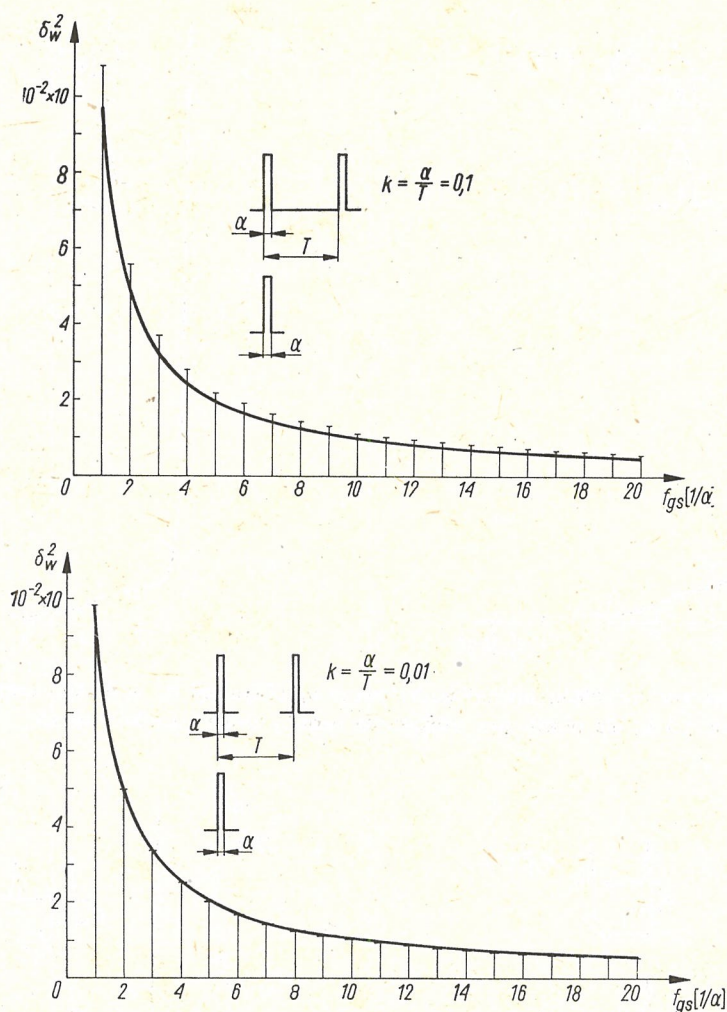


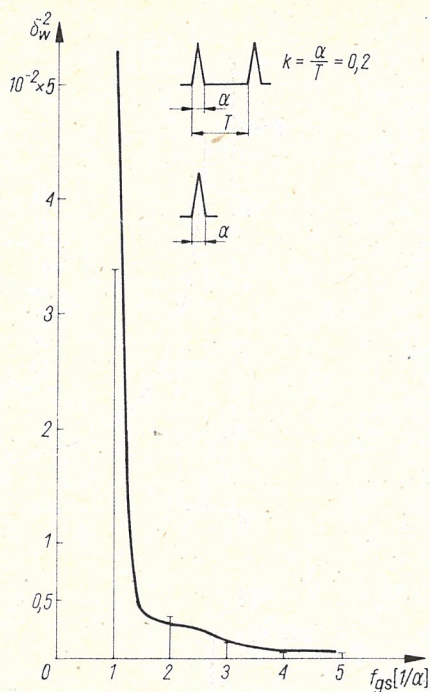
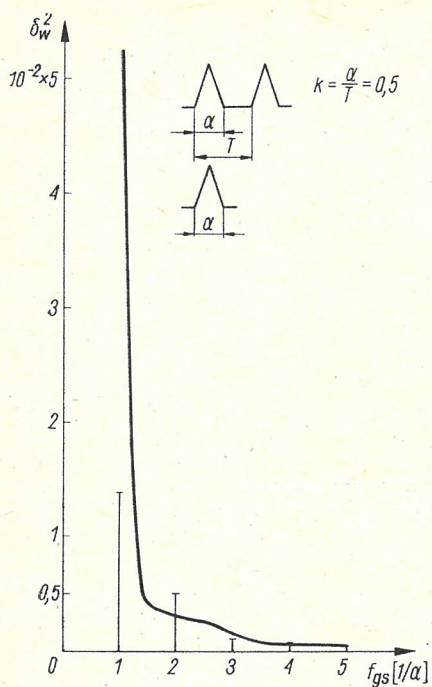


Rys. 3. Zależności błędu średniokwadratowego aproksymacji δ_w^2 w funkcji częstotliwości granicznej f_{gs} dla przebiegów prostokątnych periodycznych i jednorazowych

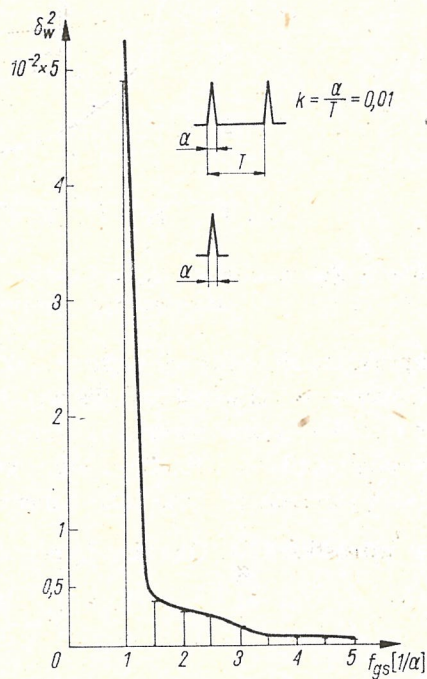
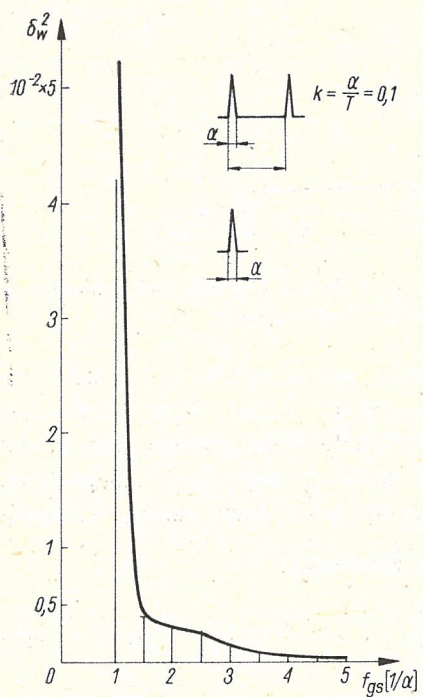
aproksymacji w funkcji częstotliwości granicznej przedstawiono na rys. 3, 4, 5 dla ustalonych wartości współczynnika wypełnienia impulsów $k = 0,5; 0,2; 0,1; 0,01$. Na każdym z rysunków przedstawiono zależność $\delta_w^2 = g(f_{gs})$ dla sygnału periodycznego przy danym współczynniku k i zależność $\delta_w^2 = g(f_{gs})$ dla sygnału jednorazowego tego samego typu. Na wykresach przyjęto jako zmienną niezależną częstotliwość graniczną f_{gs} wyrażoną w jednostkach $\frac{1}{\alpha}$. Obowiązują przy tym następujące zależności:

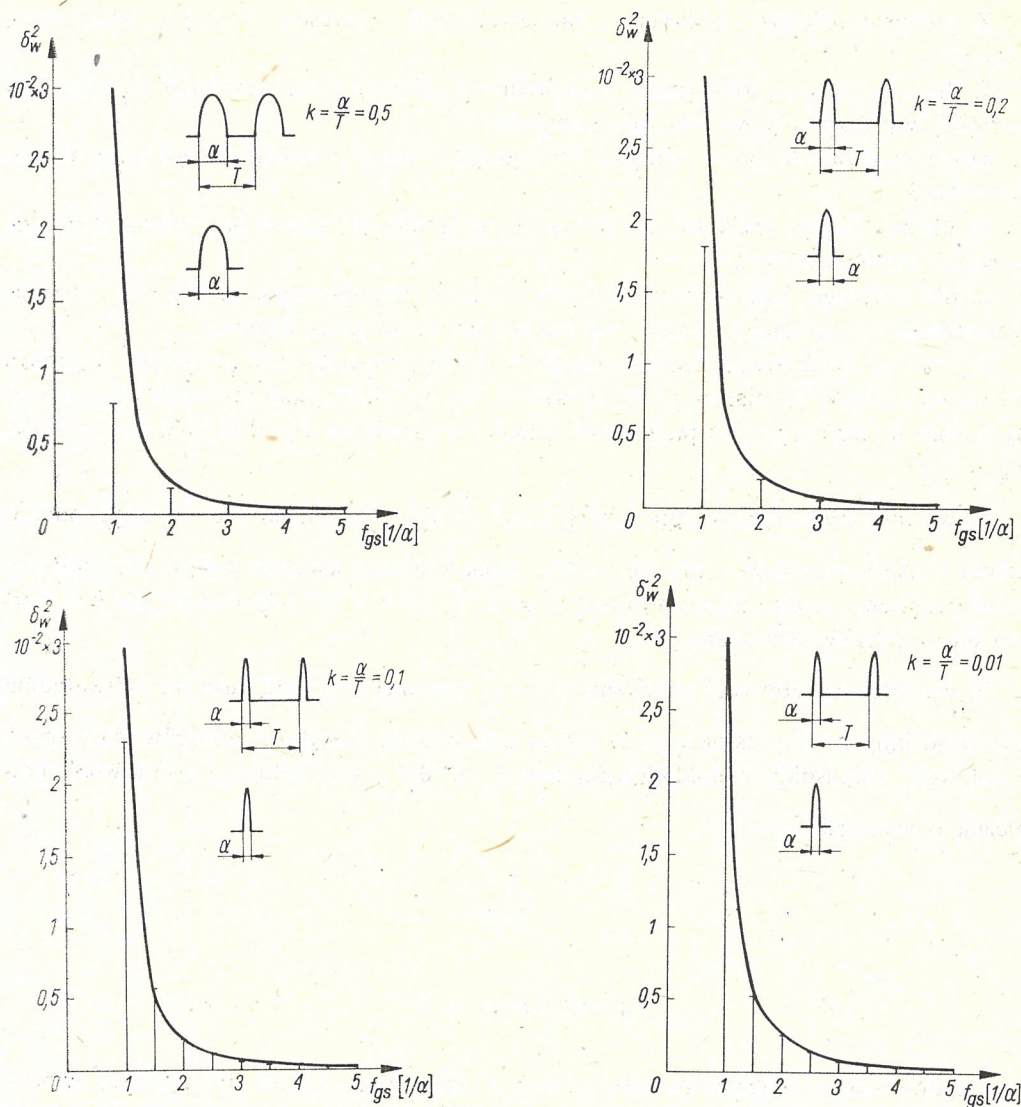
$$f = \frac{1}{\alpha} = n_f \cdot f_0 = \frac{n_f}{r} \cdot f_r \quad (11)$$

$$n_f = \frac{T}{\alpha} = \frac{f}{f_0} \quad (12)$$



Rys. 4. Zależności wartości błędu średniokwadratowego aproksymacji δ_w^2 w funkcji częstotliwości granicznej f_{gs} dla przebiegów trójkątnych okresowych i jednorazowych





Rys. 5. Zależności wartości błędu średniokwadratowego aproksymacji δ_w^2 w funkcji częstotliwości granicznej f_{gs} dla przebiegów połówek cosinusoidy periodycznych i jednorazowych

gdzie:

f_0 — częstotliwość harmonicznej podstawowej $f_0 = \frac{1}{T}$

f_r — częstotliwość r -tej harmonicznej

Rząd harmonicznej n_f jest ściśle związany z rzędem harmonicznej odpowiadającej pierwszemu zeru widma amplitudowego n_{01} danego przebiegu. Dla przebiegu impulsów prostokątnych $n_f = n_{01}$, dla impulsów trójkątnych $n_f = \frac{1}{2} n_{01}$, a dla przebiegu z połówek cosinusoidy $n_{01} = 1,5 n_f$.

Z przeprowadzonych obliczeń i zamieszczonych wykresów wynikają następujące wnioski:

1. dla sygnałów periodycznych błąd średniokwadratowy aproksymacji δ_w^2 zależy od wartości współczynnika wypełnienia impulsów k

a) dla przebiegów prostokątnych δ_w^2 maleje ze zmniejszaniem się wartości współczynnika k

b) dla przebiegów trójkątnych i połówek cosinusoidy δ_w^2 rośnie przy zmniejszaniu się wartości współczynnika k

2. dla wiernego odtworzenia kształtu sygnału impulsowego, największa wartość częstotliwości granicznej f_{gs} wymagana jest dla impulsów prostokątnych

3. wartość błędu średniokwadratowego w funkcji częstotliwości granicznej z punktu wymagań praktyki pomiarowej jest jednakowa dla impulsów jednorazowych i periodycznych tego samego typu, już przy współczynniku wypełnienia $k = 0,01$ (różnica mniejsza niż 0,1%)

4. wartość częstotliwości granicznej $f_{gs} = \frac{3}{\alpha}$ jest zbyt mała dla wiernego odtwarzania kształtu przebiegów prostokątnych, zniekształcenia kształtu przy takiej częstotliwości granicznej są zbyt duże i wynoszą $\delta_w^2 = 6,7\%$ dla $k = 0,5$ i $\delta_w^2 = 3,4\%$ dla $k = 0,01$ lub dla impulsów jednorazowych

5. wartość częstotliwości granicznej $f_{gs} = \frac{3}{\alpha}$ jest niepotrzebnie duża dla odtwarzania kształtów innych niż prostokątny. Wierność odtwarzania kształtu przebiegów trójkątnych i połówek cosinusoidy z dokładnością lepszą niż 0,5% gwarantuje częstotliwość graniczna o wartości $f_{gs} = \frac{2}{\alpha}$

4. PODSUMOWANIE

Częstotliwość graniczna sygnału f_{gs} jest ważnym parametrem. Umiejętność wyznaczenia wartości tego parametru umożliwia właściwy dobór przyrządów pomiarowych, pod względem właściwości dynamicznych.

Dla sygnałów impulsowych o znanych kształtach, częstotliwość graniczną f_{gs} dla odtworzenia wartości szczytowej proponuje się wyznaczać z zależności (3) na podstawie twierdzenia Shannona, natomiast dla odtwarzania kształtu sygnału dla przebiegów periodycznych z zależności (7) i (8), a z zależności (10) dla przebiegów jednorazowych, przy założonej dokładności odtwarzania kształtu przebiegu, a więc przy założonej wartości błędu średniokwadratowego δ_w^2 . W przypadkach nieznanego kształtu przebiegu należy przyjmować kształt prostokątny i określać f_{gs} dla żądanej wartości błędu średniokwadratowego δ_w^2 , wykorzystując zależności z tablicy 1 i 2 lub wykresy z rys. 3. Wyznaczona w ten sposób wartość częstotliwości granicznej, gwarantuje wymaganą wierność odtwarzania kształtu impulsu bez względu na rodzaj jego kształtu.

LITERATURA

1. R. Bracewell, *Przekształcenie Fouriera i jego zastosowania*, WNT, Warszawa 1968.
2. R. Hagel, J. Zakrzewski, *Miernictwo dynamiczne*, WNT, Warszawa 1984.
3. M. Kraus, E. G. Woschni, *Systemy pomiarowo informacyjne*, PWN, Warszawa 1979.
4. A. Papoulis, *The Fourier Integral and its applications*, Mc Graw Hill, New York, 1962.
5. R. B. Randall, *Application of BK Equipment to frequency analysis*, Briel Kjer, 1977.

Z. KACZMAREK

DETERMINATION OF THE LIMIT FREQUENCY OF IMPULSE SIGNALS

Summary

A method of determination of the limit frequency of an impulse signal is presented. It is proposed that the limit frequency for the peak volume will be obtained on the basis of Shannon theorem of sampling, and the limit frequency required for reproduction of the shape of the signal will be obtained on the basis of a certain measure of reproduction fidelity. A relative error mean-square is assumed as the measure of fidelity of signal shape reproduction. A formula has been derived for error mean-square in the function of limit frequency for periodic and nonperiodic signals has been derived.

Z. KACZMAREK

DÉTERMINATION DE LA FRÉQUENCE DE COUPURE
DES SIGNAUX IMPULSIONNELS

Résumé

Dans le travail on a donné le mode de la détermination de la fréquence de coupure des signaux impulsionnels indispensables pour la reproduction de la valeur de crête du signal ou de sa forme. Pour reproduire la valeur de crête du signal, on détermine la fréquence de coupure à partir du théorème de Shannon sur l'échantillonnage uniforme. La fréquence de coupure du signal, servant à la reproduction de la forme du signal, est déterminée en se basant sur la valeur de l'erreur moyenne quadratique de l'approximation considérée comme mesure de la reproduction. On a déterminé les dépendances de l'erreur moyenne quadratique en fonction de la fréquence de coupure pour les signaux impulsionnels périodiques et seuls.

Z. KACZMAREK

BESTIMMUNG DER GRENZFREQUENZ VON IMPULSSIGNALEN

Zusammenfassung

Im Aufsatz wurde eine Methode für die Bestimmung der Grenzfrequenz von Impulssignalen dargestellt. Auf Grund des Shannon-Theorems wurde die Grenzfrequenz für die Wiedergabe des Maximalwertes vorgeschlagen, und auf Grund eines bestimmten Maßes der Genauigkeitswiedergabe — die Grenzfrequenz für die Form der Wiedergabe. Die Standardabweichung ist das Maß der Genauigkeitswiedergabe der Form. Es wurden Formen für die Standardabweichung in Funktion der Grenzfrequenz im Falle periodischer und nichtperiodischer Signale bestimmt.

З. КАЧМАРЭК

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ

Резюме

Приведен метод определения предельной частоты импульсных сигналов необходимой для определения максимального значения или формы сигналов. Для определения максимального значения сигнала предельная частота определяется при использовании теоремы Шанона с равномерным стробированием. Предельная частота необходимая для определения формы сигнала определяется на основании значения среднеквадратичной ошибки аппроксимации, как меры достоверности отображения. Определены зависимости среднеквадратичной ошибки аппроксимации от предельной частоты для периодических и одиночных импульсных сигналов.

Ocena wielkości sygnału w optoelektronicznych miernikach zamglenia o fali ciągłej

KRZYSZTOF HOLEJKO (WARSZAWA)

Instytut Telekomunikacji Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 1985.03.18

Artykuł poświęcony jest omówieniu możliwości wykrywania mgły oraz ocenie tak zwanego zakresu widzialności za pomocą optoelektronicznych radarów pracujących na fali ciągłej. W szczególności rozpatrzono tłumienie transmitowanej mocy optycznej w zamglonej atmosferze oraz wielkość sygnału optycznego wstecznie rozproszonego od cząstek mgły. W pracy przedyskutowane zostało równanie zasięgu idealnego miernika zamglenia z wstecznym rozproszeniem, w którym obszar odbicia rozciąga się do nieskończoności. Rozpatrzono wpływ częstotliwości modulacji na amplitudę i fazę sygnału odbieranego oraz wpływ najmniejszej odległości R_0 , przy której wiązka nadajnika wchodzi w kąt pola widzenia odbiornika świetlnego. Przedstawiono obliczenia i pomiary mocy odbieranej w praktycznym układzie miernika zamglenia, w którym nadajnik i odbiornik świetlny wyposażono w jednakowe, ustawione obok siebie obiektywy i w którym wiązki nadawcze i odbiorcze przecinają się w niewielkich odległościach do 15 m.

1. WPROWADZENIE

We współczesnej komunikacji coraz częściej wymaga się automatycznego wykrywania mgły i określania na tej podstawie tak zwanego zakresu widzialności. Na przykład w lotnictwie cywilnym do lądowania określonej klasy samolotów pasażerskich wymaga się występowania nad pasem lądowania dopuszczalnego normami zakresu widzialności. Również w przybrzeżnej nawigacji morskiej konieczne stało się automatyczne włączanie sygnałów mgielnych, jeżeli zakres widzialności spada poniżej określonego poziomu.

Zasada pomiaru widzialności opiera się na badaniu sygnału świetlnego transmitowanego przez atmosferę. W optoelektronicznych miernikach zamglenia sygnał świetlny wytwarzany jest przez półprzewodnikowe diody elektroluminescencyjne, a odbierany jest fotodiodami półprzewodnikowymi na przykład typu *pin*. Detekcję mgły przeprowadza się za pomocą dwu sposobów.

1. Przez pomiar tłumienia fali optycznej przechodzącej przez zamglony ośrodek (metoda transmisyjna).

2. Przez pomiar wstecznego lub bocznego promieniowania rozproszonego przez cząstki mgły.

Niniejsza praca poświęcona jest ocenie wielkości odbieranego sygnału w miernikach zamglenia opartych zwłaszcza o efekt wstecznego rozproszenia oraz podaniu zasad wyboru parametrów tych detektorów.

2. WIELKOŚCI OPISUJĄCE TRANSMISJĘ OPTYCZNĄ W OŚRODKACH ROZPRASZAJĄCYCH

Wyjaśnienie zasady pracy optoelektronicznych mierników zamglenia wymaga omówienia w kilku słowach podstawowych wielkości charakteryzujących propagację fali optycznej przez zamgloną atmosferę. Podstawowa zależność określająca tłumienie mocy optycznej w ośrodku rozpraszającym lub stratnym, zwana prawem Bouguerra opiera się na założeniu, że strata mocy wprowadzanej do takiego ośrodka dP_{wyj} proporcjonalna jest do mocy wejściowej P_{wej} oraz do długości drogi propagacji dR . Przy współczynniku proporcjonalności b zależność ta prowadzi do wzoru (1)

$$\gamma(R) = \frac{P_{wyj}}{P_{wej}} = e^{-bR} = e^{-(b_a + b_r)R} \quad (1)$$

gdzie

$\gamma(R)$ — współczynnik transmisji będący stosunkiem mocy przechodzącej przez ośrodek P_{wyj} do mocy wejściowej P_{wej}

b — współczynnik proporcjonalności — współczynnik ekstynkcji

b_a — składowa współczynnika ekstynkcji odpowiedzialna za absorpcję promieniowania

b_r — składowa współczynnika ekstynkcji opisująca rozproszenie.

W atmosferze w zakresie fal świetlnych i bliskiej podczerwieni $b_r \gg b_a$, a więc dominują straty na rozproszenie fali optycznej [5].

Rozproszenie fali optycznej przez cząstkę o objętości dv określa się za pomocą tak zwanej funkcji rozproszenia kąowego $\beta(\Theta, \varphi)$, która opisuje przestrzenny rozkład natężenia światła $dI(\Theta, \varphi)$ rozpraszanego przez tą cząstkę przy oświetlaniu jej falą o gęstości mocy E .

$$\beta(\Theta, \varphi) = \frac{dI(\Theta, \varphi)}{E dv} \left[\frac{1}{\text{sr m}} \right] \quad (2)$$

Sumowanie mocy rozproszonej z całego kąta przestrzennego $\Omega = 4\pi$ otaczającego pojedynczą cząstkę daje całkowitą stratę promieniowanej mocy. Obowiązuje więc zależność:

$$\int_{4\pi} \beta(\Theta, \varphi) d\Omega = b_r \approx b. \quad (3)$$

W miernikach zamglenia z wstecznym rozproszeniem szczególne znaczenie ma tak zwany współczynnik wstecznego rozproszenia $\beta(\pi)$ wyznaczany w kierunku przeciwnym do kierunku fali oświetlającej. Zarówno rozkład i wartość funkcji $\beta(\Theta, \varphi)$ jak też i wartość współczynnika $\beta(\pi)$ i b zależną od rodzaju, wielkości, koncentracji i charakteru cząstek rozpraszających — aerosoli [1, 4, 5, 6]. Omawianie tych zależności nie jest przedmiotem niniejszej pracy. Warto natomiast przedstawić nieco bliżej związek pomiędzy $\beta(\Theta, \varphi)$ i b oraz tak zwaną widzialnością wzrokową V_n .

Widzialność V_n jest odległością obserwacji, przy której kontrast doskonale czarnego ciała ustawionego na jasnym tle spada do wartości 0,02. Wartość tę przyjmuje się jako dolną granicę rozróżniania kontrastu przez ludzi w środku pasma widzialnego $\lambda = 0,55 \mu\text{m}$.

Kontrast k określa się jako: $k = (L_T - L_C) \frac{1}{L_T}$, gdzie L_T i L_C są odpowiednio luminan-

cjami tła i ciała czarnego. Ponieważ $L_c = 0$ to w miejscu ustawienia tego ciała $k = 1$. Przy zdalnej obserwacji część rozproszonego promieniowania tła wchodzi na obraz ciała czarnego wskutek czego kontrast obserwowany wynosi:

$$k = e^{-bV_n}[4],$$

przy $k = 0,02$ otrzymuje się $b = \frac{3,912}{V_n}$. (4)

Jak widać ze wzorów (1) i (4) współczynnik transmisji $\gamma(R)$ może być miarą widzialności wzrokowej zgodnie z zależnością

$$-\ln \gamma(R) = \frac{3,912}{V_n} R. \quad (5)$$

W ogólności współczynnik b zależy od długości fali. Jeżeli pomiary dokonuje się na innej niż $\lambda = 0,55 \mu\text{m}$ długości fali, to stosowana jest empiryczna zależność [6]:

$$b(\lambda) = \frac{3,912}{V_n} \cdot \left(\frac{0,55}{\lambda} \right)^{0,62V_n^{\frac{1}{3}}}. \quad (6)$$

Na wzorach (5) i (6) opiera się pomiar widzialności wzrokowej za pomocą tak zwanych transmisjometrów.

Zmiana widzialności wzrokowej w granicach $V_n = (0,2 \div 10)$ km przy fali o długości $\lambda = 0,9 \mu\text{m}$ oraz odległości 2×100 m, daje zmianę współczynnika transmisji w granicach $\gamma(R) = 0,038 \div 0,96$. Natomiast zmiana współczynnika b w zakresie fal $\lambda = (0,9 - 0,55) \mu\text{m}$ i przy tych samych zmianach widzialności wynosi zgodnie ze wzorem (6)

$$\frac{b(0,9)}{b(0,55)} = 0,836, \quad (V_n = 0,2 \text{ km})$$

oraz
$$\frac{b(0,9)}{b(0,55)} = 0,518, \quad (V_n = 10 \text{ km}).$$

Powyższe liczby dają pojęcie o rzędzie mierzonych wielkości. Zależność $\beta(\pi)$ od V_n jest bardziej złożona ponieważ kształt charakterystyki rozproszenia kąтового zależy od wielkości aerosoli tworzących mgłę. [1, 4, 5, 6, 10, 11]. Przyjmuje się następujące zależności pomiędzy współczynnikami $\beta(\pi)$ i b [7, 10]:

$$\beta(\pi) = zb^k = z \left(\frac{3,912}{V_n} \right)^k \quad (7)$$

Tablica 1

Wartości współczynnika wstecznego rozproszenia $\beta(\pi)$ według wzoru (7) przy $k = 1$ [10] i według pomiarów [11]

V_n [km]	1	2	5	10	20	Źródło
z	0,0546	0,0499	0,0434	0,0562	0,0104	wg wzoru (7)
$\beta(\pi)$ [sr. km] ⁻¹	0,213	0,0975	0,0339	0,02197	0,0203	dla $k = 1$ [10]
	0,067	0,03	0,011	0,007	0,0065	[11]

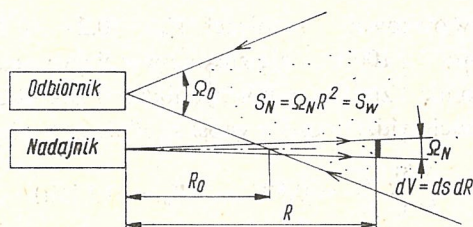
gdzie $0,67 < k < 1$ [7]

oraz z —współczynnik określony z błędem $\frac{\Delta z}{z} = (+150 \div 50)\%$

W tabl. 1 zebrano kilka wartości współczynników $\beta(\pi)$ oraz z zaczerpniętych z cytowanej powyżej literatury.

3. RÓWNANIE ZASIĘGU MIERNIKÓW ZAMGLENIA Z WSTECZNYM ROZPROSZENIEM

Ideę najprostszego układu miernika zamglenia z wstecznym rozproszeniem przedstawiono schematycznie na rys. 1. Nadajnik optyczny wysyła promieniowanie w postaci wiązki o kącie przestrzennym Ω_N . W pewnej odległości R_0 od nadajnika promieniowanie to wchodzi w obszar objęty kątem pola widzenia Ω_0 . Skutkiem tego do odbiornika dociera promieniowanie rozproszone od cząstek położonych w odległości $R_0 < R < \infty$. Przy niewielkich kątach Ω_N i Ω_0 o wielkości sygnału odbitego decyduje wartość $\beta(\pi)$. Aby obliczyć moc odbieraną przez odbiornik świetlny założymy, że moc nadajnika modulowana jest z częstotliwością f_m . Wówczas $P_{N_c} = P_{N_0} + P_N \cos 2\pi f_m$.



Rys. 1. Zasada działania miernika zamglenia z wstecznym rozproszeniem

Zmienną składową mocy opisać można też wzorem $\hat{P}_N = P_N e^{j\omega_m t}$. Korzystając ze wzorów (1) i (2) można teraz obliczyć elementarną moc odbitą od cząstek rozpraszających znajdujących się w odległości R .

$$d\hat{P} = S_0 \frac{d\hat{I}}{R^2} e^{-bR} = S_0 \frac{\hat{E}\beta(\pi)dv}{R^2} e^{-bR} = \frac{P_N}{S_N} \frac{\beta(\pi)}{R^2} S_0 \eta(x, y, R) e^{-2bR} \cdot e^{j\left(\omega_m t - \frac{2R}{\lambda_m}\right)} dS dR \quad (8)$$

We wzorze (8)

S_N — jest polem przekroju równomiernej wiązki nadajnika w odległości R od niego,

S_0 — powierzchnią czynną odbiorczego układu optycznego,

P_N — jest amplitudą mocy promieniowanej przez nadajnik,

$\eta(x, y, R)$ — funkcja określająca wykorzystanie czułości fotodetektora przy odbiorze elementarnych odbić od oświetlonych cząstek znajdujących się w różnych miejscach kąta pola widzenia fotodetektora. Funkcja ta nazywana dalej współczynnikiem wykorzystania omówiona zostanie w dalszej części pracy.

Całkowitą moc odbieraną przez układ odbiorczy przy założeniu jednorodnego obszaru rozproszenia $b \neq b(R)$, $\beta(\pi) \neq \beta(R)$ uzyskuje się wykonując sumowanie mocy elementarnych z całego obszaru. Zespólna postać mocy odbieranej pomijając $e^{j\omega t}$ więc:

$$\hat{P}_d = \frac{P_N}{S_w} \beta(\pi) S_0 \int_{R_0}^{\infty} \frac{e^{-bR}}{R^2} \int_{S_w} \eta(x, y, R) dS e^{-j2\pi \frac{2R}{\lambda_m}} dR, \quad (9)$$

S_w jest tu wspólną powierzchnią oświetloną przez nadajnik i znajdującą się w polu widzenia odbiornika. W układzie pokazanym na rys. 1 $S_w = S_R$. Jeżeli układ odbiorczy obserwuje wszystkie elementy powierzchni S_w z jednakową czułością to $\eta(x, y, R) = 1$ i wzór (9) upraszcza się do postaci:

$$\hat{P}_d = P_N \beta(\pi) S_0 \int_0^{\infty} \frac{e^{-2bR}}{R^2} e^{-j2\pi \frac{2R}{\lambda_m}} dR. \quad (10)$$

Z równania (10) wynika szereg wniosków dotyczących działania mierników zamglenia z wstecznym rozproszeniem. Jak widać występuje oczywista właściwość, że moc odbierana jest proporcjonalna do mocy nadajnika P_n i do powierzchni odbiorczego układu optycznego S_0 . Widać też, że moc odbierana nie zależy od kąta rozbieżności wiązki nadajnika Ω_N pod warunkiem, że cała wiązka nadajnika mieści się w kącie pola widzenia odbiornika. W praktycznych układach nie stosuje się jednak szerokich wiązek Ω_N i Ω_0 . Wynika to stąd, że kąty pola widzenia Ω_0 muszą być małe, ze względu na konieczność ograniczenia zakłócającego strumienia tła. Siłą rzeczy kąt Ω_N musi być więc jeszcze mniejszy.

Innym wnioskiem wypływającym ze wzoru (10) jest to, że moc odbierana zależy zarówno od $\beta(\pi)$, jak też i od b . Aby to bliżej prześledzić należy zbadać przebieg całki we wzorze (10). Jak widać jej wartość zależy od odległości sondowania R , widzialności V_n oraz od parametrów detektora mgły takich jak częstotliwość modulacji f_m i odległość początkowa R_0 .

Dla łatwiejszej analizy stosując oznaczenie $U = \frac{R}{R_0}$ oraz wprowadzając wzór (4) można napisać:

$$\hat{P}_d = P_N \beta(\pi) \frac{S_0}{R_0} \int_1^U \frac{e^{-\frac{7,824}{V_n} R_0 U}}{U^2} e^{-j^2 \pi \frac{2R_0}{\lambda_m} U} dU = P_N \beta(\pi) \frac{S_0}{R_0} \hat{F}_1. \quad (11)$$

Obliczenia całki $\hat{F}_1$ we wzorze (11) można dokonać jedynie metodami przybliżonymi — numerycznymi. Na rys. 2 i 3 przedstawiono wynik obliczenia całki metodą Simpsona przy pomocy komputera Sincler 2X Spectrum. Obliczenia dokonane zostały przy założeniu niskiej częstotliwości modulującej, to znaczy $2\pi \frac{2R_0}{\lambda_m} \approx 0$. Całkę $|\hat{F}_1|$ przedstawiono jako funkcję granicy górnej $U = \frac{R}{R_0} \rightarrow \infty$ przy $R_0 = 2\text{ m}$ (rys. 2) i przy $R_0 = 20\text{ m}$ (rys. 3).

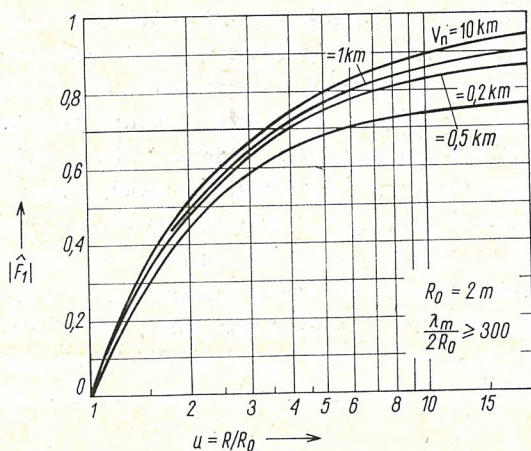
Na rysunkach tych widać, jak poszczególne fragmenty przestrzeni wpływają na sygnał odbiorczy. O wielkości tego sygnału decyduje przede wszystkim zakres bliskich odległości $R < 10 R_0$, ($U < 10$). Dla silniejszych mgieł ($V_n \approx 0,2\text{ km}$) ustalenie się sygnału występuje bliżej detektora.

Z porównania rys. 2 i 3 widać też, że dla małych R_0 wartość całki w niewielkim stopniu zależy od b , a więc i od V_n . Natomiast przy $R_0 = 20$ m całka $\hat{F}_1$ wyraźnie zależy już od V_n . Jednocześnie jednak ze wzrostem R_0 maleje odbierana moc.

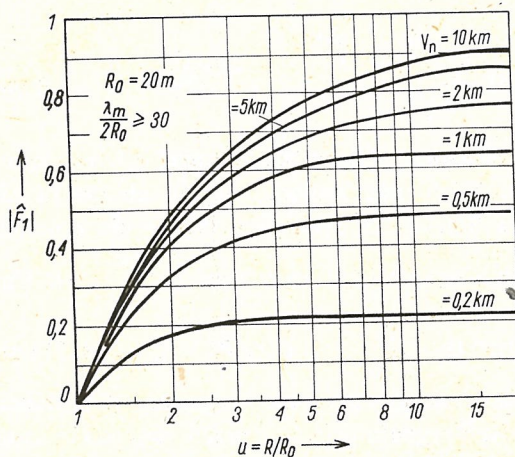
Ze wzoru (11) i rys. 3 wynika, że zmiana widzialności V_n w granicach $V_n = (0,2 \div 10)$ km powoduje $\beta(\pi) \cdot |\hat{F}_1| = 12,1$ -krotną zmianę odbieranego sygnału. W niektórych pozycjach literatury podaje się [10] eksperymentalny wzór określający zmianę amplitudy odbieranego sygnału w postaci:

$$P_0 = C \cdot V_n^{-\frac{3}{2}} \quad (12)$$

Według wzoru (12), przy założonej wyżej zmianie widoczności w granicach $V_n = (0,2 \div 10)$ km zmiana odbieranej mocy wynosi 13,6 i jest zbliżona do wartości uzyskanej z wzoru (11). Wpływ wyższych częstotliwości modulacji na wielkość odbieranego sygnału uwidacz-

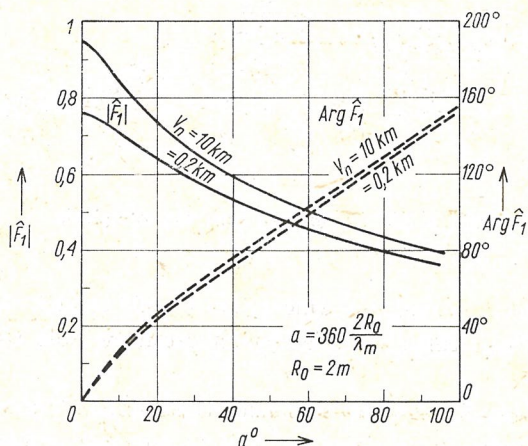


Rys. 2. Narastanie całki $|\hat{F}_1|$ w mierniku zamglenia z rys. 1 przy $R_0 = 2$ m

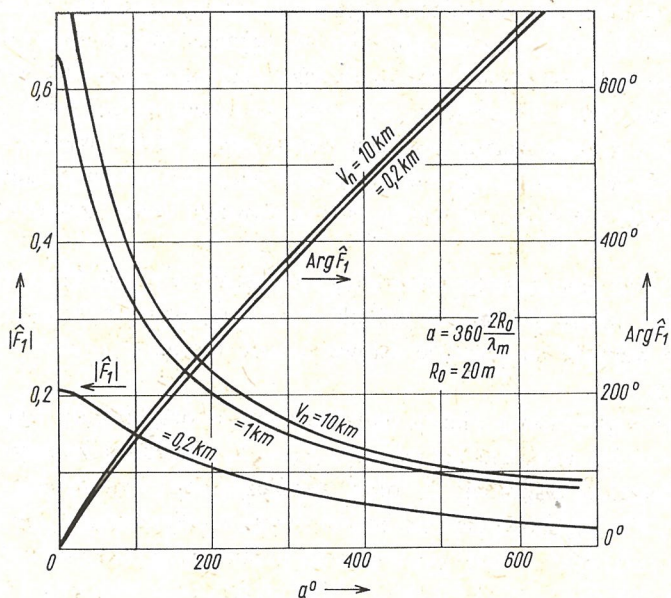


Rys. 3. Narastanie całki $|\hat{F}_1|$ w mierniku zamglenia z rys. 2 przy $R_0 = 20$ m

nią rys. 4 i rys. 5. Pokazano na nich przebieg modułu całki $|\hat{F}_1|$ oraz jej fazę $\arg \hat{F}_1$ w zależności od stosunku odległości $2R_0$ do długości fali przebiegu modulującego λ_m . Jak widać zastosowanie wyższych częstotliwości modulacji zmniejsza amplitudę odbieranego sygnału. Zmienia się również faza wypadkowego odbieranego sygnału, przy czym jeżeli zmiany amplitudy zależą od iloczynu $\beta(\pi)|\hat{F}_1|$, to zmiany fazy zależą tylko od $\arg \hat{F}_1$ to jest od b_r . Efekt ten bywa wykorzystywany w bardziej dokładnych optycznych radarach — lidarach do wyznaczania zakresu widzialności V_n [2, 8], w których mierzone jest przesunięcie fazowe odbieranego sygnału.



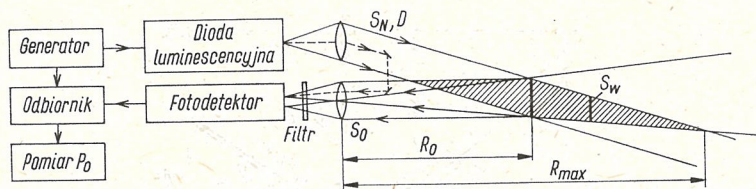
Rys. 4. Wpływ częstotliwości modulacji na moduł i fazę całki $\hat{F}_1$ przy $R_0 = 2$ m



Rys. 5. Wpływ częstotliwości modulacji na moduł i fazę całki $\hat{F}_1$ przy $R_0 = 20$ m

4. WYZNACZENIE MOCY ODBIERANEJ W PRAKTYCZNYM UKŁADZIE MIERNIKA ZAMGLENIA

Miernik zamglenia z rys. 1 obrazował ogólną ideę układu. Stosowany w praktyce układ blokowy miernika przedstawiony jest na rys. 6. W układzie tym na skutek małych zazwyczaj średnic diod elektroluminescencyjnych lub laserów półprzewodnikowych nadajników uzyskuje się z obiektywu średnicy D i powierzchni S prawie równoległą wiązkę promieniowania. Układ odbiorczy wyposażony jest w obiektyw odbiorczy o średnicy zazwyczaj takiej samej D oraz w filtr chromatyczny tłumiący promieniowanie słoneczne.



Rys. 6. Układ blokowy miernika zamglenia

Do fotodetektora dociera promieniowanie tylko z tych cząstek rozpraszających, które oświetlone są wiązką równoległą i znajdują się jednocześnie w polu widzenia obiektywu odbiorczego.

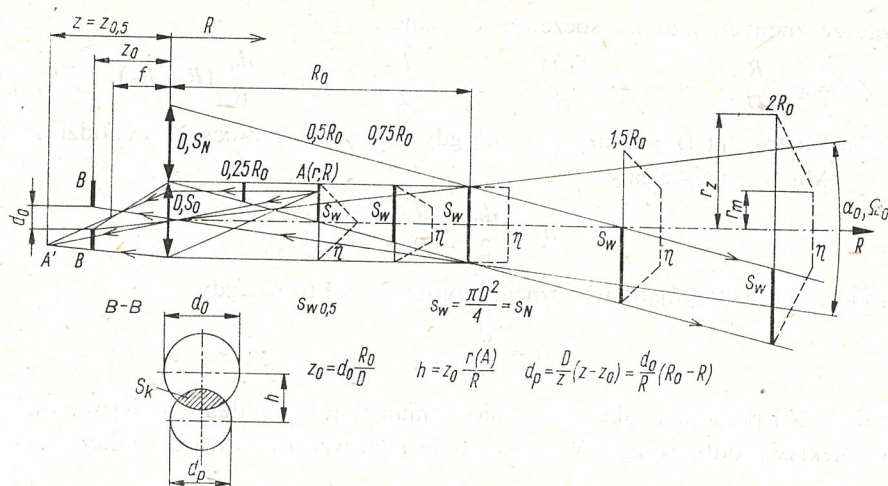
Sygnał odbierany przez fotodetektor wzmacniany jest dalej w odpowiednim wzmacniaczu selektywnym lub homodynowym dając na wyjściu napięcie pomiarowe.

Do skalowania i stabilizacji miernika zamglenia stosowany jest tak zwany obieg wewnętrzny zaznaczony na rys. 6 linią przerywaną. Obieg ten polega na bezpośrednim odbiorze części wysłanego strumienia poprzez specjalny zwrotny układ optyczny na przykład światłowód, przy jednoczesnym odcieciu sygnału pomiarowego odbitego z przestrzeni. W trakcie odbioru sygnału wewnętrzny czułość odbiornika jest kontrolowana i ustawiona odpowiednio do poziomu aktualnie promieniowanej przez nadajnik mocy. Realizuje to układ automatycznej regulacji wzmocnienia ARW wyposażony w pamięć. Dzięki temu w czasie pomiaru sygnału mgiełnego przy rozwartym układzie ARW wskazanie detektora mgły nie zależy od wahań promieniowanej mocy i zmian czułości odbiornika.

Rozpatrzmy teraz moc sygnału odbieranego w układzie z rys. 6. Moc tą również można opisać za pomocą wzoru (9), należy jednak dokładniej określić powierzchnię S_N i S_w oraz $\eta(xyR)$. Ze względu na symetrię osiową układu biorąc $r^2 = x^2 + y^2$ wystarczy rozpatrywać $\eta(r, R)$.

Jak wcześniej wspomniano wiązka nadawcza jest w przybliżeniu wiązką równoległą. Jej przekrój jest więc wszędzie jednakowy, $S_N = S_0$. Bardziej złożone jest natomiast określenie powierzchni wspólnej S_w oraz współczynnika wykorzystania elementu tej powierzchni $\eta(r, R)$, zmieniają się one bowiem wraz z odległością R , co obrazuje rys. 7.

Rozpatrzmy przypadek, w którym w pewnej najmniejszej odległości R_0 wiązka nadajnika średnicy D oświetla w całości krążek objęty kątem pola widzenia obiektywu odbiorczego Ω_0 o rozwarości α_0 . Ma to miejsce gdy obraz krążka o średnicy D znajdującego



Rys. 7. Przebieg promieni w układzie odbiorczym

się w odległości R_0 pokrywa się całkowicie z otworem fotodetektora średnicy czynnej d_0 . Ze znanego wzoru soczewek dostaje się

$$R_0 = \frac{Dz_0}{d_0} \approx \frac{Df}{d_0} \left(1 + \frac{f}{R_0}\right) \approx \frac{Df}{d_0}. \quad (13)$$

Założmy teraz, że fotodetektor o średnicy czynnej d_0 ustawiony jest konstrukcyjnie w płaszczyźnie z_0 . Oczywiście wszystkie elementy obrazu krążka D oddziałują w jednakowy sposób na fotodetektor skutkiem czego można powiedzieć, że w odległości R_0 :

1) powierzchnia $S_w = S_N$

2) rozkład czułości jest równomierny to znaczy $\eta(r, R_0) = 1$.

Inna sytuacja panuje w odległości $R = 0,5 R_0$. Tu przede wszystkim tylko część wiązki nadawczej pokrywa się z polem widzenia wiązki odbiorczej, a więc $S_w < S_0$, a ponadto cząstki znajdującego się w odległości $R = 0,5 R_0$ odtwarzane są teraz w płaszczyźnie obrazowej spełniającej równanie

$$\frac{1}{z_{0,5}} + \frac{1}{0,5R_0} = \frac{1}{f}, \quad \text{lub} \quad z_{0,5} \approx f \left(1 + \frac{2f}{r_0}\right).$$

Odległość $z_{0,5}$ jest oczywiście większa od z_0 , skutkiem czego tylko część zbieżnej wiązki odbiorczej obiektywu pada na powierzchnię czynną fotodetektora. Pozostała część tej wiązki jest tracona. Sytuację tę obrazuje rys. 7, a zwłaszcza przekrój BB znajdujący się na tym rysunku. Można więc na podstawie rysunku powiedzieć, że współczynnik wykorzystania elementarnej mocy wychodzącej z punktu $A(r, R)$ jest równy

$$\eta(A) = \eta(r, R) = \frac{S_k}{\frac{\pi d_0^2}{4}} \quad (14)$$

S_k — powierzchnia zakreskowanego wspólnego segmentu przecinających się kół o średnicach d_0 i d_p , i znajdujących się w odległości h .

Wychodząc ze znanych wzorów soczewek otrzymuje się

$$Z_0 = d_0 \frac{R}{D}, \quad h = Z_0 \frac{r(A)}{R}, \quad d_p = \frac{D}{z} (z - z_0) = \frac{d_0}{R} (R - R_0). \quad (15)$$

Maksymalną wartość $\eta(A) = 1$ uzyskuje się gdy całe koło średnicy d_p wchodzi do koła średnicy d_0 . Ma to miejsce gdy

$$h = \frac{d_0}{2} - \frac{d_p}{2}. \quad (16)$$

Wartości $\eta(A) = 0$ występują dla stycznego położenia kół to jest gdy

$$h = \frac{d_0}{2} + \frac{d_p}{2}. \quad (17)$$

Wzory (16) i (17) pozwalają określić granice zmian współczynnika $\eta(r, R)$ w kącie pola widzenia obiektywu odbiorczego. Wstawiając do tych wzorów wartości obliczone w (15) oraz stosując wzór soczewkowy $\frac{1}{Z} + \frac{1}{R} = \frac{1}{f}$ uzyskuje się obszar zmian wartości $\eta(r)$ w przedziale (0, 1) ograniczony promieniami r_z , gdy $\eta(r_z) = 0$ i r_m gdy $\eta(r_m) = 1$

1. Przy $R > R_0$ i $U = \frac{R}{R_0}$

$$r_z = \frac{D}{2} \left(2 \frac{R}{R_0} - 1 \right) = \frac{D}{2} (2U - 1); \quad \eta(r_z) = 0$$

$$r_m = \frac{D}{2}; \quad \eta(r_m) = 0$$

2. Przy $R < R_0$ otrzymuje się

$$r_z = -\frac{D}{2} \quad \eta(r_z) = 0$$

$$r_m = \frac{D}{2} (2U - 1) \quad \eta(r_m) = 1$$

Jak widać z rys. 7 powierzchnia, S_w obejmuje punkty o różnym η , $0 < \eta(r, R) < 1$.

W tabl. 2 zebrane zostały graniczne wartości współczynnika wykorzystania powierzchni fotodetektora $\eta(r, R)$ w różnych odległościach R . Pokazano również wartości maksymalne współczynnika η_{max}

$$\eta_{max}(r, R) = \frac{d_0^2}{d_p^2} \quad \text{gdy } d_p > d_0 \quad (19)$$

$$\eta_{max}(r, R) = 1 \quad \text{gdy } d_p < d_0$$

Graniczne promienie r_m i r_r oraz odpowiednie $\eta(r_m, R)$ obliczono również dla przypadku ustawienia fotodetektora w płaszczyźnie ogniskowej $z = f$. Odpowiednie wzory mają wówczas następującą postać:

$$d_p = \frac{D}{z} (z - f) = \frac{Df}{R} \approx \frac{d_0}{U}; \quad h = f \frac{r(A)}{R},$$

$$r_z = \frac{d_0 - d_p}{2} = \frac{D_0}{2} (U + 1) \text{ i } r_m = \frac{D}{2} (U - 1), \text{ gdy } U > 1 \quad (20)$$

Tablica 2

Granice obszarów zmian wartości współczynnika wykorzystania $0 < \eta(r, R) < 1$ przy ogniskowaniu detektora na obraz $z = z_0$ i nieskończoność $z = f$

Parametry \ R	0,25 R_0	0,5 R_0	0,75 R_0	R_0	1,5 R_0	2 R_0	2,5 R_0	
$r_z, \eta(r_z) = 0$	$\frac{D}{2}$	$\frac{D}{2}$	$\frac{D}{2}$	$\frac{D}{2}$	D	$\frac{3}{2}D$	$2D$	Fotodetektor w odległości z_0
$r_m, \eta(r_m) = \eta_{\max}$	0	0	$\frac{D}{4}$	$\frac{D}{2}$	$\frac{D}{2}$	$\frac{D}{2}$	$\frac{D}{2}$	
$\eta_{\max}$	$\frac{1}{9}$	1	1	1	1	1	1	
$r_z, \eta(r_z) = 0$	$\frac{5}{8}D$	$\frac{3}{4}D$	$\frac{7}{8}D$	D	$\frac{5}{4}D$	$\frac{3}{2}D$	$\frac{7}{4}D$	Fotodetektor w odległości f
$r_m, \eta(r_m) = \eta_{\max}$	0	0	0	0	$\frac{1}{4}D$	$\frac{1}{2}D$	$\frac{3}{4}D$	
$\eta_{\max}$	0,0625	0,25	0,562	1	1	1	1	

oraz

$$\eta_{\max} = \frac{d_0^2}{d_p^2} \approx U^2 \quad \text{gdy } d_p > d_0$$

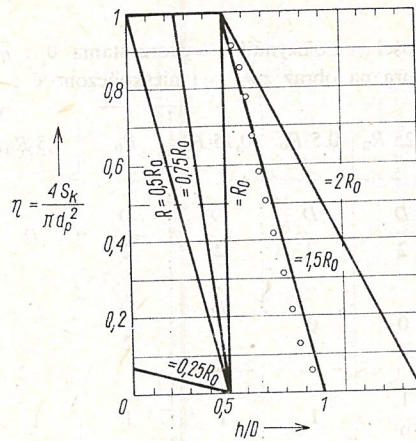
$$\eta_{\max} = 1 \quad \text{gdy } d_p < d_0.$$

Zachowanie się $\eta(r, R)$ wewnątrz granic $r_m < r < r_z$ obliczyć można wyznaczając pole powierzchni S_k utworzonej przez segment powstały z przecięcia się dwu kół średnic d_0 i d_p i oddalonych o h . Obliczenia wykonane za pomocą znanych wzorów geometrycznych pokazują, że powierzchnia S_k , a więc i zależność $\eta(r)$ zmieniają się prawie liniowo w zależności od h , a więc i od $r(A)$. Na rys. 8 pokazano za pomocą punktów przebieg współczynnika $\eta(r, R)$ w odległości $R = 1,5 R_0$.

W dalszej części pracy przyjęta zostanie liniowa zmiana $\eta(r, R)$ pomiędzy wartościami granicznymi 0 i 1. Postępowanie to jest usprawiedliwione założeniami uproszczającymi przyjętymi w niniejszej analizie. Nie uwzględnia się bowiem tu aberacji obiektywów, nie uwzględnia się listków bocznych w promieniowanej wiązce oraz nierównomiernego rozkładu mocy w wiązce, jak też zakłada się jednorodną czułość powierzchni czynnej fotodetektora. Liniowe rozkłady współczynnika $\eta(r, R)$ dla odpowiednich przekrojów $R = UR_0$ pokazane są na rys. 8 i na rys. 7.

Mając teraz rozkłady współczynnika wykorzystania elementów powierzchni $\eta(r, R)$ w całym zakresie zmian odległości R można obliczyć występującą we wzorze (9) całkę

$$\int_{S_w} \eta(r, R) dS = S_{ef}. \quad (21)$$



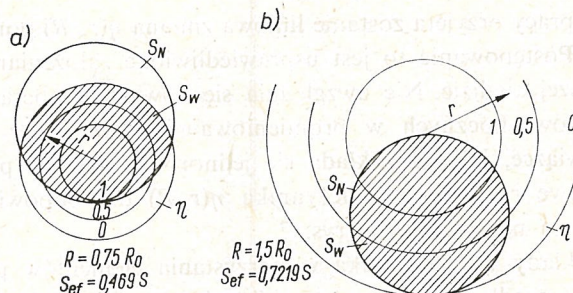
Rys. 8. Rozkłady współczynnika wykorzystania $\eta(r, R) = \frac{S_k}{\pi d_0^2}$

Powierzchnia skuteczna S_{ef} jest powierzchnią wspólną znajdującą się jednocześnie w wiązce nadawczej i w polu widzenia obiektywu odbiorczego oraz uwzględniającą zmianę czułości fotodetektora obserwującego każdy z elementów dS powierzchni S_w . Sposób obliczania całki (21) pokazany jest na rys. 9 gdzie wyobrażone są dwa przekroje biegu promieni z rys. 7 odpowiadające odległości $R = 0,75 R_0$ oraz $R = 1,5 R_0$. Na rysunku zaznaczono okrągły przekrój wiązki nadawczej S_N na tle zmian współczynnika $\eta(r, R)$ w kącie pola widzenia obiektywu odbiorczego. Wspólny obszar to powierzchnia S_w .

Ostatecznie więc dla miernika zamglenia z rys. 6 posiadającego niskoczęstotliwościową modulację $\frac{\lambda_m}{2R_0} \gg 1$ napisać można następujące równanie:

$$P_d = \frac{P_N}{S} \beta(\pi) \cdot \tau S \int_0^\infty \frac{e^{-2bR}}{R^2} \int_{S_w} \eta(r, R) ds dR = \tau P_N \beta(\pi) \int_0^\infty \frac{e^{-2bR}}{R^2} S_{ef} dR \quad (22)$$

gdzie τ określa transmisję układów optycznych: obiektywów i filtru.



Rys. 9. Sposób obliczania powierzchni skutecznej $S_{ef} = \int_{S_w} \eta ds$

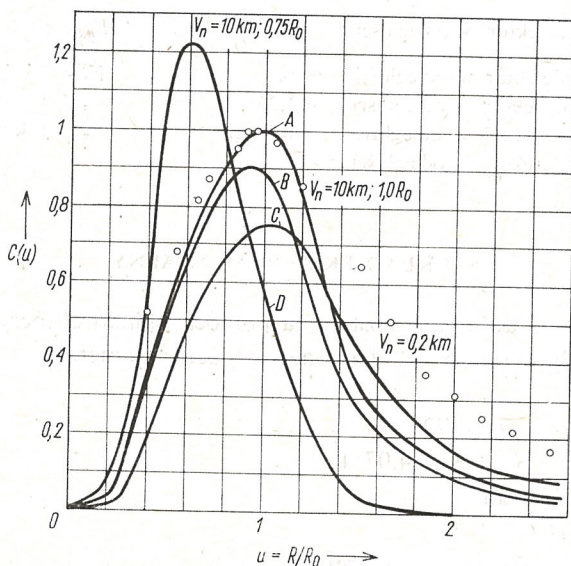
Oznaczając:

$$\frac{R}{R_0} = U \quad \text{oraz} \quad C(U) = \frac{e^{-2bR_0U}}{U^2} \frac{S_{ef}(U)}{S} \quad \text{otrzymujemy}$$

$$P_d = P_N \tau \frac{S}{R_0} \beta(\pi) \int_0^{U_{\max}} C(U) dU \quad U_{\max} = \frac{R_{\max}}{R_0}, \quad (23)$$

$R_{\max}$ oznacza odległość, w której wiązki nadawcza i odbiorcza rozchodzą się.

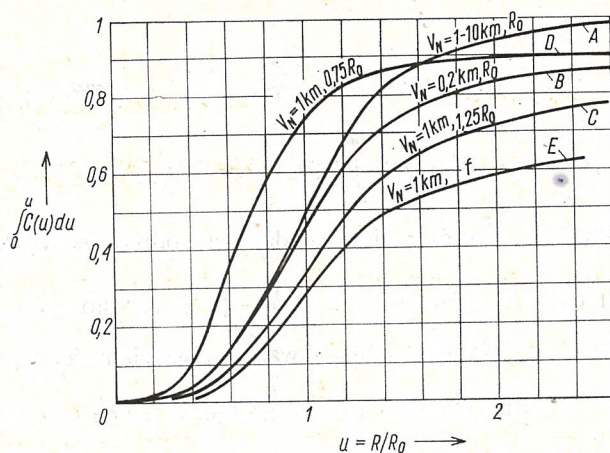
Przebieg funkcji $C(U)$ w zależności od $U = \frac{R}{R_0}$ pokazano na rys. 10 na podstawie numerycznych obliczeń $\eta(r, R)$ dla różnych wartości widzialności $V_n = 0,2$ i 10 km oraz dla $R_0 = \frac{Df}{d_0} = 3,75$ m. Taka wartość R_0 została wybrana ze względu na parametry eksperymentalnego modelu omówionego w następnym punkcie. Jak widać z przytoczonych wykresów funkcja $C(U)$ wzrasta początkowo od zera przybierając maksimum w odległości R_0 , a następnie szybko maleje ze względu na wzrost odległości i tłumienia.



Rys. 10. Zachowanie się funkcji $C(U)$

Nieco większe od jedności maksymalne wartości $C(U)$ uzyskuje się dla wiązek przecinających się bliżej detektora, na przykład w odległości $R = 0,75 R_0$ (krzywa D). Pokazano również przebieg $C(U)$ przy przecinaniu się wiązek w odległości $R = 1,25 R_0$ (krzywa C).

Na rys. 11 pokazano przebieg całki $\int_0^{U_m} C(U) dU$ występującej we wzorze (23) dla omówionych poprzednio przypadków. Jak widać maksymalne wartości całki uzyskuje się przy ogniskowaniu układu odbiorczego na odległości R_0 . Przy tym ze względu na krótki zakres zmian R wpływ V_n na wartość całki jest niewielki.



Rys. 11. Przebieg całki $\int_0^{U_{\max}} C(U) dU$, $U_{\max} = \frac{R_{\max}}{R_0} = \frac{2,6R_0}{R_0}$

- | | |
|---|------------------------------|
| A Fotodetektor w odległości $z = R_0 \frac{d_0}{D} = z_0$ | $V_N = 1 \div 10 \text{ km}$ |
| B Fotodetektor w odległości $z = z_0$ | $V_N = 0,2 \text{ km}$ |
| C Fotodetektor w odległości $z = 1,25 z_0$ | $V_N = 1 \text{ km}$ |
| D Fotodetektor w odległości $z = 0,75 z_0$ | $V_N = 1 \text{ km}$ |
| E Fotodetektor w odległości $z = f$ | |

5. UKŁAD EKSPERYMENTALNY

Sprawdzenie obliczeń dokonane zostało za pomocą układu eksperymentalnego wykonanego według zasady z rys. 6. Miał on następujące parametry:

1. Obiektyw

- średnica $D_0 = D_N = D = 72 \text{ mm}$
- powierzchnia $S_0 = S_r = S = 4,07 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$
- ogniskowa $f = 130 \text{ mm}$
- kąt aperturowy $D/f = 1:1,8$
- transmisja obiektywów wraz z filtrem $\tau = 0,5$

2. Fotodioda: średnica czynna $d_0 = 2,5 \text{ mm}$ czułość $0,4 \text{ A/W}$.

3. Dioda nadawcza, moc całkowita 18 mW moc kierowana do obiektywu $P_N = 1,2 \text{ mW}$.

4. Przycinanie się wiązek $R_0 = 3,75 \text{ m}$, $R_{\max} = 4 R_0$.

Należy tu dodać, że zastosowana w układzie eksperymentalnym dioda elektroluminescencyjna miała epoksydowy zalew złącza, który znacznie zniekształcał charakterystykę promieniowania. W rezultacie wiązka S_N oprócz głównego równoległego listka miała silne listki boczne promieniowane pod kątem około 4° .

Przebieg funkcji $C(U)$ z rys. 10 sprawdzono przesuwając przed obiektywami płaską powierzchnię rozpraszającą (biała kalka techniczna) ustawioną prostopadle do osi obiek-

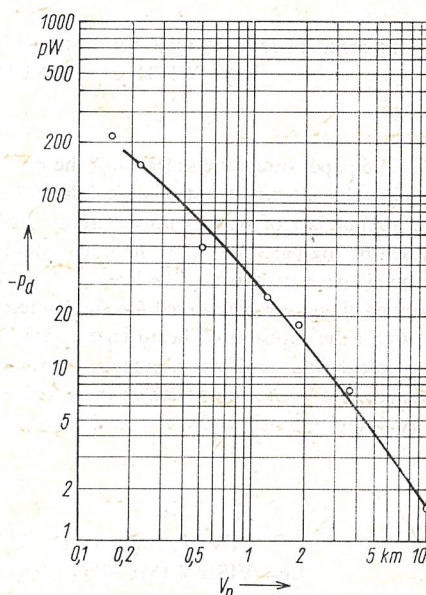
tywu odbiorczego. Przebieg eksperymentu zaznaczony na rys. 10 punktami różnił się nieco od obliczonej charakterystyki ze względu na wspomniane już wcześniej listki boczne promieniowania. Odbierana moc zgodnie ze wzorem (29) obliczona została następująco:

$$P_d = P_N \tau \frac{S}{R_0} \beta(\pi) \int_0^4 C(U) dU = 1,210^{-3} \cdot 0,5 \cdot \frac{4,07 \cdot 10^{-3}}{3,75} \beta(\pi) \int_0^4 C(U) dU$$

$$P_d = 0,651 \cdot 10^{-6} \beta(\pi) \int_0^4 C(U) dU.$$

Wartości $\beta(\pi)$ przyjęto zgodnie z tabl. 1 wg [11], przy czym wszystkie wartości $\beta(\pi)$ obniżone zostały odpowiednio do długości fali $\lambda = 0,9 \mu\text{m}$ zgodnie ze wzorem (6).

Wartości całki $\int_0^4 C(U) dU$ przyjęto z wykresu rys. 11 krzywa *A* i *B*. Obliczony przebieg mocy odbieranej w zależności od V_n pokazano na rys. 12. Punktami naniesiono wartości pomierzone we wrześniu 1984 r. w Warszawie.



Rys. 12. Moc sygnału odbieranego w eksperymentalnym modelu miernika zamglenia w zależności od zakresu widzialności V_n

BIBLIOGRAFIA

1. M. Bertolotti, *Propagation problems relative to laser transmission*, Instituto di Fisica Facolta di Ingegneria Universita di Roma, 1978.
2. I. L. Bufton, R. S. Iyer, *Continuous wave lidar measurement of atmospheric visibility*, Applied Optics, 15 January, 1978.
3. T. Halldorsson, J. Langerholm, *Geometrical form factors for the lidar function*, Applied Optics, (Vol. 17 No 2) 15 January, 1978.
4. D. H. Hohn, *Physics of incoherent optical propagation*, Forschungsinstitute fur Optic der FGAN, 1978.

5. А. И с и м а р у, *Распространение и рассеяние волн в случайно неоднородных средах*, Мир, Москва, 1981.
6. R. Kingslake, *Applied Optics and Optical Engineering*, Vol. 1, Academic, Press, New York, London 1965.
7. J. D. Klett, *Stable analytical inversion solution for processing lidar returns*, Applied Optics (Vol. 20 Nr 2) January 1981.
8. D. K. Kreid, *Atmospheric visibility measurement by a modulated cw lidar*, Applied Optics (Vol. 15 No 7), July, 1976.
9. W. T. Kreiss, J. M. Lansinger, W. G. Tank, M. L. Pitchford, *Field testing of a long path laser transmissometer designed for atmospheric visibility measurement*, SPIE Vol. 125 Advances in Laser Technology for the Atmospheric Sc., 1977.
10. G. H. Ruppertsberg, *Principles et procédés de mesure automatique de la visibilité*, Bulletin de P.A.I.S.M., No 31—1, 1967.
11. H. Vogt, *Visibility Measurement Using Backscattered Light*, Journal of the Atmospheric Sciences. Vol. 25 Nr 5, 1968.
12. A. Zygmuntowicz, A. Szedny, *Studium możliwości automatyzacji pomiarów widzialności i zachmurzenia*, Ins. Met. Gosp. Wodnej W-wa 1981.

K. HOLEJKO

ESTIMATION OF THE SIGNAL LEVEL OF THE OPTOELECTRONIC FOG DETECTORS WITH CONTINUOUS SINOIDAL MODULATION

Summary

The paper offers a discussion of the possibility of fog detection, and estimation of, so called, standard visibility by means of optoelectronic lidars with continuous sinusoidal modulation. In particular, discussed are attenuation of optical power transmitted through foggy atmosphere and the backscatter of signal, caused by fog particles. Then the range equation for an ideal fog detector with unlimited upper end of the scanned space is derived. The influence of modulation frequency on the amplitude and the phase of the received signal are considered for such detectors, together with the influence of the minimum distance R_0 in which the transmitted beam enters into the field of view of the optical receiver. The article contains also calculations and measurements of the received backscattered power of the fog detector in a practical arrangement where the optical transmitter and receiver have the same lens systems, situated in the proximity of one another, and where the transmitted and received beams meet at short distance, up to 15 m.

K. HOLEJKO

EVALUATION DE LA GRANDEUR DU SIGNAL DANS LES VISIBILIMÈTRES OPTOÉLECTRONIQUES À ONDE CONTINUE

Résumé

L'article traite de la possibilité de détecter le brouillard et d'évaluer la visibilité à l'aide des radars optoélectroniques, fonctionnant à l'onde continue. On s'est préoccupé surtout de l'affaiblissement de la puissance optique transmise dans l'atmosphère brumeuse et de la grandeur du signal optique rétrodiffusé par les particules du brouillard. Dans l'article on a discuté aussi de la portée du visibilimètre idéal à rétrodiffusion, dans lequel l'espace de réflexion s'étend vers l'infini. On a examiné l'influence de la fréquence de modulation sur l'amplitude et la phase du signal reçu et l'influence de la plus petite distance R_0 , pour laquelle le faisceau émis par l'émetteur entre dans le cône de vue du récepteur lumineux. On a présenté les calculs et les mesures de la puissance reçue dans le système pratique du visibilimètre, dont l'émetteur et le récepteur lumineux sont munis des mêmes objectifs, rangés l'un à côté de l'autre, et dans lequel les faisceaux émetteurs et récepteurs se croisent à une petite distance de moins de 15 mètres.

K. HOLEJKO

ABSCHÄTZUNG DER SIGNALGRÖßE
BEI OPTOELEKTRONISCHEN VERNEBELUNGSMESSERN
MIT KONTINUIERLICHER WELLE

Zusammenfassung

Im Artikel befaßt man sich mit Erwägungen über die Möglichkeit der Nachweisung sowie der Abschätzung des sog. Sichtbarkeitsbereiches mittels eines optoelektronischen, auf der Grundlage einer kontinuierlichen Welle arbeitenden Radars. Insbesondere wurden die Dämpfung der übertragenen optischen Leistung in vernebelter Atmosphäre erwogen sowie Größe des optischen von Nebelteilchen rückzerstreuung Signals erörtert. Es wurden Gleichungen bezüglich des Bereiches des idealen Vernebelungsmessers mit Rückzerstreuung diskutiert, für den angenommen wird, daß sich der Rückspiegelungsbereich ins Unendliche erstreckt. Im weiteren wurden Einfluß der Modulationsfrequenz auf die Amplitude und Phase des empfangenen Signals sowie Einfluß der kleinsten Entfernung R_0 erwogen, bei der das Senderbündel in den Winkel des Sichtfeldes eines Lichtempfängers eindringt. Im weiteren wurden Berechnungen und Bemessungen der empfangenen Leistung in praktischer Anordnung eines Vernebelungsmessers dargestellt, worin Sender und Lichtempfänger mit einheitlichen, nebeneinander aufgestellten Objektiven ausgestattet worden sind, und bei denen sich Sende — und Empfangsbündel in kleiner Entfernung voneinander bis 15 m kreuzen.

