POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTROTECHNIKI
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

PLISSN 0035-9386

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XXXIII – ZESZYT 1

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1987

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTROTECHNIKI
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XXXIII — ZESZYT 1

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1987

RADA REDAKCYJNA

Przewodniczący

prof. dr hab. JANUSZ TUROWSKI

Członkowie

prof. dr hab. DANIEL JÓZEF BEM, prof. TADEUSZ CHOLEWICKI — członek rzeczywisty PAN, dr hab. JAROSŁAW JUCHNIEWICZ, prof. dr ZDZISŁAW KACHLICKI, prof. dr hab. TADEUSZ KACZOREK, prof. dr LEONARD KNOCH, doc. dr hab. ANDRZEJ KUSY, prof. JAN MANITIUS, prof. dr WITOLD NOWICKI, prof. dr WITOLD ROSIŃSKI — członek rzeczywisty PAN, prof. dr RYSZARD SIKORA, prof. dr hab. WOJCIECH SOBCZAK, prof. dr STEFAN WĘGRZYN — członek rzeczywisty PAN

REDAKCJA

Redaktor naczelny

prof. dr hab. WIESŁAW WOLIŃSKI

Zastępcy redaktora naczelnego

prof. dr hab. TADEUSZ KACZOREK

prof. dr Ryszard Sochocki

Sekretarz odpowiedzialny

mgr KRYSTYNA LELAKOWSKA

ADRES REDAKCJI

00-661 Warszawa, ul. Nowowiejska 15/19

Politechnika, Instytut Telekomunikacji, Gmach Elektroniki, pok. 401

Dyżury Redakcji: środy i piątki, godz. 11-13

tel. 28 89 81 lub 210 07-737

Telefony domowe: po. redaktora naczelnego — 12 17 65

zastępcy redaktora naczelnego — 44 88 34

sekretarza odpowiedzialnego — 25 29 18

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

Warszawa, Miodowa 10

Nakład 400+90	Oddano do składania 1986.09.08.
Ark. druk. 18,0 Ark. wyd. 21,5	Podpisano do druku w listopadzie 1987 r.
Papier druk. sat. kl. IV, 70 g, 70×100	Druk ukończono w listopadzie 1987 r.
Zamówienie nr 2814/12/86 K-10	Cena zł 230,—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1987, 33, z. 1, ss. 3-10

519.214.3:517.544

Dwuwymiarowe dyskretne modele Roessera dla równania Poissona

WIESŁAW MARSZAŁEK (OPOLE)

Instytut Elektrotechniki, Wyższa Szkoła Inżynierska w Opolu

Otrzymano 1985.09.20

W pracy wykorzystano metodę różnic skończonych oraz iteracyjne sposoby analizy równania Poissona do otrzymania odpowiednich dwuwymiarowych modeli dyskretnych Roessera. Modele te wykorzystano do rozwiązania zagadnienia Dirichleta, a w dwóch przykładach numerycznych porównano tę nową metodę z rozwiązaniami otrzymanymi metodą Fouriera.

1. WPROWADZENIE

W ostatnich latach odnotować można duży wzrost zainteresowania wielu autorów teorią liniowych, dwu- (i wielo-) wymiarowych modeli dyskretnych Roessera [1] o następującej postaci

$$x' = Ax + Bu \tag{1}$$

gdzie: $x \triangleq [(x_{ij}^h)^T, (x_{ij}^v)^T]^T$, $x' \triangleq [(x_{i+1,j}^h)^T, (x_{i,j+1}^v)^T]^T$, $u \triangleq u_{ij}$, $\dim u_{ij} = p$, A i B są stałymi macierzami o wymiarach odpowiednio: $(n_1+n_2)x(n_1+n_2)$ i $(n_1+n_2)xp$ a x_{ij}^h i x_{ij}^v są n_1 i n_2-wymiarowymi wektorami stanu, odpowiednio: horyzontalnym i wertykalnym. Równanie (1) stanowi uogólnienie na przypadek dwóch zmiennych niezależnych znanego modelu jednowymiarowego

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \tag{2}$$

Znane dotychczas zagadnienia odnoszące się do modelu (2) takie jak: sterowalność, obserwowalność, przesuwanie biegunów, realizowalność, stabilność i sterowanie optymalne zostały rozszerzone w ostatnim dziesięcioleciu na przypadek modelu (1). Złożona w stosunku do modelu (2) postać równania (1) powoduje znaczne komplikacje w poprawnym rozwiązywaniu wielu wymienionych wyżej zagadnień. Wymienić tutaj można problemy stabilności układów dwuwymiarowych oraz dotychczasowy brak sformułowania poprawnej definicji dwuwymiarowych wartości własnych dla tzw. nieseperowalnego modelu Roessera.

Dodając następne zmienne niezależne można uogólnić model Roessera do dowolnej postaci q-wymiarowej ($q > 2$) [2]. Ostatnio pojawiły się również prace dotyczące modeli wielowymiarowych o zmiennych współczynnikach [3, 4].

Dwuwymiarowy model Roessera o postaci (1) znalazł zastosowanie do przybliżonej analizy układów o parametrach rozłożonych opisanych hiperbolicznymi równaniami cząstkowymi. Analiza tą dotyczy zagadnień cieplnych, równania falowego oraz zagadnienia Darboux opisującego problemy absorpcji gazów, dynamiki wymienników ciepła, ogrzewania strumieniem wodnym [5]. W pracy [6] wykazano, że stosując metodę różnic skończonych można równania cząstkowe opisujące powyższe zagadnienia przekształcić do postaci (1).

Rozwiązanie równania (1) z warunkami brzegowymi/początkowymi x_{0j}^{h} oraz $x_{i0}^{v}(i, j = 0, 1, 2, \ldots)$ ma postać analogiczną do rozwiązania równania (2) i dane jest w Dodatku. Występującą w tym rozwiązaniu macierz tranzycyjną $A^{i,j}$ można obliczać z wykorzystaniem dwuwymiarowych wersji twierdzenia Cayleya-Hamiltona i wzoru Sylvestera [7, 8].

W niniejszej pracy zastosowano dyskretne dwuwymiarowe modele Roessera o postaci (1) do rozwiązywania metodami iteracyjnymi zagadnienia Dirichleta dla równania Poissona.

Algorytmy iteracyjne stosuje się w wielu problemach analizy numerycznej. Jeżeli, na przykład $y_i(j)$ oznacza dyskretną wartość funkcji jednej zmiennej $y(t)$ dla $t_j = j\Delta t$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ otrzymaną w i-tej iteracji $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, wówczas traktując $y_i(j)$ jako funkcję dwóch zmiennych i oznaczając $y_i(j) \triangleq y_{ij}$, przekształcamy zagadnienie jedno wymiarowe w dwuwymiarowe. Charakter zmiennej niezależnej i jest całkowicie różny od charakteru zmiennej j: pierwsza z nich oznacza numer iteracji a druga dyskretną chwilę czasową. Przykład dwuwymiarowego modelu Roessera o takiej strukturze zmiennych niezależnych przedstawiono w pracy [4]. Modele Roessera rozważane w tej pracy mają inną naturę zmiennych niezależnych: obydwie zmienne oznaczać będą odległości.

2. DWUWYMIAROWY MODEL ROESSERA DLA ITERACYJNEJ METODY SEIDELA

Rozważmy obszar prostokątny z brzegiem Γ oraz zagadnienie Dirichleta dla równania Poissona $(0 \leqslant x, y \leqslant 1, \Delta x = \Delta y = h)$

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = -\varphi(x, y) \tag{3a}$$

$$u(x, y)_{|\Gamma} = \psi(x, y) \tag{3b}$$

Stosując metodę różnic skończonych oraz iteracyjny algorytm Seidela rozwiązywania układu równań algebraicznych rozwiązanie przybliżone zagadnienia (3a, b) można otrzymać korzystając z następującego modelu różnicowego [9, str. 541]

$$u_{k+1}(i-1, j) + u_{k+1}(i, j-1) - 4u_{k+1}(i, j) = -h^2\varphi(i, j) - u_k(i+1, j) - u_k(i, j+1) \tag{4}$$

gdzie: $u_k(i, j)$ oznacza rozwiązanie przybliżone równania (3a) w punkcie (ih, jh) otrzymane w k-tej iteracji (dowolne wartości $u_0(i, j)$ mogą być przyjęte dla zerowej iteracji). Zauważmy, że prawa strona równania (4) jest znana dla każdej iteracji $k = 0, 1, 2, \ldots$. Oznaczmy

$$u_k(i+1, j) + u_k(i, j+1) + h^2\varphi(i, j) \triangleq f_{k+1}(i, j). \tag{5}$$

Równanie (4) przyjmie wtedy postać (po opuszczeniu numeru iteracji $k+1$)

$$u(i-1,j)+u(i,j-1)-4u(i,j) = -f(i,j). \tag{6}$$

Oznaczając

$$x = 4[u(i-1,j),\, u(i,j-1)]^T \triangleq [x_{ij}^h,\, x_{ij}^v]^T \tag{7}$$

z równania (6) otrzymamy

$$x' = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} f \triangleq Ax + Bf \tag{8}$$

gdzie:

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}x_{0j}^h\\ x_{i0}^v\end{bmatrix} \cong 4\begin{bmatrix}u(0,j)\\ u(i,\,0)\end{bmatrix}. \tag{9}$$

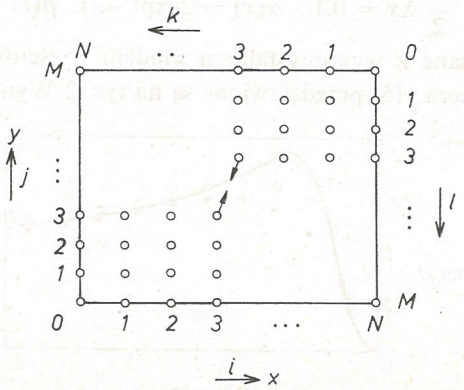
W szczególnym przypadku gdy $u(x,y)_{|\Gamma} = 0$, uwzględniając (9) otrzymamy następujące rozwiązanie równania (8)

$$x = \sum_{\alpha=0}^{i}\sum_{\beta=0}^{j}\begin{bmatrix}\binom{i+j-\alpha-\beta-1}{j-\beta}\\ \binom{i+j-\alpha-\beta-1}{i-\alpha}\end{bmatrix}\left(\frac{1}{4}\right)^{i+j-\alpha-\beta-1} f(\alpha,\beta). \tag{10}$$

Łatwo można zauważyć, że zmiana numeru iteracji $k \to k+1$ daje nową funkcję „*wymuszenia*" $f(i,j)$ podczas gdy macierze A i B w modelu Roessera nie zmieniają się.

3. MODEL ROESSERA DLA ITERACYJNEJ, „POPRZECZNO-TRÓJKĄTNEJ" METODY ANALIZY RÓWNANIA POISSONA

Zagadnienie Dirichleta dla równania Poissona wyrażone za pomocą wzorów (3a, b) można również rozwiązywać metodą iteracyjną, „*poprzeczno-trójkątną*" [9, str. 551], która jest pokazana schematycznie na rys. 1. Metoda ta wymaga stosowania w każdej iteracji dwóch modeli dyskretnych o postaci (6): jednego z rosnącymi wartościami i oraz j, dla którego obliczenia rozpoczynają się w lewym dolnym wierzchołku prostokąta oraz drugiego z malejącymi wartościami i oraz j, dla którego obliczenia rozpoczynają się w pra-



Rys. 1. Metoda analizy równania Poissona

wym górnym wierzchołku prostokąta. Ogólna postać drugiego modelu jest następująca

$$\left[1+\frac{\omega}{\Delta x^2}+\frac{\omega}{\Delta y^2}\right]u(i,j)-\frac{\omega}{\Delta x^2}u(i,j+1)-\frac{\omega}{\Delta y^2}u(i+1,j)=f(i,j) \tag{11}$$

$(\omega > 0,$ parametr$)$.

Funkcję *„wymuszenia"* oblicza się w każdej iteracji w oparciu o wartości $u(i, j)$ będące rozwiązaniem modelu pierwszego dla tego samego numeru iteracji [9].

Wprowadzając transformację zmiennych niezależnych $(N-k, M-l) \to (k, l)$, (patrz rys. 1), gdzie $0 \leqslant k \leqslant N$ i $0 \leqslant l \leqslant M$, można równanie (11) przekształcić do postaci

$$\left[1+\frac{\omega}{\Delta x^2}+\frac{\omega}{\Delta y^2}\right]u(k,l)-\frac{\omega}{\Delta x^2}u(k,l-1)-\frac{\omega}{\Delta y^2}u(k-1,l)=f(k,l) \tag{12}$$

Postać ta jest analogiczna do modelu metody Seidela, co sprawia, że odpowiadający równaniu (12) model Roessera powstaje w sposób podobny do schematu określonego wzorami (7)—(9).

Przedstawione wyżej dwuwymiarowe modele dyskretne wykorzystują następujące punkty metody różnic skończonych: (i, j), $(i-1, j)$, $(i, j-1)$. Sytuacja taka występuje również w prostym zagadnieniu początkowo-brzegowym dla równania Eulera

$$u_t(x,t)+au_x(x,t)=f(x,t) \tag{13}$$

z danymi: $u(x, 0) = \alpha(x)$, $u(0, t) = \beta(t)$, $\alpha(0) = \beta(0)$, $t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, $a > 0$.

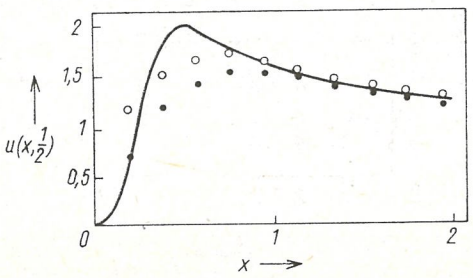
Jedną z możliwych aproksymacji równania Eulera jest następujący schemat dyskretny

$$u(i,j)=\frac{\gamma}{\gamma+1}u(i-1,j)+\frac{1}{\gamma+1}u(i,j-1)+\frac{\Delta t}{\gamma+1}f(i,j), \qquad \gamma=\frac{a\Delta t}{\Delta x}. \tag{14}$$

Schemat ten można przekształcić do modelu Roessera

$$x'=\frac{1}{\gamma+1}\begin{bmatrix}\gamma & 1\\ \gamma & 1\end{bmatrix}x+\frac{\Delta t}{\gamma+1}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}f(i,j) \tag{15}$$

przy czym: $x^h_{ij} \triangleq u(i-1, j)$, $x^v_{ij} \triangleq u(i, j-1)$ a warunki początkowo-brzegowe wynoszą $x^h_{1j} = \beta(j\Delta t)$, $x^v_{i1} = \alpha(i\Delta x)$. Rozwiązanie dokładne równania Eulera dla $t = 0{,}5$, $x \in [0, 2]$, $a = 1$, $\Delta t = \frac{1}{2}\Delta x = 0{,}1$, $\alpha(x) = 2\exp(-x)$, $\beta(t) = 2\cos 2\pi t$, $f(x, t) \equiv 0$ oraz rozwiązania otrzymane z wykorzystaniem modelu wyjściowego (14) i odpowiadającemu mu modelu Roessera (15) przedstawione są na rys. 2. Wynika z niego, że rozwiąza-



Rys. 2. Rozwiązanie równania Eulera: — dokładne, o o model (15), • • model (14)

nie oparte na modelu Roessera jest znacznie dokładniejsze niż rozwiązanie schematu dyskretnego (14).

4. ANALIZA PRZYKŁADÓW NUMERYCZNYCH

W oparciu o przedstawione wyżej metody zastosowań dwuwymiarowych modeli dyskretnych Roessera do analizy równania Poissona opracowano dwa programy obliczeń numerycznych w języku FORTRAN. Wykorzystano je do rozwiązania zagadnienia Dirichleta dla następujących danych:

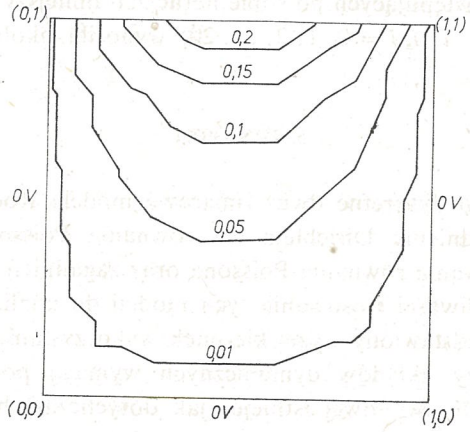
(a) $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ \Delta x = \Delta y = 1/20$

$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = 0,\ u(x, 1) = x(1-x),\ \varphi(x, y) \equiv 0$

(b) $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ \Delta x = \Delta y = 1/20$

$u(x, 0) = 100,\ u(0, y) = u(1, y) = u(x, 1) = 0,\ \varphi(x, y) \equiv 0$

Rozwiązanie otrzymane dla przypadku (a) przedstawiono w postaci wykresu plotera na rys. 3. Wykres ten sporządzono w oparciu o wartości rozwiązania otrzymanego z wykorzystaniem modelu Roessera dla 36 punktów węzłowych kwadratu o współrzędnych $(i\Delta x, j\Delta y)$, $i, j = 0, 4, 8, 12, 16, 20$. Zatem, z pierwotnej liczby 441 punktów węzłowych biorących udział w obliczeniach ($\Delta x = \Delta y = 1/20$) do procedury plotera wykorzystano tylko ok. 8% tej liczby punktów. Ten fakt oraz stosowanie interpolacji liniowej między punktami węzłowymi tłumaczą niewielkie nieregularności oraz kształt linii ekwipotencjal-



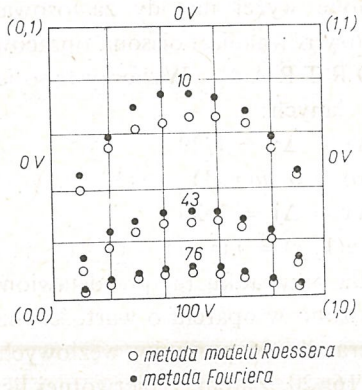
Rys. 3. Rozkład linii ekwipotencjalnych — przykład (a)

nych z rys. 3. Przebieg tych linii (dla 5-ciu wybranych wartości potencjału) wykazuje dużą zgodność z rozwiązaniem równania Poissona dla przypadku danych (a) otrzymanym metodą Fouriera

$$u(x, y) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin[(2m+1)\pi x]\sinh[(2m+1)\pi y]}{(2m+1)^3 \sinh[(2m+1)\pi]}$$

Rys. 4 przedstawia punkty tworzące 3 linie ekwipotencjalne rozwiązania równania Poissona za pomocą modelu Roessera dla danych (b) oraz odpowiadające im punkty wynikające z rozwiązania otrzymanego metodą Fouriera, które ma następującą postać

$$u(x, y) = \frac{400}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin[(2m+1)\pi x]\sinh[(2m+1)(1-y)\pi]}{(2m+1)\sinh[(2m+1)\pi]}$$



Rys. 4. Rozkład linii ekwipotencjalnych — przykład (b)

W obydwu przykładach obliczeniowych korzystano z modeli Roessera dla algorytmu Seidela a liczba iteracji wynikająca z przyjętego kryterium zakończenia obliczeń (błąd względny rozwiązań w następujących po sobie iteracjach mniejszy niż 1%) oraz rozwiązań początkowych ($u_0(i, j) = 1$, $i, j = 0, 1, 2, \ldots, 20$) wynosiła około 200.

5. WNIOSKI

W pracy zastosowano dyskretne dwuwymiarowe modele Roessera do analizy metodami iteracyjnymi zagadnienia Dirichleta dla równania Poissona. Przykłady obliczeń numerycznych rozwiązywania równania Poissona oraz zagadnień przedstawionych w pracy [6] wskazują na możliwości stosowania tych modeli do analizy wielu układów dynamicznych. Jednakże przedstawiony wyżej kierunek wykorzystania modeli dwu- (i wielo-) wymiarowych do analizy układów dynamicznych wymaga podjęcia szeregu dalszych badań, gdyż w literaturze światowej istnieje (jak dotychczas) bardzo mała liczba prac opublikowanych na ten temat.

LITERATURA

1. R. P. Roesser: *A discrete state-space model for linear image processing.* IEEE Trans. Autom. Control, 1975, vol. AC-20, Nr. 1, s. 1—10
2. T. Kaczorek: *Two-Dimensional Linear Systems.* Springer-Verlag, Berlin, 1985
3. T. Kaczorek, W. Marszałek: *Output deadbeat control problem for Roesser's model with variable coefficients.* Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn., 1985, vol. 33, No 11—12, p. 513—518

4. W. Marszałek: *Two-dimensional discrete model with varying coefficients.* IEE Proc. D, Control Theory and Applications. 1986, vol. 133, No 4, p. 177—183
5. A. N. Tichonov, A. A. Samarsky: *Równania fizyki matematycznej.* Warszawa, PWN, 1963
6. W. Marszałek: *Two-dimensional state-space discrete models for hyperbolic partial differential equations.* Appl. Math. Modelling, vol. 8, No 1, 1984, s. 11—14
7. K. Warwick: *Using the Cayley-Hamilton theorem with N-partitioned matrices.* IEEE Trans. Autom. Control, 1983, vol. AC-28, s. 1127—1128
8. T. Kaczorek: *Extensions of Sylvester's theorem to two-dimensional systems.* Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. techn., 1982, vol. 30, Nr 1
9. A. A. Samarsky: *Tieoria raznostnych schiem.* Moskwa, Nauka, 1983

DODATEK

Rozwiązanie równania (1) z warunkami brzegowymi/początkowymi x_{0j}^h i x_{i0}^v dane jest następującym wzorem [1, 2]

$$x = \sum_{\alpha=0}^{j} A^{i,j-\alpha}\begin{bmatrix} x_{0\alpha}^h \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{\beta=0}^{i} A^{i-\beta,j}\begin{bmatrix} 0 \\ x_{\beta 0}^v \end{bmatrix} + \sum_{\alpha=0}^{i-1}\sum_{\beta=0}^{j} A^{i-\alpha-1,j-\beta}\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u_{\alpha\beta} +$$

$$+ \sum_{\alpha=0}^{i}\sum_{\beta=0}^{j-1} A^{i-\alpha,j-\beta-1}\begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u_{\alpha\beta},$$

przy czym macierz tranzycyjna $A^{i,j}$ dla macierzy systemowej

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

dana jest za pomocą następujących relacji

$$A^{i,j} = A^{1,0}A^{i-1,j} + A^{0,1}A^{i,j-1}$$

$$A^{1,0} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

$$A^{0,0} = I \text{ (macierz jednostkowa)}$$

$$A^{-i,j} = A^{i,-j} = 0 \text{ (macierz zerowa)}$$

Macierze A_1, A_2, A_3, A_4 oraz B_1, B_2 wynikają z podziału macierzy A oraz B we wzorze (1), który to podział odpowiada podziałowi wektora stanu x na składowe x_{ij}^h i x_{ij}^v. Zatem $\dim A_1 = n_1 xn_1$, $\dim A_2 = n_1 xn_2$, $\dim A_3 = n_2 xn_1$, $\dim A_4 = n_2 xn_2$, $\dim B_1 = n_1 xp$, $\dim B_2 = n_2 xp$.

W. MARSZAŁEK

TWO-DIMENSIONAL DISCRETE ROESSER'S MODELS FOR THE POISSON EQUATION

Summary

The finite difference technique and the, so called, Roesser's models are used in this paper to analyze the Dirichlet problem for the Poisson equation. Two numerical examples are given in which the solution of the Poisson equation via a new method are compared with the solutions obtained using the Fourier method.

W. MARSZAŁEK

MODÈLES BIDIMENSIONNELS DISCRETS DE ROESSER POUR L'ÉQUATION DE POISSON

Résumé

Dans cet article on a utilisé la méthode de différences finies et les moyens itératifs de l'analyse de l'équation de Poisson pour obtenir des modèles bidimensionnels discrets de Roesser. Ces modèles on été utilisés à la résolution du problème de Dirichlet et dans deux examples de calculs numériques on a comparé les résultats obtenus par cette nouvelle méthode avec les résultats qui viennent de la méthode de Fourier.

W. MARSZAŁEK

ZWEIDIMENSIONALE DISKRETE ROESSER-MODELLE FÜR DIE POISSON-GLEICHUNG

Zusammenfassung

In der Bearbeitung wurde die Methode der begrenzten Differenzen sowie Arten der Iterationsanalyse der Poisson-Gleichung zur Gewinnung von entsprechenden zweidimensionalen diskreten Roesser-Modellen genutzt. Diese Modelle wurden für die Lösung des Dirichlet-Problems genutzt, und in zwei numerischen Beispielen wurde die neue Methode mit Lösungen verglichen, die nach der Fourier-Methode gewonnen worden sind.

В. МАРШАЛЭК

ДВУХМЕРНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ РЕССЕРА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Резюме

Использован метод разностных схем, а также итерационный способ анализа уравнения Пуассона для получения соответствующих двухмерных дискретных моделей Рессера. Эти модели использованы для решения проблема Дирихле, а в двух цифровых примерах этот метод сравнен с решениями полученными методом Фурье.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1987, 33, z. 1, ss. 11-30

621.3.018.783

Analiza korelacyjna zniekształceń nielinearnych przy zastosowaniu gaussowskiego sygnału wejściowego

MACIEJ WALASZEK (GDYNIA)

Instytut Radiokomunikacji, Wyższa Szkoła Morska w Gdyni

Otrzymano 1985.11.08

W pracy przedstawiono korelacyjną metodę obliczania gęstości widmowej sygnału na wyjściu toru nielinearnego przy pobudzeniu szerokopasmowym sygnałem gaussowskim. Metoda ta pozwala wyznaczyć oddzielnie produkty nielinearne kolejnych rzędów. Można ją stosować zarówno do torów o małej, jak również i o dużej nielinearności. Wyprowadzono wzory do obliczeń inżynierskich i przedstawiono graficznie zależność gęstości widmowej produktów nielinearnych od 2 do 5 rzędu włącznie przy pobudzeniu szerokopasmowym sygnałem gaussowskim.

1. WSTĘP

Problematyka zniekształceń nielinearnych, ze względu na dążenie do uzyskania jak najlepszej jakości transmisji i wiernego odtwarzania nadawanych sygnałów, jest uważana od wielu lat za bardzo ważną. Zagadnienie to stało się szczególnie istotne w okresie wprowadzania tranzystorów i układów scalonych o coraz większej skali integracji, ponieważ nowe elementy i układy charakteryzują się bardziej nielinearnymi charakterystykami. Chociaż stosowane układy do transmisji sygnałów są coraz doskonalsze, sprawa analizy i pomiarów zniekształceń nielinearnych pozostaje dalej aktualna. Zagadnienia te są szczególnie ważne w elektroakustyce, ponieważ od poziomu zniekształceń nielinearnych w torze elektroakustycznym zależna jest subiektywna ocena odtwarzanych na jego wyjściu sygnałów mowy i muzyki.

Jeżeli na wejście toru elektroakustycznego zostanie podany pojedynczy przebieg sinusoidalny, to zniekształcenia nielinearne objawiają się przez występowanie harmonicznych. Jeżeli na wejście toru zostanie podany sygnał zawierający dwie lub więcej składowych sinusoidalnych, to na wyjściu otrzyma się oprócz harmonicznych także przebiegi kombinowane o częstotliwościach stanowiących sumy i różnice częstotliwości składowych sygnału wejściowego i ich harmonicznych [12, 13]. Te przebiegi kombinowane są przeważnie liczniejsze od składowych harmonicznych na wyjściu toru i mają zasadniczy wpływ na odbiór słuchowy programu.

Dotychczas rozpowszechnione metody pomiaru zniekształceń nielinearnych polegają na pomiarze produktów nielinearnych, przy podaniu na wejściu toru pojedynczego sygnału sinusoidalnego lub sumy dwóch sygnałów sinusoidalnych. W warunkach rzeczywistych przy przekazywaniu sygnału fonicznego, na wejście toru podawany jest sygnał o złożonym widmie ciągłym [14]. Tor elektroakustyczny wytwarza produkty nielinearne posiadające znacznie bardziej złożony charakter, niż otrzymywane przy sygnale wejściowym o widmie dyskretnym. Ponieważ zniekształcenia nielinearne w torach elektroakustycznych zależą od własności nielinearnych toru oraz od widma sygnału wejściowego, więc powszechnie obecnie stosowane metody pomiaru zniekształceń nielinearnych za pomocą dyskretnego synału wejściowego wyznaczają tylko część produktów nielinearnych występujących przy przesyłaniu rzeczywistych sygnałów fonicznych [9, 19]. Wynikiem tego jest występowanie rozbieżności pomiędzy wynikami pomiarów zniekształceń nielinearnych za pomocą dotychczasowych metod, a ich oceną subiektywną [9, 10]. Rozbieżności te były przyczyną opracowania metody pomiaru zniekształceń nielinearnych z wykorzystaniem rzeczywistego sygnału mowy lub muzyki [4, 5, 20, 21]. Metody te stosowano w badaniach laboratoryjnych i nie znalazły szerszego rozpowszechnienia.

Dla uzyskania wyników zbliżonych do rzeczywistych warunków pracy torów elektroakustycznych, które przekazują złożone sygnały foniczne, należy do pomiarów i oceny nielinearności stosować sygnał wejściowy o widmie ciągłym [6, 17]. Zapewni to lepszą zgodność obliczonych lub zmierzonych zniekształceń nielinearnych z oceną subiektywną. Potwierdzają to badania Wolfa [20, 21], których wynikiem było stwierdzenie, że pomiar zniekształceń nielinearnych w urządzeniach elektroakustycznych za pomocą sygnału o widmie ciągłym znacznie wierniej odzwierciedla zniekształcenia nielinearne odczuwane subiektywnie, niż przy sygnale o widmie dyskretnym oraz, że *„liczne istotnie ważne cechy charakterystyczne dla pomiarów zniekształceń nielinearnych za pomocą sygnału o widmie ciągłym pozostają niezmienione, niezależnie od zmian obwiedni widma sygnału wejściowego"*.

Używanie do pomiarów sygnałów rzeczywistych źródeł dźwięku nie jest wskazane ze względu na brak powtarzalności i często niestacjonarny charakter sygnału. Ze względu na stacjonarność, łatwość wytwarzania i możliwość zapewnienia dobrej powtarzalności najkorzystniejszy jest gaussowski sygnału szumu o stałej gęstości widmowej o określonym pasmie częstotliwości [8, 15, 16, 18].

W części drugiej niniejszej pracy przedstawiono analityczną metodę wyznaczania produktów nielinearnych, wykorzystującą funkcję korelacji przy gaussowskim sygnale wejściowym. W dotychczasowych pracach, ze względu na trudności natury matematycznej, obliczono przeważnie produkty nielinearne przy wejściowym sygnale gaussowskim do 3 rzędu włącznie [20]. Na podstawie przedstawionej w niniejszej pracy metody można wyznaczyć w łatwy sposób produkty nielinearne także wyższych rzędów. Podana metoda może więc służyć także do analizy torów o dużej nielinearności. W pracy przedstawiono wyprowadzone wzory do obliczania produktów nielinearnych do 10 rzędu włącznie.

W części trzeciej wyprowadzono wzory na wyznaczanie produktów nielinearnych na wyjściu bezinercyjnego toru nielinearnego przy wejściowym sygnale gaussowskim o stałej gęstości widmowej oraz przedstawiono jak zmieniają się zniekształcenia wraz ze wzrostem rzędu nielinearności układu.

2. KORELACYJNA METODA WYZNACZANIA PRODUKTÓW NIELINEARNYCH NA WEJŚCIU TORU

Zależność pomiędzy sygnałami wyjściowym $u_y(t)$ i wejściowym $u_x(t)$ toru nielinearnego można przedstawić następująco:

$$u_y(t) = F[u_x(t)].$$

Przy założeniu, że sygnał wejściowy jest gaussowski, funkcję korelacji sygnału wyjściowego $R_y(t_1, t_2)$ określa wzór:

$$R_y(t_1, t_2) = E\{[F(u_{x1}) - m_{y1}][F(u_{x2}) - m_{y2}]\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [F(u_{x1}) - m_{y1}][F(u_{x2}) - m_{y2}] f(u_{x1}, u_{x2})\, du_{x1}\, du_{x2} \tag{1}$$

gdzie:

E — symbol wartości przeciętnej,

$u_{x1} = u_x(t_1)$ — wartość sygnału wejściowego w momencie t_1,

$u_{x2} = u_x(t_2)$ — wartość sygnału wejściowego w momencie t_2,

$m_{y1} = m_y(t_1)$ — wartość przeciętna sygnału wyjściowego dla $t = t_1$,

$m_{y2} = m_y(t_2)$ — wartość przeciętna sygnału wyjściowego dla $t = t_2$,

$f(u_{x1}, u_{x2})$ — dwuwymiarowa funkcja gęstości sygnału wejściowego.

Mnożąc czynniki podcałkowe we wzorze (1) otrzymuje się:

$$R_y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} [F(u_{x1}) F(u_{x2})(u_{x1}, u_{x2}) - F(u_{x1}) m_{y2} f(u_{x1}, u_{x2}) -$$

$$- F(u_{x2}) m_{y1} f(u_{x1}, u_{x2}) + m_{y1} m_{y2}(u_{x1}, u_{x2})]\, du_{x1}\, du_{x2}. \tag{2}$$

Ponieważ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} F(u_{x1}) f(u_{x1}, u_{x2})\, du_{x1}\, du_{x2} = m_{y1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} F(u_{x2}) f(u_{x1}, u_{x2})\, du_{x1}\, du_{x2} = m_{y2} \tag{3}$$

oraz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} f(u_{x1}, u_{x2})\, du_{x1}\, du_{x2} = 1$$

więc wzór (2) można sprowadzić do postaci

$$R_y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} F(u_{x1}) F(u_{x2}) f(u_{x1}, u_{x2})\, du_{x1}\, du_{x2} - 2m_{y1} m_{y2} + m_{y1} m_{y2} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} F(u_{x1}) F(u_{x2}) f(u_{x1}, u_{x2})\, du_{x1}\, du_{x2} - m_{y1} m_{y2}. \tag{4}$$

Zakłada się, że sygnał wejściowy posiada rozkład normalny o dwuwymiarowej funkcji

gęstości określonej wzorem [1, 2]:

$$f(u_{x1}, u_{x2}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{x1}\sigma_{x2}\sqrt{1-\varrho_x^2(t_1, t_2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2[1-\varrho^2(t_1, t_2)]} \cdot \left[\frac{(u_{x1}-m_{x1})^2}{\sigma_{x1}^2} - 2\frac{\varrho_x(u_{x1}-m_{x1})(u_{x2}-m_{x2})}{\sigma_{x1}\sigma_{x2}} + \frac{(u_{x2}-m_{x2})^2}{\sigma_{x2}^2}\right]\right\} \tag{5}$$

gdzie:

$\delta_{x1}^2 = \delta_x^2(t_1)$ — wariancja sygnału wejściowego dla $t = t_1$,

$\delta_{x2}^2 = \delta_x^2(t_2)$ — wariancja sygnału wejściowego dla $t = t_2$,

$\varrho_x(t_1, t_2) = \frac{R_x(t_1, t_2)}{\sqrt{\delta_{x1}^2\delta_{x2}^2}}$ — znormalizowana funkcja autokorelacji (współczynnik korelacji) sygnału wejściowego.

Wprowadzając do zależności (5) nowe zmienne z_1 i z_2:

$$z_1 = \frac{u_{x1}-m_{x1}}{\sigma_{x1}} \qquad z_2 = \frac{u_{x2}-m_{x2}}{\sigma_{x2}} \tag{6}$$

otrzymuje się dwuwymiarową funkcję gęstości rozkładu normalnego w postaci:

$$f(u_{x1}, u_{x2}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{x1}\sigma_{x2}\sqrt{1-\varrho_x^2(t_1, t_2)}} \exp\left\{-\frac{z_1^2-2\varrho_x(t_1, t_2)z_1z_2+z_2^2}{2[1-\varrho_x^2(t_1, t_2)]}\right\} \tag{7}$$

Nowe zmienne, nazywane standaryzowanymi, charakteryzują się tym, że posiadają wartość przeciętną równą zeru i wariancję równą jedności, tzn. $E(z) = 0$ i $\sigma^2(z) = 1$. Podstawiając (7) do (5) otrzymuje się:

$$R_y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} F(m_{x1}+\sigma_{x1}z_1)F(m_{x2}+\sigma_{x2}z_2)f_0(z_1, z_2)dz_1\,dz_2 - m_{y1}m_{y2}, \tag{8}$$

gdzie

$$f_0(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\varrho_x^2(t_1, t_2)}} \exp\left\{-\frac{z_1^2-2\varrho_x(t_1, t_2)z_1z_2+z_2^2}{2[1-\varrho_x^2(t_1, t_2)]}\right\} \tag{9}$$

Wyrażenie (9) można rozłożyć w szereg według potęg współczynnika korelacji [1]:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\varrho_x^2(t_1, t_2)}} \exp\left\{-\frac{z_1^2-2\varrho_x(t_1, t_2)z_1z_2+z_2^2}{2[1-\varrho_x^2(t_1, t_2)]}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\frac{\varrho_x^n(t_1, t_2)}{n!}\frac{\mathrm{d}^n\exp\left(-\frac{1}{2}z_1^2\right)}{\mathrm{d}z_1^n}\frac{\mathrm{d}^n\exp\left(-\frac{1}{2}z_2^2\right)}{\mathrm{d}z_2^n} \tag{10}$$

Po podstawieniu (9) i (10) do (8) otrzymuje się:

$$R_y(t_1, t_2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\frac{\varrho_x^n(t_1, t_2)}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} F(m_{x1}+\sigma_{x1}z_1)F(m_{x2}+\sigma_{x2}z_2)\cdot \frac{\mathrm{d}^n\exp\left(-\frac{1}{2}z_1^2\right)}{\mathrm{d}z_1^n}\frac{\mathrm{d}^n\exp\left(-\frac{1}{2}z_2^2\right)}{\mathrm{d}z_2^n}\,dz_1\,dz_2 - m_{y1}m_{y2} \tag{11}$$

Wzór (11) można przedstawić w następującej postaci:

$$R_y(t_1, t_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varrho_x^n(t_1, t_2)}{n!} f_{1n}(m_{x1}, \sigma_{x1}) f_{2n}(m_{x2}, \sigma_{x2}) - m_{y1} m_{y2}, \tag{12}$$

gdzie

$$f_{1n}(m_{x1}, \sigma_{x1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(m_{x1} + \sigma_{x1} z) \frac{\mathrm{d}^n \exp\left(-\frac{1}{2} z_1^2\right)}{\mathrm{d}z_1^n} \tag{13}$$

$$f_{2n}(m_{x2}, \sigma_{x2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(m_{x2} + \sigma_{x2} z) \frac{\mathrm{d}^n \exp\left(-\frac{1}{2} z_2^2\right)}{\mathrm{d}z_2^n} \tag{14}$$

Ponieważ $f_{10}(m_{x1}, \sigma_{x1}) = m_{y1}$ i $f_{20}(m_{x2}, \sigma_{x2}) = m_{y2}$, więc wzór (12) przyjmuje postać:

$$R_y(t_1, t_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho_x^n(t_1, t_2)}{n!} f_{1n}(m_{x1}, \sigma_{x1}) f_{2n}(m_{x2}, \sigma_{x2}) \tag{15}$$

Jeżeli na wejście toru nielinearnego posiadającego charakterystykę stacjonarną poda się przypadkowy sygnał stacjonarny, wtedy $m_{x1} = m_{x2} = m_x$, $\sigma_{x1} = \sigma_{x2} = \sigma_x$, $f_{1n}(m_{x1}, \sigma_{x1}) = f_{2n}(m_{x2}, \sigma_{x2}) = f_n(m_x, \sigma_x)$ i $R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau)$, a funkcja korelacji sygnału wyjściowego przyjmuje postać:

$$R_y(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho_x^n(\tau)}{n!} f_n^2(m_x, \sigma_x) \tag{16}$$

gdzie

$$f_n(m_x, \sigma_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(m_x + \sigma_x z) \frac{\mathrm{d}^n \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right)}{\mathrm{d}z^n} \mathrm{d}z \tag{17}$$

Obecnie zostanie wyprowadzony wzór na $f_n(m_x, \sigma_x)$ z zależności (17) przy założeniu, że charakterystykę bezinercyjnego toru nielinearnego przedstawia wielomian:

$$F(u_x) = \sum_{k=0}^{m} A_k u_x^k = \sum_{k=0}^{m} A_k (m_x + \sigma_x z)^k \tag{18}$$

Podstawiając (18) do (17) otrzymuje się:

$$f_n(m_x, \sigma_x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{A_k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (m_x + \sigma_x z)^k \frac{\mathrm{d}^n \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right)}{\mathrm{d}z^n} \mathrm{d}z \tag{19}$$

Można rozróżnić dwa przypadki:

1) dla $n > k$ całkując przez części k razy i stosując regułę de L'Hospitala otrzymuje

się:

$$f_n(m_x, \sigma_x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k A_k \sigma_x^k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-k}\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)}{dz^{n-k}} dz =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k A_k k! \sigma_x^k \frac{d^{n-k-1}\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)}{dz^{n-k-1}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} = 0 \tag{20}$$

2) dla $n \leqslant k$ równanie (19) można przekształcić następująco, Wyrażenie podcałkowe całkujemy n-krotnie przez części:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (m_x + \sigma_x z)^k \frac{d^n \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)}{dz^n} dz =$$

$$= (-1)^n \frac{k!}{(k-n)!} \delta_x^n \int_{-\infty}^{\infty} (m_x + \sigma_x z)^{k-n} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz \tag{21}$$

Dwumian $(m_x + \sigma_x z)^{k-n}$ można wyrazić wzorem Newtona [3]:

$$(m_x + \sigma_x z)^{k-n} = \sum_{l=0}^{k-n} \frac{(k-n)!}{l!(k-n-l)!} \sigma_x^l z^l m_x^{k-n-l} \tag{22}$$

Po podstawieniu (22) do (21) a następnie otrzymanego wyniku do (19) otrzymuje się zależność:

$$f_n(m_x, \sigma_x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^n A_k \frac{k!}{(k-n)!} \sigma_x^n \cdot$$

$$\cdot \sum_{l=0}^{k=n} \frac{(k-n)!}{l!(k-n-l)!} \sigma_x^l m_x^{k-n-l} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^l \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz \tag{23}$$

Całka $\int_{-\infty}^{\infty} z^l \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz$ przedstawia moment centralny rzędu l sygnału o rozkładzie normalnym. Jak wiadomo [7] całka

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^l \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (l-1)\sigma^n = \frac{(l+1)!!}{l+1} \tag{24}$$

dla l parzystych i równa się zeru dla l nieparzystych. Wyrażenie $(l+1)!!$ oznacza iloczyn wszystkich nieparzystych liczb od 1 do $l+1$. Uwzględniając (24) i oznaczając $l = 2i$ wzór (23) można przedstawić w następujący sposób:

$$f_n(m_x, \sigma_x) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{i \leqslant \frac{k-n}{2}} (-1)^n A_k k! \frac{(2i+1)!!}{(2i+1)!(k-n-2i)!} \sigma_x^{n+2i} m_x^{k-n-2i} \tag{25}$$

Wzór (25) można zapisać

$$f_n(m_x, \sigma_x) = \sum_{k=0}^{m} f_{nk}(m_x, \sigma_x), \tag{26}$$

gdzie

$$f_{nk}(m_x, \sigma_x) = A_k(-1)^n k! \sum_{i=0}^{i \leqslant \frac{k-n}{2}} \frac{(2i+1)!!}{(2i+1)!(k-n-2i)!} \sigma_x^{n+2i} m_x^{k-n-2i} \tag{27}$$

dla $n \leqslant k$. Dla $n > k$ wielkość $f_{nk} = 0$.

W dodatku 1 przedstawiono obliczone wyrażenia (27) dla wartości n i k od 0 do 10, które można wykorzystywać do obliczeń produktów nielinearnych.

Z wzorów (27) i (24) wynika, że dla sygnałów wejściowych, których wartość przeciętna równa się zeru z sumy (27) powstaje tylko jeden człon różny od zera dla parzystych $l = 2i = k-n$:

$$f_{nk}(m_x = 0, \sigma_x) = (-1)^n A_k \frac{k!(k-n+1)!!}{(k-n+1)!} \sigma_x^k. \tag{28}$$

Znając funkcję korelacji stacjonarnego sygnału wyjściowego dla układu nielinearnego, zgodnie z twierdzeniem Wienera-Chinczyna, można wyznaczyć gęstość widmową S_y stosując przekształcenie Fouriera [11]:

$$S_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \tag{29}$$

Podstawiając (16) i (26) do (29) uzyskuje się zależność:

$$S_y(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{f_{nk}^2(m_x, \sigma_x)}{n!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varrho_x^n(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \tag{30}$$

Wyrażenie

$$s_{xn}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varrho_{xn}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varrho_x^n(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \tag{31}$$

stanowi znormalizowaną gęstość widmową rzędu n-tego. Więc

$$S_y(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{n!} f_{nk}^2(m_x, \sigma_x) s_{xn}(\omega). \tag{32}$$

Uwzględniając, że

$$\varrho_{xn}(\tau) = \varrho_x^n(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{xn}(\omega) e^{j\omega\tau} d\tau \tag{33}$$

wzór (31) można przekształcić następująco:

$$s_{xn}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varrho^k(\tau)\varrho^{n-k}(\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varrho^k(\tau)\left[\int_{\infty}^{\infty} s_{x,n-k}(\omega_1)e^{j\omega_1\tau}\mathrm{d}\omega_1\right]e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s_{x,n-k}(\omega_1)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varrho^k(\tau)e^{-j(\omega-\omega_1)\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega_1 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s_{x,n-k}(\omega_1)s_{xk}(\omega-\omega_1)\mathrm{d}\omega_1 = s_{x,n-k} * s_{xk} \quad \text{dla } k \leqslant n. \tag{34}$$

Wyrażenie (34) przedstawia splot funkcji $s_{x,n-k}$ i s_{xk}. Podstawiając do zależności (34) $k = 1$ otrzymuje się:

$$s_{xn}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{x,n-1}(\omega_1)s_x(\omega-\omega_1)\mathrm{d}\omega_1. \tag{35}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$s_{x1}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varrho_x(\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau = s_x(\omega) \tag{36}$$

i podstawiając do wzoru (35) kolejno wartości $n = 2, 3, \ldots$ otrzymuje się

$$s_{x1}(\omega) = s_x(\omega)$$

$$s_{x2}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{x1}(\omega_1)s_x(\omega-\omega_1)\mathrm{d}\omega_1 = s_{x1} * s_x$$

$$s_{x3}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{x2}(\omega_1)s_x(\omega-\omega_1)\mathrm{d}\omega_1 = s_{x2} * s_x$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$s_{xn}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{x,n-1}(\omega_1)s_x(\omega-\omega_1)\mathrm{d}\omega_1 = s_{x,n-1} * s_x. \tag{37}$$

Podstawiając (37) do (32) otrzymuje się wzory na gęstość widmową sygnału wyjściowego kolejnych rzędów:

$$S_{yn}(\omega) = f_1(m_x, \sigma_x)s_x(\omega) \quad \text{dla } n = 1 \tag{38}$$

$$S_{yn}(\omega) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{m} f_{nk}^2(m_x, \sigma_x)(s_{x,n-1} * s_x) =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{m} f_{nk}^2(m_x, \sigma_x)s_{xn}(\omega) \quad \text{dla } n = 2, 4, 5 \ldots, \tag{39}$$

gdzie $f_{nk}(m_x, \sigma_x)$ określa wzór (27).

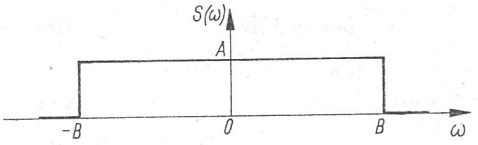
Całkowitą gęstość widmową sygnału wyjściowego określa wzór

$$S_y(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} S_{yn}. \tag{40}$$

W praktycznych obliczeniach przy rozkładaniu funkcji korelacji sygnału na wyjściu układu nielinearnego według potęg współczynnika korelacji uwzględnia się tylko skończoną ilość wyrazów szeregu (15). Spowodowany tym błąd determinuje błąd przy wyznaczaniu gęstości widmowej (30) sygnału wyjściowego. Oszacowanie tego błędu przedstawiono w dodatku 2.

3. WYZNACZANIE PRODUKTÓW NIELINEARNYCH NA WYJŚCIU STATYCZNEGO TORU NIELINEARNEGO PRZY SZEROKOPASMOWYM SYGNALE WEJŚCIOWYM

Dla zbadania własności nielinearnych torów elektroakustycznych przeważnie używa się jako sygnału pomiarowego pojedynczego przebiegu sinusoidalnego. Otrzymane wyniki często nie odzwierciedlają dobrze własności torów, które w warunkach rzeczywistych są sterowane sygnałami o widmie ciągłym [9]. Dlatego wydaje się celowe stosowanie jako sygnału pomiarowego szerokopasmowego sygnału gaussowskiego o stałej gęstości widmowej w zakresie częstotliwości fonicznych (rys. 1). Zakłada się, że badany tor jest nielinearny bezinercyjny i że jego charakterystyka jest określona wielomianem (18).



Rys. 1. Wykres gęstości widmowej gaussowskiego sygnału wejściowego

Do analizy produktów nielinearnych zostanie zastosowana omówiona w części 2 metoda korelacyjna, która pozwala wyznaczyć gęstość widmową (38, 39) sygnału wyjściowego w funkcji gęstości widmowej i parametrów (wartości przeciętnej, wariancji) sygnału wejściowego. Dla wyznaczenia znormalizowanej gęstości widmowej na wyjściu toru wykorzystane zostaną wzory (37). Gdy przy analizie produktów nielinearnych elektroakustycznego toru nielinearnego zostanie podany na jego wejście szerokopasmowy sygnał gaussowski szumu, którego widmo obejmuje cały zakres częstotliwości fonicznych $(-B, B)$, sygnał wyjściowy będzie zawierał produkty dające pełną charakterystykę nielinearnych własności toru.

Dla szerokopasmowego sygnału gaussowskiego o widmie zawartym w przedziale $(-B, B)$ znormalizowane wartości gęstości widmowej $s_{x,n}(\omega)$ obliczone ze wzoru (37) przyjmują następującą postać (pierwszy indeks przy s oznacza rząd nielinearności, drugi kolejną część widma; $s(\omega)$ przedstawia widmo dla dodatnich ω, natomiast $s'(\omega)$ określa widmo dla ujemnych ω):

$$s_{10}(\omega) = 0 \qquad \text{dla } \omega > B, \omega < -B \qquad (41)$$

$$s_{11}(\omega) = \frac{1}{2B} \qquad \text{dla } -B < \omega < B \qquad (42)$$

$$s_{20}(\omega) = 0 \qquad \text{dla } \omega > 2B, \omega < -2B \qquad (43)$$

$$s_{21}(\omega) = \frac{1}{4B^2}(2B-\omega) \qquad \text{dla } 0 < \omega < 2B \qquad (44)$$

$$s'_{21}(\omega) = \frac{1}{4B^2}(2B+\omega) \qquad \text{dla } -2B < \omega < 0 \qquad (45)$$

$$s_{30}(\omega) = 0 \qquad \text{dla } \omega > 3B, \omega < -3B \qquad (46)$$

$$s_{31}(\omega) = \frac{1}{8B^3}\frac{1}{2}(6B^2-2\omega^2) \qquad \text{dla } 0 < \omega < B \qquad (47)$$

$$s_{32}(\omega) = \frac{1}{8B^3}\frac{1}{2}(\omega-3B)^2 \qquad \text{dla } B < \omega < 3B \qquad (48)$$

$$s'_{31}(\omega) = \frac{1}{8B^3}\frac{1}{2}(6B^2-2\omega^2) \qquad \text{dla } -B < \omega < 0 \qquad (49)$$

$$s'_{32}(\omega) = \frac{1}{8B^3}\frac{1}{2}(\omega+3B)^2 \qquad \text{dla } -3B < \omega < -B \qquad (50)$$

$$s_{40}(\omega) = 0 \qquad \text{dla } \omega > 4B, \omega < -4B \qquad (51)$$

$$s_{41}(\omega) = \frac{1}{16B^4}\frac{1}{6}(3\omega^3-12B\omega^2+32B^3) \qquad \text{dla } 0 < \omega < 2B \qquad (52)$$

$$s_{42}(\omega) = \frac{1}{16B^4}\frac{1}{6}(4B-\omega)^3 \qquad \text{dla } 2B < \omega < 4B \qquad (53)$$

$$s'_{41}(\omega) = \frac{1}{16B^4}\frac{1}{6}(-3\omega^3-12B\omega^2+32B^3) \qquad \text{dla } -2B < \omega < 0 \qquad (54)$$

$$s'_{42}(\omega) = \frac{1}{16B^4}\frac{1}{6}(4B+\omega)^3 \qquad \text{dla } -4B < \omega < -2B \qquad (55)$$

$$s_{50}(\omega) = 0 \qquad \text{dla } \omega > 5B, \omega < -5B \qquad (56)$$

$$s_{51}(\omega) = \frac{1}{32B^5}\frac{1}{24}(6\omega^4-60B^2\omega^2+230B^4) \qquad \text{dla } 0 < \omega < B \qquad (57)$$

$$s_{52}(\omega) = \frac{1}{32B^5}\frac{1}{24}(-4\omega^4+40B\omega^3-120B^2\omega^2+ +40B^3\omega+220B^4) \qquad \text{dla } B < \omega < 3B \qquad (58)$$

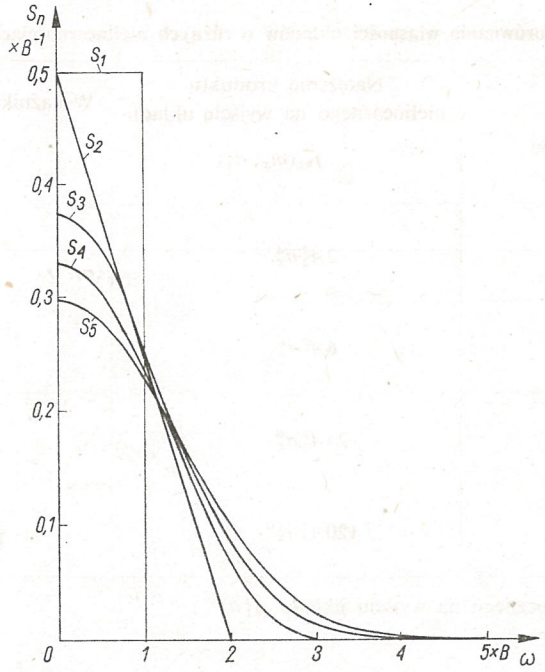
$$s_{53}(\omega) = \frac{1}{32B^5}\frac{1}{24}(\omega-5B)^4 \qquad \text{dla } 3B < \omega < 5B \qquad (59)$$

$$s'_{51}(\omega) = \frac{1}{32B^5}\frac{1}{24}(6\omega^4-60B^2\omega^2+230B^4) \qquad \text{dla } -B < \omega < 0 \qquad (60)$$

$$s'_{52}(\omega) = \frac{1}{32B^5}\frac{1}{24}(-4\omega^4-40B\omega^3-120B^2\omega^2- -40B^3\omega+220B^4) \qquad \text{dla } -3B < \omega < -B \qquad (61)$$

$$s'_{53}(\omega) = \frac{1}{32B^5}\frac{1}{24}(\omega+5B)^4 \qquad \text{dla } -5B < \omega < -3B \qquad (62)$$

Gęstość widmowa $s_1(\omega)$ stanowi niezniekształconą część widma, natomiast pozostałe wyrażenia przedstawiają produkty nielinearne toru. Na rys. 2 przedstawiono wykreślone zależności (41)—(62) dla dodatnich ω. Całkowitą gęstość widmową sygnału na wyjściu toru nielinearnego można wyznaczyć z wzorów (38), (39) i (40), korzystając z zależności



Rys. 2. Wykresy znormalizowanych gęstości widmowych do 5 rzędu

(27) i gęstości widmowych określonych wzorami (41)—(62), odpowiednio sumując gęstości widmowe poszczególnych rzędów. Korzystając z podanych wzorów można więc obliczyć w stosunkowo prosty sposób nielinearności na wyjściu danego toru elektroakustycznego. Należy zaznaczyć, że przedstawioną metodę można stosować do wyznaczania produktów nielinearnych nie tylko torów fonicznych, ale także do układów o dowolnej szerokości pasma przenoszenia.

Interesującym zagadnieniem jest zmiana produktów nielinearnych wraz ze wzrostem rzędu nielinearności układu. W tablicy 1 przedstawiono natężenie produktów nielinearnych na wyjściu układów, których charakterystyka zawiera człony linearne i jeden człon nielinearny. Do obliczeń wykorzystano wzór (32) i zależności wyprowadzone w dodatku 1, przy założeniu, że sygnałem wejściowym jest sygnał gaussowski o wartości przeciętnej równej zeru z równomiernym widmem mocy w przedziale częstotliwości $(0, B)$. Znormalizowane gęstości widmowe mocy produktów nielinearnych dla czterech układów o charakterystykach podanych w kolumnie 1 tablicy 1 przedstawiają odpowiednio wzory (43)—(45), (46)—(50), (51)—(55) i (56)—(62). Widma produktów nielinearnych są zawarte w przedziałach częstotliwości $(0, nB)$, gdzie n — rząd nielinearności układu, B — górna częstotliwość graniczna widma sygnału wejściowego. Maleją one wraz ze

wzrostem częstotliwości. Dla oceny nielinearności układów wprowadzono wskaźnik nielinearności, zdefiniowany jako pierwiastek kwadratowy ze stosunku mocy produktu nielinearnego danego rzędu P_{wyn} do mocy sygnału użytecznego P_{wyu} na wyjściu układu. Wyniki obliczeń przedstawiono w trzeciej kolumnie tablicy 1.

Tablica 1

Porównanie własności układów o różnych nielinearnościach

Charakterystyka układu nielinearnego	Natężenie produktu nielinearnego na wyjściu układu $\frac{1}{n!} f'_{nk}(m_x, \sigma_x)$	Wskaźnik nielinearności układu $\sqrt{\frac{P_{wyn}}{P_{wyu}}}$
$u_y = A_1 u_y + A_2 u_x^2$	$2A_2^2 \sigma_x^4$	$\sqrt{2}\,\frac{A_2}{A_1}\,\sigma_x$
$u_y = A_1 u_x + A_3 u_x^3$	$6A_3^2 \sigma_x^6$	$\sqrt{6}\,\frac{A_3}{A_1}\,\sigma_x^2$
$u_{wy} = A_1 u_x + A_4 u_x^4$	$24A_4^2 \sigma_x^8$	$\sqrt{24}\,\frac{A_4}{A_1}\,\sigma_x^3$
$u_{wy} = A_1 u_x + A_5 u_x^5$	$120A_5^2 \sigma_x^{10}$	$\sqrt{120}\,\frac{A_5}{A_1}\,\sigma_x^4$
Natężenie sygnału użytecznego na wyjściu układu $A_1^2 \sigma_x^2$		

4. WNIOSKI

Dla zwiększenia zgodności obiektywnej oceny zniekształceń nielinearnych torów elektroakustycznych z oceną subiektywną należy zastosować do obliczania i pomiarów produktów nielinearnych wejściowego sygnału o widmie zbliżonym do widma rzeczywistych sygnałów fonicznych, np. gaussowskiego sygnału szumu. W pracy wykorzystano korelacyjną metodę do wyznaczania produktów nielinearnych na wyjściu bezinercyjnego toru elektroakustycznego przy gaussowskim sygnale wejściowym, którego widmo obejmuje cały zakres częstotliwości fonicznych. Wyprowadzono wzory umożliwiające obliczanie produktów nielinearnych przy znajomości parametrów toru (współczynników wielomianu aproksymującego charakterystykę toru) oraz sygnału wejściowego (wartości przeciętnej i wariancji). Metoda ta umożliwia oddzielne obliczenie produktów nielinearnych poszczególnych rzędów. W pracy podano wykresy widm poszczególnych rzędów przy gaussowskim sygnale wejściowym. Całkowity produkt nielinearny równa się sumie produktów poszczególnych rzędów. Stosując przedstawioną metodę określono wpływ rzędu nielinearności układu na wyjściowy produkt nielinearny (tablica 1).

DODATEK 1

Wzory określające funkcję $f_{nk}(m_x, \delta_x)$ dla n i k zmieniającego się od 0 do 10

$$f_{nk} = A_k(-1)^n k! \sum_{i=0}^{i \leqslant \frac{k-n}{2}} \frac{(2i+1)!!}{(2i+1)!(k-n-2i)!} \sigma_x^{n+2i} m_x^{k-n-2i}$$

1) $n = 0$

$$f_{00} = A_0$$
$$f_{01} = A_1 m_x$$
$$f_{02} = A_2(m_x^2 + \sigma_x^2)$$
$$f_{03} = A_3(m_x^3 + 3m_x\sigma_x^2)$$
$$f_{04} = A_4(m_x^4 + 6m_x^2\sigma_x^2 + 3\sigma_x^4)$$
$$f_{05} = A_5(m_x^5 + 10m_x^3\sigma_x^2 + 15m_x\sigma_x^4)$$
$$f_{06} = A_6(m_x^6 + 15m_x^4\sigma_x^2 + 45m_x^2\sigma_x^4 + 15\sigma_x^6)$$
$$f_{07} = A_7(m_x^7 + 21m_x^5\sigma_x^2 + 105m_x^3\sigma_x^4 + 105m_x\sigma_x^6)$$
$$f_{08} = A_8(m_x^8 + 28m_x^6\sigma_x^2 + 210m_x^4\sigma_x^4 + 420m_x^2\sigma_x^6 + 105\sigma_x^8)$$
$$f_{09} = A_9(m_x^9 + 36m_x^7\sigma_x^2 + 378m_x^5\sigma_x^4 + 120m_x^3\sigma_x^6 + 945m_x\sigma_x^8)$$
$$f_{010} = A_{10}(m_x^{10} + 45m_x^8\sigma_x^2 + 630m_x^6\sigma_x^4 + 3150m_x^4\sigma_x^6 + 4725m_x^2\sigma_x^8 + 945\sigma_x^{10})$$

2) $n = 1$

$$f_{11} = -A_1\sigma_x$$
$$f_{12} = -2A_2 m_x\sigma_x$$
$$f_{13} = -3A_3(m_x^2\sigma_x + \sigma_x^3)$$
$$f_{14} = -4A_4(m_x^3\sigma_x + 3m_x\sigma_x^3)$$
$$f_{15} = -5A_5(m_x^4\sigma_x + 6m_x^2\sigma_x^3 + 3\sigma_x^5)$$
$$f_{16} = -6A_6(m_x^5\sigma_x + 10m_x^3\sigma_x^3 + 15m_x\sigma_x^5)$$
$$f_{17} = -7A_7(m_x^6\sigma_x + 15m_x^4\sigma_x^3 + 45m_x^2\sigma_x^5 + 15\sigma_x^7)$$
$$f_{18} = -8A_8(m_x^7\sigma_x + 21m_x^5\sigma_x^3 + 105m_x^3\sigma_x^5 + 105m_x\sigma_x^7)$$
$$f_{19} = -9A_9(m_x^8\sigma_x + 28m_x^6\sigma_x^3 + 210m_x^4\sigma_x^5 + 420m_x^2\sigma_x^7 + 105\sigma_x^9)$$
$$f_{110} = -10A_{10}(m_x^9\sigma_x + 36m_x^7\sigma_x^3 + 378m_x^5\sigma_x^5 + 1260m_x^3\sigma_x^7 + 945\sigma_x^9)$$

3) $n = 2$

$$f_{22} = 2A_2\sigma_x^2$$
$$f_{23} = 6A_3 m_x\sigma_x^2$$
$$f_{24} = 12A_4(m_x^2\sigma_x^2 + \sigma_x^4)$$
$$f_{25} = 20A_5(m_x^3\sigma_x^2 + 3m_x\sigma_x^4)$$
$$f_{26} = 30A_6(m_x^4\sigma_x^2 + 6m_x^2\sigma_x^4 + 3\sigma_x^6)$$
$$f_{27} = 42A_7(m_x^5\sigma_x^2 + 10m_x^3\sigma_x^4 + 15m_x\sigma_x^6)$$
$$f_{28} = 56A_8(m_x^6\sigma_x^2 + 15m_x^4\sigma_x^4 + 45m_x^2\sigma_x^6 + 15\sigma_x^8)$$
$$f_{29} = 72A_9(m_x^7\sigma_x^2 + 21m_x^5\sigma_x^4 + 105m_x^3\sigma_x^6 + 105m_x\sigma_x^8)$$
$$f_{210} = 90A_{10}(m_x^8\sigma_x^2 + 28m_x^6\sigma_x^4 + 210m_x^4\sigma_x^6 + 420m_x^2\sigma_x^8 + 105\sigma_x^{10})$$

4) $n = 3$

$$
\begin{aligned}
f_{33} &= -6A_3\sigma_x^3 \\
f_{34} &= -24A_4 m_x \sigma_x^3 \\
f_{35} &= -60A_5(m_x^2\sigma_x^3 + \sigma_x^5) \\
f_{36} &= -120A_6(m_x^3\sigma_x^3 + 3m_x\sigma_x^5) \\
f_{37} &= -210A_7(m_x^4\sigma_x^3 + 6m_x^2\sigma_x^5 + 3\sigma_x^7) \\
f_{38} &= -336A_8(m_x^5\sigma_x^3 + 10m_x^3\sigma_x^5 + 15m_x\sigma_x^7) \\
f_{39} &= -504A_9(m_x^6\sigma_x^3 + 15m_x^4\sigma_x^5 + 45m_x^2\sigma_x^7 + 15\sigma_x^9) \\
f_{310} &= -720A_{10}(m_x^7\sigma_x^3 + 21m_x^5\sigma_x^5 + 105m_x^3\sigma_x^7 + 105m_x\sigma_x^9)
\end{aligned}
$$

5) $n = 4$

$$
\begin{aligned}
f_{44} &= 24A_4\sigma_x^4 \\
f_{45} &= 120A_5 m_x\sigma_x^4 \\
f_{46} &= 360A_6(m_x^2\sigma_x^4 + \sigma_x^6) \\
f_{47} &= 840A_7(m_x^3\sigma_x^4 + 3m_x\sigma_x^6) \\
f_{48} &= 1680A_8(m_x^4\sigma_x^4 + 6m_x^2\sigma_x^6 + 3\sigma_x^8) \\
f_{49} &= 3024A_9(m_x^5\sigma_x^4 + 10m_x^3\sigma_x^6 + 15m_x\sigma_x^8) \\
f_{410} &= 5040A_{10}(m_x^6\sigma_x^4 + 15m_x^4\sigma_x^6 + 45m_x^2\sigma_x^8 + 15\sigma_x^{10})
\end{aligned}
$$

6) $n = 5$

$$
\begin{aligned}
f_{55} &= -120A_5\sigma_x^5 \\
f_{56} &= -720A_6 m_x\sigma_x^5 \\
f_{57} &= -2520A_7(m_x^2\sigma_x^5 + \sigma_x^7) \\
f_{58} &= -6720A_8(m_x^3\sigma_x^5 + 3m_x\sigma_x^7) \\
f_{59} &= -15120A_9(m_x^4\sigma_x^5 + 6m_x^2\sigma_x^7 + 3\sigma_x^9) \\
f_{510} &= -30240A_{10}(m_x^5\sigma_x^5 + 10m_x^3\sigma_x^7 + 15m_x\sigma_x^9)
\end{aligned}
$$

7) $n = 6$

$$
\begin{aligned}
f_{66} &= 720A_6\sigma_x^6 \\
f_{67} &= 5040A_7 m_x\sigma_x^6 \\
f_{68} &= 20160A_8(m_x^2\sigma_x^6 + \sigma_x^8) \\
f_{69} &= 60480A_9(m_x^3\sigma_x^6 + 3m_x\sigma_x^8) \\
f_{610} &= 151200A_{10}(m_x^4\sigma_x^6 + 6m_x^2\sigma_x^8 + 3\sigma_x^{10})
\end{aligned}
$$

8) $n = 7$

$$
\begin{aligned}
f_{77} &= -5040A_7\sigma_x^7 \\
f_{78} &= -40320A_8 m\sigma_x^7 \\
f_{79} &= -181440A_9(m_x^2\sigma_x^7 + \sigma_x^9) \\
f_{710} &= -604800A_{10}(m_x^3\sigma_x^7 + 3m_x\sigma_x^9)
\end{aligned}
$$

9) $n = 8$

$$
\begin{aligned}
f_{88} &= 40320A_8\sigma_x^8 \\
f_{89} &= 362880A_9 m_x\sigma_x^8 \\
f_{810} &= 1814400A_{10}(m_x^2\sigma_x^8 + \sigma_x^{10})
\end{aligned}
$$

10) $n = 9$

$$f_{99} = -36288 A_9 \sigma_x^9$$
$$f_{910} = -3628800 A_{10} m_x \sigma_x^9$$

11) $n = 10$

$$f_{1010} = 2628800 A_{10} \sigma_x^{10}$$

DODATEK 2

Ocena błędu obliczania gęstości widmowej, wynikającego z uwzględnienia skończonej liczby członów szeregu

Przedstawiona w pracy metoda obliczania gęstości widmowej sygnału na wyjściu nielinearnego toru wykorzystuje rozłożenie funkcji korekcyjnej w nieskończony szereg. Rozłożenie w szereg jest korzystne, ponieważ pozwala określić gęstości widmowe produktów nielinearnych poszczególnych rzędów. Suma wszystkich członów szeregu przedstawia całkowitą gęstość widmową sygnału wyjściowego. Ponieważ w praktycznych obliczeniach uwzględnia się skończoną ilość członów szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} S_{yn}$ powstaje błąd, który zostanie oszacowany.

