

To every graph vertex v there corresponds its *degree* $d(v)$, which is the number of branches incident with that vertex. The number of branches leaving from vertex v is called the positive degree $d^+(v)$ of this vertex and the number of branches entering it is called its negative degree $d^-(v)$. Evidently, we have:

$$d(v) = d^+(v) + d^-(v).$$

A concept of graph theory important in electrical network theory is the concept of a "cutset". A *cutset* is defined as a set $\mathcal{B}$ of branches of a connected graph G having the following properties: firstly, G turns into an unconnected graph after removing the branches in $\mathcal{B}$, but without their initial and terminal vertices; secondly, after removing $\mathcal{B}$ the addition of any of its branches restores the connectedness of the graph G (cf. (6), p. 135).

A cutset divides V — the set of vertices of a graph G — into two subsets: V_1 and V_2 . A cutset is said to be oriented if the sets V_1 and V_2 are considered as an ordered pair either as (V_1, V_2) or as (V_2, V_1) .

To every graph there corresponds its matrix description, called an incidence matrix. In literature (cf. (1), p. 103, (2), p. 41, (10), p. 88, for example) three types of such matrices are distinguished: a vertex incidence matrix, a loop incidence matrix and a cutset incidence matrix. Essential to our purposes are the matrices of the first two types. A *vertex incidence matrix* of a graph G of the order n and the degree b is a matrix of the dimensions $n \times b$:

$$A_a = [a_{ij}],$$

where: $a_{ij} = 1$, if the branch j is incident outwardly with the vertex i ; $a_{ij} = -1$, if the branch j is incident inwardly with the vertex i ; $a_{ij} = 0$, if the branch j is not incident with the vertex i . It is easily seen that each row of the matrix A_a forms a linear combination of some other rows of within it. So, we may remove — without loss of information — any row in A_a . The removal of the row i is equivalent to the choice of the reference vertex of the graph. A matrix obtained from the vertex incidence matrix by the reduction of a row we call simply — cf. (1), p. 104 — a vertex matrix, and we denote it by A .

In the graph G we fix one of the two possible loop orientations. A *loop incidence matrix* of a graph G which contains p loops and is of degree d is a matrix of the dimensions $p \times b$:

$$B_a = [b_{ij}],$$

where: $b_{ij} = 1$, if the branch j is in the loop i and the orientations of the loop and the branch coincide, $b_{ij} = -1$, if the branch j is in the loop i and the orientations of the loop and the branch are opposite, $b_{ij} = 0$, if the branch j is not in the loop i . Similarly as A_a , matrix B_a consists of linear dependent rows. It has been shown (cf. (2), p. 44) that the rank of B_a as well as the number of its linear independent rows is equal to the nullity of the graph G . Without any loss of information with regard to the graph G , we can delete from B_a some of its rows, leaving just the m linear independent rows. Thus we obtain a *loop matrix* (cf. (1), p. 105) denoted by B .

Using the concepts of graph theory just introduced, we define the concept of an electric circuit. Since in what follows only time-invariant and linear circuits are to be considered, we give a definition covering just such circuits which in terms of graphs is a much easier formulation than giving a general definition.

Definition D2

A linear time-invariant electric circuit is a directed-graph $G = (V, B)$ in which there exists for the set B a function attaching a pair of functions of the complex variable s ($u(s), i(s)$) to each of the branches of G . The functions $u(s)$ and $i(s)$ called the Laplace transforms of branch voltage and branch current, respectively, should satisfy the following three postulates:

1. Kirchhoff's current law:

$$\mathbf{A}\mathbf{I}(s) = \mathbf{0}, \quad (5)$$

where $\mathbf{A}$ is the vertex matrix of G and the vector $\mathbf{I}(s)$ of the transforms of branch currents is of the form:

$$\mathbf{I}(s) = \begin{bmatrix} i_1(s) \\ i_2(s) \\ \dots \\ i_b(s) \end{bmatrix},$$

where $i_k(s)$ indicates the function associated with the branch of number k ($k = 1, 2, \dots, b$).

2. Kirchhoff's voltage law:

$$\mathbf{B}\mathbf{U}(s) = \mathbf{0}, \quad (6)$$

where $\mathbf{B}$ is the loop matrix of G and the vector $\mathbf{U}(s)$ of the transforms of branch voltages is of the form:

$$\mathbf{U}(s) = \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ \dots \\ u_b(s) \end{bmatrix},$$

where $u_k(s)$ indicates the function associated with the branch of number k ($k = 1, 2, \dots, b$).

3. Generalized Ohm's law:

$$u_k(s) = e_k(s) + [z_{k1}(s) \dots z_{kb}(s)]\mathbf{I}(s) \quad (7a)$$

or

$$i_k(s) = j_k(s) + [y_{k1}(s) \dots y_{kb}(s)]\mathbf{U}(s), \quad (7b)$$

where $k = 1, 2, \dots, b$. The pair of row vectors $[z_{k1}(s) \dots z_{kb}(s)]$ and $[y_{k1}(s) \dots y_{kb}(s)]$, the physical dimensions of whose elements are impedance and admittance, respectively, is associated with the branch k , and gives the electrical characteristic of that branch. The symbols $e_k(s)$ and $j_k(s)$ indicate the electric sources and initial conditions assumed for the branch k .

Thus, an electric circuit may be defined as an ordered triple $Q = (V, B, \varepsilon)$. In this triple ε is a function mapping the set B into the Cartesian product: $F_C \times F_C$ of the set F_C of all the complex-variable functions, i.e.

$$\varepsilon: B \rightarrow F_C \times F_C.$$

Since any pair (V, B) is a graph G , an electric circuit may be regarded also as an ordered pair $Q = (G, \varepsilon)$.

Some of the branches of an electric circuit may be coupled magnetically. We define such magnetic couplings as follows. We associate with every circuit Q a set of functions having the form $\mu = \mu(b_i, b_j)$, where b_i, b_j are the branches of Q . If $i = j$, then μ is simply the self-inductance of the branch b_i , i.e.

$$\mu(b_i, b_j) = L_i.$$

On the other hand, if $i \neq j$, then μ is the mutual-inductance of the branches b_i and b_j , i.e.

$$\mu(b_i, b_j) = M_{ij}.$$

If there is no magnetic coupling between two branches, then the function μ is equal to 0 for the branches in question:

$$\mu(b_i, b_j) = 0.$$

If the magnetically coupled inductances are in mediums of the same magnetic permeability, the magnetic coupling is a symmetric relation. I.e. the following equality holds (cf., e.g., (4), p. 134):

$$\mu(b_i, b_j) = \mu(b_j, b_i).$$

The existence of a magnetic coupling between the branches b_i and b_j is expressed mathematically in the third postulate equation from Definition D2. This is to say that $z_{ij}(s)$, the j -component in the equation (7a) for the branch b_i , contains the monomial $M_{ij} \cdot s$ as a component (or simply is equal to it). Symmetrically for $z_{ji}(s)$, the i -component in the equation (7a) for the branch b_j , contains the monomial $M_{ji} \cdot s$. Thus, in an electric circuit all of the magnetic couplings are determined by the generalized Ohm's law, which is involved in the characteristics of the pair $Q = (G, \varepsilon)$.

Definition D2 is more general than the definition given in Chen (2), p. 59, where the third postulate is expressed differently. The generalized Ohm's law in Chen has the form of two matrix equations:

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{E}(s) + \mathbf{Z}(s)\mathbf{I}(s) \quad (8a)$$

or

$$\mathbf{I}(s) = \mathbf{J}(s) + \mathbf{Y}(s)\mathbf{U}(s), \quad (8b)$$

where $\mathbf{Z}(s)$ and $\mathbf{Y}(s)$ are two matrices of order b and are called the *branch-impedance* and the *branch-admittance* matrices, respectively, and $\mathbf{E}(s)$ and $\mathbf{J}(s)$ are two b -vectors indicating the sources and the initial conditions; they are called the *branch voltage-source* and the *branch current-source* vectors, respectively. In Chen's definition it is assumed that all the sources in the circuit are always of one kind: either they are all voltage sources (then the condition (8a) holds) or they are all current sources (then the condition (8b) holds). Let us call such circuits *source homogeneous*, in contradistinction to *source heterogeneous* circuits containing sources of both kinds.

It is well known (cf. (1), p. 59, (4), p. 166, (8), p. 35) that every real voltage source (i.e. a source whose diagram consists of an ideal voltage source connected in series with its internal impedance) can easily be transformed into an equivalent real current source (i.e. a source whose diagram consists of an ideal current source connected parallelly with

its internal admittance), and conversely. For the ideal source, however, there is no such transformation (cf. (1), p. 60, (8), p. 36). In fact, there exists a procedure — known as the “Blakeslay transformation” (cf. (9), p. 96) — which converts a source homogeneous circuit into a source heterogeneous one. However, the equivalence of circuits due to this transformation is not strong enough for our purposes, preserving either the voltage pattern or the current pattern only, but not preserving the topology of the circuit.

In circuit theory one considers circuits containing ideal as well as real sources of both types, i.e. current and voltage sources. In engineering practice, too, to simplify computations, real sources are often approximated by ideal sources by omitting their internal impedances or admittances. Consequently, it is better not to confine the class of electric circuits to source homogeneous ones — the more so that we want to define N -ports with maximal generality.

It can be easily seen that for source homogeneous circuits the third postulate of Definition D2 becomes the third postulate of Chen's definition. For consider a circuit without current sources. Each branch of such circuit is described by equation (7a). Thus we obtain a set of b equations forming one matrix equation of the form (8a). Similarly, for a circuit without voltage sources from b equations (7b) we obtain one matrix equation (8b). Since for an ideal source there is only one of the two equations (7), it is impossible to write down generalized Ohm's law either in form (8a) or in form (8b). So the simplicity and elegance of Chen's third postulate is obtained at the price of confining the class of electric circuits to source homogeneous.

Let us now introduce the concept of a “sub-circuit” as an auxiliary one for defining N -ports.

Definition D3

A circuit $Q = (V, B, \varepsilon)$ is called a *sub-circuit* of a circuit $Q_0 = (V_0, B_0, \varepsilon_0)$ if and only if:

- 1) the graph $G = (V, B)$ is a partial subgraph of the graph $G_0 = (V_0, B_0)$, i.e. $G \subset G_0$;
- 2) the function ε is the restriction of the function ε_0 to the set B , i.e. $\varepsilon = \varepsilon_0|B$.

Let the formula: $Q \subset Q_0$ express the fact that Q is a sub-circuit of Q_0 . Then Definition D3 may be put equivalently as follows:

$$Q \subset Q_0 \Leftrightarrow G \subset G_0 \wedge \varepsilon = \varepsilon_0|B.$$

Moreover, let $\text{Comp}(G_0)$ be the set of all the components of the graph G_0 , and let $\text{Comp}(G_0 \setminus G)$ be the set of all the components of the complement of G in G_0 , i.e. the components of the difference $G_0 \setminus G$. (The set of the components of the empty graph is assumed here to be empty: $\text{Comp}(G_0) = \emptyset$).

The theoretical basis so constructed makes it possible to define the concept of a linear time-invariant N -port with full generality.

Definition D4

A circuit $Q = (V, B, \varepsilon)$ is an N -port in the circuit $Q_0 = (V_0, B_0, \varepsilon_0)$ if and only if the following four conditions are satisfied:

- 1) Q is a sub-circuit of Q_0 , i.e.

$$Q \subset Q_0;$$

2) The cardinality of the set $\text{Comp}(G_0 \setminus G) - \text{Comp}(G_0)$ is N , i.e.

$$\text{card}(\text{Comp}(G_0 \setminus G) - \text{Comp}(G_0)) = N;$$

3) The number of vertices belonging to both graphs G and $G_0 \setminus G$ is even, and it is equal to $2N$, i.e.

$$\text{card } V^+ = 2N,$$

where V^+ is the set of vertices of the trivial graph $(V^+, \emptyset) = G \cap (G_0 \setminus G)$;

4) Each component G_s belonging to the set $\text{Comp}(G_0 \setminus G) - \text{Comp}(G_0)$ has with the graph G exactly two vertices in common, i.e.

$$\forall G_s \in (\text{Comp}(G_0 \setminus G) - \text{Comp}(G_0)): G_s \cap G = (V_s^+, \emptyset),$$

where $V_s^+ \subset V^+$ and $\text{card } V_s^+ = 2$.

Vertices belonging to V^+ are called the *terminals* of the N -port in question.

The first of the conditions requires no comment, whereas the meaning of the three others needs some discussion. As an illustration let us use the circuit indicated schematically in Figure 2.

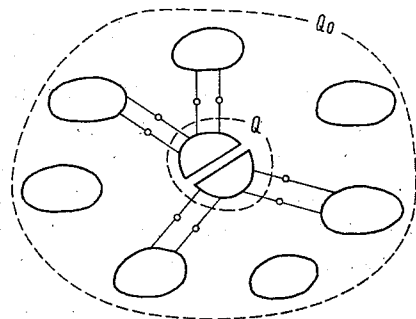


Fig. 2 An illustration for the discussion of the conditions of Definition D4.

The second condition means that removing the sub-circuit Q from its super-circuit Q_0 increases the number of components by $N-1$, provided the graph Q is a connected one, i.e. when $\text{Comp}(G) = \{G\}$. In general, however, Q may be unconnected. In that case removing it from Q_0 increases the number of components by $N-\alpha$, where α removing it from Q_0 increases the number of components by $N-\alpha$, where $\alpha = \text{card}(\text{Comp}(G))$. Observe that α being greater than N can not be excluded. For the circuit from Fig. 2 the following equations hold:

$$\text{card}(\text{Comp}(G_0)) = 4,$$

$$\text{card}(\text{Comp}(G_0 \setminus G)) = 7,$$

$$N = \text{card}(\text{Comp}(G_0 \setminus G) - \text{Comp}(G_0)) =$$

$$= \text{card}(\text{Comp}(G_0 \setminus G)) - \text{card}(\text{Comp}(G_0 \setminus G) \cap \text{Comp}(G_0)) =$$

$$= 7 - 2 = 5,$$

$$\alpha = \text{card}(\text{Comp}(G)) = 2.$$

Hence, we can see that the number of components has increased by $N-\alpha = 3$ (from 4 to 7).

From the condition (4) it follows that each circuit $Q_s = (G_s, \varepsilon_s)$ where ε_s is the restriction of the function ε_0 to the set B_s , is a two-terminal element. Conditions (3) and (4) together make it possible to partition the set of vertices V^+ into pairs by using the following construction. Let G_{s1}, G_{s2} be two components from the set $\text{Comp}(G_0 \setminus G) - \text{Comp}(G_0)$, and let V_{s1}, V_{s2} be all their vertices, respectively. If $G_{s1} \neq G_{s2}$, i.e. if they are different components, then obviously:

$$V_{s1} \cap V_{s2} = \emptyset.$$

This means that two different components G_{s1}, G_{s2} can not have any vertex $v \in V^+$ of the circuit Q in common (cf. Fig. 2). So, let us put:

$$\text{Comp}(G_0 \setminus G) - \text{Comp}(G_0) = \{G_{s1}, G_{s2}, \dots, G_{sN}\}.$$

Then the following partition π of the set of vertices V^+ into disjoint pairs (their number being N) is given:

$$V^+/\pi = \{V_{s1} \cap V^+, V_{s2} \cap V^+, \dots, V_{sN} \cap V^+\}.$$

If we mark each terminal by a numerical index, then the partition π may be written differently as follows:

$$V^+/\pi = \{(v_{2i-1}, v_{2i})\}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Let us denote the set of all circuits by Q , and the set of all N -ports by N . The formula: " Q is an N -port in Q_0 " may now be expressed equivalently as $(Q, Q_0) \in N$, where $N \subset Q^2$, of course. This makes clear that the property of "being an N -port" is not a feature of the circuit Q alone, but that it is a relation between this circuit and its super-circuit Q_0 . Observe further that Q is the same N -port not only in relation to the super-circuit given, but also in relation to a whole class of circuits:

$$N(Q) = \{Q_0 \in Q : (Q, Q_0) \in N\}.$$

Directly from our definition of an N -port we get as a corollary:

$$\forall Q \in Q : (Q, Q) \notin N,$$

i.e. no circuit is an N -port by itself. Indeed, since we have $G \setminus G = G_0$, the set $\text{Comp}(G_0 \setminus G) - \text{Comp}(G_0)$ is empty, and thus its cardinality is zero.

Obviously, under another partition of the set V^+ of terminals into pairs, the same circuit will also be an N -port, but with regard to another class of circuits.

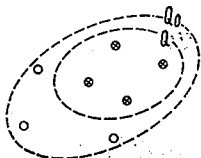


Fig. 3 A degenerate N -port consisting of vertices only.

Observe that our definition covers also some degenerate cases. Consider for example an N -port consisting of vertices only: (cf. Fig. 3). Let us check the conditions of Definition D4. Obviously, Q is a sub-circuit of Q_0 . The set $\text{Comp}(G_0)$ contains seven components, all being single vertices here. The set $\text{Comp}(G_0 \setminus G)$ consists of three vertices, i.e. of three

components. It will easily noticed that the set $\text{Comp}(G_0 \setminus G) - \text{Comp}(G_0)$ is empty. Hence, its cardinality is zero, i.e.

$$\text{card}(\text{Comp}(G_0 \setminus G) - \text{Comp}(G_0)) = N = 0.$$

The graphs G and $G_0 \setminus G$ have no vertices in common, thus

$$\text{card } V^+ = 2N = 0.$$

Since the set $\text{Comp}(G_0 \setminus G) - \text{Comp}(G_0)$ is empty, it is a triviality that each of its elements have with the graph G exactly two vertices in common. So, the pair (Q, Q_0) being considered satisfies the conditions of Definition D4. In view of the equality $N = 0$ such pair of circuits might be called a "0-port".

In the semi-formal definitions current in circuit theory literature we are given a vague structural condition combined with an explicit dynamical condition, called sometimes the condition of "regular connection". We will define now this condition in terms of our construction. A *regular connection* of a circuit Q in its super-circuit Q_0 should be interpreted as follows. For each pair of vertices (v_{2i-1}, v_{2i}) we consider two sub-sets of the set B of branches of the circuit Q : the set

$$B(v_{2i-1}) = \{b \in B: v_{2i-1} \in b\},$$

i.e. the set of branches of the circuit Q incident with the vertex v_{2i-1} ; and the set

$$B(v_{2i}) = \{b \in B: v_{2i} \in b\},$$

an analogous one. For the set $B(v_{2i-1})$ take the sum $\sum_{2i-1}$ of the branch currents in the following way: for each branch incident outwardly with the vertex v_{2i-1} take the function $i(s)$ with the positive sign, and for each branch incident inwardly with the vertex v_{2i-1} — take $i(s)$ with the negative sign. The sum $\sum_{2i}$ for the set $B(v_{2i})$ is obtained analogously. Then "regular connection" means that for each $i = 1, 2, \dots, N$ we have:

$$\sum_{2i-1} = -\sum_{2i}. \quad (9)$$

Our definition — in contradistinction to those semi-formal ones — contains an explicit structural specification only. Since, however, the class Q of the circuits considered has been characterized by the first Kirchhoff's law (cf. the first postulate of Definition D2), we have the following theorem:

Theorem T1

Regular connection in the sense of equality (9) follows from the structural conditions of Definition D4.

Indeed, the generalized form of the first Kirchhoff's law, entailed by its basic form, states that the algebraic sum of all currents flowing through the oriented cutset at any moment is zero (cf. (2), p. 61, (6), p. 141).

It can be easily noticed that the set of the branches of Q incident at v_{2i} forms a cutset. Adopting any of the two possible orientations we get an oriented cutset. By the generalized Kirchhoff's law and by the notation introduced above the following equation holds for any $i = 1, \dots, N$:

$$\sum_{2i-1} + \sum_{2i} = 0,$$

which is clearly equivalent to the condition of regular connection (9).

Thus, in any circuit satisfying the conditions of Definition D4 the regularity condition holds regardless of any magnetic connection between the branches b_i , b_j belonging either to different components $\{G_i\}$ and $\{G_j\}$ of the set $\text{Comp}(G_0 \setminus G) - \text{Comp}(G_0)$ or to the component $\{G_i\}$ of that set and of the graph G of the circuit Q . Consequently, the circuit Q may be an N -port even when the class of circuits $N(Q)$ contains circuits with arbitrary magnetical couplings of branches.

The regularity of connections is — by Theorem T1 — the necessary condition for the pair (Q, Q_0) to be an N -port. It is not, however, a sufficient one. In fact, there exist circuits containing a regularly connected sub-circuits, and yet being no N -ports under our definition. A trivial example of such a circuit is shown in Figure 4. It is obvious that in the circuit

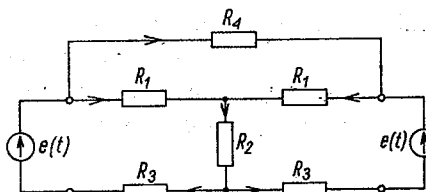


Fig. 4 A circuit containing a regularly connected sub-circuit, and yet being no N -port.

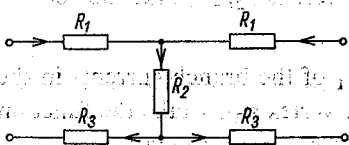


Fig. 5 The regularly connected sub-circuit Q of the circuit Q_0 from Fig. 4.

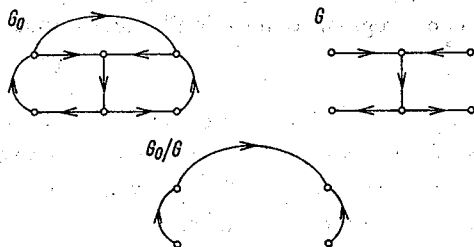


Fig. 6 Graphs G_0 and G of circuits Q_0 and Q .

Q_0 the sub-circuit Q of the scheme from Figure 5 is connected regularly. Graphs G_0 and G of circuits Q_0 and Q are presented in Figure 6. The cardinality of the set $\text{Comp}(G_0 \setminus G) - \text{Comp}(G_0)$ is 1, i.e.

$$\text{card}(\text{Comp}(G_0 \setminus G) - \text{Comp}(G_0)) = N = 1.$$

Four vertices belong simultaneously to the graphs G and $G_0 \setminus G$:

$$\text{card } V^+ = 2N = 4.$$

In this way we have got a contradiction. We get another by checking the fourth condition of Definition D4. Indeed, the only component $\{G_s\}$ has with the graph G four vertices in common instead of two. Thus the pair (Q, Q_0) is not — despite of regular connection — an N -port in our sense.

Not all of the regularly connected circuits — which are no N -ports — are trivial electrically. An example of such a circuit is shown in Figure 7. The circuit Q is formed by two inductors coupled magnetically (cf. Fig. 8).

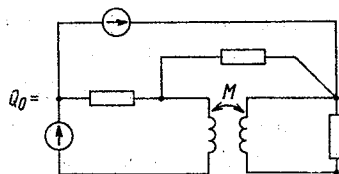


Fig. 7 Another regularly connected circuit which is no N -port.

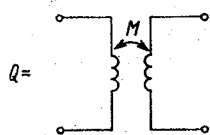


Fig. 8 The regularly connected sub-circuit Q of the circuit Q_0 from Fig. 7.

Checking the conditions of Definition D4 we can see — as before — that the pair (Q, Q_0) in Figures 7 and 8 is no N -port. Observe that the regularity of connections is here a consequence of the unconnectedness of the graph of the circuit Q . This unconnectedness follows from the presence of a transformer. This suggests a generalization: the regularity condition holds, provided any two pairs of designated vertices in the circuit Q belong to two disconnected subgraphs of the graph of Q . So, we have formulated a sufficient condition, but certainly not a necessary one (cf. the forgoing example) — for the circuit Q to be regularly connected in its super-circuit Q_0 without being an N -port in this super-circuit.

It might seem that there is an even more simple example of regularly connecting a sub-circuit, without making it an N -port (cf. Fig. 9). Evidently, the regularity condition holds

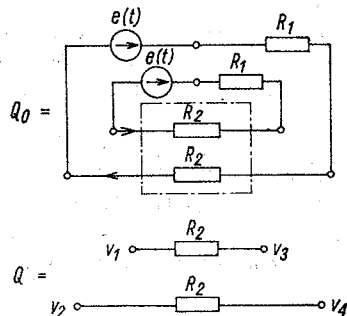
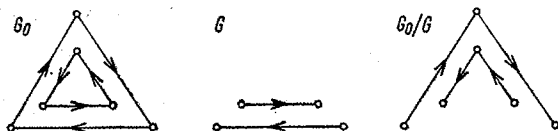


Fig. 9 A simple example of the regular connection.

Fig. 10 Graphs G_0 and G of circuits Q_0 and Q from Fig. 9 and its graph difference $G_0 \setminus G$.



for both pairs of terminals (v_1, v_2) and (v_3, v_4) . Graphs G_0 , G and $G_0 \setminus G$ are of the form as shown in Figure 10. The following equation is obtained by checking the third and the fourth conditions of the Definition D 4:

$$\text{card}(\text{Comp}(G_0 \setminus G) - \text{Comp}(G_0)) = N = 2$$

and

$$\text{card } V^+ = 2N = 4.$$

The set $\text{Comp}(G_0 \setminus G) - \text{Comp}(G_0)$ contains two components, each having with the graph G exactly two vertices in common: (v_1, v_3) and (v_2, v_4) . Hence, the pair (Q, Q_0) is a two-port in the sense of our definition. The ports, however, are here the pairs (v_1, v_3) , (v_2, v_4) and not (v_1, v_2) , (v_3, v_4) as we have assumed at the beginning. The example from Figure 9 is worthy of attention, since it shows a logical property of Definition D4. The designation of vertices as pairs of terminals of an N -port is not quite arbitrary and the regularity condition is not a sufficient criterion for such designation.

Finally let us mention that — to the best of our knowledge — the only work in circuit theory which states clearly that the property of “being an N -port” is a *relation* between two circuits, is that of Professor Cz. Rajski (cf. (8), p. 23). The relevant remarks there were the point of departure for constructing the concept of an N -port, as presented here.

REFERENCES

1. S. Bółkowski: *Elektrotechnika Teoretyczna*, tom 1: *Teoria obwodów elektrycznych*. Warszawa: WNT, 1982
2. W.K. Chen: *Applied Graph Theory*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1971
3. W.K. Chen: *Applied Graph Theory*. North-Holland Publishing Company, second edition, Amsterdam 1976
4. T. Cholewicki: *Elektrotechnika Teoretyczna*, tom 1, wyd. 3, Warszawa: WNT, 1973
5. N. Christofides: *Graph Theory: An Algorithmic Approach*. Academic Press, London 1975
6. L.O. Chua, P.M. Lin: *Komputerowa Analiza Układów Elektronicznych*. Warszawa: WNT, 1981
7. C.F. Picard: *Graphs and Questionnaires*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1980
8. Cz. Rajski: *Teoria Obwodów*, tom 1. Warszawa: WNT, 1971
9. S. Seshu, N. Balabanian: *Linear Network Theory*, John Wiley and Sons, Inc., New York 1959
10. S. Seshu, M.B. Reed: *Linear Graphs and Electrical Networks*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts 1961
11. L. Szamkołowicz: *Teoria Grafów Skończonych*. Ossolineum, Wrocław 1971
12. E. Wolniewicz-Warska: *Zastosowanie metod przekształceń równoważności do badania N-wrotników w przestrzeni stanów*. Ph. D. thesis, Politechnika Warszawska, 1984

E. WOLNIEWICZ-WARSKA

POJĘCIE N-WROTNIKA W ŚWIECIE TEORII GRAFÓW

Streszczenie

W pracy podano czysto strukturalną definicję pojęcia N -wrotnika jako pewnego obiektu matematycznego. Za podstawę do konstrukcji tej definicji obrano definicję obwodu elektrycznego w ujęciu teorii grafów. Niezbędne okazało się przy tym uogólnienie pojęcia różnicy grafów oraz grafowej definicji obwodu elektrycznego. Zdefiniowano też pojęcie „pod-obwodu”. Ponadto wykazano, że podana definicja N -wrotnika implikuje dynamiczny warunek regularności połączeń, nie będąc mu jednak równoważna.