К. ХОЛЕЙКО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ СИГНАЛА В ОПТОЭЛЕКТРОННЫХ ИЗМЕРИТЕЛЯХ
ЗАТУМАНИВАНИЯ РАБОТАЮЩИХ ПРИ НЕПРЕРЫВНОМ ИЗЛУЧЕНИИ

Резюме

Рассмотрены возможности обнаруживания тумана и определение так называемого диапазона видимости при помощи оптоэлектронных радаров с непрерывным излучением. В частности рассмотрено затухание оптической мощности в затуманенной атмосфере, а также отраженного частичками тумана рассеянного оптически сигнала. Продискутировано уравнение дальности действова идеального измерителя затуманения с обратным рассеянием в котором пространство рассеяния растягивается до бесконечности. В таких измерителях рассмотрено влияние частоты модуляции на амплитуду и фазу принимаемого сигнала а также влияние наименьшего расстояния R_0 при котором передаваемый пучок входит в угол поля зрения оптического приемника. Представлены также расчеты и измерения принимаемой мощности в практическом измерителе затуманения, в котором оптический передатчик и приемник содержат одинаковые объективы установленные близко друг к другу, и в которых передающий пучок уходит из поля зрения приемника в небольших расстояниях.

A method of analysis of a single-server system with non-preemptive priorities and feedback

WOJCIECH BURAKOWSKI (WARSZAWA)

Instytut Telekomunikacji Politechniki Warszawskiej

DARIUSZ BURSZTYNOWSKI (WARSZAWA)

Zakłady Wytwórcze Urządzeń Telefonicznych „TELKOM-ZWUT”

The paper received 1985.05.06

The paper presents a fast algorithm for calculation of mean waiting time in a single-queue system with priorities and feedback. The system is fed by a Poisson source generating external events of different types, each type having its own arrival rate. An event requires the system to serve a task sequence. Tasks, each one characterized by a non-preemptive priority and an arbitrary service time distribution (represented by its two first moments), are executed according to their positions in the sequence. Within each priority, the FIFO discipline is assumed.

1. INTRODUCTION

In modern telecommunication SPC switching equipment a control system may have a single processor or multiprocessor organization. In such systems, a processor (or processors) serves task sequences in response to external events. Each task in a sequence may have different priority assigned to it. In order to model such system we have to consider queueing systems with priorities and feedback.

As regards multiprocessor systems mentioned above, the analysis of corresponding queueing networks is very complex and no general method has been developed to cope with this issue, so far. The existing approximate methods only apply to some specific cases of the general problem (see e.g. [1], [2], [3]). We can therefore consider analysing processors in separation (assuming independence between them) to be the most sensible approach to the analysis of general multiprocessor systems, especially when dealing with a large number of processors (in this case, one can well assume independence between processors). Thus, we see that tools for efficient performance evaluation of one-processor systems with priorities and feedback are of special interest.

Single-task sequence with preemptive priority and multi-task sequences with non-preemptive priorities were considered for the case of one-server system and general service time distributions (represented by their first two moments) in [4] and [5], respectively. A generalization of these was studied recently in [6] where the author considers both

preemptive repeat with resampling and non-preemptive priorities, but the necessity of knowing the whole service time distribution for each task seems to be the reason for some practical limitations of the presented method.

In this paper, we consider a single processor system case given Poissonian arrivals of external events and arbitrary non-preemptive priorities assigned to particular tasks. We propose a method for calculation of mean waiting times of task which is conceptually simple and easy to implement. The final results take form of a set of linear equations well suited for standard numerical methods. In section 2, the considered model is introduced in detail. Section 3 presents some fundamental relations. In section 4, we present a numerical algorithm which is the basis for efficient calculation of the mean waiting times and other performance measures.

2. DESCRIPTION OF THE MODEL

The considered model is a single server system in which:

- task sequences of each type (i.e. the first tasks of sequences arrive according to a Poisson process;
- each task is characterized by the following parameters: a position in the sequence, a non-preemptive priority assigned to it and service time distribution which is represented by its first two moments;
- tasks of a sequence are executed one after another in accordance to their positions in the sequence;
- the queueing discipline for tasks of the same priority is first-in-first-out.

The system description is completed by the following set of parameters:

NS — number of task sequences;

T_i — number of tasks in the sequence i , $i = 1, \dots, NS$;

P — number of non-preemptive priorities; a priority is indexed by the subscript p , $p = 1, \dots, P$; 1 is the highest priority, P is the lowest one;

$\lambda(i)$ — arrival rate of sequence i ;

$h(i, j)$ — mean service time of task (i, j) ; $i = 1, \dots, NS$, $j = 1, \dots, T_i$ (the term (i, j) denotes task j in sequence i);

$h_r(i, j)$ — mean residual service time of task (i, j) ;

$p(i, j)$ — non-preemptive priority assigned to the task (i, j) ; $p(i, j) = 1, \dots, P$.

The above set of parameters constitutes input data for the system analysis.

Our goal is to obtain exact value of the mean waiting time of each task (i, j) — $W(i, j)$, $i = 1, \dots, NS$; $j = 1, \dots, T_i$.

3. FUNDAMENTAL RELATIONS

In this section, some fundamental relations in the considered system will be analysed.

Applying the same methodology as in [7], we can derive the following expression for the mean waiting time of task (i, j) — $W(i, j)$:

$$W(i, j) = W_0(i, j) + \sum_{(k, m): p(k, m) = p(i, j)} N(i, j; k, m) h^*(k, m), \quad (1)$$

where:

$W_0(i, j)$ — is the mean time between the activation moment¹⁾ of task (i, j) and the first moment in which the system only contains tasks with $p \geq p(i, j)$;

$h^*(k, m) = h(k, m) + \tilde{h}(k, m)$, where $\tilde{h}(k, m)$ is the mean time between the moment in which the service of task (k, m) has been completed and the first moment in which the system does not contain tasks with $p < p(i, j)$;

$N(i, j; k, m)$ — is the mean number of tasks (k, m) with priority $p(k, m) = p(i, j)$ in the queue at the activation moment of task (i, j) (for $j = 1$, after residual service time of the task being in service at the activation moment of task $(i, 1)$).

In the light of the above definitions, the expression (1) is intuitively obvious. Now, we will present the expressions for $W_0(i, j)$, $h^*(k, m)$ and $N(i, j; k, m)$.

3.1. CALCULATION OF $W_0(i, j)$

According to the definition of $W_0(i, j)$, we obtain the following expression:

$$W_0(i, j) = \begin{cases} W_0 + D(i, 1) + W_0(i, 1) \cdot \sigma(i, 1) & \text{for } j = 1, \\ D(i, j) + W_0(i, j) \cdot \sigma(i, j) & \text{for } j > 1, \end{cases} \quad (2)$$

where:

W_0 — is the mean residual service time of the task being in service at the moment of external arrival²⁾:

$$W_0 = \sum_{k=1}^{NS} \sum_{m=1}^{T_k} \varrho(k, m) \cdot h_r(k, m); \quad \varrho(k, m) = \lambda(k) \cdot h(k, m). \quad (3)$$

$D(i, j)$ — is the mean total service time of the following tasks:

1° tasks with priority lower than $p(i, j)$ present in the queue at the activation moment of task (i, j) (for $j = 1$, after residual service time of the task in service at the activation moment of task $(i, 1)$);

2° all „new” tasks which are served before a task with $p = p(i, j)$; „new” tasks are activated, possibly indirectly (sequentially), by tasks from p. 1°;

$$D(i, j) = \sum_{(k, m): p(k, m) < p(i, j)} N(i, j; k, m) \cdot \sum_{l=m}^{n_{ij}^{km}} h(k, l), \quad (4)$$

where:

$$(n_{ij}^{km} = n) \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} &[(p(k, n+1) \geq p(i, j) \vee (n+1) > T_k)] \\ &\wedge [\forall l = m, \dots, n \ p(k, l) < p(i, j)] \end{aligned} \right\};$$

¹⁾ The activation moment of task (i, j) is the moment in which the service of task $(i, j-1)$ has been completed. The activation moment of task $(i, 1)$ is the arrival moment of sequence i . We say that the task $(i, j-1)$ activates task (i, j) .

²⁾ $h_r(k, m) = E[X^2(k, m)] / (2E[X(k, m)])$, where $X(k, m)$ is a random variable defining the service time of task (i, j) .

$\sigma(i, j)$ — is the utilization factor of the server due to those tasks which are in corresponding sequences before the first task with priority $p < p(i, j)$:

$$\sigma(i, j) = \sum_{k=1}^{NS} \lambda(k) u_{k, p(i, j)} \sum_{l=1}^{n_{ij}^{k1}} h(k, l), \quad (5)$$

where:

$$u_{k, p(i, j)} = \begin{cases} 1 & \text{for } p(k, 1) < p(i, j), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

3.2. CALCULATION OF $h^*(k, m)$

According to the definitions of $h^*(k, m)$, we obtain the following expression:

$$h^*(k, m) = \sum_{l=m}^{n_{km}^{km}} h(k, l) + h^*(k, m) \cdot \sigma(k, m), \quad (6)$$

where $\sigma(k, m)$ is given by (5).

3.3. CALCULATION OF $N(i, j; k, m)$

The $N(i, j; k, m)$ occurring in (1) and (4) are not given explicitly. In order to obtain them, we create a recursive algorithm. It is derived from the viewpoint of task (i, j) , for each sequence separately. For sequence k ($k = 1, \dots, NS$), and for priority p we introduce the A_k^p being a $T_k \times T_k$ matrix and the B_k^p — a T_k — dimensional row vector with the elements dependent on the p and the priorities of tasks (k, m) , $m = 1, \dots, T_k$. The precise definitions of the matrix A_k^p and the vector B_k^p are given in Appendix A.

The algorithm determines the $N(i, j; k, m)$ as a function of mean waiting times of tasks with priorities lower than or equal to $p(k, m)$ and the input data. So, if we use these expressions in (1) and (4) we obtain a linear equation for $W(i, j)$. Let us define $N(i, j; k) — a T_k — dimensional row vector with the elements $N(i, j; k, m)$, $m = 1, \dots, T_k$. The algorithm is as follows:$

step 1

On the basis of Little's formula and the previous definitions of $N(i, j; k, m)$, we obtain

$$N(i, 1; k, m) = \begin{cases} W(k; m) \cdot \lambda(k) & \text{for } p(k, m) = p(i, 1) \\ W(k, m) \cdot \lambda(k) + \varrho(k, m-1) & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (7)$$

where:

$$\varrho(k, m) = \lambda(k) \cdot h(k, m), \varrho(k, 0) = 0.$$

step 2

In this step, we determine $N(i, 2; k)$ on the basis of $N(i, 1; k)$ (including the information about the "average" system state seen by task $(i, 1)$ at its activation moment) and the average number of type k sequences which have arrived during the waiting and the service time of the task $(i, 1)$. The relation is as follows:

$$N(i, 2; k, m) = \begin{cases} \tilde{N}(i, 2; k, m) + \varrho(k, m-1) & \text{for } p(k, m) = p(i, 1) \\ \tilde{N}(i, 2; k, m) & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (8)$$

where:

$$\begin{aligned} \tilde{N}(i, 2; k) = & N(i, 1; k) \cdot A_k^{p(i, 1)} + \lambda(k)W(i, 1) \cdot B_k^{p(i, 1)} + \\ & + \lambda(k)h(i, 1) \cdot [1, 0, \dots, 0]_{1 \times T_k} \end{aligned} \quad (9)$$

The expression (8) is due to the fact that if a task $(k, m-1)$ is in service at the activation moment of task $(i, 1)$ (it occurs with the probability $q(k, m-1)$) and $p(k, m) = p(i, j)$ then the task (k, m) will be executed after the task $(i, 1)$.

step $s, s = 3, \dots, j$

For steps $3 \div j$ we only take relation (9) into account, i.e.:

$$\begin{aligned} N(i, s; k) = & N(i, s-1; k) \cdot A_k^{p(i, s-1)} + \lambda(k)W(i, s-1) \cdot B_k^{p(i, s-1)} + \\ & + \lambda(k)h(i, s-1) [1, 0, \dots, 0]_{1 \times T_k}. \end{aligned} \quad (10)$$

4. THE ALGORITHM FOR CALCULATION $W(i, j)$

In this section, we show the final algorithm for calculation of the mean waiting time $W(i, j)$ ($i = 1, \dots, NS; j = 1, \dots, T_i$).

4.1. GENERAL REMARKS CONCERNING THE ORDER OF CALCULATION OF $W(i, j)$

In the considered system, as in systems with non-preemptive priorities, the mean waiting times of tasks with priority p do not depend on the mean waiting times of tasks with priority lower than p . It is thus natural to perform calculation of mean waiting times beginning from the highest priority tasks. In the next step, we calculate the mean waiting times for tasks with priority $p = 2$; and so on.

As a consequence, we have to solve P sets of linear equations.

4.2. CALCULATION OF COEFFICIENTS FOR LINEAR EQUATIONS

Using (1) ÷ (10), we obtain the following equation for $W(i, j)$:

$$W(i, j) = \alpha(i, j) + \sum_{(k, m): p(k, m) = p(i, j)} \beta(i, j; k, m)W(k, m), \quad (11)$$

where $\alpha(i, j)$ and $\beta(i, j; k, m)$ are calculated from the input data and the mean waiting times of tasks with priority lower than $p(i, j)$.

The values of the $\alpha(i, j)$ and $\beta(i, j; k, m)$ are calculated on the basis of the recursive algorithm from section 3 and (3), (5), (6).

$\alpha(i, j)$:

We calculate the $\alpha(i, j)$ as follows:

1. on the basis of the input data, we obtain the values of $W_0, \sigma(i, j), h^*(k, m)$ from (3), (5), (6), respectively;

2. we use the recursive algorithm from the previous section putting $W(a, b) = 0$ each time when $p(a, b) \geq p(i, j)$. Thus, we obtain a T_k — dimensional row vector, say $L(i, j; k)$, with the elements $L(i, j; k, m)$;

3. $\alpha(i, j)$ are calculated from the following formula:

$$\alpha(i, j) = \sum_{(k, m): p(k, m) < p(i, j)} L(i, j; k, m) \frac{\sum_{l=m}^{n_{ij}^{km}} h(k, l)}{1 - \sigma(i, j)} + \delta(j, 1) \frac{W_0}{1 - \sigma(i, 1)} + \sum_{(k, m): p(k, m) = p(i, j)} L(i, j; k, m) h^*(k, m), \quad (12)$$

where:

$$\delta(j, 1) = \begin{cases} 1, & \text{for } j = 1 \\ 0, & \text{for } j \neq 1. \end{cases}$$

$\beta(i, j; k, m)$

In order to calculate the $\beta(i, j; k, m)$, we use the algorithm from section 3 assuming that:

- $\forall(a, b): (a, b) \neq (k, m) \quad W(a, b) = 0$;
- $W(k, m) = 1$;
- $\forall(a, b) \quad h(a, b) = 0$.

In this way we obtain a T_k -dimensional row vector, say $G(i, j; k)$, with the elements $G(i, j; k, m)$. The values of $\beta(i, j; k, m)$ are calculated from the following formula:

$$\beta(i, j; k, m) = \sum_{(k, n): p(k, n) = p(i, j) = p(k, m)} G(i, j; k, m) \cdot h^*(k, n). \quad (13)$$

4.3. SOME REMARKS ON THE REDUCTION OF THE NUMBER OF LINEAR EQUATIONS

According to the above algorithm, we have to solve a set of linear equations for each priority $p(p = 1, \dots, P)$; the number of these equations is equal to the total number of different tasks with priority p executed in the system. However, in many cases there is a possibility to reduce the number of equations if necessary. This notice is originally due to Villen [5] who has proved that for given priority p it is enough to solve a set of equations with the number of unknowns equal to the number of tasks being before the first task with priority lower than p in the sequence in which this number is greatest. Unfortunately, this reduction is obtained at the sacrifice of more complexity of the algorithm.

Taking the complexity of the algorithm into account, we distinguish two kinds of reduction: the partial reduction and the total one (the Villen's result). Applying the first of them for the priority level p , we obtain the number of equations equal to the sum over all sequences of the number of tasks with priority p being in corresponding sequences before the first task with priority lower than p . What is important, the partial reduction leads to a slightly more complex algorithm in comparison with the original one. On the other hand, the total reduction (the Villen's result) demands introduction additional unknowns and, as a consequence, the final algorithm is much more complex. Both the partial and the total reduction are described briefly in Appendix B.

5. CONCLUSIONS

The presented method gives as the possibility of exact calculating mean waiting times of tasks in a single-processor system with priorities and feedback. The interesting parameters are obtained from a set of linear equations. Methods of reduction of the number of equations were shown in section 4.3 and in Appendix B. Generally, these methods enable us to calculate mean waiting times of tasks without numerical problems even for complex systems. Due to general assumptions of the considered model, it may be useful for many practical cases.

APPENDIX A

A_k^p is a $T_k \times T_k$ matrix with the elements $a_k^p(i, j)$. For a given pair (i, j) , $a_k^p(i, j)$ may take the value 0 or 1 according to the following definition:

$$a_k^p(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{for } \begin{cases} i = j & \text{if } p(k, i) > p, \\ i > j & \text{if } p(k, i) \leq p \quad (\forall l: i < l < j, p(k, l) < p) \\ & \wedge p(k, j) \geq p, \end{cases} \\ 0 & \text{else.} \end{cases} \quad (A1)$$

$a_k^p(i, j) = 1$ if a task (k, i) (which is already waiting when a task with priority p is activated) will be a task (k, j) when the priority p task is taken into the service; otherwise $a_k^p(i, j) = 0$. Note that the value 1 may appear in at most one position of the i -th row of the matrix A . Moreover, if for an arbitrary pair (i, l) ($i = 1, \dots, T_k$; $l = i, \dots, T_k$) we have $a_k^p(i, l) = 1$ then $a_k^p(i+1, n) = 0$ for each n such that $1 \leq n < l$. Thus, if all elements of the i -th row of the matrix A_k^p are zeros than for any l satisfying the condition $i < l < T_k$ all elements of the l -th row of this matrix are zeros, too. Above conclusion is also valid for any matrix of the form:

$$\prod_{l=1}^n A_k^{p_l} = A_k^{p_1} \cdot A_k^{p_2} \cdot \dots \cdot A_k^{p_n}$$

being the product of n matrices $A_k^{p_l}$, $l = 1, 2, \dots, n$.

Example

As an example, we consider the sequence from Fig. 1

1 2 1 1 2 3 — priorities
1 2 3 4 5 6 — consecutive tasks

Fig. 1. The sample sequence

$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$
$A^1: 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3$	$A^2: 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3$	$A^3: 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3$
$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

B_k^p is a T_k — dimensional row vector with the elements $b_k^p(i)$. For given i , the value of the $b_k^p(i)$ is determined as follows:

$$b_k^p(i) = \begin{cases} 1 & \text{for } \begin{cases} i = 1 & \text{if } p(k, 1) \geq p, \\ i > 1 & \text{if } (\forall l: 1 \leq l < i, p(k, l) < p) \wedge p(k, i) \geq p, \end{cases} \\ 0 & \text{else.} \end{cases} \quad (\text{A2})$$

$b_k^p(i) = 1$ if a task $(k, 1)$ (which is activated when a task with priority p is already waiting) will be a task (k, i) when the priority p task is taken into the service; otherwise $b_k^p(i) = 0$.

Note that if the vector $B_k^{p_0} \cdot \prod_{l=1}^n A_k^{p_l}$ has zeros in all positions than the row vector $B_k^{p_0} \cdot \prod_{l=1}^{n+s} A_k^{p_l}$, $s = 1, \dots$, has zeros in all positions, too.

Example

As an example, we consider the sequence from Fig. 1

- for $p = 1$, $B^1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$;
- for $p = 2$, $B^2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$;
- for $p = 3$, $B^3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$.

APPENDIX B

REDUCTION OF THE NUMBER OF LINEAR EQUATIONS

Partial reduction

The partial reduction results from the algorithm straightforwardly. Let us consider two sequences i and k ($i, k = 1, \dots, NS$) and two neighbouring tasks of sequence i , $(i, s-1)$ and (i, s) , $s = 2, \dots, T_i$, such that $p(i, s-1) > p(i, s)$. Taking the form of expressions (1), (7)–(10) and the properties of the matrix $A_k^{p(i, s-1)}$ and the vector $B_k^{p(i, s-1)}$ into account we can state that the $W(i, j)$ does not depend on the values of $N(i, s-1; k, m)$ and $W(i, s-1)$. Following this argumentation, we see that for each task (i, l) such that $l > s$, $p(i, l) < p(i, s-1)$, the value of $W(i, l)$ depends on the input data and may depend on the values of $W(i, s)$, $W(i, s+1)$, $\dots$, $W(i, s+l-1)$. So, we are able to calculate mean waiting times of all tasks with priority higher than $p(i, s-1)$ being in sequence i after the task $(i, s-1)$ by using a recursive scheme instead of solving a set of linear equations. What is important, this recursive scheme depends only on the task ordering in sequence i (not on tasks priorities).

These give us the possibility of calculating mean waiting times for tasks which are in corresponding sequences after at least one task with lower priority.

The mean waiting times of the rest of the tasks in the system are calculated by using the algorithm from section 4.2.

Total reduction

The total reduction refers to these tasks in the system of which mean waiting times can not be evaluated by the recursive scheme occurring in the partial reduction. It is done for each priority separately, beginning from the highest priority level.

For a given priority p , let us assume that we have calculated both the mean waiting times of tasks with priority higher than p and the mean waiting times of tasks with priority p obtainable from the partial reduction.

Let us denote:

$L(k, p)$ — the number of tasks with priority p being in sequence k before the first task with priority lower than p ;

$L(p) = \max_k L(k, p)$;

(k, l, p) — the l -th task with priority p in sequence k (generally, l is not the position of this task in the k -th sequence).

Using (11), we obtain, after some algebra, the following:

$$W(k, l, p) = a(k, l, p) + X(l, p) + \sum_{i=1}^{l-1} W(k, i, p) \sum_{m=1}^{NS} \varrho^*(m, l-i, p), \quad (B1)$$

where:

$a(k, l, p)$ — is a constant obtained from expression (11) by using the input data and mean waiting times already calculated (i.e. for tasks with priority higher than p and those tasks with priority p which the partial reduction concerns to);

$$\varrho^*(m, n, p) = \begin{cases} \lambda(m)h^*(m, n, p) & \text{for } 1 \leq n \leq L(m, p) \\ 0 & \text{otherwise;} \end{cases}$$

$$X(l, p) = \sum_{k=1}^{NS} \sum_{n=1}^{L(k, p)} W(k, n, p) \cdot \varrho^*(k, l+n-1, p). \quad (B2)$$

The set $X(l, p)$, $l = 1, \dots, L(p)$, constitutes the set of new unknowns. We can prove that:

$$X(l, p) = \sum_{k=1}^{NS} \sum_{n \geq 1}^{L(k, p)} a(k, l, p) C(k, l+n-1, p) + \sum_{n \geq 1}^{L(k, p)} X(n, p) \sum_{k=1}^{NS} C(k, l+n-1, p), \quad (B3)$$

where:

$$C(k, n, p) = \varrho^*(k, n, p) + \sum_{r=1}^{L(k, p)} C(k, n+r, p) \sum_{i=1}^{NS} \varrho^*(i, r, p), \quad (B4)$$

with: $C(k, n, p) = 0$ for $n > L(k, p)$.

We see that the total reduction is much more complex in comparison with the partial reduction.

REFERENCES

1. J. T. Morris, *Priority queueing systems*, B.S.T.J., no. 8, 1981.
2. M. Villen, G. Morales, *Traffic analysis of a class of distributed SPC systems*, Proc. 9th Int. Teletraffic Congress, Torremolinos, 1979.

3. J. S. Kaufman, *Approximation methods for networks of queues with priorities*, Performance Evaluation, np. 4, 1984.
4. J. N. Daigle, C. E. Houstis, *Analysis of a task oriented multipriority queueing system*, IEEE Trans. on Com., no. 11, 1981.
5. M. Villen, *Average response times in an M/G/1 queue with general feedback and priorities*, Proc. 10th Int. Teletraffic Congress, Montreal, 1982.
6. B. Simon, *Priority queues with feedback*, Journal of the ACM, no. 1, 1984.
7. D. Gröss, C. M. Harris, *Fundamentals of queueing theory*, New York, Wiley, 1974.

W. BURAKOWSKI, D. BURSZTYNOWSKI

ANALIZA POJEDYNCZEGO SYSTEMU OBSŁUGI Z UWZGLĘDNIENIEM PRIORYTETÓW I SPRZĘŻEŃ ZWROTNYCH

Streszczenie

W artykule rozważa się system obsługi z pojedynczym urządzeniem obsługującym w warunkach strumienia zgłoszeń typu Poissona, w którym to systemie obsługa jednego zgłoszenia wymaga (w ogólnym przypadku) wykonania szeregu zadań. Zgłoszenia mogą być różnych typów. Obsługa zgłoszenia danego typu powoduje wykonanie ściśle zdefiniowanej sekwencji zadań. Każde zadanie scharakteryzowane jest przez przydzielony temu zadaniu priorytet (nieprzerywający), kolejność wykonania oraz rozkład czasu obsługi. Przedstawiona w artykule metoda umożliwia obliczenie średnich czasów oczekiwania poszczególnych zadań wykonywanych w systemie.

W. BURAKOWSKI, D. BURSZTYNOWSKI

ANALYSE DU SYSTÈME SIMPLE DE SERVICE TENANT COMPTE DES PRIORITÉS ET DES REBOUCLAGE

Résumé

Dans l'article on traite le système de service avec un simple dispositif travaillant dans les conditions d'un flux d'appels du type de Poisson. Dans ce système le service d'un seul appel exige (généralement) l'exécution d'une suite de tâches. Les appels peuvent être de différents types. Chaque appel d'un type donné exige l'exécution d'une séquence de fonctions étroitement déterminées. Chaque tâche est caractérisée par une priorité (ininterrompue) lui attribuée, un ordre d'exécution et l'horaire des services. La méthode présentée dans l'article permet de calculer les temps moyens d'attente pour les tâches particulières, exécutées selon le système.

W. BURAKOWSKI, D. BURSZTYNOWSKI

ANALYSE EINES EINZELNEN BEDIENUNGSSYSTEMS UNTER BERÜCKSICHTIGUNG VON PRIORITÄTEN UND RÜCKKOPPLUNGEN

Zusammenfassung

Im Artikel wird ein Bedienungssystem mit einer einzelnen Bedienungsvorrichtung bei einem Strom von Piosson-Anrufen erwogen, wobei bei diesem System die Bedienung eines Teilnehmeranrufs (im allgemeinen Fall) die Ausführung einer Reihe von Aufgaben erfordert. Die Typen der Anrufe können verschiedenartig sein. Die Bedienung der Anrufe des gegebenen Typs verursacht die Ausführung einer genau definierten Aufgabensequenz. Jede Aufgabe wird durch eine dieser Aufgabe zugeordnete (ununterbrochene) Priorität, Ausführungsfolge sowie Zeitverteilung der Bedienung charakterisiert. Die im Artikel geschilderte Methode ermöglicht die Berechnung der mittleren Wartezeiten bei den einzelnen im System ausgeführten Aufgaben.

В. БУРАКОВСКИ, Д. БУРШТЫНОВСКИ

АНАЛИЗ ЕДИНИЧНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ
С УЧЕТОМ ПРИОРИТЕТОВ И ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ

Р е з ю м е

Рассмотрена система массового обслуживания с единичным обслуживающим устройством работающим в условиях потока вызовов типа Пуассона, в которой обслуживание одного вызова требует (в общем случае) исполнения ряда заданий. Вызовы могут быть различных типов. Обслуживание вызова данного типа состоит в исполнении точно определенной последовательности отдельных заданий. Каждое задание характеризуется признанным ему непрерывающим приоритетом, порядком исполнения и распределением времени исполнения. Представленный метод позволяет рассчитать среднее время ожидания отдельных заданий исполняемых в системе.

Prawdopodobieństwo błędu elementowego oraz właściwości tłumienia błędów dla transmisji binarnej w kanale radiokomunikacyjnym z wolnymi zanikami Rice'a i addytywnym szumem gaussowskim

KRYSTYNA NOGA (GDYNIA)

Instytut Automatyki Okrętowej Wyższej Szkoły Morskiej

Otrzymano 1985.09.27

Sygnal podczas transmisji w kanale radiowym podlega losowym zmianom. W kanale tym występują zakłócenia addytywne, reprezentowane przez stacjonarny gaussowski proces oraz zakłócenia multiplikatywne zwane potocznie zanikami, które powodują losowe zmiany obwiedni sygnału. W pracy do opisu obwiedni sygnału, przyjęto rozkład Rice'a. Rozkład ten wykorzystano do oceny jakości transmisji binarnej w kanale z wolnymi zanikami. Przedstawiono dokładne wzory analityczne umożliwiające obliczenie dynamicznego prawdopodobieństwa błędu elementowego dla odbioru koherentnego i niekoherentnego. Ponadto przedstawiono rozkłady charakteryzujące proces grupowania się błędów w serie. Uzyskane wyniki zilustrowano graficznie.

W cyfrowych systemach radiokomunikacyjnych przesyłanie sygnałów odbywa się w obecności przypadkowych zakłóceń addytywnych i multiplikatywnych. Najczęściej jako model zakłóceń addytywnych, będących szumem, przyjmuje się stacjonarny proces o gaussowskim (normalnym) rozkładzie wartości chwilowej i zerowej wartości średniej. Założenie to jest słuszne, ze względu na normalizację szumu po przejściu przez filtr wąskopasmowy stanowiący część przeddetekcyjną odbiornika [15]. W artykule tym ponadto przyjęto, że zakłócenia multiplikatywne reprezentowane są przez wolnozmiennie nieselektywne zaniki Rice'a. Jest to jeden z dwuparametrowych rozkładów obwiedni sygnału pozwalający opisać warunki propagacji w kanale radiowym dokładniej niż prostszy powszechnie stosowany jednoparametrowy rozkład Rayleigha. Możliwości zastosowania rozkładu Rice'a przedstawiono w pracy [7]. W systemach cyfrowych jedną z miar jakości transmisji jest prawdopodobieństwo błędu elementowego. Dla kanału bez zaników (gdy sygnał użyteczny równy jest nadanemu), z addytywnym szumem gaussowskim, statyczne prawdopodobieństwo błędu elementowego, oznaczone jako $P_s(\rho)$, zostało określone [12] dla podstawowych rodzajów modulacji i detekcji; dla odbioru niekoherentnego sygnałów z kluczkowaniem częstotliwości (ang.: NCFSK, *noncoherent frequency shift keying*), różnicowo-koherentnego odbioru sygnałów z kluczkowaniem fazy (ang.: DPSK, *differentially coherent phase shift keying*), koherentnego odbioru sygnałów z kluczkowaniem częstotliwości (ang.: CFSK, *coherent frequency shift keying*) oraz koherentnego odbioru sygnałów z kluczkowaniem fazy (ang.: CPSK, *coherent phase shift keying*).

$$P_s(\varrho) = \frac{1}{2} e^{-\alpha\varrho}; \alpha = 1/2 \quad \text{dla} \quad \text{NCFSK} \quad (1)$$

$$; \alpha = 1 \quad \text{dla} \quad \text{DPSK}$$

$$P_s(\varrho) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\alpha\varrho}); \alpha = 1/2 \quad \text{dla} \quad \text{CFSK} \quad (2)$$

$$; \alpha = 1 \quad \text{dla} \quad \text{CPSK}$$

gdzie ϱ jest chwilowym stosunkiem mocy sygnału użytecznego do średniej mocy szumu normalnego, zaś

$$\operatorname{erfc}(y) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_y^{\infty} \exp(-t^2) dt$$

Wyrażenia (1) i (2) zostały w pracy [8] uogólnione i przedstawione jako

$$P_s(\varrho) = \frac{1}{2\Gamma(b)} (a\varrho)^{\frac{b-1}{2}} \cdot e^{-\frac{a\varrho}{2}} \cdot W_{\frac{b-1}{2}, \frac{b}{2}}(a\varrho) = \quad (3)$$

$$= \frac{1}{2\Gamma(b)} (a\varrho)^b e^{-a\varrho} \int_0^{\infty} e^{-a\varrho t} (1+t)^{b-1} dt$$

gdzie: $\Gamma(b)$ jest funkcją gamma [11]

$$\Gamma(b) \stackrel{\text{df}}{=} \int_0^{\infty} t^{b-1} e^{-t} dt \quad (3.1)$$

$W_{\lambda, u}(z)$ jest funkcją Whittakera [11]

$$W_{\lambda, u}(z) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{z^{u+1/2} e^{-z/2}}{\Gamma(u-\lambda+1/2)} \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{u-\lambda-1/2} (1+t)^{u+\lambda-1/2} dt \quad (3.2)$$

a i b są współczynnikami zależnymi od rodzaju modulacji i detekcji: $a = b = 1/2$ dla CFSK; $a = 1, b = 1/2$ dla CPSK; $a = 1/2, b = 1$ dla NCFSK $a = b = 1$ dla DPSK.

Dla kanału z zanikami odpowiednią miarą jakości transmisji jest dynamiczne prawdopodobieństwo błędu elementowego określone zależnością

$$P_D(\varrho_0) \stackrel{\text{df}}{=} \int_0^{\infty} P_s(\varrho) p_e(\varrho) d\varrho \quad (4)$$

gdzie $p_e(\varrho)$ jest gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej ρ reprezentującej ϱ natomiast

$$\varrho_0 \stackrel{\text{df}}{=} E(\varrho)$$

Niech sygnał użyteczny $s(t)$ w kanale z zanikami Ricea jest sumą dominującego zdeterminowanego sygnału harmonicznego $A \cos \omega_0 t$ i stacjonarnego wąskopasmowego procesu normalnego $X(t) = a_x(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_x(t)]$ o wartości średniej równej zero i równomiernym rozkładzie fazy φ_x , czyli

$$s(t) = A \cos \omega_0 t + a_x(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_x(t)] = a_s(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_s(t)] \quad (5)$$

Wówczas sygnał $y(t)$ odebrany przez odbiornik można zapisać w postaci

$$y(t) = a_s(t) \cos[w_0 t + \varphi_s(t)] + n(t) \quad (6)$$

gdzie $n(t)$ jest szumem addytywnym.

Obwiednia $a_s(t)$ sygnału użytecznego $s(t)$ ma rozkład Rice'a

$$P_{a_s}(a_s) = \frac{a_s}{\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{A^2 + a_s^2}{2\sigma_x^2}\right) I_0\left(\frac{A a_s}{\sigma_x^2}\right); a_s \geq 0$$

gdzie:

$$\sigma_x^2 \stackrel{\text{df}}{=} \text{Var}[x(t)] = E[x^2(t)] \quad (7)$$

a_s jest realizacją a zaś,

$I_0(r)$ jest zmodyfikowaną funkcją Bessela rodzaju pierwszego rzędu zerowego [11]

$$I_0(r) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(r \cdot \cos \alpha) d\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \quad (7.1)$$

Rozkład kwadratu zmiennej losowej a_s ma postać

$$p_{a_s^2}(a_s^2) = \frac{1}{2\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{A^2 + a_s^2}{2\sigma_x^2}\right) I_0\left(\frac{A a_s}{\sigma_x^2}\right) \quad (8)$$

Na podstawie (8) można określić rozkład zmiennej losowej ρ , reprezentującej ϱ zdefiniowane jako

$$\varrho \stackrel{\text{df}}{=} \frac{a_s^2}{2N_0} \quad (9)$$

gdzie N_0 jest średnią mocą addytywnego szumu normalnego. Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej ρ określona jest wówczas zależnością

$$p_{\varrho}(\varrho) = \frac{N_0}{\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{A^2 + 2N_0\varrho}{2\sigma_x^2}\right) I_0\left(\frac{A\sqrt{2N_0\varrho}}{\sigma_x^2}\right) \quad (10)$$

Dynamiczne prawdopodobieństwo błędu elementowego (4) po uwzględnieniu zależności (3) i (10) można obliczyć na podstawie wzoru

$$P_D(A, \sigma_x, N_0) = \frac{1}{2 \cdot \Gamma(b)} \frac{N_0}{\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right) \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A\sqrt{2N_0}/\sigma_x^2)^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\varrho \left[\frac{N_0}{\sigma_x^2} + a(1+t)\right]\right\} \varrho^k (a\varrho)^b (1+t)^{b-1} dt d\varrho \quad (11)$$

Po obliczeniu całek otrzymuje się

$$P_D(A, \sigma_x, N_0) = \frac{1}{2 \cdot \Gamma(b)} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)^k \frac{1}{(k!)^2} \times \\ \times \Gamma(b+k+1) \cdot B_{g'}(k+1, b) \quad (12)$$

gdzie $g' \stackrel{\text{df}}{=} \frac{N_0}{a\sigma_x^2 + N_0}$

$B_{g'}(k+1, b)$ jest niepełną funkcją beta [11]

$$B_{g'}(k+1, b) \stackrel{\text{df}}{=} \int_0^{g'} t^k (1-t)^{b-1} dt \quad (12.1)$$

a, b są współczynnikami zależnymi od rodzaju modulacji i detekcji.

Wyrażenie (12) można również przedstawić jako

$$P_D(A, \sigma_x, N_0) = \frac{1}{2 \cdot \Gamma(b)} \exp\left(\frac{-A^2}{2\sigma_x^2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)^k \frac{1}{(k!)^2} \times \\ \times \Gamma(b+k+1) \cdot \left(\frac{N_0}{a\sigma_x^2}\right)^{k+1} \frac{1}{1+k} {}_2F_1\left(k+b+1, k+1; k+2; \frac{-N_0}{a\sigma_x^2}\right) \quad (13)$$

gdzie ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$ jest funkcją hipergeometryczną Gaussa [11]

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{B(\gamma-\beta, \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tz)^{-\alpha} dt \quad (13.1)$$

natomiast $B(\alpha, \beta)$ jest funkcją beta [11]

$$B(\alpha, \beta) \stackrel{\text{df}}{=} \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} dt = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt \quad (13.2)$$

Rozwijając cosinus sumy w wyrażeniu (5) otrzymujemy dla sygnału użytecznego tzw. zapis Rice'a [15]

$$s(t) = [A + a_x(t) \cos \varphi_x(t)] \cos \omega_0 t - a_x(t) \sin \varphi_x(t) \sin \omega_0 t = \\ = [A + b_x(t)] \cos \omega_0 t - c_x(t) \sin \omega_0 t \quad (14)$$

przy czym b_x, c_x mają rozkład normalny o średniej równej zero i wariancji σ_x^2 .

Wprowadźmy ponadto dodatkowe parametry opisujące kanał

$$\varrho_1 \stackrel{\text{df}}{=} \frac{A^2}{2\sigma_x^2}; \quad \varrho_2 \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\sigma_x^2}{N_0}; \quad \varrho_3 \stackrel{\text{df}}{=} \frac{A^2}{2N_0} = \varrho_1 \varrho_2 \quad (15)$$

Wówczas wartość średnią zmiennej losowej ρ , po uwzględnieniu (14), można określić na podstawie

$$\varrho_0 = E\left\{ \frac{[A + b_x(t)]^2 + c_x^2(t)}{2N_0} \right\} = \varrho_3 + \varrho_2 \quad (16)$$

Ostatecznie wzór na dynamiczne prawdopodobieństwo błędu elementowego w kanale z zanikami Ricea przyjmuje postać

$$P_D(\varrho_1, \varrho_2) = \frac{1}{2 \cdot \Gamma(b)} e^{-\varrho_1} \sum_{k=0}^{\infty} \varrho_1^k \frac{1}{(k!)^2} \Gamma(b+k+1) B_{g''}(k+1, b) \quad (17)$$

$$\text{gdzie } g'' \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{a\varrho_2 + 1}$$

lub po uwzględnieniu (16)

$$P_D(\varrho_1, \varrho_0) = \frac{1}{2 \cdot \Gamma(b)} e^{-\varrho_1} \sum_{k=0}^{\infty} \varrho_1^k \frac{1}{(k!)^2} \Gamma(b+k+1) B_{g'''}(k+1, b) \quad (18)$$

$$\text{gdzie } g''' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 + \varrho_1}{\alpha \varrho_0 + 1 + \varrho_1}$$

Dla detekcji w systemach niekoherentnych ($b = 1$) wzór (12) na dynamiczne prawdopodobieństwo błędu elementowego, po uwzględnieniu przedstawienia funkcji $\exp(x)$ przy pomocy szeregu potęgowego, czyli

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x$$

oraz zależności (12.1) przyjmuje prostą, analityczną postać

$$P_D(A, \sigma_x, N_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{N_0}{\alpha \sigma_x^2 + N_0} \exp \left[-\frac{A^2 \cdot \alpha}{2(\alpha \sigma_x^2 + N_0)} \right] \quad (19)^*$$

lub

$$\begin{aligned} P_D(\varrho_1, \varrho_2) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha \varrho_2 + 1} \exp \left(-\frac{\varrho_1 \varrho_2 \alpha}{\alpha \varrho_2 + 1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha \varrho_2 + 1} \exp \left(-\frac{\varrho_3 \alpha}{\alpha \varrho_2 + 1} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

a po uwzględnieniu zależności (16)

$$P_D(\varrho_1, \varrho_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \varrho_1}{\alpha \varrho_0 + \varrho_1 + 1} \exp \left(\frac{-\varrho_1 \varrho_0 \alpha}{\alpha \varrho_0 + \varrho_1 + 1} \right) \quad (21)$$

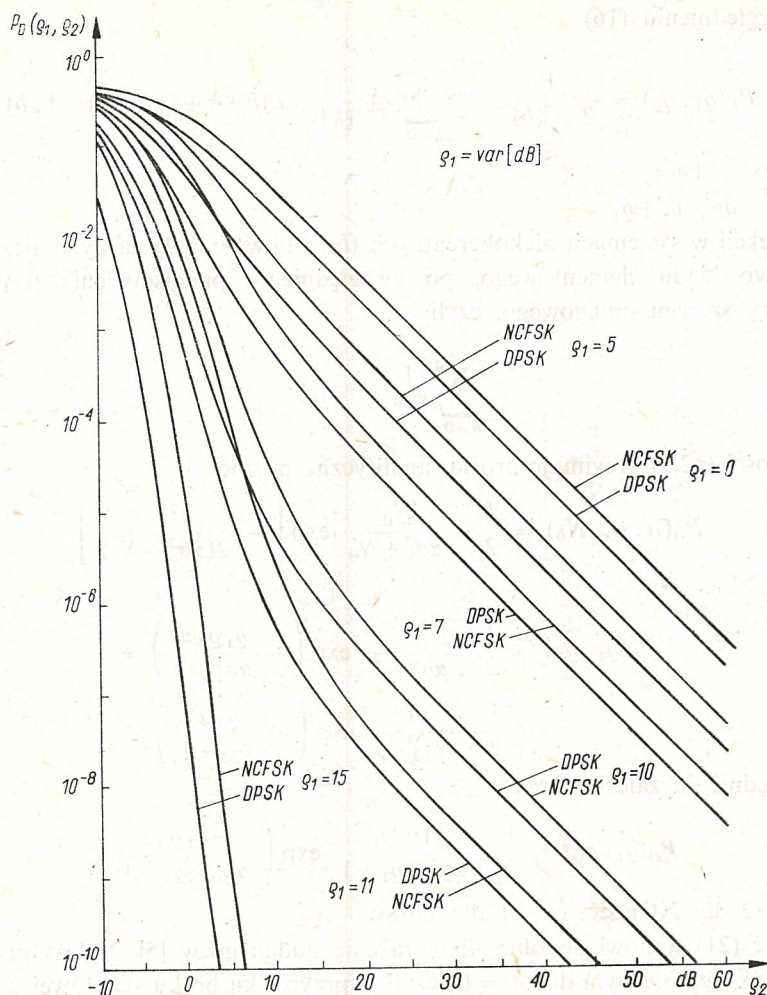
gdzie $\alpha = 1/2$ dla NCFSK, $\alpha = 1$ dla DPSK.

Zależność (21) stanowi uogólnienie wyrażenia podanego w [5]. Należy przypomnieć, że w przypadku granicznym dla $A = 0$, czyli w przypadku braku składowej dominującej, rozkład Rice'a przechodzi w rozkład Rayleigha. Wówczas (19) określa dynamiczne prawdopodobieństwo błędu elementowego w kanale z zanikami Rayleigha. Natomiast dla przypadku granicznego, gdy $\varrho_2 = 0$ otrzymujemy

$$P_D(A, N_0) = \frac{1}{2} \exp \left(-\frac{\alpha A^2}{2N_0} \right) \quad (22)$$

Zależność (22), równoważna wyrażeniu (1), określa więc prawdopodobieństwo błędu elementowego dla odbioru niekoherentnego w kanale bez zaników. Na rys. 1 przedstawiono $P_D(\varrho_1, \varrho_2)$ dla NCFSK i DPSK oraz wybranych wartości ϱ_1 , na rys. 2 $P_D(\varrho_1, \varrho_2)$ dla NCFSK oraz różnych wartości ϱ_1 jako parametru, natomiast na rys. 3 $P_D(\varrho_1, \varrho_0)$ dla NCFSK i różnych ϱ_1 . Przedstawione wykresy uzyskano jako wyniki obliczeń z zastosowaniem kalkulatora HP9810A.

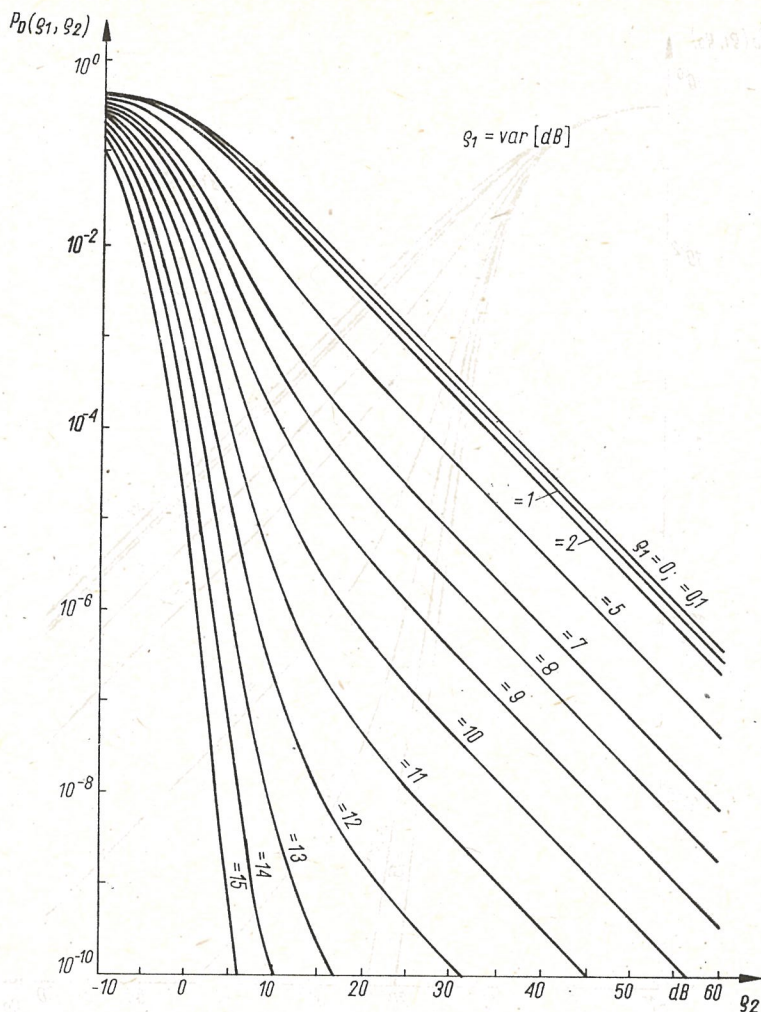
*) W czasie przygotowania artykułu ukazała się publikacja A. Wojnara, w której autor na innej drodze dochodzi do analogicznej zależności [patrz Biuletyn Wojskowej Akademii Technicznej, Nr 4, 1985, str 72].



Rys. 1. Dynamiczne prawdopodobieństwo błędu elementowego dla NCFSK i DPSK w funkcji g_2 dla wybranych wartości g_1

Podstawową cechą transmisji cyfrowej w kanale radiokomunikacyjnym jest grupowanie się błędów w serie, czyli występowanie niejednorodnego strumienia błędów. Systemy cyfrowej transmisji z detekcją lub korekcją błędów stosowane w radiokomunikacji morskiej najczęściej bazują na transmisji ciągów o długości N sygnałów elementarnych. Jakość odbioru w tych systemach zależy od liczby błędów w ciągu N -elementowym. Niech L_N oznacza zmienną losową reprezentującą liczbę błędów elementowych w binarnym ciągu N -elementowym dla NCFSK, CFSK, CPSK. (Pomija się tutaj odbiór DPSK, gdyż błędy elementowe dla tego przypadku są zależne). Prawdopodobieństwo, że w ciągu N -elementowym wystąpi dokładnie n błędów, które nazywane jest wagowym widmem błędów, można określić na podstawie

$$P(L_N = n) = \binom{N}{n} P_s^n(\varrho) [1 - P_s(\varrho)]^{N-n}; \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (23)$$



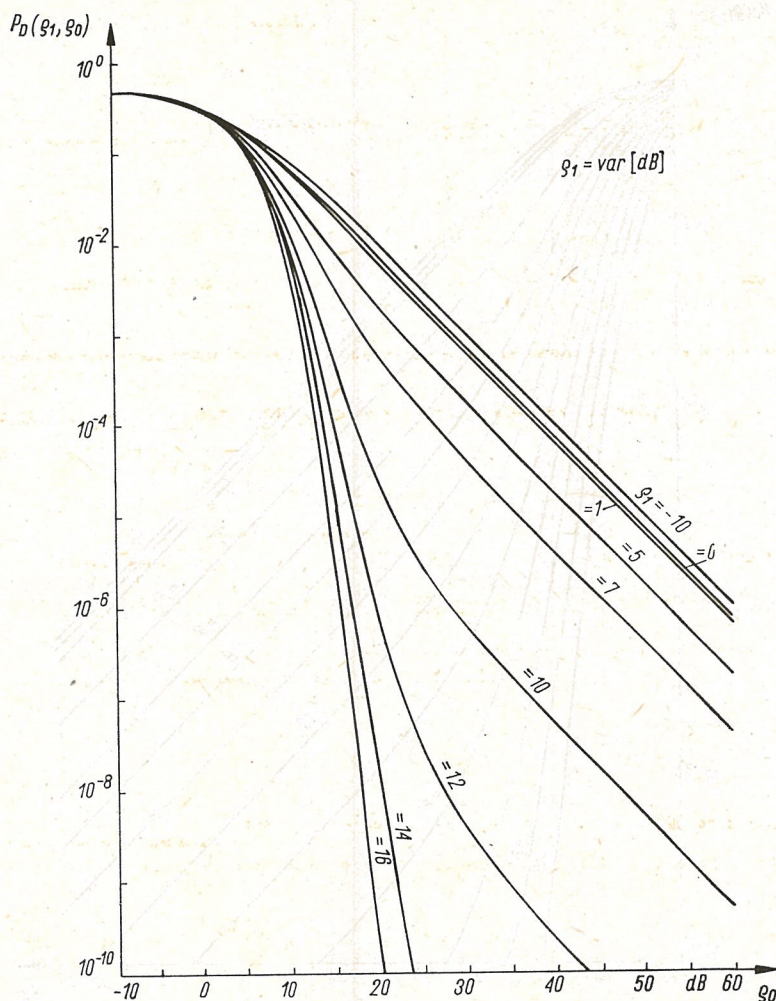
Rys. 2. Dynamiczne prawdopodobieństwo błędu elementowego dla NCFSK w funkcji q_2 dla różnych wartości q_1

gdzie $P_s(q)$ jest statycznym prawdopodobieństwem błędu elementowego określonym zgodnie z (3).

Prawdopodobieństwa określone wzorem (23) są rozkładem dwumianowym. Rozkład ten jest słuszny pod warunkiem, że stosunek mocy sygnału użytecznego do mocy szumu jest stały w czasie transmisji ciągu N -elementowego. Wtedy też prawdopodobieństwo, że w ciągu N -elementowym wystąpi więcej niż n błędów wyraża wzór

$$P(L_N > n) = \sum_{j=n+1}^N P(L_N = j) = 1 - \sum_{j=0}^n P(L_N = j) \quad (24)$$

Do opisu probabilistycznych zależności w strumieniu błędów można również wykorzystać zmienną losową A_0 reprezentującą odstęp pomiędzy kolejnymi błędami elemento-



Rys. 3. Dynamiczne prawdopodobieństwo błędu elementowego dla NCFSK w funkcji g_0 dla różnych wartości g_1

wymi. Rozkład (widmo) odstępów λ_0 pomiędzy kolejnymi niezależnymi błędami elementowymi jest geometryczny

$$P(A_0 = \lambda_0) = P_s(\varrho)[1 - P_s(\varrho)]^{\lambda_0}; \quad \lambda_0 = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (25)$$

Prawdopodobieństwo, że odstęp pomiędzy kolejnymi błędami elementowymi będzie większy lub równy λ_0 określa wtedy zależność

$$P(A_0 \geq \lambda_0) = [1 - P_s(\varrho)]^{\lambda_0} \quad (26)$$

Zależności (23÷26) są słuszne dla kanału radiowego bez zaników (przypadek statyczny). Dla kanału radiowego z zanikami, w celu uwzględnienia fluktuacji sygnału użytecznego, można również zastosować rozkłady (23÷26). W wyniku ich uśredniania ze względu na ρ otrzymuje się odpowiednie dynamiczne prawdopodobieństwa charakteryzujące proces grupowania się błędów w serie. Operacja uśredniania możliwa jest jedynie

w przypadku, gdy zaniki sygnału użytecznego są bardzo wolne, czyli gdy ϱ w czasie odbioru każdego ciągu może być traktowane jako stałe.

W radiokomunikacji morskiej wykorzystywane są przede wszystkim sygnały z modulacją FSK, które podlegają detekcji niekoherentnej. W związku z tym w dalszej części pracy zostaną przedstawione zależności charakteryzujące strumień błędów tylko dla NCFSK. Dla kanału z zanikami Rice'a wagowe widmo błędów można określić na podstawie

$$P_D(L_N = n) = \int_0^\infty \binom{N}{n} \left[\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2} \varrho\right) \right]^n \left[1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2} \varrho\right) \right]^{N-n} \times \\ \times \frac{N_0}{\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{A^2 + 2N_0 \varrho}{2\sigma_x^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{A\sqrt{2N_0 \varrho}}{\sigma_x^2}\right) d\varrho \quad (27)$$

Po uwzględnieniu zależności

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i$$

i rozwinięcia (7.1) oraz po przekształceniach, zależność (27) można przedstawić jako

$$P_D(L_N = n) = 2 \binom{N}{n} N_0 \sum_{i=0}^{N-n} (-1)^i \binom{N-n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+i} \frac{1}{\sigma_x^2(n+i) + 2N_0} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{A^2(n+i)}{2[\sigma_x^2(n+i) + 2N_0]}\right\} \quad (28)$$

Uwzględniając zależność (15) uzyskuje się równoważną postać

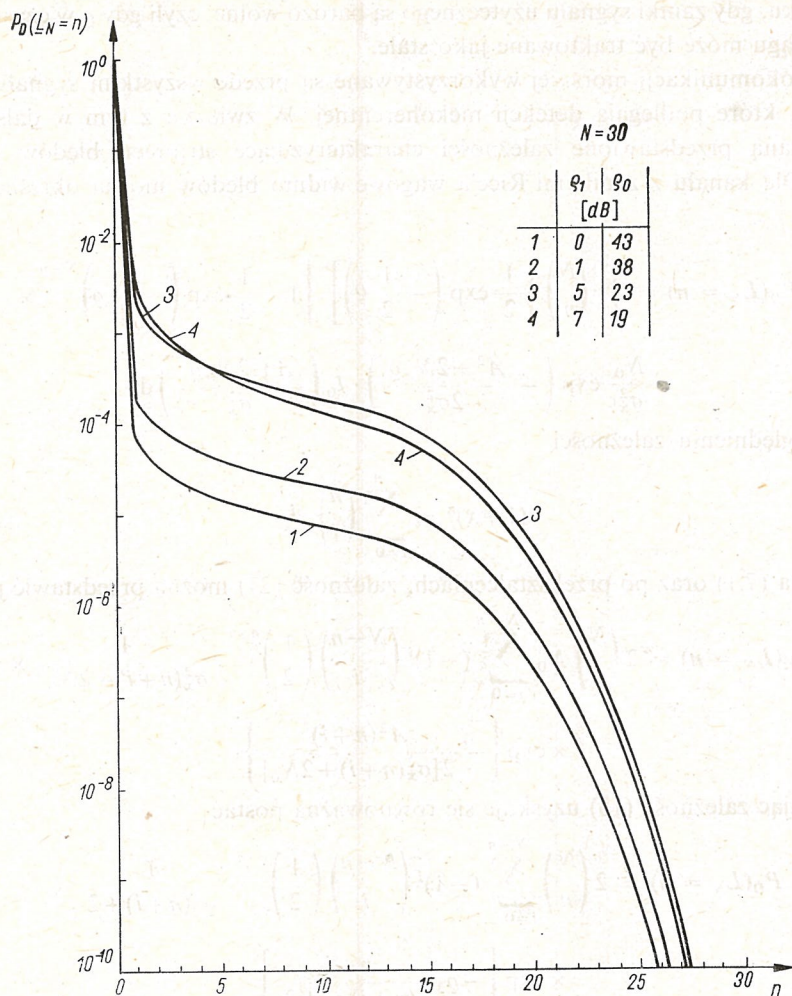
$$P_D(L_N = n) = 2 \binom{N}{n} \sum_{i=0}^{N-n} (-1)^i \binom{N-n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+i} \frac{1}{\varrho_2(n+i) + 2} \times \\ \times \exp\left[-\varrho_3 \frac{n+i}{(n+i)\varrho_2 + 2}\right] \quad (29)$$

lub po uwzględnieniu (16)

$$P_D(L_N = n) = 2 \binom{N}{n} \sum_{i=0}^{N-n} (-1)^i \binom{N-n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+i} \frac{1 + \varrho_1}{(n+i)\varrho_0 + 2(1 + \varrho_1)} \times \\ \times \exp\left[\frac{-\varrho_1 \varrho_0(n+i)}{(n+i)\varrho_0 + 2(1 + \varrho_1)}\right] \quad (30)$$

Natomiast dynamiczne prawdopodobieństwo, że w ciągu N -elementowym wystąpi więcej niż n błędów można określić na podstawie wzoru

$$P_D(L_N > n) = 1 - 2N_0 \sum_{j=0}^n \binom{N}{j} \sum_{i=0}^{N-j} (-1)^i \binom{N-j}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{j+i} \frac{1}{\sigma_x^2(j+i) + 2N_0} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{A^2(j+i)}{2[\sigma_x^2(j+i) + 2N_0]}\right\} \quad (31)$$



Rys. 4. Wagowe widmo błędów dla NCFSK

lub

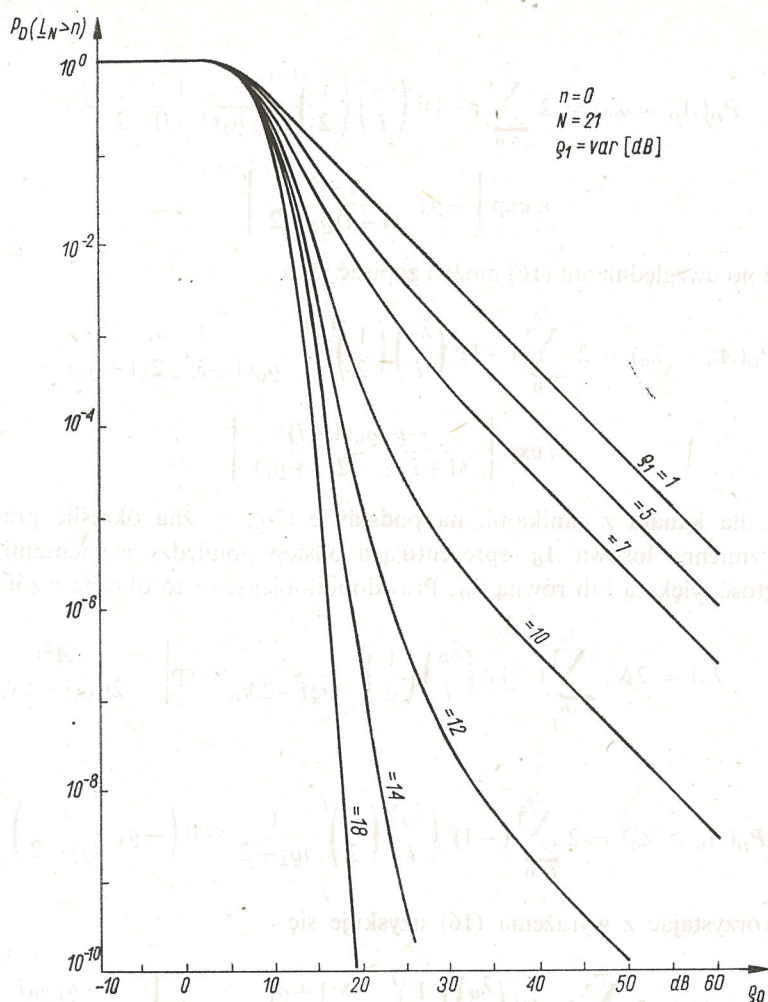
$$P_D(L_N > n) = 1 - 2 \sum_{j=0}^n \binom{N}{j} \sum_{i=0}^{N-j} (-1)^i \binom{N-j}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{j+i} \times \quad (32)$$

$$\times \frac{1}{\varrho_2(j+i)+2} \exp \left[-\varrho_3 \frac{j+i}{(j+i)\varrho_2+2} \right]$$

Wyrażenie (32) po uwzględnieniu (16) sprowadza się do

$$P_D(L_N > n) = 1 - 2 \sum_{j=0}^n \binom{N}{j} \sum_{i=0}^{N-j} (-1)^i \binom{N-j}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{j+i} \times \quad (33)$$

$$\times \frac{1+\varrho_1}{(j+i)\varrho_0+2(1+\varrho_1)} \cdot \exp \left[\frac{-\varrho_1\varrho_0(j+i)}{(j+i)\varrho_0+2(1+\varrho_1)} \right]$$



Rys. 5. Dynamiczne prawdopodobieństwo wystąpienia więcej niż $n = 0$ błędów w ciągu o długości $N = 21$

Pamięć, którą głównie z powodu zaników uzyskuje kanał binarny, przejawiającą się w tendencji do grupowania się błędów w serie opisuje również rozkład (widmo) odstępów λ_0 pomiędzy kolejnymi błędami elementowymi, który można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned}
 P_D(A_0 = \lambda_0) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2} \varrho\right) \left[1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2} \varrho\right)\right]^{\lambda_0} \frac{N_0}{\sigma_x^2} \times \\
 &\quad \times \exp\left(-\frac{A^2 + 2N_0 \varrho}{2\sigma_x^2}\right) I_0\left(\frac{A\sqrt{2N_0 \varrho}}{\sigma_x^2}\right) d\varrho = \\
 &= 2N_0 \sum_{i=0}^{\lambda_0} (-1)^i \binom{\lambda_0}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \frac{1}{\sigma_x^2(1+i) + 2N_0} \times \\
 &\quad \times \exp\left\{-\frac{A^2(1+i)}{2[\sigma_x^2(1+i) + 2N_0]}\right\}; \quad \lambda_0 = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{34}$$

lub

$$P_D(A_0 = \lambda_0) = 2 \sum_{i=0}^{\lambda_0} (-1)^i \binom{\lambda_0}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \frac{1}{\varrho_2(1+i)+2} \times \exp \left[-\varrho_3 \frac{1+i}{(1+i)\varrho_2+2} \right] \quad (35)$$

Wzór (35) po uwzględnieniu (16) można zapisać jako

$$P_D(A_0 = \lambda_0) = 2 \sum_{i=0}^{\lambda_0} (-1)^i \binom{\lambda_0}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \frac{1+\varrho_1}{\varrho_0(1+i)+2(1+\varrho_1)} \times \exp \left[\frac{-\varrho_1 \varrho_0(1+i)}{(1+i)\varrho_0+2(1+\varrho_1)} \right] \quad (36)$$

Jednocześnie dla kanału z zanikami, na podstawie (26), można określić prawdopodobieństwo, że zmienna losowa A_0 reprezentująca odstęp pomiędzy elementami błędnymi przyjmie wartość większą lub równą λ_0 . Prawdopodobieństwo to określa wzór

$$P_D(A_0 \geq \lambda_0) = 2N_0 \sum_{i=0}^{\lambda_0} (-1)^i \binom{\lambda_0}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \frac{1}{\sigma_x^2 i + 2N_0} \exp \left[-\frac{A^2 i}{2(\sigma_x^2 i + 2N_0)} \right] \quad (37)$$

lub

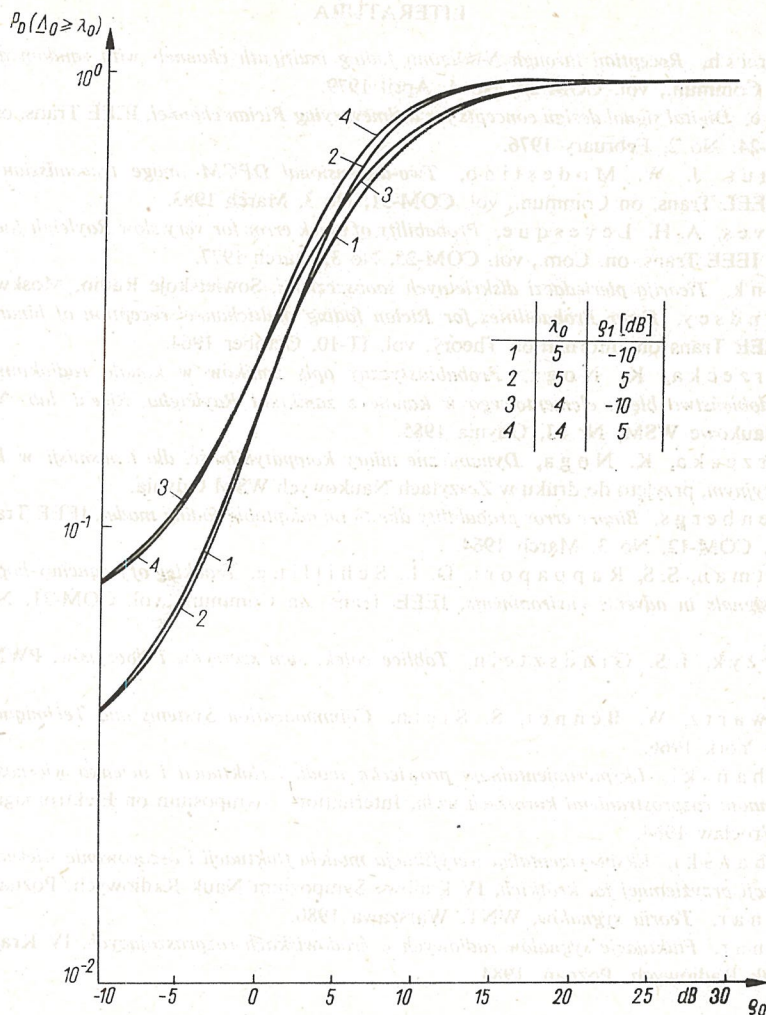
$$P_D(A_0 \geq \lambda_0) = 2 \sum_{i=0}^{\lambda_0} (-1)^i \binom{\lambda_0}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \frac{1}{i\varrho_2+2} \exp \left(-\varrho_3 \frac{i}{i\varrho_2+2} \right) \quad (38)$$

Natomiast korzystając z wyrażenia (16) uzyskuje się

$$P_D(A_0 \geq \lambda_0) = 2 \sum_{i=0}^{\lambda_0} (-1)^i \binom{\lambda_0}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \frac{1+\varrho_1}{i\varrho_0+2(1+\varrho_1)} \exp \left[\frac{-\varrho_1 \varrho_0 i}{i\varrho_0+2(1+\varrho_1)} \right] \quad (39)$$

Uzyskane wyżej zależności przedstawiono graficznie. Na rys. 5 przedstawiono $P_D(L_N > n)$ dla $n = 0$, $N = 21$ i różnych ϱ_1 , na rys. 4 zobrażowano $P_D(L_N = n)$ dla wybranych ϱ_0 i ϱ_1 , które dobrano na podstawie krzywych z rys. 3 tak, aby zapewnić $P_D(\varrho_0) \approx 10^{-3}$. Natomiast na rys. 6 przedstawiono $P_D(A_0 \geq \lambda_0)$ dla różnych λ_0 i ϱ_1 . Wykresy przedstawione na rys. 4÷6 można wykorzystać między innymi do badania kodów zabezpieczających przesyłane informacje przed zakłóceniami.

Jak już wcześniej wspomniano zaniki występujące w kanale radiowym można opisać przy pomocy rozkładu Rice'a wówczas, gdy sygnał użyteczny jest sumą dominującego sygnału harmonicznego i stacjonarnego wąskopasmowego procesu normalnego. Rozkład ten jest bardzo często wykorzystywany do oceny jakości transmisji w kanale radiowym, np. [13], [14], [6], [2]. W pracach tych jednak nie przedstawiono prostych analitycznych zależności umożliwiających ocenę jakości transmisji. W pracy [13] i [14] w celu obliczenia dynamicznego prawdopodobieństwa błędu elementowego zastosowano aproksymację



Rys. 6. Dynamiczne prawdopodobieństwo odstępów nie mniejszych niż λ_0 pomiędzy elementami błędnymi dla NCFSK

statycznego prawdopodobieństwa błędu elementowego. W wyniku końcowym uzyskano jedynie przybliżone zależności. Zależności przedstawione w niniejszym artykule są natomiast analityczne i umożliwiają dokładne wyznaczenie wskaźników jakości transmisji. Należy zaznaczyć, że rozkład Rice'a opisuje szczególną klasę mechanizmów propagacyjnych w kanale radiowym. Dokładniejszy opis rzeczywistych warunków propagacyjnych w kanale radiokomunikacyjnym możliwy jest po zastosowaniu do opisu zaników rozkładu Nakagami [1], [16]. Rozkład ten w szczególnym przypadku dobrze aproksymuje rozkład Rice'a [13], [16]. Pożądane jest więc podanie zależności pomiędzy wielkościami charakteryzującymi oba te rozkłady. Problem ten jest obecnie analizowany przez autorkę i stanowi materiał do dalszych opracowań.