Rzeczywista gęstość widmowa sygnału wyjściowego jest określona wzorem

$$S_y(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f_n^2(m_x, \sigma_x) s_{x,n}(\omega) \tag{1}$$

natomiast przybliżona, przy uwzględnieniu N członów jest równa

$$S'_y(\omega) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} f_n^2(m_x, \sigma_x) s_{x,n}(\omega). \tag{2}$$

Nie uwzględniona część gęstości widmowej równa jest różnicy zależności (1) i (2):

$$S_y(\omega) - S'_y(\omega) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} f_n^2(m_x, \sigma_x) s_{x,n}(\omega). \tag{3}$$

Znormalizowana gęstość widmowa $s_{x,n}(\omega)$ dla dowolnego $n > N$ spełnia zależność:

$$s_{x,n}(\omega) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\varrho_x(\tau)|^n \mathrm{d}\tau < \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\varrho_x(\tau)|^{N+1} \mathrm{d}\tau \tag{4}$$

Oznaczając przez $2m$ największą liczbę parzystą mniejszą lub równą $N+1$ oraz uwzględnia-

jąc zależność (4) można dla $n > N$ napisać:

$$s_{x,n}(\omega) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varrho_x(\tau)|^{N+1} \mathrm{d}\tau \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\varrho_x(\tau)|^{2m} \mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varrho_x^{2m}(\tau) \mathrm{d}\tau = S_{x,2m}(0). \tag{5}$$

Uzyskaną zależność $s_{x,n}(\omega) \leqslant s_{x,2m}(0)$ należy podstawić do (3):

$$S_y(\omega) - S'_y(\omega) \leqslant s_{x,2m}(0) \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} f_n^2(m_x, \sigma_x) =$$

$$= s_{x,2m}(0) \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f_n^2(m_x, \sigma_x) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} f_n^2(m_x, \sigma_x) \right] \tag{6}$$

Korzystając z zależności (16) podanej w rozdziale 2 i uwzględniając, że $\varrho_x(0) = 1$ można napisać następujące zależności:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f_n^2(m_x, \sigma_x) = R_y(0) = \sigma_y^2, \tag{7}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} f_n^2(m_x, \sigma_x) = R'_y 0 = \sigma'^2_y. \tag{8}$$

Podstawiając (7) i (8) do (6) otrzymuje się

$$S_y(\omega) - S'_y(\omega) \leqslant (\sigma_y^2 - \sigma'^2_y) S_{x,2m}(0). \tag{9}$$

Zależność (9) przedstawia bezwzględny błąd. Dla obliczenia błędu względnego należy podzielić (9) przez gęstość widmową $S'_y(0)$:

$$\frac{S_y(\omega) - S'_y}{S'_y(0)} \leqslant \frac{\sigma_y^2 - \sigma'^2_y}{S'_y(0)} s_{x,2m}(0). \tag{10}$$

Wariancję σ_y^2 sygnału wyjściowego oblicza się z ogólnych wzorów, podanych w dodatku 3, w których nie występuje szereg. Wartość σ'^2_y można obliczyć z $R'_y(0)$. Przy obliczaniu σ'^2_y uwzględnia się tylko te współczynniki $f_n^2(m_x, \sigma_x)$, które były uwzględniane przy wyznaczaniu $S'_y(\omega)$.

DODATEK 3

Wartość przeciętna i wariancja sygnału na wyjściu toru nielinearnego

Wzór na wartość przeciętną sygnału na wyjściu nielinearnego toru o charakterystyce

$$F(u_x) = \sum_{k=0}^{m} A_k u_x^k \tag{1}$$

można wyrazić następująco [2]:

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} F(u_x) f_x(u_x)\,\mathrm{d}u_x = \sum_{k=0}^{m} A_k \int_{-\infty}^{\infty} u_x^k f_x(u_x)\,\mathrm{d}u_x. \tag{2}$$

Ponieważ

$$u_x^k = [(u_x - m_x) + m_x]^k = \sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!(k-l)!}\,\sigma_x^l\, m_x^{k-l} \left(\frac{u_x - m_x}{\sigma_x}\right)^l, \tag{3}$$

więc (2) przyjmuje postać:

$$m_y = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{k} A_k \frac{k!}{l!(k-l)!}\,\sigma_x^l\, m_x^{k-l} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{u_x - m_x}{\sigma_x}\right)^l f_x(u_x)\,\mathrm{d}u_x. \tag{4}$$

Wyrażenie podcałkowe przedstawia centralny moment l-tego rzędu zmiennej przypadkowej. Dla rozkładu normalnego [7]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{u_x - m_x}{\sigma_x}\right)^l f_x(u_x)\,\mathrm{d}u_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^l e^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} \dfrac{(l+1)!!}{l+1} & \text{dla } l \text{ parzystego} \\ 0 & \text{dla } l \text{ nieparzystego} \end{cases} \tag{5}$$

gdzie $z = \dfrac{u_x - m_x}{\sigma_x}$ jest znormalizowaną zmienną losową. Wprowadzając oznaczenie $l = 2i$ oraz podstawiając (5) do (4) otrzymujemy końcowy wynik:

$$m_y = \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{l \leq \frac{k}{2}} A_k \frac{k!(2i+1)!!}{(2i+1)!(k-2i)!}\,\sigma_x^{2i}\, m_x^{k-2i}. \tag{6}$$

Obliczone z (6) wzory na wartość przeciętną sygnału na wyjściu nielinearnego toru dla $m = 0 \div 3$ przedstawiono w tablicy 2.

Wzór na wariancję sygnału na wyjściu nielinearnego toru o charakterystyce (1) można wyrazić następująco [2]:

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [F(u_x) - m_y]^2 f(u_x)\,\mathrm{d}u_x = \int_{-\infty}^{\infty} [F(u_x)]^2 f(u_x)\,\mathrm{d}u_x - m_y^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} A_k u_x^k\right]^2 = f_x(u_x)\mathrm{d}u_x - m_y^2. \tag{7}$$

Ponieważ

$$\left[\sum_{k=0}^{m} A_k u_x^k\right]^2 = \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{m} A_r A_s u_x^{r+s}, \tag{8}$$

więc (7) przyjmuje postać

$$\sigma_y^2 = \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{m} A_r A_s \int_{-\infty}^{\infty} u_x^{r+s} f_x(u_x)\,\mathrm{d}u_x - m_y^2. \tag{9}$$

Ponieważ

$$u_x^{r+s} = [(u_x - m_x) + m_x]^{r+s} = \sum_{l=0}^{r+s} \frac{(r+s)!}{l!(r+s-l)!} \sigma_x^l m_x^{r+s-l} \left(\frac{u_x - m_x}{\sigma_x} \right)^l, \tag{10}$$

więc (9) przyjmuje postać:

$$\sigma_y^2 = \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{m} \sum_{l=0}^{r+s} A_r A_s \frac{(r+s)!}{l!(r+s-l)!} \sigma_x^l m_x^{r+s-l} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{u_x - m_x}{x} \right)^l \cdot f_x(u_x)\, du_x - m_y^2. \tag{11}$$

Dla rozkładu normalnego, uwzględniając (5) można napisać:

$$\sigma_y^2 = \begin{cases} \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{m} \sum_{l=0}^{r+s} A_r A_s \frac{(r+s)!(l+1)!!}{l!(r+s+l)!(l+1)} \sigma_x^l m_x^{r+s-l} - m_y^2 & \text{dla } l \text{ parzystego.} \\ 0 & \text{dla } l \text{ nieparzystego} \end{cases} \tag{12}$$

Zależność (12) umożliwia obliczenie wariancji sygnału na wyjściu nielinearnego toru przy znajomości charakterystyki toru określonej wzorem (1) oraz parametrów sygnału wejściowego (m_x, σ_x). Kwadrat wartości przeciętnej sygnału na wyjściu układu oblicza się z wzoru (6). Obliczone z (12) wzory na wariancję sygnału na wyjściu nielinearnego toru dla $m = 0 \div 3$ przedstawiono w tablicy 2.

Tablica 2

Wzory na wartość przeciętną i wariancję sygnału na wyjściu nielinearnego toru

m	$F(u_x) = \sum_{k=0}^{m} A_k u_x^k$	m	σ_y^2
0	A_0	A_0	0
1	$A_0 + A_1 u_x$	$A_0 + A_1 m_x$	$A_1^2 \sigma_x^2$
2	$A_0 + A_1 u_x + A_2 u_x^2$	$A_0 + A_1 m_x + A_2(m_x^2 + \sigma_x^2)$	$A_1\sigma_x^2 + A_2^2(4m_x^2 + \sigma_x^2 + 2\sigma_x^4) + 4A_1 A_2 m_x \sigma_x^2$
3	$A_0 + A_1 u_x + A_2 u_x^2 + A_3 u_x^3$	$A_0 + A_1 m_x + A_2(m_x^2 + \sigma_x^2) + A_3(m_x^3 + 3m_x\sigma_x^2)$	$A_1^2\sigma_x^2 + A_2^2(4m_x^2\sigma_x^2 + 2\sigma_x^4) + A_3(9m^4\sigma_x^2 + 36m_x^2\sigma_x^4 + 15\sigma_x^6) + A_1 A_2 m_x \sigma_x^2 + 6A_1 A_3(m_x^2\sigma_x^2 + \sigma_x^4) + A_2 A_3(12m_x^3\sigma_x^2 + 24m_x\sigma_x^4)$

LITERATURA

1. W. I. Bunimowcz, *Fluktuacionnyie processy w radioprijemnych ustrojstwach.*, Izd. Sowietskie Radio, Moskwa 1951
2. M. Fisz, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, wyd. 3 Warszawa: PWN, 1967
3. A. Mostowski, M. Stark, *Elementy algebry wyższej*, Warszawa: PWN 1965

4. S. Nikaido, *On Distortion Measurement of Londspeakers Using Programmed Sound, NAK Technical Research Laboratories.* Reports of the 6-th International Congress on Acoustics. Vol. IIID, Electroacoustics, E. Architectural Acoustic, 21—28, Tokio 1968
5. S. Nikaido, T. N. Nitatori, *Nonlinear Distortion Measurement of Audio Systems Using Noise Signal.* Proceedings of the 7-th International Congress on Acoustics. Vol. I, 301—304, Budapest 1971
6. S. Nuckowski, B. Rogala, M. Walaszek, *Pomiary zniekształceń sygnału o widmie ciągłym.* Materiały XXII Seminarium z Akustyki, 164—168. Wrocław 1975
7. A. Papoulis, *Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne.* Warszawa: WNT, 1972
8. S. O. Rice, *Mathematical Analysis of Random Noise.* Bell System Technical Journal 1944, Nr 23, 1945 No 24
9. B. Rogala, R. Zmonarski, *Problem optymalizacji metody pomiaru zniekształceń nielinearnych w torze małej częstotliwości odbiornika radiofonicznego.* XXVII Seminarium z Akustyki, Warszawa-Puławy 1980, t. 3, s. 59—62
10. D. E. Shorter, *The Influence of High — order Products in Nonlinear Distortion.* Electronic Engineering, 1950, 22, Nr 260, 266, 152
11. W. Sobczak, *Podstawy probabilistyczne teorii systemów informacyjnych.* Wyd. 2. Warszawa: WNT, 1981
12. W. Straszewicz, *Pewne kryterium zniekształceń nieliniowych w układach m.cz.* Zeszyty Naukowe Centralnego Ośrodka Badawczo-Rozwojowego RiTV nr 25, 1976
13. M. Walaszek, *Analiza zniekształceń nielinearnych występujących w układach telekomunikacyjnych.* II Jubileuszowa Sesja Naukowa. Politechnika Rzeszowska, 122—129, Rzeszów 1973
14. M. Walaszek, W. Łakota, *Amplitudowe i częstotliwościowe rozkłady poziomów sygnału mowy polskiej.* RTPN, Prace Techniczne, Elektrotechnika, rok II, seria III nr 2A, Rzeszów 1974, s. 123—146
15. M. Walaszek, *Miara zniekształceń nielinearnych sygnału fonicznego powstających w torze elektroakustycznym.* Praca doktorska. Politechnika Wrocławska, Wrocław 1975
16. M. Walaszek, *Metoda wyznaczania gęstości widmowej sygnału na wyjściu układu nieliniowego przy gaussowskim sygnale pomiarowym.* Politechnika Rzeszowska, Rozprawy 10, Seria Konferencji 1, 1—12, Rzeszów 1976
17. M. Walaszek, B. Bartoszek, *Metoda pomiaru i miara zniekształceń nielinearnych przy wykorzystaniu szumu białego jako sygnału pomiarowego.* Pomiary Automatyka Kontrola, 1978, nr 3 s. 91—92
18. M. Walaszek, *Wyznaczanie gęstości widmowej sygnału na wyjściu nieliniowego elektroakustycznego układu bezinercyjnego przy szerokopasmowym i wąskopasmowym sygnale wejściowym.* Sesja Naukowa WSM w Gdyni, Zeszyty Naukowe, Wyd. Specjalne, Gdynia 1984, s. 191—212
19. M. Walaszek, *Metody pomiarów i kryteria oceny zniekształceń nieliniowych w torach elektroakustycznych.* Sesja Naukowa WSM w Gdyni, Zeszyty Naukowe, Wyd. Specjalne, Gdynia 1984, s. 213—253
20. W. M. Wolf, *Dinamiczeskij metod issliedowanija nieliniejnych kolebanij.* Radiotechnika, 1953, t. 8, Nr 2, s. 27—37
21. W. M. Wolf, *K issliedowaniju nieliniejnych iskazenij cztyterechpoljusnika signałom splosznogo spektra.* Żurnal Techniczeskoj Fizyki, 1954, t. 24, Nr 11, s. 2054—2063

M. WALASZEK

CORRELATION ANALYSIS OF NON-LINEAR DISTORTION IN THE OUTPUT OF DEVICES USING WIDE-BAND GAUSSIAN SIGNAL IN THE INPUT

Summary

A corelation method is pressented for calculation of spectral density in the output of memoryless audio devices, using a wide-band Gaussian input signal. The method makes it possible to identify separately non-linear products for successive orders of magnitude. This approach is particularly suitable for the solution of highly non-linear problems. Products of non-linearity of the 2nd, 3rd, 4th and 5th orders for the input Gaussian signal are given.

M. WALASZEK

ANALYSE CORRÉLATIVE DES DISTORSIONS NON-LINÉAIRES DANS LES CIRCUITS APPLIQUANT LE SIGNAL D'ENTRÉE GAUSSIEN

Résumé

On a présenté la méthode corrélative de calcul de la densité spectrale du signal à la sortie du circuit non-linéaire excité par le signal gaussien à large bande. Cette méthode permet d'obtenir séparément les produits non-linéaires des ordres consécutifs. On peut l'utiliser aussi bien pour les circits à petite qu'à forte no-linéarité. On a déduit les formules pour les calculs techniques et on a présenté graphiquement la relation de la densité specreale des produits non-linéaires des le 2ème au 5ème ordre excités par le signal gaussien à large bande.

M. WALASZEK

KORRELATIONSANALYSE DER NICHTLINEAREN VERZERRUNGEN BEI ANWENDUNG EINES GAUß-EINGANGSSIGNALS

Zusammenfassung

In der Bearbeitung wird eine Korrelatins-Berechnungsmethode dargestellt für die Berechnung der Spektraldichte des Signals am Ausgang einer nichtlinearen Bahn bei Erregung mittels breit-bandigen Gauß-Signals. Diese Methode ermöglicht die Lösung einer ganzen Reihenfolge nichtlinearer Produkte; sie kann bei Stufen mit kleiner und großer Nichtlinearität angewandt werden. Die Gleichungen sind für Ingenieurberechnungen abgeleitet worden. Die Kennlinien zeigen die Abhängigkeit der Spektraldichte nichtlinearer Produkte von 2. bis zur 5. Ordnung dei Erregung mitttels breitbandigen Gauß-Signals.

М. ВАЛЯШЕК

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ИСКАЖЕНИЙ В ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКОМ ТРАКТЕ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ВХОДНОГО ГАУССОВСКОГО СИГНАЛА

Резюме

Представлен корреляционный метод расчета спектральной плотности сигнала на выходе нелинейного электроакустического тракта при применении входного широкополосного гауссовского сигнала. Метод этот может быть применен, как для небольших, так и сильных нелинейностей тракта. Выведены формулы, используемые в инженерских расчетах, представлены зависимости спектральной плотности нелинейных сигналов от 2-го до 5-го порядка включительно, в случае, когда на входе тракта применяется широкополосной гауссовский сигнал.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1987, 33, z. 1, ss. 31-48

517.948.33:621.3.011.22

Zagadnienie rozwiązalności nieliniowych obwodów rezystancyjnych

MICHAŁ TADEUSIEWICZ (ŁÓDŹ)

Instytut Podstaw Elektrotechniki, Politechnika Łódzka

Otrzymano 1985.12.10

Artykuł ma charakter przeglądowy i dotyczy fundamentalnego problemu rozwiązalności nieliniowych obwodów rezystancyjnych. Przedstawiono ważne rezultaty w zakresie istnienia i jednoznaczności rozwiązań z wykorzystaniem kluczowych, w omawianych zagadnieniach, koncepcji klas macierzy P_0 oraz par macierzy $\mathscr{W}_0$. Omówiono szereg ogólnych topologicznych kryteriów rozwiązalności i wskazano na ich dużą przydatność. Znaczną część pracy poświęcono, rozpowszechnionym w zastosowaniach, obwodom tranzystorowym. Prezentowana w pracy problematyka ma duże znaczenie poznawcze oraz ściśle wiąże się z potrzebami symulacji komputerowej.

1. WPROWADZENIE

W połowie lat sześćdziesiątych nastąpiło, trwające do dziś, poważne zainteresowanie teorią nieliniowych obwodów rezystancyjnych poparte rozległymi i głębokimi badaniami. Przyczynił się do tego postęp w dziedzinie technologii oraz szerokie zastosowanie komputerów do analizy i projektowania układów elektronicznych.

Obwody rezystancyjne są strukturami nie zawierającymi cewek i kondensatorów złożonymi z takich elementów jak oporniki, tranzystory, źródła sterowane, idealne transformatory i żyratory, wzmacniacze operacyjne, niezależne źródła napięcia i prądu. Nieliniowe obwody rezystancyjne odgrywają ważną, fundamentalną rolę w ogólnej teorii obwodów nieliniowych. Składają się na to następujące przyczyny.

1) Istnieje szeroka klasa układów, w których dominują elementy rezystancyjne, a pojemności i indukcyjności mogą być pominięte.

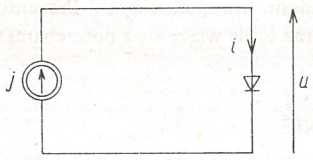
2) Numeryczne wyznaczanie przebiegów czasowych obwodów dynamicznych dokonuje się w wyniku dyskretyzacji równań różniczkowych opisujących obwód, co można zrealizować w procesie rozwiązywania tych równań lub na etapie ich formułowania przy wykorzystaniu modeli iterowanych kondensatorów i cewek. W ten sposób problem analizy układów dynamicznych zostaje sprowadzony do wykonania ciągu analiz obwodów rezystancyjnych. Powyższą ideę można rozszerzyć na analizę wrażliwościową w dziedzinie czasu obwodów dynamicznych.

3) Wyznaczenie stanów równowagi lub punktów pracy obwodów nieliniowych polega na rozwiązaniu obwodu rezystancyjnego otrzymanego w wyniku zwarcia cewek i usunięcia kondensatorów.

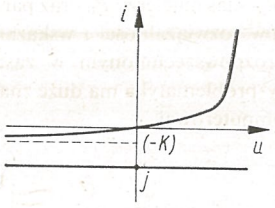
4) Na gruncie teorii nieliniowych obwodów rezystancyjnych można rozwiązać wiele problemów z innych dziedzin jak np. transport lub przepływy sieciowe.

Rozpatrywane w procesie analizy obwody są modelami rzeczywistych obiektów fizycznych i tylko w pewnym zakresie w przybliżeniu charakteryzują te obiekty. Za rozwiązanie obwodu uważamy rozwiązanie równań opisujących obwód. Istnienie i jednoznaczność rozwiązania jest najbardziej fundamentalnym problemem teorii nieliniowych obwodów rezystancyjnych. W celu naświetlenia tej kwestii zostanie poniżej rozpatrzonych kilka prostych przykładów.

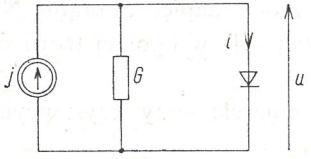
Na rys. 1 pokazano obwód zawierający diodę opisaną równaniem $i = K(e^{\lambda u} - 1)$. Jeżeli $j < (-K)$, to obwód nie ma rozwiązania, bowiem nie istnieje u spełniające równanie $K(e^{\lambda u} - 1) = j$ (rys. 2). Gdyby w modelu źródła uwzględnić konduktancję $G > 0$ (rys. 3), wówczas równanie obwodu $K(e^{\lambda u} - 1) = j - Gu$ miałoby rozwiązanie i byłoby ono jednoznaczne (rys. 4). Na podstawie powyższych rozważań można sądzić, że nie istnienie rozwiązania w obwodzie jest konsekwencją nieadekwatności zastosowanego modelu.



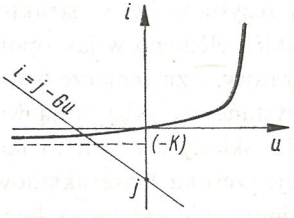
Rys. 1. Obwód zawierający diodę



Rys. 2. Graficzna analiza obwodu z rys. 1

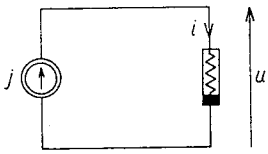


Rys. 3. Obwód z konduktancją $G > 0$

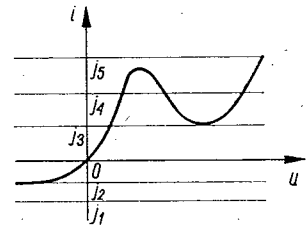


Rys. 4. Graficzne rozwiązanie obwodu z rys. 3

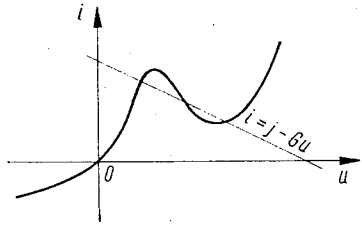
Kolejny przykładowy obwód (rys. 5) zawiera opornik nieliniowy o charakterystyce $i = f(u)$ pokazanej na rys. 6. W zależności od wartości prądu źródłowego j obwód może nie mieć rozwiązania ($j = j_1$), może mieć nieskończenie wiele rozwiązań ($j = j_2$), dwa ($j = j_3$), trzy ($j = j_4$) lub jedno ($j = j_5$) rozwiązanie. Istnienie wielu rozwiązań jest cechą charakterystyczną obszernej klasy obwodów elektronicznych, często warunkującą prawidłowe działanie układu. Należy zauważyć, że przyjęcie w rozpatrywanym przypadku modelu źródła jak na rys. 3 oraz odstąpienie od założenia, że charakterystyka ulega nasyceniu nie zmienia faktu istnienia, w pewnych warunkach, wielu rozwiązań (rys. 7).



Rys. 5. Obwód przykładowy



Rys. 6. Charakterystyka opornika nieliniowego



Rys. 7. Analiza graficzna

Z powyższych rozważań wynika, że nieliniowy obwód rezystancyjny może nie mieć rozwiązania, może mieć jedno rozwiązanie lub wiele rozwiązań. Badanie rozwiązalności jest podstawowym problemem jakościowej analizy obwodów nieliniowych. W dalszej części artykułu dokonano przeglądu ważniejszych osiągnięć z tej dziedziny.

Szeroki zakres problematyki dotyczącej teorii nieliniowych obwodów rezystancyjnych ujęto w pracach [1—3].

2. ROZWIĄZALNOŚĆ OBWODÓW NIELINIOWYCH BEZ ŹRÓDEŁ STEROWANYCH

Problem rozwiązalności nieliniowych obwodów rezystancyjnych po raz pietwszy sformułował Duffin w 1947 r. [4]. Rozważone były obwody utworzone z oporników nieliniowych i źródeł niezależnych. Podstawowym warunkiem wystarczającym istnienia jednoznacznego rozwiązania było żądanie, aby charakterystyki *i-u* oporników nieliniowych były funkcjami ściśle monotonicznie rosnącymi, odwzorowującymi oś liczb rzeczywistych na siebie.

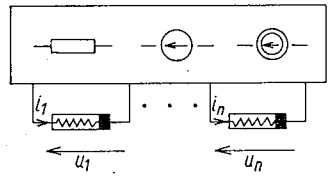
Głębokie studia nad omawianym zagadnieniem przeprowadzili Sandberg i Willson, a najważniejsze rezultaty zostały przedstawione w pracy [5]. Badania dotyczyły obwodów d.c. utworzonych z oporników liniowych o dodatnich rezystancjach, oporników nieliniowych oraz niezależnych źródeł napięcia i prądu. Obwód przedstawiono w postaci liniowego *n*-wrotnika obciążonego opornikami nieliniowymi (rys. 8). Eliminując z rozważań pewne patologie, można rozpatrywany *n*-wrotnik opisać równaniem

$$\mathbf{Ay}+\mathbf{Bx}=\mathbf{c} \tag{1}$$

gdzie $\mathbf{x}=[x_1, \ldots x_n]^T \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{y}=[y_1 \ldots y_n]^T \in \mathbf{R}^n$, a składowymi tych wektorów są prądy lub napięcia wrotowe; **A** i **B** oznaczają rzeczywiste macierze $n \times n$; **c** jest stałym wektorem

zależnym od wymuszeń. Jeżeli prądy i napięcia źródłowe są równe zeru, to przy oznaczeniu $\mathbf{z} = -\mathbf{x}$ otrzymuje się z (1):

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{z} \tag{2}$$



Rys. 8. Obwód z wyodrębnionymi opornikami nieliniowymi

Ponieważ n-wrotnik zawiera jedynie oporniki liniowe o dodatnich rezystancjach, więc dla wszystkich wektorów $\mathbf{y}$ i $\mathbf{z}$ spełniających (2) zachodzi

$$\mathbf{y}^T\mathbf{z} \geqslant 0 \tag{3}$$

Z tego powodu $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ nazywa się pasywną parą macierzy. Zakładając, że oporniki nieliniowe są opisane równaniem $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(x_1) \ldots f_n(x_n)]^T$ otrzymuje się na podstawie (1)

$$\mathbf{A}\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{c} \tag{4}$$

Przyjęto, że $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ należy do klasy funkcji $\mathscr{M}^n$ o tej właściwości, że funkcje $f_k (k = 1, \ldots, n)$ są ciągłe i ściśle monotonicznie rosnące. Przez $\mathscr{N}(\mathbf{B})$ oznaczono zbiór wszystkich $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ spełniających równanie $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ponadto $\forall \mathbf{f} \in \mathscr{M}^n$ określono zbiór $\mathscr{B}(\mathbf{f})$ wszystkich $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, dla których $\mathbf{f}(\varrho\mathbf{x})$ jest ograniczone, gdy $\varrho \to \infty$.

Twierdzenie 1

Niech $\mathbf{f} \in \mathscr{M}^n$ i niech $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ będzie pasywną parą macierzy rzeczywistych $n \times n$. Wówczas równanie (4) ma jedno rozwiązanie $\forall \mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, kiedy $\mathscr{B}(\mathbf{f}) \cap \mathscr{N}(\mathbf{B}) = \{\mathbf{0}\}$. Jeżeli $\mathscr{B}(\mathbf{f}) \cap \mathscr{N}(\mathbf{B}) \neq \{\mathbf{0}\}$, to istnieje takie $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n$, że równanie (4) nie ma rozwiązania.

Powyższe twierdzenie dotyczy obwodów, w których oporniki nieliniowe mają ściśle monotonicznie rosnące charakterystyki. Wykazano również [5], że sformułowane warunki wystarczają, aby istniało co najmniej jedno rozwiązanie równania (4) jeżeli dla $k = 1, \ldots, n$ f_k jest funkcją ciągłą oraz $\exists \lambda_k > 0$ takie, że f_k jest ściśle monotonicznie rosnąca dla $|x_k| > \lambda_k$. Taka funkcja f_k będzie nazywana funkcją krańcowo ściśle monotonicznie rosnącą.

Przykład

Na rys. 9 przedstawiono obwód zawierający cztery oporniki nieliniowe o charakterystykach *i-u* pokazanych na rys. 10. Równanie obwodu jest następujące

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(u_1) \\ f_2(u_2) \\ f_3(u_3) \\ f_4(i_4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ e \\ -i \\ -i \end{bmatrix}$$

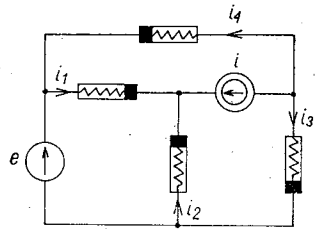
W rozpatrywanym przypadku otrzymuje się

$$\mathcal{N}(\mathbf{B}) = \{u_1 = u_2, u_3 = 0, i_4 = 0\}$$

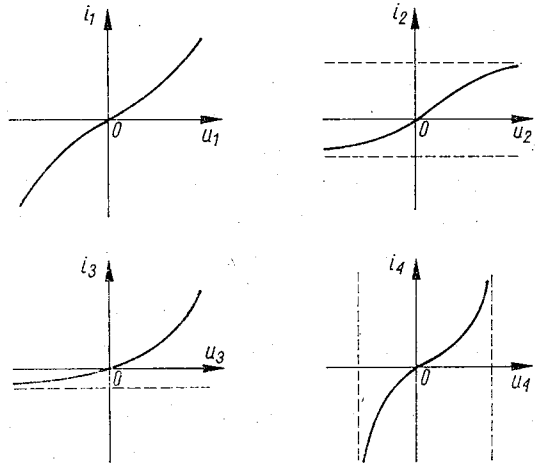
oraz

$$\mathcal{B}(\mathbf{f}) = I_1 \times I_2 \times I_3 \times I_4, \quad \text{gdzie} \quad I_1 = \{0\}, I_2 = (-\infty, \infty), \quad I_3 = (-\infty, 0], I_4 = (-\infty, \infty).$$

Stąd $\mathcal{B}(\mathbf{f}) \cap \mathcal{N}(\mathbf{B}) = \{\mathbf{0}\}$, a zatem obwód ma jednoznaczne rozwiązanie.



Rys. 9. Obwód przykładowy



Rys. 10. Charakterystyki oporników występujących w obwodzie z rys. 9

Desoer i Katzenelson zapoczątkowali badania topologiczne rozwiązalności nieliniowych obwodów rezystancyjnych. W pracy [6] rozpatrzono obwód $\mathcal{M}$ złożony z oporników nieliniowych zarówno uzależnionych napięciowo jak i prądowo oraz wykazano słuszność następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2

Jeżeli w obwodzie $\mathcal{M}$ zachodzą warunki:

1) istnieje drzewo utworzone tylko z oporników uzależnionych prądowo oraz dopełnienie utworzone tylko z oporników uzależnionych napięciowo;

2) charakterystyka $i_k = g_k(u_k)$ każdego opornika należącego do dopełnienia oraz charakterystyka $u_k = r_k(i_k)$ każdego opornika należącego do drzewa jest funkcją ciągłą

i monotonicznie rosnącą, to dla dowolnych źródeł prądowych dołączonych do węzłów oraz dla dowolnych źródeł napięciowych dołączonych w wyniku rozcięcia gałęzi obwód ma jedno rozwiązanie.

Z warunku 1) wynika, że w obwodzie $\mathcal{M}$ nie mogą wystąpić pętle (przekroje) utworzone tylko z oporników uzależnionych prądowo (napięciowo). Z założenia tego odstąpiono w pracy [7] dzięki bardziej szczegółowemu rozróżnieniu występujących w obwodzie nieliniowości. Oporniki nieliniowe o ciągłych monotonicznie rosnących charakterystykach $\sigma = f(\varrho)$ (gdzie σ oznacza prąd, a ϱ napięcie lub odwrotnie), podzielono na trzy zbiory: U, H oraz B. Opornik jest typu U jeżeli jego charakterystyka spełnia zależność $f(\varrho) \to \infty$, gdy $\varrho \to \infty$ oraz $f(\varrho) \to -\infty$ gdy $\varrho \to -\infty$; typu H jeżeli albo $f(\varrho) \to -\infty$, gdy $\varrho \to -\infty$ oraz dla pewnego $K > 0$ $|f(\varrho)| < K$, gdy $\varrho \to \infty$, albo $|f(\varrho)| < K$ dla pewnego K gdy $\varrho \to -\infty$ oraz $f(\varrho) \to \infty$ gdy $\varrho \to \infty$; typu B jeżeli $|f(\varrho)| < K$, gdy $|\varrho| \to \infty$.

Twierdzenie 3

Niech $\mathcal{N}$ oznacza obwód utworzony z oporników o ciągłych, ściśle monotonicznie rosnących charakterystykach. Obwód ma jednoznaczne rozwiązanie dla dowolnych wartości źródłowych źródeł napięcia dołączonych do obwodu poprzez rozcięcie gałęzi oraz źródeł prądu dołączonych do węzłów obwodu wtedy i tylko wtedy, kiedy zachodzą następujące warunki:

1) Każda pętla utworzona z oporników uzależnionych prądowo zawiera albo co najmniej jeden opornik typu U albo co najmniej dwa oporniki typu H, przy czym nie wszystkie te oporniki (typu H) są jednakowo zorientowane[1].

2) Każdy przekrój utworzony z oporników uzależnionych napięciowo zawiera albo co najmniej jeden opornik typu U albo co najmniej dwa oporniki typu H i nie wszystkie te oporniki (typu H) są jednakowo zorientowane.

U w a g a

Jeżeli obwód zawiera opornik typu H, to przypisujemy mu taką orientację, aby $|f(\varrho)| < K$, gdy $\varrho \to \infty$.

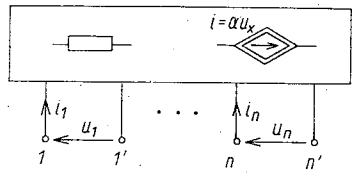
Dla obwodu zawierającego oporniki, których charakterystyki nie są monotonicznie rosnące ale są krańcowo ściśle monotonicznie rosnące, założenia twierdzenia 3 stanowią warunki wystarczające istnienia co najmniej jednego rozwiązania.

3. ROZWIĄZALNOŚĆ OBWODÓW NIELINIOWYCH ZAWIERAJĄCYCH ŹRÓDŁA STEROWANE

W omawianych wyżej pracach badanie istnienia jednoznacznego rozwiązania, dotyczyło obwodów nie zawierających źródeł sterowanych ani oporników lokalnie aktywnych. Występowanie takich elementów dopuszczono w pracy [8]. Podano tam założenia topologiczne uzupełnione warunkiem ilościowym wymagającym przeprowadzenia analizy pew-

[1] Zbiór gałęzi należących do pętli (przekroju) w grafie zorientowanym na jednakową orientację jeżeli można przyjąć taki kierunek odniesienia, że zwrot każdej gałęzi zbioru jest zgodny z tym kierunkiem.

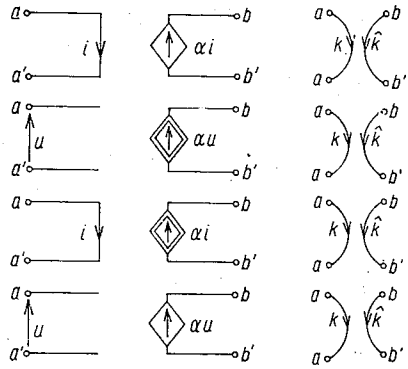
nego liniowego n-wrotnika (rys. 11) utworzonego z oporników liniowych oraz źródeł sterowanych. Konduktancję widzianą z zacisków kk', po rozwarciu zacisków $11', \ldots, (k-1), (k-1)'$ oraz zwarciu zacisków $(k+1), (k+1)', \ldots, nn'$ oznaczono przez β_k. Wspomniany wyżej warunek ilościowy był następujący: $\beta_k > 0$ dla $k = 1, \ldots, n$.



Rys. 11. Liniowy n-wrotnik

Nishi i Chua wykazali ostatnio [9], że w obwodzie $\mathscr{A}$ utworzonym z oporników liniowych o dodatnich rezystancjach, oporników nieliniowych o ściśle monotonicznie rosnących charakterystykach i-u odwzorowujących oś liczb rzeczywistych na siebie, wszystkich czterech rodzajów liniowych źródeł sterowanych o dodatnich współczynnikach oraz źródeł niezależnych można sformułować wyłącznie topologiczne warunki istnienia jednego rozwiązania. Wykorzystano tu nową strukturę topologiczną — graf o komplementarnej strukturze drzewa. Otrzymane rezultaty należy zaliczyć do największych osiągnięć w dziedzinie jakościowej analizy nieliniowych obwodów rezystancyjnych.

Dla rozpatrywanego obwodu $\mathscr{A}$ tworzy się graf G stosując następujące zasady. Każdemu źródłu niezależnemu i każdemu opornikowi przyporządkowuje się gałąź grafu o dowolnie przyjętej orientacji. Każdemu źródłu sterowanemu odpowiada para gałęzi zorientowanych w sposób pokazany na rys. 12. Na otrzymanych w ten sposób grafach będą wykonywane następujące operacje:

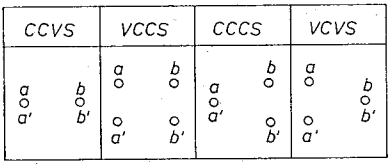


Rys. 12. Grafy źródeł sterowanych

1) $0/\varphi(R)$ — oznacza zwarcie lub rozwarcie gałęzi grafu odpowiadającej opornikowi R, przy czym rozwarcie oznacza usunięcie gałęzi z pozostawieniem węzłów, do których gałąź była dołączona.

2) $\mathscr{Z}/\cdot/$ — dla gałęzi odpowiadającej niezależnemu źródłu napięcia E_s (prądu I_s)

operacja $\mathscr{Z}(E_s)$ $(\mathscr{Z}(I_s))$ oznacza zwarcie (rozwarcie) tej gałęzi. W przypadku źródła sterowanego CS sens operacji $\mathscr{Z}/CS/$ wyjaśnia rys. 13.



Rys. 13. Ilustracja operacji $\mathscr{Z}$ /CS/

Sformułowano, przytoczone niżej, warunki zwane dalej założeniami topologicznymi (ZT).

1) Graf obwodu nie zawiera żadnej pętli złożonej wyłącznie z gałęzi odpowiadających następującym elementom: niezależne źródła napięcia, gałęzie sterowane źródeł CCVS lub VCVS, gałęzie sterujące źródeł CCVS lub CCCS.

2) Graf obwodu nie zawiera żadnego przekroju utworzonego wyłącznie z gałęzi odpowiadających następującym elementom: niezależne źródła prądu, gałęzie sterowane źródeł CCCS lub VCCS, gałęzie sterujące źródeł VCVS lub VCCS.

Wyszczególniono trzy rodzaje przekształcania grafu:

a) zastosowanie operacji $\mathscr{Z}(E_s)$ do każdego źródła napięcia oraz $\mathscr{Z}(I_s)$ do każdego źródła prądu,

b) zastosowanie operacji $0/\varphi(R)$ do każdego opornika,

c) zastosowanie operacji $\mathscr{Z}$(CS) do niektórych (w szczególności do żadnego) źródeł sterowanych.

Rozpatrzono graf G_0 złożony z n par gałęzi $(k, \hat{k})$ $(k = 1, \ldots, n)$ odpowiadających n źródłom sterowanym. Graf G_0 nazywa się grafem o komplementarnej strukturze drzewa jeżeli jest spójny i zarówno gałęzie sterujące $\{k; k = 1, 2, \ldots, n\}$ jak i sterowane $\{\hat{k}; k = 1, 2, \ldots, n\}$ tworzą drzewo w G_0. Graf G_0 nazywa się grafem o dodatniej (ujemnej) komplementarnej strukturze drzewa, jeżeli $\det \mathbf{B}_T > 0$ (< 0), gdzie $\mathbf{B}_T$ oznacza podmacierz macierzy fundamentalnych pętli $[\mathbf{B}_T|\mathbf{1}]$, przy czym T jest drzewem utworzonym z gałęzi sterujących.

Następujące twierdzenie określa topologiczne warunki konieczne i wystarczające istnienia jednoznacznego rozwiązania w obwodzie $\mathscr{A}$.

Twierdzenie 4

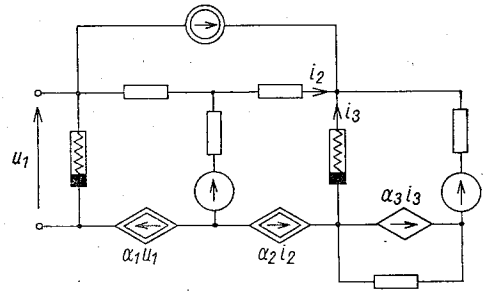
Obwód $\mathscr{A}$ spełniający założenia topologiczne (ZT) ma jedno rozwiązanie dla wszystkich dopuszczalnych wartości parametrów[2] wtedy i tylko wtedy, kiedy jego graf nie może być zredukowany w wyniku zastosowania operacji a), b) i c) do grafu o ujemnej komplementarnej strukturze drzewa.

Przykład

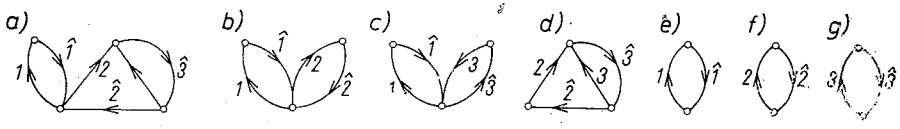
Obwód z rys. 14 spełnia założenia topologiczne (ZT). W wyniku zastosowania operacji a), b) oraz c) wygenerowano grafy o komplementarnej strukturze drzewa przedsta-

[2] To znaczy dla dowolnych dodatnich rezystancji liniowych oporników, dowolnych wartości prądów i napięć źródeł niezależnych, dowolnych dadatnich wartości współczynników źródeł sterowanych.

wione na rys. 15. Ponieważ wszystkie te grafy mają dodatnią komplementarną strukturę drzewa z twierdzenia 4 wynika, że rozpatrywany obwód ma jedno rozwiązanie.



Rys. 14. Obwód przykładowy



Rys. 15. Grafy o komplementarnej strukturze drzewa obwodu z rys. 14

Uwaga

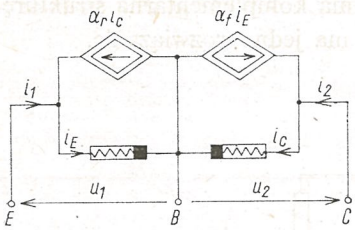
Sformułowane wyżej twierdzenie pozostaje słuszne dla nieliniowości niespełniających warunku odwzorowywania osi na oś o ile słowa „*istnieje jedno rozwiązanie*" zostaną zastąpione słowami „*istnieje co najwyżej jedno rozwiązanie*".

Nishi i Chua podali ponadto w pracy [9] kilka dodatkowych twierdzeń wyrażających topologiczne warunki rozwiązalności, a w artykule [10] coi sami autorzy zastosowali podobną ideę do analizy jakościowej obwodów zawierających wzmacniacze operacyjne.

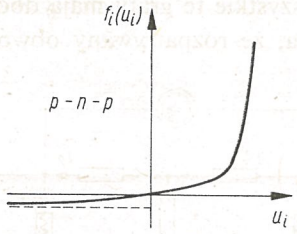
4. ROZWIĄZALNOŚĆ OBWODÓW TRANZYSTOROWYCH

Opublikowany w 1969 r. artykuł [11] Sandberga i Willsona zapoczątkował intensywne prace nad problemem rozwiązalności d.c. obwodów diodowo-tranzystorowych. Występujące w badanych obwodach tranzystory bipolarne są modelowane za pomocą schematu Ebersa-Molla (rys. 16), gdzie $i_E = f_1(u_1) = m_1(e^{n_1 u_1} - 1)$, $i_C = f_2(u_2) = m_2(e^{n_2 u_2} - 1)$, przy czym $m_i > 0$, $n_i > 0$ dla tranzystora typu *p-n-p* oraz $m_i < 0$, $n_i < 0$ dla tranzystora *n-p-n* ($i = 1, 2$). Funkcje $f_i(u_i)$ ulegają nasyceniu (rys. 17 i 18) co ma niekorzystne konsekwencje. Jeżeli uwzględni się efekt upływu powierzchniowego złącza *p-n*, to zamiast nasycenia, wykres funkcji f_k będzie asymptotycznie zbliżał się do linii prostej o dodatnim nachyleniu. Z kolei efekt przebicia lawinowego złącza dla rewersyjnej polaryzacji może być zamodelowany w postaci funkcji pokazanej na rys. 19.

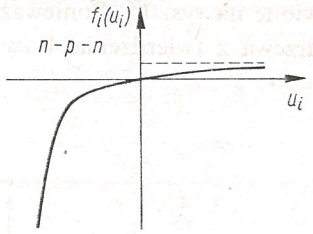
W obydwu ostatnich przypadkach, w odróżnieniu od przebiegów z rys. 17 i 18, f_k jest funkcją odwzorowującą oś liczb rzeczywistych na siebie. W zależności od przyjętego charakteru nieliniowości rozróżnia się model wykładniczy (charakterystyki jak na rys. 17



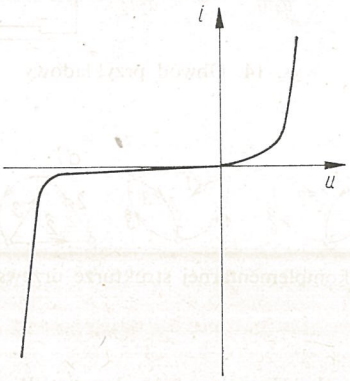
Rys. 16. Model Ebersa-Molla tranzystora bipolarnego



Rys. 17. Przebieg $f_i(u_i)$ dla tranzystora *p-n-p*



Rys. 18. Przebieg $f_i(u_i)$ dla tranzystora *n-p-n*



Rys. 19. Przebieg $i(u)$ z uwzględnieniem efektu przebicia lawinowego

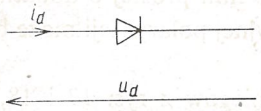
i 18) i model skorygowany (o charakterystykach odwzorowujących R^1 na siebie). Analizując obwód z rysunku 16 otrzymuje się

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_r \\ -\alpha_f & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(u_1) \\ f_2(u_2) \end{bmatrix} \tag{5}$$

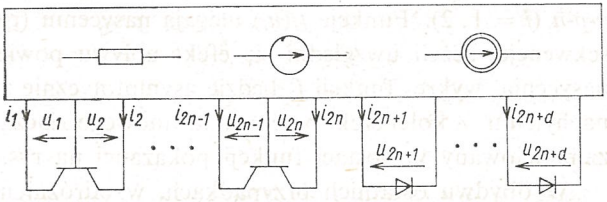
przy czym $0 < \alpha_f, \alpha_r < 1$.

Występujące w obwodach diody (rys. 20) będą opisane funkcją wykładniczą $i_d = f_d(u_d) = K(e^{\lambda u_d} - 1)$, gdzie $K > 0$, $\lambda > 0$ lub funkcją wykładniczą skorygowaną w sposób omówiony wyżej.

W dalszym ciągu rozpatrzono obwody d.c. utworzone z tranzystorów, diod, oporników liniowych o dodatnich rezystancjach oraz niezależnych źródeł napięcia i prądu (rys. 21).



Rys. 20. Dioda o charakterystyce $i_d = f_d(u_d)$



Rys. 21. Obwód z wyodrębnionymi tranzystorami i diodami

Wyodrębniony na rys. 21 m-wrotnik liniowy można opisać (podobnie jak poprzednio) równaniem

$$\mathbf{Au}+\mathbf{Bi}=\mathbf{c} \tag{6}$$

Z zależności (5) wynika

$$\mathbf{i}=\mathbf{Tf(u)} \tag{7}$$

gdzie $\mathbf{T}=\mathbf{T}_1\oplus\mathbf{T}_2\oplus\ldots\oplus\mathbf{T}_n\oplus\mathbf{1}_d$, przy czym $\mathbf{T}_k=\begin{bmatrix}1 & -\alpha_r^{(k)}\\ -\alpha_f^{(k)} & 1\end{bmatrix}$, zaś $\mathbf{f(u)}=[f_1(u_1)\ldots$ $\ldots f_m(u_m)]^T$.

Z równań (6) i (7) wynika

$$\mathbf{Mf(u)}+\mathbf{Nu}=\mathbf{c} \tag{8}$$

gdzie $\mathbf{M}=\mathbf{BT}$, $\mathbf{N}=\mathbf{A}$. W szczególnym przypadku, gdy istnieje opis admitancyjny m-wrotnika otrzymuje się

$$\mathbf{Tf(u)}+\mathbf{Gu}=\mathbf{c} \tag{9}$$

i po pomnożeniu przez $\mathbf{T}^{-1}$ dochodzi się do równania

$$\mathbf{f(u)}+\mathbf{Qu}=\mathbf{b} \tag{10}$$

W jakościowej analizie obwodów diodowo-tranzystorowych fundamentalną rolę odgrywa klasa macierzy P_0 [11-15] oraz klasa par macierzy $\mathscr{W}_0$ [16]. Macierz rzeczywista $\mathbf{A}\,m\times m$ należy do klasy P_0 jeżeli $\det(\mathbf{A}+\mathbf{D})\neq 0$ dla każdej macierzy diagonalnej $\mathbf{D}>\mathbf{0}$. Para $m\times m$ macierzy rzeczywistych $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ należy do $\mathscr{W}_0$ jeżeli $\det(\mathbf{AD}+\mathbf{B})\neq 0$ dla każdej macierzy diagonalnej $\mathbf{D}>\mathbf{0}$.

W celu sprawdzenia, czy para macierzy $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ należy do klasy $\mathscr{W}_0$ trzeba wygenerować, według pewnej reguły, 2^m macierzy o wymiarach $m\times m$ i obliczyć ich wyznaczniki. Wynik jest pozytywny, jeżeli wszystkie te wyznaczniki są nieujemne albo wszystkie niedodatnie i co najmniej jeden z nich niezerowy. Dla dużej liczby m jest to czynność bardzo czasochłonna.

Rezultaty dotyczące rozwiązalności obwodów diodowo-tranzystorowych o nieliniowościach wykładniczych opisanych równaniem (9) zawiera twierdzenie Sandberga [14]:

Twierdzenie 5

Niech $\langle\mathbf{u},\mathbf{Tf(u)}\rangle\geqslant 0\ \forall\mathbf{u}\in\mathbf{R}^m$. Funkcja $\mathbf{Tf}/\cdot/+\mathbf{G}$ jest homeomorfizmem z $\mathbf{R}^m$ na $\mathbf{R}^m$ wtedy i tylko wtedy, kiedy $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\in P_0$ oraz $\mathscr{B}/\mathbf{f}/\cap\mathscr{N}(\mathbf{G})=\{\mathbf{0}\}$. Jeżeli $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\notin P_0$, to istnieją co najmniej dwa rozwiązania równania (9) dla pewnego $\mathbf{c}\in\mathbf{R}^m$; jeżeli $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{G}\in P_0$ lecz $\mathscr{B}/\mathbf{f}/\cap\mathscr{N}(\mathbf{G})\neq\{\mathbf{0}\}$, to dla pewnego $\mathbf{c}\in\mathbf{R}^m$ nie istnieje rozwiązanie równania (9).

Do obwodów opisanych ogólnym równaniem (8) stosuje się następujące twierdzenie Willsona [16]

Twierdzenie 6

Równanie (8) ma jedno rozwiązanie $\forall\mathbf{c}\in\mathbf{R}^m$ i $\forall\mathbf{f(u)}=[f_1(u_1)\ldots f_m(u_m)]^T$ takiej, że dla $i=1,\ldots,m$ $f_i(u_i)$ jest funkcją ściśle monotonicznie rosnącą odwzorowującą $\mathbf{R}^1$ na siebie wtedy i tylko wtedy, kiedy $(\mathbf{M},\mathbf{N})\in\mathscr{W}_0$.

Z dowodu powyższego twierdzenia wynika, że jeżeli $(\mathbf{M},\mathbf{N})\notin\mathscr{W}_0$, to istnieje taka funkcja $\mathbf{f(u)}$ (spełniająca podane w twierdzeniu warunki) i taki wektor $\mathbf{c}\in\mathbf{R}^m$, że równanie (8) ma

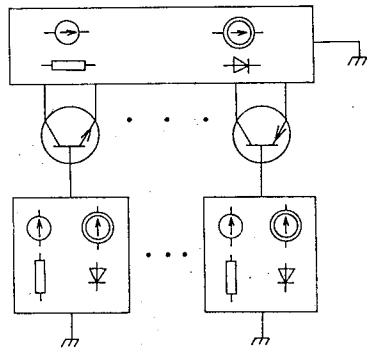
więcej niż jedno rozwiązanie. Natomiast dla ustalonej funkcji $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ przy $(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \notin \mathscr{W}_0$ może się zdarzyć, że istnieje jedno rozwiązanie równania (8) dla wszystkich wektorów $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^m$.

Dla funkcji, które nie odwzorowują przestrzeni $\mathbf{R}^m$ na siebie zachodzi twierdzenie:

Twierdzenie 7

Jeżeli $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = [f_1(u_1) \ldots f_m(u_m)]^T$ jest takim odwzorowaniem, że dla $i = 1, \ldots, m$ $f_i(u_i)$ jest funkcją ściśle monotonicznie rosnącą odwzorowującą $\mathbf{R}^1$ w siebie oraz $(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \in \mathscr{W}_0$, to istnieje co najwyżej jedno rozwiązanie równania (8) dla każdego $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^m$.

Z powyższych rozważań wynika, że przynależność pary macierzy $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ do klasy $\mathscr{W}_0$ ma kluczowe znaczenie w badaniach istnienia i jednoznaczności rozwiązań rozpatrywanej klasy obwodów. Wykazano [17], że dla określonych klas obwodów diodowo-tranzystorowych warunek $(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \in \mathscr{W}_0$ zachodzi przy wszystkich dopuszczalnych wartościach parametrów. Taką klasą są układy o strukturze przedstawionej na rys. 22. Układy te nie mogą więc mieć więcej niż jedno rozwiązanie, co umożliwia sformułowanie następującego wniosku:



Rys. 22. Specjalna klasa obwodów diodowo-tranzystorowych

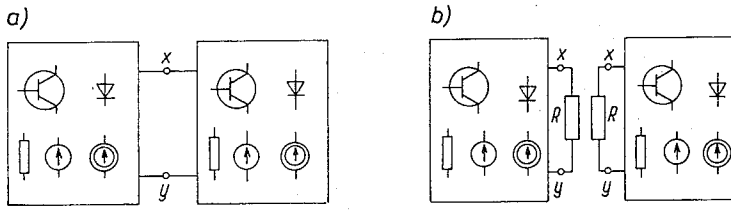
Nie można dokonać syntezy bistabilnego obwodu złożonego z oporników, cewek, kondensatorów, diod, niezależnych źródeł napięcia i prądu oraz dowolnej liczby tranzystorów, który po zwarciu cewek i usunięciu kondensatorów ma strukturę z rys. 22.

W celu pełniejszego wykorzystania otrzymanych wyników, badany obwód dzieli się na dwa podobwody połączone ze sobą w określonych węzłach x oraz y. Jeżeli obydwa podobwody spełniają pewne założenia, to możliwe jest wnioskowanie o przynależności par macierzy $(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ do klasy $\mathscr{W}_0$ na podstawie oddzielnych analiz podobwodów. Istotną rolę spełnia tu następujące twierdzenie.

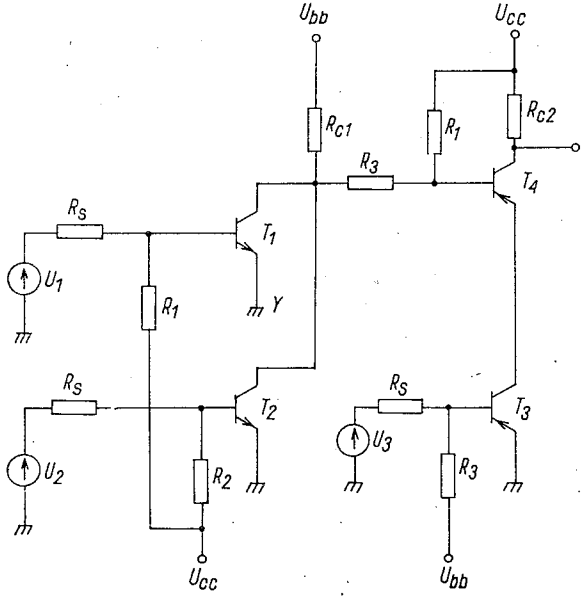
Twierdzenie 8

Niech obwód pokazany na rys. 23a będzie opisany równaniem $\mathbf{Mf}(\mathbf{u}) + \mathbf{Nu} = \mathbf{c}$ oraz niech równania poszczególnych podobwodów z rys. 23b będą następujące: $\mathbf{M}_a\mathbf{f}_a(\mathbf{u}_a) + \mathbf{N}_a\mathbf{u}_a = \mathbf{c}_a$, $\mathbf{M}_b\mathbf{f}_b(\mathbf{u}_b) + \mathbf{N}_b\mathbf{u}_b = \mathbf{c}_b$. Jeżeli $(\mathbf{M}_a, \mathbf{N}_a) \in \mathscr{W}_0$ oraz $(\mathbf{M}_b, \mathbf{N}_b) \in \mathscr{W}_0$ dla wszystkich dodatnich wartości rezystancji R[3], to $(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \in \mathscr{W}_0$.

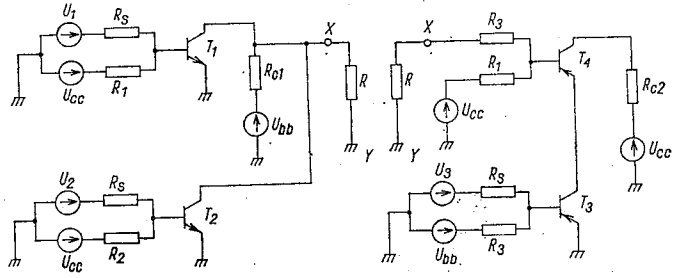
[3] Warunek ten może być zastąpiony następującym: dla $R = 0$ i $R = \infty$.



Rys. 23. Dekompozycja obwodu na dwa podobwody



Rys. 24. Obwód przykładowy



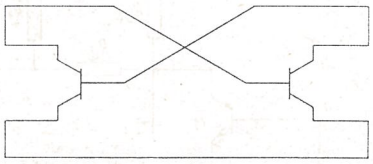
Rys. 25. Podobwody utworzone z obwodu z rys. 24

Przykład

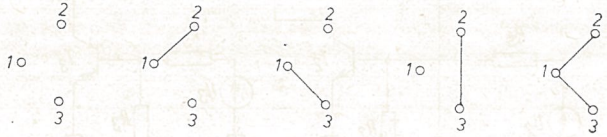
Na rys. 24 przedstawiono obwód tranzystorowy z zaznaczonymi punktami x i y wskazującymi sposób podziału. Ponieważ każdy z podobwodów (rys. 25) ma strukturę z rys. 22, więc na podstawie twierdzenia 8: $(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \in \mathscr{W}_0$. Oznacza to, że obwód z rys. 24 ma co najwyżej jedno rozwiązanie, jeżeli w modelu tranzystorów użyto nieliniowości typu wykładniczego lub jedno rozwiązanie jeżeli wprowadzono nieliniowości skorygowane.

W rozpatrywanym obwodzie twierdzenie 8 okazało się wyjątkowo efektywne. Twierdzenie to jest również bardzo pomocne w przypadku, gdy poszczególne podobwody nie mają postaci struktury z rys. 22, bowiem nakład pracy związany z oddzielną analizą dwóch podobwodów jest znacznie mniejszy niż przy analizie pełnego obwodu.

Ważne rezultaty dotyczące topologii obwodów tranzystorowych o wielu rozwiązaniach przedstawili Nielsen i Willson w kolejnej pracy [18]. Zdefiniowano tam *„strukturę ze sprzężeniem zwrotnym"* pokazaną na rys. 26. Pojawienie się takiej struktury w wyniku zwarcia źródeł napięciowych, usunięcia źródeł prądowych, zwarcia lub rozwarcia oporników oraz zastąpienia wszystkich tranzystorów, poza wybranymi dwoma, przez struktury z rys. 27 ma decydujący wpływ na rozwiązalność obwodu. Precyzuje to kolejne twierdzenie.



Rys. 26. Struktura ze sprzężeniem zwrotnym



Rys. 27. Struktury zastępujące tranzystory

Twierdzenie 9

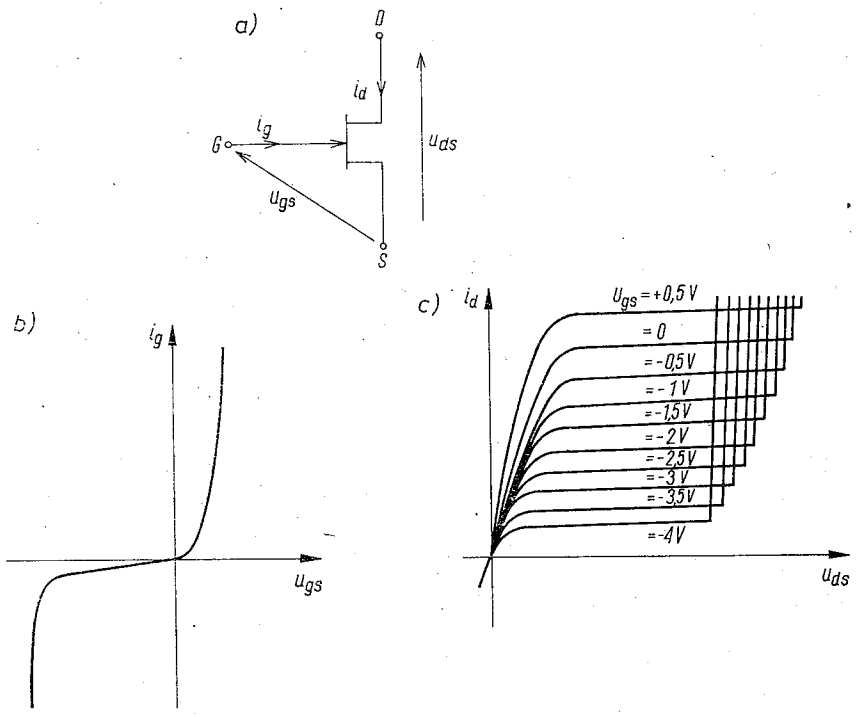
Niech $\mathbf{Mf(u)+Nu=c}$ będzie równaniem obwodu tranzystorowego. Wówczas $(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \in \mathscr{W}_0$ dla dowolnych (dodatnich) wartości rezystancji oporników i dowolnych wartości parametrów tranzystorów ($0 < \alpha_f, \alpha_r < 1$) wtedy i tylko wtedy, kiedy w obwodzie nie występuje *„struktura ze sprzężeniem zwrotnym"*.

U w a g a

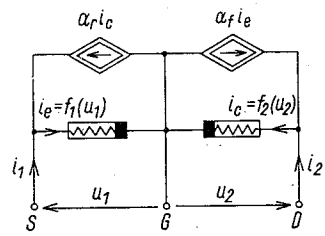
Tranzystory tworzące układ z rys. 26 mogą być różnych typów (*p-n-p*, *n-p-n*) o różnym usytuowaniu zacisków emiterowych i kolektorowych.

Wynika stąd, że jeżeli w obwodzie nie występuje żadna *„struktura ze sprzężeniem zwrotnym"*, to obwód ma co najwyżej jedno rozwiązanie. W przypadku, gdy taka struktura występuje $(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \notin \mathscr{W}_0$ dla pewnych wartości parametrów. Rozstrzygnięcie, czy dla danych parametrów zachodzi $(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \in \mathscr{W}_0$ wymaga przeprowadzenia dodatkowej analizy omówionej poprzednio. Twierdzenie 9 pozwala ponadto wnioskować, że w każdym obwodzie mającym więcej niż jedno rozwiązanie występuje *„struktura ze sprzężeniem zwrotnym"*.

Sformułowane wyżej rezultaty topologiczne dotyczące obwodów z tranzystorami bipolarnymi mogą być bezpośrednio przeniesione na klasę obwodów zawierających tranzystory FET o typowych charakterystykach przedstawionych na rys. 28. Przy ustaleniu tego faktu istotną rolę odgrywa sformułowane niżej twierdzenie [19].



Rys. 28. Typowe charakterystyki tranzystora FET z kanałem typu *n*



Rys. 29. Układ rozpatrywany w twierdzeniu 10

Twierdzenie 10

Dla dowolnie wybranych dwóch punktów pracy tranzystora FET można utworzyć obwód przedstawiony na rys. 29 o tych samych punktach pracy. W obwodzie tym f_1 i f_2 są funkcjami ściśle monotonicznie rosnącymi odwzorowującymi oś liczb rzeczywistych na siebie oraz jeden z parametrów α_f, α_r należy do przedziału (0, 1), a drugi do przedziału (0, 1].

Należy podkreślić, że układ z rys. 29 nie jest traktowany jako wielkosygnałowy model tranzystora FET lecz jedynie jako obwód, który może przyjmować dowolną parę punktów pracy występujących w tranzystorze FET. Możliwość zastosowania wcześniejszych wyników dotyczących tranzystorów bipolarnych do układów z tranzystorami FET, wynika stąd, że obwód z rys. 29 ma wszystkie jakościowe właściwości modelu Ebersa-Molla wykorzystywane w dowodzeniu przedstawionych wyżej twierdzeń topologicznych.

Omawiane zagadnienie jest szczegółowo przedstawione w pracy [19]. Przytoczone w wykazie literatury prace [20—28] stanowią uzupełnienie problematyki omawianej w niniejszym artykule.

4. UWAGI KOŃCOWE

Analiza nieliniowych obwodów rezystancyjnych odgrywa ważną, fundamentalną rolę w ogólnej teorii obwodów. Postęp technologiczny oraz szerokie zastosowanie komputerów do projektowania układów elektronicznych były czynnikami stymulującymi postęp w tej dziedzinie. Najważniejszym problemem teorii nieliniowych obwodów rezystancyjnych jest istnienie i jednoznaczność rozwiązania. Badania w tym zakresie mają duże znaczenie poznawcze pozwalając głębiej zrozumieć naturę obwodów nieliniowych. Z drugiej strony otrzymane rezultaty ściśle wiąża się z potrzebami symulacji komputerowej. Szereg idei dotyczących rozwiązalności przyczyniło się do rozwoju teorii obwodów nieliniowych i matematyki stosowanej. Na szczególną uwagę zasługują te wyniki, które są formułowane w kategoriach topologicznych. Do ważnych osiągnięć można zaliczyć głęboką i spójną teorię obwodów diodowo-tranzystorowych.

LITERATURA

1. A. N. Willson: *Some Aspects of the Theory of Nonlinear Networks.* Proc. IEEE, vol. 61, August 1973
2. E. S. Kuh, I. N. Hajj: *Nonlinear Circuit Theory: Resistive Networks.* Proc. IEEE, vol. 59, March 1971
3. L. O. Chua: *Nonlinear Circuits,* IEEE Trans. CAS, vol. CAS-31, January 1984
4. R. J. Duffin: *Nonlinear Networks.* II a., Bull. Americ. Math. Soc., vol. 53, October 1947
5. I. W. Sandberg, A. N. Willson: *Existence and Uniqueness of Solutions for the Equations of Nonlinear DC Networks,* SIAM J. Appl. Math., vol. 22, March 1972
6. C. Desoer and J. Katzenelson: *Nonlinear RLC Networks.* Bell Syst. Tech. J., vol. 44, January 1965
7. C. A. Desoer, F. F. Wu: *Nonlinear Monotone Networks,* SIAM J. Appl. Math., vol. 47, March 1974
8. M. Tadeusiewicz: *The Solvability and Monotonical Properties of a Certain Class of D. C. Non-Linear Networks.* Int. J. Cir. Theor. Appl. vol. 12, 1984
9. T. Nishi, L. O. Chua: *Topological Criteria for Nonlinear Resistive Circuits Containing Controlled Sources to have a Unique Solution.* IEEE Trans. CAS, vol. CAS-31, August 1984
10. T. Nishi, L. O. Chua: *Non-Linear Op-Amp Circuits: Existence and Uniqueness of Solution by Inspection.* Int. J. Cir. Tehor. Appl., vol. 12, April 1984
11. I. W. Sandberg, A. N. Willson: *Some Theorems on Properties of DC Equations of Nonlinear Networks.* Bell Syst. Tech. J., vol. 48, January 1969
12. I. W. Sandberg, A. N. Willson: *Some Network-Theoretic Properties of Nonlinear DC Transistor Networks.* Bell Syst. Tech. J., vol. 48, May/June 1969
13. I. W. Sandberg: *Theorems on the Analysis of Nonlinear Transistor Networks.* Bell Syst. Tech. J., vol. 49, January 1970
14. I. W. Sandberg: *Conditions for the Existence of a Global Inverse of Semiconductor-Device Nonlinear-Network Operators.* IEEE Trans. CT, vol. CT-19, January 1972

15. T. Roska, J. Klimò: *On the Solvability of DC Equations and the Implicit Integration Formula.* Int. J. Cir. Theor. Appl., vol. 1, 1973
16. A. N. Willson: *New Theorems on the Equations of Nonlinear DC Transistor Networks.* Bell Syst. Tech. J., vol. 49, October 1970
17. R. O. Nielsen, A. N. Willson: *Topological Criteria for Establishing the Uniqueness of Solutions of the DC Equations of Transistor Networks.* IEEE Trans. CAS, vol. CAS-24, July 1977
18. R. O. Nielsen, A. N. Willson: *A Fundamental Result Concerning the Topology of Transistor Circuits with Multiple Equilibria.* Proc. IEEE, vol. 68, February 1980
19. A. N. Willson: *On the topology of FET Circuits and the Uniqueness of Their DC Operating Points.* IEEE Trans. CAS, CAS-27, November 1980
20. I. W. Sandberg: *Necessary and Sufficient Conditions for the Global Invertibility of Certain Nonlinear Operators that Arise in the Analysis of Networks.* IEEE Trans. on CT, vol. CT-18, March 1971
21. I. W. Sandberg, A. N. Willson: *Existence of Solutions for the Equations of Transistor-Resistor-Voltage Source Networks.* IEEE Trans. CT, vol. CT-18, November 1971
22. T. Fujisawa, E. S. Kuh: *Some Results on Existence and Uniqueness of Solutions of Nonlinear Networks.* IEEE Trans. CT, vol. CT-18, Sepetmber 1971
23. F. F. Wu, C. A. Desoer: *Global Inverse Function Theorem.* IEEE Trans. CT, vol. CT-19, March 1972
24. L. O. Chua, N. N. Wang: *On the Application of Degree Theory to the Analysis of Resistive Nonlinear Networks.* Int. J. Cir. Theor. Appl., 1977 vol. 5
25. M. Tadeusiewicz: *On the Solvability and Computation of DC Transistor Networks,* Int. J. Cir. Theor. Appl., 1981 vol. 9
26. L. O. Chua, P. M. Lin: *Komputerowa analiza układów elektronicznych.* Warszawa: WNT 1981
27. J. Kudrewicz: *Analiza funkcjonalna dla automatyków i elektroników.* Warszawa: PWN, 1976
28. M. Tadeusiewicz: *Podstawowe problemy analizy nieliniowych obwodów rezystancyjnych.* Mat. VIII KKO i UE, Poznań 15—18.X.1985

M. TADEUSIEWICZ

THE SOLVABILITY OF D. C. NON-LINEAR NETWORKS

Summary

The paper presents a review of certain fundamental results of the theory of non-linear resistive networks. Specifically, the problem of the existence and the uniqueness of the solution is discussed. Several theorems relating to this problem are presented using the key concepts of a P_0 matrix and $\mathscr{W}_0$ pairs of matrices. Topological criteria for circuits to have a unique solution are also formulated and some theoretic implications pertaining to the networks are considered. Special attention has been devoted to a class of d.c. networks consisting of transistors, diodes, linear positive resistors and independent sources.