E. WOLNIEWICZ-WARSKA

NOTION DE N -PORTE A LA LUMIERE DE LA THÉORIE DES GRAPHS

Résumé

Dans l'étude on a donné la définition purement structurale de la notion de N -porte en tant qu'un objet mathématique. Comme base de la construction de cette définition a servi la définition du circuit électrique utilisé dans la théorie des graphes. Il s'est avéré alors indispensable d'introduire une certaine généralisation de la notion de la différence des graphes et de celle de la définition de graphe du circuit électrique. On a défini aussi la notion du „*sous-circuit*”. En outre, on a montré, que la définition introduite de N -porte implique la condition dynamique de la *régularité des connexions*, sans en être tout de même équivalente.

E. WOLNIEWICZ-WARSKA

BEGRIFF DES N -TORES ALS GRAPHENDEFINITION

Zusammenfassung

Der Aufsatz enthält eine rein strukturelle Definition eines linearen stationären N -Tores als eines mathematischen Objektes. Als Ausgangspunkt für diesen Begriff wurde die Definition eines elektrischen Kreises in der Auffassung der Graphentheorie gewählt. Dabei zeigte sich als unentbehrlich, den Begriff der Graphendifferenz und die Graphendefinition eines elektrischen Kreises zu verallgemeinern. Auch eine exakte Definition eines *Sub-Stromkreises* wird gebracht. Darüber hinaus wird nachgewiesen, daß aus der hier konstruierten Definition eines N -Tores die übliche Bedingung einer „*regulären Verbindung*” hervorgeht, ihr aber nicht äquivalent sei.

Е. ВОЛЬНЕВИЧ-ВАРСКА

 N -ДВУХПОЛЮСНИК С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Резюме

Приведено чисто структурное определение понятия N -двухполюсника, как некоторого математического объекта. За основу конструкции этого определения принято определение электрического контура с точки зрения теории графов. При этом оказалось необходимым обобщение понятия различия графов и графового определения электрического контура. Определено также понятие „*под-контура*”. Кроме того доказано, что определение N -двухполюсника имплицитно динамическое условие *регулярности соединений* не будучи однако ему эквивалентным.

[illegible]

PROF. DR. GÖRÖG L. SZÉKELY, 1963-1964, 1965-1966, 1967-1968

O pewnym problemie sterowania optymalnego dla układów typu 2-D

BARBARA BIŁY (Jaworzno)

*Instytut Matematyki, Politechnika Śląska**Otrzymano 1986.01.05*

W artykule rozpatrzone problem sterowania optymalnego przy kwadratowym wskaźniku jakości liniowym stacjonarnym układem typu 2-D opisanym modelem Roessera. Podano również prosty przykład obliczeniowy ilustrujący przedstawioną metodę postępowania.

1. WPROWADZENIE I SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozważmy liniowy, stacjonarny układ typu 2-D, t. zw. model Roessera opisany układem równań różnicowych postaci (3), (2), (4):

$$x(i+1, j) = A_1 x(i, j) + A_2 y(i, j) + B_1 u(i, j) \quad (1.1)$$

$$y(i, j+1) = A_3 x(i, j) + A_4 y(i, j) + B_2 u(i, j)$$

gdzie

$$(i, j) \in Z^+ \times Z^+, \quad x(i, j) \in R^n, \quad y(i, j) \in R^m, \quad u(i, j) \in R^p,$$

A_i, B_i są macierzami rzeczywistymi odpowiedniej wymiarowości.

Dla uproszczenia zapisu wprowadźmy następujące wektory i macierze blokowe:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \in R^{(n+m) \times (n+m)}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \in R^{(n+m) \times p} \quad (1.2)$$

$$S(i, j) = \begin{bmatrix} x(i, j) \\ y(i, j) \end{bmatrix} \in R^{n+m} \text{ — lokalny wektor stanu.}$$

Zakładamy, że podane są warunki brzegowe, tzn.

$$\begin{aligned} x(0, j) &= x_j^0 \quad (j \in Z^+), \\ y(i, 0) &= y_i^0 \quad (i \in Z^+) \end{aligned} \quad (1.3)$$

oraz, że lokalny stan końcowy $S(r, s)$ jest zadany

$$S(r, s) = c_K, \quad (1.4)$$

gdzie $c_K \in R^{n+m}$ jest ustalonym wektorem.

z jest wektorem $[(n+m)(r+s+2) + (s+1)(r+1)p]$ — wymiarowym. Naszym zadaniem jest przedstawienie wektora stanu lokalnego $S(i, j) \in R^{n+m}$, jako liniowej funkcji wektora z , tzn.

$$S(i, j) = M(i, j)z$$

Zatem kolejno mamy:

$$\sum_{k=0}^j A^{i,j-k} x^*(0, k) = [A^{i,j}, A^{i,j-1}, \dots, A^{i,1}, A^{i,0}] \begin{bmatrix} x^*(0, 0) \\ x^*(0, 1) \\ \vdots \\ x^*(0, j-1) \\ x^*(0, j) \end{bmatrix}.$$

Sumę tę jako funkcję wektora postaci:

$$[x^{*T}(0, 0), x^{*T}(0, 1), \dots, x^{*T}(0, j), \dots, x^{*T}(0, s-1), x^{*T}(0, s)]^T$$

można przedstawić jako iloczyn:

$$[A^{i,j}, A^{i,j-1}, \dots, A^{i,1}, A^{i,0}, 0, \dots, 0] \begin{bmatrix} x^*(0, 0) \\ x^*(0, 1) \\ \vdots \\ x^*(0, j-1) \\ x^*(0, j) \\ x^*(0, j+1) \\ \vdots \\ x^*(0, s) \end{bmatrix} \stackrel{\text{ozn}}{=} A_j^{i,\cdot} x(0, \cdot) \quad (2.3)$$

Analogicznie otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^i A^{i-h,j} y^*(h, 0) &= [A^{i,j}, A^{i-1,j}, \dots, A^{1,j}, A^{0,j}] \begin{bmatrix} y^*(0, 0) \\ y^*(1, 0) \\ \vdots \\ y^*(i-1, 0) \\ y^*(i, 0) \end{bmatrix} = \\ &= [A^{i,j}, A^{i-1,j}, \dots, A^{1,j}, A^{0,j}, 0, \dots, 0] \begin{bmatrix} y^*(0, 0) \\ y^*(1, 0) \\ \vdots \\ y^*(i-1, 0) \\ y^*(i, 0) \\ y^*(i+1, 0) \\ \vdots \\ y^*(r, 0) \end{bmatrix} \stackrel{\text{ozn}}{=} A_i^{i,j} y(\cdot, 0) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Wprowadźmy kolejne oznaczenie:

$$G(i, j) = A^{i-1,j} B^{1,0} + A^{i,j-1} B^{0,1} \quad (2.5)$$

$G(i, j)$ jest macierzą $(n+m) \times p$ — wymiarową.

Korzystając z tego oznaczenia, rozpiszemy podwójną sumę we wzorze (1.5). Kolejno; dla $h = 0$, mamy

$$\begin{aligned}
& [A^{i-1,j}B^{1,0} + A^{i,j-1}B^{0,1}, A^{i-1,j-1}B^{1,0} + A^{i,j-2}B^{0,1}, \dots, A^{i-1,1}B^{1,0} + \\
& + A^{i,0}B^{0,1}, A^{i-1,0}B^{1,0} + A^{i,-1}B^{0,1}] \begin{bmatrix} u(0,0) \\ u(0,1) \\ \vdots \\ u(0,j-1) \\ u(0,j) \end{bmatrix} = \\
& = [G(i,j), G(i,j-1), \dots, G(i,1), G(i,0)] \begin{bmatrix} u(0,0) \\ u(0,1) \\ \vdots \\ u(0,j-1) \\ u(0,j) \end{bmatrix} = \\
& = [G(i,j), G(i,j-1), \dots, G(i,1), G(i,0), 0, \dots, 0] \begin{bmatrix} u(0,0) \\ u(0,1) \\ \vdots \\ u(0,j-1) \\ u(0,j) \\ u(0,j+1) \\ \vdots \\ u(0,s) \end{bmatrix}. \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Kolejny składnik dla $h = 1$ ma postać iloczynu

$$[G(i-1,j), G(i-1,j-1), \dots, G(i-1,1), G(i-1,0), 0, \dots, 0] \begin{bmatrix} u(1,0) \\ u(1,1) \\ \vdots \\ u(1,j-1) \\ u(1,j) \\ u(1,j+1) \\ \vdots \\ u(1,s) \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Postępujemy identycznie z następnymi składnikami rozważanej sumy aż do $h = i$ włącznie. Wówczas ostatni składnik jest postaci:

$$[G(0,j), G(0,j-1), \dots, G(0,1), G(0,0), 0, \overset{s-j}{\dots}, 0] \begin{bmatrix} u(i,0) \\ u(i,1) \\ \vdots \\ u(i,j-1) \\ u(i,j) \\ u(i,j+1) \\ \vdots \\ u(i,s) \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Dla zwartości zapisu wzorów (2.6)—(2.8) możemy przyjąć, że

$$G_j(k, \cdot) \stackrel{\text{df}}{=} [G(k,j), G(k,j-1), \dots, G(k,1), G(k,0), 0, \overset{s-j}{\dots}, 0],$$

dla $k = 0, 1, 2, \dots, r$ jest macierzą $[(n+m) \times (s+1)p]$ — wymiarową, oraz

$$u(k, \cdot) \stackrel{\text{df}}{=} \begin{bmatrix} u(k, 0) \\ u(k, 1) \\ \vdots \\ u(k, s-1) \\ u(k, s) \end{bmatrix} \in R^{(n+m)p}(k = 0, 1, \dots, r).$$

Wówczas możemy zapisać podwójną sumę we wzorze (1.5) w nieco innej, bardziej dogodnej dla naszych rozważań formie:

$$\begin{aligned} & \sum_{h=0}^i \sum_{k=0}^j G(i-h, j-k) u(h, k) = \\ &= G_j(i, \cdot) u(0, \cdot) + G_j(i-1, \cdot) u(1, \cdot) + \dots + G_j(0, \cdot) u(i, \cdot) = \\ &= [G_j(i, \cdot), G_j(i-1, \cdot), \dots, G_j(0, \cdot)] \begin{bmatrix} u(0, \cdot) \\ u(1, \cdot) \\ \vdots \\ u(i, \cdot) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Biorąc pod uwagę wzory (2.3) i (2.4) lokalny wektor stanu $S(i, j)$ można przedstawić w postaci:

$$S(i, j) = [A_i^{*j}, A_j^{*j}, G_j(i, \cdot), G_j(i-1, \cdot), \dots, G_j(0, \cdot)] \begin{bmatrix} y(\cdot, 0) \\ x(0, \cdot) \\ u(0, \cdot) \\ u(1, \cdot) \\ \vdots \\ u(i, \cdot) \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Ponieważ wektor z ma postać:

$$z = \begin{bmatrix} y(\cdot, 0) \\ x(0, \cdot) \\ u(0, \cdot) \\ u(1, \cdot) \\ \vdots \\ u(i, \cdot) \\ \vdots \\ u(r, \cdot) \end{bmatrix}, \text{ zatem poszukiwaną macierz } M(i, j) \text{ oraz iloczyn } M(i, j) \cdot z \text{ możemy zapisać następująco:}$$

$$M(i, j)z = [A_i^{*j}, A_j^{*j}, G_j(i, \cdot), G_j(i-1, \cdot), \dots, G_j(0, \cdot), \underbrace{0, \dots, 0}_{r-i}] \begin{bmatrix} y(\cdot, 0) \\ x(0, \cdot) \\ u(0, \cdot) \\ u(1, \cdot) \\ \vdots \\ u(i, \cdot) \\ u(i+1, \cdot) \\ \vdots \\ u(r, \cdot) \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

$M(i, j)$ jest macierzą o wymiarze $(n+m) \times [(n+m)(r+s+2) + (s+1)(r+1)p]$.

Jeżeli wprowadzimy do rozważań wektor kolumnowy S , złożony z wszystkich stanów lokalnych $S(i, j)$ w obszarze $D_{r,s}$, tzn.

$$S = \begin{bmatrix} S(0, \cdot) \\ S(1, \cdot) \\ \vdots \\ S(r, \cdot) \end{bmatrix} \in R^{(r+1)(s+1)(n+m)}, \text{ gdzie } S(k, \cdot) = \begin{bmatrix} S(k, 0) \\ S(k, 1) \\ \vdots \\ S(k, s) \end{bmatrix} \in R^{(s+1)(n+m)} \quad (2.12)$$

$$k = 0, 1, \dots, r$$

wówczas prawdziwe są następujące równości:

$$S(k, \cdot) = \begin{bmatrix} M(k, 0) \\ M(k, 1) \\ \vdots \\ M(k, s) \end{bmatrix} \cdot z = M(k, \cdot) z \quad (2.13)$$

oraz

$$S = \begin{bmatrix} M(0, \cdot) \\ M(1, \cdot) \\ \vdots \\ M(r, \cdot) \end{bmatrix} z = M \cdot z, \text{ gdzie } M \text{ jest macierzą o wymiarze}$$

$$[(r+1)(s+1)(n+m)] \times [(n+m)(r+s+2) + (s+1)(r+1)p]$$

Zatem uzyskaliśmy poszukiwane przedstawienie wektora stanów lokalnych S jako funkcji wektora z . Wykorzystamy to do transformacji wskaźnika $J_{r,s}$, zadanego wzorem (1.7). Skrócenie zapisu jest możliwe dzięki użyciu symbolu iloczynu skalarnego, mianowicie:

$$J_{r,s} = S^T Q S + U^T P U = \langle S, Q S \rangle + \langle U, P U \rangle \quad (2.15)$$

Wektor S zdefiniowany został uprzednio wzorem (2.12), natomiast wektor U rozumiemy analogicznie, tzn.

$$U = \begin{bmatrix} u(0, \cdot) \\ u(1, \cdot) \\ \vdots \\ u(r, \cdot) \end{bmatrix} \in R^{(s+1)(r+1)p} \quad (2.16)$$

Macierze Q i P są macierzami przekątniowymi postaci:

$$Q = \begin{bmatrix} Q(0, 0) & & 0 \\ Q(0, 1) & & \\ & \ddots & \\ & & Q(r, s-1) \\ 0 & & & Q(r, s) \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P(0, 0) & & 0 \\ P(0, 1) & & \\ & \ddots & \\ 0 & & P(r, s-1) \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Q ma wymiar $[(r+1)(s+1)(n+m)] \times [(r+1)(s+1)(n+m)]$

P ma wymiar $[(r+1)(s+1)p] \times [(r+1)(s+1)p]$

Ponieważ wektor z można przedstawić blokowo, jako:

$$z = \begin{bmatrix} y(\cdot, 0) \\ x(0, \cdot) \\ U \end{bmatrix}, \text{ zatem } U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(\cdot, 0) \\ x(0, \cdot) \\ U \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

gdzie I — macierz jednostkowa $(r+1)(s+1)p$,

a więc możemy zapisać

$$U^T P U = z^T P_0 z, \text{ gdzie } P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Podobnie przekształcamy drugi składnik (2.15).

$$S^T Q S = z^T M^T Q M z = z^T Q_0 z, \text{ gdzie } Q_0 = M^T Q M,$$

gdzie M jest macierzą zdefiniowaną w (2.14).

A więc udało się przedstawić $J_{r,s}$ jako funkcję jedynie wektora z :

$$J_{r,s} = z^T Q_0 z + z^T P_0 z = z^T [Q_0 + P_0] z = z^T Q_z z = \langle z, Q_z z \rangle \quad (2.20)$$

Q_z jest macierzą o wymiarze $[(n+m)(r+s+2) + (s+1)(r+1)p] \times [(n+m)(r+s+2) + (s+1)(r+1)p]$

symetryczną, dodatnio półokreśloną. Można teraz przeformułować ograniczenia stanu do postaci zależnej od wektora z .

Wartości brzegowe $x(0, j)$, $y(i, 0)$ na dwu ścianach prostokąta $D_{r,s}$ są zadane równościami (1,3), a więc równoważnie dane są wektory $x(0, \cdot)$, $y(\cdot, 0)$, zdefiniowane we wzorach (2.3) i (2.4). Możemy zatem napisać następujące równości:

$$\begin{bmatrix} y(\cdot, 0) \\ x(0, \cdot) \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(\cdot, 0) \\ x(0, \cdot) \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0(\cdot, 0) \\ x_0(0, \cdot) \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Podobnie dla ograniczeń stanu końcowego $S(r, s)$ mamy:

$$S(r, s) = M(r, s)z = [A_r^{r,s}, A_s^{r,s}, G_s(r, \cdot), G_s(r-1, \cdot), \dots, G_s(1, \cdot), G_s(0, \cdot)]z = c_K \quad (2.22)$$

Oznaczmy:

$$W(r, s) = [G_s(r, \cdot), G_s(r-1, \cdot), \dots, G_s(1, \cdot), G_s(0, \cdot)].$$

Zatem ograniczenia przybierają postać równania $Rz = c$, gdzie:

$$R = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ A_r^{r,s} & A_s^{r,s} & W(r, s) \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} y_0(\cdot, 0) \\ x_0(0, \cdot) \\ c_K \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Macierz R ma wymiar $[(n+m)(s+r+3)] \times [(n+m)(r+s+2) + (r+1)(s+1)p]$, a wektor c należy do przestrzeni $R^{(n+m)(s+r+3)}$. A więc nasze zadanie kwadratowego sterowania optymalnego zostało przekształcone do równoważnego, odpowiadającego mu zadania programowania kwadratowego.

3. WARUNKI ISTNIENIA ROZWIĄZANIA OPTYMALNEGO

Założenie 1.

$$(r+1)(s+1) \geq (n+m)$$

Założenie 2.

Układ dynamiczny opisany równaniem (1.1) jest lokalnie sterowalny w prostokącie $D_{r,s}$.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym lokalnej sterowalności układu (1.1) w prostokącie $D_{r,s}$ jest, aby: [2], [3]; rząd $W(r,s) = \text{rząd} [G(r,s), G(r,s-1), \dots, G(r,1), G(r,0), \dots, G(r-1,s), \dots, G(1,s), \dots, G(1,0), G(0,s), G(0,s-1), \dots, G(0,0)] = n+m$ (3.1)

Założenie lokalnej sterowalności układu (1.1) w języku programowania kwadratowego oznacza, że istnieje co najmniej jedno rozwiązanie dopuszczalne tego zadania (tzn. istnieje wektor z spełniający warunek $Rz = c$), a wówczas dla kwadratowego zadania sterowania (2.20) istnieje również rozwiązanie optymalne [1].

Wyznaczenie tego rozwiązania staje się łatwiejsze, gdy istnieje jednoznaczne rozwiązanie optymalne.

Poniższe twierdzenia podają warunki dostateczne jednoznaczności rozwiązania optymalnego przy założeniu istnienia rozwiązania dopuszczalnego [1].

Twierdzenie 1.

Jeżeli $\text{Ker}(Q_z) \cap \text{Ker}(R) = \{0\}$, to istnieje jednoznaczne rozwiązanie optymalne.

Twierdzenie 2.

Przy założeniu, że rząd $R = (n+m)(s+r+3)$, poniższe warunki są równoważne:

$$\text{Ker}(Q_z) \cap \text{Ker}(R) = \{0\} \Leftrightarrow D = \begin{bmatrix} -Q_z & R^T \\ R & 0 \end{bmatrix} \text{ jest nieosobliwa.} \quad (3.2)$$

Dowody tych twierdzeń można znaleźć w [1].

Warunek tw. (1) mówiący, że podprzestrzenie zerowe operatorów Q_z i R mają tylko zero jako element wspólny, jest stosunkowo łatwy do sprawdzenia w praktyce, ponieważ jest on równoważny warunkowi, że

$$\text{rząd} \begin{bmatrix} Q_z \\ R \end{bmatrix} = (n+m)(r+s+2) + (s+1)(r+1)p$$

Należy jednak podkreślić, że warunek Tw. (1) jest tylko warunkiem dostatecznym istnienia rozwiązania optymalnego i to jednoznacznego, nie zaś koniecznym. Podany niżej warunek jest warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia rozwiązania optymalnego (niekoniecznie jednoznacznego) dla zadania programowania kwadratowego (1).

Twierdzenie 3.

Niech $\hat{z}$ będzie rozwiązaniem dopuszczalnym zadania (1). Wówczas $\hat{z}$ jest rozwiązaniem optymalnym zadania (1), gdy istnieje wektor $\Psi \in R^{(n+m)(r+s+3)}$, taki, że spełnione jest równanie macierzowe postaci

$$\begin{bmatrix} -Q_z & R^T \\ R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z} \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Rozwiązanie tego równania $(\hat{z}, \Psi)$ daje żądane rozwiązanie optymalne $\hat{z}$, natomiast Ψ jest odpowiednikiem wektora mnożników.

W naszym przypadku macierz R zdefiniowana wzorem (2.23) ma maksymalny rząd, równy $(n+m)(s+r+3)$. Wynika to z przyjętych założeń (1) i (2). Zatem zgodnie z twierdzeniem (3), jednoznaczność rozwiązania optymalnego jest równoważna nieosobliwości macierzy kwadratowej D . Jeżeli więc warunki jednoznaczności są spełnione, można rozwiązać równanie (3.3) odwracając macierz D występującą po lewej stronie równości (3.3). Należy zauważyć, że równanie (3.3) może być rozwiązane ze względu na z nawet wówczas, gdy macierz D jest osobliwa. Wobec faktu, że równanie to wyraża warunki konieczne i dostateczne optymalności, istnienie rozwiązania optymalnego naszego zagadnienia pociąga za sobą istnienie co najmniej jednego rozwiązania równania (3.3). Ponadto, każde rozwiązanie równania (3.3) jest rozwiązaniem optymalnym.

U w a g i

Wymiar macierzy (3.3) jest duży, ale można go znacznie obniżyć, wykorzystując strukturę zadania. Mianowicie, równanie (3.3) można zapisać inaczej

$$\begin{cases} R^T \Psi - Q_z \hat{z} = 0 \\ R \hat{z} = 0. \end{cases} \quad (3.4a) \quad (3.4b)$$

Warunek (3.4b) jest macierzowym zapisem zadanych warunków brzegowych $y^0(\cdot, 0)$, $x^0(0, \cdot)$, oraz warunku

$$W(r, s)U = c_K - A_r^{T \cdot s} y_0(\cdot, 0) - A_s^{T \cdot r} x_0(0, \cdot) \quad (3.5)$$

Rozpisując pomocniczo wektor Ψ oraz dzieląc macierz Q_z na odpowiednie bloki, równanie (3.4a) zapiszemy w postaci

$$\begin{bmatrix} I & 0 & A_r^{T \cdot s} \\ 0 & I & A_s^{T \cdot r} \\ 0 & 0 & W^T(r, s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ Q_4 & Q_5 & Q_6 \\ Q_7 & Q_8 & Q_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{x} \\ \hat{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Ponieważ $\hat{y} = y^0(\cdot, 0)$, $\hat{x} = x^0(0, \cdot)$, zatem warunki (3.5) i (3.6) możemy zapisać wspólnie jako konieczny do rozwiązania układu równań.

$$\begin{aligned} \Psi_1 + A_r^{T \cdot s} \Psi_3 - Q_3 \hat{U} &= Q_1 \hat{y} + Q_2 \hat{x} \\ \Psi_2 + A_s^{T \cdot r} \Psi_3 - Q_6 \hat{U} &= Q_4 \hat{y} + Q_5 \hat{x} \\ W^T(r, s) \Psi_3 - Q_9 \hat{U} &= Q_7 \hat{y} + Q_8 \hat{x} \\ W(r, s) \hat{U} &= c_K - A_r^{T \cdot s} \hat{y} - A_s^{T \cdot r} \hat{x} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Pomimo tego, że nadal Ψ_i oraz $\hat{U}$ są wektorami, powyższe podejście stanowi jednak pewne zmniejszenie wymiarowości w stosunku do równania (3.3).

Wydaje się, że wadą prezentowanego tutaj podejścia jest duży wymiar macierzy, jaki może wystąpić nawet dla stosunkowo prostych zadań. Niemniej macierze te zawierają dużo zer, a ciągle opracowywane metody postępowania numerycznego z tego typu macierzami rzadkimi mogą zrekompensować tę wadę.

4. Przykład

Rozważmy układ typu 2-D opisany modelem Roessera, o macierzach:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad n = m = p = 1$$

$$(r, s) = (1, 1),$$

$$c_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P(i, j) = 1, \quad (P(1, 1) = 0)$$

Warunki brzegowe są dane równościami:

$$x(0, 0) = x(0, 1) = y(0, 0) = y(1, 0) = 0$$

Zatem zgodnie ze wzorem (2.2), (2.14), (2.20) wektor z , oraz macierze M i Q_z są postaci następującej:

$$z^T = [y(0, 0), y(1, 0), x(0, 0), x(0, 1), u(0, 0), u(0, 1), u(1, 0), u(1, 1)]$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_z = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ Q_4 & Q_5 & Q_6 \\ Q_7 & Q_8 & Q_9 \end{bmatrix}$$

gdzie

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_5 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_7 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_8 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_9 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 0 \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{tzn } A_1^{T1,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_1^{T1,\cdot} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad W^T(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wprowadzając wektory:

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \Psi_2 = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix}, \quad \Psi_3 = \begin{bmatrix} x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix}$$

równanie (3.7), dzięki któremu wyznaczamy optymalny wektor sterowań U ma postać układu równań liniowych:

$$\begin{aligned} x_1 - x_{11} &= 0 \\ x_2 + x_9 - 3x_{11} - x_{12} - x_{13} &= 0 \\ x_3 - x_{11} &= 0 \\ x_4 + x_{10} - 2x_{11} - x_{12} - x_{13} &= 0 \\ x_5 - x_{11} &= 0 \\ x_6 + x_9 - x_{11} - x_{12} - x_{13} &= 0 \\ x_7 + x_9 - 2x_{11} - x_{12} - x_{13} &= 0 \\ x_8 + x_9 - 2x_{11} - x_{12} - x_{13} &= 0 \\ x_9 - 4x_{11} - x_{12} - x_{13} &= 0 \\ x_9 - x_{11} - 2x_{12} - x_{13} &= 0 \\ x_{10} - x_{11} - x_{12} - 2x_{13} &= 0 \\ x_{11} + x_{12} &= 1 \\ x_{13} &= 1 \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\Psi_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \Psi_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \Psi_3 = \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \hat{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 3 \\ \frac{4}{4} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}(0,0) \\ \hat{u}(0,1) \\ \hat{u}(1,0) \end{bmatrix}$$

Wektory stanu lokalnego odpowiadające sterowaniu optymalnemu $\hat{U}$ wyznaczamy z równania (1.5)

$$\hat{S}(0, 0) = 0$$

$$\hat{S}(0, 1) = A^{0,0}B^{0,1}u(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\hat{S}(1, 0) = A^{0,0}B^{1,0}u(0, 0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{S}(1, 1) = (A^{0,1}B^{1,0} + A^{1,0}B^{0,1})u(0, 0) + A^{0,0}B^{1,0}u(0, 1) + A^{0,0}B^{0,1}u(1, 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wartość optymalna $J_{1,1}^*$

$$J_{1,1}^* = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 = 5\frac{3}{4}$$

Powyższy przykład obliczeniowy ilustruje metodę postępowania przy wyznaczaniu sterowania optymalnego na podstawie sformułowanych w artykule twierdzeń.

