORRECTION DE LA STABILITÉ STATIQUE D'UN RÉSEAU TRANSMETTEUR DU COURANT ALTERNATIF À L'AIDE DE LA LIGNE DE TRANSPORT D'ÉNERGIE DU COURANT CONTINU RÉGLÉE

Résumé

Dans cet article on décrit les résultats des recherches de stabilité statique d'un réseau transmetteur parallèle des courants alternatif et continu par méthode des variables d'état, On examine l'influence des paramètres du réseau et des réglages des régulateurs sur l'allure des limites de stabilité. On analyse les méthodes de correction de la stabilité du système et les possibilités données par régulation dans le réseau du courant continu.

E. SYKULSKA

VERBESSERUNG DER STATISCHEN STABILITÄT EINES DREHSTROMSYSTEMS MITTELS GESTEUERTER GLEICHSTROM-ÜBERTRAGUNGSLEITUNG

Zusammenfassung

Im Aufsatz werden Ergenbisse statischer Stabilitätsuntersuchungen der parallelen Gleichstrom- und Wechselstrom-Übertragung mit Hilfe der Zustandsraummethode dargestellt. Es wird der Einfluß der Parameter des Systems und der Einstellungen der Regulatoren auf den Verlauf der Stabilitätsgrenzen untersucht. Man diskutiert die Methoden der Stabilitätsverbesserung des Systems, besonders unter Berücksichtigung der Regelung im HGÜ-System.

Э. СЫКУЛЬСКА

ПОВЫШЕНИЕ СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ПУТЁМ РЕГУЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Резюме

Описаны результаты исследований статической устойчивости параллельной электропередачи переменного и постоянного тока при помощи метода пространства состояний. Исследовано влияние параметров системы и уставок регуляторов на пределы устойчивости. Рассмотрены варианты увеличения устойчивости системы особенно при учете возможности регулирования электропередачи постоянного тока.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1986, 32, z. 1, ss. 95-113

621.313.322

Stabilność lokalna generatora synchronicznego ze statycznym tyrystorowym układem wzbudzenia

KRZYSZTOF MADAJEWSKI (GDAŃSK)

Instytut Automatyki Systemów Energetycznych Oddział w Gdańsku

Otrzymano 10.5.1984

Przedstawiono wyniki analizy stabilności lokalnej generatora synchronicznego ze statycznym tyrystorowym układem wzbudzenia i regulacji napięcia. Porównano wyniki badań modelowych z wynikami pomiarów na generatorze rzeczywistym. Badania modelowe wykonano metodą analizy widma macierzy stanu zamkniętego układu regulacji napięcia.

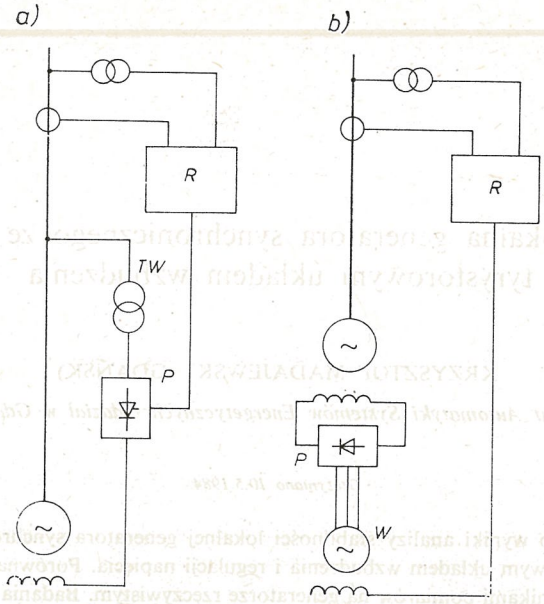
WSTĘP

W ostatnich latach turbozespoły największej mocy wdrażane do eksploatacji w krajowym systemie elektroenergetycznym są wyposażane w statyczne tyrystorowe układy wzbudzenia (rys. 1a) opracowane w kraju. Źródłem prądu wzbudzenia jest w tym przypadku prostownik tyrystorowy zasilany energią z zacisków generatora poprzez transformator obniżający napięcie. Statyczne układy wzbudzenia zastąpiły dotychczas stosowane elektromaszynowe układy wzbudzenia zawierające wzbudnicę prądu stałego lub wzbudnicę prądu przemiennego i prostownik statyczny (rys. 1b).

Statyczne układy wzbudzenia w stosunku do układów elektromaszynowych charakteryzują się lepszymi własnościami dynamicznymi, większą niezawodnością, mniejszą długością turbozespołu (nie zawierają maszyn wirujących) oraz ułatwiają budowę układów regulacji dostosowanych do wymagań systemu elektroenergetycznego.

Zastosowanie do generatorów największej mocy statycznych tyrystorowych układów wzbudzenia, działających praktycznie bezinercyjnie zmieniło istotnie warunki stabilności lokalnej generatorów. Jednocześnie wzrost mocy jednostkowej turbozespołów instalowanych w systemie pociąga za sobą niekorzystne z punktu widzenia stabilności zmiany parametrów dynamicznych generatorów. Wzrasta reaktancja synchroniczna w osi podłużnej generatora x_d oraz reaktancja synchroniczna przejściowa x'_d, natomiast zmniejsza się wartość mechanicznej stałej czasowej turbozespołu T_m.

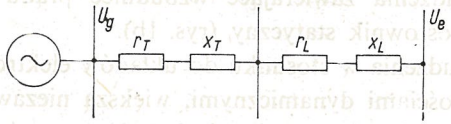
W artykule przedstawiono wyniki analizy stabilności lokalnej generatora 360 MW ze statycznym tyrystorowym układem wzbudzenia. Porównano wyniki badań modelowych z wynikami pomiarów na generatorze rzeczywistym. Badania modelowe wykonano metodą analizy wartości własnych macierzy stanu zamkniętego układu regulacji napięcia generatora.



Rys. 1. Schematy ideowe układów wzbudzenia i regulacji napięcia
a) statyczny tyrystorowy układ wzbudzenia; b) elektromaszynowy układ wzbudzenia; R — regulator, P — prostownik wzbudzenia TW — transformator; W — wzbudnica

1. MODEL MATEMATYCZNY GENERATORA

W celu zbadania stabilności lokalnej, opracowano model matematyczny generatora synchronicznego pracującego przez układ przesyłowy na sieć sztywną (rys. 2). Podstawę do sformułowania modelu stanowiły zlinearyzowane równania Parka [1] opisujące gene-



Rys. 2. Schemat zastępczy współpracy generatora z siecią sztywną przez układ przesyłowy (transformator blokowy i linia przesyłowa)
$r_e = r_T + r_L$, $x_e = x_T + x_L$

rator oraz zlinearyzowane równania opisujące układ przesyłowy (transformator blokowy i linia przesyłowa) mające postać

$$\Delta u_q = \Delta u_{qe} - \frac{1}{\omega_n}\Delta\dot{\psi}_{eq} - \Delta\psi_{ed} - \frac{\Delta\omega}{\omega_n}\psi_{edo} + r_e\Delta i_q \tag{1}$$

$$\Delta u_d = \Delta u_{de} - \frac{1}{\omega_n}\Delta\dot{\psi}_{ed} + \Delta\psi_{eq} + \frac{\Delta\omega}{\omega_n}\psi_{eqo} + r_e\Delta i_d \tag{2}$$

$$\Delta u_{qe} = \Delta u_e \cos\delta_0 - \Delta\delta u_{eo}\sin\delta_0 \tag{3}$$

$$\Delta u_{de} = \Delta u_e \sin\delta_0 + \Delta\delta u_{eo}\cos\delta_0 \tag{4}$$

Dla opracowania modelu pominięto wpływ regulatora prędkości obrotowej turbiny oraz tłumienia mechanicznego na stabilność lokalną generatora. Założono ponadto jeden zastępczy obwód tłumiący w osi podłużnej generatora „d" i jeden w osi poprzecznej „q".

Przyjmując:

wektor stanu $\boldsymbol{x}_0(t) = \left[\Delta i_d(t)\Delta i_{kd}(t)\Delta i_f(t)\Delta i_q(t)\Delta i_{kq}(t)\frac{\Delta\omega(t)}{\omega_n}\Delta\delta(t)\right]^T$

wektor wejść $\boldsymbol{u}_0(t) = [\Delta u_f(t)\Delta u_e(t)\Delta m_m(t)]^T$

wektor wyjść $\boldsymbol{y}_0(t) = [\Delta u_g(t)]^T$

i przekształcając równania Parka oraz równania (1)÷(4) otrzymuje się model matematyczny generatora synchronicznego w postaci

$$\dot{\boldsymbol{x}}_0(t) = \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x}_0(t)+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{u}_0(t) \tag{5}$$

$$\dot{\boldsymbol{y}}_0(t) = \boldsymbol{C}_0\boldsymbol{x}_0(t)+\boldsymbol{D}_0\boldsymbol{u}_0(t) \tag{6}$$

Zależności określające elementy macierzy: $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{B}_0$, $\boldsymbol{C}_0$ i $\boldsymbol{D}_0$ podano w dodatku 1.

2. MODEL MATEMATYCZNY UKŁADU WZBUDZENIA I REGULACJI NAPIĘCIA

Regulatory napięcia stosowane do statycznych tyrystorowych układów wzbudzenia generatorów największych mocy stanowią złożony wielokanałowy układ wyposażony w szereg ograniczników regulacji [6] [7]. Pełen model matematyczny takiego układu posiada złożoną strukturę zawierającą wiele nieliniowości. Dla analizy stabilności lokalnej generatora ograniczono się do przedstawienia uproszczonego modelu głównego toru regulacji napięcia generatora.

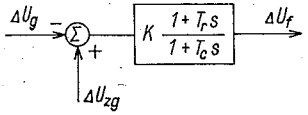
Równanie stanu i równanie wyjścia opisujące główny tor regulacji regulacji napięcia

$$\dot{x}_R(t) = -\frac{1}{T_c}x_R(t)-\frac{1}{T_c}\left(1-\frac{T_r}{T_c}\right)\Delta u_g(t)+\frac{1}{T_c}\left(1-\frac{T_r}{T_c}\right)\Delta u_{gz}(t) \tag{7}$$

$$\Delta u_f(t) = kx_R(t)-k\frac{T_c}{T_r}\Delta u_g(t)+k\frac{T_r}{T_c}\Delta u_{gz}(t) \tag{8}$$

generatora mają postać

Równaniom (7) i (8) po dokonaniu transformacji Laplacea odpowiada schemat blokowy pokazany na rys. 3.



Rys. 3. Uproszczony schemat blokowy statycznego tyrystorowego układu wzbudzenia i regulacji napięcia dla badania stabilności lokalnej:

k — wzmocnienie całkowite regulatora i układu wzbudzenia, T_r — stała czasowa różniczkowania, T_c — stała czasowa, całkowania Δu_g — odchyłka napięcia generatora; Δu_{gz} — odchyłka wartości zadanej napięcia, Δu_f — odchyłka napięcia wzbudzenia

3. ANALIZA WIDMA MACIERZY STANU

Widmem macierzy stanu nazywa się zbiór jej wartości własnych. Dla wyznaczenia wartości własnych macierzy stanu generatora ze statycznym tyrystorowym układem wzbudzenia i regulacji napięcia wykorzystano modele matematyczne opisane równaniami (5)÷(8). Równanie stanu zamkniętego układu regulacji można sprowadzić do postaci

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \tag{9}$$

gdzie:

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0(t) \\ \boldsymbol{x}_R(t) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}(t) = [\Delta u_{gz}(t) \Delta u_e(t) \Delta m_m(t)]^T$$

Wartości własne s_i macierzy stanu $\boldsymbol{A}$ otrzymuje się z rozwiązania równania charakterystycznego

$$\det[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}] = s^l + a_{l-1}s^{l-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{10}$$

przy czym macierz jednostkowa I i macierz stanu $\boldsymbol{A}$ mają wymiar 8×8. Wymiar macierzy stanu $\boldsymbol{A}$ jest sumą wymiarów macierzy stanu generatora $\boldsymbol{A}_0$ (7×7) i wymiarów macierzy stanu regulatora napięcia (1×1).

Wartości własne macierzy stanu $\boldsymbol{A}$ określają stabilność pracy generatora z regulatorem napięcia. Układ ten jest stabilny lokalnie asymptotycznie, gdy wszystkie wartości własne spełniają warunek

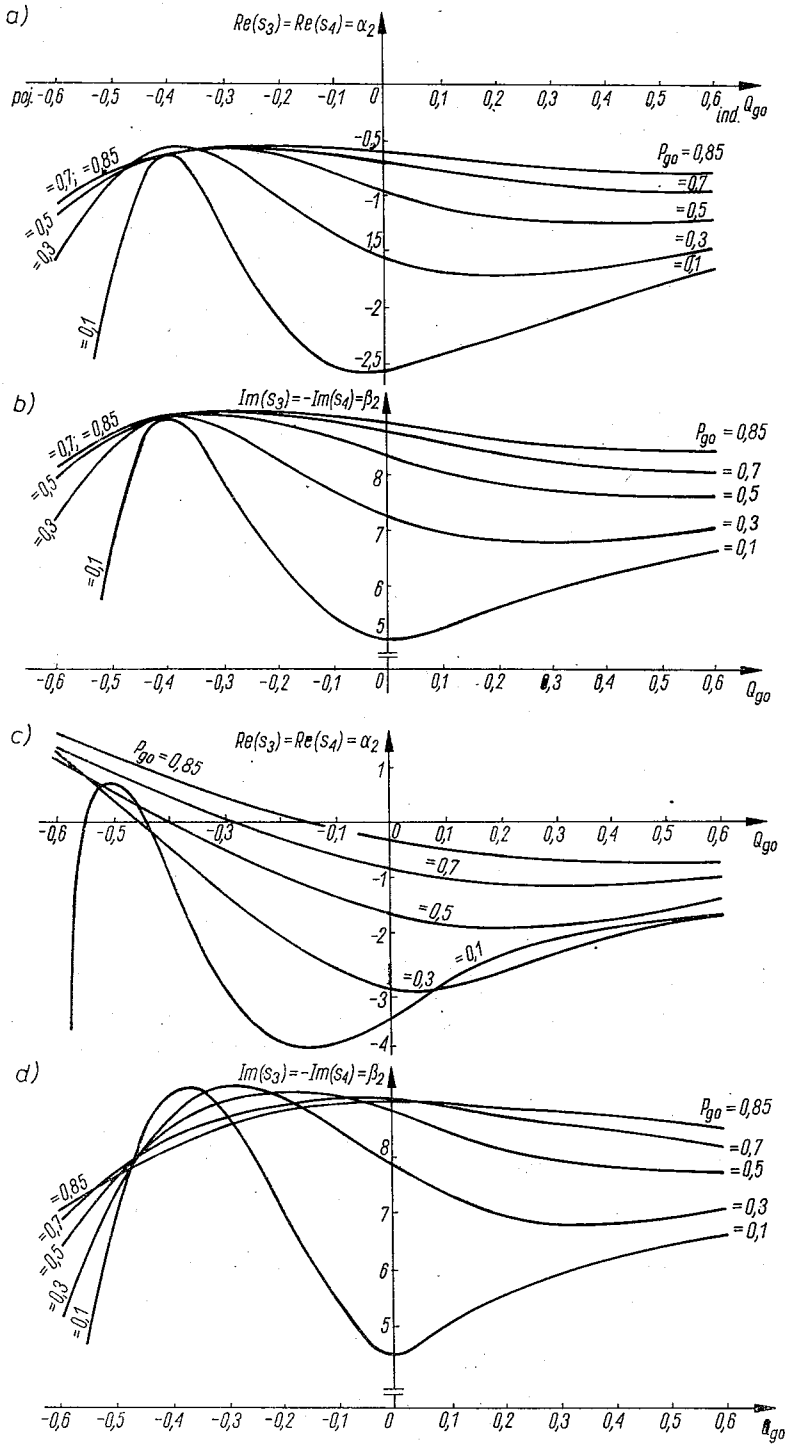
$$\mathrm{Re}(s_i) < 0, \quad i = 1, \ldots, l. \tag{11}$$

Tablica 1

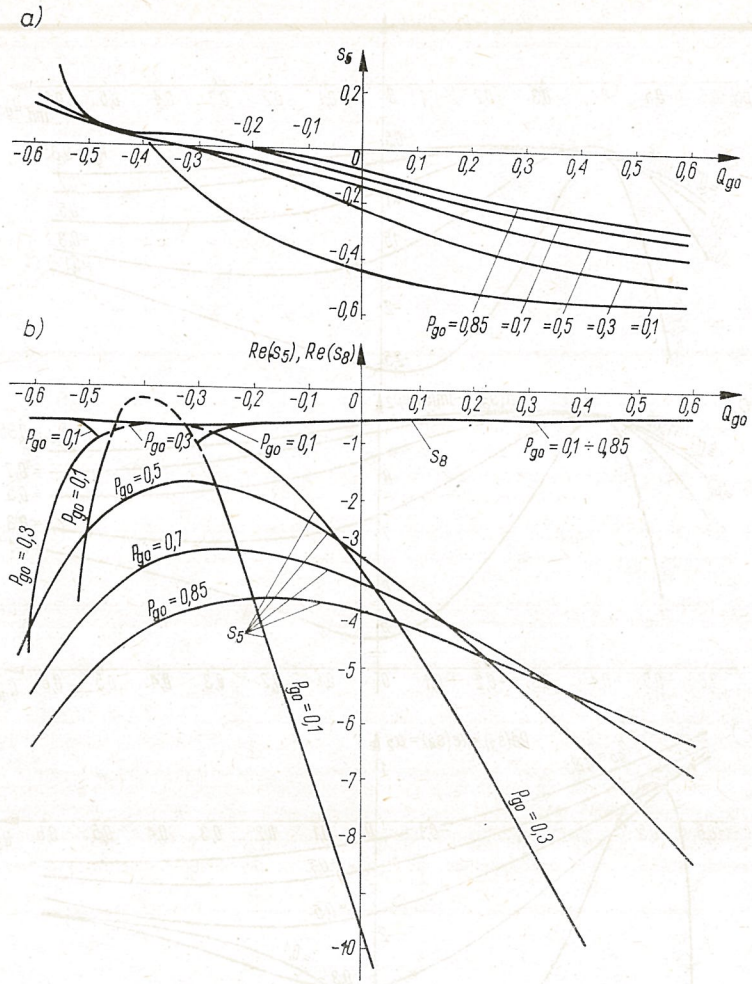
Przykładowe widmo macierzy stanu generatora 360 MW pracującego bez regulatora napięcia ($u_f = const$) oraz z regulatorem napięcia

Oznaczenie wartości własnej	Bez regulatora napięcia $u_f = const$	Z regulatorem napięcia
$s_1 = \alpha_1 + j\beta_1$	$-16{,}9 + j313{,}7$	$-16{,}9 + j313{,}7$
$s_2 = \alpha_1 - j\beta_1$	$-16{,}9 - j313{,}7$	$-16{,}9 - j313{,}7$
$s_3 = \alpha_2 + j\beta_2$	$-0{,}77 + j8{,}4$	$-0{,}6 + j8{,}48$
$s_4 = \alpha_2 - j\beta_2$	$-0{,}77 - j8{,}4$	$-0{,}6 - j8{,}48$
s_5	$-0{,}26$	$-4{,}38$
s_6	$-17{,}4$	-19
s_7	$-23{,}2$	$-21{,}3$
s_8		$-1{,}2$

W tablicy 1 podano przykładowo widmo macierzy stanu generatora o mocy 360 MW (parametry generatora w dodatku 2) pracującego przez układ przesyłowy na sieć sztywną z obciążeniem mocą czynną $P_{go} = P_n$, mocą bierną $Q_{go} = Q_n$, napięciem $u_{go} = u_n$ dla reaktancji układu przesyłowego $x_e = 0{,}25$ i rezystancji $r_e = 0{,}025$. Obliczenia wykonano dla pracy generatora bez regulatora napięcia, ze stałym napięciem wzbudzenia $u_f = const$ oraz dla pracy z regulatorem napięcia o parametrach: $k = 550$, $T_r = 1$ s, $T_c = 8$ s.



Rys. 4. Wpływ obciążenia generatora na wartości własne s_3 i s_4 przy $u_{go} = u_n = 1$, $x_e = 0{,}25$, $r_c/x_e = 0{,}1$:
a, b) bez regulatora napięcia; c, d) z regulatorem napięcia



Rys. 5. Wpływ obciążenia generatora na wartości własne s_5 i s_8 przy $u_{go} = u_n = 1$, $x_e = 0{,}25$, $r_e/x_e = 0{,}1$: a) bez regulatora napięcia; b) z regulatorem napięcia; (linią przerywaną zaznaczono obszar gdzie s_5 i s_8 przechodzą w parę zespoloną sprzężoną)

Wartości własne $s_1 \div s_8$ są wynikiem wzajemnego oddziaływania wszystkich obwodów występujących w modelu matematycznym układu wzbudzenia i regulacji napięcia. Jednakże dla ułatwienia interpretacji otrzymanych wyników zauważa się, że wartości własne $s_1 \div s_8$ związane są z uwzględnieniem:

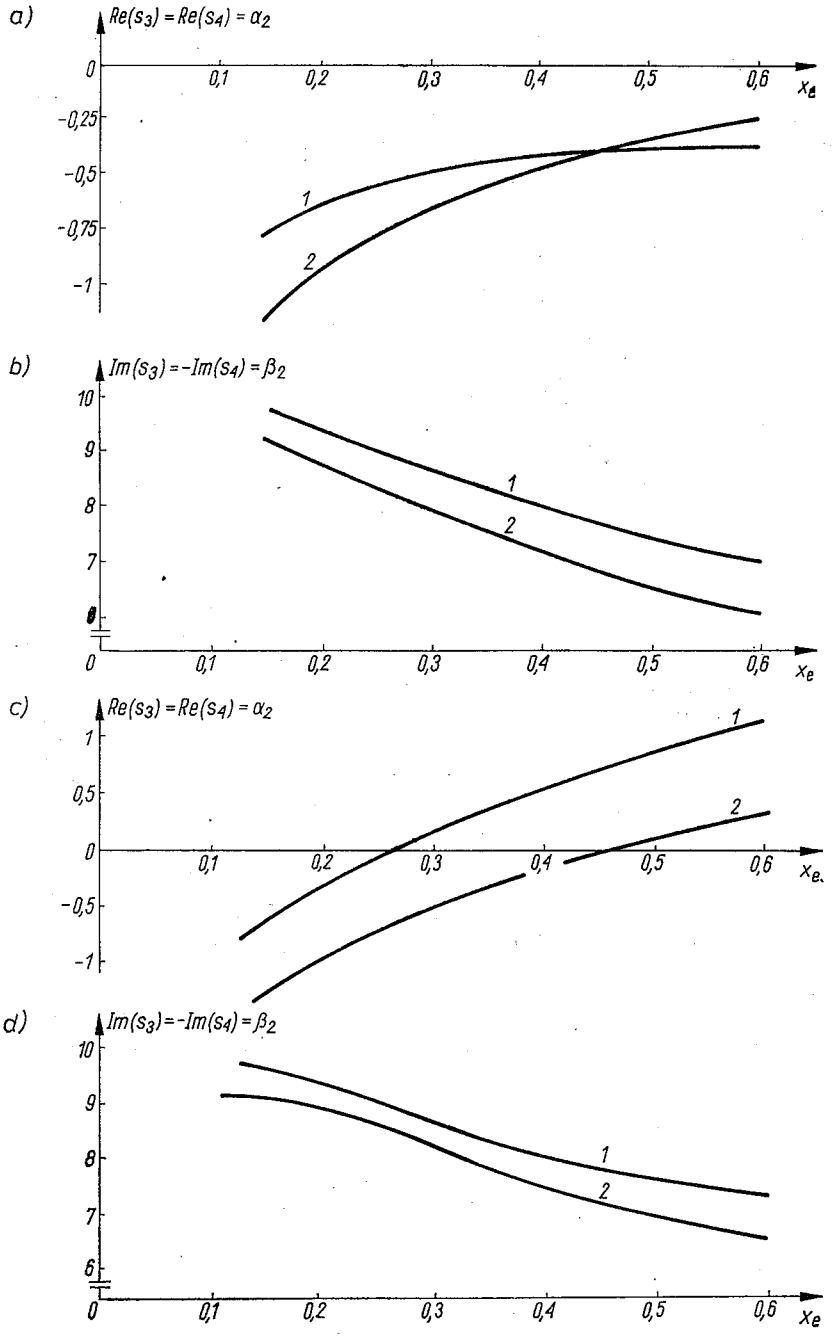
s_1, s_2 — rezystancji r stojana generatora i rezystancji r_e układu przesyłowego. W przybliżeniu

$$\alpha_1 \cong \omega_n(r+r_e)t_1, \quad \beta_1 = \omega_n, \tag{12}$$

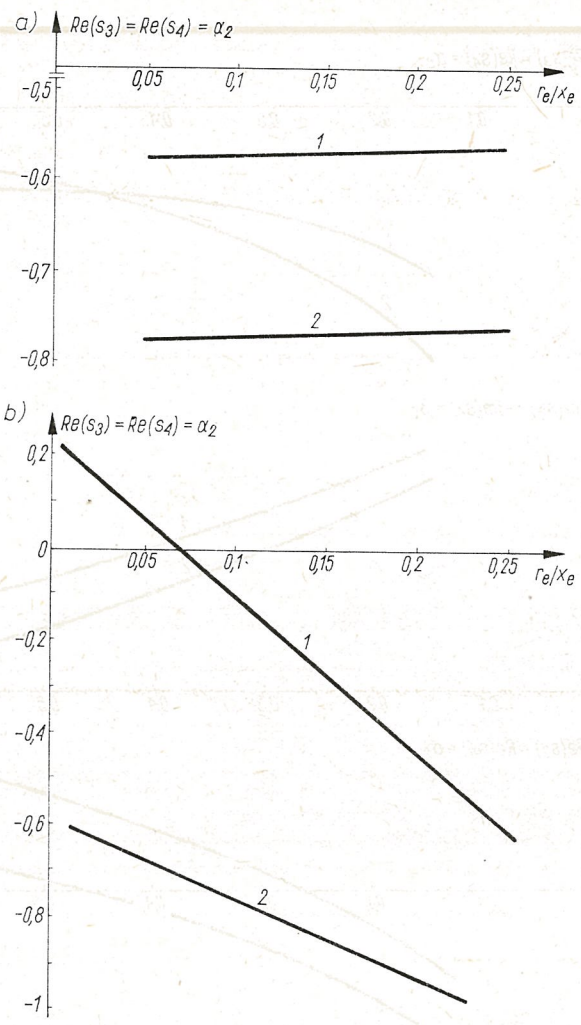
(zależność na t_1 podano w dodatku 1)

s_3, s_4, s_5 — równania ruchu wirnika oraz obwodu wzbudzenia generatora,

s_6 — zastępczego obwodu tłumiącego w osi podłużnej generatora,



Rys. 6. Wpływ reaktancji układu przesyłowego na wartości własne:
s_3 i s_4 przy $u_{g0} = u_n = 1$, $P_{g0} = P_n = 0{,}85$, $r_e/x_e = 0{,}1$ a, b) bez regulatora napięcia c, d) z regulatorem napięcia $1 - Q_{g0} = -0{,}1$, $2 - Q_{g0} = Q_n = 0{,}53$

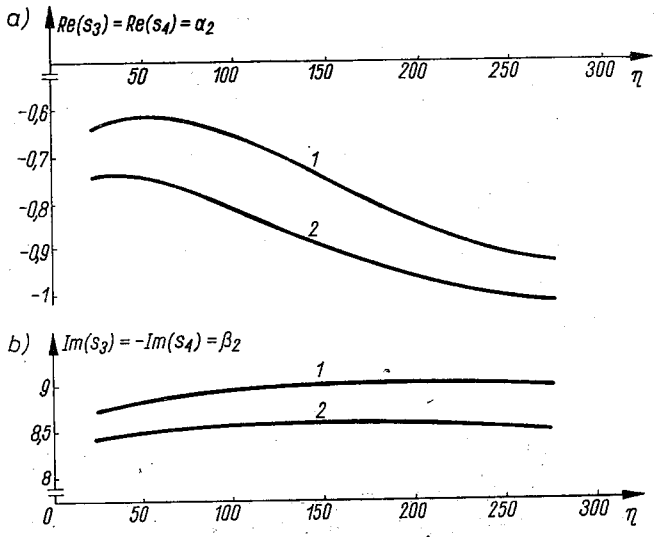


Rys. 7. Wpływ rezystancji układu przesyłowego na wartości własne s_3 i s_4 przy $u_{g0} = u_n = 1$, $P_{g0} = P_n = 0{,}85$, $x_e = 0{,}25$ a) bez regulatora napięcia b) z regulatorem napięcia $1 - Q_{g0} = -0{,}1$, $2 - Q_{g0} = Q_n = 0{,}53$

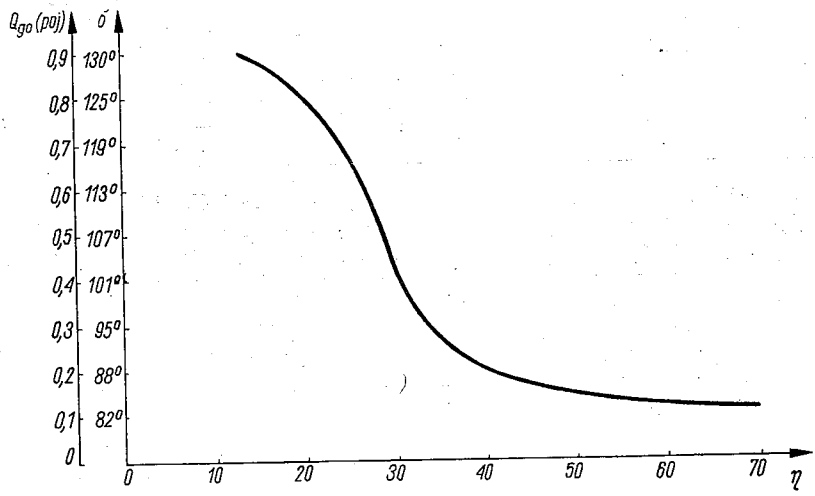
s_7 — zastępczego obwodu tłumiącego w osi poprzecznej generatora,

s_8 — regulatora napięcia.

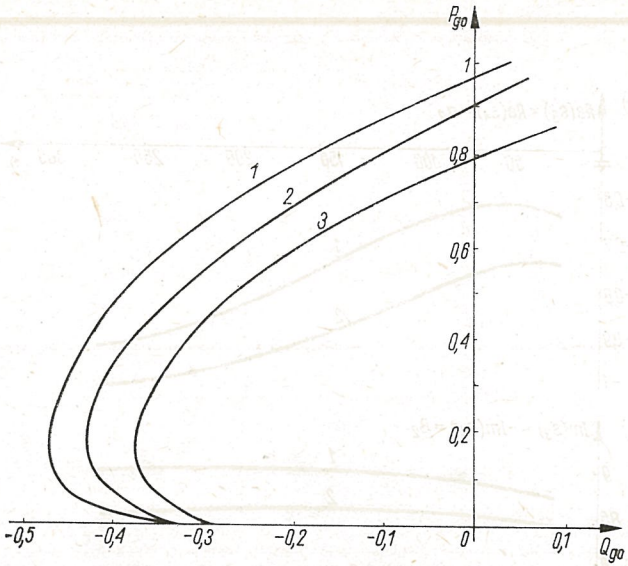
Na rys. $4 \div 7$ przedstawiono wpływ : obciążenia generatora mocą czynną $P_{go} = 0{,}1 \div 0{,}85$, mocą bierną $Q_{go} = -0{,}6 \div 0{,}6$, reaktancji układu przesyłowego $x_e = 0{,}15 \div 0{,}6$ i rezystancji układu przesyłowego $r_e = (0 \div 0{,}25)x_e$ na wybrane wartości własne macierzy stanu dla pracy generatora bez regulatora napięcia przy $u_f = const$ oraz z regulatorem napięcia. Przyjęto parametry regulatora napięcia: $k = 550$, $T_r = 2\ s$, $T_c = 16\ s$ zapewniające optymalne przebiegi napięcia generatora na biegu jałowym [8]. Ponadto, na rys. $8 \div 10$ pokazano wpływ wartości parametru $\eta = kT_r/T_c$ regulatora napięcia na wartości własne s_3 i s_4 oraz granicę stabilności lokalnej asymptotycznej.



Rys. 8. Wpływ parametru $\eta = kT_r/T_c$ regulatora napięcia na wartości własne s_3 i s_4 przy $u_{g0} = u_n = 1$, $P_{g0} = P_n = 0{,}85$, $x_e = 0{,}25$, $r_e/x_e = 0{,}1$
$1 - Q_{g0} = 0{,}2$, $2 - Q_{g0} = Q_n = 0{,}53$



Rys. 9. Wpływ parametru $\eta = kT_r/T_c$ regulatora napięcia na osiągane wartości Q_{g0} i δ na granicy stabilności lokalnej przy:
$u_{g0} = u_n = 1$, $P_{g0} = P_n = 0{,}85$, $x_e = 0{,}25$, $r_e/x_e = 0{,}1$



Rys. 10. Granica stabilności lokalnej dla $\eta = kT_r/T_c = 70$:
1 $u_{g0} = u_n = 1$, $x_e = 0{,}25$, $r_e/x_e = 0{,}1$; 2 – $u_{g0} = u_n = 1$, $x_e = 0{,}25$, $r_e = 0$; 3 – $u_{g0} = 0{,}9$, $x_e = 0{,}25$, $r_e/x_e = 0{,}1$

W tablicy 2 porównano wybrane wyniki obliczeń granicy stabilności lokalnej z pomiarami na rzeczywistym generatorze o mocy 360 MW. Pomiary w elektrowni potwierdziły wyniki uzyskane z modelowania cyfrowego.

Tablica 2

Przykładowe wyniki obliczeń i pomiarów granicy stabilności lokalnej generatora 360 MW

Warunki obciążenia generatora odpowiadające granicy stabilności lokalnej	
Obiekt rzeczywisty	Model
$P_{g0} = 360$ MW (0,85p.u.) $Q_{g0} = -20$ Mvar ($-0{,}05$) $u_{g0} = 19{,}5$ kV (0,9)	$P_{g0} = 360$ MW (0,85) $Q_{g0} = -10$ Mvar ($-0{,}025$) $u_{g0} = 19{,}5$ kV (0,9)
$P_{g0} = 300$ MW (0,71) $Q_{g0} = -112$ Mvar ($-0{,}26$) $u_{g0} = 18{,}2$ kV (0,83)	$P_{g0} = 300$ MW (0,71) $Q_{g0} = -95$ Mvar ($-0{,}23$) $u_{g0} = 18{,}2$ kV (0,83)

4. WNIOSKI

Z załączonych rysunków wynikają następujące wnioski dotyczące wpływu warunków obciążenia i parametrów układu przesyłowego na stabilność lokalną generatora ze statycznym układem wzbudzenia:

— Podstawowe znaczenie dla stabilności generatora i szybkości zanikania przebiegów przejściowych po zaburzeniach mają wartości własne: s_3, s_4 i s_5 niezależnie praktycznie od warunków obciążenia i parametrów układu przesyłowego.

— Utrata stabilności lokalnej asymptotycznej przez generator pracujący bez regulatora napięcia następuje na skutek przechodzenia wartości własnej s_5 do prawej półpłaszczyzny (rys. 5). Jest to ogólnie znany fakt spowodowany ujemną wartością momentu synchronizującego. Niestabilna składowa przebiegów kąta mocy δ związana z wartością własną s_5 ma charakter aperiodycznie rosnący.

— Utrata stabilności lokalnej asymptotycznej przez generator pracujący z regulatorem napięcia jest spowodowana zazwyczaj przechodzeniem do prawej półpłaszczyzny wartości własnych s_3 i s_4 (rys. 4). W tym przypadku mamy do czynienia z ujemną wartością współczynnika momentu tłumiącego. Niestabilna składowa przebiegów kąta mocy δ ma charakter narastających oscylacji.

— Wzrost rezystancji układu przesyłowego r_e przy $u_f = const$ powoduje wzrost części rzeczywistej wartości własnych s_3 i s_4 (rys. 7a) i nieznaczne zmniejszenie tłumienia przebiegów przejściowych związanych z tymi wartościami własnymi. Odwrotny efekt wywiera zwiększenie rezystancji układu przesyłowego r_e, gdy generator jest wyposażony w regulator napięcia. Występuje tutaj zmniejszenie części rzeczywistych wartości własnych s_3 i s_4 oraz wzrost tłumienia odpowiednich składowych przebiegów przejściowych (rys. 7b). Efekt ten jest szczególnie widoczny przy obciążeniu generatora znaczną wartością mocy czynnej.

— Zwiększenie reaktancji układu przesyłowego x_e zmniejsza zapas stabilności ponieważ rosną części rzeczywiste wartości własnych s_3 i s_4 (rys. 6).

Ponadto z przytoczonych wyników obliczeń wynikają następujące wnioski określające wpływ regulatora napięcia na stabilność lokalną generatora:

— W obszarze stabilnej pracy generatora przy $\eta = kT_r/T_c = const$ podstawowe wartości własne macierzy stanu to jest s_3, s_4 i s_5 nie ulegają praktycznie zmianom przy zmianach parametrów k, T_r i T_c regulatora.

— Dla obciążenia generatora indukcyjną mocą bierną, uzyskanie możliwie małych wartości części rzeczywistych wartości własnych s_3, s_4 i s_5 (przesunięcie tych wartości w głąb lewej półpłaszczyzny zmiennej zespolonej), co jest równoważne wzrostowi tłumienia przebiegów przejściowych, wymaga zwiększenia wartości parametru η regulatora (rys. 8), natomiast osiągnięcie dostatecznego tłumienia i stabilnej pracy generatora przy obciążeniu znaczną wartością pojemnościowej mocy biernej wymaga zmniejszenia parametru η (rys. 9).

— Regulator napięcia o parametrach: $k = 550$, $T_r = 2\ s$, $T_c = 16\ s$ zapewniających optymalne przebiegi napięcia generatora na biegu jałowym, nie pozwala praktycznie na pracę generatora z obciążeniem mocą bierną pojemnościową przy znamionowej mocy czynnej i znamionowym napięciu generatora.

ZAKOŃCZENIE

Dla uzyskania najkorzystniejszych własności dynamicznych generatora przy pracy równoległej z systemem elektroenergetycznym, regulator napięcia powinien zwiększać w możliwie największym stopniu tłumienie przebiegów przejściowych związanych z wartościami własnymi s_3 i s_4 w szerokim zakresie zmian warunków obciążenia generatora

i parametrów układu przesyłowego. Jak wynika z przytoczonych wyżej wyników oraz wyników badań podanych w pracach [2], [8] bardzo trudno jest w praktyce uzyskać optymalne własności dynamiczne generatora dużej mocy jedynie poprzez zmianę struktury i parametrów regulatora napięcia przy zachowaniu jednej wartości mierzonej jaką jest napięcie generatora.