M. TADEUSIEWICZ

PROBLÈME DE LA RÉSOLUTION DES CIRCUITS NON-LINÉAIRES À RÉSISTANCES

Résumé

L'article a un caractère de revue qui touche la résolution des problèmes fondamentaux des circuits non-linéaires à résistances. On a présenté les résultats en matière de l'existence et de l'univocité de solu-

tions. Afin d'obtenir ces résultats, on a exploité les conceptions principales des classes des matrices P_0 ainsi que les paires des matrices $\mathscr{W}_0$. On a montré quelques critères topologiques généraux des résolutions et on a indiqué leur utilité. La grande partie de l'article est consacrée à des circuits à transistors.

M. TADEUSIEWICZ

PROBLEM DER LÖSBARKEIT VON NICHTLINEAREN RESISTANZSCHALTUNGEN

Zusammenfassung

Der Aufsatz gibt einen Überblick über das grundsätzliche Problem der Lösbarkeit von nichtlinearen Resistenzschaltungen. Es werden wichtige Ergebnisse im Bereich sowohl der Existenz, als auch der Eindeutigkeit von Lösungen dargestellt unter Nutzung der für die erwogenen Probleme Auffassung von Matrixklassen P_0 und Matrixpaaren $\mathscr{W}_0$. Viele allgemeine topologische Kriterien der Lösbarkeit werden behandelt, und es wird auf ihre große Anwendbarkeit hingewiesen. Der größte Teil der Bearbeitung ist den in der Praxis sehr populären Transistorschaltungen gewidmet. Der hier dargestellte Fragenkomplex hat eine sehr große Erkennt-nisbedeutung, und ist mit den Bedürfnissen der Computersimulation eng verbunden.

М. ТАДЕУСЕВИЧ

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

Резюме

Представлен обзор достижений относящихся к качественному анализу нелинейных резистивных цепей. Обстоятельно рассматривается проблема существования и единственности решения. Представлено несколько теорем касающихся разрешимости и использованием основных концепций P_0 матриц и $\mathscr{W}_0$ пар матриц. Приведены топологические критерии существования не больше чем одного решения и рассмотрена их теоретическая пригодность. Особое внимание посвящено классу цепей составленных из транзисторов, диод, линейных положительных резисторов и независимых источников тока и напряжения.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1987, 33, z. 1, ss. 49–53

539.215.9:621.3.011.2

O przewodności właściwej substancji ziarnistej

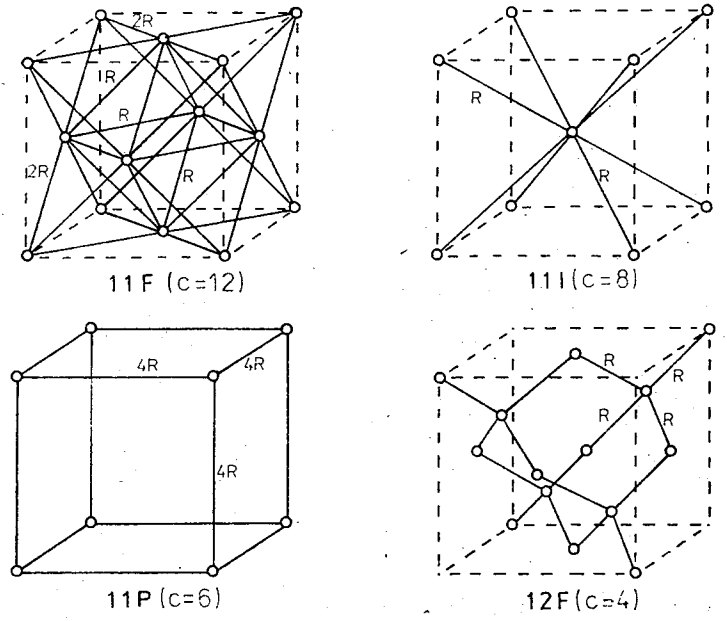
HENRYK GIERASIMOWICZ (WARSZAWA)

Instytut Podstaw Elektroniki, Politechnika Warszawska

Otrzymano 1985.11.08

Wykorzystując zamieszczone w artykule obliczenia przewodności właściwej struktur uporządkowanych, tworzących przestrzenne sieci Bravais'go, podjęto próbę określenia wpływu promienia złącza ziaren i średniej liczby koordynacyjnej na przewodność właściwą substancji ziarnistej złożonej z kulistych ziaren zbliżonych średnic.

W wielu przypadkach substancja ziarnista może być traktowana jako nieuporządkowana struktura przestrzenna złożona ze stykających się ze sobą kulistych ziaren. Szeregu wiadomości o właściwościach elektrycznych takich substancji mogą dostarczyć modele wyidealizowane, mające postać układów przestrzennych złożonych z identycznych, stykających się ze sobą ziaren kulistych, tworzących izotropowe sieci Bravais'go. Komórki sieciowe rozpatrzonych sieci Bravais'go o różnych liczbach koordynacyjnych c przedstawiono na rys. 1, zaznaczając punktami środki ziaren kulistych.



Rys. 1. Sieci rezystancyjne równoważne komórkom sieciowym sieci Bravais'go

Aby móc określić przewodność właściwą struktury opisanej powyższymi modelami należy przyjąć określony model złącza ziaren, gdyż w przeciwnym przypadku zerowe powierzchnie kontaktu między stykającymi się idealnymi ziarnami kulistymi sprawiłyby, że przewodność właściwa struktury byłaby zawsze równa zeru.

Zakładając określony model złącza ziaren i wyznaczając jego rezystancję, można zastąpić model kulowy substancji przez równoważny mu sieciowy model rezystancyjny. Uzyskuje się to umieszczając węzły sieci w środkach kulistych ziaren i przyjmując liczbę gałęzi wychodzących z każdego węzła równą liczbie koordynacyjnej c danej sieci. Wyznaczenie wartości rezystancji gałęziowych R, jednakowych w obrębie danej sieci, znacznie się upraszcza w przypadku, gdy przewodność właściwa materiału stykających się ziaren jest znacznie większa od przewodności właściwej materiału złącza, gdyż wówczas rezystancja gałęziowa R jest praktycznie równa rezystancji złącza [1].

Jeżeli struktura przestrzenna składa się z kul o promieniu a i przewodności właściwej σ, tworzących sieci Bravais'go o krawędzi komórki sieciowej równej l, to przewodność właściwa σ_m struktury może być wyrażona z zależności

$$\sigma_m = \frac{1}{R_z \cdot l} \tag{1}$$

gdzie R_z jest rezystancją zastępczą sieci rezystancyjnej, równoważnej komórce sieciowej.

Dla poszczególnych sieci przestrzennych przedstawionych na rys. 1 otrzymuje się:

a) dla sieci sześciennej o strukturze diamentu 12F

$$l = \frac{8a}{\sqrt{3}}, \quad R_z = R, \quad \sigma_m = \frac{\sqrt{3}}{8aR}, \tag{2}$$

b) dla sieci sześciennej prostej 11P

$$l = 2a, \quad R_z = R, \quad \sigma_m = \frac{1}{2aR}, \tag{3}$$

c) dla sieci sześciennej wewnętrznie centrowanej 11I

$$l = \frac{4a}{\sqrt{3}}, \quad R_z = \frac{R}{2}, \quad \sigma_m = \frac{\sqrt{3}}{2aR}, \tag{4}$$

d) dla sieci sześciennej powierzchniowo centrowanej 11F

$$l = 2\sqrt{2}\, a, \quad R_z = \frac{R}{2}, \quad \sigma_m = \frac{\sqrt{2}}{aR}. \tag{5}$$

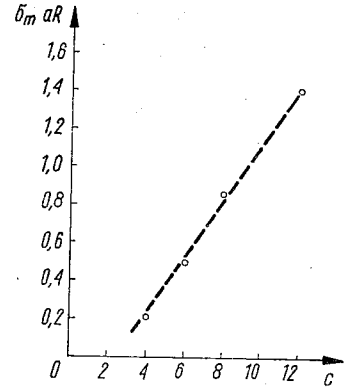
Zależność przewodności właściwej σ_m struktury uporządkowanej od liczby koordynacyjnej c danej sieci przedstawiono na rys. 2.

W rozpatrzonych modelach substancji ziarnistej, mających postać sieci Bravais'go, wszystkie rezystancje gałęziowe R były sobie równe i nie zależały od struktury przestrzennej. Stwierdzenie to pozostaje słuszne również dla modeli w postaci struktur nieuporządkowanych złożonych z identycznych ziaren kulistych połączonych ze sobą poprzez jednakowe złącza.

W rzeczywistych substancjach ziarnistych złożonych z kulistych ziaren o zbliżonych średnicach należy dodatkwó liczyć się z tym, że:

— lokalna wartość liczby koordynacyjnej c może znacznie odbiegać od średniej wartości tej liczby $\bar{c}$,

— promienie złączy poszczególnych ziaren różnią się między sobą.



Rys. 2. Zależność przewodności właściwej struktury od liczby koordynacyjnej

Wpływ zmienności powyższych czynników na wartość przewodności właściwej σ_m substancji ziarnistej można uwzględnić na drodze następującego rozumowania. Z rys. 2 wynika, że dla struktur uporządkowanych, charakteryzujących się tym, że lokalna wartość liczby koordynacyjnej c jest równa wartości średniej $\bar{c}$ tej liczby, wyniki obliczeń przewodności właściwej układają się w przybliżeniu wzdłuż linii prostej opisanej równaniem

$$\sigma_m aR = p_1 \bar{c} + q_1 \tag{6}$$

gdzie $p_1 = 0{,}1511$, $q_1 = 0{,}3841$

W rzeczywistej substancji ziarnistej o identycznych ziarnach kulistych występują mniejsze lub większe skupiska ziaren tworzące uporządkowane sieci Bravais'go. Można więc domniemywać, że i dla takiej rzeczywistej substancji przewodność właściwa będzie także liniową funkcją średniej liczby koordynacyjnej $\bar{c}$, opisaną wyrażeniem (6).

Z kolei jak wykazano w [1], w szerokim zakresie zmienności stosunku x promienia złącza r do promienia a kulistych ziaren, przewodność G złącza może być uważana za liniową funkcję parametru x.

$$G = na\sigma x \tag{7}$$

gdzie n jest współczynnikiem proporcjonalności o wartości zależnej od przyjętego modelu złącza ziaren. Wobec tego równanie (6) przyjmie postać

$$\frac{\sigma_m a}{na\sigma x} = p_1 c + q_1, \tag{8}$$

którą po przekształceniach można zapisać jako

$$\sigma_0 = pcx + qx \tag{9}$$

gdzie $p = p_1 n$, $q = q_1 n$ a $\sigma_0 = \sigma_m/\sigma$ jest względną przewodnością właściwą substancji.

Jeżeli potraktuje się x i c jako zmienne losowe niezależne, mające rozkłady prawdopodobieństwa o gęstościach wynoszących odpowiednio $f_1(x)$ i $f_2(c)$ przy czym

$$x \in \langle x_1, x_2 \rangle, \quad x_1, x_2 \in (0, 1)$$
$$c \in \langle c_1, c_2 \rangle, \quad c_1, c_2 \in \langle 2, 12 \rangle$$

to można wówczas wyznaczyć gęstość rozkładu prawdopodobieństwa $g(\sigma_0)$ zmiennej losowej σ_0. Ponieważ z zależności (9) wynika, że

$$c = \frac{\sigma_0 - qx}{px} \tag{10}$$

wobec tego [2]

$$g(\sigma_0) = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x) \cdot f_2\left(\frac{\sigma_0 - qx}{px}\right) |J| \, dx \tag{11}$$

gdzie

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial \sigma_0} \\ \frac{\partial c}{\partial x} & \frac{\partial c}{\partial \sigma_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\sigma_0}{px^2} & \frac{1}{px} \end{vmatrix} = \frac{1}{|px|}. \tag{12}$$

Doboru funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych losowych x i c oraz ich wartości oczekiwanych $E(x)$ i $E(c)$ należy dokonywać z uwzględnieniem rodzaju substancji ziarnistej i ewentualnie procesu jej wytwarzania. I tak np. dla substancji ziarnistych sypkich $E(c)$ powinno mieć wartość zbliżoną do 6, gdyż potwierdzone eksperymentem rozważania analityczne [3] wykazały, że dla przestrzennej struktury nieuporządkowanej, złożonej z identycznych ziaren kulistych, należy przyjmować średnią wartość liczby koordynacyjnej $\bar{c} = 6{,}16$. Z kolei dla substancji powstałych np. w procesie spiekania kulistych ziaren $E(c)$ powinno należeć do górnego zakresu przedziału $\langle 2, 12 \rangle$.

Rodzaj procesu technologicznego, towarzyszącego powstawaniu substancji ziarnistej oraz stopień odkształcenia kulistych ziaren powinny być także brane pod uwagę przy doborze funkcji gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej x i jej wartości oczekiwanej $E(x)$.

Jeżeli zmienne losowe x i c są niezależne, to wówczas wartość oczekiwana $E(\sigma_0)$ spełnia warunek

$$E(\sigma_0) = pE(c) \cdot E(x) + qE(x). \tag{13}$$

Pozwala to przewidywać możliwość wyznaczenia na drodze doświadczalnej najbardziej prawdopodobnej wartości x, a tym samym i promienia złącza ziaren, o ile tylko znana będzie najbardziej prawdopodobna wartość liczby koordynacyjnej dla zadanej substancji ziarnistej. Należy jednak zaznaczyć, że sprawdzenie powyższej hipotezy będzie wymagało licznych pomiarów wykonanych dla ściśle określonych substancji ziarnistych.

LITERATURA

1. H. Gierasimowicz: *Porównanie elektrycznych właściwości modeli złączy ziaren substancji ziarnistych.* Rozprawy Elektrotechniczne 1987, t. 33, nr 1

2. T. Gerstenkorn, T. Śródka: *Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa.* Warszawa: PWN, 1976
3. R. Ben Aim, P. Le Goff: *La Coordinance des Empilements Désordonnés de Sphéres. Application aux Mélanges Binaires de Sphéres.* Powder Technology 1968/69, nr 2

H. GIERASIMOWICZ

ON CONDUCTIVITY OF GRANULAR SUBSTANCES

Summary

The article discusses the effect of the grain junction radius and the mean coordination number on conductivity of granular substance composed of nearly identical spherical grains. This effect is assessed with the help of a calculation of conductivity of ordered structures which form spatial Bravais lattices.

H. GIERASIMOWICZ

SUR LA CONDUCTIVITÉ DES SUBSTANCES GRANULAIRES

Résumé

Dans cet article nous avons présenté les calculs de la conductivité des structures ordonnées, qui forment des réseaux spatiaux de Bravais. A partir de ces calculs nous anons essayé de déterminer l'effet de rayon de jonction des grains et de la valeur moyenne du nombre de coordination sur la conductivité d'une substance granulaire composée de grains sphériques aux diamètres pareils.

H. GIERASIMOWICZ

ÜBER DIE SPEZIFISCHE LEITFÄHIGKEIT KÖRNIGER SUBSTANZEN

Zusammenfassung

Unter Benutzung der in dem virliegenden Artikel durchgeführten Berechnungen der spezifischen Leitfähigkeit geordneter Strukturen, die räumliche Bravois-Gitter bilden, wurde der Versuch unternommen, den Einfluss des Radius der Berührungsstelle und der mittleren Koordinationszahl auf die spezifische Leitfähigkeit körniger Substanzen zu beschreiben, die sich aus kugelförmigen Körnern von vergleichbaren Durchmessen zusammengesetzen.

Х. ГЕРАСИМОВИЧ

ОБ УДЕЛЬНОЙ ПРОВОДИМОСТИ ЗЕРНИСТОГО ВЕЩЕСТВА

Резюме

Пользуясь приведенными вычислениями удельной проводимости упорядоченных структур, составляющих пространственные сетки, предпринята попытка определения влияния радиуса контакта зёрен и среднего координационного числа на удельную проводимость зернистого вещества, составленного из шарообразных зёрен сравниваемых диаметров.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1987, 33, z. 1, ss. 55-70

621.315.612:539.215.9

Porównanie elektrycznych właściwości modeli złączy ziaren substancji ziarnistych

HENRYK GIERASIMOWICZ (WARSZAWA)

Instytut Podstaw Elektroniki, Politechnika Warszawska

Otrzymano 1985.12.10

Złącza ziaren substancji ziarnistych mają różną postać i różne właściwości elektryczne. W artykule dokonano przeglądu modeli złączy znanych zarówno z literatury jak i opracowanych przez autora. Określono czynniki decydujące o przewodności styku ziaren i sformułowano wnioski dotyczące przydatności i dziedziny zastosowania poszczególnych modeli.

Wypadkowe właściwości elektryczne materiałów ziarnistych takich jak proszki, materiały granulowane, ceramiczne materiały polikrystaliczne, itp. zależą nie tylko od struktury materiału (granulacji, porowatości, własności i udziału składników), ale są także silnie uzależnione od właściwości elektrycznych i wymiarów styków ziaren. Złącza ziaren mogą mieć różną postać, a ich właściwości elektryczne mogą być zarówno zbliżone do właściwości stykających się cząstek, jak też mogą się od nich znacznie różnić. Z tego też względu analiza właściwości styków ziaren może mieć istotne znaczenie dla rozwoju technologii matriałów ziarnistych.

1. PORÓWNANIE ELEKTRYCZNYCH WŁAŚCIWOŚCI MODELI STYKÓW PUNKTOWYCH [1]

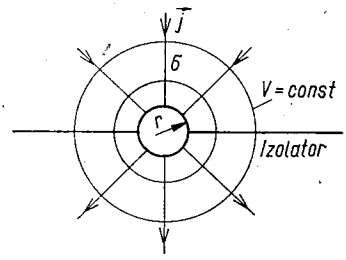
Gdy wymiary złączy są znacznie mniejsze od wymiarów stykających się cząstek, złącza ziaren mogą być opisywane za pomocą modeli styków punktowych, spośród których na szczególną uwagę zasługują modele punktowe podane przez Holma i Vandamme'a.

Styk punktowy według uproszczonej teorii Holma stanowią dwie odizolowane od siebie półprzestrzenie, wypełnione materiałem o przewodności właściwej σ, stykające się ze sobą jedynie poprzez doskonale przewodzącą kulę o promieniu r (rys. 1).

Linie gęstości prądu są tworzącymi rodziny stożków o wspólnym wierzchołku w środku wspomnianej kuli, a powierzchniami ekwipotencjalnymi jest rodzina współśrodkowych

powierzchni kulistych. Rezystancja R styku punktowego jest rozumiana jako suma rezystancji dwóch jego połówek (dwóch półprzestrzeni) i może być określana z zależności

$$R = 2\int_{r}^{\infty} \frac{dx}{2\pi x^2 \sigma}$$

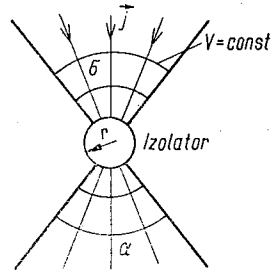


Rys. 1. Styk punktowy według uproszczonej teorii Holma

co oznacza, że rezystancja R i przewodność G styku punktowego wynoszą

$$R = \frac{1}{\pi\sigma r}, \qquad G = \pi\sigma r. \tag{1}$$

Uogólnieniem przedstawionego powyżej modelu jest zaproponowany przez Vandemme'a model styku punktowego ze stożkową powierzchnią graniczną (rys. 2). Dwa obszary o przewodności właściwej σ zawarte wewnątrz stożków o kącie rozwarcia α są połączone ze sobą poprzez doskonale przewodzącą kulę o promieniu r. Linie gęstości prądu i po-



Rys. 2. Styk punktowy Vandame'a ze stożkową powierzchnią graniczną

wierzchnie ekwipotencjalne są takie same jak dla modelu styku według uproszczonej teorii Holma. Rezystancja R styku i jego przewodność G wynoszą teraz

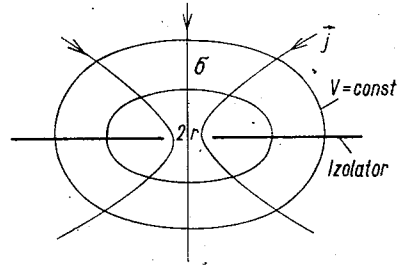
$$R = \frac{1}{\pi\sigma r(1-\cos\alpha/2)}, \qquad G = \pi\sigma r(1-\cos\alpha/2). \tag{2}$$

W zależności od wartości kąta α przewodność modelu styku może przyjmować wartości od zera dla $\alpha = 0$ do $\pi\sigma r$ dla $\alpha = \pi$.

W modelu styku punktowego według uściślonej teorii Holma (rys. 3), dwie odizolowane od siebie półprzestrzenie, wypełnione materiałem o przewodności właściwej σ są połączone

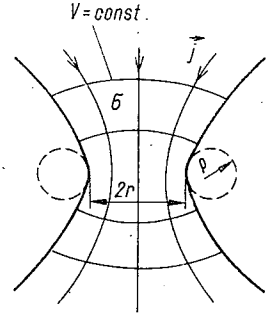
ze sobą jedynie poprzez powierzchnię kołową o promieniu r. W tym przypadku linie gęstości prądu leżą na hiperboloidach jednopowłokowych, a powierzchniami ekwipotencjalnymi jest rodzina elipsoid obrotowych, ortogonalnych do wspomnianych hiperboloid. Rezystancja R i przewodność G styku są określone wyrażeniami

$$R = \frac{1}{2\sigma r}, \qquad G = 2\sigma r. \tag{3}$$



Rys. 3. Styk punktowy według uściślonej teorii Holma

W rozpatrywanym modelu styku ostre końce powierzchni izolującej powodują, że w ich otoczeniu natężenie pola elektrycznego osiąga nieskończenie wielkie wartości, co w rzeczywistych substancjach ziarnistych nie znajduje fizycznego uzasadnienia. Niedogodności tej jest pozbawiony zaproponowany przez Vandamme'a model styku punktowego z hiperboloidalną graniczną powierzchnią izolującą (rys. 4), będący uogólnieniem mo-



Rys. 4. Styk punktowy Vandamme'a z hiperboloidalną powierzchnią graniczną

delu styku według uściślonej teorii Holma. Ograniczająca obszar styku jednopowłokowa hiperboloida graniczna, scharakteryzowana przez promień krzywizny p, pozwala na uniknięcie nieskończenie dużych wartości natężenia pola elektrycznego w obszarze styku.

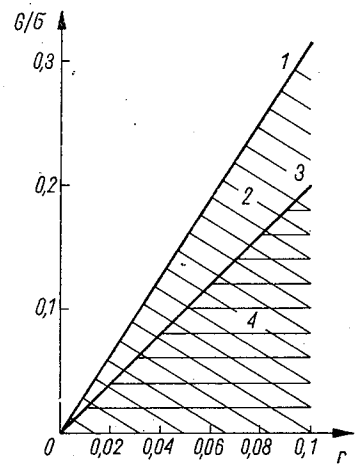
Linie gęstości prądu i powierzchnie ekwipotencjalne w rozpatrywanym modelu pozostają takie same jak w modelu styku według uściślonej teorii Holma.

Rezystancja R i przewodność G modelu styku wynoszą

$$R = \frac{1}{2\sigma r\left(\sqrt{1+\frac{p}{r}} - \sqrt{\frac{p}{r}}\right)}, \qquad G = 2\sigma r\left(\sqrt{1+\frac{p}{r}} - \sqrt{\frac{p}{r}}\right). \tag{4}$$

W zależności od wartości promienia krzywizny p przewodność modelu styku może przyjmować wartości od zera dla $p \to \infty$ do $2\sigma r$ dla $p = 0$.

Z analizy modeli styków punktowych wynika, że ich przewodność G jest liniową funkcją promienia styku r (rys. 5), przy czym największą wartość przewodności uzyskuje się stosując model według uproszczonej teorii Holma. Omówione modele styku punktowego nie uwzględniają kształtu i wymiarów stykających się ze sobą ziaren.



Rys. 5. Zależność przewodności styku od jego promienia
1 — styk z rys. 1, 2 — styk z rys. 2, 3 — styk z rys. 3, 4 — styk z rys. 4

2. MODELE ZŁĄCZY ZIAREN KULISTYCH

W wielu przypadkach dobrym modelem substancji ziarnistej może być struktura nieuporządkowana złożona ze stykających się ze sobą ziaren kulistych zarówno o identycznych jak i różnych średnicach. Ponieważ przewodność takiej struktury złożonej z kul idealnych pod względem kształtu, ze względu na zerowe powierzchnie styków między kulami, byłaby zawsze równa zeru, dlatego też zachodzi konieczność zaproponowania odpowiednich modeli złączy stykających się ze sobą ziaren.

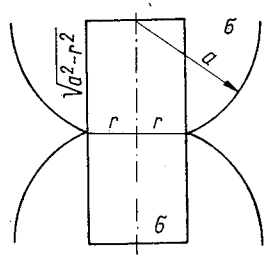
W rzeczywistych substancjach ziarnistych obszar przejściowy między ziarnami, czyli złącze ziaren, może być wytworzony działaniem siły ciężkości, co może mieć miejsce np. w substancjach sypkich, lub też przyczyną tworzenia się złącza mogą być różnego rodzaju procesy technologiczne jak np. spiekanie [2]. Dokładne określenie geometrii złącza ziaren wymaga z jednej strony dobrej znajomości zjawisk fizycznych towarzyszących danemu procesowi technologicznemu, a z drugiej strony napotyka na bardzo poważne trudności obliczeniowe, spowodowane głównie koniecznością uwzględnienia przemieszczania się masy w obszarze złącza. Tworzenie się złącza może zachodzić bez zmiany odległości między środkami ziaren lub też może powodować zmianę odległości między ich środkami, a parametry elektryczne powstałego złącza mogą być zbliżone lub też mogą się nawet zdecydowanie różnić od parametrów elektrycznych materiału ziaren.

Wymienione powyżej okoliczności powodują, że w praktyce zachodzi konieczność posługiwania się modelami złączy ziaren. Modeli tych musi być wiele, gdyż tylko jeden model nie jest w stanie uwzględnić różnorodnych zjawisk i sytuacji towarzyszących tworzeniu się złączy.

Właściwości elektryczne styku ziaren kulistych, rozumianego jako obszar między dwiema powierzchniami ekwipotencjalnymi przechodzącymi przez środki stykających się ziaren, będą w ogólnym przypadku zależały zarówno od właściwości elektrycznych złącza jak i od właściwości elektrycznych materiału ziaren. Mogą jednak mieć miejsce takie sytuacje, gdy właściwości elektryczne jednego z tych obszarów będą dominujące i wówczas o właściwościach elektrycznych styku ziaren będą decydowały bądź wyłącznie właściwości elektryczne złącza, bądź też materiału stykających się ziaren.

2.1. MODEL ZŁĄCZA W POSTACI RURKI PRĄDOWEJ

T. Ramanan i A. Chaklader [3] zaproponowali model złącza ziaren zakładając, że stykające się ze sobą kuliste ziarna ulegają deformacji w sposób pokazany na rys. 6.



Rys. 6. Model złącza ziaren w postaci rurki prądowej

Rezystancja styku dwóch identycznych ziaren kulistych o promieniu a i przewodności właściwej σ została potraktowana jako rezystancja rurki prądowej o przekroju poprzecznym πr^2 i długości $2\sqrt{a^2-r^2}$, co sprawia, że rezystancja styku R i jego przewodność G wynoszą

$$R = \frac{2\sqrt{a^2-r^2}}{\pi\sigma r^2}, \qquad G = \frac{\pi\sigma r^2}{2\sqrt{a^2-r^2}}. \tag{5}$$

Oznaczając $r/a = x$ otrzymuje się

$$R = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi\sigma a x^2}, \qquad G = \frac{\pi\sigma a x^2}{2\sqrt{1-x^2}}. \tag{6}$$

Niewątpliwą zaletą tego modelu jest jego prostota i łatwość określania przy jego użyciu przewodności struktur przestrzennych złożonych z identycznych ziaren kulistych i tworzących regularne sieci Bravais'go. Do mankamentów modelu, poza przybliżeniem wynikającym z zastąpienia kuli przez rurki (rurkę) prądowe, należą:

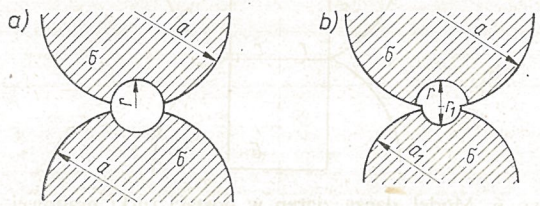
— niemożność adaptacji modelu do obliczania przewodności struktur przestrzennych złożonych z ziaren kulistych dwuwarstwowych o zróżnicowanych przewodnościach właściwych otoczki i jądra,

— nieprzystosowanie modelu do struktur przestrzennych złożonych z ziaren kulistych różnych średnic.

2.2. MODEL ZŁĄCZA ZIAREN WYKORZYSTUJĄCY ROZKŁAD POTENCJAŁU W KULI ZASILANEJ DWUPUNKTOWO

Wad modelu zaproponowanego w [3] nie posiada model złącza ziaren kulistych wykorzystujący rozkład potencjału w kuli zasilanej dwupunktowo symetrycznie lub osiowo-symetrycznie. Analiza przepływu prądu stałego przez tak zasilaną kulę [4, 5] wykazała, że powierzchnie ekwipotencjalne przechodzące w pobliżu punktów zasilania kuli mogą być z bardzo małym błędem uważane za powierzchnie kuliste ortogonalne do powierzchni rozpatrywanej kuli.

Przyjęto, że stykające się ze sobą ziarna kuliste o promieniu a i przewodności właściwej σ są połączone ze sobą przez złącze z doskonale przewodzącego materiału, przy czym powierzchnia ograniczająca złącze pokrywa się z powierzchniami ekwipotencjalnymi wyznaczonymi przy osiowo-symetrycznym zasilaniu kulistych ziaren. Wobec tego dla $r \ll a$ (rys. 7a) złącze ma kształt bardzo zbliżony do kuli o promieniu r i środku znajdującym się w teoretycznym punkcie styczności ziaren kulistych.



Rys. 7. Model złącza ziaren wykorzystujący rozkład potencjału w kuli zasilanej dwupunktowo

Rezystancja R styku ziaren wyznaczona przy wykorzystaniu znajomości rozkładu potencjału w kulistym ziarnie [4] wynosi

$$R = \frac{1}{\pi a \sigma}\left[\frac{2a(a-r)}{r(2a-r)} + \frac{1}{2}\ln\frac{2a-r}{r}\right]. \tag{7}$$

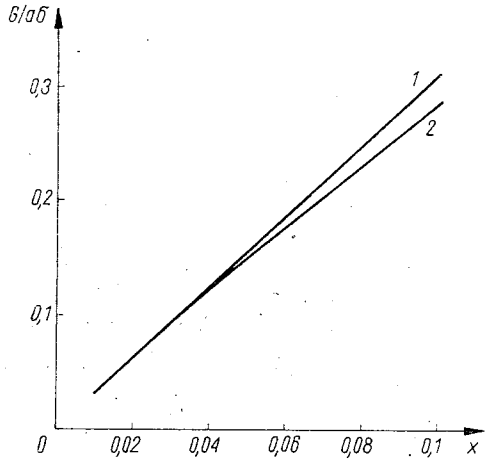
Oznaczając $r/a = x$ otrzymuje się

$$R = \frac{1}{\pi a \sigma}\left[\frac{2(1-x)}{x(2-x)} + \frac{1}{2}\ln\frac{2-x}{x}\right], \quad G = \frac{1}{R}. \tag{8}$$

W przypadku, gdy stykają się ze sobą kule różnych średnic założono, że złącze ma postać „grzybka" z doskonale przewodzącego materiału (rys. 7b), przy czym powierzchnia ograniczająca złącze również pokrywa się z powierzchniami ekwipotencjalnymi jakie uzyskuje się przy osiowo-symetrycznym zasilaniu kuli. Jeżeli $(a-r):(a_1-r_1) = a_1:a_2$ to wówczas rezystancja R i przewodność G styku wynoszą

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a_1}\right)\left[\frac{2(1-x)}{x(2-x)} + \frac{1}{2}\ln\frac{2-x}{x}\right], \quad G = \frac{1}{R}. \tag{9}$$

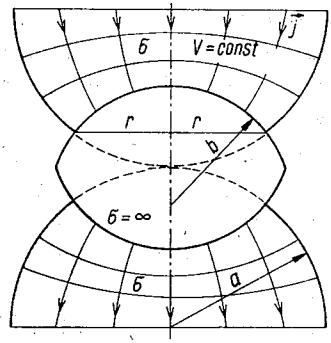
Zależność przewodności G styku ziaren kulistych jednakowych średnic od parametru x pokazano na rys. 8.



Rys. 8. Zależność $G = f(x)$
1 — złącze z rys. 9, 2 — złącze z rys. 7a

2.3. MODEL ZŁĄCZA ZIAREN WYKORZYSTUJĄCY PRZYBLIŻONY ROZKŁAD POTENCJAŁU W KULI ZASILANEJ DWUPUNKTOWO

W niektórych przypadkach, zwłaszcza wtedy, gdy wymiary złącza są małe w porównaniu ze średnicą stykających się identycznych ziaren kulistych, można posługiwać się modelem złącza wykorzystującym przybliżony rozkład potencjału w kuli zasilanej osiowosymetrycznie. W rozpatrywanym modelu zakłada się, że powierzchnie ekwipotencjalne w kuli zasilanej dwupunktowo osiowo-symetrycznie mają postać powierzchni kulistych ortogo-



Rys. 9. Model złącza ziaren wykorzystujący przybliżony rozkład potencjału w kuli zasilanej dwupunktowo

nalnych do powierzchni rozpatrywanej kuli. Złącze z doskonale przewodzącego materiału składa się z dwóch odcinków kulistych o promieniu r_1 (rys. 9), a powierzchnia ograniczająca złącze pokrywa się ze wspomnianymi wyżej powierzchniami ekwipotencjalnymi.

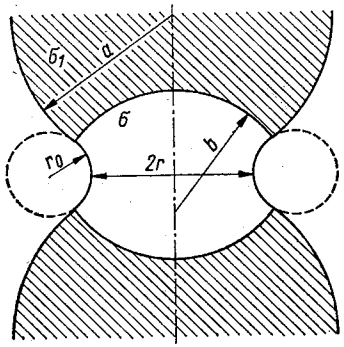
Korzystając z zależności podanych w [4] i przyjmując r za promień złącza otrzymuje się następujące wyrażenia opisujące rezystancję R i przewodność G styku ziaren

$$R = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi a \sigma x}, \qquad G = \frac{\pi a \sigma x}{\sqrt{1-x^2}} \tag{10}$$

gdzie $x = r/a$. Zależność przewodności G styku od parametru x pokazano na rys. 8.

2.4. MODEL ZŁĄCZA O TOROIDALNEJ I KULISTEJ POWIERZCHNIACH GRANICZNYCH

Niech dwa ziarna kuliste o promieniu a będą połączone ze sobą przez złącze ograniczone powierzchnią toroidu o promieniu przekroju r_0 i dwiema powierzchniami kulistymi o promieniu b ortogonalnymi do powierzchni ziaren, przy czym środek toroidu, środki krzywizn kulistych powierzchni ograniczających i środki stykających się ziaren leżą w jednej płaszczyźnie (rys. 10).



Rys. 10. Model złącza ziaren o toroidalnej i kulistych powierzchniach granicznych

Jeżeli przewodność właściwa σ_1 materiału ziaren jest znacznie większa niż przewodność właściwa σ materiału złącza, to można wówczas uważać, że powierzchnie kuliste o promieniu b są powierzchniami ekwipotencjalnymi i o rezystancji styku będzie decydowała wyłącznie rezystancja złącza.

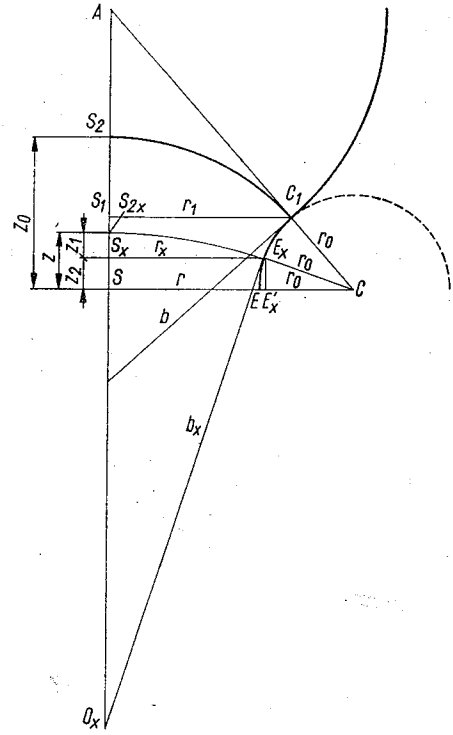
Analityczne wyznaczenie rozkładu potencjału w powyższym złączu i obliczenie jego rezystancji stwarza poważne kłopoty, dlatego też rezystancję złącza określono wykorzystując przybliżony kształt powierzchni ekwipotencjalnych. Założono mianowicie, że powierzchnie ekwipotencjalne wewnątrz złącza są rodziną powierzchni kulistych ortogonalnych do powierzchni toroidalnej. Elementarna rezystancja $\mathrm{d}R$ między dwiema sąsiednimi powierzchniami ekwipotencjalnymi odległymi od siebie o $\mathrm{d}z$ (rys. 11) wynosi

$$\mathrm{d}R = \frac{\mathrm{d}z}{\sigma s},$$

gdzie $s = 2\pi b_x z_1$ jest polem powierzchni czaszy kulistej o promieniu krzywizny b_x i wysokości z_1. Wówczas rezystancja złącza, a tym samym i rezystancja styku ziaren kulis-

tych będzie określona wyrażeniem

$$R = 2\int_0^{z_0} \frac{dz}{2\pi b_x z_1 \sigma} \tag{11}$$



Rys. 11. Rysunek pomocniczy do wyznaczenia przewodności złącza

Rozważania geometryczne przeprowadzone przy wykorzystaniu rys. 11 pozwalają na uzależnienie b_x, z_1 i z_0 od zmiennej z i wymiarów złącza. Otrzymuje się mianowicie

$$b_x = \frac{z^2+r^2+2rr_0}{2z}, \tag{12}$$

$$z_1 = \frac{z^2+r^2+2rr_0}{z^2+(2r_0+r)^2}, \tag{13}$$

$$z_0 = r, \tag{14}$$

gdzie r jest promieniem przekroju poprzecznego złącza. Wobec tego po uwzględnieniu zależności (11) i wykonaniu niezbędnych przekształceń otrzymuje się

$$R = \frac{2}{\pi\sigma}\int_0^r \frac{z^2+(2r_0+r)^2}{(z^2+r^2+2rr_0)^2}dz. \tag{15}$$

Rozwiązaniem powyższej całki jest

$$R = \frac{1}{\pi\sigma}\left[\frac{r_0}{r(r+r_0)} + \frac{2(r+r_0)}{r\sqrt{r(r+2r_0)}}\operatorname{arctg}\frac{r}{\varrho\sqrt{(r+2r_0)r}}\right] \tag{16}$$

Jeżeli uwzględni się, że

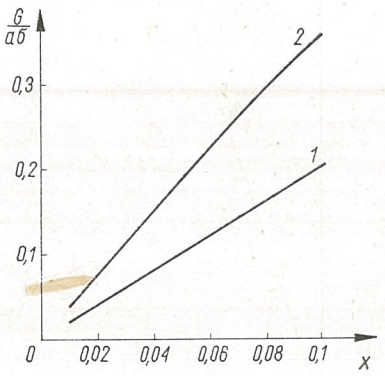
$$r_0 = \frac{r^2}{2(a-r)}, \quad \text{to wówczas} \tag{17}$$

$$R = \frac{1}{\pi\sigma a}\left[\frac{1}{2-x} + \frac{2-x}{x\sqrt{1-x}}\operatorname{arctg}(1-x)\right], \quad G = \frac{1}{R} \tag{18}$$

gdzie $x = r/a$. Jeżeli $x \ll 1$ to wówczas

$$G \approx 2\sigma a x \tag{19}$$

Zależność przewodności G styku od parametru x przedstawiono na rys. 12.



Rys. 12. Zależność $G = f(x)$
1 — złącze z rys. 10, 2 — złącze z rys. 13

2.5. MODEL ZŁĄCZA OGRANICZONY POWIERZCHNIĄ HIPERBOIDALNĄ I ELIPSOIDALNĄ

Niech dane będą dwa ziarna kuliste o promieniu a i przewodności właściwej σ_1 połączone ze sobą przez złącze o przewodności właściwej σ, ograniczone powierzchnią elipsoidy obrotowej ortogonalnej do powierzchni stykających się ziaren kulistych i powierzchnią hiperboloidy jednopowłokowej ortogonalnej do granicznej powierzchni elipsoidalnej (rys. 13).

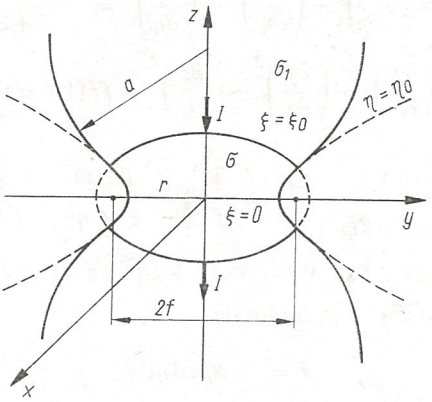
Jeżeli wprowadzi się układ współrzędnych sferoidy spłaszczonej ξ, η, φ to wówczas

$$\begin{aligned} x &= f\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)}\,\cos\varphi, \\ y &= f\sqrt{(1+\xi^2)(1-\eta^2)}\,\sin\varphi, \quad z = f\xi\eta, \end{aligned} \tag{20}$$

gdzie f jest wspólną ogniskową elipsoidy i hiperboloidy granicznej, opisanych równaniami $\xi = \xi_0$ i $\eta = \eta_0$.

Gdy przewodność właściwa σ_1 materiału ziaren jest znacznie większa od przewodności właściwej σ materiału złącza, to wówczas górna i dolna część powierzchni granicznej elip-

soidy stanowią powierzchnie ekwipotencjalne. W konsekwencji linie gęstości prądu przepływającego przez złącze będą leżały na rodzinie powierzchni hiperboloid jednopowłokowych ortogonalnych do elipsoidy granicznej, a powierzchniami ekwipotencjalnymi będą powierzchnie stanowiące część powierzchni elipsoid obrotowych o tej samej ogniskowej f.



Rys. 13. Model złącza ziaren ograniczony powierzchnią hiperboloidalną i elipsoidalną

Aby znaleźć rozkład potencjału we wnętrzu złącza, a następnie wyznaczyć jego rezystancję, a tym samym i rezystancję styku ziaren, należy rozwiązać równanie Laplace'a we współrzędnych sferoidy spłaszczonej. W rozpatrywanym przypadku potencjał V zależy jedynie od ξ, wobec czego równanie Laplace'a upraszcza się do postaci

$$\frac{d^2V}{d\xi^2} + \frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} \frac{dV}{d\xi} = 0, \tag{21}$$

a jego ogólnym rozwiązaniem jest [7]

$$V = A + B\,\mathrm{arctg}\,\xi, \tag{22}$$

gdzie A i B są stałymi zależnymi od warunków brzegowych. Jeżeli przyjąć, że dla $\xi = 0$ $V = 0$ to wówczas $A = 0$ i rozwiązanie równania przyjmuje postać

$$V = B\,\mathrm{arctg}\,\xi \tag{23}$$

Stałą B można wyznaczyć zakładając, że natężenie prądu przepływającego przez złącze ziaren, a tym samym przepływającego przez dowolną powierzchnię ekwipotencjalną, wynosi I.
Ponieważ

$$I = \int_S j\,dS, \quad \text{a} \quad j = \sigma E_\xi, \tag{24}$$

gdzie S — pole powierzchni ekwipotencjalnej, E_ξ — składowa natężenia pola elektrycznego, ortogonalna do ξ,
wobec tego

$$I = \int_S \sigma E_\xi\,dS. \tag{25}$$

Wprowadzając współczynniki metryki układu współrzędnych sferoidy spłaszczonej g_{11},

g_{22} i g_{33}, gdzie

$$g_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 = \frac{f^2(\xi^2+\eta^2)}{1+\xi^2},$$

$$g_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2 = \frac{f^2(\xi^2+\eta^2)}{1+\xi^2}, \tag{26}$$

$$g_{33} = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = f^2(1+\xi^2)(1-\eta^2),$$

można zapisać

$$E_\xi = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{1+\xi^2}{\xi^2+\eta^2}}\cdot\frac{B}{1+\xi^2}, \tag{27}$$

$$\mathrm{d}S = \sqrt{g_{22}\cdot g_{33}}\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi = f^2\sqrt{(\eta^2+\xi^2)(1+\xi^2)}\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi. \tag{28}$$

Uwzględniając zależność (25) otrzymuje się

$$I = \int_S Bf\sigma\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\varphi. \tag{29}$$

Dla $\xi = 0$ powyższe wyrażenie przyjmuje postać

$$I = Bf\sigma\int_0^{2\pi}\int_{\eta_0}^{1}\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi Bf\sigma(1-\eta_0), \tag{30}$$

skąd

$$B = \frac{I}{2\pi f\sigma(1-\eta_0)}. \tag{31}$$

Wobec powyższego potencjał wewnątrz złącza ziaren będzie opisany zależnością

$$V = \frac{I\operatorname{arctg}\xi}{2\pi f\sigma(1-\eta_0)}, \tag{32}$$

a rezystancja R złącza może być określona z wyrażenia

$$R = 2\,\frac{V(\xi_0)-V(0)}{I} = \frac{\operatorname{arctg}\xi_0}{\pi\sigma f(1-\eta_0)}. \tag{33}$$

Wartości parametrów η_0, ξ_0 i f można uzależnić od wymiarów złącza ziaren. Jeżeli oznaczyć $x = r/a$ to wówczas

$$\eta_0 = x, \quad \xi_0 = \sqrt{1-x^2}, \quad f = \frac{ax}{\sqrt{1-x^2}} \tag{34}$$

co prowadzi do zależności

$$R = \frac{1}{\pi\sigma ax}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\operatorname{arctg}\sqrt{1-x^2}. \tag{35}$$

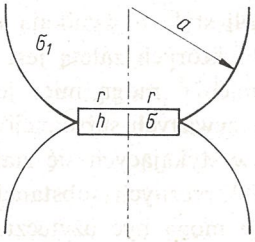
Gdy $x \ll 1$ to wówczas przewodność G złącza, a tym samym i przewodność styku ziaren wynosi

$$G \approx 4a\sigma x. \tag{36}$$

Zależność przewodności styku od parametru x przedstawiono na rys. 12.

2.6. MODEL ZŁĄCZA ZIAREN OGRANICZONY POWIERZCHNIĄ WALCOWĄ

Odmienny model złącza identycznych ziaren kulistych zaproponowali S. H. Chu i M. A. Seitz [6]. Na rezystancję R styku ziaren składa się rezystancja R_1 złącza o przewodności właściwej σ, mającego postać walca o promieniu r i wysokości h oraz rezystancja R_2 dwóch połówek kulistych ziaren o promieniu a i przewodności właściwej σ_1.



Rys. 14. Model złącza ziaren z walcową powierzchnią graniczną

Rezystancja R_2 została wyznaczona przy znacznym uproszczeniu dotyczącym kształtu powierzchni ekwipotencjalnych wewnątrz ziaren. Autorzy założyli, że powierzchnie ekwipotencjalne są płaszczyznami równoległymi do złącza ziaren (do podstawy walca). Otrzymano wówczas, że

$$R_2 = \frac{1}{\pi a \sigma_1} \log \frac{a + \sqrt{a^2 - r^2}}{a - \sqrt{a^2 - r^2}}. \tag{37}$$

Ponieważ rezystancja R_1 wynosi

$$R_1 = \frac{h}{\pi \sigma r^2}, \tag{38}$$

wobec tego rezystancja R styku kul jest określona wyrażeniem

$$R = \frac{h}{\pi \sigma r^2} + \frac{1}{\pi a \sigma_1} \log \frac{a + \sqrt{a^2 - r^2}}{a - \sqrt{a^2 - r^2}}. \tag{39}$$

Uwzględniając związek między grubością złącza h a jego promieniem i wymiarem ziaren

$$h = 2\left(a - \sqrt{a^2 - r^2}\right) \tag{40}$$

otrzymuje się

$$R = \frac{2\left(a - \sqrt{a^2 - r^2}\right)}{\pi \sigma r^2} + \frac{1}{\pi a \sigma_1} \log \frac{a + \sqrt{a^2 - r^2}}{a - \sqrt{a^2 - r^2}} \tag{41}$$

Jeżeli założyć, że $r/a = x$, to wówczas

$$R = \frac{2\left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right)}{\pi a \sigma x^2} + \frac{1}{\pi a \sigma_1} \log \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 - \sqrt{1 - x^2}} \tag{42}$$

Powyższy model uwzględnia różne właściwości elektryczne złącza i materiału stykających się ziaren, jednakże istotne uproszczenie zastosowane przy wyznaczeniu rezystancji ziaren sprawia, że model ten może być użyteczny głównie wtedy, gdy $\sigma_1 \gg \sigma$. Re-

zystancja styku R i jego przewodność G upraszczają się wówczas do wyrażeń

$$R = \frac{2(1-\sqrt{1-x^2})}{\pi\sigma a x^2}, \quad G = \frac{\pi\sigma a x^2}{2(1-\sqrt{1-x^2})} \tag{43}$$

3. PODSUMOWANIE

Z dokonanego przeglądu modeli styków wynikają następujące wnioski:

a) Modele styków punktowych, których zaletą jest ich prostota i liniowa zależność przewodności styku od jego promienia, mogą mieć jedynie ograniczone zastosowanie przy szacowaniu przewodności rzeczywistych substancji ziarnistych z uwagi na to, że nie uwzględniają geometrii i wymiarów stykających się ziaren.

b) Dla określenia własności elektrycznych substancji ziarnistych złożonych z ziaren o kształcie zbliżonym do kulistego mogą być użyteczne zaproponowane modele złączy ziaren kulistych, przy czym wybór modelu powinien być uzależniony od relacji zachodzącej między przewodnościami właściwymi materiału ziaren i obszaru przejściowego między ziarnami (złącza). I tak np. modele złącza przedstawione na rys. 10 i 13 mogą się dobrze nadawać dla substancji powstałych w procesie spiekania kulistych ziaren, gdy dodatkowo przewodność właściwa złącza jest znacznie mniejsza od przewodności właściwej materiału ziaren.

c) Modele złączy ziaren wykorzystujące przybliżony i uściślony rozkład potencjału w kuli zasilanej dwupunktowo (rys. 7 i 9) mogą być uważane za pewnego rodzaju adaptację modelu styku punktowego według uproszczonej teorii Holma, dla przypadku stykających się ze sobą ziaren kulistych. W szerokim zakresie zmienności parametru x przewodność styku ziaren może być wówczas uważana za liniową funkcję stosunku promienia złącza do promienia kulistych ziaren. Modele te mogą być szczególnie użyteczne wówczas, gdy przewodność obszaru przejściowego jest znacznie większa od przewodności materiału ziaren. Zbliżone wartości przewodności otrzymane dla obu modeli (rys. 8) pozwalają na posługiwanie się modelem złącza wykorzystującym przybliżony rozkład potencjału w ziarnie kulistym zasilanym osiowosymetrycznie, opisanym prostszymi zależnościami.

d) Model złącza ziaren, mający postać rurki prądowej (rys. 6), daje w porównaniu z modelami wykorzystującymi znajomość rozkładu potencjału w kulistym ziarnie zasilanym osiowosymetrycznie, znacznie zaniżone wartości przewodności. Z porównania zależności (6) i (10) wynika, że rozbieżności te są tym większe im mniejszy jest stosunek promienia złącza do promienia ziaren.

e) Poważne trudności obliczeniowe stanowią przeszkodę dla wyznaczenia rezystancji styku w przypadku ogólnym, gdy zachodzi potrzeba uwzględnienia zarówno przewodności właściwej złącza jak i przewodności właściwej materiału ziaren. Próbą podejścia do tego zagadnienia jest model zaprezentowany na rys. 14, w którym przyjęto jednak istotne założenia upraszczające.

LITERATURA

1. A. Kusy: *Struktura, mechanizm przewodnictwa oraz szumy typu* $1/f$ *rezystywnych warstw grubych.* Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 1979

2. J. E. Gieguzin: *Fizika spiekanja*, Nauka, Moskwa, 1984
3. T. Ramanan, A. C. D. Chaklader: *Electrical Resistivity of Hot Pressed Compacts*. Journal of The American Ceramic Society, 1975, 58, nr 11—12
4. H. Gierasimowicz, S. Jankowski: *Przepływ prądu przez kulę zasilaną symetrycznie*. Rozprawy Elektrotechniczne, 1977, tom XXIII, nr 4
5. H. Gierasimowicz: *Przepływ prądu przez kulę zasilaną wielopunktowo*. Rozprawy Elektrotechniczne, 1983, tom XXIX, nr 1
6. S. H. Chu, M. A. Seitz: *The ac Electrical Behavior of Polycrystalline Zr_2O_2 — CaO*. Journal of Solid State Chemistry, 1978, 23
7. P. Moon, D. E. Spencer: *Teoria pola*. Warszawa: PWN, 1966

H. GIERASIMOWICZ

COMPARISON OF ELECTRIC PROPERTIES OF GRAIN JUNCTION MODELS OF GRANULAR SUBSTANCES

Summary

The junctions between adjacent grains of granular substances have various forms and various electric properties. A review of junction models is undertaken, both those which are known in literature and those developed by the author. The factors which determine conductivity of grain junctions are identified. In conclusion an appraisal of the usefulness of particular models is offered.

H. GIERASIMOWICZ

COMPARAISON DES PROPRIETES ELECTRIQUES DES MODÈLES DE JONCTIONS DES GRAINS DES SUBSTANCES GRANULAIRES

Résumé

Les jonctions des grains des substances granulaires ont des formes diverses et des diverses propriétés électriques. Dans cet article nous avons présenté des modèles des jonctions connus dans la littérature ainsi qu'élaborés par l'auteur. Nous avons déterminé les facteurs qui décident de la conductivité de la jonction des grains et nous avons formulé les conclusions concernant l'utilisation et les possibilités de l'application des modèles analysés.

H. GIERASIMOWICZ

VERGLEICH DER ELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN VON MODELLEN DER VERBINDUNGEN BEI KÖRNIGEN SUBSTANZEN

Zusammenfassung

Die Gestalt und die elektrischen Eigenschaften der Verbindungen bei körnigen Substanzen unterscheiden sich voneinander. In dem Artikel wird die Betrachtung von Verbindungsmodellen durchgeführt, die sowohl von der Literatur her bekannt sind, als auch vom Autor selbst erarbeitet wurden. Beschrieben werden Faktoren, die über die Leitfähigkeit der Berührungsstelle der Körner entscheiden. Im weiteren werden Schlußfolgerungen formuliert, die die Anwendungsgebiete der einzelnen Modelle betreffen.

Х. ГЕРАСИМОВИЧ

СРАВНЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МОДЕЛЕЙ СОЕДИНЕНИЯ ЗЕРЕН ЗЕРНИСТЫХ ВЕЩЕСТВ

Р е з ю м е

Соединения зерен зернистых веществ имеют различный вид и различные электрические свойства. Проведен обзор так известных по литературе, как и разработанных автором моделей соединения. Определены факторы, определяющие проводимость контакта зёрен и сформулированы выводы, относящиеся к проигодности и области применения отдельных моделей.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1987, 33, z. 1, ss. 71-105

53.072:621.315.992

Modele przewodnictwa cienkich polikrystalicznych warstw krzemu

EDMUND Z. PAWLAK (WARSZAWA)

Instytut Technologii Elektronowej, Politechnika Warszawska

Otrzymano 1985.02.11

W pracy przedstawiono modele przewodnictwa cienkich polikrystalicznych warstw krzemu. Omówiono szczegółowo rozwój teorii pułapkowania nośników. Dużo uwagi poświęcono nowemu fenomenologicznemu modelowi Manduraha i in., który oparty został na trzech zjawiskach pułapkowania nośników, segregacji domieszek oraz odbicia nośników od barier potencjału. Model ten pozwala przewidywać i interpretować zależności właściwości elektrycznych warstw od procesów obróbki cieplnej jakiej poddawane są warstwy w procesie ich wytwarzania oraz od rodzaju domieszek.

1. WPROWADZENIE

Intensywne badania właściwości elektrycznych warstw polikrystalicznego krzemu przypadają na lata siedemdziesiąte i są z równym natężeniem kontynuowane. Z prac doświadczalnych wiadomo, że przy małych koncentracjach domieszek polikrystaliczny krzem charakteryzuje się dużo wyższą rezystywnością niż rezystywność krzemu monokrystalicznego i małą czułością na zmiany koncentracji domieszek [1, 6, 7, 12, 20]. Przy średnich koncentracjach domieszek niewielki wzrost koncentracji powoduje gwałtowny spadek rezystywności; zaś przy dużych koncentracjach domieszek rezystywność zbliża się do rezystywności krzemu monokrystalicznego, chociaż zwykle pozostaje nieco większa.

Dla wyjaśnienia zmian rezystywności polikrystalicznego krzemu wraz ze zmianą koncentracji domieszek w pracach [1, 6, 7, 12, 20] zaproponowano kilka modeli. Wszystkie one wykorzystują założenie, że obszar graniczny pomiędzy krystalitami jest zredukowany w praktyce do obsadzonej dyskretnymi stanami energetycznymi powierzchni wewnętrznej. Wszystkie wymienione w pracach [13, 14, 21, 22, 31] modele sprowadzają się do dwóch podstawowych: modelu pułapkowego oraz modelu z segregacją domieszek i były rozwijane niezależnie od siebie (autorzy jednej grupy modeli nie próbowali wykorzystać wyników i doświadczeń drugiej grupy, nie próbowano wzajemnie ich powiązań). Model pułapkowy zakłada jednakowy rozkład atomów domieszki w materiale i ograniczone kontrolowanie rezystywności materiału przez pułapkowanie nośników na granicy krystalitów gdzie pułapkowane nośniki tworzą bariery potencjału, które ograniczają transport swobodnych nośników pomiędzy krystalitami [13, 14, 21, 22]. Duża rezystywność krzemu

przy niskich koncentracjach domieszek jest wyjaśniana pułapkowaniem znacznej ilości nośników na granicach krystalitów i niewielką ilością swobodnych nośników wnoszących wkład do przewodności. Gdy wzrasta koncentracja domieszek ilość pułapkowanych nośników rośnie i zbliża się do nasycenia. Przy dalszym wzroście koncentracji domieszek ilość pułapkowanych nośników nie wzrasta w sposób wyraźny a w konsekwencji bariery potencjału maleją powodując gwałtowny spadek rezystywności polikrystalicznego krzemu. Tak więc przy wysokiej koncentracji domieszek bariery potencjału na granicach krystalitów stają się bardzo małe i nie ograniczają przewodności warstw. Właściwości materiału polikrystalicznego krzemu zbliżają się do właściwości krzemu monokrystalicznego. Model z segregacją domieszek zakłada, że przewodność polikrystalicznego krzemu jest zależna od segregacji atomów domieszki na granicy krystalitów gdzie są one pułapkowane i stają się elektrycznie nieaktywne [32, 33].

Przy małych koncentracjach domieszek, większość atomów ulega segregacji na granicy krystalitów a tylko niewielka ich ilość ma wkład do przewodnictwa. Ze wzrostem koncentracji domieszek więcej atomów pozostaje wewnątrz krystalitu i wówczas rezystywność warstwy zbliża się do rezystywności krzemu monolitycznego.

Chociaż obydwa modele w sposób zadowalający wyjaśniają zmiany rezystywności warstw polikrystalicznego krzemu ze zmianą koncentracji domieszek to model pułapkowy zdobył większe uznanie i znaczenie ponieważ model w segregacją domieszek nie wyjaśnia ani temperaturowej zależności rezystywności warstw ani też minimum ruchliwości Halla obserwowanego przy średnich koncentracjach domieszek. To uzasadnia, że w niniejszym artykule omówiono przegląd pułapkowych modeli przewodnictwa [1—7] jako bardziej przydatnych w interpretacji wyników eksperymentalnych.

Modele pułapkowe zakładają, że układy atomów w obszarze granicznym pomiędzy krystalitami są nieuporządkowane i dalatego istnieje w tym obszarze wiele defektów związanych z nieskompensowanymi wiązaniami atomów [1—3].

W wyniku tego powstają stany pułapkowe wykorzystujące swobodne nośniki z obszarów krystalitów. Ładunek zawarty w pułapkach jest neutralizowany ładunkiem przestrzennym zjonizowanych domieszek powodując powstanie bariery potencjału i obszaru przybarierowego. Ogranicza to możliwości poruszania się nośników pomiędzy krystalitami zmniejszając ich ruchliwość. Pierwszymi, którzy zastosowali do analizy właściwości elektrycznych polikrystalicznych warstw krzemu model pułapkowy byli Kamins [1] oraz Roi-Chondhury i Hower [3]. Zmniejszenie ruchliwości nośników wraz ze zmniejszeniem koncentracji nośników Kamins wiąże z dużą rezystywnością obszaru ładunku przestrzennego otaczającego obszar graniczny. Roi-Chondhury i Hower posługując się tym samym modelem za podstawowy parametr przyjęli wyłącznie barierę potencjału i w ten sposób interpretowali wyniki pomiarów rezystywności w funkcji koncentracji domieszek.

Jednak dopiero w połowie lat siedemdziesiątych ukazuje się podstawowa praca w tej dziedzinie opublikowana przez Seto [7]. Autor podał analizę teoretyczną modelu pułapkowego, którą następnie rozwinęli Boecarani i in. [6] oraz Seager i Castner [5]. Żaden z wymienionych modeli pułapkowych, podobnie jak i modele z segregacją domieszek nie objaśniały zależności właściwości elektrycznych od procesów obróbki cieplnej jakiej poddawane są warstwy w procesie ich wytwarzania oraz od rodzaju domieszek.

Skuteczną próbę ujęcia tych zjawisk podjęli Mandurah i in. [21] opracowując feno-

menologiczny model oparty na trzech zjawiskach: pułapkowania nośników, segregacji domieszek i tunelowania nośników przez barierę na granicy krystalitów. Model ten zakłada, że na granicy krystalitów występuje heterozłącze i powierzchnia wewnętrzna obsadzona jest dodatkowymi stanami energetycznymi [8, 9]. Fenomenologiczny model Manduraha daje szerokie możliwości interpretacji wyników pomiarów podstawowych parametrów elektrycznych warstw polikrystalicznego krzemu wytwarzanych w różnych warunkach technologicznych.

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

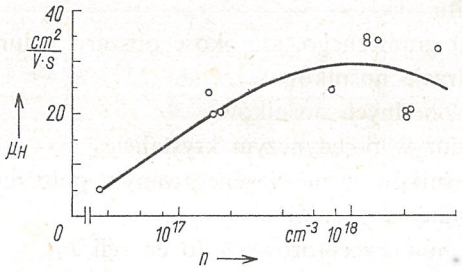
E_a — energia aktywacji
E_B — energia bariery ($= q\Phi$)
E_F — energia (poziom) Fermiego
ΔE_F — przesunięcie poziomu Fermiego w obszarze granicznym
E_G — szerokość pasma zabronionego (w temp. T)
E_{FB} — położenie poziomu Fermiego w obszarze granicy
E_b — szerokość przerwy zabronionej w obszarze granicy
E_c — dno pasma przewodnictwa (energia krawędzi pasma przewodnictwa)
I, i — natężenie prądu
J, j — gęstość prądu
h — stała Boltzmana
l_1 — rozmiar krystalitu
l_2 — rozmiar obszaru granicznego, szerokość obszaru ładunku przestrzennego
n — średnia koncentracja nośników
$n_{(x)}$ — koncentracja swobodnych nośników
P_l — koncentracja dziur w pojedynczym krystalicie
n_G — koncentracja nośników w niezdegenerowanym półprzewodniku
n_t — liczba pułapkowanych nośników
N_A — koncentracja stanów akceptorowych (o energii E_t)
N_D — koncentracja domieszki
N_D^* — graniczna wartość koncentracji domieszki
N_G — koncentracja stanów pułapkowych na granicy krystalitów
N_d — koncentracja stanów defektów
N_s — gęstość stanów powierzchniowych
N_t — gęstość stanów pułapkowych
N_T — dwuwymiarowa koncentracja stanów defektów
Q — gęstość ładunku w obszarze bariery
Q_t — liczba pułapek zlokalizowanych w paśmie E_t
V_b — maksymalna wysokość barier w obszarach zubożonych
V_0 — całkowity spadek napięcia na obszarze granicznym
V_w — całkowity spadek napięcia na obszarze zubożonym
V_B — spadek napięcia na barierze potencjału
$V_L V_R$ — spadek napięcia na obszarach zubożonych po lewej i prawej stronie obszaru międzykrystalitowego

$V_{(x)}$ — funkcja opisująca barierę potencjału w obszarze zubożonym
w — szerokość obszaru zubożonego
ε — stała dielektryczna Si
$\mathscr{E}_x$ — energia nośników
Φ_B — wysokość bariery potencjału
Φ_b — wysokość bariery potencjału odniesiona do E_F
Φ_{GB} — wysokość bariery na granicy krystalitów odniesiona do E_F
σ_B — przewodność obszaru granicy krystalitów
ϱ — średnia rezystywność warstwy
ϱ_B — rezystywność obszaru granicy krystalitów
ξ — energia Fermiego w stosunku do dna pasma przewodnictwa E_c

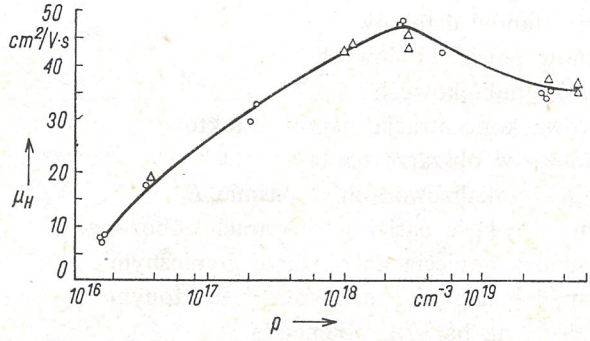
2. MODELE PRZEWODNICTWA

2.1. PUŁAPKOWY MODEL PRZEWODNICTWA KAMINSA

Kamins [1, 2] wykazał, że cienkie warstwy polikrystalicznego krzemu zarówno typu *n* jak i typu *p* charakteryzują się specyficznym zachowaniem się ruchliwości Halla. Dla pewnej wartości koncentracji ruchliwość ta uzyskuje maksimum. Tak więc zmniejsza się ona dla małych, jak i dla dużych koncentracji nośników. Dotyczy to zarówno elektronów (rys. 1) jak i dziur (rys. 2). Zmniejszenie ruchliwości Halla wraz ze zmniejszeniem kon-

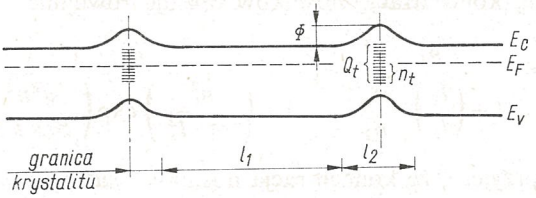


Rys. 1. Zależność ruchliwości holowskiej nośników ładunku od ich koncentracji dla polikrystalicznych warstw krzemu domieszkowanego arsenem



Rys. 2. Ruchliwość holowska nośników w funkcji koncentracji dziur dla warstw polikrystalicznego krzemu o grubości około 5 μm domieszkowanych borem osadzonych w temp. 1035°C. Oznaczenia: 0 — próbki domieszkowane podczas osadzania warstw, Δ — próbki domieszkowane przez dyfuzję po osadzeniu warstwy

centracji dziur spowodowane jest wysoką rezystywnością obszaru ładunku przestrzennego związanego z granicami krystalitów. Dla wyjaśnienia tego zjawiska Kamins rozpatrywał warstwę, której model pasmowy dla warstw krzemowych typu n przedstawiono na rys. 3. Założył on, że defekty krystalitów mają gęstość pułapek Q_t, któer są początkowo elek-



Rys. 3. Struktura pasmowa warstwy polikrystalicznego krzemu typu n

trycznie obojętne. Nośniki wprowadzane przez atomy domieszki są pułapkowane, a na granicach krystalitów tworzy się bariera potencjału. Poziom Fermiego dla granicy krystalitów leży w pasmie zabronionym, niesymetrycznie, bliżej pasma przewodnictwa. Obszar krystalitu bliski granicy będzie więc obszarem o dużej rezystywności, który ogranicza przewodnictwo warstwy. Z zasady neutralności ładunku przestrzennego i ładunku otaczającego go obszaru wynika, że liczba pułapkowanych nośników n_t jest zależna od szerokości obszaru ładunku przestrzennego l_2 (rys. 3).

$$n_t = n_1 l_2, \tag{1}$$

gdzie n_1 jest koncentracją nośników większościowych w neutralnym obszarze krystalitu (przyjmuje się, że jest ona równa koncentracji domieszki). Przy tych założeniach wyliczona z równania Poissona wysokość bariery wynosi

$$\Phi = \left(\frac{qn_t}{2\varepsilon}\right)\left(\frac{l_2}{2}\right) = \frac{qn_t^2}{8\varepsilon n_1}. \tag{2}$$

Wykorzystując zależności (11) z [22] otrzymamy

$$\frac{n_1}{n_2} = \exp\left(\frac{q\Phi}{kT}\right) = \exp\left(\frac{q^2 n_t^2}{8\varepsilon kTn_1}\right) \tag{3}$$

gdzie n_2 jest koncentracją nośników w obszarze (o szerokości l_2), z którym związany jest ładunek przestrzenny otaczający granicę krystalitu. Z równań (1) i (2) wynika, że gdy rośnie koncentracja domieszki, rośnie również liczba pułapkowanych nośników n_t w sposób określony rozkładem energii pułapek. Jeśli zaś koncentracja domieszki n_1 rośnie, a n_t nie ulega zmianie, wówczas bariera będzie malała, a obszar ładunku przestrzennego jest wąski.