LITERATURA

1. M. Camnon, C. Cullum, E. Polak: *Sterowanie optymalne i programowanie matematyczne*. Warszawa: WNT, 1975
2. T. Kaczorek: *Two-Dimensional Linear Systems*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 68, Springer — Verlag, Berlin, 1985
3. J. Klamka: *Sterowalność układów typu 2-D*. Zesz. Nauk. Pol. Śl., 1984 nr 63
4. R. Roesser: *A discrete state space model for linear image processing*. IEE Transactions on Automatic Control, 1975 vol. AC-20, nr 1

B. BIŁY

ON SOME PROBLEMS OF OPTIMAL CONTROL FOR A 2-D SYSTEM

Summary

The paper deals with the problem concerning the control of a two-dimensional, linear, discrete, stationary system (so-called 2-D system). In recent years a great attention has been paid to the latter systems, among others, to the well known and, considered in my paper, the Roesser's model. The main purpose of this work is to solve the optimal control problem for the Roesser's system, at a given quadratic performance index and established final state. Final results and theorems are supported by mathematical programming methods.

B. BILY

PROBLÈME DE COMMANDE OPTIMALE POUR LES SYSTÈMES DU TYPE 2-D

Résumé

Dans l'article on présente le problème de commande concernant les systèmes linéaires, discrets, stationnaires bidimensionnels (dits systèmes 2-D). Dernièrement on attache beaucoup d'importance à ces systèmes et surtout au système de Roesser. Ce système est très en vogue et je le prends en considération dans mon travail. Le but principal que je me pose est de résoudre le problème de commande optimale pour les systèmes du type Roesser à un indice de qualité carré donné et à l'état final déterminé. Les résultats et les théorèmes définitifs sont reportés de la méthode de programmation mathématique.

B. BILY

ÜBER EINIGE PROBLEME DER OPTIMALSTEUERUNG FÜR DAS 2-D-SYSTEM

Zusammenfassung

Im Artikel wird ein Problem der Optimalsteuerung dargestellt. Das Problem betrifft ein zweidimensionales, lineares, stationäres, diskretes System, das sogenannte 2-D-System. In den letzten Jahren wird die Aufmerksamkeit auf derartige Systeme gelenkt, darunter auf das populäre und in meinem Aufsatzti-erwogene Roesser-System. Der Hauptvorschlag besteht in der Lösung folgender Aufgabe: die Optimalsteuerung für das Roesser-System mit gegebener Quadratgütezahl und dem stationären Endzustand zu bestimmen. Endergebnisse und Theorem sind der Methode für Mathematik-programmierung entnommen.

Б. БИЛЫ

О НЕКОТОРОЙ ПРОБЛЕМЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ТИПА 2-Д

Резюме

Рассматривается некоторая проблема оптимального управления для двухмерной, линейной стационарной системы (называемой 2-д системой). В последние годы большое внимание уделяется этим системам, а в частности очень популярной системе типа Рессера. Главным предложением труда является решение задачи оптимального управления системы Рессера для зафиксированного квадратного качественного показателя и конечного состояния. Окончательные результаты получаются аналогичными как в методе математического программирования.

10

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

11

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

12

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

13

CONFIDENTIAL

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

CONFIDENTIAL - SECURITY INFORMATION

On modelling of distributed parameters processes with two-dimensional discrete linear equations

WIESŁAW MARSZAŁEK (Opole)

Wyższa Szkoła Inżynierska w Opolu

Otrzymano 1986.03.12

This paper deals with modelling of distributed parameters processes with so-called Roesser's two-dimensional discrete linear models with constant coefficients. We've considered the partial differential equations which describe the dynamics of cross- and counter-flow heat exchangers as well as of long transmission lines. The method is based on finite difference technique and useful properties of the Roesser's models. An illustrative example is given.

1. INTRODUCTION

During recent years a great work has been done to generalize the known results of one-dimensional (1D) discrete systems to two- (2D) and multi-dimensional (mD) systems. Many authors (Roesser [1], Fornasini and Marchesini [2, 3], Eising [4, 5], Kung et. al. [6], Kaczorek [7, 8], Paraskevopoulos [10], Tzafestas and Pimenides [11], Stavroulakis and Paraskevopoulos [12]) have studied fundamental properties of the 2D systems such as: controllability, observability, realization, stability, pole assignment, minimality, dead-beat control, separability, etc. The methods of analysis and synthesis of the 2D systems are based mainly on state-space equations and polynomial techniques.

The 2D discrete linear models with constant coefficients were first introduced to analyse the 2D digital filtering, digital picture processing, computer memory design, X-ray enhancement and others. These fields are discrete in their nature and two independent variables (for 2D systems) are of the same kind. The different situations appear when we wish to apply such models to study continuous distributed parameters processes via the finite difference techniques.

Some natural questions appeared few years ago: what kind of partial differential equations (PDEs) can be analysed with the 2D discrete models?, are there any advantages in applications of those models to the analysis of continuous systems?, etc.

As far as the author is aware the answers for such questions are not complete yet, though some examples given by Marszałek [13, 14] have brought many valuable results. The 2D discrete linear models were applied successfully to analyse the thermal processes,

dynamics of long transmission lines (the wave equation), gas absorption problems, water stream heating [13], the Poisson equation [14] and bilinear continuous systems [15].

In this paper we shall present further studies of modelling of continuous systems with the 2D Roesser's discrete models with constant coefficients. First we start with some preliminaries.

2. 2D ROESSER'S MODEL WITH CONSTANT COEFFICIENTS

Consider the following 2D state-space discrete model

$$x' = Ax + Bu \quad (1)$$

where

$$x \triangleq \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}, \quad x' \triangleq \begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$x^h(i, j)$ and $x^v(i, j)$ are horizontal and vertical vectors of n_1 and n_2 components, respectively ($i, j = 0, 1, 2, \dots$), A_r ($r = 1, 2, 3, 4$) and B_q ($q = 1, 2$) are constant matrices of appropriate dimensions and $u \triangleq u(i, j)$ is a 2D input vector of p components.

An output equation of 2D Roesser's model is assumed to take the form

$$y = Cx + Du \quad (2)$$

where

$y = y(i, j)$ is an output vector of s components,

$C = [C_1 \ C_2]$ and D are $s \times (n_1 + n_2)$ and $s \times p$ constant matrices, respectively.

Additionally, we assume that the boundary/initial conditions $x^h(0, j)$ and $x^v(i, 0)$, $i, j = 0, 1, 2, \dots$ are also known.

The 2D discrete model (1), (2) is a generalization of the 1D discrete model of the form

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (3a)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (3b)$$

where $x(k) \in R^n$, A, B, C, D are constant matrices and the condition $x(0) = x_0$ is known.

It is well-known that the solution of the equation (3a) is given by

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{\alpha=0}^{k-1} A^{k-\alpha-1} Bu(\alpha) \quad (4)$$

and the transfer function of the model (3a, b) takes the following form

$$G(z) \triangleq \frac{Z(y(k))}{Z(u(k))} = D + C(zI_n - A)^{-1}B \quad (5)$$

where $Z(\cdot)$ denotes the discrete Z-transform.

Similar formulae exist for 2D discrete model (1), (2). The solution of equation (1) with given $x^h(0, j)$ and $x^v(i, 0)$, $i, j = 0, 1, 2, \dots$, is given by [1]

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} &= \sum_{\alpha=0}^j A^{i,j-\alpha} \begin{bmatrix} x^h(0, \alpha) \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{\beta=0}^i A^{i-\beta,j} \begin{bmatrix} 0 \\ x^v(\beta, 0) \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{\alpha=0}^{i-1} \sum_{\beta=0}^j A^{i-\alpha-1,j-\beta} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(\alpha, \beta) + \sum_{\alpha=0}^i \sum_{\beta=0}^{j-1} A^{i-\alpha,j-\beta-1} \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u(\alpha, \beta), \end{aligned} \quad (6)$$

where the transition matrix $A^{i,j}$ for a system's matrix

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \quad (7)$$

is given by the relations

$$\begin{aligned} A^{i,j} &= A^{1,0} A^{i-1,j} + A^{0,1} A^{i,j-1} \\ A^{1,0} &= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \\ A^{0,0} &= I \\ A^{-i,j} &= A^{i,-j} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

The 2D transfer function of the model (1), (2) is given as

$$G(z_1, z_2) = D + C \left[\begin{bmatrix} z_1 I_{n_1} & 0 \\ 0 & z_2 I_{n_2} \end{bmatrix} - A \right]^{-1} B = D(z_2) + C(z_2) [z_1 I_{n_1} - A(z_2)]^{-1} B(z_2), \quad (9)$$

where

$$\begin{aligned} A(z_2) &= A_1 + A_2(z_2 I_{n_2} - A_4)^{-1} A_3 \\ B(z_2) &= B_1 + A_2(z_2 I_{n_2} - A_4)^{-1} B_2 \\ C(z_2) &= C_1 + C_2(z_2 I_{n_2} - A_4)^{-1} A_3 \\ D(z_2) &= D + C_2(z_2 I_{n_2} - A_4)^{-1} B_3. \end{aligned} \quad (10)$$

The fundamental properties of the 2D discrete systems of the form (1), (2) were studied in details in many papers. The comprehensive summary of the methods is given in the recent book by Kaczorek [8]. It is worth to point out here that many theorems of 1D systems' theory can be generalized for 2D case. One, for instance, can compare the 1D Kalman's and Hautus' theorems for controllability and observability and the respective 2D theorems for local and modal controllability and observability [4—6]. The similar equivalence exists also for problems of minimum energy control [15], dead-beat control [8], observer theory [8] and others.

It must be however said that the generalization of 1D results into 2D ones is not always straightforward and obvious. For example, the problem of proper definition and determination of 2D eigenvalues for Roesser's models has not been solved up to now. Some difficulties appear also for the analysis of 2D stability [16].

Although the original Roesser's model was given for two independent discrete variables i and j only (see (1), (2)), some very recent papers have generalized the considerations for any m -dimensional model ($m > 2$). Thus the general transition matrix $A^{i_1, i_2, \dots, i_m}$ can be defined in a manner similar to that given by equations (8), i.e.

$$\begin{aligned}
 A^{i_1, i_2, \dots, i_m} &= A^{1, 0, \dots, 0} A^{i_1-1, i_2, \dots, i_m} \\
 &+ A^{0, 1, \dots, 0} A^{i_1, i_2-1, \dots, i_m} \\
 &+ \dots \\
 &+ A^{0, 0, \dots, 1} A^{i_1, i_2, \dots, i_m-1}
 \end{aligned}$$

$$A^{0, \dots, 1_j, \dots, 0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{j1} & A_{j2} & \dots & A_{jm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{0, 0, \dots, 0} = I$$

$$A^{i_1, i_2, \dots, i_m} = 0 \text{ if } i_1 < 0 \text{ or } i_2 < 0 \text{ or } \dots i_m < 0.$$

In the above 1_j denotes number 1 at j position ($j = 1, 2, \dots, m$).

An interesting method of determination of the solution of equation (1) for separable Roesser's model is given in [7] where the extended Sylvester theorem is applied.

3. MODELLING OF DISTRIBUTED PROCESSES WITH ROESSER'S MODEL

The first order hyperbolic system of partial differential equations is often used in the analysis of distributed parameters processes. The continuous equations of such systems can be transformed into discrete equations by applying the finite difference techniques. Some important sets of first order differential equations were successfully transformed into 2D discrete Roesser's models in [13] and the approach was illustrated by numerical examples.

Now we shall present other sets of first order differential equations which can be transformed by various approximations into model (1). The mathematical description of each example is rather short, so the reader interested in more details of the processes and continuous equations is referred to the appropriate references cited in each subsection.

3.1. THE CROSS-FLOW HEAT EXCHANGER

Interesting sets of first order PDEs were obtained years ago to describe the behaviour of heat exchangers. Perhaps the most popular differential model of the heat exchanger shown in Fig. 1a is due to Nusselt [17]. This model with spatial coordinates x and y takes the form

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T_1}{\partial x} &= -aT_1 + aT_2, \\
 \frac{\partial T_2}{\partial y} &= bT_1 - bT_2,
 \end{aligned} \tag{11}$$

where a and b are real constants, $T_1(x, y)$ and $T_2(x, y)$ are the temperatures and the boundary conditions are as follows

$$\begin{aligned}
 T_1(x = 0, y) &= 1 \\
 T_2(x, y = 0) &= 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

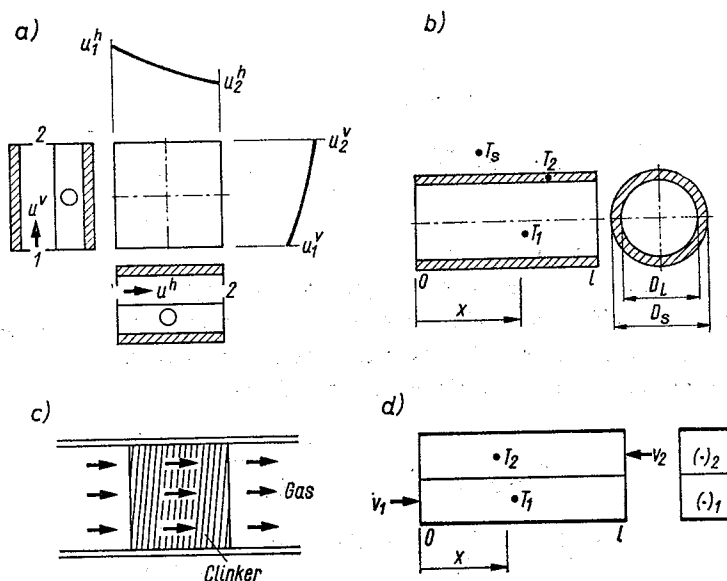


Fig. 1 The simplified schemes of the heat exchangers

3.2. THE CYLINDRIC HEAT EXCHANGER

The set of two first order differential equations of a slightly different form was given recently by Biltanti et. al. [18] who solved the problem of identification and digital control of heat exchanger shown in Fig. 1b. The respective differential equations for such system are

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial T_1}{\partial t} + \alpha v \frac{\partial T_1}{\partial x} &= T_2 - T_1 \\ \beta \frac{\partial T_2}{\partial t} &= \gamma T_1 - (\gamma + 1) T_2 \end{aligned} \quad (13)$$

with

$$\alpha = \frac{\mu_1 c_1}{k_1 \pi D_1}, \quad \beta = \frac{\mu_2 c_2}{k_s \pi D_s}, \quad \gamma = \frac{k_l D_l}{k_s D_s},$$

where

c_1, c_2 — specific heats of liquid and metal, respectively,
 k_l, k_s — coefficients of heat transfer liquid/metal and stream/metal, respectively,
 D_l, D_s — the internal and external diameters, respectively (see Fig. 1b),
 $T_s(t)$ is the stream temperature.

The boundary and initial conditions for system (13) are the same as in the next example (§ 3.3) and will be given later.

3.3. THE PACKED BED

The set of first order differential equations of the form (13) was considered also by Łach and Pieczka [19] who studied the dynamics of the packed bed shown in Fig. 1c.

We have here

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_1}{\partial t} &= \frac{\alpha_v}{\varepsilon_1 \varrho_1 c_{p_1}} (T_2 - T_1) \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} + v \frac{\partial T_2}{\partial x} &= \frac{\alpha_v}{\varepsilon_2 \varrho_2 c_{p_2}} (T_1 - T_2)\end{aligned}\quad (14)$$

where

α_v is the heat transfer coefficient,

ϱ_1, ϱ_2 are the densities of clinker and gas, respectively,

c_{p_1}, c_{p_2} are the specific heats of clinker and gas, respectively, v is the gas velocity

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ are the filling factors of clinker and gas, respectively.

The boundary and initial conditions take the form

$$\begin{aligned}T_1 \left(\frac{\alpha_v}{\mu v \varepsilon_1 \varrho_1 c_{p_1}} x, \frac{\alpha_v}{v \varepsilon_1 \varrho_1 c_{p_1}} x \right) &= 0 \\ T_2 \left(0, \frac{\alpha_v}{\varepsilon_1 \varrho_1 c_{p_1}} t \right) &= f(t) \quad \mu = \frac{\varepsilon_2 \varrho_2 c_{p_2}}{\varepsilon_1 \varrho_1 c_{p_1}}\end{aligned}\quad (15)$$

The first condition shows that the temperature T_1 is given zero for the space-time points which lay on the front of the moving gas. For $t = 0$ the front of the gas is at $x = 0$.

It is easy to prove that the sets of example 3.2 and 3.3 can be simplified by introducing of the suitable transformation. For instance, for the continuous model (14) we may choose

$$\zeta = \frac{\alpha_v}{\mu v \varepsilon_1 \varrho_1 c_{p_1}} x \quad (16)$$

$$\eta = \frac{\alpha_v}{\varepsilon_1 \varrho_1 c_{p_1}} t - \frac{\alpha_v}{v \varepsilon_1 \varrho_1 c_{p_1}} x$$

and obtain

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_1}{\partial \eta} &= T_2 - T_1 \\ \frac{\partial T_2}{\partial \zeta} &= T_1 - T_2\end{aligned}\quad (17)$$

with the conditions: $T_1(\zeta, 0) = 0$, $T_2(0, \eta) = f(\eta)$.

3.4. THE COUNTER-FLOW HEAT EXCHANGER

The fourth example of the first order differential equations is due to Romie [20] and his continuous model of the counter-flow heat exchanger shown in Fig. 1d.

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} &= \alpha T_1 + \beta T_2 \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} - v_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} &= \gamma T_2 + \delta T_1\end{aligned}\quad (18)$$

where

v_1, v_2 are the fluids velocities (see Fig. 1d),

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are real parameters which depend on some physical constants of the system as follows

$$\alpha = -\beta = -\frac{(hA)_1(hA)_2}{[(hA)_1 + (hA)_2]l(A_x \varrho c)_1} \quad (19)$$

$$\gamma = -\delta = -\frac{(hA)_1(hA)_2}{[(hA)_1 + (hA)_2]l(A_x \varrho c)_2} \quad (20)$$

and

h is the thermal conductance per unit heat transfer area,

A is the heat transfer area,

l denotes the fluid flow length of exchanger,

A_x is a cross-sectional area for fluid flow,

ϱ is a fluid density,

c is a unit heat capacity of fluid,

the lower indices 1 and 2 denote the stepped and unstepped fluids, respectively.

The following initial and boundary conditions are assumed to be known (see Fig. 1d)

$$T_1(0, t), T_2(l, t), T_1(x, 0), T_2(x, 0) \quad (21)$$

A slightly different model is presented in the following subsection.

3.5. THE LONG TRANSMISSION LINE

Now let's turn to the first order differential equations of the long transmission line shown in Fig. 2 [21—23]

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & L \\ C & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & R \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

with given nonzero initial conditions

$$u(x, 0) = f(x), \quad v(x, 0) = g(x), \quad (23)$$

where $u(x, t)$ and $v(x, t)$ denote the voltage and current, respectively, L, C, R and G are electrical parameters of the line.

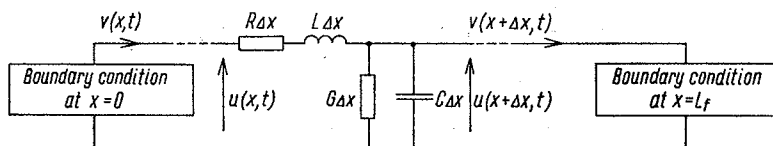


Fig. 2 Elementary section of long transmission line

Define

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \triangleq P \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \quad (24)$$

where P is the matrix whose columns are the eigenvectors of $\begin{bmatrix} 0 & L \\ C & 0 \end{bmatrix}$.

Then we obtain the system (22) in the form

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{LC} & 0 \\ 0 & -\sqrt{LC} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Ra + G/a & -Ra + G/a \\ Ra - G/a & -Ra - G/a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

where $a = \sqrt{C/L}$.

The initial conditions for $z(x, t)$ and $w(x, t)$ take the form

$$z(x, 0) = \frac{1}{2} [f(x) + g(x)/a] \quad (26)$$

and

$$w(x, 0) = \frac{1}{2} [f(x) - g(x)/a]. \quad (27)$$

Note that the set (25) in fact is the same as the one given in (18). Therefore the analysis of long transmission line is similar to the analysis of the system of example 3.4. The boundary conditions depend on the active elements connected to both endpoints of the line. For instance, two voltage sources give [13]

$$u(0, t) = e_0(t), \quad u(L_f, t) = e_{L_f}(t)$$

A variety of other different examples of the boundary conditions is discussed in details in [21].

4. ANALYSIS OF CONTINUOUS SYSTEMS WITH 2D ROESSER'S MODELS

In the above section we have given five examples of the first order differential equations for various continuous processes. Note that the form of all those equations is similar though the sets of examples 3.1—3.3 are slightly different from those of examples 3.4 and 3.5. We shall therefore examine examples 3.3 (as the most representative for the first three systems) and 3.4 (as the representative for 3.4 and 3.5).

Let's start with example 3.3, i.e. equations (17). This system is a particular case of more general continuous system of the form

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T_2}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial T_1}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 & \bar{A}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u, \quad (28)$$

where $T_2(\zeta, \eta)$ and $T_1(\zeta, \eta)$ are vectors of n_1 and n_2 components, $\bar{A}_r$ ($r = 1, 2, 3, 4$) and $\bar{B}_q$ ($q = 1, 2$) are constant matrices of appropriate dimensions and $u \triangleq u(\zeta, \eta)$ is an input vector.

Making use of the forward difference quotients for both derivatives in equation (28) we obtain after simple manipulations

$$\begin{bmatrix} u^h(i+1, j) \\ u^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1} + \Delta \zeta \bar{A}_1 & \Delta \zeta \bar{A}_2 \\ \Delta \eta \bar{A}_3 & I_{n_2} + \Delta \eta \bar{A}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^h(i, j) \\ u^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \zeta \bar{B}_1 \\ \Delta \eta \bar{B}_2 \end{bmatrix} u(i, j), \quad (29)$$

where

$$u^h(i, j) \stackrel{\Delta}{=} T_2(i\Delta\zeta, j\Delta\eta), \quad u^v(i, j) \stackrel{\Delta}{=} T_1(i\Delta\zeta, j\Delta\eta), \quad u(i, j) \stackrel{\Delta}{=} u(i\Delta\zeta, j\Delta\eta),$$

$\Delta\zeta$ and $\Delta\eta$ are the net spacings for ζ and η , respectively.

Let $\|\cdot\|$ denotes a matrix norm. Define the continuous and discrete operators (L_1, L_2) and ($\bar{L}_1, \bar{L}_2$), respectively:

$$\begin{bmatrix} L_1(T_2, T_1) \\ L_2(T_2, T_1) \end{bmatrix} \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial T_2}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial T_1}{\partial \eta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 & \bar{A}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2(\zeta, \eta) \\ T_1(\zeta, \eta) \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{L}_1(T_2, T_1) \\ \bar{L}_2(T_2, T_1) \end{bmatrix} \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} \frac{T_2[(i+1)\Delta\zeta, j\Delta\eta] - T_2[i\Delta\zeta, j\Delta\eta]}{\Delta\zeta} \\ \frac{T_1[i\Delta\zeta, (j+1)\Delta\eta] - T_1[i\Delta\zeta, j\Delta\eta]}{\Delta\eta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 & \bar{A}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2(i\Delta\zeta, j\Delta\eta) \\ T_1(i\Delta\zeta, j\Delta\eta) \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Assuming that there exist bounded second order partial derivatives of $T_2(\zeta, \eta)$ and $T_1(\zeta, \eta)$ with respect to ζ and η we obtain from the Taylor series expansions

$$\begin{bmatrix} L_1(T_2, T_1) - \bar{L}_1(T_2, T_1) \\ L_2(T_2, T_1) - \bar{L}_2(T_2, T_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta\zeta}{2} \frac{\partial^2 T_2(\zeta_i + \mu' \Delta\zeta, \eta_j)}{\partial \zeta^2} \\ \frac{\Delta\eta}{2} \frac{\partial^2 T_1(\zeta_i, \eta_j + \mu'' \Delta\eta)}{\partial \eta^2} \end{bmatrix}_{(\zeta_i, \eta_j)}, \quad (32)$$

$$\zeta_i = i\Delta\zeta, \quad \eta_j = j\Delta\eta, \quad \mu', \mu'' \in [0, 1).$$

It is easy to notice that the right side of equation (32) tends to 0 for $\Delta\zeta, \Delta\eta \rightarrow 0$.

The equation (29) is exactly in the form of 2D Roesser's discrete model for

$$\begin{aligned} A_1 &= I_{n_1} + \Delta\zeta \bar{A}_1 & A_2 &= \Delta\zeta \bar{A}_2 \\ A_3 &= \Delta\eta \bar{A}_3 & A_4 &= I_{n_2} + \Delta\eta \bar{A}_4 \\ B_1 &= \Delta\zeta \bar{B}_1 & B_2 &= \Delta\eta \bar{B}_2 \\ u^h(0, j) &= T_2(0, j\Delta\eta) & u^v(i, 0) &= T_1(i\Delta\zeta, 0). \end{aligned} \quad (33)$$

The continuous equations (17) can also be analysed with the method of Paraskevopoulos and Stavroulakis [12]. Two differential equations (17) can be transformed into second order equation as follows

$$\frac{\partial^2 T_k}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{\partial T_k}{\partial \zeta} + \frac{\partial T_k}{\partial \eta} = 0, \quad k = 1, 2. \quad (34)$$

Replacing the mixed derivative with

$$\frac{\partial^2 T_k}{\partial \zeta \partial \eta} = \frac{T_k(i+1, j+1) - T_k(i+1, j) - T_k(i, j+1) + T_k(i, j)}{\Delta\zeta \Delta\eta} \quad (35)$$

and the first order derivatives with the forward difference quotients we obtain another Roesser's model

$$\begin{bmatrix} u^h(i+1, j) \\ u^p(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_0 c_1 - c_2 \\ 1 & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^h(i, j) \\ u^p(i, j) \end{bmatrix}, \quad (36)$$

where

$$\begin{aligned} c_2 &= 1/(1 + \Delta \zeta + \Delta \eta) \\ c_1 &= (1 + \Delta \eta)/(1 + \Delta \zeta + \Delta \eta) \\ c_0 &= (1 + \Delta \zeta)/(1 + \Delta \zeta + \Delta \eta) \\ u^h &\triangleq c_1 T_k(i-1, j) - c_2 T_k(i-1, j-1) \\ u^p &\triangleq T_k(i, j-1). \end{aligned} \quad (37)$$

The boundary/initial conditions are assumed to take the forms

$$\begin{aligned} u^h(0, j) &\cong c_1 T_k(0, j) - c_2 T_k(0, j-1) \\ u^p(i, 0) &\cong T_k(i, 0). \end{aligned} \quad (38)$$

For $k = 1$ we have from equation (17)

$$\frac{\partial}{\partial \eta} [T_1(0, \eta)] = T_2(0, \eta) - T_1(0, \eta) \quad (39)$$

with $T_1(0, 0) = 0$ and $T_2(0, \eta) = f(\eta)$. Thus

$$\begin{aligned} T_1(0, \eta) &= \int_0^\eta e^{-t} f(t) dt \\ T_1(\zeta, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (40)$$

For $k = 2$ we obtain

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} [T_2(\zeta, 0)] = T_1(\zeta, 0) - T_2(\zeta, 0) \quad (41)$$

with $T_2(0, 0) = f(0)$ and $T_1(\zeta, 0) = 0$. Thus

$$\begin{aligned} T_2(\zeta, 0) &= e^{-\zeta} f(0) \\ T_2(0, \eta) &= f(\eta) \end{aligned} \quad (42)$$

Based on the above formulae the initial and boundary conditions for both cases ($k = 1, 2$) can be easily found from relation (38).