Zdecydowaną poprawę własności dynamicznych generatora można uzyskać przez zastosowanie w regulatorze napięcia tzw. stabilizatora systemowego (ang. Power System Stabilizer). Układy takie zostały zastosowane również w krajowych regulatorach napięcia serii WGKY opracowanych w IASE O/Gdańsk do statycznych tyrystorowych układów wzbudzenia generatorów największej mocy.

OZNACZENIA

k — całkowity współczynnik wzmocnienia układu wzbudzenia i regulacji napięcia,
i — prąd,
m_m — moment napędowy turbozespołu,
P — moc czynna,
Q — moc bierna,
r — rezystancja,
T_c, T_r — stałe czasowe regulatora napięcia,
T_m — mechaniczna stała czasowa turbozespołu,
u — napięcie,
x — reaktancja,
x_R — zmienna stanu regulatora napięcia,
α — część rzeczywista wartości własnej,
β — część urojona wartości własnej,
η — parametr charakterystyczny regulatora napięcia,
ψ — strumień sprzężony,
ω — prędkość kątowa,
δ — kąt mocy

INDEKSY

d — wielkość określona w osi podłużnej generatora,
e — wielkość związana z siecią sztywną lub układem przesyłowym,
f — wielkość związana z obwodem wzbudzenia,
q — wielkość określona na zaciskach stojana generatora,
kq — wielkość związana z zastępczym obwodem tłumiącym w osi poprzecznej generatora,
kd — wielkość związana z zastępczym obwodem tłumiącym w osi podłużnej generatora,
l — wielkość związana ze strumieniem rozproszenia danego obwodu,
L — wielkość związana z linią przesyłową,

ld — wielkość związana ze wspólnym obwodem rozproszenia wzbudzenia i klatki tłumiącej w osi podłużnej,
n — wartość znamionowa danej wielkości,
o — wartość w punkcie pracy ustalonej,
q — wielkość określona w osi poprzecznej generatora,
s — wielkość określona na szynach stacji,
z — wartość zadana danej wielkości,
Δ — odchyłka od punktu pracy ustalonej.

Dodatek 1

Zależności określające elementy macierzy: $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{B}_0$, $\boldsymbol{C}_0$, $\boldsymbol{D}_0$.

Elementy macierzy $\boldsymbol{A}_0$.

$$a_{011} = \omega_n(r+r_e)t_1, \quad a_{012} = -\omega_n r_{kd} t_2, \quad a_{013} = -\omega_n r_f t_3,$$
$$a_{021} = -\omega_n(r+r_e)t_2, \quad a_{022} = -\omega_n r_{kd} t_4, \quad a_{023} = -\omega_n r_f t_5,$$
$$a_{031} = -\omega_n(r+r_e)t_3, \quad a_{032} = -\omega_n r_{kd} t_5, \quad a_{033} = -\omega_n r_f t_6,$$
$$a_{041} = \omega_n x_{de} t_7, \quad a_{042} = -\omega_n x_{ad} t_7, \quad a_{043} = -\omega_n x_{ad} t_7,$$
$$a_{051} = \omega_n x_{de} t_8, \quad a_{052} = -\omega_n x_{ad} t_8, \quad a_{053} = -\omega_n x_{ad} t_8,$$
$$a_{061} = \frac{\psi_{q0} + x_d i_{q0}}{T_m}, \quad a_{062} = -\frac{x_{ad} i_{q0}}{T_m}, \quad a_{063} = -\frac{x_{ad} i_{q0}}{T_m},$$
$$a_{071} = 0, \quad a_{072} = 0, \quad a_{073} = 0,$$

$$a_{014} = -\omega_n x_{qe} t_1, \quad a_{015} = \omega_n x_{aq} t_1, \quad a_{016} = \omega_n \psi_{qe0} t_1,$$
$$a_{024} = \omega_n x_{qe} t_2, \quad a_{025} = -\omega_n x_{aq} t_2, \quad a_{026} = -\omega_n \psi_{qe0} t_2,$$
$$a_{034} = \omega_n x_{qe} t_3, \quad a_{035} = -\omega_n x_{aq} t_3, \quad a_{036} = -\omega_n \psi_{qe0} t_3,$$
$$a_{044} = \omega_n(r+r_e)t_7, \quad a_{045} = \omega_n r_{kq} t_8, \quad a_{046} = -\omega_n \psi_{de0} t_7,$$
$$a_{054} = \omega_n(r+r_e)t_8, \quad a_{055} = \omega_n r_{kq} t_9, \quad a_{056} = -\omega_n \psi_{de0} t_8,$$
$$a_{064} = -\frac{\psi_{d0} + x_q i_{d0}}{T_m}, \quad a_{065} = \frac{x_{aq} i_{d0}}{T_m}, \quad a_{066} = 0,$$
$$a_{074} = 0, \quad a_{075} = 0, \quad a_{076} = \omega_n,$$

$$a_{017} = \omega_n t_1 u_{e0} \cos\delta_0,$$
$$a_{027} = -\omega_n t_2 u_{e0} \cos\delta_0,$$
$$a_{037} = -\omega_n t_3 u_{e0} \cos\delta_0,$$
$$a_{047} = -\omega_n t_7 u_{e0} \sin\delta_0,$$
$$a_{057} = -\omega_n t_8 u_{e0} \sin\delta_0,$$
$$a_{067} = 0,$$
$$a_{077} = 0.$$

Elementy macierzy $\boldsymbol{B}_0$

$$b_{011} = \omega_n r_f t_3, \quad b_{012} = \omega_n t_1 \sin\delta_0, \quad b_{013} = 0,$$
$$b_{021} = \omega_n r_f t_5, \quad b_{022} = -\omega_n t_2 \sin\delta_0, \quad b_{023} = 0,$$
$$b_{031} = \omega_n r_f t_6, \quad b_{032} = -\omega_n t_3 \sin\delta_0, \quad b_{033} = 0,$$
$$b_{041} = 0, \quad b_{042} = \omega_n t_7 \cos\delta_0, \quad b_{043} = 0,$$

$$b_{051} = 0, \qquad b_{052} = \omega_n t_8 \cos\delta_0, \qquad b_{053} = 0,$$

$$b_{061} = 0, \qquad b_{062} = 0, \qquad b_{063} = \frac{1}{T_m},$$

$$b_{071} = 0, \qquad b_{072} = 0, \qquad b_{073} = 0.$$

Elementy macierzy $\boldsymbol{C}_0$

$$c_{011} = \frac{u_{q0}}{u_{q0}}\left(\frac{x_e}{\omega_n} a_{041} + x_e\right) + \frac{u_{d0}}{u_{g0}}\left(\frac{x_e}{\omega_n} a_{011} + r_e\right),$$

$$c_{021} = \frac{u_{qs0}}{u_{s0}}\left(\frac{x_L}{\omega_n} a_{041} + x_L\right) + \frac{u_{ds0}}{u_{s0}}\left(\frac{x_L}{\omega_n} a_{011} + r_L\right),$$

$$c_{031} = u_{q0} + i_{d0}\left(\frac{x_e}{\omega_n} a_{041} + x_e\right) - i_{q0}\left(\frac{x_e}{\omega_n} a_{011} + r_e\right),$$

$$c_{041} = u_{qs0} + i_{d0}\left(\frac{x_L}{\omega_n} a_{041} + x_L\right) - i_{q0}\left(\frac{x_L}{\omega_n} a_{011} + r_L\right),$$

$$c_{051} = u_{d0} + i_{q0}\left(\frac{x_e}{\omega_n} a_{041} + x_e\right) + i_{d0}\left(\frac{x_e}{\omega_n} a_{011} + r_e\right),$$

$$c_{061} = 0,$$

$$c_{071} = 0.$$

$$c_{012} = \frac{u_{q0} x_e}{u_{g0}\omega_n} a_{042} + \frac{u_{d0} x_e}{u_{g0}\omega_n} a_{012},$$

$$c_{022} = \frac{u_{qs0} x_L}{u_{s0}\omega_n} a_{042} + \frac{u_{ds0} x_L}{u_{s0}\omega_n} a_{012},$$

$$c_{032} = \frac{x_e}{\omega_n}(i_{d0} a_{042} - i_{q0} a_{012}),$$

$$c_{042} = \frac{x_L}{\omega_n}(i_{d0} a_{042} - i_{q0} a_{012}),$$

$$c_{052} = \frac{x_e}{\omega_n}(i_{q0} a_{042} + i_{d0} a_{012}),$$

$$c_{062} = 0, \qquad c_{072} = 0,$$

$$c_{013} = \frac{u_{q0} x_e}{u_{g0}\omega_n} a_{043} + \frac{u_{d0}}{u_{g0}} a_{013} \frac{x_e}{\omega_n},$$

$$c_{023} = \frac{u_{qs0} x_L}{u_{s0}\omega_n} a_{043} + \frac{u_{ds0} x_L}{u_{s0}\omega_n} a_{013},$$

$$c_{033} = \frac{x_e}{\omega_n}(i_{d0} a_{043} - i_{q0} a_{013}),$$

$$c_{043} = \frac{x_L}{\omega_n}(i_{d0} a_{043} - i_{q0} a_{013}),$$

$$c_{053} = \frac{x_e}{\omega_n}(i_{q0} a_{043} + i_{d0} a_{013}),$$

$$c_{063} = 0, \qquad c_{073} = 0,$$

$$c_{014} = \frac{u_{q0}}{u_{g0}}\left(r_e + \frac{x_e}{\omega_n} a_{044}\right) + \frac{u_{d0}}{u_{g0}}\left(\frac{x_e}{\omega_n} a_{014} - x_e\right),$$

$$c_{024} = \frac{u_{qs0}}{u_{s0}}\left(r_L + \frac{x_L}{\omega_n} a_{044}\right) + \frac{u_{ds0}}{u_{s0}}\left(\frac{x_L}{\omega_n} a_{014} - x_L\right),$$

$$c_{034} = -u_{d0} + i_{d0}\left(\frac{x_e}{\omega_n} a_{044} + r_e\right) - i_{q0}\left(\frac{x_e}{\omega_n} a_{014} - x_e\right),$$

$$c_{044} = -u_{qs0} + i_{d0}\left(\frac{x_L}{\omega_n} a_{044} + r_L\right) - i_{q0}\left(\frac{x_L}{\omega_n} a_{014} - x_L\right),$$

$$c_{054} = u_{q0} + i_{q0}\left(\frac{x_e}{\omega_n} a_{044} + r_e\right) + i_{d0}\left(\frac{x_e}{\omega_n} a_{014} - x_e\right),$$

$$c_{064} = 0, \quad c_{074} = 0,$$

$$c_{015} = \frac{u_{q0} x_e}{u_{g0}\omega_n} a_{045} + \frac{u_{d0} x_e}{u_{g0}\omega_n} a_{015},$$

$$c_{025} = \frac{u_{qs0} x_L}{u_{s0}\omega_n} a_{045} + \frac{u_{ds0} x_L}{u_{s0}\omega_n} a_{015},$$

$$c_{035} = \frac{x_e}{\omega_n}(i_{d0} a_{045} - i_{q0} a_{015}),$$

$$c_{045} = \frac{x_L}{\omega_n}(i_{d0} a_{045} - i_{q0} a_{015}),$$

$$c_{055} = \frac{x_e}{\omega_n}(i_{q0} a_{045} + i_{d0} a_{015}),$$

$$c_{065} = 0, \quad c_{075} = 0,$$

$$c_{016} = \frac{u_{q0}}{u_{g0}}\left(\frac{x_e}{\omega_n} a_{046} - \psi_{ed0}\right) + \frac{u_{d0}}{u_{g0}}\left(\frac{x_e}{\omega_n} a_{016} + \psi_{eq0}\right),$$

$$c_{026} = \frac{u_{qs0}}{u_{s0}}\left(\frac{x_L}{\omega_n} a_{046} - \psi_{Ld0}\right) + \frac{u_{ds0}}{u_{s0}}\left(\frac{x_L}{\omega_n} a_{016} + \psi_{Lq0}\right),$$

$$c_{036} = i_{d0}\left(\frac{x_e}{\omega_n} a_{046} - \psi_{ed0}\right) - i_{q0}\left(\frac{x_e}{\omega_n} a_{016} + \psi_{eq0}\right),$$

$$c_{046} = i_{d0}\left(\frac{x_L}{\omega_n} a_{046} - \psi_{Ld0}\right) - i_{q0}\left(\frac{x_L}{\omega_n} a_{016} + \psi_{Lq0}\right),$$

$$c_{056} = i_{q0}\left(\frac{x_e}{\omega_n} a_{046} - \psi_{ed0}\right) + i_{d0}\left(\frac{x_e}{\omega_n} a_{016} + \psi_{eq0}\right),$$

$$c_{066} = 1, \quad c_{076} = 0,$$

$$c_{017} = \frac{u_{q0}}{u_{g0}}\left(\frac{x_e}{\omega_n} a_{047} - u_{e0}\sin\delta_0\right) + \frac{u_{d0}}{u_{g0}}\left(\frac{x_e}{\omega_n} a_{017} + u_{e0}\cos\delta_0\right),$$

$$c_{027} = \frac{u_{qs0}}{u_{s0}}\left(\frac{x_L}{\omega_n} a_{047} - u_{e0}\sin\delta_0\right) + \frac{u_{ds0}}{u_{s0}}\left(\frac{x_L}{\omega_n} a_{017} + u_{e0}\cos\delta_0\right),$$

$$c_{037} = i_{d0}\left(\frac{x_e}{\omega_n} a_{047} - u_{e0}\sin\delta_0\right) - i_{q0}\left(\frac{x_e}{\omega_n} a_{017} + u_{e0}\cos\delta_0\right),$$

$$c_{047} = i_{d0}\left(\frac{x_L}{\omega_n} a_{047} - u_{e0}\sin\delta_0\right) - i_{q0}\left(\frac{x_L}{\omega_n} a_{017} + u_{e0}\cos\delta_0\right),$$

$$c_{057} = i_{q0}\left(\frac{x_e}{\omega_n} a_{047} - u_{e0}\sin\delta_0\right) + i_{d0}\left(\frac{x_e}{\omega_n} a_{017} + u_{e0}\cos\delta_0\right),$$

$$c_{067} = 0, \quad c_{077} = 1.$$

Elementy macierzy $\boldsymbol{D}_0$

$$d_{011} = \frac{u_{d0} x_e}{u_{g0}\omega_n} b_{011}, \qquad d_{013} = 0,$$

$$d_{021} = \frac{u_{ds0} x_L}{u_{s0}\omega_n} b_{011}, \qquad d_{023} = 0,$$

$$d_{031} = -\frac{x_e}{\omega_n} i_{q0} b_{011}, \qquad d_{033} = 0,$$

$$d_{041} = -\frac{x_L}{\omega_n} i_{q0} b_{011}, \qquad d_{043} = 0,$$

$$d_{051} = \frac{x_e}{\omega_n} i_{d0} b_{011}, \qquad d_{053} = 0,$$

$$d_{061} = 0, \qquad d_{063} = 0,$$

$$d_{071} = 0, \qquad d_{073} = 0,$$

$$d_{012} = \frac{u_{q0}}{u_{g0}}\left(\frac{x_e}{\omega_n} b_{042} + \cos\delta_0\right) + \frac{u_{d0}}{u_{g0}}\left(\frac{x_e}{\omega_n} b_{012} + \sin\delta_0\right),$$

$$d_{022} = \frac{u_{qs0}}{u_{s0}}\left(\frac{x_L}{\omega_n} b_{042} + \cos\delta_0\right) + \frac{u_{ds0}}{u_{s0}}\left(\frac{x_L}{\omega_n} b_{012} + \sin\delta_0\right),$$

$$d_{032} = i_{d0}\left(\frac{x_e}{\omega_n} b_{042} + \cos\delta_0\right) - i_{q0}\left(\frac{x_e}{\omega_n} b_{012} + \sin\delta_0\right),$$

$$d_{042} = i_{d0}\left(\frac{x_L}{\omega_n} b_{042} + \cos\delta_0\right) - i_{q0}\left(\frac{x_L}{\omega_n} b_{012} + \sin\delta_0\right),$$

$$d_{052} = i_{q0}\left(\frac{x_e}{\omega_n} b_{042} + \cos\delta_0\right) + i_{d0}\left(\frac{x_e}{\omega_n} b_{012} + \sin\delta_0\right),$$

$$d_{062} = 0,$$

$$d_{072} = 0.$$

Współczynniki t_i, $i = 1, \ldots, 12$ określają zależności:

$$t_1 = \frac{x_{kd} x_f - (x_{ad} + x_{ld})^2}{f}, \qquad t_2 = \frac{x_{ad}(x_{ad} + x_{ld}) - x_{ad} x_f}{f},$$

$$t_3 = \frac{x_{ad}(x_{ad} + x_{ld}) - x_{ad} x_{kd}}{f}, \qquad t_4 = \frac{x_{ad}^2 - x_{de} x_f}{f},$$

$$t_5 = \frac{x_{de}(x_{ad} + x_{ld}) - x_{ad}^2}{f}, \qquad t_6 = \frac{x_{ad}^2 - x_{de} x_{kd}}{f},$$

$$t_7 = \frac{x_{kq}}{x_{aq}^2 - x_{kq} x_{qe}}, \qquad t_8 = \frac{x_{aq}}{x_{aq}^2 - x_{kq} x_{qe}},$$

$$t_9 = \frac{x_{qe}}{x_{aq}^2 - x_{kq}x_{qe}}, \qquad t_{10} = \frac{x_{ld}(x_{lkd}+x_{lf})+x_{lf}x_{lkd}}{f},$$

$$t_{11} = -\frac{x_l x_{lf}}{f}, \qquad t_{12} = -\frac{x_l x_{lkd}}{f},$$

gdzie:

$$f = x_{ad}^2(x_f + x_{kd} - x_{ad}) - x_{de}x_{kd}x_f + x_{ad}x_{ld}^2 + (x_{ad}+x_{ld})^2(x_l+x_e),$$

$$x_e = x_T + x_L, \quad r_e = r_T + r_L,$$

$$x_{de} = x_d + x_e, \quad x_{qe} = x_q + x_e.$$

Dodatek 2

Parametry generatora GTHW-360

Znamionowa moc pozorna	426 MVA
Znamionowe napięcie	22 kV
Znamionowy prąd	11,18 kA
Znamionowy współczynnik mocy	0,85
Znamionowy prąd wzbudzenia	2800 A
Znamionowy prąd wzbudzenia przy biegu jałowym	850 A
Rezystancja uzwojenia wzbudzenia (t = 75°C)	0,1725 Ω
Rezystancja obwodu twornika (t = 75°C)	0,001945 Ω
Stała czasowa T'_d	1,1 s
Stała czasowa T''_d	0,03 s
Reaktancja synchroniczna podłużna x_d	2,6
Reaktancja synchroniczna poprzeczna x_q	2,48
Reaktancja rozproszenia twornika x_l	0,199
Reaktancja Potiera x_p	0,194
Reaktancja wzajemnego rozproszenia obwodu wzbudzenia i klatki tłumiącej x_{ld}	0,03
Stała czasowa T''_q	0,03 s

Na podstawie tych danych obliczono:

$r = 0{,}001719$, $r_f = 0{,}00098$, $r_{kd} = 0{,}0087$, $r_{kq} = 0{,}0247$,
$x_{ad} = 2{,}401$, $x_{lf} = 0{,}131$, $x_{lkd} = 0{,}0266$, $x_{aq} = 2{,}281$,
$x_{lkq} = 0{,}047$.

Ponadto przyjęto:

Mechaniczną stałą czasową turbozespołu T_m	6,45 s
Reaktancję zwarcia transformatora blokowego x_T	0,15

LITERATURA

1. C. Concordia, *Synchronous Machines. Theory and performance*, J. Wiley, New York 1951.
2. C. Concordia, *Concepts of synchronous machine stability as affected by excitation control*, Power Apparatus and Systems, No. 4/1969.

3. P. Dandeno, *Validation of turbogenerator stability models by comparisions with power system tests*, Power Apparatus and Systems, No. 4/1981.
4. A. Grabowski, *Wybór struktury regulatora napięcia do turbogeneratorów dużej mocy wyposażonych we wzbudnice prądu przemiennego z prostownikami*, Praca doktorska, Politechnika Gdańska 1970.
5. A. Grabowski, K. Madajewski, E. Mściwojewski, *Model matematyczny generatora o mocy powyżej 500 MW*, Opracowanie IASE nr NG/126/78.
6. A. Grabowski, K. Madajewski, E. Mściwojewski, *Koncepcja statycznego tyrystorowego układu wzbudzenia i regulacji napięcia turbogeneratorów o mocy 600 MW*, II Sympozjum „Problemy optymalizacji w energetyce", Gdańsk 19—21.04.1979.
7. A. Grabowski, K. Madajewski, E. Mściwojewski, *Tyrystorowy układ wzbudzenia hydrozespołów elektrowni szczytowo-pompowej Porąbka-Żar*, Energetyka nr 6/1979.
8. K. Madajewski, *Własności dynamiczne generatora synchronicznego z indywidualnym i grupowym układem regulacji napięcia*, Praca doktorska, Instytut Energetyki, Warszawa 1982.
9. E. Mściwojewski, *Własności statyczne i dynamiczne wybranych układów wzbudzenia i regulacji napięcia samowzbudnych generatorów synchronicznych*. Praca doktorska, Politechnika Gdańska 1968.

K. MADAJEWSKI

SYNCHRONOUS GENERATOR DYNAMIC STABILITY AS AFFECTED BY STATIC EXCITATION SYSTEM

Summary

The dynamic stability results of synchronous generator with static excitation system and AVR are described. The results of mathematical modelling and on site tests have been compared. Eigenvalues analysis of state matrix have been carried out.

K. MADAJEWSKI

STABILITÉ LOCALE DU GÉNÉRATEUR SYNCHRONE AVEC SYSTÈME STATIQUE D'EXCITATION AUX THYRISTORS

Résumé

On a présenté les résiltats de l'analyse de stabilité locale du générateur synchrone avec le système statique d'excitation et de réglage de tension aux thyristors. On a comparé les résultats obtenus sur modèle avec les résultats de mesure sur le générateur réel. L'étude sur modèle a été faite par méthode d'analyse du spectre de matrice d'état pour le système de régulation de tension fermé.

K. MADAJEWSKI

DYNAMISCHE STABILITÄT EINES SYNCHRONGENERATORS MIT STATISCHEM THYRISTORENERREGUNGSSYSTEM

Zusammenfassung

Es wurden Ergebnisse ainer Analyse der dynamischen Stabilität eines Synchrongenerators mit statischem Thyristorenerregungs- und Spannungsregelsystem gebracht. Ergebnisse der Modellprüfungen wurden mit Meßergebnissen an wirklichen Generatoren verglichen. Die Modellprüfungen wurden mittels der Analysenmethode des Matrixspektrums des geschlossenen Zustandes des Spannungsregelsystems durchgeführt.

К. МАДАЕВСКИ

СТАТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СИНХРОННОГО ГЕНЕРАТОРА СО СТАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ВОЗБУЖДЕНИЯ

Р е з ю м е

Представлены результаты исследований статической устоичивости синхронного генератора со статической системой возбуждения. Сравнены результаты полученные из расчетной математической модели с результатами измерений на синхронном генераторе. Расчитаны характеристические числа матрицы состояния.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1986, 32, z. 1, ss. 115-149

621.318

Analysis of electromagnetic field transient processes in nonlinear ferromagnetic medium

SŁAWOMIR WIAK (ŁÓDŹ)

Instytut Transformatorów, Maszyn i Aparatów Elektrycznych Politechniki Łódzkiej

Otrzymano 05.2.1984

The paper presents the results of an analysis of transient electromagnetic field in ferromagnetic materials, for real characteristics of magnetization and arbitrary boundary conditions. Comparative calculations have been made for one-dimensional electromagnetic field. The influence of ferromagnetic material dimensions, type of medium (linear or nonlinear), change of conductivity γ, speed of function $E(0, t)$ accretion on the boundary of the area, current $i(t)$ on spatial-temporal electromagnetic field distributions, losses $\Delta P(t)$, and substitute parameters of ferromagnetic material (substitute resistance $R(t)$ and dynamic inductance $L_d(t)$), have been found.

1. INTRODUCTION

The difference method applied in solving the differential equation for electric field E_z [6]

$$\frac{\partial^2 E_z(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{\mu_d[H_y(x,t)]} \frac{\partial \mu_d[H_y(x,t)]}{\partial H_y(x,t)} E_z(x,t) \frac{\partial E_z(x,t)}{\partial x} = \gamma \mu_d[H_y(x,t)] \frac{\partial E_z(x,t)}{\partial t}, \tag{1}$$

includes the problem of calculating the spatial-temporal distributions of electromagnetic field, losses and substitute parameters of ferromagnetic material in transient states for non-linear and arbitrarily changing boundary conditions. The transient states analysis for a medium of non-linear magnetic properties (fig. 1) has been made for the following cases:

1. Alternating current flows through the ferromagnetic material (fig. 2).

1.1. The electric field E_z vector, tangent with the ferromagnetic material surfaces, is not known while the current is known that flows in the electromagnetic material and changes in time according to

$$i(t) = I_1 + I_2 \cdot (1 - e^{-t/T}), \tag{2}$$

or

$$i(t) = I_4 + I_3 \cdot e^{-t/T}, \tag{3}$$

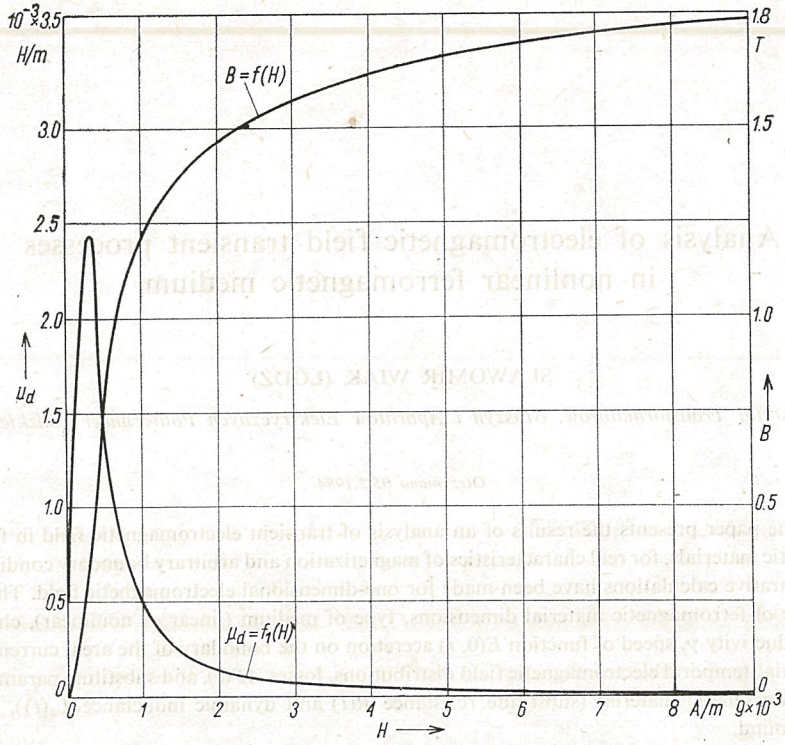


Fig. 1. The primary characteristic of magnetization $B = f(H)$ and characteristic of dynamic permeability $\mu_d = f(H)$ for ferromagnetic material

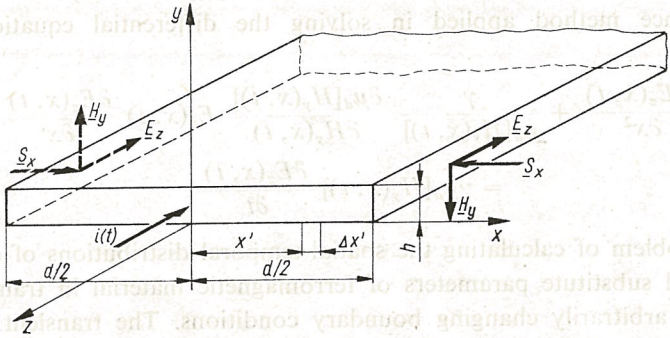


Fig. 2. The system of vectors of electromagnetic field on boundary surfaces during the flow of the electric current $i(t)$ through ferromagnetic material (d — breadth, h — thickness)

where:

I_1 — the initial value of the current (for $t = 0$) flowing through the ferromagnetic material in the case of current accretion,

I_4 — the fixed value of the current (for $t \to \infty$) flowing through the ferromagnetic material in the case of current decay,

T — course time — constant.

1.2. The function of current changes in time is not known, while the vector of electric field E_z is known, tangent with the ferromagnetic material surface and changing in time according to:

$$E(0, t) = E(d, t) = E_1 + E_2(1 - e^{-t/T}), \tag{4}$$

or

$$E(0, t) = E(d, t) = E_4 + E_3 e^{-t/T}, \tag{5}$$

where:

E_4 — the fixed value of electric field (for $t \to \infty$) in the case of electric field decay,

E_1 — the initial value of electric field (for $t = 0$) in the case of electric field accretion,

T — course time constant.

2. A plane wave falls on the ferromagnetic material. The electric field E_z vector is known, tangent with the surface of the ferromagnetic material and changing in time according to:

$$E(0, t) = E(d, t) = E_{ust}(1 - e^{-t/T}). \tag{6}$$

The elaborated by the author algorithms of calculating the transient electromagnetic field distribution in ferromagnetic materials are concerned with the boundary conditions arbitrarily changing. The author has assumed — for the electromagnetic field transient effects — that the current $i(t)$ and electric field $E(0, t)$ change according to the functions described by formulae 2, 3, 4 and 5. It has been assumed that they may be functions characteristic in transient effects analysis in electric circuits.

2. TRANSIENT ELECTROMAGNETIC FIELD IN FERROMAGNETIC MATERIAL CONDUCTING ALTERNATING CURRENT

The problem of calculating the transient electromagnetic field distributions in ferromagnetic material of tape conductor $\left(\frac{h}{d} \ll 1\right)$ conducting alternating current (fig. 2) has been led to the problem of one-dimensional electromagnetic field. The analysis of spatial-temporal distributions of transient electromagnetic field (in spite of simplified geometrical systems — one coordinate) answers a great many problems of the effect character. On the basis of the algorithms of calculating electromagnetic field, comparative calculations have been made. The results of the calculations in the form of examples, have been organized so as to make it possible to find the answer to the following query: What is the influence of the factors listed below on the electromagnetic field distributions and the duration of transient processes in ferromagnetic material conducting alternating current?

The factors are:

1. the dimensions of the ferromagnetic material (breadth d),
2. the quantity of the quotient $\frac{i(t_{ust})}{i(0)}$,

where: t_{ust} — time, after which the transient processes decay,

3. time-constant T of the current course of vector of the electric field E_z tangent with the surface of the ferromagnetic material,
4. the kind of medium: non-linear (permeability μ_d = variable) and linear (perme-

ability μ_d = constant) and conductivity γ = constant. During the current flow through the ferromagnetic material (fig. 2) the voltage diminish on any segment of the ferromagnetic AB (in the current flow direction $\sphericalangle(\boldsymbol{E}_z, dl) = 0$) can be expressed by the formula [1]:

$$U_{AB}(t) = \int_{AB} E(0, t)dl = E(0, t)l, \tag{7}$$

where: $E(0, t)$ — electric field on boundary surface.

It will be assumed that voltage drop $U_{AB}(t)$ exists on series connected resistance $R(t)$ and inductance $L_d(t)$ of the ferromagnetic material. For the assumed ferromagnetic substitute scheme, it will be put as follows:

$$U_{AB}(t) = R(t)i(t) + \frac{d\psi_w(i(t))}{dt} \tag{8}$$

where:

$$\frac{d\psi_w(i(t))}{di} = \frac{d\psi_w(i(t))}{di(t)} \frac{di(t)}{dt} = L_d(t)i(t) \tag{9}$$

$\psi_w(i(t))$ — internal associated flux.

The substitute resistance of the ferromagnetic material is:

$$R(t) = \frac{\Delta P(t)}{i^2(t)} \tag{10}$$

where

$$\Delta P = \gamma \int_V E_z^2(x, t)dV \tag{11}$$

$\Delta P(t)$ — power losses in ferromagnetic material at the time of current $i(t)$ flow.
Formula (11) will be converted to the form:

$$R(t) = \frac{\gamma \int_V E_z^2(x, t)dV}{\left[\gamma \int_S E_z(x, t)ds\right]^2} = \frac{l \int_0^{d/2} E_z^2(x, t)dx}{2\gamma h\left[\int_0^{d/2} E_z(x, t)dx\right]^2}, \tag{12}$$

where: l — the ferromagnetic material sector length.

In order to define the substitute ferromagnetic material inductance $L_d(t)$, it is necessary to known the associated internal flux $\psi_w(i(t))$ in the ferromagnetic material. At the time of current flowing through the ferromagnetic material (fig. 2) elementary flux $d\Phi_w(t)$ permeating a rectangular surface $\Delta x \cdot l$ inside of the ferromagnetic material, will be defined as follows:

$$d\Phi_w = \beta(x, t) \cdot \Delta x \cdot l, \text{ where: } \Delta x \text{ — increment along } x \text{ axis.} \tag{13}$$

Flux $\psi_w(t)$ associated with current $i(t)$ flowing in the whole cross-section of the ferromagnetic material, is defined by the formula:

$$\psi_w = \sum_{x=\Delta x}^{x=\frac{d}{2}} d\psi_w(t) = \sum_{x=\Delta x}^{x=\frac{d}{2}} \frac{\int_0^x E_z(x, t)dx}{\int_0^{d/2} E_z(x, t)dx} lB(x, t)\Delta x =$$

$$= \frac{l}{\int_0^{d/2} E_z(x,t)\,dx} \int_0^{d/2} \left[B(x,t) \int_0^x E_z(x,t)\,dx \right] dx \tag{14}$$

In the case when the current-leading conductor has a circular cross-section, it can be assumed that the boundary line overlaps the „*outside*" magnetic field line for internal flux $\psi_w(t)$. For flat conductors or conductors having arbitrary cross-sections, it is impossible to unequivocally define the cross-section for internal flux $\psi_w(t)$ [2], [3]. Formula (14), concerning the calculation of internal flux, has been derived with the assumption that all magnetic field internal lines close inside the cross-section (no magnetic field line closes through the medium surrounding the conductor). This assumption is not fulfilled, therefore flux $\psi_w(t)$ and inductance $L_d(t)$ are calculated with some error. For this reason inductance $L_d(t)$ has been calculated from the formula:

$$L_d(t) = \frac{E(0,t)l - R(t)i(t)}{\frac{di(t)}{dt}}. \tag{15}$$

2.1. Transient Electromagnetic Field in Ferromagnetic Material Conducting Alternating Current, for the Unknown Electric Field E Strength on the Surface

The procedures of iterative choice of electric field E strength value on the boundary surfaces (elaborated by the author) fulfill the following condition:

$$\left| i_z(t_n) - h\gamma \int_0^d E_z(x,t_n)\,dx \right| < \text{minimum}, \tag{16}$$

where:

$i_z(t_n)$ — the assumed value of the current flowing through the ferromagnetic material at the moment t_n,

$E_z(x, t_n)$ — the value of electric field strength in ferromagnetic material calculated on the basis of solution of the differential equation (1) [6], for boundary conditions chosen in the iterative process: $E_0^n = E_N^n$, ($t_n = n\Delta t$, Δt — increment).

The iteratively calculated electric field $E(0, t)$ strength curves on the verge of the area smooth functions in the case when the relative error of current $\left| \frac{i_z(t) - i(t)}{i_z(t)} \right|$ is less than 10^{-4}. The above condition has been obtained on the basis of test calculations. Such an accuracy has been gained for the number of iterations not greater than 15.

Example 1: The analysis of temporal-spatial distributions of electromagnetic field in the case of decaying of current flowing through ferromagnetic material according to exponent function for various initial and stationary current values.

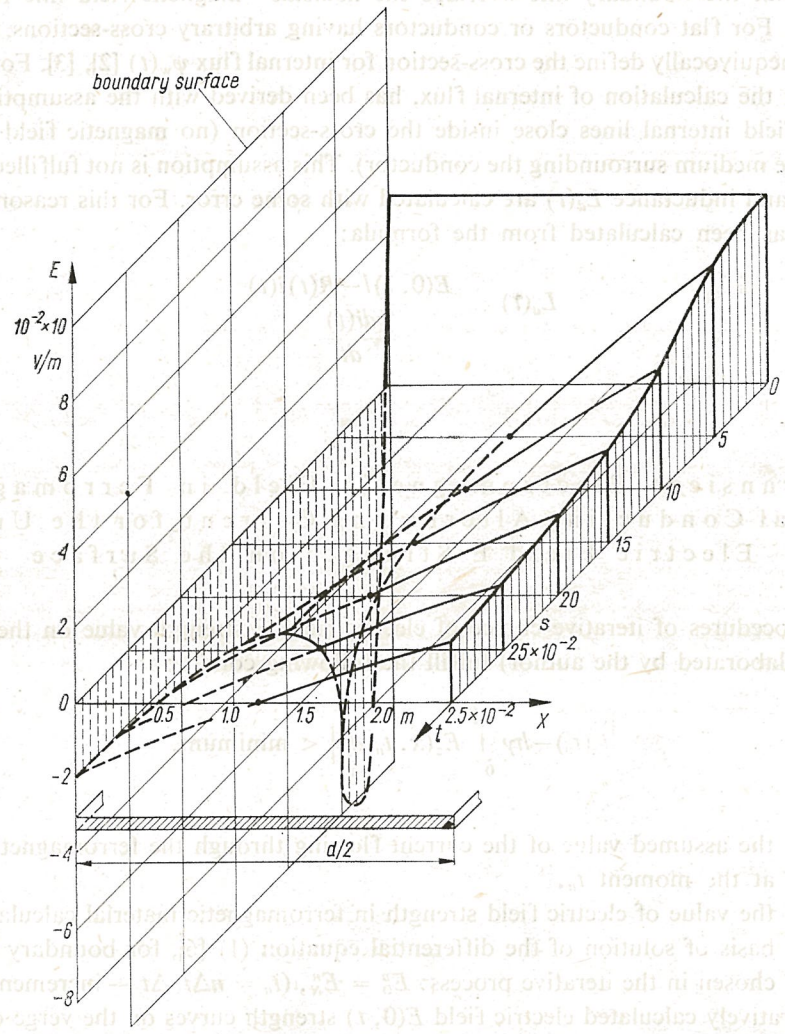


Fig. 3a. The spatial-temporal distributions of electric field $E(x, t)$ in the case of decaying of current flowing through ferromagnetic material according to the function $i(t) = 2.7e^{-t/T}A$. The calculations have been made for the following values: time-constant of course of $i(t)$ $T = 10^{-2}$ s, $d = 0.05$ m, $h = 2\cdot10^{-4}$ m,

$$\Delta x = 10^{-3}\text{ m},\ \Delta t = 10^{-5}\text{ s},\ \gamma = 5.44\cdot10^{6}\ \frac{\text{S}}{\text{m}},\ \mu_d = \text{variable}$$

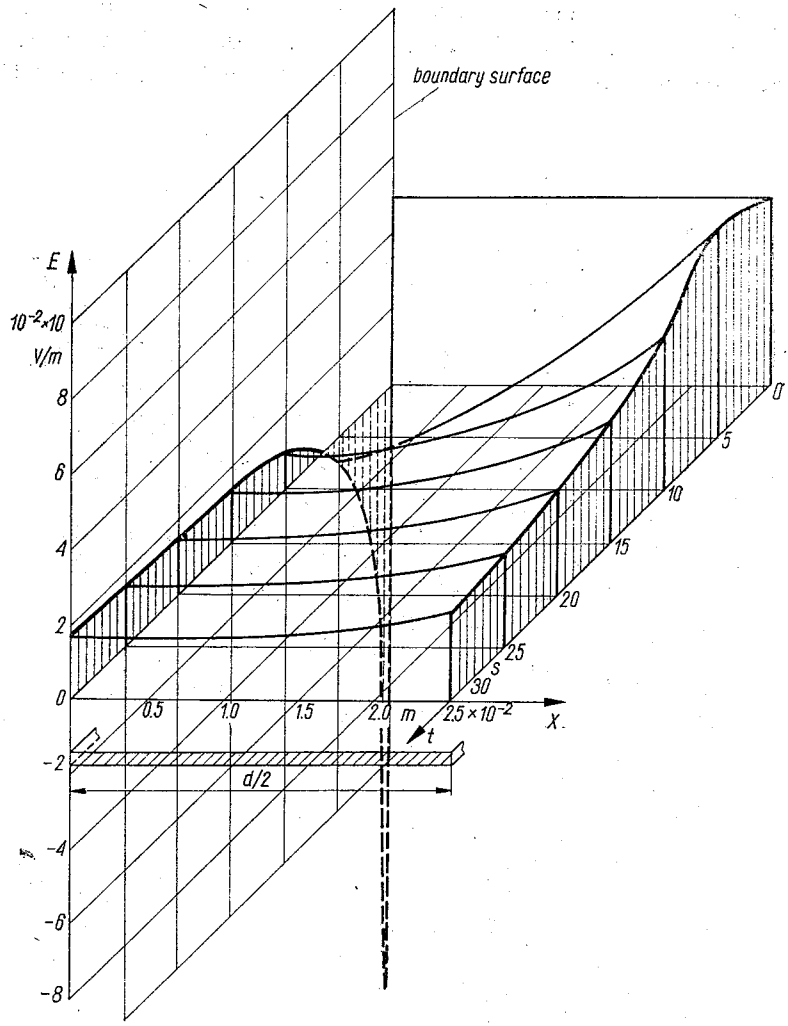


Fig. 3b. The spatial — temporal distributions of electric field $E(x, t)$ in the case of decaying of current flowing through ferromagnetic material according to the function $i(t) = 1+2.7\cdot e^{-t/T}A$. The calculations have been made for the following values: time-constant of courses of $i(t)T = 10^{-2}$ s, $d = 0.05$ m, $h = 2\times$ $\times 10^{-4}$ m, $\gamma = 5.44\cdot10^{6}\,\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$, $\Delta x = 10^{-3}$ m, $\Delta t = 10^{-5}$ s, μ_d = variable.