LITERATURA

1. U. Charash, *Reception through Nakagami fading multipath channels with random delays*, IEEE Trans. on Commun., vol. COM-27, No 4, April 1979.
2. D. Chase, *Digital signal design concepts for a timevarying Rician channel*, IEEE Trans. on Commun., vol. COM-24, No 2, February 1976.
3. D. G. Daut, J. W. Modestino, *Two-dimensional DPCM image transmission over fading channels*, IEEE Trans. on Commun., vol. COM-31, No 3, March 1983.
4. R. E. Eaves, A. H. Levesque, *Probability of block error for very slow Rayleigh fading in Gaussian noise*, IEEE Trans. on Com., vol. COM-25, No 3, March 1977.
5. L. M. Fink, *Teorija pieriadaci diskrietnych soobszczienij*, Sowietkoje Radio, Moskwa 1963.
6. W. C. Lindsey, *Error Probabilities for Rician fading multichannel reception of binary and N-ary signals*, IEEE Trans on Information Theory, vol. IT-10, October 1964.
7. B. Mędrzecka, K. Noga, *Probabilistyczny opis zaników w kanale radiokomunikacyjnym. Prawdopodobieństwo błędu elementowego w kanale z zanikami Rayleigha, Rice'a lub Nakagamięgo*, Zeszyty Naukowe WSM, Nr 13, Gdynia 1985.
8. B. Mędrzecka, K. Noga, *Dynamiczne miary kompatybilności dla transmisji w kanale radiokomunikacyjnym*, przyjęto do druku w Zeszytach Naukowych WSM Gdynia.
9. M. Nesenbergs, *Binary error probability due to an adaptable fading model*, IEEE Trans. on Commun., vol. COM-12, No 3, March 1964.
10. C. A. Putman, S. S. Rappaport, D. L. Schilling, *Tracking of frequency-hopped spread-spectrum signals in adverse environments*, IEEE Trans. on Commun., vol. COM-31, No 8, August 1983.
11. I. M. Ryżyk, I. S. Gradsztejn, *Tablice całek, sum szeregów i iloczynów*, PWN, Warszawa 1964.
12. M. Schwartz, W. Bennet, S. Stein, *Communication Systems and Techniques*, McGraw-Hill, New York 1966.
13. M. Suchański, *Eksperymentalna prowierka modeli fluktuacji i ocienka wiernosti pieriadacz pri przziemnom rozprostranienii korotkich wołn*, International Symposium on Elektromagnetic Compatibility, Wrocław 1984.
14. M. Suchański, *Eksperymentalna weryfikacja modelu fluktuacji i oszacowanie wierności transmisji w propagacji przyziemnej fal krótkich*, IV krajowe Sympozjum Nauk Radiowych, Poznań 1984.
15. A. Wojnar, *Teoria sygnałów*, WNT, Warszawa 1980.
16. A. Wojnar, *Fluktuacje sygnałów radiowych w środowiskach rozpraszających*, IV Krajowe Sympozjum Nauk Radiowych, Poznań, 1984.

K. NOGA

ERROR PROBABILITY AND ERRORS' STREAM PROPERTIES
FOR BINARY TRANSMISSION IN A RADIOCOMMUNICATION CHANNEL
WITH VERY SLOW RICIAN FADING AND ADDITIVE GAUSSIAN NOISE

Summary

Radio waves parameters fluctuate randomly in the radiocommunication channel. The signal envelope undergoes deep fades. When binary information is transmitted through such a channel, fading causes random variation of probabilities of error associated with the detection of individual elementary signals, which produces a clustering of errors. The paper presents an analytic description of the probability of elementary error in the channel with very slow Rician fading and Gaussian noise for noncoherent and coherent detection. Digital systems employing error detection or error correction coding are generally based on the transmission of blocks of N sequential bits. Expressions are given for the probability of n errors occurring in N bits (weighted spectrum of errors), and the probability of more than n errors in a block of N bits for noncoherent frequency shift keying (NCFSK). The probability of λ_0 interval between elementary errors for NCFSK is also derived. Computations are presented graphically for a broad range of error probabilities.

K. NOGA

PROBABILITÉ DE L'ERREUR ÉLÉMENTAIRE ET LES PROPRIÉTÉS DU FLUX D'ERREURS
POUR LA TRANSMISSION BINAIRE DANS LE CANAL DE RADIOCOMMUNICATION
À LENTS FADING DE RICE ET L'ADDITIF BRUIT GAUSSIEN

Résumé

Pendant la transmission le signal dans le canal de radio subit des changements accidentels. Dans ce canal se produisent des parasites additifs représentés par le procédé stationnaire de Gausset les parasites multiplicatifs dits populairement fading, qui causent des changements accidentels du contour du signal. Dans l'étude on admet dans la description du contour du signal la répartition de Rice. On s'est servi de cette répartition pour estimer la qualité de la transmission binaire dans le canal à lents fading. On a présenté des équations analytiques bien précises, permettant de calculer la probabilité dynamique de l'erreur élémentaire pour la réception cohérente et non cohérente. En outre, on a présenté les répartitions caractérisant le groupement des erreurs en séries. Les résultats obtenus ont été illustrés graphiquement.

K. NOGA

WAHRSCHEINLICHKEIT EINES ELEMENTAREN FEHLERS
UND EIGENSCHAFTEN DES FEHLERFLUSSES BEI BINÄRTRANSMISSIONEN
IM ÜBERTAGUNGSKANAL MIT LANGSAMEN RICE-SCHWÜNDEN
UND ADDITIVEM GAUBRAUSCHEN

Zusammenfassung

Das Signal unterliegt während der Transmission im Funkkanal verschiedenen stochastischen Veränderungen. In diesem Kanal treten additive Störungen als Gaußrauschen auf sowie multiplikative Störungen, üblicherweise Schwund genant, die stochastische Änderungen der Signalhüllkurve verursachen. Man wandte in dieser Bearbeitung zur Beschreibung der Signalhüllkurve die Rice-Verteilung an. Diese Verteilung dient hier zur Qualitätsabschätzung der Binärtransmission im Kanal mit langsamen Schwüngen. Es wurden genaue analytische Gleichungen angeführt, die Berechnungen der dynamischen Wahrscheinlichkeit des elementaren Fehlers für kohärent und inkohärenten Empfang möglich machen. Außerdem sind Verteilungen dargestellt worden, welche die Gruppierung der Fehler in Serien beschreiben. Die gewonnenen Ergebnisse werden graphisch illustriert.

K. NOGA

ВЕРОЯТНОСТЬ ОШИБКИ И СВОЙСТВА ПОТОКА ОШИБОК БИНАРНОЙ ПЕРЕДАЧИ
В РАДИОКАНАЛЕ С МЕДЛЕННЫМИ ЗАМИРАНИЯМИ РАЙСА
И АДДИТИВНОЙ ГАУССОВОЙ ПОМЕХОЙ

Резюме

В реальных радиоканалах связи кроме аддитивных помех существуют и другие факторы искажающие сигнал, которые приводят к флюктуациям фазы и огибающей сигнала. Эти явления часто называют замиранием сигнала. Следовательно по способу воздействия на полезный сигнал помехи в радиоканалах можно разделить на аддитивные и мультипликативные. Случайное изменение сигналов в радиоканале является существенным фактором ограничивающим эффективность систем радиосвязи. В статье принято, что в радиоканале присутствуют медленные замирания Райса и аддитивный стационарный гауссовский шум. Определено вероятность ошибок бинарной передачи при оптимальном когерентном и некогерентном приеме сигналов с фазовой и частотной модуляцией. Представлены также распределения характеризующие пакетный характер потока ошибок. Полученные результаты расчетов представлены графически.

Metoda syntezy logicznej układów cyfrowych opisywanych sieciami Petriego

JERZY KALINOWSKI, TADEUSZ ŁUBA (WARSZAWA)

Instytut Telekomunikacji Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 1985.05.06

1. WPROWADZENIE

Sieć Petriego jest modelem matematycznym procesów cyfrowych zaproponowanym przez Carla Adama Petriego w jego rozprawie doktorskiej z 1962 r. Jest to model typu: zdarzenia — warunki i jego struktura odzwierciedla bezpośrednio relacje między zdarzeniami a warunkami tj. warunkami jako przyczynami występowania zdarzeń i warunkami powstałymi w wyniku zdarzenia.

W najbardziej skrócony sposób, cechy charakterystyczne sieci Petriego można przedstawić następująco:

1. Model ten w naturalny sposób odzwierciedla słownie opisane relacje przyczynowo-zdarzeniowe.
2. Sieć Petriego umożliwia opis procesów cyfrowych o aktywności współbieżnej.
3. Jest to model podatny na modyfikację. Istnieje wiele modeli pochodnych pozwalających opisać specyficzne klasy procesów cyfrowych.
4. Sieć Petriego umożliwia opis struktur hierarchicznych. Stosunkowo proste jest łączenie i podział sieci, co predysponuje ten model do opisu mechanizmów synchronizacyjnych.
5. Poprzez zbadanie określonych własności sieci opisującej dany proces cyfrowy można zweryfikować poprawność tego modelu.

Wymienione (jak również nie wymienione) cechy tego modelu powodują, że w ostatnich latach obserwuje się dynamiczny wzrost wykorzystywania sieci Petriego przy projektowaniu systemów cyfrowych. Jak na razie model ten jest stosowany przede wszystkim w procesie analizy (liczne przykłady są przedstawione w [3, 11]). Wykorzystanie sieci Petriego w procesie logicznej syntezy układów cyfrowych jest dość ograniczone z powodu braku efektywnych metod realizacji modelu. Dla układu cyfrowego opisanego siecią Petriego jego realizacja polega na ogół na przekształceniu na model sekwencyjny, który jest następnie realizowany powszechnie znanymi metodami [4, 5]. Często traci się tu korzyści wynikające z zastosowania tej niekonwencjonalnej metody opisu.

W pracy tej zostanie przedstawiona metoda syntezy układów cyfrowych opisywanych sieciami Petriego, polegająca na bezpośrednim przekształceniu modelu w jego komórkową realizację. Realizacja modelu polega na zaprogramowaniu w układzie komórki jednostkowych, strukturalnych cech danej sieci. Należy podkreślić, że proponowana komórka może być zbudowana w stosunkowo prosty sposób za pomocą programowanych matryc AND-OR.

2. WARUNKOWA SIEĆ PETRIEGO

Do opisu układów cyfrowych zostanie wykorzystana tzw. warunkowa sieć Petriego [2]. Model ten jest rozszerzeniem klasycznej znakowanej sieci Petriego.

Definicja 1. Warunkową siecią Petriego nazywamy uporządkowaną ósemkę WSP = $\langle P, T, \alpha, \beta, M_0, \chi, PR, \varphi \rangle$, gdzie:

P — niepusty skończony zbiór miejsc,

T — niepusty skończony zbiór przejść,

$\alpha: P \times T \rightarrow \{0, 1\}$ — funkcja incydencji miejsc z przejściami,

$\beta: T \times P \rightarrow \{0, 1\}$ — funkcja incydencji przejść z miejscami,

$M_0: P \rightarrow N$ — funkcja znakowania początkowego, przy czym

$$N = \{0, 1, 2, \dots\},$$

$\chi_0 \{0, 1\}^k$ — skończony zbiór stanów otoczenia sieci WSP,

gdzie $k = 1, 2, \dots$

$PR = \{pr: \chi \times N^{|P|} \rightarrow \{0, 1\}\}$ — skończony zbiór funkcji binarnych

$\varphi: T \rightarrow PR$ — funkcja etykietująca przypisująca każdemu przejściu $t \in T$ funkcję

$pr_t \in PR$ zwaną warunkiem zapalenia tego przejścia.

W celu przedstawienia dynamicznych własności warunkowej sieci Petriego, należy podać warunki zmiany stanu sieci WSP określonego znakowaniem $M \in N^{|P|}$.

Definicja 2. Przejście $t \in T$ jest przygotowane do zapalenia w warunkowej sieci Petriego WSP przy znakowaniu $M \in N^{|P|}$ i stanie otoczenia $X \in \chi$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$((\forall p \in P)(M(p) \geq \alpha(p, t)) \wedge pr_t(X, M) = 1) \quad (1)$$

Zbiór przejść spełniających (1) dla znakowania M i stanu otoczenia X oznaczamy $T(X, M)$.

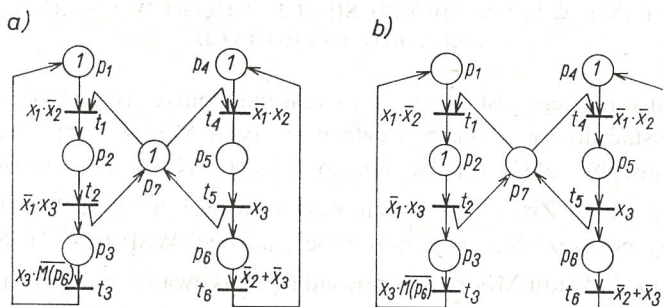
Definicja 3. Zapaleniem przejścia $t \in T$ przygotowanego do zapalenia w sieci WSP nazywamy przekształcenie $f_t: N^{|P|} \rightarrow N^{|P|}$ znakowania sieci, takie, że:

$$(\forall p \in P)(M'(p) = M(p) - \alpha(p, t) + \beta(t, p)) \quad (2)$$

Funkcja zapalania określa relację osiągania stanów w sieci WSP. Ze znakowania początkowego M_0 można zbudować za pomocą iteracji zapalania przejść tzw. klasą znakowań osiągalnych $R(M_0)$. Własności zbioru $R(M_0)$ określają istotne cechy danej warunkowej sieci Petriego WSP.

Definicja 4. Sieć WSP jest bezpieczna wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$(\forall M \in R(M_0))(\forall p \in P)(M(p) \leq 1) \quad (3)$$



Rys. 1. Przykładowa warunkowa sieć Petriego WSP (rys. 1a) i sieć ta po zapaleniu przejścia t_1 (rys. 1b)

Dość trywialnym wnioskiem jest fakt, że dla sieci bezpiecznej klasa znakowań osiągalnych $R(M_0)$ jest skończona.

Na rys. 1a jest przedstawiony graf przykładowej warunkowej sieci Petriego (funkcje warunków są opisane za pomocą formuł boolowskich). W sieci tej znakowanie M_0 i stanu otoczenia $X = [011]$ przygotowały do zapalenia przejście t_1 . Na rys. 1b jest pokazana ta sieć po zapaleniu przejścia t_1 . Jak łatwo sprawdzić sieć ta jest bezpieczna.

Przedstawimy teraz zasady porównywania warunkowych sieci Petriego.

Definicja 5. Niech będą dane dwie warunkowe sieci Petriego $WSP = \langle P, T, \alpha, \beta, M_0, \chi, PR, \varphi \rangle$ oraz $WSP' = \langle P', T', \alpha', \beta', M'_0, \chi', PR', \varphi' \rangle$.

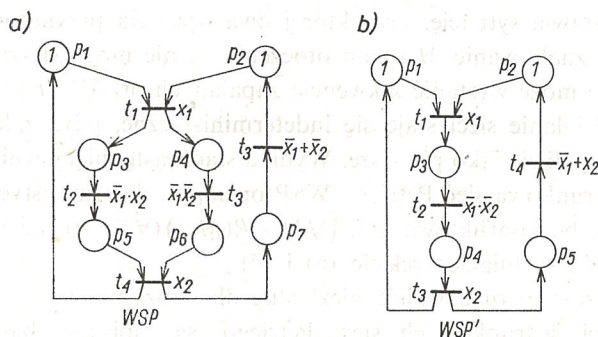
1. Sieć WSP' pokrywa sieć WSP jeżeli istnieją funkcje $g: R(M_0) \rightarrow R(M'_0)$ i $\lambda: \chi \rightarrow \chi'$ takie, że:

$$\begin{aligned} & \mathbb{I}(\forall M \in R(M_0))(\forall X \in \chi) (\exists t \in T(X, M): M_t = f_t(M)) \Rightarrow \\ & \Rightarrow (\exists t' \in T(\lambda(X), g(M)): g(M_t) = f_{t'}(g(M))) \end{aligned} \quad (4)$$

2. Jeżeli funkcje g i λ są bijekcjami to obie sieci są równoważne.

Na rys. 2 są przedstawione warunkowe sieci Petriego WSP (rys. 2a) i WSP' (rys. 2b) takie, że sieć WSP' pokrywa sieć WSP. W tym przypadku relacja pokrycia jest określona przez funkcję λ , która jest identycznością oraz funkcją $g: R(M_0) \rightarrow R(M'_0)$ taką, że:

$$\begin{aligned} g[1100000] &= [11000], g[0011000] = [00100], g[0001100] = [00100], g[0010010] = \\ &= [00010], g[0000110] = [00010], g[1000001] = [10001] \end{aligned}$$



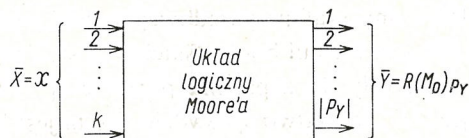
Rys. 2. Sieć WSP (rys. 2a) i pokrywająca ją sieć WSP' (rys. 2b)

3. WYKORZYSTANIE WARUNKOWYCH SIECI PETRIEGO W LOGICZNEJ SYNTEZIE UKŁADÓW CYFROWYCH

Warunkowa sieć Petriego jest jednym z modeli matematycznych, które można z powodzeniem wykorzystać do opisu układów cyfrowych typu Moore'a. Zbiór znakowań osiągalnych $R(M_0)$ modeluje zbiór stanów danego układu, zaś zapalenie przejść reprezentuje zdarzenia zmiany stanu. Zbiór wszystkich wektorów wejściowych $\bar{X}$ układu cyfrowego jest odwzorowany poprzez zbiór χ stanów otoczenia sieci WSP (rys. 3). Natomiast wektorom wyjściowym $\bar{Y}$ układu Moore'a odpowiadają znakowania podzbioru miejsc $P_Y \subseteq P$ tzn.

$$\bar{Y} = R(M_0)_{P_Y} = \{M^Y \in N^{P_Y} : (\exists M \in R(M_0))(M^Y = M|_{P_Y})\} \quad (5)$$

gdzie $M|_{P_Y}$ jest obcięciem funkcji znakowania do podzbioru P_Y .



Rys. 3. Warunkowa sieć Petriego jako model układu Moorea

Rozważmy teraz jakie cechy powinna posiadać warunkowa sieć Petriego WSP opisująca dany układ cyfrowy. Model taki powinien być siecią bezpieczną. Własność ta jest odzwierciedleniem faktu, że dla układów cyfrowych realizowanych za pomocą elementów działających w logice dwuwartościowej, stany układu muszą być kodowane wektorami o składowych binarnych. Druga istotna cecha jest związana z pojęciem tzw. konfliktu.

Definicja 6. W sieci WSP przejście $t_i \in T$ znajduje się w konflikcie z przejściem $t_j \in T$ przy znakowaniu $M \in R(M_0)$ i stanie otoczenia $X \in \chi$, jeżeli są spełnione następujące warunki:

$$a) \ t_i \in T(X, M) \wedge t_j \in T(X, M) \quad (6)$$

$$b) \ (M' = f_{t_j}(M)) \Rightarrow (t_i \notin T(M')) \quad (7)$$

Konflikt przedstawia sytuację, przy której dwa przejścia przygotowane do zapalenia w sieci WSP przez znakowanie M i stan otoczenia X , nie mogą się zapalić współbieżnie (tzn. w zasadzie nie może wystąpić sekwencja zapalanych przejść $\langle t_j, t_i \rangle$). Zatem w przypadku konfliktu działanie sieci staje się indeterministyczne, gdyż zależy od tego, które z przejść t_i czy t_j zapali się jako pierwsze. Wynika stąd następujący wniosek.

Wniosek 1. Warunkowa sieć Petriego WSP opisująca deterministyczny układ cyfrowy powinna być siecią bezkonfliktową tzn. $(\forall M \in R(M_0))(\forall X \in \chi)$ nie mogą w sieci WSP istnieć dwa przejścia spełniające relację (6) i (7).

Przedstawione zostały tu definicje niezbędne dla zrozumienia proponowanej metody syntezy. Własności warunkowych sieci Petriego są opisane bardziej szczegółowo w [2, 3, 7, 8].

Rozważmy teraz zadanie syntezy logicznej układu cyfrowego opisanego warunkową siecią Petriego. Można wyróżnić dwa podstawowe podejścia do realizacji modelu:

a) przekształcenie sieci Petriego na model sekwencyjny (modele sekwencyjne), który jest (są) następnie realizowany powszechnie znanymi metodami [4, 5],

b) bezpośrednia realizacja sieci opisującej dany układ cyfrowy [6, 10].

W [4] przedstawiono synchroniczną realizację układów Moore'a jak i Mealy'ego, za pomocą układów PLA z rejestrami na wyjściu. W metodzie tej odpowiednio kodując znakowania osiągnęte w sieci tworzy się tablicę prawdy, która jest podstawą zaprogramowania układu PLA.

W przypadku złożonych sieci zaproponowano ich dekompozycję na rodzinę podsieci, z których każda może być zrealizowana metodą na układzie PLA.

Podstawową zaletą rozwiązania pokazanego w [4] (jak również innych metod reprezentujących pierwsze podejście), jest możliwość kompresji informacji przy transformacji modelu. Jednakże zadanie przekształcenia sieci Petriego na model sekwencyjny i ewentualna dekompozycja mogą być na tyle skomplikowane, że ich złożoność zniweluje korzyści wynikające z zastosowania opisu za pomocą sieci Petriego.

Wady tej są pozbawione metody syntezy polegające na bezpośredniej realizacji modelu. W [10] przedstawiono bardzo interesującą koncepcję tzw. asynchronicznej tablicy logicznej, w której programując topologię danej sieci można w prosty sposób zrealizować tzw. model. Jednakże proponowana struktura logiczna nie została zimplementowana w postaci programowego układu LSI. Należy jednak podkreślić, że w metodach reprezentujących drugie podejście (synteza bezpośrednia) praktycznie nie ma możliwości minimalizacji modelu i otrzymana realizacja często nie jest optymalna.

4. KONCEPCJA PROGRAMOWANEJ KOMÓRKI STEROWANIA

Sformułujemy teraz metodę syntezy układów cyfrowych opisywanych warunkowymi sieciami Petriego, polegającą na bezpośrednim przekształceniu modelu w jego realizację.

Reprezentowana metoda jest oparta o tzw. programowane komórki sterowania (zwane dalej komórkami PKS), których koncepcja została opracowana przy następujących założeniach [8]:

1. Struktura układu powinna bezpośrednio odzwierciedlać logikę działania warunkowej sieci Petriego.

2. Indywidualne cechy komórki będą programowane.

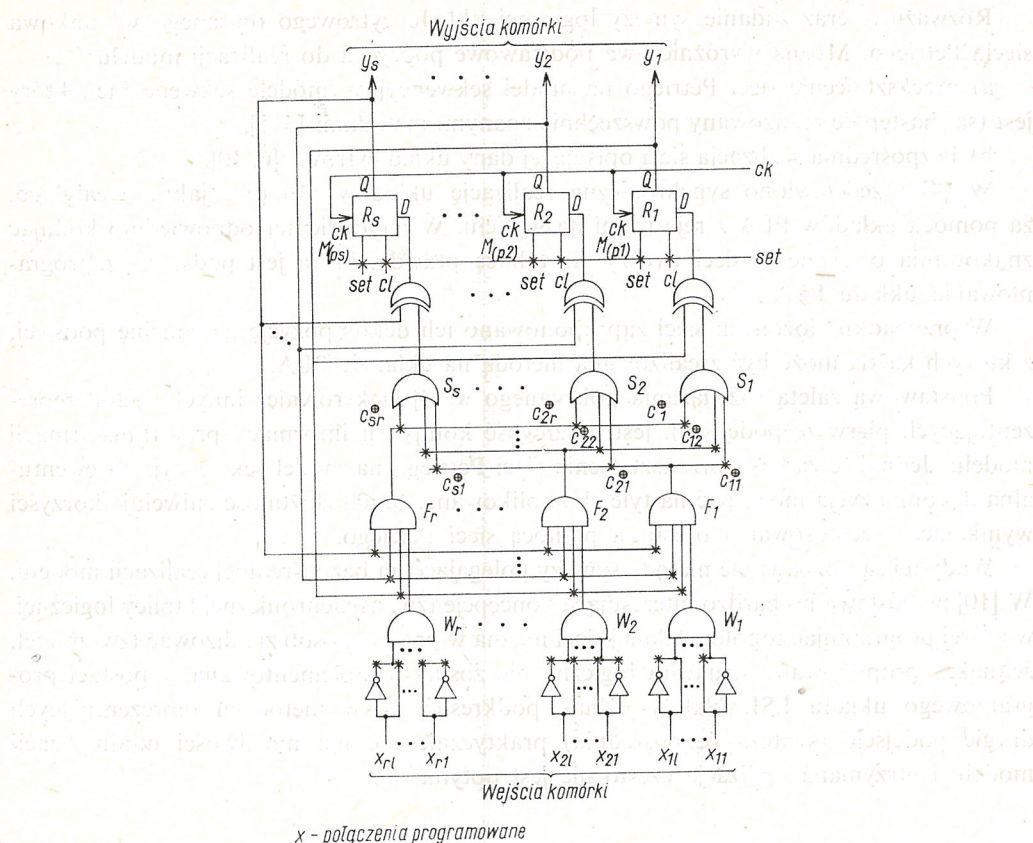
3. Pojedyncza komórka PKS będzie umożliwiać realizację sieci o określonej liczbie miejsc i przejść.

4. W przypadku bardziej złożonych modeli komórki PKS powinny umożliwiać modułową realizację układu.

5. Struktura układu powinna umożliwiać jego implementację w postaci monolitycznego układu scalonego.

Kanoniczna postać komórki PKS jest pokazana na rys. 4. Jest to synchroniczny układ logiczny, w którym można wyróżnić:

— r wejść, na które są podawane sygnały sterujące pracą komórki (stan otoczenia sieci). Każde z wejść może być l -krotnie zwiokrotnione,



Rys. 4. Kanoniczna postać programowanej komórki sterowania PKS

— s wyjść, na których się pojawiają sygnały odpowiadające znakowaniu sieci określone przez stan przerzutników R ,

— r bramek iloczynowych W . Każda z bramek W_i generuje na wyjściu wartość funkcji warunku zapalenia przejścia t_i . Wejścia bramki W_i są programowane i pozwalają na zadanie prostej lub zanegowanej postaci sygnałów wejściowych,

— r bramek iloczynowych F . Każda z bramek F_i wytwarza sygnał przygotowania do zapalenia przejścia t_i tzn. sprawdza warunek (1). Wejścia bramki są programowane i służą zadawaniu incydencji miejsc z przejściami,

— s bramek sumacyjnych S . Każda z bramek S_j generuje sygnał zmiany znakowania miejsca p_j . Wejścia bramki S_j są programowane i służą zadawaniu tzw. incydencji zmian określonej jako $c \oplus(p_j, t) = \alpha(p_j, t) \oplus \beta(t, p_j)$,

— s przerzutników R (typu D). Stan przerzutnika R_j określa znakowanie miejsca p_j . Stan początkowy przerzutników R jest programowany.

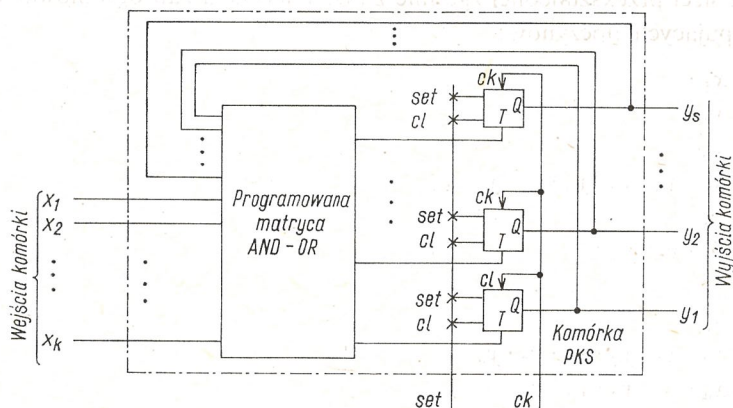
Realizacja za pomocą przedstawionej komórki PKS układu cyfrowego opisanego siecią Petriego wymaga w zasadzie indywidualnego zaprogramowania danej komórki. W tym celu należy uzyskać odpowiednią strukturę połączeń programowanych, odpowiadającą:

a) macierzy incydencji wejściowej $A = [\alpha(p, t)]_{|P| \times |T|}$

b) macierzy zmian $C^{\oplus} = [c^{\oplus}(p, t)]_{|P| \times |T|}$

c) znakowaniu początkowemu M_0

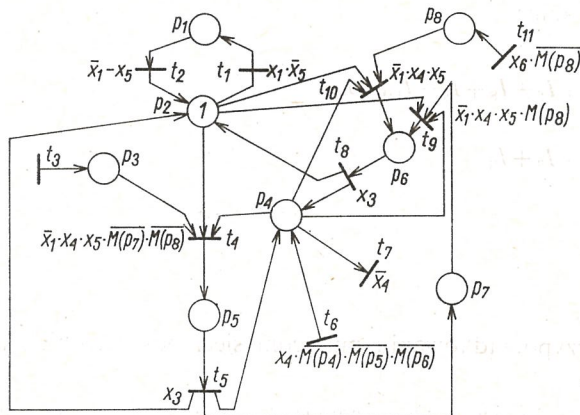
Jak łatwo zauważyć na rys. 4, podstawową częścią komórki PKS jest dwupoziomowa programowana struktura AND-OR. Wniosek ten prowadzi do równoważnej postaci komórki pokazanej na rys. 5, złożonej z matrycy AND-OR i rejestru typu T. Wynika stąd, że komórki PKS można budować w oparciu o układy PLA, względnie modyfikując strukturę układów PAL czy PLS można zbudować monolityczny układ scalony realizujący funkcje komórki PKS.



Rys. 5. Realizacja komórki PKS za pomocą programowanej matrycy AND-OR

Na rys. 6 jest przedstawiona warunkowa sieć Petriego modelująca interfejs układu sterowania urządzenia peryferyjnego współpracującego z pewnym systemem mikroprocesorowym [7]. Rozważmy zadanie realizacji tej sieci za pomocą komórki PKS opartej o układ FPLA 82S100. Proponowana struktura komórki PKS umożliwia realizację funkcji warunku zapalenia przejścia wyłącznie o postaci iloczynu.

W przypadku modelu z rys. 6 warunek zapalenia przejścia t_2 ma postać sumy boolowskiej i aby zrealizować tę sieć proponowaną metodą, należy ją uprzednio zmodyfi-



Rys. 6. Warunkowa sieć Petriego modelująca interfejs układu sterowania urządzenia peryferyjnego

kować. Mianowicie przejście t_2 można zdekomponować w sposób pokazany na rys. 7 na dwa przejścia t_2 i t_{12} , których funkcje warunków są iloczynami logicznymi. Należy podkreślić, że otrzymany w ten sposób model jest równoważny sieci pierwotnej (definicja 5).

Przedstawioną operację można uogólnić dla każdego przejścia, dla którego funkcja warunku jest opisana dowolną formułą boolowską. Należy w tym przypadku przekształcić daną formułę do postaci kanonicznej wyłączających się iloczynów (aby zapewnić bezkonfliktowe działanie modyfikowanego modelu).

Realizacja sieci przekształconej zgodnie z rys. 7 wymaga zaprogramowania w układzie 82S100 następujących iloczynów:

$$I_1 = x_1 \cdot \bar{x}_5 \cdot y_2$$

$$I_2 = x_5 \cdot y_1$$

$$I_3 = x_2 \cdot \bar{y}_3$$

$$I_4 = \bar{x}_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4 \cdot \bar{y}_7 \cdot \bar{y}_8$$

$$I_5 = x_3 \cdot y_5$$

$$I_6 = x_4 \cdot \bar{y}_4 \cdot \bar{y}_5 \cdot \bar{y}_6$$

$$I_7 = \bar{x}_4 \cdot y_4$$

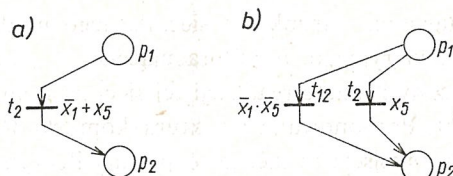
$$I_8 = x_3 \cdot y_6$$

$$I_9 = \bar{x}_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot y_2 \cdot y_4 \cdot y_7 \cdot \bar{y}_8$$

$$I_{10} = \bar{x}_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot y_2 \cdot y_4 \cdot y_8$$

$$I_{11} = x_6 \cdot \bar{y}_8$$

$$I_{12} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_5 \cdot y_1$$



Rys. 7. Dekompozycja przejścia t_2 sieci z rys. 6 (rys. 7a) na dwa przejścia t_2 i t_{12} (rys. 7b)

oraz następujących sum:

$$S_1 = I_1 + I_2 + I_{12}$$

$$S_2 = I_1 + I_2 + I_4 + I_5 + I_8 + I_9 + I_{10} + I_{12}$$

$$S_3 = I_3 + I_4$$

$$S_4 = I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8$$

$$S_5 = I_4 + I_5$$

$$S_6 = I_8 + I_9 + I_{10}$$

$$S_7 = I_5 + I_9$$

$$S_8 = I_{10} + I_{11}$$

przy naturalnym przyporządkowaniu miejscom sieci odpowiednich przerzutników (tzn. $y_1 = M(p_1)$ itd.).

Należy podkreślić, że sieć z rys. 6 generuje model sekwencyjny (synchroniczny układ logiczny) aż o 44 stanach i 290 przejściach. Realizacja tego modelu za pomocą 1 układu

PLA wymagałaby zastosowania bardzo wyrafinowanych metod minimalizacyjnych i z tego względu może być praktycznie niemożliwa. Zatem w tym przypadku proponowana metoda jest znacznie efektywniejsza od metod syntezy opartych o struktury AND-OR wymagających uprzedniego przekształcenia sieci na model (lub modele) sekwencyjny [4, 5].

5. DEKOMPOZYCJA WARUNKOWYCH SIECI PETRIEGO

Przykładowa komórka PKS zbudowana w oparciu o układ 82S100, umożliwia realizację sieci o co najwyżej 8 miejscach, 48 przejściach i 8 zmiennych opisujących stan otoczenia sieci. W przypadku modeli o większej liczbie miejsc lub przejść można wykorzystać dekompozycję warunkowych sieci Petriego.

Zadanie dekompozycji sieci Petriego ma następującą postać: dokonaj podziału sieci $WSP = \langle P, T, \alpha, \beta, M_0, \chi, PR, \varphi \rangle$ na rodzinę rozdzielnych sieci $RESP_i = \langle P_i, T_i, \alpha_i, \beta_i, M_{0_i}, \chi_i, PR_i, \varphi_i \rangle$ tak, żeby sieć ZESP otrzymana poprzez połączenie rodziny $RESP_i$ (tzn. $ZESP = \sum_{i=1}^{k_R} RESP_i$) była równoważna sieci pierwotnej WSP.

Podstawą dekompozycji sieci Petriego jest dowolne rozcinanie przejść. Dla rozcinanego przejścia modyfikuje się funkcję warunku zapalania, tak aby zapewnić spełnienie warunku (4) (rys. 8). W tym celu dla przejścia t sieci $RESP_i$ wprowadza się dodatkowy warunek $pr_t^d(X, M)$ w postaci:

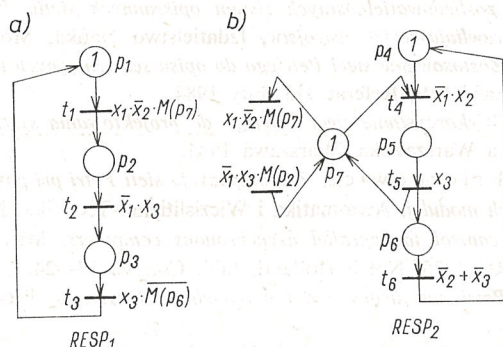
$$pr_t^d(X_i, M_i) = \bigcap_{p \in P_i} M(p); P_i = \{p \in P: \alpha(p, t) = 1 \wedge p \notin P_i\} \quad (8)$$

Zmodyfikowany warunek zapalania przejścia t w sieci $RESP_i$ jest określony następująco:

$$pr_t(X_i, M_i) = pr_t^a(X_i, M_i) \cdot pr_t^d(X_i, M_i) \quad (9)$$

przy czym $pr_t^a(X_i, M_i)$ jest funkcją równoważną warunkowi przejścia t w sieci pierwotnej WSP.

Algorytmy dekompozycji sieci Petriego są już dość dobrze znane [9, 12]. Jednakże w prezentowanej tu metodzie syntezy zadanie dekompozycji jest postawione w zupełnie innym ujęciu. Mianowicie jako podstawowe parametry modelu uzyskanego w wyniku dekompozycji można wyróżnić:



Rys. 8. Dekompozycja sieci WSP z rys. 1 na dwie rozdzielne sieci $RESP_1$ (rys. 8a) i $RESP_2$ (rys. 8b)

- liczbę komórek PKS niezbędnych do realizacji (tzn. liczność k_R rodziny RESP_i),
- liczbę połączeń w komórkowej realizacji układu.

Ze sposobu dekompozycji warunkowych sieci Petriego wynika, że dążenie do minimalnej liczby komórek PKS i minimalnej liczby połączeń są w zasadzie zbieżne. Jednakże zadanie pełnej optymalizacji dekompozycji w metodzie syntezy opartej o komórki PKS, może być bardzo skomplikowanym problemem kombinatorycznym. Wydaje się, że odpowiednim środkiem mogą być raczej konstruktywne metody, które w możliwie prosty sposób pozwolą wyznaczyć rozwiązanie o możliwie *dobrych* parametrach. Przykładem takiego podejścia jest heurystyczny algorytm przedstawiony w [8].

6. ZAKOŃCZENIE

Przedstawiona metoda syntezy pozwala w sposób bezpośredni wyznaczyć realizację układów cyfrowych opisywanych sieciami Petriego. Jest ona oparta o tzw. komórki PKS, które można łatwo zrealizować za pomocą programowanych matryc AND-OR. Należy podkreślić, że metoda ta jest efektywna w przypadku sieci o dużym stopniu współbieżności działania. Wadą proponowanego rozwiązania jest fakt, że w metodzie tej nie przeprowadza się redukcji modelu, co w wielu przypadkach prowadzi do nadmiernej realizacji.

W pracy tej zostało przedstawione nowe podejście do zadania dekompozycji sieci Petriego. Istotnym problemem jest wyznaczenie efektywnych algorytmów dekompozycji.

LITERATURA

1. M. Adamski, *PLA — realization by means of connecting and control algorithms*. Proc. 29. International Scientific Colloquium, TH Ilmenau 1984, ss. 43—46.
2. A F C E T, *Rapport de la "Commision de la representation du cahier des charges d'un automatisme logique"*. Automatisme, mars-avril, ss. 66—83.
3. *Application and theory of Petri nets*. C. Girault, W. Reisig (editors), Springer — Verlag, Berlin Heidelberg 1982.
4. M. Auguin, F. Boeri, C. Andre, *Systematic method of realization of interpreted Petri nets*. Digital Processes, Nr 6 1980, ss. 55—68.
5. J. Baranowski, *Metody syntezy układów cyfrowych opisywanych sieciami Petriego*. Rozprawa doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1982.
6. R. David, *Sintez posledowatelnostnykh sistem opissannykh sietiu Petri, iz elementov CUSA. Teoria diskretnykh upravliajuszczich ustrojstw*, Izdatielstwo Nauka, Moskwa ss. 160—166.
7. J. Kalinowski, *Zastosowanie sieci Petriego do opisu sekwencyjnych układów cyfrowych*. Referaty Instytutu Telekomunikacji PW, Referat 113, luty 1984.
8. J. Kalinowski, *Wykorzystanie sieci Petriego do projektowania systemów cyfrowych*. Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 1984.
9. R. König, G. F. Frichnowicz, *Dekompozycja sieci Petri pri postrojeni diskretnykh ustrojstw na osnovie standartnykh modulej*. Awtomatika i Wicislitielna Technika, Nr 1 1984, ss. 82—91.
10. S. S. Patil, *Micro-control for parallel asynchronous computers*. Microcomputers and Computer Systems, EUROMICRO 1975, North Holland Publ. Co., ss. 17—24.
11. J. L. Peterson, *Petri net theory and the modeling of systems*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New York 1981.
12. J. M. Toulotte, J. P. Parsy, *A method for decomposing interpreted Petri nets and its utilizations*. Digital Processes, Nr 5 1979, ss. 223—234.

J. KALINOWSKI, T. ŁUBA

A METHOD OF LOGICAL SYNTHESIS OF DIGITAL CIRCUITS DESCRIBED BY PETRI NOTES

Summary

The aim of this paper is to present an easy and simple method of Petri net model implementation. The proposed concept is based on the so called programmable logic cell, which enables direct Petri net model realization. The cell consists of AND-OR array, and for that reason is easy to implement by means of PLA devices. The cellular realization of circuits described by Petri net requires only programming of individual characteristics of a given model.

J. KALINOWSKI, T. ŁUBA

MÉTHODE DE SYNTHÈSE LOGIQUE DES SYSTÈMES DIGITAUX DECRIITS PAR DES RÉSEAUX DE PETRI

Résumé

Dans cet article on a présenté la méthode de synthèse des systèmes digitaux décrits par les réseaux de Petri, consistant en une transformation directe d'un modèle en son implantation cellulaire. Implantation du modèle exige la programmation dans le système de la cellule des qualités unitaires, structurales de la cellule donnée. Il faut souligner, que la cellule proposée peut être construite d'une manière assez simple.

J. KALINOWSKI, T. ŁUBA

METHODE DER LOGISCHEN SYNTHESE DER MITTELS PETRI-NETZE BESCHRIEBENEN DIGITALSYSTEME

Zusammenfassung

Im Artikel wurde eine Synthesemethode für Digitalsysteme dargestellt, die mit Petri-Netzen beschrieben werden. Diese Methode beruht auf direkter Umwandlung des Modells in seine zellulare Realisierung. Die Realisierung des Modells bedarf einer Programmierung im Zellsystem der einzelnen und strukturellen Eigenschaften des gegebenen Netzes. Es sei zu betonen, daß die vorgeschlagene Zelle in verhältnismäßig einfacher Weise mittels PLA-Matrizen gebaut werden kann.

Е. КАЛИНОВСКИ, Т. ЛУБА

МЕТОД ЛОГИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ ОПИСАННЫХ СЕТЬЮ ПЕТРИ

Резюме

Представлен метод синтеза цифровых систем, описанных сетью Петри, состоящий в непосредственном преобразовании модели в её клеточную реализацию. Реализация модели требует программирования в схеме ячейки единичных структурных черт данной сети. Следует подчеркнуть, что предлагаемая ячейка может быть построена простым образом при помощи матриц.

A NEW METHOD OF THE STUDY OF THE HISTORY OF THE THEORY OF THE EARTH

The aim of the present work is to show that the history of the theory of the earth is not a mere collection of facts, but a living organism, which is constantly developing and changing. The author attempts to show that the history of the theory of the earth is not a mere collection of facts, but a living organism, which is constantly developing and changing. The author attempts to show that the history of the theory of the earth is not a mere collection of facts, but a living organism, which is constantly developing and changing.

METHOD OF THE STUDY OF THE HISTORY OF THE THEORY OF THE EARTH

The aim of the present work is to show that the history of the theory of the earth is not a mere collection of facts, but a living organism, which is constantly developing and changing. The author attempts to show that the history of the theory of the earth is not a mere collection of facts, but a living organism, which is constantly developing and changing. The author attempts to show that the history of the theory of the earth is not a mere collection of facts, but a living organism, which is constantly developing and changing.

METHOD OF THE STUDY OF THE HISTORY OF THE THEORY OF THE EARTH

The aim of the present work is to show that the history of the theory of the earth is not a mere collection of facts, but a living organism, which is constantly developing and changing. The author attempts to show that the history of the theory of the earth is not a mere collection of facts, but a living organism, which is constantly developing and changing. The author attempts to show that the history of the theory of the earth is not a mere collection of facts, but a living organism, which is constantly developing and changing.

METHOD OF THE STUDY OF THE HISTORY OF THE THEORY OF THE EARTH

The aim of the present work is to show that the history of the theory of the earth is not a mere collection of facts, but a living organism, which is constantly developing and changing. The author attempts to show that the history of the theory of the earth is not a mere collection of facts, but a living organism, which is constantly developing and changing. The author attempts to show that the history of the theory of the earth is not a mere collection of facts, but a living organism, which is constantly developing and changing.

Prawdopodobieństwo błędu w systemie wielodostępowym z sygnałami szerokopasmowymi DS-PSK

TOMASZ KOŚIŁO (WARSZAWA)

Instytut Radioelektroniki Politechniki Warszawskiej

Otrzymano 1985.05.29

W artykule przeanalizowano prawdopodobieństwo błędnego odbioru informacji w systemie zwiłokrotniania kodowego (CDMA) z sygnałami szerokopasmowymi typu DS-PSK, wykorzystującymi pseudolosowe kody Golda. Odbiór sygnału pożądanego jest zakłócony przez pozostałych abonentów systemu i gaussowski szum biały. Założono idealny synchronizm odbiornika z pożądanym sygnałem. Omówiono przyjęty model systemu, opisano przebiegi w istotnych punktach odbiornika, a następnie obliczono prawdopodobieństwo błędu. Przedstawiono przykładowe charakterystyki szumowe.

1. WSTĘP

We współczesnej telekomunikacji ogólnie znane są systemy wielodostępowe z rozdziałem częstotliwościowym (FDMA) i czasowym (TDMA), gdzie sygnały poszczególnych abonentów różnią się odpowiednio: zajmowanym pasmem częstotliwości i momentami pojawiania się. Stosunkowo od niedawna znajdują zastosowanie systemy wielodostępowe z tzw. rozdziałem kodowym (CDMA), gdzie cechą wyróżniającą poszczególnych abonentów jest kształt sygnału [1, 2]. System CDMA pozwala na jednoczesną pracę wielu abonentów we wspólnym paśmie częstotliwości w sposób całkowicie niezależny — bez centralnego sterowania. Systemy takie można realizować stosując specyficzny rodzaj sygnałów — tzw. sygnały szerokopasmowe (*spread spectrum* — SS), tworzone w wyniku modulacji sinusoidalnej fali nośnej dwoma sygnałami cyfrowymi: informacyjnym i pomocniczym, zazwyczaj pseudolosowym [3, 4]. Sygnał SS można przedstawić w postaci:

$$u(t) = \operatorname{Re}[\hat{d}(t)\hat{c}(t)U\exp(j(\Omega_0 t + \alpha))] \quad (1)$$

$\hat{d}(t)$ i $\hat{c}(t)$ oznaczają funkcje modulujące związane odpowiednio z informacją i sygnałem pomocniczym. Wybierając różne rodzaje modulacji i różne funkcje $\hat{c}(t)$ można otrzymać sygnały SS o różnych właściwościach. Z punktu widzenia systemów CDMA istotne jest to, że dobierając odpowiednio, zbiór funkcji $\hat{c}(t)$ można stworzyć zbiór sygnałów SS, których autokorelacja ma jedno ostre maksimum przy zerowym przesunięciu, a wartości korelacji wzajemnej są niewielkie.

Odbiór sygnału pożądanego abonenta polega na korelowaniu przebiegów odbieranych z wzorcem $\hat{c}(t)$ wytworzonym w odbiorniku, wzorcem przyporządkowanym temu

abonentowi. W przypadku idealnym na wyjściu detektora korelacyjnego otrzymamy sygnał z całkowicie usuniętą modulacją pomocniczą i nieznieskształconą modulacją danych $\hat{d}(t)$. Sygnały pozostałych abonentów wytwarzają zakłócenia na wyjściu detektora (istnieją nawet w wyidealizowanym modelu systemu). Poziom tych zakłóceń zależy od rodzaju sygnałów SS i liczby aktualnie pracujących abonentów.

W artykule przeanalizowano prawdopodobieństwo błędnego odbioru informacji w jednym z systemów z rozdziałem kodowym.

2. MODEL SYSTEMU

Rozpatrzmy tu system wielodostępowy CDMA z sygnałami SS typu DS — PSK, tzn. takimi, w których pomocniczy sygnał pseudolosowy bezpośrednio kluczuje fazę sinusoidalnej fali nośnej (DS — *direct sequence*) a sygnał informacyjny wprowadza dodatkowe kluczowanie fazy (PSK); oba sygnały kluczujące są sygnałami binarnymi. Omawiany sygnał SS ma postać:

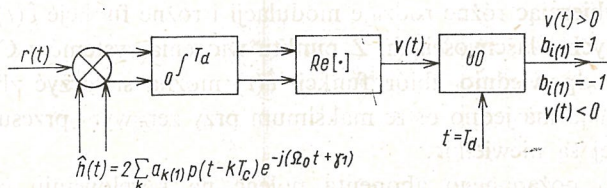
$$\hat{u}(t) = U \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_i p(t - kT_c) e^{j(\Omega_0 t + \alpha)} \quad (2)$$

Przez a_k oznaczono kolejne bity ($a_k = 1$ lub -1) kodu pseudolosowego o długości M bitów; kod jest generowany z taktom T_c i powtarzany okresowo. Każdy abonent systemu CDMA posługuje się innym kodem. b_i jest i -tym bitem informacyjnym nadawanym z taktom T_d . Ponadto: $p(t)$ oznacza jednostkowy impuls prostokątny o szerokości T_c , Ω_0 pulsację fali nośnej, α fazę sygnału. Zachodzą następujące relacje: $T_d = MT_c$ oraz $i = \text{entier } \frac{k}{M}$.

W systemie pracuje jednocześnie $Z+1$ abonentów. Relacje czasowe pomiędzy poszczególnymi sygnałami są przypadkowe, gdyż abonenci pracują niezależnie. Schemat blokowy odbiornika pracującego w analizowanym systemie przedstawiono na rys. 1. Zakładamy, że przebieg docierający do odbiornika $r(t)$ jest sumą sygnału pożądanego abonenta $u_1(t)$, z sygnałów pozostałych abonentów i gaussowskiego szumu białego o gęstości widmowej $N_0/2$ (dwustronnej).

$$r(t) = \text{Re} \left[\hat{u}_1(t) + \sum_{l=1}^Z \hat{u}_l(t) + \hat{n}(t) \right] \quad (3)$$

Odbiornik pracuje liniowo w idealnym synchronizmie z sygnałem pożądanego abonenta $u_1(t)$. Na wejściu układu decyzyjnego odbiornika powstaje przebieg:



Rys. 1. Schemat blokowy odbiornika

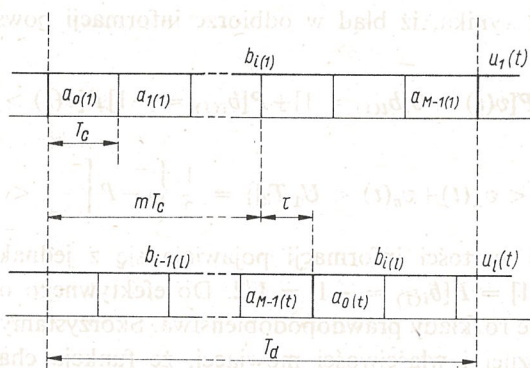
$$v(t) = Re \left[\int_{iT_d}^{(i+1)T_d} r(t) \hat{h}(t) dt \right] = v_1(t) + v_z(t) + v_n(t) \quad (4)$$

$v_1(t)$ jest pożądanym sygnałem, $v_z(t)$ — składową zakłóceń pochodzących od pozostałych abonentów systemu, $v_n(t)$ — składową szumu. Układ decyzyjny bada $v(t)$ co czas T_d i określa znak aktualnie odbieranego bitu danych $b_{i(1)}$. Układ całkujący odbiornika jest rozładowywany na początku każdego taktu T_d .

Podstawiając (2) i (3) do (4) można wykazać, że:

$$v_1(t) = U_1 b_{i(1)} T_d. \quad (5)$$

W czasie jednego taktu T_d odbiornika, tzn. podczas odbierania jednego bitu informacyjnego $b_{i(1)}$ pożądanego abonenta, w sygnale l -tego abonenta zakłócającego mogą pojawić się co najwyżej dwa bity informacyjne. Ilustruje to schematycznie rys. 2.



Rys. 2. Relacje czasowe pomiędzy sygnałem pożądanym $u_1(t)$ i sygnałem l -tego abonenta zakłócającego $u_l(t)$

Przekształcając (4) otrzymamy:

$$v_z(t) = \sum_{l=1}^Z v_l(t) \quad (6)$$

gdzie:

$$v_l(t) = \begin{cases} U_l[(T_c - \tau)\Theta_{1l}(m) + \tau\Theta_{1l}(m+1)]\cos\varphi_l & \text{gdy } b_{i(l)} = b_{i-1(l)} \\ U_l[(T_c - \tau)\hat{\Theta}_{1l}(m) + \tau\hat{\Theta}_{1l}(m+1)]\cos\varphi_l & \text{gdy } b_{i(l)} = -b_{i-1(l)} \end{cases} \quad (7)$$

Przy czym: $\varphi_l = \alpha_l - \alpha_1$ oznacza różnicę faz fal nośnych l -tego abonenta i przebiegu odniesienia w odbiorniku $h(t)$. $\Theta_{1l}(m)$ jest okresową parzystą korelacją kodów pseudolosowych abonenta l -tego i abonenta pierwszego — pożądanego, a $\hat{\Theta}_{1l}(m)$ — okresową nieparzystą korelacją obu kodów. Wielkości te definiowane są poprzez aperiodyczną korelację kodów $C_{1l}(m)$ [5].

$$\begin{aligned} \Theta_{1l}(m) &= C_{1l}(m) + C_{1l}(m-M) \\ \hat{\Theta}_{1l}(m) &= C_{1l}(m) - C_{1l}(m-M) \quad 0 \leq m < M \end{aligned} \quad (8)$$

$$C_{11}(m) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{M-m-1} a_{k(1)} a_{k+m(1)} & \text{dla } 0 \leq m \leq M-1 \\ \sum_{k=0}^{M+m-1} a_{k-m(1)} a_{k(1)} & \text{dla } 1-M \leq m < 0 \\ 0 & \text{dla } |m| \geq M \end{cases}$$

Jak można wykazać, składowa szumu $v_n(t)$ będzie opisana rozkładem gaussowskim o wariancji [6]:

$$\sigma_n^2 = N_0 T_d. \quad (9)$$

3. PRAWDOPODOBIEŃSTWO BŁĘDU

Z modelu systemu wynika, iż błąd w odbiorze informacji powstaje z prawdopodobieństwem:

$$P_E = P[b_{i(1)} = 1]P[v(t) < 0/b_{i(1)} = 1] + P[b_{i(1)} = -1]P[v(t) > 0/b_{i(1)} = -1] = \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 - P[-U_1 T_d < v_Z(t) + v_n(t) < U_1 T_d] \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - P \left[-1 < \frac{v_Z(t) + v_n(t)}{U_1 T_d} < 1 \right] \right\}$$

Założono, że obie wartości informacji pojawiają się z jednakowym prawdopodobieństwem: $P[b_{i(1)} = 1] = P[b_{i(1)} = -1] = 1/2$. Do efektywnego obliczenia (10) należy wyznaczyć odpowiednie rozkłady prawdopodobieństwa. Skorzystamy w tym celu z pojęcia funkcji charakterystycznej i właściwości mówiącej, że funkcja charakterystyczna sumy niezależnych zmiennych losowych jest równa iloczynowi funkcji charakterystycznych tych zmiennych [6, 7]. Wprowadzamy oznaczenia funkcji charakterystycznych odpowiednich zmiennych losowych:

$$\frac{v_Z(t) + v_n(t)}{U_1 T_d} \Leftrightarrow \Phi(\omega); \quad \frac{v_n(t)}{U_1 T_d} \Leftrightarrow \Phi_n(\omega); \quad \frac{v_l(t)}{U_1 T_d} \Leftrightarrow \Phi_1(\omega) \quad (11)$$

Zatem:

$$\Phi(\omega) = \Phi_n(\omega) \prod_{l=1}^Z \Phi_1(\omega). \quad (12)$$

Poszukiwane prawdopodobieństwo błędu (10) można teraz wyrazić bezpośrednio przez funkcję charakterystyczną [6, 7].

$$P_E = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \Phi(\omega) d\omega \right] \quad (13)$$

Składowa szumu jest zmienną gaussowską, a więc [6, 7]:

$$\Phi_n(\omega) = \exp - \frac{\omega^2}{4\gamma}. \quad (14)$$

$\gamma = \frac{U_1^2 T_d}{2N_0}$ oznacza stosunek energii sygnału do widmowej gęstości mocy sumy.

Następnie wyznaczmy funkcję $\Phi_l(\omega)$. Składowa zakłóceń $v_l(t)$, jak wynika z (7), zależy od użytego kodu pseudolosowego. W analizowanym systemie zastosowano kody Golda [4, 8]. Jest to grupa cyfrowych kodów pseudolosowych generowanych przez rejestry przesuwające; charakteryzuje się tym, że wykorzystując rejestr o długości $2n$ bitów można stworzyć grupę $2^n + 1$ kodów o długości $M = 2^n - 1$ bitów, których funkcje korelacji wzajemnej mają małe wartości a jednocześnie funkcja autokorelacji poszczególnych kodów jest korzystna.

Składowa zakłóceń $v_l(t)$ zależy, poprzez funkcje $\Theta_{11}(m)$ i $\hat{\Theta}_{11}(m)$, od wzajemnych przesunięć czasowych pomiędzy odbieranymi sygnałami. Wszystkie wartości przesunięć $m \pmod{M}$ są jednakowo prawdopodobne, gdyż abonenci systemu CDMA pracują niezależnie od siebie.

Ponieważ kod pseudolosowy jest przebiegiem w pełni zdeterminowanym można obliczyć wartość funkcji $\Theta_{11}(m)$ i $\hat{\Theta}_{11}(m)$ dla wszystkich przesunięć m , a następnie uwzględnić te wartości przy obliczaniu funkcji gęstości prawdopodobieństwa składowej $v_l(t)$. Taka metoda postępowania prowadzi jednak do znacznych komplikacji obliczeniowych; ponadto należy pamiętać, że całkowite zakłócenie (6) jest sumą Z sygnałów, których wszelkie wzajemne relacje czasowe $\pmod{M}$ są także jednakowo prawdopodobne.

Z tego względu wprowadzono uproszczenie polegające na potraktowaniu funkcji korelacji kodów jak zmiennych losowych.

Tablica 1

Wartości okresowej parzystej funkcji korelacji kodów Golda $\Theta_{xy}(m)$

Wartość	Częstość występowania	
	n — nieparzyste	n — parzyste
$\Theta_1 = -1$	$\sim 0,5$	$\sim 0,75$
$\Theta_2 = 2^{\left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor} - 1$	$\sim 0,25$	$\sim 0,125$
$\Theta_3 = -\left(2^{\left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor} + 1\right)$	$\sim 0,25$	$\sim 0,125$

Uwagi:

długość kodu $M = 2^n - 1$; $n \neq 0 \pmod{4}$

$$\left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor = \text{entier} \left(\frac{n+2}{2} \right)$$

Parzysta okresowa korelacja $\Theta_{xy}(m)$ kodów Golda przyjmuje tylko trzy wartości, których częstość występowania podano w tabeli 1 [4]. Zakładamy więc, że $\Theta_{11}(m)$ w (7) przyjmuje wartości jak dyskretna trójwartościowa zmienna losowa.

Nieparzysta okresowa funkcja korelacji $\hat{\Theta}_{xy}(m)$ kodów pseudolosowych (także kodów Golda) nie jest tak regularna; z zasady ma większe wartości niż $\Theta_{xy}(m)$ i silnie zależy od przesunięcia m [10].

W niniejszym artykule wykorzystano ogólną zależność opisującą maksima funkcji $\hat{\Theta}_{xy}(m)$ dla kodów Golda [5].

$$|\hat{\Theta}_{\max}| \leq 2^{n-1} + 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2 \quad (15)$$

Potraktowano mianowicie $\hat{\Theta}_{11}(m)$ w (7) jako dyskretną dwuwartościową zmienną losową, przy czym:

$$P[\hat{\Theta}_{11} = \hat{\Theta}_{\max}] = P[\hat{\Theta}_{11} = -\hat{\Theta}_{\max}] = \frac{1}{2} \quad (16)$$

Z zasady pracy systemu wynika, że φ_l w (7) jest zmienną losową o rozkładzie równomiernym w przedziale $(0, 2\pi)$.

Zakładamy, że kolejne bity danych $b_{i(l)}$ są od siebie niezależne i w efekcie obie postacie (7) są jednakowo prawdopodobne. Przyjmujemy także uproszczenie: $\tau = 0$. Uwzględniając to co powiedziano powyżej możemy zapisać funkcję charakterystyczną:

$$\begin{aligned} \Phi_l(\omega) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^3 P[\Theta_{11} = \Theta_i] \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(j\omega\beta_l\Theta_i \cos \varphi_l) d\varphi_l + \right. \\ \left. + \sum_{K=1}^2 P[\hat{\Theta}_{11} = \hat{\Theta}_K] \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(j\omega\beta_l\hat{\Theta}_K \cos \varphi_l) d\varphi_l \right\} \quad (17) \end{aligned}$$

gdzie: $\beta_l = \frac{U_l}{U_1 M}$.

Po scałkowaniu i prostych przekształceniach otrzymamy dla parzystego n :

$$\Phi_l(\omega) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} J_0(\beta_l \omega) + \frac{1}{4} J_0(\beta_l \Theta_2 \omega) + \frac{1}{4} J_0(\beta_l \Theta_3 \omega) + J_0(\beta_l \hat{\Theta}_{\max} \omega) \right] \quad (18)$$

$J_0(\cdot)$ jest funkcją Bessela.

Bez trudu można wyprowadzić analogiczną zależność dla n nieparzystego. Podstawiając (12), (14) i (18) do (13) otrzymamy poszukiwany wzór opisujący prawdopodobieństwo błędu w systemie. Całkę w (13) trzeba obliczać numerycznie.

Jeżeli abonenci zakłócający nie pracują (tzn. $Z = 0$), zależność (13) upraszcza się do postaci:

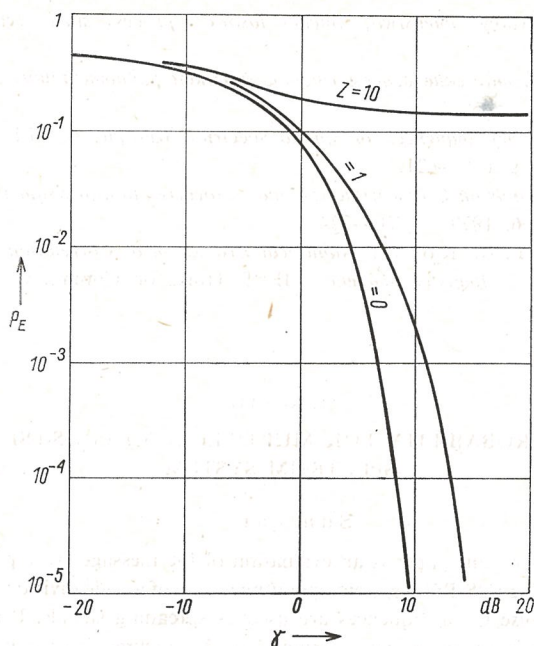
$$P_E = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\gamma} \quad (19)$$

$\operatorname{erfc}(\cdot)$ oznacza komplementarną funkcję błędu [7].

Obliczenia prawdopodobieństwa błędu upraszczają się także wtedy, gdy sygnały abonentów zakłócających docierają do odbiornika z jednakowym poziomem.

Wówczas parametr β_l jest taki sam dla wszystkich l , funkcje charakterystyczne (17) wszystkich sygnałów zakłócających są identyczne i (13) sprowadza się do:

$$\begin{aligned} P_E = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{\pi 2^{z-1}} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} e^{-\frac{\omega^2}{4\gamma}} \left[\frac{1}{2} J_0(\beta \omega) + \frac{1}{4} J_0(\beta \Theta_2 \omega) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} J_0(\beta \Theta_3 \omega) + J_0(\beta \hat{\Theta}_{\max} \omega) \right]^Z d\omega \right\}. \quad (20) \end{aligned}$$



Rys. 3. Przykładowe charakterystyki szumowe

Na rys. 3 przedstawiono przykładowe charakterystyki szumowe obliczone z (20) dla systemu wykorzystującego kod Golda o długości $M = 127$, tzn. $n = 7$, przy założeniu, iż wszystkie sygnały odbierane są z takim samym poziomem ($U_1 = U_l$), przy różnej liczbie sygnałów zakłócających $Z = 0$, $Z = 1$ i $Z = 10$.

ZAKOŃCZENIE

W artykule przeanalizowano prawdopodobieństwo błędnego odbioru informacji w systemie zwielokrotniania kodowego z sygnałami DS-PSK. Wyprowadzone wzory (12), (13), (18) i uproszczony (20) pozwalają na stosunkowo proste oszacowanie podstawowych parametrów systemu.

LITERATURA

1. G. Longo, *Multi-User Communication Systems*, Springer — Verlag, New York, 1981.
2. D. J. Goodman, P. S. Henry, V. K. Prabhu, *Frequency — Hopped Multilevel FSK for Mobile Radio*, BSTJ, vol. 59, nr 7, 1980, s. 1257—1275.
3. R. L. Pickholtz, D. L. Schilling, L. B. Milstein, *Theory of Spread — Spectrum Communications — A Tutorial*, IEEE Trans. on Comm., vol. COM-30, nr 5, 1982, s. 855—884.
4. J. K. Holmes, *Coherent Spread Spectrum System*, J. Wiley, 1982.
5. M. B. Pursley, D. P. Sarwate, *Performance Evaluation for Phase — Coded Spread — Spectrum Multiple — Access Communication*, IEEE Trans. on Comm., vol. COM-25, nr 8, 1977, s. 800—803.

6. A. Papoulis, *Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne*, WNT, Warszawa, 1972.
7. Б. Р. Леви́н, *Теоретические основы статистической радиотехники*, Т 1, Советское радио, Москва, 1974.
8. R. Gold, *Optimal Binary Sequences for Spread Spectrum Multiplexing*, IEEE Trans. on Inf. Theory, vol. IT-23, nr 5, 1967, s. 619—621.
9. D. V. Sarwate, *Bounds on Crosscorrelation and Autocorrelation of Sequences*, IEEE Trans. on Inf. Theory, vol. IT-25, nr 6, 1979, s. 720—724.
10. M. B. Pursley, H. F. A. Roefs, *Numerical Evaluation of Correlation Parameters for Optimal Phases of Binary Shift — Register Sequences*, IEEE Trans. on Comm., vol. COM-27, nr 10, 1979, s. 1597—1604.

T. KOSIŁO

ERROR PROBABILITY FOR MULTIPLE ACCESS DS-PSK SPREAD SPECTRUM SYSTEM

Summary

The main contribution of this paper is an evaluation of the message error probability of direct sequence binary phase shift keying (DS-PSK) system operating as one of a code division multiple access (CDMA) system user. The pseudonoise Gold sequences are used as spreading signals. Performance of the system is limited by multiple access interference and gaussian noise. We assume that receiver in the system is ideally synchronized with the desired signal. A short description of the system and DS-PSK signals is given. Then a derivation of error probability formulae is presented. Examples results are quoted.

T. KOSIŁO

PROBABILITÉ DE L'ERREUR DANS LE SYSTEME A ACCES MULTIPLE AVEC DS-PSK SIGNAUX A LARGE BANDE

Résumé

Dans l'article on a analysé la probabilité de l'erreur à la réception de l'information dans le système à accès multiple avec signaux du type DS-PSK (cad. multiplication des codes). A la source des perturbations sont les signaux du reste des abonnés du système et le bruit blanc gaussien. On a caractérisé les signaux SS et on a parlé du modèle conçu du système. On a indiqué les répartitions de la probabilité des parcours dans les points décisifs du récepteur et ensuite on a calculé la probabilité de l'erreur cherchée. On a donné des exemples caractéristiques du bruit.

T. KOSIŁO

FEHLERWAHRSCHEINLICHKEIT BEIM CODEMULTIPLEXSYSTEM MIT DS-PSK-SIGNALEN

Zusammenfassung

In dem Artikel wird die Fehlerwahrscheinlichkeit der Information beim Vielfachzugriffssystem mit Spread-Spectrum DS-PSK-Signalen analysiert (dem sog. Vielfachzugriff durch Codemultiplex). Das Signal am Empfängereingang wird durch weißes gaußverteiltes Rauschen und gegenseitige Beeinflussung der verschiedenen Benutzer gestört. Eine kurze Beschreibung der DS-PSK-Signale und des Codemultiplexsystems wird gebracht. Beziehungen für die Fehlerwahrscheinlichkeit werden abgeleitet. Einige Beispiele werden dargestellt.

Т. КОСИЛО

ВЕРОЯТНОСТЬ ОШИБКИ В МНОГОДОСТУПНОЙ СИСТЕМЕ
С ШИРОКОПОЛОСНЫМИ СИГНАЛАМИ КЛАССА DS-PSK

Р е з ю м е

Проведен анализ помехоустойчивости системы с кодовым уплотнением широкополосных (сложных) сигналов с фазовой манипуляцией (DS-PSK). В системе используются кодовые последовательности Гоулда. Ошибки в системе возникают из-за действия других абонентов системы и белого гауссового шума. Принимается идеальный синхронизм приемника и сигнала желанного абонента. Кратко рассматривается модель системы. Выведены формулы для расчета вероятности ошибок. Приведены примеры вычислений характеристик ошибок.