The sets of first order differential equations of examples 3.4 and 3.5 are more complicated to be analysed. This is due to the special boundary conditions to be involved in calculations. For example, the case 3.4 has: $T_1(0, t)$ and $T_2(l, t)$ — see Fig. 1d. The initial conditions are as usual: $T_1(x, 0)$ and $T_2(x, 0)$. The different (positive and negative) signs of the spatial derivatives in (18) cause also some difficulties. It is well-known that the form of the difference scheme of a simple initial/boundary problem for the Euler equation

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t) \quad (43)$$

depends on whether a is positive or negative.

Therefore we can approximate (43) with [24]

$$a \frac{u(i+1, j) - u(i, j)}{\Delta x} + \frac{u(i+1, j) - u(i+1, j-1)}{\Delta t} = f(i, j) \text{ for } a > 0$$

and

$$a \frac{u(i+1, j) - u(i, j)}{\Delta x} + \frac{u(i, j) - u(i, j-1)}{\Delta t} = f(i, j) \text{ for } a < 0$$

Similar transformations applied for equations (18) yield

$$\begin{bmatrix} T_1(i+1, j) \\ T_2(i+1, j) \\ T_3(i, j+1) \\ T_4(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(v_1 + \Delta x \alpha) \Delta t}{v_1 \Delta t + \Delta x} & \frac{\beta \Delta x \Delta t}{v_1 \Delta t + \Delta x} & \frac{\Delta x}{v_1 \Delta t + \Delta x} & 0 \\ -\frac{\partial \Delta x}{v_2} & \frac{\Delta t v_2 + \Delta x - \Delta x \Delta t \gamma}{\Delta t v_2} & 0 & -\frac{\Delta x}{\Delta t v_2} \\ \frac{(v_1 + \Delta x \alpha) \Delta t}{v_1 \Delta t + \Delta x} & \frac{\beta \Delta x \Delta t}{v_1 \Delta t + \Delta x} & \frac{\Delta x}{v_1 \Delta t + \Delta x} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(i, j) \\ T_2(i, j) \\ T_3(i, j) \\ T_4(i, j) \end{bmatrix} \\ \triangleq \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^h(i, j) \\ u^v(i, j) \end{bmatrix} \quad (44)$$

where

$$T_3(i, j) \triangleq T_1(i+1, j-1), \quad T_4(i, j) \triangleq T_2(i, j-1)$$

The initial/boundary conditions for the Roesser's model (44) are as follows.

$T_1(0, j)$, $T_3(i, 0) = T_1(i+1, 0)$ and $T_4(i, 0) = T_2(i, 0)$ are known from (21), but $T_2(0, j)$ is unknown.

We make the following calculations to obtain $T_2(0, j)$. Define

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}^{i,j} \triangleq \begin{bmatrix} \Phi_1^{i,j} & \Phi_2^{i,j} \\ \Phi_3^{i,j} & \Phi_4^{i,j} \end{bmatrix}. \quad (45)$$

It is obvious from equation (8) and definition (45) that

$$\Phi_k^{i,j} \neq A_k^{i,j}, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

The solution of the Roesser's model (44) for $T_1(n, j)$ and $T_2(n, j)$, $n = l/\Delta x$, becomes

$$\begin{bmatrix} T_1(n, j) \\ T_2(n, j) \end{bmatrix} = \sum_{\alpha=0}^j \Phi_1^{n,j-\alpha} \begin{bmatrix} T_1(0, \alpha) \\ T_2(0, \alpha) \end{bmatrix} + \sum_{\beta=0}^n \Phi_2^{n-\beta,j} \begin{bmatrix} T_3(\beta, 0) \\ T_4(\beta, 0) \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Define again

$$\Phi_1^{i,j} \triangleq \begin{bmatrix} c_1^{i,j} & c_2^{i,j} \\ c_3^{i,j} & c_4^{i,j} \end{bmatrix}, \quad \Phi_2^{i,j} \triangleq \begin{bmatrix} d_1^{i,j} & d_2^{i,j} \\ d_3^{i,j} & d_4^{i,j} \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Thus we have from equation (46)

$$T_2(n, j) = \sum_{\alpha=0}^j c_3^{n,j-\alpha} T_1(0, \alpha) + \sum_{\alpha=0}^j c_4^{n,j-\alpha} T_2(0, \alpha) + h(n, j) \quad (48)$$

where $h(n, j)$ denotes the second term of the right side of equation (46) written in the modified form for $T_2(n, j)$, ($T_3(i, 0)$ and $T_4(i, 0)$ are known).

Note that $T_2(n, j) = T_2(l/\Delta x, j\Delta t)$. Then we can easily get $T_2(0, j)$ from equation (48) as follows

$$T_2(0, j) = \frac{1}{c_4^{n,0}} \left[T_2(n, j) - \sum_{\alpha=0}^j c_3^{n,j-\alpha} T_1(0, \alpha) - \sum_{\alpha=0}^{j-1} c_4^{n,j-\alpha} T_2(0, \alpha) - h(n, j) \right] \quad (49)$$

Having obtained $T_2(0, j)$ from (49), (note that $T_2(0, j)$ is in fact function of $T_1(0, \alpha)$ and $T_2(n, \alpha)$, $\alpha = 1, 2, \dots, j$) we can find $T_1(i, j)$ and $T_2(i, j)$ in the form of equation (46) with $n \rightarrow i$. The following example is chosen for illustration.

Example

Consider the differential equation (17) with $T_1(\zeta, 0) = 0$ and $T_2(0, \eta) = 1(\eta)$ where $1(\eta)$ denotes a unit step function. Choosing $\Delta\zeta = \Delta\eta = 0.1$ we have from equation (29)

$$\begin{bmatrix} u^h(i+1, j) \\ u^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^h(i, j) \\ u^v(i, j) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u^h(0, j) \\ u^v(i, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(j\Delta\eta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

The discrete solutions for $\zeta, \eta \in [0; 5]$ are shown in Fig. 3. The exact solutions of the

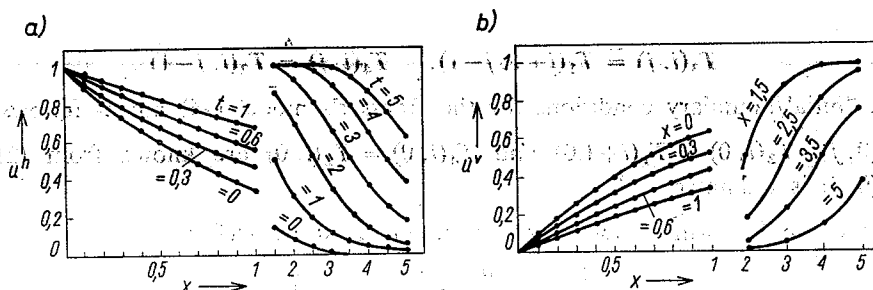


Fig. 3 Solution of the 2D Roesser's equations

respective differential problem are

$$u^h(\zeta, \eta) = T_2(\zeta, \eta) = 1 - e^{-\zeta - \eta} B_{S_1}(\zeta, \eta)$$

$$u^v(\zeta, \eta) = T_1(\zeta, \eta) = 1 - e^{-\zeta - \eta} B_{S_0}(\zeta, \eta)$$

$$B_{S_n}(\zeta, \eta) = \sum_{M=\max(-n, 0)}^{\infty} \frac{\zeta^M + n\eta^M}{(M+n)! M!}$$

and they compare well with the solutions obtained with 2D Roesser's model.

5. CONCLUSIONS

The problem of modelling of continuous linear distributed parameter systems has been considered in this paper. We have shown that many sets of first order differential equations can be analysed with the 2D Roesser's discrete models with constant coefficients.

The obtained formulae are simple and easy for numerical programming. The solutions obtained with the proposed method compare well with exact solutions of the respective differential problems [8, 13].

REFERENCES

1. R. P. Roesser: *A discrete state-space model for linear image processing*. IEEE Trans., 1975, vol. AC-20, No. 1, pp. 1—10
2. E. Fornasini, G. Marchesini: *State-space realization theory of two-dimensional filters*. IEEE Trans., 1976, vol. AC-21, No. 4, pp. 484—491
3. E. Fornasini, G. Marchesini: *Global properties and duality in 2-D systems*. Systems and Control Letters, 1982, vol. 2, No. 1, pp. 30—38
4. R. Eising: *2-D Systems: An Algebraic Approach*. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1979
5. R. Eising: *Controllability and observability of 2-D systems*. IEEE Trans., 1979, vol. AC-24, No. 1, pp. 132—133
6. S. Y. Kung, B. C. Levy, M. Morf, T. Kailath: *New results in 2-D systems theory; part II: 2-D state space models — realization and the notions of controllability, observability and minimality*. Proc. IEEE, 1977, vol. 65, No. 6, pp. 945—961
7. T. Kaczorek: *Extension of Sylvester's theorem to two-dimensional systems*. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn., 1982, vol. 30, Nos. 1—2
8. T. Kaczorek: *Two-Dimensional Linear Systems*. Berlin: Springer-Verlag, 1985
9. T. Kaczorek: *Teoria sterowania*. Warszawa: PWN, 1981, t. II
10. P. N. Paraskevopoulos: *Characteristic polynomial assignment and determination of the residual polynomial in 2-D systems*. IEEE Trans., 1981, vol. AC-26, No. 2, pp. 541—543
11. S. G. Tzafestas, T. G. Pimenides: *Transfer function computation and factorization of 3-dimensional systems in state-space*. IEE Proc. D, Control Theory and Appl., 1983, vol. 130, No. 5, pp. 231—242
12. P. Stavrulakis, P. N. Paraskevopoulos: *Low-sensitivity observer-compensator design for two-dimensional digital systems*. IEE Proc. D, Control Theory and Appl., 1982, vol. 129, No. 5, pp. 193—200
13. W. Marszałek: *Two-dimensional state-space discrete models for hyperbolic partial differential equations*. Appl. Math. Modelling, 1984, vol. 8, pp. 11—14
14. W. Marszałek: *Two-dimensional discrete models for the Poisson equation*. Rozprawy Elektrotechniczne, 1987, z. 1
15. W. Marszałek: *Two-dimensional discrete model with varying coefficients*. IEE Proc. D, Control Theory and Appl., 1986, vol. 133, No. 4, pp. 177—183
16. K. V. Fernando, H. Nicholson: *Stability assesment of two-dimensional state-space systems*. IEEE Trans., 1985, vol. CAS-32, No. 5, pp. 484—487
17. J. Madejski: *Teoria wymiany ciepła*. Warszawa: PWN, 1963
18. S. Biltanti, F. Romero, R. Sealtolini: *Stochastic identification and digital control of a heat exchanger: a simulation test case*. J. Franklin Inst., 1984, vol. 318, pp. 24—43
19. J. Łach, W. Pieczka: *Metoda wyznaczania wolumetrycznego współczynnika przejmowania ciepła*. Archiwum Termodynamiki, 1983, t. 4, nr 1, s. 27—34
20. F. R. Romie: *Transient response of the counterflow heat exchanger*. ASME Trans., J. Heat Transfer, 1984, vol. 106, pp. 620—626
21. Z. Trzaska: *Finite element solution of transients in lossy one-dimensional parameter distributed systems*. Rozprawy Elektrotechniczne, 1978, t. 24, nr 1, s. 3—14
22. Z. Trzaska: *The inverse problem to matrix polynomial factorisation and its application to circuit design*. IEE Proc. G, Electronic Circuits and Systems, 1985, vol. 132, No. 5, pp. 221—224
23. Z. Trzaska: *On the generalized matrix inverse Laplace transform theorem and its application to network studies*. Proc. IEEE Intern. Symp. Circuits and Systems, Phoenix (USA), 1977, pp. 646—648
24. A. A. Samarskij: *Teoria raznostnykh schiem*. Moskwa: Nauka, 1983

W. MARSZAŁEK

MODELOWANIE UKŁADÓW O PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH ZA POMOCĄ DWUWYMIAROWYCH LINIOWYCH RÓWNAŃ DYSKRETNYCH

Streszczenie

W pracy zastosowano dwuwymiarowe dyskretne liniowe równania Roessera do analizy układów o parametrach rozłożonych. Rozważono równania opisujące krzyżoprądowe i przeciwprądowe wymienniki ciepła jak również równania linii długiej R, L, C, G . W analizie tych równań wykorzystano metodę różnic skończonych oraz własności równań Roessera. Przedstawiono przykład obliczeń numerycznych.

W. MARSZAŁEK

MÉTHODE DE MODELAGE DES SYSTÈMES AUX PARAMÈTRES REPARTIS PAR LES EQUATIONS LINÉAIRES DISCRETES A DEUX DIMENSIONS

Résumé

Cet article est consacré à présenter la méthode de modelage des processus apparaissant dans les systèmes aux paramètres répartis. Cette méthode utilise des modèles discrets et linéaires de Roesser à deux dimensions avec des coefficients constants. Les équations différentielles partielles, qui décrivent la dynamique du fluide dans les échangeurs de chaleur avec croisement et contre-courant sont étudiées dans ce travail. En outre les équations décrivant les phénomènes transitoires dans les lignes longues de transport de l'énergie électrique sont considérées par la même méthode. Des études de ces systèmes sont basées sur la technique des différences finies et sur les propriétés empruntées aux modèles de Roesser. Des exemples illustrant cette méthode sont aussi présentés.

W. MARSZAŁEK

MODELLIERUNG DER ANORDNUNGEN VERTEILTER PARAMETER UNTER ANWENDUNG VON DISKRETEN ZWEIDIMENSIONALEN ZUSTANDSGLEICHUNGEN

Zusammenfassung

In der Bearbeitung wurden Methoden für die Modellierung von Systemen mit verteilten Parametern dargestellt unter Nutzung der zweidimensionalen diskreten Roesser-Modelle mit konstanten Parametern. Es wurden partielle Differentialgleichungen betrachtet, die die Dynamik der Kreuzstromwärmeüberträger und Gegenstrom-Wärmeüberträger sowie die Fernleitung beschreiben. Die beschriebene Methode nutzt die differentiale Approximation, als auch die Eigenschaften des Roesser-Modells aus. Es wurde ein Beispiel für die numerischen Berechnungen angegeben.

В. МАРШАЛЕК

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ПОМОЩИ ДИСКРЕТНЫХ ДВУХМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Резюме

Применены двухмерные дискретные уравнения Рессера для моделирования систем с распределенными параметрами. Представлены системы уравнений с частными производными первого порядка, которые описывают динамику теплообменников и длинной линии. Анализ этих систем основан на методе конечномерной аппроксимации и некоторых свойствах моделей Рессера. Представлен численный пример.

Metoda obliczania czasu przejścia w binarnej pętli fazowej

CEZARY DREGER (Warszawa)

Instytut Telekomunikacji, Politechnika Warszawska

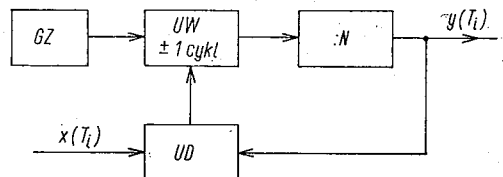
Otrzymano 1986.07.16

W pracy przedstawiono metodę obliczania czasu przejścia w binarnej pętli fazowej modelowane jednorodnym łańcuchem Markowa pierwszego rzędu. Wyznaczone zostały wzory pozwalające wy nować skomplikowany rachunek macierzowy. Podano wyniki obliczeń uzyskane przy wykorzystaniu przedstawionej metody.

1. WPROWADZENIE

Systemy transmisji danych są w większości systemami synchronicznymi, w których proces synchronizacji pełni ważną i podstawową rolę [3]. W systemach tych wykorzystywane są układy cyfrowych pętli fazowych (PLL), a spośród nich układy binarnej pętli fazowej. Układy te charakteryzują się dużą niezawodnością, dokładnością działania, powtarzalnością parametrów i łatwością realizacji w różnych wariantach elementowych, co powoduje ciągłe zainteresowanie metodami analizy wymienionych układów.

Schemat blokowy binarnej pętli fazowej przedstawiono na rysunku 1. Zawiera on:



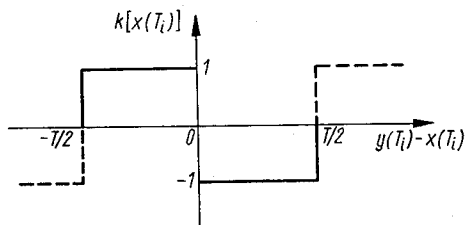
Rys. 1 Schemat blokowy binarnej pętli fazowej

wysokostabilny generator impulsów sterujących GZ; układ wykonawczy UW; dzielnik częstotliwości przez N oraz układ decyzyjny UD. Generator sterujący generuje impulsy sterujące z częstotliwością $f_g = N/T$. Przy braku korekcji na wyjściu dzielnika otrzymujemy prostokątny przebieg odtworzonej skali czasu o okresie T .

Proces korekcji opisany jest równaniem różnicowym [2]

$$y(T_{i+1}) = y(T_i) + \gamma k[x(T_i)] \quad (1)$$

gdzie $y(T_i)$ oznacza chwilę wystąpienia momentu charakterystycznego odtworzonej skali czasu w i -tym odstępie T_i , a $x(T_i)$ oznacza chwilę wystąpienia w odbieranym sygnale momentu charakterystycznego wykorzystywanego do wytworzenia impulsu synchronizacji w tym odstępie T_i . Faza odtworzonej skali czasu korygowana jest o stałą wartość $\gamma = T/N$ względem impulsów synchronizacji, które mogą występować w chwilach czasu nominalnie równych wielokrotności odstępu jednostkowego T . Natomiast $k[x(T_i)]$ jest wzmocnieniem pętli zależnym od charakterystyki układu decyzyjnego i różnicy czasu pomiędzy momentami charakterystycznymi odtworzonej skali czasu i sygnału odebranego.

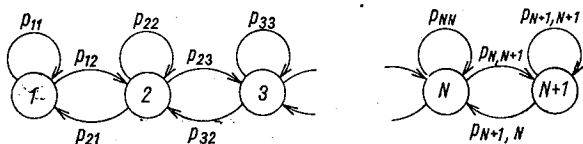


Rys. 2 Charakterystyka układu decyzyjnego

Najczęściej stosowana jest charakterystyka prostokątna [2, 6] przedstawiona na rysunku 2, dla której

$$k[x(T_i)] = \begin{cases} +1 & -T/2 < y(T_i) - x(T_i) < 0 \\ -1 & 0 < y(T_i) - x(T_i) < T/2 \end{cases} \quad (2)$$

W rzeczywistych warunkach impulsy synchronizacji obarczone są zniekształceniami i pojawiają się w sposób losowy. Impulsy synchronizacji x_i wytworzone z odpowiednich momentów $x(T_i)$ tworzą ciąg losowy opisany przez ciąg funkcji gęstości prawdopodobieństw $f(x - nT)$, najczęściej rozkładu normalnego [1, 6].



Rys. 3 Graf łańcucha modelującego binarną pętlę fazową

Modelem przedstawionego układu jest łańcuch Markowa pierwszego rzędu określony trójką uporządkowaną $\langle S, P, P_0 \rangle$ [2], w której $S = \{s_k\}$ jest zbiorem stanów związanych z możliwymi położeniami momentów charakterystycznych odtworzonej skali czasu

$$y_k = -T/2 + \gamma(k-1). \quad (3)$$

względem środka odstępu jednostkowego T , P_0 wektorem rozkładu początkowego, a P macierzą przejść o elementach p_{ij} określających prawdopodobieństwa z jakimi układ zmienia stan w jednym kroku. Prawdopodobieństwa te są wyznaczone na podstawie znajomości funkcji gęstości rozkładu $f(x - nT)$ i charakterystyki układu [1]. Zachowanie się układu w stanie ustalonym określa wektor rozkładu stacjonarnego P_s .

Jednym z ważniejszych parametrów określających właściwości omawianej pętli jest czas synchronizacji wstępnej, to jest czas jaki upływa od chwili włączenia układu (podania sygnału synchronizacji) do momentu osiągnięcia stanu synchronizmu. Czas ten jest określony przez czas przejścia w łańcuchu Markowa modelującego układ.

Praca niniejsza poświęcona jest metodzie obliczania czasu przejścia w układach modelowanych łańcuchami Markowa, a w szczególności czasu synchronizacji wstępnej w binarnej pętli fazowej.

Zaprezentowana zostanie metoda oraz uzyskane przy jej zastosowaniu wyniki obliczeń czasu przejścia, dla układów o różnych parametrach, działających w różnych warunkach początkowych.

2. METODA OBLICZANIA

Czas przejścia w łańcuchu Markowa, rozumiany jako średnia liczba kroków wykonanych od wyjścia ze stanu S_i do osiągnięcia stanu S_j , określają elementy m_{ij} macierzy $\mathbf{M}$, zwanej macierzą średnich czasów przejścia. Macierz średnich czasów przejścia jest równa [5]

$$\mathbf{M} = [\mathbf{I} - \mathbf{Z} + \mathbf{E}\mathbf{Z}_{dg}] \mathbf{D}, \quad (4)$$

gdzie $\mathbf{I}$ — macierz jednostkowa, $\mathbf{Z}$ — macierz fundamentalna łańcucha, $\mathbf{Z}_{dg}$ — macierz diagonalna o elementach z_{ii} macierzy $\mathbf{Z}$, $\mathbf{E}$ — macierz jedynekowa, $\mathbf{D}$ — macierz diagonalna o elementach

$$d_{jj} = \frac{1}{p_j} \quad (5)$$

określonych przez elementy p_j wektora rozkładu stacjonarnego $\mathbf{P}_s$.

Macierz fundamentalna

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{P}_g)]^{-1} \quad (6)$$

opisana jest przez macierz $\mathbf{P}$ przejść w jednym kroku oraz macierz graniczną

$$\mathbf{P}_g = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n. \quad (7)$$

Obliczanie czasów przejść w oparciu o przedstawione wyżej wzory macierzowe jest bardzo czasochłonne ze względu na konieczność wykonywania rachunków (a szczególnie operacji odwracania) na macierzach o znacznych rozmiarach (od kilkadziesiąt do kilkaset). Wykorzystując właściwości macierzy opisujących łańcuch Markowa uzyskać można wzory dogodniejsze do obliczeń.

Łańcuch Markowa opisujący binarną pętlę fazową jest nieprzywiedlny i aperiodyczny [1, 2], posiada zatem wektor rozkładu stacjonarnego $\mathbf{P}_s$ pokrywający się z rozkładem granicznym $\mathbf{P}_g$. Oznacza to, że każdy wiersz macierzy granicznej równy jest wektorowi rozkładu stacjonarnego, a zatem rozkład graniczny tego łańcucha może być określony na podstawie znajomości rozkładu stacjonarnego [2, 4].

Uwzględniając powyższe we wzorach (4), (6) i dokonując odpowiednich przekształceń z wykorzystaniem zasad rachunku macierzowego i własności wyznaczników (zobacz dodatek) otrzymujemy dogodny do obliczeń wzór

$$m_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{p_j} & i = j \\ \frac{\Delta_{11,jj}(i,j)[\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{E}\mathbf{P}_{dg}(1n)]}{\Delta_{j1}[\mathbf{I} - \mathbf{P}]} & i \neq j \end{cases} \quad (8)$$

gdzie $\Delta_{11,jj}(i,j)$ [*] oznacza minor stopnia $(n-2)$ względem elementów o indeksach $(1,1)$ i (j,j) macierzy [*], w której i -tą kolumnę zastąpiono sumą kolumn i -tej i j -tej, Δ_{j1} [*] — minor stopnia $(n-1)$ względem elementów o indeksach $(j,1)$ macierzy [*], $P_{dg}(1n)$ — macierz diagonalną, której elementy przekątnej są identyczne z elementami pierwszego wiersza macierzy P , natomiast I, P, E oznaczają poprzednio określone macierze.

Na podstawie wzoru (8) można obliczać czasy przejścia w każdym dowolnie złożonym aperiodycznym łańcuchu Markowa.

Macierz przejść w jednym kroku łańcucha Markowa modelującego binarną pętlę fazową jest macierzą trójdagonalną o postaci [6]

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & & & & \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & p_{NN+1} & p_{NN} & p_{NN+1} & & \\ & p_{N+1N} & p_{N+1N+1} & & & \end{bmatrix}_{N+1 \times N+1} \quad (9)$$

Dla łańcucha o trójdagonalnej macierzy przejść P oraz $j = i+1$ na podstawie (8) otrzymujemy

$$m_{ii+1} = \frac{\sum_{k=1}^i \prod_{l=1}^{k-1} p_{li+1} \cdot \prod_{l=k+1}^i p_{li-1}}{\prod_{l=1}^i p_{li+1}} \quad (10)$$

Rozpisując wzór (8) dla

$$m_{ii+2} = \frac{\Delta_{11,i+2i+2}(i,i+2)[I-P+EP_{dg}(1n)]}{\Delta_{i+21}[I-P]} \quad (11)$$

i

$$m_{ii+1} = \frac{\Delta_{11,i+1i+1}(i,i+1)[I-P+EP_{dg}(1n)]}{\Delta_{i+11}[I-P]} \quad (12)$$

oraz

$$m_{i+1i+2} = \frac{\Delta_{11,i+2i+2}(i+1,i+2)[I-P+EP_{dg}(1n)]}{\Delta_{i+21}[I-P]} \quad (13)$$

korzystając jednocześnie z tego, że

$$\Delta_{i+11}[I-P] = \frac{p_{i+2i+1}}{p_{i+1i+2}} \Delta_{i+21}[I-P] \quad (14)$$

co wynika ze wzoru (D31), łatwo sprawdzić, że

$$m_{ii+2} = m_{ii+1} + m_{i+1i+2} \quad (15)$$

Dla łańcucha o trójdagonalnej macierzy przejść powyższą zależność można uogólnić na

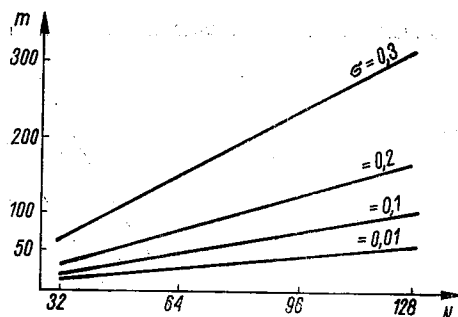
$$m_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} m_{kk+1} \quad (16)$$

Wzory (10) i (16) stanowią podstawę do przeprowadzenia analizy czasu przejścia binarnej pętli fazowej. Pozwalają one na wykonanie analizy bez konieczności przeprowadzania skomplikowanych rachunków macierzowych, które, dla dużej liczby stanów łańcucha, stają się bardzo czasochłonne nawet przy zastosowaniu techniki komputerowej.

3. ANALIZA CZASU SYNCHRONIZACJI WSTĘPNEJ

Korzystając z przedstawionej powyżej metody przeprowadzono obliczenia czasu synchronizacji wstępnej dla trzech różnych wariantów warunków początkowych w jakich rozpoczyna się proces korekcji. We wszystkich przypadkach przyjęto $T = 1$ za znormalizowaną wartość czasu trwania odstępu jednostkowego, a za miarę zniekształceń izochronicznych sygnału synchronizacji — wartość odchylenia standardowego σ rozkładu normalnego $N(0, \sigma)$.

W a r i a n t I. W wariacie tym obliczono średnią liczbę kroków m jaką wykonuje układ wychodząc ze stanu $s = 1$ aby osiągnąć stan centralny $s = N/2 + 1$ dla różnych wartości stopnia podziału N i dla różnych wartości nominalnych zniekształceń izochronicznych σ . Uzyskane wyniki przedstawiono na rysunku 4.



Rys. 4 Liczba kroków m potrzebna do osiągnięcia stanu $N/2 + 1$ przy wyjściu ze stanu 1

W warunkach rzeczywistych układ w chwili włączenia może rozpocząć proces korekcji w każdym ze stanów od 1 do $N/2 + 1$. W takim przypadku określić można średnią liczbę kroków m_s jaka jest potrzebna do osiągnięcia stanu centralnego. Liczba ta może być określona jako

$$m_s = \sum_{i=1}^{N/2+1} p_i m_i \quad (17)$$

gdzie p_i oznacza prawdopodobieństwo rozpoczęcia procesu korekcji od stanu i -tego natomiast m_i oznacza liczbę kroków potrzebną do osiągnięcia stanu $N/2 + 1$ przy wyjściu ze stanu i -tego.