Comparative calculations have been made of a ferromagnetic material conducting alternating current, of dimensions $d = 0.05$ m and $h = 2 \cdot 10^{-4}$ m, fot two cases:

a. $i_1(t) = 2.7 \cdot e^{-t/T}$

b. $i_2(t) = 1 + 2.7 \cdot e^{-t/T}$

(for the purpose of calculations the value of current course time-constant $T = 10^{-2}$ s has been assumed). The results of calculations of electric field $E(x, t)$ distributions, in the form of curves, for currents $i_1(t)$ and $i_2(t)$ are presented in fig. 3a and 3b. The courses

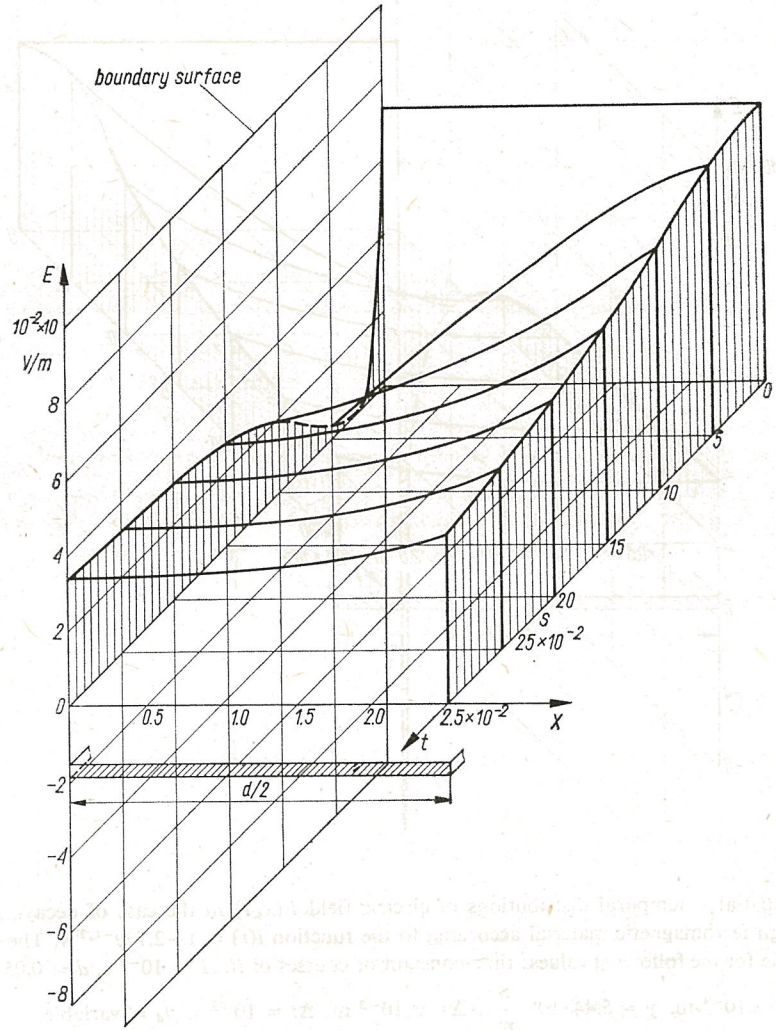


Fig. 4. The spatial — temporal distributions of electric field $E(x, t)$ in the case of decaying of current flowing through ferromagnetic material according to the function $i(t) = 2 + 2 \cdot e^{-t/T} A$. The calculations have been made for the following values: time-constant of course of $i(t)$ $T = 10^{-2}$ s, $d = 0.05$ m, $h = 2 \times$

$$\times 10^{-4} \text{ m}, \ \gamma = 5.44 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}}, \ \Delta x = 10^{-3} \text{ m}, \ \Delta t = 10^{-5} \text{ s}, \ \mu_d = \text{variable}$$

of functions $E(0, t)$ depend on the value of quotient $\frac{i(t_{ust})}{i(0)}$. Transient processes in electromagnetic field decay the quicker, the greater is the value of quotient $\frac{i(t_{ust})}{i(0)}$. For an appropriately big value of the quotient $\left(\text{value } \frac{i(t_{ust})}{i(0)} = 1 \text{ has been assumed}\right)$, function $E(0, t)$, having positive values, has been obtained (fig. 4). For other values of the quotient, courses $E(0, t)$ (fig. 3b) alter from positive through negative to positive values. The alteration of sign for electric field $E(x, t)$ values (fig. 3a) is to be understood as an alteration of the sense of resultant vector of electric field. It is the effect of strong interaction of eddy currents. The above effect has its representation in magnetic field $H(x, t)$ courses (fig. 5a), and in induction $B(x, t)$ (fig. 6a). The magnetic field on the border of the area decays much quicker than inside. The results of calculations of magnetic field $H(x, t)$ distributions, and of induction $B(x, t)$ for current course, according to function $i_2(t) = 1+2.7 \cdot e^{-t/T}$, are presented in fig. 5b and 6b.

Example 2: The analysis of spatial-temporal electromagnetic field distributions in the case of accretion of current flowing through ferromagnetic material according to function $i(t) = I_1+I_2(1-e^{-t/T})$ for various initial values of the current.

Calculations of electromagnetic field distributions have been made with the assumption that current in ferromagnetic material increases according to function circumscribed by formula (2), with time constant $T = 10^{-2}$ s. The results of calculations of electric field E distributions in ferromagnetic material (of dimensions $d = 0.05$ m, $h = 2 \cdot 10^{-4}$ m), with permeability μ_d = variable (fig. 1), are presented in fig. 7a and 7b. Comparative calculations have been made for two different initial values of current $i_1(0) = 0.2$ A, and $i_2(0) = 1$ A. Maximum values of electric field strength on the surface, and time of transient processes decay, depend on the value of quotient $\frac{i(t_{ust})}{i(0)}$. While analysing $E(x, t)$ distributions, it has been found that for less value of quotient $\frac{i(t_{ust})}{i(0)}$, a shorter time of transient processes decay has been obtained. On the basis of electric field $E(x, t)$ spatial-temporal distributions obtained, and formulae (11) and (12), the loss curve $\Delta P(t)$ and substitute resistance of ferromagnetic material $R(t)$ (fig. 8), has been calculated.

2.2. Transient Electromagnetic Field in a Ferromagnetic Material Conducting Alternating Current for a Known Electric Field E Strength on the Surface

Example 1: The analysis of times of transient processes decay in the function of change of current flowing in ferromagnetic material (current decay or accretion).

Calculations have been made for the case of electric field accretion on the surface of the ferromagnetic material according to function $E(0, t) = 0.0735 \cdot (1-e^{-t/T})$, and of electric field decay $E(0, t) = 0.735\, e^{-t/T}$. Width $d = 0.025$ m and course time constant $E(0, t)$:

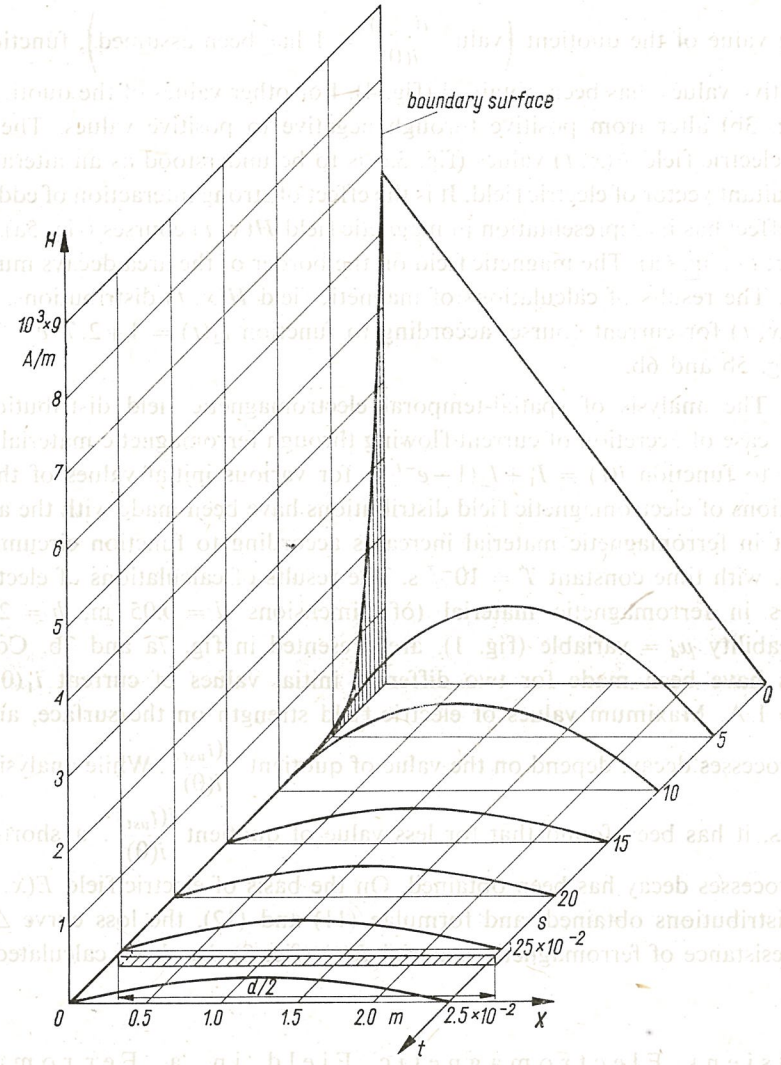


Fig. 5a. The spatial — temporal distributions of magnetic field $H(x, t)$ in the case of decaying of electric current flowing through ferromagnetic material according to the function $i(t) = 2.7\, e^{-t/T} A$. The calculations have been made for the following values: time — constant of course of $i(t)$ $T = 10^{-2}$ s, $d = 0.05$ m,

$$h = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}, \quad \Delta t = 10^{-5} \text{ s}, \quad \Delta x = 10^{-3} \text{ m}, \quad \gamma = 5.44\, 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}}, \quad \mu_d = \text{variable}$$

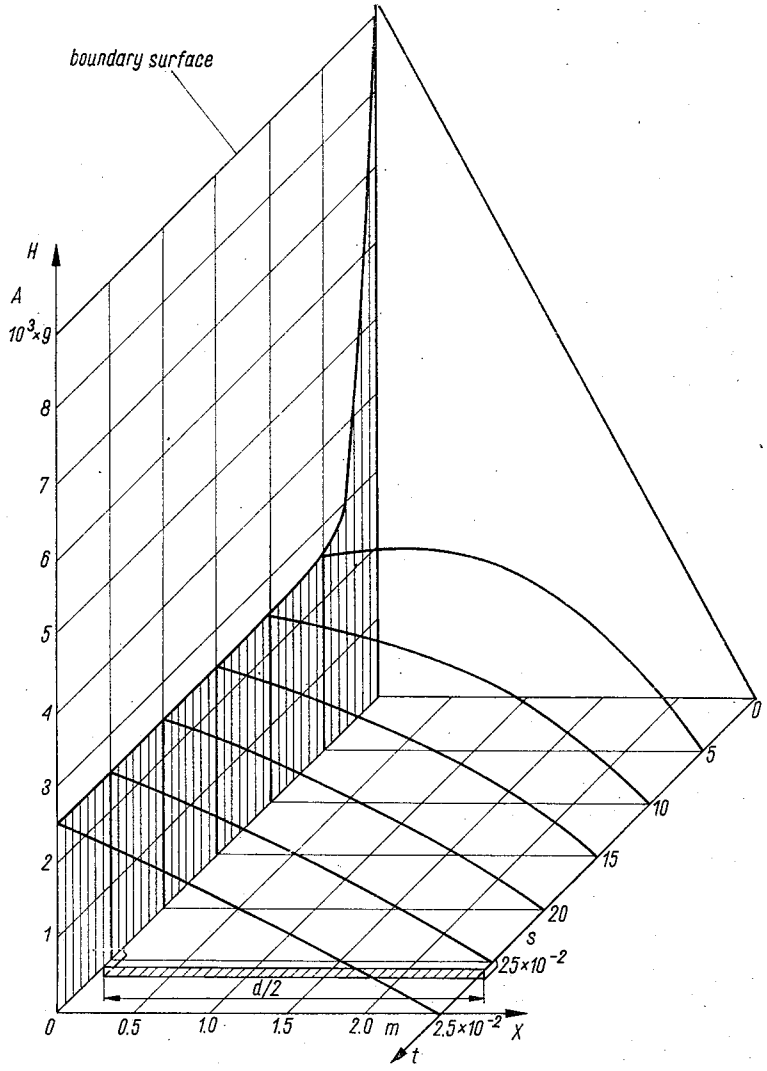


Fig. 5b. The spatial — temporal distributions of magnetic field $H(x, t)$ in the case of decaying of electric current flowing through ferromagnetic material according to the function $i(t) = 1+2.7 \cdot e^{-t/T} A$. The calculations have been made for the following values: time-constant of course of $i(t)$ $T = 10^{-2}$ s, $d = 0.05$ m,

$$h = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}, \ \Delta t = 10^{-5} \text{ s}, \ \Delta x = 10^{-3} \text{ m}, \ \gamma = 5.44 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}}, \ \mu_d = \text{variable}$$

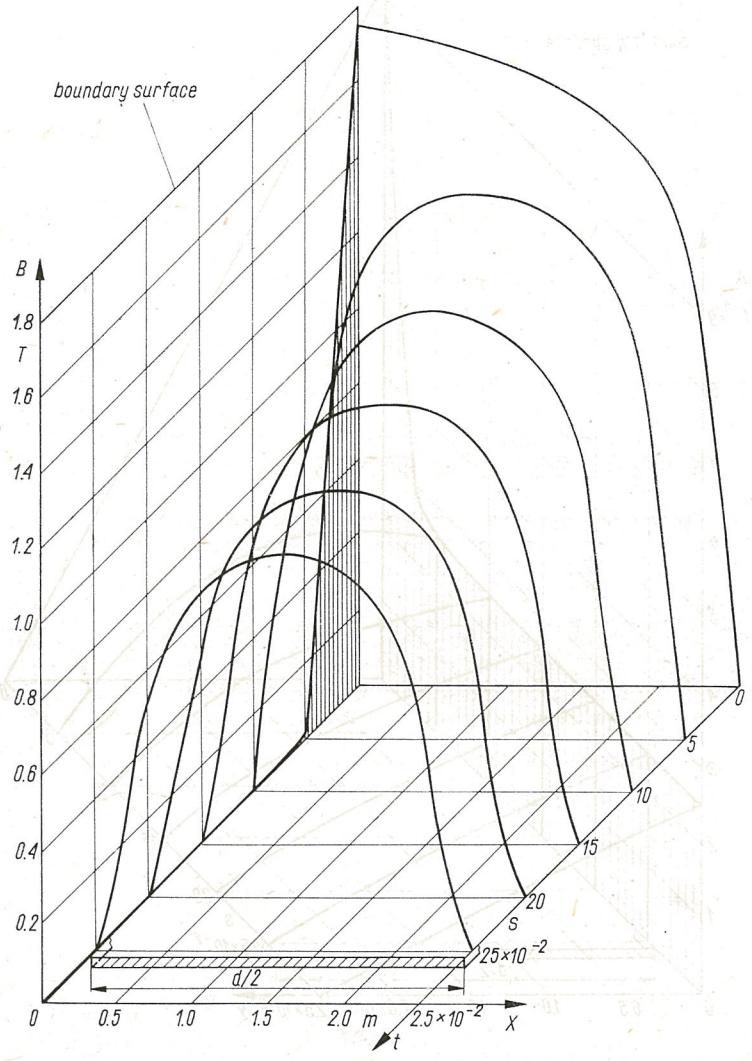


Fig. 6a. The spatial — temporal distributions of inductions $B(x, t)$ in the case of decaying of electric current flowing through ferromagnetic material according to the function $i(t) = 2.7 \cdot e^{-t/T} A$. The calculations have been made for the following values: time-constant of course of $i(t)$ $T = 10^{-2}$ s, $d = 0.05$ m, $h = 2 \times$ $\times 10^{-4}$ m, $\Delta t = 10^{-5}$ s, $\Delta x = 10^{-3}$ m, $\gamma = 5.44 \cdot 10^{6} \frac{\text{S}}{\text{m}}$, μ_d = variable

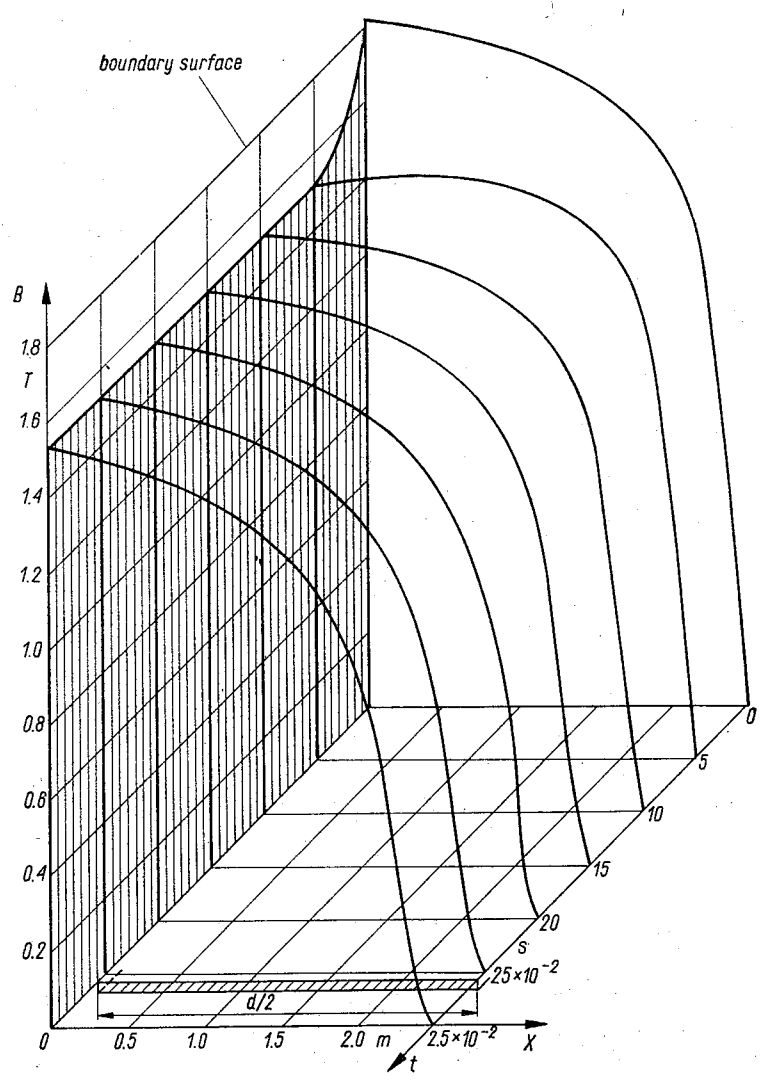


Fig. 6b. The spatial — temporal distributions of induction $B(x, t)$ in the case of decaying of electric current flowing through ferromagnetic material according to the function $i(t) = 1+2.7 \cdot e^{-t/T} A$. The calculations have been made for the following values: time-constant of course of $i(t)$ $T = 10^{-2}$ s, $d = 0.05$ m, $h = 2 \times$ $\times 10^{-4}$ m, $\Delta t = 10^{-5}$ s, $\Delta x = 10^{-3}$ m, $\gamma = 5.44 \cdot 10^{6} \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$, μ_d = variable

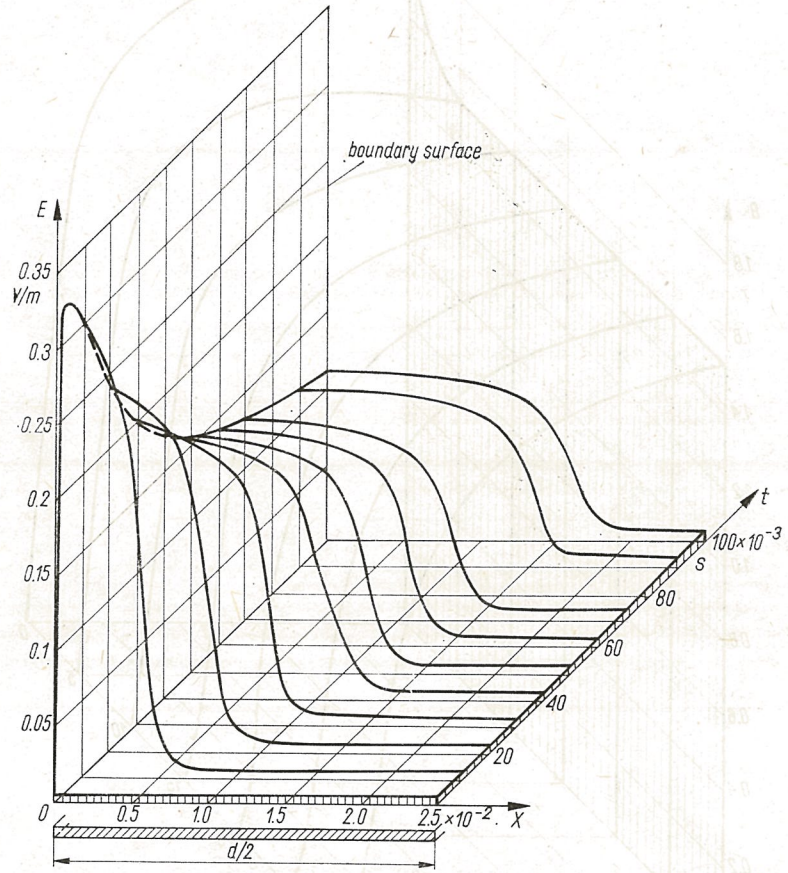


Fig. 7a. The spatial — temporal distributions of electric field $E(x, t)$ in the case of accretion of electric current flowing through ferromagnetic material according to the function $i(t) = 1+2.7(1-e^{-t/T})A$. The calculations have been made for the following values: time-constant of course of $i(t)$ $T = 10^{-2}$ s, $d = 0.05$ m, $h = 2 \cdot 10^{-4}$ m, $\Delta t = 10^{-5}$ s, $\Delta x = 10^{-3}$ m, $\gamma = 5.44 \cdot 10^{6} \frac{\text{S}}{\text{m}}$, μ_d = variable

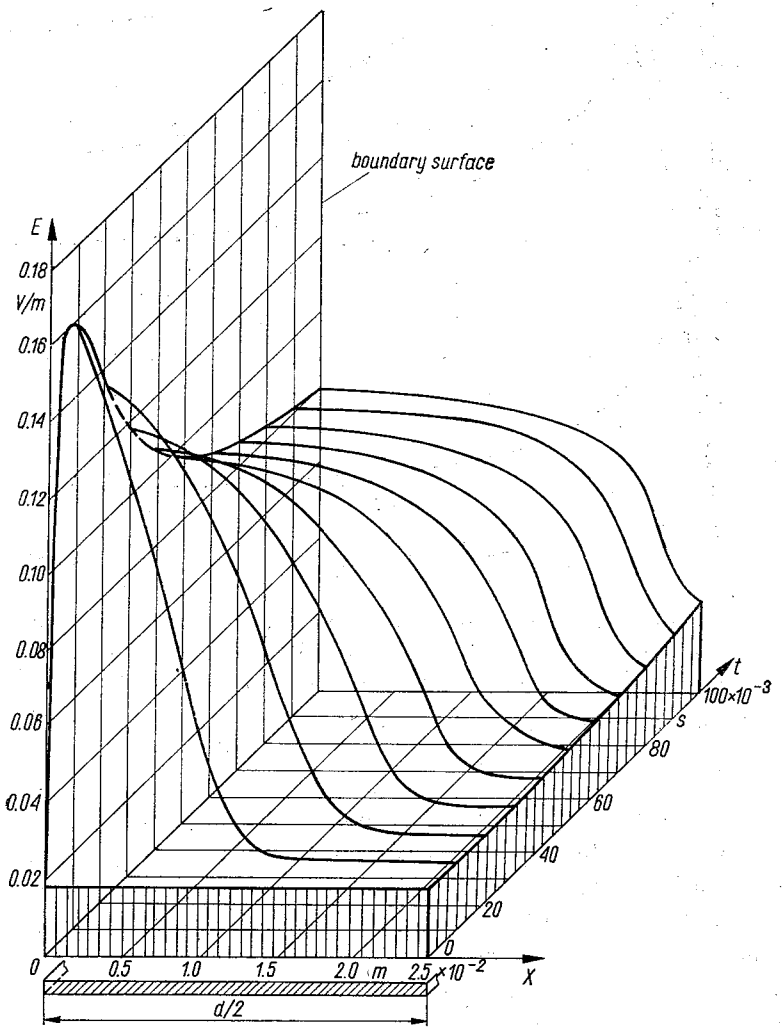


Fig. 7b. The spatial-temporal distributions of electric field $E(x, t)$ in the case of accretion of electriccurrent flowing through ferromagnetic material according to the function. The calculations have been made for, the following values: time-constant of course of $i(t)$ $T = 10^{-2}$ s, $d = 0.05$ m, $h = 2 \cdot 10^{-4}$ m, $\Delta t = 10^{-5}$ s,

$$\Delta x = 10^{-3} \text{ m}, \quad \gamma = 5.44 \cdot 10^{6} \frac{\text{S}}{\text{m}}, \quad \mu_d = \text{variable}$$

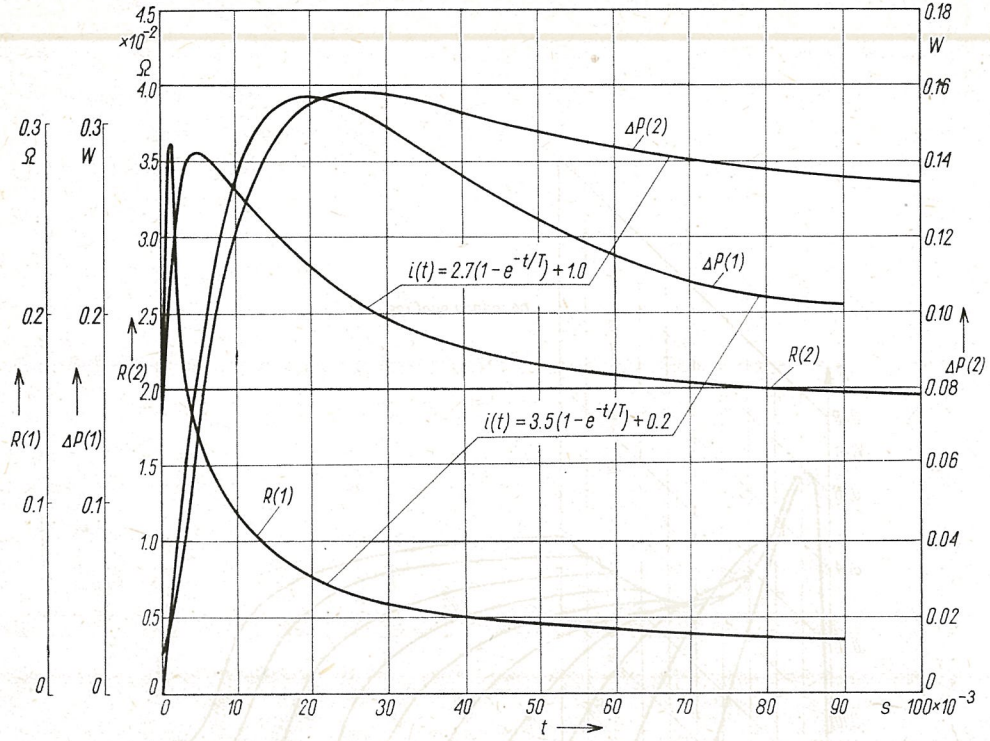


Fig. 8. The curves of losses $\Delta P(t)$ and substitute resistances $R(t)$ of ferromagnetic material in the case of accretion of current flowing through ferromagnetic material according to the function $i(t) = I_1 + I_2(1 - e^{-t/T})A$. The calculations have been made for the following values: time-constant of course of $i(t)$ $T = 10^{-2}$ s, $d = 0.05$ m, $h = 2 \cdot 10^{-4}$ m, $\Delta t = 10^{-5}$ s, $\Delta x = 10^{-3}$ m, $\gamma = 5.44 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}}$, μ_d = variable

: $T = 10^{-2}$ s have been assumed for the purpose of calculations. The curves of electric field $E(x, t)$ distributions for the case of current accretion (fig. 9a) and decay (fig. 9b) testify to that transient processes last much longer (their duration is several times longer) in the case of current decay in ferromagnetic material. Field exists of the ferromagnetic material, while on the surface the electric field strength equals zero. This process has its representation in magnetic field $H(x, t)$ courses (fig. 10a, 10b), and in induction $B(x, t)$ (fig. 11a, 11b). In the case of current flowing in ferromagnetic material, magnetic field $H(x, t)$ (fig. 10a) nad induction $B(x, t)$ (fig. 11a) on the surface increase according to exponential function. For stationary processes, magnetic field distributions along variable x are linear functions. In the case of current decay, the changes of magnetic field strength and of induction on the surface of the ferromagnetic material can be approximated with the following formulae:

$$H(0, t) = H(0, 0)e^{-k_1 \cdot t} \tag{17}$$

$$B(0, t) = B(0, 0)e^{-k_2 \cdot t}, \tag{18}$$

where: k_1, k_2 — constants.

Example 2: Analysis of the coureses of dynamic inductances of the ferromagnetic material $L_d(t)$.

The analysis of the courses of dynamic inductances $L_d(t)$ has been made for an aperiodical change in time (according to function $E(0, t) = E_{ust}(1-e^{-t/T})$) of the vector of electric field tangent with the surface of the ferromagnetic material. Calculation for spatial-temporal distributions of electric field $E(x, t)$ with the assumption that only the current flowing in ferromagnetic material is known, requires the use of procedures of iterative choice for boundary condition $E(0, t)$. The assumed error of current representation causes that function $E(0, t)$ is not sufficiently smooth, while inductanees $L_d(t)$ are calculated with some error. Calculations of dynamic inductances $L_d(t)$, in order to eliminate this error, have been made on the basis of spatial-temporal distributions of electric field $E(x, t)$ obtained in result of solving differential equation (1), for a known boundary condition $E(0, t)$.

Figures 12 ($T = 10^{-2}$ s) and 13 ($T = 10^{-3}$ s) present the courses of inductance $L_d(t)$ in time function for various value d. Calculations have been made for a medium of linear magnetic properties $\left(\mu_d = 1.18 \cdot 10^{-5} \frac{H}{m}\right)$, the ferromagnetic material and the vector of electric field strength, tangent with the surface and changing in time according to function $E(0, t) = 0.0735\ (1-e^{-t/T})$, are known.

Inductance curves are monotone and smooth functions for various course $E(0, t)$ time-constants. While analysing curves $L_d(t)$, it has been found that inductances reach stationary values quicker for smaller widths of conductor d (cf. fig. 13 — curves $L_d(t)$ for $d = 0.025$ and $d = 0.05$ m). It results from the fact that transient processes in electromagnetic field decay quicker for smaller d.

In order to determine the changes of inductance $L_d(t)$ in time during the flow of alternating current through the ferromagnetic material (μ_d = variable), calculations of electromagnetic field distributions have been made for the known function $E(0, t) = 0.0735\ (1-e^{-t/T})$ $T = 10^{-2}$ s and $T = 10^{-3}$ s), and for various values of parameter d. The results of calculations, in the form of curves, are presented in figures 14 ($T = 10^{-2}$ s) and 15 ($T = 10^{-2}$ s). It has been found that curves $L_d(t)$ are oscillatory functions. Inductances gain stationary values in shorter time for smaller d. Comparing curves $L_d(t)$ for $d = 0.025$ m in fig. 14 ($T = 10^{-2}$ s) and 16 ($T = 10^{-3}$ s), it has been found that the quantity of oscillation in courses $L_d(t)$ is bigger for less time-constants. It is necessary to explain oscillations in inductance courses by pointing to the fact that during current flow in nonlinear medium, electric field distributions for coordinate x change their shape (from exponential to convec functions (according to time (see fig. 9a). This causes that current is not a sufficiently smooth function, which finds its representation in courses $L_d(t)$ (formula 15). On the other hand, electric field distributions along variable x are, for linear medium, exponential functions for any chosen moment of time.

Example 3: The analysis of substitute resistance of ferromagnetic material $R(t)$.