Układ synchronicznego ruchu obrotowego silników indukcyjnych z szeregowym połączeniem uzwojeń stojanów

ANDRZEJ SZLACHTA (RZESZÓW)

Zakład Maszyn Elektrycznych Politechniki Rzeszowskiej

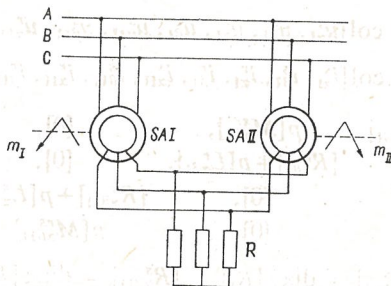
Otrzymano 1985.06.24

W artykule przedstawiono analizę wału elektrycznego silników indukcyjnych z szeregowym połączeniem uzwojeń stojanów. Badanie właściwości wału przeprowadzono dla stanu ustalonego posługując się modelem dwufazowym maszyny indukcyjnej. Otrzymane równania stanu ustalonego rozwiązano na EMC dla wielu parametrów układu oraz zamieszczono podstawowe jego charakterystyki.

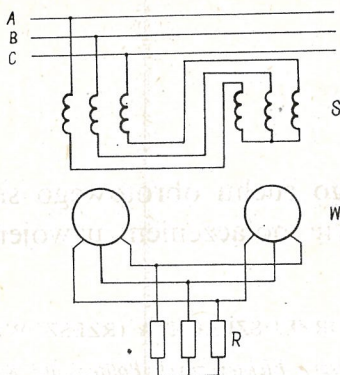
1. WPROWADZENIE

Układy synchronicznego ruchu obrotowego, zwane również wałami elektrycznymi, są stosowane w wielu mechanizmach wykonawczych, w których zachodzi konieczność zapewnienia współbieżnego ruchu obrotowego dwóch lub więcej osi metodą elektryczną. Rozwiązania takie stosuje się wówczas, gdy połączenie osi za pomocą wałów i przekładni mechanicznych jest niemożliwe lub nieuzasadnione ze względów technicznych, bądź ekonomicznych. W grupie układów synchronicznego ruchu obrotowego z silnikami indukcyjnymi rozróżnia się wał elektryczny wyrównawczy (z silnikami pomocniczymi) i wał elektryczny roboczy (bez silników pomocniczych).

W roboczym wale elektrycznym (rys. 1) moment synchronizujący jest wytwarzany przez główne silniki napędowe; nie zachodzi więc konieczność instalowania silników pomocniczych, co czyni układ ekonomicznym. Układ rozwija jednak nieduże momenty synchronizujące, zwłaszcza w zakresie dużych prędkości kątowych [2], [11].



Rys. 1. Schemat roboczego wału elektrycznego



Rys. 2. Schemat układu synchronicznego ruchu obrotowego z szeregowym połączeniem uzwojeń stojanów
 S — obwód stojanów, W — obwód wirników

Poprawę właściwości statycznych roboczego wału elektrycznego uzyskuje się przez szeregowo połączenie uzwojeń stojanów silników indukcyjnych (rys. 2) [7], [10].

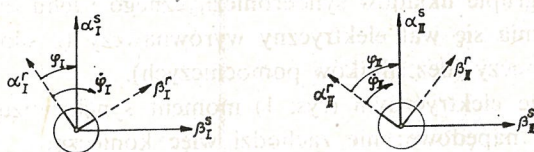
Dla przeprowadzenia analizy pracy układu synchronicznego ruchu obrotowego bez maszyn pomocniczych zastosowano teorię ogólną trójfazowej maszyny indukcyjnej.

2. KONSTRUKCJA MODELU MATEMATYCZNEGO UKŁADU SYNCHRONICZNEGO RUCHU OBROTOWEGO BEZ MASZYN POMOCNICZYCH

2.1. RÓWNANIA UKŁADU W OSIACH ORTOGONALNYCH $\alpha-\beta$

Na podstawie teorii ogólnej maszyny indukcyjnej [3], [4], [5], [12] otrzymuje się następujące równanie napięć dwóch silników wyrażone w układzie osi ortogonalnych $\alpha-\beta$ [6], [8] (rys. 3):

$$[u_{\alpha\beta}] = [Z_{\alpha\beta}][i_{\alpha\beta}] \quad (1)$$



Rys. 3. Interpretacja graficzna transformacji do układu osi ortogonalnych $\alpha-\beta$

gdzie:

$$[u_{\alpha\beta}] = \text{col}[u_{\alpha 1}^s, u_{\beta 1}^s, u_{\alpha 1}^r, u_{\beta 1}^r, u_{\alpha 11}^s, u_{\beta 11}^s, u_{\alpha 11}^r, u_{\beta 11}^r]$$

$$[i_{\alpha\beta}] = \text{col}[i_{\alpha 1}^s, i_{\beta 1}^s, i_{\alpha 1}^r, i_{\beta 1}^r, i_{\alpha 11}^s, i_{\beta 11}^s, i_{\alpha 11}^r, i_{\beta 11}^r]$$

$$[Z_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} [R_{\alpha\beta 1}^s] + p[L_{\alpha\beta 1}^s], & p[M_{\alpha\beta 1}^{sr}], & [0], & [0] \\ p[M_{\alpha\beta 1}^{rs}], & [R_{\alpha\beta 1}^r] + p[L_{\alpha\beta 1}^r], & [0], & [0] \\ [0], & [0], & [R_{\alpha\beta 11}^s] + p[L_{\alpha\beta 11}^s], & p[M_{\alpha\beta 11}^{sr}] \\ [0], & [0], & p[M_{\alpha\beta 11}^{rs}], & [R_{\alpha\beta 11}^r] + p[L_{\alpha\beta 11}^r] \end{bmatrix}$$

$$[R_{\alpha\beta 1}^s] = \text{diag}[R_1^s] \quad [R_{\alpha\beta 11}^s] = \text{diag}[R_{11}^s]$$

$$[L_{\alpha\beta 1}^s] = \text{diag}[L_1^s] \quad [L_{\alpha\beta 11}^s] = \text{diag}[L_{11}^s]$$

$$[R_{\alpha\beta I}^r] = \text{diag} [R_I^r] \quad [R_{\alpha\beta II}^r] = \text{diag} [R_{II}^r]$$

$$[L_{\alpha\beta I}^r] = \text{diag} [L_I^r] \quad [L_{\alpha\beta II}^r] = \text{diag} [L_{II}^r]$$

$$[M_{\alpha\beta I}^{sr}] = \begin{bmatrix} M_I \cos \varphi_I, & -M_I \sin \varphi_I \\ M_I \sin \varphi_I, & M_I \cos \varphi_I \end{bmatrix}$$

$$[M_{\alpha\beta I}^{rs}] = \begin{bmatrix} M_I \cos \varphi_I, & M_I \sin \varphi_I \\ -M_I \sin \varphi_I, & M_I \cos \varphi_I \end{bmatrix}$$

$$[M_{\alpha\beta II}^{sr}] = \begin{bmatrix} M_{II} \cos \varphi_{II}, & -M_{II} \sin \varphi_{II} \\ M_{II} \sin \varphi_{II}, & M_{II} \cos \varphi_{II} \end{bmatrix}$$

$$[M_{\alpha\beta II}^{rs}] = \begin{bmatrix} M_{II} \cos \varphi_{II}, & M_{II} \sin \varphi_{II} \\ -M_{II} \sin \varphi_{II}, & M_{II} \cos \varphi_{II} \end{bmatrix}$$

Równania momentów poszczególnych silników mają postać:

$$\begin{aligned} m_I &= J_I \frac{\ddot{\varphi}_I}{n} + D_I \frac{\dot{\varphi}_I}{n} - \frac{n}{2} [i_{\alpha\beta I}^s]_t [i_{\alpha\beta I}^r]_t \frac{\partial}{\partial \varphi_I} \left\{ \begin{bmatrix} [0], & [M_{\alpha\beta I}^{sr}] \\ [M_{\alpha\beta I}^{rs}], & [0] \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} [i_{\alpha\beta I}^s] \\ [i_{\alpha\beta I}^r] \end{bmatrix} \\ m_{II} &= J_{II} \frac{\ddot{\varphi}_{II}}{n} + D_{II} \frac{\dot{\varphi}_{II}}{n} - \frac{n}{2} [i_{\alpha\beta II}^s]_t [i_{\alpha\beta II}^r]_t \frac{\partial}{\partial \varphi_{II}} \left\{ \begin{bmatrix} [0], & [M_{\alpha\beta II}^{sr}] \\ [M_{\alpha\beta II}^{rs}], & [0] \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} [i_{\alpha\beta II}^s] \\ [i_{\alpha\beta II}^r] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

Ponieważ wirniki obu silników wału elektrycznego są połączone ze sobą i załączone do wspólnej rezystancji R , napięcia wirników spełniają warunki:

$$\begin{aligned} u_{\alpha I}^r + (i_{\alpha I}^r + i_{\alpha II}^r) R &= 0 & u_{\alpha II}^r + (i_{\alpha I}^r + i_{\alpha II}^r) R &= 0 \\ u_{\beta I}^r + (i_{\beta I}^r + i_{\beta II}^r) R &= 0 & u_{\beta II}^r + (i_{\beta I}^r + i_{\beta II}^r) R &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Po uwzględnieniu w równaniu (1) zależności (3) i po rozwinięciu hipermacierzy na macierze otrzymuje się macierzowe równanie napięć wału elektrycznego roboczego:

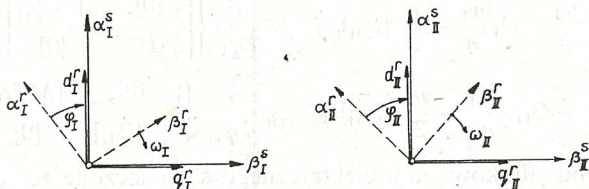
$$\begin{bmatrix} u_{\alpha I}^s \\ u_{\beta I}^s \\ 0 \\ 0 \\ u_{\alpha II}^s \\ u_{\beta II}^s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_I^s + pL_I^s, & 0, & pM_{cI}, & -pM_{sI}, & 0, & 0, \\ 0, & R_I^s + pL_I^s, & pM_{sI}, & pM_{cI}, & 0, & 0, \\ pM_{cI}, & pM_{sI}, & R_{zI} + L_I^r, & 0, & 0, & 0, \\ -pM_{sI}, & pM_{cI}, & 0, & R_{zI} + L_I^r, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & R_{II}^s + pL_{II}^s, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & R_{II}^s + pL_{II}^s, \\ 0, & 0, & R, & 0, & pM_{cII}, & pM_{sII}, \\ 0, & 0, & 0, & R, & -pM_{sII}, & pM_{cII} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha I}^s \\ i_{\beta I}^s \\ i_{\alpha I}^r \\ i_{\beta I}^r \\ i_{\alpha II}^s \\ i_{\beta II}^s \\ i_{\alpha II}^r \\ i_{\beta II}^r \end{bmatrix} \quad (4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} M_{cI} &= M_I \cos \varphi_I & M_{cII} &= M_{II} \cos \varphi_{II} \\ M_{sI} &= M_I \sin \varphi_I & M_{sII} &= M_{II} \sin \varphi_{II} \\ R_{zI} &= R_I^r + R & R_{zII} &= R_{II}^r + R \end{aligned}$$

2.2. RÓWNANIA UKŁADU W OSIACH ORTOGONALNYCH $d-q$

Ponieważ w równaniach (2) i (4) występują zmienne współczynniki zależne od kąta położenia wirnika φ , równania te są niewygodne do obliczeń. W celu doprowadzenia wymienionych równań do prostszej postaci wykonuje się ich transformację do układu osi ortogonalnych $d-q$ nieruchomych względem stojana. Graficzną interpretację transformacji do nowego układu osi przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Interpretacja graficzna transformacji do układu osi nieruchomych $d-q$

Macierz transformacji ma postać:

$$[C_{dq}] = \begin{bmatrix} [C_{dqI}], & [0] \\ [0], & [C_{dqII}] \end{bmatrix} \quad (5)$$

gdzie:

$$[C_{dqI}] = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \cos \varphi_I, & \sin \varphi_I \\ 0, & 0, & -\sin \varphi_I, & \cos \varphi_I \end{bmatrix} \quad [C_{dqII}] = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \cos \varphi_{II}, & \sin \varphi_{II} \\ 0, & 0, & -\sin \varphi_{II}, & \cos \varphi_{II} \end{bmatrix}$$

Po wykonaniu transformacji według zasad (6):

$$\begin{aligned} [u_{dq}] &= [C_{dq}]_t [u_{\alpha\beta}] \\ [i_{dq}] &= [C_{dq}]_t [i_{\alpha\beta}] \\ [Z_{dq}] &= [C_{dq}]_t [Z_{\alpha\beta}] [C_{dq}] \end{aligned} \quad (6)$$

otrzymuje się równanie:

$$[u_{dq}] = \begin{bmatrix} [Z_{dqI}], & [R_{\theta 1}] \\ [R_{\theta 2}], & [Z_{dqII}] \end{bmatrix} [i_{dq}] \quad (7)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} [u_{dq}] &= \text{col}[U \cos \omega_0 t, U \sin \omega_0 t, 0, 0, U \cos \omega_0 t, U \sin \omega_0 t, 0, 0] \\ [i_{dq}] &= \text{col}[i_{dI}^s, i_{qI}^r, i_{qI}^s, i_{dI}^r, i_{dII}^s, i_{qII}^r, i_{qII}^s, i_{dII}^r] \end{aligned}$$

$$[Z_{dq1}] = \begin{bmatrix} R_1^s + pL_1^s & 0 & pM_1 & 0 \\ 0 & R_1^s + pL_1^s & 0 & pM_1 \\ pM_1 & \dot{\varphi}_1 M_1 & R_{z1} + pL_1^r & \dot{\varphi}_1 L_1^r \\ -\dot{\varphi}_1 M_1 & pM_1 & -\dot{\varphi}_1 L_1^r & R_{z1} + pL_1^r \end{bmatrix}$$

$$[Z_{dq11}] = \begin{bmatrix} R_{11}^s + pL_{11}^s & 0 & pM_{11} & 0 \\ 0 & R_{11}^s + pL_{11}^s & 0 & pM_{11} \\ pM_{11} & \dot{\varphi}_{11} M_{11} & R_{z11} + pL_{11}^r & \dot{\varphi}_{11} L_{11}^r \\ -\dot{\varphi}_{11} M_{11} & pM_{11} & -\dot{\varphi}_{11} L_{11}^r & R_{z11} + pL_{11}^r \end{bmatrix}$$

$$[R_{\theta 1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R \cos \vartheta & R \sin \vartheta \\ 0 & 0 & -R \sin \vartheta & R \cos \vartheta \end{bmatrix} \quad [R_{\theta 2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R \cos \vartheta & -R \sin \vartheta \\ 0 & 0 & R \sin \vartheta & R \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

Dla analizy wygodnie jest wyeliminować funkcje czasowe napięć zasilających. W tym celu należy wykonać transformację do układu osi wirujących synchronicznie z polem magnetycznym stojana [1], [3], [12].

2.3. TRANSFORMACJA DO UKŁADU OSI γ - δ WIRUJĄCYCH SYNCHRONICZNIE

Macierz transformacji z układu osi nieruchomych d - q do wirujących synchronicznie γ - δ wynosi:

$$[C_{\gamma\delta}] = \begin{bmatrix} [C_{\gamma\delta 1}] & [0] \\ [0] & [C_{\gamma\delta 11}] \end{bmatrix} \quad (8)$$

gdzie:

$$[C_{\gamma\delta 1}] = \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t & -\sin \omega_0 t & 0 & 0 \\ \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \omega_0 t & -\sin \omega_0 t \\ 0 & 0 & \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \end{bmatrix}$$

Po przeprowadzeniu transformacji równań (8) według podanych poprzednio zasad otrzymuje się równania napięć w układzie osi wirujących synchronicznie:

$$[u_{\gamma\delta}] = \begin{bmatrix} [Z_{\gamma\delta 1}] & [R_{\theta 1}] \\ [R_{\theta 2}] & [Z_{\gamma\delta 11}] \end{bmatrix} [i_{\gamma\delta}] \quad (9)$$

gdzie:

$$[u_{\gamma\delta}] = \text{col}[U, 0, 0, 0, U, 0, 0, 0]$$

$$[i_{\gamma\delta}] = \text{col}[i_{\gamma 1}^s, i_{\delta 1}^s, i_{\gamma 1}^r, i_{\delta 1}^r, i_{\gamma 11}^s, i_{\delta 11}^s, i_{\gamma 11}^r, i_{\delta 11}^r]$$

$$[Z_{\gamma\delta 1}] = \begin{bmatrix} R_1^s + pL_1^s & -\omega_0 L_1^s & pM_1 & -\omega_0 M_1 \\ \omega_0 L_1^s & R_1^s + pL_1^s & \omega_0 M_1 & pM_1 \\ pM_1 & -M_1(\omega_0 - \omega_1) & R_{z1} + pL_1^r & -L_1^r(\omega_0 - \omega_1) \\ M_1(\omega_0 - \omega_1) & pM_1 & L_1^r(\omega_0 - \omega_1) & R_{z1} + pL_1^r \end{bmatrix}$$

$$[Z_{\gamma\delta 11}] = \begin{bmatrix} R_{11}^s + pL_{11}^s & -\omega_0 L_{11}^s & pM_{11} & -\omega_0 M_{11} \\ \omega_0 L_{11}^s & R_{11}^s + pL_{11}^s & \omega_0 M_{11} & pM_{11} \\ pM_{11} & -M_{11}(\omega_0 - \omega_{11}) & R_{z11} + pL_{11}^r & -L_{11}^r(\omega_0 - \omega_{11}) \\ M_{11}(\omega_0 - \omega_{11}) & pM_{11} & L_{11}^r(\omega_0 - \omega_{11}) & R_{z11} + pL_{11}^r \end{bmatrix}$$

Równania momentów w nowym układzie osi przyjmują postać:

$$\begin{aligned} m_I &= J_I \frac{\dot{\varphi}_I}{n} + D_I \frac{\dot{\varphi}_I}{n} - n M_I (i_{\delta I}^s i_{\gamma I}^r - i_{\gamma I}^s i_{\delta I}^r) \\ m_{II} &= J_{II} \frac{\dot{\varphi}_{II}}{n} + D_{II} \frac{\dot{\varphi}_{II}}{n} - n M_{II} (i_{\delta II}^s i_{\gamma II}^r - i_{\gamma II}^s i_{\delta II}^r) \end{aligned} \quad (10)$$

Równania opisujące układ synchronicznego ruchu obrotowego silników indukcyjnych z szeregowym połączeniem uzwojeń stojanów można otrzymać na podstawie równań (9) i (10) po uwzględnieniu równań więzów wynikających z konfiguracji połączeń uzwojeń stojanów. Po zbilansowaniu napięć wspólnego obwodu stojanów i wprowadzeniu jednego prądu dla tego obwodu:

$$\begin{aligned} i_{\gamma I}^s &= i_{\gamma II}^s = i_{\gamma}^s \\ i_{\delta I}^s &= i_{\delta II}^s = i_{\delta}^s \end{aligned} \quad (11)$$

otrzymuje się następujące równania napięć:

$$\begin{aligned} U &= (R_c^s + pL_c^s) i_{\gamma}^s - \omega_0 L_c^s i_{\delta}^s + pM_I i_{\gamma I}^r - \omega_0 M_I i_{\delta I}^r + pM_{II} i_{\gamma II}^r - \omega_0 M_{II} i_{\delta II}^r \\ 0 &= \omega_0 L_c^s i_{\gamma}^s + (R_c^s + pL_c^s) i_{\delta}^s + \omega_0 M_I i_{\gamma I}^r + pM_I i_{\delta I}^r + \omega_0 M_{II} i_{\gamma II}^r + pM_{II} i_{\delta II}^r \end{aligned} \quad (12)$$

Równania wału elektrycznego z szeregowym połączeniem uzwojeń stojanów mają postać macierzową (13):

$$\begin{bmatrix} U \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_I \\ m_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_c^s + pL_c^s, & -\omega_0 L_c^s, & pM_I, & -\omega_0 M_I \\ \omega_0 L_c^s, & R_c^s + pL_c^s, & \omega_0 M_I, & pM_I, \\ pM_I, & -M_I(\omega_0 - \omega_I), & R_{zI} + pL_I^r, & -L_I^r(\omega_0 - \omega_I), \\ M_I(\omega_0 - \omega_I), & pM_I, & L_I^r(\omega_0 - \omega_I), & R_{zI} + pL_I^r, \\ pM_{II}, & -M_{II}(\omega_0 - \omega_{II}), & R \cos \vartheta, & -R \sin \vartheta, \\ M_{II}(\omega_0 - \omega_{II}), & pM_{II}, & R \sin \vartheta, & R \cos \vartheta, \\ nM_I i_{\delta I}^r, & -nM_I i_{\gamma I}^r, & 0, & 0, \\ nM_{II} i_{\delta II}^r, & -nM_{II} i_{\gamma II}^r, & 0, & 0, \\ pM_{II}, & -\omega_0 M_{II}, & 0, & 0 \\ \omega_0 M_{II}, & pM_{II}, & 0, & 0 \\ R \cos \vartheta, & R \sin \vartheta, & 0, & 0 \\ -R \sin \vartheta, & R \cos \vartheta, & 0, & 0 \\ R_{zII} + pL_{II}^r, & -L_{II}^r(\omega_0 - \omega_{II}), & 0, & 0 \\ L_{II}^r(\omega_0 - \omega_{II}), & R_{zII} + pL_{II}^r, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{J_I}{n} p + \frac{D_I}{n}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \frac{J_{II}}{n} p + \frac{D_{II}}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\gamma}^s \\ i_{\delta}^s \\ i_{\gamma I}^r \\ i_{\delta I}^r \\ i_{\gamma II}^r \\ i_{\delta II}^r \\ \omega_I \\ \omega_{II} \end{bmatrix} \quad (13)$$

gdzie:

$$R_c^s = R_I^s + R_{II}^s, \quad L_c^s = L_I^s + L_{II}^s$$

Równania (13) są równaniami nieliniowymi. Po rozłożeniu ich w szereg Taylora w pobliżu stanu ustalonego otrzymuje się liniowe równania stanu statycznego i równania małych przyrostów.

Analiza właściwości statycznych omawianych układu zostanie przeprowadzona na podstawie równań (14), opisujących stan ustalony:

$$\begin{bmatrix} U \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_I \\ m_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_c^s, & -\omega_0 L_c^s, & 0, & -\omega_0 M_I, & 0, \\ \omega_0 L_c^s, & R_c^s, & \omega_0 M_I, & 0, & \omega_0 M_{II}, \\ 0 & -M_I(\omega_0 - \omega), & R_{zI}, & -L_I^r(\omega_0 - \omega), & R \cos \vartheta_0, \\ M_I(\omega_0 - \omega), & 0, & L_I^r(\omega_0 - \omega), & R_{zI}, & -R \sin \vartheta_0, \\ 0, & -M_{II}(\omega_0 - \omega), & R \cos \vartheta_0, & -R \sin \vartheta_0, & R_{zII}, \\ M_{II}(\omega_0 - \omega), & 0, & R \sin \vartheta_0, & R \cos \vartheta_0, & L_{II}^r(\omega_0 - \omega), \\ nM_I I_{\delta I}^r, & -nM_I I_{\gamma I}^r, & 0, & 0, & 0, \\ nM_{II} I_{\delta II}^r, & -nM_{II} I_{\gamma II}^r, & 0, & 0, & 0, \\ -\omega_0 M_{II}, & 0, & 0, & I_{\gamma}^s, \\ 0, & 0, & 0, & I_{\delta}^s, \\ R \sin \vartheta_0, & 0, & 0, & I_{\gamma I}^r, \\ R \cos \vartheta_0, & 0, & 0, & I_{\delta I}^r, \\ -L_I^r(\omega_0 - \omega), & 0, & 0, & I_{\gamma II}^r, \\ R_{zII}, & 0, & 0, & I_{\delta II}^r, \\ 0, & \frac{D_I}{n}, & 0, & \omega, \\ 0, & 0, & \frac{D_{II}}{n}, & \omega \end{bmatrix} \quad (14)$$

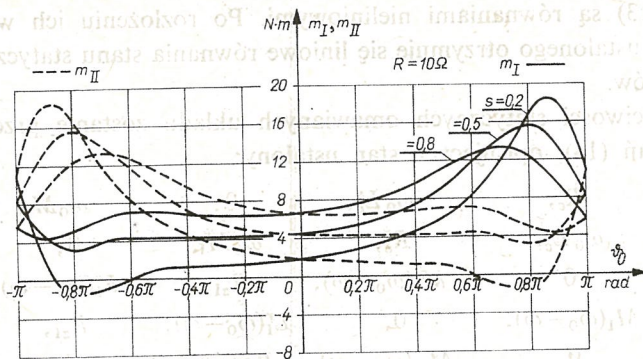
3. OBLICZENIA NUMERYCZNE CHARAKTERYSTYK STATYCZNYCH UKŁADU

W celu określenia wpływu poślizgu, rezystancji wspólnego obwodu wirników R i kąta niezgodności ϑ_0 na charakterystyki statyczne analizowanego układu rozwiązano numerycznie układ równań (14).

Obliczenie wykonano dla dwóch jednakowych silników indukcyjnych o danych znamionowych: $P_N = 3$ kW, $I_{IN} = 11,4$ A, $U_N = 220/380$ V, $I_{2N} = 26$ A, $n_N = 1420$ obr/min i parametrach zmierzonych: $R^s = 1,25 \Omega$, $R^r = 1,8 \Omega$, $L^s = 0,348$ H, $L^r = 0,348$ H, $M = 0,3345$ H, $D = 0,00255$ Nms/rad. Do obliczeń przyjęto zakres zmian prędkości: $-\omega_0 \leq \omega \leq \omega_0$ z krokiem $\Delta\omega = 10\pi$, zakres zmian kąta niezgodności $-\pi \leq \vartheta_0 \leq \pi$ z krokiem $\Delta\vartheta_0 = 0,1\pi$ oraz zakres zmian rezystancji dodatkowej $0 \leq R \leq 20\Omega$ z krokiem $\Delta R = 2\Omega$.

Na podstawie otrzymanych wyników obliczeń sporządzono podstawowe charakterystyki analizowanego wału elektrycznego.

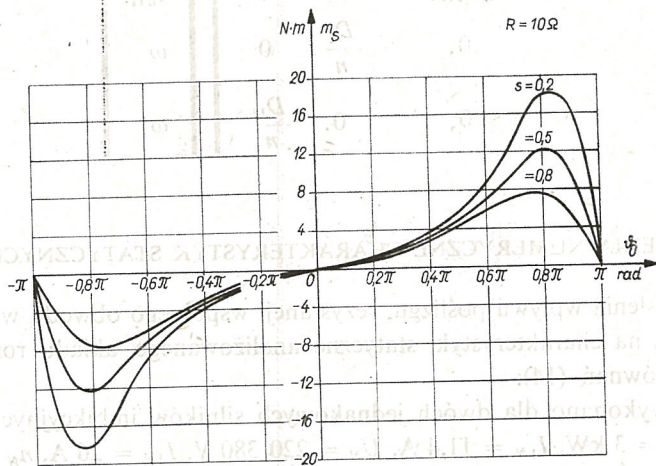
Na rys. 5 przedstawiono zależność momentów rozwijanych przez poszczególne silniki od kąta niezgodności ϑ_0 dla stałej wartości rezystancji dodatkowej i stałych poślizgów.



Rys. 5. Zależność momentów silników indukcyjnych wału elektrycznego z szeregowym połączeniem uzwojeń stojanów od kąta niezgodności położenia osi wirników

Z przebiegu charakterystyki wynika, że wartości ekstremalne momentów występują w zakresie dużych kątów niezgodności ($0,7\pi \div 0,9\pi$), przy czym wartości te rosną ze wzrostem prędkości kątowej silników.

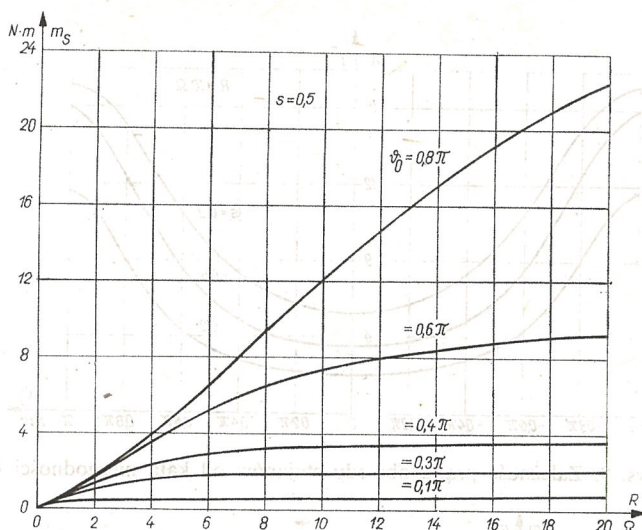
Zależność momentu synchronizującego ($m_s = m_I - m_{II}$) od kąta niezgodności ϑ_0 przedstawiono na rys. 6. Wartości maksymalne momentów synchronizujących występują w podobnym zakresie kątów niezgodności jak dla momentów poszczególnych silników. Wzrostowi prędkości kątowej silników odpowiada wzrost momentu synchronizującego, co jest najważniejszą zaletą tego układu w porównaniu z układem klasycznym.



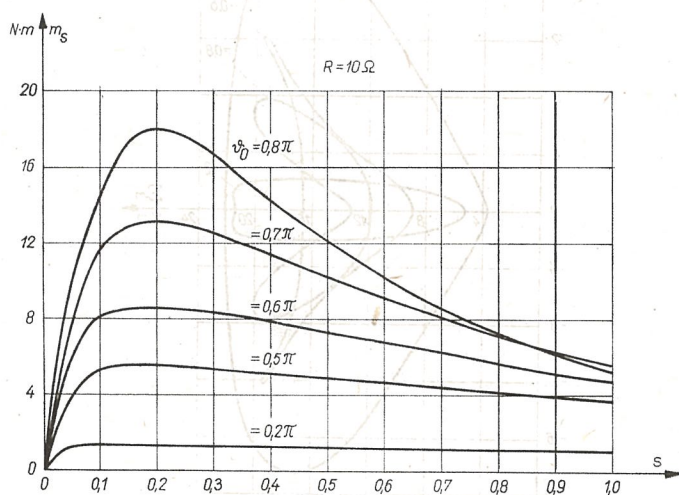
Rys. 6. Zależność momentu synchronizującego od kąta niezgodności ϑ_0

Wpływ rezystancji dodatkowej obwodu wirników na moment synchronizujący, przy stałej wartości poślizgu, przedstawiono na rys. 7. Dla kątów $\vartheta_0 < 0,6\pi$ wzrost rezystancji powyżej 10Ω nie daje wyraźnego wzrostu momentu synchronizującego.

Zależność momentu synchronizującego od poślizgu dla parametrycznie zmiennej wartości kąta ϑ_0 przedstawiono na rys. 8. Wartości maksymalne momentów synchronizujących występują w pobliżu poślizgu krytycznego (a więc dla dużych prędkości kątowych).



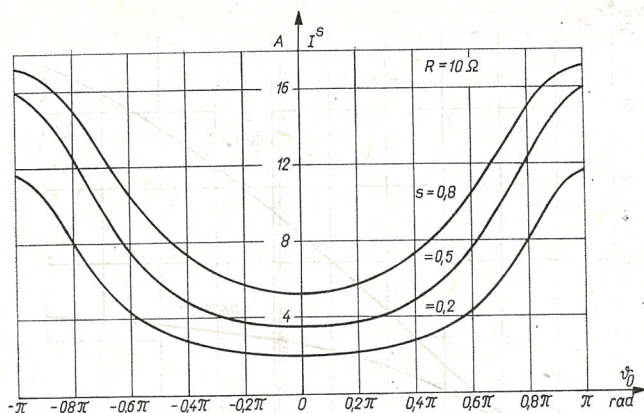
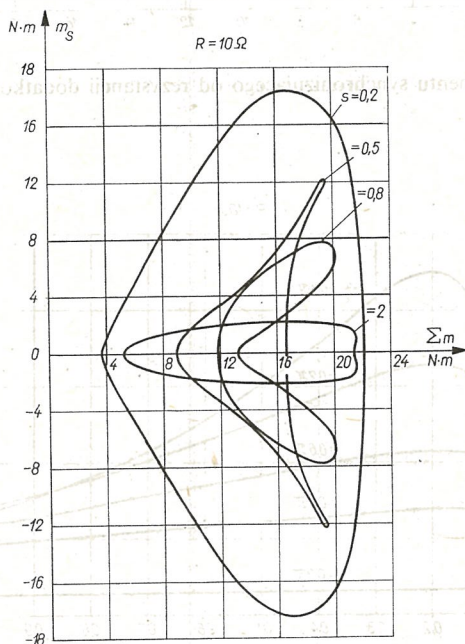
Rys. 7. Zależność momentu synchronizującego od rezystancji dodatkowej obwodu wirników



Rys. 8. Zależność momentu synchronizującego od poślizgu

Na rys. 9 przedstawiono zależność prądu stojanów od kąta niezgodności ϑ_0 przy $s =$ parametr. Prąd stojanów rośnie ze wzrostem kąta niezgodności i wzrostem poślizgu.

Pełny obraz możliwości obciążeniowych wału elektrycznego z szeregowym połączeniem uzwojeń stojanów ilustruje wykres miejsc geometrycznych momentów $m_s = f(\sum m)$ (rys. 10). Każda krzywa zamknięta przedstawia na wykresie zależność momentu synchronizującego od sumy momentów obu silników przy stałej wartości poślizgu i zmiennym kącie niezgodności ϑ_0 .

Rys. 9. Zależność prądu obwodu stojanów od kąta niezgodności ϑ_0 

Rys. 10. Charakterystyki obciążeniowe roboczego wału elektrycznego z szeregowym połączeniem uzwojeń stojanów

4. PODSUMOWANIE

Zastosowanie teorii ogólnej maszyny indukcyjnej do opisu matematycznego układu pracy współbieżnej silników indukcyjnych umożliwiło skonstruowanie uniwersalnego modelu matematycznego dla stanów statycznych i dynamicznych.

W opisie podano równania dotyczące układu klasycznego, a przez wprowadzenie dodatkowych równań więzów otrzymano równanie układu z szeregowym połączeniem uzwojeń stojanów.

Na podstawie obliczeń numerycznych równań stanu ustalonego sporządzono podstawowe charakterystyki pozwalające ocenić właściwości napędowe analizowanego układu pracy współbieżnej.

Z charakterystyk kątowych wynika, że momenty poszczególnych silników oraz moment synchronizujący osiągają wartości maksymalne w zakresie dużych kątów niezgodności. W zakresie małych kątów niezgodności charakterystyki układu są bardzo „miękkie”, a wpływ poślizgu na rozwijane momenty jest niewielki.

Najistotniejszą cechą układu z szeregowym połączeniem uzwojeń stojanów jest osiągnięcie dużych momentów synchronizujących w zakresie dużych prędkości kątowych, co stanowi ważną zaletę tego układu w porównaniu z układem klasycznym.

LITERATURA

1. R. E. Burrige, T. H. Barton, *Investigation of a power synchro system: theoretical development and methods of analysis*. IEEE Trans. on Power Apparatus and System, Vol. PAS-89, no 4, 1970.
2. Z. Gogolewski, Z. Kuczewski, *Napęd elektryczny*, WNT Warszawa 1971.
3. N. N. Hancock, *Matrix analysis of electrical machinery*, Pergamon Press, New York, 1974.
4. W. Latek, *Teoria maszyn elektrycznych*, WNT, Warszawa, 1982.
5. A. Puchała, *Dynamika maszyn i układów elektromechanicznych*, PWN, Warszawa, 1977.
6. K. P. Sastry, R. E. Burrige, *Dynamics of a power synchro system with shuntconnected rotor resistances — theoretical development and steady — state analysis*. IEEE PES Winter Power Meeting, New York, 1975.
7. W. Stock, O. Wild, *Die elektrische Arbeitswelle bei Reihenschaltung der Ständerwicklungen*, Wiss. Z. Elektrotechn. Nr 6, 1966.
8. A. Szlachta, *Praca współbieżna silników asynchronicznych pierścieniowych z przekształtnikami tyrystorowymi w obwodzie wirników*, Praca doktorska, Instytut Elektrotechniki, Warszawa, 1979.
9. A. Szlachta, *Digital computer simulation of a power synchro system with impulsing resistance control of a rotors circuit*, Modelling, Simulation and Control, A, AMSE Press, Vol. 2, nr 1, 1985.
10. G. Ungruh, H. Jordan, *Gleichlaufschaltungen von Asynchronmotoren*, Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1964.
11. D. C. White, W. H. Woodson, *Elektromechanical Energy Conversion*, New York, J. Wiley, 1959.

A. SZLACHTA

A SYSTEM OF SYNCHRONIZED ROTARY MOVEMENT OF INDUCTION MOTORS WITH PARALLEL CONNECTION OF STATOR WININGS

Summary

The article presents an analysis of a synchro system of electric induction motors with parallel connection of stator windings. The properties of the synchro system have been established for a selected state with the use of a model of the two-phase induction machine. The derived equations of the selected state are solved for several parameters of the system and are documented with a description of its main characteristics.

A. SZLACHTA

SYSTEME DU MOUVEMENT DE ROTATION SYNCHRONES DES MOTEURS À INDUCTION AUX ENROULEMENTS DES STATORS COUPLÉS EN SÉRIE

Résumé

Dans l'article on a présenté l'analyse de l'arbre électrique des moteurs à induction où les enroulements des statos sont couplés en série. On a examiné les propriétés de l'arbre pour son régime permanent en se servant d'un modèle biphasé d'une machine à induction. Les équations du régime permanent obtenues sont résolues à l'aide de EMC pour plusieurs paramètres du système et on a inclu ses principales caractéristiques.

A. SZLACHTA

SYSTEM DER SYNCHRONDREHBEWEGUNG DER INDUKTIONSMOTOREN BEI REIHENVERBINDUNGEN DER STATORWICKLUNGEN

Zusammenfassung

Im Aufsatz wurde die Analyse einer Welle der elektrischen Induktionsmotoren mit Reihenverbindungen der Statorwicklungen geschildert. Die Untersuchungen der Welleneigenschaften fanden im stationären Zustand am Zweiphasenmodell einer Induktionsmaschine statt. Die gewonnenen Gleichungen für den stationären Zustand wurden mittels EMC für viele Parameter des Systems gelöst, und seine Grundcharakteristiken wurden angeführt.

А. ШЛЯХТА

СИСТЕМА СИНХРОННОГО ВРАЩЕНИЯ ИНДУКЦИОННЫХ МАШИН С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ ОБМОТОК СТАТОРОВ

Резюме

Представлен анализ электрического вала индукционных машин с последовательным соединением обмоток статоров. Исследование свойств проведено для установившегося состояния, при использовании двухфазной модели индукционной машины. Полученные уравнения установившегося состояния решены на ЭВМ для различных параметров системы, приведены также ее основные характеристики.

Organia parametryczne wirników klatkowych, dwubiegunowych silników asynchronicznych

WALDEMAR MORZUCH (WROCŁAW)

Instytut Materiałoznawstwa i Mechaniki Technicznej Politechniki Wrocławskiej

Otrzymano 1985.09.20

Celem pracy było przeprowadzenie analizy stateczności dynamicznej wirników klatkowych, dwubiegunowych silników asynchronicznych. Do analizy przyjęto model wirnika o ciągłym rozłożeniu masy i o zmiennej sztywności. Na podstawie równań ruchu otrzymano równania różniczkowe wiążące ugięcia dynamiczne wirnika z przestrzenią i czasem. Ostatecznie otrzymano równania różniczkowe, cząstkowe, niejednorodne, o zmiennych współczynnikach, które rozwiązano stosując metodę rozdzielenia zmiennych (metoda Fouriera). W rezultacie powyższego rozwiązanie wyrażono w postaci nieskończonego szeregu dwóch funkcji: $X_n(x)$, zależnych od współrzędnej przestrzennej (x) oraz $\Phi_{an}(t)$ zależnych od czasu (t). Funkcje $\Phi_{an}(t)$ okazały się być opisane równaniem różniczkowym zwyczajnym o zmiennych okresowo współczynnikach. Analizując jego rozwiązania wyróżniono tzw. obszary statecznej i niestatecznej pracy wirnika.

W dalszej części pracy przeprowadzono analizę poszczególnych obszarów niestateczności w różnych stanach dynamicznych wirnika. Wskazano na możliwość określenia przedziałów prędkości obrotowych, przy których pojawia się niestateczność.

1. WSTĘP

Silniki asynchroniczne klatkowe należą do maszyn elektrycznych szeroko stosowanych w przemyśle. O ich powszechnym zastosowaniu zdecydowała ich prosta i zwarta konstrukcja. Silniki te charakteryzują się stosunkowo małymi szczelinami magnetycznymi, co stwarza dodatkowe trudności konstrukcyjne. Przed przystąpieniem do właściwych obliczeń konstrukcyjnych wirnika dowolnej maszyny elektrycznej należy przeprowadzić analizę jego stateczności poprzecznej. Zagadnienie stateczności wirnika jest ściśle związane z charakterem jego drgań. Przykładem tutaj może być zjawisko rezonansu polegające na utracie stateczności przy pewnych wartościach wymuszenia zewnętrznego. Zjawisko to można opisać za pomocą równań ruchu danego układu mechanicznego. Równania te mają różną postać w zależności od rodzaju maszyny (wielobiegunowa lub dwubiegunowa). Czynnikiem odróżniającym oba równania jest charakter zmienności siły naciągu magnetycznego w czasie. W maszynach wielobiegunowych siła ta nie zależy w sposób jawny od czasu. Natomiast w maszynach dwubiegunowych siła naciągu magnetycznego jest okresową funkcją czasu. W rezultacie powyższego otrzymuje się różne jakościowo

równania różniczkowe opisujące ugięcia poprzeczne wirnika. Równania te w przypadku maszyn wielobiegunowych są równaniami o stałych współczynnikach. Odpowiednie równania różniczkowe dla maszyn dwubiegunowych zawierają współczynniki zależne od czasu. Różna postać równań różniczkowych dla obu rodzajów maszyn determinuje różną jakościowo stateczność ich rozwiązań. W przypadku maszyn wielobiegunowych istnieje jedna wartość wymuszenia zewnętrznego, przy której odpowiednie rozwiązania są niestateczne. Wyróżnia się tutaj tzw. krytyczną prędkość obrotową wirnika, przy której ugięcia dynamiczne wirnika rosną nieograniczenie. Analizę powyższego zjawiska przedstawiono w pracach [1], [2], [7], [8]. Publikacje [1], [2] opierały się na dyskretnym modelu wirnika i dotyczyły stanu mechanicznie ustalonego. W [7], [8] przyjęto do analizy model ciągły i rozpatrzono stany nieustalone.

Zupełnie odmiennie przedstawia się stateczność rozwiązań równań różniczkowych dla maszyn dwubiegunowych. Równania te zawierają współczynniki zależne od czasu i opisują tzw. drgania parametryczne charakteryzujące się tym, że istnieje pewien przedział częstości wymuszenia, przy którym pojawia się niestateczność. Można tutaj mówić o tzw. obszarze stateczności, obejmującym zakres częstości wymuszenia zapewniającym stateczną pracę wirnika. Określenie tego obszaru będzie szczególnie ważne dla wirników długich o małych średnicach, charakteryzujących się małą sztywnością giętą. Wirniki takie można spotkać np. w dwubiegunowych silnikach asynchronicznych do napędu pomp głębinowych. Poniższa praca jest poświęcona jakościowej i ilościowej ocenie stateczności poprzecznej wirników klatkowych dwubiegunowych silników asynchronicznych.

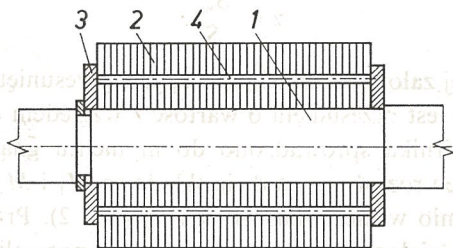
WYKAZ OZNACZEŃ

B	— indukcja magnetyczna w szczelinie,
B_n	— indukcja maksymalna w szczelinie występująca podczas obciążenia znamionowego,
C	— współczynnik naciągu magnetycznego,
$d_1, d_2, \dots$	— średnice poszczególnych odcinków wirnika,
d_p	— średnica wewnętrzna pakietu sprasowanych blach,
D	— średnica zewnętrzna pakietu sprasowanych blach,
e	— odległość osi wirnika od osi stojana,
E_w, E_{kl}	— moduł sprężystości podłużnej materiału wału i klatki,
E_p	— zastępczy moduł sprężystości podłużnej pakietu,
G	— moduł sprężystości poprzecznej materiału wału,
g	— przyspieszenie ziemskie,
I_w, I_p, I_{kl}, I_r	— odpowiednio momenty bezwładności przekroju wału w miejscu mocowania pakietu, pakietu, prętów klatki i r -tego odcinka wirnika,
k_c	— współczynnik Cartera,
$l_1, l_2, \dots$	— długości poszczególnych odcinków wirnika,
l_p, L	— długość pakietu sprasowanych blach,
M	— moment gnący,
S_w, S_p, S_{kl}	— odpowiednio sztywność wału na odcinku mocowania pakietu, pakietu, klatki,
t	— czas,
u_1, u_2	— składowe ugięcia wirnika
x	— zmienna przestrzenna opisująca położenie danego przekroju poprzecznego wirnika,
$y(x)$	— odległość osi wirnika od osi stojana,

- δ — szczelina magnetyczna,
 η — odległość osi pakietu od osi wału,
 μ — masa jednostki długości wirnika na odcinku pakietu,
 μ_2 — przenikalność magnetyczna,
 φ — kąt obrotu wirnika
 ω_p — prędkość kątowna pola magnetycznego,
 ω_w — prędkość kątowna wirnika

2. MODEL WIRNIKA

Do analizy drgań parametrycznych wirnika przyjęto jego model podobny jak w pracach [7] i [8]. Przypomnijmy tutaj, że wirnik klatkowy składa się z wału i pakietu wykonanego z odizolowanych blach stalowych (rys. 1). W pakiecie umieszczone są pręty

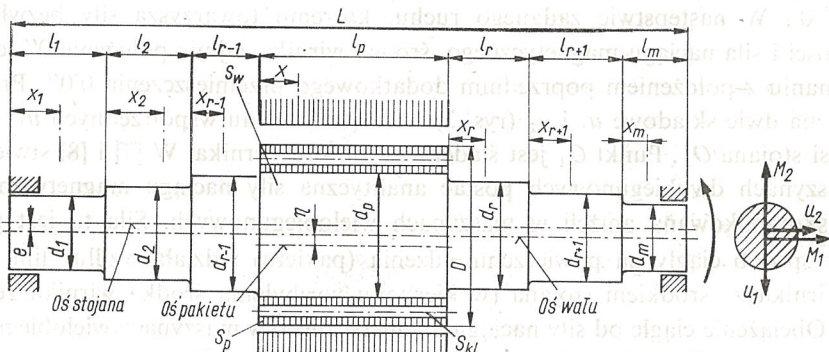


Rys. 1. Schemat wirnika silnika asynchronicznego, klatkowego

1 — wał, 2 — pakiet blach wirnika (rdzeń), 3 — tarcza dociskowa, 4 — pręt uzwojenia wirnika

uzwojenia, zwarte na końcu pierścieniami miedzianymi lub aluminiumowymi. Model wirnika przyjęty do analizy przedstawiono na rys. 2. Założono, że wirnik składa się z szeregu m odcinków średnic $d_1, d_2, \dots, d_p, \dots, d_r, \dots, d_m$ i długościach $l_1, l_2, \dots, l_p, \dots, l_r, \dots, l_m$. W modelu wyróżniono odcinek średnicy d_p i długości l_p , na którym umocowano pakiet sprasowanych blach. Sztywność poszczególnych odcinków wirnika oznaczono symbolem S_r , gdzie

$$S_r = E_w I_r. \quad (1)$$



Rys. 2. Model wirnika przyjęty do obliczeń

Szytywność wirnika na odcinku pakietu wynosi

$$S = S_w + S_p + S_{kl} \quad (2)$$

gdzie

$$S_w = E_w I_w, \quad S_p = \xi_p E_p I_p, \quad S_{kl} = \xi_{kl} E_{kl} I_{kl},$$

ξ_p, ξ_{kl} — współczynniki korekcyjne uwzględniające charakter pasowania pakietu na wale i technologię wykonania klatki.

Ze względu na zmienną sztywność wirnika wprowadzono współczynnik sztywności danego odcinka wirnika, zdefiniowanego za pomocą ilorazu

$$\alpha_r = \frac{S_w}{S_r}. \quad (3)$$

Podobnie na odcinku mocowania pakietu współczynnik sztywności wynosi

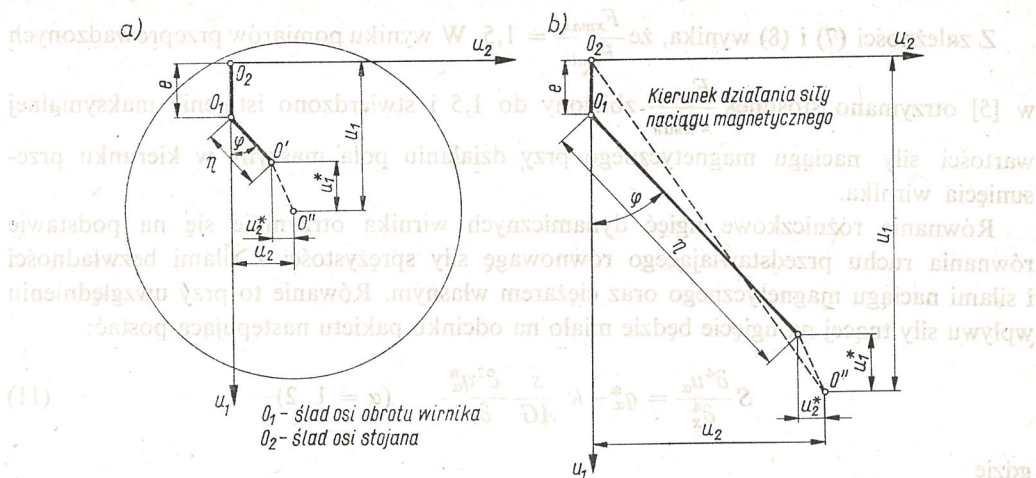
$$\alpha = \frac{S_w}{S}. \quad (4)$$

W analizie dynamicznej założono, że oś pakietu jest przesunięta o wartość η względem osi wału, oraz, że oś wału jest przesunięta o wartość e względem osi stojana. Siły przenoszone przez końcówkę wirnika sprowadzono do momentu gnącego M skupionego na końcu wirnika. Moment ten rozłożono na dwie składowe M_1 i M_2 . Składowe te wywołują ugięcie wirnika odpowiednio w kierunku osi u_1 i u_2 (rys. 2). Przy obliczaniu sztywności pakietu przyjęto, że jest on ciałem liniowo sprężystym, co pozwoliło na stosowanie zasady superpozycji. Możliwość stosowania tej zasady wykazano doświadczalnie w pracy [10].

3. STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA WIRNIKA MASZyny DWUBIEGUNOWEJ

Dla oceny stateczności wirnika należy ułożyć równania różniczkowe wiążące jego ugięcia dynamiczne z przestrzenią i czasem. Równania te wyprowadzono podobnie jak w [7], [8] i zmieniając postać analityczną siły naciągu magnetycznego. Założono, że wirnik jest umieszczony niewspółosiowo w stojanie oraz, że obraca się on ruchem jednostajnym. Na rys. 3 przedstawiono wirnik obracający się zadany ruchem, gdzie φ oznacza kąt obrotu. Przy braku jakichkolwiek sił środek wirnika w wyniku obrotu o kąt φ zająłby położenie O' . W następstwie zadanego ruchu, któremu towarzyszą siły bezwładności, siła ciężkości i siła naciągu magnetycznego, środek wirnika zajmie położenie O'' , doznając w porównaniu z położeniem poprzednim dodatkowego przemieszczenia $O'O''$. Przemieszczenie to ma dwie składowe u_1 i u_2 (rys. 3). Początek układu współrzędnych u_1, u_2 przyjęto na osi stojana O_2 . Punkt O_1 jest śladem osi obrotu wirnika. W [7] i [8] stwierdzono, że w maszynach dwubiegunowych postać analityczna siły naciągu magnetycznego jest bardziej skomplikowana aniżeli w maszynach wielobiegunowych. Siła ta jest siłą rozłożoną w sposób ciągły na powierzchni rdzenia (pakietu) i działa wzdłuż linii łączącej środek wirnika ze środkiem stojana (w kierunku wychylenia środka wirnika ze środka stojana). Obciążenie ciągłe od siły naciągu magnetycznego w maszynach wielobiegunowych można zgodnie z [7] i [8] wyrazić w postaci

$$q_N(x) = C_V(x) \quad (5)$$



Rys. 3. Przemieszczenia przekroju wirnika występujące na skutek obrotu o kąt φ — gdzie współczynnik naciągu magnetycznego C wyraża się następującą zależnością

$$C = \frac{\pi}{4\mu_0} \xi D \frac{k_c}{\delta} B_n^2 \quad (6)$$

ξ — współczynnik zależny od rodzaju maszyny elektrycznej.

W przypadku maszyn dwubiegunowych siła naciągu magnetycznego ma charakter siły zmiennej w czasie. Różni autorzy podają różne wzory na obliczenie tej siły. Podstawową metodą obliczania siły naciągu magnetycznego w maszynach dwubiegunowych jest metoda Rosenberga [2], [5]. Słuszność tej metody została potwierdzona doświadczalnie w pracy [5]. Rosenberg wykazał, że wartość siły naciągu magnetycznego można wyrazić przybliżonymi zależnościami:

a) dla chwili gdy pole maszyny działa w kierunku prostopadłym do mimośrodowego przesunięcia wirnika

$$F_{xmin} = \frac{1}{4} \pi D L \left(\frac{B}{0,5} \right)^2 \frac{e}{\delta} \quad (7)$$

b) dla chwili gdy pole maszyny działa w kierunku przesunięcia wirnika

$$F_{xmax} = \frac{3}{8} \pi D L \left(\frac{B}{0,5} \right)^2 \frac{e}{\delta} \quad (8)$$

Z powyższych wzorów wynika, że obciążenie ciągłe (czyli na jednostkę długości) pochodzące od naciągu magnetycznego w maszynach dwubiegunowych można przedstawić w postaci

$$q_N(x) = (A_1 + A_2 \cos pt) y(x) \quad (9)$$

gdzie

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{5}{16} \pi D \left(\frac{B}{0,5} \right)^2 \frac{1}{\delta}, \\ A_2 &= \frac{1}{16} \pi D \left(\frac{B}{0,5} \right)^2 \frac{1}{\delta}, \\ p &= 2(\omega_p - \omega_r). \end{aligned} \quad (10)$$

Z zależności (7) i (8) wynika, że $\frac{F_{xmax}}{F_{xmin}} = 1,5$. W wyniku pomiarów przeprowadzonych w [5] otrzymano stosunek $\frac{F_{xmax}}{F_{xmin}}$ zbliżony do 1,5 i stwierdzono istnienie maksymalnej wartości siły naciągu magnetycznego przy działaniu pola maszyny w kierunku przesunięcia wirnika.

Równanie różniczkowe ugięć dynamicznych wirnika otrzymuje się na podstawie równania ruchu przedstawiającego równowagę siły sprężystości z siłami bezwładności i siłami naciągu magnetycznego oraz ciężarem własnym. Równanie to przy uwzględnieniu wpływu siły tnącej na ugięcie będzie miało na odcinku pakietu następującą postać:

$$S \frac{\partial^4 u_\alpha}{\partial x^4} = q_\alpha^* - k \frac{s}{AG} \frac{\partial^2 q_\alpha^*}{\partial x^2} \quad (\alpha = 1, 2) \quad (11)$$

gdzie

A — pole przekroju poprzecznego, k — współczynnik zależny od kształtu przekroju.

Na obciążenie ciągłe q_α^* występujące w równaniu (11) składa się obciążenie ciągłe od sił bezwładności, naciągu magnetycznego i ciężaru własnego.

$$q_\alpha^* = q_{1\alpha} + q_{2\alpha} + q_{3\alpha}, \quad (12)$$

$$q_{1\alpha} = -\mu \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2}, \quad q_{2\alpha} = (A_1 + A_2 \cos pt) u_\alpha, \quad q_{3\alpha} = \mu g \delta_{1\alpha} \quad (13)$$

δ_1 — delta albo symbol Kroneckera

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{dla } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{dla } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Po podstawieniu (rys. 3)

$$u_\alpha = e \delta_{1\alpha} + \eta (\delta_{1\alpha} \cos \varphi + \delta_{2\alpha} \sin \varphi) + u_\alpha^* \quad (14)$$

gdzie

$$\varphi = \omega_w t. \quad (15)$$

Z (11) na podstawie (14) otrzymano równania różniczkowe

$$\beta^2 \frac{\partial^4 u_\alpha^*}{\partial x^4} - \lambda \frac{\partial^4 u_\alpha^*}{\partial x^2 \partial t^2} + \vartheta \frac{\partial^2 u_\alpha^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\alpha^*}{\partial t^2} - (\gamma + \psi \cos pt) u_\alpha^* + \varrho \cos pt \frac{\partial^2 u_\alpha^*}{\partial t^2} = f_\alpha(x, t), \quad (16)$$

w których

$$f_\alpha(x, t) = \eta (\omega_w^2 + \gamma + \psi \cos pt) (\delta_{1\alpha} \cos \omega_w t + \delta_{2\alpha} \sin \omega_w t) + \delta_{1\alpha} (e\gamma + g + \psi \cos pt), \quad (17)$$

$$\gamma = \frac{A_1}{\mu}, \quad \psi = \frac{A_2}{\mu}, \quad \beta^2 = \frac{S_w}{\alpha \mu}, \quad \lambda = \frac{k S_w}{\alpha AG}, \quad \vartheta = \frac{k S_w A_1}{\alpha \mu AG}, \quad \varrho = \frac{k S_w A_2}{\alpha \mu AG}. \quad (18)$$

Wpływ siły tnącej może być pominięty w wirnikach charakteryzujących się dużym stosunkiem długości do średnicy. Wówczas równania (16) przyjmą następującą postać

$$\beta^2 \frac{\partial^4 u_\alpha^*}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u_\alpha^*}{\partial t^2} - (\gamma + \psi \cos pt) u_\alpha^* = f_\alpha(x, t). \quad (19)$$

Są to równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych, niejednorodne, o zmiennych współczynnikach. Równania te rozwiązano metodą rozdzielenia zmiennych (Fouriera). Zgodnie z tą metodą rozwiązanie wyrażono w postaci

$$u_{\alpha}^{*}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \Phi_{\alpha n}(t). \quad (20)$$

Wskaźnik n oznacza odpowiedni rząd drgań. Funkcje $X_n(x)$ są to tzw. funkcje własne. Można je otrzymać rozwiązując równania różniczkowe (19) przy założeniu $f_{\alpha}(x, t) = 0$.

Po podstawieniu (20) do (19) gdzie $f_{\alpha}(x, t) = 0$, rozdzieleniu zmiennych i wprowadzeniu parametru k_n otrzymuje się

$$\frac{X_n^{IV}(x)}{X_n(x)} = - \frac{\ddot{\Phi}_{\alpha n}(t) - (\gamma + \psi \cos pt) \Phi_{\alpha n}(t)}{\beta^2 \Phi_{\alpha n}(t)} = k_n^4,$$

co prowadzi do otrzymania dwóch równań warunkowych

$$\begin{aligned} X_n^{IV}(x) - k_n^4 X_n(x) &= 0, \\ \ddot{\Phi}_{\alpha n}(t) + (k_n^4 \beta^2 - \gamma - \psi \cos pt) \Phi_{\alpha n}(t) &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Pierwsze z tych równań jest takie same jak w przypadku silników wielobiegunowych, w których przy stałym przesunięciu wirnika występuje stała siła naciągu magnetycznego.

Drugie z równań (21) można zapisać w postaci

$$\ddot{\Phi}_{\alpha n}(t) + (\omega_n^2 - \psi \cos pt) \Phi_{\alpha n}(t) = 0 \quad (22)$$

gdzie

$$\omega_n^2 = k_n^4 \beta^2 - \gamma, \quad (23)$$

ω_n — jest częstością n -tego rzędu drgań swobodnych wirnika dla przypadku gdy siła naciągu magnetycznego nie zawiera składnika okresowego (jak w silnikach wielobiegunowych).

Obliczenie parametru k_n a więc i częstości drgań swobodnych ω_n przedstawiono we wcześniejszych pracach autora, w związku z czym nie będziemy się tutaj tym zajmowali (prace [7] i [8]). Dokonując podstawienia

$$2\Theta_n = \frac{\psi}{\omega_n^2}$$

można równanie (22) sprowadzić do następującej postaci

$$\ddot{\Phi}_{\alpha n}(t) + \omega_n^2 (1 - 2\Theta_n \cos pt) \Phi_{\alpha n}(t). \quad (24)$$

Ostatecznie otrzymano równanie różniczkowe opisujące drgania wirników silników asynchronicznych dwubiegunowych. Równanie to zawiera dodatkowy składnik $2\Theta_n \cos pt$, który jest równy zeru w przypadku maszyn wielobiegunowych. Opisuje ono tzw. drgania parametryczne. Drgania parametryczne są to drgania układu o zmiennych z czasem parametrach np. zmiennej sztywności, masie lub zmiennym współczynnikiem tłumienia. Przykładem tutaj mogą być dwubiegunowe wirniki turbogeneratorów, które mają zmienną sztywność.

W przypadku wyżej rozważanym zmienna siła naciągu magnetycznego sprawia, że wirnik zachowuje się tak, jak gdyby miał zmienną sztywność. Przy pewnych wartościach parametrów układu i parametrów wymuszenia może mieć miejsce tzw. zjawisko niestaceczności wirnika charakteryzujące się nieograniczonym wzrostem jego ugięcia. Przez

rozwiązanie równania różniczkowego (24) będzie można wyznaczyć obszary niestatecznej pracy wirnika czyli jego obszary niestateczności.

Rozważmy możliwość powstania drgań parametrycznych pierwszej harmonicznej szeregu (20), czyli możliwość istnienia niestatecznych rozwiązań równania

$$\ddot{\Phi}_{\alpha 1}(t) + \omega_1^2(1 - 2\Theta_1 \cos pt)\Phi_{\alpha 1}(t) = 0 \quad (25)$$

Szukamy rozwiązania o okresie $2T$ odpowiadającego granicom pierwszego obszaru niestateczności.

$$\Phi_{\alpha 1}(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{kpt}{2} + b_k \cos \frac{kpt}{2} \right). \quad (26)$$

Po podstawieniu (26) do (25) oraz uwzględnieniu tożsamości trygonometrycznych

$$\begin{aligned} \sin \frac{kpt}{2} \cos pt &= \frac{1}{2} \left[\sin \frac{(k+2)pt}{2} + \sin \frac{(k-2)pt}{2} \right], \\ \cos \frac{kpt}{2} \cos pt &= \frac{1}{2} \left[\cos \frac{(k+2)pt}{2} + \cos \frac{(k-2)pt}{2} \right], \end{aligned} \quad (27)$$

a następnie po przyrównaniu do zera współczynników przy identycznych funkcjach trygonometrycznych $\sin \frac{kpt}{2}$, $\cos \frac{kpt}{2}$ otrzymuje się ednorodne, nieskończone układy równań algebraicznych

$$\left[1 + \Theta_1 - \left(\frac{p}{2\omega_1} \right)^2 \right] a_1 - \Theta_1 a_3 = 0, \quad (28)$$

$$\left[1 - \left(\frac{kp}{2\omega_1} \right)^2 \right] a_k - \Theta_1 (a_{k-2} + a_{k+2}) = 0, \quad k = 3, 5, 7 \dots$$

$$\left[1 - \Theta_1 - \left(\frac{p}{2\omega_1} \right)^2 \right] b_1 - \Theta_1 b_3 = 0. \quad (29)$$

$$\left[1 - \left(\frac{kp}{2\omega_1} \right)^2 \right] b_k - \Theta_1 (b_{k-2} + b_{k+2}) = 0, \quad k = 3, 5, 7 \dots$$

Warunkiem istnienia niezerowych rozwiązań jest zerowanie się odpowiednich wyznaczników charakterystycznych. Dla układu (28)

$$\begin{vmatrix} 1 + \Theta_1 - \left(\frac{p}{2\omega_1} \right)^2 & -\Theta_1 & 0 & 0 & \dots \\ -\Theta_1 & 1 - \left(3 \frac{p}{2\omega_1} \right)^2 & -\Theta_1 & 0 & \dots \\ 0 & -\Theta_1 & 1 - \left(5 \frac{p}{2\omega_1} \right)^2 & -\Theta_1 & \dots \\ 0 & 0 & -\Theta_1 & 1 - \left(7 \frac{p}{2\omega_1} \right)^2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\Theta_1 & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (30)$$

$$\begin{vmatrix}
 1 - \Theta_1 - \left(\frac{p}{2\omega_1}\right)^2 & -\Theta_1 & 0 & 0 & \dots\dots\dots \\
 -\Theta_1 & 1 - \left(3\frac{p}{2\omega_1}\right)^2 & -\Theta_1 & 0 & \dots\dots\dots \\
 0 & -\Theta_1 & 1 - \left(5\frac{p}{2\omega_1}\right)^2 & -\Theta_1 & \dots\dots\dots \\
 0 & 0 & -\Theta_1 & 1 - \left(7\frac{p}{2\omega_1}\right)^2 & \dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots
 \end{vmatrix} = 0. \quad (31)$$

Rozważając kolejno wyznaczniki składające się z n pierwszych wierszy i kolumn $n = 1, 2, 3 \dots$ tzn. wyznaczniki składające się z n pierwszych wyrazów szeregu (26) będzie można zbadać ich miejsce zerowe. Biorąc n dostatecznie duże otrzymamy dowolnie mały błąd wyznaczenia pierwszych wartości i własnych, a więc dowolnie mały błąd wyznaczenia relacji między $\frac{p}{\omega_1}$ oraz Θ_1 wynikających z (30) i (31). W wyniku określenia powyższej

relacji otrzymujemy granice obszaru niestateczności na płaszczyźnie $\left(\Theta_1, \frac{p}{\omega_1}\right)$. W przypadku gdy Θ_1 dąży do zera, warunki (30) i (31) przyjmą postać

$$\left[1 - \left(\frac{p}{2\omega_1}\right)^2\right] \left[1 - \left(3\frac{p}{2\omega_1}\right)^2\right] \left[1 - \left(5\frac{p}{2\omega_1}\right)^2\right] \dots\dots\dots = 0. \quad (32)$$

Z powyższego wynika, że granice obszarów niestateczności wychodzą z punktów

$$\Theta_1 = 0, \quad \frac{p}{\omega_1} = \frac{2}{k}, \quad k = 1, 3, 5. \quad (33)$$

Przeanalizujemy dokładnie obszar odpowiadający $k = 1$, a więc możliwość powstania rezonansu parametrycznego z częstością p zbliżoną do $2\omega_1$, czyli z okresem zmian parametru zbliżonym do połowy okresu drgań swobodnych.

Biorąc tylko jeden wyraz szeregu otrzymamy z (30)

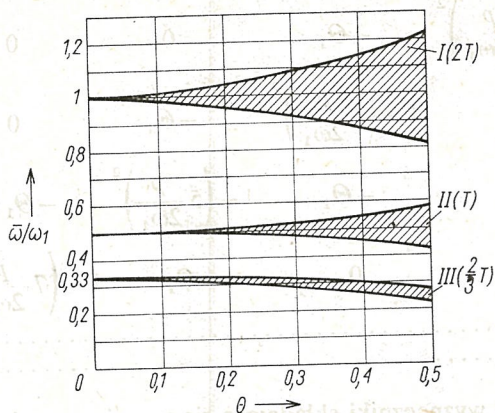
$$1 + \Theta_1 - \left(\frac{p}{2\omega_1}\right)^2 = 0 \quad \text{czyli} \quad \frac{p}{\omega_1} = 2\sqrt{1 + \Theta_1} \quad (34)$$

natomiast z (31) otrzymamy

$$1 - \Theta_1 - \left(\frac{p}{2\omega_1}\right)^2 = 0 \quad \text{czyli} \quad \frac{p}{\omega_1} = 2\sqrt{1 - \Theta_1}. \quad (35)$$

Równania te opisują granice pierwszego obszaru niestateczności i oznaczone są literami $2T$ (rys. 4). Analogicznie poszukujemy rozwiązania o okresie T

$$\Phi_{a1}(t) = b_0 + \sum_{k=2,4,6,\dots}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{kpt}{2} + b_k \cos \frac{kpt}{2} \right).$$



Rys. 4. Obszary niestaceczności ruchu wirnika

Po dokonaniu podobnych operacji jak poprzednio otrzymuje się nieskończone układy równań algebraicznych

$$\left[1 - \left(\frac{p}{\omega_1}\right)^2\right] a_2 - \Theta_1 a_4 = 0, \quad (36)$$

$$\left[1 - \left(\frac{kp}{2\omega_1}\right)^2\right] a_k - \Theta_1 (a_{k-2} + a_{k+2}) = 0, \quad k = 4, 6, \dots$$

$$b_0 - \Theta_1 b_2 = 0,$$

$$\left[1 - \left(\frac{p}{\omega_1}\right)^2\right] b_2 - \Theta_1 (2b_0 + b_4) = 0, \quad (37)$$

$$\left[1 - \left(\frac{kp}{2\omega_1}\right)^2\right] b_k - \Theta_1 (b_{k-2} + b_{k+2}) = 0, \quad k = 4, 6, \dots$$

Warunki istnienia niezerowych rozwiązań układów równań (36) i (37) przyjmą postać

$$\begin{vmatrix} 1 - \left(\frac{p}{\omega_1}\right)^2 & -\Theta_1 & 0 & 0 & \dots \\ -\Theta_1 & 1 - \left(2\frac{p}{\omega_1}\right)^2 & -\Theta_1 & 0 & \dots \\ 0 & -\Theta_1 & 1 - \left(4\frac{p}{\omega_1}\right)^2 & -\Theta_1 & \dots \\ 0 & 0 & -\Theta_1 & 1 - \left(6\frac{p}{\omega_1}\right)^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (38)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\Theta_1 & 0 & 0 \\ -2\Theta_1 & 1 - \left(\frac{p}{\omega_1}\right)^2 & -\Theta_1 & 0 \\ 0 & -\Theta_1 & 1 - \left(2\frac{p}{\omega_1}\right)^2 & -\Theta_1 \\ 0 & 0 & -\Theta_1 & 1 - \left(4\frac{p}{\omega_1}\right)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (39)$$

Dla bardzo małych wartości Θ_1 warunki (38) i (39) przyjmą postać

$$\left[1 - \left(\frac{p}{\omega_1}\right)^2\right] \left[1 - \left(2\frac{p}{\omega_1}\right)^2\right] \left[1 - \left(4\frac{p}{\omega_1}\right)^2\right] \dots = 0. \quad (40)$$

Z powyższego wynika, że granice drugiej grupy obszarów niestateczności wychodzą z punktów

$$\Theta_{1,2}^* = 0, \quad \frac{p}{\omega_1} = \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, 4, \dots \quad (41)$$

Analizując przypadek gdy $p = \omega_1$ otrzymujemy granice drugiego obszaru niestateczności. Ograniczając się w (38) i (39) do dwu wierszy i dwu kolumn otrzymamy

$$\begin{vmatrix} 1 - \left(\frac{p}{\omega_1}\right)^2 & -\Theta_1 \\ -\Theta_1 & 1 - \left(2\frac{p}{\omega_1}\right)^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (42)$$

oraz

$$\begin{vmatrix} 1 & -\Theta_1 \\ -2\Theta_1 & 1 - \left(\frac{p}{\omega_1}\right)^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (43)$$

Stąd granice drugiego obszaru niestateczności są określone wzorami

$$\frac{p}{\omega_1} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{9 + 16\Theta_1^2}}{8}} \quad (44)$$

$$\frac{p}{\omega_1} = \sqrt{1 - 2\Theta_1^2}. \quad (45)$$

Postępując podobnie można opisać trzeci obszar niestateczności.