W a r i a n t II. W wariacie tym obliczono średnią liczbę kroków m_s jaka wykonuje układ dla osiągnięcia stanu centralnego $N/2 + 1$ przy założeniu jednakowego prawdopodobieństwa startu $p_i = 1/(N+1)$ z każdego stanu.

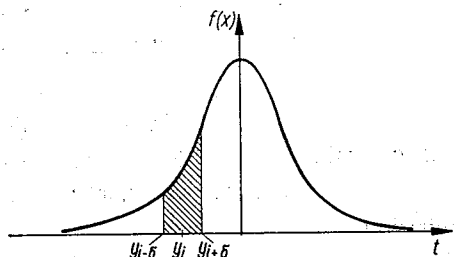
W a r i a n t III. W wariacie tym obliczono średnią liczbę kroków m_s jaką wykonuje układ dla osiągnięcia stanu centralnego $N/2 + 1$ przy założeniu, że proces korekcji rozpo-

czyna się startem ze stanu określonego przez pierwszy przychodzący impuls synchronizacji. W praktyce jest to realizowane przez wymuszenie stanu początkowego w dzielniku pętli czyli tak zwane „zerowanie” układu. Prawdopodobieństwo startu jest w tym przypadku różne dla każdego ze stanów i może być określone jako

$$p_i = \int_{y_{i-\delta}}^{y_{i+\delta}} f(x) dx, \quad (18)$$

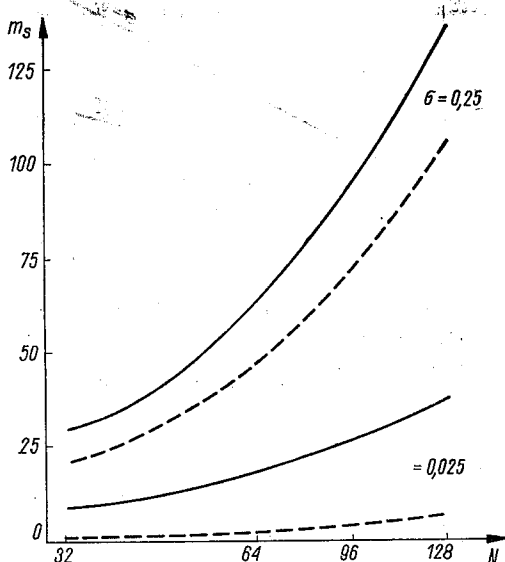
gdzie $\delta = \gamma/2$ a więc jest równe połowie kroku korekcji.

Graficzną interpretację prawdopodobieństwa startu p_i procesu korekcji z odpowiedniego stanu przedstawiono na rysunku 5.



Rys. 5 Prawdopodobieństwo startu p_i w wariancie III

Uzyskane dla obu wariantów wyniki przedstawiono na rysunku 6.



Rys. 6 Średnia liczba kroków potrzebna do osiągnięcia stanu $N/2+1$ w wariancie II (linia ciągła) i wariancie III (przerywana)

Jak widać na przedstawionych wykresach zerowanie układu binarnej pętli fazowej daje szczególnie korzystne wyniki pod względem czasu synchronizacji wstępnej dla małych wartości zniekształceń izochronicznych sygnału synchronizującego.

Na podstawie znajomości liczby kroków potrzebnych do osiągnięcia synchronizmu (stanu centralnego $N/2+1$) wyznaczyć można z zależności $t_s = m_s \cdot T$ zdenormalizowaną wartość czasu synchronizacji wstępnej podstawiając za m_s średnią liczbę kroków a za T rzeczywistą wartość czasu trwania odstepu jednostkowego skali czasu.

ZAKOŃCZENIE

Przedstawiona wyżej metoda obliczania czasu przejścia binarnej pętli fazowej modelowanej ergodycznym łańcuchem Markowa znacznie upraszcza proces analizy przez eliminację czasochłonnego rachunku macierzowego. Ma to szczególne znaczenie dla praktycznie stosowanych układów, dla których wymiary analizowanych macierzy osiągają wartości od kilkadziesiąt do kilkaset. Metoda ta może być również zastosowana do analizy czasu przejścia innych układów, które modelowane są ergodycznymi łańcuchami Markowa.

DODATEK:

Wyprowadzenie wzoru (10) na czas przejścia w łańcuchu Markowa

Czas przejścia w łańcuchu Markowa, rozumiany jako średnia liczba kroków wykonanych od wyjścia ze stanu s_i do osiągnięcia stanu s_j określają elementy m_{ij} macierzy średniego czasu przejścia [5]

$$\mathbf{M} = [\mathbf{I} - \mathbf{Z} + \mathbf{E}\mathbf{Z}_{dg}]\mathbf{D}, \quad (\text{D1})$$

gdzie $\mathbf{I}$ oznacza macierz jednostkową, $\mathbf{Z}$ macierz fundamentalną łańcucha, $\mathbf{Z}_{dg}$ macierz diagonalną o elementach z_{ii} z macierzy $\mathbf{Z}$, $\mathbf{E}$ macierz jedynekową, $\mathbf{D}$ macierz diagonalną o elementach

$$d_{jj} = \frac{1}{p_j} \quad (\text{D2})$$

określonych przez elementy p_j wektora rozkładu stacjonarnego $\mathbf{P}_s$.

Rozpisując każdą z macierzy składowych otrzymamy

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & \dots & z_{2n} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & \dots & z_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & z_{n3} & \dots & z_{nn} \end{bmatrix} + \quad (\text{D3})$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & z_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

Po wykonaniu działań i podstawieniu zależności (D2) uzyskuje się

$$m_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{p_j} & i = j \\ \frac{(z_{jj} - z_{ij})}{p_j} & i \neq j \end{cases} \quad (\text{D4})$$

Macierz fundamentalna

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{P}_g)]^{-1}, \quad (\text{D5})$$

opisana jest przez macierz $\mathbf{P}$ przejść w jednym kroku oraz macierz $\mathbf{P}_g$ rozkładu granicznego. Wprowadzając macierz

$$\mathbf{B} = [\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{P}_g)] \quad (\text{D6})$$

możemy napisać, że $\mathbf{Z} = \mathbf{B}^{-1}$, a elementy macierzy $\mathbf{Z}$ mogą być wtedy określone jako

$$z_{ij} = \frac{B_{ji}}{\det \mathbf{B}} \quad (\text{D7})$$

przy oznaczeniu przez B_{ji} dopełnienia algebraicznego elementu b_{ji} macierzy $\mathbf{B}$.

Korzystając z (D4) i (D7) można zapisać, że dla $i \neq j$

$$m_{ij} = \frac{1}{p_j} \cdot \frac{(B_{jj} - B_{ji})}{\det \mathbf{B}}. \quad (\text{D8})$$

Zgodnie z definicją dopełnienia algebraicznego

$$B_{jj} - B_{ji} = (-1)^{jj} \Delta_{jj} - (-1)^{j+1} \Delta_{ji}, \quad (\text{D9})$$

gdzie Δ_{jj} i Δ_{ji} są odpowiednimi minorami macierzy $\mathbf{B}$.

Jeżeli w minory Δ_{ji} przemieścimy kolumnę j na miejsce kolumny i , to dopełnienie algebraiczne zmieni znak l razy, gdzie

$$l = |i - j| - 1. \quad (\text{D10})$$

Zmianę znaku uwzględnić możemy zmieniając wartość wykładnika potęgi w dopełnieniu algebraicznym $(-1)^{j+i} \Delta_{ji}$ na wartość

$$k = j + i + |i - j| - 1 = \begin{cases} 2j - 1 & j > i \\ 2i - 1 & j < i, \end{cases} \quad (\text{D11})$$

kłóra jest liczbą nieparzystą dla każdego $i, j \in N$.

Wyrażenie (D9) możemy zapisać jako

$$\mathbf{B}_{jj} - \mathbf{B}_{ji} = \Delta_{jj} + \Delta_{ji}^* \quad (\text{D12})$$

gdzie Δ_{ji}^* jest minorem uzyskanym z minora Δ_{ji} przez przemieszczenie kolumny j .

Minory Δ_{jj} i Δ_{ji}^* różnią się tylko elementami w kolumnie i -tej i zgodnie z rachunkiem wyznaczników ich suma równa jest wartości minora

$$\Delta_{jj}(i, j) = \begin{vmatrix} 1 - (p_{11} - p_1) & -(p_{12} - p_2) & \dots & -(p_{1i} + p_{1j} - p_i - p_j) & \dots & -(p_{1n} - p_n) \\ -(p_{21} - p_1) & 1 - (p_{22} - p_2) & \dots & -(p_{2i} + p_{2j} - p_i - p_j) & \dots & -(p_{2n} - p_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -(p_{i1} - p_1) & -(p_{i2} - p_2) & \dots & 1 - (p_{ii} + p_{ij} - p_i - p_j) & \dots & -(p_{in} - p_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -(p_{n1} - p_1) & -(p_{n2} - p_2) & \dots & -(p_{ni} + p_{nj} - p_i - p_j) & \dots & 1 - (p_{nn} - p_n) \end{vmatrix} \quad (\text{D13})$$

z macierzy $\mathbf{B}$, w którym i -ta kolumna zastąpiona została sumą kolumn i -tej i j -tej. Suma wyrazów w każdym wierszu tego minora równa jest jedności, a zatem zastępując pierwszą kolumnę sumą kolumn otrzymamy

$$\Delta_{jj}(i, j) = \begin{vmatrix} 1 & -(p_{12}-p_2) & \dots & -(p_{1i}+p_{1j}-p_i-p_j) & \dots & -(p_{1n}-p_n) \\ 1 & 1-(p_{22}-p_2) & \dots & -(p_{2i}+p_{2j}-p_i-p_j) & \dots & -(p_{2n}-p_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & -(p_{i2}-p_2) & \dots & 1-(p_{ii}+p_{ij}-p_i-p_j) & \dots & -(p_{in}-p_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & -(p_{n2}-p_2) & \dots & -(p_{ni}+p_{nj}-p_i-p_j) & \dots & 1-(p_{nn}-p_n) \end{vmatrix} \quad (D14)$$

a zastępując każdy wiersz, oprócz pierwszego, różnicą elementów tego wiersza i wiersza pierwszego uzyskamy

$$\Delta_{jj}(i, j) = \begin{vmatrix} 1 & -(p_{12}-p_2) & \dots & -(p_{1i}+p_{1j}-p_i-p_j) & \dots & -(p_{1n}-p_n) \\ 0 & 1-(p_{22}-p_{12}) & \dots & -(p_{2i}+p_{2j}-p_{1i}-p_{1j}) & \dots & -(p_{2n}-p_{1n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & -(p_{i2}-p_{12}) & \dots & 1-(p_{ii}+p_{ij}-p_{1i}-p_{1j}) & \dots & -(p_{in}-p_{1n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & -(p_{n2}-p_{12}) & \dots & -(p_{ni}+p_{nj}-p_{1i}-p_{1j}) & \dots & 1-(p_{nn}-p_{1n}) \end{vmatrix} \quad (D15)$$

Rozwijając powyższy minor względem pierwszej kolumny otrzymamy minor

$$\Delta_{1j} = \begin{vmatrix} 1-(p_{22}-p_{12}) & -(p_{23}-p_{13}) & \dots & -(p_{2i}+p_{2j}-p_{1i}-p_{1j}) & \dots & -(p_{2n}-p_{1n}) \\ -(p_{32}-p_{12}) & 1-(p_{33}-p_{13}) & \dots & -(p_{3i}+p_{3j}-p_{1i}-p_{1j}) & \dots & -(p_{3n}-p_{1n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -(p_{i2}-p_{12}) & -(p_{i3}-p_{13}) & \dots & 1-(p_{ii}+p_{ij}-p_{1i}-p_{1j}) & \dots & -(p_{in}-p_{1n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -(p_{n2}-p_{12}) & -(p_{n3}-p_{13}) & \dots & -(p_{ni}+p_{nj}-p_{1i}-p_{1j}) & \dots & 1-(p_{nn}-p_{1n}) \end{vmatrix}, \quad (D16)$$

który może być zapisany jako minor stopnia $(n-2)$ względem elementów o indeksach $(1, 1)$ i (j, j) ,

$$\Delta_{1j} = \Delta_{11, jj}(i, j)[\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{E}\mathbf{P}_{dg}(1n)], \quad (D17)$$

macierzy $[\ast]$, w której i -tą kolumnę zastąpiono sumą kolumn i -tej i j -tej. W macierzy $[\ast]$ oznaczono przez $\mathbf{I}$ macierz jednostkową, przez $\mathbf{E}$ macierz jedykową, przez $\mathbf{P}$ macierz przejść w jednym kroku a przez $\mathbf{P}_{dg}(1n)$ macierz diagonalną, której przekątna jest identyczna z pierwszym wierszem macierzy $\mathbf{P}$.

Korzystając z powyższych wyrażenie (D8) możemy zapisać jako

$$m_{ij} = \frac{1}{p_j} \cdot \frac{\Delta_{11, jj}(i, j)[\mathbf{I} - \mathbf{P} + \mathbf{E}\mathbf{P}_{dg}(1n)]}{\det \mathbf{B}}. \quad (D18)$$

Na podstawie [2] możemy napisać, że

$$p_j = \frac{\Delta_{j1}[\mathbf{I} - \mathbf{P}]}{\det \mathbf{W}}. \quad (D19)$$

Wyznacznik $\det \mathbf{W}$ jest wyznacznikiem głównym układu równań

$$\begin{cases} \mathbf{P}_s[\mathbf{I} - \mathbf{P}] = 0 \\ \sum_{j=1}^n p_j = 1 \end{cases} \quad (D20)$$

o ogólnej postaci

$$|W| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -p_{12} & (1-p_{22}) & -p_{32} & -p_{42} & \dots & -p_{n2} \\ -p_{13} & -p_{23} & (1-p_{33}) & -p_{43} & \dots & -p_{n3} \\ -p_{14} & -p_{24} & -p_{34} & (1-p_{44}) & \dots & -p_{n4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_{1n} & -p_{2n} & -p_{3n} & -p_{4n} & \dots & (1-p_{nn}) \end{vmatrix}. \quad (D21)$$

Po transpozycji i zamianie każdego wiersza j , z wyjątkiem pierwszego, różnicą wiersza j i wiersza 1 a następnie rozwinięciu na podwyznaczniki względem pierwszej kolumny otrzymamy

$$|W| = \begin{vmatrix} (1+p_{12}-p_{22}) & (p_{13}-p_{23}) & (p_{14}-p_{24}) & \dots & (p_{1n}-p_{2n}) \\ (p_{12}-p_{32}) & (1+p_{13}-p_{33}) & (p_{14}-p_{34}) & \dots & (p_{1n}-p_{3n}) \\ (p_{12}-p_{42}) & (p_{13}-p_{43}) & (1+p_{14}-p_{44}) & \dots & (p_{1n}-p_{4n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (p_{12}-p_{n2}) & (p_{13}-p_{n3}) & (p_{14}-p_{n4}) & \dots & (1+p_{1n}-p_{nn}) \end{vmatrix}. \quad (D22)$$

Na podstawie (D6) wyznacznik macierzy B można zapisać jako

$$|B| = \begin{vmatrix} (1+p_1-p_{11}) & (p_2-p_{12}) & (p_3-p_{13}) & \dots & (p_n-p_{1n}) \\ (p_1-p_{21}) & (1+p_2-p_{22}) & (p_3-p_{23}) & \dots & (p_n-p_{2n}) \\ (p_1-p_{31}) & (p_2-p_{32}) & (1+p_3-p_{33}) & \dots & (p_n-p_{3n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (p_1-p_{n1}) & (p_2-p_{n2}) & (p_3-p_{n3}) & \dots & (1+p_n-p_{nn}) \end{vmatrix}. \quad (D23)$$

Uwzględniając, że macierze P_g i P są stochastyczne i zastępując pierwszą kolumnę sumą kolumn, a następnie każdy wiersz oprócz pierwszego różnicą tego wiersza i wiersza pierwszego oraz rozwijając na podwyznaczniki względem pierwszej kolumny otrzymamy

$$|B| = \begin{vmatrix} (1+p_{12}-p_{22}) & (p_{13}-p_{23}) & (p_{14}-p_{24}) & \dots & (p_{1n}-p_{2n}) \\ (p_{12}-p_{32}) & (1+p_{13}-p_{33}) & (p_{14}-p_{34}) & \dots & (p_{1n}-p_{3n}) \\ (p_{12}-p_{42}) & (p_{13}-p_{43}) & (1+p_{14}-p_{44}) & \dots & (p_{1n}-p_{4n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (p_{12}-p_{n2}) & (p_{13}-p_{n3}) & (p_{14}-p_{n4}) & \dots & (1+p_{1n}-p_{nn}) \end{vmatrix}. \quad (D24)$$

Porównując (D22) i (D24) możemy stwierdzić, że $\det W = \det B$ i na podstawie (D18), (D19) i (D25) uzyskamy

$$m_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{p_j} & i = j \\ \frac{\Delta_{11, jj}(i, j)[I - P + EP_{dg}(1n)]}{\Delta_{j1}[I - P]} & i \neq j \end{cases} \quad (D25)$$

Macierz P przejść w jednym kroku łańcucha opisującego binarną pętlę fazową jest macierzą trójdagonalną i na podstawie (D17) dla $j = i+1$ otrzymamy

$$\Delta_{1j} = \begin{vmatrix} 1-p_{22}+p_{12} & -p_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p_{32}+p_{12} & 1-p_{33} & -p_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +p_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & -p_{i-1i} & 0 & 0 \\ +p_{12} & 0 & \cdot & \cdot & +p_{ii-1} & \cdot & 0 \\ +p_{12} & 0 & 0 & \cdot & -p_{i+2i+1} & \cdot & 0 \\ +p_{12} & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & -p_{n-1n} \\ +p_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_{nn-1} & 1-p_{nn} \end{vmatrix} \quad (D26)$$

a po uwzględnieniu stochastyczności i zastąpieniu każdej kolumny k sumą kolumn od k do n uzyskamy

$$\Delta_{1j} = \begin{vmatrix} p_{12}+p_{21} & -p_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +p_{12} & +p_{32} & -p_{34} & 0 & 0 & 0 \\ +p_{12} & 0 & +p_{43} & -p_{45} & 0 & 0 \\ +p_{12} & 0 & 0 & +p_{54} & -p_{56} & 0 \\ +p_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_{n-1n} \\ +p_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & +p_{nn-1} \end{vmatrix} \quad (D27)$$

Zgodnie z rachunkiem wyznaczników możemy powyższy minor rozłożyć na dwa minory $\Delta_{1j} = \Delta_{1j}(1) + \Delta_{1j}(2)$ gdzie

$$\Delta_{1j}(1) = \begin{vmatrix} +p_{21} & -p_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +p_{32} & -p_{34} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +p_{43} & -p_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +p_{54} & -p_{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +p_{nn-1} \end{vmatrix}, \quad (D28)$$

$$\Delta_{1j}(2) = \begin{vmatrix} +p_{12} & -p_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +p_{12} & +p_{32} & -p_{34} & 0 & 0 & 0 \\ +p_{12} & 0 & +p_{43} & -p_{45} & 0 & 0 \\ +p_{12} & 0 & 0 & +p_{54} & -p_{56} & 0 \\ +p_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & -p_{n-1n} \\ +p_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & +p_{nn-1} \end{vmatrix}, \quad (D29)$$

po rozwinięciu których względem pierwszej kolumny otrzymamy

$$\Delta_{1j} = \left(\sum_{k=1}^i \prod_{l=1}^{k-1} p_{l,l+1} \prod_{l=k+1}^i p_{l,l-1} \right) \prod_{l=i+2}^n p_{l,l-1}. \quad (D30)$$

Dla łańcucha o trójdzielnej macierzy przejść [2]

$$\Delta_{j1} = \prod_{l=1}^{j-1} p_{l,l+1} \prod_{l=j+1}^n p_{l,l-1} \quad (D31)$$

i na podstawie (25), (30) i (31) dla $j = i+1$ otrzymamy

$$m_{ii+1} = \frac{\sum_{k=1}^i \prod_{l=1}^{k-1} p_{l,l+1} \prod_{l=k+1}^i p_{l,l-1}}{\prod_{l=1}^i p_{l,l+1}} \quad (D32)$$

co należało wyprowadzić.

BIBLIOGRAFIA

1. C. Dreger: *Analiza procesu synchronizacji elementowej w modemach transmisji danych*. Wyd. ITPW „REFERATY” Warszawa 1980, z. 92
2. C. Dreger: *O modelu Markowa binarnej pętli fazowej*. Rozprawy Elektrotechniczne. Warszawa, 1986, z. 4
3. L. E. Franks: *Carrier and bit synchronization in data communications*. A tutorial review, IEEE Trans. on Com., August 1980, Vol. Com-28, No 8
4. D. L. Issacson, R. W. Madsen: *Markow Chains Theory and Applications*. John Wiley, 1976
5. J. G. Kemeny, J. L. Snell: *Finite Markow Chains*. Princeton, New York, 1960
6. A. Erbil Payzin: *Analysis of a Digital Bit Synchronizer*. IEEE Trans. on Com., April 1983 Vol. Com-31, No 4

C. DREGER

METHOD OF CALCULATION OF THE FIRST TRANSIT TIME IN BINARY PLL

Summary

In this paper the method of calculation of the first transit time in binary PLL, modelled by a homogeneous first order Markov chain, is presented. Formulae are developed which lead to eliminating a complexity matrix analysis. The results of computations based on this method are included.

C. DREGER

MÉTHODE DE CALCUL DU TEMPS DE LA PROPAGATION DANS UNE BOUCLE DE PHASE BINAIRE

Résumé

Dans l'article on a présenté la méthode de calcul du temps de la propagation dans une boucle de phase binaire modélisée par une chaîne homogène de Markov du premier rang. On a défini les formules permettant d'éliminer un calcul matriciel compliqué. Les résultats des calculs obtenus à l'aide de cette méthode y sont inclus.

C. DREGER

BERECHNUNGSVERFAHREN FÜR DIE DURCHLAUFZEIT IM BINÄREN PHASENREGELKREIS

Zusammenfassung

Im vorliegenden Aufsatz wird eine Berechnungsweise der Durchlaufzeit im binären Phasenregelkreis dargestellt, der als homogene Markoff-Kette modelliert wurde. Derartige Modelle dienen als Basis für die Ableitung von Berechnungsformeln. Es werden Berechnungsbeispiele gebracht.

Ц. ДРЕГЕР

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ПЕРВОГО ДОСТИЖЕНИЯ В ЦЕПИ ФАЗОВОЙ
АВТОПОДСТРОЙКИ

Р е з ю м е

Представлен метод вычисления времени первого достижения в цепи фазовой автоподстройки моделированной регулярной цепью Маркова первого рода. Выведены формулы, которые позволяет легче, чем матричные решения, вычислять времена первого достижения. Представлены результаты вычислений найденные предложенным методом.

Wykorzystanie funkcji Greena do analizy słabego zjawiska naskórkowości zachodzącego w cienkiej płytce prostokątnej pod wpływem poprzecznego pola o dowolnej niejednorodności

JERZY GOŁĘBIEWSKI (Białystok)

Zakład Elektrotechniki Teoretycznej, Politechnika Białostocka

Otrzymano 1985.09.20

W artykule opracowano oparty na metodzie Greena sposób obliczenia wektorowego potencjału pola elektrycznego oraz strat mocy w cienkiej płytce prostokątnej przy dowolnej niejednorodności harmonicznego pola wzbudzającego. Stanowi to rozszerzenie wyników publikacji, w których analizowano tylko szczególne przypadki wymuszeń niejednorodnych, bądź jednorodnych (równomierne) pola zewnętrzne.

WSTĘP

Analiza słabego zjawiska naskórkowości wymuszonego w cienkiej płytce prostokątnej przez poprzeczne pole elektromagnetyczne była tematem wielu opracowań. Stosowano w nich zarówno metody dokładne (np. Rotha [8], separacji zmiennych [10]) jak i przybliżone (np. równań całkowych [16, str. 77], [19], Ritza, Kantorowicza [9], [10], [13]). W cytowanych wyżej publikacjach podano podstawowe układy równań, które opisują słabe zjawisko naskórkowości w sposób ogólny. Jednak przy konstrukcji analitycznego lub numerycznego rozwiązania tych układów zakładano, że strumień przenikający płytkę jest sinusoidalnie zmienny w czasie i że wartość zespolona indukcji nie zależy od współrzędnych geometrycznych (położenia), tzn.

$$B_0(x, z) = \text{const}$$

Tym samym wyniki wymienionych prac zostały ograniczone do klasy jednorodnych pól wzbudzających, pomimo ogólnego punktu wyjścia.

Szczególne przypadki pól niejednorodnych rozpatrzono w [18], [7, str. 224]. W [18] przyjęto, że wartość zespolona składowej normalnej wektora indukcji wymuszającej pole jest iloczynem dwóch funkcji, z których każda zależy od jednej zmiennej przestrzennej

$$B_0(x, z) = B_{mx} \varphi(x) f(z) \quad (0)$$

Dodatkowo założono tam symetrię wymuszenia względem osi odciętych z czyli parzystość względem rzędnych x

$$\varphi(-x) = \varphi(x) \quad (1)$$

oraz rozwijalność $\varphi(x)$ w szereg Fouriera

$$\varphi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C(m) \varphi_m(x) \quad (2)$$

W [7, str. 224] narzucono ograniczenia (1) i (2) na dwa wymiary

$$B_0(-x, -z) = B_0(x, z) \quad (1a)$$

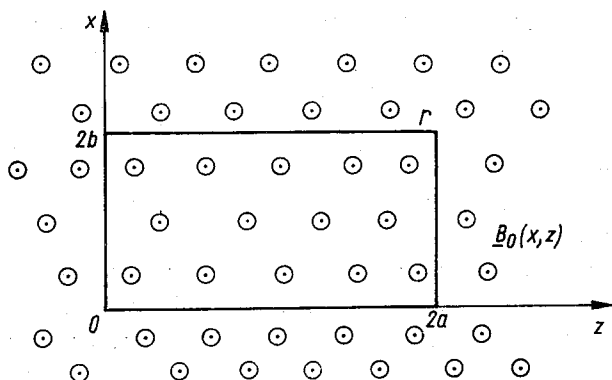
$$B_0(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B(m, n) g_n(x) h_m(z) \quad (2a)$$

Założenia (2) i (2a) są dość silne ponieważ nawet zupełność układu ortogonalnego nie gwarantuje jeszcze zbieżności szeregu Fouriera odpowiednio do funkcji $\varphi(x)$ lub $B_0(x, z)$ w każdym punkcie obszaru. Również jest poważnie ograniczona klasa funkcji dających się wyrazić jako iloczyn o zmiennych rozdzielonych (0) i spełniających zarazem założenie parzystości (1) lub (1a). Z tych powodów rozwiązania prezentowane w [18] i [7] nie uwzględniają dowolnej niejednorodności pola zewnętrznego i stanowią przypadek szczególny.

W niniejszym artykule przeprowadzono rozważania w oparciu o metodę Greena [3, str. 118], [6, str. 168]. Umożliwiło to analizę przypadku ogólnego, w którym wartość zespolona składowej normalnej wektora indukcji wzbudzającej prądy wirowe w płycie jest dowolną funkcją punktu położenia. Jedynym założeniem jest ciągłość $B_0(x, z)$ w rozpatrywanym obszarze.

1. ANALIZA MODELU

Prostokątna płytka przewodząca o wymiarach $2a$ na $2b$, grubości g i konduktywności γ znajduje się w poprzecznym polu elektromagnetycznym harmonicznie zmiennym w czasie. Niech wartość zespolona składowej normalnej indukcji magnetycznej w punktach płytki wynosi $B_0(x, z)$. Przyjęty układ współrzędnych pokazano na rys. 1.