The analysis of $R(t)$ courses has been made for an aperiodical change in time of electric field $E(0, t)$ strength on the surface during the current flow through the ferromagnetic material. It has been found that resistance $R(t)$ depends in the below mentioned factors

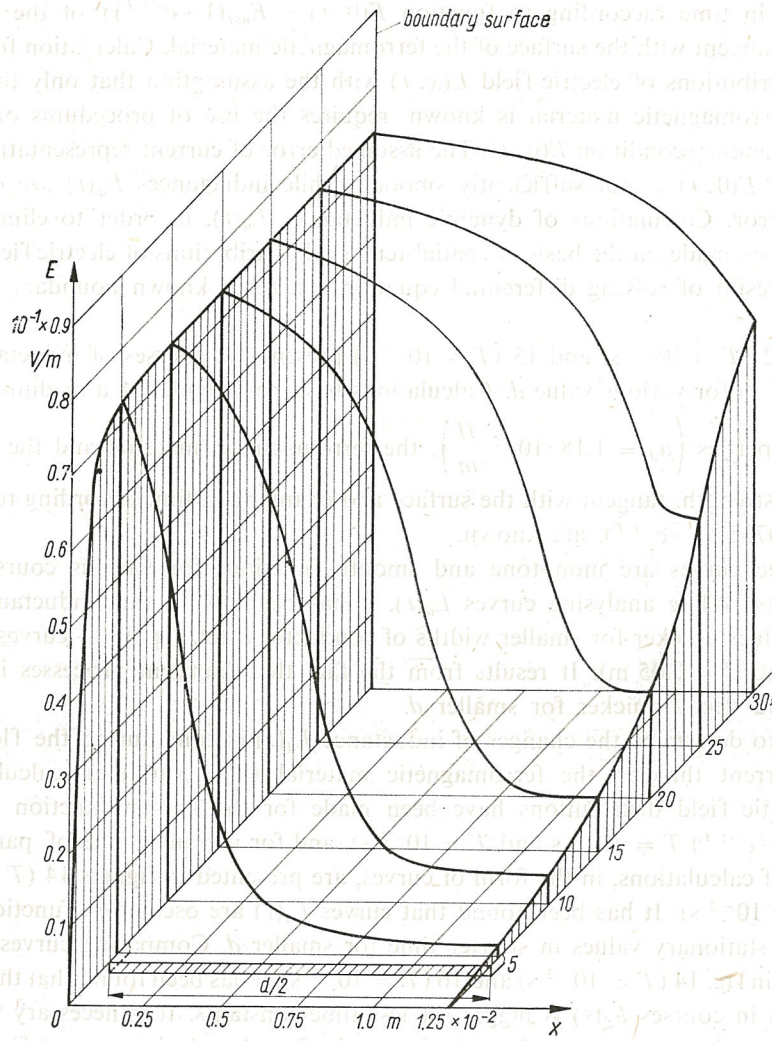


Fig. 9a. The spatial — temporal distributions of electric field $E(x, t)$ in the case of a flow of the electric current through ferromagnetic material. The electric field strength increases according to the function $E(0, t) = E(d, t) = 0.0735(1-e^{-t/T})\frac{\text{V}}{\text{m}}$ on the boundary surfaces. The calculations have been made for the following values: time-constant of course of $E(0, t)$ $T = 10^{-2}$ s, $d = 0.025$ m, $h = 2\cdot10^{-4}$ m,

$$\Delta t = 10^{-5}\text{ s},\ \Delta x = 5\cdot10^{-4}\text{ m},\ \gamma = 5.44\cdot10^{6}\frac{\text{S}}{\text{m}},\ \mu_d = \text{variable}$$

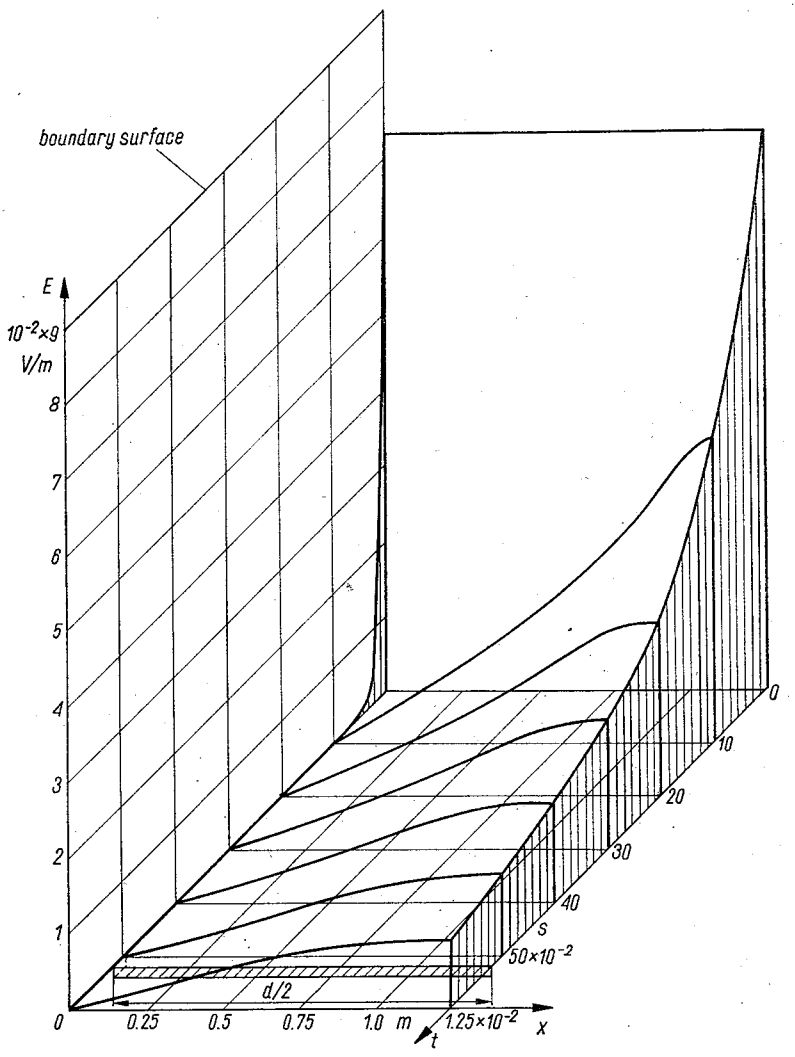


Fig. 9b. The spatial — temporal distributions of electric field $E(x, t)$ in the case of a flow of the electric current through ferromagnetic material. The electric field strength decreases according to the function $E(0, t) = E(d, t) = 0.0735(1-e^{-t/T})$ on the boundary surfaces. The calculations have been made for the following values: time-constant of courses of $E(0, t)$ $T = 10^{-2}$ s, $d = 0.025$ m, $h = 2 \cdot 10^{-4}$ m, $\Delta t = 10^{-5}$ s,

$$\Delta x = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}, \quad \gamma = 5.44 \cdot 10^{6} \frac{\text{S}}{\text{m}}, \quad \mu_d = \text{variable}$$

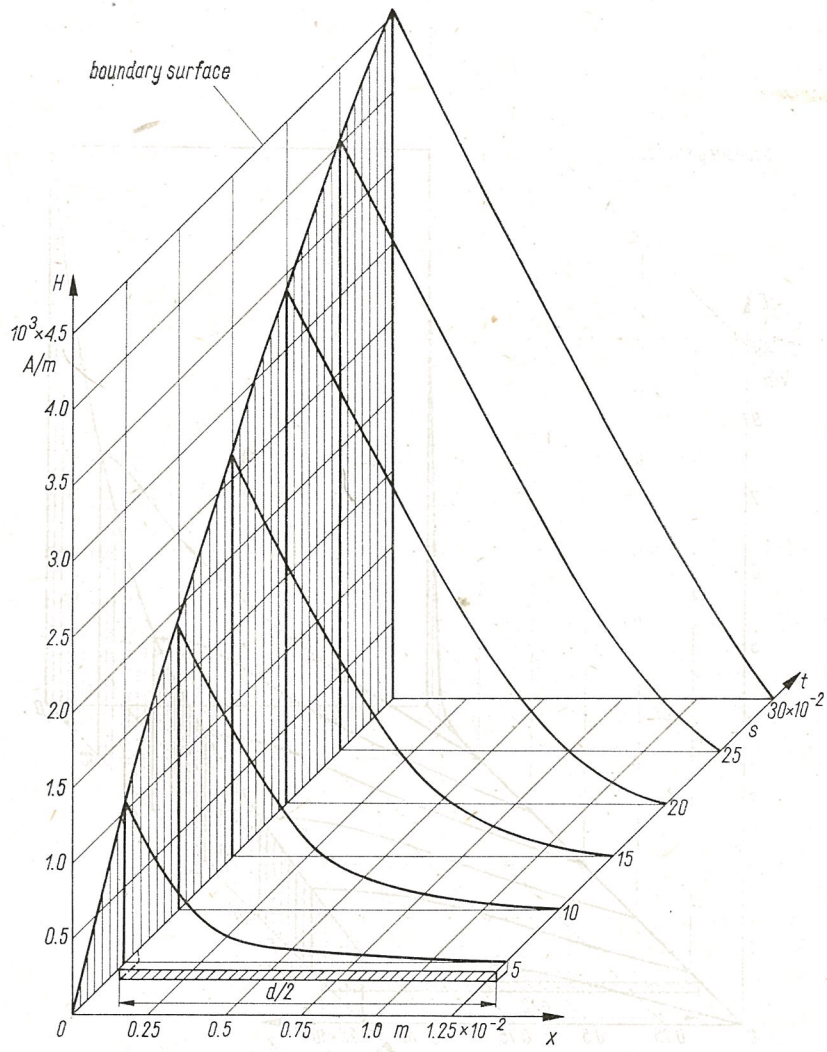


Fig. 10a. The spatial — temporal distributions of magnetic field $H(x, t)$ in the case of a flow of the electric current through ferromagnetic material. The electric strength increases according to the function $E(0, t) = E(d, t) = 0.0735 \cdot (1 - e^{-t/T}) \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ on the boundary surfaces. The calculations have been made for the following values: time-constant of course of $E(0, t)$ $T = 10^{-2}$ s, $d = 0.025$ m, $h = 2 \cdot 10^{-4}$ m, $\Delta t = 10^{-5}$ s, $\Delta x = 5 \cdot 10^{-4}$ m, $\gamma = 5.44 \cdot 10^{6} \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$, μ_d = variable

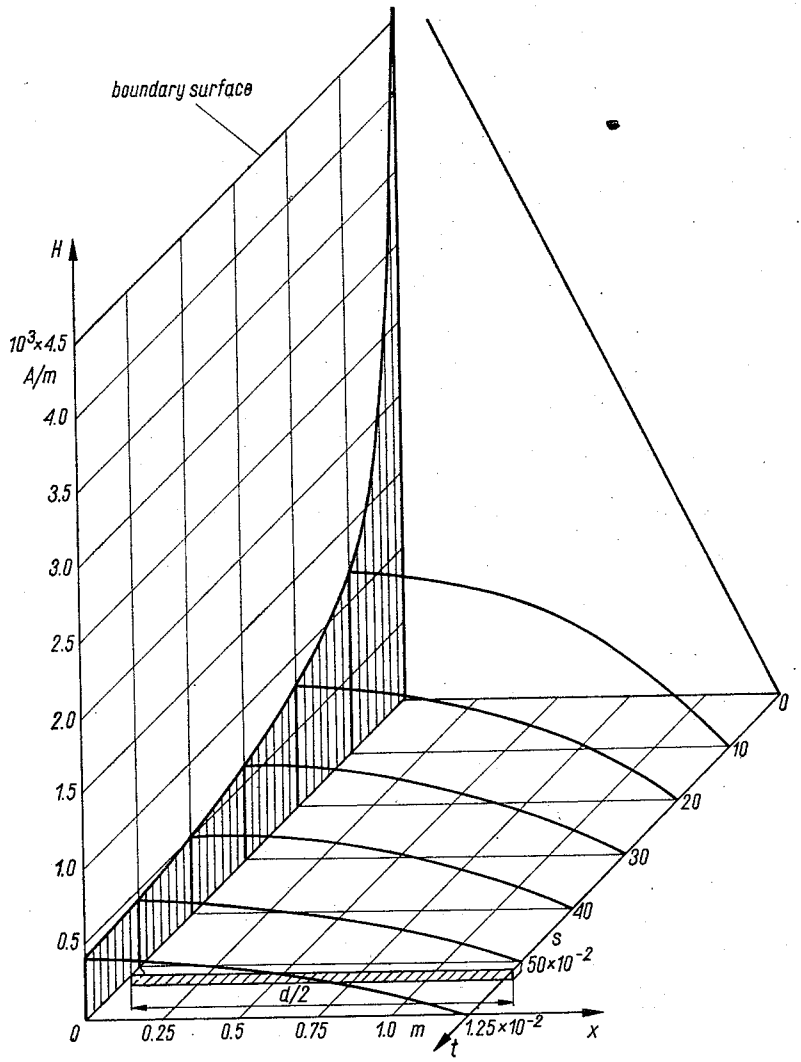


Fig. 10b. The spatial — temporal distributions of magnetic field $H(x, t)$ in the case of a flow of the electric current through ferromagnetic material. The electric field strength decreases according to the function $E(0, t) = E(d, t) = 0.0735(1 - e^{-t/T}) \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ on the boudary surfaces. The calculations have been made for the following values: time-constant of course of $E(0, t)$ $T = 10^{-2}$ s, $d = 0.025$ m, $h = 2 \cdot 10^{-4}$ m, $\Delta t = 10^{-5}$ s, $\Delta x = 5 \cdot 10^{-4}$ m, $\gamma = 5.44 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$, μ_d = variable

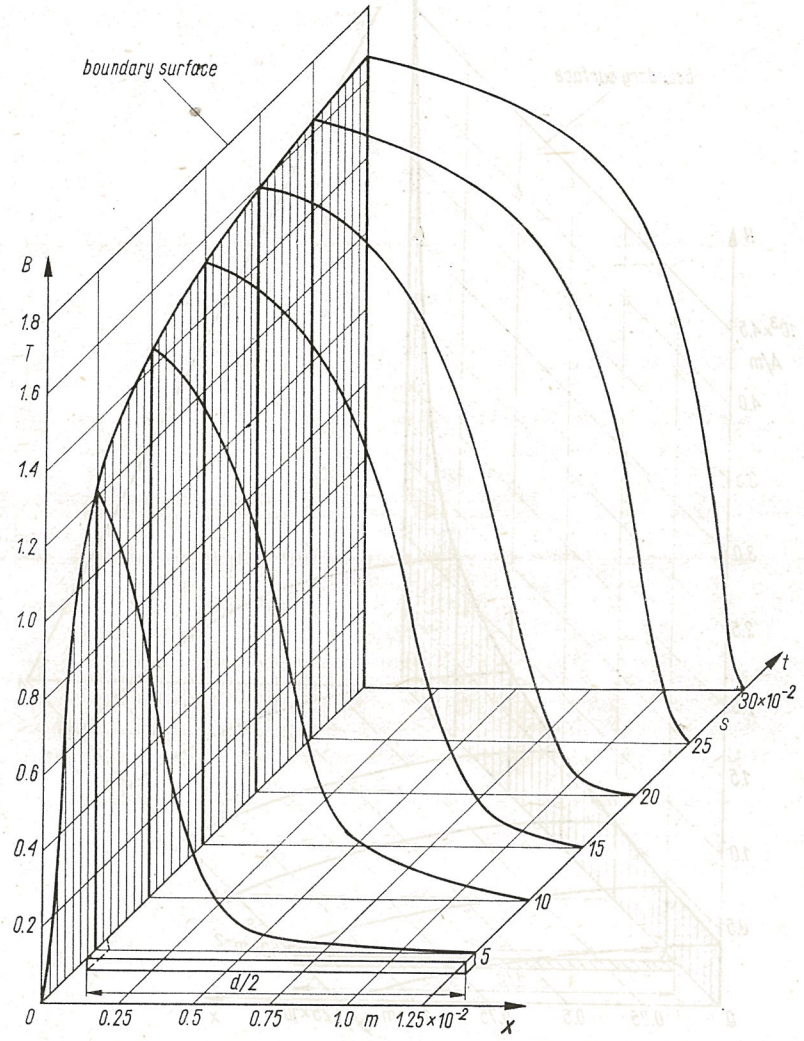


Fig. 11a. The spatial — temporal distributions of induction $B(x, t)$ in the case of a flow of the electric current through ferromagnetic material. The electric field strength increases according to the function $E(0, t) = E(d, t) = 0.0735(1 - e^{-t/T})\frac{\text{V}}{\text{m}}$ on the boundary surfaces. The calculations have been made for the following values: time-constant of course of $E(0, t)$ $T = 10^{-2}$ s, $d = 0.025$ m, $h = 2 \cdot 10^{-4}$ m, $\Delta t = 10^{-5}$ s, $\Delta x = 5 \cdot 10^{-4}$ m, $\gamma = 5.44 \cdot 10^{6} \frac{\text{S}}{\text{m}}$, μ_d = variable

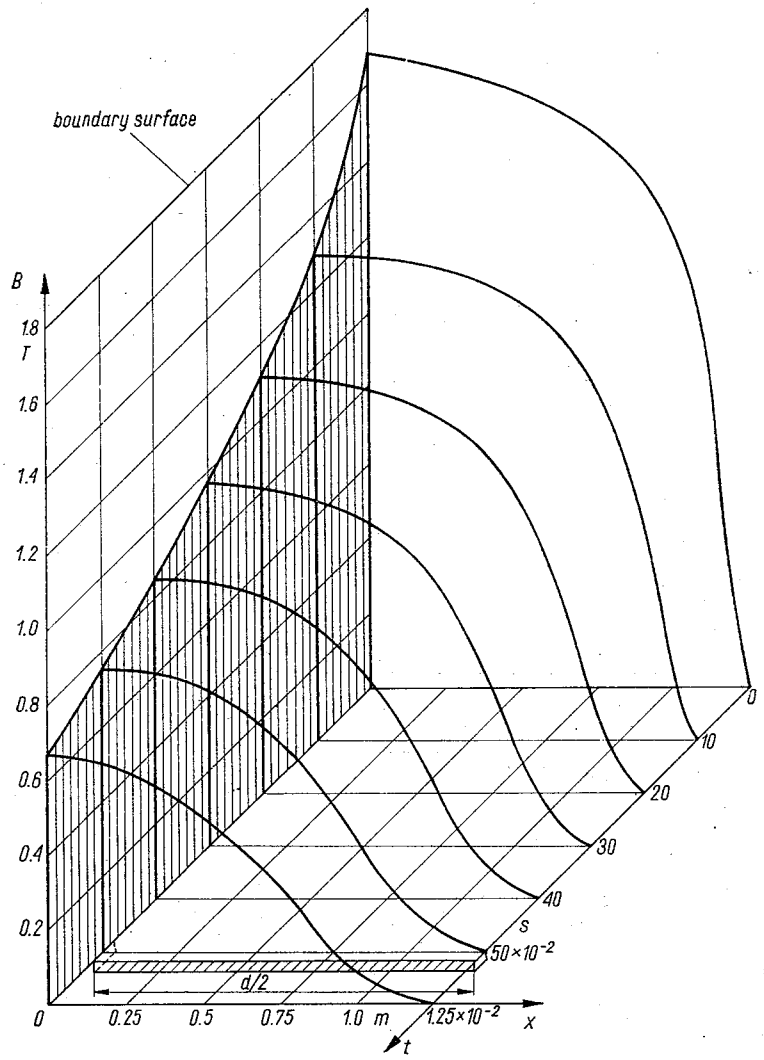


Fig. 11b. The spatial — temporal distributions of induction $B(x, t)$ in the case of a flow of the electric current through ferromagnetic material. The electric field strength decreases according to the function $E(0, t) = E(d, t) = 0.0735 \cdot e^{-t/T} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ on the boundary surfaces. The calculations have been made for the following values: time-constant of course of $E(0, t)$ $T = 10^{-2}$ s, $d = 0.025$ m, $h = 2 \cdot 10^{-4}$ m, $\Delta t = 10^{-5}$ s,

$$\Delta x = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}, \quad \gamma = 5.44 \cdot 10^{6} \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}, \quad \mu_d = \text{variable}$$

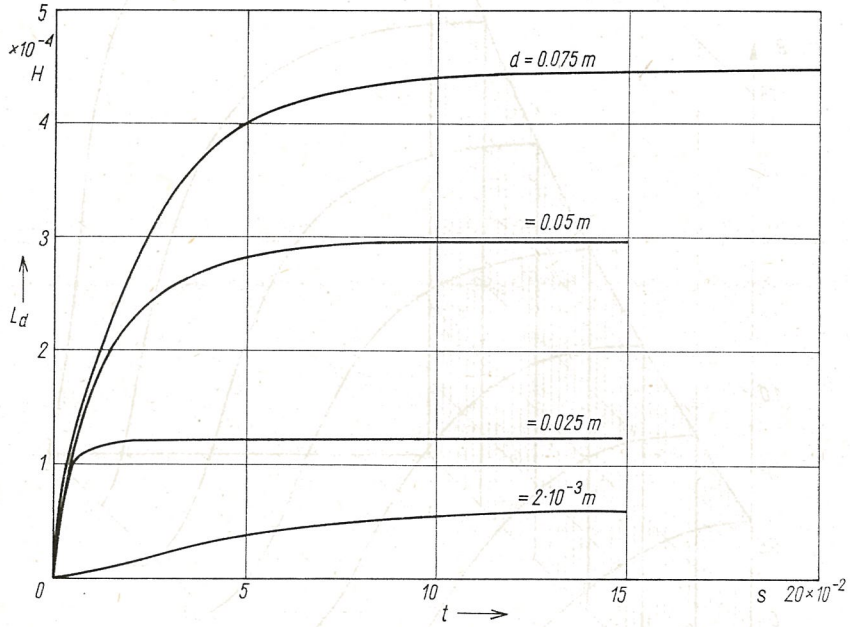


Fig. 12. The curves of dynamic inductances $L_d(t)$ of ferromagnetic material in the case of a flow of the electric current through ferromagnetic material. The electric strength increases according to the function $E(0, t) = E(d, t) = 0.0735 \cdot (1 - e^{-t/T}) \frac{\text{V}}{\text{m}}$ on the boundary surfaces. The calculations have been made for the following values: time-constant of course of $E(0, t)$ $T = 10^{-2}$ s, $h = 2 \cdot 10^{-4}$ m, $\Delta t = 10^{-5}$ s, $\gamma = 5.44 \cdot 10^{6} \frac{\text{S}}{\text{m}}$, $\mu_d = 1.18 \cdot 10^{-5} \frac{\text{H}}{\text{m}}$

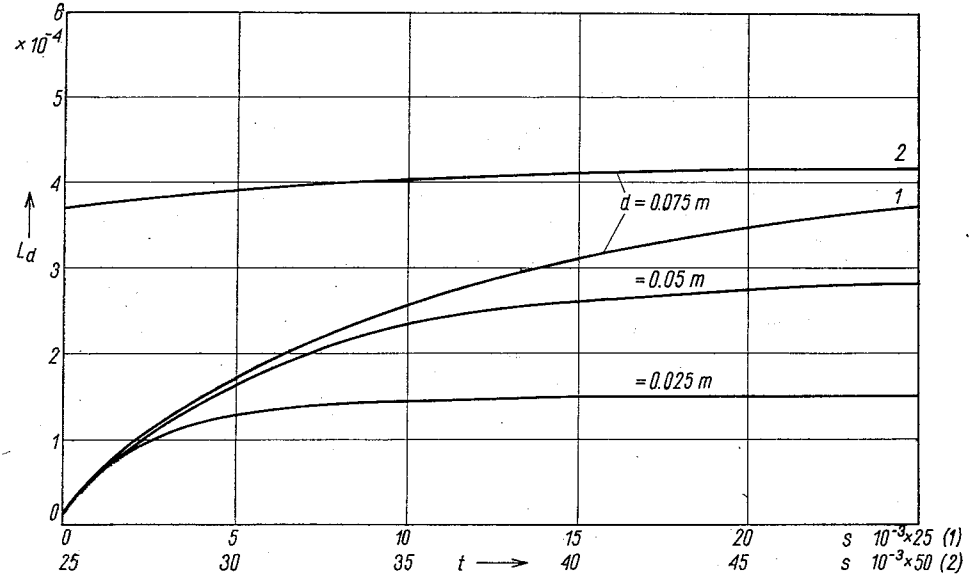


Fig. 13. The curves of dynamic inductances $L_a(t)$ of ferromagnetic material in the case of a flow of the electric current through ferromagnetic material. The electric field strength increases according to the function $E(0, t) = E(d, t) = 0.0735 \cdot (1 - e^{t/T}) \frac{\text{V}}{\text{m}}$ on the boundary surfaces. The calculations have been made for the following values: time-constant of course of $E(0, t)$ $T = 10^{-3}$ s, $h = 2 \cdot 10^{-4}$ m, $\Delta t = 10^{-6}$ s,

$$\gamma = 5.44 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}}, \quad \mu_d = 1.18 \cdot 10^{-5} \frac{\text{H}}{\text{m}}$$

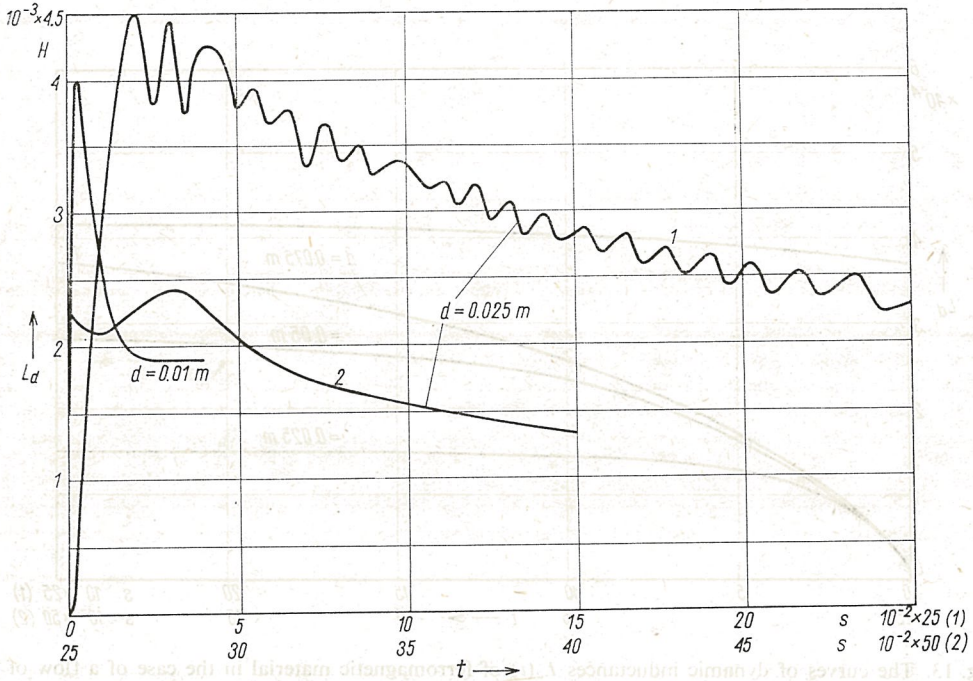


Fig. 14. The curves of dynamic inductances of ferromagnetic material $L_d(t)$ in the case of a flow of the electric current through ferromagnetic material. The electric field strength increases according to the function $E(0, t) = E(d, t) = 0.0735 \cdot (1 - e^{-t/T}) \frac{\text{V}}{\text{m}}$ on the boundary surfaces. The calculations have been made for the following values: time-constant of course of $E(0, t)$ $T = 10^{-2}$ s, $h = 2 \cdot 10^{-4}$ m, $\Delta t = 10^{-5}$ s,

$$\gamma = 5.44 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}}, \quad \mu_d = \text{variable}$$

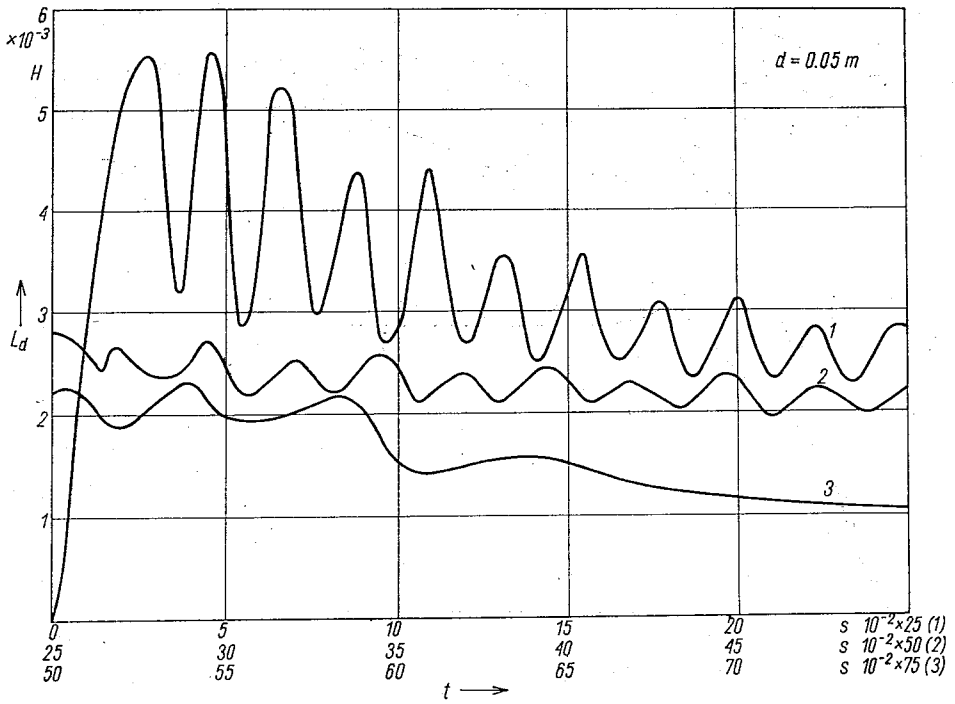


Fig. 15. The curve of dynamic inductance $L_d(t)$ of ferromagnetic material in the case of a flow of the electric current through ferromagnetic material. The electric field strength increases according to the function $E(0, t) = E(d, t) = 0.0735 \cdot (1 - e^{-t/T}) \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ on the boundary surfaces. The calculations have been made for the following values: time-constant of course of $E(0, t)$ $T = 10^{-2}$ s, $d = 0.05$ m, $h = 2 \cdot 10^{-4}$ m,

$$\Delta t = 10^{-5} \text{ s}, \quad \Delta x = 10^{-3} \text{ m}, \quad \gamma = 5.44 \cdot 10^{6} \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}, \quad \mu_d = \text{variable}$$

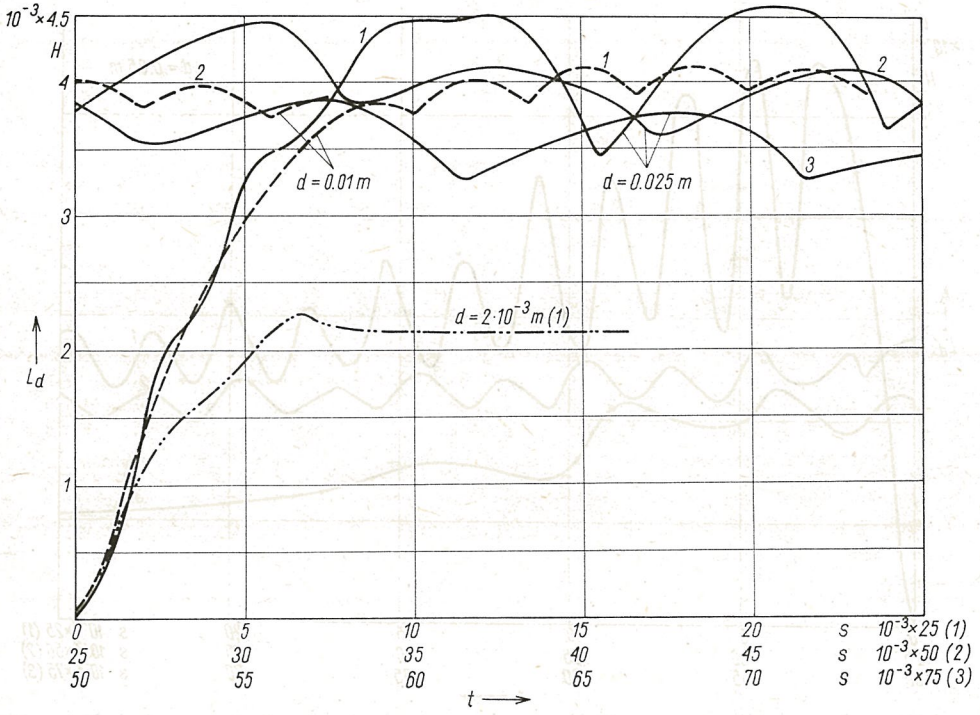


Fig. 16. The curves of dynamic inductances $L_d(t)$ of ferromagnetic material in the case of a flow of the electric current through ferromagnetic material. The electric field strength increases according to the function $E(0, t) = E(d, t) = 0.0735 \cdot (1 - e^{-t/T}) \frac{\text{V}}{\text{m}}$ on the boundary surfaces. The calculations have been made for the following values: time-constant of course of $E(0, t)$ $T = 10^{-3}$ s, $h = 2 \cdot 10^{-4}$ m, $\Delta t = 10^{-6}$ s,

$$\gamma = 5.44 \cdot 10^{6} \frac{\text{S}}{\text{m}}, \quad \mu_d = \text{variable}$$

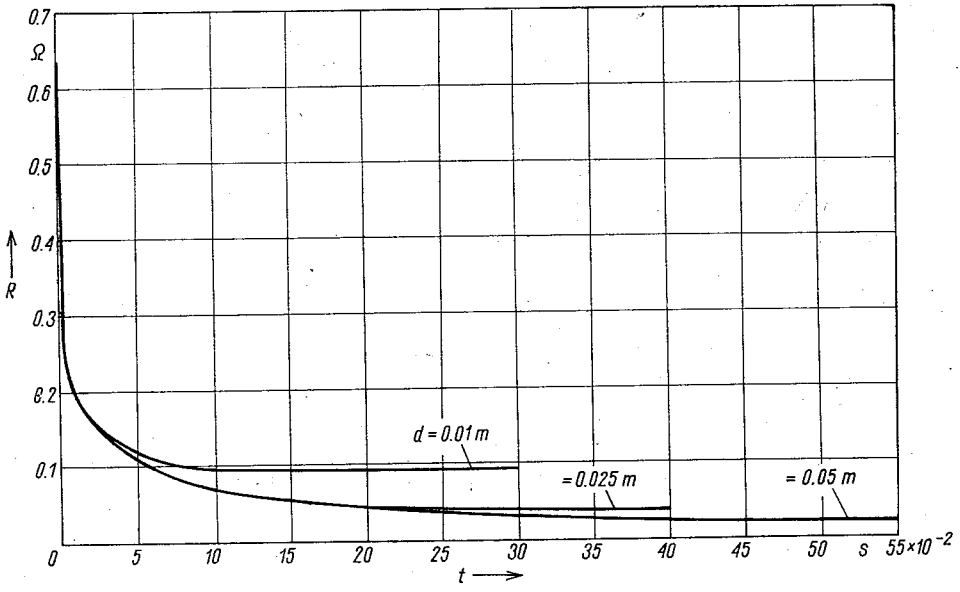


Fig. 17a. The curves of substitute resistances $R(t)$ in the case of a flow of the electric current through ferromagnetic material. The electric field strength increases according to the function $E(0, t) = E(d, t) = 0.0735 \cdot (1 - e^{-t/T}) \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ on the boundary surfaces. The calculations have been made for the following values: time-constant of course of $E(0, t)$ $T = 10^{-2}$ s, $h = 2 \cdot 10^{-4}$ m, $\Delta t = 10^{-5}$ s, $\gamma = 5.44 \cdot 10^{6} \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$, μ_d = variable

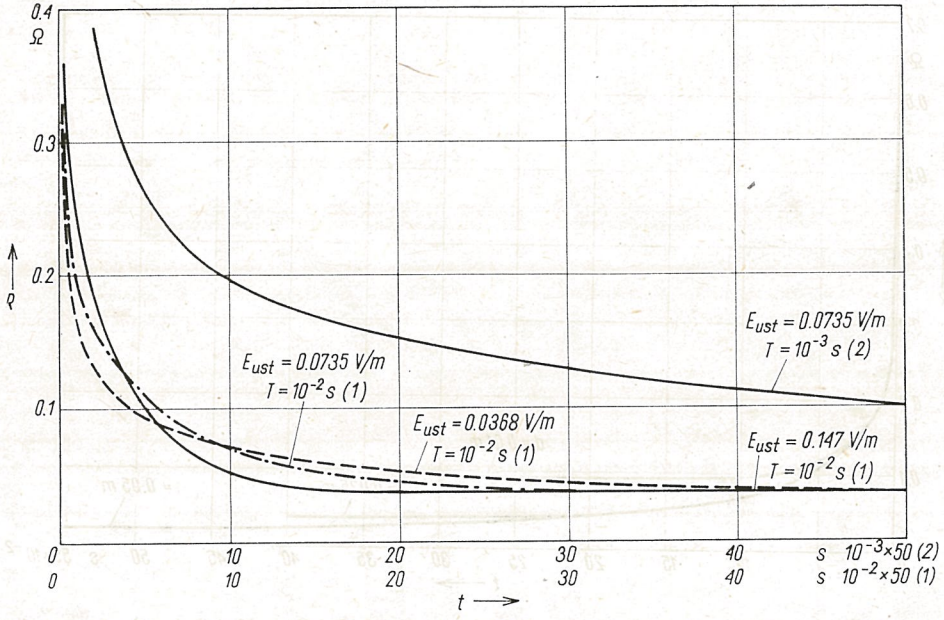


Fig. 17b. The curves of substitute resistances $R(t)$ in the case of a flow of the electric current through ferromagnetic material. The electric field strength increases according to the function $E(0, t) = E(d, t) = E_{ust}(1-e^{-t/T})\frac{\text{V}}{\text{m}}$ on the boundary surfaces. The calculations have been made for the following values: time-constant of course of $E(0, t)$ $T = 10^{-2}$ s ($\Delta t = 10^{-5}$ s) and $T = 10^{-3}$ ($\Delta t = 10^{-6}$ s), $d = 0.025$ m, $h = 2 \cdot 10^{-4}$ m, $\Delta x = 5 \cdot 10^{-4}$ m, $\gamma = 5.44 \cdot 10^{6} \frac{\text{S}}{\text{m}}$, μ_d = variable

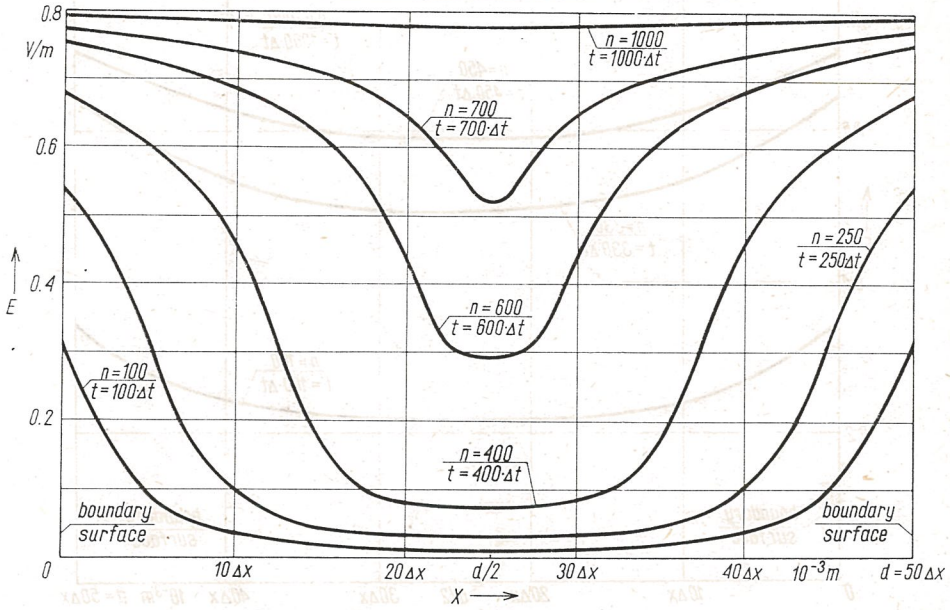


Fig. 18a. The spatial — temporal distributions of electric field $E(x, t)$ in the case of a falling plane wave on the ferromagnetic material. The electric field strength increases according to the function $E(0, t) = E(d, t) = 0.794 \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ on the boundary surfaces. The calculations have been made for the following values: time-constant of course of $E(0, t)$ $T = 10^{-3}$ s, breadth $d = 2.3 \cdot 10^{-3}$ m, height $h = 0.1$ m, $\Delta t = 10^{-6}$ s, $\Delta x = 4.6 \cdot 10^{-5}$ m, $\gamma = 5.44 \cdot 10^{6} \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$, μ_d = variable

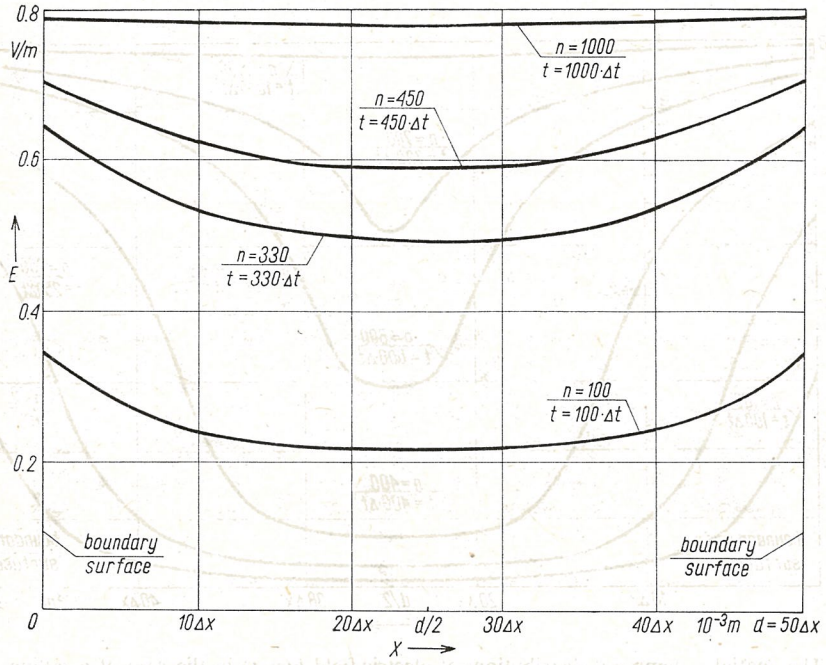


Fig. 18b. The spatial — temporal distributions of electric field $E(x, t)$ in the case of a falling plane wave on the ferromagnetic material. The electric field strength increases according to the function $E(0, t) = E(d, t) = 0.794 \cdot (1 - e^{-t/T}) \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ on the boundary surfaces. The calculations have been made for the following values: time-constant of course of $E(0, t)$ $T = 10^{-3}$ s, breadth $d = 2.3 \cdot 10^{-3}$ m, height $h = 0.1$ m, $\Delta t = 10^{-6}$ s, $\Delta x = 4.6 \cdot 10^{-5}$ m, $\gamma = 5.44 \cdot 10^{6} \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}$, μ_d = variable

in the following way: for the same values E_{ust} and T in the case of various widths d of ferromagnetic material, stationary values of resistance $R(t)$ are bigger for less d (fig. 17a $T = 10^{-2}$ s). Comparing instananeous values of resistance $R(t)$ for various time-constant T, it has been found that the values of resistance for any chosen moment of time t_n are bigger for less T (see the curves in fig. 17b for $T = 10^{-2}$ s and $T = 10^{-3}$ s).