Przyjmując dla rozwiązania o okresie $2T$ wartość $k = 3$ otrzymujemy następujące warunki

$$\begin{vmatrix} 1 + \Theta_1 - \left(\frac{p}{2\omega_1}\right)^2 & -\Theta_1 \\ -\Theta_1 & 1 - \left(\frac{3}{2}\frac{p}{\omega_1}\right)^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (46)$$

oraz

$$\begin{vmatrix} 1 - \Theta_1 - \left(\frac{p}{2\omega_1}\right)^2 & -\Theta_1 \\ -\Theta_1 & 1 - \left(\frac{3}{2} \frac{p}{\omega_1}\right)^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (47)$$

Rozwiązując wyznaczniki (46) i (47) otrzymamy równania opisujące trzeci obszar niestateczności.

$$\frac{p}{\omega_1} = \sqrt{\frac{2}{9}(10 + 9\Theta_1 - \sqrt{117\Theta_1^2 + 144\Theta_1 + 64})} \quad (48)$$

$$\frac{p}{\omega_1} = \sqrt{\frac{2}{9}(10 - 9\Theta_1 - \sqrt{117\Theta_1^2 - 144\Theta_1 + 64})}. \quad (49)$$

Drugi i trzeci obszar niestateczności przedstawiono poglądowo na rys. 4 i oznaczono literami T i $\frac{2}{3}T$.

Analizując wyprowadzone zależności można dojść do wniosku, że kolejne obszary niestateczności są coraz węższe. Najważniejszym (najbardziej niebezpiecznym) jest pierwszy obszar (obszar główny) odpowiadający rozwiązaniu o okresie $2T$ i leżący w pobliżu $p = 2\omega_1$. Identyczne wyniki otrzymamy analizując możliwość powstania rezonansu parametrycznego wyższych harmonicznych, ale w tym przypadku częstość drgań swobodnych ω_n będzie odpowiednio wyższa, a więc wyższa będzie częstość p odpowiadająca możliwości powstania rezonansu parametrycznego. Podobnie ulegnie zmniejszeniu współczynnik Θ_n , a więc obszar niestateczności ulegnie zawężeniu.

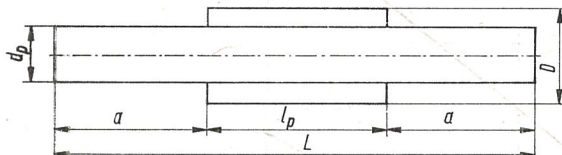
4. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Dla przykładu przeprowadzono analizę stateczności wirnika składającego się z wału o stałej średnicy i symetrycznie umieszczonego na nim pakietu (rys. 5). Kształt wykreju blachy przedstawiono na rys. 6. Do obliczeń przyjęto wirnik o wymiarach identycznych jak w [7] i [8]. $L = 0,7$ m, $l_p = 0,375$ m, $d_p = 0,05$ m, $D = 0,08$ m, $E_w = 2,0601 \cdot 10^5$ MPa, $E_p = 3,37464 \cdot 10^3$ MPa, $\alpha = 0,9324$, $B_n = 0,675$ T, $k_c = 1,25$, $\delta = 5 \cdot 10^{-4}$ m, $\mu_o = 4 \cdot 10^{-7}$ Hm $^{-1}$, $\xi = 0,35$, ciężar właściwy materiału wirnika przyjęto równy $0,076518$ MNm $^{-3}$, $\eta = 4 \cdot 10^{-4}$ m, $e = 0$, $M_1 = M_2 = 0$.

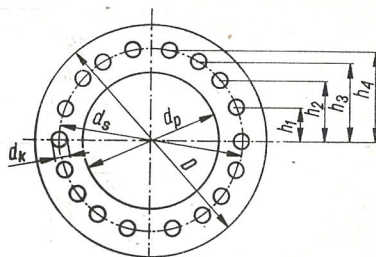
Z zależności (10) otrzymano

$$A_1 = 9,81 \text{ MPa}, \quad A_2 = 1,963 \text{ MPa}.$$

W pierwszym rzędzie należy wyznaczyć podstawową częstość drgań swobodnych wirnika ω_1 dla przypadku gdy $A_2 = 0$ (a więc dla przypadku maszyny wielobiegunowej). Z wyników obliczeń numerycznych przedstawionych w [7] i [8] wynika, że przy $A_1 = 9,81$ MPa częstość drgań swobodnych wirnika wynosi $\omega_1 = 726,89311$ s $^{-1}$. Zgodnie z (18) otrzymuje się $\psi = 50150,225$ s $^{-2}$, $\Theta_1 = 0,04746$. Na podstawie wzorów opisujących obszary niestateczności wirnika wykonano wykresy zależności $\frac{\bar{\omega}}{\omega_1} = f(\Theta_1)$, gdzie $\bar{\omega} = \frac{1}{2}p = \omega_p - \omega_w$.

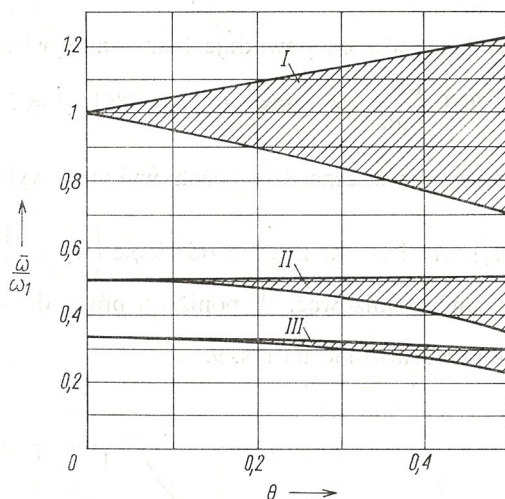


Rys. 5. Model wirnika do obliczeń



Rys. 6. Wymiary wykoju blachy pakietu wirnika

$d_p = 50 \text{ mm}$	$h_1 = 13 \text{ mm}$
$d_s = 70 \text{ mm}$	$h_2 = 23 \text{ mm}$
$D = 80 \text{ mm}$	$h_3 = 30 \text{ mm}$
$d_k = 7 \text{ mm}$	$h_4 = 33 \text{ mm}$

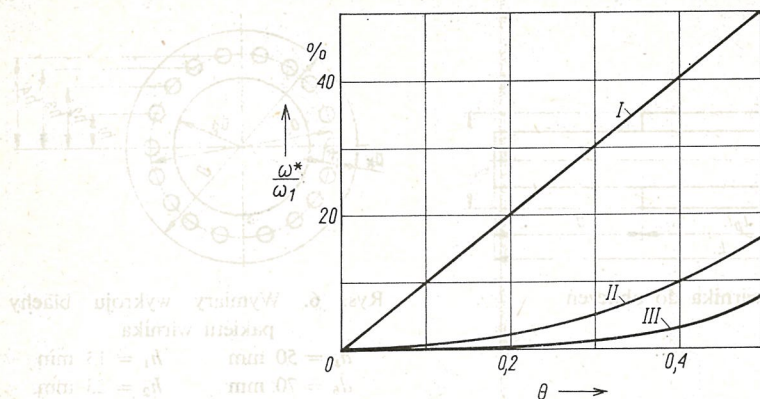


Rys. 7. Wykresy obszarów niestateczności ruchu wirnika

Przyjęto zakres zmienności współczynnika θ_1 od 0 do 0,5. Powyższe wykresy przedstawiono na rys. 7. Z rysunku tego wynika, że najszerszy jest pierwszy obszar niestateczności. Kolejne obszary są coraz wązsze. Jest to bardziej widoczne na rys. 8 przedstawiającym wykres względnej szerokości danego obszaru $\frac{\omega^*}{\omega_1}$ w funkcji współczynnika θ_1 .

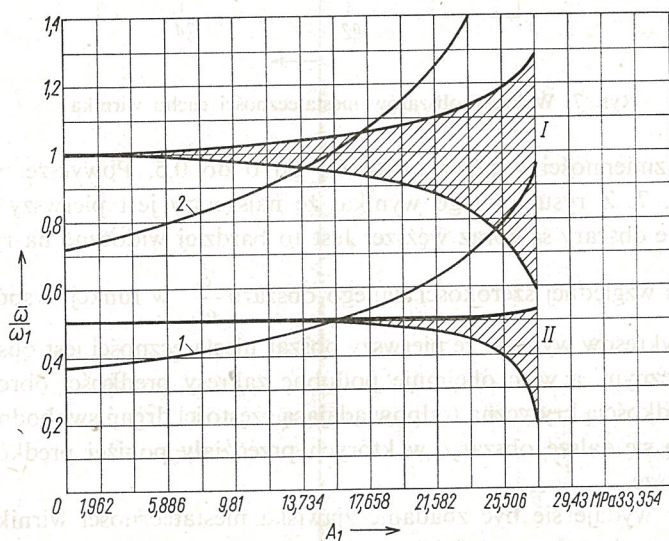
Z powyższych wykresów wynika, że pierwszy obszar niestateczności jest obszarem w przybliżeniu symetrycznym, a więc obejmuje podobne zakresy prędkości obrotowej wirnika nad jak i pod prędkością krytyczną (odpowiadającą częstości drgań swobodnych). Odmienne przedstawiają się dalsze obszary, w których przedziały poniżej prędkości krytycznej są znacznie większe.

Interesującym wydaje się być zbadanie zjawiska niestateczności wirnika przy takich stanach dynamicznych maszyny jak jej rozruch i hamowanie. Założmy, że uruchamiamy silnik i doprowadzamy wirnik do prędkości kątowej ω_w . Po uzyskaniu tej prędkości



Rys. 8. Wykresy względnej szerokości poszczególnych obszarów niestateczności

dokonyjemy przełączenia biegunów co powoduje hamowanie wirnika. Przyjmijmy dane $\omega_w = 304,58 \text{ s}^{-1}$ ($n_w = 2910 \frac{\text{obr}}{\text{min}}$ przy poślizgu $s = 3\%$), $f = 50 \text{ Hz}$. Na podstawie funkcji opisujących obszary niestateczności można wykonać wykresy zależności $\frac{\bar{\omega}}{\omega_1} = f(A_1)$ bądź $\frac{\bar{\omega}}{\omega_1} = f(A_1)$. A_1 i A_2 są zależne od siebie ($A_2 = \frac{1}{5} A_1$), a więc obojętne jest którą zależność będziemy analizować. W poniższej pracy dokonano analizy funkcji $\frac{\bar{\omega}}{\omega_1} = f(A_1)$. Wykresy te przedstawiono na rys. 9.



Rys. 9. Obszary niestateczności ruchu wirnika podczas rozruchu i hamowania

Krzywa 1 dotyczy początku rozruchu i końca hamowania, natomiast krzywa 2 dotyczy początku hamowania. Punkty przecięcia powyższych krzywych z liniami opisującymi granice obszarów niestateczności określają przedziały wartości naciągu magnetycznego (A_1), w których ma miejsce niestateczność. Należy tutaj podkreślić, że powyższe rozważania dotyczą odcinków czasu, w których wirnik posiada stałą prędkość kątową. W związku z tym analizowano wybrane stany jak początek rozruchu, koniec hamowania, początek hamowania. Przy dalszym rozwijaniu podjętego tematu należałoby dokonać analizy stateczności dynamicznej wirnika obracającego się ruchem zmiennym (np. jednostajnie przyspieszonym lub opóźnionym).

5. WNIOSKI

1. Przebieg funkcji opisującej siłę naciągu magnetycznego w czasie jest istotny z punktu widzenia stateczności wirników silników asynchronicznych.

2. Stały względem czasu współczynnik naciągu magnetycznego w silnikach wielobiegunowych powoduje, że przy danej formie drgań istnieje jedna wartość wymuszenia (jedna wartość tzw. krytycznej prędkości kątowej wirnika) powodująca niestateczność poprzecznego ruchu wirnika (rezonans).

3. W silnikach asynchronicznych, dwubiegunowych współczynnik naciągu magnetycznego jest zmienny w czasie co powoduje odmienny jakościowo przebieg zjawiska niestateczności wirnika w porównaniu z silnikami wielobiegunowymi. Zmienny w czasie naciąg magnetyczny powoduje tzw. drgania parametryczne wirnika.

4. W przypadku silników dwubiegunowych można mówić o drganiach parametrycznych i odpowiadających im obszarach niestateczności poprzecznego ruchu wirnika. Istnieje tutaj szereg przedziałów częstości wymuszenia (prędkości kątowych wirnika) w których pojawia się niestateczność.

5. W zależności od wartości częstości wymuszenia można mówić o pierwszym, drugim i dalszych obszarach niestateczności. Najważniejszym a zarazem najbardziej niebezpiecznym jest obszar pierwszy obejmujący największy zakres częstości wymuszeń powodujących niestateczność. Drugi, trzeci i dalsze obszary są węższe a więc i mniej niebezpieczne.

6. Pierwszy obszar niestateczności jest obszarem w przybliżeniu symetrycznym i obejmuje podobne zakresy częstości wymuszenia nad i pod częstością rezonansową wirnika. Drugi, trzeci i dalsze obszary są niesymetryczne przy których zakresy poniżej częstości rezonansowej są znacznie większe.

7. Z uwagi na istnienie obszarów niestateczności można mówić o krytycznych przedziałach współczynnika naciągu magnetycznego (A_1, A_2) a tym samym o szczelinach magnetycznych (δ), przy których wirnik traci stateczność ruchu poprzecznego.

LITERATURA

1. A. E. Aleksiejew, *Konstrukcja maszyn elektrycznych*, PWT, Warszawa, 1953.
2. M. Dąbrowski, *Konstrukcja maszyn elektrycznych*. Warszawa, WNT, 1965.
3. F. M. Dimentberg, *Izgibnyje kolebanija wuszczajuszczichsja wałow*, Moskwa, Izdat. AN SSSR, 1953.

4. Z. Dźygadło, S. Kaliski, L. Solarz, E. Włodarczyk, *Drgania i fale*. Warszawa, WAT, 1965.
5. A. Kostowski, *Analiza zjawisk promieniowego naciągu magnetycznego w maszynach asynchronicznych 2-biegunowych*. Praca doktorska. Wrocław 1967.
6. T. Mikusiński, *Rachunek operatorów*, Warszawa, PTM, 1953.
7. W. Morzuch, *Analiza dynamiczna wirników silników asynchronicznych klatkowych*, Praca doktorska. Wrocław, 1980.
8. W. Morzuch, *Analiza dynamiczna wirników silników asynchronicznych klatkowych*. Archiwum Elektrotechniki. Tom XXX, z. 115—1/1981.
9. W. Nowacki, *Mechanika budowli*. Warszawa, PWN, 1960.
10. M. Suseł, *Wpływ pakietu na sztywność wirników w silnikach asynchronicznych*. Praca doktorska. Wrocław, 1973.

W. MORZUCH

PARAMETRIC VIBRATIONS OF CAGE ROTORS IN TWO-POLE ASYNCHRONOUS MOTORS

Summary

The purpose of the paper is to present results of an analysis of dynamic rigidity of cage rotors in two-pole asynchronous motors. The model selected for the study comprised a rotor with continuous mass distribution and variable rigidity. On the basis of motion equations differential equations have been obtained, which connect dynamic torsion of the rotor with time and space. Eventually a set of non-uniform, partial differential equations has been obtained with varying coefficients which are solved with the use of the method of separation of variables (Fourier's method). The solution is expressed as an infinite series of two functions: $X_n(x)$, depending on the spatial coefficient (x), and $\Phi_{an}(t)$ depending on time (t). The function $\Phi_{an}(t)$ turns out to be describable with an ordinary differential equation containing periodically changing coefficients. Upon an analysis of the solution, domains of stable and unstable operation of the rotor have been distinguished. In the second part of the paper an analysis of specific fields of instability has been undertaken referring to various dynamic states of the rotor. The possibility has been mentioned of determining the ranges of the speed of the rotor revolution at which instability occurs.

W. MORZUCH

VIBRATION PARAMETRIQUE DES ROTORS A CAGE D'ECUREUIL DES MOTEURS ASYNCHRONES BIPOLAIRES

Résumé

Le travail s'est posé pour but d'analyser la stabilité dynamique des rotors à cage d'écureuil des moteurs asynchrones bipolaires. Dans l'analyse on s'est servi d'un modèle du rotor à la répartition uniforme de la masse et à rigidité variable. A partir de équations du mouvement, on a obtenu des équations différentielles liant les flexions dynamiques du rotor à l'espace et le temps. Comme résultat on a obtenu les équations aux dérivées partielles hétérogènes, à coefficients variables, que l'on a résolues en appliquant la méthode de la répartition des variables (méthode de Fourier). Par la suite, la solution s'est présentée en forme d'une série infinie de deux fonctions: $X_n(x)$ dépendant de la coordonnée spatiale (x), et $\Phi_{an}(t)$ dépendant du temps (t). Les fonctions $\Phi_{an}(t)$ se sont avérées décrites par une fonction différentielle ordinaire aux coefficients variants périodiquement. L'analyse de sa solution a permis de distinguer les régions dites stables et instables du travail du rotor. La suivante partie du travail contient l'analyse des régions particulières de l'instabilité des divers états dynamiques du rotor. On a signalé la possibilité d'indiquer les écarts de vitesses de rotation dans lesquels paraît l'instabilité.

W. MORZUCH

PARAMETRISCHE SCHWINGUNGEN DER KÄFIGMOTOREN
ZWEIPOLIGER ASYNCHRONMOTOREN

Zusammenfassung

Die Aufgabe der Bearbeitung beruhte auf der Durchführung einer Analyse der dynamischen Stabilität von Käfigmotoren, zweipoliger Asynchronmotoren. Als Grundlage der Analyse wurde ein Rotormodell mit kontinuierlicher Masseverteilung und veränderlicher Steifheit angenommen. Auf Grund der Bewegungsgleichungen wurden Differentialgleichungen gewonnen, die die dynamischen Rotorbiegungen mit Raum- und Zeitfaktoren in Verbindung bringen. Im Endergebnis wurden partielle und heterogene Differentialgleichungen mit veränderlichen Faktoren gewonnen, die mittels der Verteilungsmethode der Veränderlichen (Fourier-Methode) gelöst worden sind. Daraufhin wurde die Lösung in Form einer unendlichen Reihe zweier Funktionen ausgedrückt: $X_n(x)$ — von der Raumkoordinate (x) abhängiger Faktor und $\Phi_{an}(t)$ — von der Zeit (t) abhängiger Faktor. Die Funktionen $\Phi_{an}(t)$ erwiesen sich als beschreibbar mit gewöhnlicher Differentialgleichung mit periodisch veränderlichen Faktoren. Bei der Analyse der Lösung dieser Gleichung wurden sog. Bereiche des stabilen und instabilen Rotorbetriebes ausgesondert. Im weiteren wurde eine Analyse der einzelnen Bereiche der Instabilität bei verschiedenen dynamischen Zuständen des Rotors durchgeführt. Es wurde auf die Möglichkeit hingewiesen, die Intervalle der Drehgeschwindigkeit zu bestimmen, bei denen sich die Instabilität einstellt.

В. МОЖУХ

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ РОТОРОВ С БЕЛИЧЬЕЙ КЛЕТКОЙ
ДВУХСКОРОСТНЫХ АСИНХРОННЫХ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЕЙ

Резюме

Проведен анализ динамической устойчивости роторов двухскоростных асинхронных электродвигателей с обмоткой типа беличья клетка. При анализе использована модель с непрерывным распределением массы и переменной жесткостью. Из уравнений движения выведены дифференциальные уравнения динамических изгибов в пространстве и времени. В результате получены частные неоднородные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами решенные методом разделения переменных Фурье. Уравнения представлены в форме бесконечного ряда двух функций: $X_n(x)$ зависящей от пространственной координаты x и $\Phi_{an}(t)$ зависящей от времени (t). Функции $\Phi_{an}(t)$ оказались быть описанными обыкновенными дифференциальными уравнениями с периодически переменными коэффициентами. Анализируя его решения выделены так называемые диапазоны устойчивого и неустойчивого режимов работы ротора. В заключение проведен анализ отдельных областей неустойчивости в различных динамических состояниях ротора. Показана возможность определения диапазонов скоростей вращения, при которых появляется неустойчивость.

Synthesis of DC-AC thyristor converters^{*)}

KAZIMIERZ MIKOŁAJUK (WARSZAWA)

Institute of Electrical Theory and Measurement, Politechnika Warszawska

WITOLD S. KROPACZ (WARSZAWA)

Department of Fundamental Researches in Electrotechnic

Instytut Elektrotechniki, Warszawa

The paper received 1985.03.20

Realizability conditions of periodic waveform in passive switched circuits are presented. Formulae for an identification of state matrices in switched circuits are derived. As input data time functions of excitation and response are chosen. Six general transformer structures of 1-port thyristor converters has been obtained as a result of a synthesis method. The synthesis method presented can be applied to create new thyristors and thyristor arrangements, particularly thyristor compensators.

1. INTRODUCTION

Synthesis methods of pasive switched circuits have been presented in papers [1]–[4]. These methods enable one to create thyristor and transistor switched structures. The structures are based on a multiport transformer with switched windings. As input data time functions of excitations and responses are chosen. The time functions can be given in a discrete or continuous form. The achieved synthesis method are based on the state space approach. The first synthesis step is concerned with determination of a sequence of minimal realizations $\{A_k, B_k, C_k, D_k\}$. In the cited works the least square error criterion is applied to determine a sequence of minimal realizations. Additionally, the minimal realizations must be passive and reciprocal. It is possible to find out a circuit structure when a sequence od minimal realizations is given. The circuit structures contain multiport transformers with switched windings. A design of a switched circuit described by the sequence of minimal realizations is the second synthesis step. If switches have to be replaced by thyristors the third synthesis step is required. In the third step commutation conditions must be analized throughly.

The first aim of the presented paper is to investigate properties of passive switched circuits. The second aim is to create general transformer structures of d.c.—a.c. thyristor

^{*)} The work reported in this paper was realized as a part of the government-sponsored project 05.5A „Chosen fundamental problems in electrical power engineering”.

convectors with two switchings during a period. To achieve these aims the synthesis methods presented in the cited papers are applied.

In Section 2 realizability conditions of periodic waveforms in passive switched circuits are presented. The formulae for identification of matrices A_k , B_k , C_k and D_k are derived in Section 3. Section 4 and Section 5 contain RL and RC inverter structures. Section 6 and Section 7 are devoted to RLC inverters of rank 2 and $2k$, respectively. Four Appendices describe a multiport transformer and immittance synthesis with the use of such a transformer.

2. REALIZABILITY OF PERIODIC SYMMETRICAL WAVEFORMS

2.1. INVERTER AND RECTIFIER WORK

Let us assume that vector time functions $u(t)$, $y(t)$, and $x(t)$ denote input function, output function, and state function, respectively. The vector $u(t)$ and the vector $y(t)$ are of the same dimension, namely $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^m$, and dimension of the state vector is n , $x(t) \in R^n$. Components of the vectors $u(t)$ and $y(t)$ are port voltages and currents of a dynamical m -port. If a component u_j of the vector $u(t)$ is a current of the port j then the component y_j of the vector $y(t)$ is a voltage of the port j . If u_j is a voltage of the port j than y_j is a current of the port j . It means that input function $u(t)$ and output function $y(t)$ form a hybrid or immittance description of the m -port. All vector functions $u(t)$, $y(t)$, $x(t)$ are T -periodic, i.e.

$$u(t) = u(t+T), \quad (1.1)$$

$$y(t) = y(t+T), \quad (1.2)$$

$$x(t) = x(t+T). \quad (1.3)$$

Let the instant $t = 0$ be fixed and the period T be divided into two intervals $\langle 0, T/2 \rangle$ and $\langle T/2, T \rangle$.

A function triplet $u(t)$, $y(t)$, $x(t)$ can fulfil one of the following eight symmetry conditions

$$\text{i)} \quad u(t+T/2) = u(t), \quad y(t+T/2) = y(t), \quad x(t+T/2) = -x(t) \quad (2.1)$$

$$\text{ii)} \quad u(t+T/2) = -u(t), \quad y(t+T/2) = -y(t), \quad x(t+T/2) = x(t) \quad (2.2)$$

$$\text{iii)} \quad u(t+T/2) = u(t), \quad y(t+T/2) = -y(t), \quad x(t+T/2) = -x(t) \quad (2.3)$$

$$\text{iv)} \quad u(t+T/2) = -u(t), \quad y(t+T/2) = y(t), \quad x(t+T/2) = -x(t) \quad (2.4)$$

$$\text{v)} \quad u(t+T/2) = u(t), \quad y(t+T/2) = -y(t), \quad x(t+T/2) = x(t) \quad (2.5)$$

$$\text{vi)} \quad u(t+T/2) = -u(t), \quad y(t+T/2) = y(t), \quad x(t+T/2) = x(t) \quad (2.6)$$

$$\text{vii)} \quad u(t+T/2) = -u(t), \quad y(t+T/2) = -y(t), \quad x(t+T/2) = -x(t) \quad (2.7)$$

$$\text{viii)} \quad u(t+T/2) = u(t), \quad y(t+T/2) = y(t), \quad x(t+T/2) = x(t) \quad (2.8)$$

We shall investigate which of the eight symmetrical waveforms are realizable in passive reciprocal switched circuits. Let us assume that in each halfwave l switchings are performed. Intervals between the switchings are $T_1, T_2, \dots, T_l$. During each of these intervals a system remains linear and time-invariant.

In the first half-wave $t \in \langle 0, T/2 \rangle$ a system is described by a sequence of minimal realizations $\{A_k, B_k, C_k, D_k\}$, $k = 1, 2, \dots, l$.

In the second half-wave $t \in \langle T/2, T \rangle$ a system is described by a sequence of minimal realizations $\{A'_k, B'_k, C'_k, D'_k\}$, $k = 1, 2, \dots, l$. Therefore, in the first half-wave a system is described by the state equations

$$\dot{x}(t) = A_k x(t) + B_k u(t) \quad \text{for } 0 \leq t \leq T/2 \quad (3.1)$$

$$y(t) = C_k x(t) + D_k u(t) \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (3.2)$$

In the second half-wave a system is described by the following state equations

$$\dot{x}(t) = A'_k x(t) + B'_k u(t) \quad \text{for } T/2 \leq t \leq T, \quad (4.1)$$

$$y(t) = C'_k x(t) + D'_k u(t) \quad k = 1, 2, \dots, l. \quad (4.2)$$

Now, we shall consider each symmetry condition given in (2). Let us start with case i/. Eqs. 3 and 4 give relations

$$A_k x(t) + B_k u(t) = A'_k x(t) - B'_k u(t), \quad (5.1)$$

$$C_k x(t) + D_k u(t) = -C'_k x(t) + D'_k u(t). \quad (5.2)$$

Hence $A'_k = A_k$, $B'_k = -B_k$, $C'_k = -C_k$, $D'_k = D_k$ for $k = 1, 2, \dots, l$ or

$$\{A'_k, B'_k, C'_k, D'_k\} = \{A_k, -B_k, -C_k, D_k\} \quad (6)$$

Definition 1: The kind of system operation with an input function $u(t+T/2) = u(t)$ and switchings realizing condition (6) can be classified as inverter operation.

Consideration of the case ii) leads to the same conditions as in (6).

Definition 2: The kind of system operation with an input function $u(t+T/2) = -u(t)$ and switchings realizing conditions (6) can be classified as rectifier operation.

Cases from iii) to viii) lead to the following conditions

$$\text{iii)} \quad \{A'_k, B'_k, C'_k, D'_k\} = \{A_k, -B_k, C_k, -D_k\} \quad (7.1)$$

$$\text{iv)} \quad \{A'_k, B'_k, C'_k, D'_k\} = \{A_k, B_k, -C_k, -D_k\} \quad (7.2)$$

$$\text{v)} \quad \{A'_k, B'_k, C'_k, D'_k\} = \{A_k, B_k, -C_k, -D_k\} \quad (7.3)$$

$$\text{vi)} \quad \{A'_k, B'_k, C'_k, D'_k\} = \{A_k, -B_k, C_k, -D_k\} \quad (7.4)$$

$$\text{vii)} \quad \{A'_k, B'_k, C'_k, D'_k\} = \{A_k, B_k, C_k, D_k\} \quad (7.5)$$

$$\text{viii)} \quad \{A'_k, B'_k, C'_k, D'_k\} = \{A_k, B_k, C_k, D_k\} \quad (7.6)$$

One of the passivity conditions given in (A.2) is $D + D^t \geq 0$. It means that matrix $D + D^t$ must be a positive semidefinite matrix. If $D + D^t \geq 0$ then $-D - D^t \leq 0$. Therefore, from (7.1) to (7.4) one may deduce that the cases iii), iv), v), and vi) may only be realized by an active circuit. From (7.5) and (7.6) it follows that the cases vii) and viii) do not require switching at the instant $T/2$. The system for $T/2 \leq t \leq T$ is the same as for $0 \leq t \leq T/2$.

Conclusion 1: With the exception of the trivial cases vii) and viii) $u(t-T/2) = u(t)$, $y(t-T/2) = y(t)$, $x(t-T/2) = x(t)$ and $u(t-T/2) = -u(t)$, $y(t-T/2) = -y(t)$, $x(t-T/2) = -x(t)$ only two of remaining six cases can be realized in passive circuits. Namely:

— the inverter case

$$u(t-T/2) = u(t), \quad y(t-T/2) = y(t), \quad x(t-T/2) = -x(t)$$

— the rectifier case

$$u(t-T/2) = -u(t), \quad y(t-T/2) = -y(t), \quad x(t-T/2) = x(t)$$

2.2. UNIQUE STEADY-STATE RESPONSE

Theorem 1: Let sequences of matrices A_k , A'_k and B_k , B'_k for $k = 1, 2, \dots, l$ fulfil conditions

$$A_k = A'_k \quad (8.1)$$

$$B_k = -B'_k \quad (8.2)$$

and an input function be $T/2$ — periodic, i.e. $u(t-T/2) = u(t)$ for $t \in (-\infty, \infty)$. Let at least during the one time-invariability interval T_k the circuit remains dissipative. Then a periodic state vector fulfils condition

$$x(0) = -x(T/2) \quad (9)$$

Proof: State vectors at the ends of each interval T_k can be expressed according to relations:

for the first half-wave $0 \leq t \leq T/2$

$$x(T_k) = e^{A_k T_k} x(T_{k-1}) + \int_0^{T_k} e^{A_k(t_k-\tau)} B_k u(\tau) d\tau \quad (10)$$

for the second half-wave $T/2 \leq t \leq T$

$$x'(T_k) = e^{A_k T_k} x'(T_{k-1}) + \int_0^{T_k} e^{A_k(t_k-\tau)} B_k u(\tau) d\tau \quad (11)$$

where $x'(t) = x(t-T/2)$.

Adding two sides of (10) and (11), eliminating variables $x(T_1)$, $x(T_2)$, ..., $x(T_{l-1})$, $x'(T_1)$, $x'(T_2)$, ..., $x'(T_{l-1})$, applying continuity condition of state variable $x'(0) = x(T/2)$ and periodicity condition $x'(T/2) = x(0)$ gives

$$e^{A_1 T_1} e^{A_2 T_2} \dots e^{A_l T_l} [x(0) + x(T/2)] = x(0) + x(T/2) \quad (12)$$

Due to assumed dissipativity

$$e^{A_1 T_1} e^{A_2 T_2} \dots e^{A_l T_l} \neq I \quad (13)$$

Therefore, the unique solution of (12) is $x(0) = -x(T/2)$.

Conclusion 2: For all initial states and for all period input functions such that $u(t-T/2) = u(t)$ a dissipative circuit with switchings realizing a sequence

$$\{A'_k, B'_k, C'_k, D'_k\} = \{A_k, -B_k, -C_k, D_k\}$$

for $k = 1, 2, \dots, l$ reaches in steady state unique periodic state such that $x(T/2) = -x(0)$. Hence such circuit is asymptotically stable.

Theorem 2: Let sequences of matrices A_k, A'_k and B_k, B'_k for $k = 1, 2, \dots, l$ fulfil conditions (8) and the input function be T -periodic and symmetrical i.e. $u(t - T/2) = -u(t)$. Let at least during the one time-invariability interval T_k a circuit remains dissipative. Then a periodic state vector fulfils condition

$$x(0) = x(T/2) \quad (14)$$

Conclusion 3: For all initial states and for all T -periodic input functions such that $u(t - T/2) = -u(t)$ a dissipative circuit with switchings realizing a sequence

$$\{A'_k, B'_k, C'_k, D'_k\} = \{A_k, -B_k, -C_k, D_k\}$$

for $k = 1, 2, \dots, l$ reaches in steady state unique periodic state such that $x(T/2) = x(0)$.

The theorems and conclusions given above are useful for identification of minimal realizations based on input and output functions.

3. IDENTIFICATION BASED ON SYMMETRICAL FUNCTIONS

Assume that a circuit is switched two times during the period T (i.e. $l = 1$) at instants $t = 0$ and $t = T/2$. It follows from (6) that during the first interval $0 \leq t \leq T/2$ a circuit is described by minimal realization $\{A, B, C, D\}$ and during the second interval $T/2 \leq t \leq T$ the circuit is described by minimal realization $\{A, -B, -C, D\}$. Therefore, in the first interval the circuit is described by the state equations

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (15.1)$$

$$xy(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (15.2)$$

i) Inverter operation i.e. $u(t + T/2) = u(t)$, $y(t + T/2) = y(t)$. Applying properties (9) and (15.2) for instants $t = 0$ and $t = T/2$ gives

$$D[u(0) + u(T/2)] = y(0) + y(T/2). \quad (16)$$

For a special case when dimension of the vectors $u(t)$ and $y(t)$ ($m = 1$) it follows that

$$D = \frac{y(0) + y(T/2)}{u(0) + u(T/2)}. \quad (17)$$

Differentiating (15.2) gives

$$\dot{y}(t) = C\dot{x}(t) + D\dot{u}(t) = CAx(t) + CBu(t) + D\dot{u}(t) \quad (18)$$

Again applying properties (9) and (18) for switching instants gives

$$CB[u(0) + u(T/2)] = \dot{y}(0) + \dot{y}(T/2) - D[\dot{u}(0) + \dot{u}(T/2)] \quad (19)$$

The next differentiation of (18) and repetition of the operation given above leads to the equation

$$CAB[u(0) + u(T/2)] = \ddot{y}(0) + \ddot{y}(T/2) - CB[\dot{u}(0) + \dot{u}(T/2)] - D[\ddot{u}(0) + \ddot{u}(T/2)] \quad (20)$$

and generally

$$\begin{aligned} CA^k B[u(0) + u(T/2)] &= y^{(k+1)}(0) + y^{(k+1)}(T/2) - CA^{k-1} B[u^{(1)}(0) + \\ &+ u^{(1)}(T/2)] + \dots - CB[u^{(k)}(0) + u^{(k)}(T/2)] + \\ &- D[u^{(k+1)}(0) + u^{(k+1)}(T/2)]. \end{aligned} \quad (21)$$

The matrices CB , CAB , CA^2B , ... which occur in (21) are known as Markov parameters. Knowing a sequence of Markov parameters it is possible to calculate matrices A , B , C . For d.c. input function $u(t) = U$, (16) and (21) can be reduced to the forms

$$DU = [y(0) + y(T/2)]/2 \quad (22)$$

$$CA^kBU = [y^{(k+1)}(0) + y^{(k+1)}(T/2)]/2 \quad \text{for } k = 0, 1, \dots \quad (23)$$

When dimension of vectors U and $y(t)$ is equal to 1 (22) and (23) become

$$D = [y(0) + y(T/2)]/2U \quad (24)$$

$$CA^kB = [y^{(k+1)}(0) + y^{(k+1)}(T/2)]/2U \quad \text{for } k = 0, 1, \dots \quad (25)$$

ii) Rectifier operation i.e. $u(t+T/2) = -u(t)$, $y(t+T/2) = -y(t)$. For rectifier operation property (14) is valid. Using this property it is possible to obtain equations similar to (22) and (23). And so

$$D[u(0) - u(T/2)] = y(0) - y(T/2), \quad (26)$$

$$CA^kB[u(0) - u(T/2)] = y^{(k+1)}(0) - y^{(k+1)}(T/2) +$$

$$- \sum_{i=0}^{k-1} \{CA^iB[u^{(k-i)}(0) - u^{(k-i)}(T/2)]\} - D[u^{(k+1)}(0) - u^{(k+1)}(T/2)]. \quad (27)$$

Matrices $\{A, B, C, D\}$ can be determined with the use of (20), (21) or (26), (27). But we are looking for passive and reciprocal realizations. Hence it is necessary to take into consideration additional restraints: passivity criterion (A.2) and reciprocity criterion (A.3).

Further considerations refer only to switched 1-port with d.c. input functions. Thus only inverter operation will be considered. It will be assumed that circuits are switched at instants $\dots, -T/2, 0, T/2, T, \dots$. These switchings are performed in such a way that condition (6) is fulfilled. Two cases are possible. In the first case a 1-port current is d.c. input function and then 1-port voltage is periodic output. In the second case a 1-port voltage is d.c. input function and then current is periodic output function.

4. FIRST ORDER RL AND RC SWITCHED 1-PORTS

4.1. DETERMINATION OF PARAMETERS $\{A, B, C, D\}$

In this Section we consider switched 1-port containing one inductor or one capacitor. As the dimension of input and output functions is equal to 1 ($m = 1$) and order of complexity of circuit is equal to 1 ($n = 1$) therefore all parameters A , B , C , D are scalars. Let d.c. input function be given

$$u(t) = U > 0 \quad \text{for} \quad -\infty < t < \infty \quad (28)$$

and output function

$$y(t) = he^{-\alpha t} \quad \text{for} \quad 0 \leq t \leq T/2 \quad (29.1)$$

$$y(t) = y(t+T/2) \quad \text{for} \quad -\infty < t < \infty \quad (29.2)$$

We assume also that

$$\alpha > 0 \quad (30.1)$$

$$h > 0. \quad (30.2)$$

It is possible to prove that conditions (30) are necessary to generate response (29) in passive switching circuit when excitation (28) is given. A diagram of waveform (29) is given in Figure 1.

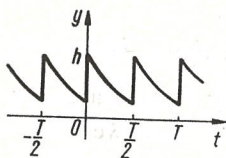


Fig. 1. The waveform of the exponential output function

Let us denote

$$H = \frac{h}{2U} (1 + e^{-\alpha T/2}). \quad (31)$$

The only choice for parameter A is

$$A = -\alpha \quad (32)$$

From (17) and (28), (29) we obtain

$$D = H \quad (33)$$

Applying (25) for $k = 0$ gives

$$CB = -H \quad (34)$$

Provided that reciprocity condition (A.3) is respected (34) has unique solution

$$B = \sqrt{\alpha H} \quad (35.1)$$

$$C = -\sqrt{\alpha H} \quad (35.2)$$

The solution (35) was obtained for the only possible assumption

$$\sum = 1 \quad (36)$$

The determined minimal realization $\{A, B, C, D\}$ is passive and reciprocal. The criteria (A.2) and (A.3) are fulfilled for $L = \sqrt{2\alpha}$ and $W_0 = \sqrt{2H}$. The matrix of nondynamic 2-port (Appendix I) by virtue of (32), (33), and (35) is

$$M = \begin{bmatrix} H & \sqrt{\alpha H} \\ \sqrt{\alpha H} & \alpha \end{bmatrix} \quad (37)$$

The matrix (37) is symmetrical. Thus it can be only impedance or admittance matrix and it cannot be a hybrid matrix of a reciprocal circuit.

The first port of the 2-port represented by matrix (26) is an input and output port. This port is an impedance port if a current is input function and this port is an admittance

port if a voltage is input function. The second port is terminated with a reactance element. This port is an impedance port if it is terminated with an inductor and this is an admittance port if it is terminated with a capacitor. The above considerations lead to the conclusion.

Conclusion 4: If d.c. input function $u(t)$ given by (15) is a current function and output function $y(t)$ given by (16) is a voltage function then the synthesized circuit is a RL circuit. If d.c. input function $u(t)$ given by (15) is a voltage function and output function $y(t)$ given by (16) is a current function then the synthesized circuit is a RC circuit.

4.2. FIRST ORDER RL SWITCHED 1-PORTS

Let the input function given by (15) be a current function and the output function given by (16) be a voltage function. Thus we synthesize the 1-port shown in Figure 2a.

By virtue of Conclusion 4 the synthesized 1-port is a RL 1-port. The matrix (26) is an impedance matrix. The impedance matrices $M = Z$ and $M' = Z'$ of the nondynamic 2-port shown in Figure 2b according to (6), (19), (21), and (25) are

$$Z = \begin{bmatrix} H & \sqrt{\alpha H} \\ \sqrt{\alpha H} & \alpha \end{bmatrix} \quad \text{for } 0 \leq t \leq T/2 \quad (27.1)$$

$$Z' = \begin{bmatrix} H & -\sqrt{\alpha H} \\ -\sqrt{\alpha H} & \alpha \end{bmatrix} \quad \text{for } T/2 \leq t \leq T \quad (27.2)$$

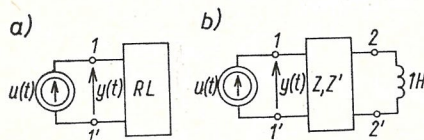


Fig. 2. a) The 1-port with a current input; b) The 1-port with the extracted inductor

Using a transformer the matrix Z is realized according to the diagram shown in Figure A.7. For Z given by (27.1) we have $\text{rank } Z = 1$. The turns-ratio matrix $\mathcal{T}$ has form

$$\mathcal{T} = [t_{11} \ t_{12}] \quad (28)$$

Substituting (28) into (A.10) gives

$$Z = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{12} \end{bmatrix} [1] [t_{11} \ t_{12}] = \begin{bmatrix} t_{11}^2 & t_{11} t_{12} \\ t_{11} t_{12} & t_{12}^2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

It can be seen from (27.1) and (29) that

$$\mathcal{T} = [\sqrt{H} \ \sqrt{\alpha}] \quad (30)$$

The 3-port transformer with the turns-ratio matrix (30) is shown in Figure 3.

Treating matrix Z' similarly as matrix Z two variants of matrix $\mathcal{T}'$ can be obtained

Variant 1:

$$\mathcal{T}'_I = [-\sqrt{H} \ \sqrt{\alpha}] \quad (31.1)$$

Variant 2:

$$\mathcal{T}'_{II} = [\sqrt{H} \ -\sqrt{\alpha}] \quad (31.2)$$

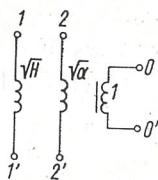


Fig. 3. The 3-port transformer

The first variant leads to the switched windings transformer shown in Figure 4. The second variant leads to the switched windings transformer shown in Figure 5.

When the port $00'$ is terminated with 1Ω resistor one can obtain the sequence of two nondynamical 2-ports. The impedance matrices of these 2-ports are Z and Z' (27). After a termination of the port $22'$ with 1 H inductor the sequence of two dynamical 1-ports

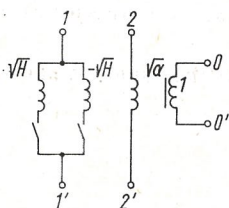


Fig. 4. The 3-port transformer with switched windings — Variant 1

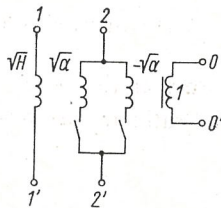


Fig. 5. The 3-port transformer with switched windings — Variant 2

is obtained. The minimal realizations of these two 1-ports are $\{A, B, C, D\}$ and $\{A, -B, -C, D\}$. The circuit is switched at the time instants $\dots, -T/2, 0, T/2, T, \dots$. The switched 1-port generates the voltage waveform as in (16). The thyristor realization of the switched 1-port according to Variant 1 is shown in Figure 6.

The circuit shown in Figure 6 can work using forced self commutation. Eliminating the transformer winding $00'$ in Figure 6 gives the well known inverter structure. The analysis of Variant 2 shows that this structure requires the use of an auxiliary thyristor commutation.

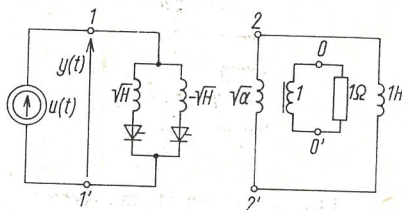


Fig. 6. The thyristor structure followed from Variant 1

4.3. FIRST ORDER RC SWITCHED 1-PORTS

Let the input function given by (15) be a voltage function and the output function given by (16) be a current function. Thus we synthesize the 1-port shown in Figure 7a.

By virtue of Conclusion 4 the synthesized 1-port is a RC 1-port. The matrix (26) is an admittance matrix. The admittance matrices $M = Y$ and $M' = Y'$ of the nondynamical 2-port shown in Figure 7b according to (6), (19), (21), and (25) are

$$Y = \begin{bmatrix} H & \sqrt{\alpha H} \\ \sqrt{\alpha H} & \alpha \end{bmatrix} \quad \text{for } 0 \leq t \leq T/2 \quad (32.1)$$

$$Y' = \begin{bmatrix} H & -\sqrt{\alpha H} \\ -\sqrt{\alpha H} & \alpha \end{bmatrix} \quad \text{for } T/2 \leq t \leq T \quad (32.2)$$

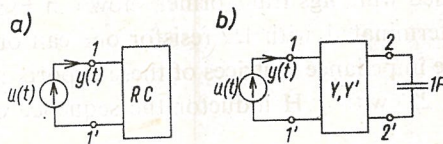


Fig. 7. a) The 1-port with a voltage input; b) The 1-port with the extracted capacitor

Using a transformer the matrix Y is realized according to the diagram shown in Figure A.8. The turns-ratio matrix has the form

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Substituting (33) into (A.11) gives

$$Y = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix} [1] \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}^2 & t_{11} t_{21} \\ t_{11} t_{21} & t_{21}^2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

It is seen from (32.1) and (34) that

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \sqrt{H} \\ \sqrt{\alpha} \end{bmatrix} \quad (35)$$

The 3-port transformer with the turns-ratio matrix (35) is shown in Figure 8.

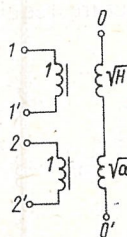


Fig. 8. The 3-port transformer

Treating the matrix Y' (32.2) similarly as the matrix Y two variants of the matrix $\mathcal{T}'$ can be obtained

Variant 1:

$$\mathcal{T}'_I = \begin{bmatrix} -\sqrt{H} \\ \sqrt{\alpha} \end{bmatrix} \quad (36.1)$$

Variant 2:

$$\mathcal{T}'_{II} = \begin{bmatrix} \sqrt{H} \\ -\sqrt{\alpha} \end{bmatrix} \quad (36.2)$$

Variant 1 leads to the switched winding transformer shown in Figure 9. Variant 2 leads to the switched winding transformer shown in Figure 10.

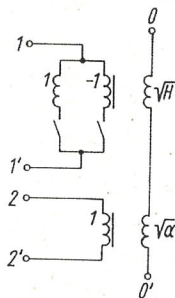


Fig. 9. The 3-port transformer with switched windings — Variant 1

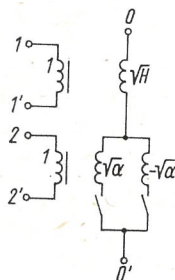


Fig. 10. The 3-port transformer with switched windings — Variant 2

When the port $00'$ is terminated with 1 S resistor one can obtain the sequence of two nondynamical 2-ports. The admittance matrices of these 2-ports are Y and Y' (32). After termination of the port $22'$ with 1 F capacitor a sequence of two dynamical 1-ports is obtained. The minimal realization of these two 1-ports are $\{A, B, C, D\}$ and $\{A, -B, -C, D\}$. The circuit is switched at the time instants $\dots, -T/2, 0, T/2, T, \dots$ and it generates the current waveform as in (16).

The thyristor realization of the switched 1-port according to Variant 1 is shown in Figure 11. While the realization of the switched 1-port according to Variant 2 is shown in Figure 12. The circuits shown in Figures 11 and 12 can work with the use a forced self commutation.

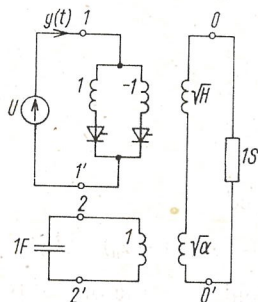


Fig. 11. The thyristor structure followed from Variant 1

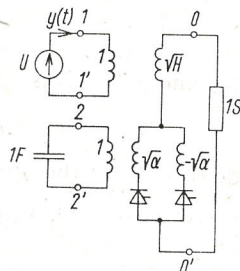


Fig. 12. The thyristor structure followed from Variant 2

5. HIGHER ORDER RL AND RC SWITCHED 1-PORTS

5.1. RESPONSE REALIZABLE BY IMMITANCE MATRICES

5.1.1. Determination of matrices A , B , C , D

In this Section we consider switched 1-ports containing n inductors or n capacitors. As the dimension of input and output functions is equal to 1 and the dimension of the state vector is n therefore matrices $\{A, B, C, D\}$ have the form

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (37.1)$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (37.2)$$

$$C = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] \quad (37.3)$$

$$D = [d]$$

Let d.c. input function be given

$$u(t) = U > 0 \quad \text{for} \quad -\infty < t < \infty \quad (38)$$

and output function

$$y(t) = h_0 + h_1 e^{-\alpha_1 t} + \dots + h_n e^{-\alpha_n t} \quad \text{for} \quad 0 \leq t \leq T/2 \quad (39.1)$$

$$y(t) = y(t+T/2) \quad \text{for} \quad -\infty < t < \infty \quad (39.2)$$

A diagram of the waveform (30) with the assumption $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0, h_0 > 0, \dots, h_n > 0$ is such as shown in Figure 1. Let us denote

$$H_0 = h_0/U \quad (40.1)$$

$$H_1 = h_1(1 + e^{-\alpha_1 T/2})/2U \quad (40.2)$$

$$\vdots$$

$$H_n = h_n(1 + e^{-\alpha_n T/2})/2U \quad (40.n+1)$$

We choose the state matrix A in a diagonal form

$$A = \text{diag}[-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n] \quad (41)$$

Applying (24) and (30) gives

$$D = H_0 + H_1 + \dots + H_n \quad (42)$$

The right side of (25) for the function (30) can be expressed as

$$[y^{(k+1)}(0) + y^{(k+1)}(T/2)]/2U = (-\alpha_1)^{k+1} H_1 + \dots + (-\alpha_n)^{k+1} H_n \quad (43)$$

With regard to the assumptions of the sign of coefficient α_i, h_i the only possible choice of matrix Σ in (A.3) is $\Sigma = I_n$. It means that

$$B = -C^t \quad (44)$$

Regarding (44) and (37), (41) the left side of (25) can be expressed as

$$CA^k B = -[(-\alpha_1)^k b_1^2 + \dots - \alpha_n (\alpha_n)^k b_n^2] \quad \text{for } k = 0, 1, \dots \quad (45)$$

Substituting (43) and (45) into (25) gives

$$\begin{aligned} -[(-\alpha_1)^k b_1^2 + \dots + (-\alpha_n)^k b_n^2] &= (-\alpha_1)^{k+1} H_1 + \dots \\ &\dots + (-\alpha_n)^{k+1} H_n \quad \text{for } k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (46)$$

It follows from (46) that

$$B^t = [\sqrt{\alpha_1 H_1} \dots \sqrt{\alpha_n H_n}] \quad (47)$$

The components of the matrix C are obtained by combination of (44) with (47)

$$C = [-\sqrt{\alpha_1 H_1} \dots -\sqrt{\alpha_n H_n}] \quad (48)$$

The minimal realization determined by (41), (42), (47) and (48) is passive and reciprocal, which can be proved by choosing the matrices L and W_0 in (A.2) as follows

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{2\alpha_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2\alpha_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{2\alpha_n} & 0 \end{bmatrix} \quad (49.1)$$

$$W_0^t = [-\sqrt{2H_1} - \sqrt{2H_2} \dots -\sqrt{2H_n} - \sqrt{2H_0}] \quad (49.2)$$

All elements of the matrices (49) are real if

$$\alpha_i > 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n \quad (50.1)$$

$$h_i > 0 \quad \text{for } i = 0, 1, \dots, n \quad (50.2)$$

Hence it is proved that the conditions (50) are sufficient to realize the output function (39) in a passive and reciprocal circuit. The assumption $\sum = I_n$ means that a circuit contains only inductors or only capacitors. For the minimal realization defined by (41), (42), (47) and (48) the hybrid matrix

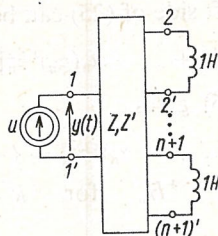
$$M = \begin{bmatrix} D & -C \\ B & -A \end{bmatrix} \quad (51)$$

is symmetrical. Thus this matrix is an impedance or an admittance matrix of a reciprocal circuit, therefore it is possible to formulate conclusion similar to Conclusion 4.

Conclusion 5: If d.c. input function $u(t)$ given by (38) is current function and output function $y(t)$ given by (50) is voltage function then synthesized circuit is a RL circuit. If d.c. input function $u(t)$ is a voltage function and output function is a current function then the synthesized circuit is a RC circuit.

5.1.2. RL switched 1-ports

Let the input function defined by (38) be a current function and the output function defined by (50) be a voltage function. By virtue of Conclusion 5 the synthesized 1-port is RL 1-port. Matrix (51) is an impedance matrix. Thus we synthesize the 1-port shown in Figure 13.

Fig. 13. The current-input 1-port with n extracted inductors

The impedance matrices $Z = M$ and $Z' = M'$ of the nondynamic $n+1$ — port shown in Figure 13 according to (6), (41), (42), (47), and (48) are

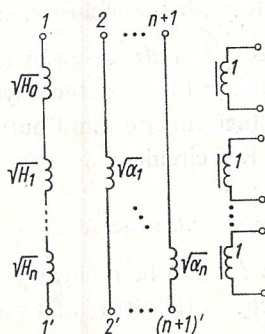
$$Z = \begin{bmatrix} H_0 + \dots + H_n & \sqrt{\alpha_1 H_1} \dots & \sqrt{\alpha_n H_n} \\ \sqrt{\alpha_1 H_1} & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\alpha_n H_n} & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \quad (52.1)$$

$$Z' = \begin{bmatrix} H_0 + \dots + H_n & -\sqrt{\alpha_1 H_1} \dots & -\sqrt{\alpha_n H_n} \\ -\sqrt{\alpha_1 H_1} & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sqrt{\alpha_n H_n} & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \quad (52.2)$$

The transformer realization of the matrix Z is obtained according to the diagram shown in Figure A.7. For Z defined by (52.1) we have $\text{rank } Z = n+1$. The turns-ratio matrix $\mathcal{T}$ of the 2 $(n+1)$ -port transformer is obtained by factorization defined by (A.10)

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \sqrt{H_0} & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{H_1} & \sqrt{\alpha_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{H_n} & 0 & \dots & \sqrt{\alpha_n} \end{bmatrix} \quad (53)$$

The $2(n+1)$ -port transformer with the turns-ratio matrix (53) is shown in Figure 14.

Fig. 14. The $(2n+1)$ -port transformer

Treating matrix Z' similarly as matrix Z many variants of the turns-ratio matrix $\mathcal{T}$ can be obtained. Two of them are

Variant 1:

$$\mathcal{T}'_I = \begin{bmatrix} -\sqrt{H_0} & 0 & \dots & 0 \\ -\sqrt{H_1} & \sqrt{\alpha_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sqrt{H_n} & 0 & \dots & \sqrt{\alpha_n} \end{bmatrix} \quad (54.1)$$

Variant 2:

$$\mathcal{T}'_{II} = \begin{bmatrix} \sqrt{H_0} & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{H_1} & -\sqrt{\alpha_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{H_n} & \dots & \dots & -\sqrt{\alpha_n} \end{bmatrix} \quad (54.2)$$

Variant 1 leads to the switched winding transformer shown in Figure 15. Variant 2 leads to the switched winding transformer shown in Figure 16.

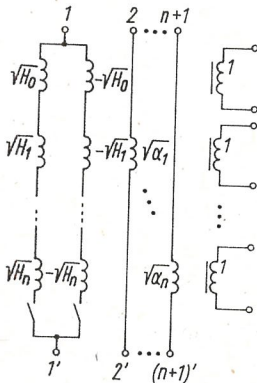


Fig. 15. The $(2n+1)$ -port transformer with switched windings — Variant 1

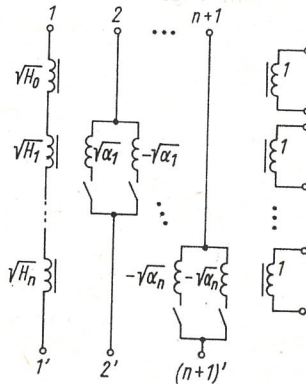


Fig. 16. The $(2n+1)$ -port transformer with switched windings — Variant 2

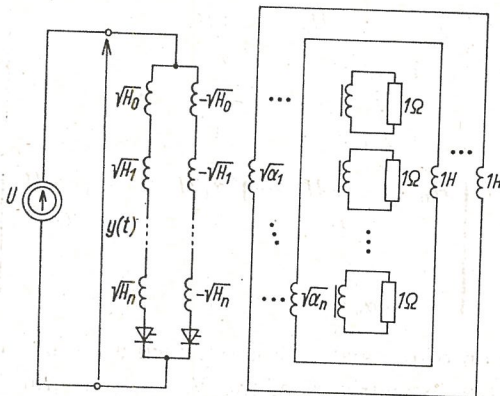


Fig. 17. The thyristor structure followed from Variant 1

When the unit turn ports are terminated with 1Ω resistors the sequence of two non-dynamical $(n+1)$ -ports can be obtained by switchings. The impedance matrices of these $(n+1)$ -ports are Z (52) and Z' . After termination of the ports $22', \dots, (n+1)(n+1)'$ with $1H$ inductors a sequence of two dynamical 1-ports is obtained. The minimal realizations of these two 1-ports are $\{A, B, C, D\}$ and $\{A, -B, -C, D\}$. The circuit should be switched at the time instants $\dots, -T/2, 0, T/2, T, \dots$ and then it generates the voltage waveform defined by (39).

The thyristor realization of the switched 1-port according to Variant 1 is shown in Figure 17. The circuit shown in Figure 17 can work using forced self commutation (without auxiliary thyristors).

5.1.3. RC switched 1-ports

Let the input function defined by (38) be a voltage function and the output function defined by (39) be a current function. By virtue of Conclusion 5 the synthesized 1-port is a RC 1-port. The hybrid matrix (51) is an admittance matrix. Thus we synthesize the 1-port shown in Figure 18.

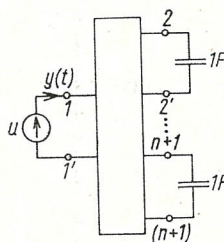


Fig. 18. The voltage-input 1-port with n extracted capacitors

The admittance matrices $Z = M$ and $Z' = M'$ of the nondynamic $n+1$ -port shown in Figure 18 according to (6), (41), (42), (47), and (48) are

$$Y = \begin{bmatrix} H_0 + \dots + H_n & \sqrt{\alpha_1 H_1} & \dots & \sqrt{\alpha_n H_n} \\ \sqrt{\alpha_1 H_1} & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\alpha_n H_n} & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \quad (55.1)$$

$$Y' = \begin{bmatrix} H_0 + \dots + H_n & -\sqrt{\alpha_1 H_1} & \dots & -\sqrt{\alpha_n H_n} \\ -\sqrt{\alpha_1 H_1} & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sqrt{\alpha_n H_n} & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \quad (55.2)$$

The transformer realization of the matrix Y is obtained according to the diagram shown in Figure A.8. The turns-ratio matrix $\mathcal{T}$ of the $2(n+1)$ -port transformer is obtained by factorization defined by (A.11)

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \sqrt{H_0} & \sqrt{H_1} & \dots & \sqrt{H_n} \\ 0 & \sqrt{\alpha_1} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\alpha_n} \end{bmatrix} \tag{56}$$

The $2n+1$ -port transformer with the turns-ratio matrix (56) is shown in Figure 19.

Treating matrix Y' similarly as matrix Y many variants of the turns-ratio matrix can be obtained. Two of them are

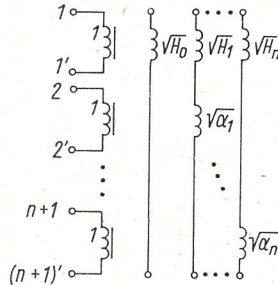


Fig. 19. The $(2n+1)$ -port transformer

Variant 1:

$$\mathcal{T}'_I = \begin{bmatrix} -\sqrt{H_0} & -\sqrt{H_1} & \dots & -\sqrt{H_n} \\ 0 & \sqrt{\alpha_1} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \sqrt{\alpha_n} \end{bmatrix} \tag{57.1}$$

Variant 2:

$$\mathcal{T}'_{II} = \begin{bmatrix} \sqrt{H_0} & \sqrt{H_1} & \dots & \sqrt{H_n} \\ 0 & -\sqrt{\alpha_1} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & -\sqrt{\alpha_n} \end{bmatrix} \tag{57.2}$$

Variant 1 leads to the switched winding transformer shown in Figure 20. Variant 2 leads to the switched winding transformer shown in Figure 21.

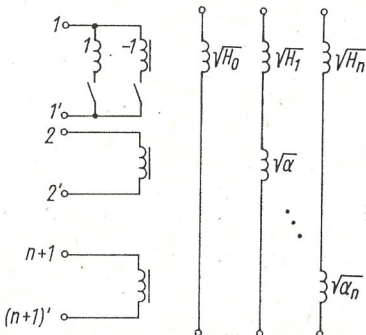


Fig. 20. The $(2n+1)$ -port transformer with switched windings — Variant 1

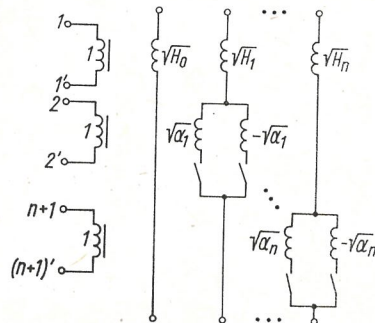


Fig. 21. The $(2n+1)$ -port transformer with switched windings — Variant 2

When the current controlled ports are terminated with $1/S$ resistors the sequence of two nondynamical $(n+1)$ -ports can be obtained by switchings. The admittance matrices of these $n+1$ -ports are Y and Y' (55). After termination of the ports $22', \dots, (n+1)(n+1)'$ with $1/F$ capacitors a sequence of two dynamical 1-ports is obtained. The circuit ought to be switched at the time instants $\dots, -T/2, 0, T/2, T, \dots$ and then it generates the voltage waveform defined by (39). The thyristor realization of the switched 1-port according to Variant 1 is shown in Figure 22.

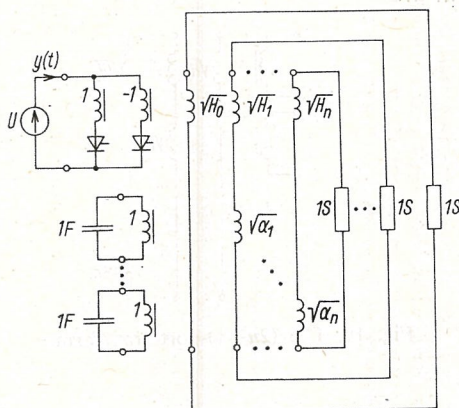


Fig. 22. The thyristor structure followed from Variant 1

The circuit shown in Figure 22 can work using forced self commutation (without auxiliary thyristors). Figure 23 presents the thyristor realization of the switched 1-port according to Variant 2.

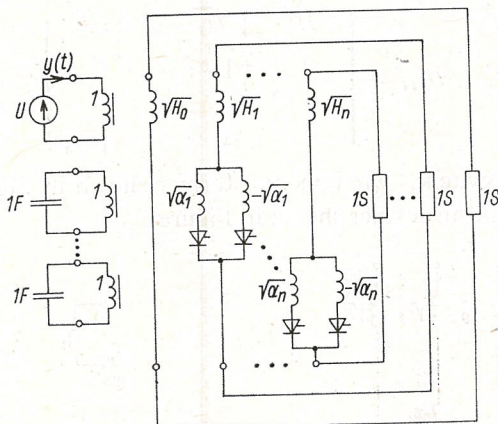


Fig. 23. The thyristor structure followed from Variant 2

5.2. RESPONSES REALIZABLE BY HYBRID MATRICES

5.2.1. Determination of matrices A , B , C , D

Let d.c. input function be given

$$u(t) = U > 0 \quad \text{for} \quad -\infty < t < \infty \quad (58)$$

and output function

$$y(t) = h_0 - (h_1 e^{-\alpha_1 t} + \dots + h_n e^{-\alpha_n t}) \quad \text{for } 0 \leq t \leq T/2 \quad (59.1)$$

$$y(t) = y(t+T/2) \quad \text{for } -\infty < t < \infty. \quad (59.2)$$

We assume that

$$\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \dots, \alpha_n > 0, \quad (60.1)$$

$$h_0 > 0, h_1 > 0, \dots, h_n > 0. \quad (60.2)$$

A diagram of the waveform (59) with the assumption (60) is shown in Figure 24.

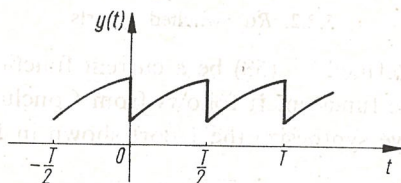


Fig. 24. The waveform of the exponential output function

Let us denote

$$H_0 = h_0/U, \quad (61.1)$$

$$H_1 = h_1(1 + e^{-\alpha_1 T/2})/2U, \quad (61.2)$$

$$\vdots$$

$$H_n = h_n(1 + e^{-\alpha_n T/2}). \quad (61.n+1)$$

Additionally we also assume that

$$H_0 \geq H_1 + \dots + H_n \quad (62)$$

We choose the state matrix A in a diagonal form

$$A = \text{diag}[-\alpha_1, \dots, -\alpha_n]. \quad (63)$$

Applying (24) and (59) gives

$$D = H_0 - (H_1 + \dots + H_n) \quad (64)$$

The right side of (25) for the output function (59) can be expressed as

$$[y^{(k+1)}(0) + y^{(k+1)}(T/2)]/2U = -[(-\alpha_1)^{k+1}H_1 + \dots + (-\alpha_n)^{k+1}H_n] \quad \text{for } k = 0, 1, \dots \quad (65)$$

With regard to the assumptions (60) the only possible choice of matrix Σ in (A.3) is $\Sigma = -I_n$. It means that

$$B = C^t. \quad (66)$$

Thus the left side of (25) can be expressed as

$$CA^k B = (-\alpha_1)^k b_1^2 + \dots + (-\alpha_n)^k b_n^2 \quad \text{for } k = 0, 1, \dots \quad (67)$$

Substituting (65) and (67) into (25) gives

$$B^t = [\sqrt{\alpha_1 H_1} \dots \sqrt{\alpha_n H_n}] \quad (68)$$

The assumption $\Sigma = -I_n$ means that a circuit contains only capacitors or only inductors. For the minimal realization defined by (63), (64), (66), and (68) the hybrid matrix (51) is skew symmetrical. Thus this matrix is a hybrid matrix of a reciprocal circuit. A detailed analysis allows to formulate the following conclusion.

Conclusion 6: If d.c. input function $u(t)$ given by (58) is a current function and output function $y(t)$ given by (59) is a voltage function then the synthesized circuit is a RC circuit. If d.c. input function $u(t)$ is a voltage function and $y(t)$ is a current function then the synthesized circuit is a RL circuit.

5.2.2. RC switched 1-ports

Let the input function defined by (58) be a current function and the output function defined by (59) be a voltage function. It follows from Conclusion 6 that synthesized circuit is a RC 1-port. Thus we synthesize the 1-port shown in Figure 25.