Rys. 1. Przewodząca płytka prostokątna w poprzecznym polu elektromagnetycznym.

Przy znanych założeniach odnośnie słabej reakcji prądów wirowych i małych rozmiarów płytki wektor gęstości prądu ma tylko dwie składowe styczne. Jest to przyczyną zredukowania się wektorowego potencjału pola elektrycznego [12] do jednej składowej normalnej

$$\bar{T} = \frac{1}{g} u(x, z) \bar{1}_y$$

Można ją opisać [7], [8], [11] równaniem Poissona

$$\nabla^2 u(x, z) = j\omega\gamma g B_0(x, z) \quad (3)$$

z warunkiem brzegowym

$$u(\Gamma) = 0 \quad (4)$$

gdzie ω — pulsacja, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Γ — obwód płytki

Kryterium zakresu stosowalności zależności (3) i (4) sformułowano i udowodniono w [9]. Zgodnie z nim, wyniki niniejszej pracy są obarczone nieznacznym błędem, jeżeli magnetyczna liczba Reynoldsa jest nie większa od jedności

$$Re_m = 2\gamma\omega\mu g \sqrt{\frac{ab}{\pi}} \leq 1 \quad (4a)$$

gdzie μ — przenikalność magnetyczna

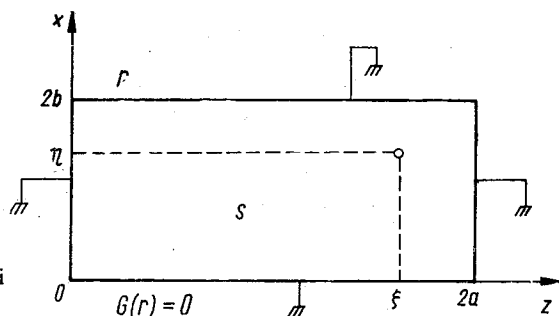
Funkcję Greena pierwszego rodzaju definiuje się [6, str. 171] jako rozwiązanie równania

$$\nabla^2 G = \delta(x-\eta) \delta(z-\xi) \quad (5)$$

z warunkiem Dirichleta

$$G(\Gamma) = 0, \quad (6)$$

gdzie $G = G(x, \eta, z, \xi)$, $(\eta, \xi) \in S$, S — pole prostokąta.



Rys. 2. Zagadnienie brzegowe dla funkcji Greena.

Aby scałkować równanie (3) należy zastosować symetryczną (drugą) tożsamość Greena [3], [4], [20] na płaszczyźnie względem u i G

$$\iint_S \begin{vmatrix} u(x, z) & G(x, \eta, z, \xi) \\ \nabla^2 u(x, z) & \nabla^2 G(x, \eta, z, \xi) \end{vmatrix} dx dz = \oint_{\Gamma} \begin{vmatrix} u(\Gamma) & G(\Gamma) \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} & \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\Gamma} \end{vmatrix} dl. \quad (7)$$

Po podstawieniu laplasjanów (3) i (5) do lewej oraz wartości brzegowych (4), (6) do prawej strony wzoru (7), rozwinięciu wyznaczników, zastosowaniu twierdzenia o filtrowaniu deltą Diraca otrzymano

$$u(\eta, \xi) = j\omega\gamma_g \iint_S G(x, \eta, z, \xi) B_0(x, z) dx dz. \quad (8)$$

Zgodnie z definicją wektorowego potencjału pola elektrycznego gęstość prądów wirowych wyznacza się z ogólnej zależności [11]

$$\vec{J} = \frac{1}{g} \text{rot}[\vec{u}(x, z) \vec{1}_y] \quad (9)$$

W [11] podano też wzór na straty mocy spowodowane polem równomiernym. Przy takim wymuszeniu jego faza jest stała w rozpatrywanym obszarze

$$\varphi(x, y) = \arg[B_0(x, y)] = \text{const.}, (x, y) \in S \quad (9a)$$

i można tak dobrać początkową chwilę czasu, by wartość tej stałej wynosiła $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ w S .

Gdy założenie (9a) nie jest spełnione (np. w przypadku pola biegnącego), powyższego wywodu nie można powtórzyć (różnym punktom płytki odpowiada różna chwila początkowa). W konsekwencji rozwiązanie równania (3) pozostanie funkcją zespoloną.

W dodatku I zamieszczonym na końcu niniejszej pracy uwzględniono ten fakt i tak zmodyfikowano podany w [11] wzór na straty mocy, by był również prawdziwy dla nierównomiernej fazy wzbudzenia

$$P = -j\omega \iint_S U^*(x, z) B_0(x, z) dx dz \quad (10)$$

gdzie $U^*(x, z)$ — sprzężona wartość zespolonej funkcji prądu.

Efektywne wykorzystanie wzoru (8) uwarunkowane jest wyznaczeniem funkcji Greena w analizowanym obszarze.

2. FUNKCJA GREENA RÓWNANIA POISSONA Z WARUNKAMI BRZEGOWYMI PIERWSZEGO RODZAJU DLA OGRANICZONEGO OBSZARU PROSTOKĄTNEGO

Kształt obszaru (prostokąt) zdecydowanie sugeruje, że równanie (5) należy scałkować metodą Rotha [14, str. 247]. Zgodnie z nią, poszukiwane rozwiązanie ma postać podwójnego szeregu Fouriera

$$G(x, \eta, z, \xi) = \sum_n \sum_m A(n, m) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} K_n x \cdot \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} K_m z. \quad (11)$$

Jednakże warunek brzegowy (6) spełniają tylko sinusy

$$\sin\left(\frac{m\pi}{2a} z\right), m \in N \quad \text{oraz} \quad \sin\left(\frac{n\pi}{2b} x\right), n \in N. \quad (12)$$

Wynika stąd, że ogólne rozwiązanie (11) zredukuje się do następującej sumy

$$G(x, \eta, z, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A(n, m) \sin\left(\frac{n\pi}{2b} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2a} z\right). \quad (13)$$

Obliczając z (13) pochodne cząstkowe rzędu drugiego względem x i z oraz podstawiając je do (5) otrzymano

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A(n, m) \left(\frac{n^2 \pi^2}{4b^2} + \frac{m^2 \pi^2}{4a^2} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2b} x \right) \sin \left(\frac{m\pi}{2a} z \right) = -\delta(x-\eta) \cdot \delta(z-\xi). \quad (14)$$

Obliczając całki

$$\int_0^{2a} \sin \left(\frac{m\pi}{2a} z \right) \sin \left(\frac{K\pi}{2a} z \right) dz = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \neq K \\ a & \text{dla } m = K \end{cases} \quad (15)$$

$$\int_0^{2b} \sin \left(\frac{n\pi}{2b} x \right) \sin \left(\frac{l\pi}{2b} x \right) dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq l \\ b & \text{dla } n = l \end{cases} \quad (16)$$

stwierdzono, że ciągi funkcji (12) są ortogonalne odpowiednio w przedziałach $(0, 2a)$ i $(0, 2b)$. Stałą szeregu (14) można więc wyznaczyć ze wzoru na współczynnik uogólnionego, podwójnego szeregu Fouriera [3]

$$A(n, m) \left(\frac{n^2 \pi^2}{4b^2} + \frac{m^2 \pi^2}{4a^2} \right) = - \frac{\int_0^{2b} \int_0^{2a} \delta(z-\xi) \delta(x-\eta) \sin \left(\frac{m\pi}{2a} z \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2b} x \right) dz dx}{\int_0^{2b} \int_0^{2a} \sin^2 \left(\frac{m\pi}{2a} z \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2b} x \right) dz dx}, \quad (17)$$

skąd wynika

$$A(n, m) = - \frac{1}{ab} \frac{\sin \left(\frac{n\pi}{2b} \eta \right) \sin \left(\frac{m\pi}{2a} \xi \right)}{\left(\frac{n^2 \pi^2}{4b^2} + \frac{m^2 \pi^2}{4a^2} \right)} \quad (18)$$

Podstawiając (18) do (13), przedstawiając kolejność sumowania i zamieniając iloczyn sinusów z indeksami n na różnicę cosinusów otrzymano

$$G(x, \eta, z, \xi) = - \frac{2}{\pi^2} \frac{b}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \left(\frac{m\pi}{2a} z \right) \sin \left(\frac{m\pi}{2a} \xi \right) \times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \left[n \frac{\pi(\eta-x)}{2b} \right]}{n^2 + \frac{b^2 m^2}{a^2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \left[n \frac{\pi(x+\eta)}{2b} \right]}{n^2 + \frac{b^2 m^2}{a^2}} \right\}. \quad (19)$$

Za pomocą twierdzenia całkowego Cauchy'ego o residuach [15] można zsumować następujący szereg dla $0 \leq y \leq 2\pi$ [17, str. 48]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos ny}{n^2 + d^2} = - \frac{1}{2d^2} + \frac{\pi}{2d} \frac{\operatorname{ch}(y-\pi)d}{\operatorname{sh} \pi d}. \quad (20)$$

Dla $0 \leq x \leq \eta$ są prawdziwe poniższe nierówności

$$0 \leq \frac{(\eta-x)\pi}{2b} \leq 2\pi \text{ i } 0 \leq \frac{(\eta+x)\pi}{2b} \leq 2\pi. \quad (21)$$

Do zsumowania wewnętrznych szeregów zależności (19) zastosowano więc wzór (20). Po zastąpieniu różnicy funkcji hiperbolicznych ich iloczynem [1] i uporządkowaniu otrzymuje się dla $0 \leq x \leq \eta$

$$G(x, \eta, z, \xi) = -\frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{2a} z\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2a} \xi\right)}{m \operatorname{sh}\left(\frac{m\pi b}{a}\right)} \times \\ \times \operatorname{sh}\left(\frac{m\pi}{2a} x\right) \operatorname{sh}\left[\frac{m\pi}{2a} (2b-\eta)\right] \quad (22)$$

W wyrażeniu (19) można podstawić

$$\cos\left[n \frac{\pi(\eta-x)}{2b}\right] = \cos\left[n \frac{\pi(x-\eta)}{2b}\right]. \quad (23)$$

Dla $\eta \leq x \leq 2b$ są więc spełnione nierówności

$$0 \leq \frac{(x-\eta)\pi}{2b} \leq 2\pi \text{ i } 0 \leq \frac{(x+\eta)\pi}{2b} \leq 2\pi. \quad (24)$$

Po zastosowaniu wzoru sumacyjnego (20) i dokonaniu analogicznych jak w (22) przekształceń otrzymuje się dla $\eta \leq x \leq 2b$

$$G(x, \eta, z, \xi) = -\frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{2a} z\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2a} \xi\right)}{m \operatorname{sh}\left(\frac{m\pi b}{a}\right)} \times \\ \times \operatorname{sh}\left(\frac{m\pi}{2a} \eta\right) \operatorname{sh}\left[\frac{m\pi}{2a} (2b-x)\right]. \quad (25)$$

Łącząc ze sobą wzory (22) i (25) ostatecznie stwierdzono, że

$$G(x, \eta, z, \xi) = -\frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{2a} z\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2a} \xi\right)}{m \operatorname{sh}\left(\frac{m\pi b}{a}\right)} \times \\ \times \begin{cases} \operatorname{sh}\left(\frac{m\pi}{2a} x\right) \operatorname{sh}\left[\frac{m\pi}{2a} (2b-\eta)\right] & \text{dla } 0 \leq x \leq \eta \\ \operatorname{sh}\left(\frac{m\pi}{2a} \eta\right) \operatorname{sh}\left[\frac{m\pi}{2a} (2b-x)\right] & \text{dla } \eta \leq x \leq 2b. \end{cases} \quad (26)$$

3. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

Celem sprawdzenia poprawności obliczeń scałkowano (8) dla jednorodnego wymuszenia i rezultat porównano z danymi literaturowymi. Stwierdzono, że wzory (8), (13) i (18) prowadzą przy $B_0 = \text{const}$ do identycznych jak w [8] zależności.

Z kolei zastosowanie wzorów (8) i (26) daje następujący wynik dla $B_0 = \text{const}$

$$u(x, z) = -j \frac{32\omega\gamma g B_0 a^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sh} \left[\frac{(2m-1)\pi}{4a} (2b-x) \right]}{(2m-1)^3} \times \\ \times \frac{\text{sh} \left[\frac{(2m-1)\pi}{4a} x \right] \sin \left[\frac{(2m-1)\pi}{2a} z \right]}{\text{ch} \left[\frac{(2m-1)\pi b}{2a} \right]}. \quad (27)$$

Jak widać, każdy wyraz szeregu jest iloczynem. Natomiast zależność wyprowadzona w [10] zawiera oprócz szeregu dodaną funkcję w postaci zwartej. Przyczyną tej formalnej różnicy jest fakt wykorzystania różnych metod analizy. Metoda Greena nie wymaga bowiem (w przeciwieństwie do metody rozdzielenia zmiennych [10]) przedstawienia rozwiązania równania Poissona (3) jako sumy całki ogólnej i szczególnej. Naturalnie po podstawieniu (27) do (10), scałkowaniu przy $B_0 = \text{const}$, zsumowaniu szeregu [17]

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad (28)$$

otrzymuje się taki sam jak w [10] wzór na straty mocy w płytce dla $B_0 = \text{const}$

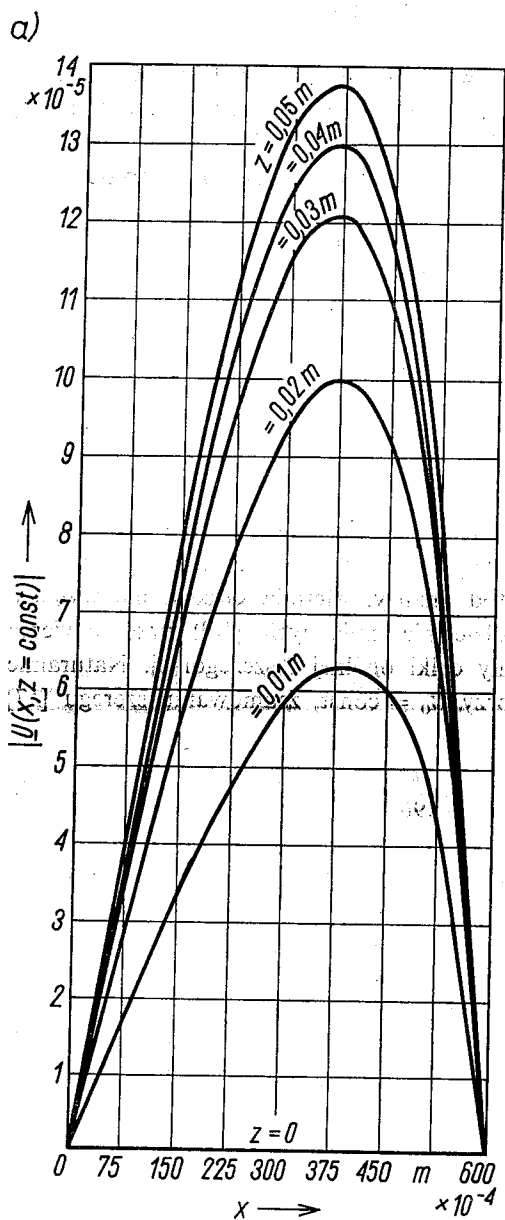
$$p = \frac{4}{3} \gamma_g \omega^2 |B_0|^2 a^3 b \left(1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{th} \left[\frac{(2m-1)\pi b}{2a} \right]}{(2m-1)^5} \right). \quad (29)$$

Rozpatrzmy obecnie przykład wymuszenia nierównomiernego. Niech

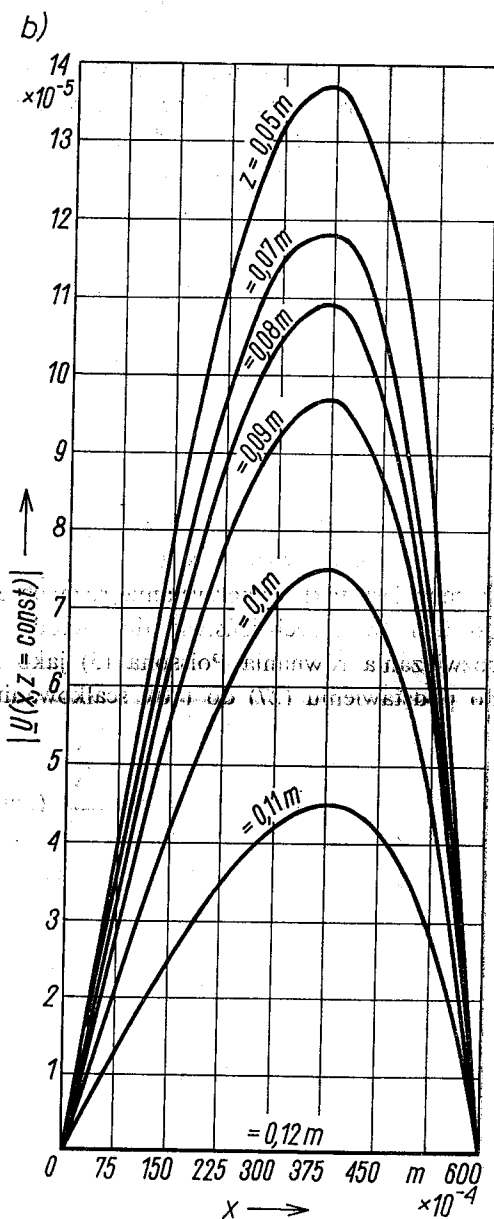
$$B_0(x, z) = B \text{sh} \left(\frac{x}{2a} \right) \cos \left(\frac{z}{2a} \right) \quad (30)$$

Kładąc (26) i (30) do (8) uzyskano następujące wyrażenie na prąd, przepływający przez dowolną linię łączącą punkt $(x, z) \in S$ z brzegiem płytki, proporcjonalny do składowej normalnej wektorowego potencjału pola elektrycznego

$$u(x, z) = j8\omega\gamma g a^2 B \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \left(\frac{m\pi}{2a} z \right)}{\text{sh} \left(\frac{m\pi b}{a} \right)} \left[\frac{(-1)^m \cos(1) - 1}{m^2 \pi^2 - 1} \right] \cdot [l_m(x) + p_m(x) + r_m(x)] \quad (31)$$



Rys. 3a. Rozkład modułu funkcji prądu (funkcji strumienia) (31) dla $z \in \langle 0, 0,05 \rangle$ m.



Rys. 3b. Rozkład modułu funkcji prądu (funkcji strumienia) (31) dla $z \in \langle 0,05, 0,12 \rangle$ m.

gdzie

$$l_m(x) = \frac{\operatorname{sh} \left[\frac{m\pi}{2a} (2b-x) \right]}{m^2\pi^2 - 1} \cdot \left[m\pi \operatorname{sh} \left(\frac{x}{2a} \right) \operatorname{ch} \left(\frac{m\pi}{2a} x \right) - \operatorname{sh} \left(\frac{m\pi}{2a} x \right) \operatorname{ch} \left(\frac{x}{2a} \right) \right];$$

$$P_m(x) = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{m\pi}{2a}x\right)}{1-m\pi} \operatorname{ch}\left[\frac{(1-m\pi)}{4a}(2b+x) + m\pi\frac{b}{a}\right] \cdot \operatorname{sh}\left[\frac{(1-m\pi)}{4a}(2b-x)\right];$$

$$r_m(x) = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{m\pi}{2a}x\right)}{1+m\pi} \operatorname{ch}\left[\frac{(1+m\pi)}{4a}(2b+x) - m\pi\frac{b}{a}\right] \cdot \operatorname{sh}\frac{(1+m\pi)}{4a}(x-2b)\Bigg].$$

Moduł funkcji prądu (31) stabilizowano numerycznie dla poniższych parametrów

$$\omega = 314 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \mu = \mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{H}}{\text{m}}$$

$$\gamma_{\text{Al}} = 34 \cdot 10^6 \frac{1}{\Omega \text{m}} \quad |B| = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

$$g = 10^{-4} \text{ m} \quad 2a = 0,12 \text{ m} \quad 2b = 0,06 \text{ m}$$

Otrzymane wyniki przedstawiono graficznie na rys. 3a i 3b. Posługując się tymi wykresami porównano moduły zależności (31) w punktach symetrycznych względem osi płytki ($x = 0,03 \text{ m}$, $z = 0,06 \text{ m}$), nie leżących na jej obwodzie. Stwierdzono, że wartości modułu są większe w punktach położonych bliżej prostych $x = 0,06 \text{ m}$ lub $z = 0$. Pole wzbudzenia (30) posiada taką samą własność, co tłumaczy powyższą asymetrię rozkładu $|u(x, z)|$.

Łącząc środkowe punkty płytki z jej brzegiem otrzymuje się najdłuższe linie, a więc i największe wartości płynącego przez nie prądu [7]. Uzasadnia to położenie maksymalnych wartości $|u(x, z)|$ w centralnym fragmencie płytki. Łatwo zauważyć, że rozwiązania (31) nie można otrzymać na podstawie zależności podanych w [18] i [7] ponieważ wzbudzenie (30) nie spełnia przyjętych tam założeń (1) i (1a).

4. PODSUMOWANIE WYNIKÓW

Rozwiązanie (26) podstawione do zależności (8) umożliwia obliczenie w rozpatrywanym prostokącie wektorowego potencjału pola elektrycznego $\frac{1}{g} u(x, z) \vec{1}_y$, przy dowolnie zadanym (lecz ciągłym) wzbudzeniu niejednorodnym $B_0(x, z)$. Stanowi to rozszerzenie wyników prac [8], [9], [10], [16, str. 77], [19], w których efektywnie analizowano tylko jednorodne pola zewnętrzne oraz [18] i [7, str. 224], gdzie silne założenia (0), (1), (1a) (2), (2a) poważnie ograniczyły ogólność rozważań. Ponadto rozwiązanie podane w [7] jest podwójnym szeregiem trygonometrycznym, którego wolna zbieżność stanowi pewną wadę [2], [5].

Wspomnianej wady nie posiada metoda przedstawiona w niniejszym artykule, bowiem w wyniku częściowego zsumowania funkcji Greena daje ona rozwiązanie w postaci pojedynczego szeregu, np. (27), (31). Zastosowana w pracy metoda Greena jest też korzystniejsza od metody rozdzielania zmiennych. Warunkiem koniecznym jej stosowalności jest bowiem znajomość całki szczególnej równania Poissona (3), której określenie stanowi bardzo poważną trudność [9, rozdział 3]. Przy wykorzystaniu funkcji Greena problem ten w ogóle nie występuje, co jest zaletą prezentowanych w artykule rozważań. W niniejszej

publikacji uogólniono również wzór na straty mocy (10) w taki sposób, by faza pola wymuszającego mogła być funkcją współrzędnych przestrzennych, a nie tylko dowolną stałą jak w [9], [11].

Przedstawiony algorytm może być stosowany do analizy słabego zjawiska naskórkowości zachodzącego w płytkach innych kształtów, pod warunkiem wyznaczenia odpowiednich funkcji Greena.

5. EWENTUALNE ZASTOSOWANIA

Ważnym elementem wielu układów elektrycznych są cienkie warstwy przewodzące naniesione na powierzchnię dielektryka (np. uzwojenia i obwody drukowane). Analiza zjawisk elektromagnetycznych zachodzących w takich warstwach jest istotnym zadaniem technicznym. Grubość omawianych warstw jest znikoma, więc przy częstotliwości przemysłowej kryterium magnetycznej liczby Reynoldsa (4a) jest spełnione dla obwodów drukowanych na płytkach o małej i średniej powierzchni.

Prezentowane w artykule rozważania mogą też służyć do analizy prądów wirowych w rdzeniach ferrytowych o przekroju prostokątnym, gdzie ze względu na bardzo małą konduktywność $\left(10^{-10} \frac{1}{\Omega \cdot m}\right)$ warunek (4a) jest dobrze spełniony nawet przy wysokich częstotliwościach [9]. Badana konfiguracja (rys. 1) tworzy też model obliczeniowy strat dodatkowych w niewielkich, prostokątnych detalach paramagnetycznych (np. w podkładkach). W mniejszym stopniu (duże, lecz jeszcze dopuszczalne wartości liczby Reynoldsa) model ten odnosi się do wierzchnich pakietów ścianek przenikanych przez strumienie rozproszenia transformatorów i dławików [8], [18].

Podane w artykule dokładne wzory analityczne mogą być również wykorzystane do testowania programów obliczeń numerycznych dokonywanych różnymi metodami.

DODATEK I

Wyprowadzenie wzoru (10).