2.3. Transient Electromagnetic Field in Ferromagnetic Material for a Known Electric Field Strength on the Surface

In this chapter, the transient electromagnetic field distributions have been analysed for a plane wave falling on the ferromagnetic material. Calculations have been made for boundary conditions changing in time to function $E(0, t) = E(d, t) = E_{ust}\ (1 - e^{-t/T})$.

Example 1: Analysis of transient processes in ferromagnetic material as a function of conductivity and changes of ferromagnetic material.

The calculations of electric field distributions have been made for width $d = 2.3 \cdot 10^{-3}$ m, stationary value of electric field strength $E_{ust} = 0.794 \frac{\text{V}}{\text{m}}$, and for course $E(0, t)$ time-constant $T = 10^{-3}$ s. The curves of electric field $E(x, t)$ distribution for conductivity $\gamma_1 = 5.44 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ are presented in fig. 18a, while those for $\gamma_2 = 0.544 \cdot 10^6 \frac{\text{S}}{\text{m}}$ — in fig. 18b. It has been found that for less value of coductivity $\gamma_2 < \gamma_1$, transient processes decay quicker, while electric field distributions inside of the ferromagnetic material for any time t_n can be approximated by function:

$$E(x, t_n) = E(0, t_n) e^{-\frac{kx}{d/2}}, \tag{19}$$

where: k — *constant* (see the curves in fig. 18b), $x \in \left\langle 0, \frac{d}{2} \right\rangle$

The above phenomenon results from the fact of greater resistance of the ferromagnetic material, that is less intensive interaction of eddy currents in transient states.

3. CONCLUSION

On the basis of the analysis made, it is possible to find the influence of the change of conductivity γ, ferromagnetic material dimensions, type of medium (linear or non-linear), speed of function $E(0, t)$ accretion on the boundary of the area, and current $i(t)$, on the spatial-temporal distributions of electromagnetic field, losses, and substitute parameters of the ferromagnetic material. In a number of electric apparatus, the problem of electromagnetic field distribution can be reduced with great exactness to the problem of one-dimensional field. The results of analysis of electromagnetic field distributions in the case when plane wave falls on the ferromagnetic material and vector of electric field E tangent with the surface is known, can find their direct application in calculating chosen elements of electric apparatus magnetic circuits. The results obtained will be used

by the author in analysing transient two-dimensional fields of configuration resembling that of the real field configuration that occurs in electric apparatus. Combining of analytical methods and approximate (difference, finite elements, or boundary elements) methods is indispensable in examination of transient electromagnetic field in electric apparatus (with assumption that the real field in apparatus should be calculated as precisely as possible). The above condition results from the necessity of minimization of costs of calculation (time of calculation) on computers.

REFERENCES

1. B. Konorski, *Theoretical Electrotechnics* (in Polish), Technical University of Łódź, Łódź 1971.
2. L. R. Nejman, *Electromagnetic Field Theory* (in Russian), GEI, Leningrad—Moscow 1954.
3. R. Sikora, *Electromagnetic Field Theory* (in Polish), WNT, Warsaw 1977.
4. S. Wiak, *A Method of Calculation of Aperiodically Induced Electromagnetic Field in a Sector of Ferromagnetic Circuit* (in Polish), Technical University of Łódź, Elektryka vol. 52, 1977, pp. 11—37.
5. W. Wiak, *Calculating of Transient Electromagnetic Field in Ferromagnetic Materials* (in Polish), Ph. D. dissertation, Łódź 1979.
6. S. Wiak, *A Method of Calculation of Transient Electromagnetic Field in Non-Linear Ferromagnetic Medium*, Archiv für Elektrotechnik, 1985, nr 68, s. 113—120.

S. WIAK

ANALIZA PROCESOW PRZEJŚCIOWYCH POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO W NIELINIOWYM FERROMAGNETYCZNYM ŚRODOWISKU

Streszczenie

W artykule przedstawiono wyniki analizy niestacjonarnego pola elektromagnetycznego w ferromagnetykach dla rzeczywistej charakterystyki magnesowania i dowolnie zmieniających się warunków brzegowych. Obliczenia porównawcze wykonano dla pola jednowymiarowego. Określono wpływ przewodności γ, szybkości narastania pola elektrycznego $E(0, t)$ na powierzchni ferromagnetyka, szybkości zmian prądu płynącego w ferromagnetyku oraz wymiarów geometrycznych ferromagnetyka na rozkłady przestrzenno-czasowe pola elektromagnetycznego, strat $\Delta P(t)$ oraz parametrów zastępczych ferromagnetyka ($R(t)$ oraz indukcyjności zastępczej $L_d(t)$).

S. WIAK

ANALYSE DES PROCESSUS TRANSITOIRES DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE DANS LE MILIEU FERROMAGNÉTIQUE NON LINÉAIRE

Résumé

Dans l'article on a présenté les résultats de l'analyse du champ électromagnétique non stationnaire dans les ferromagnétiques pour la caractéristique d'aimantation réelle et les conditions aux limites arbitrairement variables. On a fait les calculs comparés pour le champ magnétique unidimensionnel. On a déterminé l'influence des variations de la conductibilité électrique γ, de la ritesse de croissance si sur la surface du ferromagnétique du champ electrique $E(0,t)$ de la vitesse des variations du courant dans le ferromagnétique et aussi des dimensions géométriques sur les répartitions spatiales et temporelles du champ électromagnétique, des pertes et des paramètres remplacantes du ferromagnétique [résistance $R(t)$ et l'inductance $L_d(t)$].

S. WIAK

PROZEßANALYSE EINES NICHTSTATIONÄREN ELEKTROMAGNETISCHEN FELDES IM NICHTLINEAREN FERROMAGNETISCHEN MEDIUM

Zusammenfassung

Im Artikel wurde eine Analyse des nichtstationären elektromagnetischen Feldes im ferromagnetischen Medium unter Berücksichtigung der wirklichen Magnetisierungskurven und der Zeitänderungen von Randbedingungen dargestellt. Vergleichsberechnungen wurden für ein eindimensionales elektromagnetisches Feld angefertigt. Es wurde der Einfluß der Randbedingungen auf die zeiträumlichen Verteilungen des elektromagnetischen Feldes and die Ersatzparameter des ferromagnetischen Mediums geprüft.

С. ВЯК

АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В НЕЛИНЕЙНОМ ФЕРРОМАГНЕТИКЕ

Резюме

Представлены результаты анализа нестационарного электромагнитного поля в ферромагнетиках для статической характеристики намагничивания и произвольно изменяющих краевых задач.

Вычисления выполнены для одномерного электромагнитного поля.

Определено вдияние изменения проводимости γ, скорости изменения электрического поля $E(0, t)$ на поверхности ферромагнетика, скорости изменения тока в ферромагнетике и размеров ферромагнетика на временно-пространственное распределение электромагнитного поля, индуктивности $L_d(t)$ и активного сопротивления $R(t)$ ферромагнетика.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1986, 32, z. 1, ss. 151-171

621.314.222.6

Zastosowanie równań całkowych do obliczania rozkładu pola elektromagnetycznego w transformatorach dużych mocy

STANISŁAW APANASEWICZ (RZESZÓW)
Zakład Elektrodynamiki Politechniki Rzeszowskiej

Otrzymano 27.11.1984

W przedstawionej pracy opisano metodę obliczania rozkładu trójwymiarowego pola elektromagnetycznego przy założeniach upraszczających możliwych do przyjęcia w rzeczywistych transformatorach dużej mocy. Rozwiązanie równań Maxwella zredukowano do rozwiązania jednego równania Laplacea w obszarze dielektrycznym.

Wpływy prądów wirowych w obszarach metalowych uwzględniono w warunkach brzegowych typu Leontowicza. Równanie Laplacea jest rozwiązywane w oparciu o układ trzech równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju; opisany jest algorytm rozwiązania tego układu.

1. CEL PRACY

Celem niniejszego artykułu jest dosyć szczegółowy opis opartej, o układ równań całkowych, metody obliczania rozkładu trójwymiarowego pola elektromagnetycznego wewnątrz transformatorów dużych mocy. Problem polowy jest rozpatrywany w przybliżeniu liniowym i jako taki, przy dowolnej geometrii układu, może być rozwiązany przy stosowaniu wielu znanych metod numerycznych (np. metody różnicowe lub wariacyjne) o ile się ma do dyspozycji maszynę cyfrową o dostatecznej pamięci i szybko liczącą. Warunków tych nie spełniają najczęściej stosowane w kraju ODRY i RIADY i opracowując odpowiednie metody obliczeń należy stosować się do ich możliwości.

Myślą przewodnią pracy jest spełnienie dwóch warunków: a) przyjęcie uproszczeń w równaniach Maxwella i geometrii układu takich, któreby można uznać za całkowicie uzasadnione w rzeczywistych transformatorach; b) odpowiedni algorytm może być zrealizowany na wymienionych maszynach cyfrowych. Dzięki zastosowaniu różnych uproszczeń układ równań Maxwella został zredukowany do jednego równania Laplacea w obszarze niemetalowym; wpływ głównych elementów metalowych uwzględnia się w warunkach brzegowych, które są dość złożone. Jedyna nieznana funkcja przedstawiona jest w postaci sumy potencjałów warstwy pojedynczej i podwójnej, a dla odpowiednich funkcji podcałkowych (gęstość potencjałów) wyprowadzono układ równań całkowych typu Fredholma drugiego rodzaju. Nieznane funkcje są określane tylko na powierzchniach metalowych

i potrzebna jest mniejsza pamięć maszyny na ich obliczenie, niż miałoby to miejsce w przypadku funkcji określonych w całym obszarze (dielektrycznym i metalowym).

Zaprezentowano również sposób rozwiązania wyprowadzonego układu równań całkowych.

2. MODEL MATEMATYCZNY

2.1. Ogólne założenia

W celu łatwiejszego i szybszego rozwiązania równań Maxwella przyjmujemy możliwe z punktu widzenia potrzeb technicznych następujące uproszczenia:

1) Pomija się prądy przesunięcia i zakłada się, że proces jest quasistacjonarny w czasie; nie uwzględnia się zatem stanów przejściowych a wyłącznie stany pracy znamionowej.

2) Parametry materiałowe takie jak przewodność elektryczna i przenikalność magnetyczna są stałe; ograniczamy się zatem do rozpatrywania zagadnień w ujęciu liniowym.

3) Promień krzywizny powierzchni kadzi i innych rozpatrywanych metalowych elementów konstrukcyjnych jest duży w porównaniu z głębokością wnikania pola elektromagnetycznego. Założenie to realizuje się w praktyce i pozwala na istotne uproszczenie struktury matematycznej pola w metalu — sprowadzenie zakrzywionych obszarów do spłaszczonych, a następnie również do uwzględniania wpływu obszarów metalowych tylko w warunkach brzegowych [2, 3, 4[.

4) Prądy wzbudzające są sinusoidalnie zmienne i płyną po nieskończenie cienkich przewodach lub powierzchniach (pomijane są prądy wirowe w tych przewodach). W niniejszej pracy zakładamy, dla łatwości obliczeń, że trójfazowe prądy wzbudzające płyną po powierzchniach walcowych (po okręgach).

Pole jakie one wytwarzają przy nieobecności innych ciał w otoczeniu można obliczać wg metody opisanej w tej pracy lub stosując wzory Biotta-Savarta [5].

5) Przenikalność magnetyczna rdzenia jest nieskończona (idealny ferromagnetyk) a ścian kadzi i belek jarzmowych skończona.

6) Położenia ścian kadzi, rdzenia, belek i uzwojeń są symetryczne pod względem trzech ortogonalnych płaszczyzn przechodzących przez środek środkowej kolumny rdzenia. Dzięki temu założeniu można ograniczyć się do rozpatrywania pola tylko w jednej ósmej części kadzi.

7) Rozpatrywany jest transformator, w którym:

a) boczna powierzchnia kadzi jest utworzona z dwóch powierzchni płaskich i dwóch walcowych, a górna i dolna — z powierzchni walcowych i kulistych;

b) nie uwzględnia się warstwy izolacji między powierzchnią boczną a górną ściąna kadzi;

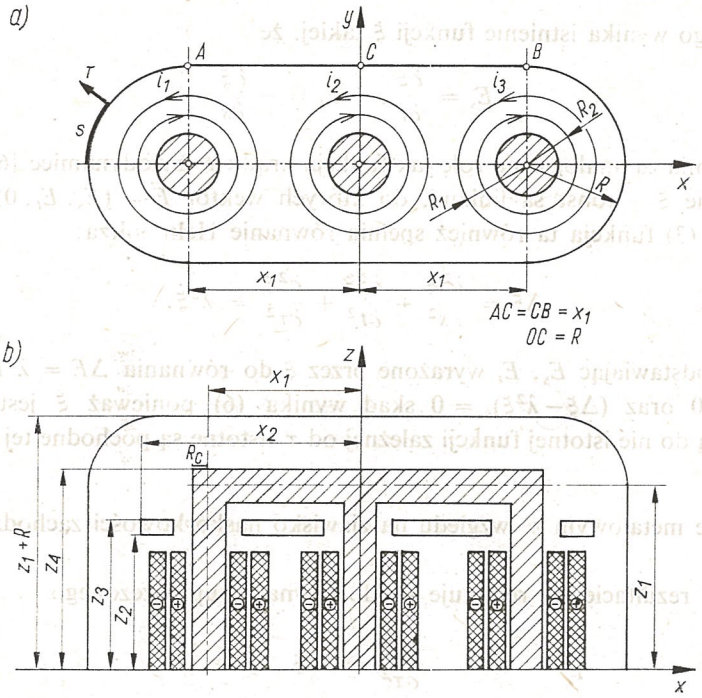
c) rdzeń ferromagnetyczny (trójkolumnowy) posiada powierzchnie walcowe; powierzchnie belek są płaszczyznami.

8) Pomija się wpływ odpływów wielkoprądowych. Uwzględnienie ich zbyt silnie skomplikowałoby obliczenia i bez tego bardzo złożone. Charakter geometrii transformatora ilustrują załączone rysunki. Przy spełnieniu tych warunków układ równań Maxwella

redukuje się do układu następującego:

$$rot\vec{B} = \begin{cases} 0 & \text{w obszarze dielektrycznym} \\ \mu\gamma\vec{E} & \text{w obszarze metalowym} \end{cases} \tag{1}$$

$$rot\vec{E} = -j\omega\vec{B}, \quad div\vec{E} = 0, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}, \quad \vec{J} = \gamma\vec{E} \tag{2}$$



Rys. 1. Schematyczny przekrój transformatora; a) płaszczyzna $z = 0$, b) półpłaszczyzna $y = 0$, $z \geqslant 0$

lub [5]:

$$\Delta\vec{B} = \lambda^2\vec{B}, \quad \Delta\vec{E} = \lambda^2\vec{E}, \quad \lambda^2 = j\omega\mu\gamma \tag{3}$$

W równaniach tych: $\vec{B}, \vec{E}, \vec{H}, \vec{J}$ — zespolone amplitudy odpowiednio indukcji magnetycznej, natężenia pola elektrycznego i magnetycznego oraz gęstości prądu elektrycznego; ω — pulsacja prądu; μ — przenikalność magnetyczna; γ — przewodność elektryczna; $j^2 = -1$.

2.2. Charakter pola elektromagnetycznego w obszarze metalowym

Wprowadzamy krzywoliniowy ortogonalny układ współrzędnych (s, t, τ) w obszarze metalowym (s, t — wzdłuż powierzchni granicznej, τ — prostopadle do niej). W rozpatrywanym przypadku podane są zależności między tymi współrzędnymi a współrzędnymi kartezjańskimi (wzory (26)—(33)). Wtedy przy poczynionym założeniu o krzywiźnie powierzchni elementów metalowych mamy do czynienia ze zjawiskiem naskórkowości

i układ (s, t, τ) można traktować jako kartezjański [4]. Prowadzi to do odrzucenia składowej normalnej natężenia pola elektrycznego (ponieważ spełnia ona równanie Helmholza (3) i zeruje się na powierzchni i w nieskończoności). W ten sposób oznaczając przez E_s, E_t składowe styczne pola elektrycznego w kierunku osi s i t otrzymujemy:

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0 \equiv \frac{\partial E_s}{\partial s} + \frac{\partial E_t}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

Z równania tego wynika istnienie funkcji ξ takiej, że

$$E_s = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \qquad E_t = -\frac{\partial \xi}{\partial s} \tag{5}$$

Funkcja ξ spełnia tu analogiczną rolę jak funkcja prądu w gazodynamice [6]: dla zadanej wartości τ linie $\xi = \text{const}$ są liniami, do których wektor $\vec{E} = (E_s, E_t, 0)$ jest styczny. Na podstawie (3) funkcja ta również spełnia równanie Helmholtza:

$$\Delta\xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} = \lambda^2 \xi. \tag{6}$$

Istotnie, podstawiając E_s, E_t wyrażone przez ξ do równania $\Delta E = \lambda^2 E$, otrzymamy $(\Delta\xi - \lambda^2\xi)_t = 0$ oraz $(\Delta\xi - \lambda^2\xi)_s = 0$ skąd wynika (6) ponieważ ξ jest wyznaczalne z dokładnością do nie istotnej funkcji zależnej od τ (istotne są pochodne tej funkcji względem s i t.

W obszarze metalowym ze względu na zjawisko naskórkowości zachodzi $\frac{\partial}{\partial s} \ll \frac{\partial}{\partial \tau}$, $\frac{\partial}{\partial t} \ll \frac{\partial}{\partial \tau}$. W rezultacie (6) redukuje się do równania uproszczonego

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} = \lambda^2 \xi. \tag{7}$$

Następujące rozumowanie uzasadnia przyjęcie tego uproszczenia. Wprowadzimy bezwymiarowe współrzędne s', t', τ':

$$s' = \frac{s}{s_1}, \qquad t' = \frac{t}{t_1}, \qquad \tau' = \tau\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}, \tag{8}$$

gdzie $s_1, t_1, \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}$ charakterystyczne wymiary w kierunkach osi s, t, τ.

Mamy $s_1 \gg \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}$, $t_1 \gg \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}$, możemy przyjąć przy tym $t_1 = s_1$.

Wtedy (6) przyjmuje postać:

$$\alpha^2\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial s'^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t'^2}\right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau'^2} = 2j\xi, \tag{9}$$

gdzie $\alpha^2 = \frac{2}{s_1^2 \omega\mu\gamma}$ - mały parametr.

Rozwijając ξ w szereg względem tego parametru i ograniczając się do pierwszego przybliżenia otrzymamy (7).

Ogólne rozwiązanie tego równania ma postać:

$$\xi = \xi_0(s, t)e^{-\lambda\tau}. \tag{10}$$

gdzie ξ_0 — funkcja określona na powierzchni.

Na podstawie (2) składowe indukcji magnetycznej można wyrazić od tej funkcji:

$$B_s = \frac{\lambda}{j\omega}\frac{\partial \xi_0}{\partial s}e^{-\lambda\tau}$$

$$B_t = \frac{\lambda}{j\omega}\frac{\partial \xi_0}{\partial t}e^{-\lambda\tau} \tag{11}$$

$$B_\tau = \frac{\Delta^* \xi_0}{j\omega}e^{-\lambda\tau}, \qquad \Delta^*\xi_0 = \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial t^2},$$

a na podstawie (5):

$$E_s = \frac{\partial \xi_0}{\partial t}e^{-\lambda\tau}, \qquad E_t = -\frac{\partial \xi_0}{\partial s}e^{-\lambda\tau}. \tag{12}$$

2.3. Charakter pola elektromagnetycznego w obszarze dielektrycznym

W obszarze dielektrycznym (olej) zgodnie z (1) mamy:

$$\operatorname{rot}\vec{B} = 0 \equiv \vec{B} = \operatorname{grad}\varphi,$$

$$B_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad B_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad B_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{13}$$

gdzie B_1, B_2, B_3 składowe indukcji magnetycznej w układzie kartezjańskim (w kierunku osi x, y, z odpowiednio).

Ze względu na równanie $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ funkcja φ spełnia równanie Laplacea:

$$\Delta\varphi = 0 \tag{14}$$

Jak widać, indukcja magnetyczna w obszarze dielektrycznym wyraża się w zależności tylko od jednej funkcji harmonicznej. Na podstawie (2) można wyznaczyć natężenie pola elektrycznego rozwiązując najpierw przy zadanej funkcji φ równanie niejednorodne a później jednorodne. W ten sposób otrzymamy dla $\vec{E}$ postać następującą:

$$\begin{aligned} &\vec{E} = \operatorname{grad}\psi + \vec{E}_0, \quad \Delta\psi = 0 \\ &\operatorname{rot}\vec{E}_0 = -j\omega \operatorname{grad}\varphi \end{aligned} \tag{15}$$

$\vec{E}_0$ można wyznaczyć dosyć dowolnie, np. w postaci

$$E_{01} = \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \qquad E_{02} = -\frac{\partial \sigma}{\partial x}, \qquad E_{03} = 0, \qquad \varphi = -\frac{1}{j\omega}\frac{\partial \sigma}{\partial z} \tag{16}$$

zatem:

$$E_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \qquad E_2 = \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \qquad E_3 = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \tag{17}$$

$$\sigma = -j\omega \int \varphi dz.$$

Przy tym, jak będzie to widać w następnym paragrafie, obliczanie φ przy poczynionych uproszczeniach jest niezależne od ψ; obliczanie ψ do celów praktycznych jest zresztą mało przydatne, ponieważ w danym przypadku większość istotnych parametrów (np. rozkład strat na powierzchni kadzi) można obliczyć mając tylko φ.

2.4. Opis warunków brzegowych

Rozpatrywany obszar dielektryczny, w którym jest określona funkcja φ, jest ograniczony obszarami metalowymi o nieskończonej i skończonej przenikalności magnetycznej (rdzeń, kadź, belki). Na powierzchni rdzenia (idealny ferromagnetyk) znikają składowe styczne natężenia pola magnetycznego, zatem φ musi być na niej stała. Ponieważ jest ona wyznaczalna z dokładnością do stałej (istotne są pochodne φ) to można dla prostoty przyjąć

$$\varphi = 0 \text{ na powierzchni rdzenia} \tag{18}$$

Natomiast na pozostałych powierzchniach metalowych muszą być ciągłe składowe styczne pola magnetycznego i elektrycznego oraz składowa normalna indukcji. Na podstawie (11)—(12) dla $\tau = 0$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{B_s}{\mu} &= \frac{\lambda}{j\omega\mu}\frac{\partial \xi_0}{\partial s} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial \varphi}{\partial s} \equiv H_s = -\frac{\lambda}{j\omega\mu}E_t, \\ \frac{B_t}{\mu} &= \frac{\lambda}{j\omega\mu}\frac{\partial \xi_0}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial \varphi}{\partial t} \equiv H_t = \frac{\lambda}{j\omega\mu}E_s, \\ B_\tau &= \frac{\Delta^* \xi_0}{j\omega} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \end{aligned} \tag{19}$$

gdzie $\frac{\partial}{\partial n}$ — pochodna normalna.

Jak widać przy dokonaniu opisanych uproszczeń w obszarze metalowym dochodzi się do warunków brzegowych typu (19) znanych jako warunki brzegowe typu Leontowicza [2, 3].

Z dwóch pierwszych równań (19) wynika, że na powierzchni metalowej

$$\varphi = \frac{\lambda}{j\omega\mu_r}\xi_0, \qquad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}. \tag{20}$$

Natomiast z trzeciego równania (19) i (20) otrzymuje się warunek tylko dla funkcji φ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\mu_r}{\lambda}\Delta^* \varphi \tag{21}$$

gdzie symbol Δ^* określony jest w (11).

Warunek (21) jest stosunkowo rzadko spotykany w równaniach fizyki [1]. Jeśli przyjąć, że prądy wzbudzające płyną po nieskończenie cienkich powierzchniach walcowych imitujących uzwojenia, to składowa styczna natężenia pola elektrycznego (prostopadła do kierunku prądu) jest nieciągła na takiej powierzchni — różnica po obu jej stronach H_s jest równa liniowej gęstości prądu. Zatem obliczanie rozkładu pola magnetycznego można sprowadzić do obliczania jednej funkcji harmonicznej φ spełniającej skomplikowane

warunki brzegowe: (18), (21) oraz opisane nieciągłości na powierzchniach uzwojeń. Znajomość φ pozwala na określenie funkcji ξ_0 (wzór 20) a tym samym na obliczenie rozkładu pola elektromagnetycznego w obszarze metalowym (wzory (11), (12)). Natomiast znalezienie rozkładu pola elektrycznego w obszarze dielektrycznym wymaga obliczenia funkcji ψ (17), czyli rozwiązania równania $\Delta\psi = 0$ z warunkiem brzegowym:

$$\psi = \int \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t} - E_{0s} \right) ds = \int \left(\frac{j\omega\mu_r}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - E_{0s} \right) ds \tag{22}$$

na powierzchni kadzi i belek.

Wyrażenie podcałkowe w (22) wyraża się w zależności od φ na podstawie (16).

2.5. Ogólna postać rozwiązania

Rozwiązania równania (14) poszukujemy w postaci sumy trzech składników (potencjałów warstwy pojedynczej i podwójnej oraz funkcji φ_0 opisującej pole przyłożone):

$$\varphi(P) = \varphi_0(P) + \iint_{\Omega_M} \frac{\sigma_M(P_1)\,ds_1}{r} + \iint_{\Omega_F} \sigma_F(P_1) \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n_1} ds_1, \tag{23}$$

$r^2 = |PP_1|^2$

gdzie Ω_M — powierzchnia metalu przewodzącego,

Ω_F — powierzchnia idealnego ferromagnetyka.

W analizowanym przypadku $\Omega_F = \Omega_R$ — powierzchnia rdzenia, $\Omega_M = \Omega_K + \Omega_B$ — powierzchnia kadzi i belek jarzmowych.

Zgodnie ze znanymi własnościami potencjałów [7] i odpowiednimi warunkami brzegowymi otrzymamy:

a) Na powierzchni rdzenia ($\varphi = 0$):

$$2\pi\sigma_R(P) + \iint_{\Omega_R} \frac{\sigma_R(P_1)\cos(\vec{R}, \vec{N}_1)}{|\vec{R}|^2} ds_1 + \iint_{\Omega_M} \frac{\sigma_M(P_1)\,ds_1}{|\vec{R}|} + \varphi_0(P) = 0, \tag{24}$$

$\vec{R} = \overrightarrow{PP_1}$.

W równaniu tym $\vec{N}_1$ jednostkowy wektor normalny do powierzchni rdzenia w punkcie całkowania; P, P_1 — punkty na powierzchni (ustalony i zmienny związany z całkowaniem).

b) Na powierzchni kadzi i belek powinno być spełnione równanie (21); daje to:

$$-2\pi\sigma_M(P) + \iint_{\Omega_M} \frac{\sigma_M(P_1)\cos(\vec{R}, \vec{N})\,ds}{|\vec{R}|^2} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial n} \iint_{\Omega_F} \sigma_F(P_1) \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n_1} ds_1 =$$

$$= \frac{\mu_r}{\lambda} \Delta^* \left[\varphi_0(P) + \iint_{\Omega_M} \frac{\sigma_M(P_1)\,ds_1}{|\vec{R}|} + \iint_{\Omega_R} \sigma_F(P_1) \frac{\cos(\vec{R}, \vec{N}_1)}{|\vec{R}|^2} ds_1 \right], \tag{25}$$

gdzie $\vec{N}$ — jednostkowy wektor prostopadły do powierzchni w punkcie P, również pochodna normalna $\frac{\partial}{\partial n}$ dotyczy punktu P.

Ostateczne rozwiązanie całego postawionego zagadnienia sprowadza się do rozwiązania układu dwóch równań całkowych (24) i (25) z niewiadomymi funkcjami σ_R, $\sigma_M = \sigma_K + \sigma_B$ określonymi na powierzchniach rdzenia, kadzi, belek (i ewentualnie na innych elementach konstrukcyjnych). Otrzymany układ można rozwiązać tylko numerycznie [8]—[10]. Najprostsza metoda jest następująca: pokrywamy powierzchnie metalowe siatkami ortogonalnymi (będą to współrzędne walcowe, płaskie, kuliste i ewentualnie toroidalne) i w każdym oczku wybieramy punkty środkowe $P_1, \ldots, P_N$. Jeżeli powierzchnie poszczególnych oczek będą dostatecznie małe (obecnie można to określić tylko na drodze prób numerycznych) to możemy zakładać, że wartości odpowiednich funkcji σ będą w przybliżeniu stałe na całej powierzchni oczka. Zakładając następnie, że układ (24)—(25) jest spełniony w wymienionych punktach (metoda kollokacji) otrzymamy algebraiczny układ równań do wyznaczania dyskretnych wartości σ_M, σ_R. Proponowane ujęcie pozwala na szybkie i łatwiejsze obliczanie wielu całek. Można aproksymować funkcje σ bardziej złożonymi wyrażeniami, niż stałe; np. na powierzchni kadzi σ_K można przedstawić w postaci szeregów Fouriera. Pojawiają się jednak wówczas całki, które można obliczać tylko numerycznie, co pociąga za sobą ze względu na dużą liczbę całek wydłużenie czasu maszynowego.

3. PRZYKŁADOWE ZASTOSOWANIE OPISANEJ METODY

3.1. Opis struktury geometrycznej transformatora

W niniejszej części pracy zostaje w formie przykładowej opisany dosyć szczegółowy sposób stosowania przedstawionej metody do konkretnego transformatora. W dużych transformatorach powierzchnie metalowe ograniczające obszar dielektryczny mogą być z dużą dokładnością dla potrzeb praktycznych opisane analitycznie. Poniżej przedstawiony jest taki opis dla często spotykanych transformatorów:

a) Ściana kadzi składa się z powierzchni płaskich i walcowych (część boczna) oraz kulistych i walcowych (część dolna i górna). Ze względu na poczynione założenia o symetrii można ograniczyć się tylko do następującego obszaru: $-x_1 - R \leqslant x \leqslant 0$, $0 \leqslant z \leqslant z_1 + R$, $0 \leqslant y \leqslant R$; znajomość pola elektromagnetycznego w tym obszarze pozwala na obliczenie go w dowolnym innym. Powierzchnia ściany kadzi może być analitycznie opisana przy pomocy dwóch parametrów (s, t): s — długość łuku wzdłuż obwodu w płaszczyźnie $z = 0$, $y \geqslant 0$ (dla $y \leqslant 0$ przyjmujemy $s \leqslant 0$); t — długość łuku wzdłuż obwodu w płaszczyźnie $x = const$, $-x_1 \leqslant x \leqslant 0$ i półpłaszczyznach przechodzących przez prostą $x = -x_1$, $y = 0$, dla $z \leqslant 0$, $t \leqslant 0$ i dla $z \geqslant 0$ $t \geqslant 0$. Dla wymienionych parametrów można wyróżnić cztery strefy S_i:

S_1: lewa zaokrąglona część walcowa kadzi:

$$x = -x_1 - R\cos\frac{s}{R},$$

$$y = R\sin\frac{s}{R}, \tag{26}$$

$$z = t, \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{\pi}{2}R, \quad 0 \leqslant t \leqslant z_1;$$

S_2: płaska część boczna:

$$x = -x_1 - \frac{\pi}{2} R + s$$
$$y = R, \tag{27}$$
$$z = t, \quad \frac{\pi}{2} R \leqslant s \leqslant \frac{\pi}{2} R + x_1, \quad 0 \leqslant t \leqslant z_1;$$

s_3: kulista część górna:

$$x = -x_1 - R\cos\frac{t-z_1}{R}\cos\frac{s}{R},$$
$$y = R\cos\frac{t-z_1}{R}\sin\frac{s}{R}, \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{\pi}{2} R \tag{28}$$
$$z = z_1 + R\sin\frac{t-z_1}{R}, \quad z_1 \leqslant t \leqslant z_1 + \frac{\pi}{2} R;$$

s_4: walcowa część górna:

$$x = -x_1 - \frac{R}{2} + s,$$
$$y = R\cos\frac{t-z_1}{R}, \quad \frac{\pi}{2} R \leqslant s \leqslant x_1 + \frac{\pi}{2} R, \tag{29}$$
$$z = z_1 + R\sin\frac{t-z_1}{R}, \quad z_1 \leqslant t \leqslant z_1 + \frac{\pi}{2} R.$$

b) Powierzchnia belek jest dosyć trudna do opisu: w rzeczywistym wykonaniu zawiera ona wiele nieregularnych występów i wnęk, które w swoim otoczeniu wprowadzają różne zakłócenia; natomiast dostatecznie daleko od nich (powierzchnia kadzi i rdzenia) wpływ ten jest zaniedbywalny. Z tego względu powierzchnie belki można aproksymować płaszczyznami $x = const.$, $y = const.$, $z = const.$ oraz powierzchniami walcowymi (otwory dla kolumn rdzenia).

W ten sposób dla $z \geqslant 0$:

$$z = z_2, \quad z = z_3; \quad x = \pm x_2; \quad y = \pm y_1;$$
$$z = z_2 + t, \quad 0 \leqslant t \leqslant z_3 - z_2, \quad 0 \leqslant s \leqslant \pi R_2$$
$$y = R_2\sin\frac{s}{R_2}, \quad x = -R_2\cos\frac{s}{R_2}; \tag{30}$$
$$x = -R_2\cos\frac{s}{R_2} - x_1, \quad y = R_2\sin\frac{s}{R_2}, \quad z = z_2 + t.$$

R_2 — promień otworu.

Powierzchnia taka posiada naroża, w pobliżu których nie są spełnione warunki pozwalające na dokonanie uproszczeń typu (7); proponowana metoda rozwiązania równań całkowych w pewnym sensie „*zaokrągla*" je. Przy większej rozbudowie programu obliczeń można założyć, że belki również posiadają zaokrąglenia walcowe i toroidalne.

c) Powierzchnię rdzenia stanowią powierzchnie walcowe:

1) kolumna boczna:

$$x = -x_1 - R_0\cos\frac{s}{R_0}, \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{\pi}{2} R_0,$$

$$y = R_0 \sin\frac{s}{R_0},$$
$$z = t, \quad 0 \leqslant t \leqslant z_5 = z_4 - 2R_0 \tag{31}$$
$$\text{oraz } z_5 \leqslant t \leqslant z_4 - R_0 + R_0\cos\frac{s}{R_0}.$$

2) kolumna środkowa:

$$x = -R_0\cos\frac{s}{R_0},$$
$$y = R_0\sin\frac{s}{R_0},$$
$$z = t, \quad 0 \leqslant t \leqslant z_5 \quad \text{oraz} \tag{32}$$
$$z_5 \leqslant t \leqslant z_4 - R_0 - R_0\cos\frac{s}{R_0}, \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{\pi}{2}R_0.$$

3) część górna:

$$z = z_4 - R_0 - R_0\cos\frac{s}{R_0},$$
$$y = R_0\sin\frac{s}{R_0}, \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{\pi}{2}R_0,$$
$$x = t, \quad -x_1 + R_0 \leqslant t \leqslant -R_0 \quad \text{oraz} \tag{33}$$
$$-x_1 + R_0\cos\frac{s}{R_0} \leqslant t \leqslant -x_1 + R_0 \quad \text{i}$$
$$-\frac{R_0}{2}\left(1+\cos\frac{s}{R_0}\right) \leqslant t \leqslant 0.$$

3.2. Opis potencjału magnetycznego φ

Funkcji φ, przez którą można wyrazić składowe indukcji magnetycznej (13) w całym obszarze dielektrycznym i natężenia pola elektrycznego na powierzchni metalu o skończonej przenikalności magnetycznej (16) i która spełnia równanie Laplace'a (14), można poszukiwać w postaci następującej:

$$\varphi = \varphi_0 + f_1 + f_2 + f_3,$$
$$\iint_{\Omega_k} \frac{\sigma_k(P_0)\,ds}{r} = f_1(P),$$
$$\iint_{\Omega_B} \frac{\sigma_B(P_0)\,ds}{r} = f_2(P), \tag{34}$$
$$\iint_{\Omega_R} \frac{\sigma_R(P_0)\cos(\vec{R}, \vec{N}_0)\,ds}{r^2} = f_3(P),$$
$$r = |\overrightarrow{PP_0}|, \quad \vec{R} = \overrightarrow{PP_0},$$

P — punkt, w którym oblicza się φ,

P_0 — punkt związany z całkowaniem.

Funkcja φ_0 jest zadanym potencjałem magnetycznym opisującym przyłożone pole

magnetyczne (wytworzone przez prądy w uzwojeniach bez istnienia rdzenia, belek i ścian kadzi); można założyć, że

$$\varphi_0 = \varphi_{01} + \varphi_{02} \tag{35}$$

gdzie φ_{01} i φ_{02} są odpowiednio parzystą i nieparzystą funkcją względem płaszczyzny $x = 0$.

Ze względu na założone symetryczne położenie rdzenia i uzwojeń względem ścian kadzi funkcja φ musi być nieparzysta względem płaszczyzny $z = 0$ i parzysta względem płaszczyzny $y = 0$. Natomiast brak jest symetrii względem płaszczyzny $x = 0$; można jednak ją przedstawić w postaci sumy dwóch funkcji: parzystej i nieparzystej:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2. \tag{36}$$

Jedna z nich odpowiada φ_{01} a druga φ_{02} (35).

Parzystość lub nieparzystość funkcji φ zapewnia analogiczne własności σ_B, σ_R i σ_K i podobnie można zapisać:

$$\sigma_K = \sigma_{K1} + \sigma_{K2}, \quad \sigma_R = \sigma_{R1} + \sigma_{R2}, \quad \sigma_B = \sigma_{B1} + \sigma_{B2}. \tag{37}$$

W wyniku tych założeń można ograniczyć się do analizy pola tylko w obszarze: $-x_1 - R \leqslant x \leqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant R$, $z_1 + R \geqslant z \geqslant 0$, a obliczanie całek (34) — sprowadzić do całkowania tylko na powierzchniach określonych wzorami (26)—(33).

Niech $P(x, y, z)$ dowolny punkt wymienionego obszaru, a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ punkt na powierzchni, po której oblicza się odpowiednie całki. Niech $r_1, r_2, \ldots, r_8$ odległości P od P_0 i punktów symetrycznie położonych względem płaszczyzn $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Będą to punkty $P_1(x_0, y_0, z_0)$, $P_2(-x_0, y_0, z_0)$, $P_3(-x_0, -y_0, z_0)$, $P_4(x_0, -y_0, z_0)$, $P_5(x_0, y_0, -z_0)$, $P_6(-x_0, y_0, -z_0)$, $P_7(-x_0, -y_0, -z_0)$, $P_8(x_0, -y_0, -z_0)$.