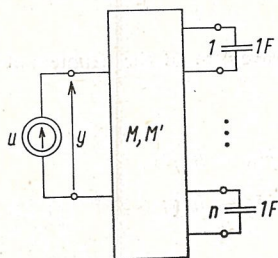


Fig. 25. The current-input 1-port with n extracted capacitors

The hybrid matrices M and M' of the nondynamic $(n+1)$ -port shown in Figure 25 according to (6), (63), (64), and (68) are

$$M = \left[\begin{array}{c|ccc} H_0 - (H_1 + \dots + H_n) & -\sqrt{\alpha_1 H_1} & \dots & -\sqrt{\alpha_n H_n} \\ \hline \sqrt{\alpha_1 H_1} & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\alpha_n H_n} & 0 & \dots & \alpha_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} Z_a & \mathcal{T}_b^t \\ \hline -\mathcal{T}_b' & Y_c \end{array} \right] \quad (69.1)$$

$$M' = \left[\begin{array}{c|ccc} H_0 - (H_1 + \dots + H_n) & \sqrt{\alpha_1 H_1} & \dots & \sqrt{\alpha_n H_n} \\ \hline -\sqrt{\alpha_1 H_1} & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sqrt{\alpha_n H_n} & 0 & \dots & \alpha_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} Z_a' & \mathcal{T}_b'^t \\ \hline -\mathcal{T}_b' & Y_c' \end{array} \right] \quad (69.2)$$

The transformer realization of hybrid matrix M with a current input function is performed according to general structure shown in Figure A.5. Each matrix denoted in Figure A.5. follows from the division of the matrix M (or M') into impedance and admittance parts as shown in (69). It is seen that

$$Z_a = H_0 - (H_1 + \dots + H_n), \quad (70.1)$$

$$Y_c = \text{diag}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]. \quad (70.2)$$

With respect to (A.7) the turns-ratio matrix $\mathcal{T}_b$ of the $(n+1)$ -port transformer is

$$\mathcal{T}_b^t = [-\sqrt{\alpha_1 H_1} \dots -\sqrt{\alpha_n H_n}]. \quad (71)$$

Now we can successively synthesize the matrices Z_a , Y_c , and $\mathcal{T}_b$. The congruent factorization defined (A.10) of the impedance Z_a gives

$$\mathcal{T}_a = \sqrt{H_0 - H_1 + \dots - H_n}. \quad (72)$$

The scheme of the 1-port of the impedance Z_a is based on the general structure shown in Figure A.7. The circuit is shown in Figure 26. The congruent factorization defined by (A.11) of the admittance matrix Y_c gives

$$\mathcal{T}_c^t = [\sqrt{\alpha_1} \dots \sqrt{\alpha_n}]. \quad (73)$$

The scheme of the n -port of admittance matrix Y_c is based on the general structure shown in Figure A.8. The circuit is shown in Figure 27.

The $(n+1)$ -port transformer which turns-ratio matrix $\mathcal{T}_b$ defined by (71) is shown in Figure 28. Connecting the circuits shown in Figures 26, 27, and 28 according to the

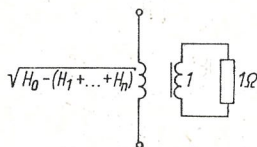


Fig. 26. The 1-port of impedance Z_a

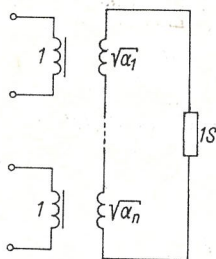


Fig. 27. The n -port of admittance Y_c

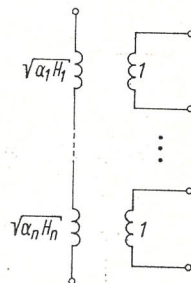


Fig. 28. The $(n+1)$ -port transformer $\mathcal{T}_b$

general structure (Figure A.5) gives the nondynamic $(n+1)$ -port the hybrid matrix of which is M . This $(n+1)$ -port is shown in Figure 29.

It is seen from (71) that $Z'_a = Z_a$ and $Y'_c = Y_c$. It means that the circuits shown in Figures 27 and 28 are not switched. But the transformer shown in Figure 30 is switched because $\mathcal{T}'_b = -\mathcal{T}_b$. Thus the sequence of hybrid matrices M , M' can be realized using the switched circuit shown in Figure 30. Terminating the ports $22'$, ..., nn' with 1 F capacitors and replacing the switches by thyristors gives an arrangement shown in Figure 31.

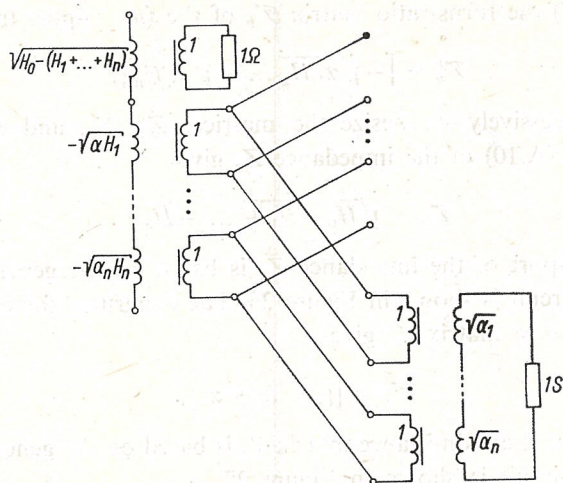


Fig. 29. The $(n+1)$ -port of hybrid matrix M

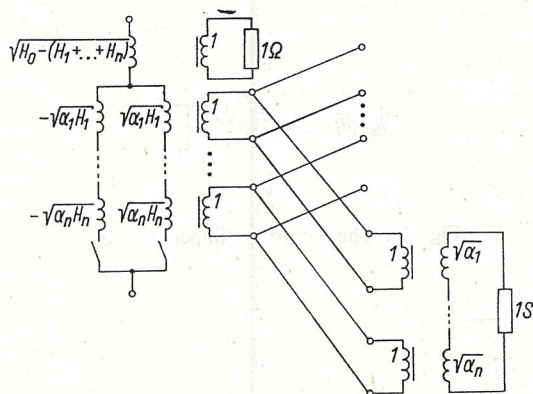


Fig. 30. The switched $(n+1)$ -port of hybrid matrices M, M'

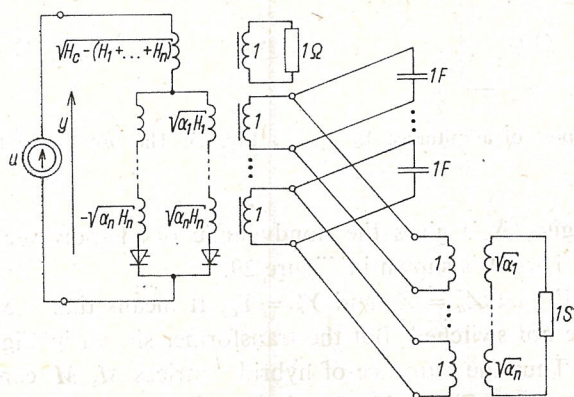


Fig. 31. The resulting thyristor structure

5.2.3. *RL* switched 1-ports

Let the input function be a voltage function and the output function be a current function. It follows from Conclusion 6 that the synthesized 1-port is *RL* 1-port. Thus we synthesize the 1-port shown in Figure 32.

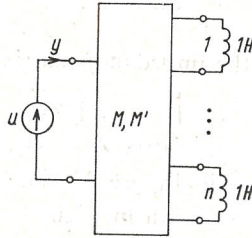


Fig. 32. The voltage-input 1-port with n extracted inductors

The hybrid matrices M and M' of the nondynamic $(n+1)$ -port shown in Figure 32 according to (6), (63), (64), and (68) are

$$M = \left[\begin{array}{c|ccc} H_0 - (H_1 + \dots + H_n) & -\sqrt{\alpha_1 H_1} & \dots & -\sqrt{\alpha_n H_n} \\ \hline \sqrt{\alpha_1 H_1} & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\alpha_n H_n} & 0 & \dots & \alpha_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} Y_a & -\mathcal{T}_b \\ \hline \mathcal{T}_b^t & Y_c \end{array} \right]. \quad (74.1)$$

$$M' = \left[\begin{array}{c|ccc} H_0 - (H_1 + \dots + H_n) & \sqrt{\alpha_1 H_1} & \dots & \sqrt{\alpha_n H_n} \\ \hline -\sqrt{\alpha_1 H_1} & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sqrt{\alpha_n H_n} & 0 & \dots & \alpha_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} Y'_a & -\mathcal{T}'_b \\ \hline \mathcal{T}'_b{}^t & Y'_c \end{array} \right]. \quad (74.2)$$

The transformer realization of hybrid matrix M with a voltage input function is performed according to the general structure shown in Figure A.6. Each matrix denoted in Figure A.6. follows from the division of the matrix M (or M') into impedance and admittance parts shown in (74). It is seen that

$$Y_a = H_0 - (H_1 + \dots + H_n), \quad (75.1)$$

$$Y_c = \text{diag}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]. \quad (75.2)$$

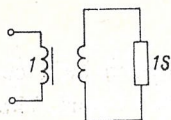
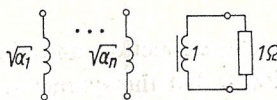
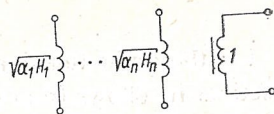
With respect to (A.6) the turns-ratio matrix $\mathcal{T}_b$ of the n -port transformer is

$$\mathcal{T}_b = [\sqrt{\alpha_1 H_1} \dots \sqrt{\alpha_n H_n}]. \quad (76)$$

Now we can successively synthesize the matrices Y_a , Z_c , and $\mathcal{T}_b$. The congruent factorization defined by (A.11) of the admittance Y_a gives

$$\mathcal{T}_a = \sqrt{H_0 - H_1 + \dots - H_n}. \quad (77)$$

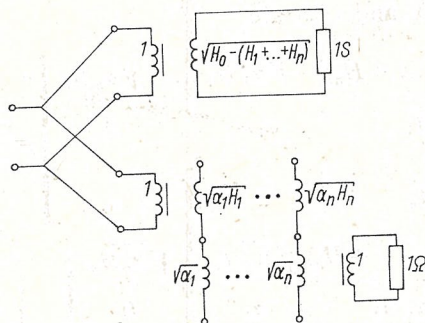
The scheme of the 1-port of the admittance Y_a is based on the general structure shown in Figure A.8. This circuit is shown in Figure 33.

Fig. 33. The 1-port of admittance Y_a Fig. 34. The n -port of impedance Z_c Fig. 35. The $(n+1)$ -port transformer $\mathcal{T}_b$

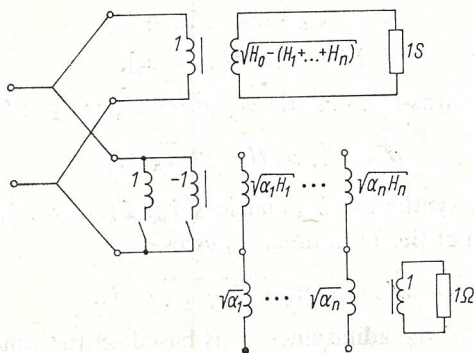
The congruent factorization of the impedance matrix Z_c gives

$$\mathcal{T}_c = [\sqrt{\alpha_1} \dots \sqrt{\alpha_n}]. \quad (78)$$

The scheme of the n -port of impedance matrix Z_c is based on the general structure shown in Figure A.7. This circuit is shown in Figure 34. The n -port transformer whose turns-ratio matrix $\mathcal{T}_b$ is defined by (76) is shown in Figure 35. Connecting the circuits shown in Figures 33, 34, and 35 according to the general structure (Figure A.6) gives the non-dynamic $(n+1)$ -port, the hybrid matrix of which is M . This $(n+1)$ -port is shown in Figure 36. It is seen from (74) that $Y'_a = Y_a$ and $Z'_c = Z_c$. It means that the circuits shown in

Fig. 36. The $(n+1)$ -port of hybrid matrix M

Figures 33 and 34 are not switched. But the transformer shown in Figures 35 is switched because $\mathcal{T}'_b = -\mathcal{T}_b$. Thus the sequence of hybrid matrices M, M' can be realized using the switched circuit shown in Figure 37. Terminating the ports $22', \dots, nm'$ with $1 H$ inductors and replacing the switchings by thyristors gives the arrangement shown in Figure 38.

Fig. 37. The switched $(n+1)$ -port of hybrid matrices M, M'

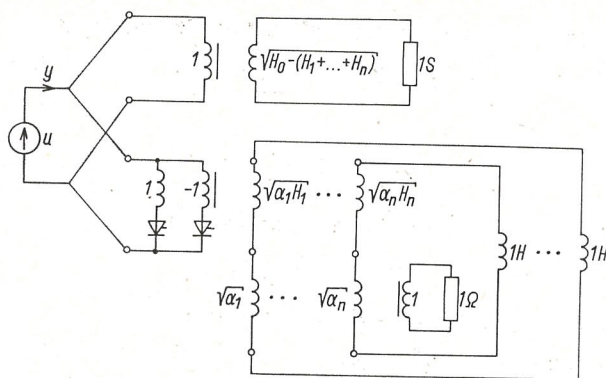


Fig. 38. The resulting thyristor structure

6. RLC SECOND ORDER SWITCHED 1-PORTS

6.1. DETERMINATION OF MATRICES A, B, C, D

In this Section we consider switched 1-ports containing inductor and capacitor. Therefore a dimension of a state vector is equal to 2. Matrices A , B , C , D have the form shown in (37) with $n = 2$. Let d.c. input function be given

$$u(t) = U > 0 \quad \text{for} \quad -\infty < t < \infty \quad (79)$$

and output function

$$y(t) = he^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{for} \quad 0 \leq t \leq T/2, \quad (80.1)$$

$$y(t) = y(t + T/2) \quad \text{for} \quad -\infty < t < \infty. \quad (80.2)$$

We assume that $\alpha > 0$ and denote

$$S = h[\sin \varphi + e^{-\alpha T/2} \sin(\omega T/2 + \varphi)]/2U, \quad (81.1)$$

$$K = h[\cos \varphi + e^{-\alpha T/2} \cos(\omega T/2 + \varphi)]/2U. \quad (81.2)$$

Additionally let us assume $S > 0$, $K > 0$, and $\omega S = \alpha K$.

It will be proved that above conditions are necessary to generate the waveform (80) in a passive reciprocal switched circuit. We choose the state matrix A in a skew-diagonal form

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & -\omega \\ \omega & -\alpha \end{bmatrix}. \quad (82)$$

Applying (24) and (80) gives

$$D = S. \quad (83)$$

The right side of (25) for the function (80) for $k = 0$ and $k = 1$ can be expressed as

$$[y^{(1)}(0) + y^{(1)}(T/2)]/2U = -\alpha S + \omega K \quad (84.1)$$

$$[y^{(2)}(0) + y^{(2)}(T/2)]/2U = -\alpha(-\alpha S + \omega K) + \omega(-\alpha K - \omega S). \quad (84.2)$$

As it was mentioned a circuit synthesized in this Section contains an inductor and a capacitor thus the matrix Σ has the form $\Sigma = \text{diag } [1, -1]$. From (A.3) is obtained

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = [-c_1 \ c_2]^t \quad (85)$$

The left side of (25) for $k = 0$ and $k = 1$ can be expressed as

$$CB = -b_1^2 + b_2^2 \quad (86.1)$$

$$CAB = -\alpha(-b_1^2 + b_2^2) + \omega 2b_1 b_2 \quad (86.2)$$

Substituting (84) and (85) into (25) gives

$$b_1 = \sqrt{(\alpha S - \omega K)/2 + \sqrt{(\alpha^2 + \omega^2)(S^2 + K^2)}}, \quad (87.1)$$

$$b_2 = -\sqrt{(\alpha S + \omega K)/2 + \sqrt{(\alpha^2 + \omega^2)(S^2 + K^2)}}. \quad (87.2)$$

Taking in consideration relation $\omega S = \alpha K$ the above results can be simplified

$$B = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha S} \\ -\sqrt{\omega K} \end{bmatrix} \quad (88.1)$$

$$C = [-\sqrt{\alpha S} \ -\sqrt{\omega K}]. \quad (88.2)$$

Now we shall prove that the realization between S and K is necessary condition of a passive synthesis.

Theorem 3: The minimal realization $\{A, B, C, D\}$ defined by (82), (83), and (87) is passive iff $\alpha > 0$, $S > 0$, and $\omega S = \alpha K$.

Proof: The hybrid matrix of the nondynamical reciprocal 3-port according to (A.8) and (A.9) is

$$M = \begin{bmatrix} S & b_1 & -b_2 \\ b_1 & \alpha & \omega \\ b_2 & -\omega & \alpha \end{bmatrix}. \quad (89)$$

The hybrid matrix M is divided into two immittance parts, α and

$$\begin{bmatrix} S & b_1 \\ b_1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

These both matrices must be positive semidefinite. Hence $\alpha \geq 0$ and $\begin{bmatrix} S & b_1 \\ b_1 & \alpha \end{bmatrix} \geq 0$ or $S \geq 0$ and $b_1^2 \leq \alpha S$. The last relation and (87) give

$$[\alpha S - \omega K + \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \sqrt{S^2 + K^2}]/2 \leq \alpha S \quad (90.1)$$

or

$$2\alpha\omega SK \geq \omega^2 S^2 + \alpha^2 K^2 \quad (90.2)$$

Inequality (90) can be fulfilled only if

$$\omega S = \alpha K. \quad (91)$$

Now we shall prove sufficiency of these conditions. The minimal realization is passive if fulfils the passivity criterions (A.2). These equations hold true for $L = \text{diag } [\sqrt{2\alpha} \sqrt{2\alpha}]$ and $W'_0 = [-\sqrt{2S} \ 0]$. The condition $K > 0$ must be satisfied in order to obtain the real value of b_2 . It will be seen from (88).

6.2. RLC SECOND ORDER SWITCHED 1-PORTS WITH A CURRENT INPUT FUNCTION

Let the input function (79) be a current function and the output function (80) be a voltage function. We synthesize the 1-port shown in Figure 39. The hybrid matrices M and M' of the nondynamical 3-port shown in Figure 39 are

$$M = \left[\begin{array}{c|c|c} S & \sqrt{\alpha S} & \sqrt{\omega K} \\ \hline \sqrt{\alpha S} & \alpha & \omega \\ \hline -\sqrt{\omega K} & -\omega & \alpha \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} Z_a & \mathcal{T}_b^t \\ \hline -\mathcal{T}_b & Y_c \end{array} \right] \quad (92.1)$$

$$M' = \left[\begin{array}{c|c|c} S & -\sqrt{\alpha S} & -\sqrt{\omega K} \\ \hline -\sqrt{\alpha S} & \alpha & \omega \\ \hline \sqrt{\omega K} & -\omega & \alpha \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} Z'_a & \mathcal{T}_b'^t \\ \hline -\mathcal{T}_b' & Y'_c \end{array} \right]. \quad (92.2)$$

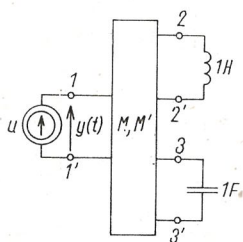


Fig. 39. The current-input 1-port with the extracted inductor and capacitor

The transformer realization of the hybrid matrix M with a current input function is performed according to Figure A.5. Each matrix denoted in this figure results from the division of the matrix M or M' into impedance and admittance parts as shown in (92). It will be seen that

$$Z_a = \left[\begin{array}{c|c} S & \sqrt{\alpha S} \\ \hline \sqrt{\alpha S} & \alpha \end{array} \right]. \quad (93.1)$$

$$Y_c = \alpha. \quad (93.2)$$

The turns-ratio matrix $\mathcal{T}_b$ of the 3-port transformer is

$$\mathcal{T}_b = [\sqrt{\omega K} \ \omega]. \quad (94)$$

Now we can successively synthesize matrices Z_a , Y_c , and $\mathcal{T}_b$. The congruent factorization defined by (A.10) of the impedance matrix Z_a gives

$$\mathcal{T}_a = [\sqrt{S} \ \sqrt{\alpha}]. \quad (95)$$

The scheme of the 2-port of the impedance Z_a is based on the general structure given in Figure A.7. This circuit is shown in Figure 40. The congruent factorization defined by (A.11) of the admittance matrix Y_c gives

$$\mathcal{T}_c = \sqrt{\alpha}. \quad (96)$$

The scheme of the 1-port of the admittance Y_c is based on Figure A.8. This circuit is shown in Figure 41. The 3-port transformer whose turns-ratio matrix is defined by (94). This circuit is shown in Figure 42.

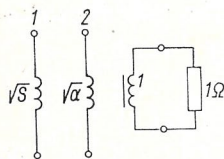


Fig. 40. The 2-port of impedance Z_a

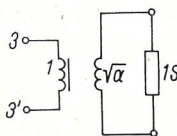


Fig. 41. The 1-port of admittance Y_c

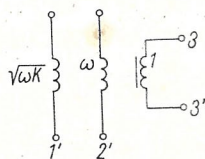


Fig. 42. The 3-port transformer $\mathcal{T}_b$

Connecting the circuits shown in Figures 40, 41, and 42 according to Figure A.5 gives the nondynamic 3-port whose hybrid matrix is M . This 3-port is shown in Figure 43. Matrices Z'_a , Y'_c , and $\mathcal{T}'_b$ follow from the division the hybrid matrix M'

$$Z'_a = \begin{bmatrix} S & -\sqrt{\alpha S} \\ -\sqrt{\alpha S} & \alpha \end{bmatrix}, \quad (97.1)$$

$$Y'_c = \alpha, \quad (97.2)$$

$$\mathcal{T}'_b = [-\sqrt{\omega K} \ \omega]. \quad (97.3)$$

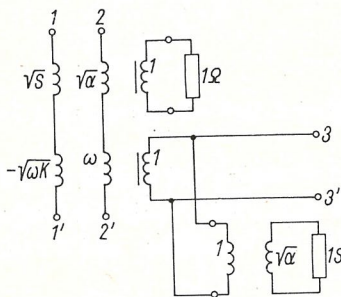


Fig. 43. The 3-port of hybrid matrix M

The impedance matrix Z'_a can be realized in two variants.

Variant 1:

$$\mathcal{T}'_{aI} = [-\sqrt{S} \ \sqrt{\alpha}] \quad (98.1)$$

Variant 2:

$$\mathcal{T}'_{aII} = [\sqrt{S} \ -\sqrt{\alpha}]. \quad (98.2)$$

Variant 1 leads to the switched nondynamic 3-port shown in Figure 44. Terminating the port 22' with 1 H inductor and the port 33' with 1 F capacitor and replacing the switches by thyristors gives an arrangement shown in Figure 45.

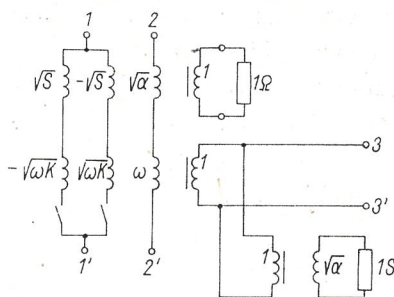
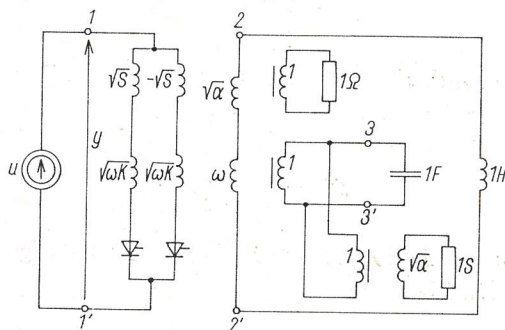
Fig. 44. The switched 3-port of hybrid matrices M and M' 

Fig. 45. The resulting thyristor structure

6.3. RLC SECOND ORDER SWITCHED 1-PORTS WITH A VOLTAGE INPUT FUNCTION

Let the input function be a voltage function and the output function defined by (80) be a current function. We synthesize the 1-port shown in Figure 46. The hybrid matrices M and M' of the nondynamical 3-port shown in Figure 46 are

$$M = \begin{bmatrix} S & \sqrt{\alpha S} & \sqrt{\omega K} \\ \sqrt{\alpha S} & \alpha & \omega \\ -\sqrt{\omega K} & -\omega & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_a & -\mathcal{T}_b \\ \mathcal{T}_b^t & Z_c \end{bmatrix} \quad (99.1)$$

$$M' = \begin{bmatrix} S & -\sqrt{\alpha S} & -\sqrt{\omega K} \\ -\sqrt{\alpha S} & \alpha & \omega \\ \sqrt{\omega K} & -\omega & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y'_a & -\mathcal{T}'_b \\ \mathcal{T}'_b^t & Z'_c \end{bmatrix} \quad (99.2)$$

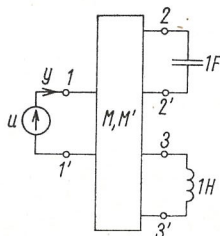


Fig. 46. The voltage-input 1-port with the extracted capacitor and inductor

The transformer realization of hybrid matrix M with a voltage input is performed according to the general structure shown in Figure A.6.

Each matrix denoted in Figure A.6 results from the division of the matrices M and M' into admittance and impedance parts as shown in (9). It will be seen that

$$Y_a = \begin{bmatrix} S & \sqrt{\alpha S} \\ \sqrt{\alpha S} & \alpha \end{bmatrix}. \quad (100.1)$$

$$Z_c = \alpha. \quad (100.2)$$

The turns-ratio matrix $\mathcal{T}_b$ of the 3-port transformer is

$$\mathcal{T}_b = \begin{bmatrix} -\sqrt{\omega K} \\ -\omega \end{bmatrix}. \quad (101)$$

Now we can successively synthesize the matrices Y_a , Z_c , and $\mathcal{T}_b$. The congruent factorization defined by (A.11) of the admittance matrix Y_a gives

$$\mathcal{T}_a = \begin{bmatrix} \sqrt{S} \\ \sqrt{\alpha} \end{bmatrix}. \quad (102)$$

The scheme of the 2-port of the impedance Z_a is based on the general structure Figure A.8. This circuit is shown in Figure 47.

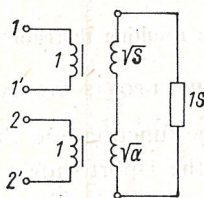


Fig. 47. The 2-port of admittance Y_a

The congruent factorization defined by (A.10) of the impedance matrix Z_c gives

$$\mathcal{T}_c = \sqrt{\alpha} \quad (103)$$

The scheme of the 1-port of the impedance Z_c is based on the general structure Figure A.7. The circuit is shown in Figure 48.

The 3-port transformer whose turns-ratio matrix is defined by (101) is shown in Figure 49.

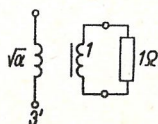


Fig. 48. The 1-port of impedance Z_c

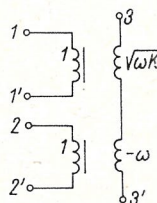


Fig. 49. The 3-port transformer $\mathcal{T}_b$

Connecting the circuit shown in Figures 47, 48, and 49 according to the general structure (Figure A.6) gives the nondynamic 3-port whose hybrid matrix is M . This 3-port is shown in Figure 50. Matrices Y'_a , Z'_c , $\mathcal{T}'_b$ follow from the division of the hybrid matrix M' .

$$Y'_a = \begin{bmatrix} S & -\sqrt{\alpha S} \\ -\sqrt{\alpha S} & \alpha \end{bmatrix}, \quad (104.1)$$

$$Z'_c = \alpha \quad (104.2)$$

$$\mathcal{T}'_b = [\sqrt{\omega K} - \omega]^t.$$

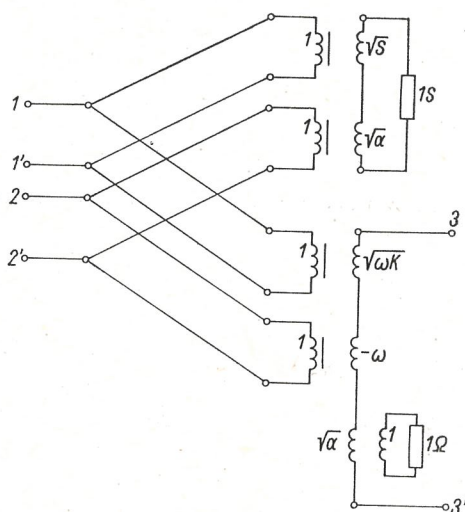


Fig. 50. The 3-port of hybrid matrix M

The admittance matrix Y'_a can be realized in two variants.

Variant 1:

$$\mathcal{T}'_{a1} = \begin{bmatrix} -\sqrt{S} \\ \sqrt{\alpha} \end{bmatrix} \quad (105.1)$$

Variant 2:

$$\mathcal{T}'_{aII} = \begin{bmatrix} \sqrt{S} \\ -\sqrt{\alpha} \end{bmatrix}. \quad (105.2)$$

Variant 1 leads to the switched nondynamical 3-port shown in Figure 51.

Terminating the port 22' with 1 F capacitor and the port 33' with 1 H inductor and replacing the switches by thyristors gives the circuit shown in Figure 52. The dynamical thyristor 1-port shown in Figure 53 is obtained as a result of Variant 2.

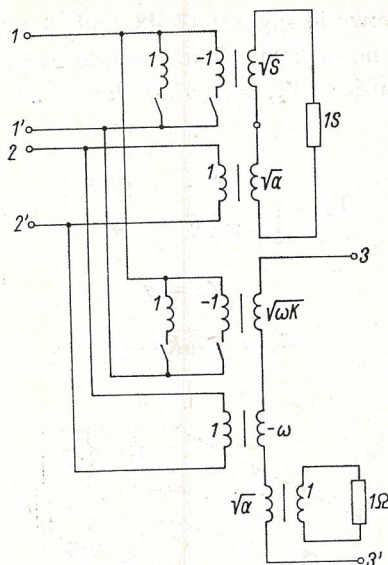
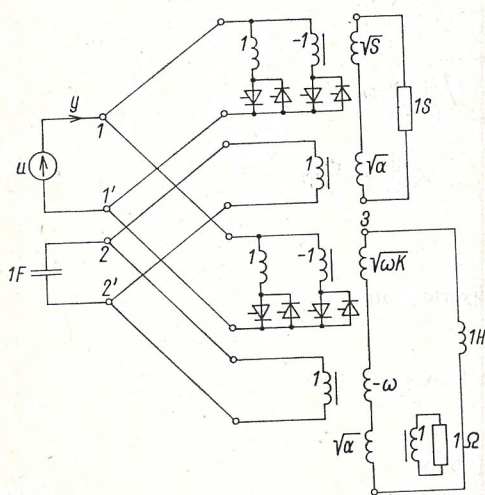
Fig. 51. The switched 3-port of hybrid matrices M and M' 

Fig. 52. The thyristor structure followed from Variant 1

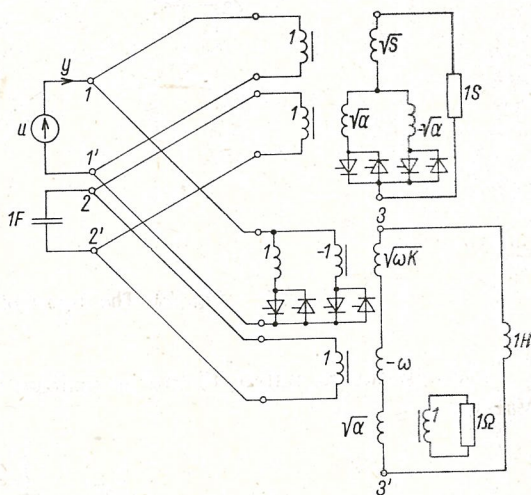


Fig. 53. The thyristor structure followed from Variant 2

7. RLC SWITCHED 1-PORTS

In this Section we consider switched 1-ports containing k inductors and k capacitors. Therefore the dimension of a state vector is $n = 2k$. Matrices A, B, C, D have the form shown in (37) with $n = 2k$. Let d.c. input function be given

$$u(t) = U \quad \text{for} \quad -\infty < t < \infty \quad (106)$$

and output function

$$y(t) = \sum_{i=1}^k h_i e^{-\alpha_i t} \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad \text{for } 0 \leq t \leq T/2, \quad (107.1)$$

$$y(t) = y(t + T/2) \quad \text{for } -\infty < t < \infty, \quad (107.2)$$

We assume

$$\alpha_i > 0 \quad \text{for } i = 1, \dots, k. \quad (108)$$

Let us denote

$$S_i = h_i [\sin \varphi_i + e^{-\alpha_i T/2} \sin(\omega_i T/2 + \varphi_i)] / 2U. \quad (109.1)$$

$$K_i = h_i [\cos \varphi_i + e^{-\alpha_i T/2} \cos(\omega_i T/2 + \varphi_i)] / 2U. \quad (109.2)$$

Additionally let it be assumed

$$S_i > 0 \quad \text{for } i = 1, \dots, k \quad (110.1)$$

$$K_i > 0 \quad \text{for } i = 1, \dots, k \quad (110.2)$$

$$\omega_i S_i = \alpha_i K_i \quad \text{for } i = 1, \dots, k \quad (110.3)$$

We choose the state matrix A in a skew-diagonal form

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & -\omega_1 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & \dots & -\alpha_k & -\omega_k & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \omega_k & -\alpha_k & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ \omega_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix}. \quad (111)$$

Applying (24) and (107) gives

$$D = \sum_{i=1}^k S_i \quad (112)$$

the right side of (25) for the output function (107) can be expressed as

$$[y^{(1)}(0) + y^{(1)}(T/2)] / 2U = \sum_{i=1}^k (-\alpha_i S_i + \omega_i K_i) \quad (113.1)$$

$$[y^{(2)}(0) + y^{(2)}(T/2)] / 2U = \sum_{i=1}^k [-\alpha_i (-\alpha_i S_i + \omega_i K_i) + \omega_i (-\alpha_i K_i - \omega_i S_i)]. \quad (113.2)$$

As it was mentioned, a circuit synthesized in this Section contains k inductors and k capacitors thus the matrix Σ in (A.3) has the form

$$\Sigma = \text{diag} [I_k, -I_k]. \quad (114)$$

From (A.3) is obtained

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \\ b_{k+1} \\ \vdots \\ b_{2k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 \\ \vdots \\ -c_k \\ c_{k+1} \\ \vdots \\ c_{2k} \end{bmatrix} \quad (115)$$

Combining (111) and (115) the left side of (25) can be expressed as

$$CB = \sum_{i=1}^k (-b_i^2 + b_{2k+1-i}^2), \quad (116.1)$$

$$CAB = \sum_{i=1}^k [-\alpha_i(-b_i^2 + b_{2k+1-i}^2) + \omega_i b_i b_{2k+1-i}]. \quad (116.2)$$

Substituting (113) and (114) into (25) gives

$$b_i^2 - b_{2k+1-i}^2 = \alpha_i S_i - \omega_i K_i \quad \text{for } i = 1, \dots, k, \quad (117.1)$$

$$2b_i b_{2k+1-i} = -\alpha_i K_i - \omega_i S_i \quad \text{for } i = 1, \dots, k. \quad (117.2)$$

Solution of (117) is as follows

$$b_i = \sqrt{\alpha_i S_i - \omega_i K_i + \sqrt{(\alpha_i^2 + \omega_i^2)(S_i^2 + K_i^2)}/2}, \quad (118.1)$$

$$b_{2k+1-i} = -\sqrt{-\alpha_i S_i + \omega_i K_i + \sqrt{(\alpha_i^2 + \omega_i^2)(S_i^2 + K_i^2)}/2} \quad (118.2)$$

for $i = 1, \dots, k$.

Taking in consideration the condition (110) the above results can be simplified

$$B = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_1 S_1} \\ \vdots \\ \sqrt{\alpha_k S_k} \\ -\sqrt{\omega_k K_k} \\ \vdots \\ -\sqrt{\omega_1 K_1} \end{bmatrix}. \quad (119)$$

By virtue of (115) is obtained

$$C = [-\sqrt{\alpha_1 S_1} \dots -\sqrt{\alpha_k S_k} -\sqrt{\omega_k K_k} \dots -\sqrt{\omega_1 K_1}]. \quad (120)$$

7.2. RLC SWITCHED 1-PORTS WITH A CURRENT INPUT FUNCTION

Let the input function defined by (106) be a current function and the output function defined by (107) be a voltage function. We synthesize the 1-port shown in Figure 54. The hybrid matrices M and M' of the nondynamical $(2k+1)$ -port shown in Figure 54 are

$$M = \left[\begin{array}{ccc|ccc} S_1 + \dots + S_k & \sqrt{\alpha_1 S_1} & \dots & \sqrt{\alpha_k S_k} & \sqrt{\omega_k K_k} & \dots & \sqrt{\omega_1 K_1} \\ \sqrt{\alpha_1 S_1} & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & \omega_1 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \\ \sqrt{\alpha_k S_k} & 0 & \dots & \alpha_k & \omega_k & \dots & 0 \\ \hline -\sqrt{\omega_k K_k} & 0 & \dots & -\omega_k & \alpha_k & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \\ -\sqrt{\omega_1 K_1} & -\omega_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & \alpha_1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} Z_a & \mathcal{T}_b^t \\ \hline -\mathcal{T}_b & Y_c \end{array} \right] \quad (121.1)$$

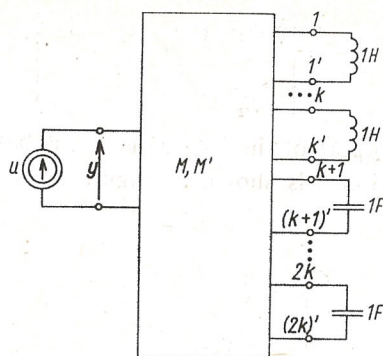


Fig. 54. The current-input 1-port with extracted k inductors and k capacitors

$$\begin{aligned}
 M' = & \begin{bmatrix} S_1 + \dots + S_k & -\sqrt{\alpha_1 S_1} & \dots & -\sqrt{\alpha_k S_k} & -\sqrt{\omega_k K_k} & \dots & -\sqrt{\omega_1 K_1} \\ -\sqrt{\alpha_1 S_1} & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & \omega_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sqrt{\alpha_k S_k} & 0 & \dots & \alpha_k & \omega_k & \dots & 0 \\ \hline \sqrt{\omega_k K_k} & 0 & \dots & -\omega_k & \alpha_k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\omega_1 K_1} & -\omega_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & \alpha_1 \end{bmatrix} = \\
 & = \left[\begin{array}{c|c} Z'_a(Y'_a) & \mathcal{T}'_b(-\mathcal{T}'_b) \\ \hline -\mathcal{T}'_b(\mathcal{T}'_b) & Y'_c(Z'_c) \end{array} \right]. \quad (121.2)
 \end{aligned}$$

The transformer realization of hybrid matrix M with a current input function is performed according to the general structure shown in Figure A.5. Each matrix denoted in Figure A.5 results from the division of the matrix M or M' into impedance and admittance parts as shown in (121). It will be seen that

$$Z_a = \begin{bmatrix} S_1 + \dots + S_k & \sqrt{\alpha_1 S_1} & \dots & \sqrt{\alpha_k S_k} \\ \sqrt{\alpha_1 S_1} & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\alpha_k S_k} & 0 & \dots & \alpha_k \end{bmatrix} \quad (122.1)$$

$$Y_c = \text{diag}[\alpha_k \dots \alpha_1]. \quad (122.2)$$

The turns-ratio matrix $\mathcal{T}_b$ of the $(2k+1)$ -port transformer is

$$\mathcal{T}_b = \begin{bmatrix} \sqrt{\omega_k K_k} & 0 & \dots & \omega_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\omega_1 K_1} & \omega_1 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (123)$$

Now we can successively synthesize matrices Z_a , Y_c , and $\mathcal{T}_b$. The congruent factorization defined by (A.10) of the impedance matrix Z_a gives

$$\mathcal{T}_b = \begin{bmatrix} \sqrt{S_1} & \sqrt{\alpha_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{S_k} & 0 & \dots & \sqrt{\alpha_k} \end{bmatrix}. \quad (124)$$

The scheme of the $(k+1)$ -port of the impedance Z_a is based on the general structure given in Figure A.7. This circuit is shown in Figure 55.

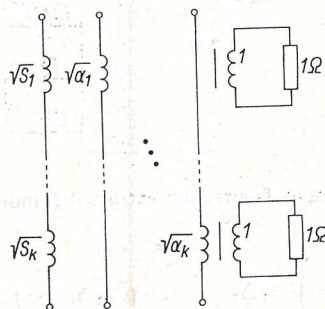


Fig. 55. The $(k+1)$ -port of impedance Z_a

The congruent factorization defined by (A.11) of the admittance matrix Y_c gives

$$\mathcal{T}_c = \text{diag} [\sqrt{\alpha_k} \dots \sqrt{\alpha_1}]. \quad (125)$$

The scheme of the k -port of the admittance Y_c is based on the general structure given by Figure A.8. This circuit is shown in Figure 56. The $(2k+1)$ -port whose turns-ratio matrix is defined by (123) is shown in Figure 57.

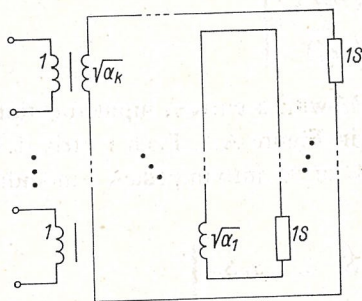


Fig. 56. The k -port of admittance Y_c

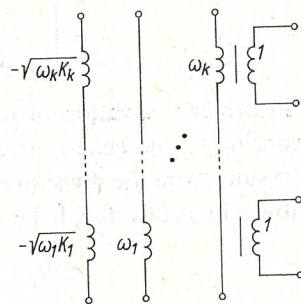


Fig. 57. The $(2k+1)$ -port transformer $\mathcal{T}_b$

Connecting the circuits shown in Figures 55, 56, and 57 according to the general structure shown in Figure A.5 gives the nondynamic $(2k+1)$ -port whose hybrid matrix is M . Thus $(2k+1)$ -port is shown in Figure 58.

Matrices Z'_a , Y'_c , and $\mathcal{T}'_b$ follow from the division of the hybrid matrix M'

$$Z'_a = \begin{bmatrix} S_1 + \dots + S_k & -\sqrt{\alpha_1} S_1 & \dots & -\sqrt{\alpha_k} S_k \\ -\sqrt{\alpha_1} S_1 & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sqrt{\alpha_k} S_k & 0 & \dots & \alpha_k \end{bmatrix} \quad (126.1)$$

$$Y'_c = Y_c \quad (126.2)$$

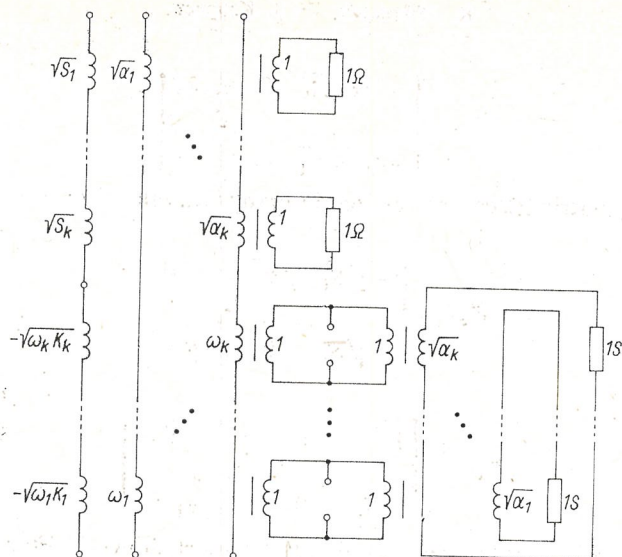


Fig. 58. The $(2k+1)$ -port of hybrid matrix M

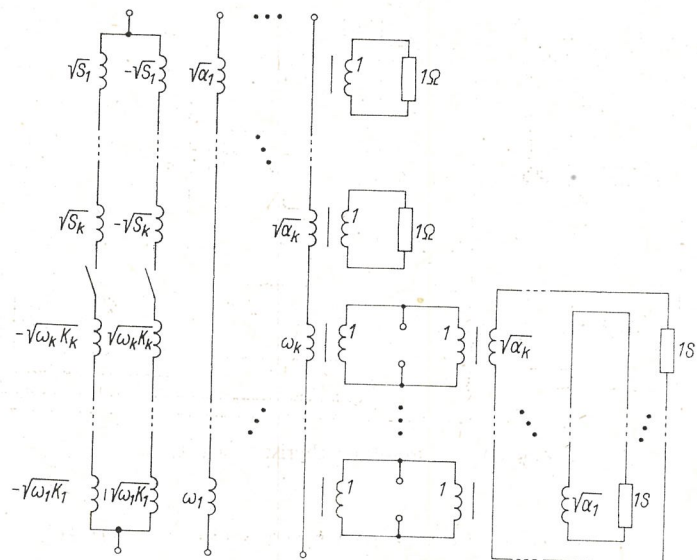


Fig. 59. The switched $(2k+1)$ -port of hybrid matrices M and M'

$$\mathcal{T}'_b = \begin{bmatrix} -\sqrt{\omega_k K_k} & 0 & \dots & \omega_k \\ \vdots & & \ddots & \\ -\sqrt{\omega_1 K_1} & \omega_1 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (126.3)$$

The impedance matrix Z'_a can be realized in many variants. Two of them are

Variant 1:

$$\mathcal{T}'_{a1} = \begin{bmatrix} -\sqrt{S_1} & \sqrt{\alpha_1} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -\sqrt{S_k} & 0 & \dots & \sqrt{\alpha_k} \end{bmatrix} \quad (127.1)$$

Variant 2:

$$\mathcal{T}'_{a11} = \begin{bmatrix} \sqrt{S_1} & -\sqrt{\alpha_1} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \sqrt{S_k} & 0 & \dots & -\sqrt{\alpha_k} \end{bmatrix}. \quad (127.2)$$

Variant 1 leads to the switched nondynamic $(2k+1)$ -port shown in Figure 59.

Terminating the ports $22', \dots, (k+1)(k+1)'$ with 1 H inductors and the ports $(k+2)(k+2)', \dots, (2k)(2k)'$ with 1 F capacitors and replacing the switches by thyristors gives the circuit shown in Figure 60.

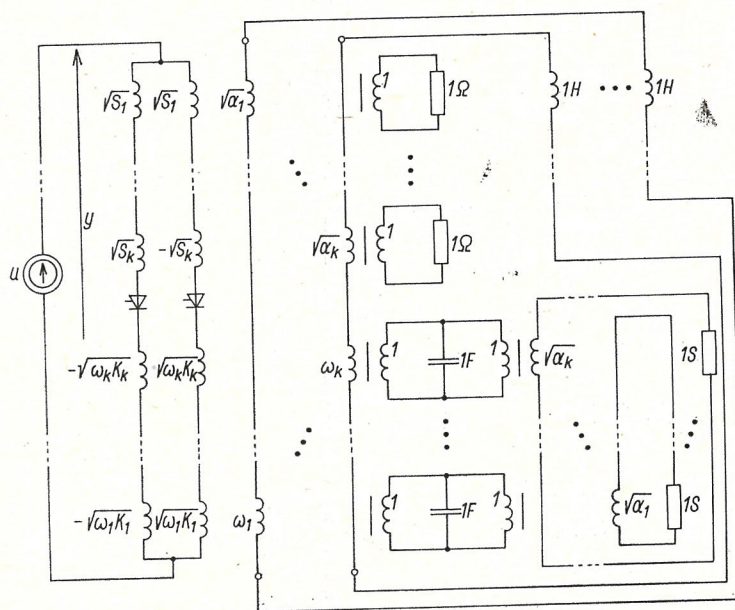


Fig. 60. The resulting thyristor structure

7.3. RLC SWITCHED 1-PORTS WITH A VOLTAGE INPUT FUNCTION

Let the d.c. input function be a voltage function and the output function defined by (107) be a current function. We synthesize the 1-port shown in Figure 61. The hybrid matrices M and M' of the nondynamic $(2k+1)$ -port shown in Figure 61 are given in (121). The transformer realization of hybrid matrix M with a voltage input

function is performed according to the general structure (Figure A.6). Each matrix denoted in Figure A.6 results from the division of the matrices M or M' into admittance and impedance parts as shown in brackets in (121). It will be seen that

$$Y_a = \begin{bmatrix} S_1 + \dots + S_k & \sqrt{\alpha_1 S_1} & \dots & \sqrt{\alpha_k S_k} \\ \sqrt{\alpha_1 S_1} & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\alpha_k S_k} & 0 & \dots & \alpha_k \end{bmatrix} \quad (128.1)$$

$$Z_c = \text{diag}[\alpha_k, \dots, \alpha_1] \quad (128.2)$$

The turns-ratio matrix $\mathcal{T}_b$ of the $(2k+1)$ -port transformer is

$$\mathcal{T}_b = \begin{bmatrix} -\sqrt{\omega_k K_k} & \dots & -\sqrt{\omega_1 K_1} \\ 0 & \dots & -\omega_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\omega_k & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (129)$$

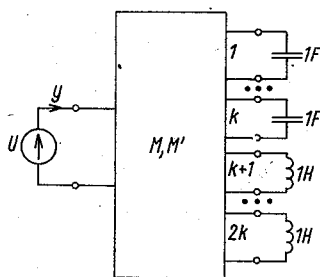


Fig. 61. The current-input 1-port with extracted k capacitors and k inductors

Now, we can successively synthesize matrices Y_a , Z_c , and $\mathcal{T}_b$. The congruent decomposition defined by (A.11) of the admittance matrix Y_a gives

$$\mathcal{T}_a = \begin{bmatrix} \sqrt{S_1} & \dots & \sqrt{S_k} \\ \sqrt{\alpha_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt{\alpha_k} \end{bmatrix}. \quad (130)$$

The scheme of the $(k+1)$ -port of the admittance matrix Y_a is based on the general structure given in Figure A.8. This circuit is shown in Figure 62.

The congruent factorization defined by (A.10) of the impedance Z_c gives

$$\mathcal{T}_c = \text{diag}[\sqrt{\alpha_k}, \dots, \sqrt{\alpha_1}]. \quad (131)$$

The scheme of the k -port of the impedance Z_c is based on the general structure (Figure A.7). This circuit is shown in Figure 63. The $(2k+1)$ -port whose turns-ratio matrix is defined by (129) is shown in Figure 64.

Connecting the circuits shown in Figures 62, 63, and 64 according to Figure A.6 gives the nondynamic $(2k+1)$ -port whose hybrid matrix is M . This $(2k+1)$ -port is shown

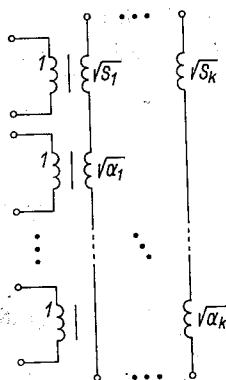


Fig. 62. The transformer applied to realize admittance matrix Y_a

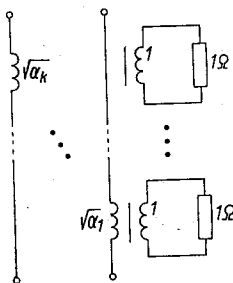


Fig. 63. The k -port of impedance Z_a

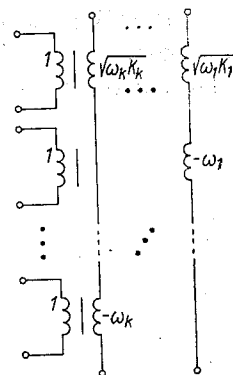


Fig. 64. The $(2k+1)$ -port transformer $\mathcal{T}_b$

in Figure 65. Matrices Y'_a , Z'_c , and $\mathcal{T}'_b$ follow from the division of the hybrid matrix (121.2).

$$Y'_a = \begin{bmatrix} S_1 + \dots + S_k & -\sqrt{\alpha_1} S_1 & \dots & -\sqrt{\alpha_k} S_k \\ -\sqrt{\alpha_1} S_1 & \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sqrt{\alpha_k} S_k & 0 & \dots & \alpha_k \end{bmatrix} \quad (132.1)$$

$$Z'_c = Z_c \quad (132.2)$$

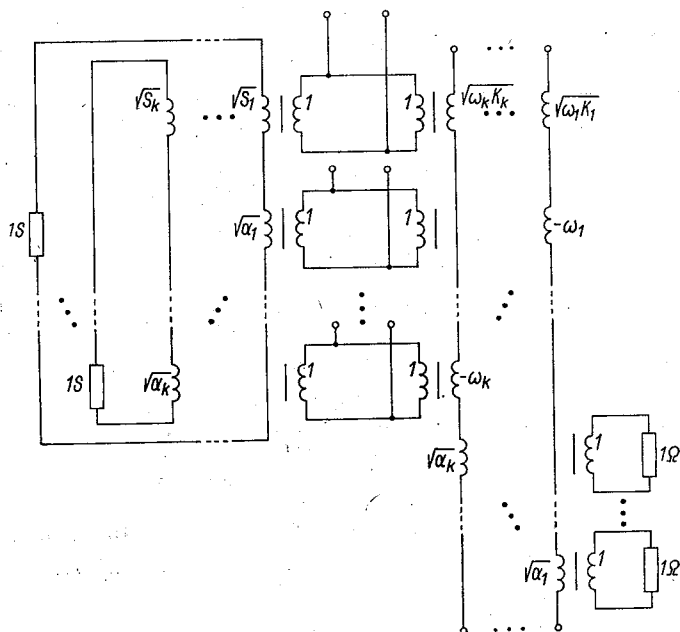


Fig. 65. The $(2k+1)$ -port of hybrid matrix M

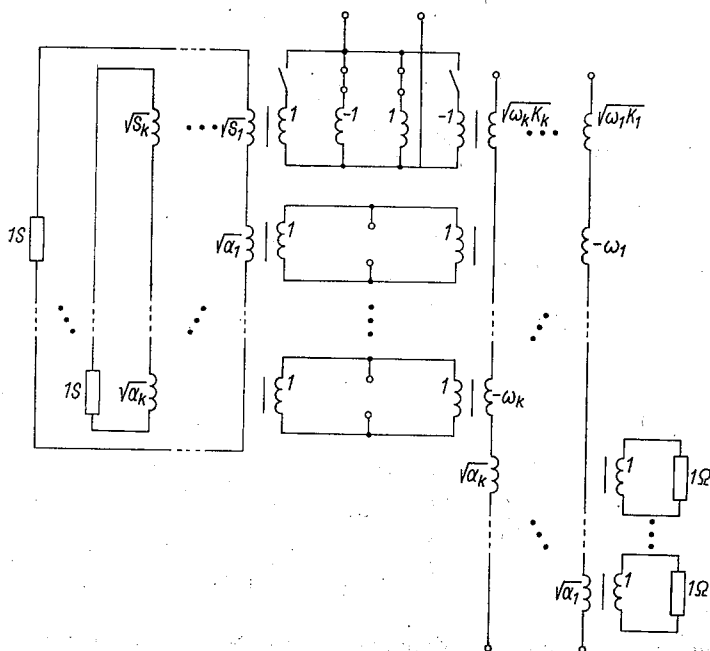


Fig. 66. The switched $(2k+1)$ -port of hybrid matrices M and M'

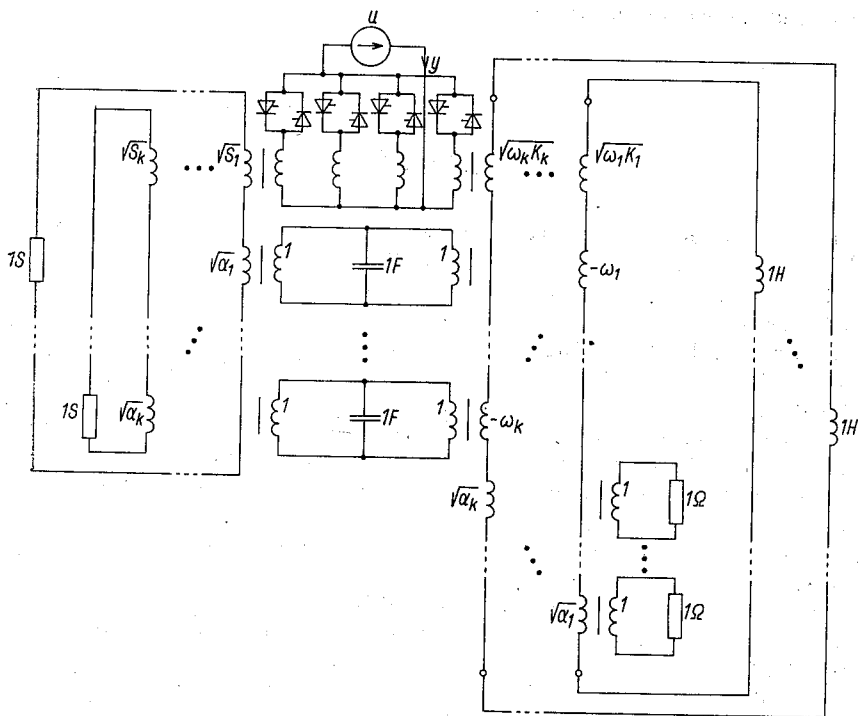


Fig. 67. The resulting thyristor structure

$$\mathcal{T}'_b = \begin{bmatrix} \sqrt{\omega_k K_k} & 0 & \dots & \omega_k \\ \vdots & & \ddots & \\ \sqrt{\omega_1 K_1} & \omega_1 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (132.3)$$

The admittance matrix can be realized in many variants. Two of them are Variant 1:

$$\mathcal{T}'_{a1} = \begin{bmatrix} -\sqrt{S_1} & \dots & -\sqrt{S_k} \\ \sqrt{\alpha_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & \sqrt{\alpha_k} \end{bmatrix}. \quad (133.1)$$

Variant 2:

$$\mathcal{T}'_{aII} = \begin{bmatrix} \sqrt{S_1} & \dots & \sqrt{S_k} \\ -\sqrt{\alpha_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & -\sqrt{\alpha_k} \end{bmatrix}. \quad (133.2)$$

Variant 1 leads to the switched nondynamic $(2k+1)$ -port shown in Figure 66.

Terminating the ports $22', \dots, (k+1)(k+1)'$ with 1 F capacitors and the ports $(k+2)(k+2)', \dots, (2k)(2k)'$ with 1 H inductors and replacing the switches by thyristors gives the circuit shown in Figure 67.

REFERENCES

1. W. S. Kropacz, K. Mikołajuk, and J. Ogonowski, *Synthesis of passive switching networks*, Proc. IS on CAS, Rome, pp. 329—332, 1982.
2. W. S. Kropacz, K. Mikołajuk, *Synteza obwodów o zmiennej strukturze*, Archiwum Elektrotechniki, pp. 67—76, 1983.
3. W. S. Kropacz, K. Mikołajuk, and A. Toboła, *Synthesis of passive networks containing periodically operated thyristors*, Int. Journal of Circuit Theory and Applications, vol. 12, pp. 375—393, 1984.
4. K. Mikołajuk, W. S. Kropacz, and A. Toboła, *Realizability of passive switching circuits*, Proc. ECCTD, pp. 757—760, 1985.
5. R. M. Davis, *Power diode and thyristor circuits*, IEE Power Engineering Series, Peter Peregrinus Ltd., 1979.
6. H. Tunia i in., *Układy energoelektryczne, Obliczanie, modelowanie, projektowanie*, Warszawa, WNT 1982.
7. H. Tunia, B. Winiarski, *Podstawy energoelektroniki*, Wyd. 2., Warszawa, WNT 1980.
8. R. E. Kalman, P. L. Falb, and M. A. Arbib, *Topics in mathematical system theory*, McGraw-Hill, New York, 1969.
9. B. D. O. Anderson, S. Vongpanitlerd, *Network analysis and synthesis. A modern systems theory approach*, Prentice Hall, New Jersey, 1973.
10. F. R. Gantmacher, *Teoria matric*, G.I.T.T.L., Moscow, 1954.

APPENDIX I

STATE VARIABLE SYNTHESIS: REACTANCE EXTRACTION METHOD

Let a circuit have a minimal realization $\{A, B, C, D\}$. We consider two special cases. In the first case an input vector function $u(t)$ is a current vector and an output vector function $y(t)$ is a voltage vector. In the second case an input vector function is a voltage vector and an output vector function is a current vector. The reactance extraction structure for the first case is shown in Figure A.1. The reactance extraction structure for the second case is shown in Figure A.2.

The non-dynamical $(m+n)$ -port has the hybrid matrix M . This hybrid matrix can be expressed in terms of a minimal realization as follows

$$M = \begin{bmatrix} D & -C \\ B & -A \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

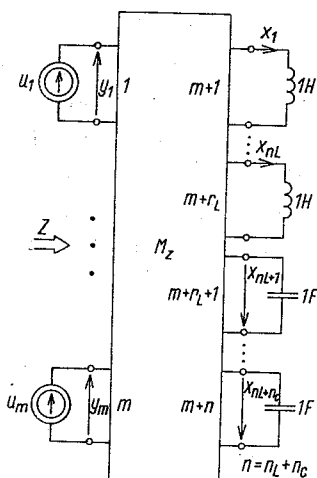


Fig. A.1. The first case of reactance-extraction structure

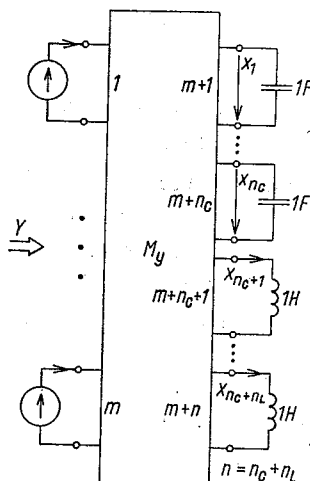


Fig. A.2. The second case of reactance-extraction structure

APPENDIX II

PASSIVE AND RECIPROCAL CIRCUIT: STATE VARIABLE CONDITIONS

Passivity

A circuit with the minimal realization $\{A, B, C, D\}$ is passive if there are such real matrices L and W_0 that

$$A + A^t = -LL^t \quad (\text{A.2.1})$$

$$B = C^t - LW_0 \quad (\text{A.2.2})$$

$$D + D^t = W_0^t W_0 \quad (\text{A.2.3})$$

The row number of the matrix L is equal to the state vector dimension n ; the column number of the matrix W_0 is equal to the input vector dimension m . The other dimensions of the matrices L and W_0 can be chosen at discretion.

Reciprocity

A circuit with the minimal realization $\{A, B, C, D\}$ is reciprocal if the matrices $\{A, B, C, D\}$ satisfy the following conditions

$$\sum A = A^t \sum \quad (\text{A.3.1})$$

$$\sum B = -C^t \quad (\text{A.3.2})$$

$$D = D^t \quad (\text{A.3.3})$$

where the matrix $\sum$ is diagonal with entries 1 and -1 only. The matrix $\sum$ can be written in the form

$$\sum = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

where I_p and I_q are unit matrices. The dimensions p and q indicate inductor and capacitor numbers. For the first case shown in Figure A.1 p is equal to the number of inductors and q is equal to the number of capacitors. For the second case (Figure A.2) p is equal to the number of capacitors and q is equal to the number of inductors. The minimal realization which fulfils condition A.2 and A.3 is called a special minimal realization. For such realization the non-dynamical $m+n$ -port described by hybrid matrix M defined by A.1 is passive and reciprocal.

APPENDIX III

MULTI-PORT TRANSFORMER

The multiport transformer shown in Figure A.3 has q current controlled ports and r voltage controlled ports. The turns-ratio matrix of this transformer is given by $\mathcal{T} \in R^{r \times q}$.

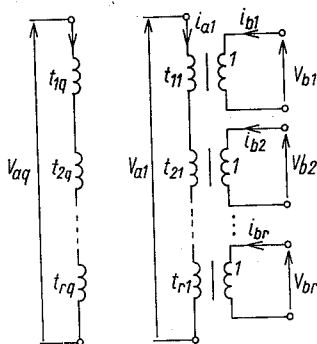


Fig. A.3. The multiport transformer

Let us denote

$$i_a = [i_{a1} \ i_{a2} \ \dots \ i_{aq}]^t, \quad (\text{A.5.1})$$

$$i_b = [i_{b1} \ i_{b2} \ \dots \ i_{br}]^t, \quad (\text{A.5.2})$$

$$v_a = [v_{a1} \ v_{a2} \ \dots \ v_{aq}]^t, \quad (\text{A.5.3})$$

$$v_b = [v_{b1} \ v_{b2} \ \dots \ v_{br}]^t. \quad (\text{A.5.4})$$

The transformer is described by the equations

$$i_b = -\mathcal{T} i_a \quad (\text{A.6.1})$$

$$v_a = \mathcal{T}^t v_b. \quad (\text{A.6.2})$$

Equations (A.6) can be written in the hybrid matrix form

$$\begin{bmatrix} v_a \\ i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{T}^t \\ -\mathcal{T} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ v_b \end{bmatrix} \quad (\text{A.7.1})$$

or in the inverse hybrid form

$$\begin{bmatrix} i_b \\ v_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathcal{T} \\ \mathcal{T}^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_b \\ i_a \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7.2})$$

A multiport transformer is shown in Figure A.4.

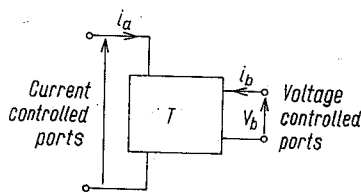


Fig. A.4. The symbol of the multiport transformer

APPENDIX IV

THE GENERAL TRANSFORMER STRUCTURES OF NONDYNAMICAL PASSIVE RECIPROCAL CIRCUITS

Let a reciprocal nondynamical multiport be described by a hybrid matrix M . A hybrid matrix M can always be divided as follows

$$M = \begin{bmatrix} Z_a & \mathcal{T}_b^t \\ -\mathcal{T}_b & Y_c \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

or

$$M = \begin{bmatrix} Y_a & -\mathcal{T}_b \\ \mathcal{T}_b^t & Z_c \end{bmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

The general structure shown in Figure A.5 responds to the matrix form given in (A.8).

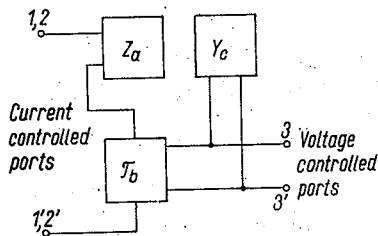


Fig. A.5. The transformer structure realizing hybrid matrix with current inputs

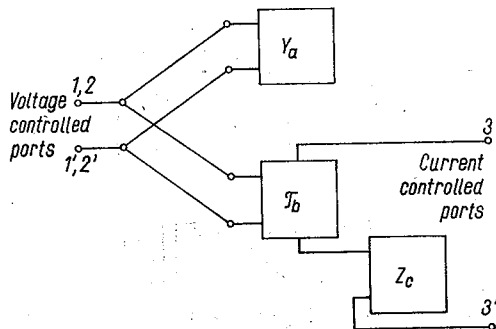


Fig. A.6. The transformer structure realizing hybrid matrix with voltage inputs

The general structure shown in Figure A.6 responds to the matrix form given in (A.9).

A reciprocal nondynamical multiport described by an impedance matrix Z can be synthesized using a multiport transformer according to the general structure given in Figure A.7.

The turns-ratio matrix $\mathcal{T}$ of the transformer in Figure A.7 can be calculated according to the following congruent factorization

$$Z = \mathcal{T}' I \mathcal{T} \quad (\text{A.10})$$

where $\text{rank } I = \text{rank } Z$. A reciprocal nondynamic multiport described by an admittance matrix Y can be synthesized using a multiport transformer according to the general structure given in Figure A.8.

The turns-ratio matrix $\mathcal{T}$ of the transformer in Figure A.8. can be calculated according to the following congruent factorization

$$Y = \mathcal{T} I \mathcal{T}' \quad (\text{A.11})$$

where $\text{rank } I = \text{rank } Y$.

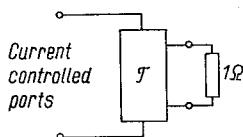


Fig. A.7. The transformer structure realizing an impedance matrix

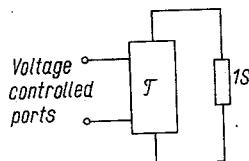


Fig. A.8. The transformer structure realizing and admittance matrix

K. MIKOŁAJUK, W. S. KROPACZ

SYNTEZA FALOWNIKÓW TYRYSTOROWYCH

Streszczenie

Podano warunki realizowalności przebiegów okresowych o symetrii dwupołkowej w układach pasywnych przełączanych. Podano jakie związki zachodzą dla macierzy realizacji minimalnych w układach przełączanych generujących przebiegi okresowe o symetrii dwupołkowej. Związki te wynikają z ciągłości zmiennych stanu. Jako dane wyjściowe do syntezy przyjmowane są funkcje czasu, odpowiedzi i wymuszenia. Dokonano syntezy dwójników RL , RC i RLC o dwóch przełączeniach w ciągu okresu. W podanych strukturach wykorzystuje się transformator wielowrotnikowy o przełączanych uzwojeniach. Przedstawiona synteza może być wykorzystana przy projektowaniu przekształtników tyrystorowych i tranzystorowych.

K. MIKOŁAJUK, W. S. KROPACZ

SYNTHESE DES ONDULEURS AUX THYRISTORS

Résumé

Des conditions de la réalisation des signaux périodiques et symétriques dans les circuits passifs de commutation sont formulées dans cet article. On a donné des expressions qui déterminent les matrices de l'état. Ces expressions résultent de la continuité de périodicité des signaux considérés. En se basant sur ces conditions on a élaboré la méthode de synthèse des dipôles RL , RC et RLC caractérisés par deux commutations en une période. On a montré, en plus, que les dipôles de commutation RL et RC peuvent exciter deux sortes de signaux exponentiels. Les structures élaborées utilisent des transformateurs en forme de multipôles avec enroulements en commutation.

K. MIKOŁAJUK, W. S. KROPACZ

SYNTHESE DER GLEICHSTROM/WECHSELSTROM THYRISTORSTROMRICHTER

Zusammenfassung

In dem Aufsatz wurden neue kanonische Thyristorstrukturen dargestellt. Neue Realisierungsbedingungen der passiven Umschaltkreise wurden mit periodischen, symmetrischen Signalen bestimmt. Diese Bedingungen ermöglichen die Bezeichnung einer Synthesemethode für die Identifizierung einer Sequenz der linearen stationären Kreise. Auf Grund dieser Methode wurden sechs Strukturen von Generaltransformatoren der Thyristorstromrichter bestimmt. Mittels der Synthesemethode wird es möglich sein, neue Thyristor- und Transistoranlagen zu schaffen, insbesondere Kompensationsvorrichtungen.

K. МИКОЛАЮК, В. С. КРОПАЧ

СИНТЕЗ ТИРИСТОРНЫХ ИНВЕРТОРОВ

Резюме

Приведены условия realizовальности периодических сигналов в переключающих тиристорных и транзисторных системах. Выведены формулы для вычисления матриц в методе переменных состояния. Эти формулы следуют из условий непрерывности и периодичности переменных состояния. На основании этих формул проведен синтез переключающих двухполюсников состоящих из элементов RL , RC и RLC . Показано, что переключающие двухполюсники RL и RC могут генерировать два типа экспоненциальных сигналов. В приведенных структурах используется многополюсный трансформатор с переключающими обмотками.