Eksponencjalna zależność rezystywności obszaru granicznego R_2 od wysokości bariery powoduje, że rezystywność ta będzie malała szybciej aniżeli rezystywność krystalitów R_1. Obszar bliski granicy szybko ogranicza konduktywność warstwy. W tej sytuacji jej właściwości będą zbliżone do właściwości krystalitów. Wykorzystując zależności Volgera [23] właściwości te można powiązać ze strukturą warstwy. Średnie ich wartości wynoszą:

rezystywność

$$R = R_1 + \left(\frac{l_2}{l_1}\right) R_2 \tag{4}$$

współczynnik Halla

$$R_H = R_{H1} + \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 R_{H2}. \tag{5}$$

W tej sytuacji średnią koncentrację nośników opisuje równanie

$$n = \frac{n_1}{1 + \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 \frac{n_1}{n_2}} = \frac{n_2}{1 + \left(\frac{n_i^2}{n_1^2 \cdot l_1^2}\right) \exp\left(\frac{q^2 n_i^2}{8\varepsilon k T n_1}\right)}. \tag{6}$$

W równaniu (6) przyjęto, że koncentracja nośników ładunku w obszarach o wysokiej rezystywności odpowiada szczytowi bariery. Równanie to obrazuje zachowanie się koncentracji nośników przy założeniu stałej ruchliwości Halla. Wówczas n maleje szybciej niż n_1, co jest spowodowane drugim wyrażeniem w mianowniku. Jeżeli rosną l_1 lub grubości warstwy a wartości n_1, n_2 i l_2 pozostają stałe, to także rośnie n. Jest to zgodne z wynikami doświadczeń [22, 23].

Mierzona ruchliwość Halla jest proporcjonalna do współczynnika R_H (5) i rezystywności R, (4) i dla $l_2 \ll l_1$ wynosi ona:

$$\mu_H = \frac{R_{H1} + \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 R_{H2}}{R_1 + \left(\frac{l_2}{l_1}\right) R_2} = \sim \frac{R_{H1}}{R_1 + \left(\frac{l_2}{l_1}\right) R_2}. \tag{7}$$

Z równania (7) wynika, że dla wyższych poziomów domieszkowania tj. $n_1 \geqslant 5 \cdot 10^{18} + 10^{19}$ cm^{-3} bariera w pobliżu granicy będzie malała, a mierzona rezystywność będzie początkowo określona przez rezystywność krystalitów. Wtedy będzie dominował pierwszy wyraz mianownika równania (7), a mierzona ruchliwość będzie ruchliwością w krystalicie, a ściślej będzie to wartość ruchliwości nośników w monokrysztale. Praktycznie ruchliwość ta będzie nieco mniejsza niż ruchliwość w monokrysztale, ponieważ należy uwzględnić rozpraszanie na defektach w materiale. Dla mniejszych poziomów domieszkowania (mała koncentracja zjonizowanych donorów) obszar ładunku przestrzennego będzie rozszerzał się czyli wzrośnie szerokość bariery jak i jej wysokość, co spowoduje wzrost rezystywności. Wtedy będzie dominował drugi wyraz mianownika równania (7), a rezystywność warstwy jest określona przez rezystywność barier. W tym wypadku mierzoną ruchliwość można wyrazić wzorem

$$\mu = \frac{l_1 n_2}{l_2 n_1} \mu_2 = \frac{l_1 n_1 \mu_2}{n_t} \exp\left(\frac{q^2 n_t^2}{8\varepsilon k T n_1}\right) \tag{8}$$

gdy n_1 maleje, a bariera staje się wyższa, mierzona ruchliwość będzie malała proporcjonalnie do n_i jeżeli inne parametry będą zmieniały się wolno. Przewodność warstwy jest określana bardziej przez bariery aniżeli przez krystality.

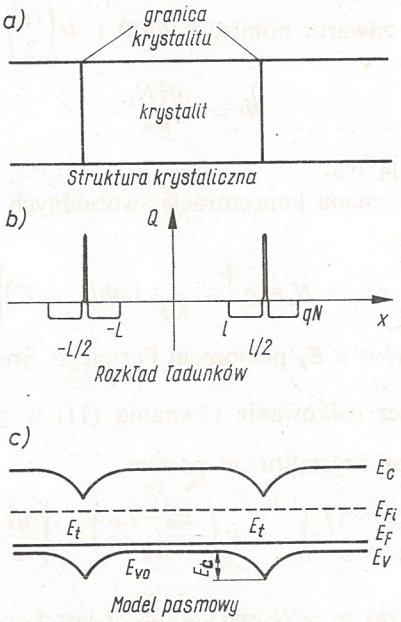
Z równania (8) można określić maksimum ruchliwości w funcji koncentracji nośników. Z zależności tej wynika również, że zarówno μ_2 jak i $\frac{n_2}{n_1}$ silnie wpływają na ruchliwość nośnikó w. Dowodzi to, że mniejsze wartości ruchliwości w warstwach typu n są

powodowane redukcją ruchliwości przez ruch elektrów albo przez różną gęstość stanów pułapkowych w obszarach granicznych pasma zabronionego.

Podstawowym mankamentem modelu Kaminsa jest brak znajomości rozkładu gęstości pułapek na granicy krystalitów. Zakłada on, że w obszarze bariery praktycznie wszystkie swobodne nośniki są przechwytywane przez pułapki. Drugie uproszczenie wynika z oddziaływania segregacji domieszki na granicy krystalitów oraz na innych defektach, w wyniku czego wartość n_1, z której korzystano w tym modelu różni się od poziomu domieszki w warstwie monokrystalicznej. Pomimo tych zastrzeżeń model Kaminsa potwierdza uzyskane wyniki doświadczalne dla wartości odpowiadającej Si. Potwierdzają go również badania prowadzone na innych materiałach m.in. CdS, CdSc [28].

2.2. ANALIZA TEORETYCZNA MODELU PUŁAPKOWEGO

Jedną z podstawowych prac uwzględniających model pułapkowy obszaru granicznego okazała się opublikowana w połowie lat siedemdziesiątych praca Seto [7]. Autor stwierdził doświadczalnie, że o właściwościach polikrystalicznych warstw Si decyduje koncentracja domieszek. Do analizy teoretycznej wykorzystał on model warstwy zbudowany z jednakowych krystalitów, w których występuje, zgodnie z założeniem, jeden typ domieszki o atomach całkowicie zjonizowanych i równomiernie rozłożonych o koncentracji N_D.



Rys. 4. Schemat budowy warstwy polikrystalicznego krzemu: a — model warstwy; b — rozkład gęstości ładunku; c — model pasmowy krystalitu i otaczających go obszarów granicznych

W modelu tym rozmiar obszaru granicznego l_2 jest pomijalnie mały w stosunku do rozmiaru krystalitu l_1 (obszar graniczny jest zredukowany do powierzchni wewnętrznej) i zawiera Q_t pułapek zlokalizowanych w pasmie energii E_t. Schemat budowy warstwy i strukturę pasmową krystalitu i otaczających go obszarów granicznych przedstawiono na rys. 4. Początkowo neutralne pułapki poprzez wychwytywanie nośników domieszki

stają się naładowane. Seto założył, że wszystkie nośniki w obszarze $\left(\frac{l_2}{2}-l\right)$ od granicy krystalitów są wychwytywane przez stany pułapkowe i tworzą obszar zubożony.

Funkcja opisująca barierę potencjału wyznaczona z równania Poissona wynosi

$$\Phi_x = \frac{qN_D}{2\varepsilon}(x-l)^2 + \Phi_{v,0} \qquad l < x < \frac{l}{2} \tag{9}$$

gdzie $\Phi_{v,0}$ jest potencjałem krawędzi pasma walencyjnego w środku krystalitu, przy czym poziom Fermiego jest przyjęty za punkt zerowy energii.

W przypadku danego rozmiaru krystalitu istnieją dwa możliwe warunki zależne od poziomu koncentracji

$$\text{a)} \quad l_1 N_D < Q_t$$
$$\text{b)} \quad Q_t > l_1 N_D$$

a) Gdy $l_1 N_D < Q_t$ to krystalit jest całkowicie pozbawiony nośników, a pułapki są tylko częściowo obsadzone, a więc $l = 0$, równanie (9) ma postać

$$\Phi(x) = \left(\frac{qN_D}{2\varepsilon}\right)x^2 + \Phi_{v,0} \quad |x| < \frac{l_1}{2}. \tag{9a}$$

Wysokość bariery Φ jest zawarta pomiędzy $\Phi(0)$ i $\Phi\left(\frac{l_1}{2}\right)$ i wynosi

$$\Phi = \frac{ql_1^2 N_D}{8\varepsilon} \tag{10}$$

a więc jest liniową funkcją N_D.

Zgodnie ze statystyką Boltzmana koncentrację swobodnych nośników $p(x)$ Seto określił w postaci

$$p_{(x)} = N_v \exp\left\{-\frac{1}{kT}[q\Phi(x) - E_t]\right\} \tag{11}$$

gdzie N_v jest gęstością stanów, a E_F poziomem Fermiego. Średnia koncentracja nośników, p_a, została określona przez całkowanie równania (11) w granicach od $-\frac{l_1}{2}$ do $+\frac{l_1}{2}$ i podzielenie przez rozmiar krystalitu, w postaci

$$p_a = \frac{n_i}{l_1 q}\left(\frac{2\pi\varepsilon kT}{N_D}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{E_B - E_F}{kT}\right) \operatorname{erf}\left[\frac{q l_1}{2}\left(\frac{N_D}{2\varepsilon kT}\right)^{1/2}\right] \tag{12}$$

gdzie E_B energia bariery, zaś $n_i = N_v \exp\left(-\frac{E_G}{2kT}\right)$ jest koncentracją samoistną w pojedynczym krystalicie (monokrysztale) o szerokości pasma zabronionego E_G w temperaturze T. W równaniu (12) poziom Fermiego jest określony przez stosunek wychwytywanych nośników do całkowitej liczby zajętych stanów pułapkowych.

$$l_1 N_D = \frac{Q_t}{2\exp\left(\frac{E_t - E_F}{kT}\right) + 1}. \tag{13}$$

Jeżeli każda pułapka wychwytuje jedną dziurę i nie ma oddziaływania między pułapkami, to poziom Fermiego można zapisać w postaci

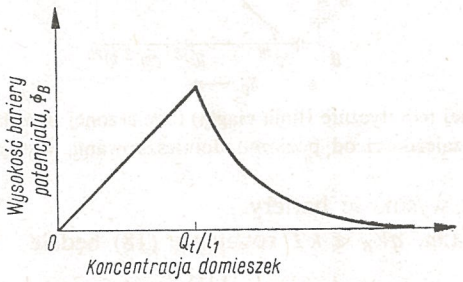
$$E_F = E_t - kT\ln\left[\left(\frac{Q_t}{l_1 N_D} - 1\right)^{1/2}\right]. \tag{14}$$

Na podstawie równań (13) i (14) można obliczyć koncentrację nośników dla danego N_D, jeżeli N_D, Q_t i E_t są znane.

b) Gdy $l_1 N_D > Q_t$, t.zn. tylko część krystalitu jest zubożona i $l > 0$, to wysokość bariery na podstawie (9) wynosi

$$\Phi = \frac{qQ_t^2}{8\varepsilon N_D} \tag{15}$$

Na podstawie równań (10) i (15) otrzymano wykres zależności wysokości potencjału od poziomu domieszkowania, rys. 5. Te wzrostem koncentracji domieszek bariera potencjału



Rys. 5. Zależność wysokości bariery potencjału od koncentracji domieszek w krystalitach

początkowego wzrosła liniowo, osiągając maksimum dla $l_1 N_D = Q_t$, a następnie spada nagle według $1/N_D$. Średnia koncentracja nośników p_a (podobnie jak poprzednio) jest średnią w całym krystalicie. W obszarze niezubożonym koncentracja nośników dla niezdegenerowanego półprzewodnika jest taka sama jak w monokrysztale Si:

$$p_b = N_v \exp\left[-\frac{1}{kT}(E_{v,0} - E_F)\right]. \tag{16}$$

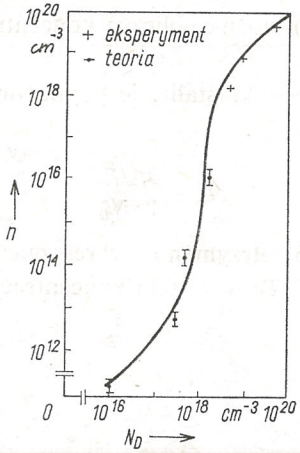
Koncentracja nośników w obszarze zubożonym wyraża się równaniem podobnym do równania (12). Średnia wartość koncentracji nośników p_a jest wyrażona wzorem

$$p_a = p_b\left\{\left(1 - \frac{Q_t}{l_1 N_D}\right) + \frac{1}{ql_1}\left(\frac{2\varepsilon\pi kT}{N_D}\right)^{1/2} \operatorname{erf}\left[\frac{qQ_t}{l}\left(\frac{1}{2\varepsilon kTN_D}\right)^{1/2}\right]\right\}. \tag{17}$$

Seto wykazał zgodność wzorów (12) i (17) z wynikami doświadczalnymi, co zostało przedstawione na rys. 6. Podobnie jak Bethe [25] Seto przyjął, że w prądzie płynącym przez warstwę, przeważającym jest prąd termoemisyjny (prąd elektronów tunelujących jest zaniedbywany) i jego gęstość wyraził równaniem:

$$J = qp_a\left(\frac{kT}{2\pi m^*}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{-q\Phi}{kT}\right)\left[\exp\left(\frac{qV_B}{kT}\right) - 1\right], \tag{18}$$

gdzie m^* jest masą efektywną nośników. Wzór (18) otrzymano przy zaniedbaniu zderzeń nośników w obszarze zubożonym i założeniu, że koncentracja nośników w krystalitach jest niezależna od prądu, a więc jest to przypadek, w którym liczba nośników biorących udział w transporcie jest nieporównywalna z całkowitą liczbą nośników w krystalicie.



Rys. 6. Porównanie obliczonej teoretycznie (linia ciągła) i zmierzonej doświadczalnie (+) średniej koncentracji nośników w zależności od poziomu domieszkowania w temperaturze pokojowej

Warunki te ograniczają wysokość bariery.

Jeżeli V_B jest małe, tzn. $qV_B \ll kT$ równanie (18) będzie

$$J = qp_a\left(\frac{1}{2\pi m^* kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{q\Phi}{kT}\right)V_B \tag{19}$$

liniowej zależności prądowo-napięciowej:

Przewodność warstwy polikrystalicznej o rozmiarze krystalitu wyrazi się równaniem

$$\sigma = l_1 q^2 n\left(\frac{1}{2\pi m^* kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{q\Phi}{kT}\right). \tag{20}$$

Wykorzystując równania (11), (16) i (20) otrzymuje się

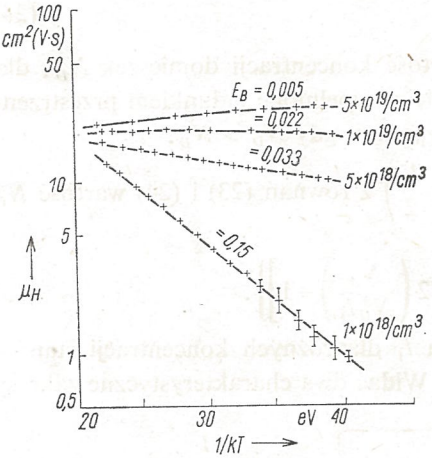
$$\sigma \sim \exp\left[-\left(\frac{E_G}{2} - E_F\right)\Big/ kT\right] \quad \text{dla} \quad N_D l_1 < Q_t, \tag{21a}$$

$$\sigma \sim T^{-1/2}\exp\left(-\frac{E_B}{kT}\right) \quad \text{dla} \quad N_D l_1 < Q_t. \tag{21b}$$

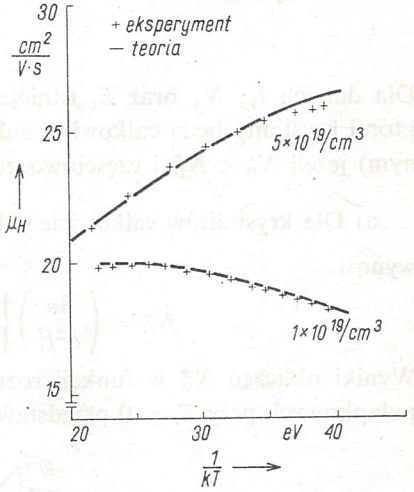
Oznacza to, że logarytm rezystancji w funkcji $\frac{1}{kT}$ będzie linią prostą o kącie nachylenia $\frac{E_G}{2} - E_F$ dla przypadku $l_1 N_D < Q_t$ i równym E_B dla przypadku $l_1 N_D > Q_t$. Efektywna ruchliwość nośników wynosi:

$$\mu_H = l_1 q\left(\frac{1}{2\pi m^* kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{E_B}{kT}\right). \tag{22}$$

Z równania (22) wynika, że ruchliwość, μ_H, ma minimum dla $l_1 N_D = Q_t$. Wykres logarytmiczny $\mu_H = f\left(\frac{1}{kT}\right)$ dla $E_B > kT$ jest linią prostą o ujemnym kącie nachylenia E_B. Jej przebieg dla kilku koncentracji domieszek oraz odpowiadające im wartości energii bariery E_B przedstawiono na rys. 7, zaś na rys. 8 pokazano dla dwu funkcji porównanie wartości eksperymentalnych z teoretycznymi.



Rys. 7. Zależność ruchliwości Halla od temperatury dla próbek z różnymi koncentracjami domieszek i odpowiadająca im energia bariery



Rys. 8. Porównanie eksperymentalnych wartości ruchliwości dziur w funkcji 1/KT z krzywą teoretyczną dla gęstości domieszek $5-10^{19}/\text{cm}^3$ i $1-10^{19}/\text{cm}^3$. Odpowiadająca im wysokość barier wynosi 0,0005 eV i 0,022 eV

Model Seto jest przedmiotem analizy w wielu publikacjach. Badano jego możliwości i próbowano go rozwinąć. Rozwijając model Seto dla średnich poziomów domieszkowania Baccarani i in. [6] za punkt wyjścia dla interpretacji zachowania się przewodności warstwy od temperatury przyjęli równanie przewodnictwa dla warstwy półprzewodnika typu n w postaci

$$\sigma = (q^2 l_1 n_0 v_c / kT) \exp\left(-\frac{E_B}{kT}\right). \tag{22a}$$

Różni się ono od podanego przez Seto o czynnik n_0/n_a, gdzie n_a jest średnią koncentracją nośników wewnątrz krystalitów. W celu przeprowadzenia takiej interpretacji autorzy założyli, że na granicy między krystalitami występują: a) jednowartościowy poziom pułapkowania i b) ciągły rozkład energii stanów powierzchniowych.

2.3. MODEL Z POJEDYNCZYM POZIOMEM PUŁAPKOWYM

Przypadek pojedynczego poziomu pułapkowego odpowiada założeniu, że pułapki na granicach krystalitów składają się ze stanów akceptorowych N_A o energii E_t. Energia E_t

jest liczona względem wewnętrznego poziomu Fermiego na granicy powierzchni między krystalitami.

Z warunku neutralności elektrycznej

$$2N_D w = N_A\left\{1+\frac{1}{2}\exp[(E_t+E_B-E_F)/kT]\right\}, \tag{23}$$

gdzie w jest szerokością warstwy zubożonej, zaś energia bariery E_B wyznaczona z równania Poissona wynosi

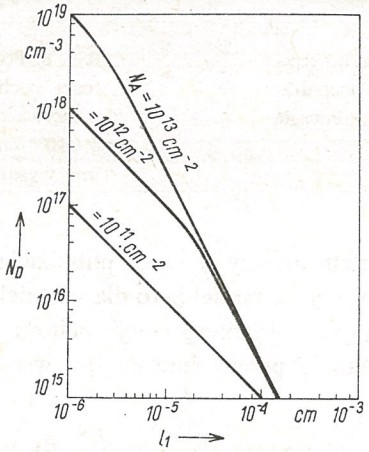
$$E_B = \frac{q^2 w^2 N_D}{2\varepsilon}. \tag{24}$$

Dla danych l_1, N_A oraz E_t istnieje graniczna wartość koncentracji domieszek N_D^*, dla której krystality będą całkowicie zubożone (całkowicie wypełnione ładunkiem przestrzennym) jeżeli $N_D < N_D^*$ i częściowo zubożone w przypadku, gdy $N_D > N_D^*$.

a) Dla krystalitów całkowicie zubożonych $\left(w = \frac{l_1}{2}\right)$ z równań (23) i (24) wartość N_D^* wynosi

$$N_D^* = \left(\frac{8\varepsilon}{q^2 l_1^2}\right)\left\{\left[E_F - E_t + kT\ln 2\left(\frac{N_A}{N_D^* l_1}\right) - 1\right]\right\}. \tag{25}$$

Wyniki obliczeń N_D^* w funkcji rozmiaru krystalitu l_1 dla różnych koncentracji stanów pułapkowych przy $E_t = 0$ przedstawiono na rys. 9. Widać dwa charakterystyczne zakresy



Rys. 9. Zależność koncentracji domieszek od wielkości krystalitów (w przypadku całkowitego zubożenia) przy różnej gęstości monoenergetycznych stanów pułapkowych znajdujących się w środku pasma zabronionego

zależności N_D^* proporcjonalne odpowiednio do l_1^{-1} i l_1^{-2} dla najmniejszych i największych wartości l_1 i N_A. Asymptotyczne zachowanie się N_D^* wynika z równania (23). Dla tych zakresów znaleziono uproszczone zależności

$$N_D^* \sim \frac{N_A}{l_1} \quad \text{dla} \quad E_F - E_t - E_B \gg kT, \tag{26a}$$

$$N_D^* \sim \left(\frac{8\varepsilon}{q^2 l_1^2}\right)\left[\frac{E_G}{2} - E_t + kT\ln\left(\frac{2N_A}{Ncl_1}\right)\right] \quad \text{dla} \quad E_t + E_B - E_F \gg kT. \tag{26b}$$

Energia bariery zgodnie z (10) wynosi

$$E_B = \frac{q^2 l_1^2 N_D}{8\varepsilon} \tag{27}$$

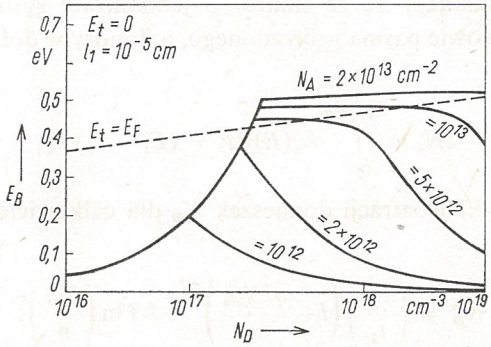
i wzrasta liniowo ze wzrostem N_D, a przewodnictwo warstwy spełnia równanie

$$\sigma = \frac{q^2 \cdot l_1^2 \cdot N_c N_D \cdot v_c}{2kT(N_A - l_1 N_D)} \exp\left(-\frac{E_a}{kT}\right), \tag{28}$$

gdzie energia aktywacji $E_a = \frac{E_G}{2} - E_t$, $v_c = (kT/2 \cdot \pi m^*)^{1/2}$;

b) Dla koncentracji domieszek $N_D > N_D^*$ krystality są częściowo zubożone, a energia bariery określa równanie

$$E_B = E_F - E_t + kT \ln 2 \left[\frac{qN_A}{(8\varepsilon N_D E_B)^{1/2} - 1}\right]. \tag{29}$$



Rys. 10. Zależność wysokości bariery potencjału od koncentracji domieszek dla krystalitu o rozmiarze 10^{-5} cm. Odniesieniem jest monoenergetyczny stan pułapkowy znajdujący się w środku pasma zabronionego. Rysunek ten odpowiada rys. 5 z uwzględnieniem zakresu dużych gęstości stanów pułapkowych

Rozwiązanie równania (29) w funkcji koncentracji domieszek N_D przy różnych N_A i dla $l_1 = 10^{-5}$ cm przedstawiono na rys. 10. Wyróżniamy tu również dwa charakterystyczne zakresy, podobnie jak w przypadku równania (26).

$$E_B = \frac{q^2 N_A^2}{8\varepsilon N_D} \quad \text{dla} \quad E_F - E_t - E_B \gg kT, \tag{30a}$$

$$E_B = \frac{E_G}{2} - E_t + kT \ln\left\{\frac{qN_D^{1/2} N_A}{[N_c (2\varepsilon E_B)^{1/2}]}\right\} \quad \text{dla} \quad E_t + E_B + E_F \gg kT. \tag{30b}$$

Granica między tymi dwoma zakresami jest zaznaczona na rys. 10 linią przerywaną. Funkcje powyżej tej linii opisane są równaniem (30b): tu wysokość bariery zależna jest od temperatury, a przewodność warstw spełnia równanie

$$\sigma = q_1^l N_c^2 v_c (2\varepsilon N_D^{-1} E_B)^{1/2} (kT \cdot N_A)^{-l} \exp\left(-\frac{E_a}{kT}\right),$$

gdzie $E_a = \frac{1}{2} E_G - E_t$.

Poniżej tej linii prawdziwe jest (30a), a przeswodność warstwy spełnia równanie

$$\sigma = (q^2 l_1 n_0 v_c / kT) \cdot \exp\left(-\frac{E_a}{kT}\right),$$

gdzie $E_a = E_B$. Istnieje podobieństwo funkcji przedstawionych na rys. 5 i 10. Rysunek 10 jest *„rozwinięciem"* rysunku 5. Do tak rozszerzonego obszaru, który powiększa się zarówno ze wzrostem rozmiaru krystalitów jak i zwiększeniem gęstości stanów pułapkowych, nie ma zastosowania teoria Seto.

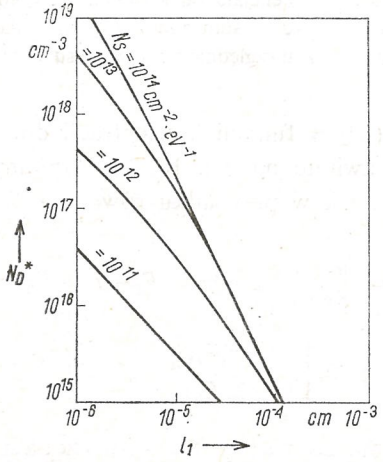
2.4. MODEL Z CIĄGŁYM ROZKŁADEM ENERGII STANÓW POWIERZCHNIOWYCH

W przypadku ciągłego rozkładu energii stanów powierzchniowych $N_s(E)$ pułapki na granicach krystalitów składają się ze stanów o jednakowej gęstości tzn., że akceptory znajdują się w górnej połowie pasma zabronionego, a donory w dolnej. Z warunku neutralności

$$2N_D w \int_0^{E_F - E_B} N_s(E)\,\mathrm{d}E = (E_F - E_B) N_s.$$

Stąd graniczna wartość koncentracji domieszek N_D dla całkowicie zubożonego krystalitu (tj. dla $l_1/2$) wynosi

$$N_D^* = \left(\frac{N_s}{l_1}\right)\left(1 + \frac{q^2 N_s l_1}{8\varepsilon}\right)^{-1} \cdot kT \ln\left(\frac{N_D^*}{n_i}\right). \tag{31}$$



Rys. 11. Koncentracja domieszek w funkcji rozmiaru krystalitu dla kilku różnych wartości gęstości stanów powierzchniowych

Rozwiązanie równania (31) w funkcji rozmiaru krystalitu l_1 dla różnych gęstości stanów powierzchniowych N_s przedstawiono na rys. 11. W obszarze mniejszych l_1 i N_s koncentracja domieszek N_D^* jest proporcjonalna do l_1^{-1}

$$N_D^* = \left(\frac{N_s kT}{l_1}\right) \ln\left(\frac{N_D^*}{n_i}\right) \quad \text{dla} \quad l_1 \ll \frac{8\varepsilon}{qN_s}, \tag{32a}$$

podczas gdy w obszarze większym l_1 i N_s, N_D^* jest proporcjonalne do l_1^{-2} i wynosi

$$N_D^* = \left(\frac{8\varepsilon kT}{q^2 l_1^2}\right) \ln\left(\frac{N_D^*}{n_i}\right) \quad \text{dla} \quad l_1 \gg \frac{8\varepsilon}{q^2 N_s}. \tag{32b}$$

Dla $N_D^* < N_D^*$ energia bariery jest taka sama jak w równaniu (27), a przewodność warstwy spełnia równanie

$$\sigma = \left(\frac{q^2 l_1 N_c v_c}{kT}\right) \exp\left(-\frac{E_a}{kT}\right), \tag{33}$$

gdzie energia aktywacji $E_a = \dfrac{E_G}{2} = \dfrac{l_1 N_D}{N_s}$.

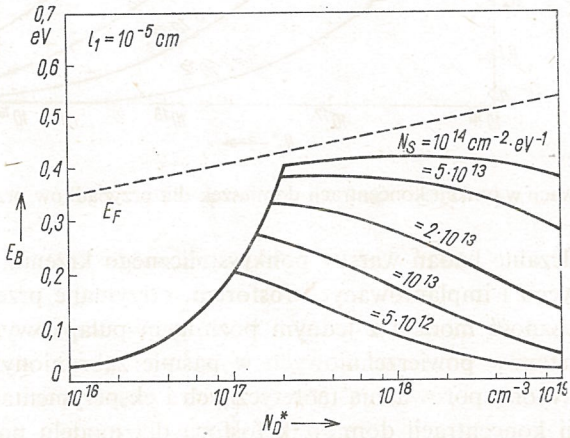
Gdy $N_D > N_D^*$ szerokość obszaru zubożonego krystalitu jest mniejsza od $l_1/2$, wysokość bariery określona jest funkcją

$$E_B = E_F - \frac{4\varepsilon N_D}{q^2 N_s^2}\left[\left(1 + \frac{qN_s^2 E_F}{8\varepsilon N_D}\right)^{1/2} - 1\right], \tag{34}$$

która dąży asymptotycznie do:

$$E_B = \frac{q^2 N_s^2 E_F}{8\varepsilon N_D} \quad \text{dla} \quad N_D \gg \frac{q^2 N_s^2 E_F}{2\varepsilon}, \tag{35a}$$

$$E_B = E_F \quad \text{dla} \quad N_D \ll \frac{q^2 N_s^2 E_F}{2\varepsilon}. \tag{35b}$$



Rys. 12. Wysokość bariery w funkcji kocentracji domieszek dla krystalitu o $l_1 = 10^{-5}$ cm oraz kilku wartości gęstości stanów powierzchniowych

Wysokość bariery na rys. 12 jest przedstawiona w funkcji koncentracji domieszek dla kilku wartości gęstości stanów powierzchniowych. W tym wypadku

$$E_F = \frac{E_G}{2} - kT\ln\left(\frac{N_c}{N_D}\right),$$

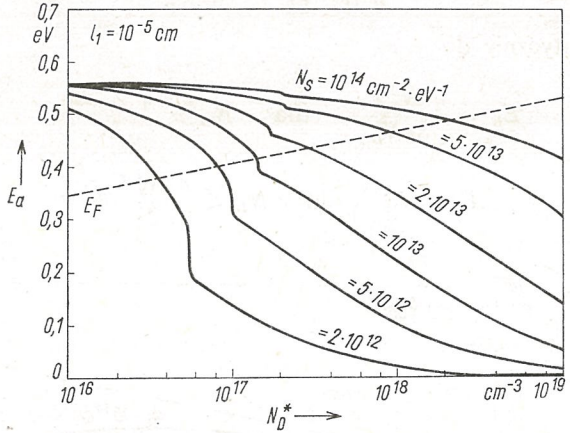
a wówczas wysokość bariery określa równanie

$$E_B = \frac{E_G}{2} - \frac{4\varepsilon N_D}{q^2 N_s^2}\left[\left(1+\frac{q^2 N_s^2 E_G}{4\varepsilon N_D}\right)^{1/2} - 1\right] - kT\ln\left(\frac{N_c}{N_D}\right)\left[1+\left(\frac{q^2 N_s E_G}{4\varepsilon N_D}+1\right)^{1/2}\right], \tag{36}$$

stąd przewodność warstwy jest określona zależnością

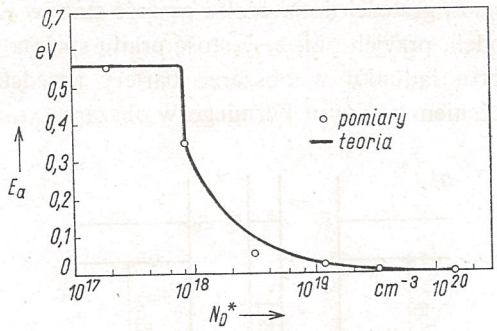
$$\sigma = \left[\left(\frac{q^2 l_1 N_c v_c}{kT}\right)\left(\frac{N_c}{N_D}\right) - (1+q^2 N_s^2 E_G/4\varepsilon N_D)^{-1/2}\right] \cdot \exp\left(\frac{E_a}{kT}\right), \tag{37}$$

gdzie energia aktywacji E_a jest równa sumie dwóch pierwszych składników równania (36). Na rys. 13 przedstawiono zależność E_a od koncentracji domieszek i dla kilku wartości gęstości stanów powierzchniowych, $E_a \to \frac{E_G}{2}$ dla mniejszych wartości N_D i jest proporcjonalne do N_D^{-1} dla większych koncentracji domieszki.



Rys. 13. Energia aktywacji w funkcji koncentracji domieszek dla przypadków przedstawionych na rys. 12

Wyniki doświadczalne badań warstw polikrystalicznego krzemu, osadzonych metodą rozpylania katodowego i implantowanych fosforem, otrzymane przez Baccaraniego i in. [6] potwierdziły słuszność modelu z jednym poziomem pułapkowym. Model z ciągłym rozkładem energii stanów powierzchniowych w paśmie zabronionym nie sprawdził się. Na rys. 14 przedstawiono porównania teoretycznych i eksperymentalnych danych energii aktywacji w funkcji koncentracji domieszek fosforu dla modelu pojedynczego poziomu pułapkowego. Najlepiej dostosowane dane eksperymentalne uzyskano dla $N_s = 3{,}8 \times \times 10^{12}$ cm^{-2}.

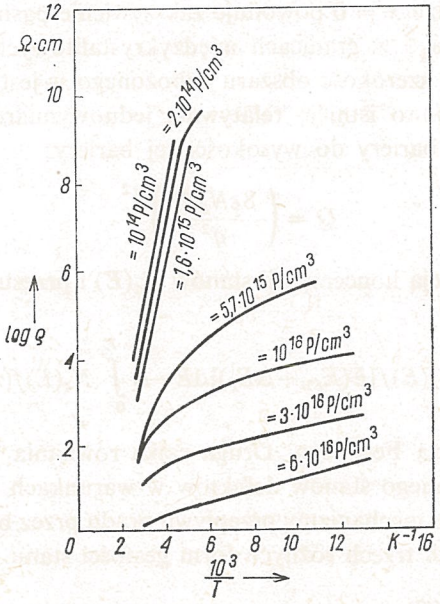


Rys. 14. Teoretyczna i doświadczalna energia aktywacji w funkcji koncentracji domieszek fosforu. $N_s = 3{,}8 \times 10^{12} \mathrm{cm}^{-2}$, $l_1 = 3 \cdot 10^{-6}$ cm

2.5. MODEL SEAGERA I CASTNERA

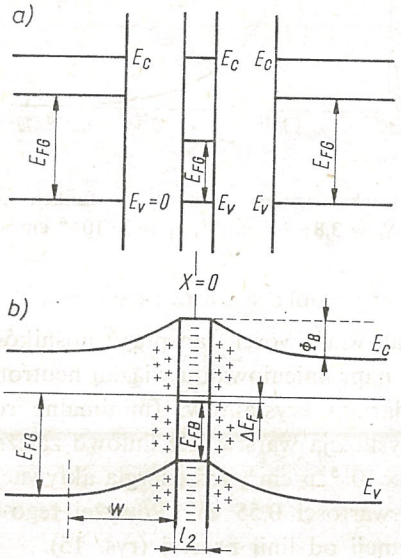
Seager i Castner [5] badali właściwości transportu nośników w warstwach polikrystalicznego krzemu poddanych napromieniowaniu wiązką neutronów. Warstwy te charakteryzowały się dużymi rozmiarami krystalitów, (minimalne rozmiary wynosiły 25 μm). Autorzy ci wykazali, że rezystancja warstw jest liniowo zależna od temperatury poniżej poziomu domieszkowania 2×10^{15} p/cm^3, zaś energia aktywacji jest bliska środka pasma zabronionego i odpowiada wartości 0,55 eV. Powyżej tego poziomu domieszkowania następuje odchylenie rezystancji od linii prostej (rys. 15).

Pomiary wykazały, że istnieje duży przedział impedancji granicy krystalitów tzn., że występuje zmienność wysokości barier potencjału. O ich powstaniu i wielkości decydują,



Rys. 15. Rezystancja w funkcji temperatury dla warstw polikrystalicznego krzemu napromieniowywanych wiązką neutronów

zdaniem Seagera i Castnera, gęstości domieszek i gęstość stanów defektów. Podobnie jak autorzy poprzednich modeli, przyjęli oni, że gęstość prądu spełnia równanie Bethe-Schottky'ego. Proces transportu ładunku w obszarze bariery przedstawiono schematycznie na rys. 16. E_{FG} jest położeniem poziomu Fermiego w obszarze granicy (rys. 16a). Nagro-



Rys. 16. Model pasmowy krystalitów i obszaru granicznego: a — wszystkie trzy obszary występują niezależnie; b — po ich połączeniu przy zerowej polaryzacji zewnętrznej

madzony ładunek w pobliżu $x = 0$ powoduje zakrzywienie pasm energii ku górze o wielkości Φ_B. Poziom Fermiego w granicach międzykrystalitowych jest przesunięty o wielkość ΔE_F (rys. 16b). Gdy szerokość obszaru zubożonego w jest porównywalna do szerokości granicy l_1 ($w \ll l_2$), to istnieje relatywne, jednowymiarowe przybliżenie gęstości ładunków Q w obszarze bariery do wysokości tej bariery:

$$Q = \left(\frac{8\varepsilon N_D \Phi}{q^2} \right)^{1/2}. \tag{38}$$

Gęstość ta jest także funkcją koncentracji stanów $N_d(E)$ i przesunięcia poziomu Fermiego ΔE_F:

$$Q = l_2 \int_0^{E_c} N_d(E) f[E(E_{FB} + \Delta E_F)] \mathrm{d}E - l_2 \int_0^{E_c} N_d(E) f(E, E_{FB}) \mathrm{d}E, \tag{39}$$

gdzie $f(E, E_{FB})$ jest funkcją Fermiego. Druga całka równania (39) przedstawia ładunek wewnątrz pasma zabronionego stanów defektów w warunkach neutralności elektrycznej. Seager i Castner przebadali mechanizmy przepływu prądu przez barierę potencjału i wyznaczyli Φ dla niżej opisanych trzech różnych form gęstości stanu defektów $N_d(E)$.

1. Niezależna energia $N_d(E)$

Ekstrapolując funkcję Fermiego dla warunków $T = 0$ tj., gdy $f(E, E_F) = 0$ jeżeli

$E \gg E_F$ oraz $f(E, E_F) = 1$ jeżeli $E < E_F$ równanie (39) redukuje się do postaci

$$Q = l_2 \int_{E_{FB}}^{E_{FB}+\Delta E_F} N_d(E)\,dE. \tag{40}$$

W tej sytuacji dla dwuwymiarowej gęstości stanów defektów $N_T = l_2 N_d$ energia bariery wynosi

$$q\Phi = \Delta E_F \left[\frac{1+\alpha}{2\Delta E_F} - \left(\frac{\alpha}{\Delta E_F} + \frac{\alpha^2}{4\Delta E_F} \right)^{1/2} \right] \tag{41}$$

gdzie $\Delta E_F = E_{FG} - E_{FB}$ jest różnicą poziomów mierzonych względem krawędzi pasma walencyjnego, zaś $\alpha = \frac{8\varepsilon N_D}{N_T^2}$ przy czym N_D jest poziomem domieszki.

Jeżeli $\alpha \gg E_F$ tj. dla silnie domieszkowanych krystalitów lub małych gęstości stanów defektów $\Phi \to 0$, zaś w wypadku, gdy $\alpha \ll \Delta E_F$ tj. dla nisko domieszkowanych krystalitów lub wysokich gęstości stanów defektów $\Phi \to E_F$. Innym ograniczeniem równania (40) jest fakt, że fizycznie wysokość bariery nie może być większa od różnicy pomiędzy poziomem Fermiego w krystalicie i w obszarze granicznym traktowanych niezależnie przed ich „*połączeniem*". Dla małego α i w przybliżeniu liniowej zależności ΔE_F od temperatury wyliczono, że dla $T = 0$ $E_F \approx 0{,}55$ eV. Potwierdza to fakt, że E_{FB} leży w środku przerwy zabronionej, jeżeli $E_{FE} \approx E_c$ w temperaturze zera bezwzględnego. Przy założeniu, że E_{FB} jest niezależne od temperatury można wykonać wykres Φ w funkcji temperatury dla różnych wartości N_D. Zmieniając N_T można uzyskać dobre dostosowanie wartości do danych przedstawionych na rys. 11. Obliczone wysokości barier Φ są liniowo zależne od temperatury. Wartości te przedstawione są w postaci krzywej (a) na rys. 11 dla $N_T = 3{,}29 \times \times 10^{12}$ cm^{-2} eV^{-1} i $T = 300$ K. Ta najlepiej dostosowana krzywa wskazuje na niskie wartości N_D w obszarach granicznych i na spadek Φ dla dużych N_D.

2. Monoenergetyczne $N_d(E)$

W tym przypadku nie jest możliwe dokładne określenie wysokości bariery. Autorzy wyliczyli ją metodą przybliżoną z równania

$$\left(\frac{8\varepsilon N_D q\Phi}{q^2 N_T^2} \right)^{1/2} = (\alpha q\Phi)^{1/2}. \tag{42}$$

Stwierdzono, że Φ zachowuje się tu podobnie jak w pierwszym przypadku tzn., że wysokość bariery dla małych i dużych α jest ograniczona wartościami 0 i ΔE_F. Wynika stąd, że różnica poziomów Fermiego $\Delta E_F = (E_{FG} - E_{FB})$ wynosi dla $T = 0$ około 0,55 eV. Dobrą zgodność z danymi doświadczalnymi uzyskano dla koncentracji domieszek $N_D = = 5{,}40 \cdot 10^{11}$/cm zlokalizowanych w odległości 0,628 eV od pasma walencyjnego. Niepołączony poziom Fermiego leży w około 0,076 eV poniżej poziomu pułapek.

3. Eksponencjalna postać $N_d(E)$

Dla tego przypadku przyjęto dla N_d wyrażenie w postaci równania

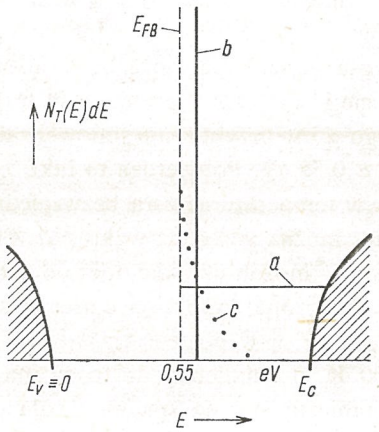
$$[l_2 N_d(E)] \equiv N_T(E) = N_{T0} \exp\left(-\frac{E}{E_0} \right). \tag{43}$$

Z równań (38) i (39) oraz przy ekstrapolacji funkcji Fermiego do $T = 0$ otrzymuje się zależność

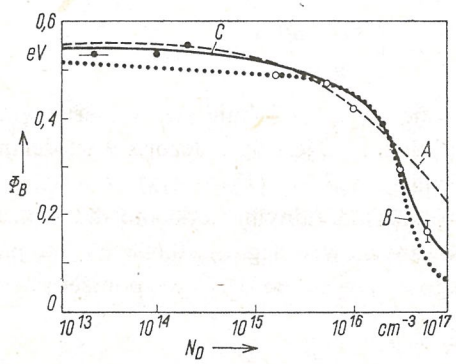
$$\left(\frac{8\varepsilon N_D}{q^2}\right)^{1/2}(q\Phi_B)^{1/2} = E_0\left[N_{T0}\exp\left(-\frac{E_{FB}}{E_0}\right)\right]\left\{1-\exp\left[\frac{(q\Phi_B-\Delta E_F)}{E_0}\right]\right\}, \tag{44}$$

gdzie $N_T = N_{T0}\exp\left(-\frac{E_{FB}}{E_0}\right)$ a N_{T0} i E_0 są parametrami dopasowywanymi. Podobnie jak w poprzednich dwóch przypadkach, $\Phi_B \to E_F$ gdy N_D jest małe lub N_{T0} duże i dla $T = 0$ wynosi około 0,55 eV. Pozwala to ustalić N_{T0} i E_0 tak, aby otrzymać najlepszą zgodność $\Phi_B = f(N_D)$ z eksperymentem. Rozwiązanie równania (44) wskazuje, że najlepiej dopasowanymi wartościami są $N_{T0} = 1{,}89\times10^{15}$ cm^{-2} eV^{-1} i $E_0 = 0{,}099$ eV.

Omówione trzy przypadki zależności N_d są zobrazowane w postaci wykresu przerw energetycznych na rys. 17, zaś na rys. 18 przedstawiono zależność $q\cdot\Phi_B$ od N_d dla trzech



Rys. 17. Gęstość stanów i poziom Fermiego w obszarze bariery polikrystalicznego krzemu: krzywa (a) — $N_t(E) = 3{,}3\times10^{12}$cm^{-2}eV^{-1}; krzywa (b) — $N_t(E) = 5{,}4\times10^{11}$ cm^{-2} w 0,626 eV powyżej Ev i zero w innych miejscach; krzywa (c) — $N_t(E) = (1{,}89\times10^{15}$ cm^{-2} eV$^{-1})\exp(-E)0.099$ eV)

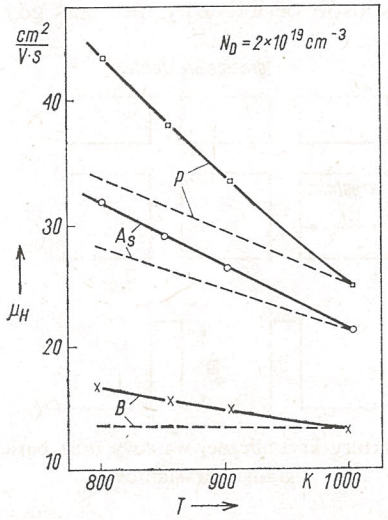


Rys. 18. Największe wysokości barier na granicy krytalitów Φ_B (ekstrapolowane do $T = 0$) w funkcji gęstości domieszek N_D dla warstw polikrystalicznego krzemu napromieniowywanych wiązką neutronów. Krzywe przedstawiają dane dotyczące: a — monoenergetycznej gęstości stanów; b — pojedynczego poziomu energetycznego; c — eksponencjalnej gęstości stanów

wyżej opisanych przypadków gęstości stanu defektów przy zastosowaniu parametrów dopasowania. Model eksponencjalnej gęstości stanów defektów dopasowuje nieco lepiej dane eksperymentalne aniżeli model pojedynczej pułapki, najgorszą zaś zgodność wykazuje model niezależnej energii. Porównania wskazują, że największa gęstość stanów defektów w obszarze granicy krystalitów wynosi $6 \times 10^{11}/cm^2$ osiąganych stanów elektronowych wewnątrz pasma 0,2 eV, zlokalizowanego w środku przerwy: to jest niżej niż odpowiednia wartość $3 \times 10^{12}/cm^2$ dla modeli Seto i Baccarani.

2.6. FENOMENOLOGICZNY MODEL PRZEWODNICTWA MANDURAHA

W szeregu prac doświadczalnych wykazano duże zmiany rezystywności warstw krzemu polikrystalicznego domieszkowanego arsenem i fosforem (m.in. [13, 14]) w wyniku wygrzewania ich w różnych temperaturach. Na rys. 19 [14] pokazano zależność ruchliwości Halla w temperaturze pokojowej w funkcji końcowej temperatury wygrzewania dla trzech rodza-



Rys. 19. Ruchliwość Halla w temperaturze pokojowej w funkcji wygrzewania warstw temp. 800, 850 lub 900°C. Temperatura wygrzewania początkowego 1000°C

jów domieszek. We wszystkich przypadkach ruchliwość μ_H wzrasta od wartości początkowej pomierzonej dla próbek wygrzewanych w 1000°C i przy dodatkowym wygrzewaniu w niższych temperaturach. Największe zmiany zostały spowodowane wygrzewaniem w najniższych temperaturach. Zmiana ruchliwości jest szczególnie wyraźna dla warstw polikrystalicznego krzemu domieszkowanego fosforem i arsenem po wygrzewaniu w 800°C. Ponadto rezystywność warstw domieszkowanych arsenem jest zwykle wyższa niż rezystywność podobnie domieszkowanych warstw fosforem wygrzewanych w tej samej temperaturze.

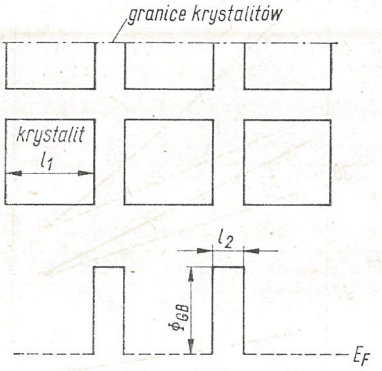
Nie zaobserwowano natomiast wyraźnych zmian rezystywności w krzemie domieszkowanym borem. Różnica ta jest spowodowana tym, że atomy arsenu i fosforu w przeciwieństwie do atomów boru mają tendencje do segregacji na granicach krystalitów pod-

czas wygrzewania w niskich temperaturach. W ten sposób maleje rozpraszanie nośników na zjonizowanych domieszkach wewnątrz krystalitów i w rezultacie następuje mały wzrost ruchliwości nośników. Zależność rezystywności od rodzaju domieszki i duże zmiany rezystywności po wygrzewaniu nie mogą być wyjaśnione przy pomocy modeli pułapkowania nośników.

2.6.1. Podstawy modelu

Wyjaśnienia zależności właściwości elektrycznych warstw polikrystalicznego krzemu od procesów ich obróbki w wysokich temperaturowych oraz od rodzaju domieszek podali Mandurah i in. [21] proponując w tym celu fenomenologiczny model przewodnictwa elektrycznego warstw polikrystalicznego krzemu. Model ten opaty został na trzech zjawiskach: segregacji domieszek, pułapkowania nośników i odbicia nośników od barier potencjału, występujących na granicach krystalitów.

Model rozpatrywanej warstwy przedstawiono na rys. 20. Wewnątrz każdego krystalitu atomy są rozmieszczone w sposób periodyczny, podczas gdy granice krystalitów są zło-

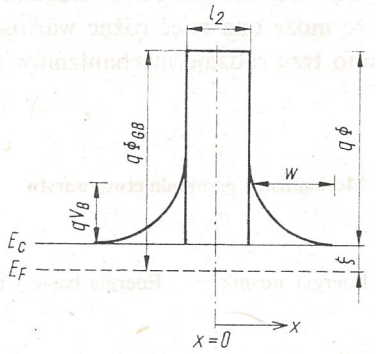


Rys. 20. Schematyczny obraz struktury krystalicznej warstwy oraz barier potencjału utworzonych przez granice krystalitów

żone z nieuporządkowanych atomów i zawierają dużą liczbę defektów spowodowanych niekompletnym wiązaniem. Duża koncentracja defektów i wolnych wiązań na granicach krystalitów jest przyczyną istnienia stanów pułapkowych i miejsc segregacji domieszek. Podobnie jak w poprzednich modelach o właściwościach elektrycznych warstw decydują granice krystalitów.

Autorzy przyjęli kilka założeń dotyczących właściwości tych granic. Materiał granicy ma budowę pośrednią pomiędzy całkowicie uporządkowanym kryształem a strukturą amorficzną. Szerokość pasma zabronionego dla materiału granicy jest nieco większa aniżeli szerokość pasma zabronionego dla materiału krystalitu. Wysoka koncentracja defektów i niewysyconych wiązań na granicach stwarza idealne warunki, w których każdy atom domieszki donorowej na granicy mógłby mieć wszystkie pięć wiązań wysyconych. Podobnie trzy wiązania atomu domieszki akceptowanej mogłyby być skompensowane. Poziom Fermiego materiału granicy leży w pobliżu środka pasma zabronionego. W takich warunkach pomiędzy krystalitem a granicą tworzy się heterozłącze, w którym materiał

granicy jest półprzewodnikiem samoistnym. Dlatego też wpływ granic krystalitów na właściwości warstwy może być modelowany przez bariery potencjału, jak pokazano na rys. 21 dla polikrystalicznego krzemu typu n. Analogiczna sytuacja może być rozważana



Rys. 21. Schemat energetyczny pasm w pobliżu granicy krystalitu przy zerowym napięciu polaryzującym

dla materiału typu p. Energia tych barier odniesiona do poziomu Fermiego jest równa $\frac{E_{FB}}{2}$, gdzie E_{FB} jest szerokością pasma zabronionego materiału granicy, a szerokość każdej z tych barier jest w przybliżeniu równa szerokości granicy między krystalitami l_2.

Podobnie jak w poprzednich modelach wysoka koncentracja defektów i niewysyconych wiązań na granicach krystalitów jest przyczyną istnienia stanów pułapkowych zdolnych do związania ładunków domieszki lub nośników ładunku. W rezultacie część atomów domieszki ulega na granicy segregacji, gdzie są pułapkowane i stają się elektrycznie nieaktywne. Pozostałe atomy domieszki są rozłożone jednolicie wewnątrz krystalitów i mogą być zjonizowane. Część nośników jest pułapkowana na granicach co powoduje zmniejszenie ich ilości w każdym krystalicie i wytwarza dodatkowe bariery potencjału w obszarach zubożonych krystalitów w pobliżu ich granic, jak pokazano na rys. 21.

Autorzy rozważali przypadki o średnich i dużych koncentracjach domieszek, dla których wewnątrz każdego krystalitu istnieje obszar neutralny. Model może być rozszerzony na przypadek niskiej koncentracji domieszkowania, gdzie krystality są całkowicie zubożone.

Energia bariery potencjału w obszarze zubożonym $q\Phi_{(x)}$ odniesiona do dna pasma przewodnictwa E_c w obszarze neutralnym krystalitu może być wyrażona jako funkcja odległości w postaci

$$q\Phi_{(x)} = \frac{q^2 N_G}{2\varepsilon}\left[\left(w+\frac{l_2}{2}\right)-|x|\right]^2. \tag{45}$$

Funkcja ta posiada maksimum wartości

$q\Phi = \frac{q^2 N_G w^2}{2\varepsilon}$ dla $|x| = \frac{l_2}{2}$ gdzie w jest szerokością obszaru zubożonego i wynosi [6, 7]

$$w = \frac{Q_t}{2N_G} \tag{46}$$

gdzie $Q_t[\mathrm{cm}^{-2}]$ jest gęstością stanów pułapkowych na granicy krystalitów, a N_G wielkością koncentracji domieszek, powstającą w krystalitach po uwzględnieniu segregacji domieszek na granicach i jest obliczona jako funkcja całkowitej koncentracji domieszek N [13]. O transporcie nośników decyduje ich energia $\mathscr{E}x$ w stosunku do energii bariery potencjału $q\Phi(x)$. Z rys. 21 widać, że może ona mieć różne wartości zależnie od energii nośników. W tablicy 1 przedstawiono trzy rodzaje mechanizmów przewodnictwa w zależności od $\mathscr{E}x$.

Tabela 1

Mechanizmy przewodnictwa warstw

Opis mechanizmu	Oznaczenia mechanizmu	Energia nośników	Energia bariery potencjału	Wartość $\lvert x\rvert$
Nośniki tunelują przez barierę; ich energia jest niewystarczająca do pokonania bariery potencjału obszaru zubożonego	(a)	$\mathscr{E}_x < qV_b$	0	$x > w+\frac{l_2}{2}$
			$\frac{q^2N_G}{2\varepsilon}\left[w+\frac{l_2}{2}-\lvert x\rvert\right]^2$	$w+\frac{l_2}{2} < x < \frac{l_2}{2}$
			$\frac{qN_G}{2\varepsilon}w^2$	$x = \frac{l_2}{2}$
Nośniki mają wystarczającą energię do pokonania barier w obszarach zubożonych, ale niewystarczającą do wywołania przejścia ponad barierę obszaru granicznego	(b)	$qV_b < \mathscr{E}_x < q\Phi$	0	$x < \frac{l_2}{2}$
			$q\Phi$	—
Nośniki pokonują barierę potencjału (występuje czyste przejście ponad barierami)	(c)	$\mathscr{E}_x > q\Phi$	0	—

2.6.2. Zależność prądowo-napięciowa *I-V*

Transport nośników w warstwie, której uproszczony model przedstawiono na rys. 19, może odbywać się dwoma sposobami: przez obszary granic krystalitów przepływając z jednego krystalitu do drugiego oraz dzięki przewodnictwu omowemu wzdłuż obszarów granic krystalitów. Ponieważ granice mają dużo większą rezystancję, dlatego przewodzenie głównie ma miejsce dzięki przechodzeniu nośników z jednego krystalitu do drugiego

w wyniku tunelowania i/lub przechodzeniu ponad barierami. Jednowymiarowe, niezależne od czasu prawdopodobieństwo tunelowania $D(\mathscr{E}x)$ dla bariery o wysokości $\Phi(x)$ w przybliżeniu wynosi [15, 16, 26]

$$D(\mathscr{E}x) = \exp\left\{-\frac{4\pi}{h}\int_{x_1}^{x_2}[2m^*(q\Phi(x)-\mathscr{E}x)]^{1/2}\mathrm{d}x\right\}, \tag{47}$$

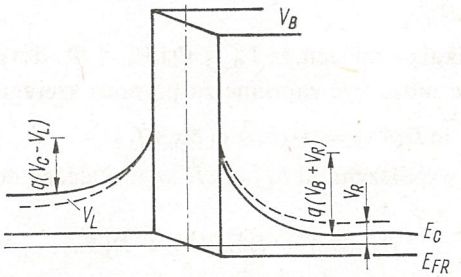
gdzie $\mathscr{E}x$ jest tu składową energii padającego nośnika w kierunku x, gdzie energia zerowa odpowiada energii dna pasma przewodnictwa w obszarze neutralnym krystalitu, a m^* — efektywna masa nośników jest niezależna od ich energii. Liczba nośników mających energię wewnątrz przedziału $d\mathscr{E}x$ padających na bariery w ciągu sekundy na jednostkę powierzchni jest dana przez [26] równanie

$$N(T, \xi\mathscr{E}x) = \frac{4\pi m^* kT}{h^3}\ln\left\{1+\exp\left[-\frac{(\mathscr{E}x+\xi)}{kT}\right]\right\}\mathrm{d}\mathscr{E}x, \tag{48}$$

gdzie: $\xi = E_c - E_F$, k — stała Boltzmanna, h — stała Planka. Jeżeli przyjąć, że V_0 jest całkowitym spadkiem napięcia na obszarze granicy krystalitów, to

$$V_0 = V_B + V_L + V_R, \tag{49}$$

gdzie V_B jest spadkiem napięcia na barierze granicy krystalitu, a V_L i V_R odpowiednio spadkami napięć na obszarach zubożonych po lewej i prawej stronie granicy (rys. 22).



Rys. 22. Schemat energetyczny pasm w pobliżu granicy krystalitu z przyłożonym napięciem zewnętrznym

Przyjmujemy, że ilość elektronów tunelujących z lewej na prawą stronę wynosi N_{LR} i z prawej na lewą N_{RL}. Całkując równania (47) i (48) po wszystkich energiach autorzy pracy [21] zależność gęstości prądu przez granicę krystalitu podali w postaci:

$$J = q(N_{LR}-N_{RL}) =$$

$$= q\left(\frac{4\pi m^* kT}{h^3}\right)\left[\int_0^\infty \ln\left\{1+\exp\left[\frac{-(\mathscr{E}x+\xi-qV_B)2-qV_L}{kT}\right]\right\}D_{LR}(\mathscr{E}x)\,\mathrm{d}\mathscr{E}x -\right.$$

$$\left. -\int_0^\infty \ln\left\{1+\exp\left[\frac{-(\mathscr{E}x-\xi+qV_B)2+qV_R}{kT}\right]\right\}D_{RL}(\mathscr{E}x)\cdot\mathrm{d}\mathscr{E}x\right], \tag{50}$$

gdzie $D_{LR}(\mathscr{E}x)$ i $D_{RL}(\mathscr{E}x)$ są prawdopodobieństwami tunelowania przez barierę z lewej strony na prawą i z prawej na lewą i są funkcjami różnych spadków napięć na barierze

granicy krystalitu i w obszarach zubożonych po obydwu jej stronach tak, że $D_{LR}(\mathscr{E}x) \neq D_{RL}(\mathscr{E}x)$. Rozwiązanie równania (50) jest skomplikowane i możliwe metodą numeryczną. Analitycznie można je rozwiązać przy upraszczających założeniach. Przede wszystkim chodzi o ograniczenie rozwiązania do średniego zakresu temperatur, najbardziej praktycznego dla działania przyrządów półprzewodnikowych.

Ponadto dla założeń ograniczających wielkość napięcia przyłożonego do krystalitu V_0, które jest dużo mniejsze od wysokości bariery na granicy krystalitu Φ_B ($V_0 \ll V_B$) oraz, że maksymalna wysokość bariery w zubożonym obszarze krystalitu jest dużo mniejsza od Φ_B ($V_B \ll \Phi_B$). W tych warunkach przewodnictwo odbywa się głównie przez tunelowanie nośników ponad barierami obszarów zubożonych tj. nośników, których energia zawiera się w zakresie $qV_B < \mathscr{E}x < q\Phi_B$ (drugi rodzaj mechanizmu przewodnictwa (a) tabl. 1).

Przy powyższych ograniczeniach w równaniu (50) zmieniają się granice całkowania, które są dobrane w taki sposób, że ograniczają równanie tylko do nośników, których energie zawierają się pomiędzy wierzchołkiem bariery obszaru zubożonego i wierzchołkiem bariery na granicy krystalitu. Przyjmuje ono postać równania (51)

$$J = q\left(\frac{4\pi m^* kT}{h^3}\right)\left[\int_{qV_B+qV_B/2}^{q\Phi+qV_B/2} D_{LR}\mathscr{E}x\exp\left[\frac{-(\mathscr{E}x+\xi-qV_B)2-qV_L}{kT}\right]\mathrm{d}\mathscr{E}x - \right.$$

$$\left. - \int_{qV_B-qV_B/2}^{q\Phi-qV_B/2} D_{RL}(\mathscr{E}x)\exp\left[\frac{-(\mathscr{E}x+\xi+qV_B)2+qV_R)}{kT}\right]\mathrm{d}\mathscr{E}x\right]. \tag{51}$$

Dalsze uproszczenia wynikają z założeń, że $V_0 \ll \Phi$ i $V_b \ll \Phi$ i dotyczą prawdopodobieństwa tunelowania $D(\mathscr{E}_x)$, które może być zapisane za pomocą szeregu Taylora w postaci (16):

$$\ln D(\mathscr{E}x) = -(b_1 + c_1\mathscr{E}x + f_1\mathscr{E}_x^2 + \ldots). \tag{52}$$

Ponieważ $V_0 \ll \Phi$ to współczynniki b_1, c_1, f_1 są niezależne od napięcia polaryzującego (26) wówczas

$$D_{LR}(\mathscr{E}_x) = D_{RL}(\mathscr{E}x) = D(\mathscr{E}x). \tag{53}$$

Wprowadzając uproszczenia wynikające z równań (52) i (53) do (51) i przy zastosowaniu odpowiednich przybliżeń i zaniedbaniu wyrazów eksponencjalnych zawierających $q\Phi$ jako małe w stosunku do wyrazów eksponencjalnych zawierających qV_b, otrzymuje się charakterystykę prądowo-napięciową w formie

$$J = q\frac{4\pi m^* k^2 T^2}{h^3}\exp\left(-\frac{\xi}{kT}\right)\frac{\exp(-b_1)}{(1-c_1 kT)}\exp\left(\frac{-qV_b}{kT}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\exp\left[\frac{qV_L}{kT}+c_1\frac{qV_B}{2}\right]-\exp\left[\frac{-qV_R}{kT}-c_1\frac{qV_B}{2}\right]\right], \tag{54}$$

gdzie dla prostokątnej bariery potencjału na granicy krystalitu

$$b_1 = \frac{4\pi l_2}{h}(2\pi m^*)^{1/2}(q\Phi - qV_b)^{1/2} \tag{55a}$$

$$c_1 = \frac{2\pi l_2}{h}(2\pi m^*)^{1/2}(q\Phi - qV_b)^{1/2}. \tag{55b}$$

Równanie (54) pokazuje, że gęstość prądu jest funkcją zarówno spadku napięcia na barierze związanej z granicą krystalitu, jak i spadku napięcia na barierach obszarów zubożonych po obu stronach tej bariery. W celu wyznaczenia przewodnictwa układu Mandurah i in. określili względny rozkład spadków napięć na *„złożonym"* obszarze granicy krystalitu w stosunku do całkowitego napięcia. Założyli oni, że granice krystalitów mają stałą gęstość stanów pułapkowych Q_t [6, 7].

Dla wszystkich napięć polaryzujących całkowita ilość pułapkowych nośników musi być równa ilości stanów pułapkowych na granicy

$$N_G(w_{L0}+w_{R0}) = Q_t = N_G(w_L+w_R). \tag{56}$$

Indeks zero oznacza zerowe napięcie polaryzujące. W zależności pomiędzy szerokością obszaru zubożonego i potencjałem wynika, że spadki napięcia na obszarach zubożonych po lewej i prawej stronie granicy krystalitu podane w pracach [17, 18] i wynoszą:

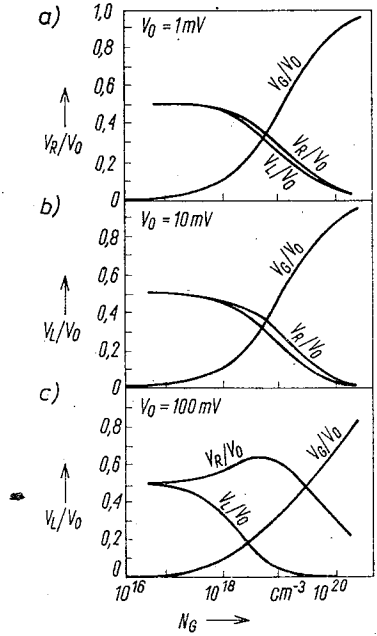
$$\begin{aligned} 2V_b^{1/2} &= (V_b+V_R)^{1/2}+(V_b-V_L)^{1/2} \quad \text{dla} \quad V_d < 2V_b, \\ V_L &= V_b \quad \text{zaś} \quad V_R = 2V_d-V_b \quad \text{dla} \quad V_d \geqslant 2V_b, \end{aligned} \tag{57}$$

gdzie $2V_d$ jest całkowitym spadkiem napięcia na obszarach zubożonych krystalitów, tj. $2V_d = V_L+V_R$.

Spadek i napięcia na granicy krystalitu zostały opisane wyrażeniami:

$$V_B = l_2\left(\frac{qN_G}{2\varepsilon}\right)^{1/2}[(V_b+V_R)^{1/2}-(V_b-V_L)^{1/2}] \quad \text{dla} \quad V_d < 2V_b, \tag{58a}$$

$$V_B = l_2\left(\frac{qN_G}{2\varepsilon}\right)^{1/2}(2V_d)^{1/2} \quad \text{dla} \quad V_d \geqslant 2V_b. \tag{58b}$$



Rys. 23. Rozkład napięcia pomiędzy krystality i obszar graniczny w funkcji przeciętnej koncentracji domieszek wewnątrz krystalitów dla różnych napięć polaryzujących

Spadek napięcia na obszarach zubożonych po lewej i prawej stronie granicy oraz na samej granicy otrzymujemy przez rozwiązanie równań (57) i (58) oraz (49). Wykresy V_B/V_0, V_L/V_0, V_R/V_0 w funkcji koncentracji domieszek są pokazane na rys. 23 dla wartości $V_0 = 1$ mV, 10 mV, 100 mV odpowiednio dla $l_2 = 10$ Å i $Q_t = 2{,}35 \cdot 10^{12}$ cm^{-2}. Z wykresów na rys. 23 widać, że względne wartości różnych spadków napięć na obszarach zubożonych i na granicy krystalitu są funkcjami koncentracji domieszek i wielkości napięcia polaryzującego (V_b jest funkcją koncentracji domieszek).

Jeżeli przyjmiemy ograniczenie rozwiązania równań (50) i (54) do napięć polaryzujących dużo mniejszych niż wysokość bariery w obszarach zubożonych ($V_0 \ll V_b$) to spadki napięć na obszarach zubożonych i na granicy krystalitu będą [17]

$$V_L = V_R = V_d,$$

$$V_B = \frac{l_2 N_G}{Q_t} 2V_d$$

i jeżeli $V_0 < kT$ to przewodność obszaru granicy σ_B w liniowym zakresie dana jest równaniem [21]

$$\sigma_B = q^2 \left(\frac{4\pi m^* kT}{h^3}\right) L_B \exp\left(\frac{-\xi}{kT}\right) \frac{\exp(-l_1)^{b_1}}{(1-c_1 kT)} \cdot \exp\left(\frac{-qV_b}{kT}\right) \frac{(1+c_1 kT)\dfrac{l_2 N_G}{Q_t}}{\left(1+\dfrac{l_2 N_G}{Q_t}\right)},$$

gdzie $L_B = 2w + l_2$.

Powyższe jest słuszne dla $V_0 < 10$ mV i całego zakresu koncentracji domieszek. Warunki te są generalnie spełnione w większości praktycznych zastosowań drobnoziarnistych warstw polikrystalicznego krzemu.