Moc odpowiadająca stratom cieplnym jest określona prawem Joule'a-Lenza. W dyskuutowanym przypadku ma ono postać

$$P = \frac{g}{\gamma} \iint_S ||\vec{J}||^2 dS. \quad (32)$$

Kwadrat normy wektora zespolonego jest równy sumie kwadratów modułów składowych tego wektora [7]

$$||\vec{J}||^2 = |J_x|^2 + |J_z|^2. \quad (33)$$

Z (9) wynika

$$||\vec{J}||^2 = \frac{1}{g^2} \left[\left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 \right] \quad (34)$$

czyli

$$\|\vec{J}\|^2 = \frac{1}{g^2} \|\text{grad } u\|^2. \quad (35)$$

Kwadrat normy gradientu można wyrazić za pomocą poniższego iloczynu skalarnego [7]

$$\|\text{grad } u\|^2 = \text{grad } u \cdot (\text{grad } u)^* = \text{grad } u \cdot \text{grad } u^*. \quad (36)$$

Podstawiając (36) do (35), a następnie (35) do (32) otrzymano

$$p = \frac{1}{g\gamma} \iint_S \text{grad } u \cdot \text{grad } u^* dS \quad (37)$$

Niesymetryczna (pierwsza) tożsamość Greena [20] na płaszczyźnie względem u i u^* daje związek

$$\iint_S \text{grad } u \cdot \text{grad } u^* dS = \oint_{\Gamma} u^* \frac{\partial u}{\partial n} dl - \iint_S u^* \nabla^2 u dS \quad (38)$$

Z (4) jest

$$u^*(\Gamma) = 0 \quad (39)$$

Kładąc (39) do (38) i później (38) do (37) stwierdzono, że

$$p = -\frac{1}{g\gamma} \iint_S u^* \nabla^2 u dS \quad (40)$$

Wykorzystując (3) otrzymuje się wyprowadzony wzór (10)

$$p = -j\omega \iint_S u^*(x, z) B_0(x, z) dx dz. \quad (41)$$

DODATEK II

Przypadki szczególne wzoru (10)

Jeżeli faza $B_0(x, z)$ w obszarze S jest stała (np. dla fali stojącej), to można dobrać tak początkową chwilę czasu, by faza ta wynosiła $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. Wówczas

$$B_0(x, z) = -jB_0(x, z), \quad (42)$$

gdzie $B_0(x, z)$ przyjmuje wartości rzeczywiste tak jak i prawa strona równania (3)

$$\nabla^2 u(x, z) = \omega\gamma g B_0(x, z) \quad (43)$$

z warunkiem

$$u(\Gamma) = 0. \quad (44)$$

Łatwo jest udowodnić, że równanie Poissona z rzeczywistą prawą stroną i z zerowym warunkiem Dirichleta ma rozwiązanie rzeczywiste. W tym celu wystarczy rozpisać (43)

oraz (44) na część realną i urojoną, zaś do tej ostatniej zastosować twierdzenie nr 1 podane w [21, str. 89]. Stąd cała zagadnienia brzegowego (43) i (44) spełnia warunek

$$u(x, z) = u(x, \bar{z}), \quad (45)$$

Jeżeli więc wymuszenie $B_0(x, z)$ ma stałą fazę w S , to we wzorze (41) można pominąć oznaczenie wartości zespolonej (kreskę) oraz sprzężonej (gwiazdkę). Uwzględniając dodatkowo (42) otrzymano

$$p = -\omega \iint_S u(x, z) B_0(x, z) dx dz. \quad (46)$$

W przypadku równomiernego modułu wzbudzenia $B_0(x, z) = B_0$ zależność (46) przybiera postać dobrze znaną w literaturze [9], [11]

$$p = -\omega B_0 \iint_S u(x, z) dx dz.$$

BIBLIOGRAFIA

1. J. Antoniewicz: *Tablice funkcji dla inżynierów*. Warszawa: PWN, 1969
2. K. J. Binns, P. J. Lawrenson: *Analysis and computation of electric and magnetic field problems*. New York, 1963
3. Z. Ciok: *Metody obliczania pól elektromagnetycznych i przepływowych*. Warszawa: Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, 1981
4. R. E. Collin: *Prowadzenie fal elektromagnetycznych*. Warszawa: WNT, 1966
5. Ł. W. Kantorowicz, W. J. Kryłow: *Pribliżennyye metody wysszewo analiza*. Moskwa, 1950
6. E. Kącki: *Równania różniczkowe cząstkowe w elektrotechnice*. Warszawa: WNT, 1971
7. M. Krakowski: *Elektrotechnika teoretyczna*. Tom II. *Pole elektromagnetyczne*. Warszawa—Poznań: PWN, 1980
8. S. J. Lure: *Rasczet vichrevykh tokov v tonkoj plastinke dla opredelenija dobavocznykh poter w transformatrach i reaktorach*. Elektrichestvo 1968, nr 6
9. J. Purczyński: *Wykorzystanie metody rozdzielania zmiennych i metod wariacyjnych do analizy stacjonarnych pól elektromagnetycznych*. Szczecin, Prace Naukowe Politechniki Szczecińskiej nr 74, 1977. Rozprawa habilitacyjna
10. J. Purczyński, R. Sikora, W. Lipiński: *Prądy wirowe w cienkich blachach*. Archiwum Elektrotechniki 1972, z. 4
11. R. Sikora: *Teoria pola elektromagnetycznego*. Warszawa: WNT, 1985
12. R. Sikora (pod redakcją): *Wybrane zagadnienia z teorii pola elektromagnetycznego*. Warszawa—Poznań: PWN, 1984
13. R. Sikora, J. Purczyński, W. Lipiński, M. Gramz: *Use of variational methods to the eddy-currents calculation in conducting plates*. IEEE Transactions on Magnetics 1978, vol 14
14. J. Turowski: *Obliczenia elektromagnetyczne elementów maszyn i urządzeń elektrycznych*. Warszawa: WNT, 1982
15. W. Żakowski, W. Leksiński: *Matematyka cz. IV*. Warszawa: WNT, 1973
16. J. Poltz: *Metody analizy strat wiroprądowych*. Warszawa—Poznań: PWN, 1982
17. J. M. Ryżyk, J. S. Gradsztejn: *Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów*. Warszawa: PWN, 1964
18. D. N. Morozow: *Rasczet miestnykh i obszczikh poter w plastinkach pronizywayemykh potokom rassiejaniya transformatorow i reaktorow*. Elektrichestvo 1967, nr 12

19. G. de Mey: *A method for calculating eddy currents in plates of arbitrary geometry*. Archiv für Elektrotechnik 1974, Band 56, Heft 3
20. T. Trajdos-Wróbel: *Matematyka dla inżynierów*. Warszawa: WNT, 1966
21. R. Matusiak: *Elektrotechnika Teoretyczna*. Tom II. *Teoria pola elektromagnetycznego*. Warszawa: WNT, 1982

J. GOŁĘBIEWSKI

GREEN'S FUNCTION APPLIED TO WEAK SKIN EFFECT WITHIN A THIN SMALL RECTANGULAR PLATE DUE TO A TRANSVERSAL FIELD OF ARBITRARY HETEROGENEITY

Summary

The author develops a procedure, based on Green's method, of vector calculation of the electric field potential and power losses in a thin rectangular plate due to a heterogeneous exciting field. It is an extension of published results concerning peculiar cases of heterogeneous or homogeneous external fields.

J. GOŁĘBIEWSKI

APPLICATION DE LA FONCTION DE GREEN A L'ANALYSE DU FAIBLE EFFET DE PEAU SE PRODUISANT DANS UNE MINCE PLAQUE RECTANGULAIRE SOUS L'ACTION DU CHAMP TRANSVERSAL A HÉTÉROGÉNÉITÉ ARBITRAIRE

Résumé

En se basant sur la méthode de Green, dans l'article on décrit le mode de calcul du potentiel vectoriel du champ électrique et des pertes de puissance dans une mince plaque rectangulaire pour l'hétérogénéité du champ d'excitation harmonique arbitraire. Cela constitue une extension des résultats des publications, dans lesquelles n'ont été analysés que les cas particuliers des contraintes hétérogènes ou bien les champs homogènes (uniformes) extérieurs.

J. GOŁĘBIEWSKI

NUTZUNG DER GREEN-FUNKTION FÜR DIE ANALYSE DES SCHWACHEN, IN EINER DÜNNEN RECHTECKPLATTE UNTER DEM EINFLUSS DES QUERFELDES MIT BELIEBIGER UNGLEICHARTIGKEIT AUFTRETENDEN HAUTEFFEKTES

Zusammenfassung

Im Artikel bearbeitete man die Vektorberechnungsmethode des Potentials eines elektrischen Feldes und der Wirbelstromverluste in dünner Rechteckplatte bei beliebiger Ungleichartigkeit des harmonischen Erregerfeldes. Die Analyse wurde an Hand der Green-Methode durchgeführt. Dies bedeutet eine Ausdehnung derjenigen Publikationen, worin nur besondere Fälle der inhomogenen oder homogenen (gleichmäßigen) Außenfelder analysiert worden sind.

Е. ГОЛЕМБИОВСКИ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ АНАЛИЗА СЛАБОГО ПОВЕРХНОСТНОГО ЯВЛЕНИЯ В ТОНКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТКЕ ПОД ВЛИЯНИЕМ ПОПЕРЕЧНОГО ПОЛЯ ЛЮБОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

Резюме

Приведен обоснованный на методе Грина способ расчета векторного потенциала электрического поля и потерь мощности в тонкой прямоугольной плитке при любой неоднородности гармоничного возбуждающего поля. Это является расширением результатов публикаций, в которых проанализированы только отдельные случаи неоднородных воздействий или однородные (равномерные) внешние поля.

A contribution to the analysis of the electromagnetic field on the surface of solid iron of variable magnetic permeability

MARCELI KAŻMIERSKI (Łódź)

Instytut Energetyki, Zakład Badań Transformatorów w Łodzi

Otrzymano 1984.09.12

Application of an equivalent complex magnetic permeability μ_z of solid iron for a power frequency electromagnetic field analysis, provided that surface dimensions of iron elements are more than few centimeters, is theoretically proved. The permeability, generally found by measurement on ring-shaped samples, may be inserted directly into the Maxwell equations, giving in consequence simplified final equations as for $\mu = \text{const.}$ and confines the problem to non-linear boundary conditions. As an illustrative example of the proposed procedure, an analysis of the electromagnetic field for an arrangement consisting of a.c. carrying parallel conductors in parallel with a ferromagnetic half-space, is submitted. Also the effect of the electromagnetic properties of solid iron ($\mu = f(H); \gamma$) and of its temperature on the final computation results is examined. The high diversity of the parameters, due to great differences in chemical composition and of thermal and mechanical processing (which, in some cases, is quite pronounced even for the same grade constructional steels) complicates a comparison of the calculated and measured results and essentially limits their conformity.

1. INTRODUCTION

Analysis of a power frequency electromagnetic field in simple systems consisting of solid iron elements of variable magnetic permeability is essentially a conventional problem of power electrodynamics — compare [6], [8], [10], [11], [12], [14], [15], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [27], [28], [33], [34], [35], and other authors¹⁾. In spite of such wide interest, which is primarily associated with a possibility of various practical applications, the problem cannot be considered as fully and thoroughly examined.

In general the magnetic permeability of a piece of solid iron placed in an electromagnetic field is a function the coordinates x, y, z and time t :

$$\mu = \mu[H(x, y, z, t)] = \mu(x, y, z, t) \quad (1)$$

In the above expression the following are taken into consideration: three-dimensional variations of the magnetic permeability as well as its variations with time in every point

¹⁾ Only limited number of literature on the discussed problems is listed in References.

of the metal, resulting from the hysteresis loop $B(t) = f[H(t)]$ for the maximum value of the magnetic field strength in a given point. It was proved experimentally that these factors contribute to distortions of waves of the electromagnetic field vectors, namely magnetic flux density $B(t)$, magnetic field strength $H(t)$ and electric field strength $E(t)$.

List of some symbols used in the paper:

A — vector magnetic potential, instantaneous value [Wb/m]; $\underline{A}$ — complex amplitude of the vector; $\underline{A}_z$ — complex amplitude of a z -component of the vector; A — amplitude of the vector,

E — vector of the electric field strength, instantaneous value [V/m], other symbols as for A ,

f — frequency [Hz],

H — vector of the magnetic field strength, instantaneous value [A/m], other symbols as for A ,

j — imaginary unit, $j^2 = -1$,

$\alpha = \sqrt{j\omega\mu\gamma}$ — complex coefficient of wave damping in a conducting medium [1/m],

$\delta(x)$ — Dirac's function,

$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ — absolute magnetic permeability [H/m]; μ_r — relative magnetic permeability; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m,

$\omega = 2\pi f$ — angular frequency [rad/s].

As yet no publications has appeared to discuss the problem in the way presented here for multidimensional fields. It was only solved for one-dimension field by the use of a computer technique — e.g. [35].

Essential simplification of equation (1) is based on an assumption that the magnetic permeability is independent of time, what means in practice that it is independent of the instantaneous — $H(t)$; but depends on the maximum — H_m value of the magnetic field strength in a given point of the metal medium:

$$\mu = \mu[H_m(x, y, z)] = \mu(x, y, z). \quad (2)$$

Numerical solutions obtained under such conditions are based either on the finite differences method [25] or on the method of finite elements — [10], [12], more and more widely accepted nowadays. It should be noted that as a result of the use of the simplified formula (2), the higher harmonics in $H(t)$, $B(t)$ and $E(t)$ waves, resulting from the magnetic non-linearity of the conducting medium, are eliminated. Hence the method is approximate and the correspondence between the electric and magnetic field strengths and the magnetic flux density waves in a real ferromagnetic material, and in its mathematical model, should be interpreted as the correspondence between equivalent distorted and undistorted sine waves.

Further simplification is based on the dependence of the magnetic permeability of the solid iron on the amplitude of a tangential component of the magnetic field strength at the metal surface:

$$\mu = \mu[H_{ms}(x, y)] = \mu(x, y). \quad (3)$$

It leads either to approximate solutions of the field equations as with $\mu = \text{const.}$ with appropriate correction coefficients (Nejman's conception — [27], later utilized and de-

veloped e.g. in works [8], [24]) or to the also approximate solutions based on the equivalent magnetic permeability (μ_z) of solid iron — [19]. The origin of this conception appeared nearly forty years ago — e.g. [30]. The permeability has a complex form:

$$\underline{\mu}_z = \underline{\mu}_z[H_{ms}(x, y)] = \mu_z(x, y)\exp[-j\Psi(x, y)]. \quad (4)$$

The equivalent magnetic permeability defined in such a manner, being a function of surface associated coordinates, may be treated as a physical quantity and may be directly introduced into the Maxwell's equations. The first part of the paper deals with more detailed justification of such a procedure.

It is evident that the accuracy of the above mentioned methods for the electromagnetic field analysis when solid iron is involved, depends largely on the accuracy of determination of the electromagnetic characteristics ($\gamma; \mu = f(H)$) for a particular grade of steel. The effect of these parameters on the calculated electromagnetic field components on the solid iron surface is illustrated by an example of parallel conductors placed above steel half-space — see Fig. 2.

The work reported in this paper was carried out as a part of the government-sponsored project 05.5A "Chosen fundamental problems in electrical engineering".

2. USE OF THE EQUIVALENT MAGNETIC PERMEABILITY FOR MULTI-DIMENSIONAL ARRANGEMENTS

2.1. BASIC FORMULAE

Let us investigate a conducting medium characterized by μ and γ and bounded by surface A. In point P, being the projection of point P_1 on surface A, an orthogonal coordinate system z, η, ξ may be proposed, where z -coordinate is normal to surface A and η and ξ are surface associated coordinates on A — Fig. 1. It can be proved that if curvature radius R of surface A is large compared with the depth of electromagnetic field penetration

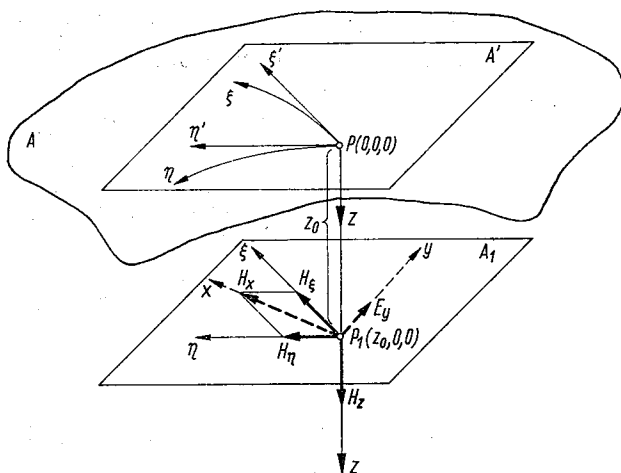


Fig. 1. Orthogonal coordinate system in a conducting medium.

into metal, appropriate Maxwell's equations with z, η, ξ coordinates are similar to those with Cartesian coordinates. E.g. for the magnetic field strength the divergence operator expressed by z, η, ξ coordinates has the form [7]:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (e_2 e_3) H_\xi + \frac{\partial}{\partial \eta} (e_3 e_1) H_\eta + \frac{\partial}{\partial z} (e_1 e_2) H_z \right], \quad (5)$$

where e_1, e_2, e_3 are Lamé's coefficients. They are equal to (see Appendix 1)

$$e_1 = e_2 = 1 + \frac{z}{R(\xi, \eta)}; \quad e_3 = 1,$$

where R is the local curvature radius of surface A in point P . Thus, when practical z -variations are small compared with the curvature radius of the boundary surface, which is true in practice for all metal media having the surface dimensions exceeding a few centimeters, it can be assumed that $e_1 = e_2 = e_3 = 1$ and:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{\partial H_\xi}{\partial \xi'} + \frac{\partial H_\eta}{\partial \eta'} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \cong \frac{\partial H_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial H_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \quad (6)$$

where η', ξ' are Cartesian coordinates laying on plane A' .

Inside the metal medium, in point $P_1(z_0, 0, 0)$, a local orthogonal system of Cartesian coordinates x, y, z may be so determined as to have the x -axis to coincide with the resultant field strength, tangential to surface A .

$$H_x = \sqrt{H_\eta^2 + H_\xi^2}.$$

Both x - and y -axes are coplanar with plane A_1 parallel to A' . Vector E_y is also coplanar with A_1 and its amplitude is determined by the formula:

$$E_y = \sqrt{E_\eta^2 + E_\xi^2}$$

and its direction coincides with the y -axis.

Basing on the explicit of the Dirichlet condition solution it was proved in paper [11] that if the curvature radius of the metal is large compared with the depth of the electromagnetic field penetration, the normal component of the vector potential, and thus the normal component of the electric field strength in the region, can be assumed to equal zero by identity. Similar conclusion, obtained by different ways, has been derived in papers [15] and [26]. Hence, the electromagnetic field in the neighbourhood of point P_1 expressed by the new coordinate system has components H_x, H_z, E_y . Thus Maxwell's equations assuming sinusoidal changes with time of the field vectors take the following forms

$$\begin{aligned} \frac{\partial_x H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \gamma E_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial z} &= j\omega \mu H_x \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= j\omega \mu H_z \end{aligned} \quad (7)$$

It can be proved — [11], [20] that in the metal media, for which the field variation with the metal depth is considerably larger than on the surface, without appreciably affecting

the analysis accuracy²⁾, the second term of the first equation (7) can be neglected. Formula

$$\frac{\partial \underline{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} \approx \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial z} \quad (8)$$

in connection with the second equation gives:

$$\frac{d^2 \underline{H}_x}{dz^2} = j\omega\mu\gamma \underline{H}_x = \alpha^2 \underline{H}_x \quad (9)$$

and leads to the same result as for one-dimensional field:

$$\underline{H}_x = \underline{H}_{xs}(x)e^{-\alpha z} \quad (10)$$

$$\underline{E}_y = -\frac{\alpha}{\gamma} \underline{H}_{xs}(x)e^{-\alpha z} = \underline{E}_{ys}(x)e^{-\alpha z}. \quad (11)$$

(The amplitudes on the metal surface are marked by "s" index)

Taking the above into consideration the following conclusion can be formulated: for metal media, where changes of the electromagnetic field components with the metal depth are significantly larger than along the surface (and this is true for most practical systems where surface dimensions of the metal object exceed a few centimeters), the relationships applicable for one-dimensional field may be safely used for the differential (local) analysis of the field. Same conclusion has been derived in papers [8], [11] by different methods.

2.2. EQUIVALENT MAGNETIC PERMEABILITY

An idea of the equivalent magnetic permeability results from equivalence of a real ferromagnetic material and an equivalent fictitious medium, magnetically linear. Since the real ferromagnetic material, due to its magnetic non-linearity, is a source of higher harmonics in $H(t)$, $B(t)$ and $E(t)$ functions, the equivalence of the magnetic field strength and magnetic flux density and electric field strength on the real ferromagnetic material surface and on the equivalent medium surface is approximate and should be considered as the equivalence of the distorted equivalent sine waves³⁾.

The equivalent magnetic permeability $\underline{\mu}_z$ of solid iron should be interpreted as permeability of such fictitious linear medium, which placed inside an a.c. electromagnetic field of any configuration, instead of the real ferromagnetic material (keeping the same volume and the same boundary surfaces), will not affect the field distribution and amplitudes of the field vectors in the space surrounding the metal medium (except for the above mentioned approximation re. distortion of waves). The surface impedance at any point on such equivalent medium surface and the loss density are thus approximately equal to the surface impedance and the loss density at the corresponding point on the real ferromagnetic material surface.

The equivalent magnetic permeability, according to the above definition, has a complex form — eqn. (4). Both, its amplitude and phase are functions of the magnetic field strength

²⁾ According to [20], the error order due to this, in typical systems, is $2 \cdot 10^{-6} \dots 2 \cdot 10^{-4}\%$ for the ferromagnetic materials (solid steel) and $3 \cdot 10^{-3}\%$ for copper.

³⁾ The equivalent sine wave is such that its r.m.s. value is equal to r.m.s. value of the distorted wave.

amplitude on the surface — H_{ms} and indirectly are functions of the surface associated coordinates x, y . They do not change along the z -coordinate.

Complex form of the magnetic permeability $\underline{\mu}_z$ of the equivalent medium means that the sinusoidal H generates the sinusoidal B characterized by angle Ψ lagging with simultaneous attribution to is of the features of the elliptical hysteresis loop medium. Possibility for making an approximate quantitative analysis of hysteresis effect on the loss distribution and division in ferromagnetic material (e.g. [28], [32] and other) is an additional advantage of this conception.

In practice, when determining the equivalent magnetic permeability, the final conclusion from Item 2.1 is used, which states that in any point of the ferromagnetic medium placed within a power frequency electromagnetic field (which meets conditions re. the surface dimensions of the medium), the characteristic field quantities — magnetic field strength H , electric field strength E , vector potential A , stray loss density p , etc. are interrelated as in one-dimensional field. Owing to this, permeability $\underline{\mu}_z$ may be determined by measurements on ring-shaped [19] or ellipsoidal [13] samples.

Equivalence of the real ferromagnetic material and the equivalent fictitious media, a result of permeability $\underline{\mu}_z$ by definition, permits to analyse the electromagnetic field in an arrangement with the equivalent fictitious medium, and in consequence to introduce directly permeability $\underline{\mu}_z$ into the Maxwell's equations.

3. USE OF THE EQUIVALENT MAGNETIC PERMEABILITY FOR THE ANALYSIS OF FIELD ON THE SOLID IRON SURFACE, GENERATED BY CURRENTS IN PARALLEL CONDUCTORS

As an example illustrating the application of the equivalent magnetic permeability $\underline{\mu}_z$, the electromagnetic field components distribution on the solid iron surface is determined (see Fig. 2). Side walls characterized by $\mu = \infty$ are introduced to adapt the Fourier series

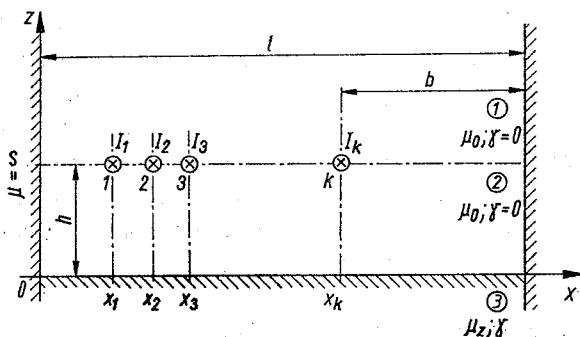


Fig. 2. System a.c. carrying k -conductors over a conducting half-space.

for the solution of our problem. The effect of the walls on the field components on the solid iron surface is estimated in Appendix 2.

The field analysis in similar systems at constant and variable magnetic permeability,

by using various methods, has been discussed in many publications — [6], [14], [16], [17], [20], [21], [22], [23], [25], [31], [33].

The system under consideration is of two-layer structure. One layer (air) is a dielectric, of a conductivity assumed to be zero and of magnetic permeability equal to that of vacuum; the second layer is conductive, having constant conductivity γ and variable, complex-magnetic permeability $\underline{\mu}_z$. Magnetic permeability, amplitude and phase are, according to eqn. (4), functions of the x -coordinate. Moreover it is assumed that both layers are homogeneous and isotropic and have infinite thickness and their boundary surface is a plane.

The electromagnetic field is generated by currents I_i ($i = 1, 2, \dots, k$) in parallel conductors, placed in non-conducting medium, parallel to the boundary plane. The conductors, like the whole system, are infinitely long along the conductor axis (y axis) and their cross-section areas are small compared with the distance between the conductors and the boundary plane and with distances between them. Therefore their cross-section dimensions are neglected.

Both, the currents in the conductors and the electromagnetic field generated by them in the conducting and non-conducting media are of periodic character. It is assumed that their time variations are sinusoidal and the frequency is such that displacement currents may be ignored. Moreover, it is accepted that the current amplitudes I_i and their phases φ_i satisfy the following condition

$$\sum_{i=1}^k I_i e^{j\varphi_i} = 0, \quad (12)$$

which means that they form a compensated system.

3.1. BASIC EXPRESSIONS

The aim of the analysis is to determine the magnetic and electric field strengths on both media boundary surface. It is assumed that the quantities to be determined are continuous and bounded functions of the coordinates x , z and time t on the whole XZ plane excluding field source points (current carrying conductors) and the walls of $\mu = \infty$. Relations between them satisfy the Maxwell's equations which, in the system under consideration and assuming that $\partial/\partial y = 0$ and $H_y = 0$, lead to eqn. (7).

Let us introduce vector potential $\mathbf{A}$, defined by [6], [7], [8]

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \quad (13)$$

in the analyzed system

$$\mathbf{A} = \mathbf{1}_y A_y e^{j\omega t}. \quad (14)$$

The components of the electric and magnetic field strengths from eqn. (7) can be expressed in terms of A_y by the following formulae

$$\underline{E}_y = -j\omega A_y \quad (15)$$

$$\underline{H}_x = -\frac{1}{\underline{\mu}_z} \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (16)$$

$$\underline{H}_z = \frac{1}{\underline{\mu}_z} \frac{\partial A_y}{\partial x}. \quad (17)$$

Differentiating both sides of (16) with respect to z and of (17) with respect to x and substituting the result in the first eqn. (7) and after taking into consideration (15), we get

$$\nabla^2 \underline{A}_y = \frac{\partial^2 \underline{A}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{A}_y}{\partial z^2} = \underline{M}_1 + \underline{M}_2 = j\omega\mu_z\gamma\underline{A}_y + \frac{\partial \underline{A}_y}{\partial x} \frac{\partial \ln \mu_z}{\partial x} \quad (18)$$

Eqn. (18) differs from its equivalent Helmholtz's equation for the linear medium by the term $\underline{M}_2 = \partial \underline{A}_y / \partial x \partial \ln \mu_z / \partial x$ "introduced" by the magnetic non-linearity of the conducting medium by applying the equivalent magnetic permeability. In practice, when dimensions

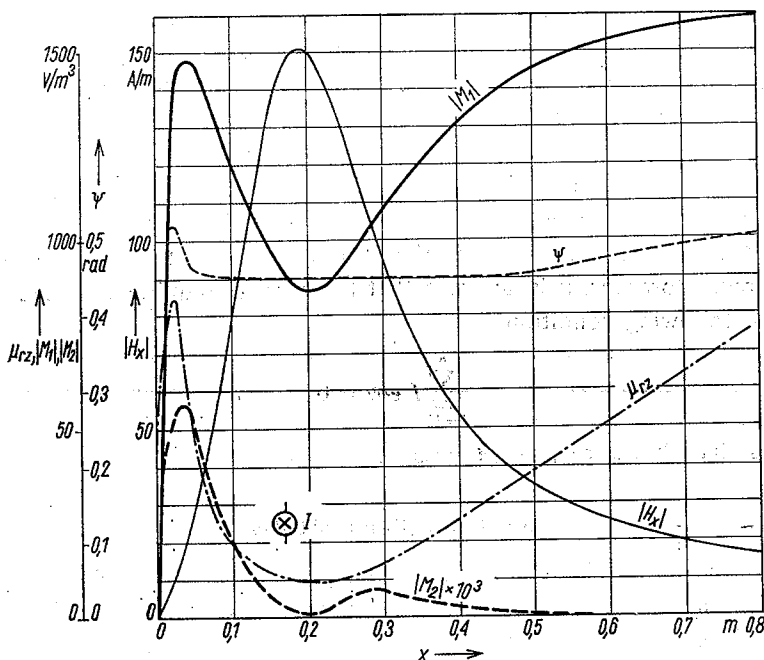


Fig. 3. Estimation of amplitudes of eqn. (18) both terms for a metal surface ($z = 0$) in one-phase, two-conductors system; distance between conductors 0,34 m; $h = 0,12$ m; $I = 10100$ A.

of a metallic object exceed a few centimeters, the term involving $\partial \ln \mu_z / \partial x$ in (18) can be neglected as $|\underline{M}_2| \ll |\underline{M}_1|$ ($10^3 \dots 10^5$ times lower — Fig. 3). Thus

$$\nabla^2 \underline{A}_y \cong \alpha^2 \underline{A}_y \quad (19)$$

where

$$\alpha = \sqrt{j\omega\mu_z\gamma} = \sqrt{2}k[\cos(\pi/4 - \Psi/2) + j\sin(\pi/4 - \Psi/2)] \quad (20)$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega\mu_z\gamma}{2}}.$$

For air $\gamma = 0$ and $\mu_z = \mu_0 = \text{const.}$, eqn. (18) is simplified into the Laplace's equation

$$\nabla^2 \underline{A}_y = 0. \quad (21)$$

The following conclusion may be thus formulated: for practical systems comprising ferromagnetic materials with the proposed assumptions and with expressing the variable magnetic permeability of a conducting medium by the equivalent one, formulae for the vector potential of the electromagnetic field in both metal and air can be simplified to the form describing the case when the metal medium is magnetically linear.