An Analysis of Multiphase Resistance Networks with Periodically Variable Parameters^{*)}

TADEUSZ J. SOBCZYK (KRAKÓW)

*Instytut Maszyn i Sterowania Układów Elektroenergetycznych
Akademia Górniczo-Hutnicza im. S. Staszica w Krakowie*

The paper received 1985.06.05

An analysis of the equations of resistance-type networks with a topology characteristic of multiphase thyristor systems has been presented in the paper. The case is considered when the parameters, voltages and currents are periodically variable in the time domain. Multiphase symmetric components have been used for description. As a result, infinite systems of algebraic equations are formulated interrelating the coefficients of the Fourier series of the voltage and current symmetric components. It has been shown by examples, how to use in practice the obtained equations for determination of voltage-current relationships in steady states in systems with semiconductor switching elements.

1. INTRODUCTION

The paper approaches the problem of determining the steady state in systems with controlled semiconductor elements. From the extremely wide class of such elements those have been selected which are most often used and which are important from the power-engineering point of view.

The controlled semiconductor elements such as diodes, thyristors etc., operating at mains frequency are modelled in two ways: as ideal switches or as resistances with stepwise variable parameters. The state of the switch or resistance value corresponding to the conducting or nonconducting state of the semiconductor element depends in real systems on the control of the elements and on the current and voltage values across them. The states of semiconductor elements in most of the engineering systems vary periodically in steady state conditions.

Approximation of semiconductor elements by periodically stepwise variable resistance elements is used for the analysis carried through in the present paper.

The paper addresses two most often used structures of multiphase systems with semiconductor elements, known as the one- and two-way systems.

The paper includes certain generalization of the results gained in the work: "*Analysis*

^{*)} The work reported in this paper was realized as a part of the government-sponsored project 05.5A „Chosen fundamental problems in electrical power engineering”.

of *Electromechanical Systems with Semiconductor Elements*" carried through in the framework of the general problem "*Selected Fundamental Research in the Field of Electrotechnics*" in the group "*Network Theory*".

2. MULTIPHASE ONE-WAY SYSTEM

The circuit shown in Fig. 1 will be analysed. The equations of this circuit are of the form:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_0 \\ U_0 \\ \vdots \\ U_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1(t) \\ R_2(t) \\ \vdots \\ R_N(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Further consideration will be conducted using symmetrical components of currents and voltages defines as follows:

$$\begin{bmatrix} U^0 \\ U^1 \\ \vdots \\ U^{N-1} \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} i^0 \\ i^1 \\ \vdots \\ i^{N-1} \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{N-1} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

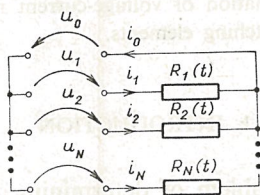


Fig. 1

where:

$$S = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \mathcal{E} & \dots & \mathcal{E}^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \mathcal{E}^{(N-1)} & \dots & \mathcal{E}^{(N-1)2} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{E} = e^{j \frac{2\pi}{N}}. \quad (2.3)$$

Equation (2.1) takes then the form:

$$\begin{bmatrix} U^0 \\ U^1 \\ \vdots \\ U^{N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{N} U_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^0 & R^{N-1} & \dots & R^1 \\ R^1 & R^0 & \dots & R^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R^{N-1} & R^{N-2} & \dots & R^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^0 \\ i^1 \\ \vdots \\ i^{N-1} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

where:

$$\begin{bmatrix} R^0 \\ R^1 \\ \vdots \\ R^{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} S \begin{bmatrix} R_1(t) \\ R_2(t) \\ \vdots \\ R_N(t) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

According to what has been said in the introduction, the system will be analysed when:

$$R_n(t) = R_n(t+T), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.6)$$

An additional assumption is made, that the changes of the particular resistances occur in a symmetrical sequences so that there is:

$$R_n(t) = R\left(t - (n-1)\frac{T}{N}\right), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.7)$$

On the $R(t)$ function the assumption is made that it can be expanded into the Fourier series:

$$R(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_k e^{jk\omega t}; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Thus,

$$R_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_k^{-k(n-1)} e^{jk\omega t}; \quad n = 1, 2, \dots, N$$

and

$$R^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{n+kN} e^{j(n+kN)\omega t}; \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.8)$$

Moreover, we shall assume that $U_0, U_1, \dots, U_N$ are periodically variable, have the same period as the variation of the $R(t)$ resistance and can be expanded into a Fourier series. This allows us to write:

$$\begin{aligned} U^n &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_m^n e^{jm\omega t}; \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\ U_0 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_{0,m} e^{jm\omega t}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

The symmetrical components of currents can be expected to be a Fourier series:

$$i^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m^n e^{jm\omega t}; \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.10)$$

The determination of the quantitative relationship between the U_m^n , $U_{0,m}$ and I_m^n values is facilitated by the specific structure of the matrix:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} R^0 & R^{N-1} & \dots & R^1 \\ R^1 & R^0 & \dots & R^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R^{N-1} & R^{N-2} & & R^0 \end{bmatrix}.$$

The coefficients of its matrix Fourier series take a very simple form:

$$\mathcal{R} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_k e^{jk\omega t}$$

For, the matrix $\mathcal{R}_k$ can be represented in the form of a product of the Fourier series coefficient of the $R(t)$ function and the skewly symmetrical matrix in which only one line, distant from the main diagonal by $k(N) = k(\text{modulo } N)$ and containing units, is non-zero. For instance, the matrices $\mathcal{R}_{-1}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1$ are:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{-1} &= R_{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}; & \mathcal{R}_1 &= R_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{R}_0 &= R_0 \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.11)$$

After detailed analysis the relationships between the symmetrical components of currents and voltages can be represented in the form of N infinite sets of algebraic equations of the form:

$$(U^n) + (U_0^n) = (R^n)(I^n); \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.12)$$

where:

$$\begin{aligned}(I^n)^T &= [\dots I_m^{(n+m) \bmod N} \dots I_1^{(n+1) \bmod N}, I_0^n, I_{-1}^{(n-1) \bmod N} \dots I_{-m}^{(n-m) \bmod N} \dots] \\ (U^n)^T &= [\dots U_m^{(n+m) \bmod N} \dots U_1^{(n+1) \bmod N}, U_0^n, U_{-1}^{(n-1) \bmod N} \dots U_{-m}^{(n-m) \bmod N} \dots]\end{aligned}\quad (2.13)$$

The (U_0^n) vector is formed from the second one of the left side of Eq. (2.4), where only the zero-sequence component $\sqrt{N}U_0$ occurs. The (U_0^n) vector is formed similarly as the (U^n) one but the non-zero coefficients appear only there where the superscript indicates the occurrence of the zero-sequence component. The vectors for $n = 0$ and $n = 1$ will be written as examples.

$$\begin{aligned}(U_0^0)^T &= \sqrt{N} [\dots 0, U_{0,N}, 0 \dots 0, U_{0,0}, 0 \dots 0, U_{0,-N}, 0 \dots] \\ (U_0^1)^T &= \sqrt{N} [\dots 0, 0, U_{0,N-1} \dots 0, 0, U_{0,-1} \dots 0, 0, U_{0,-N-1} \dots]\end{aligned}\quad (2.14)$$

The $\mathcal{R}^n$ matrix is of the same form for all n values.

$$\mathcal{R}^n = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots R_0 & R_1 & R_2 \dots \\ \dots R_{-1} & R_0 & R_1 \dots \\ \dots R_{-2} & R_{-1} & R_0 \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}\quad (2.15)$$

The coefficients of the Fourier series of the $R(t)$ function appear in it.

Application examples

Example 1

The relationships are to be written for the steady state in an N -phase rectifier system acc. to Fig. 2.

Let us assume that the source voltages e_n form a symmetrical, monoharmonical system

$$e_n = \text{Real} \{ \sqrt{2} E e^{-(n-1)j\omega t} \}; \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.16)$$

and

$$e_0 = E_0 = \text{const}$$

If the $T_1 \dots T_N$ thyristors are replaced by the $R_1(t) \dots R_N(t)$ resistances satisfying the earlier assumptions, then the eqs. (2.12) can be used for description of the steady state supplemented by additional relationships between the U_n voltages and i_n currents expressed by symmetrical components

$$U_k^n = E_k^n - Z_e(k\omega) I_k^n \quad (2.17)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

where:

$$Z_e(\omega) = R_e + j\omega L_e$$

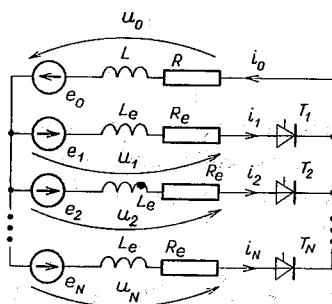


Fig. 2

The relationships between the U_0 voltage and the i^0 zero-sequence component of current can be written likewise

$$\sqrt{N} U_{0, kN} = \sqrt{N} E_{0, kN} - NZ(kN\omega) I_{kN}^0 \quad (2.18)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

where:

$$Z(\omega) = R + j\omega L.$$

Non-zero symmetric components of the e_n source voltages are obtained only for $n = 1$ and $n = N-1$.

$$e^1 = \sqrt{\frac{N}{2}} E e^{j\omega t} \quad e^{N-1} = \sqrt{\frac{N}{2}} E e^{-j\omega t}. \quad (2.19)$$

The above relationships allow to write the following system of algebraic equations describing the steady state in the system:

$$\mathcal{U} = (\mathcal{R} + \mathcal{Z}) \mathcal{I} \quad (2.20)$$

where:

$$(\mathcal{U})^T = \left[\dots \sqrt{\frac{N}{2}} E, \sqrt{N} E_0, \sqrt{\frac{N}{2}} E \dots \right]$$

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{I})^T &= [\dots I_{N+1}^1, \dots I_N^0, I_{N-1}^{N-1}, \dots I_1^1, I_0^0, I_{-1}^{N-1}, \dots I_{-N-1}^1, I_{-N}^0, I_{-N+1}^{N-1}, \dots] \\
 \mathcal{Z} &= \text{diag}[\dots Z_e((N+1)\omega), Z_e(N\omega) + NZ(N\omega), Z_e((N-1)\omega) \dots \\
 &\quad \dots Z_e(\omega), Z_e(0) + NZ(0), Z_e(-\omega) \dots \\
 &\quad \dots Z_e(-(N-1)\omega), Z_e(-N\omega) + NZ(-N\omega), Z_e(-(N+1)\omega) \dots].
 \end{aligned}$$

Matrix $\mathcal{Z}$ is of the form (2.15). Its elements are the Fourier series coefficients of the $R(t)$ function shown in Fig. 3. The equation system (2.20) corresponds with the system (2.12) for $n = 0$.

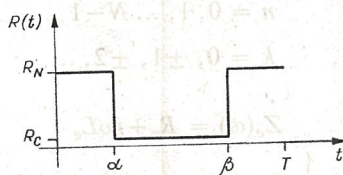


Fig. 3

Example 2

The steady state has to be described in a system consisting of a 3-phase asynchronous motor supplied with power from the so called antiparallel system (Fig. 4).

It has been assumed that the e_n source voltages form a symmetrical system (2.16) thus their symmetric components are:

$$e^0 = 0; \quad e^1 = \sqrt{\frac{3}{2}} E e^{j\omega t}; \quad e^2 = \sqrt{\frac{3}{2}} E e^{-j\omega t} \quad (2.21)$$

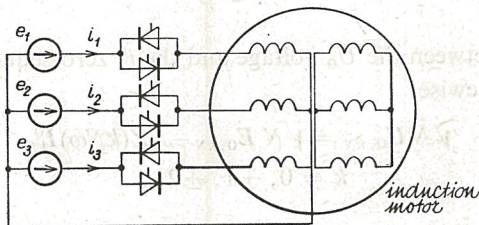


Fig. 4

and the operation of antiparallel systems in the particular can be replaced by the $R_n(t)$ resistances whose values vary acc. to (2.7). Assumption of an $R(t)$ function acc. to Fig. 5 gives a generalization which is satisfactory for practical purposes.

For an induction motor, making the commonly used simplifying assumptions concerning the magnetic field distribution in the air gap, the following relationships between the elements of the symmetrical components of voltages and currents are valid:

$$\begin{bmatrix} U_m^0 \\ U_m^1 \\ U_m^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m^0 \\ E_m^1 \\ E_m^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_s^0(m\omega) \\ Z_s^1(m\omega) \\ Z_s^2(m\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m^0 \\ I_m^1 \\ I_m^2 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

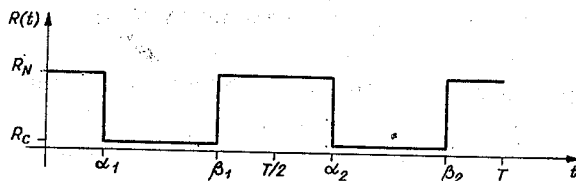


Fig. 5

The $Z_s^0(m\omega)$, $Z_s^1(m\omega)$, $Z_s^2(m\omega)$ impedances result from the following equivalent diagrams.

The R_s , $L_{s\sigma}$, R'_r , $L'_{r\sigma}$, L_μ are the well established parameters of the equivalent diagram of an induction motor, ω_r is the rotor angular velocity, and p is the pole-pair number. The steady state is described by a system of algebraic equations with a similar structure as the foregoing one:

$$\mathcal{U} = (\mathcal{R} + \mathcal{Z})\mathcal{I} \quad (2.23)$$

where:

$$\mathcal{U}^T = \left[\dots \sqrt{\frac{3}{2}} E, 0, \sqrt{\frac{3}{2}} E \dots \right]$$

$$\mathcal{I}^T = [\dots I_2^1, I_1^1, I_0^0, I_{-1}^2, I_{-2}^1 \dots]$$

$$\mathcal{Z} = \text{diag}[\dots Z_s^2(2\omega), Z_s^1(\omega), Z_s^0(0), Z_s^2(-\omega), Z_s^1(-2\omega) \dots].$$

The $\mathcal{R}$ matrix has an analogous structure as (2.15) and the Fourier series coefficients of the function from Fig. 5 appear in it.

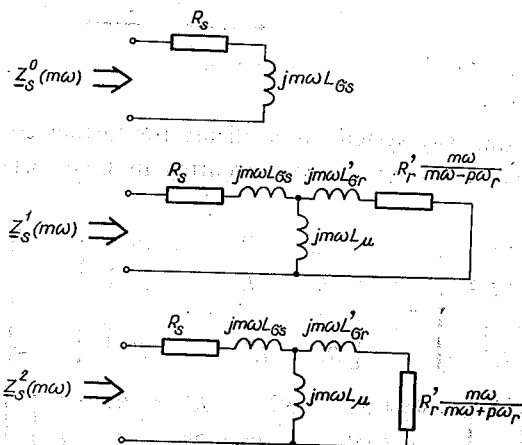


Fig. 6

In the case when in the system acc. to Fig. 4 there is no neutral, the steady state equation is obtained from the equation system (2.23) after cancelling the rows and columns corresponding to the particular elements of the zero-sequence component of currents and voltages.

3. THE MULTIPHASE TWO-WAY SYSTEM

The diagram of the system is shown in Fig. 7. The equations of this system will be represented as:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ -1 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ -1 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{t1} \\ R_{t2} \\ \vdots \\ R_{tN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{t1} \\ i_{t2} \\ \vdots \\ i_{tN} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_0 \\ U_0 \\ \vdots \\ U_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{d1} + R_{t1} \\ R_{d2} + R_{t2} \\ \vdots \\ R_{dN} + R_{tN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{t1} \\ i_{t2} \\ \vdots \\ i_{tN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{d1} \\ R_{d2} \\ \vdots \\ R_{dN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

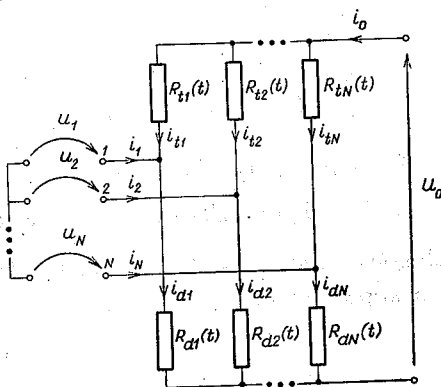


Fig. 7

Likewise as for the one-way system we shall use for further consideration the multiphase components of voltages and currents occurring in Eqs. (3.1). The equations take then the forms:

$$\begin{bmatrix} U^1 \\ U^2 \\ \vdots \\ U^{N-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_t^1 & R_t^0 & \dots & R_t^2 \\ R_t^2 & R_t^1 & & R_t^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_t^{N-1} & R_t^{N-2} & \dots & R_t^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_t^0 \\ i_t^1 \\ \vdots \\ i_t^{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.2.a)$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{N} U_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_d^0 + R_t^0 & R_d^{N-1} + R_t^{N-1} & R_d^1 + R_t^1 \\ R_d^1 + R_t^1 & R_d^0 + R_t^0 & R_d^2 + R_t^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ R_d^{N-1} + R_t^{N-1} & R_d^{N-2} + R_t^{N-2} & R_d^0 + R_t^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_t^0 \\ i_t^1 \\ \vdots \\ i_t^{N-1} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} R_d^{N-1} & R_d^{N-2} & \dots & R_d^1 \\ R_d^0 & R_d^{N-1} & \dots & R_d^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_d^{N-2} & R_d^{N-3} & \dots & R_d^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^1 \\ i^2 \\ \vdots \\ i^{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.2.b)$$

Identical notation is employed in these equations as in the system presented in the foregoing section. The case will be analysed when:

$$R_{dn} = R \left(t - (n-1) \frac{T}{N} \right); \quad R_{tn} = R \left(t - \frac{T}{2} - (n-1) \frac{T}{N} \right) \quad (3.3)$$

$$n = 0, 1, \dots, N$$

The $R(t)$ function is periodic

$$R(t) = R(t+T); \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

It can be also expanded into a Fourier series. This allows to write:

$$R_d^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{n+kN} e^{j(n+kN)\omega t}$$

$$R_t^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{n+kN} (-1)^{(n+kN)} e^{j(n+kN)\omega t} \quad (3.4)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1$$

The case will be considered when the voltages $U_0, U_1, U_2, \dots, U_N$ are periodically variable, have the same period as the variation of the $R(t)$ resistance, and are expandable into Fourier series. This allows writing:

$$U^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_m^n e^{jm\omega t}$$

$$U_0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_{0,m} e^{jm\omega t} \quad (3.5)$$

When representing the symmetric components of currents as Fourier series

$$i^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m^n e^{jm\omega t}; \quad i_t^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_{t,m}^n e^{jm\omega t}$$

$$n = 1, 2, \dots, N-1; \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

it remains only to determine the quantitative relationships between the Fourier series coefficients of currents and voltages.

Making use of the considerable similarity between the structures of equations describing the one- and two-way systems, the relationships between the Fourier coefficients can be represented as the following systems of algebraic equations:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}^n \\ \mathcal{U}_t^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathcal{R}_t^n \\ \mathcal{R}_d^n & \mathcal{R}_d + \mathcal{R}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{I}^n \\ \mathcal{I}_t^n \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

for $n = 0, 1, \dots, N-1$

The $\mathcal{U}_t^n$ and $\mathcal{I}_t^n$ vectors have similar forms as the $\mathcal{U}^n$ and $\mathcal{I}^n$ vectors for the one-way system, i.e.:

$$(\mathcal{U}_t^n)^T = [\dots U_{t,m}^{(n+m) \bmod N} \dots U_{t,1}^{(n+1) \bmod N}, U_{t,0}^n, U_{t,-1}^{(n-1) \bmod N} \dots U_{t,-m}^{(n-m) \bmod N} \dots] \quad (3.7)$$

$$(\mathcal{I}_t^n)^T = [\dots I_{t,m}^{(n+m) \bmod N} \dots I_{t,1}^{(n+1) \bmod N}, I_{t,0}^n, I_{t,-1}^{(n-1) \bmod N} \dots I_{t,-m}^{(n-m) \bmod N} \dots] \quad (3.8)$$

The $\mathcal{U}_t^n$ vector is formed from the vector of voltages which occurs on the left side of Eq. (3.2.b). Only the zero-sequence component appears in this vector and consequently only those expressions can be non-zero in it for which the superscript indicates to occurrence of the zero-sequence component.

In order to form the $\mathcal{U}^n$ and $\mathcal{J}^n$ vectors appearing in the Eqs. (3.6) it is necessary to form vectors similar to (3.7) and (3.8), and to omit those elements which correspond to the Fourier series coefficients of the zero-sequence components. For instance, for $n = 0$ the $\mathcal{J}^n$ vector is:

$$(\mathcal{J}^0)^T = [\dots I_{N+1}^1, I_{N-1}^{N-1}, \dots I_1^1, I_{-1}^{N-1} \dots I_{-(N-1)}^1, I_{-(N+1)}^{N-1} \dots]$$

The $\mathcal{R}_d$ and $\mathcal{R}_t$ matrices take the form:

$$\mathcal{R}_d = \begin{bmatrix} \dots & -1 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & R_0 & R_1 & R_2 & \dots \\ \dots & R_{-1} & R_0 & R_1 & \dots \\ \dots & R_{-2} & R_{-1} & R_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\mathcal{R}_t = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & R_0 & -R_1 & R_2 & \dots \\ \dots & -R_{-1} & R_0 & -R_1 & \dots \\ \dots & R_2 & -R_{-1} & R_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

The $\mathcal{R}_d$ and $\mathcal{R}_t$ matrices include the Fourier series coefficients of the $R(t)$ function.

To form the $\mathcal{R}_d^n$ matrix, the columns numbered

$$n+rN; \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

shall be cancelled in the $\mathcal{R}_d$ matrix (acc. to the numeration given in formula (3.9) above the columns).

In order to obtain the $\mathcal{R}_t^n$ matrix it is necessary to cancel the rows numbered $n+rN$ ($r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) in the $\mathcal{R}_t$ matrix acc. to the numeration given in formula (3.10) beside the columns.

Application examples

Example 1

Relationships have to be written for the steady state in a 3-phase system acc. to Fig. 8. Let the source voltages form a monoharmonic symmetric system:

$$e_n = \text{Real} \{ \sqrt{2} E a^{-(n-1)} e^{j\omega t} \} \quad (3.11)$$

$$n = 1, 2, 3; \quad a = e^{j2\pi/3}$$

and

$$e_0 = E_0 = \text{const.}$$

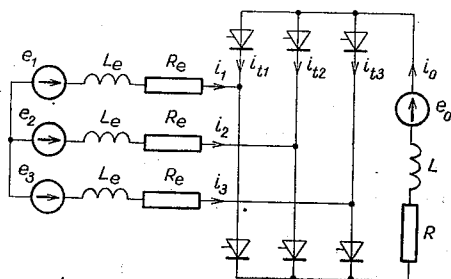


Fig. 8

The thyristors will be replaced by resistances with variable values acc. to (3.3). The $R(t)$ function is shown in Fig. 3. The following relationships can be written similarly as in the first example in the foregoing section:

$$U_k^n = E_k^n - Z_e(k\omega) I_k^n \quad (3.12)$$

$$n = 1, 2; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

where:

$$Z_e(\omega) = R_e + j\omega L_e$$

and

$$\sqrt{N} U_{0, kN} = \sqrt{N} E_{0, kN} - N \cdot Z(kN\omega) I_{t, kN}^0 \quad (3.13)$$

where:

$$Z(\omega) = R + j\omega L.$$

The symmetric components of source voltages are of the form:

$$e^1 = \sqrt{\frac{3}{2}} E e^{j\omega t}; \quad e^2 = \sqrt{\frac{3}{2}} E e^{-j\omega t}$$

which allows to write the following system of algebraic equations describing the steady state:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E} \\ \mathcal{E}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_e; & -\mathcal{R}_t^0 \\ \mathcal{R}_d^0; & \mathcal{R}_d + \mathcal{R}_d + \mathcal{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{I} \\ \mathcal{I}_t \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

and which corresponds to the system (3.6) for $n = 0$. As a result of the additional relationships (3.12) and (3.13), the $\mathcal{Z}_e$ and $\mathcal{Z}$ matrices appeared in the equation system (3.14) which are of the form:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_e &= \text{diag}[\dots Z_e^{(4\omega)}, Z_e^{(2\omega)}, Z_e^{(\omega)}, Z_e^{(-\omega)}, Z_e^{(-2\omega)}, Z_e^{(-4\omega)} \dots] \\ \mathcal{Z} &= \text{diag}[\dots 0, 3Z(3\omega), 0, 0, 3Z(0), 0, 0, 3Z(-3\omega), 0 \dots]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

The $\mathcal{E}$ and $\mathcal{E}_t$ vectors are of the form:

$$\begin{aligned} (\mathcal{E})^T &= \left[\dots 0, \sqrt{\frac{3}{2}} E, \sqrt{\frac{3}{2}} E, 0 \dots \right] \\ (\mathcal{E}_t)^T &= [\dots 0, \sqrt{3} E_0, 0 \dots] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Example 2

The steady state shall be described in a system consisting of a voltage inverter and an induction motor, acc. to Fig. 9. (The circuits and elements providing the commutation of the thyristors are omitted in this schematic diagram).

Recalling the remarks made in the example with the antiparallel system, the following system of algebraic equations can be written:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{E}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_s & -\mathcal{R}_t^0 \\ \mathcal{R}_d^0 & \mathcal{R}_d + \mathcal{R}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{I} \\ \mathcal{I}_t \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

where all vectors and matrices, except the $\mathcal{Z}_s$, matrix are identical as in the equation system (3.14).

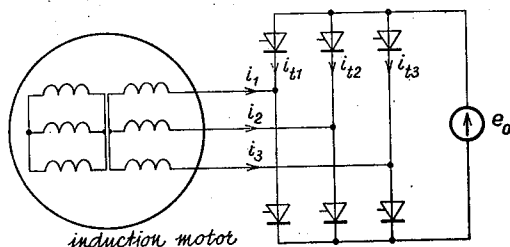


Fig. 9

The $\mathcal{Z}_s$ matrix is:

$$\mathcal{Z}_s = \text{diag}[\dots \mathcal{Z}_t^1(4\omega), \mathcal{Z}_s^2(2\omega), \mathcal{Z}_s^1(\omega), \mathcal{Z}_s^2(-\omega), \mathcal{Z}_s^1(-2\omega), \mathcal{Z}_s^2(-4\omega) \dots]$$

The $\mathcal{Z}_s^1(\omega)$ and $\mathcal{Z}_s^2(\omega)$ impedances can be derived from the schematic diagrams shown in Fig. 6. Fig. 3. shows the $R(t)$ function, the Fourier coefficients of which appear in the $\mathcal{R}_d$, $\mathcal{R}_t$, $\mathcal{R}_d^0$, $\mathcal{R}_t^0$ matrices.

4. CONCLUSIONS

Resistance-type networks with structures corresponding to multiphase one- and two-way thyristor systems have been analysed in the paper on the assumption that the voltages, currents and parameters vary periodically with time.

As a result of the analysis, infinite systems of algebraic equations have been obtained, relating the coefficients of the voltage and current Fourier series. A significantly better arrangement of these equations has been gained due to application of symmetric components for description.

Examples given in the paper illustrate how to exploit these equations for description of steady states in systems incorporating semiconductor switching elements, inclusive of thyristor systems cooperating with electric machines.

REFERENCES

1. T. Sobczyk, *Analysis of Steady-State in Electric Machines*, Scient. Bull. of the Univ. of Mining and Metall., No. 654, Electr. and Mech. in Mining and Metall., Bull. 97, Cracow, 1977 (in Polish).

2. T. Sobczyk, *Infinitely Dimensional Linear and Quadratic Forms of Electric Machines*. Rozprawy Elektrotechniczne, vol. 29, bull. 3, PWN, Warsaw, 1983, pp. 697—707.
3. B. Sapiński, *Analysis of Thyristor System using the Theory of Linear Differential Equation Systems with Periodic Coefficients*, Doctoral Thesis, Univ. of Mining and Metall., Cracow, 1982 (in Polish).
4. T. Sobczyk, B. Sapiński, *Harmonic Analysis of Currents in R, L Systems with Semiconductor Switching Devices*, COMPEL, Bool Press Limited, 1984, vol. 3, No. 3, pp. 151—165.
5. T. Sobczyk, R. Popiela, A. Jakóbczak, *Analysis of Two-Phases Rectifier System as a Parametrical Networks*, VII All-Polish Conf. "Network Theory and Electronic Systems", pp. 137—141, 1984.

T. J. SOBCZYK

ANALIZA WIEŁOFAZOWYCH OBWODÓW REZYSTANCYJNYCH O OKRESOWO ZMIENNYCH PARAMETRACH

Streszczenie

W pracy przeprowadzono analizę równań obwodów rezystancyjnych o topologii charakterystycznej dla wielofazowych układów tyrystorowych. Rozpatrywano przypadek, gdy parametry, napięcia oraz prądy są okresowo zmienne w czasie. Do opisu obwodów zastosowano wielofazowe składowe symetryczne. W rezultacie sformułowano nieskończone układy równań algebraicznych wiążące współczynniki szeregu Fouriera składowych symetrycznych napięć i prądów. Na przykładach pokazano jak wykorzystać otrzymane równania dla określenia zależności napięciowo-prądowych w stanie ustalonym w stosowanych w praktyce układach z półprzewodnikowymi elementami przełączającymi.

T. J. SOBCZYK

ANALYSE DES CIRCUITS OHMIQUES POLYPHASES AUX PARAMÈTRES PÉRIODIQUEMENT VARIABLES

Résumé

Dans l'article on a analysé les équations des circuits ohmiques possédant la topologie caractéristique pour les systèmes thyristoriques polyphasés. On a examiné le cas où les paramètres, les tensions et les courants sont périodiquement variables dans le temps. Pour la description des circuits on a appliqué des composantes symétriques polyphasées. En résultat, on a formulé des systèmes infinis d'équations algébriques, réunissant les coefficients des séries de Fourier des composantes symétriques des tensions et des courants. Sur des exemples on a montré comment on peut mettre à profit les équations obtenues, pour déterminer les relations entre les tensions et les courants dans l'état stable des systèmes des éléments semi-conducteurs commutants, utilisés dans la pratique.

T. J. SOBCZYK

ANALYSE DER MEHRPHASIGEN RESISTANZKREISE MIT PERIODISCH WECHSELNDEN PARAMETERN

Zusammenfassung

In der Bearbeitung wurde eine Analyse von Gleichungen der Resistanzkreise mit einer für die mehrphasigen Thyristorsysteme charakteristischen Topologie durchgeführt. Der Fall wurde betrachtet, wenn Parameter, Spannungen und Ströme periodisch zeitveränderlich sind. Zur Beschreibung der Kreise wurden mehrphasige symmetrische Komponenten angewandt. Im Ergebnis wurden unendliche Systeme algebraischer Gleichungen formuliert, die Koeffizienten der Fourier-Reihen der symmetrischen Komponenten der Spannungen und Ströme in Verbindung bringen. Es wurde an Beispielen gezeigt, wie die gewonnenen Gleichungen zur Bestimmung der Beziehungen zwischen Spannungen und Strömen im stationären Zustand in den praktisch angewandten Systemen mit Halbleiterschaltenelementen genutzt werden können.

Т. Я. СОБЧЫК

АНАЛИЗ МНОГОФАЗНЫХ РЕЗИСТАНЦИОННЫХ ЦЕПЕЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

Резюме

Проверен анализ уравнений для цепей с топологией характеристической для многофазных тиристорных систем. Рассмотрен случай, для параметров напряжений и токов, когда они периодически изменяются во времени. Для описания цепей применены многофазные симметрические составляющие. В результате сформулирована бесконечная система алгебраических уравнений связывающих коэффициенты ряда Фурье симметрических составляющих напряжений и токов. На примерах показано, каким образом использовать полученные уравнения для определения зависимостей напряжение-ток в установившихся режимах для применяемых на практике систем с полупроводниковыми переключающими элементами.

ANALYSE DES CIRCUITS ONIQUES EN YPHASES AUX PARAMETRES PERIODEMENT VARIABLES

ANALYSE DER MERRYPHASEN RESISTANZKREISE MIT PERIODISCH WECHSELNDEN PARAMETERN

Zusammenfassung

In der Behandlung wurde eine Analyse von Gleichungen der Resistanzkreise mit einer für die mehrphasigen Thyristorsysteme charakteristischen Topologie durchgeführt. Der Fall wurde betrachtet, wenn Parameter, Spannungen und Ströme periodisch zeitveränderlich sind. Zur Beschreibung der Kreise wurden mehrphasige symmetrische Komponenten angewandt. Im Ergebnis wurden unendlich viele Systeme algebraischer Gleichungen formuliert, die Koeffizienten der Fourier-Reihen der symmetrischen Komponenten der Spannungen und Ströme in Verbindung bringen. Es wurde an Beispielen gezeigt, wie die gewonnenen Gleichungen zur Bestimmung der Beziehungen zwischen Spannungen und Strömen im stationären Zustand in den praktisch angewandten Systemen mit Halbleiterschaltgeräten genutzt werden können.

Potential and current distribution along an underground conductor earthed at the end points

WOJCIECH MACHCZYŃSKI (POZNAŃ)

Politechnika Poznańska

The paper received 1984.12.05

The paper presents a method of calculating currents and potentials along an underground conductor, of finite length, earthed at both ends. The method takes into account the additional, conductive influence of currents flowing through electrodes to the earth on potential and current distribution. The current energization of the conductor under consideration as well as conductive and inductive influences have been analyzed. The method is illustrated with examples.

1. INTRODUCTION

The dynamic development of high voltage power lines and underground earth return circuits (cables, pipelines) has caused the growth of harmful influence of high voltage power lines on nearby earth return circuits. That influence ranges from telecommunication interference to personnel hazards for people maintaining the equipment under the influence of power lines.

Metal underground installations are often earthed along their routes, for technological or safety reasons. The application of cathodic protection of metal underground construction may also be the reason why earth electrodes have been used. The use of earth electrodes along the route of an extensive buried conductor under the influence of a power line causes a decrease of potentials on that conductor, both under the normal and fault conditions of the power line.

Many publications [1, 5, 6, 7, 8, 11, 12] deal with the methods of calculating currents and potentials along underground conductors of finite length, earthed at both ends, in case of inductive influence of a power line. These methods, however, do not take into account the additional, secondary, conductive influence of the currents flowing from the conductor to the earth through the earth electrodes. And these currents may have a significant influence on potential distribution along a protected conductor. Therefore, the results of calculations of potential distribution may also, in certain cases, contain a significant error.

The effect of point earthing system of underground conductor of infinite length on potential distribution, with the additional influence of the current flowing through the earth electrode, has been analyzed in publications [2, 4, 9].

The purpose of this paper is to present a method of calculating of currents and potentials along an underground conductor of finite length, earthed at end points. The method takes into account the additional, conductive influence of earth electrodes currents on potential and current distribution.

It is assumed in the paper that the earth is a homogeneous, isotropic medium of finite conductivity and that the system considered is linear. It is also supposed that the currents and potentials vary with the time as $\exp(j\omega t)$.

LIST OF PRINCIPAL SYMBOLS:

d	— depth at which conductor is buried
E	— electric intensity
g	— distance between underground conductor and its earth electrode
G_i	— conductance per unit length of insulation of underground conductor
I_e	— current flowing through the earth electrode
I_0	— energizing current
$I(x)$	— current along conductor
k^2	$= j\omega\mu_0\gamma$
L	— length of conductor
r	— radius of conductor
s	— distance between earth electrode and underground conductor
$V(x)$	— potential along conductor
Z_e	— earthing impedance
Z_i	— internal impedance per unit length of underground conductor
Z_m	— mutual impedance per unit length between overhead conductor of a power line and underground conductor
Z_0	— characteristic impedance of underground conductor
Y	— shunt admittance per unit length of underground conductor
γ	— earth conductivity
Γ	— propagation coefficient
μ_0	$= 4\pi 10^{-7}$ H/m
ω	— angular frequency.

2. GENERAL CONSIDERATIONS

The considered underground conductor is assumed to extend from $x = x_1$ to $x = x_2$, as shown in Fig. 1.

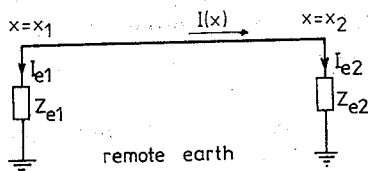


Fig. 1. Underground conductor of finite length earthed at the end points

At the end points, the conductor is assumed to be connected to remote earth through earthing impedances Z_{e1} and Z_{e2} . Generally these terminals may be realized by earthing systems (i.e. a ground rod array, grounding cell etc.), by connected non-parallel conductor sections, or by insulating joints.

The currents I_{en} flowing through the earth electrodes to the earth may be obtained according to Thevenin theorem

$$I_{en} = \frac{V^n(x_n)}{Z_{inn}^{(n)} + Z_{en}} \quad (1)$$

where:

$V^n(x_n)$ — the Thevenin equivalent voltage source,

$Z_{inn}^{(n)}$ — the Thevenin source impedance.

Methods for analytical determining of these parameters are discussed in the following sections.

2.1. CALCULATION OF INPUT IMPEDANCE $Z_{in1}^{(1,2)}$ and $Z_{in2}^{(1,2)}$ OF A CONDUCTOR OF FINITE LENGTH ($Z_{e1} = Z_{e2} = \infty$)

Consider the current energization of the underground conductor of finite length, assuming that the electrode through which the currents flows back to the current source is placed in infinity.

The schematic representation of the underground conductor driven at one end is shown in Fig. 2.

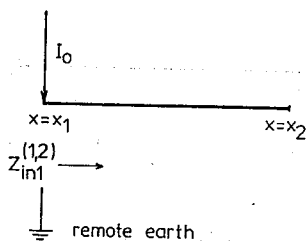


Fig. 2. Current energization of an underground conductor of finite length

For the system from Fig. 2, the current and potential along the conductor may be accepted to have the following form

$$I^{(1,2)}(x) = I_0 e^{-\Gamma(x-x_1)} + A_1 e^{-\Gamma x} + B_1 e^{\Gamma x}, \quad (2)$$

$$V^{(1,2)}(x) = Z_0 I_0 e^{-\Gamma(x-x_1)} + Z_0 (A_1 e^{-\Gamma x} - B_1 e^{\Gamma x}), \quad x > x_1 \quad (3)$$

where index in parenthesis shows which electrodes are disconnected from the conductor.

The constants A_1 and B_1 shall be calculated from boundary conditions

$$\begin{aligned} I^{(1,2)}(x_1) &= I_0, \\ I^{(1,2)}(x_2) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Hence, putting $x_2 - x_1 = L$, we have

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{I_0}{2 \operatorname{sh} \Gamma L} e^{-\Gamma L} e^{\Gamma x_1}, \\ B_1 &= -\frac{I_0}{2 \operatorname{sh} \Gamma L} e^{-\Gamma x_2}. \end{aligned} \quad (5)$$

From equations (3) and (5) we obtain

$$V^{(1,2)}(x) = \frac{Z_0 I_0 \operatorname{ch} \Gamma (x_2 - x)}{\operatorname{sh} \Gamma L}. \quad (6)$$

Therefore, the input impedance $Z_{in1}^{(1,2)}$

$$Z_{in1}^{(1,2)} = \frac{V^{(1,2)}(x_1)}{I^{(1,2)}(x_1)} = \frac{V^{(1,2)}(x_1)}{I_0} = Z_0 \operatorname{cth} \Gamma L. \quad (7)$$

And it is not difficult to show that the input impedance

$$Z_{in1}^{(1,2)} = Z_{in2}^{(1,2)}.$$

2.2. CALCULATIONS OF INPUT IMPEDANCE $Z_{in1}^{(1)}$ AND $Z_{in2}^{(2)}$ OF A CONDUCTOR OF FINITE LENGTH, EARTHED AT ONE END

Consider the current energization of the underground conductor of finite length earthed at one end. The schematic representation of the conductor driven at one end and terminated at the other end is shown in Fig. 3.

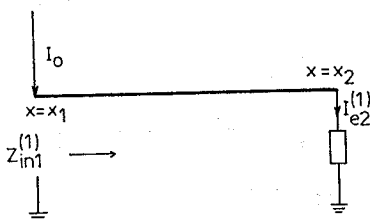


Fig. 3. Current energization of an underground conductor of finite length earthed at one end

The current $I_{e2}^{(1)}$ flowing through the earth electrode Z_{e2} is calculated on the basis of Thevenin's theorem

$$I_{e2}^{(1)} = \frac{V^{(1,2)}(x_2)}{Z_{in2}^{(1,2)} + Z_{e2}}. \quad (8)$$

Inserting equations (6) and (7) into the above relation we obtain

$$I_{e2}^{(1)} = \frac{Z_0 I_0}{(Z_{e2} + Z_0 \operatorname{cth} \Gamma L) \operatorname{sh} \Gamma L}. \quad (9)$$

The potential along the conductor from Fig. 3, after taking into account the current and conductive influence of the current $I_{e2}^{(1)}$ flowing from the earth electrode Z_{e2} to earth, is as follows [2, 9]

$$V^{(1)}(x) = V^{(1,2)}(x) + V^{(1)'}(x) + V^{(1)''}(x), \quad (10)$$

where:

- $V^{(1,2)}(x)$ — primary potential excited along the conductor without earthings by current energization at the point $x = x_1$,
 $V^{(1)'}(x)$ — potential excited along the conductor by the conductive influence of current $I_{e2}^{(1)}$ flowing from the earth electrode Z_{e2} ,
 $V^{(1)''}(x)$ — potential along the conductor caused by current $I_{e2}^{(1)}$ flowing from the conductor.

2.2.1. Calculating the current and potential in an underground conductor of finite length, excited by the secondary influence of current $I_{e2}^{(1)}$ flowing from the earth electrode Z_{e2} (conductive energization)

If an underground conductor of finite length is energized conductively, as seen in Fig. 4, then the current along the conductor, provided that the earth electrode is a point electrode placed on the earth's surface, is as follows [2]

$$I^{(1)'} = \frac{Y I_{e2}^{(1)}}{2\pi\gamma} \Psi[\Gamma(x-x_2), \Gamma g_2] + A_2 e^{-\Gamma x} + B_2 e^{\Gamma x}, \quad (11)$$

while the potential

$$V^{(1)'}(x) = V_e^0(x) + V'(x), \quad (12)$$

where:

$V_e^0(x)$ — potential of the primary field in the earth, while

$$V'(x) = \frac{I_{e2}^{(1)}}{2\pi\gamma} \left\{ \Gamma \Omega[\Gamma(x-x_2), \Gamma g_2] - \frac{1}{\sqrt{(x-x_2)^2 + g_2^2}} \right\} + Z_0(A_2 e^{-\Gamma x} - B_2 e^{\Gamma x}). \quad (13)$$

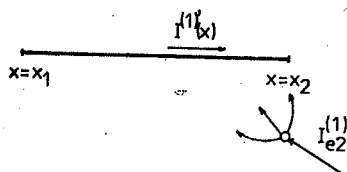


Fig. 4. Conductive energization of an underground conductor of finite length

Functions Ψ and Ω occurring in relations (11) and (13) are defined [3, 10]

$$\left. \begin{matrix} \Psi \\ \Omega \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} [e^{-u} \Phi(u, v) \mp e^u \Phi(-u, v)], \quad (14)$$

$$\Phi = \int_{-u}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{v^2 + \tau^2}} d\tau. \quad (15)$$

Integration constants occurring in relation (11) are defined from boundary conditions

$$I^{(1)'}(x_1) = I^{(1)'}(x_2) = 0. \quad (16)$$

Hence, the integration constants have the shape

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{YI_{e2}^{(1)}}{2\pi\gamma} \frac{\Psi(\Gamma L, \Gamma g_2)}{2\text{sh}\Gamma L} e^{\Gamma x_2}, \\ B_2 &= -\frac{YI_{e2}^{(1)}}{2\pi\gamma} \frac{\Psi(\Gamma L, \Gamma g_2)}{2\text{sh}\Gamma L} e^{-\Gamma x_2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Therefore, the potential

$$V^{(1)'}(x) = \frac{\Gamma I_{e2}^{(1)}}{2\pi\gamma} \left\{ \Omega[\Gamma(x-x_2), \Gamma g_2] + \frac{\Psi(\Gamma L, \Gamma g_2)}{\text{sh}\Gamma L} \text{ch}\Gamma(x_2-x) \right\}. \quad (18)$$

Inserting $I_{e2}^{(1)}$ from equation (9) into the above relation we obtain

$$\begin{aligned} V^{(1)'}(x) &= \frac{Z_0 \Gamma I_0}{2\pi\gamma(Z_{e2} + Z_0 \text{cth}\Gamma L) \text{sh}\Gamma L} \left\{ \Omega[\Gamma(x-x_2), \Gamma g_2] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Psi(\Gamma L, \Gamma g_2)}{\text{sh}\Gamma L} \text{ch}\Gamma(x_2-x) \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

2.2.2. Calculating the current and potential along an underground conductor of finite length, excited by the current $I_{e2}^{(1)}$ leaving the conductor

The current and potential in the system as shown in Fig. 5 can be calculated in a way similar to that in sec. 2.1, the boundary conditions having now the following form

$$\begin{aligned} I^{(1)'}(x_2) &= I_{e2}^{(1)}, \\ I^{(1)'}(x_1) &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Hence

$$V^{(1)''}(x) = -\frac{Z_0 I_{e2}^{(1)}}{\text{sh}\Gamma L} \text{ch}\Gamma(x_1-x), \quad (21)$$

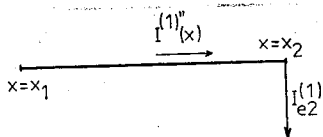


Fig. 5. Current energization of an underground conductor at the point $x = x_2$

and taking into account equation (9)

$$V^{(1)''}(x) = -\frac{Z_0^2 I_0}{(Z_{e2} + Z_0 \text{cth}\Gamma L) \text{sh}^2\Gamma L} \text{ch}\Gamma(x_1-x). \quad (22)$$

2.2.3. Calculating input impedance $Z_{in1}^{(1)}$ of a conductor from Fig. 3

Input impedance $Z_{in1}^{(1)}$ is defined as

$$Z_{in1}^{(1)} = \frac{V^{(1)}(x_1)}{I^{(1)}(x_1)} = \frac{V^{(1)}(x_1)}{I_0}. \quad (23)$$

Substituting the potential from equation (10) and applying equations (6), (19) and (22) we obtain

$$Z_{in1}^{(1)} = Z_0 \operatorname{cth} \Gamma L + \frac{Z_0}{(Z_{e2} + Z_0 \operatorname{cth} \Gamma L) \operatorname{sh}^2 \Gamma L} \left\{ -Z_0 + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma}{2\pi\gamma} [\operatorname{sh} \Gamma L \Omega(\Gamma L, \Gamma g_2) + \Psi(\Gamma L, \Gamma g_2) \operatorname{ch} \Gamma L] \right\}. \quad (24)$$

It may be shown that impedance $Z_{in1}^{(1)} = Z_{in2}^{(2)}$, if $Z_{e1} = Z_{e2}$.

3. CURRENTS AND POTENTIALS ALONG AN UNDERGROUND CONDUCTOR EARTHED AT BOTH ENDS, WITH CONDUCTIVE AND CURRENT INFLUENCES OF CURRENTS FLOWING THROUGH EARTH ELECTRODES TAKEN INTO ACCOUNT

The current and potential of the conductor from Fig. 1 can be calculated from relations [2, 9]

$$I(x) = I^{(1,2)}(x) + I'(x) + I''(x), \\ V(x) = V^{(1,2)}(x) + V'(x) + V''(x), \quad (25)$$

where indices prime and double prime represent the components of the current and potential resulting from the conductive and current influence of current I_{en} .

Primary components of the current and potential (index (1, 2)), depend on the way in which the current is excited in a conductor, while the remaining components, as has been shown in preceding paragraphs, are given by relations

$$I'(x) = \sum_{n=1}^2 \frac{Y I_{en}}{2\pi\gamma} \left\{ \Psi[\Gamma(x-x_n), \Gamma g_n] + \frac{\Psi(\Gamma L, \Gamma g_n)}{\operatorname{sh} \Gamma L} \operatorname{sh} \Gamma(x_n-x) \right\}, \quad (26)$$

$$I''(x) = \sum_{n=1}^2 \frac{I_{en}}{\operatorname{sh} \Gamma L} \operatorname{sh} \Gamma(x-x_n), \quad (28)$$

$$V'(x) = \frac{\Gamma}{2\pi\gamma} \sum_{n=1}^2 I_{en} \left\{ \Omega[\Gamma(x-x_n), \Gamma g_n] + \frac{\Psi(\Gamma L, \Gamma g_n)}{\operatorname{sh} \Gamma L} \operatorname{ch} \Gamma(x-x_n) \right\}, \quad (29)$$

$$V''(x) = -\frac{Z_0}{\operatorname{sh} \Gamma L} \sum_{n=1}^2 I_{en} \operatorname{ch} \Gamma(x-x_n). \quad (30)$$

As may be seen from the above relations, calculation of the currents and potentials along a conductor of finite length, earthed at both end points, has been reduced to determining the currents I_{en} and the knowledge of primary components of the current and potential.

The following sections of the paper present the method used to determine these values, according to the way the current was excited in an underground conductor.

3.1. CURRENT ENERGIZATION

Consider the current energization of the underground conductor of finite length, earthed at both ends, as shown in Fig. 6a.

The primary current and potential for the system in Fig. 6b. are described by the following equations

$$I^{(1,2)}(x) = \text{sign}(x) \frac{I_0}{2} e^{-\Gamma|x|} + Ae^{-\Gamma x} + Be^{\Gamma x}, \quad (31)$$

$$V^{(1,2)}(x) = \frac{Z_0 I_0}{2} e^{-\Gamma|x|} + Z_0 (Ae^{-\Gamma x} - Be^{\Gamma x}). \quad (32)$$

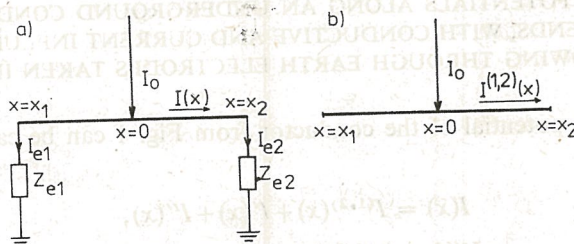


Fig. 6a. Current energization of an underground conductor of finite length earthed at the end points,
b. The system used for calculating the primary current and potential

The boundary conditions used to determine the constants have the form

$$I^{(1,2)}(x_1) = I^{(1,2)}(x_2) = 0. \quad (33)$$

Hence we obtain

$$A = \frac{I_0 \text{ch} \Gamma x_2}{2 \text{sh} \Gamma L} e^{\Gamma x_1},$$

$$B = -\frac{I_0 \text{ch} \Gamma x_1}{2 \text{sh} \Gamma L} e^{-\Gamma x_2}. \quad (34)$$

By inserting integration constants determined in this way into relations (31) and (32) we get

$$I^{(1,2)}(x) = \frac{I_0}{2} \left[\text{sign}(x) e^{-\Gamma|x|} + \frac{e^{-\Gamma(x-x_1)} \text{ch} \Gamma x_2 - e^{-\Gamma(x_2-x)} \text{ch} \Gamma x_1}{\text{sh} \Gamma L} \right] \quad (35)$$

$$V^{(1,2)}(x) = \frac{Z_0 I_0}{2} \left[e^{-\Gamma|x|} + \frac{e^{-\Gamma(x-x_1)} \text{ch} \Gamma x_2 + e^{-\Gamma(x_2-x)} \text{ch} \Gamma x_1}{\text{sh} \Gamma L} \right]. \quad (36)$$

To calculate the currents I_{en} from relation (1) it is necessary to know potential $V^{(n)}(x_n)$, and

$$V^{(n)}(x_n) = V^{(1,2)}(x_n) + V^{(\bullet)'}(x_n) + V^{(\bullet)''}(x_n). \quad (37)$$

Potential $V^{(1,2)}(x_n)$ is calculated from relation (36), $V^{(\bullet)'}(x_n)$ from relation (19), and $V^{(\bullet)''}(x_n)$ from relation (22).

Currents $I_{e1}^{(2)}$ and $I_{e2}^{(1)}$ occurring in relations (19) and (22) are calculated from relations

$$I_{e1}^{(2)} = \frac{V^{(1,2)}(x_1)}{Z_{in1}^{(1,2)} + Z_{e1}}, \quad (38)$$

$$I_{e2}^{(1)} = \frac{V^{(1,2)}(x_2)}{Z_{in2}^{(1,2)} + Z_{e2}}. \quad (39)$$

In case of current energization, as in Fig. 6a,

$$I_{e1}^{(2)} = \frac{Z_0 I_0 \left(e^{-\Gamma x_1} + \frac{e^{-\Gamma L} \operatorname{ch} \Gamma x_1 + \operatorname{ch} \Gamma x_2}{\operatorname{sh} \Gamma L} \right)}{2(Z_{e1} + Z_0 \operatorname{cth} \Gamma L)}, \quad (40)$$

$$I_{e2}^{(1)} = \frac{Z_0 I_0 \left(e^{-\Gamma x_2} + \frac{e^{-\Gamma L} \operatorname{ch} \Gamma x_2 + \operatorname{ch} \Gamma x_1}{\operatorname{sh} \Gamma L} \right)}{2(Z_{e2} + Z_0 \operatorname{cth} \Gamma L)}. \quad (41)$$

3.2. CONDUCTIVE ENERGIZATION

Consider an underground conductor of finite length, earthed at both ends, energized conductively, as in Fig. 7a.

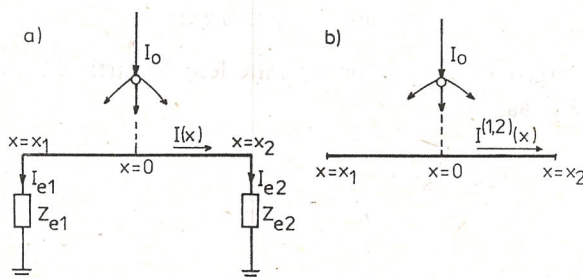


Fig. 7a. Conductive energization of an underground conductor of finite length earthed at the end points,
b. The system used for calculating the primary current and potential

On the basis of [2] we have

$$I^{(1,2)}(x) = \frac{Y I_0}{2\pi\gamma} \Psi(\Gamma x, \Gamma s) + C e^{-\Gamma x} + D e^{\Gamma x}, \quad (42)$$

$$V^{(1,2)}(x) = V_e^0(x) + \frac{I_0}{2\pi\gamma} \left[\Gamma \Omega(\Gamma x, \Gamma s) - \frac{1}{\sqrt{x^2 + s^2}} \right] + Z_0 (C e^{-\Gamma x} - D e^{\Gamma x}). \quad (43)$$

Constants C and D are calculated from boundary conditions

$$I^{(1,2)}(x_1) = I^{(1,2)}(x_2) = 0. \quad (44)$$

Hence

$$C = \frac{Y I_0}{2\pi\gamma} \frac{\Psi(\Gamma x_2, \Gamma s) - e^{\Gamma L} \Psi(\Gamma x_1, \Gamma s)}{2 \operatorname{sh} \Gamma L} e^{\Gamma x_1},$$

$$D = \frac{Y I_0}{2\pi\gamma} \frac{\Psi(\Gamma x_1, \Gamma s) - e^{\Gamma L} \Psi(\Gamma x_2, \Gamma s)}{2 \operatorname{sh} \Gamma L} e^{-\Gamma x_2}. \quad (45)$$

Finally

$$I^{(1,2)}(x) = \frac{YI_0}{2\pi\gamma} \left[\Psi(\Gamma x, \Gamma s) + \frac{\Psi(\Gamma x_2, \Gamma s) \operatorname{sh} \Gamma(x_1 - x)}{\operatorname{sh} \Gamma L} - \frac{\Psi(\Gamma x_1, \Gamma s) \operatorname{sh} \Gamma(x_2 - x)}{\operatorname{sh} \Gamma L} \right] \quad (46)$$

and

$$V^{(1,2)}(x) = \frac{\Gamma I_0}{2\pi\gamma} \left[\Omega(\Gamma x, \Gamma s) + \frac{\Psi(\Gamma x_2, \Gamma s) \operatorname{ch} \Gamma(x - x_1)}{\operatorname{sh} \Gamma L} - \frac{\Psi(\Gamma x_1, \Gamma s) \operatorname{ch} \Gamma(x_2 - x)}{\operatorname{sh} \Gamma L} \right] \quad (47)$$

The currents I_{en} are calculated in the same way as in sec. 3.1, and in case of conductive energization

$$I_{e1}^{(2)} = \frac{\Gamma I_0}{2\pi\gamma(Z_{e1} + Z_0 \operatorname{cth} \Gamma L)} \left[\Omega(\Gamma x_1, \Gamma s) + \frac{\Psi(\Gamma x_2, \Gamma s) - \Psi(\Gamma x_1, \Gamma s) \operatorname{ch} \Gamma L}{\operatorname{sh} \Gamma L} \right] \quad (48)$$

$$I_{e2}^{(1)} = \frac{\Gamma I_0}{2\pi\gamma(Z_{e2} + Z_0 \operatorname{cth} \Gamma L)} \left[\Omega(\Gamma x_2, \Gamma s) + \frac{\Psi(\Gamma x_2, \Gamma s) \operatorname{ch} \Gamma L - \Psi(\Gamma x_1, \Gamma s)}{\operatorname{sh} \Gamma L} \right] \quad (49)$$

3.3. INDUCTIVE ENERGIZATION

Consider an underground conductor of finite length, earthed at both ends, energized inductively, as in Fig. 8a.

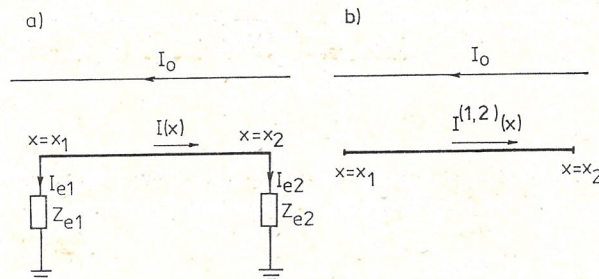


Fig. 8a. Inductive energization of an underground conductor of finite length earthed at the end points, b. The system used for calculating the primary current and potential

The current and potential along the conductor from Fig. 8a, can be expressed by equations [2]

$$I^{(1,2)}(x) = \frac{1}{2Z_0} \left[e^{-\Gamma x} \int_{-\infty}^x E^0(v) e^{\Gamma v} dv + e^{\Gamma x} \int_x^{\infty} E^0(v) e^{-\Gamma v} dv \right] + E e^{-\Gamma x} + F e^{\Gamma x}, \quad (50)$$

$$V^{(1,2)}(x) = \frac{1}{2} \left[e^{-\Gamma x} \int_{-\infty}^x E^0(v) e^{\Gamma v} dv - e^{\Gamma x} \int_{\infty}^x E^0(v) e^{-\Gamma v} dv \right] + Z_0 (E e^{-\Gamma x} - F e^{\Gamma x}). \quad (51)$$

In the following analysis, the driving electric field of equations (50) and (51) is assumed to equal E_0 and be constant. This assumption is valid for underground conductors parallel to long power lines which continue significantly beyond the region of parallelism.

Putting

$$E^0(x) = E_0 = -Z_m I_0 = \text{const.}, \quad (52)$$

we obtain

$$I^{(1,2)}(x) = \frac{E_0}{Z_0 \Gamma} + E e^{-\Gamma x} + F e^{\Gamma x}, \quad (53)$$

$$V^{(1,2)}(x) = Z_0 (E e^{-\Gamma x} - F e^{\Gamma x}). \quad (54)$$

On the basis of boundary conditions

$$I^{(1,2)}(x_1) = I^{(1,2)}(x_2) = 0, \quad (55)$$

we obtain

$$E = - \frac{E_0 e^{-\frac{\Gamma L}{2}} e^{\Gamma x_2}}{2 Z_0 \Gamma \text{ch} \frac{\Gamma L}{2}},$$

$$F = - \frac{E_0 e^{-\frac{\Gamma L}{2}} e^{-\Gamma x_1}}{2 Z_0 \Gamma \text{ch} \frac{\Gamma L}{2}}. \quad (56)$$

Therefore, finally,

$$I^{(1,2)}(x) = \frac{E_0}{Z_0 \Gamma} - \frac{E_0 e^{-\frac{\Gamma L}{2}}}{2 Z_0 \Gamma \text{ch} \frac{\Gamma L}{2}} [e^{\Gamma(x_2-x)} + e^{\Gamma(x-x_1)}], \quad (57)$$

$$V^{(1,2)}(x) = - \frac{E_0 e^{-\frac{\Gamma L}{2}}}{2 \Gamma \text{ch} \frac{\Gamma L}{2}} [e^{\Gamma(x_2-x)} - e^{\Gamma(x-x_1)}]. \quad (58)$$

The currents I_{en} are calculated in the same way as in sec. 3.1, and in case of inductive energization

$$I_{e1}^{(2)} = \frac{I_0 Z_m \text{th} \frac{\Gamma L}{2}}{\Gamma (Z_{e1} + Z_0 \text{cth} \Gamma L)}, \quad (59)$$

$$I_{e2}^{(1)} = - \frac{I_0 Z_m \text{th} \frac{\Gamma L}{2}}{\Gamma (Z_{e2} + Z_0 \text{cth} \Gamma L)}. \quad (60)$$

4. EXAMPLES

An underground conductor of radius $r = 1.5$ cm, length $L = 1$ km, is buried at the depth $d = 0.8$ m, parallel to an overhead power line. The horizontal distance between an underground conductor and a power line $a = 10$ m. The height of the overhead conductor of the power line above the earth surface $h = 10$ m. The underground conductor has been earthed in two points, $x_1 = -0.5$ km and $x_2 = 0.5$ km, through point earth electrodes of resistance $Z_{e1} = Z_{e2} = 1 \Omega$, in the distance $a_1 = a_2 = 5$ m from the conductor.

The other parameters of the conductor:

$Z_i = (1.6 + j3.66) \Omega/\text{km}$, $G_i = 1 \text{ S/km}$. Conductivity of soil $\gamma = 10^{-3} \text{ S/m}$.

The underground conductor is under the inductive influence of the current, of intensity $I_0 = 1 \text{ A}$, flowing in the power line.

The calculated potential distribution along the underground conductor is presented in Fig. 9. The curve $|V^0|$, in Fig. 9, represents the distribution of the rms value of the primary potential, while the curve $|V'|$ — the rms value of the potential calculated when it is assumed that there is no additional conductive influence of the currents flowing from earth electrodes.

As is shown by calculations, the conductive influence of the currents flowing through the earth electrodes of the conductor results in the increase of the potential, especially at the points where the electrodes have been attached.

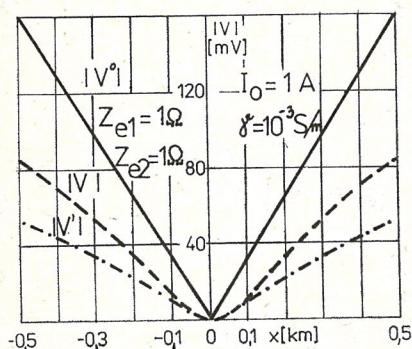


Fig. 9. Potential distribution along an underground conductor earthed at both ends, with inductive influence of a power line

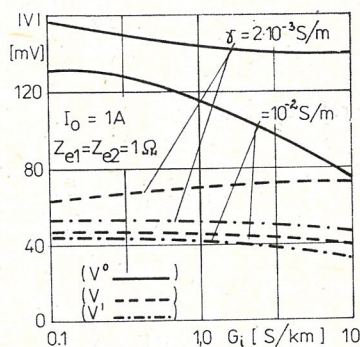


Fig. 10. Maximum voltage value vs conductance of insulation of the conductor

The differences in the results of calculations concerning the potential, depending on whether conductive influence of the currents is taken into account or not, reach up to 60% for calculated maximum values.

Fig. 10 shows the influence that the conductance of insulation of an underground conductor has on maximum values of the potential (on both ends of a conductor), for different values of soil conductivity.

The calculations show that the greatest discrepancies between the results of potential calculations appear in case of an earthed conductor with high conductance of insulation, buried in the soil of low conductivity.

5. CONCLUSIONS

The paper presents a method of calculating currents and potentials along an underground conductor, of finite length, earthed at both ends. The method takes into account the additional conductive influence of currents flowing through electrodes to the earth.

The difference between the results of calculations based on the method presented here (with conductive influence of currents being taken into account) and the results of calculations disregarding the conductive influence of currents may exceed, in some cases, 50% of calculated values.

The biggest discrepancy between the results of potential calculations occurs when the underground earthed conductor has a low quality insulation and is buried in the soil of low conductivity.

LITERATURE

1. H. Böcker, D. Oeding, *Induktionsspannungen an Pipelines in Trassen von Hochspannungsleitungen*, Elektrizitätswirtschaft, H. 5, 1966, pp. 157—170.
2. M. Krakowski, *Obwody ziemnopowrotne*, WNT, Warszawa, 1979.
3. M. Krakowski, *Currents and potentials along extensive underground conductor*, Proc. IEE, Vol. 115, 1968, No 9, pp. 1299—1304.
4. W. Machczyński, *Electromagnetic effects of a—c transmission lines on extensive underground conductor earthed through impedances*, Seventh International Wrocław Symposium on Electromagnetic Compatibility, Wrocław, June 18—20, 1984, pp. 485—494.
5. C. Menemenlis, *Induktive Beeinflussung einer Rohrleitung und ihres Steuerkabels durch eine parallellaufende Hochspannungsleitung*, Bull. SEV, H. 8, 1966, pp. 366—376.
6. R. Muckenhuber, *Die induktive Beeinflussung von Rohrleitungen durch Hochspannungsleitungen*, ÖZE, H. 6, 1968, pp. 237—280.
7. J. Pohl, *Induktive Beeinflussung von Rohrleitungen durch Erdkurzschluss- und Betriebsströme in 50 Hz Hochspannungsfreileitungen*, Elektrizitätswirtschaft, H. 19, 1976, pp. 593—599.
8. G. Röhrli, *Berechnung der induktiven Längsspannungen an hochspannungsbeeinflussten Rohrleitungen*, Elektrische Bahnen, H. 1, 1967, pp. 19—22.
9. J. W. Strizewskij, *Teorija i rascet wlijanija elektrificirovannoj železnoj dorogi na podziemnyje metalliczeskije sooruzenija*, Izdat. Lit. po Stroitelstvu, Moskwa, 1968.
10. E. D. Sunde, *Earth conduction effects in transmission systems*, Dover Publication, N. York, 1968.
11. A. Taflove, J. Dabkowski, *Prediction method for buried pipeline voltages due to 60 Hz ac inductive coupling. Part 1 — Analysis*, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-98, No. 3 May/June, 1979, pp. 780—787.
12. W. Wasiluk, J. Gębala, *Model matematyczny wpływu indukcyjnego elektromagnetycznej linii napowietrznej wysokiego napięcia na rurociąg podziemny*, II Sympozjum „Optymalizacja w zagadnieniach elektrotechniki”, Kalatówki, 5—8 czerwca, 1979, pp. 107—119.

W. MACHCZYŃSKI

ROZKŁAD PRĄDÓW I POTENCJAŁÓW WZDŁUŻ PODZIEMNEGO PRZEWODU UZIEMIENIEGO NA OBU KOŃCACH

Streszczenie

W pracy przedstawiono metodę obliczania prądów i potencjałów wzdłuż podziemnego przewodu o skończonej długości, uziemionego na obu końcach. Metoda uwzględnia dodatkowo konduktancyjne oddziaływanie prądów spływających przez uziomy przewodu do ziemi, na rozkład prądów i potencjałów. Przeanalizowano zasilanie prądowe, konduktancyjne oraz indukcyjne rozważanego przewodu podziemnego. Metodę zilustrowano przykładami obliczeniowymi.

W. MACHCZYŃSKI

REPARTITION DES COURANTS ET DES POTENTIELS LE LONG DU CONDUCTEUR ENTERRÉ MIS EN TERRE AUX EXTRÉMITÉS

Résumé

Dans l'article on présente la méthode de calcul des courants et des potentiels le long du conducteur enterré, mis en terre aux extrémités. La méthode prend en considération l'influence conductive supplémentaire des courants, qui s'écoulent dans le sol à travers les prises de terre, sur la répartition des courants et des potentiels. On a analysé l'excitation de courant conductive et inductive du conducteur considéré. La méthode est illustrée par des exemples.

W. MACHCZYŃSKI

STROM- UND POTENTIALVERTEILUNG LÄNGS DER ERDVERLEGTE AN DEN ENDEN GEERDETEN LEITUNG

Zusammenfassung

In der vorliegenden Bearbeitung wurde die Methode für die Berechnung des Strom- und Potentialverlaufes längs der erdverlegten, an den Enden geerdeten Leitung dargestellt. Die Methode berücksichtigt die zusätzliche galvanische Beeinflussung der Leitung durch Ströme, die durch die Erder in das Erdreich eindringen. Es wurden sowohl die Stromerregung, als auch galvanische und induktive Beeinflussungen der betrachteten Leitung analysiert. Als Berechnungsbeispiele wurde die technische Anwendung des Verfahrens zur Berechnung der Potentialverteilung gezeigt.

В. МАХЧИНСКИ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКОВ И ПОТЕНЦИАЛОВ В ПОДЗЕМНОМ ЗАЗЕМЛЕННОМ НА КОНЦАХ ПРОВОДЕ

Резюме

Представлен метод расчета токов и потенциалов наведенных в подземном заземленном на концах проводнике. Метод расчета учитывает добавочное кондуктивное влияние вытекающих из заземлителей токов на распределение токов и потенциалов вдоль подземного проводника. Рассмотрено токовое, гальваническое и индуктивное питание проводника. Теоретические выводы иллюстрированы примерами.

Aproksymacja charakterystyki tłumienności skutecznej filtru dolnoprzepustowego o dowolnym przebiegu w pasmie przepustowym i tłumieniowym

FELICJA WYSOCKA (BYDGOSZCZ)

Wyższa Szkoła Pedagogiczna

Otrzymano 1985.02.08

W pracy przedstawiono sposób rozwiązania problemu aproksymacji charakterystyki tłumienności skutecznej filtrów dolnoprzepustowych o dowolnym przebiegu zarówno w pasmie przepustowym jak i tłumieniowym. Rozwiązanie tego problemu przeprowadzono posługując się zmodyfikowaną metodą Powella w połączeniu z metodą gradientu sprzężonego. Praca zawiera również opis opracowanego programu obliczeń AP2D dla maszyny cyfrowej Odra 1305. Podany sposób aproksymacji zilustrowano przykładem liczbowym.