2.6.3. Wpływ koncentracji domieszek

Zależność (54) była wyprowadzona bez żadnych założeń dotyczących koncentracji domieszki. Jednakże szerokość obszarów zubożonych w krystalitach powstałych na skutek pułapkowania nośników jest funkcją koncentracji domieszek [3÷6], która pośrednio wpływa na warunki zastosowania powyższej teorii. Przy bardzo dużych koncentracjach domieszek obszary zubożone w krystalitach stają się bardzo wąskie i wysokość związanych z nimi barier staje się bardzo mała. Ponadto poziom Fermiego znajduje się wewnątrz lub blisko pasma przewodnictwa. W tych warunkach spadek napięcia na obszarach zubożonych jest b. mały i prawie cały spadek napięcia będzie się odkładał na granicy krystalitu, jak pokazano na rys. 23. W konsekwencji można założyć, że:

$$V_b = 0, \quad V_L = V_R = 0, \quad V_B = V_0. \tag{60}$$

Przy założeniu, że występuje całkowita jonizacja stanów domieszki wewnątrz krystalitu, koncentracja nośników w krystalitach n jest dana równaniem

$$n = N_c \exp -\left(\frac{\xi}{kT}\right) \equiv 2\left(\frac{2\pi m^* kT}{h_3}\right)^{2/3} \exp\left(-\frac{\xi}{kT}\right) \approx N_G. \tag{61}$$

Wstawiając (60) i (61) do (54) otrzymuje się zależność *I-V* w postaci

$$J = \frac{qN_G kT}{(2\pi m^* kT)^{1/2}} - \frac{\exp(-b_1)}{(1-c_1 kT)} \cdot 2\sinh\left(c_1 \frac{qV_0}{2}\right). \tag{62}$$

Dla małych napięć polaryzujących $V_0 \ll kT$ przewodność granicy krystalitu σ_B przy dużych koncentracjach domieszek dana jest równaniem

$$\sigma_B = \frac{q^2 N_G L_B c_1 kT}{(2\pi m^* kT)^{1/2}} \cdot \frac{\exp(-b_1)}{(1-c_1 kT)}.$$

Dla małych koncentracji domieszek wysokość bariery obszaru zubożonego qV_b ma maksymalną wartość, w przybliżeniu równą $E_G/2$ [1, 6], gdzie E_G jest szerokością pasma zabronionego dla krzemu monokrystalicznego. Ponieważ przy małych koncentracjach domieszek bariera na granicy krystalitów jest tylko niewiele wyższa niż maksymalna wysokość bariery obszaru zubożonego i szerokość tej bariery jest dużo mniejsza (rzędu 10 Å) niż szerokość obszaru zubożonego w krystalitach ($\gg$ 100 Å) [6, 7], to dominującym mechanizmem przewodnictwa jest termoemisja ponad barierę obszaru zubożonego. Dla tych warunków zależność prądowo-napięciowa odpowiada teorii prostego modelu pułapkowania nośników, rozwiniętej w pracach [5, 6, 29].

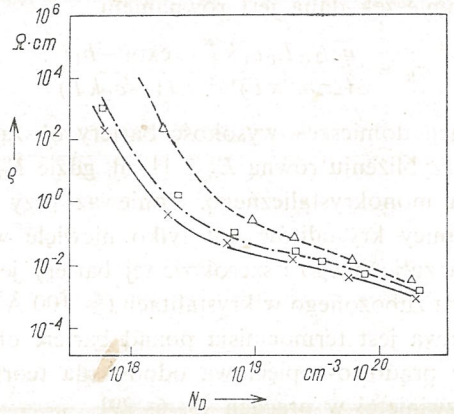
5. PORÓWNANIE TEORII Z EKSPERYMENTEM

Mandurah M. M. i in. [21] dopasowali opisany model teoretyczny do danych eksperymentalnych dla warstw polikrystalicznego krzemu domieszkowanego arsenem lub fosforem. Warstwy były osadzone chemicznie z fazy gazowej pod niskim ciśnieniem (~ 0,2 Tr) do grubości 0,5 μm przy 625°C, na termicznie utlenione płytki Si. Atomy arsenu lub fosforu o dawkach w zakresie 10^{14}—10^{16}/cm^2 były implantowane w warstwy z energią 180 keV. W celu zapobieżenia ucieczce atomów domieszki i zabezpieczenia powierzchni warstwy od otoczenia (ważne dla późniejszych cykli wygrzewania) na warstwy po implantacji osadzono dwutlenek krzemu w temp. 450°C. Następnie wszystkie warstwy były wygrzewane w temp. 1000 lub 1100°C przez 1 godzinę w celu aktywacji i redystrybucji atomów domieszki oraz ustabilizowania rozmiarów krystalitów tak, aby późniejsze wygrzewania w niższych temperaturach nie zmieniły ich w sposób zauważalny. Z kolei część warstw była wygrzewana w temperaturach 900, 850, 800°C odpowiednio przez 12, 24, 64 godziny w celu segregacji atomów domieszki na granicach krystalitów [13, 14]. Wygrzewanie prowadzono w atmosferze suchego azotu.

Na rys. 24 i 25 pokazano wykresy rezystywności polikrystalicznego krzemu w funkcji średnich wartości koncentracji domieszki. Na rys. 24 dla warstw domieszkowanych arsenem i wygrzewanych w 1000°C i 1100°C (linia przerywana i linia przerywana kropkami) oraz dla warstw domieszkowanych fosforem i wygrzewanych w 1100°C (linia ciągła).

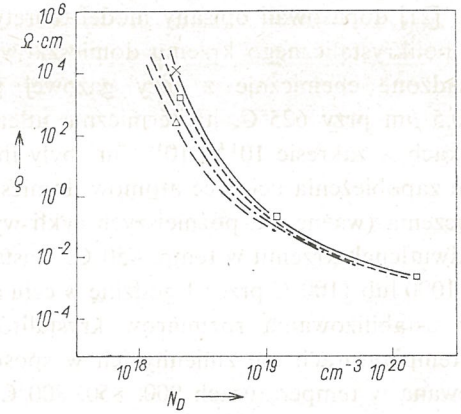
Odpowiadające eksperymentalnym pomiarom wartości dla tych trzech przypadków oznaczono odpowiednio △, □, ○; zaś na rys. 25 pokazano podobne krzywe dla warstw domieszkowanych arsenem i wygrzewanych w temp. 900, 850, 800°C. Szczegółowe oznaczenia podane są na rysunku, przy czym krzywa przerywana jest powtórzeniem z rys. 24.

i odpowiada wygrzewaniu warstwy w 1000°C. Model teoretyczny był dopasowany do danych eksperymentalnych poprzez zastosowanie trzech wielkości jako parametrów wykresu: gęstości stanów pułapkowych Q_t, wysokości barier na granicy krystalitów Φ_B i szerokości barier l_2. Rozwiązanie ograniczono do przyłożonych napięć dużo mniejszych od kT/q oraz przy założeniach, że: (a) w krystalitach istnieje całkowita jonizacja domieszek, (b)



Rys. 24. Rezystywność warstw polikrystalicznego krzemu domieszkowanych arsenem i fosforem w funkcji koncentracji domieszki dla różnych temperatur wstępnego wygrzewania

——△ poli-Si domieszkowane As, wsętpnie wygrzewane w 1000°C; —.—□ poli-Si domieszkowane As, wstępnie wygrzewane w 1100°C; —× poli-Si domieszkowane P, wstępnie wygrzewane w 1000°C



Rys. 25. Rezystywność warstw polikrystalicznego krzemu domieszkowanych arsenem jako funkcja koncentracji domieszki dla różnych końcowych temperatur wygrzewania. Wszystkie próbki były wstępnie wygrzewane w $t = 1000°C$

Poli-Si domieszkowane As, wstępnie wygrzewane w 1000°C; —× —później wygrzewane w 800°C; ——□ później wygrzewane w 850°C; ——△ później wygrzewane w 900°C; —.—.— bez późniejszego wygrzewania

wysokość barier na granicach jest własnością wyłącznie materiału granicy (a więc nie jest funkcją typu domieszki i koncentracji domieszki oraz historii procesów wytwarzania), który zachowuje się jak półprzewodnik o szerokim paśmie zabronionym, (c) wartości gęstości stanów pułapkowych i szerokości bariery są funkcjami temperatury wygrzewania i typów domieszki ale nie są funkcjami koncentracji domieszki.

Doskonała zgodność pomiędzy teorią i eksperymentem została uzyskana przy wysokości bariery równej 0,66 eV dla wszystkich przypadków, gęstości stanów pułapkowych $2 \times 10^{12}/cm^2$ i szerokości granicy 7 Å.

6. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Właściwości elektryczne warstw polikrystalicznego krzemu zależą m.in. od koncentracji domieszek. Przy małych koncentracjach ich rezystywność jest dużo wyższa od rezystywności krzemu monokrystalicznego z małą czułością na zmiany koncentracji domieszek [1, 6, 7, 20].

Przy średnich koncentracjach domieszek niewielki ich wzrost powoduje gwałtowny spadek rezystywności. Przy dużych koncentracjach rezystywność warstwy zbliża się do rezystywności krzemu monokrystalicznego, ale nigdy nie osiąga tej wartości. Innymi słowy ruchliwość nośników w krzemie polikrystalicznym jest niższa od krzemu monokrystalicznego w całym zakresie koncentracji domieszek.

Dla wyjaśnienia zmian rezystywności warstw polikrystalicznego krzemu wraz ze zmianą koncentracji domieszek zaproponowano kilka modeli [1, 7, 20]. Modele pułapkowania nośników zakładają jednakowy rozkład atomów domieszki w materiale i pułapkowanie nośników na granicach krystalitów. Pułapkowane nośniki tworzą bariery potencjału, które ograniczają transport swobodnych nośników od krystalitu do krystalitu, a tym samym przewodność warstw. Duża rezystywność warstw przy niskich koncentracjach domieszek jest wyjaśniona pułapkowaniem większości nośników na granicach krystalitów i niewielką ilością swobodnych nośników. Wzrost koncentracji domieszek powoduje wzrost pułapkowanych nośników aż do nasycenia. Przy dalszym wzroście domieszek ilość pułapkowanych nośników nie wzrasta w sposób wyraźny, a w konsekwencji bariery potencjału maleją powodując spadek rezystywności warstw.

Modele pułapkowe opisane w tym artykule z wyjątkiem modelu Kamins'a posiadają pewne ograniczenia wynikające z przyjętych założeń. Przede wszystkim pomijana jest rezystywność krystalitów jako mała w stosunku do rezystywności obszaru granicznego. Rezystywność krystalitów może mieć znaczny udział w rezystywności warstwy, zwłaszcza jeżeli ich rozmiary i poziom domieszkowania są względnie duże. Drugim ważnym ograniczeniem jest przyjęcie monoenergetycznego stanu pułapkowego. Rozkład energetyczny stanów pułapkowych ma bowiem bezpośredni wpływ na energię aktywacji, ruchliwość oraz koncentrację nośników, zwłaszcza gdy krystality są całkowicie zubożone. Seto zakłada, że stany pułapkowe w zależności od rodzaju domieszki są zlokalizowane w obszarach poza środkiem pasma zabronionego. Nieprawdziwe jest założenie Seto, że w danych warunkach wszystkie pułapki możliwe do obsadzania są zawsze obsadzone.

Uproszczeniem jest również założenie, że obszar graniczny ma pomijalny rozmiar w stosunku do rozmiaru krystalitu. Redukcja obszaru granicznego do powierzchni wewnętrznej jest przypadkiem ekstremalnym. Żaden z modeli pułapkowania nośników nie wyjaśniał zależności właściwości elektrycznych od procesów temperaturowych, jakim poddawane są warstwy podczas ich obróbki, ani też od rodzaju domieszek. Natomiast doświadczenie wykazało duże zmiany rezystywności warstw politycznego krzemu domiesz-

kowanego arsenem i fosforem w zależności od temperatur wygrzewania. Ponadto rezystywność warstw domieszkowanych arsenem była zwykle wyższa od rezystywności podobnie domieszkowanych warstw fosforem wygrzewanych w tej samej temperaturze (rys. 19). Jak już wspomniano zależność rezystywności od rodzaju domieszki i duże zmiany rezystywności po wygrzewaniu nie mogą być wyjaśnione odrębnie za pomocą modelu pułapkowania nośników (lub modelu segregacji domieszek).

Wyjaśnienie tych zjawisk podali Mandurah i in. [14, 21] przy pomocy fenomenologicznego modelu opartego na trzech zjawiskach fizycznych: pułapkowania nośników, segregacji domieszek i tunelowania nośników przez barierę potencjału. Wykazali oni, że elektryczne właściwości warstw polikrystalicznego krzemu są funkcjami elektrycznych i fizycznych właściwości granic krystalitów. Stąd niektóre zmiany elektrycznych właściwości warstw polikrystalicznego krzemu mogą być uzyskane przez zmianę właściwości granic podczas wygrzewania warstw*).

Prace Manduraha i in. (fenomenologiczny model i wyniki doświadczalne) dowodzą, że można:

a) wyznaczyć zależność elektrycznych właściwości warstw od technologii ich wytwarzania. Uzyskać to można przez wyznaczenie liczby atomów domieszki segregowanych na granicy krystalitów jako funkcji „historii" wygrzewania oraz przez określenie wpływu efektu wygrzewania na właściwości granic krystalitów (np. na Q_t i l_2),

b) wyjaśnić zależność właściwości elektrycznych warstw polikrystalicznego krzemu od typu domieszki. Różne typy domieszek segregują się w różny sposób na granicach krystalitów i mogą w różny sposób kształtować granice,

c) wyjaśnić wyższą rezystywność polikrystalicznego krzemu w porównaniu z monolitycznym krzemem nawet dla bardzo wysokich koncentracji domieszek.

Segregacja domieszki na granicach krystalitów powoduje redukcje liczby atomów domieszki wewnątrz krystalitów, a odbicie nośników na granicach krystalitów redukuje ich ruchliwość. Te dwa efekty wyjaśniają wyższą rezystywność polikrystalicznego krzemu w porównaniu z tak samo domieszkowanym krzemem monokrystalicznym.

Model Manduraha i in. należy uznać za duże osiągnięcie teoretyczne potwierdzone doświadczalnie. Daje on szerokie możliwości interpretacyjne właściwości fizycznych i elektrycznych warstw polikrystalicznego krzemu poprzez uwzględnienie wpływu technologii otrzymywania i przygotowania warstw.

LITERATURA

1. T. J. Kamins: *Hall Mobility in Chemically Deposited Polycrystalline Silicon.* J. Appl. Phys., 1971, 42, 4357
2. T. J. Kamins: *Field-effects in Polycrystalline-silicon Films.* Solid-State Electron., 1972, 15, 789
3. P. Rai-Choudchury, P. L. Hower: *Growth and Characterization of Polycrystalline Silicon.* J. Electrochem. Soc., 1973, 120, 1976
4. E. Poon, W. Hwang: *Phenomenological Model of Grain-boundary Trapping States in Polycrystalline Silicon Under Optical Illumination.* Solid-state Electron., 1982, 25, 699

*) Autor niniejszego artykułu badał właściwości polikrystalicznych warstw CdHgTe w zależności od ich obróbki cieplnej; wyniki zostały opublikowane m.in. w pracach [29, 30].

5. C. H. Seager, T. G. Castner: *Zero-bias Resistance of Grain Boungaries in Neutron-transmutation-deped Polycrystalline Silicon.* J. Appl. Phys., 1978, 49, 3879
6. G. Baccarani, B. Ricco, G. Spadini: *Transport Properties of Polycrystalline Silicon Films.* J. Appl. Phys., 1978, 49, 5565
7. J. Y. W. Seto: *The Electrical Properties of Polycrystalline Silicon.* J. Appl. Phys., 1975, 46, 5247
8. J. Jerht, J. Vloek: *Seebeck Effect in Polycrystalline Semiconductors.* Thin Solid Films, 1982, 92, 259
9. G. E. Pike, C. H. Seager: *The Voltage Dependance of Grain-boundary Resistance*, J. Appl. Phys., 1979, 50, 3414
10. E. Munoz i in.: *Electronic Properties of Undoped Polycrystalline Silicon.* Solid-State Electron., 1974, 17, 439
11. M. E. Cowher, T. O. Sedgwick: *Chemical Vapour-deposited Polycrystalline Silicon.* J. Electrochem. Soc., 1978, vol. 119, 1565
12. A. L. Fripp, L. H. Slack: *Resistivity of Doped Polycrystalline Silicon Films.* J. Electrochem. Soc., 1973 vol. 120, 145
13. M. M. Mandurah, K. C. Saraswat, T. J. Kamins: *Arsenic Segregation in Polycrystalline Silicon.* Appl, Phys. Lott., 1980, vol. 36, 683
14. M. M. Mandurah, K. C. Saraswat, C. R. Helmm, T. J. Kamins: *Dopant Segregation in Polycrystalline Silicon.* J. Appl. Phys., 1980, vol. 51, 5755
15. J. G. Simmons: *Generalized Formula for the Electric Tunneling Effect Between Similar Electrodes Separated by a Thin Insulating Film.* J. Appl. Phys., 1963 vol. 34, 1793
16. R. Stratton: *Volt-current Characteristics for Tunneling Through Insulating Films.* J. Phys. Solids, 1962 vol. 33, 1177
17. G. Baccarani, M. Impronta, B. Ricco, P. Ferla: *I-V Characteristics of Polycrystalline Silicon Resistors.* Rev. Phys. Appl., 1978 vol. 13, 777
18. S. J. Fonash: *The Role of the Interfacial Layer in Metal-Semiconductor Solar Cells.* J. Appl. Phys., 1975 vol. 46, 1286
19. L. L. Kazmerski: *The Effects of Grain Boundary and Interface Recombination on the Performance of Thin-film Solar Cells.* Solid-State Electronics, 1978 vol. 21, 1545
20. M. M. Mandurah, K. C. Saraswatt, T. J. Kamins: *Phosphorous Doping of Low Pressure Chemically Vapour-deposited Silicon Films*, J. Electrochem. Soc., 1979 vol. 126, 1019
21. M. M. Mandurah, K. C. Saraswat, T. J. Kamins: *A Model for Conduction in Polycrystalline Silicon. Part I — Theory, Part II — Comparison of Theory and Experiment.*, IEEE Electron Devices, 1981 vol. ED-28, 10, 1163
22. T. J. Kamins, M. M. Mandurah, K. C. Saraswat: *Structure and Stability of Low Pressure Chemically Vapour Deposited Silicon Films.* J. Electrochem. Soc., 1978 vol. 125, 927
23. J. Volger: *Note on the Hall Potential Across on Inhomogeneous Conductor.* Phys. Rev., 1950 79, 1023
24. E. Z. Pawlak: *Przewodnictwo cienkich polikrystalicznych warstw półprzewodnikowych związków*, Rozprawy Elektrotechn., 1985 t. 31 z. 1, s. 175—193,
25. H. A. Bethe: *Theory of the Boundary Layer of Crystal Rectifiers, MIT Radiation Laboratory*, Report 43/12 (1942) Cambridge, Massachussets
26. L. E. Murphy, R. H. Good: *Thermionic Emission, Field Emission and Transmition Region.* Phys. Rev., 1956 vol. 102, 1464
27. Y. Wada, S. Nishimatsu: *Grain Growth Mechanism of Heavily Phosphor ous-implanted Polycrystalline Silicon.* J. Electrochem. Soc., 1978 vol. 125 p. 1499
28. Ю. З. Бубнов: *Вакуумное нанесение плёнок в квазизамкнутот обьёме*, Советское радио, Москва, 1975
29. E. Z. Pawlak i in.: *Correlation Between the Structure and thei Noise of Thin Polycrystalline* $Cd_xHg_{1-x}Te(x = 0, 1)$ *Films.* Electron Technology, 1977 vol 10 nr 4, 45
30. E. Z. Pawlak: *The Effect of the Structure of Polycrystalline* $Cd_xHg_{1-x}(x = 0, 1)$. *Thin Films on Their Admittance.* Electron Technology, 1982 vol. 13 nr 1/2, 43

31. Y. Wada, S. Nishimatsu: *Grain growth mechanism of heavily phosporus — implanted polycrystalline silicon.* J. Electrochem. Soc., 1978, vol. 125, p. 1499
32. Z. Kuźnicki: *Właściwości elektryczne cienkich warstw polikrystalicznych*, PAN IPPT, Warszawa—Łódź, PWN, 1984

E. PAWLAK

MODELS OF CONDUCTIVITY OF THIN POLYCRYSTALLINE SILICON FILMS

Summary

The latest models of conductivity of thin polycrystalline silicon films are presented. The development of the carrier's trapping theory is discussed in detail. Much space is dedicated to the new, phenomenal Mandurah et al. model, which is based on the combination of three effects: carrier's trapping, segregation of dopants and carriers detachment from the potential barriers. The model makes it possible to foresee and interpret the dependences of film electric features on thermal processes to which the films are subjected in their production as well as their dependences on dopants.

E. PAWLAK

MODÉLES DE CONDUCTIVITÉ DES COUCHES MINCES POLYCRISTALLINES DE SILICIUM

Résumé

On présente et décrit les plus récents modèles de conductivité des couches minces polycristallines de silicium. On discute en détail le développement de la théorie du trappage des porteurs de charge. Une attention particulière est consacrée au modèle récent phénoménologique de Mandurah et aux autres, basés sur la superposition de trois phénomènes: trappage des porteurs de charge, ségrégation des dopants ainsi que réflexion des porteurs de charge sur les barrières du potentiel. Ce dernier modèle permet de prévoir et d'interpréter la dépendance des cacractéristiques électriques des couches en fonction des procédés de condictionnement thermique auxquels sont sujets les couches au cours de leur préparation ainsi que du genre des dopants.

E. PAWLAK

LEITFÄHIGKEITSMODELLE DÜNNER POLYKRISTALLINER SILIZIUMSCHICHTEN

Zusammenfassung

Es wurden die neuesten Leitfähigkeitsmodelle dünner polykristalliner Siliziumschichten beschrieben. Die Entwicklung der Einfangstheorie von Ladungsträgern wurde ausführlich dargestellt. Es wurde das neue phänomenologische Mandurah-Modell erörtert, das auf einer Verbindung folgender drei Effekten beruht: dem Einfang der Ladungsträger, der Segregation der Dotierungsstoffe und dem Effekt der Trägerreflexion der Potentialschwelle. Das Modell gestattet, die Abhängigkeiten der elektrischen Schichteigenschaften von Silizium von der thermischen Bearbeitung im Herstellungsprozeß der Schichten und von den angewandten Dotierungsstoffen vorauszusehen und zu interpretieren.

Э. ПАВЛЯК

МОДЕЛИ ПРОВОДИМОСТИ ТОНКИХ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛЕНОК КРЕМНИЯ

Резюме

Представлены новейшие модели проводимости тонких поликристаллических пленок кремния. Подробно обсуждено развитие теории ловушки носителей. Много места отведено новой

феноменологической модели Мандурака и других, опирающихся на соединении трех эффектов: ловушки носителей, сегрегации примесей, а также отражения носителей от потенциального барьера. Эта модель позволяет предвидеть и интерпретировать зависимости электрических свойств пленок от процессов термообработки, которым подвергаются пленки в процессе их производства, а также от рода примесей.

ROZPRAWY ELEKTROTCHNICZNE, 1987, 33, z. 1, ss. 107-120

621.317.42:621.317.441

Synteza dwuwymiarowego pola magnetycznego prądów stałych

RYSZARD PAŁKA (SZCZECIN)

Instytut Elektroniki i Informatyki Politechniki Szczecińskiej

Otrzymano 1985.07.08

W pracy przedstawiono metodę syntezy pól magnetycznych prądów stałych. Jej zasadnicza idea polega na zastosowaniu metody regularyzacji Tichonowa do rozwiązania nieoznaczonego lub nadokreślonego układu równań algebraicznych metody elementów skończonych. Zaproponowany algorytm obliczeniowy zastosowano do syntezy pola magnetycznego prostoliniowych przewodów z prądem stałym, wyznaczając rozkład gęstości prądu wytwarzającego jednorodne pole magnetyczne w określonej części obszaru. Rozwiązano ponadto problem syntezy jednorodnego pola magnetycznego wewnątrz solenoidu, wyznaczając rozkład gęstości prądu w jego uzwojeniach.

1. WPROWADZENIE

Niniejsza praca jest kontynuacją pracy [9], w której zanalizowany został problem ekstrapolacji wewnętrznych pomiarów pola na cały rozpatrywany obszar i jego brzeg. W obecnej pracy rozważa się problem syntezy pola magnetycznego nieskończenie długich przewodów i solenoidu z prądem stałym. Do rozwiązania tego problemu wykorzystano podobny, jak w [9], aparat matematyczny.

Wytwarzanie pól magnetycznych o ściśle określonym rozkładzie jest ważnym problemem praktycznym np. w optyce elektronowej, fizyce plazmy, czy tomografii komputerowej. Problemowi temu poświęcono już szereg prac, np. [1, 2, 11, 12, 13]. Pierwsze próby syntezy pola magnetycznego polegały na wyznaczeniu sposobu zasilania (rozkład gęstości prądu), lub kształtu solenoidów wytwarzających założony rozkład pola. Z matematycznego punktu widzenia zadania te związane były z rozwiązaniem całkowego równania Fredholma I rodzaju. Rozwiązania poszukiwano na drodze minimalizacji odpowiedniego funkcjonału regularyzującego, lub regularyzacji źle uwarunkowanego układu równań algebraicznych, uzyskanych po dyskretyzacji równań całkowych. Metodą tą można było rozwiązać jedynie mocno uproszczone zagadnienia jednowymiarowe. Możliwość uwzględnienia bardziej skomplikowanych kształtów obszarów prądowych i obszarów syntezy daje zastosowanie metody elementów ew. różnic skończonych. Koniecznym więc stało się stworzenie algorytmów syntezy pól w oparciu o ww. metody. Z prac poświęconych temu

Praca powstała w czasie pobytu autora jako stypendysty Fundacji Alexander von Humboldt-Stiftung na Uniwersytecie Braunschweig, RFN.

zagadnieniu należy tu wymienić pracę [4], gdzie do identyfikacji (syntezy) pól wykorzystano metodę funkcjonału kary i programowania dynamicznego. Praktyczne wykorzystanie metody zastosowanej w [4] pociągało jednak za sobą dość skomplikowane problemy numeryczne, ponadto wykorzystanie jej możliwe było tylko w bardzo specyficznych przypadkach.

W niniejszej pracy proponuje się inną metodę rozwiązania zadań syntezy pól magnetycznych. Jej główna idea polega na modyfikacji klasycznego układu równań algebraicznych metody elementów skończonych opisującego tzw. zagadnienie proste i rozwiązaniu tego układu przy zastosowaniu metody regularyzacji.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Niech będzie dany dwuwymiarowy obszar G o przenikalności magnetycznej μ_0, w którym pole magnetyczne wytworzone zostaje przez nieskończenie długie, cienkie przewody wiodące prąd stały w kierunku osi OZ. Potencjał wektorowy $\bar{A}$ posiada tylko jedną składową w kierunku osi OZ, która spełnia równanie Poissona o postaci

$$\nabla^2 A = -\mu_0 J(x, y). \tag{1}$$

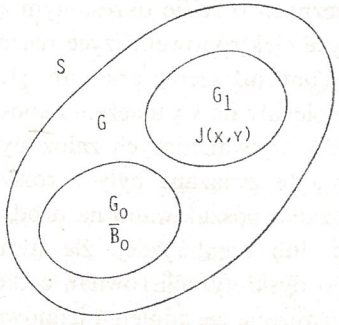
Na granicy S obszaru przyjmuje się jednorodny warunek brzegowy Dirichleta

$$A_{|S} = 0. \tag{2}$$

W pewnej części G_0 obszaru G istnieje konieczność otrzymania pola magnetycznego o ściśle określonych cechach, np. pola jednorodnego

$$\bar{B}(x, y) = \bar{B}_0 = B_{0x}\bar{1}_x + B_{0y}\bar{1}_y \quad \text{w} \quad G_0. \tag{3}$$

Problem polega na wyznaczeniu rozkładu gęstości prądu $J(x, y)$ zapewniającego otrzymanie ww. rozkładu pola w obszarze G_0 (rys. 1).



Rys. 1. Analizowany obszar — przypadek ogólny. G_1 — obszar z prądem, G_0 — obszar syntezy pola

Tak postawione zadanie syntezy pola magnetycznego jest zadaniem niepoprawnie sformułowanym, gdyż rozkład $\bar{B}_0$ może być rozkładem nierealizowalnym fizycznie, lub też może być zrealizowany przez różne rozkłady gęstości prądu $J(x, y)$ (niespełnione kryteria istnienia i jednoznaczności rozwiązania). Ponadto, algorytm wyznaczania $J(x, y)$

dla danego $\bar{B}_0$ może być algorytmem niestabilnym (niespełnione kryterium ciągłości rozwiązania).

Rozwiązanie $A(x, y)$ równania (1) z warunkiem brzegowym (2) oraz daną prawą stroną $-\mu_0 J(x, y)$ minimalizuje funkcjonał o postaci

$$F(A) = \int_G [(A'_x)^2 + (A'_y)^2 - 2\mu_0 AJ]\,dx\,dy. \tag{4}$$

Minimalizację funkcjonału (4) przeprowadzono metodą elementów skończonych, stosując klasyczne trójkątne elementy skończone I rzędu. Na wstępie dokonano podziału obszaru G na L elementów skończonych, otrzymując w nim N punktów, w których należy określić wartości potencjału wektorowego A_j. Minimalizacja funkcjonału (4) prowadzi do układu N równań algebraicznych z N niewiadomymi [15]:

$$ZA = U \tag{5}$$

gdzie Z, A i U są macierzami o postaciach

$$Z = [z_{i,j}], \quad A = [A_j], \quad U = [u_i], \quad i, j = 1, 2, \ldots, N.$$

W układzie równań (5) nieznane są nie tylko wartości potencjału wektorowego A_j w każdym punkcie obszaru G, lecz również wartości gęstości prądu $J(x, y)$ w obszarze G_0. Zamiast tego dany jest rozkład pola magnetycznego $\bar{B}_0$ w obszarze G_0. Konieczna jest więc modyfikacja układu równań (5) zgodnie z posiadanymi dodatkowymi informacjami. W celu demonstracji szczegółów rozważa się trójkątny element skończony o numerze p i wierzchołkach i, j, k.

Minimalizacja funkcjonału (4) w tym elemencie prowadzi do macierzowego układu trzech subrównań algebraicznych, służących do formowania finalnego układu równań metody elementów skończonych, o postaci:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial F^p}{\partial A_i} \\ \dfrac{\partial F^p}{\partial A_j} \\ \dfrac{\partial F^p}{\partial A_k} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2S_p} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ & h_{22} & h_{23} \\ \text{sym.} & & h_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \end{Bmatrix} - \frac{2}{3}\mu_0 J_p S_p \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \tag{6}$$

gdzie S_p oznacza pole elementu, a J_p jest gęstością prądu w elemencie: $J_p = \frac{1}{3}(J_i + J_j + J_k)$.

W klasycznej metodzie elementów skończonych druga część równania (6) służy do obliczenia prawej strony układu równań (5). W rozważanym przypadku prawa strona układu równa jest zeru, zaś wyrażenie $\frac{2}{3}\mu_0 S_p\{1, 1, 1\}$ generuje nowe współczynniki w tym układzie odpowiednio: w rzędach o numerach i, j, k oraz kolumnach $N+i$, $N+j$, $N+k$. Modyfikując układ równań (5) w ten sposób otrzymuje się nowy układ N równań z $N+M$ niewiadomymi (M oznacza ilość punktów w obszarze prądowym G_1):

$$VW = 0, \tag{7}$$

gdzie

$$V = [v_{i,j}], \quad W = [w_j](w_j = A_j \text{ lub } w_j = J_j), \quad i = 1, 2, \ldots, N, \; j = 1, 2, \ldots, N+M.$$

Do układu równań (7) należy wprowadzić jeszcze warunek „*wewnętrzny*" (3). Składowe wektora indukcji magnetycznej w elemencie o numerze p oblicza się korzystając z zależności $\bar{B} = \text{rot}\,\bar{A}$:

$$B_{xp} = \frac{\partial A_p}{\partial y} = \frac{1}{2S_p}[b_i, b_j, b_k]\begin{Bmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \end{Bmatrix},$$
$$B_{yp} = -\frac{\partial A_p}{\partial x} = \frac{1}{2S_p}[a_i, a_j, a_k]\begin{Bmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \end{Bmatrix}, \tag{8}$$

gdzie $a_{i,j,k}$ oraz $b_{i,j,k}$ są znanymi współczynnikami. Jeżeli w obszarze G_0 znajduje się K elementów skończonych, to warunek (3) generuje dodatkowe $2K$ równań o postaci (8).

Do układu równań (7) należy wprowadzić ponadto w zwykły sposób warunek brzegowy (2). Oznacza to konieczność modyfikacji równań o numerach odpowiadających numerom punktów leżących na brzegu S. Jeżeli punkt o numerze k leży na brzegu S, to w układzie równań (7) otrzymuje się, zamiast klasycznego równania metody elementów skończonych, równanie o postaci

$$A_k = 0. \tag{9}$$

Wykonując omówione wyżej modyfikacje otrzymuje się ostatecznie układ $N+2K$ równań z $N+M$ niewiadomymi, który zawiera pełną informację o analizowanym problemie:

$$TW = H \tag{10}$$

gdzie

$$T = [t_{i,j}], \quad W = [w_j], \quad H = [h_i], \quad i = 1, 2, \ldots, N+2K, \quad j = 1, 2, \ldots, N+M.$$

W przypadku, gdy $2K < M$ układ równań (10) jest nieoznaczony, gdy $2K > M$ układ ten jest nadokreślony, może on być również układem sprzecznym, zawsze natomiast jest źle uwarunkowany. Istnieje szereg metod pozwalających na wyznaczenie jednoznacznego, przybliżonego rozwiązania układu równań algebraicznych o powyższych cechach. Dotyczy to szczególnie nadokreślonych układów równań. Jak wykazały badania autora, metodą, która najlepiej nadaje się do rozwiązania takich układów równań, i która umożliwia jednakowe potraktowanie wszystkich wymienionych przypadków, jest pewna modyfikacja metody regularyzacji Tichonowa [14], stosowanej do tej pory głównie do rozwiązywania źle uwarunkowanych układów równań, lub układów równań o współczynnikach obarczonych błędami różnego typu.

W przypadku, gdy układ równań (10) jest nieoznaczony ($2K < M$), można go sztucznie uzupełnić do pełnego układu $N+M$ równań, dodając do niego $M-2K$ równań o wszystkich współczynnikach zerowych. Gdy układ (10) jest nadokreślony ($2K > M$), można uzupełnić każde z równań $2K-M$ zerowymi współczynnikami tak, aby otrzymać pełny układ z $N+2K$ niewiadomymi. W efekcie otrzymuje się układ równań, którego

wyznacznik równy jest zreu, o postaci

$$PW = E \tag{11}$$

gdzie

$$P = [p_{i,j}], \quad W = [w_j], \quad E = [e_i], \quad i, j = 1, 2, \ldots, N_0, \; N_0 = \max(N+2K, N+M).$$

Rozwiązanie układu równań (11) jest niejednoznaczne, ponadto jest niestabilne numerycznie. Do wyznaczenia tzw. rozwiązania normalnego (minimalnonormowego) tego układu można wykorzystać przedstawioną w pracy [14] metodę regularyzacji. Zgodnie z tą metodą przybliżone rozwiązanie układu równań (11) można otrzymać przez minimalizację następującego funkcjonału:

$$R(P, E, W) = |PW-E|^2 + \alpha|W|^2, \tag{12}$$

gdzie $\alpha > 0$ jest parametrem regularyzacji, zaś $|W| = \left(\sum_{k=1}^{N+M} w_k^2\right)^{1/2}$ oznacza normę w przestrzeni szeregów sumowalnych. Minimalizacja funkcjonału (12) prowadzi do układu równań algebraicznych o postaci [14]:

$$\alpha w_k + \sum_{j=1}^{N+M} d_{k,j} w_j = c_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N+M, \tag{13}$$

gdzie

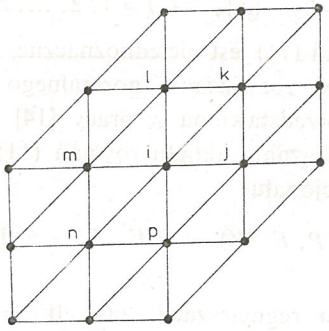
$$d_{k,j} = \sum_{i=1}^{N_0} p_{i,k} p_{i,j}, \quad c_k = \sum_{i=1}^{N_0} p_{i,k} e_i. \tag{14}$$

W przypadku, gdy układ równań (10) jest nieoznaczony, zastosowanie algorytmu (13-14) prowadzi do pełnego układu równań z $N+M$ niewiadomymi. Gdy układ równań (10) jest nadokreślony, zachodzi $p_{i,j} = 0$ dla $j > N+M$. Oznacza to, że $d_{k,j} = 0$ dla $k, j > N+M$ i układ równań (13) zawiera w efekcie również $N+M$ równań. W przypadku, gdy $2K = M$, algorytm (13-14) służy wyłącznie do stabilizacji obliczeń. We wszystkich przypadkach przedstawiona tu metoda regularyzacji umożliwia wyznaczenie przybliżonego, jednoznacznego i stabilnego rozwiązania układu równań (10), jeżeli tylko parametr regularyzacji α przyjmuje odpowiednio dużą wartość. Rozwiązując układ (10) dla różnych wartości parametru regularyzacji α otrzymuje się przybliżony rozkład potencjału wektorowego w całym obszarze oraz rozkład gęstości prądu w obszarze G_1. Ponieważ rozwiązanie regularyzowane obarczone jest błędem metody, ten pierwszy etap służy wyłącznie do wyznaczenia rozkładu gęstości prądu $J_\alpha(x, y)$. Następnie, dysponując już rozkładem gęstości prądu w obszarze G_1, można wyznaczyć rozkład potencjału wektorowego $A_\alpha(x, y)$ w całym obszarze. Parametr regularyzacji α dobierany jest tak, aby obliczony rozkład pola magnetycznego w obszarze syntezy był możliwie bliski rozkładowi zadanemu, a więc minimalizując wskaźnik jakości syntezy o postaci:

$$\varepsilon(\alpha) = \int_{G_0} (\overline{B}_0 - \overline{B}_\alpha)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{G_0} [(B_{0x} - B_{\alpha x})^2 + (B_{0y} - B_{\alpha y})^2] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{15}$$

Rozwiązaniem optymalnym problemu jest rozwiązanie, dla którego $\varepsilon = \varepsilon_{\min}$.

Zastosowanie algorytmu regularyzacyjnego (13-14) do układu równań (11) prowadzi do silnego wzrostu szerokości pasma macierzy wynikowej $[d_{k,j}]$ w porównaniu z szerokością pasma wyjściowej macierzy $[p_{i,j}]$. Rys. 2 wyjaśnia ten problem. Jeżeli elementy skoń-



Rys. 2. Siatka elementów

czone z rys. 2 leżą w obszarze prądowym G_1, to w zmodyfikowanym układzie równań otrzymuje się, zamiast równania łączącego potencjały węzłów i, j, k, l, m, n, p, równanie, które łączy ze sobą potencjały wszystkich punktów z rys. 2, a także gęstości prądu we wszystkich punktach. Prowadzi to do zwiększenia ilości niezerowych współczynników w tym równaniu: z 7 w równaniu wyjściowym, do 38. Ponadto, w odróżnieniu od macierzy $[p_{i,j}]$, macierz $[d_{k,j}]$ nie jest już macierzą symetryczną. W efekcie szerokość pasma macierzy $[d_{k,j}]$ staje się tak duża, że klasyczne metody rozwiązywania układów równań pasmowych stają się tu całkowicie bezużyteczne. Konieczne więc stało się zastosowanie odpowiednich metod numerycznych zmniejszających szerokość pasma macierzy np. techniki macierzy rzadkich [3] opisanej w pracy [9]. Stwarza to dodatkowe, dość skomplikowane problemy numeryczne, jak np. zastosowanie właściwej strategii rozwiązującej, właściwe rozmieszczenie w pamięci komputera wszelkich macierzy itd. oraz pociąga za sobą gwałtowny wzrost wymaganej pamięci i znaczne powiększenie czasu obliczeń.*)

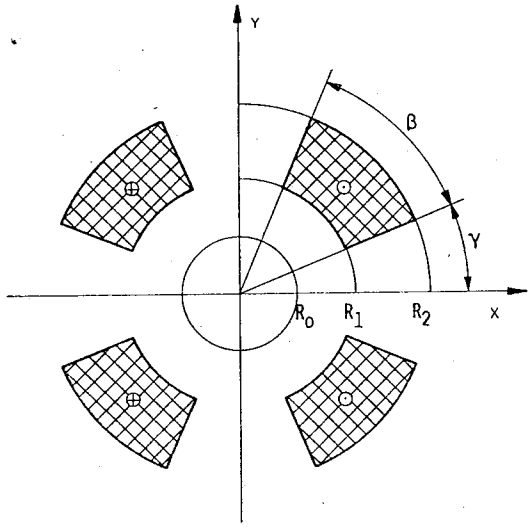
3. SYNTEZA JEDNORODNEGO POLA MAGNETYCZNEGO

Na rys. 3 pokazano układ przewodów wykorzystywany do wytwarzania jednorodnego pola magnetycznego. Układ taki znajduje zastosowanie w fizyce elektronowej, a także w budowie tomografów komputerowych, gdzie istnieje konieczność wygenerowania jednorodnego pola magnetycznego z dużą dokładnością, przy czym nieistotne są bezwzględne wartości otrzymywanej indukcji. Z powyższych względów nie używa się tu żadnych elementów magnetycznych. Problem polega na wyznaczeniu takiego rozkładu gęstości prądu

*) Wszystkie obliczenia numeryczne przedstawione w tej pracy wykonano w Institut für elektrische Maschinen, Antriebe und Bahnen, Technische Universität Braunschweig, RFN na sprzężonych komputerach IBM 4341-2 oraz Amdahl 470 V7/B (pamięć operacyjna 8 MB, średni czas wykonania pojedynczej operacji około 100 ns)

$J(x, y)$ w obszarze przewodzącym, który umożliwiłby otrzymanie jednorodnego pola magnetycznego w obszarze $r \leqslant R_0$:

$$\bar{B}(x, y) = \bar{B}_0 = B_{0y}\bar{1}_y \quad \text{dla} \quad r \leqslant R_0. \tag{16}$$



Rys. 3. Układ przewodów do wytwarzania jednorodnego pola magnetycznego

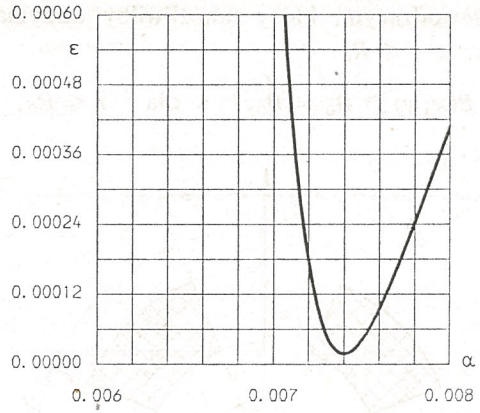
Ze względu na symetrię zagadnienia wystarczy rozważyć wyłącznie część obszaru $x, y \geqslant 0$. Warunki brzegowe zapisują się więc następująco:

$$A(0, y) = 0, \quad A'_y(x, 0) = 0, \quad A(x, y) \to 0. \quad x, y \to \infty \tag{17}$$

Obliczenia numeryczne przeprowadzono metodą opisaną w rozdz. 2, po przyjęciu poniższych danych (wielkości układu SI):

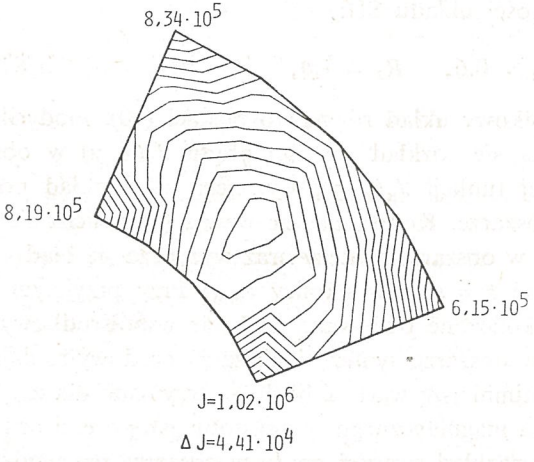
$$R_0 = 0{,}3, \quad R_1 = 0{,}6, \quad R_2 = 1{,}0, \quad \beta = \pi/4, \quad \gamma = \pi/8, \quad B_{0y} = -0{,}2. \tag{18}$$

Konstruując wynikowy układ równań o postaci (10), modyfikując go i rozwiązując wg (13-14) wyznacza się rozkład gęstości prądu $J_\alpha(x, y)$ w obszarze przewodzącym. Następnie, dla danej funkcji $J_\alpha(x, y)$, wyznacza się rozkład potencjału wektorowego $A_\alpha(x, y)$ w całym obszarze. Korzystając ze wzoru (8) oblicza się składowe wektora indukcji magnetycznej w obszarze syntezy oraz wyznacza się błąd ε ze wzoru (15). Rys. 4 przedstawia zależność $\varepsilon = \varepsilon(\alpha)$ w okolicy $\varepsilon_{\min}$. Przy przyjętym sposobie dyskretyzacji obszaru (elementy skończone budowane na bazie współśrodkowych okręgów i ich promieni, zagęszczone w obszarze syntezy i obszarze prądowym, dające ok. 1000 punktów w całym obszarze) najmniejszą wartość błędu ε otrzymano dla $\alpha_{opt} = 7{,}396 \cdot 10^{-3}$. Rys. 5 ilustruje rozkład pola magnetycznego w najistotniejszej części obszaru (linie $A = \text{const}$), a rys. 6 przedstawia rozkład gęstości prądu w obszarze przewodzącym (linie $J = \text{const}$) otrzymane dla α_{opt}. Niejednorodność pola magnetycznego oceniana była za pomocą za-



Rys. 4. Wykres błędu $\varepsilon(\alpha)$ — wzór (15)

Rys. 5. Rozkład pola magnetycznego (linie A = const) w głównej części obszaru otrzymany dla α_{opt}



Rys. 6. Rozkład gęstości prądu (linie J = const) w obszarze prądowym otrzymany dla α_{opt}

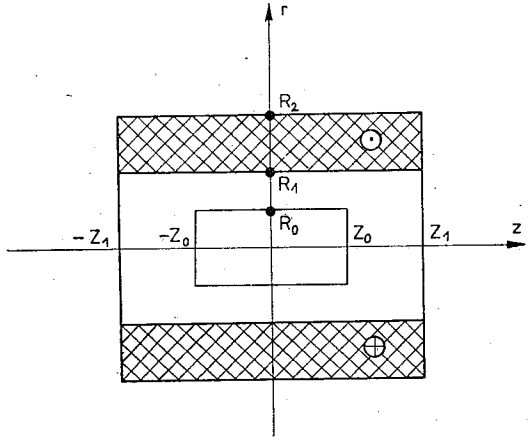
leżności:

$$\delta_1 = \frac{B_{0y} - B_{\alpha y}}{B_{0y}} 100\%, \qquad \delta_2 = \frac{B_{\alpha x}}{B_{0y}} 100\%. \tag{19}$$

Dla zestawu danych (18) współczynniki powyższe osiągają wartości: $\delta_1 = (0{,}05 - 3{,}50)\%$, $\delta_2 = (0{,}01 - 5{,}00)\%$. Największe wartości przyjmują one dla $r = R_0$. Dla powyższego zestawu danych jednorodne pole magnetyczne ($\delta_1, \delta_2 \leqslant 0{,}1\%$) udało się otrzymać jedynie w obszarze $r \leqslant 0{,}75\ R_0$. Rozwiązania otrzymane dla większej, niż α_{opt}, wartości parametru regularyzacji charakteryzują się bardzo umiarkowaną zmiennością (rozkłady stabilne), zaś dla $\alpha < \alpha_{opt}$ stają się funkcjami silnie zmiennymi (rozkłady niestabilne), jednak w obu przypadkach rozkład pola w obszarze syntezy realizuje rozkład zadany z mniejszą dokładnością. Zmniejszanie parametru regularyzacji poza granicę $\alpha_n = 10^{-3}$ prowadzi do całkowitej utraty stabilności procesu numerycznego (złe uwarunkowanie układu równań), co jest cechą charakterystyczną takich problemów.

4. SYNTEZA POLA MAGNETYCZNEGO W SOLENOIDZIE

Synteza pola magnetycznego w solenoidzie jest problemem technicznym o dużej randze. Poświęcono mu już wiele prac np. [1, 2, 11, 13]. Problem ten został rozwiązany w przypadku jednowymiarowym przy zastosowaniu całkowego równania Fredholma I rodzaju. Ogólniejszą analizę zagadnienia w przypadku dwuwymiarowym umożliwia jednak dopiero zastosowanie elementów skończonych.



Rys. 7. Solenoid do wytwarzania jednorodnego pola magnetycznego

Niech będzie dany solenoid przedstawiony na rys. 7. Potencjał wektorowy $\bar{A}$ posiada tylko jedną składową A_φ, która w kołowo-walcowym układzie współrzędnych spełnia równanie Poissona o postaci:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r}\right] + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} = -\mu_0 J(r, z). \tag{20}$$

Na granicy S obszaru potencjał wektorowy spełnia jednorodny warunek brzegowy Dirichleta

$$A_{\varphi|S} = 0. \tag{21}$$

Problem polega na wyznaczeniu takiego rozkładu gęstości prądu $J(r, z)$ w uzwojeniach solenoidu, który umożliwiłby otrzymanie, w pewnej części obszaru wewnętrznego, ściśle określonego rozkładu pola magnetycznego, np. pola jednorodnego

$$\bar{B}(r, z) = \bar{B}_0 = B_{0r}\bar{1}_r + B_{0z}\bar{1}_z, \quad r \leqslant R_0, \quad -z_0 \leqslant z \leqslant z_0. \tag{22}$$

Stosując podstawienie $u = rA_\varphi$ równanie (20) można zapisać następująco:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\mu_0 J(r, z), \tag{23}$$

a odpowiadający mu funkcjonał przyjmuje postać

$$F(u) = \int_G [(u'_r)^2/r + (u'_z)^2/r - 2\mu_0 Ju]\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z. \tag{24}$$

Składowe wektora indukcji magnetycznej oblicza się odpowiednio z zależności

$$B_r = -(u'_z)/r, \quad B_z = (u'_r)/r. \tag{25}$$

Dzięki wprowadzonemu wyżej podstawieniu uzyskuje się formalne podobieństwo zapisu funkcjonału (24) z funkcjonałem w kartezjańskim układzie współrzędnych (4). Minimalizacja funkcjonału (24) w elemencie skończonym o numerze p i wierzchołkach i, j, k prowadzi do identycznej, jak (6), zależności, tylko zamiast współczynnika $1/2S_p$ pojawia się w niej współczynnik

$$c = \frac{1}{2S_p^2}\int_{S_p} \frac{\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z}{r}, \tag{26}$$

którego obliczenie można przeprowadzić bądź przez wprowadzenie tzw. promienia zastępczego, lub numerycznie.

W porównaniu z rozdz. 2 zmienne odpowiadają sobie następująco: $z \to x$, $r \to y$. Również zależności na obliczanie składowych wektora indukcji magnetycznej z rozdz. 2 są nadal ważne, należy uwzględnić w nich tylko dodatkowy czynnik $1/r$. W związku z tym, rozwiązanie analizowanego problemu nie wymaga dużego nakładu pracy związanej z programowaniem, gdyż można tu wykorzystać, z minimalnymi tylko zmianami, programy użyte w rozdz. 3.

Klasyczny układ równań algebraicznych metody elementów skończonych, wynikający z minimalizacji funkcjonału (24), modyfikuje się tu analogicznie jak uczyniono to w rozdz. 2. W efekcie otrzymuje się nieoznaczony, lub nadokreślony układ równań algebraicznych, którego rozwiązanie przeprowadza się metodą regularyzacji. Umożliwia to wyznaczenie rozkładu gęstości prądu w uzwojeniach solenoidu $J_\alpha(r, z)$, a następnie rozkładu pola magnetycznego w całym obszarze. Parametr regularyzacji dobiera się tak, aby błąd wyznaczony ze wzoru

$$\varepsilon(\alpha) = \int_{G_0} (\bar{B}_0 - \bar{B}_\alpha)^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = \int_{G_0} [(B_{0r} - B_{\alpha r})^2 + (B_{0z} - B_{\alpha z})^2]\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \tag{27}$$

osiągnął minimum. Uwagi z rozdziału 2 dotyczące szerokości pasma macierzy regularyzowanych są ważne i tutaj.

5. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Najistotniejszym problemem praktycznym występującym przy generacji pól magnetycznych jest wyznaczenie takiego rozkładu gęstości prądu w solenoidzie z rys. 7, który umożliwi otrzymanie jednorodnego pola magnetycznego o określonej wartości indukcji $\bar{B}_{0z}$ we wnętrzu solenoidu. Zakładając symetrię zagadnienia, wystarczy zanalizować wyłącznie jedną czwartą część całego obszaru $r, z \geqslant 0$. Warunki brzegowe dla potencjału wektorowego A zapisują się następująco:

$$A'_{\varphi z}(r, 0) = 0, \quad A_{\varphi}(0, z) = 0, \quad A_{\varphi}(r, z) \to 0, \quad r, z \to \infty \tag{28}$$

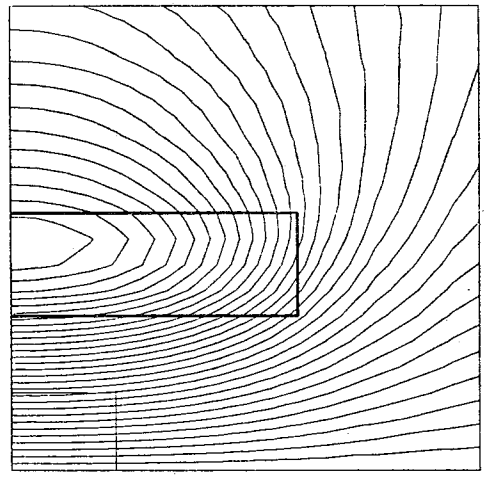
a dla funkcji $u(r, z)$

$$u'_z(r, 0) = 0, \quad u(0, z) = 0, \quad u(r, z) \to 0. \quad r, z \to \infty \tag{29}$$

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla następujących danych (wielkości układu SI):

$$R_0 = 0{,}15, \quad R_1 = 0{,}30, \quad R_2 = 0{,}50, \quad z_0 = 0{,}20, \quad z_1 = 0{,}55, \quad B_{0z} = 0{,}2. \tag{30}$$

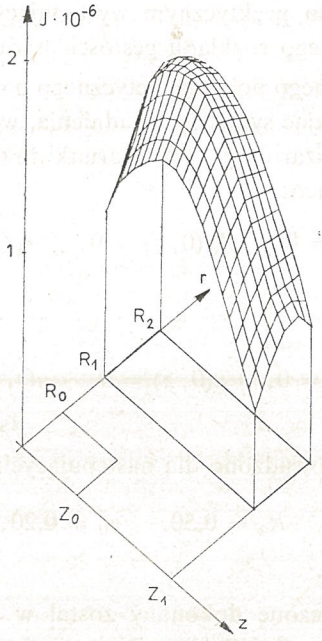
Podział na elementy skończone dokonany został w oparciu o siatkę prostokątną, zagęszczoną w obrębie obszarów G_0 i G_1. Wynikowa siatka zawierała około 1000 punktów. Przebieg funkcji $\varepsilon(\alpha)$ jest tu podobny do przedstawionego w rozdz. 3. Najmniejszą wartość błędu otrzymano dla $\alpha_{opt} = 1{,}708 \cdot 10^{-3}$. Rys. 8 ilustruje rozkład pola magnetycznego



Rys. 8. Rozkład pola magnetycznego (linie A_{φ} = const) w głównej części obszaru otrzymany dla α_{opt}

(linie A_φ = const) w głównej części obszaru, zaś na rys. 9 przedstawiono rozkład gęstości prądu otrzymany dla α_{opt}. Niejednorodność pola magnetycznego w obszarze syntezy oceniana była za pomocą zależności:

$$\delta_1 = \frac{B_{0z} - B_{\alpha z}}{B_{0z}} 100\%, \quad \delta_2 = \frac{B_{\alpha r}}{B_{0z}} 100\%. \tag{31}$$



Rys. 9. Rozkład gęstości prądu w solenoidzie otrzymany dla α_{opt}

Dla przyjętego zestawu danych współczynniki powyższe osiągają wartości: $\delta_1 = (0{,}10 - 5{,}00)\%$, $\delta_2 = (0{,}01 - 7{,}00)\%$. Dokładność rozwiązania problemu jest tu niższa niż w rozdz. 3 ze względu na nieco „*trudniejszą*" konfigurację układu oraz większy błąd metody związany z aproksymacjami wynikającymi z zastosowania kołowo-walcowego układu współrzędnych. Uwagi o stabilności i dokładności przybliżonych rozwiązań zamieszczone w rozdz. 3 można powtórzyć i tutaj. Obliczenia numeryczne stawały się całkowicie niestabilne dla parametrów regularyzacji mniejszych niż $7 \cdot 10^{-4}$.

6. ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiono nową metodę syntezy pól magnetycznych prądów stałych. Zaprezentowany algorytm wykorzystany został do rozwiązania zadania syntezy pola magnetycznego nieskończenie długich przewodów i syntezy pola magnetycznego w obszarze wewnętrznym solenoidu. Rezultaty obliczeń numerycznych potwierdzają praktyczną przydatność proponowanej metody, jednak jej efektywne wykorzystanie możliwe jest tylko przy użyciu bardzo dużych, szybkich i odpowiednio oprogramowanych maszyn

matematycznych. Przedstawiona tu metoda może być również wykorzystana do rozwiązania innych zadań syntezy i identyfikacji pól, jak np. synteza i identyfikacja parametrów materiałowych i różnych przypadków funkcji źródła.

LITERATURA

1. K. Adamiak: *Method of the Magnetic Field Synthesis on the Axis of Cylinder Solenoid.* J. Appl Phys. 16(1978), s. 417—423
2. K. Adamiak: *Synthesis of Homogeneous Magnetic Field in Internal Region of Cylindrical Solenoid.* Arch. f. Elektrotechnik 62(1980) s. 75—79
3. S. C. Eisenstat, M. C. Gursky, M. H. Schultz, A. H. Sherman: *Yale Sparse Matrix Package*, Research Report 112 and 114. Yale University, 1977
4. S. K. Krzemiński: *Identyfikacja modeli matematycznych w elektrodynamice ośrodków ciągłych.* Prace Naukowe PW, Elektryka 66 (1981)
5. R. Lattes, J. L. Lions: *Méthode de quasi-reversibilité et applications.* Dunod, Paris 1967
6. V. A. Morozov: *Methods for Solving Incorrectly Posed Problems.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo 1984
7. R. Pałka: *Determination of the field source distribution based on field measurements.* Arch. f. Elektrotechnik 68 (1985) s. 79—84
8. R. Pałka: *Extrapolation of static fields measurements by means of the finite element method.* Arch. f. Elektrotechnik, 67 (1984), s. 247—251
9. R. Pałka: *Identyfikacja brzegowego rozkładu potencjału elektrycznego na bazie wewnętrznych pomiarów potencjału.* Rozprawy Elektrotechniczne 1986, t. 32, z. 3, s. 699—713
10. R. Pałka: *Synthesis of magnetic field due to the direct currents.* Etz-Archiv. 1985, Bd. 7, H. 7, s. 299—302
11. R. Sikora, P. Krasoń, M. Gramz: *Synthesis of the Magnetic Field due to a Thin-Walled Solenoid.* IEEE Trans. on Magn., Vol. Mag-17, No. 3 (1981), s. 1328—1330
12. R. Sikora, R. Pałka: *Synthesis of Magnetic Fields.* COMPUMAG 81, IEEE Trans. on Magn., Vol. Mag-18, No. 2 (1982), s. 385—390
13. R. Sikora, J. Purczyński, K. Adamiak: *The Magnetic Field Synthesis on a Cylinder Solenoid Axis by Means of Tichonov's Regularization Method.* Arch. f. Elektrotechnik 60 (1978), s. 83—86
14. A. N. Tichonow, W. J. Arsjenin: *Metody reszenija niekorektnych zadacz.* Nauka, Moskwa 1974
15. O. C. Zienkiewicz: *Metoda elementów skończonych.* Arkady, Warszawa: 1972

R. PAŁKA

SYNTHESIS OF TWO-DIMENSIONAL MAGNETIC FIELDS OF DIRECT CURRENT

Summary

The paper describes a method of synthesis of the magnetic fields of direct current. The main idea of the proposed method is based on the application of the Tikhanov's regularization method for solving ill-conditioned, under and overdetermined systems of algebraic equations obtained by the finite element method. An algorithms is applied for the synthesis of the manetic field of infinitely long conductors and for a synthesis of the magnetic field in the inner region of a solenoid.

R. PAŁKA

SYNTHÈSE DU CHAMP BIDIMENSIONNEL MAGNÉTIQUE DU COURANT CONTINU

Résumé

Dans le travail on a présenté la méthode de la synthèse des champs magnétiques des courants continus. Son principe consiste à l'application de la méthode de régularisation de Tichonov pour la résolution du système indéfini ou surdéfini d'équations algébriques de la méthode d'éléments finis. L'algorithme proposé de calcul a été appliqué à la synthèse du champ magnétique des conducteurs rectilignes au courant continu, en déterminant la répartition de la densité du courant, produisant le champ magnétique homogène dans la partie définie de la zone. En outre, on a résolu le problème de synthèse du champ magnétique homogène à l'intérieur du solénoïde, en déterminant la répartition de la densité du courant dans ses enroulements.

R. PAŁKA

SYNTHESE EINES ZWEIDIMENSIONALEN GLEICHSTROMMAGNETFELDES

Zusammenfassung

In dieser Bearbeitung wird eine Methode für die Synthese von Gleichstrommagnetfeldern beschrieben. Die Grundidee der Berechnungsmethode basiert auf der Anwendung der Tichonow-Regularisierungsmethode für die Lösung von Gleichungsystemen, die mit der Methode der finiten Elemente entwickelt wurden, und schlecht konditioniert sowie unter- bzw. überbestimmt sind. Dieses Verfahren wurde für die Synthese von Magnetfeldern angewandt, die durch die in beliebig geformten, unendlichen Leitern fließenden Gleichströme erzeugt werden, und für die Synthese von Magnetfeldern in Gleichstromspulen.

Р. ПАЛКА

СИНТЕЗ ДВУХМЕРНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ

Резюме

Представлен метод синтеза магнитных полей постоянных токов. Основной её особенностью является применение метода регуляризации Тихонова к решению неопределенной или сверхопределенной системы алгебраических уравнений методом конечных элементов. Предложенный алгоритм применен к синтезу магнитного поля прямолинейных проводников с постоянным током определяя распределение плотности тока генерирующего однородное магнитное поле в определенном элементе пространства. Кроме того решена проблема синтеза однородного магнитного поля внутри соленоида, путем определения плотности тока в его обмотках.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1987, 33, z. 1, ss. 121-136

537.525.1.:621.3.025.1

Warunki palenia się łuku elektrycznego w jednofazowym obwodzie prądu przemiennego

CZESŁAW KRÓLIKOWSKI, ANIELA KAMIŃSKA-PRANKE (POZNAŃ)

Instytut Elektroenergetyki, Politechnika Poznańska

Otrzymano 1984.05.14

Artykuł zawiera analizę warunków palenia się łuku w jednofazowym palniku łukowo-plazmowym prądu przemiennego. W rozważaniach wykorzystano równanie dynamiki łuku elektrycznego uwzględniające specyficzne warunki, w których łuk się pali, tzn. metodę podtrzymania nieprzerwanego palenia się łuku oraz wirowy przepływ gazu w komorze wyładowczej. Otrzymane analityczne kryteria palenia się łuku zostały poddane weryfikacji doświadczalnej, która potwierdziła ich słuszność.

1. WPROWADZENIE

Plazma niskotemperaturowa, wytwarzana wyładowaniem łukowym znajduje szerokie zastosowanie zarówno w procesach technologicznych jak i badaniach naukowych. Do tej pory szerokie zastosowanie znalazły plazmotrony prądu stałego jednakże stosowanie prądu przemiennego do wytwarzania plazmy niskotemperaturowej budzi coraz większe zainteresowanie nie tylko z uwagi na prostotę, a tym samym większą niezawodność układów zasilających, ale również, w niektórych zastosowaniach przemysłowych, lepsze właściwości technologiczne gazu nagrzewanego prądem przemiennym.

Wytwarzanie plazmy nieskotemperaturowej w plazmotronach prądu przemiennego wymaga rozwiązania dwóch podstawowych problemów, a mianowicie: opracowania odpowiedniej konstrukcji plazmotronu oraz układu zasilającego plazmotron. Konstrukcja plazmotronu winna zapewniać długi czas pracy urządzenia, na co istotny wpływ ma materiał elektrod oraz sposób ich chłodzenia, a także stabilizację plazmy w przestrzeni konfiguracyjnej przez wytwarzanie określonego przepływu gazu lub pola magnetycznego w obszarze wyładowania. Problemy dotyczące konstrukcji plazmotronów opisane są między innymi w [1-6] i nie są przedmiotem niniejszej pracy.

Układ zasilający jednofazowy plazmotron powinien zapewniać przede wszystkim nieprzerwane i stabilne palenie się łuku prądu przemiennego.

Celem prezentowanej pracy jest analiza obwodu zasilającego z łukiem umożliwiająca określenie kryteriów nieprzerwanego palenia się łuku. Rozpatrywano obwody: rezystancyjny i rezystancyjno-indukcyjny, które są stosowane do zasilania plazmotronów prądu przemiennego oraz analizowano możliwość poprawy warunków ponownego zapłonu

łuku przez włączenie pojemności. Zwrócono również uwagę na problem stabilności układu z łukiem elektrycznym.

Należy podkreślić, że wymienione wyżej problemy są przedmiotem wielu prac szczególnie z dziedziny łączników elektroenergetycznych, między innymi [7-10] jednakże odmienność warunków palenia się łuku występująca w łącznikach i w plazmotronach uniemożliwia bezpośrednie wykorzystanie wyników tych prac w dziedzinie wytwarzania plazmy niskotemperaturowej.

2. RÓWNANIE ŁUKU ELEKTRYCZNEGO STABILIZOWANEGO STRUMIENIEM GAZU

Badanie warunków palenia się łuku elektrycznego w obwodzie zasilającym wymaga znajomości modelu łuku elektrycznego. Model ten musi uwzględniać specyficzne warunki, w których pali się łuk. W odniesieniu do plazmotronów prądu przemiennego warunki, w których pali się łuk określone są sposobem stabilizacji łuku w przestrzeni konfiguracyjnej bądź przez wytwarzanie wiru gazowego bądź też pola magnetycznego oraz metodą podtrzymania nieprzerwanego palenia się łuku. Nieprzerwane palenie się łuku w plazmotronach prądu przemiennego uzyskuje się doprowadzając do zapłonu elektrycznego po każdym przejściu prądu przez zero (przykładając do przerwy międzyelektrodowej impuls wysokonapięciowy o dużej częstotliwości) lub doprowadzając do zapłonu cieplnego łuku przez dodatkowe nagrzewanie gazu w obszarze wyładowania prądu przemiennego (wyładowaniem pomocniczym prądu stałego). Stąd też przy określeniu równania łuku dynamicznego należy uwzględnić sposób stabilizacji łuku w przestrzeni konfiguracyjnej jak również mechanizm zapłonu łuku po każdym przejściu prądu przemiennego przez wartość zerową.

Równanie łuku dynamicznego stabilizowanego wirowym strumieniem gazu w jednofazowym plazmotronie z dogrzewaniem gazu w obszarze wyładowania podano w pracy [6]. Równanie to ma postać:

$$\frac{1}{G}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{(1+k)\Theta}\left(\frac{i^2}{P_G G^{k+1}} - 1\right) \tag{1}$$

gdzie:

G — konduktancja kolumny łukowej,
i — natężenie prądu,
Θ — stała charakteryzująca inercję cieplną łuku,
P_G — stała charakteryzująca moc oddawaną z kolumny łukowej do otoczenia,
k — współczynnik zależny od konduktancji plazmy łuku.

Wymieniona już praca [6] zawiera również szerokie badania parametrów charakteryzujących wyładowanie łukowe prądu przemiennego t.zn. stałej Θ i P_G.

Zaniedbując odkształcenie prądu wynikające z nieliniowego charakteru rezystancji kolumny łukowej dla badanego układu można przyjąć, że prąd łuku zmienia się sinusoidalnie tj. $i = I_m \sin\omega t$. Rozwiązaniem równania (1) jest wówczas funkcja:

$$G^{1+k} = \frac{I_m^2}{2P_G}\left[1 - \frac{\sin(2\omega t + \operatorname{arctg} 1/2\omega\Theta)}{\sqrt{1+(2\omega\Theta)^2}}\right] + C \cdot e^{-\frac{t}{\Theta}}. \tag{2}$$

Przyjmując, że w chwili $t = 0$ konduktancja kolumny łukowej ma wartość G_0 otrzymano zależność opisującą zmianę w czasie konduktancji kolumny łukowej

$$G^{1+k} = \frac{I_m^2}{2P_G}\left[1 - \frac{\sin(2\omega\Theta + \operatorname{arctg} 1/2\omega\Theta)}{\sqrt{1+(2\omega\Theta)^2}}\right] + \\ + \left[G_0^{1+k} - \frac{I_m^2}{2P_G}\frac{(2\omega\Theta)^2}{1+(2\omega\Theta)^2}\right]\cdot e^{-\frac{t}{\Theta}}. \tag{3}$$

Dla łuku elektrycznego znajdującego się w stanie ustalonym można przyjąć, że:

$$G_0^{1+k} = \frac{I_m^2}{2P_G}\frac{(2\omega\Theta)^2}{1+(2\omega\Theta)^2}. \tag{4}$$

A zatem zmiany konduktancji kolumny łukowej w czasie można ostatecznie opisać zależnością:

$$G = \left\{\frac{I_m^2}{2P_G}\left[1 - \frac{\sin(2\omega t + \operatorname{arctg} 1/2\omega\Theta)}{\sqrt{1+(2\omega\Theta)^2}}\right]\right\}^{\frac{1}{1+k}}. \tag{5}$$

Należy zwrócić uwagę, że dla $t = 0$ otrzymuje się z równania (5) wartość konduktancji określoną wyrażeniem (4).