Czyli:

$$\begin{aligned}
r_1^2 &= (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \\
r_2^2 &= (x+x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \\
r_3^2 &= (x+x_0)^2 + (y+y_0)^2 + (z-z_0)^2 \\
r_4^2 &= (x-x_0)^2 + (y+y_0)^2 + (z-z_0)^2 \\
r_5^2 &= (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2 \\
r_6^2 &= (x+x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2 \\
r_7^2 &= (x+x_0)^2 + (y+y_0)^2 + (z+z_0)^2 \\
r_8^2 &= (x-x_0)^2 + (y+y_0)^2 + (z+z_0)^2
\end{aligned} \tag{38}$$

Zatem:

$$\begin{aligned}
f_1(P) &= \iint_{\Omega_k} \frac{\sigma_{k1}(P_0) + \sigma_{k2}(P_0)}{r}\, ds_0 = \iint_{S_k} [\sigma_{k1}(P_0) H_1(P, P_0) + \sigma_{k2}(P_0) H_2(P, P_0)]\, ds_0 \\
f_2(P) &= \iint_{\Omega_B} \frac{\sigma_{B1}(P_0) + \sigma_{B2}(P_0)}{r}\, ds_0 = \iint_{S_B} \sigma_{B1}(P_0) H_1(P, P_0) + \sigma_{B2}(P_0) H_2(P, P_0)\, ds_0
\end{aligned} \tag{39}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
H_1(P, P_0) &= \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_8} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_6} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_7}, \\
H_2(P, P_0) &= \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_8} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_6} - \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_7},
\end{aligned} \tag{40}$$

a S_k, S_B — powierzchnie kadzi i belki w obszarze $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ opisane (26)—(31).

W celu obliczenia wyrażenia $f_3(P)$ (34) wprowadzamy oznaczenia: $\vec{N}_k$ — jednostkowy wektor prostopadły do powierzchni rdzenia (skierowany w kierunku przeciwnym do jego środka) w punkcie P_k; $\overrightarrow{PP_k} = \vec{R}_k$.
Wówczas:

$$\cos(\vec{R}, \vec{N}_k) = \frac{\vec{N}_k \cdot \vec{R}_k}{|PP_k|} = \frac{\vec{N}_k \cdot \vec{R}_k}{r_k} = a_k \tag{41}$$

Przy czym, jeśli P_0 leży na kolumnowej części rdzenia, to

$$\begin{aligned} \vec{N}_1 &= \vec{N}_5 = (\cos\Theta, -\sin\Theta, 0) \\ \vec{N}_2 &= \vec{N}_6 = (-\cos\Theta, -\sin\Theta, 0) \\ \vec{N}_3 &= \vec{N}_7 = (-\cos\Theta, \sin\Theta, 0) \\ \vec{N}_4 &= \vec{N}_8 = (\cos\Theta, \sin\Theta, 0), \qquad \Theta = \frac{s}{R_0} \end{aligned} \tag{42}$$

a jeśli na poprzecznej, to:

$$\begin{aligned} \vec{N}_1 &= \vec{N}_2 = (0, -\sin\Theta, \cos\Theta) \\ \vec{N}_3 &= \vec{N}_4 = (0, \sin\Theta, \cos\Theta) \\ \vec{N}_5 &= \vec{N}_6 = (0, -\sin\Theta, -\cos\Theta) \\ \vec{N}_7 &= \vec{N}_8 = (0, \sin\Theta, -\cos\Theta). \end{aligned} \tag{43}$$

Wzory (42)—(43) wynikają bezpośrednio z (32)—(33).
Następnie, jeśli oznaczyć:

$$\begin{aligned} H_3(P, P_0) &= \frac{a_1}{r_1^2} - \frac{a_5}{r_5^2} + \frac{a_4}{r_4^2} - \frac{a_8}{r_8^2} + \frac{a_2}{r_2^2} - \frac{a_6}{r_6^2} + \frac{a_3}{r_3^2} - \frac{a_7}{r_7^2}, \\ H_4(P, P_0) &= \frac{a_1}{r_1^2} - \frac{a_5}{r_5^2} + \frac{a_4}{r_4^2} - \frac{a_8}{r_8^2} - \frac{a_2}{r_2^2} + \frac{a_6}{r_6^2} - \frac{a_3}{r_3^2} + \frac{a_7}{r_7^2}, \end{aligned} \tag{44}$$

to analogicznie do (39) otrzymamy:

$$f_3(P) = \iint_{\Omega_R} \frac{\sigma_R(P_0)\cos(\vec{R}, \vec{N}_k)\,ds_0}{r^2} = \iint_{S_R} [\sigma_{R1}(P_0) H_3(P, P_0) + \sigma_{R2}(P_0) H_4(P, P_0)]\,ds_0. \tag{45}$$

Jak widać, rozwiązanie postawionego problemu sprowadza się do obliczenia sześciu funkcji σ_{ki}, σ_{Ri}, σ_{Bi}, $i = 1, 2$ określonych na 1/8 powierzchni kadzi, rdzenia i belek; przy tym σ_{k1}, σ_{R1}, σ_{B1} oblicza się niezależnie od σ_{k2}, σ_{R2}, σ_{B2}.
Na podstawie (24), (25) oraz (34)—(39) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 2\pi\sigma_{Ri}(P) + \iint_{S_R} \frac{\sigma_{Ri}(P_0) a_1\,ds}{r^2} + \iint_{S_R} \sigma_{Ri}(P_0)\left(H_{i+2} - \frac{a_1}{r^2}\right) ds_0 + \\ + \iint_{S_k} \sigma_{ki}(P_0) H_i(P, P_0)\,ds_0 + \iint_{S_B} \sigma_{Bi}(P_0) H_i(P, P_0)\,ds_0 + \varphi_{0i}(P) = 0, \end{aligned} \tag{46}$$

$$-2\pi\sigma_{ki}(P)+\int\int_{S_k}\frac{\sigma_{ki}(P_0)\cos(\vec{R},\vec{N})\,ds_0}{|\vec{R}|^2}=\frac{\mu_{rk}}{\lambda_k}\Delta^*\Big[\varphi_{0i}(P)+\int\int_{S_k}\sigma_{ki}(P_0)H_i(P,P_0)\,ds_0+$$

$$+\int\int_{S_B}\sigma_{Bi}(P_0)H_i(P,P_0)\,ds_0+\int\int_{S_R}\sigma_{Ri}(P_0)H_{i+2}(P,P_0)\,ds_0\Big]-$$

$$-\frac{\partial}{\partial n}\Big[\varphi_{0i}(P)+\int\int_{S_k}\sigma_{ki}(P_0)\Big(H_i(P,P_0)-\frac{1}{r_1^2}\Big)\,ds_0+$$

$$+\int\int_{S_B}\sigma_{Bi}(P_0)H_i(P,P_0)\,ds_0+\int\int_{S_R}\sigma_{Ri}(P_0)H_{i+2}(P,P_0)\,ds_0\Big],\tag{47}$$

$$-2\pi\sigma_{Bi}(P)+\int\int_{S_B}\frac{\sigma_{Bi}(P_0)\cos(\vec{R},\vec{N})\,ds_0}{|\vec{R}|^2}=\frac{\mu_{rB}}{\lambda_B}\Delta^*\Big[\varphi_{0i}+\int\int_{S_k}\sigma_{ki}(P_0)H_i(P,P_0)\,ds_0+$$

$$+\int\int_{S_B}\sigma_{Bi}H_i(P,P_0)\,ds_0+\int\int_{S_R}\sigma_{Ri}H_{i+2}(P,P_0)\,ds_0\Big]-\frac{\partial}{\partial n}\Big[\varphi_{0i}(P)+$$

$$+\int\int_{S_k}\sigma_{ki}H_i(P,P_0)\,ds_0+\int\int_{S_B}\sigma_{Bi}\Big(H_i-\frac{1}{r^2}\Big)ds_0+\int\int_{S_R}\sigma_{Ri}H_{i+2}\,ds_0\Big].\tag{48}$$

3.3. Opis pola przyłożonego (funkcji φ_0)

Przez pole przyłożone rozumiemy pole elektromagnetyczne wytworzone przez układ nieskończenie cienkich przewodów, szyn lub powierzchni walcowych wiodących sinusoidalnie zmienne prądy elektryczne w przypadku, gdy w rozpatrywanym obszarze dielektrycznym nie istnieją elementy metalowe (rdzeń, belki, kadź). W rozpatrywanym przypadku chodzi o pole wytworzone przez prądy płynące w walcowych uzwojeniach (po powierzchniach walcowych w kierunkach obwodowych). Oznacza to znalezienie funkcji harmonicznej z określonymi skokami na uzwojeniu.

Dla uproszczenia rachunków można założyć, że uzwojenia są umieszczone między dwoma półprzestrzennymi obszarami o nieskończonej przenikalności magnetycznej z płaszczyznami granicznymi $z=\pm c$, $c\geqslant z_1+R$ (przyjmujemy $c=z_1+R$). Załóżmy, że na środkowej kolumnie istnieje N uzwojeń wiodących prądy $i_1,\ldots,i_N$; wtedy uwzględniając przesunięcie fazowe będziemy mieli na k-tym uzwojeniu na lewej i prawej kolumnach odpowiednio następujące prądy:

$$i_{k*}=\frac{-1+\sqrt{3}j}{2}i_k,\quad i_{k**}=\frac{-1-\sqrt{3}j}{2}i_k,\quad j^2=-1.\tag{49}$$

Przy tym musi być kompensacja prądów tj.:

$$\sum_{k=1}^{N}i_k=0.\tag{50}$$

Pole wytworzone przez prąd w pojedynczym k-tym uzwojeniu na środkowej kolumnie może być opisane przy pomocy funkcji:

$$\varphi_0 = \xi_k(\varrho, z, R_k, i_k, h_k) =$$

$$= \begin{cases} \mu_0 g_{0k} z + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{K_1(\alpha_n R_k) I_0(\alpha_n \varrho) g_{n,k}}{M_n} \sin \alpha_n z, & \varrho \leqslant R_k \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{I_1(\alpha_n R_k) K_0(\alpha_n \varrho)}{M_n} g_{n,k} \sin \alpha_n z, & \varrho \geqslant R_k \quad |z| \leqslant c, \end{cases} \tag{51}$$

$$g_{n,k} = \frac{i_k \mu_0 \sin \alpha_n h_k}{h_k c \alpha_n^2}, \qquad g_0 = \frac{i_k \mu_0}{c}, \qquad c = z_1 + R,$$

$$M_n = I_0(\alpha_n R_k) K_1(\alpha_n R_k) + I_1(\alpha_n R_k) K_0(\alpha_n R_k),$$

gdzie: ϱ — odległość punktu od środka uzwojenia,

R_k — promień uzwojenia, i_k — amplituda prądu w uzwojeniu,

h_k — połowa wysokości uzwojenia; I_k, K_k — zmodyfikowane funkcje Bessela.

Szczegółowe wyprowadzenie (51) można znaleźć w [11].

Funkcja opisująca sumarycznie pole wytworzone przez prądy w trzech odpowiednich uzwojeniach (na różnych kolumnach) (49) ma postać:

$$\varphi_0 = \xi_k^* = \frac{-1+\sqrt{3}j}{2} \xi_k(\varrho_1, z, R_k, i_k, h_k) +$$

$$+ \xi_k(\varrho, z, R_k, i_k, h_k) - \frac{1+\sqrt{3}}{2} j \xi_k(\varrho_2, z, R_k, i_k, h_k) \tag{52}$$

$$\varrho^2 = x^2 + y^2, \qquad \varrho_1^2 = (x+x_1)^2 + y^2, \qquad \varrho_2^2 = (x-x_1)^2 + y^2.$$

Z kolei całkowite pole wytworzone przez wszystkie uzwojenia opisuje funkcja:

$$\varphi_0 = \sum_{k=1}^{N} \xi_k^* \tag{53}$$

Rozdzielając to wyrażenie na część parzystą i nieparzystą (35) otrzymamy:

$$\varphi_{01} = \sum_{k=1}^{N} \left[\xi_k(\varrho, z, R_k, i_k, h_k) - \frac{1}{2} \xi_k(\varrho_1, z, R_k, i_k, h_k) - \frac{1}{2} \xi_k(\varrho_2, z, R_k, i_k, h_k) \right],$$

$$\varphi_{02} = \frac{\sqrt{3}}{2} j \sum_{k=1}^{N} [\xi_k(\varrho_1, z, R_k, i_k, h_k) - \xi_k(\varrho_2, z, R_k, i_k, h_k)]. \tag{54}$$

We wzorach (51) dla $n > \dfrac{4c}{\pi\varrho}$ występujące funkcje Bessela mogą być zastąpione ich wartościami asymptotycznymi.

3.4. Obliczenia pomocnicze

Głównym mankamentem przedstawionej metody jest konieczność obliczania dosyć dużej liczby na ogół nieelementarnych całek, co wymagałoby znacznego czasu obliczeń

na EMC. Trudność ta może być istotnie złagodzona, jeśli odpowiednio dobrać kształt gęstości potencjałów; przy niektórych postaciach tych funkcji większość całek może być obliczona w postaci jawnej bez stosowania metod numerycznych. Funkcje σ_R, σ_B ze względu na złożony kształt obszaru nie można przedstawić w postaci analitycznej; przedstawienie takie na pewnych podobszarach a następnie „*sklejanie*" na granicach jest bardzo żmudne. Natomiast σ_k może być przedstawiona w postaci szeregu Fouriera:

$$\begin{aligned}
\sigma_k &= \sigma_{k1}+\sigma_{k2},\\
\sigma_{k1} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}\cos\frac{2n\pi}{s_1}s\cdot\sin\frac{\pi m}{t_1}\cdot t,\\
\sigma_{k2} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} b_{n,m}\cos\frac{(2n+1)\pi}{s_1}s\cdot\sin\frac{\pi m}{t_1}t,\\
s_1 &= 2x_1+\pi R, \qquad t_1 = z_1+\frac{\pi}{2}R.
\end{aligned} \tag{55}$$

Jednak dla możliwie większego uproszczenia zagadnienia w pierwszym ujęciu można aproksymować funkcje σ_R, σ_k, σ_B funkcjami schodkowymi: dzielenie obszaru całkowania na prostokąty krzywoliniowe ograniczone krzywymi $t = const$, $s = const$ i przedstawianie funkcji σ w postaci stałych na każdym takim prostokącie. Np. na powierzchni kadzi można przyjąć:

$$\Delta_1 = \frac{x_1+\frac{\pi}{2}R}{N}, \qquad \Delta_2 = \frac{z_1+\frac{\pi}{2}R}{M}, \tag{56}$$

$$s_n = (n-1)\Delta_1, \qquad t_m = (m-1)\Delta_2, \qquad n = 1,\ldots,N, \qquad m = 1,\ldots,M,$$

wtedy poszczególne prostokąty będą ograniczone bokami $s = s_n$, $s = s_{n+1}$, $t = t_m$, $t = t_{m+1}$; podobnie można zrobić na powierzchni rdzenia i belek.

Oznaczmy dalej:

$$\begin{aligned}
s_n^* &= \frac{1}{2}(s_n+s_{n+1}), \qquad t_m^* = \frac{1}{2}(t_m+t_{m+1}),\\
\sigma_{ki}(s_n^*, t_m^*) &= Q_{n,m}^i, \qquad \sigma_{Ri}(s_n^*, t_m^*) = R_{n,m}^i\\
\sigma_{Bi}(s_n^*, t_m^*) &= B_{n,m}^i.
\end{aligned} \tag{57}$$

Jeśli teraz założyć, że na każdym prostokącie:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ki}(s,t) &= Q_{n,m}^i, \qquad \sigma_{Ri}(s,t) = R_{n,m}^i,\\
\sigma_{Bi}(s,t) &= B_{n,m}^i,
\end{aligned} \tag{58}$$

to obliczanie odpowiednich całek znacznie się uprości. I tak np.:

$$f_{1i} = \int\!\!\int_{S_k}\frac{\sigma_{ki}(P_0)\,ds_0}{r} = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} Q_{n,m}^i \int_{s_n}^{s_{n+1}}\int_{t_m}^{t_{m+1}}\frac{dt\,ds}{r}. \tag{59}$$

W ten sposób głównym problemem staje się obliczanie całek typu:

$$L_1 = \int_c^d\int_c^b \frac{dt\,ds}{r} \quad \text{i} \quad L_2 = \int_c^d\int_a^b \frac{\cos(\vec{R},\vec{N}_1)\,dt\,ds}{r^2}. \tag{60}$$

Całki te można obliczyć dokładnie; jednak tworzą one bardzo złożone wyrażenia. Dlatego celowe jest, dla oszczędzenia czasu obliczeniowego, przedstawienie ich w postaci uproszczonej. Jeśli $r > 2\min(\Delta_1, \Delta_2)$ to:

$$L_1 \approx \frac{\Delta_1 \Delta_2}{|PP_0|}, \qquad L_2 \approx \frac{\cos(\vec{R}, \vec{N}_1)}{|PP_0|^2} \Delta_1 \Delta_2. \tag{61}$$

Jeśli P leży wewnątrz rozpatrywanego prostokąta to całki L_1 i L_2 są osobliwe ($r = 0$ dla $P = P_0$) i ich obliczanie powinno być wtedy bardziej subtelne. Na podstawie poczynionych założeń o dużym promieniu krzywizny powierzchni całkowania krzywoliniowy prostokąt o bokach Δ_1, Δ_2 można traktować jako płaski; wtedy $P = P(s, t)$, $P_0 = P_0(s_0, t_0)$, $r^2 = (s-s_0)^2 + (t-t_0)^2$,

$$L_1 = \int_{s_n}^{s_{n+1}} \int_{t_m}^{t_{m+1}} \frac{dt_0\, ds_0}{\sqrt{(s-s_0)^2 + (t-t_0)^2}}.$$

Całka ta może być obliczona, jeśli wprowadzić lokalnie biegunowy układ współrzędnych z początkiem w punkcie $P(s, t)$. W końcowym efekcie otrzymamy:

$$\begin{aligned} L_1 = {} & (\Delta_1 + s_n - s)\ln\left| \frac{\sqrt{(\Delta_1 + t_m - t)^2 + (\Delta_1 + s_n - s)^2} + \Delta_1 + \Delta_2 + t_m + s_n - s - t}{\sqrt{(\Delta_1 + t_m - t)^2 + (\Delta_1 + s_n - s)^2} + \Delta_1 - \Delta_2 + s_n - t_m - s + t} \cdot \right. \\ & \left. \cdot \frac{\sqrt{(t - t_m)^2 + (\Delta_1 + s_n - s)^2} + \Delta_1 + s_n - t_m + t - s}{\sqrt{(t - t_m)^2 + (\Delta_1 + s_n - s)^2} + \Delta_1 + s_n + t_m - t - s} \right| + \\ & + (s - s_n)\ln\left| \frac{\sqrt{(s - s_n)^2 + (t - t_m)^2} + s + t - s_n - t_m}{\sqrt{(s - s_n)^2 + (t - t_m)^2} + s - t - s_n + t_m} \cdot \right. \\ & \left. \cdot \frac{\sqrt{(s - s_n)^2 + (\Delta_2 + t_m - t)^2} + \Delta_1 + t_m - s_n + s - t}{\sqrt{(s - s_n)^2 + (\Delta_2 + t_m - t)^2} + s + t - \Delta_1 - s_n - t_m} \right| + \\ & + (\Delta_2 + t_m - t)\ln\left| \frac{\sqrt{(\Delta_1 + s_n - s)^2 + (\Delta_2 + t_m - t)^2} + \Delta_1 + s_n - s}{\sqrt{(s - s_n)^2 + (\Delta_2 + t_m - t)^2} + s_n - s} \right| + \\ & + (t_m - t)\ln\left| \frac{\sqrt{(s - s_n)^2 + (t - t_m)^2} + t - t_m}{\sqrt{(t - t_m)^2 + (\Delta_1 + s_n - s)^2} - \Delta_2 - s_n + s} \right|. \end{aligned} \tag{62}$$

Jeśli P nie należy do prostokąta, po którym się całkuje i $PP_0 < 2\min(\Delta_1, \Delta_2)$ to wymieniony prostokąt należy podzielić na drobniejsze części i wtedy zamiast (61) będzie

$$L_1 = \frac{\Delta_1 \Delta_2}{4}\left[\frac{1}{|PP_1|} + \frac{1}{|PP_2|} + \frac{1}{|PP_3|} + \frac{1}{|PP_4|}\right], \tag{63}$$

gdzie

$$P_1 = P_1\left(\frac{s_{n+1} + s_n^*}{2}, \quad \frac{t_m + t_m^*}{2}\right),$$

$$P_2 = P_2\left(\frac{s_{n+1} + s_n^*}{2}, \quad \frac{t_{m+1} + t_m^*}{2}\right),$$

$$P_3 = P_3\left(\frac{s_n + s_n^*}{2}, \quad \frac{t_m + t_m^*}{2}\right),$$

$$P_4 = P_4\left(\frac{s_n + s_n^*}{2}, \quad \frac{t_{m+1} + t_m^*}{2}\right),$$

s_n^* i t_m^* określane są przez (57).
Analogicznie oblicza się L_2.

Uwzględniając teraz wzory (39), (45), (58) otrzymamy poszukiwane potencjały w postaci:

$$f_{1i}(x, y, z) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} Q_{n,m}^{i} H_{i,m,n}^{*}(x, y, z)$$

$$f_{2i}(x, y, z) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} B_{n,m}^{i} H_{i,m,n}^{**}(x, y, z) \tag{64}$$

$$f_{3i}(x, y, z) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} R_{n,m}^{i} H_{i+2,m,n}^{*}(x, y, z)$$

$$i = 1, 2$$

gdzie:

$$H_{i,m,n}^{*} = \int_{t_m}^{t_{m+1}} \int_{s_n}^{s_{n+1}} H_i(x, y, z, s, t)\, ds\, dt, \qquad (s, t) \in S_k$$

$$H_{i,m,n}^{**} = \int_{t_m}^{t_{m+1}} \int_{s_n}^{s_{n+1}} H_i(x, y, z, s, t)\, ds\, dt, \qquad (s, t) \in S_B$$

$$H_{i+2,m,n}^{*} = \int_{t_m}^{t_{m+1}} \int_{s_n}^{s_{n+1}} H_{i+2}(x, y, z, s, t)\, ds\, dt, \qquad (s, t) \in S_R.$$

Wykorzystując wzory (31)—(33) można obliczać następujące wyrażenia:

$$\Delta^* f = \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta^* x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta^* y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta^* z + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2\right] +$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2\right], \tag{65}$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \operatorname{grad} f \cdot \frac{\vec{R}_* \times \vec{R}_{**}}{|\vec{R}_*| \cdot |\vec{R}_{**}|}, \tag{66}$$

$$\vec{R}_* = \left(\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}\right), \qquad \vec{R}_{**} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}\right).$$

3.5. Rozwiązywanie układu równań całkowych

Jak widać z (64) pozostają do obliczenia stałe współczynniki $Q_{n,m}^{i}$, $B_{n,m}^{i}$, $R_{n,m}^{i}$. Można je otrzymać na podstawie (46), (47), (48) stosując metodę kollokacji: mianowicie układ ten ma być spełniony w środkowych punktach prostokątów określonych przez (57).

W ten sposób otrzymuje się następujący układ algebraiczny:

$$2\pi Q^i_{k,l} + \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\{Q^i_{n,m} D^1_{i,n,m} + B^i_{n,m} T^1_{i,n,m} + R^i_{n,m} W^1_{i,n,m}\} = E^1_{i,k,l}(s^*_k t^*_l)$$

$$(s^*_k, t^*_l) \in S_k, \tag{67}$$

$$2\pi B^i_{k,l} + \sum_{m=1}^{M}\sum_{u=1}^{N}\{Q^i_{n,m} D^2_{i,n,m} + B^i_{n,m} T^2_{i,n,m} + R^i_{n,m} W^2_{i,n,m}\} = E^2_{i,k,l}(s^*_k, t^*_l)$$

$$(s^*_k, t^*_l) \in S_B, \tag{68}$$

$$2\pi R^i_{k,l} + \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\{Q^i_{n,m} D^3_{i,n,m} + B^i_{n,m} T^3_{i,n,m} + R^i_{n,m} W^3_{i,n,m}\} = \varphi_{0i}(s^*_k, t^*_l)$$

$$(s^*_k, t^*_l) \in S_R, \tag{69}$$

$$k = 1, \ldots, N, \quad l = 1, \ldots M$$

W równaniach tych:

$$D^1_{i,n,m} = \frac{\mu_{rk}}{\lambda_k}\Delta^* H^*_{i,m,n} + \frac{\partial}{\partial n}\tilde{H}^*_{i,m,n}(s^*_n, t^*_m) + \int_{s_n}^{s_{n+1}}\int_{t_m}^{t_{m+1}} \frac{\cos(\vec{R}, \vec{N})}{R^2}\, dt\, ds,$$

$$D^2_{i,n,m} = -\frac{\mu_{rB}}{\lambda_B}\Delta^* H^*_{i,m,n} + \frac{\partial}{\partial n} H^*_{i,m,n},$$

$$D^3_{i,n,m} = H^*_{i,m,n},$$

$$T^1_{i,n,m} = -\frac{\mu_{rk}}{\lambda_k}\Delta^* H^{**}_{i,m,n} + \frac{\partial}{\partial n} H^*_{i,m,n},$$

$$T^2_{i,n,m} = -\frac{\mu_{rB}}{\lambda_B}\Delta^* H^{**}_{i,m,n} + \frac{\partial}{\partial n}\vec{H}^*_{i,m,n} + \int_{s_n}^{s_{n+1}}\int_{t_m}^{t_{m+1}} \frac{\cos(\vec{R}, \vec{N})}{|\vec{R}|^2}\, dt\, ds,$$

$$T^3_{i,n,m} = H^{**}_{i,m,n},$$

$$W^1_{i,n,m} = -\frac{\mu_{rk}}{\lambda_k}\Delta^* H^*_{i+2,m,n} + \frac{\partial}{\partial n} H^*_{i+2,m,n},$$

$$W^2_{i,n,m} = -\frac{\mu_{rB}}{\lambda_B}\Delta^* H^*_{i+2,m,n} + \frac{\partial}{\partial n} H^*_{i+2,m,n},$$

$$W^3_{i,n,m} = \tilde{H}^*_{i+2,m,n} + \int_{t_m}^{t_{m+1}}\int_{s_n}^{s_{n+1}} \frac{\cos(\vec{R}, \vec{N})}{R^2}\, ds\, dt.$$

W wyrażeniach tych $\tilde{H}$ oblicza się analogicznie jak $H_{i,m,n}$ we wzorach (60), z tym, że zamiast H_i, H_{i+2} należy przyjąć $H_i - \frac{1}{r_1}$, $H_{i+2} - \frac{a_1}{r_1}$,

$$E^1_{i,n,m} = \frac{\mu_{rk}}{\lambda_k}\Delta^*\varphi_{0i} - \frac{\partial}{\partial n}\varphi_{0i}$$

$$E^2_{i,n,m} = \frac{\mu_{rB}}{\lambda_B}\Delta^*\varphi_{0i} - \frac{\partial}{\partial n}\varphi_{0i}$$

μ_{rB}, μ_{rk}, λ_B, λ_k — wartości parametrów μ_r, λ odpowiednio dla belek i ścian kadzi.

4. WNIOSKI OGÓLNE

1) Po dokonaniu przedstawionych w pracy uproszczeń dobrze realizujących się w transformatorach dużych mocy problem obliczania rozkładu pola elektromagnetycznego w bardzo skomplikowanym układzie w ujęciu trójwymiarowym można sprowadzić do rozwiązania jednego równania Laplacea z jedną funkcją niewiadomą w obszarze dielektrycznym. Wpływ elementów metalowych (rdzenia, belek, ścian kadzi) uwzględnia się przy tym w warunkach brzegowych (typu Leontowicza na powierzchni kadzi).

2) Rozwiązanie równania Laplacea przedstawia się w postaci sumy szeregów reprezentujących pole wytworzone przez prądy w uzwojeniach (bez rdzenia, belek i ścian kadzi) oraz potencjałów warstwy pojedynczej i podwójnej reprezentujących oddziaływanie ścian kadzi, rdzenia i belek. W ten sposób rozwiązanie równania Laplacea sprowadza się do obliczania trzech funkcji określonych tylko na powierzchniach metalowych i spełniających układ trzech równań całkowych, który jest rozwiązywany przy pomocy funkcji schodkowych.

Wykaz najczęściej stosowanych oznaczeń

γ — przewodność elektryczna,
μ — przenikalność magnetyczna,
ω — pulsacja prądu,
$\lambda^2 = j\omega\mu\gamma$, $\mu_r = \dfrac{\mu}{\mu_0}$,
B_1, B_2, B_3 — kartezjańskie składowe indukcji magnetycznej,
$\vec{I}$ — gęstość prądu,
$\vec{E}$ — natężenie pola elektrycznego.

Wymiary geometryczne:

(s, t) — krzywoliniowe współrzędne na powierzchniach rdzenia, kadzi i belek; x_1 — odległość między kolumnami rdzenia; z_1 — połowa wysokości niezakrzywionej części kadzi, R — promień zakrzywionej części powierzchni kadzi, R_0 — promień rdzenia, z_4 — połowa wysokości rdzenia; $R_1, \ldots, R_N$ — promienie uzwojeń; $h_1, \ldots, h_N$ — połowy wysokości uzwojeń; $i_1, \ldots, i_N$ — amplitudy prądów w uzwojeniach; φ — potencjał pola magnetycznego, $\sigma_k, \sigma_R, \sigma_B$ — gęstości stosowanych potencjałów warstwy pojedynczej i podwójnej. S_k, S_B, S_R — powierzchnie kadzi, belki i rdzenia w obszarze całkowania ($x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$); x, y, z — współrzędne kartezjańskie.

LITERATURA

1. J. A. Schercliff *The theory of electromagnetic flow measurement*, Cambridge Univ. Press 1962.
2. L. D. Goldstein, N. W. Ziernow *Elektromagnitnyje pola i wolny*, Moskwa 1971.
3. L. A. Weinstein *Elektromagnitnyje wolny*, Moskwa 1957.
4. S. Apanasewicz *O pewnych właśnościach struktury pola elektromagnetycznego*, Arch. Elektr. 1971, z. 3.

5. J. Turowski *Elektrodynamika techniczna*, WNT 1968.
6. W. J. Prosnak *Mechanika płynów*, WNT 1971 t. I.
7. W. Pogorzelski *Równania całkowe i ich zastosowania*, PWN 1958.
8. W. I. Krytow, W. W. Bobkow, P. I. Monastyrskij *Wyczislitielnyje mietody*, t. II, Moskwa 1967.
9. B. P. Demidowicz, I. A. Maron *Czislennyje mietody analiza*, Moskwa 1967.
10. P. P. Zabrejko, A. I. Kosalew *Intiegralnyje urawnienija*, Moskwa 1968.
11. S. Apanasewicz, G. Miksa, D. Przybylak *Ocena wpływu krzywizny rdzenia, uzwojeń i ścian kadzi transformatora na rozkład pola elektromagnetycznego*, Rozprawy Elektr. 22, nr 1, 1976.

S. APANASEWICZ

METHOD OF ELECTROMAGNETIC FIELD CALCULATION IN TRANSFORMER OF HIHG POWER USING INTEGRAL EQUATIONS

Summary

In this paper the method of calculation of three-dimensional electromagnetic field distribution in real transformers of high power is presented. Maxwell's equations in dielectric medium were reduced to one Laplace's equation. The influences of eddy currents in metallic space are taken including boundary conditions of Leontowithz type. The solution of Laplaceś equation is reduced to system of three second kind integral equations of Fredholm. The algorithm of solution of that system is given.

S. APANASIEWICZ

MÉTHODE DE CALCULER LE CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE DES TRANSFORMATEURS DE GRANDE PUISSANCE À PARTIR DES ÉQUATIONS INTÉGRALES

Résumé

Dans cet article on a présenté la méthode de calculer le champ électromagnétique tridimensionnel des transformateurs réels de grande puissance. Les équations de Maxwell ont été remplacées par l'équation de Laplace dans un milieu diélectrique. On a pris en considération l'influence des éléments métalliques aux conditions limites. L'équation de Laplace est résolue à partir du système de trois équations de Fredholm de deuxième genre. On a présenté la méthode numérique de calculer le système obtenu.

S. APANASEWICZ

ANWENDUNG VON INTEGRALGLEICHUNGEN BEI BERECHNUNG DER VERTEILUNG DES ELEKTROMAGNETISCHEN FELDES VON GROßTRANSFORMATOREN

Zusammenfassung

In vorliegender Bearbeitung wurde eine Berechnungsmethode für die dreidimensionale Verteilung beschrieben unter Voraussetzung, daß die getätigten Vereinfachungen für die Anwendung bei Großtransformatoren möglich sind. Die Lösung der Maxwell-Gleichungen wurde derart reduziert, daß eine Laplace Gleichung im dieletkrischen Gebiet gelöst wurde. Einflüsse von Wirbelströmen in Metallgebieten wurden in Randbedingungen des Leontowicz-Typs berücksichtigt. Die Laplace-Gleichung wird in Anlehnung an das System der drei Fredholm-Integralgleichungen zweiter Art gelöst; es wurde der Algorithmus der Lösung dieses Systems beschrieben.

С. АПАНАСЕВИЧ

МЕТОД РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ТРАНСФОРМАТОРАХ БОЛЬШИХ МОЩНОСТЕЙ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УПРАВНЕНИЙ

Р е з ю м е

Представлен метод расчета распределения трехмерного электромагнитного поля в реальных трансформаторах больших мощностей. Уравнения Максвелла сведены к одному уравнению Лапласа в диэлектрической среде. Влияние металлических элементов учитывается в граничных условиях типа Леонтовича. Решение уравнения Лапласа сводится к системе трех интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Предложен численный метод расчета полученной системы.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1986, 32, z. 1, ss. 173-184

621.313.333

Wpływ składowej aperiodycznej prądu na przebiegi sił elektrodynamicznych działających na pręty wirnika silnika indukcyjnego

MARIA DEMS, TADEUSZ KOTER

Instytut Transformatorów, Maszyn i Aparatów Elektrycznych

Otrzymano 03.08.1984

W artykule przedstawiono metodę wyznaczania siły elektrodynamicznej działającej na prostokątny pręt wirnika silnika indukcyjnego głębokożłobkowego, wywołanej prądem zawierającym składową aperiodyczną. Ponadto przeanalizowano wpływ składowej stałej i składowej aperiodycznej prądu w pręcie wirnika na wartość i przebieg siły elektrodynamicznej.

1. WSTĘP

Pręty wirnika silnika indukcyjnego poddawane są działaniu sił elektrodynamicznych wywołanych istnieniem strumienia rozproszenia żłobkowego i przepływem prądu w prętach klatki. Siły te mogą osiągać znaczne wartości w nieustalonych stanach pracy silnika, a w szczególności podczas rozruchu, lub ponownego załączania silnika do sieci przy niestłumionym polu silnika.

Zagadnienie wyznaczania sił elektrodynamicznych wywołanych sinusoidalnie zmiennym prądem w pręcie wirnika zostało omówione w szeregu pracach [1, 2, 3, 6]. Jednakże, w stanach nieustalonych oprócz składowej prądu sinusoidalnie zmiennej występuje składowa aperiodyczna, której obecność wpływa na wartość siły elektrodynamicznej. W artykule przeanalizowano wpływ składowej aperiodycznej prądu występującej w prostokątnym pręcie wirnika na wartość i przebieg siły elektrodynamicznej, jak również przedstawiono metodę wyznaczania siły elektrodynamicznej wywołanej prądem w pręcie zawierającym składową bezokresową.

2. SIŁY ELEKTRODYNAMICZNE DZIAŁAJĄCE NA PRĘTY WIRNIKA SILNIKA INDUKCYJNEGO

Ogólne wyrażenie na siłę elektrodynamiczną działającą na pojedynczy pręt wirnika wprowadzono przy następujących założeniach upraszczających:

a) pominięto zjawisko nasycenia w żelazie, zakładając, że przenikalność magnetyczna żelaza $\mu_{Fe} = \infty$, natomiast przenikalność magnetyczna materiału pręta jest równa

przenikalności próżni ($\mu = \mu_0$). Ponadto założono, że środowisko jest liniowe i izotropowe

b) pominięto zniekształcenie linii pola magnetycznego w górnej części żłobka, zakładając przebieg linii sił pola magnetycznego prostopadły do ścianek żłobka na całej jego szerokości

c) przyjęto, że szerokość pręta równa jest szerokości żłobka

d) uwzględniono tylko pierwszą harmoniczną prądu w pręcie.

Siłę oddziaływania $d\boldsymbol{F}$ pola magnetycznego o indukcji $\boldsymbol{B}$ na element objętości pręta dV, w którym występuje gęstość prądu $\boldsymbol{J}$ można wyrazić wzorem:

$$d\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}) dV, \tag{1}$$

gdzie $\boldsymbol{F}$ — wektor siły elektrodynamicznej $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$

$\boldsymbol{J}$ — wektor gęstości prądu $\boldsymbol{J} = (J_x, J_y, J_z)$

$\boldsymbol{B}$ — wektor indukcji magnetycznej $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$.

Zgodnie z przyjętymi założeniami można zapisać:

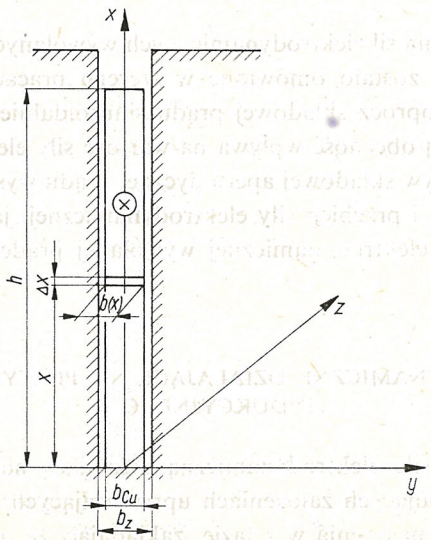
$$d\boldsymbol{F} = \mu_0 (\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{H}) dV \tag{2}$$

W przypadku silników głębokożłobkowych istotny wpływ na rozkład pola magnetycznego w pręcie wirnika ma zjawisko wypierania prądu. Jak wykazano w [7], dla pręta prostokątnego, przy proporcji wysokości pręta do jego szerokości $\frac{h}{b} > 1{,}5$ wypieranie prądu można traktować jako jednowymiarowe, a więc wektory natężenia pola magnetycznego $\boldsymbol{H}$ i gęstości prądu $\boldsymbol{J}$ posiadają tylko jedną składową

$$\boldsymbol{H} = H_y(x, t) \qquad \boldsymbol{J} = J_z(x, t) \tag{3}$$

wówczas $\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{H} = -J_z(x, t) H_y(x, t) \cdot 1_x$

natomiast $d\boldsymbol{F} = -dF_x(x, t)$. (4)



Rys. 1. Żłobek wirnika zawierający pręt o przekroju prostokątnym

Wartość chwilowa jednostkowej siły elektrodynamicznej działającej na element $dV = b(x) \cdot l_{Fe} dx$ objętości pręta o długości $l_{Fe} = 1$ będzie określona zależnością:

$$dF_x(x, t) = \mu_0 J_z(x, t) H_y(x, t) b(x) dx \tag{5}$$

Siła ta jest skierowana wzdłuż osi x i działa w kierunku dna żłobka.