1. WSTĘP

Przy projektowaniu filtrów LC liniowych, stacjonarnych, skupionych¹⁾ istotny problem stanowi aproksymacja zadanych charakterystyk częstotliwościowych tłumienności skutecznej A_s . W wielu przypadkach zachodzi potrzeba przeprowadzania aproksymacji charakterystyki A_s o dowolnym przebiegu²⁾ w pasmie przepustowym i tłumieniowym. Jak dotąd, nie znaleziono analitycznej metody rozwiązania tego zadania.

Jeszcze kilkanaście lat temu zadanie aproksymacji charakterystyk tłumienności skutecznej rozwiązywano głównie przy użyciu metod graficzno-analitycznych tzw. szablonowych [1, 6]. Metody te są jednak bardzo czaso- i pracochłonne. Z tego właśnie powodu stosowano je najczęściej do aproksymacji charakterystyk A_s o zadanym przebiegu w pasmie tłumieniowym i czebyszewowskim przebiegu w pasmie przepustowym. Metody szablonowe umożliwiają wprawdzie przeprowadzanie aproksymacji charakterystyk A_s o dowolnym przebiegu zarówno w pasmie przepustowym jak i w tłumieniowym, jednak do tego celu były rzadko używane, ze względu na zbytnią pracochłonność.

Wraz z rozpowszechnieniem się maszyn cyfrowych zaistniała możliwość zastosowania ich również do przeprowadzania aproksymacji charakterystyk A_s filtrów różnymi metodami iteracyjnymi. Konkretnie metody rozwiązywania zadań aproksymacji charakterystyk tłumienności skutecznej o dowolnym przebiegu w pasmie przepustowym i tłumieniowym opisane są m.in. w [2, 5, 8]. Metody te wykazują jednak szereg niedogodności.

¹⁾ Innych filtrów nie rozpatruje się w niniejszej pracy.

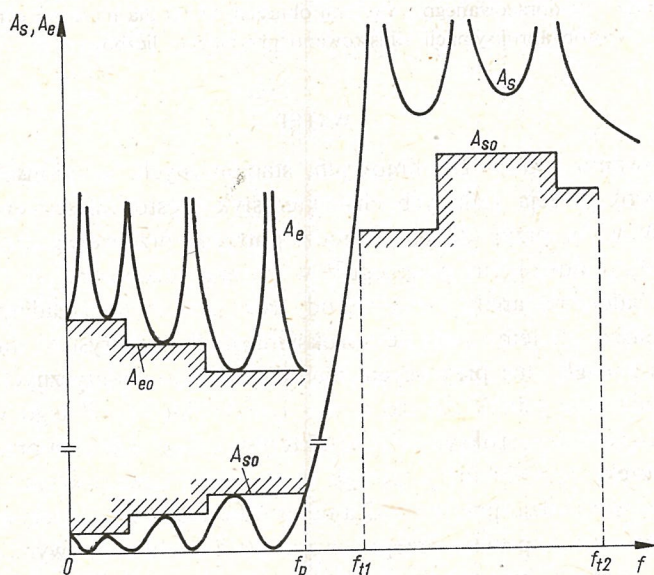
²⁾ Mówiąc o dowolnym przebiegu mamy zawsze na myśli dowolny przebieg (nie czebyszewowski) ale realizowalny.

W niniejszej pracy zaproponowano sposób rozwiązywania problemu aproksymacji charakterystyki A_s o dowolnym przebiegu zarówno w pasmie tłumieniowym jak i w pasmie przepustowym³⁾ w oparciu o wybraną metodę optymalizacji. Ponadto podano opis oraz sieć działań opracowanego programu AP2D umożliwiającego aproksymację charakterystyki A_s filtru dolnoprzepustowego.

W pracy rozpatrzono jedynie przypadek filtru dolnoprzepustowego, gdyż korzystając z odpowiednich reaktancyjnych transformacji częstotliwościowych filtry takie można przekształcić na filtry górnoprzepustowe oraz częstotliwościowo symetryczne filtry środkowoprzepustowe, środkowozaporowe i wielopasmowe [6, 9].

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozważmy reaktancyjny filtr LC o dowolnej charakterystyce tłumienności skutecznej A_s zarówno w pasmie tłumieniowym jak i w pasmie przepustowym. Wymagania stawiane takiemu filtrowi mogą być podane w postaci zadanej charakterystyki $A_{s0} = A_{s0}(f)$ w pasmie przepustowym i tłumieniowym bądź też w postaci zadanej charakterystyki $A_{s0} = A_{s0}(f)$ w pasmie tłumieniowym i zadanej charakterystyki tłumienności echowej $A_{e0} = A_{e0}(f)$ w pasmie przepustowym⁴⁾ (rys. 1).



Rys. 1. Zadane charakterystyki tłumienności skutecznej A_{s0} i tłumienności echowej A_{e0} oraz charakterystyki A_s i A_e otrzymane w wyniku aproksymacji
 f_p — górna częstotliwość krańcowa pasma przepustowego, f_{t1} , f_{t2} — dolna i górna częstotliwość krańcowa pasma tłumieniowego

³⁾ Sposób rozwiązania problemu aproksymacji charakterystyki A_s o dowolnym przebiegu w pasmie tłumieniowym i czebyśzewowskim (izoekstremalnym) przebiegu w pasmie przepustowym został opisany przez autorkę w pracy [12].

⁴⁾ Pomiędzy zadaną tłumiennością echową $A_{e0}(f)$ i zadaną tłumiennością skuteczną $A_{s0}(f)$ zachodzi zależność [6, str. 179].

$$A_{e0}(f) = -\frac{1}{2} \cdot \ln(1 - \exp(-2A_{s0}(f)))$$

Tłumienność skuteczna A_s i tłumienność echowa A_e reaktancyjnego filtra włączonego między stałe rezystancje wyraża się odpowiednio wzorami [1]:

$$A_s = A_s(x) = \ln \left| \frac{g(jx)}{f(jx)} \right| = \frac{1}{2} \ln(1 + |\varphi(jx)|^2), \quad (1)$$

$$A_e = A_e(x) = \ln \left| \frac{g(jx)}{h(jx)} \right| = \frac{1}{2} \ln(1 + |\varphi(jx)|^{-2}) \quad (2)$$

gdzie:

$x = \omega/\omega_0$ — częstotliwość zredukowana,

ω — pulsacja bieżąca,

ω_0 — pulsacja odniesienia,

$\varphi(jx) = h(jx)/f(jx)$ — funkcja filtracji,

$g(jx)$, $f(jx)$, $h(jx)$ — odpowiednie wielomiany⁵⁾.

Dla czwórnika reaktancyjnego minimalnofazowego o wielomianach $g(A)$, $h(A)$, $f(A)$, gdzie $A = jx$, spełnione są następujące warunki:

- 1) wielomiany $g(A)$, $h(A)$, $f(A)$ są rzeczywiste,
- 2) wielomian $g(A)$ jest wielomianem Hurwitza, tzn. jego zera muszą znajdować się w lewej otwartej półpłaszczyźnie,
- 3) wielomian $f(A)$ jest wielomianem parzystym lub nieparzystym,
- 4) wielomiany $g(A)$, $h(A)$ i $f(A)$ spełniają równania charakterystyczne

$$g(A) \cdot \bar{g}(A) = f(A) \cdot \bar{f}(A) + h(A) \cdot \bar{h}(A) \quad (3)$$

gdzie: $\bar{g}(A)$, $\bar{f}(A)$, $\bar{h}(A)$ są wielomianami sprzężonymi z $g(A)$, $f(A)$, $h(A)$,

5) dla $x \in \langle 0, \infty \rangle$ moduł funkcji przenoszenia jest nie mniejszy od jedności [7, str. 47], tzn.

$$\bigwedge_{x \in \langle 0, \infty \rangle} S(A) = \left| \frac{g(A)}{f(A)} \right|_{A=jx} \geq 1 \quad (4)$$

Tłumienność skuteczna $A_s(x)$ i tłumienność echowa $A_e(x)$ związane są ze sobą wzorem Feldtkellera [1]

$$\exp(-2A_s(x)) + \exp(-2A_e(x)) = 1 \quad (5)$$

Ze wzoru tego wynika, że bieguny funkcji $A_e(x)$ i zera funkcji $A_s(x)$ występują przy tych samych częstotliwościach x .

Należy ponadto zauważyć, że charakterystyka $A_e(x)$ ma w pasmie przepustowym przebieg analogiczny do przebiegu charakterystyki $A_s(x)$ w pasmie tłumieniowym w tym sensie, że ma bieguny i minima. Z tego właśnie powodu wygodniej jest rozpatrywać w pasmie przepustowym zamiast charakterystyki $A_s(x)$ charakterystykę $A_e(x)$. Umożliwia to bowiem stosowanie zbliżonych procedur obliczeniowych zarówno dla pasma przepustowego, jak i dla pasma tłumieniowego.

Jak wynika ze wzorów (1) i (2), zadanie aproksymacji charakterystyk $A_s(x)$ i $A_e(x)$ można rozwiązywać na drodze aproksymacji funkcji filtracji. Znając postać tej funkcji, a tym samym postać wielomianów $h(A)$ i $f(A)$, można następnie wyznaczyć wielomian $g(A)$ niezbędny do przeprowadzenia syntezy filtra.

⁵⁾ Zakłada się, że wielomiany $h(jx)$ i $f(jx)$ są względnie pierwsze.

Rozpatrzmy filtry dolnoprzepustowe robocze symetryczny i antymetryczny. W przypadku tych filtrów funkcja filtracji i jej moduł wyrażają się odpowiednio wzorami:

— dla filtru D_p roboczego symetrycznego

$$\varphi(A) = C \frac{A \prod_{i=1}^m (A^2 + x_{0i}^2)}{\prod_{i=1}^n (A^2 + x_{\infty i}^2)} \quad (6)$$

$$|\varphi(A)|_{A=jx} = \left| C \frac{x \prod_{i=1}^m (x^2 - x_{0i}^2)}{\prod_{i=1}^n (x^2 - x_{\infty i}^2)} \right| \quad (7)$$

— dla filtru roboczego antymetrycznego

$$\varphi(A) = C \frac{\prod_{i=1}^m (A^2 + x_{0i}^2)}{\prod_{i=1}^n (A^2 + x_{\infty i}^2)} \quad (8)$$

$$|\varphi(A)|_{A=jx} = \left| C \frac{\prod_{i=1}^m (x^2 - x_{0i}^2)}{\prod_{i=1}^n (x^2 - x_{\infty i}^2)} \right| \quad (9)$$

gdzie:

C — stała,

n — liczba skończonych biegunów funkcji $\varphi(A)$,

m — liczba zer odpowiednio funkcji $\varphi(A)/A$ lub funkcji $\varphi(A)$,

x_{0i} — częstotliwość zredukowana i -tego zera funkcji φ , $i = 1, \dots, m$,

$x_{\infty i}$ — częstotliwość zredukowana i -tego bieguna funkcji φ , $i = 1, \dots, n$.

Aby filtry te były realizowalne fizycznie, liczby m i n muszą spełniać warunek $n \leq m$.

Niech $A_{e0}(x)$ będzie wymaganą tłumiennością echową w pasmie przepustowym $P = \langle x_{-p}, x_p \rangle$, $X_0 = [x_{01}, \dots, x_{0m}]^T$ — wektorem parametrów x_{0i} , ($x_{0i} < x_{0(i+1)}$), a Θ_{pk} , $k = 1, \dots, m+1$, — przedziałami określonymi następująco:

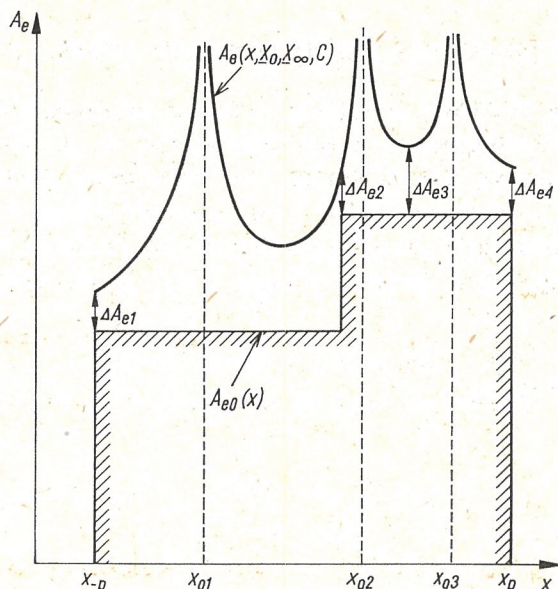
$$\left. \begin{aligned} \Theta_{p1} &= \langle x_{-p}, x_{01} \rangle, \\ \Theta_{pl} &= (x_{0(l-1)}, x_{0l}), \quad l = 2, 3, \dots, m, \\ \Theta_{p(m+1)} &= (x_{0m}, x_p) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Ponadto $A_{s0}(x)$ niech będzie wymaganą tłumiennością skuteczną w pasmie tłumieniowym $T = \langle x_{t1}, x_{t2} \rangle$, $X_{\infty} = [x_{\infty 1}, \dots, x_{\infty n}]^T$ — wektorem parametrów $x_{\infty i}$ ($x_{\infty i} < x_{\infty(i+1)}$), a Θ_{tk} , $k = 1, \dots, n+1$, — przedziałami określonymi następująco:

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{t1} &= \langle x_{t1}, x_{\infty 1} \rangle, \\ \Theta_{tl} &= (x_{\infty(l-1)}, x_{\infty l}), \quad l = 2, 3, \dots, n, \\ \Theta_{t(n+1)} &= (x_{\infty n}, x_{t2}) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Aproksymację uważamy za optymalną, gdy spełnione są następujące warunki:

- 1) otrzymana w wyniku aproksymacji funkcja filtracji jest możliwie małego stopnia,
- 2) wartości najmniejszych różnic $\Delta A_{ek}(X_0, X_\infty, C)$ pomiędzy charakterystyką tłumienności $A_e(x, X_0, X_\infty, C)$ otrzymaną w wyniku aproksymacji i zadaną charakterystyką $A_{e0}(x)$ w przedziałach $\Theta_{pk}, k = 1, \dots, m+1$, są jednakowe i nieujemne (rys. 2),



Rys. 2. Zadana charakterystyka $A_{e0}(x)$ oraz charakterystyka $A_e(x, X_0, X_\infty, C)$ ją aproksymująca

- 3) wartości najmniejszych różnic $\Delta A_{sk}(X_0, X_\infty, C)$ pomiędzy charakterystyką tłumienności $A_s(x, X_0, X_\infty, C)$ otrzymaną w wyniku aproksymacji i zadaną charakterystyką $A_{s0}(x)$ w przedziałach $\Theta_{tk}, k = 1, \dots, n+1$, są jednakowe i nieujemne.

Zadanie aproksymacji sformułujemy w sposób następujący:

- 1) wyznaczyć minimalne liczby n i $m, m \geq n$, takie by:

$$\bigwedge_{x \in P} A_e(x, X_0, X_\infty, C) - A_{e0}(x) \geq 0, \quad (12)$$

$$\bigwedge_{x \in E} A_s(x, X_0, X_\infty, C) - A_{s0}(x) \geq 0, \quad (13)$$

- 2) dla ustalonych liczb n i m wyznaczyć takie wektory $X_0^* = [x_{01}^*, \dots, x_{0m}^*]^T$ i $X_\infty^* = [x_{\infty 1}^*, \dots, x_{\infty n}^*]^T$ oraz stałą C^* , przy czym

$$i = 1, \dots, m \quad x_{-p} \leq x_{0i}^* \leq x_p, \quad (14)$$

$$i = 1, \dots, n \quad x_{t1} \leq x_{\infty i}^* \leq x_{t2}, \quad (15)$$

dla których

$$k, l = 1, \dots, m+1 \quad \Delta A_{ek}(X_0^*, X_\infty^*, C^*) = \Delta A_{el}(X_0^*, X_\infty^*, C^*), \quad (16)$$

$$k, l = 1, \dots, n+1 \quad \Delta A_{sk}(X_0^*, X_\infty^*, C^*) = \Delta A_{sl}(X_0^*, X_\infty^*, C^*), \quad (17)$$

gdzie:

$$\Delta A_{ek}(X_0^*, X_\infty^*, C^*) = \min_{x \in \Theta_{pk}} (A_e(x, X_0^*, X_\infty^*, C^*) - A_{e0}(x)), \quad (18)$$

$$\Delta A_{sk}(X_0^*, X_\infty^*, C^*) = \min_{x \in \Theta_{tk}} (A_s(x, X_0^*, X_\infty^*, C^*) - A_{s0}(x)). \quad (19)$$

3. SPOSÓB WYZNACZENIA WSPÓŁCZYNNIKÓW FUNKCJI FILTRACJI

Jak wiadomo, dla ogólnego przypadku zadanych charakterystyk $A_{e0}(x)$ i $A_{s0}(x)$ nie ma wzorów umożliwiających w sposób bezpośredni, na podstawie przebiegu tych charakterystyk, wyznaczenie stopnia licznika czy mianownika funkcji filtracji. Wobec tego zdecydowano się na wyznaczenie liczb n i m w sposób opisany poniżej.

W literaturze [6] podana jest następująca przybliżona zależność pozwalająca określić liczbę ogniw $\tilde{n}$ falowego filtru Dp symetrycznego o wyrównanej charakterystyce tłumieniowej⁶⁾

$$\tilde{n} = \begin{cases} n' - & \text{gdy } n' \text{ jest liczbą całkowitą,} \\ E(n') + 1 - & \text{gdy } n' \text{ jest liczbą ułamkową} \end{cases} \quad (20)$$

przy czym

$$n' = \frac{A_{\min} + \ln 2}{\ln 2 + 2 \operatorname{arth} \sqrt{k_t'}} \quad 7) \quad (21)$$

gdzie:

$E(n')$ — część całkowita (entier) liczby n' ,

$A_{\min}$ — minimalna tłumienność falowa filtru w pasmie tłumieniowym,

$k_t' = \sqrt{1 - k_t^2}$ — współczynnik,

k_t — współczynnik wykorzystania teoretycznego pasma tłumieniowego wyrażony wzorem

$$k_t = \begin{cases} \sqrt{\frac{\left(\frac{x_{t2}}{x_{t1}}\right)^2 - 1}{x_{t2}^2 - 1}} & \text{— gdy } x_{t2} < \infty, \\ \frac{1}{x_{t1}} & \text{— gdy } x_{t2} = \infty, \end{cases} \quad (22)$$

x_{t1} i $x_{t2} > x_{t1}$ — zredukowane częstotliwości krańcowe dolna i górna praktycznego pasma tłumieniowego.

Ponieważ liczba ogniw $\tilde{n}$ odpowiedniego falowego filtru Dp symetrycznego o wyrównanej charakterystyce tłumieniowej jest równa liczbie biegunów w skończoności, liczbę tę można wstępnie przyjąć jako poszukiwaną liczbę n .

W rozpatrywanym przypadku mamy jednak do czynienia z filtrami roboczymi, zarówno

⁶⁾ Przez filtr falowy o wyrównanej charakterystyce tłumieniowej rozumiemy filtr, którego tłumienność falowa ma w zakresie praktycznego pasma tłumieniowego wszystkie minima jednokowe, równe $A_{\min}$, a w pozostałej części teoretycznego pasma tłumieniowego wartości nie większe od $A_{\min}$ [6].

⁷⁾ Zależność ta jest słuszna, gdy k_t jest dostatecznie małe. Ma to miejsce przy $\tilde{n} \geq 1$ dla $k_t \leq 0,995$ [6].

symetrycznymi jak i antymetrycznymi, i to najczęściej o charakterystykach $A_{s0}(x) \neq \text{const}$ w pasmie przepustowym i $A_{s0}(x) \neq \text{const}$ w pasmie tłumieniowym. By móc w tych warunkach skorzystać z zależności (20) i (21) należy:

1) określić średnią wartość $A_{s\bar{s}r}$ tłumienności skutecznej $A_{s0}(x)$ w pasmie przepustowym według wzoru

$$A_{s\bar{s}r} = \frac{\int_B A_{s0}(x) dx}{x_p - x_{-p}}, \quad (23)$$

2) przejść z charakterystyki $A_{s0}(x)$ na charakterystykę tłumienności falowej $A(x)$ w pasmie tłumieniowym korzystając z zależności

$$A(x) \approx A_{s0}(x) + \ln \frac{2}{\sqrt{\exp(2A_{s\bar{s}r}) - 1}}, \quad (24)$$

3) w przypadku roboczych filtrów symetrycznych (odpowiadających falowym filtrom antymetrycznym) — od otrzymanej charakterystyki $A = A(x)$ odjąć charakterystykę tłumienności falowej półogniwa odwracającego realizującego połowę bieguna A w nieskończoności,

4) przejść ze zmiennej x w pasmie tłumieniowym na zmienną η ⁸⁾ określoną wzorem

$$\eta = \ln \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad (25)$$

5) sprowadzić otrzymaną charakterystykę $A = A(\eta)$ do odpowiadającej jej wzorcowej charakterystyki uśrednionej $A_1 = \text{const}$ według wzoru

$$A_1 = \frac{\int_D A(\eta) d\eta}{\eta_{t\text{gor}} - \eta_{t\text{dol}}} \quad (26)$$

gdzie:

$D = \langle \eta_{t\text{dol}}, \eta_{t\text{gor}} \rangle$ — przedział na osi η odpowiadający pasmu tłumieniowemu.

Podstawiając wyznaczoną wartość A_1 do wzoru (21) obliczamy liczbę n' . Liczbę $n = \tilde{n}$ określamy korzystając z zależności (20). Mając w ten sposób wstępnie wyznaczoną liczbę n , przyjmujemy początkowo, że $m = n$. Jeżeli jednak okazałoby się, że przy takiej wartości m wymagania w pasmie przepustowym nie mogą być spełnione, liczbę tę należy zwiększyć.

W celu znalezienia współrzędnych wektorów X_0^* i X_∞^* , a tym samym wyznaczenia optymalnego dla danej charakterystyki $A_{s0}(x)$ położenia biegunów i zer funkcji filtracji, wygodnie jest określić takie funkcje $w_1(X_0, X_\infty)$ i $w_2(X_0, X_\infty)$, które przy spełnieniu odpowiednio (16) i (17) osiągają minimum. Jako funkcje te przyjmujemy funkcje postaci

$$w_1(X_0, X_\infty) = \sum_{k=1}^{m+1} \left(\Delta A_{ek}(X_0, X_\infty, C) - \frac{\sum_{i=1}^{m+1} \Delta A_{ei}(X_0, X_\infty, C)}{m+1} \right)^2 \quad (27)$$

$$w_2(X_0, X_\infty) = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \Delta A_{sk}(X_0, X_\infty, C) - \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \Delta A_{si}(X_0, X_\infty, C)}{n+1} \right)^2 \quad (28)$$

⁸⁾ Transformacja $x \rightarrow \eta$ odpowiada przekształceniu pasma tłumieniowego w ograniczony przedział na osi η .

W [11] wykazano, że dla

$$|\varphi(x, X_0, X_\infty, C)|^{-2} \gg 1 \quad (29)$$

w pasmie przepustowym wartość funkcji $w_1(X_0, X_\infty)$ jest praktycznie niezależna⁹⁾ od wartości stałej C . Wykazano również, że dla

$$|\varphi(x, X_0, X_\infty, C)|^2 \gg 1 \quad (30)$$

w pasmie tłumieniowym wartość funkcji $w_2(X_0, X_\infty)$ jest praktycznie niezależna od wartości stałej C .

Dla spotykanych w praktyce funkcji filtracji spełniony jest zarówno warunek (29) w pasmie przepustowym, jak i warunek (30) w pasmie tłumieniowym. Można więc przyjąć, że dla takich funkcji filtracji funkcje $w_1(X_0, X_\infty)$ i $w_2(X_0, X_\infty)$ są praktycznie niezależne od wartości stałej C .

Przy spełnieniu (16) funkcja $w_1(X_0, X_\infty)$ osiąga minimum po X_0 dla danego wektora X_∞ , a przy spełnieniu (17) funkcja $w_2(X_0, X_\infty)$ osiąga minimum po X_∞ dla danego wektora X_0 . Problem wyrównania różnic $\Delta A_{ek}(X_0, X_\infty, C)$, $k = 1, \dots, m+1$, sprowadza się w ten sposób do zadania znalezienia takich współrzędnych wektora X_0 , dla których funkcja $w_1(X_0, X_\infty)$ osiąga minimum globalnego dla danego X_∞ przy ograniczeniach:

$$\left. \begin{aligned} \bigwedge_{i=1, \dots, m} x_{-p} - x_{0i} &\leq 0, \\ \bigwedge_{i=1, \dots, m} x_{0i} - x_p &\leq 0, \\ \bigwedge_{k=1, \dots, m+1} -\Delta A_{ek}(X_0, X_\infty, C) &\leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Podobnie problem wyrównania różnic $\Delta A_{sk}(X_0, X_\infty, C)$, $k = 1, \dots, n+1$, sprowadza się do znalezienia takich współrzędnych wektora X_∞ , dla których funkcja $w_2(X_0, X_\infty)$ osiąga minimum globalne dla danego X_0 przy ograniczeniach:

$$\left. \begin{aligned} \bigwedge_{i=1, \dots, n} x_{t1} - x_{\infty i} &\leq 0, \\ \bigwedge_{i=1, \dots, n} x_{\infty i} - x_{t2} &\leq 0, \\ \bigwedge_{k=1, \dots, n+1} -\Delta A_{sk}(X_0, X_\infty, C) &\leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Ze względu na fakt, że w pierwszym z wymienionych zadań wektor X_∞ traktowany jest jako parametr, a X_0 jako zmienna, natomiast w drugim — wektor X_0 traktowany jest jako parametr, a X_∞ jako zmienna, przed przystąpieniem do rozwiązywania tych zadań należy zdecydować, które z nich należy rozwiązywać jako pierwsze.

Przeprowadzone próby [11] wykazały, że jako pierwsze wygodnie jest rozwiązywać zadanie poszukiwania wektora X_0 minimalizującego funkcję $w_1(X_0, X_\infty)$ przy założonym początkowym wektorze X_∞ . Znajac rozwiązanie $\tilde{X}_0^*$ tego zadania należy następnie przystąpić do rozwiązywania zadania poszukiwania wektora X_∞ minimalizującego funkcję $w_2(X_0, X_\infty)$ przy $X_0 = \tilde{X}_0^*$. Ze względu na fakt, że zmiany wartości współrzęd-

⁹⁾ Stwierdzenie, że funkcja jest praktycznie niezależna od wartości argumentu oznacza, że stosunkowo bardzo duże zmiany argumentu powodują pomijalnie małe zmiany wartości funkcji.

nych wektora X_∞ powodują jednak pewną zmianę przebiegu charakterystyki $A_e(x, X_0, X_\infty, C)$ w pasmie przepustowym, należy jeszcze, w razie potrzeby, powtórnie rozwiązać zadanie poszukiwania wektora X_0 minimalizującego funkcję $w_1(X_0, X_\infty)$ przy $X_\infty = X_\infty^*$, gdzie X_∞^* stanowi rozwiązanie poprzedniego zadania. W rozpatrywanym zadaniu poszukiwania wektora X_0 jako wartości współrzędnych punktu startowego przyjmujemy wartości współrzędnych wektora $\tilde{X}_0^*$. Punkt startowy znajduje się więc bardzo blisko poszukiwanego rozwiązania, co powoduje, że zmiany wartości współrzędnych wektora X_0 (z $\tilde{X}_0^*$ na X_0^* , gdzie X_0^* stanowi rozwiązanie) są stosunkowo niewielkie i praktycznie nie wywołują zmian przebiegu charakterystyki $A_s(x, X_0, X_\infty, C)$ w pasmie tłumieniowym.

Mając wyznaczone wektory $X_0^* = [x_{01}^*, \dots, x_{0m}^*]^T$ i $X_\infty^* = [x_{\infty 1}^*, \dots, x_{\infty n}^*]^T$, wartość bezwzględną stałą C^* obliczamy ze wzoru

$$|C^*| = \left| \frac{\prod_{i=1}^n (x_p^2 - x_{\infty i}^{*2})}{x_p \prod_{i=1}^m (x_p^2 - x_{0i}^{*2})} \right| \cdot \sqrt{\exp(2A_s(x_p)) - 1} \quad (33)$$

w przypadku filtru Dp roboczego symetrycznego, lub ze wzoru

$$|C^*| = \left| \frac{\prod_{i=1}^n (x_p^2 - x_{\infty i}^{*2})}{\prod_{i=1}^m (x_p^2 - x_{0i}^{*2})} \right| \cdot \sqrt{\exp(2A_s(x_p)) - 1} \quad (34)$$

w przypadku roboczego filtru antymetrycznego. Przyjmujemy, że $C^* = |C^*|$, tzn. że stała C^* jest dodatnia.

Zadania poszukiwania wektora X_0 minimalizującego funkcję $w_1(X_0, X_\infty)$ oraz poszukiwania wektora X_∞ minimalizującego funkcję $w_2(X_0, X_\infty)$ są zadaniami programowania nieliniowego z ograniczeniami. Z podanych w literaturze [3, 4] metod poszukiwania minimum z ograniczeniami do rozwiązywania rozpatrywanych zadań zastosowano zmodyfikowaną metodę Powella (z przesuwaną funkcją kary). Metoda ta umożliwia sprowadzenie zadania z ograniczeniami do ciągu zadań bez ograniczeń poprzez odpowiednią modyfikację funkcji celu ¹⁰⁾. Zadania programowania nieliniowego bez ograniczeń rozwiązywano metodą gradientu sprzężonego Polaka Ribiera z estymacją gradientu [3, 4].

Przy rozwiązywaniu zadania poszukiwania wektora X_∞ minimalizującego funkcję $w_2(X_0, X_\infty)$ należy wziąć pod uwagę fakt, że bieguny funkcji filtracji mają tendencję do skupiania się w pobliżu częstotliwości x_{t1} , w związku z czym mianownik tej funkcji jest źle uwarunkowany numerycznie. Z tego właśnie powodu odpowiednie zadanie programowania nieliniowego z ograniczeniami wygodnie jest rozwiązywać nie w zakresie zmiennej x , lecz w zakresie zmiennej η określonej wzorem (25).

4. OPIS PROGRAMU AP2D

Przedstawiony sposób aproksymacji posłużył do opracowania programu AP2D umożliwiającego aproksymację charakterystyk tłumienności skutecznej filtrów dolno-

¹⁰⁾ Funkcją celu nazywamy funkcję, której minimum poszukujemy.

przepustowych zarówno w pasmie przepustowym jak i tłumieniowym. Program ten został napisany w języku Fortran 1900 dla maszyny cyfrowej Odra 1305. Ogólna sieć działań programu AP2D jest pokazana na rys. 3. Sieci działań większości poszczególnych algorytmów można znaleźć w pracy [11].

Aproksymowana charakterystyka A_{s0} zadana jest przez podanie 40 lub mniej współrzędnych f_i oraz $A_{s0}(f_i)$ jej punktów należących do pasma przepustowego oraz 40 lub mniej współrzędnych f_i oraz $A_{s0}(f_i)$ jej punktów należących do pasma tłumieniowego, gdzie: f_i — częstotliwość w hercach, $A_{s0}(f_i)$ — odpowiadająca jej wartość tłumienności skutecznej w decybelach lub neperach. Jako dane wejściowe należy również podać:

- 1) rodzaj filtru, a mianowicie: filtr symetryczny lub antymetryczny (liczba informacyjna NR równa odpowiednio 1 lub 0);
- 2) liczby ILP i ILT współrzędnych f_i aproksymowanej charakterystyki $A_{s0}(f_i)$ należących odpowiednio do pasma przepustowego i tłumieniowego ($ILP \leq 40$, $ILT \leq 40$);
- 3) informację, czy wartości $A_{s0}(f_i)$ podane są w neperach czy w decybelach (liczba informacyjna ID równa odpowiednio 0 lub 1);
- 4) informację, czy chcemy otrzymać wydruki wartości kolejnych współrzędnych funkcji $A_{eo}(x)$, $A_e(x, X_0, X_\infty, C)$, $A_{s0}(\eta)$ oraz $A_s(\eta, X_0, X_\infty, C)$, jak również wykresy tych funkcji, czy też nie (liczba informacyjna IIT równa odpowiednio 1 lub 0);
- 5) informację, czy aproksymowana funkcja jest funkcją schodkową w pasmie przepustowym, czy nie (liczba informacyjna KFP równa odpowiednio 1 lub 0) oraz czy jest ona funkcją schodkową w pasmie tłumieniowym, czy nie¹¹⁾ (liczba informacyjna KFT równa odpowiednio 1 lub 0);
- 6) wartość parametru EPS, zwanego parametrem testu stopu procedury minimalizacji bez ograniczeń [3] (procedura ta kończy swoje działanie, gdy norma gradientu funkcji celu $\|\nabla F\| \leq EPS$).

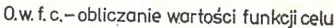
W trakcie wykonywania programu AP2D wyznaczane są liczby n zer i m biegunów funkcji filtracji. Liczby te nie mogą przekraczać dwudziestu.

W programie AP2D do rozwiązywania zadań programowania nieliniowego z ograniczeniami zastosowano zmodyfikowaną metodę Powella. Ponadto w programie tym wykorzystano odpowiednio zmodyfikowaną procedurę GSPRIEM opracowaną w Instytucie Automatyki Politechniki Warszawskiej [4]. Procedura ta umożliwia rozwiązywanie zadań programowania nieliniowego bez ograniczeń metodą gradientu sprzężonego Polaka-Ribiera, przy czym gradient funkcji celu jest estymowany numerycznie. W przypadku rozpatrywanych funkcji celu, numeryczna estymacja gradientu jest niezbędna, gdyż nie ma możliwości jego wyznaczenia w sposób analityczny.

Po przeprowadzeniu obliczeń przy użyciu programu AP2D otrzymujemy następujące wyniki końcowe:

- liczby m zer i n biegunów funkcji filtracji;
- wartości minimów funkcji $A_e(x, X_0, X_\infty, C)$ w kolejnych przedziałach Θ_{pk} , $k = 1, \dots, m+1$, oraz wartości minimalnych różnic $\Delta A_{ek}(X_0, X_\infty, C)$ w tych przedziałach;

¹¹⁾ Wstępne założenie schodkowego kształtu charakterystyki A_{s0} w pasmie przepustowym lub w tłumieniowym pozwala na pewne uproszczenie algorytmu, dzięki czemu uzyskuje się skrócenie czasu obliczeń.



[1391]

Tablica 1. Wyniki obliczeń do przykładu 1

FILTR DOLNOPRZEPUSTOWY SYMETRYCZNY

DANE

PASMO TLUMIENIOWE

CHARAKTERYSTYKA SCHODKOWA

F HZ	0.5000E 05	0.6000E 05	0.1000E 06	0.1000E 19
AS DB	70.00000000	85.00000000	60.00000000	60.00000000

PASMO PRZEPUSTOWE

CHARAKTERYSTYKA SCHODKOWA

F HZ	0.0000E 00	0.2000E 05	0.3000E 05
AS DB	0.10000000	0.30000000	0.30000000

OBLICZENIA

N = 3

M = 3

WSPOLRZEDNE MINIMOW FUNKCJI AE(X,X0,XN,C)
ORAZ WARTOSCI MINIMALNYCH ROZNIC DELTA AE W PRZEDZIALACH THETA P K

K	1	2	3	4
X	0.236012	0.635872	0.906739	1.000000
AE(X,X0,XN,C) DB	20.898470	20.896288	16.224048	16.224507
DELTA AE DB	4.470459	4.468278	4.468078	4.468538

WSPOLRZEDNE MINIMOW FUNKCJI AS(ETA,X0,XN,C)
ORAZ WARTOSCI MINIMALNYCH ROZNIC DELTA AS W PRZEDZIALACH THETA T K

K	1	2	3	4
ETA	0.013814	0.090223	0.168818	0.223144
AS(ETA,X0,XN,C) DB	75.398878	86.000115	81.317911	71.000155
DELTA AS DB	1.000124	1.000115	1.000150	1.000155

OPTYMALNE WSPÓŁRZEDNE ETA
 ETA(1) = 0.0601717
 ETA(2) = 0.1243094
 ETA(3) = 0.1978927

OPTYMALNE WSPÓŁRZEDNE WEKTORA X0
 (ZNORMALIZOWANE CZĘSTOTLIWOSCI ZER FUNKCJI FILTRACJI)
 X0(1) = 0.4530108
 X0(2) = 0.7728869
 X0(3) = 0.9773420

OPTYMALNE WSPÓŁRZEDNE WEKTORA XN
 (ZNORMALIZOWANE CZĘSTOTLIWOSCI BIEGUNOW FUNKCJI FILTRACJI)
 XN(1) = 1.7491480
 XN(2) = 2.1314127
 XN(3) = 2.9697769

OPTYMALNA WARTOSC STALEJ C
 C = 622.106319

CZĘSTOTLIWOSCI ZER FUNKCJI FILTRACJI
 Z(1) = 0.13590324E 05 [HZ]
 Z(2) = 0.23186608E 05 [HZ]
 Z(3) = 0.29320261E 05 [HZ]

CZĘSTOTLIWOSCI BIEGUNOW FUNKCJI FILTRACJI
 B(1) = 0.52474439E 05 [HZ]
 B(2) = 0.63942380E 05 [HZ]
 B(3) = 0.89093307E 05 [HZ]

CZAS WYKONYWANIA OBLICZEN = 118 [SEK]

- wartości minimów funkcji $A_s(\eta, X_0, X_\infty, C)$ w kolejnych przedziałach $\Theta_{tk}^{(12)}$, $k = 1, \dots, n+1$, oraz wartości minimalnych różnic $\Delta A_{sk}(X_0, X_\infty, C)$ w tych przedziałach;
- optymalne wartości współrzędnych wektorów X_0 i X_∞ ;
- optymalną wartość stałej C ;
- częstotliwości zer i biegunów funkcji filtracji — po denormalizacji;
- czas wykonywania obliczeń. Istnieje ponadto możliwość drukowania:
 - wartości kolejnych współrzędnych funkcji $A_{e0}(x)$ oraz funkcji $A_e(x, X_0, X_\infty, C)$ ją aproksymującej, jak również wykresów obu tych funkcji;
 - wartości kolejnych współrzędnych funkcji $A_{s0}(\eta)$ oraz funkcji $A_s(\eta, X_0, X_\infty, C)$ ją aproksymującej, jak również wykresów obu tych funkcji.

Przy użyciu programu AP2D przeprowadzono aproksymację szeregu charakterystyk tłumienności skutecznej filtrów. Czas wykonywania obliczeń zależy od liczb n i m oraz

¹²⁾ Przedziały $\Theta_{tk}^{(12)}$, $k = 1, \dots, n+1$, są odpowiednikami przedziałów Θ_{tk} , $k = 1, \dots, n+1$ w zakresie zmiennej η .

kształtu aproksymowanej charakterystyki A_{s0} . Waha się on od kilkudziesięciu sekund do kilkudziesięciu minut. Działanie programu zilustrujemy następującym przykładem.

Przykład

Wyznaczyć położenie zer i biegunów tłumienności skutecznej A_s filtru dolnoprzepustowego o następujących danych:

Praktyczne pasmo przepustowe mieści się w przedziale częstotliwości od $f = 0$ [Hz] do $f = 30$ [kHz],

Tłumienność skuteczna A_{s0} w praktycznym pasmie przepustowym

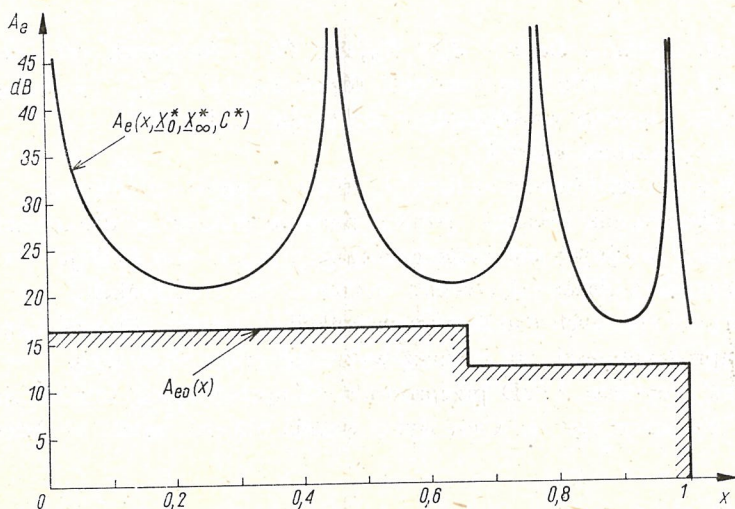
$$\begin{aligned} A_{s0} &\leq 0,1[\text{dB}] & \text{dla} & \quad 0[\text{kHz}] \leq f < 20[\text{kHz}], \\ A_{s0} &\leq 0,3[\text{dB}] & \text{dla} & \quad 20[\text{Hz}] \leq f \leq 30[\text{kHz}]. \end{aligned}$$

Praktyczne pasmo tłumieniowe występuje w zakresie częstotliwości od $f = 50$ [kHz] do $f = \infty$.

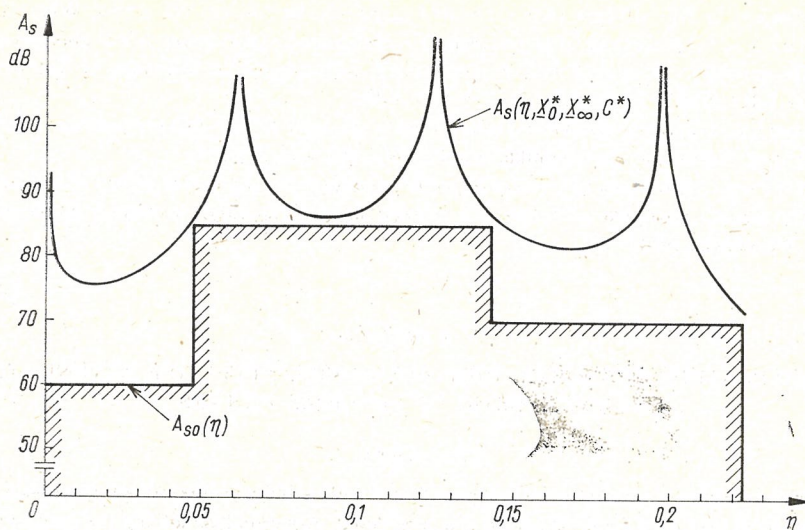
Tłumienność skuteczna A_{s0} w praktycznym pasmie tłumieniowym

$$\begin{aligned} A_{s0} &\geq 70[\text{dB}] & \text{dla} & \quad 50[\text{kHz}] \leq f \leq 60[\text{kHz}], \\ A_{s0} &\geq 85[\text{dB}] & \text{dla} & \quad 60[\text{kHz}] \leq f \leq 100[\text{kHz}], \\ A_{s0} &\geq 60[\text{dB}] & \text{dla} & \quad f > 100[\text{kHz}]. \end{aligned}$$

Filtr ma posiadać półbiegun tłumienności A_s w nieskończoności. Dla powyższych danych przeprowadzono aproksymację charakterystyki A_{s0} filtru przy użyciu programu AP2D. Do obliczeń przyjęto wartość parametru $\text{EPS} = 0,005$. Otrzymane wyniki podane są w tabelcy 1. Na rysunkach 4 i 5 pokazane są odpowiednio: 1) zadana charakterystyka $A_{e0}(x)$ i otrzymana charakterystyka $A_e(x, X_0^*, X_\infty^*, C^*)$ ją aproksymująca oraz 2) zadana charakterystyka $A_{s0}(x)$ i otrzymana charakterystyka $A_s(\eta, X_0^*, X_\infty^*, C^*)$ ją aproksymująca. Z rysunków tych widać, że charakterystyki $A_e(x, X_0^*, X_\infty^*, C^*)$ oraz $A_s(\eta, X_0^*, X_\infty^*, C^*)$ spełniają przedstawione wymagania.



Rys. 4. Przebiegi charakterystyk $A_{e0}(x)$ i $A_e(x, X_0^*, X_\infty^*, C^*)$ z przykładu 1



Rys. 5. Przebiegi charakterystyk $A_{s0}(x)$ i $A_s(\eta, X_0^*, X_\infty^*, C^*)$ z przykładu 1

ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiono sposób rozwiązania problemu aproksymacji charakterystyki tłumienności skutecznej A_s filtrów dolnoprzepustowych o dowolnym przebiegu zarówno w pasmie przepustowym jak i w pasmie tłumieniowym, opisano program AP2D dla maszyny Odra 1305 oraz podano przykładowe wyniki obliczeń.

Zaproponowany sposób rozwiązania problemu aproksymacji w drodze rozwiązania odpowiednich zadań programowania nieliniowego może być wykorzystywany nie tylko w przypadku aproksymacji charakterystyk filtrów, lecz również przy rozwiązywaniu innych zadań aproksymacji, w których wymagane jest, aby minimalne różnice pomiędzy funkcją aproksymującą i aproksymowaną były jednakowe w poszczególnych przedziałach.

BIBLIOGRAFIA

1. W. Cauer, *Theorie der linearen Wechselstromschaltungen*, Band I, Akademie — Verlag, Berlin 1954.
2. R. W. Daniels, *Approximation Methods for Filter Design*, Mc Graw-Hill, New York 1974.
3. W. Findeisen, J. Szymanowski, A. Wierzbicki, *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji*, Warszawa, PWN, 1980.
4. T. Kręglewski, T. Rogowski, A. Ruszczyński, J. Szymanowski, *Metody optymalizacji w języku FORTRAN*, Warszawa, PWN, 1984.
5. A. A. Lanne, *Optimalnyj sintez lineijnych elektriczeskich schiem*, Moskwa, Izd. Swiaź, 1978.
6. O. Przesmycki, *Filtry elektryczne*, Warszawa, WKiŁ, 1962.
7. O. Przesmycki, *Metoda mieszana projektowania filtrów LC*, Inst. Telekomunikacji Politechniki Warszawskiej, Referaty, zeszyt 3, Warszawa 1977.
8. H. Rapp, *A Simple Iterative Method for Evaluation of the Characteristic Function in Filter Synthesis*, Ericsson Technics, 1970 vol. 26, nr 2.

9. G. C. Temes, S. K. Mitra (red.), *Teoria i projektowanie filtrów*, Warszawa, WNT, 1978.
10. F. Wysocka, *Aproksymacja charakterystyki tłumienności skutecznej filtru dolnoprzepustowego przy użyciu maszyny cyfrowej*, Krajowa Konferencja „Przetwarzanie Sygnałów w Telekomunikacji, Sterowaniu i Kontroli”, Bydgoszcz, 15—18 luty 1984.
11. F. Wysocka, *Aproksymacja charakterystyk tłumieniowych filtrów LC przy użyciu maszyny cyfrowej*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa, 1984.
12. F. Wysocka, *Aproksymacja charakterystyki tłumienności skutecznej filtru dolnoprzepustowego przy użyciu metody gradientu sprzężonego z zewnętrzną funkcją kary*, Rozprawy Elektrotechniczne, zeszyt 2, Warszawa, 1984.

F. WYSOCKA

APPROXIMATION OF ARBITRARILY PRESCRIBED EFFECTIVE ATTENUATION CHARACTERISTIC OF LOW-PASS FILTERS

Summary

In the paper effective attenuation of low-pass filters with arbitrarily prescribed frequency-dependent minimum stop band and maximum pass band are considered. A method of solving the problem of approximation of the effective attenuation characteristic of the filter is proposed. The method utilizes a modified Powell's algorithm to solve a constrained minimalization problem. Unconstrained minimalization problems are solved by means of the conjugate gradient method. Besides, a description of the computer program AP2D for computer ODRA 1305 is presented. Finally, a numerical examples is quoted.

F. WYSOCKA

APPROXIMATION DE LA CARACTÉRISTIQUE DE L'AFFAIBLISSEMENT EFFECTIF DU FILTRE PASSE-BAS À PARCOURS ARBITRAIRE DANS LA BANDE PASSANTE ET DANS LA BANDE AFFAIBLIE

Résumé

Dans l'étude on a présenté le mode de résolution du problème d'approximation de la caractéristique de l'affaiblissement effectif des filtres passe-bas à parcours arbitraire, dans la bande passante ainsi que dans la bande affaiblie. On a résolu ce problème à partir de la méthode modifiée de Powell jointe à la méthode du gradient conjugué. L'étude contient aussi la description du programme élaboré des calculs AP2D pour la calculatrice numérique Odra 1305. Le mode d'approximation présenté a été illustré à l'aide d'un exemple numérique.

F. WYSOCKA

APPROXIMATION DER BETRIEBSDÄMPFUNGSSCHARAKTERISTIK DES TIEFPASSES MIT BELIEBIGEM VERLAUF IM DURCHLAß- UND IM SPERRBEREICH

Zusammenfassung

Es wurde ein Verfahren zwecks Approximation der Betriebsdämpfungscharakteristik mit beliebigem Verlauf sowohl im Sperrbereich, als auch im Durchlaßbereich betrachtet. Die Lösung dieses Problems wurde gemäß modifizierten Powell-Methode in Verbindung mit der Methode des konjugierten Gradienten durchgeführt. Der Aufsatz enthält auch die Beschreibung des für die Rechenmaschine Odra Typ 1305 erarbeiteten AP2D-Programms. Die Anwendung des Approximationsverfahrens wurde anhand eines Rechenbeispiels erläutert.

Ф. ВЫСОЦКА

АППРОКСИМАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАБОЧЕГО ЗАТУХАНИЯ ФИЛЬТРА НИЖНИХ ЧАСТОТ ПРОИЗВОЛЬНО ЗАДАННОЙ В ПОЛОСАХ ПРОПУСКАНИЯ И ЗАДЕРЖИВАНИЯ

Р е з ю м е

Рассматриваются фильтры нижних частот с произвольно заданными характеристиками рабочего затухания в полосах пропускания и задерживания. Для фильтра этого типа представлен метод решения задачи аппроксимации характеристики рабочего затухания. В этом методе, для решения условных задач нелинейного программирования использован модифицированный алгоритм Поллэлла, причем решения безусловных задач осуществлены с применением метода сопряженных градиентов. Приведено описание программы AP2D для вычислительной машины Одра 1305, а также численный пример.

TREŚĆ

T. Łuba: Jednolita metoda dekompozycji funkcji boolowskich	1041
J. Purczyński: Przybliżone modele układów opisanych równaniami typu parabolicznego	1055
C. Dreger: O modelu Markowa binarnej pętli fazowej	1069
M. Żółtowski: Rozpoznawanie i synteza mowy w oparciu o model ARMA	1079
W. Niemiec: O konstruktywnym rozłożonym parametrycznie modelowaniu pola elektrycznego. Część I: Konstrukcja równań różniczkowych cząstkowych konstytutywnych stanu pola elektrycznego	1095
W. Niemiec: O konstruktywnym rozłożonym parametrycznie modelowaniu pola elektrycznego. Część II: Rozwiązanie równań różniczkowych cząstkowych konstytutywnych stanu pola elektrycznego	1109
H. Rawa: Zastosowanie metody rozdzielania zmiennych do syntezy parametrów środowiska w polu potencjalnym	1131
A. Sawicki, K. Sachse: Uogólniona metoda spektralna quasistatycznej analizy linii paskowych	1139
J. Skierski: Wyznaczanie przejściowych przebiegów wielkości mechanicznych i elektrycznych układów napędowych metodą silnika zastępczego	1155
L. Nowak: Analiza pola magnetycznego w elektromagnetycznych elementach wykonawczych w stanach elektromechanicznie nieustalonych	1171
J. Gołębowski: Analiza częstotliwościowa osiowosymetrycznego pola prądów wirowych w płycie przewodzącej	1185
Z. Kaczmarek: Wyznaczanie częstotliwości granicznej sygnałów impulsowych	1195
K. Holejko: Ocena wielkości sygnału w optoelektronicznych miernikach zamglania o fali ciągłej	1207
W. Burakowski, D. Bursztynowski: Analiza pojedynczego systemu obsługi z uwzględnieniem priorytetów i sprzężeń zwrotnych	1225
K. Noga: Prawdopodobieństwo błędu elementowego oraz statystyki błędów dla transmisji binarnej w kanale radiokomunikacyjnym z wolnymi zanikami Ricea i addytywnym szumem gaussowskim	1237
J. Kalinowski, T. Łuba: Metoda syntezy logicznej układów cyfrowych opisywanych sieciami Petriego	1253
T. Kościło: Prawdopodobieństwo błędu w systemie wielodostępowym z sygnałami szerokopasmowymi DS-PSK	1265
A. Szlachta: Układ synchronicznego ruchu obrotowego silników indukcyjnych z szeregowym połączeniem uzwojeń stojanów	1275
W. Morzuch: Drgania parametryczne wirników klatkowych, dwubiegunowych silników asynchronicznych	1287
K. Mikołajuk, W. S. Kropacz: Synteza falowników tyrystorowych	1305
T. J. Sobczyk: Analiza wielofazowych obwodów rezystancyjnych o okresowo zmiennych parametrach	1353
W. Machczyński: Rozkład prądów i potencjałów wzdłuż podziemnego przewodu uziemionego na obu końcach	1367
F. Wysocka: Aproksymacja charakterystyki tłumienności skutecznej filtru dolnoprzepustowego o dowolnym przebiegu w pasmie przepustowym i tłumieniowym	1381

CONTENTS — TABLES DES MATIERES — INHALT

T. Łuba: A uniform methodology of Boolean functions decomposition	1053
Methode homogene de decomposition de la fonction de Boole	1053
Einheitliche Methodik für die Dekomposition der Boolow'schen Funktionen	1053
J. Purczyński: Approximate models of systems described by equations of parabolic type	1068
Modeles approximatifs des systemes decrits par l'équation parabolique	1068
Angenäherte Modelle der Mittels parabeln beschriebenen Systeme	1068
C. Dreger: Markov model of a binary phase locked loop	1078
Modele Markovien d'une boucle de phase binaire	1078
Markoff-Modell, ein binärer Phasenregelkreis	1078
M. Żółtowski: The ARMA representation based speech recognition and synthesis	1079
Identification et synthese des signaux de la parole sur la base de l'ARMA modele	1093
Erkennung und Synthese der Sprache in Anlehnung an das ARMA-Modell	1093
W. Niemiec: On constitutive distributed parameter modelling of electric field. Part 1: The construction of partial differential constitutive state equations of electric field	1106
Sur le modelage constitutif deploye parametriquement du champ électrique. Partie 1: Construction des equations aux derivees partielles constitutives de l'état du champ électrique	1107
Zur konstitutiven Modellierung mit verteilten Parametern des elektrischen Feldes. Teil 1: Konstruktion der partiellen differentialen konstitutiven Zustandgleichung des elektrischen Feldes	1107
W. Niemiec: On constitutive distributed parameter modelling of electric field. Part 2: The solution of partial differential constitutive state equations of electric field	1129
Sur le modelage constitutif deploye parametriquement du champ électrique. Part 2: Resolution des équations aux derivees partielles constitutives de l'état du champ électrique	1129
Zur konstitutiven Modellierung mit verteilten parametern des elektrischen Feldes. Teil 2: Lösung der partiellen differentialen konstitutiven Zustandgleichungen des elektrischen Feldes	1130
H. Rawa: Composite distribution of the potential field	1137
Application de la méthode de la separation de variable a la synthese des parametres du milieu dans le champ potentiel	1137
Anwendung des Verteilungsmethode zur Synthese der medium Parameter des Potentialfeldes	1137
A. Sawicki, K. Sachse: Generalized spectral domain method for quasi-static analysis of microstrip-like transmission methods	1152
Méthode spectrale generalisee pour l'analyse quasistatique des lignes microrubans	1153
Verallgemeinerte Spektralmethode quasistatistischer Analyse der Streifenleitungen	1153
J. Skierski: Estimation of transients of mechanical and electrical quantities of power transmission systems by the method of substitutive motors	1168
Determination des parcours transitoires des grandeurs mecaniques et électriques des systemes de forces motrices avec la methode du moteur remplaçant	1168
Bestimmung der Übertragungsverläufe der mechanischen und elektrischen Grössen von Antriebssystemen mittels der Ersatzmotor-Methode	1168
L. Nowak: An analysis of the magnetic field in the electromagnetic actuators in transient electromechanical states	1183
Analyse du champ magnétique des actuateurs électromagnétiques en régime transitoire	1183
Analyse des magnetischen Feldes in elektromagnetischen Ferteilungselementen in elektromechanischen Übertragungszuständen	1183
J. Gołębiowski: Frequency analysis of the axial symmetry eddy currents field in a conducting plate region	1193
Analyse frequentielle du champ axialement symetrique des courants de Foucault dans une plaque conductrice	1194

Fourieranalyse des achsialsymmetrischen elektromagnetischen Feldes der Wirbelströme in einer leitenden Platte	1194
Z. K a c z m a r e k: Determination of the limit frequency of impulse signals	1205
Détermination de la fréquence de coupure des signaux impulsionnels	1205
Bestimmung der Grenzfrequenz von Impulssignalen	1205
K. H o l e j k o: Estimation of the signal level of the optoelectronic fog detectors with continuous suisoidal modulation	1222
Evaluation de la grandeur du signal dans les visibilimètres optoélectroniques à onde continue	1222
Äbschätzung der Signalgrösse bei optoelektronischen Vernebelungsmesser mit kontinuierlicher Welle	1223
W. B u r a k o w s k i, D. B u r s z t y n o w s k i: A method of analysis of a single-server system with non-preemptive priorities and feedback	1234
Analyse du système simple de service tenant compte des priorités et des rebouclage	1234
Analyse eines einzelnen Bedienungssystems unter Berücksichtigung von Prioritäten und Rückkopplungen	1234
K. N o g a: Error probability and errors stream properties for binary transmission in a radiocommunication channel with very slow Rician fading and additive Gaussian noise	1250
Probabilité de l'erreur élémentaire et les propriétés du flux d'erreurs pour la transmission binaire dans le canal de radiocommunication à lents fading de rice et l'additif bruit Gaussien	1251
Warscheinlichkeit eines elementaren Fehlers und Eigenschaften des Fehlerflusses bei Binärtransmissionen im Übertragungskanal mit langsamen Rice-Schwüinden und additiven Gaussrauschen	1251
J. K a l i n o w s k i, T. Ł u b a: A method of logical synthesis of digital circuits described by Petri notes	1263
Méthode de synthèses logique des systèmes digitaux decrits par des réseaux de Petri	1263
Methode der logischen Synthese der Mittels Petri-Netze beschriebenen Digitalssysteme	1263
T. K o s i ł o: Error probability for multiple acces DS-PSK spread spectrum system	1272
Probabilité de l'erreur dans le système a acces multiple avec DS-PSK signaux a large bande	1272
Fehlerwahrscheinlichkeit beim Codemultiplexsystem mit DS-PSK-Signalen	1272
A. S z l a c h t a: A system of synchronized rotary movement of inductive motors with paralel connection of stator wirings	1285
Système du mouvement de rotation synchrone des moteurs à induction aux enroulements des stators couplés en serie	1286
System der Synchronerehbewegung der induktionsmotoren bei Reihenverbindungen der Statorwicklungen	1286
W. M o r z u c h: Parametric vibrations of cage rotors in two-pole asynchronous motors	1302
Vibration paramétrique des rotors a cage d'écureuil des moteurs asynchrones bipolaires	1302
Parametrische Schwingungen der Käfigmotoren zweipoliger Asynchronmotoren	1303
K. M i k o ł a j u k, W. S. K r o p a c z: A synthesis of thyristor waveforms	1351
Synthèse des onduleurs aux thyristors	1351
Synthese der Gleichstrom/Wechselstrom Thyristorstromrichter	1351
T. J. S o b c z y k: An analysis of multiple resistance networks with periodically variable parameters	1365
Analyse des circuits ohmiques polyphases aux paramètres périodiquement variables	1365
Analyse der mehrphasigen Resistanzkreise mit periodisch wechselnden Parametern	1365

W. Machczyński: Potential and current distribution along the underground conductor earthed at the ends points	1380
Repartition des courants et des potentials le long du conducteur enterré mis en terre aux extrémités	1380
Strom- und Potentialverteilung längs der erdverlegten an den Enden geerdeten Leitung	1380
F. Wysocka: Approximation of arbitrarily prescribed effective attenuation characteristic of low-pass filters	1396
Approximation de la chactéristique de l'affaiblissement effectif du filtre passe-bas à parcours arbitraire dans la bande passante et dans la bande affaiblie	1396
Approximation der Betriebsdampfungscharakteristik des Tiefpasses mit beliebigem Verlauf im Durchlass- und im Sperrbereich	1396

С о д е р ж а н и е

Т. Луба: Однородный метод декомпозиции булевых функций	1054
Я. Пурчиньски: Приближенные модели систем описываемых уравнениями параболического типа	1068
Ц. Дрэгер: Марковская модель бинарной цепи подстройки фазы	1078
М. Жутовски: Распознавание и синтез сигналов речи представляемой моделью ARMA	1094
В. Немец: О конститутивном параметрически распределенном моделировании электрического поля	
Часть 1. Конструкция частных производных конститутивных уравнений состояния электрического поля	1107
В. Немец: О конститутивном параметрически распределенном моделировании электрического поля	
Часть 2. Решение частных производных конститутивных уравнений состояния электрического поля	1130
Х. Рава: Применение метода разделения переменных для синтеза параметров среды в потенциальном поле	1138
А. Савицки, К. Сахсе: Обобщенный спектральный анализ полосковых линий в квази-ТЕМ приближении	1153
Я. Скерски: Определение механических и электрических переходных процессов асинхронных приводов методом эквивалентного двигателя	1169
Л. Новак: Анализ магнитного поля в электромагнитных исполнительных элементах в электромеханических переходных процессах	1183
Е. Голэмбовски: Частотный анализ осесимметричного поля вихревых токов в проводящей плите	1194
З. Качмарэк: Определение предельной частоты импульсных сигналов.	1205
К. Холейко: Определение величины сигнала в оптоэлектронных измерителях затуманивания работающих при непрерывном излучении	1223
В. Бураковски, Д. Бурштынски: Анализ единичной системы массового обслуживания с учетом приоритетов и обратных связей	1235
К. Нога: Вероятность ошибки и свойства потока ошибок бинарной передачи в радиоканале с медленными замираниями Райса и аддитивной гауссовой помехой	1251

Е. Калиновски, Т. Луба: Метод логического синтеза цифровых систем описанных сетью Петри	1263
Т. Косило: Вероятность ошибки в многодоступной системе с широкополосными сигналами класса DS-PSK	1273
А. Шляхта: Система синхронного вращения индукционных машин с последовательным соединением обмоток статоров	1286
В. Можух: Параметрические колебания роторов с беличьей клеткой двухскоростных асинхронных электродвигателей	1303
К. Миколаюк, В. С. Кропач: Синтез тиристорных инверторов	1351
Т. Я. Собчык: Анализ многофазных резистанционных цепей с периодически изменяющимися параметрами	1366
В. Махчиньски: Распределение токов и потенциалов в подземном заземленном на концах провода	1380
Ф. Выsocka: Аппроксимация характеристики рабочего затухания фильтра нижних частот произвольно заданной в полосах пропускания и задерживания	1397

Komitet Redakcyjny prosi o przestrzeganie następujących wytycznych przy przygotowywaniu maszynopisów artykułów nadsyłanych do opublikowania.

1. *Tematyka i charakter artykułów.* Redakcja przyjmuje do druku prace przeglądowe, kompilacyjne i monograficzne, wchodzące w zakres szeroko pojętej elektrotechniki, które powinny jednak zawierać własny wkład twórczy Autora polegający na: oryginalnym ujęciu zagadnienia, własnej klasyfikacji, krytycznej ocenie (teorii lub metod), wyciągnięciu wniosków co do celowości takiego lub innego działania, prognoście itp. Autorów obowiązuje jak najdalej posunięta zwięzłość.

2. *Wymagania podstawowe.* Artykuły należy nadsyłać w maszynopisie, w dwóch egzemplarzach, w zasadzie w języku polskim, dopuszczalne są jednak również artykuły w językach: angielskim, francuskim, niemieckim i rosyjskim. Maszynopis powinien być napisany jednostronnie przez czarną taśmę, na maszynie do pisania z niezabrudzonymi i nieuszkodzonymi znakami. Dopuszcza się odręczne czytelne uzupełnianie tekstu atramentem lub długopisem kolorem czarnym lub ciemnoniebieskim znaków specjalnych oraz znaków w językach, których alfabetów nie ma na maszynach do pisania, np. znaków matematycznych, chemicznych, liter greckich. Maszynopis powinien być napisany na papierze do pisania koloru białego, formatu A4; numeracja ciągła na wszystkich stronach.

3. *Sposób pisania tekstów.* Tekst w maszynopisie powinien być pisany bez używania wyróżnień, a w szczególności nie dopuszcza się spacjowania (rozstrzelenia), podkreślania i pisania tekstów dużymi literami, z wyjątkiem wyrazów, które umownie pisze się dużymi literami (np. FORTRAN). Proponowane wyróżnienia Autor może zaznaczyć w maszynopisie (zwykłym ołówkiem) za pomocą przyjętych znaków adiustacyjnych (podkreślenie linią przerywaną — spacjowanie, podkreślenie linią ciągłą — pogrubienie, podkreślenie wężykiem — kursywa itp.). Na jednej stronie maszynopisu powinno być 30 wierszy po około 60 znaków łącznie z odstępami. Marginesy każdej strony powinny mieć następujące wymiary: górny — ok. 25 mm, lewy — ok. 35 mm. Tekst maszynopisu powinien być napisany z podwójnym odstępem między wierszami; tytuły i podtytuły małymi literami. Akapity należy rozpoczynać z wcięciem równym trzem uderzeniom maszyny do pisania.

4. *Sposób pisania tablic.* Tablice powinny być napisane w układzie zbliżonym do układu zecerskiego. Tytuły rubryk pionowych i poziomych powinny być napisane małymi literami z podwójnym odstępem między wierszami. Przypisy (notki) dotyczące tablic należy pisać bezpośrednio pod tablicą. Tablice należy numerować kolejno liczbami arabskimi; u góry każdej tablicy podać tytuł. Tablice umieścić na końcu maszynopisu.

5. *Sposób pisania wzorów matematycznych.* Rozmieszczenie znaków, cyfr, liter i odstępów powinno być zbliżone do rozmieszczenia elementów druku. Wskaźniki i wykładniki potęg powinny być napisane wyraźnie i być prawidłowo obniżone lub podwyższone w stosunku do linii wiersza podstawowego. Znaki nad literami i cyframi: strzałki, linie, kropki, daszki itp. powinny być napisane dokładnie nad tymi elementami, do których się odnoszą. Numery wzorów należy umieszczać z prawej strony.

6. *Przygotowanie materiału ilustracyjnego.* Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonywać zgodnie z obowiązującymi normami Polskiego Komitetu Normalizacji, Miar i Jakości (oznaczonymi literą E i numeracją od 01200 do 01245; przydatna może się okazać książka K. Michela, T. Sapińskiego: „Rysunek techniczny elektryczny”), na oddzielnych arkuszach, z podaniem kolejnych numerów rysunków. W maszynopisie artykułu na marginesie, obok właściwego tekstu, należy podać jedynie odpowiadający numer rysunku, a na oddzielnym arkuszu wykaz podpisów pod rysunki. Wszystkie

rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót: rys.). U samego dołu rysunku (a przy fotografiach na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, tytuł pracy i nazwisko autora. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.

7. *Streszczenia.* Do każdej nadsyłanej pracy należy dołączyć krótkie streszczenie (analizę) w języku polskim (w 5 egz.) oraz streszczenie (w 2 egz.) w językach obcych: angielskim, francuskim, niemieckim i rosyjskim. W razie niemożności przygotowania streszczeń w językach obcych Autor powinien podać przynajmniej terminy obcojęzyczne niezbędne do wykonania tłumaczenia.

8. *Bibliografia.* Na końcu maszynopisu należy podać w przyjętej przez Autora kolejności (np. chronologicznej, alfabetycznej itp.) wykaz publikacji, na które Autor w tekście się powołuje, lub które uważa za słuszne wymienić z innych powodów. W każdej pozycji wykazu należy podać w następującej kolejności: pierwsze litery imion, nazwisko autora, po czym po przecinku pełny tytuł dzieła lub artykułu; dalej, w przypadku książki — wydawcę, miejsce wydania i rok, a w przypadku artykułu — tytuł czasopisma, numer zeszytu, rok wydania i ewent. numer strony. Pozycje wykazu powinny być ponumerowane.

9. *Informacje dodatkowe.*

— Niezastosowanie się Autora do podanych wyżej wytycznych pociągnie za sobą konieczność potrącenia z honorarium autorskiego kosztów związanych z doprowadzeniem dostarczonych materiałów do postaci wymaganej przez Redakcję.

— Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egz. odbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze Autor może zamówić w Redakcji na własny koszt.

— **Autora obowiązuje korekta autorska, którą należy zwracać w ciągu 3 dni pod adresem Redakcji.**

— Redakcja prosi Autorów o podawanie miejsca pracy i adresu prywatnego, a także o powiadamianie o zmianie adresu.

Rozprawy Elektrotechniczne

Kwartalnik

CZASOPISMO

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

Prenumeratę na kraj przyjmują i informacji o cenach udzielają urzędy pocztowe i doręczyciele na wsi oraz Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch” w miastach.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1153-201045-139-11. Wysyłka za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Terminy przyjmowania prenumerat na kraj i za granicę:

- do dnia 10 listopada na I półrocze roku następnego i na cały rok następny,
- do dnia 1 czerwca na II półrocze roku bieżącego.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN, Pałac Kultury i Nauki, 00-901 Warszawa.

Subscription orders for all the magazines published in Poland available through the local press distributors or directly through the Foreign Trade Enterprise ARS POLONA, 00-068 Warszawa, Krakowskie Przedmieście 7, Poland.

Our bankers:

BANK HANDLOWY WARSZAWA S.A.

Rozpr. Elektrot. T. 32, z. 4, 1039—1406, Warszawa 1986

Indeks 37483