3. WARUNKI PALENIA SIĘ ŁUKU ELEKTRYCZNEGO W OBWODZIE REZYSTANCYJNYM

W rozpatrywanym przypadku ponowny zapłon łuku elektrycznego ma charakter zapłonu cieplnego, stąd warunek nieprzerwanego palenia się łuku można określić analizując zmianę konduktancji kolumny połukowej pod wpływem napięcia pojawiającego się na przerwie międzyelektrodowej po przejściu prądu przez wartość zerową. Jeżeli pod wpływem tego napięcia konduktancja połukowa wzrasta, wówczas możliwy jest ponowny zapłon łuku, natomiast jeżeli konduktancja maleje to następuje gaszenie łuku.

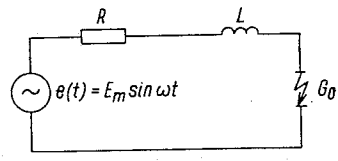
W obwodzie rezystancyjnym przedstawionym na rys. 1 zasilanym ze źródła o stałym przebiegu napięcia $e = E_m \sin\omega t$ (w którym $L \approx 0$), napięcie pojawiające się na przerwie międzyelektrodowej po zgaszeniu łuku można opisać zależnością:

$$u_p = E_m \sin(\omega t - \varphi) \tag{6}$$

gdzie: $\varphi = \omega t_g$ przy czym t_g — czas gaszenia łuku.

Zmianę konduktancji kolumny połukowej pod wpływem napięcia międzyelektrodowego można wyznaczyć z równania, wynikającego z równania (1) w postaci:

$$-\frac{1+k}{1-k}\Theta\frac{dG^{k-1}}{dt} + G^{k-1} = \frac{u_p^2}{P_G}. \tag{7}$$



Rys. 1. Schemat zastępczy obwodu z łukiem elektrycznym

Rozwiązaniem równania (7) dla u_p określonego zależnością (6) jest funkcja:

$$G^{k-1} = \frac{E_m^2}{2P_G}\left[1 - \frac{\sin\left(2\omega t - 2\varphi + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\omega K\right)}{\sqrt{1+(2\omega K)^2}}\right] + Ce^{-\frac{t}{K}} \tag{8}$$

gdzie: $K = -\frac{1+k}{1-k}\Theta$.

Stałą C wyznaczono z warunku, że dla $t = 0$ konduktancja kolumny połukowej wynosi G_0 i jest opisana wzorem (4). Ostatecznie więc równanie, określające zmianę w czasie konduktancji połukowej pod wpływem napięcia pojawiającego się na przerwie międzyelektrodowej ma postać:

$$\begin{aligned} G^{k-1} = {} & \frac{E_m^2}{2P_G}\left[1 - \frac{\sin\left(2\omega t - 2\varphi + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}K\omega\right)}{\sqrt{1+(2\omega K)^2}}\right] + \\ & + \left\{+G_0^{k-1} - \frac{E_m^2}{2P_G}\left[1 - \frac{\sin\left(-2\varphi + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}K\omega\right)}{\sqrt{1+(2\omega K)^2}}\right]\right\} e^{-\frac{t}{K}} \end{aligned} \tag{9}$$

Jeżeli $k < 1$ to $-\frac{1}{K} = \frac{1-k}{1+k}\frac{1}{\Theta} > 0$ i wyrażenie G^{k-1} charakteryzuje zmianę w czasie rezystancji łuku. Przy tym warunki gaszenia lub zapłonu łuku, po przejściu prądu przez zero, określone są tylko znakiem stałej C. Gdy stała C ma wartość dodatnią ($C > 0$) to oznacza, że z upływem czasu rezystancja rośnie nieograniczenie i łuk zostaje zgaszony. Jeżeli $C < 0$ to rezystancja maleje i łuk nie gaśnie. Korzystając zatem z równania (9), w którym stała C jest określona wyrażeniem stojącym przy exp $(-t/K)$ można zapisać warunek palenia się łuku w obwodzie rezystancyjnym w postaci:

$$C = G_0^{k-1} - \frac{E_m^2}{2P_G}\left[1 - \frac{\sin\left(-2\varphi + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}K\omega\right)}{\sqrt{1+(2K\omega)^2}}\right] < 0. \tag{10}$$

Z nierówności (10) można określić wymaganą wartość napięcia zasilającego, zapewniającą nieprzerwane palenie się łuku elektrycznego, która wynosi:

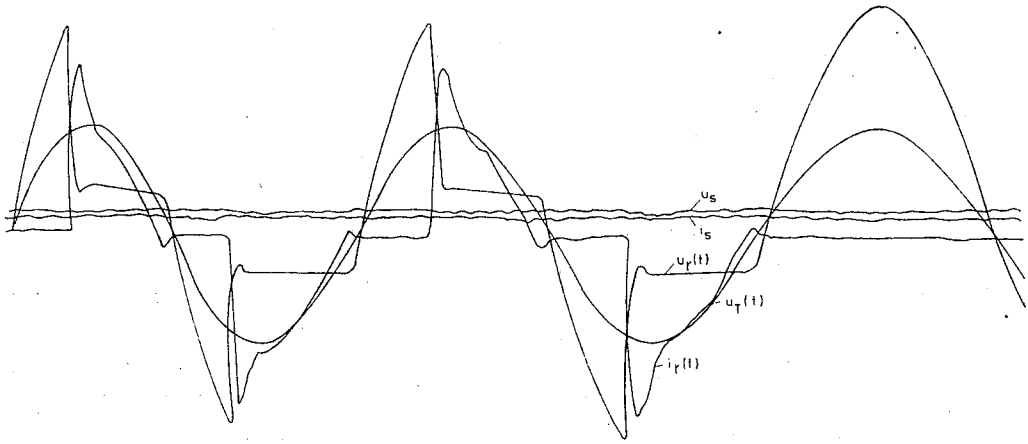
$$\begin{aligned} E_m > {} & I^{\frac{k-1}{k+1}} \cdot P_G^{\frac{1}{k+1}} \left\{\left[\frac{(2\omega\Theta)^2}{1+(2\omega\Theta)^2}\right]^{\frac{k-1}{k+1}} \times \right. \\ & \left. \times \frac{2\sqrt{1+(2K\omega)^2}}{\sqrt{1+(2K\omega)^2} - \sin\left(-2\varphi + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}K\omega\right)}\right\}^{1/2} \end{aligned} \tag{11}$$

gdzie: $I = I_m/\sqrt{2}$ — wartość skuteczna prądu przy zaniedbaniu odkształcenia przebiegu od sinusoidy.

Z warunku (11) wynika, że wymagana wartość napięcia zasilającego zależy w istotny sposób od stałej czasowej Θ. Ponieważ przy $k < 1$ wykładnik potęgowy $\frac{k-1}{k+1} < 0$, to

przy małej wartości Θ wyrażenie $(2\omega\Theta)^{(k-1)/(k+1)}$ posiada dużą wartość co oznacza, że do spełnienia nierówności (11) wymagana jest wówczas znaczna wartość napięcia zasilającego. Zwiększając wartość stałej czasowej przez zwiększenie np. natężenia prądu łuku pomocniczego w plazmotronie, którego konstrukcję opisano w pracy [6], można spełnić warunek palenia się łuku przy niższej wartości napięcia zasilającego.

W obwodzie rezystancyjnym możliwe jest palenie się łuku elektrycznego jeżeli zostanie spełniony warunek (11) jednakże w takim obwodzie łuk pali się niestabilnie. Zagadnienie stabilności stanu równowagi obwodu elektrycznego z łukiem jest opisane w pracy [6]. Należy podkreślić, że warunek niestabilnego palenia się łuku, w omawianym przypadku, nie jest jednoznaczny z warunkiem gaszenia łuku i podobnie warunek stabilnego palenia się łuku z warunkiem jego zapłonu. Jednakże przy spełnieniu tylko warunku palenia się łuku, utrata stabilności może prowadzić do zgaszenia łuku. Powyższe wnioski potwierdzają przeprowadzone badania eksperymentalne łuku palącego się w obwodzie rezystancyjnym, czyli nie spełniającym kryterium stabilności. Przykładowy oscylogram napięcia i prądu łuku oraz napięcia zasilającego przedstawia rys. 2. Widoczne jest zgaśnięcie łuku wywołane utratą stabilności układu.



Rys. 2. Czasowe przebiegi prądu łuku $i_l(t)$, napięcia łuku $u_l(t)$ i napięcia zasilającego $u_T(t)$ w obwodzie rezystancyjnym
u_s — napięcie łuku pomocniczego, i_s — prąd łuku pomocniczego

4. WARUNKI PALENIA SIĘ ŁUKU ELEKTRYCZNEGO W OBWODZIE REZYSTANCYJNO-INDUKCYJNYM

Jeżeli zapłon łuku elektrycznego ma charakter zapłonu cieplnego to przebieg napięcia pojawiającego się na przerwie międzyelektrodowej po przejściu prądu przez wartość zerową zależy nie tylko od parametrów obwodu, ale również w istotny sposób od nieliniowej konduktancji kolumny połukowej.

Przebieg tego napięcia wyznaczono posługując się schematem uproszczonym przedstawionym na rys. 1, któremu odpowiada równanie:

$$E_m \sin\varphi = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + u_p, \tag{12}$$

gdzie: $E_m \sin\varphi$ jest wartością napięcia źródła w chwili przejścia prądu przez zero, którą w bardzo krótkim okresie przebiegu napięcia międzyelektrodowego w czasie od zera do zapłonu łuku, przyjęto za stałą.

Dla uproszczenia analizy przebieg napięcia na przerwie międzyelektrodowej wyznaczono przy założeniu, że konduktancja kolumny połukowej jest stała, a jej wartość równą G_0 określono wzorem (4). Stąd również rezystancja łuku $R_0 = \frac{1}{G_0}$ jest stała. Uwzględniając związek $i = u_p/R_0$ i podstawiając go do równania (12) otrzymano:

$$\frac{\mathrm{d}u_p}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}\left(\frac{R}{R_0}+1\right)u_p = \frac{E_m R_0}{L}\sin\varphi. \tag{13}$$

Równanie (13) jest równaniem różniczkowym liniowym, którego rozwiązaniem jest funkcja:

$$u_p = E_m \frac{R_0}{R+R_0}\sin\varphi - Ce^{-\frac{R_0+R}{L}t}. \tag{14}$$

Dla $t = 0$ napięcie u_p na przerwie międzyelektrodowej jest równe napięciu gaszenia łuku, tj. $u_p(t=0) = -u_g$. Stąd wynika, że:

$$u_p = E_m \frac{R_0}{R+R_0}\sin\varphi - \left(u_g + E_m \frac{R_0}{R+R_0}\sin\varphi\right)e^{-\frac{R_0+R}{L}t}. \tag{15}$$

Przebieg czasowy prądu w obwodzie rezystancyjno-indukcyjnym z łukiem można wyznaczyć korzystając z równania obwodu w postaci:

$$E_m \sin(\omega t+\varphi) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + u_l \tag{16}$$

w którym: φ — kąt fazowy napięcia w chwili $t = 0$, odpowiadający przejściu prądu przez zero.

Z przeprowadzonych badań oscylograficznych wynika, że w obszarze palenia się łuku można przyjąć stałą wartość napięcia łuku czyli $u_l = const.$ Rozwiązując równanie (16) przy warunku początkowym $i(0) = 0$ otrzymano zależność na przebieg prądu:

$$\begin{aligned} i = {} & \frac{E_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t+\varphi-\operatorname{arctg}\omega L/R) - \frac{u_l}{R} + \\ & + \left[\frac{u_l}{R} - \frac{E_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\varphi-\operatorname{arctg}\omega L/R)\right]e^{-\frac{R}{L}t}. \end{aligned} \tag{17}$$

Przesunięcie fazowe między prądem i napięciem zasilającym określono z zależności (17) przy założeniu, że dla $\omega t = \pi$, $i = 0$. Równanie określające to przesunięcie ma następującą postać:

$$\begin{aligned} & \frac{E_m^2}{R^2+(\omega L)^2}\sin^2\varphi + \frac{2E_m u_l}{R^2+(\omega L)^2}\,\frac{1-e^{-\frac{R}{\omega L}\pi}}{1+e^{-\frac{R}{\omega L}\pi}}\sin\varphi + \frac{u_l^2}{R^2}\left(\frac{1-e^{-\frac{R}{\omega L}\pi}}{1+e^{-\frac{R}{\omega L}\pi}}\right)^2 - \\ & - \left[\frac{E_m \omega L}{R^2+(\omega L)^2}\right]^2 = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Z równania (18) wynikają jako przypadki szczególne zależności:

$$\sin\varphi = \frac{u_l}{E_m} \quad \text{dla } \omega L = 0,$$
$$\cos\varphi = \frac{\pi}{2}\frac{u_l}{E_m} \quad \text{dla } R = 0. \tag{19}$$

Z zależności (17) i (18) wynika, że stałe napięcie łuku wpływa na przebieg prądu w obwodzie oraz przesunięcie fazowe między prądem i napięciem zasilającym. Im napięcie łuku jest większe w stosunku do SEM źródła tym silniej przebieg prądu jest odkształcony od sinusoidy, a przesunięcie fazowe bardziej różni się od przesunięcia jakie występuje w obwodzie bez łuku elektrycznego.

Korzystając z równania (18) obliczono przesunięcia fazowe między prądem i napięciem zasilającym i porównano je z wartościami pomierzonymi. Wyniki pomiarów i obliczeń zawiera tablica 1. Na podstawie otrzymanych rezultatów można stwierdzić, że przesunięcie fazowe między prądem i napięciem zasilającym z wystarczającą dokładnością może być obliczone z równania (18).

Tablica 1

Pomierzone i obliczone zgodnie ze wzorem (18) przesunięcia fazowe między prądem i napięciem zasilającym $E_m = 702$ V

Lp.	u_l	ωL	R	φ_{pom}	φ_{obl}	$\frac{\varphi_{pom}-\varphi_{obl}}{\varphi_{pom}} \cdot 100$
—	V	Ω	Ω	st. el.	st. el.	%
1	153	3,10	0,20	66,0	66,3	0,45
2	150	2,94	0,85	54,6	54,8	0,37
3	153	2,86	1,20	49,2	48,2	−2,0
4	142	2,60	1,70	41,3	40,2	−2,7
5	153	2,30	2,20	30,5	29,7	−2,6
6	147	2,00	2,40	24,0	24,7	2,9
7	109	0,0	3,10	9,3	8,9	−4,3

Analityczny warunek palenia się łuku elektrycznego można wyznaczyć badając zachowanie się konduktancji kolumny połukowej pod wpływem napięcia międzyelektrodowego, określonej równaniem:

$$-\frac{1+k}{1-k}\Theta\frac{dG^{k-1}}{dt} + G^{k-1} = \frac{[E_\varphi - (u_g + E_\varphi)e^{-at}]^2}{P_G}, \tag{20}$$

w którym:

$$E_\varphi = E_m \frac{R_0}{R+R_0}\sin\varphi \tag{21}$$

$$a = \frac{R+R_0}{L} \tag{22}$$

Rozwiązaniem równania (20) jest funkcja:

$$G^{k-1} = \frac{1}{P_G}\left[E_\varphi^2 - 2E_\varphi(u_g+E_\varphi)\frac{1}{1-Ka}e^{-at} + (u_g+E_\varphi)^2\frac{1}{1-2Ka}e^{-2at}\right] + Ce^{-\frac{t}{K}}. \quad (23)$$

Stałą C wyznaczono z warunku, że dla czasu $t = 0$ konduktancja kolumny połukowej jest określona wzorem (4). Stąd zmianę w czasie konduktancji kolumny połukowej opisuje równanie w postaci:

$$G^{k-1} = \frac{1}{P_G}\left[E_\varphi^2 - 2E_\varphi(u_g+E_\varphi)\frac{1}{1-Ka}e^{-at} + (u_g+E_\varphi)^2\frac{1}{1-2Ka}e^{-2aK}\right] + \\ + \left[G_0^{k-1} - \frac{1}{P_G}E_\varphi^2 + \frac{2E_\varphi(u_g+E_\varphi)}{P_G(1-Ka)} - \frac{(u_g+E_\varphi)^2}{P_G(1-2Ka)}\right]e^{-\frac{t}{K}}. \quad (24)$$

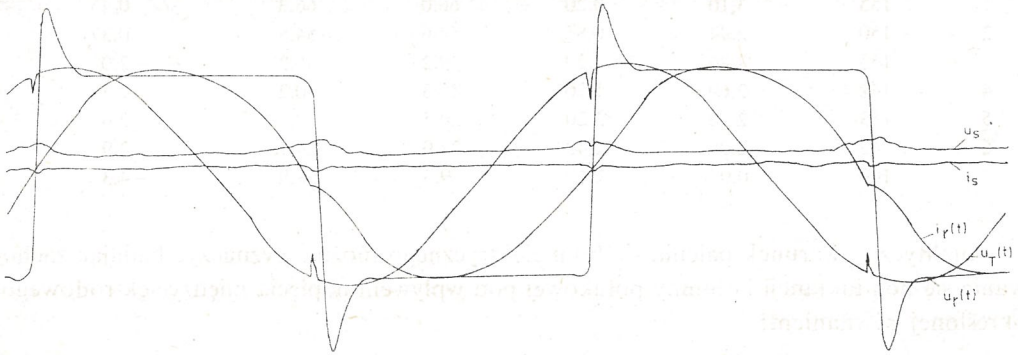
Analizując równanie (24) przy $k < 1$ stwierdzono, że konduktancja z upływem czasu będzie wzrastała jeżeli spełniony zostanie warunek:

$$C = G_0^{k-1} - \frac{1}{P_G}E_\varphi^2 + \frac{2E_\varphi(u_g+E_\varphi)^2}{P_G(1-Ka)} - \frac{(u_g+E_\varphi)^2}{P_G(1-2Ka)} < 0. \quad (25)$$

Nierówność (25) określa zatem warunek nieprzerwanego palenia się łuku elektrycznego w obwodzie rezystancyjno-indukcyjnym. Korzystając z tej nierówności można wyznaczyć wymaganą wartość napięcia zasilającego, zapewniającą palenie się łuku elektrycznego. Wartość tego napięcia musi spełnić warunek:

$$E_\varphi^2 + \frac{u_g}{Ka}E_\varphi + \frac{1-Ka}{2K^2a^2}u_g^2 - \left(\frac{1}{2K^2a^2} - \frac{3}{Ka} + 1\right)P_G G_0^{k-1} > 0. \quad (26)$$

Przykładowy oscylogram przebiegu napięcia łuku, napięcia zasilającego i prądu przedstawia rys. 3.



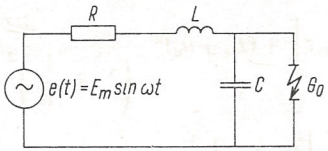
Rys. 3. Przykładowe przebiegi czasowe prądu łuku $i_l(t)$, napięcia łuku $u_l(t)$ i napięcia zasilającego $u_T(t)$ w obwodzie rezystancyjno-indukcyjnym

u_s — napięcie łuku pomocniczego, i_s — prąd łuku pomocniczego

5. WPŁYW POJEMNOŚCI OBWODU ZASILAJĄCEGO NA WARUNKI PALENIA SIĘ ŁUKU

W obwodach rzeczywistych występuje zawsze pewna pojemność obwodu zasilającego. Ponadto w celu kompensacji mocy biernej obwodu zasilającego o charakterze indukcyj-

nym stosuje się często baterię kondensatorów. Można się również spodziewać, że w przypadku dużej pojemności obwodu zasilającego, przy której przebieg napięcia na przerwie międzyelektrodowej będzie okresowy, uzyska się poprawę warunków ponownego zapłonu łuku. Z podanych wyżej względów przeprowadzono analizę wpływu pojemności obwodu zasilającego na warunki palenia się łuku w jednofazowym palniku plazmowym. Do rozważań przyjęto obwód zasilający przedstawiony schematycznie na rys. 4. Jeżeli spełniona



Rys. 4. Schemat zastępczy obwodu z łukiem elektrycznym

jest nierówność:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{R}{L}-\frac{G_0}{C}\right)^2 < \frac{1}{LC} \tag{27}$$

to, jak wiadomo, przebieg napięcia pojawiającego się na przerwie międzyelektrodowej po przejściu prądu przez wartość zerową, jest przebiegiem okresowym opisanym równaniem:

$$u_p = E_{\varphi} + (E_{\varphi} + u_g)e^{\alpha t}\left(\frac{\alpha}{\omega_0}\sin\omega_0 t - \cos\omega_0 t\right) \tag{28}$$

gdzie:

$\alpha = -\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}+\frac{G_0}{C}\right)$ — współczynnik tłumienia,

$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{1}{4}\left(\frac{R}{L}-\frac{G_0}{C}\right)^2}$ — pulsacja drgań swobodnych.

Korzystając z równania łuku elektrycznego w postaci (7) wyznaczono zmianę w czasie konduktancji kolumny połukowej pod wpływem napięcia międzyelektrodowego opisanego zależnością (28). Otrzymano następujące wyrażenie:

$$G^{k-1} = Ce^{-\frac{t}{K}} + \frac{1}{KP_G}\left\{E_{\varphi}^2 K + 2E_{\varphi}(E_{\varphi}+u_g)\frac{\alpha}{\omega_0}\frac{e^{\alpha t}}{\left(\alpha+\frac{1}{K}\right)^2+\omega_0^2}\left[\left(\alpha+\frac{1}{K}\right)\sin\omega_0 t - \right.\right.$$

$$-\omega_0\cos\omega_0 t\Big] - 2E_{\varphi}(E_{\varphi}+u_g)\frac{e^{\alpha t}}{\left(\alpha+\frac{1}{K}\right)^2+\omega_0^2}\left[\left(\alpha+\frac{1}{K}\right)\cos\omega_0 t+\omega_0\sin\omega_0 t\right]+$$

$$+(E_{\varphi}+u_g)^2\left(\frac{\alpha}{\omega_0}\right)^2\frac{e^{2\alpha t}}{\left(2\alpha+\frac{1}{K}\right)^2+(2\omega_0)^2}\sin\omega_0 t\left[\left(2\alpha+\frac{1}{K}\right)\sin\omega_0 t - \right.$$

$$-2\omega_0\cos\omega_0 t\Big] + (E_\varphi+u_g)^2\alpha^2\,\frac{2}{\left(2\alpha+\frac{1}{K}\right)+(2\omega_0)^2}\,\frac{e^{2\alpha t}}{2\alpha+\frac{1}{K}} -$$

$$-(E_\varphi+u_g)^2\,\frac{\alpha}{\omega_0}\,\frac{e^{2\alpha t}}{\left(2\alpha+\frac{1}{K}\right)^2+(2\omega_0)^2}\left[\left(2\alpha+\frac{1}{K}\right)\sin 2\omega_0 t -\right.$$

$$\left.-2\omega_0\cos 2\omega_0 t\right] + (E_\varphi+u_g)^2\,\frac{e^{2\alpha t}}{\left(2\alpha+\frac{1}{K}\right)^2+(2\omega_0)^2}\times$$

$$\times\cos\omega_0 t\left[\left(2\alpha+\frac{1}{K}\right)\cos\omega_0 t+2\omega_0\sin\omega_0 t\right]+$$

$$+\frac{(E_\varphi+u_g)^2}{2\alpha+\frac{1}{K}}\,\frac{2\omega_0^2 e^{2\alpha t}}{\left(2\alpha+\frac{1}{K}\right)^2+(2\omega_0)^2}\Bigg\}. \tag{29}$$

Stałą C wyznaczono z warunku, że dla $t = 0$ konduktancja kolumny połukowej wynosi G_0 i jest opisana wzorem (4).
Stąd otrzymano:

$$G_0^{k-1} = C+\frac{1}{KP_G}\left\{E_\varphi^2 K-2E_\varphi(E_\varphi+u_g)\,\frac{2\alpha+\frac{1}{K}}{\left(\alpha+\frac{1}{K}\right)^2+\omega_0^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(E_\varphi+u_g)^2}{\left(2\alpha+\frac{1}{K}\right)^2+(2\omega_0)^2}\left[\frac{2(\alpha^2+\omega_0^2)}{2\alpha+\frac{1}{K}}+4\alpha+\frac{1}{K}\right]\right\}. \tag{30}$$

Z równości (30) wynika, że aby spełniony został warunek nieprzerwanego palenia się łuku, wartość napięcia zasilającego musi spełniać warunek:

$$(K-A+B)E_\varphi^2+(2u_g B-Au_g)E_\varphi+u_g^2 B-G_0^{k-1}KP_G > 0, \tag{31}$$

w którym:

$$A = 2\,\frac{2\alpha+\frac{1}{K}}{\left(\alpha+\frac{1}{K}\right)^2+\omega_0^2},$$

$$B = \frac{1}{\left(2\alpha+\frac{1}{K}\right)^2+(2\omega_0)^2}\left[\frac{2(\alpha^2+\omega_0^2)}{2\alpha+\frac{1}{K}}+4\alpha+\frac{1}{K}\right].$$

Jeżeli parametry obwodu z łukiem elektrycznym spełniają nierówność:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}-\frac{G_0}{C}\right) > \frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{32}$$

to napięcie pojawiające się na przerwie międzyelektrodowej po przejściu prądu przez wartość zerową ma przebieg aperiodyczny opisany równaniem:

$$u_p = E_\varphi + \frac{E_\varphi + u_g}{\beta_1 - \beta_2}(\beta_2 e^{\beta_1 t} - \beta_1 e^{\beta_2 t}), \tag{33}$$

gdzie:

$$\beta_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} - \frac{G_0}{C}\right) \pm \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{LC}{4}\left(\frac{R}{L} - \frac{G_0}{C}\right)^2 - 1}.$$

Zmianę konduktancji kolumny połukowej, pod wpływem napięcia międzyelektrodowego określonego zależnością (33) opisuje wyrażenie:

$$G^{k-1} = C \cdot e^{-\frac{t}{K}} + \frac{E_\varphi^2}{P_G} + \frac{2E_\varphi}{P_G}\frac{E_\varphi + u_g}{\beta_1 - \beta_2}\left[\frac{\beta_2}{\beta_1 K + 1} e^{\beta_1 t} - \frac{\beta_1}{\beta_2 K + 1} e^{\beta_2 t}\right] +$$
$$+ \frac{1}{P_G}\frac{(E_\varphi + u_g)^2}{(\beta_1 - \beta_2)^2}\left[\frac{\beta_2^2}{2\beta_1 K + 1} e^{2\beta_1 t} - \frac{2\beta_1\beta_2}{1 + (\beta_1 + \beta_2)K} e^{(\beta_1 + \beta_2)t} + \frac{\beta_1^2}{2\beta_2 K + 1} e^{2\beta_2 t}\right]. \tag{34}$$

Wymagana wartość napięcia zasilającego zapewniająca nieprzerwane palenie się łuku musi spełniać nierówność:

$$(1 + A' + B')E_\varphi^2 + (A'u_g + 2u_g B')E_\varphi + B'u_g^2 - G_0^{k-1} P_G > 0, \tag{35}$$

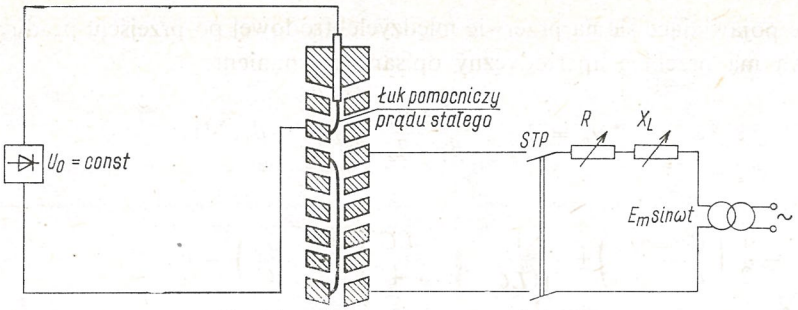
gdzie:

$$A' = \frac{2}{\beta_1 - \beta_2}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1 K + 1} - \frac{\beta_1}{\beta_2 K + 1}\right)$$

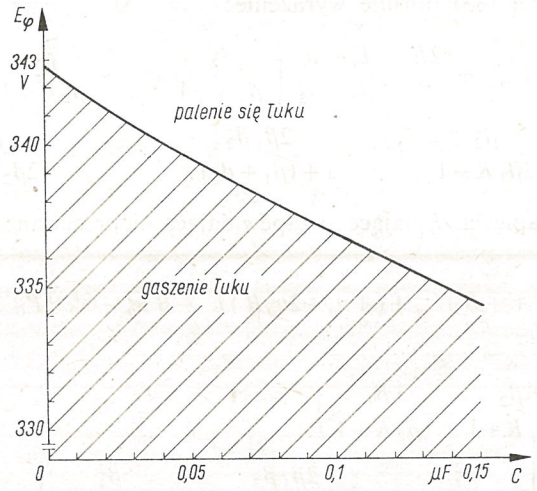
$$B' = \frac{1}{(\beta_1 - \beta_2)^2}\left[\frac{\beta_2^2}{2\beta_1 K + 1} - \frac{2\beta_1\beta_2}{1 + (\beta_1 + \beta_2)K} + \frac{\beta_1^2}{2\beta_2 K + 1}\right].$$

Z podanych nierówności (11), (26), (31) i (35) wynika, że na ponowny zapłon łuku elektrycznego mają wpływ parametry łuku, a szczególnie stała czasowa łuku, wartość napięcia zasilającego oraz parametry R, L, C obwodu. Warunek (11) jest słuszny dla obwodu rezystancyjnego warunek (26) przy pojemności obwodu zasilającego równej zero lub jej bardzo małej wartości, warunek (35) przy stosunkowo niewielkich pojemnościach, gdy przebieg napięcia na przerwie międzyelektrodowej jest aperiodyczny i warunek (31) dla dużych pojemności, gdy przebieg jest okresowy. Należy przy tym zwrócić uwagę, że spełnienie nierówności (27) lub (32), warunkujących charakter napięcia międzyelektrodowego jest zależne nie tylko od parametrów obwodu zasilającego, ale również od właściwości łuku, t.zn. konduktancji kolumny połukowej.

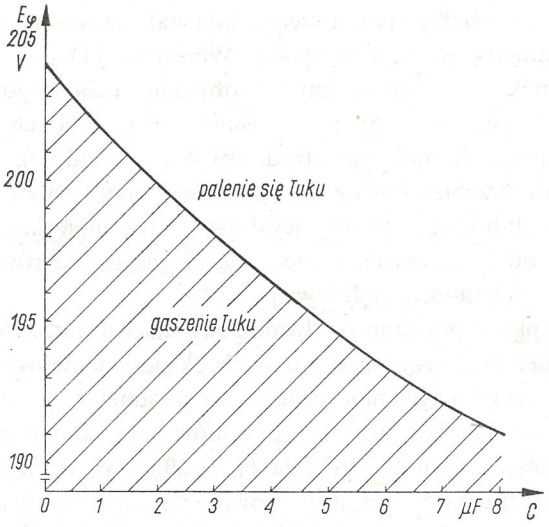
Dla stwierdzenia wpływu pojemności obwodu zasilającego na warunki palenia się łuku przeprowadzono obliczenia, korzystając z danych eksperymentalnych. Obwód zasilający wyładowanie prądu przemiennego miał następujące parametry: $E_m = 702$ V, $X = 2{,}4\ \Omega$, $R = 3{,}1\ \Omega$. Wyznaczona na podstawie oscylogramów wartość maksymalna prądu wynosiła 54 A, napięcie gaśnięcia łuku 142 V, stała $P_G = 2950$ $(V^2A)^{2/3}$. Obliczenia wykonano dla dwóch wartości stałej czasowej Θ, a mianowicie 0,1 ms i 0,4 ms, które można zmieniać przez zmianę natężenia prądu stałego łuku pomocniczego w układzie przedstawionym na rys. 5. Na rys. 6 i 7 podano zależność granicznej wartości napięcia E_φ poniżej któ-



Rys. 5. Obwód zasilania plazmotronu jednofazowego

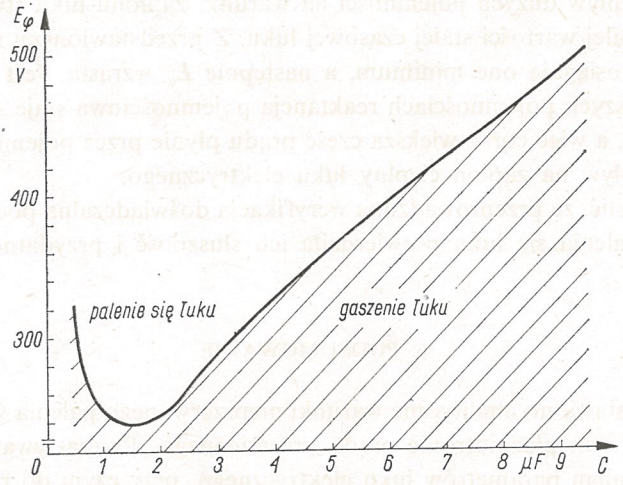


Rys. 6. Zależność napięcia E_φ od pojemności obwodu zasilającego przy aperiodycznym przebiegu napięcia międzyelektrodowego i $\Theta = 0{,}1$ ms

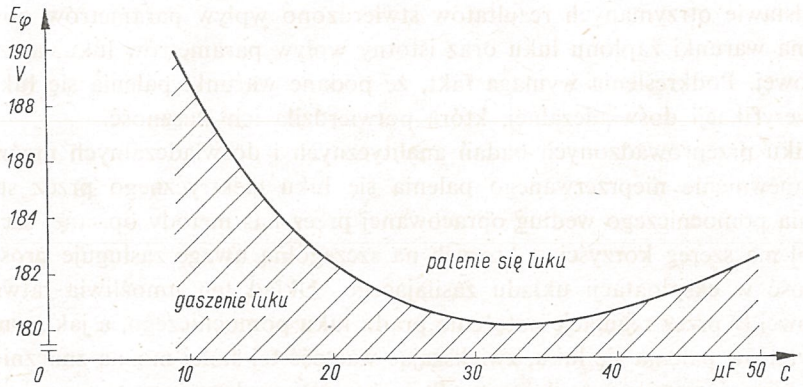


Rys. 7. Zależność napięcia E_φ od pojemności obwodu zasilającego przy aperiodycznym przebiegu napięcia międzyelektrodowego i $\Theta = 0{,}4$ ms

rej następuje gaszenie łuku, od pojemności obwodu zasilającego w przypadku, gdy napięcie międzyelektrodowe ma przebieg aperiodyczny, natomiast na rys. 8 i 9 przedstawiono zależność E_φ od pojemności obwodu zasilającego, gdy napięcie międzyelektrodowe ma przebieg okresowy.



Rys. 8. Zależność napięcia E_φ od pojemności obwodu zasilającego przy okresowym przebiegu napięcia międzyelektrodowego i $\Theta = 0{,}1$ ms



Rys. 9. Zależność napięcia E_φ od pojemności obwodu zasilającego przy okresowym przebiegu napięcia międzyelektrodowego i $\Theta = 0{,}4$ ms

Z przedstawionych na rys. 6 i 7 zależności wynika, że w przypadku niedużych wartości pojemności, gdy przebieg napięcia jest aperiodyczny, wymagana wartość napięcia zasilającego do zapewnienia nieprzerwalnego palenia się łuku maleje wraz ze wzrostem pojemności obwodu zasilającego, przy czym zmiany te są niewielkie rzędu kilku procentów. A zatem w obwodach rzeczywistych, w których nie stosuje się dodatkowej pojemności, np. dla kompensacji mocy biernej, można pominąć pojemność obwodu i analizować obwód rezystancyjno-indukcyjny, dla którego warunek nieprzerwanego palenia się łuku jest określony nierównością (26). Dla małych pojemności wyniki obliczeń na podstawie nie-

równości (35) są równe wynikom otrzymanym z nierówności (26). Analizując otrzymane zależności obliczone dla różnych wartości stałej czasowej Θ można stwierdzić, że wpływ pojemności obwodu zasilającego na warunki zapłonu łuku jest tym większy, im większa jest wartość stałej Θ.

Rozpatrując wpływ dużych pojemności na warunki zapłonu łuku stwierdzono, że jest on znaczny dla małej wartości stałej czasowej łuku. Z przedstawionych na rys. 8 i 9 krzywych wynika, że osiągają one minimum, a następnie E_φ wzrasta. Jest to spowodowane tym, że przy większych pojemnościach reaktancja pojemnościowa staje się porównywalna z rezystancją łuku, a więc coraz większa część prądu płynie przez pojemność, co ma oczywiście ujemny wpływ na zapłon cieplny łuku elektrycznego.

Należy podkreślić, że przeprowadzona weryfikacja doświadczalna podanych warunków nieprzerwanego palenia się łuku potwierdziła ich słuszność i przydatność.

6. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono analityczne warunki nieprzerwanego palenia się łuku elektrycznego w jednofazowym plazmotronie prądu przemiennego. Rozpatrywano obwód zasilający z uwzględnieniem parametrów łuku elektrycznego, przy czym do rozważań przyjęto równanie łuku elektrycznego, uwzględniające specyficzne warunki, w których łuk się pali, t.zn. wirowy przepływ gazu w komorze wyładowczej, który jest powszechnie stosowany w plazmotronach oraz metodę podtrzymania nieprzerwanego palenia się łuku.

Na podstawie otrzymanych rezultatów stwierdzono wpływ parametrów obwodu zasilającego na warunki zapłonu łuku oraz istotny wpływ parametrów łuku, a szczególnie stałej czasowej. Podkreślenia wymaga fakt, że podane warunki palenia się łuku zostały poddane weryfikacji doświadczalnej, która potwierdziła ich słuszność.

W wyniku przeprowadzonych badań analitycznych i doświadczalnych można stwierdzić, że zapewnienie nieprzerwanego palenia się łuku elektrycznego przez stosowanie wyładowania pomocniczego według opracowanej przez nas metody opisanej szczegółowo w pracy [6] ma szereg korzyści, z których na szczególną uwagę zasługuje prosta i duża niezawodność w eksploatacji układu zasilającego. Układ ten umożliwia łatwą zmianę stałej czasowej Θ przez regulację natężenia prądu łuku pomocniczego, a jak wynika z podanych kryteriów palenia się łuku, zwiększając wartość tej stałej można znacznie obniżyć wymaganą wartość napięcia zasilającego. Sądzimy, że przedstawione w pracy rozważania będą przydatne do opracowania konstrukcji i optymalnego układu zasilającego jednofazowy plazmotron prądu przemiennego.

LITERATURA

1. M. G. Fey: *Electric Arc (Plasma) Heaters for the Process Industries.* 1976, Ind. Heat.
2. Harry E. John: *A power frequency plasma torch for industrial process heating*, IEEE Trans. Ind. and Gen. Appl., 1970, 6, No 1
3. E. M. Esibyan *Plasma-arc equipment.* Moscow: Mir Publishers, 1973
4. F. Kassabji, P. Fauchais: *Les générateurs à plasma.* 1981 Revue Phys. Appl., 16

5. Cz. Królikowski, A. Kamińska-Pranke: *Jednofazwy palnik plazmowy prądu przemiennego.* Patent nr 135746
6. A. Kamińska-Pranke: *Rozprawa doktorska,* Poznań, 1982
7. Cz. Królikowski: *Technika łączenia obwodów elektroenergetycznych.* Warszawa—Poznań: PWN 1975
8. Z. Ciok: *Procesy łączeniowe w układach elektroenergetycznych.* Warszawa: WNT, 1983
9. G. H. Thiel: *Theoretical Investigation of the Different Arc Quenching Phenomed in SF_6 and Air Blast Circuit Breakers,* 1979 Wiss. Ber. AEG — Telefunken 52
10. W. W. Kaplan: *Ob energieticzeskoj tieorii gaszienia elektriczeskoj dugi w wozdusznych wyklucza-tieljach wysokowo naprażienija,* Elektriczestwo, 1975 Nr 6

C. KRÓLIKOWSKI, A. KAMIŃSKA-PRANKE

CONDITTIONS OF BURNING IN AN ELECTRIC ARC IN A SINGLE PHASE A. C. CIRCUIT

Summary

The article contains an analysis of conditions of burning in an a.c. single phase plasmatron. The analysis makes use of the equation of single arc dynamics which takes into consideration specific conditioins in which the arc is burning, viz. an uninterrupted arc burning enforced by appropriate method and whirl gas flow in the discharge chamber. Analytical criteria of arc burning were subjected to experimental verification which confirmed their validity.

C. KRÓLIKOWSKI, A. KAMIŃSKA-PRANKE

CONDITIONS DE FONCTIONNEMENT DE L'ARC ÉLECTRIQUE DANS LE CIRCUIT MONOPHASÉ DU COURANT ALTERNATIF

Résumé

Cet article présente l'analyse des conditions de fonctionnement de l'arc électrique dans un plasmotron ainsi que le comportement de l'arc dans son circuit électrique d'alimentation. Dans l'analyse on a utilisé l'équation de la dynamique de l'arc électrique, qui tient compte des conditions spécifiques, dans les quelles l'arc fonctionne, c'est à dire la méthode permettant d'éviter l'extinction de l'arc, lors du changement de phase et le mode de stabilisation de la colonne de l'arc par injection tourbillonnaire d'un gaz. Les critères analytiques, obtenus du fonctionnement de l'arc, ont été soumis à une vérification expérimentale, qui a prouvé leur justesse.

C. KRÓLIKOWSKI, A. KAMIŃSKA-PRANKE

BRENNBEDINGUNGEN DES LICHTBOGENS IN EINEM EINPHASIGEN WECHSELSTROMKREIS

Zusammenfassung

Der Artikel enthält eine Analyse der Brennbedingungen des Lichtbogens in einem einphasigen Lichtbogen-Plasma-Wechselstrom-brenner. Bei den Betrachtungen ist die Dynamikgleichung eines Lichtbogens angewandt worden, die die spezifischen Bedingungen berück-sichtigt, unter denen der Bogen brennt, d.h. die Methode des kontinuierlichen Bogenbrennens sowie die Gaswirbelströmung in der Entladekammer. Die erzielten analytischen Voraussetzungen für das Bogenbrennen sind experimentell untersucht worden, wobei ihre Richtigkeit bestätigt worden ist.

Ч. КРУЛИКОВСКИ, А. КАМИНЬСКА-ПРАНКЕ

УСЛОВИЯ ГОРЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ В ОДНОФАЗНОЙ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Р е з ю м е

Описан анализ условий горения электрической дуги в однофазной дугово-плазменной горелке переменного тока. В обсуждении применялось уравнение динамики электрической дуги, с учетом специфических условий горения дуги, т.е. метод непрерывной поддержки горения электрической дуги, а также вихревое течение газа в камере разряжения. Критерии горения электрической дуги, определенные аналитическим способом, были проверены в экспериментах, которые подтвердили их правильность.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1987, 33, z. 1, ss. 137-149

517.941.92:621.313.333

Equations of Squirrel-Cage Induction Motors with Symmetrical Design in Steady-State Operation

TADEUSZ J. SOBCZYK (KRAKÓW)

Instytut Maszyn i Sterowania Układów Elektroenergetycznych
Akademia Górniczo-Hutnicza im. S. Staszica w Krakowie

Received 1985.05.27

The paper presents a method of arranging voltage current equations for squirrel cage motors with certain types of symmetries of the stator windings and with a symmetrical rotor cage. The method takes into account the higher space harmonics of the air gap field distribution. These equations have the form of an infinite set of algebraic equations which allow for determination of the Fourier coefficients of the stator and rotor currents in the steady state operation. The currents are almost periodic functions of time with a uniquely determined frequency spectrum. On the basis of the currents an expression of the electromagnetic torque is given in the form of a Fourier series of an almost periodic function of time. The coefficients of this series, i.e. the individual components of the electromagnetic torque are given as infinite quadratic forms.

1. INTRODUCTION

This paper*) considers the problem of the effect caused by higher space harmonics in squirrel-cage asynchronous motors in steady state operation. Mathematical formalism resulting on the one hand from the so-called network theory approach to the electric machines and on the other hand from the theory of linear differential equations with periodic coefficients will be used in the paper. The network theory of electrich machines permits the writing of the mathematical model equations for squirrel-cage motors considering the higher harmonics of the space field distribution in the air gap, whereas the theory of linear differential equations with periodic coefficients constitutes the background for analysis of steady state operation.

The paper presents a mathematical model of a certain class of squirrel-cage motors using the model founded on the model described in [1] as well as the application of the method presented in [2] [3] for analysis of steady state operation. The analysis includes current-voltage relationships and an expression for the electromagnetic torque.

*) The work reported in this paper was realized as a part of the government-sponsored project 05.5A „Chosen fundamental problems in electrical power engineering".

2. THE MATHEMATICAL MODEL

2.1. MODEL ASSUPMTIONS

A mathematical model of the squirrel-cage motor, characterized by the symmetrical design of the stator windings and by a symmetrical squirrel-cage in the rotor will be presented. A class of stator windings will be considered which is equivalent to a system of M identical coil groups distributed symmetrically on the stator circumference, producing the magnetomotive force (*mmf*):

$$\Theta_m = \Theta\left(x+(m-1)\frac{2\pi}{M}\right); \quad m = 1, \ldots, M \tag{2.1}$$

The *mmf* of each of the independent coil groups is described by a periodic function which in the general case can be expanded into a Fourier series containing all harmonics. The function $\Theta(x)$ can be determined by making different simplifying assumptions. In particular it can account for the trapezoidal shape of the *mmf* of an elementary coil resulting from the equivalent width of the stator slot mouth.

The mathematical model includes single-cage motors with the cages consisting of N symmetrical meshes of any shape where the *mmf* of each mesh can be assumed to be trapezoidal, conforming to the equivalent width of the rotor slot mouth.

In the model it has been assumed that the air gap is uniform along the circumference and that it is increased by the coefficients of Carter. It has also been assumed that the magnetic circuit of the leakage and main fluxes are linear, where the magnetic conductance of the stator and rotor yoke for the main flux is sufficiently high. The unipolar flux is not taken into consideration in the model.

The model accounts not only for the magnetic linkage between the stator coils through the main flux but also through linkage between the coils through the leakage fluxes i.e. for the slot and end connection leakage fluxes. In the model, all meshes of the rotor cage are linked by the main flux, whereas anly the adjacent meshes are linked by the leakage flux. The resistance of the coupling between the adjacent cage meshes is also taken into consideration.

2.2. EQUATIONS OF THE MODEL

The model equations obtained after transformation into symmetrical components of currents and voltages of the independent stator coil groups and of the voltages and currents of rotor cage meshes will be presented.

The transformation matrices are for the stator:

$$A = \frac{1}{\sqrt{M}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & a & \ldots & a^{M-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & a^{M-1} & \ldots & a^{(M-1)^2} \end{bmatrix}; \quad a = e^{j\frac{2\pi}{M}} = e^{j\alpha} \tag{2.2}$$

and for the rotor:

$$B = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & b & \dots & b^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b^{N-1} & \dots & b^{(N-1)^2} \end{bmatrix}; \quad b = e^{j\frac{2\pi}{N}} = e^{j\beta} \tag{2.3}$$

The transformations yield the following differential equation system:

$$\begin{bmatrix} u_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \begin{bmatrix} L_s & M(\varphi) \\ M(\varphi)^T & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

$$J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{dt}^2} = (i_s^*)^T \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} M(\varphi)\right) i_r + T, \tag{2.5}$$

where:

$(u_s)^T = [u_s^0, u_s^1 \dots u_s^{M-1}]$ — vector of the symmetrical components of voltages of the stator coil groups,

$(i_s)^T = [i_s^0, i_s^1 \dots i_s^{M-1}]$ — vector of the symmetrical components of currents of the stator coil groups,

$(i_r)^T = [i_r^0, i_r^1 \dots i_r^{N-1}]$ — vector of the symmetrical components of currents of the rotor cage meshes,

$$R_s = \mathrm{diag}[R_s \dots R_s] \quad (M \times M), \tag{2.6}$$

R_s — resistance of an independent stator coil group

$$R_r = \mathrm{diag}[R_r^0, R_r^1 \dots R_r^{N-1}] \quad (N \times N), \tag{2.7}$$

where:

$$R_r^n = 2R_{se} + R_b\left(2\sin\frac{\pi}{N}n\right); \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

R_{se} — resistance of a segment of the end ring,

R_b — resistance of a cage bar,

$$L_s = \mathrm{diag}[L_s^0, L_s^1 \dots L_s^{M-1}] \quad (M \times M), \tag{2.8}$$

where:

$L_s^m = L_{s\sigma}^m + L_{sa}^m$,

$L_{s\sigma}^m = L_{s\sigma} + \sum_{i=1}^{M-1} (a^m)^i M_{\sigma s, i}$,

$m = 0, 1, \dots, M-1$,

$L_{s\sigma}$ — selfinductance of a stator coil group for the leakage flux,

$M_{s\sigma, i}$ — mutual inductances of stator coil groups shifted with respect to each other by an angle of $\left(i\frac{2\pi}{M}\right)$ (for leakage fluxes),

$L_{sa}^m = L_{sa} + \sum_{i=1}^{M-1} (a^m)^i M_{sa, i}$,

L_{sa} — selfinductance of a stator coil group for the main flux,

$M_{sa, i}$ — mutual inductances of stator coil groups shifted with respect to each other

by an angle of $\left(i\frac{2\pi}{M}\right)$ (for the main flux)

$$L_r = \operatorname{diag}[L_r^0, L_r^1 \dots L_r^{N-1}], \quad (N\times N); \tag{2.9}$$

$L_r^n = L_{r,\sigma}^n + L_{r,a}^n; \quad n = 0, 1, \dots, N-1;$

$L_{r\sigma}^n = 2L_{r\sigma s} + L_{r\sigma b}\left(2\sin\frac{\pi}{N}n\right)^2;$

$L_{r\sigma s}$ — leakage inductance of an end ring segment,

$L_{r\sigma b}$ — leakage inductance of a cage bar,

$L_{ra}^n = L_{ra} + M_{ra,1}(b^n + b^{-n}) + M_{ra}\sum_{i=2}^{N-2}(b^n)^i,$

L_{ra} — selfinductance of a cage mesh for the main flux,

$M_{ra,1}$ — mutual inductance of adjacent meshes for the main flux,

M_{ra} — mutual inductance of non-adjacent meshes for the main flux.

The $M(\varphi)$ matrix must be analysed in detail as it is of principal importance for description of the squirrel-cage motor. It is formulated as:

$$M(\varphi) = AM_c(\varphi)B^{-1}, \tag{2.10}$$

$M_c(\varphi)$ — matrix of mutual inductances of the stator coil groups and of cage meshes. Its principal arrangement can be gained by making use of the specific features of the matrix $M_c(\varphi)$ resulting from the assumed symmetry of the stator and rotor windings

$$M_c(\varphi) = \begin{bmatrix} M_{sr}(\varphi), & M_{sr}(\varphi+\beta) & \dots & M_{sr}(\varphi+(N-1)\beta) \\ M_{sr}(\varphi-\alpha), & M_{sr}(\varphi-\alpha+\beta) & \dots & M_{sr}(\varphi-\alpha+(N-1)\beta) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{sr}(\varphi-(M-1)\alpha), & M_{sr}(\varphi-(M-1)\alpha+\beta) & \dots & M_{sr}(\varphi-(M-1)\alpha+(N-1)\beta) \end{bmatrix},$$

where $M_{sr}(\varphi)$ is mutual inductance between the group of stator coils assumed to be the 1st one and the rotor cage mesh assumed to be the 1st one. It can be expanded to a Fourier series, as it is a periodic function of the angle φ

$$M_{sr}(\varphi) = M_{sr}(\varphi+2\pi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} M_{sr}^k e^{jk\varphi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} m_k. \tag{2.11}$$

Using the above notation, the matrix $M(\varphi)$ can be written in the form:

$$M(\varphi) = \sqrt{NM}\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ (M-1) \\ \\ \nu = \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \nu = kN & \nu = 1+kN & \dots & \nu = (N-1)+kN \end{array} \\ \begin{bmatrix} \sum m_\nu & \sum m_\nu & \dots & \sum m_\nu \\ \sum m_\nu & \sum m_\nu & \dots & \sum m_\nu \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum m_\nu & \sum m_\nu & & \sum m_\nu \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & (N-1) \end{array} \end{array}\begin{array}{l} \\ \nu = l\,M \\ \nu = 1+l\,M \\ \vdots \\ \nu = (M-1)+l\,M \\ \\ \end{array} \tag{2.12}$$

$$\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots; \quad k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Any element of the $M(\varphi)$ matrix is a sum of harmonics with numbers corresponding to the index satisfying the relationships written above the column and beside the row. Thus, each term of the expansion of the $M_{sr}(\varphi)$ inductance into a complex Fourier series has its precisely defined place in the matrix and it can appear there only once. If the columns and rows are denoted by indexes of the symmetrical components for the rotor $(0, 1, \ldots, N-1)$ and stator $(0, 1, \ldots, M-1)$ quantities accordingly, then the k-th term of the expansion of the $M_{sr}(\varphi)$ series will appear in the column denoted by (k) modulo N and in the row denoted by (k) modulo M.

For further consideration, the matrix $M(\varphi)$ will be given in the form

$$M(\varphi) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} M_k e^{jk\varphi}. \tag{2.13}$$

The M_k matrices have the dimensions of $(N \times M)$ and they have only one non-zero element in the (k) mod N column and (k) mod M row.

3. THE METHOD OF ANALYSIS OF THE STEADY STATE OPERATION

The method presented in [2] [3], founded on the theory of differential equations with periodically variable coefficients will be used for the analysis of the steady state operation. It enables an analysis of the steady state operation with any harmonic spectrum of the space field distribution in the air gap, assuming a constant speed of the rotor:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \tag{3.1}$$

and the supply voltages being almost periodic functions of time.

The case of a motor supplied with a monoharmonic voltage system will be considered for the model presented in the foregoing chapter. For this voltage system the vector of the symmetric components of the stator voltages is:

$$u_s = \sum_{\mu=\pm 1} U_s^{\mu} e^{j\mu\omega_0 t}, \tag{3.2}$$

where the relation occurs:

$$U_s^{-1} = AA^T \overset{*}{U}{}_s^{1}. \tag{3.3}$$

The following forms of the symmetric components of stator and rotor currents must be foreseen acc. to the method

$$i_s = \sum_{\mu=\pm 1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_{s,k}^{\mu} e^{j(\mu\omega_0 + k\omega)t}, \tag{3.4}$$

$$i_r = \sum_{\mu=\pm 1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_{r,k}^{\mu} e^{j(\mu\omega_0 + k\omega)t}. \tag{3.5}$$

Since the following relations occur

$$I_{s,k}^{-1} = AA^T \overset{*}{I}{}_{s,k}^{1}; \quad I_{r,k}^{-1} = BB^T \overset{*}{I}{}_{r,k}^{1}; \tag{3.6}$$

further consideration can be conducted only for $\mu = 1$. The vectors $I^1_{s,k}$ and $I^1_{r,k}$ satisfy the infinite equation system (3.7), where the individual elements represent the corresponding matrices of the system (2.4) accounting for the expansion of the $M(\varphi)$ matrix in its Fourier series acc. to (2.13).

$$
\begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ U^1_s \\ 0 \\ \vdots \\ \hline \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} =
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
\ddots & & & & & \\
 & R_s & & & & \\
 & & R_s & & & \\
 & & & R_s & & \\
 & & & & \ddots & \\
\hline
 & & & \ddots & & \\
 & & & & R_r & \\
 & & & & & R_r \\
 & & & & & & R_r \\
 & & & & & & & \ddots
\end{array}\right]
+ j
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
\ddots & & & & & \\
 & (\omega_0+\omega)I & & & & \\
 & & \omega_0 I & & & \\
 & & & (\omega_0-\omega)I & & \\
 & & & & \ddots & \\
\hline
 & & & \ddots & & \\
 & & & & (\omega_0+\omega)I & \\
 & & & & & \omega_0 I \\
 & & & & & & (\omega_0-\omega)I \\
 & & & & & & & \ddots
\end{array}\right]
\times
$$

$$
\times
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
\ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & L_s & & \dots 0 & M_1 & M_2 \dots \\
 & & L_s & \dots M_{-1} & 0 & M_1 \dots \\
 & & & L_s & \dots M_{-2} & M_{-1} & 0 \dots \\
 & & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\
 & \dots 0 & \overset{*}{M}{}^T_1 & \overset{*}{M}{}^T_2 \dots & & L_r & & \\
 & \dots \overset{*}{M}{}^T_{-1} & 0 & \overset{*}{M}{}^T_1 \dots & & & L_r & \\
 & \dots \overset{*}{M}{}^T_{-2} & \overset{*}{M}{}^T_{-1} & 0 \dots & & & & L_r \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \ddots
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c} \vdots \\ I^1_{s,1} \\ I^1_{s,0} \\ I^1_{s,-1} \\ \vdots \\ \hline \vdots \\ I^1_{r,1} \\ I^1_{r,0} \\ I^1_{r,-1} \\ \vdots \end{array}\right] \tag{3.7}
$$

The expression for the electromagnetic torque of the motor in steady state operation is obtained by substituting into the relationship:

$$T_{em} = (\overset{*}{i}_s)^T \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} M(\varphi) \right) i_r \tag{3.8}$$

the i_s and i_r vectors in the forms (3.4) and (3.5) respectively and the $M(\varphi)$ matrix in the form of a Fourier series (2.13). An expression results in the form of a series:

$$T_{em} = \sum_{l=0,2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} -2\,\mathrm{Imagine}\{T_{l,k} e^{j(l\omega_0 + k\omega)t}\} \tag{3.9}$$

where: $T_{l,k}$ is given in the quadratic form:

$$
T_{l,k} = [\dots (\overset{*}{I}{}^{1-l}_{s,1})^T, (\overset{*}{I}{}^{1-l}_{s,0})^T, (\overset{*}{I}{}^{1-l}_{s,-1})^T \dots] \times
$$

$$
\times
\left[\begin{array}{ccc}
\vdots & \vdots & \vdots \\
\dots kM_k & (k+1)M_{k+1} & (k+2)M_{k+2} \dots \\
\dots (k-1)M_{k-1} & kM_k & (k+1)M_{k+1} \dots \\
\dots (k-2)M_{k-2} & (k-1)M_{k-1} & kM_k \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}\right]
\cdot
\left[\begin{array}{c} \vdots \\ I^1_{r,1} \\ I^1_{r,0} \\ I^1_{r,-1} \\ \vdots \end{array}\right]. \tag{3.10}
$$

4. THE VOLTAGE-CURRENT RELATIONSHIPS FOR STEADY STATE OPERATION

The equation system (3.7) constitutes a general form of the voltage-current equations. However, because of the very rapid increase in its dimensions with the number of the considered harmonics it is not suitable for direct application.

A very significant reduction of its dimensions is gained by using the diagonal form of the L_s, L_r, R_s, R_r matrices and making use of the particular features of the M_k matrix. As a result of a detailed analysis, it is possible to write the equation system (3.7) as M independent infinitely dimensional subsystems. Let us denote:

$$U_s^1 = \begin{bmatrix} U_s^0 \\ U_s^1 \\ \vdots \\ U_s^{M-1} \end{bmatrix}; \quad I_{s,k}^1 = \begin{bmatrix} I_{s,k}^0 \\ I_{s,k}^1 \\ \vdots \\ I_{s,k}^{M-1} \end{bmatrix}; \quad I_{r,k}^1 = \begin{bmatrix} I_{r,k}^0 \\ I_{r,k}^1 \\ \vdots \\ I_{r,k}^{N-1} \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

With the above notation, to each U_s^m component of the U_s^1 vector corresponds a system with the general form:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_s^m \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{R}_s^m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_r^m \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}_s^m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Omega}_r^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s^m & \mathbf{M}^m \\ \mathbf{M}^{mT} & \boldsymbol{\alpha}_r^m \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s^m \\ \mathbf{I}_r^m \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

for $m = 1, 0, \ldots, M-1$, where:

$$\mathbf{R}_s^m = \operatorname{diag}[\ldots R_s, R_s, R_s \ldots] \tag{4.3}$$

$$\mathbf{R}_r^m = \operatorname{diag}[\ldots R_r^{(m-M) \bmod N}, R_r^m, R_r^{(m+M) \bmod N} \ldots] \tag{4.4}$$

$$\mathbf{\Omega}_s^m = \operatorname{diag}[\ldots (\omega_0 + N\omega), \omega_0, (\omega_0 - N\omega), \ldots] \tag{4.5}$$

$$\mathbf{\Omega}_r^m = \operatorname{diag}[\ldots (\omega_0 - (m-M)\omega), (\omega_0 - m\omega), (\omega_0 - (m+M)\omega) \ldots] \tag{4.6}$$

$$\mathbf{L}_s^m = \operatorname{diag}[\ldots L_s^{(m+N) \bmod M}, L_s^m, L_s^{(m-N) \bmod M}, \ldots] \tag{4.7}$$

$$\mathbf{L}_r^m = \operatorname{diag}[\ldots L_r^{(m-M) \bmod N}, L_r^{(m) \bmod N}, L_r^{(m+M) \bmod N}, \ldots] \tag{4.8}$$

$$\mathbf{M}^m = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots \underline{M}_{(m-M+N)}, & \underline{M}_{(m+N)}, & \underline{M}_{(m+M+N)} \ldots \\ \ldots \underline{M}_{(m-M)}, & \underline{M}_{(m)}, & \underline{M}_{(m+M)} \ldots \\ \ldots \underline{M}_{(m-M-N)}, & \underline{M}_{(m-N)}, & \underline{M}_{(m+M-N)} \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

where: $\underline{M}_{(l)} = M_l e^{jl\varphi_0}$, M_l — a non-zero element of the M_l matrix

$$\mathbf{U}_s^m = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ U_s^m \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I}_s^m = \begin{bmatrix} \vdots \\ I_{S,N}^{(m+N) \bmod M} \\ I_{s,0}^m \\ I_{S,N}^{(m-N) \bmod M} \\ \vdots \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I}_r^m = \begin{bmatrix} \vdots \\ I_{r,-(m-M)}^{(m-M) \bmod N} \\ I_{r,-m}^{(m) \bmod N} \\ I_{r,-(m+M)}^{(m+M) \bmod N} \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

5. EXPRESSION FOR THE ELECTROMAGNETIC TORQUE IN STEADY STATE OPERATION

Similarly as for the system (3.7) it is possible to gain a significant reduction in the dimensions of the quadratic forms (3.10) determing the amplitudes of the individual

components of the electromagnetic torque

$$T_{em} = \sum_{m=0}^{M-1} \left(\sum_{k} (-2\,\mathrm{Image}\{T_{0,k} e^{jkN\omega t}\}) + \sum_{l} (-2\,\mathrm{Image}\{T_{2,l} e^{j(2\omega_0 + lN\omega)t}\}) \right) \tag{5.1}$$

The components $T_{0,k}$ are given as quadratic forms:

$$T_{0,k} = (\overset{*}{\mathbf{I}}{}_s^{m_1})^T \boldsymbol{H}_m^k \mathbf{I}_r^m, \quad \text{where:} \tag{5.2}$$

$$\boldsymbol{H}_m^k = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots \{m-M+(k+1)N\}, & \{m+(k+1)N\}, & \{m+M+(k+1)N\} \ldots \\ \ldots \{m-M+kN\} \quad , & \{m+kN\} \quad , & \{m+M+kN\} \quad \ldots \\ \ldots \{m-M+(k-1)N\}, & \{m+(k-1)N\}, & \{m+M+(k-1)N\} \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

The notation:

$$\{\varrho\} = \varrho \underline{M}_{(\varrho)} \tag{5.3}$$

is used in order to gain a simpler form of the matrix $\boldsymbol{H}_m^k$.

The summation in formula (5.1) is to be carried out for such integers k which satisfy the condition:

$$\begin{aligned} &(m+kN) \bmod M = m_1 \\ &k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ &m_1 = 0, 1, \ldots, M \end{aligned} \tag{5.4}$$

The components $T_{2,l}$ have the form

$$T_{2,l} = (\overset{*}{\mathbf{I}}{}_s^{M-m_1})^T \cdot \boldsymbol{H}_m^l \mathbf{I}_r^m, \quad \text{where:} \tag{5.5}$$

$$(\overset{*}{\mathbf{I}}{}_s^{M-m_1}1)^T = [\ldots I_{s,-N}^{(m_1-N) \bmod M}, I_{s,0}^{m_1}, I_{s,N}^{(m_1+N) \bmod M} \ldots]. \tag{5.6}$$

In this case the summation is performed for such integers l which satisfy the condition:

$$\begin{aligned} &(m+lN) \bmod M = M - m_1 \\ &l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ &m_1 = 0, 1, \ldots, M \end{aligned} \tag{5.7}$$

6. EXEMPLARY APPLICATIONS OF THE MODEL

Example 1.

Let us consider a class of motors with stator windings having no parallel branches. Let us also assume a winding with an odd number of phases M ($M > 3$) and pole pairs p, for which the *mmf* of each phase includes only the odd harmonics.

$$\Theta_i(x) = \sum_{\varrho=1}^{\infty} \Theta_{2\varrho-1} \cos(2\varrho-1)\left(px + (i-1)\frac{2\pi}{M}\right). \tag{6.1}$$

In this case the matrix $M(\varphi)$ in the equations (2.4), (2.5) takes the form

$$M(\varphi) = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ (M-1) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \nu = kN, & \nu = 1+kN & \dots & \nu = (N-1)+kN \end{array} \\ \begin{bmatrix} \sum m_\nu & \sum m_\nu & \dots & \sum m_\nu \\ \sum m_\nu & \sum m_\nu & \dots & \sum m_\nu \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum m_\nu & \sum m_\nu & & \sum m_\nu \\ 0 & 1 & \dots & (N-1) \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \nu = lMp \\ \nu = (1+lM)p, \\ \vdots \\ \nu = (M-1+lM)p \end{array} \tag{6.2}$$

where: $l, k = 0, +1, \pm 2, \dots$, $\nu = (2\varrho-1)p$

Thus, the non-zero element corresponding to the number ν will appear in the matrix $M(\varphi)$ in the row

$$m = \left(\frac{\nu}{p}\right) \bmod M$$

and in the column $n = (\nu) \bmod N$. In the case when the motor is supplied with a symmetrical, M-phase voltage system, the vector of the symmetrical components of the stator voltages is:

$$U_s = U\sqrt{\frac{M}{2}}\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} e^{j\omega_0 t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-j\omega_0 t} \right\rangle. \tag{6.3}$$

U — effective value of the phase voltage

Hence, considerations can be limited to the system of the symmetrical component $m = 1$. Consideration of the particular form of the $M(\varphi)$ matrix yields:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_r \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_s & \mathbf{M} \\ (\mathbf{M})^T & \boldsymbol{L}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

where:

$$(\mathbf{U}_s)^T = \left[\dots 0, \sqrt{\frac{M}{2}}\, U, 0 \dots \right] \tag{6.5}$$

$$(\mathbf{I}_s)^T = [\dots I_{s,gN}^{(1+h) \bmod M}, I_{s,0}^{1}, I_{s,-gN}^{(1-h) \bmod M} \dots] \tag{6.6}$$

$$(\mathbf{I}_r)^T = [\dots I_{r,-(1-2M)p}^{((1-2M)p) \bmod N}, I_{r,-p}^{p}, I_{r,-(1+2M)p}^{((1+2M)p) \bmod N} \dots] \tag{6.7}$$

$$\mathbf{R}_s = \operatorname{diag}[\dots R_s, R_s, R_s \dots] \tag{6.8}$$

$$\mathbf{R}_r = \operatorname{diag}[\dots R_r^{((1-2M)p) \bmod N}, R_r^{p}, R_r^{((1+2M)p) \bmod N} \dots] \tag{6.9}$$

$$\boldsymbol{L}_s = \operatorname{diag}[\dots L_s^{(1+h) \bmod M}, L_s^{1}, L_s^{(1-h) \bmod M} \dots] \tag{6.10}$$

$$\boldsymbol{L}_r = \operatorname{diag}[\dots L_r^{((1-2M)p) \bmod N}, L_r^{p}, L_r^{((1+2M)p) \bmod N} \dots] \tag{6.11}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_s = \operatorname{diag}[\dots (\omega_0 + gN\omega), \omega_0, (\omega_0 - gN\omega), \dots] \tag{6.12}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_r = \operatorname{diag}[\ldots (\omega_0-(1-2M)p\omega), (\omega_0-p\omega), (\omega_0-(1+2M)p\omega) \ldots] \tag{6.13}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots \underline{M}_{(p(1-2M)+gN)} & \underline{M}_{(p+gN)} & \underline{M}_{(p(1+2M)+gN)} \cdots \\ \cdots \underline{M}_{(p(1-2M))} & \underline{M}_{(p)} & \underline{M}_{(p(1+2M))} \cdots \\ \cdots \underline{M}_{(p(1-2M)-gN)} & \underline{M}_{(p-gN)} & \underline{M}_{(p(1+2M)-gN)} \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}. \tag{6.14}$$

The indices h and g appearing in the above formulae must satisfy the relationship

$$h+iM = \frac{gN}{2p}; \quad h = 0, 1, \ldots, M-1 \tag{6.15}$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots$$

$$g = 1, 2, \ldots, 2p$$

for the minimum value of the index g.

The expression for the electromagnetic torque has the form:

$$T_{em} = \sum_k (-2\,\mathrm{Image}\{T_{0,k}\, e^{jkgN\omega t}\}) + \sum_l (-2\,\mathrm{Image}\{T_{2,l}\, e^{j(2\omega_0+lgN\omega)t}\}), \tag{6.16}$$

where:

$$T_{0,k} = (\overset{*}{\mathbf{I}}_s)^T \boldsymbol{H}^k \mathbf{I}_r, \tag{6.17}$$

$$T_{2,k} = (\overset{*}{\mathbf{I}}_s^{M-1})^T \boldsymbol{H}^l \mathbf{I}_r, \tag{6.18}$$

$$(\overset{*}{\mathbf{I}}_s^{M-1})^T = [\ldots I_{s,-gN}^{(1-h)\bmod M}, I_{s,0}^{1}, I_{s,gN}^{(1+h)\bmod M} \ldots], \tag{6.19}$$

$$\boldsymbol{H}^i = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots\{(1-2M)p+(i+1)gN\}, & \{p+(i+1)gN\}, & \{(1+2M)p+(i+1)gN\} \ldots \\ \ldots\{(1-2M)p+igN\}, & \{p+igN\}, & \{(1+2M)p+igN\} \ldots \\ \ldots\{(1-2M)p+(i-1)gN\}, & \{p+(i-1)gN\}, & \{(1+2M)p+(i-1)gN\} \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}. \tag{6.20}$$

In order to shorten the notation, the designations of (5.3) have been used in formula (6.20). The summation induces in formula (6.16) satisfy the conditions

$$(1+k\cdot h)\bmod M = 1 \tag{6.21}$$

$$(1+l\cdot h)\bmod M = (M-1) \tag{6.22}$$

where: $k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Example 2.