2.1. Siły elektrodynamiczne w prostokątnym pręcie wirnika wyznaczone przy pominięciu zjawiska wypierania prądu w pręcie

W przypadku równomiernego rozkładu gęstości prądu i natężenia pola magnetycznego w pręcie o przekroju prostokątnym możemy zapisać: [2, 5]

$$J_z(x, t) = \frac{i(t)}{bh}, \quad H_y(x, t) = \frac{i(t)x}{bh}, \quad b(x) = b \tag{6}$$

wówczas, zgodnie z (5) otrzymamy:

$$dF_x(x, t) = \mu_0 \frac{i^2(t)}{bh^2} x dx. \tag{7}$$

Całkowita jednostkowa siła elektrodynamiczna przypadająca na jednostkę długości pręta określona jest natomiast zależnością:

$$F(x, t) = \int_0^h dF(x, t) = \mu_0 \frac{i^2(t)}{bh^2} \int_0^h x dx = \mu_0 \frac{i^2(t)}{2b}. \tag{8}$$

Jeżeli prąd w pręcie ma przebieg sinusoidalnie zmienny określony zależnością

$$i(t) = \sqrt{2} I \sin \omega t \tag{9}$$

to zgodnie z zależnością (8) jednostkowa siła elektrodynamiczna będzie wyrażona wzorem:

$$F(t) = \frac{\mu_0}{2b} i^2(t) = \mu_0 \frac{I^2}{2b} (1 - \cos 2\omega t) = F_s + F_z. \tag{10}$$

Siła ta posiada dwie składowe:

— składową stałą $F_s = \mu_0 \frac{I^2}{2b}$

— składową zmienną $F_z = -\mu_0 \frac{I^2}{2b} \cos 2\omega t$.

Składowa zmienna siły elektrodynamicznej posiada częstotliwość dwukrotnie większą niż częstotliwość prądu w pręcie. Amplituda składowej zmiennej siły równa jest składowej stałej i wynosi $A = \mu_0 \frac{I^2}{2b}$. W związku z tym wypadkowa siła elektrodynamiczna działająca na pojedynczy pręt prostokątny jest zawsze większa lub równa zeru.

Jeżeli prąd w pręcie posiada składową stałą równą amplitudzie prądu okresowo-zmiennego, zgodnie z zależnością:

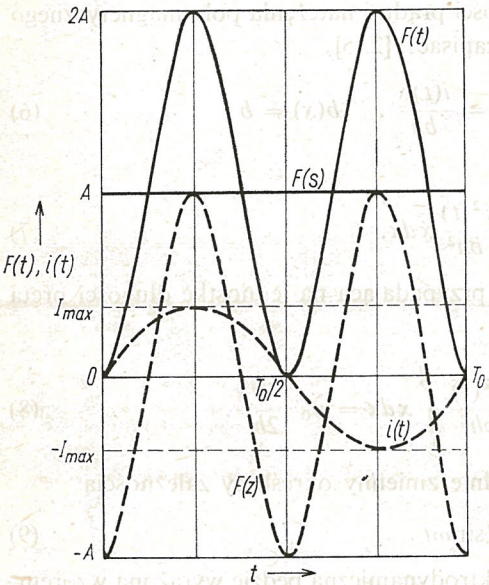
$$i(t) = \sqrt{2} I (1 - \cos \omega t) \tag{11}$$

to, zgodnie z ogólnym wyrażeniem na siłę elektrodynamiczną (8) otrzymamy:

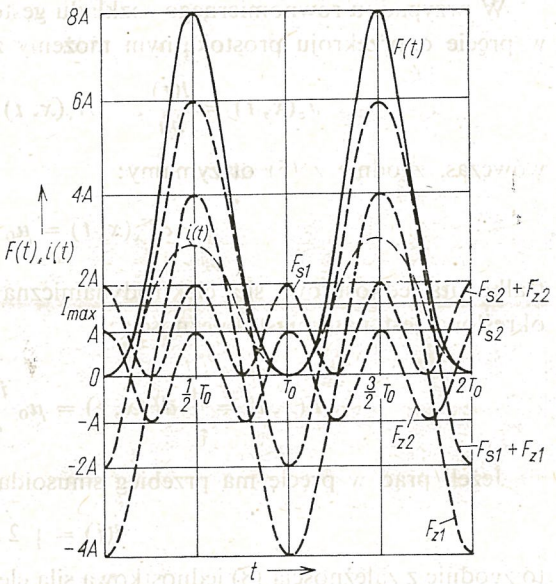
$$F(t) = \mu_0 \frac{i^2(t)}{2b} = \mu_0 \frac{I^2}{b} - \mu_0 \frac{2I^2}{b} \cos\omega t + \mu_0 \frac{I^2}{2b} + \mu_0 \frac{I^2}{2b} \cos 2\omega t =$$

$$= F_{s1} + F_{z1} + F_{s2} + F_{z2}. \tag{12}$$

Z wyrażenia (12) wynika, że siła elektrodynamiczna $F(t)$ posiada cztery składowe. Siły F_{s2} i F_{z2} mają analogiczną postać jak przy występowaniu prądu sinusoidalnie zmiennego w pręcie (jedynie składowa zmienna ma przeciwny znak). Można je w sposób umowny uważać za siły wywołane składową okresową prądu. W ten sposób siły F_{s1} i F_{z1} można uważać za siły wywołane występowaniem składowej stałej prądu.



Rys. 2. Przebieg siły elektrodynamicznej wywołanej sinusoidalnie-zmiennym prądem w pręcie wirnika



Rys. 3. Przebieg siły elektrodynamicznej wywołanej prądem zmiennym zawierającym składową stałą

Przebieg wypadkowej siły elektrodynamicznej w pręcie oraz jej poszczególnych składowych przedstawiono na rys. 3.

Z zależności (12) oraz rys. 3 wynika, że amplituda składowej okresowo-zmiennej siły elektrodynamicznej wywołana obecnością składowej stałej prądu w pręcie posiada wartość czterokrotnie większą i przeciwny kierunek w stosunku do składowej okresowo-zmiennej siły wywołanej tylko prądem okresowo-zmiennym. Ponadto, występowanie składowej stałej prądu powoduje pojawienie się dodatkowej siły stałej, dwukrotnie większej od siły stałej wywołanej tylko składową okresowo-zmienną prądu.

$$|F_{z1}|_{max} = -4|F_{z2}|_{max} = -4A,$$

$$F_{s1} = 2F_{s2} = 2A,$$

gdzie $A = \mu_0 \frac{I^2}{2b}$.

Obecność składowej stałej w prądzie wirnika powoduje więc czterokrotny wzrost maksymalnej wartości siły działającej na dno żłobka, w porównaniu do siły wywołanej tylko składową okresowo-zmienną prądu. Częstotliwość wypadkowej siły jest równa częstotliwości prądu w pręcie wirnika. Jeżeli prąd w pręcie wirnika posiada składową aperiodyczną, której wartość początkowa jest równa amplitudzie składowej okresowo-zmiennej, zgodnie z zależnością:

$$i(t) = \sqrt{2}I(e^{-t/T} - \cos\omega t), \tag{13}$$

to wyrażenie na siłę elektrodynamiczną przybierze postać:

$$F(t) = \mu_0 \frac{i^2(t)}{2b} = \mu_0 \frac{I^2}{b} e^{-2t/T} - \mu_0 \frac{2I^2}{b} e^{-t/T}\cos\omega t + \mu_0 \frac{I^2}{2b} +$$

$$+ \mu_0 \frac{I^2}{2b}\cos 2\omega t = F_{s1} + F_{z1} + F_{s2} + F_{z2}. \tag{14}$$

W tym przypadku również siła elektrodynamiczna posiada 4 składowe:

$$F_{s1} = \mu_0 \frac{I^2}{b} e^{-2t/T}$$

— składowa aperiodyczna siły związana z występowaniem składowej aperiodycznej prądu: zanikanie tej składowej siły przebiega ze stałą czasową dwa razy większą od stałej czasowej prądu aperiodycznego.

$$F_{s2} = \mu_0 \frac{I^2}{2b}$$

— składowa stała siły wywołana prądem okresowo-zmiennym.

$$F_{z1} = -\mu_0 \frac{2I^2}{b} e^{-t/T}\cos\omega t$$

— zmniejszająca się wykładniczo składowa okresowo-zmienna siły o częstotliwości równej częstotliwości prądu w pręcie, występująca na skutek obecności składowej aperiodycznej prądu: zanikanie tej składowej siły przebiega ze stałą czasową równą stałej czasowej składowej aperiodycznej prądu.

$$F_{z2} = \mu_0 \frac{I^2}{2b}\cos 2\omega t$$

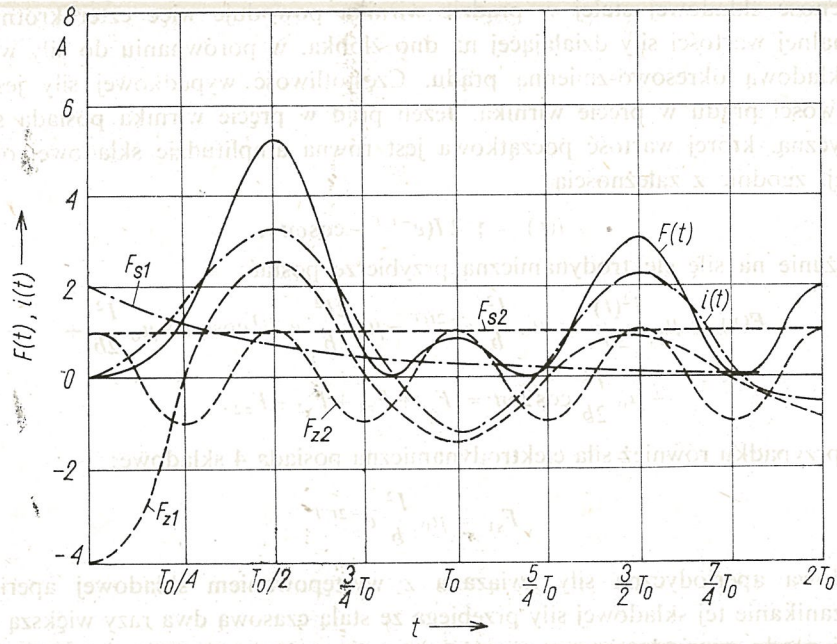
— składowa okresowo-zmienna siły o częstotliwości podwójnej w stosunku do częstotliwości prądu w pręcie, związana z istnieniem składowej okresowo-zmiennej prądu.

Przebieg wypadkowej siły elektrodynamicznej i jej poszczególnych składowych przedstawia rys. 4. Pomiędzy poszczególnymi składowymi siły elektrodynamicznej zachodzą następujące związki:

$$F_{s1} = 2F_{s2}e^{-2t/T} = 2Ae^{-2t/T}$$

$$|F_{z1}|_{max} = -4|F_{z2}|_{max}e^{-t/T} = -4Ae^{-t/T}.$$

Występowanie składowej aperiodycznej prądu w pręcie wirnika powoduje więc powstanie dodatkowych sił elektrodynamicznych, w wyniku czego wypadkowa siła elektrodynamiczna osiąga (zwłaszcza w początkowym okresie procesu przejściowego, gdy występuje znaczna wartość składowej aperiodycznej prądu) wartości kilkakrotnie przekraczające siłę wywołaną tylko składową okresową prądu.



Rys. 4. Przebieg siły elektrodynamicznej wywołanej prądem zmiennym zawierającym składową aperiodyczną

2.2. Siły elektrodynamiczne działające na prostokątny pręt wirnika wyznaczone z uwzględnieniem zjawiska wypierania prądu w pręcie

W silniku głębokożłobkowym występuje zjawisko wypierania prądu w pręcie wirnika, co powoduje nierównomierny rozkład gęstości prądu i natężenia pola magnetycznego w pręcie. Zjawisko to jest szczególnie silne w dynamicznych stanach pracy silnika (rozruch, ponowne załączanie).

Przy założeniu stałej przenikalności magnetycznej pręta oraz pominięciu gęstości prądu przesunięcia, równania Maxwella można zapisać w postaci: [9]

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E} \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{15}$$

Uwzględniając, że dla pręta prostokątnego $\boldsymbol{H} = H_y(x, t)$ oraz $\boldsymbol{J} = J_z(x, t)$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_y(x, t)}{\partial x^2} &= \gamma \mu_0 \frac{\partial H_y(x, t)}{\partial t} \\ J_z(x, t) &= \frac{\partial H_y(x, t)}{\partial x}. \end{aligned} \tag{16}$$

Równania (16) pozwalają na wyznaczenie rozkładu natężenia pola magnetycznego i gęstości prądu w prostokątnym pręcie wirnika, w przypadku ogólnym, dla dowolnej

zmienności w czasie $H_y(x, t)$ oraz $J_z(x, t)$, jednakże rozwiązanie tych równań dla zadanych warunków brzegowych jakie stwarza żłobek wirnika byłoby bardzo złożone. Przy założeniu sinusoidalnej zmienności wektorów $\underline{H}$ i $\underline{J}$ możemy zapisać równania Maxwella w postaci zespolonej. Przyjmujemy, że

$$\begin{aligned} H_y(x, t) &= H_{y\,max}(x)\sin(\omega t+\varphi_h), \\ J_z(x, t) &= J_{z\,max}(x)\sin(\omega t+\varphi_j), \end{aligned} \tag{17}$$

gdzie φ_j, φ_h — kąty przesunięcia fazowego wektorów $\underline{J}$, $\underline{H}$ względem wektora prądu w pręcie wirnika I.

Wówczas, po wprowadzeniu wartości zespolonych, równania (16) przyjmą postać:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\underline{H}_y(x)}{dx^2} - j\omega\mu_0\gamma\underline{H}_y(x) = 0 \\ &\underline{J}_z(x) = \frac{d\underline{H}_y(x)}{dx}. \end{aligned} \tag{18}$$

W wyniku rozwiązania układu równań (18) otrzymamy: [4]

$$\begin{aligned} \underline{H}_y(x) &= \frac{I}{b}\frac{sh(kx)}{sh(kh)}, \\ \underline{J}_z(x) &= \frac{kI}{b}\frac{ch(kx)}{sh(kh)}, \end{aligned} \tag{19}$$

gdzie $\underline{H}_y(x)$, $\underline{J}_z(x)$, $\underline{I}$ — amplitudy zespolone odpowiednich składowych wektorów natężenia pola magnetycznego, gęstości prądu oraz prądu w pręcie wirnika,

$$k = \alpha(1+j), \qquad \alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\omega\mu_0\gamma\frac{1}{1+\alpha_t(\vartheta_2-\vartheta_0)}}, \tag{20}$$

γ — przewodność właściwa materiału pręta w temperaturze ϑ_0

ω — pulsacja prądu w pręcie wirnika

ϑ_2 — temperatura pręta wirnika

α_t — temperaturowy współczynnik wzrostu rezystancji.

Zależności (19) uwzględniają zjawisko nierównomiernego rozkładu gęstości prądu i natężenia pola magnetycznego w pręcie wirnika. Wartość chwilową siły elektrodynamicznej działającej na pręt o długości l_{Fe} dla przebiegów sinusoidalnie zmiennych wyznaczamy z zależności:

$$dF_x(x, t) = \mu_0 l_{Fe} b(x) H_{y\,max}(x) J_{z\,max}(x)\sin(\omega t+\varphi_h)\sin(\omega t+\varphi_j)dx. \tag{21}$$

Po przekształceniach, ogólne równanie na wartość chwilową siły elektrodynamicznej dla przebiegów sinusoidalnie-zmiennych przyjmie postać

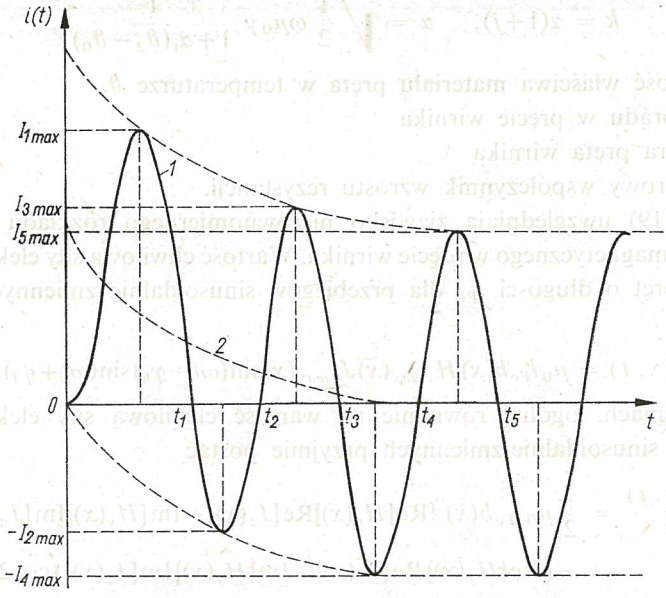
$$\begin{aligned} \frac{dF_x(x, t)}{dx} = \frac{1}{2}\mu_0 l_{Fe} b(x) \{&\mathrm{Re}[H_y(x)]\mathrm{Re}[\underline{J}_z(x)] + \mathrm{Im}[\underline{H}_y(x)]\mathrm{Im}[\underline{J}_z(x)] + \\ &- (\mathrm{Re}[\underline{H}_y(x)]\mathrm{Re}[\underline{J}_z(x)] - \mathrm{Im}[\underline{H}_y(x)]\mathrm{Im}[\underline{J}_z(x)])\cos 2\omega t + \\ &+ (\mathrm{Im}[\underline{H}_y(x)]\mathrm{Re}[\underline{J}_z(x)] + \mathrm{Re}[\underline{H}_y(x)]\mathrm{Im}[\underline{J}_z(x)])\sin 2\omega t\}. \end{aligned} \tag{22}$$

Rozwiązanie tego równania jest możliwe tylko na drodze numerycznej.

3. METODA WYZNACZANIA SIŁ ELEKTRODYNAMICZNYCH WYWOŁANYCH PRĄDEM ZMIENNYM ZAWIERAJĄCYM SKŁADOWĄ APERIODYCZNĄ PRZY UWZGLĘDNIENIU ZJAWISKA WYPIERANIA PRĄDU W PRĘCIE

Ogólne wyrażenie na siłę elektrodynamiczną (22) pozwala na wyznaczenie wartości chwilowej siły i jej rozkładu wzdłuż osi X dla pręta o dowolnym kształcie, gdy znane są amplitudy zespolone składowych wektora natężenia pola magnetycznego i gęstości prądu. W przypadku równomiernego rozkładu natężenia pola magnetycznego i gęstości prądu w pręcie o przekroju prostokątnym, siłę elektrodynamiczną można wyznaczyć z zależności (8). W tym przypadku prąd płynący w pręcie może być dowolną funkcją czasu $i(t)$. W przypadku występowania zjawiska wypierania prądu w pręcie (na przykład podczas rozruchu silnika głębokożłobkowego), gdy rozkład gęstości prądu i natężenia pola magnetycznego jest nierównomierny, siłę elektrodynamiczną wyznacza się przy założeniu, że w pręcie płynie prąd sinusoidalnie-zmienny o stałej amplitudzie i częstotliwości, powodujący sinusoidalną zmienność składowych wektorów $\underline{H}$ oraz $\underline{J}$.

W rzeczywistości, w stanach nieustalonych pracy silnika, prąd w pręcie wirnika może zawierać składową aperiodyczną o znacznej wartości początkowej. Również amplituda i częstotliwość prądu okresowo-zmiennego może ulegać ciągłej zmianie. W związku z tym w nieustalonych stanach pracy silnika głębokożłobkowego, w celu wznaczenia siły elektrodynamicznej zastępuje się rzeczywisty przebieg prądu w pręcie przebiegiem zastępczym, składającym się w poszczególnych przedziałach czasu z fragmentów przebiegów sinusoidalnie zmiennych o stałej częstotliwości i amplitudzie równej maksymalnej wartości chwilowej występującej w rozpatrywanym przedziale czasu.



Rys. 5. Ilustracja metody zastępczych przebiegów sinusoidalnych; 1 — przebieg prądu w pręcie wirnika; 2 — składowa aperiodyczna prądu w pręcie wirnika

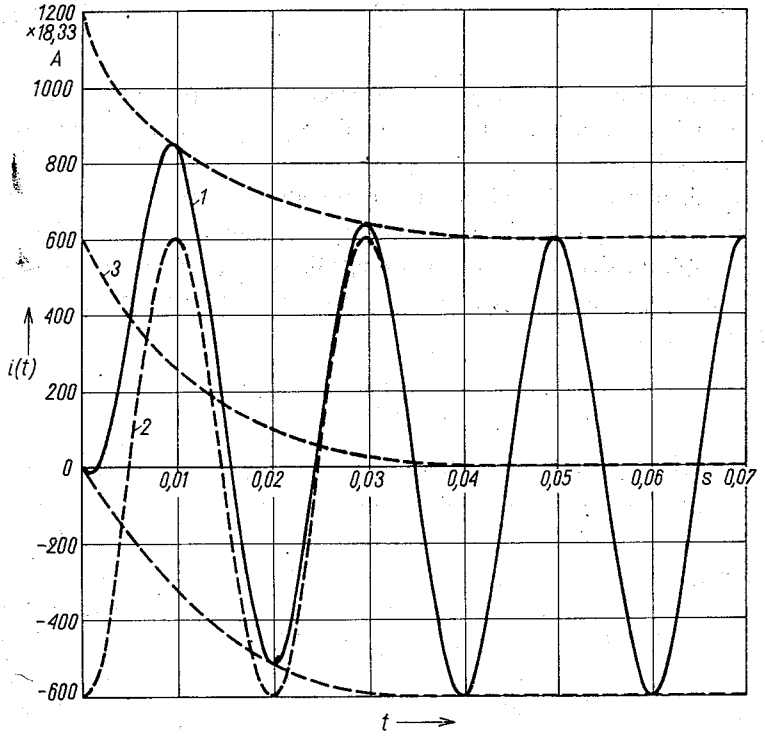
Wartość chwilowa tego prądu w przedziale czasu $\langle t_{k-1}, t_k \rangle$ określona jest zależnością:

$$i_k(t) = \pm I_{k\,max} \sin\left(\frac{\pi}{t_k - t_{k-1}}(t - t_{k-1}) + \varphi_{ik}\right). \tag{23}$$

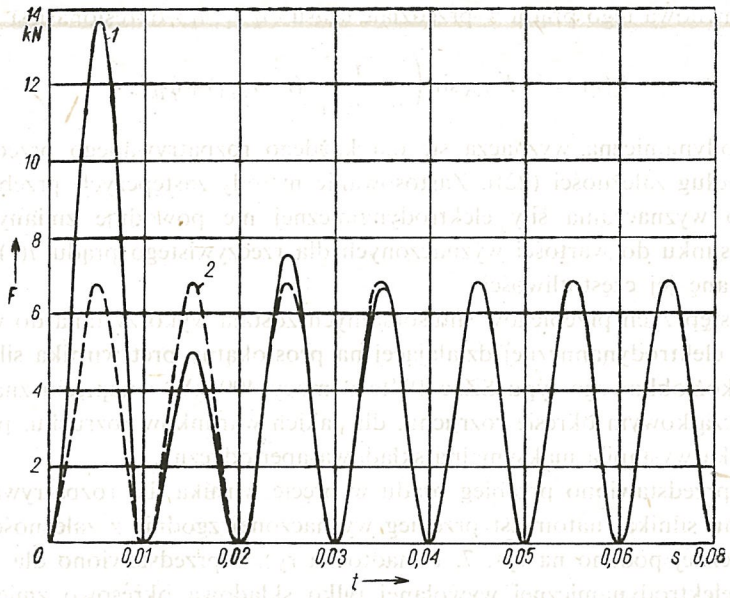
Siłę elektrodynamiczną wyznacza się dla każdego rozpatrywanego przedziału czasu oddzielnie (według zależności (22)). Zastosowanie metody zastępczych przebiegów sinusoidalnych do wyznaczania siły elektrodynamicznej nie powoduje zmiany amplitudy tej siły (w stosunku do wartości wyznaczonych dla rzeczywistego prądu $i(t)$, natomiast powoduje zmianę jej częstotliwości.

Metoda zastępczych przebiegów sinusoidalnych została wykorzystana do wyznaczenia przebiegu siły elektrodynamicznej działającej na prostokątny pręt wirnika silnika indukcyjnego głębokożłobkowego typu SZJc 194te o mocy 400 kW i napięciu znamionowym 6000 V, w początkowym okresie rozruchu, dla takich warunków rozruchu, przy których w pręcie wirnika wystąpiła maksymalna składowa aperiodyczna.

Na rys. 6 przedstawiono przebieg prądu w pręcie wirnika dla rozpatrywanego przypadku rozruchu silnika, natomiast przebieg wyznaczonej zgodnie z zależnością (22) siły elektrodynamicznej podano na rys. 7. Ponadto na rys. 7 przedstawiono dla porównania przebieg siły elektrodynamicznej wywołanej tylko składową okresowo zmienną prądu, wyznaczony z uwzględnieniem zjawiska wypierania prądu w pręcie. Jak wynika z rys. 7,



Rys. 6. Przebieg prądu w pręcie wirnika w początkowym okresie rozruchu silnika SZJc 194te; 1 — przebieg prądu w pręcie; 2 — składowa okresowo zmienna prądu w pręcie wirnika; 3 — składowa aperiodyczna prądu w pręcie wirnika



Rys. 7. Przebieg maksymalnej siły elektrodynamicznej w prostokątnym pręcie wirnika w początkowym okresie rozruchu silnika SZJc 194te; 1 — siła wywołana rzeczywistym przebiegiem prądu w pręcie wyznaczona metodą zastępczych przebiegów sinusoidalnych; 2 — siła wywołana składową okresowo-zmienną prądu

występowanie składowej aperiodycznej prądu w pręcie wirnika powoduje prawie dwukrotny wzrost maksymalnej amplitudy siły elektrodynamicznej w stosunku do wartości wywołanej tylko prądem okresowo-zmiennym.

W przeprowadzonych obliczeniach nie uwzględniono zjawiska nasycenia rdzenia wirnika. Uwzględnienie tego zjawiska spowodowałoby zmniejszenie uzyskanych wartości maksymalnych amplitud siły elektrodynamicznej [3]. W związku z tym, w przypadku pominięcia zjawiska nasycenia, siły elektrodynamiczne działające na pręt wirnika obliczane są z pewnym zapasem.

4. WNIOSKI

1. Wartości i przebieg siły elektrodynamicznej zależą od charakteru prądu w pręcie wirnika. Przepływ prądu okresowo-zmiennego w pręcie wirnika wywołuje siłę zawsze dodatnią o częstotliwości dwukrotnie większej od częstotliwości prądu, skierowaną zawsze w kierunku dna żłobka.

2. Obecność składowej stałej w prądzie płynącym w pręcie wirnika, równej amplitudzie prądu okresowo-zmiennego powoduje powstanie siły o amplitudzie czterokrotnie większej od amplitudy wywołanej przepływem tylko prądu okresowo-zmiennego. Częstotliwość tej siły jest równa częstotliwości prądu w pręcie. Siła ta jest skierowana także w kierunku dna żłobka.

3. W rzeczywistym przebiegu prądu w warunkach nieustalonych występuje składowa aperiodyczna prądu, która powoduje powstanie siły elektrodynamicznej nieco mniejszej

niż przy obecności składowej stałej, ale znacznie większej niż przy uwzględnieniu tylko przebiegu okresowo-zmiennego.

4. Ogólne wyrażenie na siłę elektrodynamiczną (22) zostało wyprowadzone dla prądów sinusoidalnie zmiennych z uwzględnieniem zjawiska wypierania prądu w pręcie wirnika.

5. Obecność składowej aperiodycznej w prądzie wirnika można uwzględnić metodą zastępczych przebiegów sinusoidalnych. Metoda ta pozwala na poprawne wyznaczenie wartości siły elektrodynamicznej w poszczególnych okresach, co jest istotne z punktu widzenia wartości naprężeń występujących w pręcie. Metoda ta powoduje jednakże zmianę częstotliwości tej siły w czasie występowania składowej aperiodycznej.

LITERATURA

1. M. Bernadt, *Obliczanie naprężeń od sił elektrodynamicznych działających w czasie rozruchu w prętach klatki wirnika głębokożłobkowego*, Zeszyty Problemowe Komel, 1970, nr 11.
2. M. Dąbrowski, *Konstrukcja maszyn elektrycznych*, WNT, Warszawa, 1977.
3. J. Turowski, *Elektrodynamika techniczna*, WNT, Warszawa, 1978.
4. M. Krakowski, *Elektrotechnika teoretyczna*, Tom III, PWN, Warszawa—Poznań, 1978.
5. R. Kurdziel, *Działanie cieplne i dynamiczne prądów zwarciowych*, PWT, Warszawa, 1957.
6. P. Rolicz, R. Sikora, *Analiza sił działających na pręty umieszczone w żłobkach maszyn elektrycznych*, Część I, II, Archiwum Elektrotechniki, zeszyt 2, 3, 1973.
7. R. Sikora, W. Lipiński, *Dwuwymiarowe wypieranie prądu w żłobku maszyny elektrycznej*, Archiwum Elektrotechniki, zeszyt 2, 1971.

M. DEMS, T. KOTER

THE INFLUENCE OF APERIODICAL CURRENT COMPONENT ON ELECTRODYNAMICAL FORCES IN ROTOR BARS OF THE INDUCTION MOTOR

Summary

The paper presents the method of calculation of the electrodynamical force acting on the perpendicular rotor bar in a squirrel-cage rotor of induction motor, caused by the current containing the aperiodical camponent. The influence of it and constant component on transient force in rotor bar is also discussed.

M. DEMS, T. KOTER

INFLUENCE D'UNE COMPOSANTE APÉRIODIQUE D'UN COURANT SUR LE CARACTÈRE DES FORCES ÉLECTRODYNAMIQUES AGISSANT SUR LES VERGES DE ROTOR DU MOTEUR ASYNCHRONE

Résumé

Dans l'article on a présenté la méthode de détermination de la force électrodynamique agissant sur une verge rectangulaire du rotor d'un moteur asynchrone qui est évoguéepar le courant contenant une composante apériodique. En outre, on a examiné l'influence de cette composante sur la valeur et le caractère de cette force.

M. DEMS, T. KOTER

EINFLUSS DER APERIODISCHEN STROMKOMPONENTE AUF DEN VERLAUF DER ELEKTRODYNAMISCHEN KRÄFTE IN ROTORSTÄBEN EINES INDUKTIONSMOTORS

Zusammenfassung

Eine Bestimmungsmethode für die elektrodynamische Kraft wurde bestimmt, die den rechteckigen Rotorstab des Indusktionsmotors beeinflußt. Sie wird durch den eine aperiodische Komponente enthaltenden Strom ausgelöst. Außerdem wurde der Einfluß der festen und der aperiodischen Stromkomponenten im Rotorstab auf Wert und Verlauf der elektrodynamischen Kraft analysiert.

М. ДЕМС, Т. КОТЭР

ВЛИЯНИЕ АПЕРИОДИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ТОКА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ ДЕЙСТВУЮЩИХ НА СТЕРЖНЕ РОТОРА АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

Резюме

Представлен метод определения электродинамической симя действующей на роторный старжень прямоугольного асинхронного глубокопазного двигателя.

Проведен анализ влияния апериодической составляющей тока на характеристику этой силы.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1986, 32, z. 1, ss. 18 -197

621.313.333

Obliczanie strat podstawowych w rdzeniu silnika indukcyjnego z uwzględnieniem przemagnesowania obrotowego i anizotropii magnetycznej

JAN ANUSZCZYK (ŁÓDŹ)

Instytut Transformatorów, Maszyn i Aparatów Elektrycznych Politechniki Łódzkiej

Otrzymano 02.08.1984

W pracy przedstawiono metodę obliczania strat podstawowych w rdzeniu 3-fazowego silnika indukcyjnego uwzględniającą fakt przemagnesowywania obrotowego jarzma stojana oraz anizotropię magnetyczną materiału rdzenia. Podstawą obliczeń w proponowanej metodzie są dwie odmienne charakterystyki stratności do wyznaczania strat w jarzmie oraz w zębach rdzenia. Weryfikację pomiarową przeprowadzono na silnikach modelowych klatkowych o wzniosie wału 132 mm, których obwody magnetyczne zostały wykonane z trzech rodzajów blachy elektrotechnicznej o różnej anizotropii magnetycznej. Określono wpływ anizotropii magnetycznej na wartość strat podstawowych w rdzeniu silnika.

1. WSTĘP

Stosowanie w budowie rdzeni silników indukcyjnych trójfazowych blach elektrotechnicznych walcowanych na zimno wykazujących anizotropię własności magnetycznych wymaga weryfikacji metod obliczeń elektromagnetycznych, a także określenia wpływu zjawiska anizotropii na wartość parametrów silnika. W dotychczasowych metodach obliczeniowych obwodu magnetycznego maszyn indukcyjnych, zjawisko anizotropii magnetycznej uwzględnia się korzystając z charakterystyk magnesowania oraz stratności wyznaczonych za pomocą aparatu Epsteina dla próbek mieszanych (składających się po połowie z próbek wyciętych wzdłuż oraz w poprzek do kierunku walcowania blachy), co jest postępowaniem umownym. Doświadczenie wskazuje, że obliczenia strat w rdzeniu silnika indukcyjnego na podstawie stratności przeniesionej z aparatu Epsteina prowadzą często do rozbieżności wyników obliczeń i pomiarów mimo stosowania współczynników korekcyjnych. Powodem tego, obok wielu złożonych czynników technologicznych jest anizotropia magnetyczna blach elektrotechnicznych, a także odmienność charakteru przemagnesowania oraz kształtu próbek blach w aparacie Epsteina w stosunku do charakteru przemagnesowania i kształtu rzeczywistego obwodu magnetycznego silnika. Studia teoretyczne i badania doświadczalne przeprowadzone w pracach [1, 2, 3, 4] pozwalają na przedstawienie metody obliczania strat podstawowych w rdzeniu silnika indukcyjnego

(tj. strat wywoływanych pierwszą harmoniczną przepływu stojana), uwzględniającej przemagnesowanie obrotowe stojana i anizotropię magnetyczną materiału rdzenia.

Obliczenia i badania doświadczalne przedstawione w pracy* zostały wykonane na modelowych silnikach indukcyjnych trójfazowych czterobiegunowych, budowy zwartej o wzniosie wału 132 mm, w wykonaniu specjalnym pozwalającym na pakietowanie rdzeni stojanów z różnych rodzajów blach. Na rdzenie silników zastosowano trzy rodzaje blachy elektrotechnicznej:

— blachę bezkrzemową Fe64.50 — silnik MB4
— blachę niskokrzemową Ei60 — silnik ME4
— blachę transformatorową M4 — silnik MT4

Pomiarami magnetycznymi objęto, obok blach Fe64.50, Ei60 i M4, dodatkowo blachę niskokrzemową EP14. Blachy te wykazują różną wartość anizotropii magnesowalności i stratności. Anizotropia magnesowalności jako różnica indukcji magnetycznej pomierzonej dla próbek wyciętych wzdłuż i w poprzek do kierunku walcowania blachy podawana jest zwykle przy natężeniu pola magnetycznego $H_m = 2500$ A/m:

$$\Delta B_{25} = B_{0^\circ} - B_{90^\circ}. \tag{1}$$

Anizotropia magnesowalności badanych blach ma wartość:

— dla blachy Fe64.50, $\Delta B_{25} = 0{,}06$ T
— dla blachy Ei60, $\Delta B_{25} = 0{,}11$ T
— dla blachy EP14, $\Delta B_{25} = 0{,}21$ T
— dla blachy M4, $\Delta B_{25} = 0{,}47$ T

Anizotropia stratności jest zwykle określana przy indukcji $B_m = 1{,}5$ T na podstawie zależności:

$$A_{p1,5} = \frac{\Delta p_m - \Delta p_{0^\circ}}{\Delta p_m} 100\,\% \tag{2}$$

gdzie: Δp_m — stratność blachy wyznaczona dla próbek mieszanych
Δp_{0° — stratność blachy wyznaczona dla próbek wzdłużnych wyciętych zgodnie z kierunkiem walcowania.

Anizotropia stratności badanych blach ma wartość:

— dla blachy Fe64.50, $A_{p1,5} = 2{,}6\%$
— dla blachy Ei60, $A_{p1,5} = 7{,}7\%$
— dla blachy EP14, $A_{p1,5} = 16{,}2\%$
— dla blachy M4, $A_{p1,5} = 48{,}7\%$.

Duża rozpiętość anizotropii własności magnetycznych zastosowanych w badaniach blach elektrotechnicznych pozwoliła na ocenę w pracy, wpływu anizotropii stratności na wartość strat podstawowych w rdzeniu silnika indukcyjnego.

2. METODA OBLICZANIA STRAT PODSTAWOWYCH W RDZENIU

Na przykładzie silników modelowych wykonanych z blach elektrotechnicznych o różnej anizotropii magnetycznej sprawdzono nową metodę obliczania strat podstawowych w rdze-

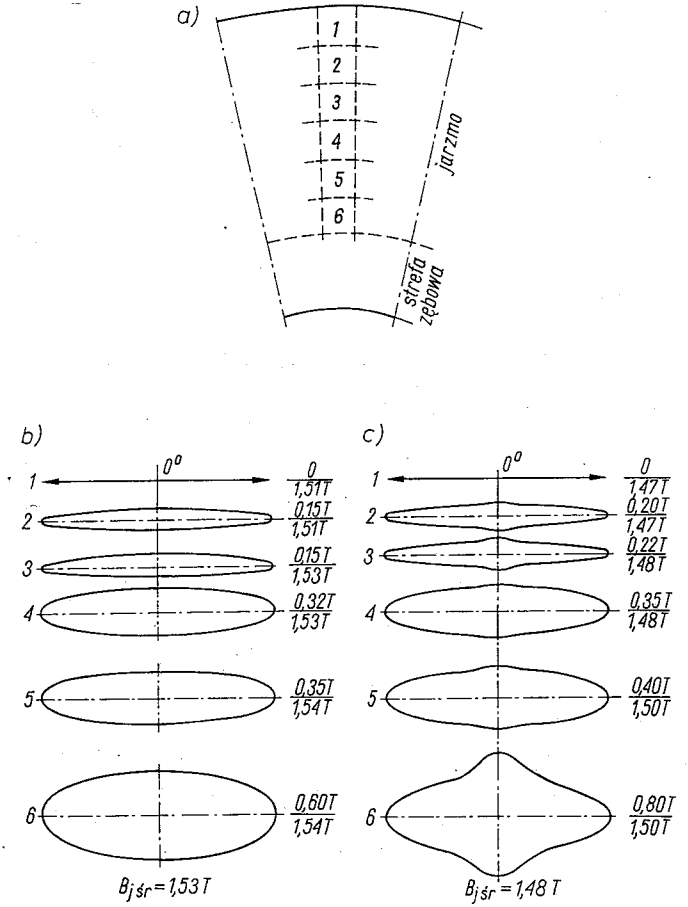
*) Praca wykonywana jest częściowo w ramach podproblemu 05.5A „Wybrane badania podstawowe w dziedzinie elektrotechniki", koordynowanego przez Zakład Badań Podstawowych Elektrotechniki MHiPM i PAN w Instytucie Elektrotechniki.

niu silnika indukcyjnego uwzględniającą fakt przemagnesowania obrotowego jarzma silnika oraz anizotropię magnetyczną materiału rdzenia. Podstawą obliczeń w proponowanej metodzie są dwie odmienne stratności do wyznaczania strat w jarzmie i w zębach rdzenia, a mianowicie:

— stratność blachy przy przemagnesowaniu obrotowym próbki pierścieniowej (Δp_0) do obliczeń strat w jarzmie, oraz

— stratność zastępcza blachy przy przemagnesowaniu osiowym (Δp_z) do obliczeń strat w zębach.