Let us consider a class of motors where the stator winding has in each phase a number of parallel branches being equal to the pole pair number p. Let us also assume that the winding has an odd number of stator phases M_1 for which the *mmf* produced by the l-th parallel branch in the phase m is determined in the following manner

$$\Theta_{m,l} = \Theta\left(x+(m-1)\frac{2\pi}{pM_1}+(l-1)\frac{2\pi}{p}\right) \tag{6.23}$$

$$m = 1, \ldots, M_1; \quad l = 1, \ldots, p$$

Such winding can be considered as a system with the number of phases

$$M = pM_1. \tag{6.24}$$

If a system of supply voltages is chosen

$$[u_1 \dots u_M]^T = \sqrt{2}\,U\mathrm{Real}\{[1, a^{-p}, a^{-2p}, \dots, a^{-(M-1)p}]e^{j\omega_0 t}\}, \tag{6.25}$$

where: $a = e^{j\frac{2\pi}{M}}$,

then only the symmetrical components of the voltages p and $(M-p)$ mutually conjugated are different from zero. The voltage-current equations for the steady state operation are obtained directly from (4.2) for $m = p$ and $M = pM_1$ where

$$(\mathbf{U}_s^p)^T = \left[\dots 0, \sqrt{\frac{M}{2}}U, 0 \dots\right]. \tag{6.26}$$

The expression for the electromagnetic torque has the form (5.1), but only one component of the sum $m = p$ appears in it.

Example 3.

Let us consider a class of motors with stator windings having in each phase a number of parallel branches equal to the number of poles $2p$. Let it be a winding with an odd number of stator phases M_1 for which the *mmf* produced by the l-th parallel branch in the phase m is determined as:

$$\Theta_{m,l} = \Theta\left(x + (m-1)\frac{2\pi}{pM_1} + (l-1)\frac{2\pi}{2p}\right) \tag{6.27}$$

$m = 1, \dots, M_1$

$l = 1, \dots, 2p$

Such winding can be considered as a system with the number of phases

$$M = 2pM_1. \tag{6.28}$$

If the system of supply voltages is chosen in the following manner

$$[u_1 \dots u_M]^T = \sqrt{2}U\mathrm{Real}\{[1,0, a^{-2p}, 0, a^{-4p}, \dots a^{-(M-2)p}, 0]e^{j\omega_0 t} - [0, a^{-p}, 0, a^{-3p}, 0, \dots 0, a^{-(M-1)p}]e^{j\omega_0 t}\}, \tag{6.29}$$

$a = e^{j\frac{2\pi}{M}}$

then only the symmetrical components of voltages p and $(M-p)$, which are mutually conjugated, are different from zero.

The equations for the steady state, as in example 2, are obtained directly from (4.2) for $m = p$, however for $M = 2pM_1$, in which

$$\mathbf{U}_s^{pT} = \left[\dots 0, \sqrt{\frac{M}{2}}U, 0 \dots\right] \tag{6.30}$$

the expression for the electromagnetic torque has the form of (5.1), but only one component of the sum $m = p$ appears in it.

CONCLUSIONS

As a result of the considerations a method of arrangement of the voltage-current equations and of the expression for the electromagnetic torque is given in the paper for the steady state operation taking into account the higher space harmonics of the air-gap field distribution. The detailed analysis concerns motors characterized by certain symmetry of the stator winding design and by a symmetrical rotor cage.

However the method applied in the present work permits to analyse the steady state operation for motors with arbitrarily asymmetrical stator windings or rotor cages as well as with any shape of the air-gap.

REFERENCES

1. F. Taegen, E. Hommes: *Das allegemeine Gleichungssystem des Käfigläufer Motors unter Berücksichtigung der Oberfelder*. Archiv für Elektrotechnik, 1972, t. 55, s. 21—31, (98—105)
2. T. Sobczyk: *Analysis of steady state in electric machines*. Scient. Bull. of the Univ. of Mining and Metall., No. 654 Electr. and Mech. in Mining and Metall., Bull. 97, Cracow, 1977
3. T. Sobczyk: *Infinitely dimensional linear and quadratic forms of electric machines*. Rozprawy Elektrotechniczne, 1983, t. 29, z. 3, Warszawa: PWN, s. 697—707
4. T. Sobczyk, J. Rusek: *Harmonic analysis of current and torque of squirrel-cage motors at balanced power supply*. Proceedings ICEM'82, Budapest, 1982, s. 775—779, part 3
5. T. Sobczyk: *Berücksichtigung der Oberwellen des Luftspaltfeldes in Schleifring-Asynchronmotoren*. Elektrie 6/83, VEB Verlag Technik, Berlin, DDR, 1983, s. 293—298
6. J. Rusek: *Drehmoment und Strom einer über stromeinprägenden Wechselrichter gespeisten Asynchron-Maschine im stationären Betriebszustand*. Archiv für Elektrotechnik, Springer-Verlag, 1984, t. 67, s. 151—180

T. J. SOBCZYK

RÓWNANIA STANÓW NIEUSTALONYCH W INDUKCYJNYCH SILNIKACH KLATKOWYCH O SYMETRYCZNEJ BUDOWIE

Streszczenie

Artykuł podaje metodykę układania równań napięciowo-prądowych dla silników indukcyjnych klatkowych, w których uzwojenia stojana wykazują pewne cechy symetrii, a klatka w wirniku jest symetryczna. W równaniach uwzględnione są wszystkie harmoniczne przestrzennego rozkładu pola w szczelinie powietrznej, wywołane przez rozłożenie uzwojeń na stojanie i wirniku. Równania stanu ustalonego mają postać nieskończonych układów równań algebraicznych, z których można wyznaczyć współczynniki szeregów Fouriera prądów stojana i wirnika. Prądy te są prawie-okresowymi funkcjami czasu o jednoznacznie zdeterminowanym spektrum częstotliwościowym. Na bazie tak określonych prądów zostały wyznaczone wyrażenia na moment elektromagnetyczny. Ma ono postać szeregu Fouriera funkcji prawie-okresowej. Współczynniki tego szeregu, t.j. poszczególne komponenty momentu elektromagnetycznego są określone przez nieskończenie wymiarowe formy kwadratowe.

T. J. SOBCZYK

EQUATIONS D'ETATS ETABLIS DANS LES MOTEURS D'INDUCTION À CAGE DE CONSTRUCTION SYMÉTRIQUE

Résumé

Cette étude présente le procédé de formuler les équations de tension-courant pour les moteurs d'induction à cage, dans lesquels les enroulements du stator présentent certains traits de symétrie, tandis que la cage dans le rotor est symétrique. Dans les équations sont présentés toutes les harmoniques de la répartition spatiale du champ dans l'entrefer, excités par répartition des courants dans le stator et le rotor. Les équations d'état stabilisé ont la formede système des équations algébriques infinies, qui permettent de calculer les coefficients de séries de Fourier des courants du stator et du rotor. Ces courants sont des fonctions qua sipériodiques de temps avec spectre fréquentatif déterminé. A la base des courants ainsi déterminés ont été définies les expressions pour le moment électromagnétique. Elles ont la formede séries de Fourier de fonction quasi-périodique. Les coefficients de telle série, à savoir les components particuliers du moment électromagnétique sont définis par des formes quadratiques infinies.

T. J. SOBCZYK

GLEICHUNGEN DER STATIONÄREN ZUSTÄNDE BEI KÄFIGLÄUFER-INDUKTIONSMOTOREN MIT SYMMETRISCHEM AUFBAU

Zusammenfassung

Die-Bearbeitung bringt die Methodik der Bildung von Spannungs-stromgleichungen für Käfigläufer--Induktionsmotoren, worin die Ständerwicklungen gewisse Merkmale der Symmetrie aufweisen, und der Läuferkäfig symmetrisch ist. In den Gleichungen werden alle Oberwellen der räumlichen Feldverteilung im Luftspalt berücksichtigt, die durch die Verteilung der Windungen im Stator und Rotor hervorgerufen werden. Die Gleichungen des stationären Zustandes haben die Form endloser Systeme algebraischer Gleichungen, woraus Koeffizienten der Fourier-Reihen der Stator- und Rotorströme bestimmt werden können. Diese Ströme sind quasiperiodische Zeit-funktionen mit eindeutig determiniertem Frequenzspektrum. Auf Grund der so bestimmten Ströme wurde die Formel für das elektromagnetische Moment bestimmt, das die Form einer Fourier-Reihe der quasiperiodischen Funktion hat. Die Koeffizienten dieser Reihe, d.h. die einzelnen Komponenten des elektromagnetischen Momentes werden durch unendlich-dimensionale quadratische Formen bestimmt.

Т. Я. СОБЧИК

УРАВНЕНИЯ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ В СИММЕТРИЧНЫХ ИНДУКЦИОННЫХ ДВИГАТЕЛЯХ С БЕЛИЧЬЕЙ КЛЕТКОЙ

Резюме

Представлена методика составления уравнений напряжений и токов для индукционных двигателей с беличьей клеткой, с обмотками статора проявляющими некоторые свойства симметрии, а клетка ротора симметрична. В уравнениях учитываются все гармоники пространственного распределения поля в воздушном зазоре вызванные распределением обмоток на статоре и роторе. Уравнения установившегося режима имеют вид бесконечных систем алгебраических уравнений, по которым можно определить коэффициенты ряда Фурье токов статора и ротора. Эти токи являются почти-периодическими функциями времени с однозначно определенным частотным спектром. На основе так определенных токов получено выражение для электромагнитного момента. Имеет оно вид ряда Фурье почти-периодической функции. Коэффициенты этого ряда, т.е. отдельные составляющие электромагнитного момента, определенны бесконечноразмерными квадратичными формами.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1987, 33, z. 1, ss. 151-166

621.313.333

A mathematical model of an arch motor with a squirrel cage as a secondary

TADEUSZ J. SOBCZYK, JERZY MIKULIK (KRAKÓW)

Instytut Maszyn i Sterowania Układów Elektroenergetycznych
Akademia Górniczo-Hutnicza im. S. Staszica w Krakowie
Instytut Elektrotechniki i Elektroniki
Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki

Received 1985.05.27

The paper presents a mathematical model of an induction arch motor interpreted as a set of electrical circuits linked magnetically. The model comprises a geometrical configuration of the elementary electrical circuits, stator coils and rotor cage meshes expressed by their self and mutual inductances. The specific desing of an arch motor finds its representation in the structure of the inductance matrix. The model takes into consideration the connection of stator turns into phases by the Kron's matrix of constrains. As a result of using symmetrical components of stator and rotor currents and voltages in the description a fundamental set of equations is obtained. The model gives a possibility of a general analysis of the energy conversion process as determined by the details of the arch motor under study.

1. INTRODUCTION

We consider an arch-motor which has been built from a squirrel-cage induction motor by removing a fragment of the stator core and stator windings. The magnetic circuit is fundamentally changed in this arch-motor. We have encountered diffiuclties in the description of the arch-motor, which are caused by disturbance of the magnetic circuit symmetry and the stator winding symmetry. We have obtained a mathematical model of the arch-motor by applying the methods which are used in the analysis of the cylindrical induction motors.

2. MATHEMATICAL MODEL EQUATIONS

Figure 1 presents a physical model of an arch-motor. A three phase winding consisting of M coils is placed on the stator core. A symmetrical squirrel-cage with N bars performs the function of a rotor. An arch-motor of such a type constitutes a set of magnetically and electrically coupled circuits which can be described with the help of the differential equation system:

$$\begin{bmatrix} U_s^m \\ U_r^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s^m & 0 \\ 0 & R_r^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s^m \\ I_r^n \end{bmatrix} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \begin{bmatrix} L_{\sigma s}^m & 0 \\ 0 & L_{\sigma r}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s^m \\ I_r^n \end{bmatrix} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \begin{bmatrix} M_s^m & M_{sr}^{cm} \\ M_{rs}^{mc} & M_r^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s^m \\ I_r^n \end{bmatrix}, \tag{1}$$

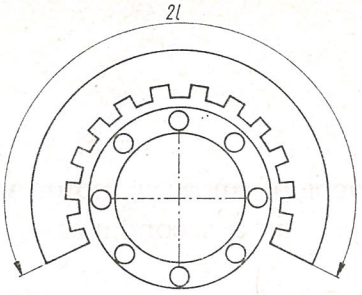


Fig. 1. Magnetical circuit of the arch-motor

where:

$$U_s^m = \begin{bmatrix} U_s^1 \\ U_s^2 \\ \vdots \\ U_s^M \end{bmatrix} \quad U_r^n = \begin{bmatrix} U_r^1 \\ U_r^2 \\ \vdots \\ U_r^N \end{bmatrix} \quad I_s^m = \begin{bmatrix} I_s^1 \\ I_s^2 \\ \vdots \\ I_s^M \end{bmatrix} \quad I_r^n = \begin{bmatrix} I_r^1 \\ I_r^2 \\ \vdots \\ I_r^N \end{bmatrix}, \tag{2}$$

U_s^m, I_s^m — voltage and current vectors of the stator coils,
U_r^n, I_r^n — voltage and current vectors of the squirrel-cage meshes,

$$R_r^n = \begin{bmatrix} R_m & -R_b & \dots & -R_b \\ -R_b & R_m & -R_b & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -R_b & \dots & -R_b & R_m \end{bmatrix},$$

$$L_{\sigma r}^n = \begin{bmatrix} L_{\sigma m} & -L_{\sigma b} & \dots & -L_{\sigma b} \\ -L_{\sigma b} & L_{\sigma m} & -L_{\sigma b} & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -L_{\sigma b} & \dots & -L_{\sigma b} & L_{\sigma m} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

R_r^n — resistance matrix of the rotor squirrel-cage meshes, $(N \times N)$,
$L_{\sigma r}^n$ — leakage inductance matrix of the rotor squirrel-cage, meshes, $(N \times N)$,
$L_{\sigma m} = 2L_{\sigma b} + 2L_{\sigma bc}$,
$R_m = 2R_b + 2R_{bc}$,
R_m — resistance of the squirrel-cage mesh,
R_b — resistance of the squirrel-cage bar,
R_{bc} — resistance of the squirrel-cage connecting bar,
$L_{\sigma m}$ — leakage inductance of the squirrel-cage mesh,
$L_{\sigma b}$ — leakage inductance of the squirrel-cage bar,
$L_{\sigma bc}$ — leakage inductance of the squirrel-cage connecting bar,
$R_s^m = \mathrm{diag}(R_s^c, R_s^c, \dots R_s^c)$,
$L_{\sigma s}^m = \mathrm{diag}(L_{\sigma s}^c, L_{\sigma s}^c, \dots L_{\sigma s}^c)$,
R_s^m — resistance matrix of the stator coils, $(M \times M)$,
$L_{\sigma s}^m$ — leakage inductance matrix of the stator coils, $(M \times M)$,
R_s^c — resistance of the stator coil,
$L_{\sigma s}^c$ — leakage inductance of the stator coil,

M_s^m — matrix of the self and mutual inductances of the stator coils, $(M \times M)$,
M_r^n — matrix of the self and mutual inductances of the squirrel-cage meshes, $(N \times N)$,
M_{sr}^{cm}, M_{rs}^{mc} — matrix of the mutual inductances of the stator coils and squirrel-cage meshes, $(M \times N)$.

The equation of mechanical motion has a form:

$$\Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} [I_s^{mT}, I_r^{nT}] \begin{bmatrix} M_s^m & M_{sr}^{cm} \\ M_{rs}^{mc} & M_r^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s^m \\ I_r^n \end{bmatrix} + \mathcal{M}, \tag{4}$$

where:

Θ — moment of inertia of the rotor
$\mathcal{M}$ — external loading moment
φ — angle of rotation
I_s^{mT} — transposed currents vector of the stator coils
I_r^{nT} — transposed currents vector of the squirrel-cage

We take in consideration the stator coils connections into phase bands by introducing the constraints matrix C:

$$I_s^m = CI_s^p; \quad U_s^p = C^T U_s^m, \tag{5}$$

where: I_s^p, U_s^p — current and voltage vectors of the stator phases

Matrix C has the form:

$$C = [c_{ij}]; \quad i = 1, 2, \ldots M; \quad j = 1, 2, 3; \tag{6}$$

where:

$$c_{ij} = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{matrix} \tag{7}$$

$c_{ij} = 0$ — if the given coil does not belong to the examined phase-band,
$c_{ij} = 1$ — if the coil current has the same direction as the phase current,
$c_{ij} = -1$ — if the coil current has an opposite direction from the phase current.

If we introduce symmetrical components to the model:

$$\begin{aligned} U_s &= SU_s^p; \quad U_r = BU_r^n; \\ I_s &= SI_s^p; \quad I_r = BU_r^n; \end{aligned} \tag{8}$$

where:

$$S = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \quad B = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & b & & b^{N-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & b^{N-1} & \ldots & b^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \tag{9}$$

the motor equations (1), (4) will assume the form:

$$\begin{bmatrix} U_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s \\ I_r \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{\sigma s} & 0 \\ 0 & L_{\sigma r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s \\ I_r \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} M_s & M_{sr} \\ M_{rs} & M_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s \\ I_r \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$\Theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} [\check{I}_s^T, \check{I}_r^T] \begin{bmatrix} M_s & M_{sr} \\ M_{rs} & M_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s \\ I_r \end{bmatrix} + \mathcal{M}, \tag{11}$$

where:

$$\begin{aligned} R_s &= SC^T R_s^m CS^{-1} & L_{\sigma s} &= SC^T L_{\sigma s}^m CS^{-1} \\ R_r &= BR_r^n B^{-1} & L_{\sigma r} &= BL_{\sigma r}^n B^{-1} \\ M_s &= SC^T M_s^m CS^{-1} & M_r &= BM_r^n B^{-1} \\ M_{sr} &= SC^T M_{sr}^{cm} B^{-1} & M_{rs} &= \check{M}_{rs}^T \end{aligned} \tag{12}$$

We have obtained differential equations in the terms (10), (11) which describe the dynamic as well as the steady states of the arch-motor. In order to use these equations it is necessary to calculate the equation parameters and first of all self and mutual inductances of the elementary motor circuirts. It should be expected, that such a strong disturbance of magnetic and electrical symmetry will cause the mathematical model of the arch-motor to assume a complex form. To maintain the interval cohesion of the model during calculations of its parameters we have made the following assumptions:

1) Iron in magnetical circuits has magnetical permeability $\mu = \infty$ and electrical conductivity $\gamma = 0$.

2) There is no mutual influence between the radial and axial magnetic fields.

3) Stator coils produce rectangual magnetic field distribution along rotor circumference.

4) The stator winding consists of M coils symmetricaly distributed along stator circumference.

5) The rotor winding is built as a symmetrical cage with N bars.

Such assumptions allowed to obtain approximate values of self and mutual inductances of the motor circuits without the necessity of solving electromagnetic field equations.

3. SELF AND MUTUAL INDUCTANCES OF THE STATOR COILS

Figure 2 shows the stator winding consisting of coils. Each stator coil produces rectangular magnetic field distribution — as shown in Fig. 3.

The values B_1 and B_2 are:

$$B_1 = \frac{Iz\mu_0}{\delta}\left(1 - \frac{k_1 \alpha_c}{2l}\right), \tag{13}$$

$$B_2 = \frac{-Iz\mu_0}{\delta} \cdot \frac{k_1 \alpha_c}{2l}. \tag{14}$$

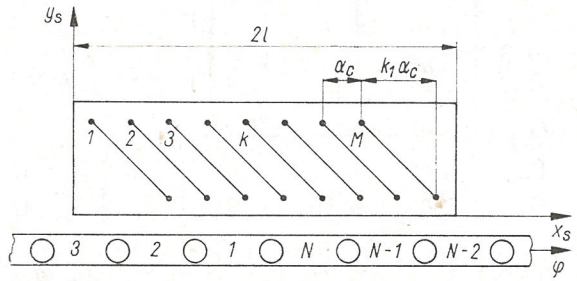


Fig. 2. Simplified model of the arch-motor employed to the calculations

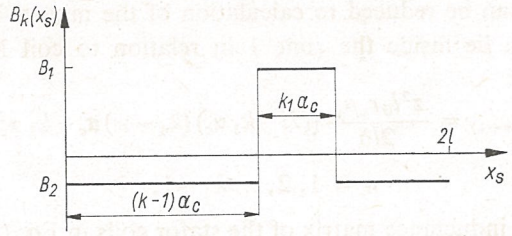


Fig. 3. Magnetical flux density produced by stator coil in the air gap

The self-inductances of coils are:

$$L = \frac{z^2 r_s l_0 \mu_0}{\delta}\left(1 - \frac{k_1 \alpha_c}{2l}\right) k_1 \alpha_c, \tag{15}$$

where:

μ_0 — magnetic permeability in vacuum
z — number of turns in a stator coil
r_s — radius of the arch-motor (m)
l_0 — axis length of the stator (m)
δ — equivalent width of the air gap (m)
k_1 — stator coil pitch expressed in number of slots
α_c — stator slot pitch (rad)
$2l$ — arch stator length (rad)

The self-inductance of a stator coil is constant and it does not depend on the position of that coil on the stator arch. Figure 4 shows the principle of coupling between any sta-

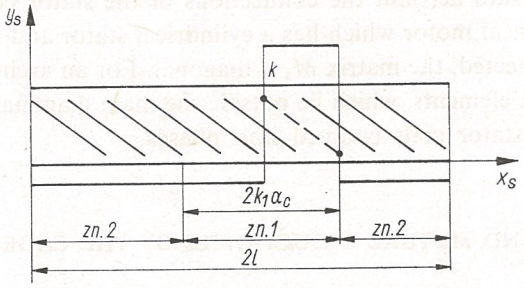


Fig. 4. Magnetical coupling between any stator coil and the k coil

tor coil and the coil k. In the air gap there are two zones: (1) with magnetic flux density equal to B_1 and (2) with magnetic flux density equal to B_2.

For a coil whose two sides lie inside the 2nd zone the mutual inductance with coil k is:

$$M = -\frac{z^2 r_s l_0 \mu_0}{2l\delta} \cdot (k_1 \alpha_c)^2. \tag{16}$$

The calculation of the mutual inductance of the k coil with a coil whose one side at least

lies inside the zone 1, can be reduced to calculation of the mutual inductance of the coil No 1 with coils, which lie inside the zone 1 in relation to coil No 1.

$$M_{1,(w+1)} = \frac{z^2 l_0 r_s \mu_0}{2l\delta}\left[(2l - k_1\alpha_c)(k_1 - w)\alpha_c - k_1\alpha_c^2 w\right], \tag{17}$$

$$w = 1, 2, \ldots k_1 - 1.$$

The self and mutual inductance matrix of the stator coils in Eq. (1) takes the form (18).

$$M_s^m = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|}
 & \multicolumn{3}{c}{\text{zn. 1}} & \multicolumn{4}{c}{\text{zn. 2}} \\
\hline
L & M_{12} & \ldots & M_{1,k1} & M & \ldots & M & M \\
\hline
M_{21} & & & & & & & M \\
\hline
\vdots & & & & & & & \\
\hline
M_{k1,1} & & & & & & & \\
\hline
M & & & & & & & \\
\hline
\vdots & & & & & & & \\
\hline
M & & & & & & & \\
\hline
M & M & & & & & & L \\
\hline
\end{array} \tag{18}$$

After transformation into symmetric components the stator self and mutual inductance matrix M_s^m takes form (12). Its dimension is (3×3) and its structure depends on the matrix C which takes into account the connections of the stator coils into phase bands. In the case of an electrical motor which has a cylindrical stator and whose stator windings are symmetrically connected, the matrix M_s is diagonal. For an arch-motor, the matrix M_s is not diagonal and the elements, which lie outside the main diagonal, determine the degree of asymmetry of the stator coils coupled into phases.

4. SELF AND MUTUAL INDUCTANCES OF THE CAGE MESHES

The asymmetry of the magnetic circuit of an arch-motor affects the self and mutual inductances of the rotor cage meshes. If a cage mesh is inside the stator zone its self inductance is constant just as it is outside this zone (in certain distance from the stator edge) in the air zone. When a mesh moves from one zone to the next, its inductance changes continuously and we shall approximate this inductance change with the help of a linear function. We can assume approximately that the transient zone has a slot-pitch width $\varepsilon = 2\pi/N$. We can also assume that for $\varphi = 0$ a mesh designated as No. 1 stays inside the transient-zone and that when the rotor turns by an angle of $\varphi = 2\pi/N$, the mesh No. 1 comes to a position completly enclosed inside the stator zone. The rotor mesh numeration runs in the opposite direction to the direction of rotor revolutions.

We take the following conventional indices:
index s — means, that the parameter is valid inside the stator zone,
index a — means, that the parameter is valid inside the air zone excluding the transient zones.

Each rotor mesh has the self-inductance L^s in the stator zone and L^a in the air zone. The mutual inductances of the adjacent meshes are $M^s_{k,k+1}$ and $M^a_{k,k+1}$ in the stator and air zone respectively. We assume, that outside the air gap, only adjacent meshes can be coupled. Inside the stator zone as many meshes can be coupled as the stator arch length allows.

A cage mesh produces inside the stator zone a magnetic flux density distribution according to Fig. 5 where:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{\delta} I \frac{Nl-\pi}{Nl} \tag{19}$$

$$B_2 = -\frac{\mu_0}{\delta} I \frac{\pi}{Nl}. \tag{20}$$

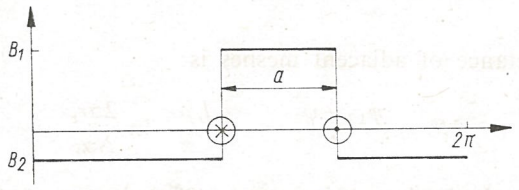


Fig. 5. Magnetical flux density produced by rotor mesh in the air gap

The self inductance of each mesh in the stator zone is:

$$L^s = 2\frac{l_r r_r \mu_0}{\delta} \cdot \frac{Nl-\pi}{N^2 l} \tag{21}$$

and the mutual inductance of adjacent meshes in the stator zone is:

$$M^s = -2\pi\frac{l_r r_r \mu_0}{\delta} \cdot \frac{\pi}{N^2 l} \tag{22}$$

where:

l_r — squirrel cage length, (m)
r_r — squirrel cage radius, (m)
$2l$ — arch-stator length, (rad)
δ — air gap width, (m)
N — number of rotor bars.

The self and mutual inductances of adjacent meshes in the air zone were calculated approximately assuming that the equivalent bar with a diameter equal to the notch slot width, lies on the squirrel-cage surface, and that the magnetic field lines in the air have the form of semicircles.

Using the mirror reflection method we can obtain the magnetic flux density modulus

due to one bar in the air, at a distance d from the cage surface:

$$B_d = \frac{I\mu_0}{\pi d} \tag{23}$$

The self and mutual inductances of adjacent meshes in the air zone are calculated using the notation shown in Fig. 6. The mesh self inductance in the air zone is:

$$L^a = \frac{\psi_1 + \psi_2}{I} = \frac{2l_r\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{4r_r\pi}{N\alpha_r} - 1\right) \tag{24}$$

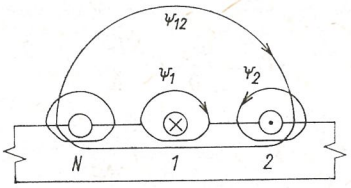


Fig. 6. Magnetical fluxes assumed for calculating self- and mutual-inductances of the rotor meshes

and the mutual inductance of adjacent meshes is:

$$M^a = \frac{\psi_{12} - \psi_2}{I} = -\frac{l_r\mu_0}{\pi} \ln\frac{2\pi r_r}{N\alpha_r}. \tag{25}$$

In this way we can obtain the self inductance of each cage mesh in an arbitrary position of the rotor in relation to the stator. The self inductance function of any mesh as a function of the revolution angle φ is shown in Fig. 7.

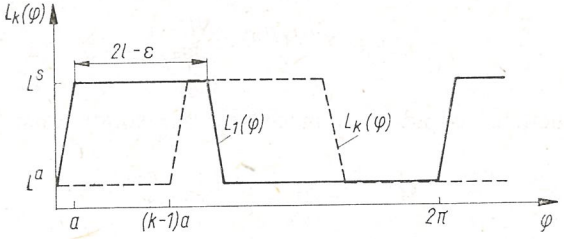


Fig. 7. Self-inductance functions of the mesh No. 1 and No. k

The self inductance function of the mesh No. k is shifted with regard to $L_1(\varphi)$ through $\varphi = (k-1) \times 2\pi/N$, where $k = 1, 1, \ldots N$. The function $L_k(\varphi)$ can be represented by a Fourier series:

$$L_k(\varphi) = L_0 + \sum_{n=1}^{\infty} L_n \cos n\left(\varphi + \left(-l + \frac{2\pi}{N}k - \frac{\pi}{N}\right)\right), \tag{26}$$

where:

$$L_0 = \frac{l}{\pi}(L^s - L^a) + L^a, \tag{27}$$

$$L_n = \frac{2N}{n^2\pi^2}(L^s - L^a)\sin nl \sin\frac{n\pi}{N}, \tag{28}$$

$$k = 1, 2, \ldots N.$$

The mutual induction function of adjacent meshes is shown in Fig. 8.

The function shown in Fig. 8 can be expanded into a Fourier series:

$$M_{k,k+1}(\varphi) = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos\left(\varphi + \left(-l + k\frac{2\pi}{N}\right)\right)n, \tag{29}$$

where:

$$M_0 = \frac{1}{\pi}(M^a - M^s) - M^a, \tag{30}$$

$$M_n = \frac{2N}{n^2\pi^2}(M^s - M^a)\sin nl \sin\frac{2\pi n}{N}, \tag{31}$$

$$k = 1, 2, \ldots N-1.$$

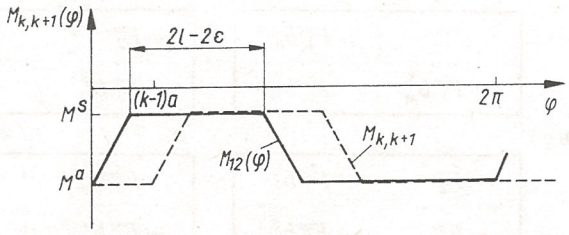


Fig. 8. Mutual-inductance function of the adjacent meshes

Now we have to determine the mutual induction functions of such adjacent meshes which are coupled only in the stator zone, while in the air zone their coupling is equal to zero. The mutual inductions functions of the type $M_{ij}(\varphi)$, where $i = 2, 3, \ldots N$, $j = 2, 3, \ldots N$ and $|i-j| > 1$, are periodic functions, displaced along the φ axis by adequate multiples of $2\pi/N$ and have variable lengths of the zones „s" — as shown in Fig. 9. The arch-

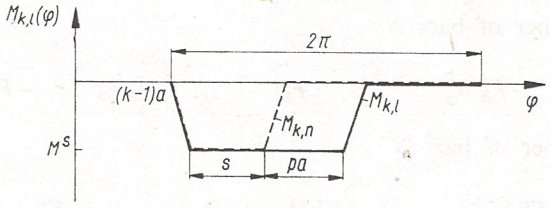


Fig. 9. Mutual-inductance functions of the rotor meshes which can be coupled only inside stator zone

-stator length determines the number of rotor meshes which can be coupled in the stator zone.

If:

$$c = INT\left(2l \Big/ \frac{2\pi}{N}\right),$$

then

$$p = c-2,$$

$$s = 2l-(p+2)\frac{2\pi}{N}. \tag{32}$$

In the sequel we present exemplarily the mutual inductance function for cage meshes which are coupled with the mesh No. 1 (see Fig. 9) as a Fourier series:

$$M_{1,2+n}(\varphi) = -\frac{M^s}{\pi}\left(l-(n+1)\frac{\pi}{N}\right)+\sum_{m=1}^{\infty} M_m \cos\left(\varphi-\left(l+\frac{\pi}{N}\right)+(1+n)\frac{\pi}{N}\right)m, \tag{33}$$

where:

$$M_m = \frac{2NM^s}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi}{N}\sin m\left(l-(n+1)\frac{\pi}{N}\right), \tag{34}$$

$$n = 1, 2, \ldots p.$$

Now we can build the self and mutual inductance matrix of the rotor cage meshes. It is a cyclic matrix with the function argument shifted in sequence in the consecutive matrix rows. The matrix M_r^n can be written as a complex Fourier expansion.

$$M_r^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(jm\varphi)$$

F_0^m	$-F_1^m b_m^{+1}$	$-F_2^m$	$-F_1^m$
$-F_1^m b_m^{+1}$	$F_0^m b_m^{+1}$	$-F_3^m b_m^{+1}$	$-F_2^m b_m^{+1}$
$-F_2^m$	$-F_3^m b_m^{+1}$	$F_0^m b_m^{+(N-2)}$	$-F_1^m b_m^{+(N-1)}$
$-F_1^m$	$-F_2^m b_m^{+1}$	$-F_1^m b_m^{+(N-1)}$	$F_0^m b_m^{+(N-1)}$

(35)

where:

$$b_m^{+k} = \exp(-jmka),$$

$$a = 2\pi/N.$$

Matrix M_r^n is determined by its first row. The influence of the number of rotor bars N and stator arch length on the arrangement of the row elements can be seen in this row. The first row of the matrix M_r^n has the form:

— for an even number of bars N

F_0^m	$-F_1^m b_m^{+1}$	$-F_2^m b_m^{+2}$	...	F_k^m	...	$-F_3^m$	$-F_2^m$	$-F_1^m$

(36)

— for an odd number of bars N

F_0^m	$-F_1^m b_m^{+1}$	$-F_2^m b_m^{+2}$	...	$F_k^m b_m^{+k}$	F_k^m	...	$-F_3^m$	$-F_2^m$	$-F_1^m$

(37)

If the number of meshes in the stator zone is less than $N/2$ for even N, and $(N-1)/2$ for odd N, then zero elements occure in this row. The number of zero elements depends on the arch-stator length and number of bars N. The values of the coefficients F_i^m, $(i = 0, 1, \ldots k)$, result from the expansion of the corresponding self and mutual inductance functions of the rotor meshes into the complex Fourier series. Thus:

F_0^m — is the m-th coefficient of the complex Fourier series of the self inductance function $L_1(\varphi)$, Fig. 7

F_i^m — is the m-th coefficient of the complex Fourier series of the mutual inductance function $M_{1,i}(\varphi)$, $i = 2, 3, \ldots k$, of that rotor meshes which are coupled with the mesh nr. 1 in the stator-zone.

After introducing symmetric components matrix, M_r^n is transformed into matrix M_r according to formula (12). We write matrix M_r as a Fourier series matrix.

$$M_r = \left| \ldots + \begin{bmatrix} & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \end{bmatrix} M^{+2}e^{+j2\varphi} + \right.$$

$$+ \begin{bmatrix} & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ 1 & & & & & \end{bmatrix} M^{+1}e^{+j\varphi} + \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} M^0 +$$

$$+ \begin{bmatrix} & & & & & 1 \\ 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \end{bmatrix} M^{-1}e^{-j\varphi} + \begin{bmatrix} & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \\ 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \end{bmatrix} M^{-2}e^{-j2\varphi} + \ldots \left. \right| \quad (38)$$

It is worthwhile to note the band-type structure of the matrix coefficients of this series. The individual harmonic components are arranged in parallel bands to the main diagonal at distances depending on the order to the harmonic.

5. MUTUAL INDUCTANCE OF THE STATOR WINDINGS AND ROTOR CAGE MESHES

We obtain the mutual inductance assuming that the magnetic field is produced by the stator coil. Its distribution is shown in Fig. 10.

We resolve this function into two components as shown in Fig. 11a, b.

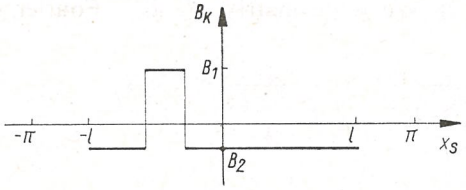


Fig. 10. Magnetical flux density produced by any stator coil as a superposition of the functions from Fig. 11a and Fig. 11b

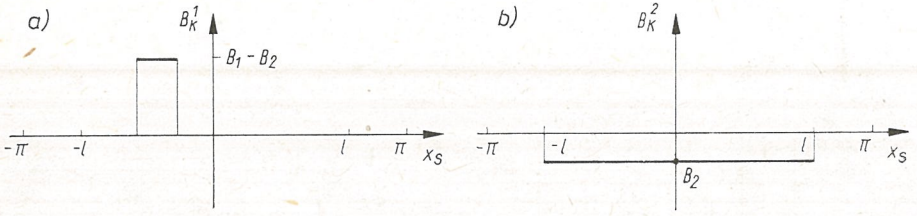


Fig. 11. A function of the mutual inductance of the stator winding, divided into two components

The function in Fig. 11a depends on the stator coil position whereas the function in Fig. 11b is constant. The Fourier series corresponding to them have the forms:

$$B_k^1(x_s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{m1} \exp\left(jm\left(\frac{M-1}{2}\alpha_c - (k-1)\alpha_c + x_s\right)\right), \tag{39}$$

where:

$$k = 1, 2, \ldots M,$$

$$c_{m1} = \frac{zI\mu_0}{m\pi\delta} \sin m \frac{k\alpha_c}{2},$$

$$c_{01} = \frac{zI\mu_0}{\pi\delta},$$

$$B_k^2(x_s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{m2} \exp(jmx_s), \tag{40}$$

where:

$$c_{m2} = -\frac{zI\mu_0}{m\pi\delta} \frac{k_1\alpha_c}{2l} \sin ml,$$

$$c_{02} = -\frac{zI\mu_0}{m\pi\delta} \frac{k_1\alpha_c}{2l}.$$

Using the functions (39), (40) we write the mutual inductances as Fourier series:

$$M_{sr}^{cm} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (M_{1m} + M_{2m}) \exp(jm\varphi), \tag{41}$$

where:

$$M_{1m} = z_m \exp\left(-jm\frac{a}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & g_m^1 & & & \\ & & g_m^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & g_m^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & b_m^1 & & & \\ & & b_m^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & b_m^{N-1} \end{bmatrix} \tag{42}$$

$$M_{2m} = c_m \exp\left(-jm\frac{a}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 1 & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & b_m^1 & & & \\ & & b_m^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & b_m^{N-1} \end{bmatrix} \tag{43}$$

$$z_m = \frac{2l_0 r_r z \mu_0}{\pi \delta m^2} \sin m\alpha \sin m\frac{k_1 \alpha_c}{2} \exp\left(jm\left(\frac{M-1}{2}\alpha_c - 1\right)\right), \tag{44}$$

$$c_m = -\frac{2l_0 r_r z \mu_0}{\pi \delta m^2} \cdot \frac{k_1 \alpha_c}{2l} \sin ma \sin ml \exp(-jml) \tag{45}$$

$$g_m^k = \exp(-jmk\alpha_c), \qquad k = 1, 2, \dots, M-1 \tag{46}$$

$$b_m^n = \exp(jmna), \qquad n = 1, 2, \dots, N-1 \tag{47}$$

The matrix M_{sr} which occurs in the mathematical model equations (10) has the form (12). It can also be represented as a Fourier series:

$$M_{sr} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (M_m^1 + M_m^2) \exp(jm\varphi), \tag{48}$$

where:

$$M_m^1 = SC^T M_{1m} B^{-1} \tag{49}$$

$$M_m^2 = SC^T M_{2m} B^{-1} \tag{50}$$

Matrices M_m^1 and M_m^2, irrespectively of the form of the constraint matrix C, take a column structure, because they are a matrix product in which the non zero elements occure only in the $(m+1)$ column — see (51).

$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 1 & 1 & & 1 \\ \hline 1 & 1 & & 1 \\ \hline \vdots & & \ddots & \\ \hline 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline \end{array}}_{M\times N} \quad \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & & & & \\ \hline & b_m^1 & & & \\ \hline & & b_m^2 & & \\ \hline & & & \ddots & \\ \hline & & & & b_m^{N-1} \\ \hline \end{array}}_{N\times N} \quad B^{-1} = \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & \dots & \times & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & & \times & & 0 \\ \hline 0 & 0 & & \times & & 0 \\ \hline \vdots & & & \times & & \\ \hline 0 & 0 & \dots & \times & \dots & 0 \\ \hline \end{array}}_{\overbrace{\text{col}\cdot(m+1)\,(\text{modulo } N)}^{\uparrow M\times N}} \tag{51}$$

It means that in the matrix M_{rs}, the mutual inductances which result from the consecutive harmonics of the magnetic field distribution, will appear in successive columns, which is illustrated in Fig. 12. It is possible to obtain their values for a given constraint matrix C, according to formulae (49) and (50).

$$M_{sr} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline \exp j\,0\varphi & \exp j\,1\varphi & \exp j\,2\varphi & \cdots & \exp -j\,2\varphi & \exp -j\,1\varphi \\ \hline \end{array} \qquad 3\times N$$

6. CONCLUSIONS

A mathematical model of an arch-motor is presented, which is based on the models of cylindrical electrical machines. The main problem of the model was: to determine the self and mutual inductances of the stator coils and rotor circuits (cage meshes). As a result of transformation of the current and voltage vectors of the stator and rotor into symmetrical components we have obtained the fundamental arrangement of the mathematical equations. It is expressed in the band-type structure of the self and mutual inductance matrix of the rotor circuits and in the column structure of the mutual inductance matrix of the stator and rotor circuits. The mathematical model of an arch-motor gives the possibility to analyse the dynamic and steady states. Since it takes into account the position of each elementary electrical circuit it allows to examine different variants of motor construction. The general character of considerations permits to adopt various degrees of simplification of the model.

REFERENCES

1. H. Bolte, K. Oberretl: *Three-Dimensional Analysis of Asynchronous Motors with Massive Iron as Secondary*. Arch. f. Elektrotechnik, 1981 Bd. 63, pp. (141—152)
2. T. Sobczyk: *Analysis of Steady-Sate in Electrical Machines*. Scientific Bulletins of the University of Mining and Metallurgy. No 654, Electrification and Mechanization in Mining and Metallurgy, Bull. 97, Cracow, 1977 (in Polish)
3. J. Mikulik: *Mathematical Model of a Segment-Stator Motor*. Doctoral Thesis, University of Mining and Metallurgy, Cracow, 1981 (in Polish)

T. J. SOBCZYK, J. MIKULIK

MODEL MATEMATYCZNY KLATKOWEGO SILNIKA ŁUKOWEGO

Streszczenie

W artykule przedstawiono model matematyczny indukcyjnego silnika łukowego z symetryczną klatką na wirniku. Silnik ten analizowany jest jako skończony zbiór obwodów elektrycznych sprężonych magnetycznie. Geometryczne ułożenie elementarnych obwodów elektrycznych stojana i klatki wirnika uwzględnione zostało w modelu matematycznym poprzez ich własne i wzajemne indukcyjności. Niesymetria magnetyczna i elektryczna silnika łukowego znalazła swoje odbicie w strukturze macierzy indukcyjności. Dla przedstawienia połączeń zezwojów stojana w pasma fazowe wykorzystano macierz więzów Krona. Zastosowanie składowych symetrycznych prądów i napięć stojana oraz wirnika pozwoliło w wyraźny sposób uporządkować postać modelu. Model matematyczny prezentowany w pracy daje możliwość ogólnej analizy procesów przemiany energii zachodzących w silniku łukowym.

T. J. SOBCZYK, J. MIKULIK

MODÉLE MATHÉMATIQUE DU MOTEUR Á ARC AVEC LA CAGE CONSIDÉRÉ COMME CIRCUIT SECONDAIRE

Résumé

Dans l'article on a présenté le modèle mathématique dans lequel le moteur d'induction à arc est considéré comme un ensemble de circuits électriques accouplés magnétiquement. Dans le modèle on a admis que la configuration géométrique des circuits électriques élémentaires des phases du stator et des mailles de la cage du rotor est exprimée par leurs inductances propres et mutuelles. Le caractère de construction du moteur à arc se présente dans les matrices d'induction. On a pris en considération la connexion des spires élémentaires du stator en phases dans le modèle à l'aide des matrices des Liaisons de Kron. Grâce à l'application des composantes symétriques des tensions et des courants du stator et du rotor, on a obtenu l'arrangement fondamental des équations du modèle. Le modèle mathématique considéré donne la possibilité de faire une analyse générale des processus de conversion de l'énergie dans les moteurs à arc, dépendant de leur construction.

T. J. SOBCZYK, J. MIKULIK

MATHEMATISCHES MODELL EINES BOGENSTÄNDER-ASYNCHRONMOTORS MIT EINEM KÄFIG ALS SEKUNDÄRTEIL

Zusammenfassung

Im Artikel wurde das mathematische Modell eines Bogenständer-asynchronmotors mit einem Läuferkäfig dargestellt. Der Motor wurde als eine vollendete Menge magnetisch komprimierter Stromkreise analysier. Die geometrische Verlegung der elementaren Stromkreise am Ständer und Läuferkäfig wurde im mathematischen Modell mittels deren gegenseitiger Eigeninduktivität berück-sichtigt. Magnetische und elektrische Asymmetrie des Bogenmotors hat sich in der Struktur der Induktivitätsmatrix widergespiegelt. Zur Darstellung der Anschlüsse der Ständerspulen in Phasenbänder wurde die Matrix der Kron-Bindungen verwertet. Die Anwendung von symmetrischen Stromkomponenten und Spannungen am Ständer und Läufer gestatteten, die Modellgestalt grundsätzlich zu ordnen. Das in dieser Bearbeitung dargestellte mathematische Modell ermöglicht eine allgemeine Analyse der Energieumwandlungsprozesse, die im Bogenmotor stattfinden.

Т. Я. СОБЧИК, Е. МИКУЛИК

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОРОТКОЗАМКНУТОГО ДУГОВОГО ДВИГАТЕЛЯ

Р е з ю м е

Представлена математическая модель, в которой индукционный короткозамкнутый дуговой двигатель рассматривается, как система магнетических сопряженных электрических цепей. В модели учтена геометрическая конфигурация элементарных электрических цепей фаз статора и петель клетки ротора выраженных их собственными и взаимными индуктивностями. Специфика конструкции дугового двигателя находит отображение в матрицах индуктивностей. Сопряжение элементарных секций статора в фазы, учитывается в модели с помощью матрицы связей Крона. Блогодаря применению к описанию симметричных составляющих напряжений и токов статора и ротора получено основное упорядочение уравнений модели. Предсавленная математическая модель дает возможность проведения комплексного анализа процесса преобразования энергии в дуговых двигателях с учетом конструкционных особенностей таких двигателей.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1987, 33, z. 1, ss. 167-181

621.313.333.2

Nagrzewanie trapezowych głębokożłobkowych prętów uzwojenia klatkowego silnika indukcyjnego w stanie zwarcia

JADWIGA PŁOSZYŃSKA, RYSZARD RUT (RZESZÓW)

Wydział Elektryczny — Zakład Maszyn Elektrycznych
Politechnika Rzeszowska

Otrzymano 1985.10.30

W pracy, uwzględniając w głębokożłobkowym pręcie wpływ temperatury na straty wywołane początkowym rozkładem gęstości składowej ustalonej prądu rozruchu, przeanalizowano narastanie w czasie rozkład temperatury wzdłuż wysokości pręta. Początkowy rozkład gęstości składowej ustalonej prądu rozruchu wyznaczono zastępując pręt trapezowy zbieżnym wycinkiem pierścienia. Analizę prowadzono w układzie współrzędnych walcowych. Zamieszczono przykładowe obliczenia.

1. WSTĘP

Analiza nieustalonego stanu termicznego w prętach głębokożłobkowych trapezowych nagrzewanych prądem zwarcia, jest złożona ze względu na zmieniające się na powierzchni pręta warunki brzegowe, a także ze względu na uzależnienie od narastającej temperatury rozkładu strat cieplnych wzdłuż wysokości pręta. Zakładając brak wymiany ciepła z pakietem podjęto próbę wyznaczenia narastania w czasie rozkładu temperatury wzdłuż wysokości z uwzględnieniem jej wpływu na rozkład strat cieplnych, ograniczając analizę do części żłobkowej pręta. Analiza nagrzewania pręta w przedstawionych wyżej warunkach sprowadza problem do rozwiązania układu nieliniowych równań cząstkowych — równań Maxwella, oraz równania przewodnictwa dla zadanych warunków brzegowych i początkowych, uwzględniając złożoną postać źródeł nagrzewania pręta będącą wynikiem nieustalonego rozkładu gęstości, jaki wystąpi w pręcie trapezowym po załączeniu nieruchomego silnika do sieci sztywnej.

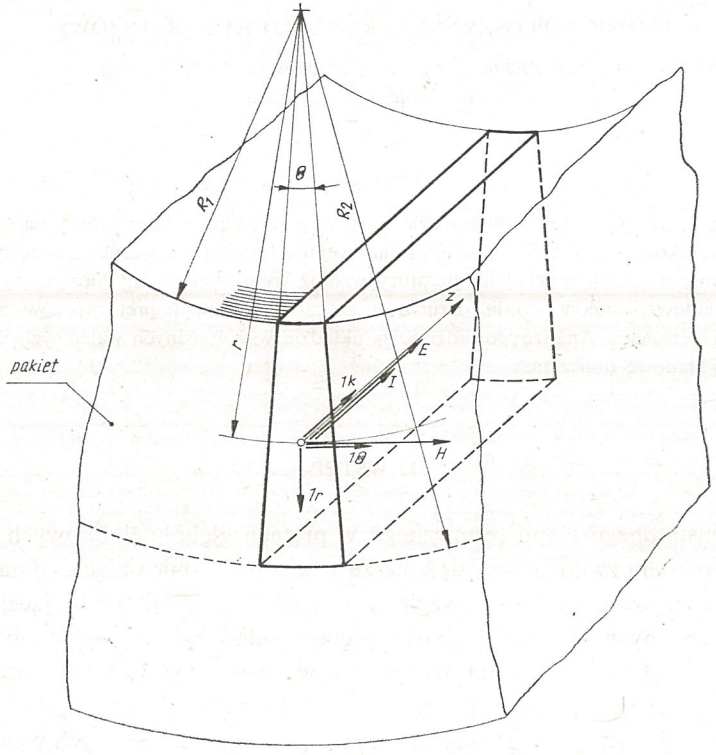
Otrzymujemy zatem problem znacznie złożony, który łatwiej rozwiązać przy uproszczeniach polegających na:

1. Pominięciu w opisie źródeł ciepła rozkładu szybko zanikających gęstości prądów wyrównawczych i gęstości aperiodycznych, ograniczając się do uwzględnienia rozkładu gęstości skutecznej składowej ustalonej prądu zwarcia.

2. Uwzględnieniu wpływu temperatury dopiero na rozkład gęstości składowej ustalonej prądu zwarcia wynikającej z rozwiązań równań Maxwella, przy przyjęciu wartości współczynników równań w temperaturze początkowej.

2. ROZKŁAD SKUTECZNEJ GĘSTOŚCI SKŁADOWEJ USTALONEJ PRĄDU ZWARCIA WZDŁUŻ WYSOKOŚCI PRĘTA

Ułatwieniem w analizie jest zastąpienie pręta o przekroju trapezowym prętem zbieżnym będącym wycinkiem pierścienia, (Rys. 1) umieszczonym w żłobku. W tak wydzielonym głębokożłobkowym przewodzie zbieżnym płynie prąd sinusoidalnie przemienny wzdłuż osi z. Wektor gęstości prądu J ma kierunek poosiowy i zwrot w kierunku osi z. Wektor natężenia pola magnetycznego H — kierunek styczny do okręgu. Przyjmując oznaczenia wersorów jak na Rys. 1 w układzie współrzędnych walcowych otrzymamy przy



Rys. 1. Głębokożłobkowy pręt trapezowy w przyjętym układzie współrzędnych walcowych

pominięciu prądu przesunięcia równania (1), (2) opisujące zależność między miarami wektorów [2]:

$$\frac{\partial H}{\partial r}+\frac{1}{r}H=J, \tag{1}$$

$$\frac{\partial E}{\partial r}=\mu\frac{\partial H}{\partial t} \tag{2}$$

oraz zależność na prąd pręta

$$I_p(t)=\int_{R_2}^{R_1}\int_{0}^{\Theta}J(t)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\Theta=\Theta\int_{R_2}^{R_1}rJ(t)\,\mathrm{d}r=\Theta\int_{R_2}^{R_1}\frac{\partial\left(rH(t)\right)}{\partial r}\,\mathrm{d}r=\Theta rH(r,t)\Big|_{R_2}^{R_1}. \tag{3}$$

Przy warunku początkowym

$$H(r, 0) = 0 \tag{4a}$$

oraz brzegowym

$$H(R_2, t) = 0, \tag{4b}$$

otrzymano

$$H(R_1, t) = \frac{I_p}{\Theta R_1}. \tag{4c}$$

Z równań (1) (2) otrzymujemy równanie (5) (6) względem zmiennej r

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} - \frac{1}{r^2} H = \gamma\mu \frac{\partial H}{\partial t}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r} = \gamma\mu \frac{\partial E}{\partial t}. \tag{6}$$

Korzystając z warunku zmienności sinusoidalnej miar H, E, J przechodzimy na równania różniczkowe zwyczajne względem amplitud zespolonych $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{J}$ będących jedynie funkcjami promienia r. Biorąc pod uwagę, że

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = j\omega \boldsymbol{H}$$

równanie (5) w odniesieniu do amplitud zespolonych przybiera postać (7)

$$\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{H}}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}r} + \left(-j\omega\gamma\mu - \frac{1}{r^2}\right)\boldsymbol{H} = 0 \tag{7}$$

Wprowadzając parametr

$$m = \sqrt{\omega\gamma\mu} \tag{8a}$$

oraz nową zmienną $u = \sqrt{-j}\, mr$, (8b)

otrzymamy po podstawieniu

$$\mathrm{d}u = \sqrt{-j}\, m\mathrm{d}r, \tag{8c}$$

$$(\mathrm{d}u)^2 = -jm^2(\mathrm{d}r)^2 \tag{8d}$$

równanie drugiego rzędu zmiennej niezależnej u

$$\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{H}}{\mathrm{d}u^2} + \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}u} + \left(1 - \frac{1}{u^2}\right)\boldsymbol{H} = 0. \tag{9}$$

Równanie (9) przedstawia przypadek szczególnego równania Bessela rzędu p, które ma następującą postać

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{p^2}{x_2}\right) y = 0. \tag{10}$$

Równanie (9) odpowiada wartości $p = 1$ i nosi nazwę równania Bessela rzędu pierwszego,

którego rozwiązanie możemy przedstawić w postaci (11)

$$H(u) = AJ_1(u) + BY_1(u), \tag{11}$$

gdzie:

$J_1(u)$ — funkcja Bessela pierwszego rodzaju rzędu jeden,

$Y_1(u)$ — funkcja Bessela drugiego rodzaju rzędu jeden,

A, B — stałe zespolone zależne od prądu płynącego przez przewód, częstotliwości i stałych materiałowych.

Funkcje $J_1(u)$ i $Y_1(u)$ stanowią dwa liniowo niezależne rozwiązania równania (9) i zgodnie z [3] mają postać szeregów (12) i (13)

$$J_1(u) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\left(\frac{1}{2}u\right)^{1+2r}}{r!(1+r)!}, \tag{12}$$

$$Y_1(u) = \frac{2}{\pi}\log\left(\frac{1}{2}u\right)J_1(u) - \frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{1}{2}u\right)^{1+2r}}{r!(1+r)!}\left[\sum_{k=1}^{r+1}\frac{1}{k}\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k}\right], \tag{13}$$

które dla wartości u bliskich jedności są szeregami szybko zbieżnymi. Natomiast przy spełnieniu warunków (14)

$$\begin{gathered} |u| \gg 1 \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \arg u \leqslant \frac{\pi}{2} \\ |u| \gg |n|^2 \end{gathered} \tag{14}$$

można stosować w miejsce (12), (13) wyrażenia asymptotyczne, które wg [3] mają postać (15) (16) dla dowolnego n

$$J_n(u) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi u}}\left[\eta_n(u)\cos\delta - \xi_n(u)\sin\delta\right], \tag{15}$$

$$Y_n(u) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi u}}\left[\eta_n(u)\sin\delta - \xi_n(u)\cos\delta\right], \tag{16}$$

gdzie:

$$\delta = u - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}n\pi, \tag{17}$$

$$\eta_n(u) = 1 - \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)}{2!(8u)^2} + \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)(4n^2-7^2)}{4!(8u)^4} - \ldots, + R_p, \tag{18}$$

$$\xi_n(u) = \frac{4n^2-1^2}{1!(8u)} - \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)}{3!(8u)^3} + \ldots + R_s, \tag{19}$$

R_p i R_s są resztami, gdy bierze się odpowiednio p i s wyrazów w szeregach (18) (19).

Wykonano w kolejności przeliczenia liczbowe funkcji $\eta_n(u)$ i $\xi_n(u)$ dla $n = 1$. Zgodnie

z (18)

$$\eta_1(u) \cong 1 - \frac{(4-1)(4-9)}{2!(8u)^2} + \frac{(4-1)(4-9)(4-25)(4-49)}{4!(8u)^4} \cong 1 - \frac{0{,}1172}{u^2} + \frac{0{,}1442}{u^4}.$$

Z wyliczenia widać, że drugi i trzeci człon można pominąć, wówczas $\eta_1(u) \cong 1$. Obliczamy wartość $\xi_n(u)$ zgodnie z (19)

$$\xi_1(u) \cong \frac{4-1}{1!\,8u} - \frac{(4-1)(4-9)(4-25)}{3!\,(8u)^3} + \ldots \cong \frac{0{,}375}{u} - \frac{0{,}125}{u^3} + \ldots$$

Drugi człon jest bardzo mały i można go pominąć.

Zatem $\xi_1(u) = \dfrac{0{,}375}{u}$.

W związku z tym, że zmienna u w rozpatrywanym przypadku ma duże wartości oraz, że uwzględnienie członów zawierających tę zmienną komplikuje w znacznym stopniu końcowe równanie zwiększając dokładność obliczeń w minimalnym stopniu, pomijamy człony ze zmienną $\xi_n(u)$ w zależnościach (15) (16) i otrzymujemy w ten sposób pierwsze przybliżenie asymptotyczne (20) (21)

$$J_1(u) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \cos\left(u - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi\right) \tag{20}$$

$$Y_1(u) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \sin\left(u - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi\right) \tag{21}$$

Uwzględniając w rozwiązaniu (11) warunki brzegowe dla składowej ustalonej (4b, c) oraz związek pomiędzy zmienną zespoloną u i r wyrażony równaniem (8b) otrzymamy wartości brzegowe

$$u_1 = u \quad \text{dla} \quad r = R_1, \tag{22a}$$

$$u_1 = R_1 m e^{-j\frac{\pi}{4}}; \tag{22b}$$

$$u_2 = u \quad \text{dla} \quad r = R_2, \tag{22c}$$

$$u_2 = R_2 m e^{-j\frac{\pi}{4}}. \tag{22d}$$

Zmienna u dla r zmieniającego się od R_1 do R_2 przyjmuje wartości od u_1 do u_2.

Uwzględniając powyższe uwagi otrzymamy

$$0 = AJ_1(u_2) + BY_1(u_2), \tag{23}$$

$$\frac{I_p}{\Theta R_1} = AJ_1(u_1) + BY_1(u_1). \tag{24}$$

Z równania (23) otrzymamy

$$A = -\frac{BY_1(u_2)}{J_1(u_2)}. \tag{25}$$

Wstawiając (25) do (24) otrzymamy (26)

$$\frac{I_p}{\Theta R_1} = -\frac{BY_1(u_2)}{J_1(u_2)} J_1(u_1) + BY_1(u_1). \tag{26}$$

Stąd wyprowadzamy B

$$B = \frac{I_p J_1(u_2)}{\Theta R_1 [Y_1(u_1)J_1(u_2) - Y_1(u_2)J_1(u_1)]}. \tag{27}$$

Następnie wyznaczamy A

$$A = -\frac{I_p}{\Theta R_1} \frac{Y_1(u_2)}{[Y_1(u_1)J_1(u_2) - Y_1(u_2)J_1(u_1)]}. \tag{28}$$

Po wstawieniu do (11) zależności (27), (28) rozwiązanie równania Bessela dla zespolonej składowej ustalonej natężenia pola przyjmie postać (29)

$$\boldsymbol{H}(u) = \frac{I_p}{\Theta R_1} \frac{J_1(u_2)Y_1(u) - Y_1(u_2)J_1(u)}{Y_1(u_1)J_1(u_2) - Y_1(u_2)J_1(u_1)}. \tag{29}$$

Po uwzględnieniu zgodnie z (20), (21), (22b, d), że

$$\begin{aligned}
J_1(u_1) &= \sqrt{\frac{2}{\pi u_1}} \cos\left(u_1 - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi u_1}} \cos\delta_1, \\
J_1(u_2) &= \sqrt{\frac{2}{\pi u_2}} \cos\left(u_2 - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi u_2}} \cos\delta_2, \\
J_1(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \cos\left(u - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \cos\delta, \\
Y_1(u_1) &= \sqrt{\frac{2}{\pi u_1}} \sin\left(u_1 - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi u_1}} \sin\delta_1, \\
Y_1(u_2) &= \sqrt{\frac{2}{\pi u_2}} \sin\left(u_2 - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi u_2}} \sin\delta_2, \\
Y_1(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \sin\left(u - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \sin\delta,
\end{aligned} \tag{30}$$

wstawieniu otrzymanych związków do (29) i przekształceniu otrzymamy

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}(u) &= \frac{I_p}{\Theta R_1} \frac{J_1(u_2)Y_1(u) - Y_1(u_2)J_1(u)}{Y_1(u_1)J_1(u_2) - Y_1(u_2)J_1(u_1)} = \\
&= \frac{I_p}{\Theta R_1} \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi u_2}} \cos\delta_2 \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \sin\delta - \sqrt{\frac{2}{\pi u_2}} \sin\delta_2 \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \cos\delta}{\sqrt{\frac{2}{\pi u_1}} \sin\delta_1 \sqrt{\frac{2}{\pi u_2}} \cos\delta_2 - \sqrt{\frac{2}{\pi u_2}} \sin\delta_2 \sqrt{\frac{2}{\pi u_1}} \cos\delta_1} = \\
&= \frac{I_p}{\Theta R_1} \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi u_2}}}{\sqrt{\frac{2}{\pi u_2}}} \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi u}}}{\sqrt{\frac{2}{\pi u_1}}} \frac{\cos\delta_2 \sin\delta - \sin\delta_2 \cos\delta}{\sin\delta_1 \cos\delta_2 - \sin\delta_2 \cos\delta_1} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{I_p}{\Theta R_1}\sqrt{\frac{u_1}{u}}\,\frac{\sin(\delta-\delta_2)}{\sin(\delta_1-\delta_2)} = \frac{I_p}{\Theta R_1}\sqrt{\frac{u_1}{u}}\,\frac{\sin(u-u_2)}{\sin(u_1-u_2)}, \tag{31}$$

a przedstawiając zmienną zespoloną w postaci jawnej zgodnie z (8b) otrzymamy

$$H(r) = \frac{I_p}{\Theta R_1}\sqrt{\frac{R_1}{r}}\,\frac{\sin\left[m(r-R_2)\sqrt{-j}\right]}{\sin\left[m(R_1-R_2)\sqrt{-j}\right]}. \tag{31a}$$

Zgodnie z (1) amplitudę gęstości prądu obliczamy w postaci zespolonej:

$$J(r) = \frac{\partial H(r)}{\partial r} + \frac{1}{r}H(r) = \frac{I_p}{\Theta r\sqrt{R_1 r}}\,\frac{\sin\left[m(r-R_2)\sqrt{-j}\right]}{\sin\left[m(R_1-R_2)\sqrt{-j}\right]} +$$

$$+ \frac{I_p m\sqrt{-j}\cos\left[m(r-R_2)\sqrt{-j}\right]}{\sqrt{R_1 r}\,\Theta\sin\left[m(R_1-R_2)\sqrt{-j}\right]} - \frac{I_p\sin\left[m(r-R_2)\sqrt{-j}\right]}{2r\sqrt{R_1 r}\,\Theta\sin\left[m(R_1-R_2)\sqrt{-j}\right]} =$$

$$= \frac{I_p\sin\left[m(r-R_2)\sqrt{-j}\right]}{2\Theta r\sqrt{R_1 r}\sin\left[m(R_1-R_2)\sqrt{-j}\right]} + \frac{I_p m\sqrt{-j}\cos\left[m(r-R_2)\sqrt{-j}\right]}{\sqrt{R_1 r}\,\Theta\sin\left[m(R_1-R_2)\sqrt{-j}\right]} =$$

$$= \frac{I_p}{\Theta\sqrt{R_1 r}}\left[\frac{1}{2r}\,\frac{\sin\left[m(r-R_2)\sqrt{-j}\right]}{\sin\left[m(R_1-R_2)\sqrt{-j}\right]} + \frac{m\cos\left[m(r-R_2)\sqrt{-j}\right]}{\sin\left[m(R_1-R_2)\sqrt{-j}\right]}\,e^{-j\frac{\pi}{4}}\right] =$$

$$= \frac{I_p}{\Theta\sqrt{R_1 r}}\left[\frac{1}{2r}\,\frac{\sin[k(r-R_2)(1-j)]}{\sin[k(R_1-R_2)(1-j)]} + \frac{\sqrt{2}k\cos[k(r-R_2)(1-j)]}{\sin[k(R_1-R_2)(1-j)]}\,e^{-j\frac{\pi}{4}}\right] =$$

$$= \frac{I_p}{\Theta\sqrt{R_1 r}}\left[\frac{1}{2r}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}2k(r-R_2)-\cos 2k(r-R_2)}{\operatorname{ch}2k(R_1-R_2)-\cos 2k(R_1-R_2)}}\,e^{j(\varphi_3-\varphi_2)} +\right.$$

$$\left. + \sqrt{2}\,k\sqrt{\frac{\operatorname{ch}2k(r-R_2)+\cos 2k(r-R_2)}{\operatorname{ch}2k(R_1-R_2)-\cos 2k(R_1-R_2)}}\,e^{j\left(\varphi_4+\varphi_3-\frac{\pi}{4}\right)}\right] \tag{32}$$

$$J(r) = Ce^{j\psi} + De^{j\xi} = (C\cos\psi + D\cos\xi) + j(C\sin\psi + D\sin\xi) =$$

$$= \sqrt{(C\cos\psi + D\cos\xi)^2 + (C\sin\psi + D\sin\xi)^2}\,e^{j\gamma}, \tag{33}$$

gdzie

$$C = \frac{I_p}{2r\Theta\sqrt{R_1 r}}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}2k(r-R_2)-\cos 2k(r-R_2)}{\operatorname{ch}2k(R_1-R_2)-\cos 2k(R_1-R_2)}},$$

$$D = \frac{\sqrt{2}I_p k}{\Theta\sqrt{R_1 r}}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}2k(r-R_2)+\cos 2k(r-R_2)}{\operatorname{ch}2k(R_1-R_2)-\cos 2k(R_1-R_2)}}, \tag{34a}$$

$$k = \frac{m}{\sqrt{2}}, \tag{34b}$$

$$\gamma = \operatorname{arctg}\frac{C\sin\psi + D\sin\xi}{C\cos\psi + D\cos\xi}, \tag{34c}$$

$$\psi = \varphi_3 - \varphi_2,$$

$$\xi = \varphi_4 + \varphi_3 - \frac{\pi}{4}, \tag{34d}$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{\cos k(r-R_2)\operatorname{sh} k(r-R_2)}{\sin k(r-R_2)\operatorname{ch} k(r-R_2)},$$

$$\varphi_3 = \operatorname{arctg} \frac{\cos k(R_1-R_2)\operatorname{sh} k(R_1-R_2)}{\sin k(R_1-R_2)\operatorname{ch} k(R_1-R_2)}, \tag{34e}$$

$$\varphi_4 = \operatorname{arctg} \frac{\sin k(r-R_2)\operatorname{sh} k(r-R_2)}{\cos k(r-R_2)\operatorname{ch} k(r-R_2)}.$$

Z zależności (33) możemy określić rozkład skutecznej gęstości prądu składowej ustalonej wzdłuż wysokości zbieżnego pręta. Biorąc, że

$$\boldsymbol{J}(r) = |\boldsymbol{J}(r)| e^{j\gamma} \tag{35}$$

rozkład gęstości skutecznej wyznaczamy zgodnie z (36)

$$j_{sk} = \frac{|\boldsymbol{J}(r)|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(C\cos\psi + D\cos\xi)^2 + (C\sin\psi + D\sin\xi)^2}}{\sqrt{2}}, \tag{36}$$

C, D, ψ, ξ — określone wg (34a÷e).

3. NAGRZEWANIE PRĘTA TRAPEZOWEGO WIRNIKA KLATKOWEGO W STANIE ZWARCIA

Zgodnie z poczynionymi założeniami przeanalizowany zostanie nieustalony stan cieplny żłobkowej części pręta z pominięciem strat ciepła do pakietu blach rdzenia wirnika. W przyjętym układzie współrzędnych walcowych równanie przewodnictwa ma postać (37)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{c_m \varrho_m}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda_m \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\lambda_m \frac{\partial T}{\partial \varphi}\right)\right] + \frac{p_v(r, T)}{c_m \varrho_m} \tag{37}$$

gdzie:

λ_m — przewodność cieplna właściwa materiału pręta,
c_m — ciepło właściwe materiału pręta,
ϱ_m — gęstość masy materiału pręta,
$p_v(r, T)$ — straty w jednostce objętości pręta.