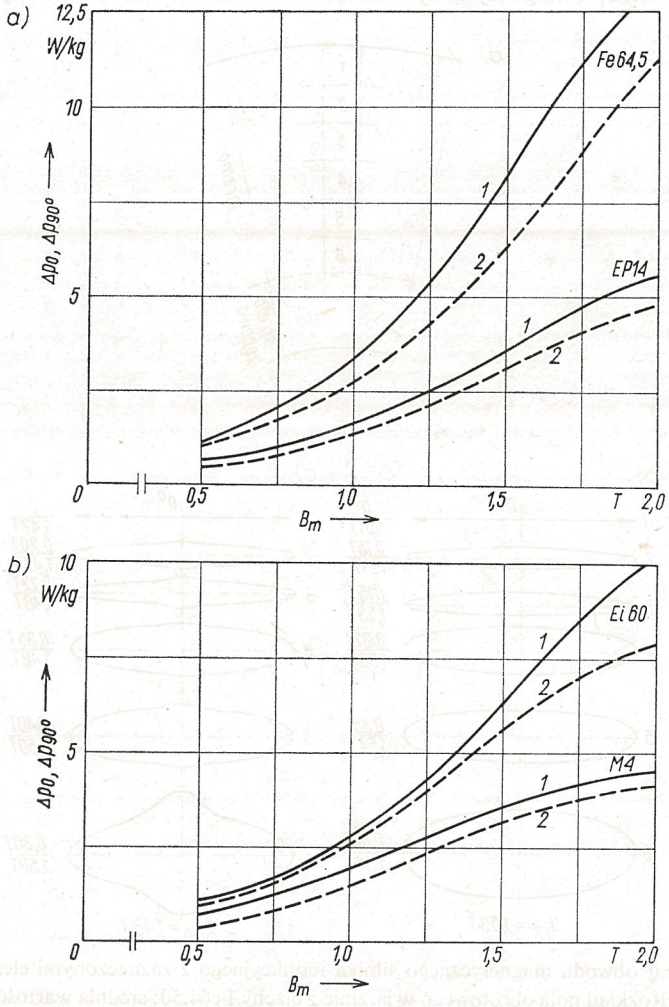
Charakter przemagnesowania obrotowego występującego w jarzmie trójfazowego silnika indukcyjnego był analizowany w pracach [2, 3]. Na rysunku 1 przedstawiono przykładowo rozkłady pola obrotowego na wysokości jarzma (w kierunku pokrywającym się z kierunkiem walcowania blach rdzenia) dla badanych silników MB4 i MT4 o krańcowo małej i dużej anizotropii magnetycznej materiału rdzenia. Rozkłady obrazują pole obrotowe



Rys. 1. a) Fragment obwodu magnetycznego silnika indukcyjnego z zaznaczonymi elementarnymi obszarami w jarzmie; b) Rozkład pola obrotowego w jarzmie z blachy Fe64.50; średnia wartość składowej stycznej indukcji $B_{j\acute{s}r}$ = 1,53 T; c) Rozkład pola obrotowego w jarzmie z blachy M4; średnia wartość składowej stycznej indukcji $B_{j\acute{s}r}$ = 1,48 T

przy średniej wartości składowej stycznej indukcji magnetycznej w jarzmie $B_{jśr} \approx 1{,}5$ T. Zmienność wektora indukcji w cyklu przemagnesowania jest zależna od umiejscowienia rozpatrywanego obszaru na wysokości jarzma oraz od kierunkowych własności magnetycznych rdzenia.

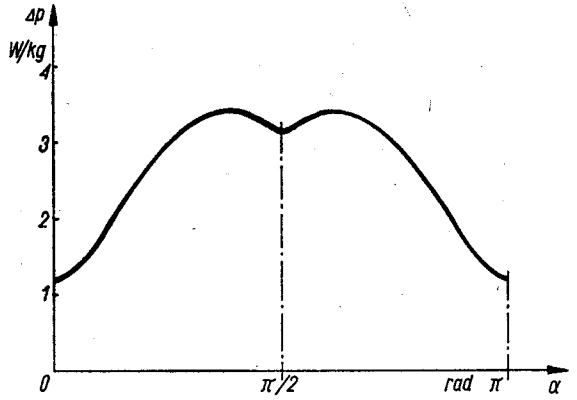
Dla przedstawionego charakteru przemagnesowania obrotowego w sposób omówiony w pracy [4], dla próbki pierścieniowej odpowiadającej umownie jarzmu silnika indukcyjnego, wyznaczono charakterystyki stratności $\Delta p_o = f(B_m)$ wziętych do badań blach elektrotechnicznych. Charakterystyki te w porównaniu z charakterystykami stratności próbek poprzecznych, wyznaczonymi za pomocą aparatu Epsteina, przedstawiono na rysunku 2. Z rysunku wynika, że wartości stratności przy przemagnesowaniu obrotowym są większe od zbliżonych do maksymalnych przy przemagnesowaniu osiowym, stratności próbek



Rys. 2. Porównanie stratności przy przemagnesowaniu obrotowym Δp_0 ze stratnością próbek poprzecznych $\Delta p_{90°}$ dla blach: a) Fe64.50 i EP14, b) Ei60 i M4; 1 — stratność Δp_0, 2 — stratność $\Delta p_{90°}$

poprzecznych. Jest to uwarunkowane odmiennością zjawiska przemagnesowania obrotowego ferromagnetyka i ma uzasadnienie fizyczne.

W odniesieniu do zębów, które rozłożone są równomiernie na obwodzie rdzenia stojana uznano, że do wyznaczania strat powinno się przyjmować taką charakterystykę stratności, która w przypadku blachy anizotropowej, uwzględniałaby fakt jednoczesnego przemagnesowania osiowego materiału zębów w różnych kierunkach w zakresie kątów od 0° do 360°. Dokładne uwzględnienie tego faktu wymagałoby szeregu próbek i wyznaczenia kątowych charakterystyk stratności dla wszystkich zębów. Ponieważ dla określonego stanu magnetycznego obliczeniowa wartość indukcji w każdym zębie jest taka sama, można stratności z charakterystyk kątowych zastąpić uśrednioną stratnością zastępczą otrzymaną w wyniku scałkowania funkcji stratności kątowych $\Delta p = f(\alpha)$ przy $B_m = const$, gdzie α jest kątem w zakresie od 0° do 360° określającym kierunek przemagnesowania



Rys. 3. Charakterystyka funkcji stratności kątowych $\Delta p = f(\alpha)$ blachy elektrotechnicznej M4, przy indukcji $B_m = 1{,}5$ T

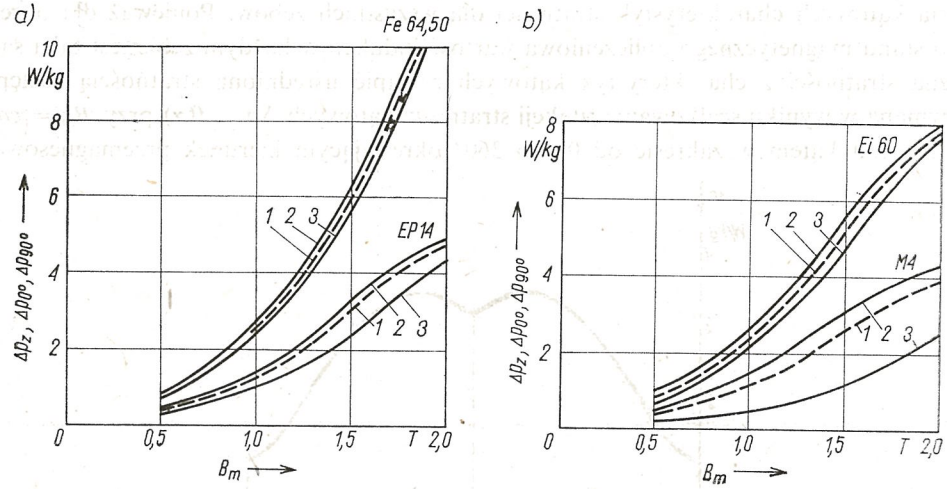
względem kierunku walcowania blachy. Na rysunku 3 przedstawiono przykładowo przebieg funkcji $\Delta p = f(\alpha)$ przy $B_m = 1{,}5$ T, dla blachy transformatorowej M4. Z przebiegów tej funkcji dla blach anizotropowych wynika, że jest to funkcja parzysta o okresie π rad. Stąd stratność zastępczą przy przemagnesowaniu osiowym można określić z zależności:

$$\Delta p_z = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \Delta p(\alpha) d\alpha \tag{3}$$

Koncepcja takiej stratności pokrywa się z propozycją podaną w pracy [5] Sołomachina i Bojko z tym, że Autorzy ci sugerują jej zastosowanie do obliczeń strat również w jarzmie, co nie odpowiada fizycznej stronie zjawiska przemagnesowania jakie w nim występuje. Obliczone charakterystyki stratności zastępczej badanych rodzajów blach w porównaniu z charakterystykami stratności próbek wzdłużnych i poprzecznych przedstawiono na rysunku 4. Odnośnie blach elektrotechnicznych o małej anizotropii (Fe64.50, Ei60) można przyjąć, że stratność zastępcza jest praktycznie równa stratności wyznaczonej za pomocą aparatu Epsteina dla próbek mieszanych. Natomiast w przypadku blach o zwiększonej anizotropii (EP14, M4), charakterystyka stratności zastępczej ma przebieg zbliżony do charakterystyki stratności próbek poprzecznych.

Rozpatrując omówione stratności można napisać użytkową formułę pozwalającą wyznaczać straty podstawowe w rdzeniu silnika indukcyjnego jako sumę strat w jarzmie i w zębach rdzenia. Zasadniczą część tych strat wynikającą tylko ze stratności materiału rdzenia można, przy określonej indukcji, obliczać z pominięciem współczynników technologicznych według zależności:

$$\Delta P_{r50} = \Delta p_0 m_j + \Delta p_z m_z. \tag{4}$$



Rys. 4. Charakterystyki stratności zastępczej $\Delta p_z = f(B_m)$ oraz stratności $\Delta p_{0°} = f(B_m)$ i $\Delta p_{90°} = f(B_m)$ próbek wzdłużnych i poprzecznych dla blach: a) Fe64.50 i EP14, b) Ei60 i M4; 1 — stratność Δp_z, 2 — stratność $\Delta p_{90°}$, 3 — stratność $\Delta p_{0°}$

gdzie: Δp_o — stratność przy przemagnesowaniu obrotowym dla wartości maksymalnej indukcji w jarzmie stojana,

Δp_z — stratność zastępcza dla wartości maksymalnej indukcji w zębach stojana,

m_j, m_z — masy jarzma i zębów.

Zależność nie uwzględnia strat w pakiecie rdzenia silnika wskutek zwarć międzyblachowych oraz wskutek prasowania, a także wzrostu stratności materiału rdzenia w procesie tłoczenia w wyniku odkształcenia struktury blachy wzdłuż linii wykrawania.

3. WYNIKI OBLICZEŃ I POMIARÓW

W pracy przedstawiono wyniki obliczeń i pomiarów strat podstawowych w rdzeniu dla 3-fazowych silników modelowych, czterobiegunowych wykonanych z trzech rodzajów blach: Fe64.50, Ei60 i M4 oznaczonych odpowiednio MB4, ME4 i MT4.

Przy pakietowaniu rdzeni stojanów zastosowano przekładki izolacyjne pomiędzy sąsiednimi wykrojami blach w celu wyeliminowania strat w pakiecie pochodzących od zwarć międzyblachowych.

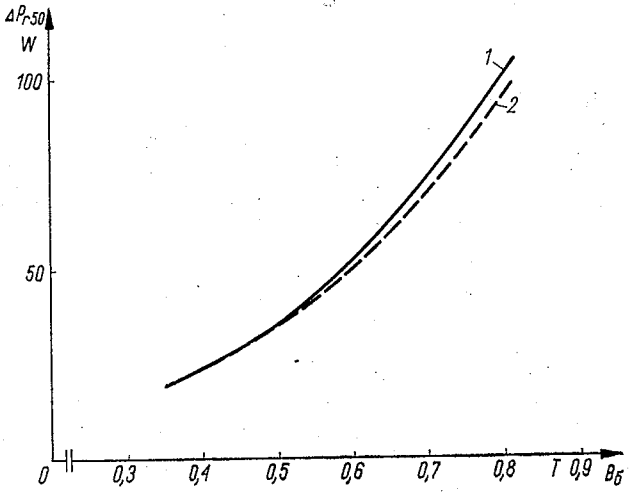
Pomiarowe i obliczeniowe charakterystyki strat $\Delta P_{r50} = f(B_\delta)$ badanych silników porównano na rys. 5, 6, 7 (B_δ — indukcja maksymalna w szczelinie powietrznej). Jak wy-

nika z wykresów charakterystyki obliczeniowe przebiegają w całym zakresie zmian indukcji poniżej charakterystyk pomiarowych dla wszystkich badanych silników. Dla indukcji magnetycznej w szczelinie $B_\delta = 0{,}75$ T ($B_j \approx 1{,}4$ T, $B_z \approx 1{,}6$ T) wyznaczono procentową różnicę między wartością pomierzoną i obliczoną strat według wzoru:

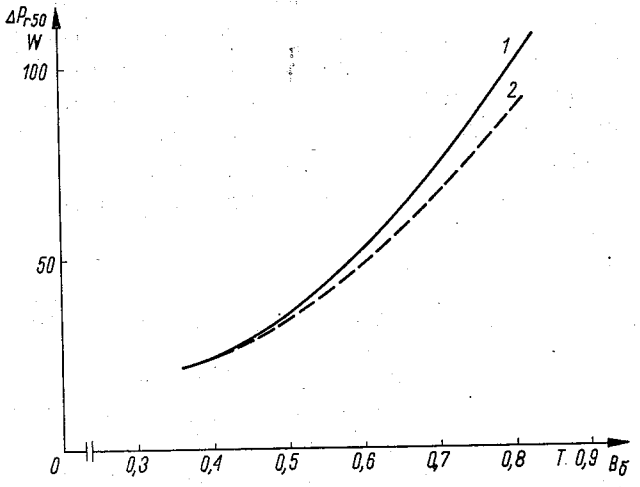
$$\delta_{p_r} = \frac{\Delta P_{r50pom} - \Delta P_{r50obl}}{\Delta P_{r50pom}} 100\,\%. \tag{5}$$

Obliczone rozbieżności wyniosły:

— dla silnika MB4 — 5,7%
— dla silnika ME4 — 11,5%
— dla silnika MT4 — 25 %



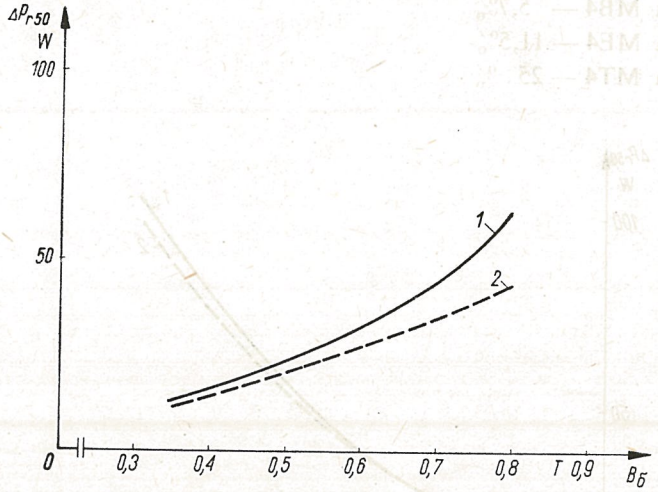
Rys. 5. Charakterystyki $\Delta P_{r50} = f(B_\delta)$ dla silnika MB4; 1 — pomiar, 2 — obliczenie



Rys. 6. Charakterystyki $\Delta P_{r50} = f(B_\delta)$ dla silnika ME4; 1 — pomiar, 2 — obliczenie

Rozbieżności pomiędzy wartościami strat otrzymanymi z obliczenia i pomiaru wzrastają przy większych nasyceniach.

Wobec praktycznej zgodności wyników obliczeniowych i pomiarowych dla silnika z blachy bezkrzemowej — wyżarzanej, można przypuszczać, że zasadniczą przyczyną rozbieżności w silnikach wykonanych z blachy Ei60 a zwłaszcza z blachy M4, jest wzrost stratności tych materiałów spowodowany zmianą struktury blachy w procesie tłoczenia. Szerokość strefy odkształconej, w której następuje zmiana struktury i utwardzenie wskutek



Rys. 7. Charakterystyki $\Delta P_{r50} = f(B_\delta)$ dla silnika MT4; 1 — pomiar, 2 — obliczenie

zgniotu na zimno zależy od rodzaju i grubości blachy. W silnikach wykonanych z blachy bezkrzemowej, która po wykrawaniu jest poddawana obróbce cieplnej, zniesione są zmiany struktury i stąd dobra zgodność obliczeń z pomiarem. Jest ona potwierdzeniem poprawności zaproponowanej metody obliczeń.

W silnikach wykonanych z blachy transformatorowej, nie stosowanej w praktyce na rdzenie trójfazowych silników indukcyjnych, rozbieżności wynikają z dużej wrażliwości tej blachy na odkształcenia w procesie tłoczenia oraz braku wyżarzania wykrojów. Należy podkreślić, że w badanych silnikach modelowych wzrost stratności materiału rdzenia i w konsekwencji strat, spowodowany procesem tłoczenia mógł szczególnie ostro występować wobec niewielkiej szerokości zębów pakietu rdzenia.

Przedstawione wyniki zostały potwierdzone w badaniach silników ośmiobiegunowych tej samej wielkości mechanicznej.

4. WPŁYW ANIZOTROPII MAGNETYCZNEJ NA STRATY PODSTAWOWE W RDZENIU

Ocenę wpływu anizotropii magnetycznej na wartość strat podstawowych w rdzeniu silnika indukcyjnego dokonano przez porównanie rzeczywistych strat w rdzeniu ze stratami wyznaczonymi na podstawie stratności próbek wzdłużnych wyciętych pod kątem 0° w stosunku do kierunku walcowania blachy. Prowadzi to w konsekwencji do analizy relacji pomiędzy dwiema charakterystykami stratności:

— charakterystyką stratności zastępczej $\Delta p_z = f(B_m)$ oraz
— charakterystyką stratności dla próbek wzdłużnych $\Delta p_{0^\circ} = f(B_m)$.

Jeżeli zasadniczy składnik strat podstawowych (bez strat technologicznych) przyjąć zgodnie ze wzorem (4), to wprowadzając do tego wzoru współczynnik wzrostu strat podstawowych wskutek przemagnesowania obrotowego

$$k_o = \frac{\Delta p_o}{\Delta p_z} \tag{6}$$

otrzymamy:

$$\Delta P_{r50} = k_0 \Delta p_{z-j} m_j + \Delta p_{z-z} m_z, \tag{7}$$

gdzie: Δp_{z-j} — stratność zastępcza dla indukcji w jarzmie B_j,
Δp_{z-z} — stratność zastępcza dla indukcji w zębach B_z

Z kolei straty w rdzeniu wyznaczone na podstawie stratności próbek wzdłużnych wyraża wzór:

$$\Delta P_{r50}(0^\circ) = k_0 \Delta p_{0^\circ-j} m_j + \Delta p_{0^\circ-z} m_z, \tag{8}$$

gdzie: $\Delta p_{0^\circ-j}$ — stratność z charakterystyki wzdłużnej dla indukcji B_j;
$\Delta p_{0^\circ-z}$ — stratność z charakterystyki wzdłużnej dla indukcji B_z

Stąd wzrost strat podstawowych wskutek anizotropii magnetycznej materiału rdzenia można określić współczynnikiem k_a według wzoru:

$$k_a = \frac{\Delta P_{r50}}{\Delta P_{r50}(0^\circ)} = \frac{k_0 \Delta p_{z-j} m_j + \Delta p_{z-z} m_z}{k_0 \Delta p_{0^\circ-j} m_j + \Delta p_{0^\circ-z} m_z}. \tag{9}$$

Współczynnik k_a jest współczynnikiem wypadkowym wynikającym ze wzrostu strat w jarzmie oraz w zębach łącznie. Wygodniej jest, ze względu na różniące się zwykle indukcje w jarzmie i zębach rdzenia, rozpatrywać osobno wzrost strat wskutek anizotropii dla jarzma oraz dla zębów silnika. Wtedy wzrost ten można ocenić porównując dla danej wartości indukcji w tych elementach straty, a właściwie stratności — stratność zastępczą ze stratnością próbek wzdłużnych. Ujmują to współczynniki wzrostu strat podstawowych wskutek anizotropii dla jarzma (k_{aj}) oraz dla zębów (k_{az}):

$$k_{aj} = k_{az} = \frac{\Delta p_z}{\Delta p_{0^\circ}}, \quad \text{przy } B_m = \text{const}. \tag{10}$$

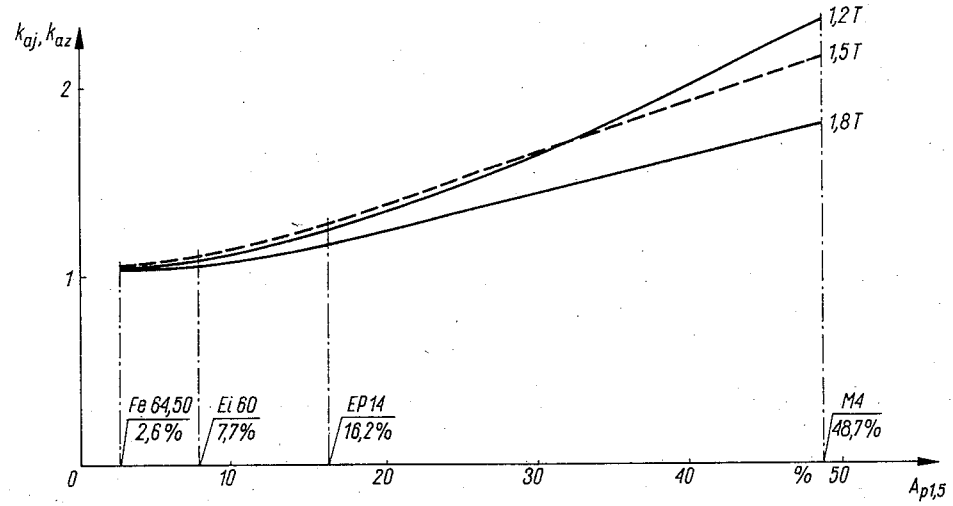
Dla badanych rodzajów blach wartości tych współczynników przy różnych wartościach indukcji magnetycznej przedstawiono w poniższej tablicy. Z tablicy tej wynika, że przy przyjętym sposobie oceny, ze wzrostem anizotropii wzrastają straty podstawowe w rdzeniu. Przy indukcjach dążących do 2 T obserwuje się zmniejszenie tego wzrostu. Współczynniki k_{aj} i k_{az} ze względu na jedyny związek ze stratnością blachy elektrotechnicznej mają charakter ogólny i mogą być stosowane do oceny wpływu anizotropii magnetycznej na wartość strat w silnikach indukcyjnych różnych wielkości.

Na podstawie tablicy przy wybranych wartościach indukcji, przedstawiono na rysunku 8 charakterystyki współczynników wzrostu strat podstawowych w zależności od anizotropii stratności $A_{p1,5}$ badanych rodzajów blach. Charakterystyki te mogą być narzędziem oceny wpływu anizotropii magnetycznej na wartość strat podstawowych w rdzeniu silnika indukcyjnego.

Tablica 1

Stratności przy przemagnesowaniu osiowym wzdłużnym ($\Delta p_{0°}$), poprzecznym ($\Delta p_{90°}$) i stratność zastępcza (Δp_z) oraz współczynniki wzrostu strat podstawowych wskutek anizotropii (k_{aj}, k_{az}) dla różnych rodzajów blach

Rodzaj blachy	B_m	T	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
Fe64.50	$\Delta p_{0°}$	W/kg	1,28	1,62	2,00	2,50	3,00	3,55	4,15	4,75	5,68	6,60	7,65	8,80	10,00	11,10
	$\Delta p_{90°}$	W/kg	1,42	1,78	2,21	2,65	3,17	3,80	4,52	5,30	6,30	7,34	8,50	9,60	10,53	11,37
	Δp_z	W/kg	1,37	1,74	2,16	2,61	3,10	3,67	4,31	5,03	5,95	6,89	7,89	9,04	10,21	11,21
	k_{aj}, k_{az}	—	1,07	1,07	1,08	1,04	1,03	1,03	1,04	1,06	1,05	1,04	1,03	1,03	1,02	1,01
Ei60	$\Delta p_{0°}$	W/kg	1,13	1,45	1,80	2,20	2,60	3,07	3,52	4,07	4,70	5,45	6,12	6,71	7,15	7,60
	$\Delta p_{90°}$	W/kg	1,55	1,90	2,26	2,66	3,15	3,66	4,17	4,80	5,57	6,30	6,80	7,20	7,55	8,00
	Δp_z	W/kg	1,34	1,67	2,00	2,41	2,86	3,36	3,90	4,48	5,20	5,96	6,51	6,96	7,36	7,78
	k_{aj}, k_{az}	—	1,19	1,15	1,11	1,10	1,10	1,09	1,11	1,10	1,11	1,09	1,06	1,04	1,03	1,02
EP14	$\Delta p_{0°}$	W/kg	0,54	0,69	0,86	1,05	1,22	1,47	1,70	1,99	2,35	2,75	3,16	3,52	3,93	4,30
	$\Delta p_{90°}$	W/kg	0,79	0,95	1,17	1,39	1,67	1,95	2,35	2,79	3,26	3,60	3,90	4,42	4,59	4,89
	Δp_z	W/kg	0,67	0,84	1,05	1,29	1,54	1,84	2,17	2,66	3,09	3,45	3,77	4,16	4,53	4,84
	k_{aj}, k_{az}	—	1,23	1,22	1,22	1,23	1,26	1,25	1,27	1,34	1,31	1,25	1,19	1,18	1,15	1,13
M4	$\Delta p_{0°}$	W/kg	0,27	0,33	0,40	0,50	0,59	0,70	0,83	1,00	1,19	1,40	1,69	1,90	2,16	2,55
	$\Delta p_{90°}$	W/kg	0,81	1,00	1,21	1,45	1,75	2,08	2,41	2,80	3,15	3,50	3,80	4,00	4,10	4,12
	Δp_z	W/kg	0,62	0,76	0,93	1,12	1,37	1,65	1,95	2,26	2,58	2,89	3,18	3,42	3,60	3,75
	k_{aj}, k_{az}	—	2,29	2,30	2,32	2,24	2,32	2,36	2,35	2,26	2,17	2,06	1,96	1,80	1,67	1,47



Rys. 8. Zależność współczynnika wzrostu strat podstawowych w jarzmie oraz w zębach rdzenia od wartości anizotropii stratności blachy

5. WNIOSKI

Z przedstawionych w pracy obliczeń i badań doświadczalnych wynikają następujące wnioski:

1. W proponowanej metodzie wyznaczania strat podstawowych w rdzeniu silnika indukcyjnego (bez strat technologicznych), obliczenia realizowane są na podstawie stratności przy przemagnesowaniu obrotowym dla jarzma oraz stratności zastępczej przy przemagnesowaniu osiowym dla zębów rdzenia.

2. Podana metoda pozwala na uwzględnienie w obliczeniach strat zjawiska przemagnesowania obrotowego jarzma silnika oraz anizotropii magnetycznej materiału rdzenia.

3. Wyniki obliczeń strat podstawowych według podanej metody są dla silników z blachy bezkrzemowej praktycznie zgodne z pomiarem. Pewne rozbieżności występujące dla silników wykonanych z blach elektrotechnicznych o lepszych własnościach magnetycznych (Ei60, M4), mogą wynikać ze wzrostu pomierzonych strat wskutek zgniotu i zmiany struktury blachy w procesie tłoczenia.

4. Ze wzrostem anizotropii blachy elektrotechnicznej następuje wzrost strat podstawowych w jarzmie i w zębach rdzenia przy czym wzrost ten jest większy przy mniejszym nasyceniu obwodu magnetycznego silnika.

LITERATURA

1. J. Anuszczyk, *Wpływ przemagnesowania obrotowego na straty podstawowe w rdzeniu trójfazowego silnika indukcyjnego z uwzględnieniem zjawiska anizotropii magnetycznej*, Praca doktorska, Politechnika Łódzka 1982.

2. J. Anuszczyk, *Analiza przemagnesowania obrotowego w jarzmie trójfazowego silnika indukcyjnego* ZNPŁ Elektryka nr 74, 1983.

3. J. Anuszczyk, *Wyznaczanie przemagnesowania obrotowego w jarzmie silnika indukcyjnego metodą schematu reluktancyjnego*, Rozprawy Elektrotechniczne nr 1, 1985.
4. J. Anuszczyk, *Badania stratności blach przy przemagnesowaniu obrotowym próbki pierścieniowej*, Przegląd Elektrotechniczny nr 12, 1984.
5. D. W. Sołomachin, E. P. Bojko, *Potieri w stali asinchronnych dwigatieliej s ucziotom magnitnoj anizotropii elektrotiechniczieskoj stali*, Elektrotiechnika nr 3, 1979.

J. ANUSZCZYK

CALCULATION OF BASIC LOSSES IN THE CORE OF INDUCTION MOTOR INCLUDING ROTATIONAL MAGNETIZATION AND MAGNETIC ANISOTROPY

Summary

The paper presents the method of calculation of basic losses in the core of 3-phase induction motor taking into account the phenomenon of rotational magnetization stator yoke and magnetic anisotropy of core. The two different characteristics of losses have been taken for calculation of basic losses in the yoke and teeth of core. The experimental verification has been made for squirrel cage motors (shaft lift 132 mm). The magnetic circuits have been made of 3 different kinds of electrotechnical steels of various magnetic anisotropy. The influence of magnetic anisotropy on the value of basic losses in the core of induction motor has been defined.

J. ANUSZCZYK

CALCUL DES PERTES FONDAMENTALES EN FER DANS LE NOYAU DU MOTEUR À INDUCTION PRENANT EN CONSIDÉRATION LA MAGNÉTISATION ROTATOIRE ET L'ANISOTROPIE MAGNÉTIQUE

Résumé

Dans le travail on a décrit la méthode de calcul des pertes findamentales en fer dans le noyau du moteur à induction triphasé en prenant en considération la magnétisation rotatoire dans la culasse de carcasse et l'anisotropie magnétique du matériau du noyau. La détermination des pertes dans la culasse et dans les dents du noyau par méthode proposée est basée sur deux différentes caractéristiques des pertes en fer unitaires. La comparaison des résultats de calcul avec les résultats expérimentaux a été faite pour les moteurs à cage, dont les circuits magnétiques ont été construits en trois sortes de tôles à cristaux orientés ayant l'anisotropie magnétique différente. On a déterminé l'influence de l'anisotropie magnétique sur la valeur des pertes fondamentales en fer dans le noyau du moteur.

J. ANUSZCZYK

BERECHNUNG VON GRUNDVERLUSTEN IM MAGNETKERN EINES INDUSKTIONSMOTORS UNTER BERÜCKSICHTIGUNG DER DREHÜBERMAGNETISIERUNG UND DER MAGNETISCHEN ANISOTROPIE

Zusammenfassung

In dem Artikel wurde eine Berechnungsmethode für Grundverluste im Kern eines dreiphasigen Induktionsmotors beschrieben unter Berücksichtigung einer Drehübermagnetisierung des Ständerjochs sowie der magnetischen Anisotropie des Kernstoffes. Grundlage für die Berechnungen bei dieser Methode sind zwei verschiedene Kennlinien für die Bestimmung von Jochverlusten und der Kernzähne. Der Vergleich der Meßergebnisse wurde anhand von Modellen von Käfigläufermotoren mit Wellenhebung 132 mm getätigt, deren Magnetkreise aus drei Arten elektrotechnischer Bleche mit verschiedener magnetischer Anisotropie ausgeführt worden waren. Der Einfluß auf den Wert der Grundverluste wurde bestimmt.

Я. АНУЩЫК

РАСЧЕТ ОСНОВНЫХ ПОТЕРЬ В СЕРДЕЧНИКЕ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ С УЧЁТОМ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ПЕРЕМАГНИЧИВАНИЯ И МАГНИТНОЙ АНИЗОТРОПИИ

Р е з ю м е

Представлен метод расчета основных потерь в сердечнике трехфазного асинхронного двигателя учитывающий вращательное перемагничивание ярма статора и магнитную анизотропию материала сердечника. Основой расчета предлагаемого метода являются две различные характеристики единичных потерь для определения потерь в ярме и в зубцах сердечника. Экспериментальная проверка проведена на двигателях с короткозамкнутым ротором с высотой оси вращения 132 мм, которых магнитные цепи изготовлены из трех марок электротехнической стали с различной магнитной анизотропией. Определено влияние магнитной анизотропии на значение основных потерь в сердечнике двигателя.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1986, 32, z. 1, ss. 199-210

621.314.57/58

Procesy przejściowe w przekształtniku idealnego źródła napięcia stałego przy trójfazowych zwarciach symetrycznych w systemie elektroenergetycznym

GRZEGORZ PLENZLER (POZNAŃ)

Instytut Elektroenergetyki Politechniki Poznańskiej

Otrzymano 26.06.1984

W artykule przedstawiono analizę procesu przejściowego zapoczątkowanego skokową zmianą parametrów systemu elektroenergetycznego, spowodowaną trójfazowym zwarciem symetrycznym. Posługując się metodą równań różnicowych określono wartości natężenia prądu w obwodzie prądu stałego w momentach załączania kolejnych tyrystorów i podano równania prądu na odcinkach między tymi momentami. Przeanalizowano wpływ zwarć na wartości napięć obwodu, wielkość kąta komutacji i warunki bezpiecznego wyłączania zaworów przy pracy falowniczej.

1. WPROWADZENIE

Przekształtniki tyrystorowe pracujące jako falowniki są często stosowane w charakterze elementów sprzęgających nietypowe źródła energii prądu stałego z systemem elektroenergetycznym. Mają one korzystne właściwości regulacyjne, umożliwiające stosunkowo łatwe dostosowanie do siebie parametrów źródła i systemu w rozmaitych stanach pracy. Wzrost mocy źródeł prądu stałego zasilających system elektroenergetyczny (przekształtnikowe układy docierania agregatów prądotwórczych lokomotyw spalinowych, sprzęgła prądu stałego) wymaga dodatkowo analizy ich zachowania się w stanach awaryjnych systemu.

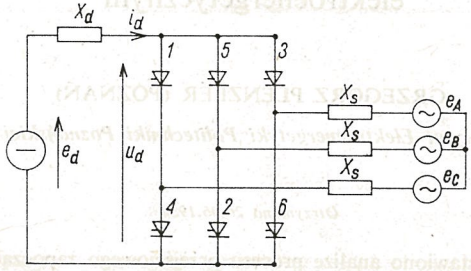
Zagadnienie to dla stanu ustalonego zwarć (określonego przy pominięciu pulsacji prądu w obwodzie prądu stałego) zostało już dość dokładnie rozeznane [1, 2, 3, 4]. Dla pełnej jednak oceny zjawisk niezbędna jest analiza procesu przejściowego, jaki zostanie wywołany w przekształtniku i źródle prądu stałego przy zwarciu w systemie elektroenergetycznym.

W artykule przedstawiono analizę procesu przejściowego zapoczątkowanego skokową zmianą parametrów systemu elektroenergetycznego, spowodowaną trójfazowym zwarciem symetrycznym. Posługując się metodą równań różnicowych określono wartości natężenia prądu w obwodzie prądu stałego w momentach załączania poszczególnych tyrystorów

i podano równania prądu na odcinkach między tymi momentami. Przeanalizowano wpływ zwarć na wartości napięć obwodu, wielkość kąta komutacji i warunki bezpiecznego wyłączania przy pracy falowniczej.

2. SCHEMAT ZASTĘPCZY, PRZEBIEGI NAPIĘCIOWE I PRĄDOWE

Schemat zastępczy analizowanego układu przedstawiono na rys. 1. Przekształtnik tyrystorowy pracuje w układzie mostka trójfazowego. Przyjęto następujące założenia upraszczające, słuszne dla układów przekształtnikowych dużej mocy [5]:



Rys. 1. Schemat zastępczy analizowanego układu

— pominięto prąd biegu jałowego, pojemności uzwojeń oraz nieliniowość charakterystyki magnesowania transformatora;
— pominięto prądy tyrystorów w stanach zaporowym i blokowania oraz spadek napięcia na nich w stanie przewodzenia;
— system elektroenergetyczny odwzorowano za pomocą trzech symetrycznych napięć fazowych:

$$e_A = E_m \cos\vartheta,$$
$$e_B = E_m \cos\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right), \tag{1}$$
$$e_C = E_m \cos\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right),$$

gdzie: E_m jest amplitudą napięcia fazowego [V], $\vartheta = \omega t$, oraz trzech reaktancji fazowych X_s [Ω], zawierających również reaktancję wyidealizowanego transformatora przekształtnikowego. Napięcia i reaktancje mają wartości przeliczone na stronę wtórną transformatora (połączoną galwanicznie z przekształtnikiem).

Podstawowym jednak założeniem upraszczającym analizę jest pominięcie rezystancji systemu elektroenergetycznego oraz przyjęcie bezoporowego źródła energii prądu stałego, co umożliwiło uzyskanie stosunkowo prostych zależności opisujących proces. Jak wynika z prac Nejmana, Possego i Słonima [6] uproszczenie to jest dopuszczalne, gdy suma rezystancji obwodu prądu stałego i jednej fazy systemu elektoenergetycznego jest mniejsza przynajmniej o rząd wielkości od fazowej reaktancji komutacyjnej X_s, co bywa spełnione w układach dużej mocy. Ponadto analiza dotyczyć będzie zakresu pracy przekształtnika z komutacją prostą (przewodzenie zaworów grupami po 2 i po 3).