Przyjmując $\lambda_m = const$ otrzymamy

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_m}{c_m \varrho_m}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}\right] + \frac{p_v(r, T)}{c_m \varrho_m}. \tag{38}$$

Pominięcie strat ciepła do pakietu blach narzuca warunki brzegowe (39)

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R_1} = 0, \tag{39a}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R_2} = 0, \tag{39b}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = 0, \tag{39c}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\Theta} = 0 \tag{39d}$$

przy jednoczesnym warunku początkowym

$$T_p = T_{ot} = 20°\mathrm{C}. \tag{40}$$

Uwzględniając, że wysokość pręta jest znacznie większa od jego średniej grubości możemy uśrednić rozkład temperatury wzdłuż szerokości pręta. Całkując więc (38) w granicach $0 \div \Theta$ i obliczając średnią otrzymamy

$$\frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta}\frac{\partial T}{\partial t}\,d\varphi = \frac{\lambda_m}{c_m\varrho_m}\frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta}\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\,d\varphi + \frac{\lambda_m}{c_m\varrho_m}\frac{1}{r}\frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta}\frac{\partial T}{\partial r}\,d\varphi +$$

$$+ \frac{\lambda_m}{c_m\varrho_m}\frac{1}{r^2}\frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}\,d\varphi + \frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta}\frac{p_v(r, T)}{c_m\varrho_m}\,d\varphi. \tag{41}$$

Po wykonaniu działań i wykorzystaniu warunku brzegowego (39c, d) otrzymamy

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_m}{c_m\varrho_m}\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\lambda_m}{c_m\varrho_m}\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\lambda_m}{c_m\varrho_m}\frac{1}{r^2}\frac{1}{\Theta}\left(\left.\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\Theta} - \left.\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0}\right) + \frac{p_v(r, T)}{c_m\varrho_m} \tag{42}$$

a przekształcając otrzymamy wynikową postać (43)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_m}{c_m\varrho_m}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right] + \frac{p_v(r, T)}{c_m\varrho_m} \tag{43}$$

która łącznie z warunkami brzegowymi (39a, b) i warunkiem początkowym (40) opisuje nieustalony przebieg narastania rozkładu temperatury wzdłuż wysokości pręta.

Występujące w (43) straty w jednostce objętości pręta w funkcji narastającej temperatury można wyrazić równaniem (44)

$$p_v(r, T) = \varrho(T) j^2(r, T) \tag{44}$$

przy

$$\varrho(T) = \varrho_0(1 + \alpha\Delta T) \tag{44a}$$

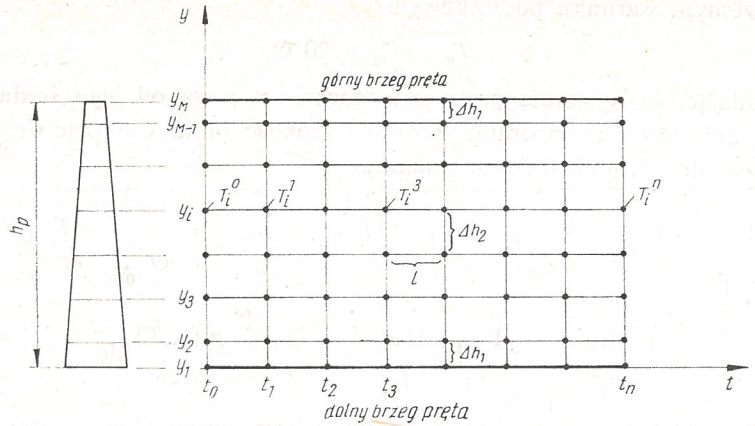
$$j^2(r, T) = \frac{1}{2}(C\cos\psi + D\cos\xi)^2 + \frac{1}{2}(C\sin\psi + D\sin\xi)^2 \tag{44b}$$

określając C, D wg zależności (34).

Dla rozpatrywanego przypadku równanie (43) jest równaniem nieliniowym o stałym współczynniku przewodzenia temperatury z objętościowymi źródłami ciepła, których wartość w dowolnym punkcie wysokości pręta jest uzależniona od temperatury. Równanie (43) rozwiązano metodą przybliżoną, różnic skończonych [6] opartą o procedurę pośrednią (implicite) ze wstecznym czasowym ilorazem różnicowym. Przy dokonywaniu transformacji różnicowej pochodnej pierwszego oraz drugiego rzędu skorzystano z centralnego ilorazu różnicowego i poszukiwano rozwiązania równania w paśmie $0 \leqslant r \leqslant h_p$ dla przedziału czasowego $0 < t \leqslant \tau_k$.

Odpowiednie pochodne temperatury dają się zapisać w postaci różnicowej (45), (46)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^n - T_i^{n-1}}{l}, \tag{45}$$



Rys. 2. Siatka prostokątna rozpatrywanego jednowymiarowego obszaru o współrzędnych przestrzenno-czasowych

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{\Delta h_1 + \Delta h_2}, \tag{46a}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{2}{\Delta h_1 + \Delta h_2}\left[\frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{\Delta h_2} + \frac{T_{i-1}^n - T_i^n}{\Delta h_1}\right], \tag{46b}$$

gdzie:

l — długość kroku czasowego, $l = \frac{\tau_k}{N}$ określona na podstawie wartości górnej granicy przedziału $(0, \tau_k\rangle$ oraz liczby punktów N w dziedzinie czasu,

$\Delta h_1, \Delta h_2$ — przyrost wysokości pręta,

T_i^n — temperatura w n-tym kroku czasowym $(n = 1, 2, \ldots N)$ i-tego węzła $(i = 1, 2, \ldots M)$ jednowymiarowego obszaru (Rys. 2).

Podstawiając (45) i (46) do (43), po przekształceniach otrzymano dla i-tego węzła równanie postaci

$$T_i^n = \frac{\lambda_m l}{(\Delta h_1 + \Delta h_2)(c_m \varrho_m \Delta h_1 \Delta h_2 + 2\lambda_m l) r_i} \ldots [(2r_i - \Delta h_1)\Delta h_2\, T_{i-1}^n + \ldots$$

$$T_{i-1}^n + (2r_i + \Delta h_2)\Delta h_1\, T_{i+1}^n] + \frac{c_m \varrho_m \Delta h_1 \Delta h_2}{c_m \varrho_m \Delta h_1 \Delta h_2 + 2\lambda_m l}\, T_i^{n-1} +$$

$$+ \frac{\Delta h_1 \Delta h_2 l}{c_m \varrho_m \Delta h_1 \Delta h_2 + 2\lambda_m l}\, p_{vi}(T). \tag{47}$$

Dla dokonania analizy rozkładu temperatury wzdłuż wysokości pręta ułożono równania typu (47) dla danej chwili czasowej w poszczególnych węzłach pręta. W konsekwencji uzyskano układ równań liniowych, który po uwzględnieniu warunków brzegowych (39a, b) daje się łatwo zapisać w postaci równania macierzowego (48)

$$[A]\ \ [T] = [B] \tag{48}$$

W równaniu (48 A) jest macierzą stałych współczynników o wymiarze $(M+2)\times(M+2)$,

a jej postać jest następująca

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \dots 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 \dots & a_{ii-1} & a_{ii} & a_{ii+1} & & \dots 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 \dots & a_{MM-1} & a_{MM} & a_{MM+1} & & 0 \\ 0 \dots & & a_{M+1M} & a_{M+1M+1} & & a_{M+1M+2} \\ 0 \dots & & a_{M+2M} & 0 & & a_{M+2M+2} \end{bmatrix}$$

$[B] = \mathrm{col}[b_i]$ stanowi macierz wymuszeń o elementach będących funkcją narastającej temperatury, zaś $[T] = \mathrm{col}[T_i]$ jest szukanym rozkładem temperatury.

4. OBLICZENIA

Obliczenia przeprowadzono dla pręta trapezowego uzwojenia klatkowego silnika typu SZJc 196T Ex 320 kW, 6000 V. Na podstawie równań (48), (44), (44a, b), (34) obliczono za pomocą maszyny cyfrowej rozkład temperatury wzdłuż wysokości pręta w funkcji czasu dla danych:

$h_p = 65\ 10^{-3}$ m $\qquad T_p = 20°$ C

$b_1 = 6{,}67\ 10^{-3}$ m $\qquad f = 50$ Hz

$b_2 = 2\ 10^{-3}$ m $\qquad \gamma_0 = 57{,}14\ 10^6 \mathrm{S\ m^{-1}}$

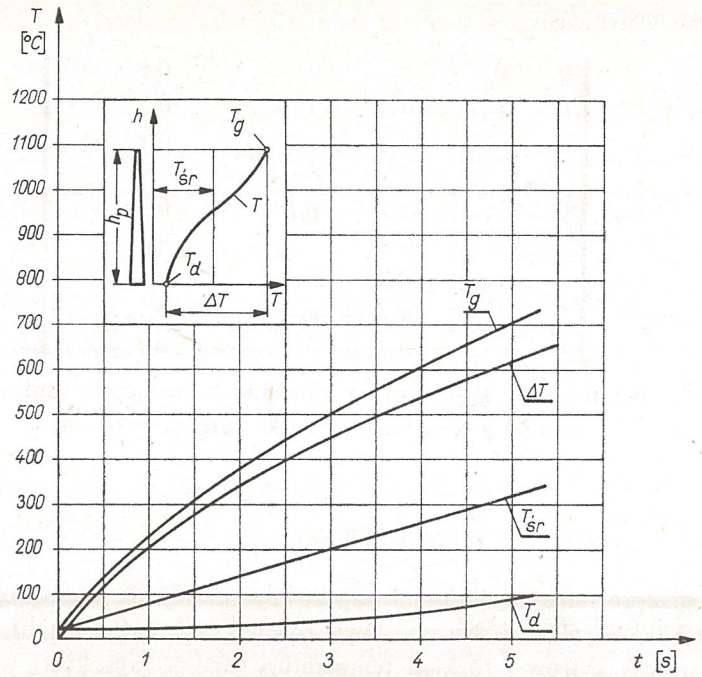
$I_{pm} = 5848$ A $\qquad \mu_0 = 4\pi\ 10^{-7} \mathrm{H\ m^{-1}}$

$\Theta = 0{,}072$ rad $\qquad k = 106\ \mathrm{m^{-1}}$

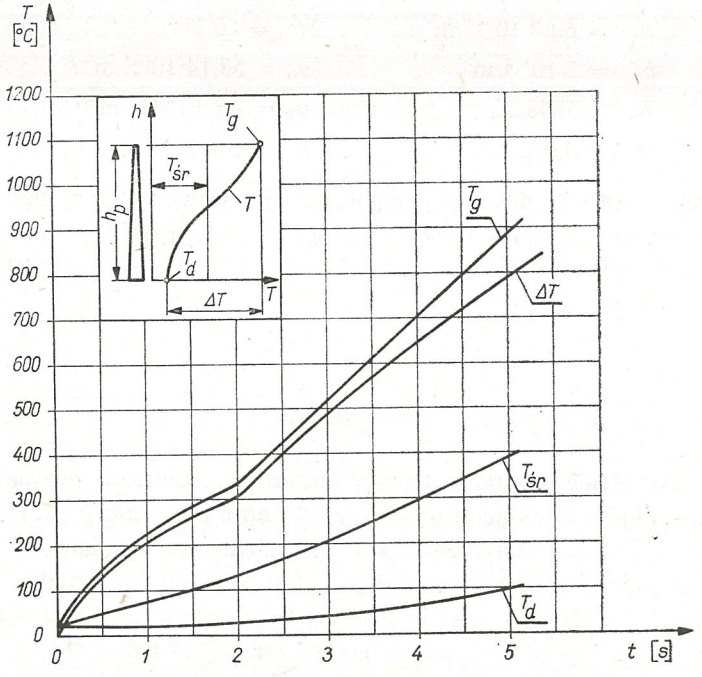
Obliczenia przeprowadzono dla dwu przypadków. W pierwszym pominięto wpływ temperatury na wartość strat ($p_v(r) = const$), w drugim — uwzględniono zmieniające się wraz z temperaturą wartości rezystywności i strat. Uzyskane przebiegi temperatur przedstawiono na Rys. 3a, b oraz na Rys. 4a, b.

5. WNIOSKI

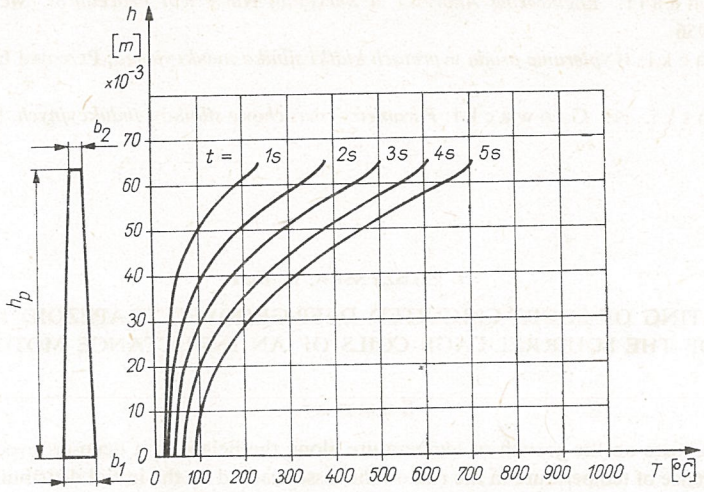
Graficzne zestawienie wyników analizy uzasadnia celowość prowadzenia obliczeń z uwzględnieniem wpływu temperatury na rezystywność materiału pręta i rozkład gęstości prądu. Niemniej w analizie nagrzewania nie uwzględniono wymiany ciepła z pakietem traktując proces nagrzewania jako adiabatyczny. Porównania obu rozważanych przypadków w przyjętych wyidealizowanych warunkach (dla $\varrho = const$ i $\varrho = f(T)$) ujawniają znaczące różnice zarówno w wartościach temperatur jak też i stromościach ich narastania oraz wskazują na potrzebę przeprowadzenia podobnej analizy z uwzględnieniem przejmowania ciepła przez pakiet.



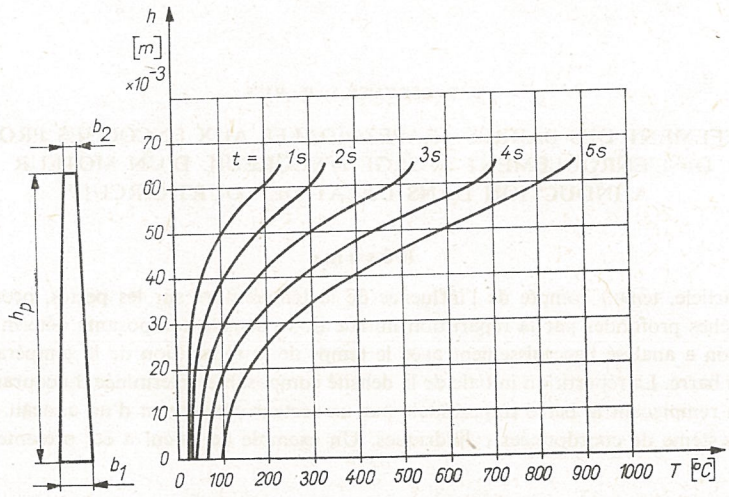
Rys. 3a. Narastanie w czasie temperatury średniej pręta, temperatury górnej i dolnej warstwy, przyrostu temperatury między skrajnymi warstwami przy $\varrho = const$



Rys. 3b. Narastanie w czasie temperatury średniej pręta, temperatury górnej i dolnej warstwy, przyrostu temperatury między skrajnymi warstwami przy $\varrho = f(T)$



Rys. 4a. Narastanie rozkładu temperatury wzdłuż wysokości pręta przy nagrzewaniu stratami o niezmiennym rozkładzie ($\varrho = const$)



Rys. 4b. Narastanie rozkładu temperatury wzdłuż wysokości pręta z uwzględnieniem wpływu temperatury na rozkład strat ($\varrho = f(T)$)

LITERATURA

1. A. Różycki: *Badania cieplnych stanów nieustalonych w maszynach elektrycznych z zastosowaniem cyfrowej i analogowej techniki obliczeniowej.* Praca doktorska. Politechnika Śląska, Gliwice 1977
2. T. Cholewicki: *Elektrotechnika teoretyczna*, t. II. Warszawa: WNT, 1971
3. N. W. Mc Lachlan: *Funkcje Bessela dla inżynierów.* Warszawa: PWN, 1964
4. P. Moon, D. E. Spencer: *Teoria pola.* Warszawa: PWN, 1966
5. S. Wiśniewski: *Wymiana ciepła.* Warszawa; PWN, 1979
6. M. Hering: *Termokinetyka dla elektryków*, Warszawa: WNT, 1980
7. L. Collatz: *Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych.* Warszawa: PWN, 1960

8. S. H. Crandall: *Engineering Analysis. A Survey of Numerical Procedures.* Mc Graw-Hill Book Company 1956
9. A. Głowacki: *Wypieranie prądu w prętach klatki silnika indukcyjnego.* Przegląd Elektrotechniczny, 1978 z. 4
10. T. Śliwiński, A. Głowacki: *Parametry rozruchowe silników indukcyjnych.* Warszawa: PWN, 1982

J. PŁOSZYŃSKA, R. RUT

HEATING OF SHORT-CIRCUITED DEEP-GROOVED TRAPEZOID RODS OF THE SQUIRREL-CAGE COILS OF AN INDUCTANCE MOTOR

Summary

The paper focuses on the growth of temperature along the height of a deep-grooved rod, taking into account the influence of temperature in the rod on the losses caused by the initial distribution of the density of the established component of the starting current. The initial distribution of the density of the established component of the of the starting current is determined by replacing the trapezoidal rod witha tapered ring sector. The analysis has been carried out in the cylindrical coordinates system. As an illustration a few calculations referring to examples are included.

J. PŁOSZYŃSKA, R. RUT

ECHAUFFEMENT DES BARRES TRAPEZOÏDALES AUX ENCOCHES PROFONDES DE L'ENROULEMENT A CAGE D'ECUREUIL D'UN MOTEUR A INDUCTION DANS L'ETAT DE COURT-CIRCUIT

Résumé

Dans cet article, tenant compte de l'influence de la température sur les pertes, produites dans une barre aux encoches profondes par la répartition initiale de la densité composante déterminée du courant de démarrage, on a analysé l'accroissement avec le temps de la répartition de la température le long de la hauteur de la barre. La répartition initiale de la densité composante déterminée du courant de démarrage a été définie en remplaçant la barre trapezoïdale par un secteur convergent d'un anneau. L'analyse a été faite dans un système de coordonnées cylindriques. Un exemple de calcul a été présenté.

J. PŁOSZYŃSKA, R. RUT

ERWÄRMUNG VON TRAPEZFÖRMIGEN TIEFGERILLTEN WICKLUNGSSTÄBEN EINES INDUKTIVEN KÄFIGLÄUFERMOTORS IM KURZSCHLUßZUSTAND

Zusammenfassung

Im Aufsatz wurde eine Analyse des zeitlichen Temperaturanstiegs längs der Läuferstabshöhe beschrieben. Dabei wurde der Einfluß der Temperatur im tiefgerillten Läuferstab auf die Verluste berücksichtigt, die durch die Anfangsdichteverteilung der Beharrungs-komponente des Anlaufstromes entstanden sind. Diese Komponente wurde bestimmt, indem der trapezförmige Läuferstab durch einen konvergenten Ringausschnitt ersetzt worden ist. Die Analyse wurde mittels Zylinderkoordinantensystems geführt. Berechnungsbeispiele wurden beigebracht.

Я. ПЛОШИНЬСКА, Р. РУТ

НАГРЕВАНИЕ ТРАПЕЦИОИДАЛЬНЫХ ГЛУБОКОПАЗНЫХ СТЕРЖНЕЙ БЕЛИЧЬЕЙ КЛЕТКИ РОТОРА АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ В РЕЖИМЕ КОРОТКОГО ЗАМЫКАНИЯ

Р е з ю м е

Проанализировано нарастание во времени распределения температуры вдоль высоты глубокопазного стержня, при учете влияния температуры на потери, вызванные начальным распределением плотности установившейся составляющей пускового тока. Начальное распределение плотности установившейся составляющей пускового тока определено заменяя трапецеиоидальный стержень сответствующим отрезком кольца. Анализ проведен в системе цилиндрических координат. Приведены примеры расчетов.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1987, 33, z. 1, ss. 183-207

621.314.224:681.335

Projektowanie wysokonapięciowych przekładników prądowych generatorowych za pomocą techniki obliczeniowej

ZBIGNIEW DMOCHOWSKI (WARSZAWA)

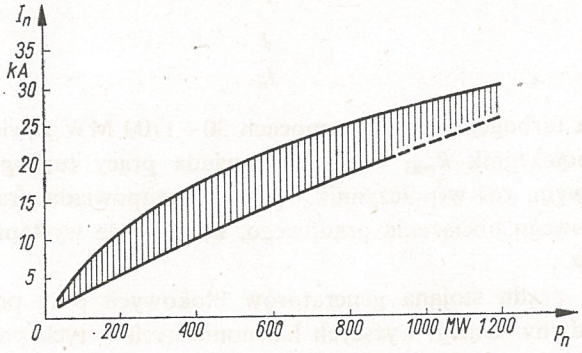
Instytut Elektrotechniki w Warszawie

Otrzymano 1985.02.08

W artykule opracowano algorytm pozwalający na projektowanie za pomocą cyfrowych maszyn liczących wysokonapięciowych dwustopniowych przekładników prądowych generatorowych. Przedstawione wyniki obliczeń obwodów magnetycznych i elektrycznych obu stopni dla przykładowego przekładnika prądowego generatorowego przy minimalnym zużyciu materiałów czynnych. Podano wnioski dla praktyki konstruktorskiej i przemysłowej.

1. WSTĘP

W ostatnich latach nastąpił znaczny wzrost mocy znamionowej generatorów blokowych. Wzrostowi mocy znamionowych tych jednostek towarzyszył znaczny wzrost prądu znamionowego, przy niewielkim wzroście wartości napięć znamionowych (rys. 1). Stąd zachodzi konieczność pomiaru znacznych wartości prądów podczas normalnej pracy generatora, a także bardzo dużych prądów zwarciowych.



Rys. 1. Zależność znamionowego prądu stojana I_n turbogeneratorów od ich mocy znamionowej P_n

Przy pomiarach wielkoprądowych w układach blokowych generator-transformator stosuje się generalnie wysokonapięciowe przekładniki prądowe zawierające rdzenie pomiarowe i zabezpieczeniowe. Od prądowych przekładników pomiarowych wymaga się dużej dokładności w stanach normalnych w wąskim zakresie zmian wielkości wejściowej, a bez znaczenia jest błąd transformacji w krótkotrwałych stanach awaryjnych (zwarcia).

Właściwą rolą prądowych przekładników zabezpieczeniowych jest dostarczenie informacji o prądach w stanach awaryjnych, a wymagania dokładności transformacji w zakresie prądów znamionowych są łagodne.

2. WARUNKI PRACY PRZEKŁADNIKÓW GENERATOROWYCH

Przy projektowaniu przekładników generatorowych jak i innych układów metrologicznych istotna jest znajomość warunków ich pracy podczas eksploatacji danego urządzenia elektrycznego.

Odgrywają tu rolę następujące informacje:

— charakter przebiegów wartości skutecznej oraz kształtu krzywej prądów generatora podczas normalnej pracy,

— charakter przebiegu wartości chwilowej prądu generatora przy stanach awaryjnych,

— układ torów wielkoprądowych,

— charakter i wartości impedancji obciążenia przekładników.

Zmiany wartości skutecznej prądu stojana generatora w czasie normalnej pracy są duże. Przy stopniowym obciążeniu generatora prąd ten będzie narastał od wartości zerowej przy biegu jałowym do wartości znamionowej I_n. Operując zakresem prądów stojana od I_{min} do I_{max} można zapisać, że

$$I_{min} \leqslant I \leqslant I_{max}, \tag{1}$$

gdzie: I_{max}, I_{min} — największa i najmniejsza wartość prądu stojana podczas normalnej pracy generatora.

Odpowiada temu zakres zmian współczynnika krotności prądu stojana

$$k_{min} \leqslant k \leqslant k_{max} \tag{2}$$

$$k = \frac{I}{I_n} \tag{3}$$

Współczynnik k dla turbogeneratorów o mocach $30 \div 1100$ MW zawiera się w przedziale $1{,}05 \div 0{,}1$ [1]. Współczynnik $k_{max} = 1{,}05$ odpowiada pracy turbogeneratora przy 5% przeciążeniu prądowym, zaś współczynnik $k_{min} = 0{,}1$ odpowiada pracy turbogeneratora przy 10% znamionowego obciążenia prądowego, które może wystąpić przy stopniowym obciążaniu maszyny.

Kształt krzywej prądu stojana generatorów blokowych przy pracy normalnej jest praktycznie sinusoidalny. Udział wyższych harmonicznych w tych prądach posiada wartości znikome. Zwarcia w układach elektroenergetycznych są zawsze stanami awaryjnymi. Wynika to z dużej wartości współczynnika krotności k_{max} prądu przy zwarciu oraz z wytrzymałości dynamicznej i termicznej elementów układu przy prądach zwarciowych. Dla układów generatorowych o mocy od 5 MW do 1100 MW odpowiednio współczynniki k_{max} wynoszą $3 \div 13$ [2, 3, 4]. Zwarcia w układach z generatorem blokowym mogą występować np. przy załączaniu generatora na zwarcie lub przy występowaniu zwarcia podczas jego normalnej pracy.

Przebieg prądu i_1 podczas załączania generatora na zwarcie można opisać następującą zależnością

$$i_1(t) = I_{1m}\left[\sin(\omega t + \psi_{i1}) - \sin\psi_{i1}\, e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right], \tag{4}$$

gdzie:

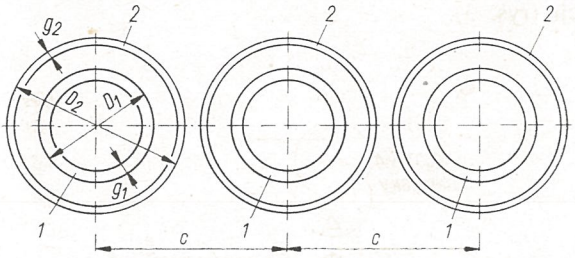
I_{1m} — wartość maksymalna składowej okresowej prądu przy zwarciu,

ψ_{i1} — faza początkowa składowej okresowej prądu przy zwarciu,

τ_1 — stała czasowa obwodu zwarciowego.

Tor wielkoprądowy w przypadku układu blokowego generator-transformator rozpoczyna się przy przepustach generatorowych oraz kończy się przy przepustach transformatora. Jest to tor sztywny w większej części posiadający ekrany.

Typowym rozwiązaniem jest tor trójwiązkowy. Szyny robocze i ekrany wykonane są zwykle w postaci cylindrów (rys. 2, tab. 1). Za pośrednictwem przekładników prądowych



Rys. 2. Tory wielkoprądowe bloku generator — transformator:
1 — szyny robocze, 2 — ekrany

Tabela 1

Dane torów wielkoprądowych układu blokowego generator — transformator wg [1]

P	D_1	D_2	g_1	g_2	C
MW	m	m	mm	mm	m
800	0,65	1,16	15	7	1,5
500	0,66	1,18	14	6	1,8
360	0,40	0,93	14	6	1,6
200	0,30	0,71	14	5	1,1

zasilane są następujące typowe zabezpieczenia i przyrządy bloku generator-transformator:

— zabezpieczenie różnicowe generatora,

— zabezpieczenie od doziemień w obwodzie wzbudzenia,

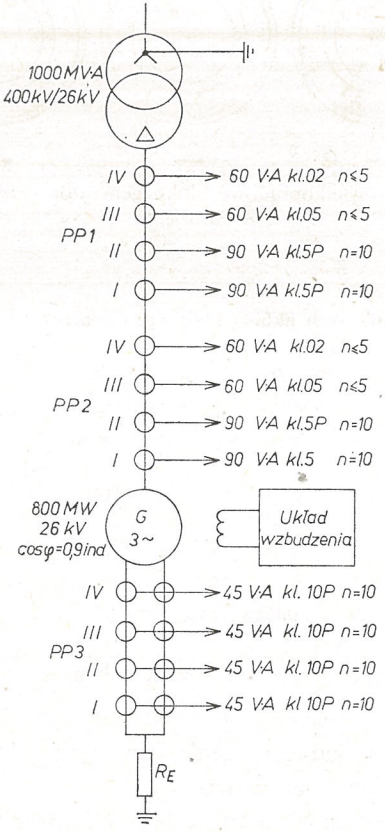
— zabezpieczenie od przepływu mocy zwrotnej,

— zabezpieczenie od utraty wzbudzania i synchronizm generatora,

— zabezpieczenie podimpedancyjne bloku,

— zabepieczenie różnicowe bloku,
— zabezpieczenie od asymetrii obciążeń generatora,
— zabezpieczenie od zwarć zwojowych generatora,
— zabezpieczenie zerowo-prądowe,
— zabezpieczenie mocowe,
— zabezpieczenie od przeciążeń stojana generatora,
— zabezpieczenie od zrzutu obciążenia,
— przekaźnik nadprądowy,
— rejestrator zakłóceń,
— przyrządy pomiarowe prądu, mocy i energii,
— automatyczny regulator napięcia generatora.

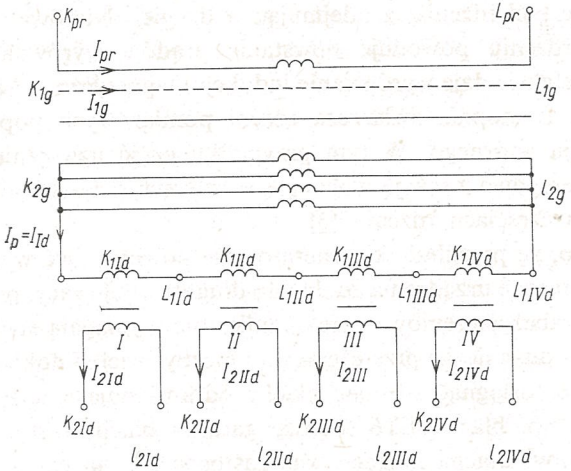
Dla realizacji tych funkcji w układzie bloku generator-transformator powinny być zastosowane określone przekładniki prądowe posiadające kilka rdzeni pomiarowych i zabezpieczeniowych (rys. 3).



Rys. 3. Schemat rozmieszczenia rdzeni przekładników prądowych w układzie blokowym generator (800 MW) — transformator (1000 MVA):
PP1, PP2 — przekładniki dwustopniowe, PP3 — przekładnik jednostopniowy, I ÷ IV — rdzenie

3. WYBÓR TYPU KONSTRUKCJI PRZEKŁADNIKA

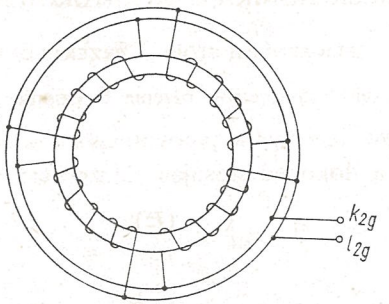
Najbardziej rozpowszechnionym typem przekładnika prądowego dla generatora blokowego jest przekładnik dwustopniowy, który posiada stopień górny, z którego zasilane są liczne rdzenie dolne [4]. Może to być np. przekładnik dwustopniowy o jednym rdzeniu górnym i czterech rdzeniach dolnych, z których dwa będą pomiarowe a dwa zabezpieczeniowe (rys. 4).



Rys. 4. Schemat elektryczny przekładnika dwustopniowego:
I, II rdzenie pomiarowe, III, IV — rdzenie zabezpieczeniowe

Na rdzeniu górnego stopnia można nawinąć uzwojenie probiercze na prąd znamionowy równy prądowi pośredniemu przekładnika. Nawija się je równomiernie w stosunku do umieszczonej centrycznie szyny pierwotnej. Uzwojenie to umożliwia sprawdzenie dokładności przekładnika u wytwórcy lub w miejscu zainstalowania bez potrzeby wymontowania przekładnika z szyn. Urządzenie to przewidziane jest do pracy dorywczej. Cztery rdzenie dolne podobnie jak rdzeń górny zwykle wykonywane są jako rdzenie pierścieniowe z uzwojeniami toroidalnymi.

Uzwojenia wtórne I stopnia przekładnika wykonywane są jako uzwojenia sekcjonowane z 4 sekcjami połączonymi równolegle. Nie zmienia to współczynnika transformacji, a powoduje wyrównanie rozkładu indukcji magnetycznej w rdzeniu, przy czym zgodnie



Rys. 5. Schemat uzwojenia wtórnego I stopnia (górnego) przekładnika

z badaniami Zacharova wartość indukcji zmniejsza się około sześciokrotnie w stosunku do największej wartości indukcji przy połączeniu szeregowym [5]. Jedna sekcja uzwojenia nawinięta jest na ćwiartce rdzenia (rys. 5). Powoduje to potrzebę zastosowania 4-krotnych znamionowych zwojów wtórnych, co pociąga za sobą zwiększenie gabarytu i kosztu przekładnika.

Efekt ekranujący równoległych uzwojeń polega na tym, że strumień rozproszenia wchodzący do rdzenia rozdziela się na cztery równoległe drogi, dodając się do strumienia głównego w jednej części rdzenia, a odejmując w drugiej. Nierównomierność strumienia magnetycznego w rdzeniu powoduje powstanie prądów wyrównawczych w sekcjach równoległych, co w efekcie daje wyrównanie indukcji magnetycznej. Można także dokonać ekranowania rdzeni II stopnia zwłaszcza rdzeni pomiarowych poprzez częściowe rozszczepienie uzwojenia wtórnego. W tym przypadku część uzwojenia wtórnego jest nawijana normalnie szeregowo z sekcją nawiniętą w czterech gałęziach równoległych umieszczonych na różnych częściach rdzenia [3].

Ze względu na to, że przekładniki generatorowe powinny być wykonane jako proste, nieskomplikowane i pewne urządzenia zdolne do długotrwałej pracy, preferuje się przekładniki suche. Człony zabezpieczeniowe przekładnika nie wymagają specjalnych materiałów magnetycznych, gdyż dużą liczbę przetężeniową i niezbyt wielką dokładność w normalnym zakresie pracy można osiągnąć stosując blachy odpowiadające wymaganiom przemysłu transformatorowego np. blacha ET6. Lepsze gatunki blach stosuje się na rdzenie pomiarowe np. permalloy. Blacha magnetyczna zastosowana na człon górny przekładnika winna mieć znaczną indukcję nasycenia i minimalną stratność (np. ET3, Surra M6).

Warunki środowiskowe przekładników wielkoprądowych w układach generatorowych są dobre. Wprawdzie występują tutaj drgania wywołane pracą układów wirujących, ale są w znacznie mniejszym stopniu przenoszone na obwody wtórne przekładników. Narażenie przekładników na działanie gazów i pyłów jest znikome. Przekładniki pracują w warunkach wnętrzowych lub w warunkach chroniących przed działaniem opadów atmosferycznych. Temperatury pracy przekładników wynoszą w warunkach wnętrzowych od $-5°C$ do $70°C$, w warunkach otwartych od $-30°C$ do $+70°C$. Przekładniki generatorowe są projektowane na temperaturę otoczenia $+70°C$. Wyższe temperatury otoczenia są odpowiednio redukowane za pomocą innych środków lub przez działanie obsługi.

4. ALGORYTM OBLICZEŃ OBWODÓW MAGNETYCZNYCH I ELEKTRYCZNYCH PRZEKŁADNIKA GENERATOROWEGO

4.1. OBLICZENIA II STOPNIA PRZEKŁADNIKA

4.1.1. Obliczenia parametrów rdzenia II stopnia przekładnika

Obliczanie liczby zwojów uzwojenia pierwotnego i wtórnego jednego ze rdzeni II stopnia przekładnika można dokonać stosując zależności:

$$z_{2II} = \frac{(Iz)_n}{I_{2IIn}}, \tag{5}$$

$$z_{1II} = \frac{(Iz)_n}{I_{p1In}}, \tag{6}$$

gdzie:

$(Iz)_n$ — amperozwoje znamionowe II stopnia przekładnika,

I_{2IIn} — znamionowy prąd wtórny II stopnia przekładnika,

I_{pIIn} — znamionowy prąd pośredni

Gdy wprowadzamy ujemną poprawkę zwojową ($\Delta i_{z\%}$), wówczas liczba zwojów uzwojenia wtórnego wynosi:

$$z^*_{2II} = z_{2II} - \frac{\Delta i_{z\%} z_{2II}}{100}, \tag{7}$$

gdzie: z_{2II} — liczba zwojów uzwojenia wtórnego przed wprowadzeniem poprawki zwojowej.

Przekrój rdzenia ze stali określamy ze wzoru:

$$A_{FeII} = \frac{I_{2IIn} Z_{obcn}}{4{,}44 f z_{2II} B_{mIIn}}, \tag{8}$$

gdzie:

Z_{obcn} — znamionowa impedancja obciążenia danego rdzenia,

f — częstotliwość prądu,

B_{mIIn} — wartość maksymalna indukcji magnetycznej w rdzeniu w warunkach znamionowych.

Promień wewnętrzny rdzenia zależy od powierzchni zajmowanej przez miedź uzwojeń, ich izolację zwojową, międzywarstwową i międzyuzwojeniową. Przy ustalaniu przekroju miedzi uzwojenia pierwotnego i wtórnego trzeba uwzględnić dopuszczalne gęstości prądu j_{1II} i j_{2II} w tych uzwojeniach. Z kolei dla wyznaczenia całkowitej powierzchni zajmowanej przez izolację w oknie rdzenia należy przyjąć współczynnik k_i powierzchni zajętej przez tę izolację w stosunku do powierzchni miedzi w oknie rdzenia.

Z doświadczeń konstruktorskich wynika że:

$$k_i = 4{,}5 + 4{,}6. \tag{9}$$

Masa stali rdzenia II stopnia przekładnika wyniesie:

$$m_{FeII} = \pi b c d_2 m_{FewII}, \tag{10}$$

gdzie:

b — grubość rdzenia,

c — szerokość rdzenia,

d_2 — średnia średnica rdzenia,

m_{FewII} — masa właściwa stali rdzenia.

4.1.2. Obliczanie parametrów uzwojenia wtórnego II stopnia przekładnika

Na podstawie obliczonego przekroju uzwojeń II stopnia przekładnika dobrać można z katalogów wymiary przekrojów przewodów. Przy obliczaniu powierzchni zajmowanej przez przekrój jednego zwoju uzwojenia wtórnego wraz z izolacją dla przekładników generatorowych produkowanych w Polsce można przyjąć współczynnik k_{iz} określający stosunek powierzchni zajmowanej przez przewód z izolacją do powierzchni przekroju

przewodu gołego około 2,5. Rezystancję uzwojenia wtórnego oraz reaktancję rozproszenia cewki uzwojenia wtórnego II stopnia przekładnika, oblicza się z zależności znanych z literatury [6, 7, 8].

4.1.3. Obliczenia błędów II stopnia w warunkach normalnej pracy przekładnika

Spadek napięcia na gałęzi magnesowania danego rdzenia II stopnia przekładnika można obliczyć z zależności:

$$U_{\mu II} = I_{2II} Z_{wII}, \tag{11}$$

gdzie:

I_{2II} — prąd wtórny II stopnia przekładnika,

Z_{wII} — wypadkowa impedancja uzwojenia wtórnego i obciążenia równe

$$Z_{wII} = \sqrt{R_{wII}^2 + X_{wII}^2}, \tag{12}$$

gdzie: R_{wII}, X_{wII} — odpowiednio wypadkowe rezystancja i reaktancja uzwojenia wtórnego i obciążenia równe

$$R_{wII} = R_{2II} + R_{obc}, \tag{13}$$

$$X_{wII} = X_{wII} + X_{obc}, \tag{14}$$

R_{obc}, X_{obc} — odpowiednio rezystancja i reaktancja obciążenia.

W warunkach znamionowych:

$$R_{obcn} = \frac{S_{obcn} \cos \psi_{obcn}}{I_{2IIn}^2} \tag{15}$$

$$X_{obcn} = \frac{S_{obcn} \sin \psi_{obcn}}{I_{2IIn}^2} \tag{16}$$

ψ_{obcn} — argument znamionowej impedancji obciążenia danego rdzenia przekładnika.

Wartość maksymalna indukcji magnetycznej w danym rdzeniu II stopnia przekładnika może być określona ze wzoru:

$$B_{mII} = \frac{U_{\mu II}}{4{,}44 f z_{2II} A_{FeII}}. \tag{17}$$

W dalszych obliczeniach korzysta się z charakterystyki magnesowania $B_m = f(H_m)$ oraz charakterystyki stratności $\Delta P_{Fe} = f(B_m)$ danej blachy elektrotechnicznej. Charakterystykę stratności określono na podstawie zależności [7]:

$$\Delta P_{Fe} = \Delta P_{Fe1,5} \left(\frac{f}{50} \right) \cdot 1{,}3 \left(\frac{B_m}{1{,}5} \right)^2 \tag{18}$$

gdzie:

$\Delta P_{Fe1,5}$ — stratność blachy przy wartości maksymalnej indukcji

$B_m = 1{,}5$ T i częstotliwości prądu $f = 50$ Hz.

Wartość skuteczna składowej biernej prądu magnesującego, sprowadzonej na stronę

wtórną II stopnia przekładnika może być obliczona ze wzoru:

$$I''_{\mu b\,II} = \frac{H_{m\,II} l_{Fe\,II}}{\sqrt{2}\, z_{2\,II}} \tag{19}$$

gdzie: $H_{m\,II}$ — wartość maksymalna natężenia pola magnetycznego odpowiadająca indukcji maksymalnej $B_{m\,II}$ odczytana z charakterystyki magnesowania $B_{m\,II} = f(H_{m\,II})$,

Wartość składowej czynnej prądu magnesującego, sprowadzonej na stronę wtórną II stopnia przekładnika będzie równa:

$$I''_{\mu c\,II} = \frac{\Delta p_{Fe} \cdot m_{Fe\,II}}{U_{\mu\,II}} \tag{20}$$

gdzie: Δp_{Fe} — wartość stratności danego gatunku blachy elektrotechnicznej odpowiadająca wartości maksymalnej indukcji magnetycznej $B_{m\,II}$ odczytana z charakterystyki $\Delta p_{Fe\,II} = f(B_{m\,II})$.

Błąd prądowy niekorygowany danego rdzenia stopnia II przekładnika będzie równy

$$\Delta I_{II\,n} = \frac{-I''_{\mu\,II} \cdot 100\%}{I_{2\,II}} \sin(\alpha_{II} + \varphi_{II}), \tag{21}$$

gdzie:

φ_{II} — kąt między wskazem napięcia $U_{\mu\,II}$ a wskazem prądu $I_{2\,II}$,

α_{II} — kąt między wskazem prądu $I''_{\mu c\,II}$ i prądu $I''_{\mu b\,II}$.

Uwzględniając poprawkę zwojową błąd prądowy wyniesie:

$$\Delta I_{II} = \Delta I_{II\,n} + \Delta I_{II\,z}, \tag{22}$$

gdzie:

$\Delta I_{II\,z}$ — poprawka zwojowa,

zaś błąd kątowy stopnia II przekładnika

$$\delta I = \frac{I''_{\mu\,II}}{I_{2\,II}} \cos(\alpha_{II} + \varphi_{II}) \tag{23}$$

Na podstawie [12] błąd prądowy i kątowy dla rdzenia zabezpieczeniowego oblicza się dla znamionowego prądu wtórnego $I_{II\,n}$ oraz znamionowego obciążenia S_{obcn}. Dla rdzeni pomiarowych wartość błędu prądowego i kątowego oblicza się dla wartości 10, 20, 100 i 120% $I_{II\,n}$ oraz zakresu obciążenia $(25 \div 100)\% S_{obcn}$.

4.1.4. Wyznaczenie charakterystyki błędu wskazowego rdzenia zabezpieczeniowego II stopnia przekładnika

Zgodnie z [12] 10% — liczbę przetężeniową określa się dla znamionowego obciążenia i dla wartości kąta obciążenia $\cos\varphi_n = 0{,}8_{ind}$. Wartość skuteczna prądu pierwotnego II stopnia przekładnika, sprowadzona na stronę wtórną przekładnika może być obliczona z zależności:

$$I'_{1\,II} = \sqrt{I^2_{2\,II} + I''^2_{\mu\,II} + 2 I_{2\,II} I''_{\mu\,II} \sin(\alpha_{II} + \varphi_{II})}, \tag{24}$$

zaś błąd wskazowy II stopnia przekładnika

$$\Delta w_{\mathrm{II}n} = \frac{I''_{\mu\mathrm{II}}}{I''_{1\mathrm{II}}} 100\%. \tag{25}$$

Gdy wprowadzana jest poprawka zwojowa $\Delta I_{\mathrm{II}z}$ wartość skuteczna prądu błędu II stopnia przekładnika będzie równa:

$$I''_{w\mathrm{II}} = \sqrt{I''^2_{\mu\mathrm{II}} + \left(\frac{\Delta I_{\mathrm{II}z}}{100}\right)^2 I^2_{2\mathrm{II}} - 2I_{2\mathrm{II}} I''_{\mu\mathrm{II}} \cdot \frac{\Delta I_{\mathrm{II}z}}{100} \cdot \sin(\alpha_{\mathrm{II}} + \varphi_{\mathrm{II}})}\,, \tag{26}$$

wówczas błąd wskazowy II stopnia przekładnika wyniesie:

$$\Delta w_{\mathrm{II}} = \frac{I''_{w\mathrm{II}}}{I''_{1\mathrm{II}}} \cdot 100\%. \tag{27}$$

Na podstawie wzorów (25) lub (27) wyznacza się błąd wskazowy dla różnych wartości prądu $I''_{1\mathrm{II}}$ i wykreśla się wykres $\Delta w_{\mathrm{II}n} = f(I''_{1\mathrm{II}})$, lub $\Delta w_{\mathrm{II}} = f(I''_{1\mathrm{II}})$.

4.1.5. Obliczanie napięć powstających przy przerwaniu obwodu wtórnego II stopnia przekładnika

Obliczenia napięć przeprowadzamy przy przerwaniu obwodu wtórnego II stopnia przekładnika gdy w obwodzie pierwotnym stopnia I przekładnika płynie prąd znamionowy. Przy uwzględnieniu zastępczej rezystancji strat R_{Fe} w rdzeniu II stopnia przekładnika oraz uwzględnieniu sinusoidalnego przebiegu prądu $i_{1\mathrm{II}}$ w obwodzie pierwotnym tego stopnia wartość maksymalna napięcia na zaciskach wtórnych może być obliczona z zależności [11]

$$U_{20m\mathrm{II}} = \frac{i_{10nas\mathrm{II}} R_{\mathrm{Fe\,II}} \vartheta_{\mathrm{II}}}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4U_{20mnas\,\mathrm{II}} I_{pm}}{i^2_{10nas\,\mathrm{II}} R_{\mathrm{Fe\,II}} \vartheta_{\mathrm{II}}}} - 1\right) \tag{28}$$

gdzie:

$i_{10nas\,\mathrm{II}}$ — wartość chwilowa prądu pierwotnego, przy której następuje nasycenie rdzenia stopnia II przekładnika,

$R_{\mathrm{Fe\,II}}$ — liniowa rezystancja strat w rdzeniu stopnia II przekładnika,

ϑ_{II} — przekładnia zwojowa II stopnia przekładnika,

$U_{20mnas\,\mathrm{II}}$ — wartość maksymalna napięcia na zaciskach wtórnych przy otwartym obwodzie wtórnym, przy sinusoidalnym prądzie pierwotnym o wartości maksymalnej i_{10nas} oraz przy pominięciu strat w rdzeniu,

I_{pm} — wartość maksymalna prądu pierwotnego II stopnia przekładnika.

Wartość prądu $i_{10nas\,\mathrm{II}}$ można wyznaczyć ze wzoru:

$$i_{10nas\,\mathrm{II}} = \frac{H_{mnas} l_{\mathrm{Fe\,II}}}{z_{1\mathrm{II}}} \tag{29}$$

gdzie:

H_{mnas} — wartość maksymalna natężenia pola magnetycznego, przy której następuje nasycenie rdzenia,

$l_{Fe\,II}$ — średnia długość linii sił pola magnetycznego w rdzeniu,

$z_{1\,II}$ — liczba zwojów uzwojenia pierwotnego II stopnia przekładnika.

Wartość rezystancji strat $R_{Fe\,II}$ może być wyznaczona z zależności:

$$R_{Fe\,II} = a_{Fe\,II} \frac{A_{Fe\,II}}{l_{Fe\,II}} z_{1\,II}^2, \tag{30}$$

gdzie:

$a_{Fe\,II}$ — współczynnik zależny od rodzaju materiału rdzenia i częstotliwości prądu,

$A_{Fe\,II}$ — przekrój czynny rdzenia.

Współczynnik a_{Fe} może być określony ze wzoru:

$$a_{Fe\,II} = \frac{19{,}6 f^2}{m_{Fe\,w\,II}\,\alpha_{Fe\,II}}, \tag{31}$$

gdzie:

f — częstotliwość prądu,

$m_{Fe\,w\,II}$ — masa właściwa blachy rdzenia II stopnia przekładnika,

$\alpha_{Fe\,II}$ — współczynnik charakterystyczny dla danego gatunku blachy, który można wyznaczyć z charakterystyki stratności blachy rdzenia II stopnia przekładnika $\Delta p_{Fe\,II} = f(B_{m\,II})$ z zależności:

$$\alpha_{Fe\,II} = \frac{\Delta p_{Fe\,II}}{B_{mII}^2} \tag{32}$$

gdzie: $B_{m\,II}$ — wartość maksymalna indukcji magnetycznej blachy rdzenia II stopnia przekładnika.

Wartość napięcia $U_{20mnas\,II}$ można wyznaczyć z zależności:

$$U_{20mnas\,II} = 2\pi f z_{2\,II} A_{Fe\,II} B_{mnas\,II} \tag{33}$$

gdzie: $B_{mnas\,II}$ — wartość maksymalna indukcji magnetycznej nasycenia rdzenia II stopnia przekładnika.

Wartość przekładni ϑ_{II} można określić ze wzoru:

$$\vartheta_{II} = \frac{z_{2II}}{z_{1II}}. \tag{34}$$

4.1.6. Obliczenia parametrów uzwojenia pierwotnego II stopnia przekładnika

Przy obliczaniu powierzchni zajmowanej przez przekrój jednego zwoju uzwojenia pierwotnego wraz z izolacją dla przekładników generatorowych produkowanych w Polsce można przyjąć współczynnik k_{i1} określający stosunek powierzchni zajmowanej przez przewód z izolacją do powierzchni przekroju przewodu gołego ok. 2,5. Rezystanjcę uzwojenia pierwotnego oraz reaktancję rozproszenia cewki uzwojenia pierwotnego II stopnia przekładnika oblicza się z zależności znanych z literatury [6,7,8].

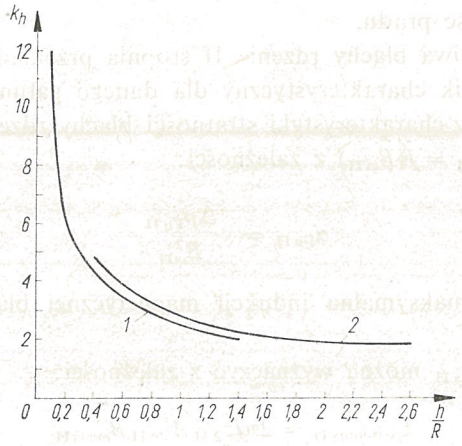
4.2. OBLICZENIA STRUMIENIA ROZPROSZENIA W RDZENIU

Wartość indukcji magnetycznej w rdzeniu pochodzącej od strumienia rozproszenia wywołanego przez prądy płynące w torze wielkoprądowym można obliczyć ze wzoru [12]

$$B_l = \frac{2\mu_0 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 + \frac{r_1^2}{R^2}\right) k_h H_l, \tag{35}$$

gdzie:

μ_0 — bezwzględna przenikalność magnetyczna próżni,
r_2 — zewnętrzny promień rdzenia,
r_1 — wewnętrzny promień rdzenia,
R — średni promień rdzenia,
k_h — współczynnik wzrostu indukcji magnetycznej (rys. 6).



Rys. 6. Charakterystyki współczynnika wzrostu indukcji magnetycznej $k_h = f\left(\frac{h}{R}\right)$ wg Zacharova [5] dla stosunku $\frac{r_2 - r_1}{R}$;
1 — 0,14; 2 — 0,40; h — długość rury, R — średni promień rury

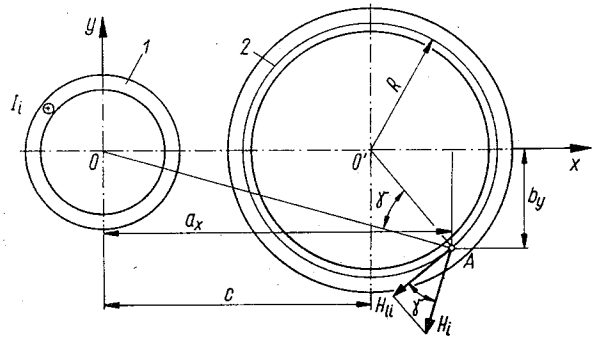
Wypadkowa składowa natężenia pola magnetycznego wzdłuż średniej linii pola w rdzeniu określa się ze wzoru:

$$\underline{H}_l = \underline{H}_{l1} + \underline{H}_{l2} + \sum_{i=3}^{i=4} \underline{H}_{li} \tag{36}$$

gdzie:

$\underline{H}_{l1}$ — składowa natężenia pola magnetycznego wzdłuż średniej linii pola w rdzeniu pochodzące od prądu $\underline{I}_1$,
$\underline{H}_{l2}$ — jak wyżej, lecz pochodząca od prądu $\underline{I}_2$,
$\underline{H}_{li}$ — jak wyżej, lecz pochodząca od prądu $\underline{I}_i$.

Wartości natężeń pola magnetycznego H_{l1}, H_{l2}, H_{li}, można obliczyć z zależności (rys. 7)



Rys. 7. Sposób wyznaczania natężenia pola magnetycznego od prądu płynącego przez szynę wielkoprądową o kształcie rurowym;
1 — szyna wielkoprądowa, 2 — rdzeń I (górnego) stopnia przekładnika

$$H_{l1} = \frac{I_1}{2\pi R}, \tag{37}$$

$$H_{l2} = \frac{I_2 z_{2I}}{l_{FeI}}, \tag{38}$$

$$H_{li} = \frac{I_i(R^2 + a_x^2 + b_y^2 - c^2)}{2\pi R(a_x^2 + b_y^2)}, \tag{39}$$

gdzie:

l_{FeI} — średnia długość linii sił pola magnetycznego w rdzeniu I stopnia przekładnika,

z_{2I} — liczba zwojów wtórnych I stopnia przekładnika.

Na podstawie obliczeń można określić punkt w rdzeniu o największej wartości składowej stycznej natężenia pola magnetycznego. Dla tej wartości natężenia pola magnetycznego oblicza się wartość indukcji magnetycznej B_l oraz strumienia rozproszenia $\oint_{rI}$.

Wartość maksymalna strumienia rozproszenia przy równoległym połączeniu sekcji uzwojenia wtórnego I stopnia przekładnika wyniesie [1]

$$\oint_{rmI} \cong \frac{B_l A_{FeI} \sqrt{2}}{6}. \tag{40}$$

W przypadku, gdy zastosowane zewnętrzne ekrany elektromagnetyczne całkowicie niwelują wpływ sąsiednich szyn wielkoprądowych na rdzeń I stopnia przekładnika, można napisać:

$$H_{li} \cong 0, \tag{41}$$

$$H_{l1} \cong H_{l2}, \tag{42}$$

skąd

$$\oint_{rmI} \cong 0 \tag{43}$$

4.3. OBLICZENIA I STOPNIA PRZEKŁADNIKA

4.3.1. Obliczenia parametrów rdzenia i uzwojeń I stopnia przekładnika

Przekrój rdzenia I stopnia przekładnika A_1 określa się w oparciu o badania modelowe lub na podstawie praw modelu wg zależności zawartych w [7]. Przekrój czynny rdzenia wyniesie

$$A_{\mathrm{Fe\,I}} = A_1 k_{\mathrm{Fe\,I}} \tag{44}$$

Znamionowe amperozwoje I stopnia przekładnika są równe wartości znamionowej prądu

$$(Iz)_{1n} = I_{1n} z_{1\mathrm{I}} = I_{1n}. \tag{45}$$

Uzwojenie wtórne stopnia I będzie się składać z 4 sekcji połączonych równolegle. Jednocześnie może być wykonane uzwojenie próbne przewidziane na prąd znamionowy równy prądowi pośredniemu przekładnika, spełniające rolę zastępczego uzwojenia pierwotnego. Powierzchnia zajmowana przez uzwojenie wtórne i próbne wraz z izolacją w oknie rdzenia będzie równa

$$A_{2\mathrm{I}} = A_{\mathrm{Cu\,I}} k_i, \tag{46}$$

gdzie:

A_{CuI} — powierzchnia zajmowana przez uzwojenie wtórne i próbne bez izolacji,

k_i — stosunek pola zajętego przez przewody z izolacją do przekroju wszystkich przewodów gołych.

Średnica okna rdzenia może być określona ze wzoru

$$d_1 = \sqrt{\frac{4S_{ok}}{\pi}} \tag{47}$$

gdzie: S_{ok} — całkowita powierzchnia okna.

Masa stali rdzenia wyniesie

$$m_{\mathrm{Fe\,I}} = l_{\mathrm{Fe\,I}} A_{\mathrm{Fe\,I}} m_{\mathrm{Fe\,wI}} \tag{48}$$

gdzie:

$l_{\mathrm{Fe\,I}}$ — średnia długość linii sił pola magnetycznego w rdzeniu,

$m_{\mathrm{Fe\,wI}}$ — masa właściwa stali rdzenia.

Rezystancja uzwojenia wtórnego I stopnia przekładnika w temperaturze 343 K będzie równa

$$R_{2\mathrm{I}} = \frac{z_{2\mathrm{I}} l_{\mathrm{Cu2I}} (1 + \alpha \Delta T)}{\gamma_{\mathrm{Cu}} A_{\mathrm{Cu2I}} n} \tag{49}$$

gdzie: n — liczba grup sekcji połączonych równolegle (przy połączeniu równoległym $n = 4$, przy połączeniu szeregowo-równoległym $n = 2$).

Reaktancja rozproszenia uzwojenia wtórnego może być obliczona ze wzoru [7]

$$X_{2\mathrm{I}} \cong 0{,}1 R_{2\mathrm{I}}. \tag{50}$$

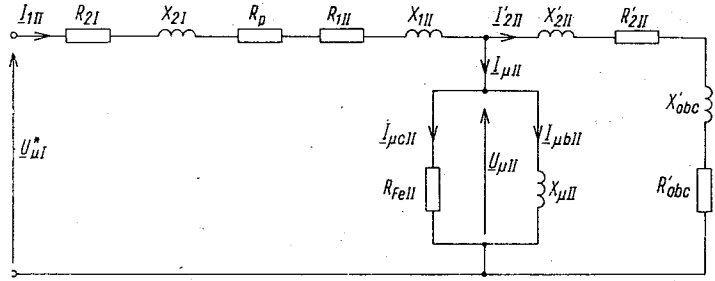
4.3.2. Obliczenia błędów w warunkach normalnej pracy I stopnia przekładnika

Schemat zastępczy dwustopniowego przekładnika prądowego przedstawiono na rys. 8. Całkowite rezystancja i reaktancja obciążenia przekładnika będą równe [6, 7]

$$R_{obc} = \frac{(S_{obcA}+S_{obcB}+S_{obcC}+S_{obcD})\cos\psi_{obc}}{I^2_{2IIn}} \tag{51}$$

$$X_{obc} = \frac{(S_{obcA}+S_{obcB}+S_{obcC}+S_{obcD})\sin\psi_{obc}}{I^2_{2IIn}} \tag{52}$$

gdzie: S_{obcA}, S_{obcB}, S_{obcC}, S_{obcD} — moce pozorne obciążenia rdzeni A, B, C, D II stopnia przekładnika.



Rys. 8. Schemat zastępczy dwustopniowego przekładnika prądowego przy sprowadzeniu wszystkich wielkości na stronę wtórną I stopnia przekładnika:

$U^*_{\mu I}$ — spadek napięcia na gałęzi magnesowania stopnia I przekładnika bez uwzględnienia rozproszenia; $U_{\mu II}$ — spadek napięcia na gałęzi magnesowania stopnia II przekładnika; I_{1II} — prąd pierwotny stopnia II przekładnika; I'_{2II} — prąd wtórny stopnia II przekładnika, sprowadzony na stronę pierwotną tego stopnia; $I_{\mu II}$ — prąd magnesujący stopnia II przekładnika; $I'_{\mu cII}$ $I_{\mu bII}$ — składowe czynna i bierna prądu magnesującego stopnia II przekładnika; R_{2I} — zastępcza rezystancja uzwojenia wtórnego stopnia I przekładnika; X_{2I} — reaktancja rozproszenia uzwojenia wtórnego stopnia I przekładnika; R_p — rezystancja przewodów łączących stopień I i II przekładnika; R_{1II} — rezystancja uzwojenia pierwotnego stopnia II przekładnika ; X_{1II} — reaktancja rozproszenia uzwojenia pierwotnego stopnia II przekładnika; X'_{2II} — sumaryczna reaktancja rozproszenia uzwojeń wtórnych stopnia II przekładnika, sprowadzona na stronę pierwotną; R'_{2II} — sumaryczna rezystancja uzwojeń wtórnych stopnia II przekładnika sprowadzona na stronę pierwotną; R'_{obc} X'_{obc} — sumaryczne rezystancja i reaktancja obciążeń, sprowadzone na stronę pierwotną; R_{FeII} — zastępcza rezystancja strat w rdzeniu stopnia II przekładnika; $X_{\mu II}$ — zastępcza reaktancja magnesowania rdzenia stopnia II przekładnika

Rezystancję i reaktancję obciążenia sprowadzone na stronę wtórną I stopnia przekładnika można obliczyć ze wzorów:

$$R'_{obc} = R_{obc}\left(\frac{z_{1II}}{z_{2II}}\right)^2, \tag{53}$$

$$X'_{obc} = X_{obc}\left(\frac{z_{1II}}{z_{2II}}\right)^2. \tag{54}$$

Całkowite rezystancja i reaktancja uzwojeń wtórnych rdzeni A, B, C, D II stopnia przekładnika będą równe:

$$R_{2II} = R_{2IIA}+R_{2IIB}+R_{2IIC}+R_{2IID}, \tag{55}$$

$$X_{2II} = X_{2IIA}+X_{2IIB}+X_{2IIC}+X_{2IID}. \tag{56}$$

Rezystancję R_{2II} i reaktancję X_{2II} sprowadzone na stronę wtórną I stopnia przekładnika

można obliczyć ze wzorów:

$$R'_{2II} = R_{2II}\left(\frac{z_{1II}}{z_{2II}}\right)^2, \tag{57}$$

$$X'_{2II} = X_{2II}\left(\frac{z_{1II}}{z_{2II}}\right)^2. \tag{58}$$

Prąd wtórny stopnia II przekładnika przeniesiony na stronę pierwotną będzie równy

$$I'_{2II} = I_{2II}\frac{z_{2II}}{z_{1II}}. \tag{59}$$

Spadek napięcia na gałęzi magnesowania stopnia I bez uwzględnienia rozproszenia i pominięciu prądu magnesującego stopnia II I_{uII} wyniesie

$$\underline{U}^*_{\mu I} = I'_{2II}[(R_{2I}+R_p+R_{1II}+R'_{2II}+R'_{obc})+j(X_{2I}+X_{1II}+X'_{2II}+X'_{obc})]. \tag{60}$$

Wartość maksymalna indukcji magnetycznej w rdzeniu I stopnia przekładnika pochodzącej od strumienia magnetycznego użytecznego będzie równa

$$B'_{mI} = \frac{U^*_{\mu I}}{4{,}44 f z_{2I} A_{FeI}}. \tag{61}$$

Wartość maksymalna strumienia magnetycznego użytecznego będzie równa

$$\oint_{muI} = B'_{mI} A_{FeI}. \tag{62}$$

Wartość wypadkowego strumienia magnetycznego w rdzeniu I stopnia przekładnika wyniesie

$$\oint_{mI} = \oint_{mrI} + \oint_{muI}. \tag{63}$$

Wartość maksymalna indukcji magnetycznej w rdzeniu I stopnia przekładnika będzie równa

$$B_{mI} = \frac{\oint_{mI}}{A_{FeI}}. \tag{64}$$

Spadek napięcia na gałęzi magnesowania wyniesie

$$U_{\mu I} = 4{,}44 f z_{2I} \oint_{mI} \tag{65}$$

Kąt φ_I, jaki tworzy wskaz napięcia $\underline{U}_{\mu I}$ ze wskazem prądu I_{2I} będzie równy

$$\varphi_I = \operatorname{arctg}\frac{X_{wI}}{R_{wI}}, \tag{66}$$

gdzie:

$$R_{wI} = R_{2I}+R_p+R_{1II}+R'_{2II}+R'_{obc}, \tag{67}$$

$$X_{wI} = X_{2I}+X_{1II}+X'_{2II}+X'_{obc}. \tag{68}$$

Wartość składowych czynnej i biernej prądu magnesującego I stopnia przekładnika,

sprowadzonych na stronę wtórną tego stopnia będzie można obliczyć ze wzorów

$$I'_{\mu cI} = \frac{\Delta p_{FeI} m_{FeI}}{U_{\mu I}}, \tag{69}$$

$$I'_{\mu bI} = \frac{H_{mI} l_{FeI}}{\sqrt{2}\, z_{2I}}, \tag{70}$$

gdzie:

Δp_{FeI} — wartość stratności blachy rdzenia I stopnia przekładnika odczytana z charakterystyki $\Delta p_{FeI} = f(B_m)$ dla wartości indukcji magnetycznej B_{mI},

H_{mI} — wartość maksymalna natężenia pola magnetycznego odczytana z charakterystyki magnesowania $H_m = f(B_m)$ dla wartości indukcji magnetycznej B_{mI}.

Wartość prądu magnesującego stopnia I przekładnika, sprowadzonego na stronę wtórną tego stopnia będzie równa

$$I'_{\mu I} = \sqrt{I'^2_{\mu cI} + I'^2_{\mu bI}}. \tag{71}$$

Kąt między wskazem prądu $\underline{I}'_{\mu bI}$, a wskazem prądu $\underline{I}'_{\mu cI}$ wyniesie

$$\alpha_I = \operatorname{arc\,tg} \frac{I'_{\mu cI}}{I'_{\mu bI}}. \tag{72}$$

Błędy prądowy i kątowy I stopnia przekładnika można obliczyć ze wzoru

$$\Delta I_I = \frac{-I'_{\mu I}}{I'_{2II}} \sin(\alpha_I + \varphi_I) \cdot 100\% \tag{73}$$

$$\delta I_I = \frac{I'_{\mu I}}{I'_{2II}} \cos(\alpha_I + \varphi_I). \tag{74}$$

Błędy prądowe i kątowe oblicza się dla I stopnia przekładnika dla tych samych przypadków, co dla rdzenia pomiarowych II stopnia przekładnika.

4.3.3. Wyznaczenie charakterystyki błędu wskazowego I stopnia przekładnika

Zgodnie z [10] liczbę przetężeniową wskazową 10% określa się dla znamionowego obciążenia przekładnika i dla współczynnika obciążenia $\cos\psi_{obc} = 0{,}8$ *ind.* Wypadkowy strumień magnetyczny w rdzeniu I stopnia określa się z zależności

$$\oint_{mI} = \oint_{mIn} \cdot n, \tag{75}$$

gdzie:

$\oint_{mIn}$ — wartość maksymalna strumienia magnetycznego wypadkowego przy prądzie znamionowym,

n — krotność prądu znamionowego przy przetężeniu.

Wartość prądu pierwotnego I stopnia przekładnika sprowadzonego na stronę wtórną tego stopnia będzie równa

$$I'_{1I} = \sqrt{I'^2_{2II} + I'^2_{\mu I} + I'_{2II} I'_{\mu I} \sin(\alpha_I + \varphi_I)}. \tag{76}$$

Błąd wskazowy prądowy I stopnia przekładnika wyniesie

$$\Delta w_{\mathrm{I}} = \frac{I'_{\mu \mathrm{I}}}{I'_{1\mathrm{I}}} \cdot 100\%. \tag{77}$$

Na podstawie zależności (77) wyznaczyć można błąd wskazowy dla różnych wartości prądu $I'_{1\mathrm{I}}$ i wykreślić wykres $\Delta w_{\mathrm{I}} = f(I'_{1\mathrm{I}})$.

4.3.4. Wyznaczenie charakterystyki błędu prądowego I stopnia przekładnika

Zgodnie z [10] liczbę przetężeniową prądową 10% określa się dla znamionowego obciążenia przekładnika i dla współczynnika obciążenia $\cos\psi_{obc} = 0{,}8$ *ind.*
W obliczeniach wykorzystuje się zależności (64) ÷ (73). Na podstawie wzoru (73) wyznaczyć można błąd prądowy dla różnych wartości prądu $I'_{1\mathrm{I}}$ oraz wykreślić wykres $\Delta I_{\mathrm{I}} = f(I'_{1\mathrm{I}})$

4.4. OBLICZENIA CAŁEGO ZESPOŁU PRZEKŁADNIKA

Błąd prądowy całego zespołu przekładnika można obliczyć ze wzoru:

$$\Delta I = \Delta I_{\mathrm{I}} + \Delta I_{\mathrm{II}}, \tag{78}$$

zaś błąd kątowy

$$\delta I = \delta I_{\mathrm{I}} + \delta I_{\mathrm{II}}. \tag{79}$$

Na podstawie zależności

$$\Delta w = \Delta w_{\mathrm{I}} + \Delta w_{\mathrm{II}}, \tag{80}$$

sumuje się obie charakterystyki błędu wskazowego dla stopnia I i II przekładnika i przy wartości błędu wskazowego wynoszącego 10% odczytać można wartość prądu $I'^{*}_{1\mathrm{I}}$. Liczba przetężeniowa wskazowa całego zespołu przekładnika wynosi wówczas

$$n_{10w} = \frac{I'^{*}_{1\mathrm{I}}}{I'_{1\mathrm{I}n}}. \tag{81}$$

Na podstawie zależności (78) sumuje się obie charakterystyki błędu prądowego dla stopnia I i II przekładnika i przy wartości błędu prądowego 10% odczytać można wartość prądu $I'^{**}_{1\mathrm{I}}$. Liczba przetężeniowa prądowa całego zespołu przekładnika wynosi wówczas

$$n_{10i} = \frac{I'^{**}_{1\mathrm{I}}}{I'_{1\mathrm{I}n}}. \tag{82}$$

5. PROGRAM OBLICZEŃ NA MASZYNĘ CYFROWĄ

Program „PRZEKŁADNIK 2" został napisany w języku FORTRAN i przeznaczony jest do wykonywania obliczeń na maszynie cyfrowej ODRA 1305. Program jest typu wsadowego. Wprowadzony do pamięci maszyny zajmuje w niej 16896 komórek pamięci. Umożliwia on obliczenie parametrów przekładnika wielkoprądowego generatorowego dwustopniowego o jednym stopniu górnym i czterech rdzeniach dolnych, z których dwa są