3.2. SOLUTION OF THE FIELD EQUATION

For the system under analysis the vector potential $\underline{A}_y(x, y)$ can be determined from the following equation

$$\underline{A}_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(z) \cos \lambda_n x. \quad (22)$$

The zero term ($n = 0$), as it is shown in Appendix 4, is equal to zero in this case. As H_z component has to be zero on the walls, characterized by $\mu = \infty$ ($x = 0, l$), it follows from the condition

$$\underline{H}_z \sim \frac{\partial \underline{A}_y}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n C_n f_n(z) \sin \lambda_n x = 0 \quad \text{for } x = 0, l$$

that

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (23)$$

The vector potential in three selected regions of the XZ plane — Fig. 2, may be expressed as follows:

— for area 1 ($z \geq h$)

$$\underline{A}_y^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} e^{-\lambda_n z} \cos \lambda_n x, \quad (24)$$

— for area 2 ($0 < z < h$)

$$\underline{A}_y^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{2n} e^{-\lambda_n z} + C_{3n} e^{\lambda_n z}) \cos \lambda_n x, \quad (25)$$

— for area 3 ($z \leq 0$)

$$\underline{A}_y^{(3)} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{\sqrt{\alpha^2 + \lambda_n^2} z} \cos \lambda_n x \cong e^{\alpha z} \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos \lambda_n x. \quad (26)$$

Eqn. (26) does not, of course, give the vector potential distribution inside a real ferromagnetic material but inside an equivalent fictitious medium. On the surface of this equivalent medium, as specified in Item 2, the electric and magnetic field vectors are the same as on real ferromagnetic surface.

Constants $C_{1n} \dots C_{3n}$, D_n will be determined from the boundary conditions. For $z = h$ we have

$$\begin{aligned} \underline{A}_y^{(1)}|_{z=h} &= \underline{A}_y^{(2)}|_{z=h} \\ \left[-\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \underline{A}_y^{(1)}}{\partial z} \right]_{z=h} - \left[-\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \underline{A}_y^{(2)}}{\partial z} \right]_{z=h} &= g(x). \end{aligned} \quad (27)$$

The effect of a rapid change in tangential component of the magnetic field strength H_x due to the boundary surface current density is given by the second eqn. (27). For a single filamentary current placed at point x_i the surface current density can be expressed using the Dirac's function — refer for example to [4]

$$g_1(x) = \sqrt{2} I_i e^{j\varphi_i} \delta(x - x_i).$$

Thus, for the system from Fig. 2 it is equal to

$$g(x) = \sqrt{2} \sum_{i=1}^k I_i e^{j\varphi_i} \delta(x - x_i), \quad (28)$$

where $\delta(x - x_i)$ is the Dirac's function (δ — distribution).

The δ — distribution is expandable in a trigonometric series — [2]⁴⁾. Thus, the expression (28) may be represented by a cosine series over the region $\langle 0, l \rangle$:

$$g(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \lambda_n x, \quad (29)$$

where

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) dx = \frac{2\sqrt{2}}{l} \sum_{i=1}^k I_i e^{j\varphi_i} = 0 \quad (30)$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \cos \lambda_n x dx = \frac{2}{\mu_0} \lambda_n W_n e^{j\varphi_i} \quad (31)$$

and

$$W_n = \mu_0 \frac{\sqrt{2} e^{-\lambda_n h}}{l \lambda_n} \sum_{i=1}^k I_i e^{j\varphi_i} \cos \lambda_n x_i. \quad (32)$$

After substituting (30) and (31) in (28) and determining C_{3n} constant from (27) we get for region 2:

$$\underline{A}_y^{(2)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{2n} e^{-\lambda_n z} + W_n e^{\lambda_n z}) \cos \lambda_n x. \quad (33)$$

3.3. NON-LINEAR BOUNDARY CONDITIONS

Conditions on the boundary between regions 2 and 3 are expressed by the following

$$\begin{aligned} \underline{A}_y^{(2)}|_{z=0} &= \underline{A}_y^{(3)}|_{z=0} \\ \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \underline{A}_y^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \frac{1}{\mu_z} \frac{\partial \underline{A}_y^{(3)}}{\partial z} \Big|_{z=0}. \end{aligned} \quad (34)$$

⁴⁾ see also Charpter „General theory of δ function” in: D. Iwanienko, A. Sokolow, *Klassическая теория поля*, GJTTL, Moskwa-Leningrad, 1949, pp. 9—32

It follows from the first condition that:

$$C_{2n} = D_n - W_n \quad (35)$$

Substituting (35) in the second condition (34) we get the following set of equations for determining constant D_n :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (-D_n + 2W_n) \cos \lambda_n x = \underline{\mathcal{F}}(x) \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos \lambda_n x \quad (36)$$

where $\underline{\mathcal{F}}(x) = \underline{\mathcal{F}}[H_{xs}(x)]$ is expressed by the formula

$$\underline{\mathcal{F}}(x) = \mu_0 \frac{\alpha}{\underline{\mu}_z} = \frac{\alpha}{\underline{\mu}_{rz}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \gamma}{\mu_{rz}(H_{xs})}} \exp j \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\Psi(H_{xs})}{2} \right] \quad (37)$$

By applying formulae for coefficients of the Fourier series to eqn. (36) we get

$$\begin{cases} \lambda_n (-D_n + 2W_n) = \frac{2}{l} \int_0^l \underline{\mathcal{F}}(x) \sum_{j=1}^{\infty} D_j \cos \lambda_j x \cos \lambda_n x dx, & n = 1, 2, 3 \dots \\ \lambda_0 (-D_0 + 2W_0) = \frac{2}{l} \int_0^l \underline{\mathcal{F}}(x) \sum_{j=1}^{\infty} D_j \cos \lambda_j x dx, & n = 0 \end{cases} \quad (38)$$

It can be proved, see Appendix 4, that $D_0 = 0$ for proposed assumptions. By denoting

$$K_{j,n} = \int_0^l \underline{\mathcal{F}}(x) \cos \lambda_j x \cos \lambda_n x dx$$

the following final set of the equations is obtained

$$W_n \lambda_n = \sum_{j=1}^{\infty} D_j M_{j,n}, \quad (39)$$

where

$$M_{j,n} = \frac{1}{l} K_{j,n} + \frac{1}{2} \lambda_j \delta_{j,n}^*$$

and $\delta_{j,n}^*$ is the Kronecker's symbol.

The infinite set of equations (39) has been solved numerically and the matrix $K_{j,n}$ has been determined by the iterative method (replacing function x over the range $0 \leq x \leq l$ by a broken line).

$$\underline{\mathcal{F}}(x) = \sum_{u=1}^U f_u(x) \quad (40)$$

where

$$f_p(x) = \begin{cases} q_p + r_p x & \text{for } x \in \langle x_{p-1}; x_p \rangle \\ 0 & \text{for } x \notin \langle x_{p-1}; x_p \rangle \end{cases} \quad (41)$$

and

$$q_p = \frac{\underline{\mathcal{F}}(x_{p-1})x_p - \underline{\mathcal{F}}(x_p)x_{p-1}}{x_p - x_{p-1}}$$

$$r_p = \frac{\underline{\mathcal{F}}(x_p) - \underline{\mathcal{F}}(x_{p-1})}{x_p - x_{p-1}}.$$

As the first order approximation of the function $\mathcal{F}(x)$, its value obtained from the solution for $\mu = \text{const.}$ has been accepted. The iterative process is fast converging. For practical systems, after 3...5 iterations, results obtained in the successive iteration do not differ from those obtained in the previous one by more than 5%.

4. EFFECT OF THE MATERIAL CHARACTERISTICS DIVERSITY AND OF TEMPERATURE ON THE CALCULATION RESULTS

The non-linear function $\mathcal{F}[H_{xs}(x)] = \mathcal{F}(x) - (37)$ includes the basic electromagnetic parameters of the metal medium i.e. conductivity γ and permeability $\mu = f(H)$. (The $\mu_z = f(H_{ms})$ curve is, at a given frequency, indirectly dependent on the d-c magnetization curve — [15]). Thus, accuracy of determining $\mathcal{F}(x)$ for a given grade of steel affects accuracy of the results obtained by using the proposed method. Both conductivity γ and shape of the $\mu = f(H)$ curve, corresponding to the d-c magnetization, are considerably dependent on carbon and other admixtures contained in a particular steel grade and also on the crystallographic structure, especially of the surface layers — [1], [9]. The latter are also affected by heat and mechanical processing — [29]. Taking all these factors into consideration when calculating the field in a real system is practically impossible. Constructional steel available on the domestic market are characterized by highly diversified percent content of components. Sometimes even the limits prescribed by the applicable standards — [36] are exceeded. This fact obviously limits the accuracy of the calculated results. Cases when there is a possibility of cutting a sample out of a greater object, testing the material sample and introducing the testing results into a computer program are in practice rather exceptional. But even in such cases there is no guarantee that the electromagnetic characteristics of the sample were not changed due to mechanical processing (mechanical cutting or flame cutting).

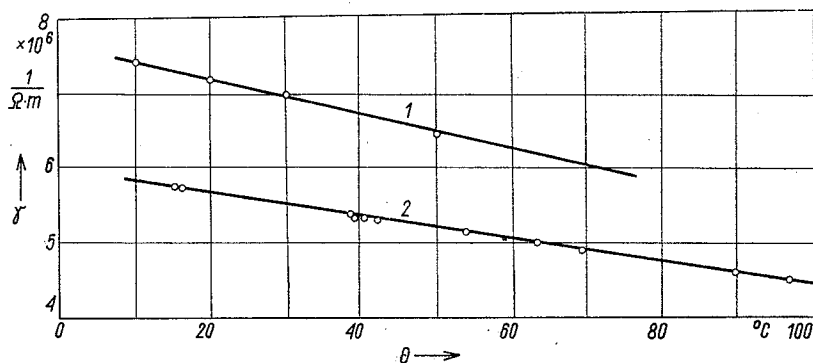


Fig. 4. Grade St3s steel conductivity versus temperature. 1 — Sample I, 2 — Sample II.

Figs. 4 and 5 illustrate $\gamma = f(\theta)$ curves and d-c magnetization curves, for two samples of St3s steel. The differences are clearly visible. Chemical composition of the samples are given in Table 1.

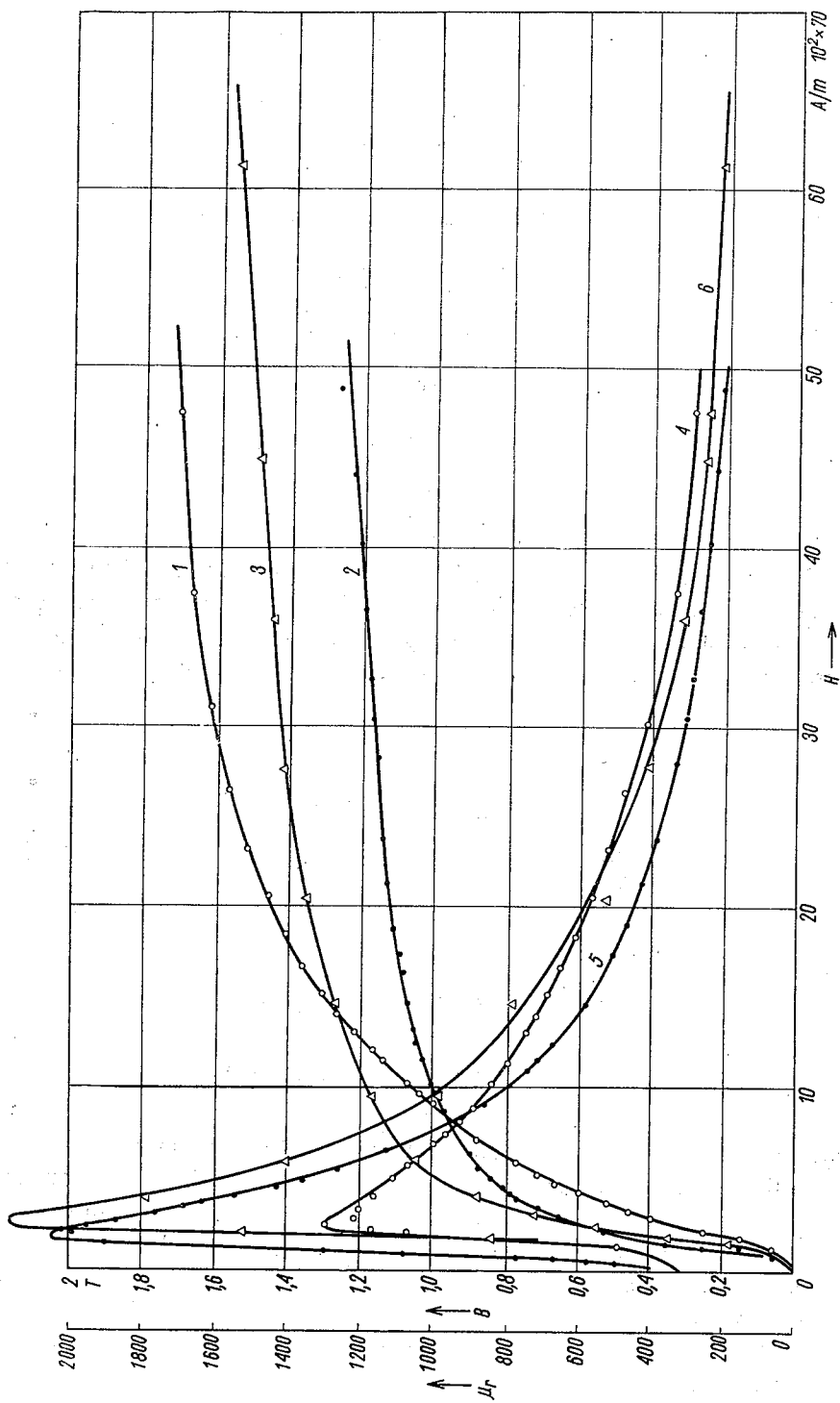


Fig. 5. D-c magnetization curve and relative magnetic permeability versus magnetic field strength for grade St3s steel. 1, 2, 3 — $B = f(H)$, sample I, sample II, data per [13] respectively, 4, 5, 6 — $\mu_r = f(H)$, sample I, sample II, data per [13] respectively.

Table I

Chemical composition of the St3s steel samples

	Chemical composition (%)								γ_{20}
	C	Si	P	S	Mn	Cr	No	W	$\times 10^6 \frac{1}{\Omega m}$
Sample I — [19]	0,2	0,15	0,03	0,37	0,5	0,05	0,03	0,7	7,2
Sample II	0,16	0,25	0,015	0,013	0,59	—	—	—	5,686
Data from [13]	not specified								6,84
According to PN-72/H84020 — [36]	max 0,22	0,1— 0,35	max 0,05	max 0,05	—	—	—	—	—

4.1. $\mathcal{F}(H_{xs})$ FUNCTION

Graphs of the real and imaginary parts of $\mathcal{F}(H_{xs})$ at temperature $\theta = 20^\circ\text{C}$ for grade St3s steel (based on tests on samples I and II) are shown in Fig. 6. Excluding, less interesting from practical point of view, the weak field range, the real — $\mathcal{F}_r(H_{xs})$ and imaginary — $\mathcal{F}_i(H_{xs})$ part can be quite correctly approximated by the following linear function

$$\mathcal{F}(H_{xs}) = \underline{Q} + \underline{R}H_{xs} \quad (42)$$

where:

	Sample I	Sample II
$Q_r \left[\frac{1}{m} \right] =$	1,0	1,2
$Q_i \left[\frac{1}{m} \right] =$	1,6	1,8
$R_r \left[\frac{1}{A} \right] =$	$1,16 \cdot 10^{-4}$	$8,436 \cdot 10^{-5}$
$R_i \left[\frac{1}{A} \right] =$	$1,26 \cdot 10^{-4}$	$1,444 \cdot 10^{-4}$

Comparison of the computed results obtained by using the above specified coefficients Q and R with the results of measurements on a large-scale physical model of one-phase, two-conductor system is shown in Fig. 7. Similar comparison for a three-phase, three-conductor system is illustrated in Figs. 8 and 9. The figures show relatively great effect of the material on the amplitudes of the magnetic field strength on the metal surface. Differences of amplitudes due to the material diversity are, of 20% order for the tangential components and 10% for the normal components.

The presented measurement results are from various measuring cycles in which two different plates of grade St3s steel were used (the sheet used was not that used for the

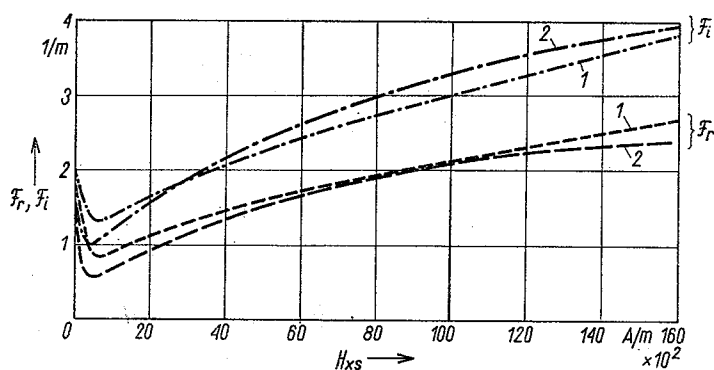


Fig. 6. Real and imaginary parts of $\underline{F}(H_{xs})$ for grade St3s steel, 1 — sample I, 2 — sample II.

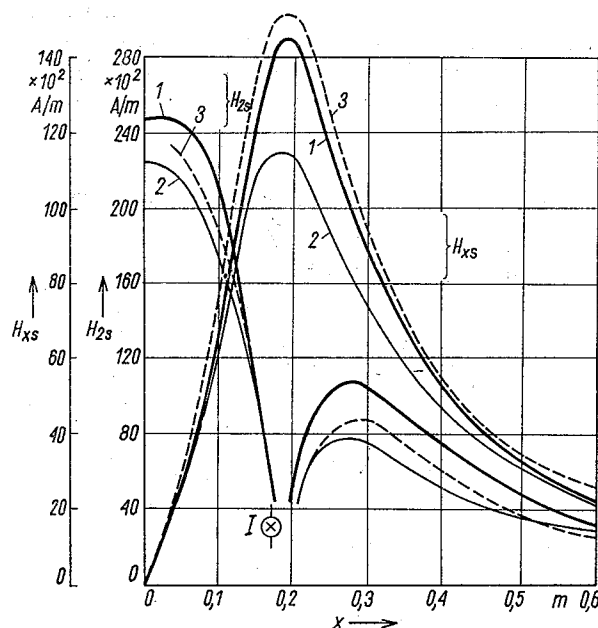


Fig. 7. Comparison of measured on a large-scale physical model and calculated amplitudes of tangential (H_{xs}) and normal (H_{zs}) components of magnetic field strength on grade St3s solid steel surface for one-phase, two-conductor system. Distance between conductors is 0,34 m; $h = 0,12$ m, $I = 10100$ A. Calculations have been made for $\Theta = 20^\circ\text{C}$. 1 — measurement; 2 — calculations based on sample I data; 3 — calculations based on sample II data.

ring-shaped samples⁵⁾). The measured tangential and normal magnetic field strength components on the metal surface are for the three-phase system (Figs. 8 and 9) closer to those calculated for the sample I, and for one-phase system (Fig. 7) closer to those calculated for the sample II.

⁵⁾ If only considering different ring-shaped sample thicknesses (sample I — 18 mm, sample II — 49 mm, plates of the physical model — 8 mm). The ring-shaped samples were prepared by means of flame-cutting from a larger piece of steel and then mechanically processed (on a lathe).

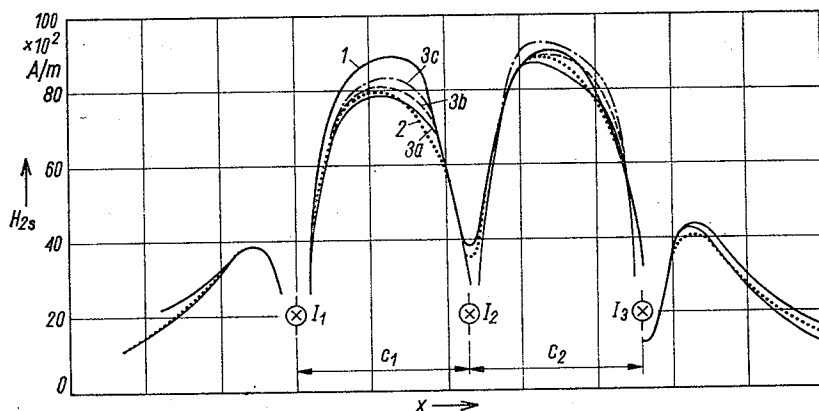


Fig. 8. Amplitudes of normal component of magnetic field strength on steel plate surface (grade St3s steel) for 3 — phase, 3 — conductor system. $c_1 = c_2 = 0,46$ m, $h = 0,15$ m, $I_1 = 4600$ A, $I_2 = 5660$ A, $I_3 = 4750$ A. 1 — measurement; 2 — calculation based on sample I data and for $\theta = 20^\circ\text{C}$; 3 — calculation based on sample II data and for: a — 20°C , b — 80°C , c — 150°C .

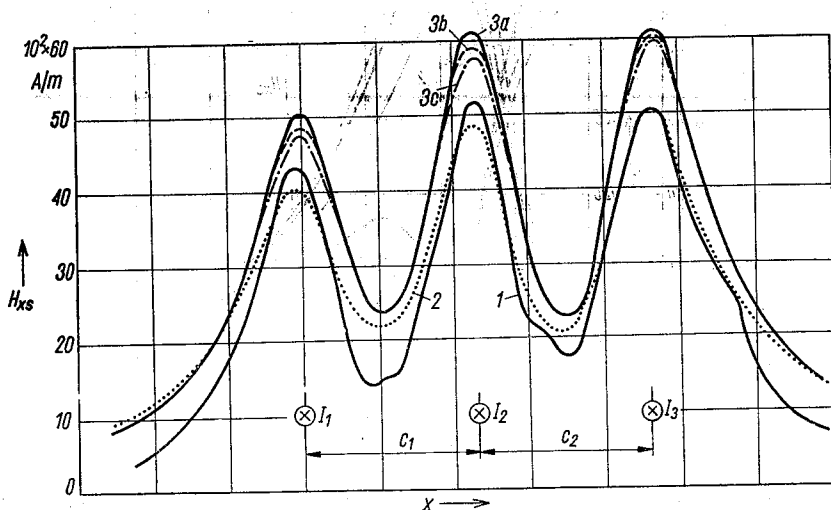


Fig. 9. Amplitudes of tangential component of magnetic field strength on steel plate surface (grade St3s steel) for 3 — phase, 3 — conductor system. $c_1 = c_2 = 0,46$ m, $h = 0,15$ m, $I_1 = 4600$ A, $I_2 = 5660$ A, $I_3 = 4750$ A. Designations — see Fig. 8.

4.2. EFFECT OF TEMPERATURE

So far no effect of the temperature variations of the steel plates was taken into account. It follows, from eqn. (37), that the function H_{xs} depends on conductivity and consequently on temperature Θ . To take it into account, eqn. (42) should be written in a more general form

$$\mathcal{F}(H_{xs}) = k_{\Theta}(Q + RH_{xs}), \quad (42a)$$

where, for grade St3s steel of the sample II parameters basing on Fig. 4:

$$k_{\theta} = \sqrt{\frac{310,8}{290,8 + \theta}} \quad (43)$$

The calculated results for three-phase, three-conductor and one-phase, two-conductor systems and for varying temperature of the steel plate are shown in Figs. 8...11. For a

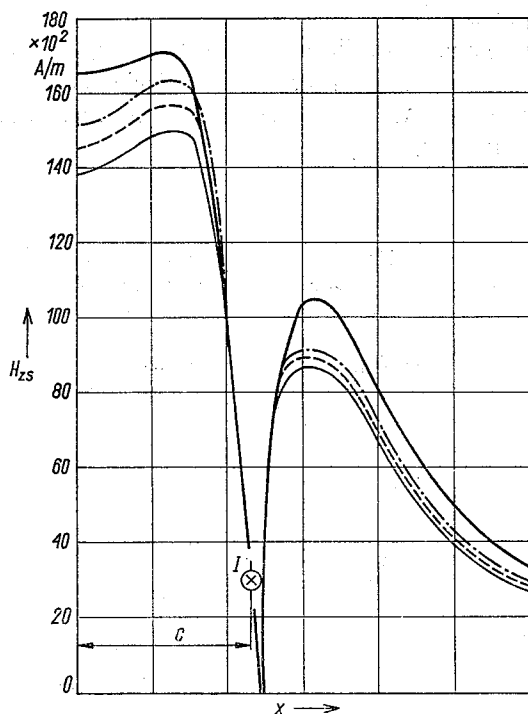


Fig. 10. Amplitudes of normal component of magnetic field strength on solid iron surface for one-phase, two-conductor system. $c = 0,23$ m, $h = 0,1$ m, $I = 7500$ A. — measurement, calculation for: — $\theta = 20^{\circ}\text{C}$, — $\cdot$ — $\theta = 80^{\circ}\text{C}$, — $\cdot$ — $\theta = 150^{\circ}\text{C}$.

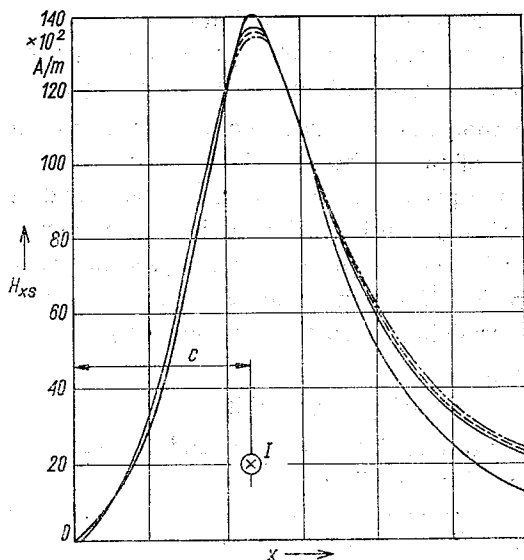


Fig. 11. Amplitudes of tangential component of magnetic field strength on solid iron surface for one-phase, two-conductor system. Data and designations — see Fig. 10.

change in the plate temperature from 20°C to 150°C the maximum difference in the normal component of the magnetic field strength on the metal surface is up to 12%, and in the tangential component up to 6%. In the physical model the steel plate temperature is of course not constant. In a thermal steady-state it is a three-dimensional function of the stray loss density, heat conduction of the plate and heat transfer to the ambient air. However, as it can be seen from presented examples, neglecting this fact does not greatly affect the results.

The per cent differences for the analysed systems between the measured and calculated maximum values of the magnetic field components on the metal surface, due to the diversity of grade St3s steel material data and due to ignoring of real temperatures of the plate, are listed in Table 2.

Table 2

Extreme differences (per cent) between the maximum values — measured and calculated, of the tangential- H_x and normal- H_z components of the magnetic field strength on the solid iron surface.

Component	System	Maximum difference referred to calculated values based on material as for:	
		Sample I	Sample II
H_{xs}	1-phase	20,5	3,5
	3-phase	7,5	20,0
H_{zs}	1-phase	9,5	0,3
	3-phase	10,5	10,0

5. CONCLUSIONS

The approximate solution of the electromagnetic field equations in systems with solid iron of variable magnetic permeability is presented. It features replacement of ferromagnetic material by a fictitious medium of μ_z permeability which is a function of the tangential component of the magnetic field strength on the solid iron surface, and, indirectly, a function of the surface associated coordinates. It is a consequence of the statement proved in the paper that for the metal media and at the power frequency — when the physical surface dimensions of the object under consideration exceed a few centimeters — for the local electromagnetic field analysis, the relations valid for one-dimension field may be applied. The further consequence of the above mentioned statement is a possibility of determining magnetic permeability μ_z based on measurement e.g. on the ring-shaped samples.

Introducing permeability μ_z into the Maxwell's equations leads approximately to the relations as for $\mu = \text{const.}$ and confines the problem to the solution of the non-linear boundary conditions.

Correctness of the method is proved by comparison of the measured and calculated results on equivalent physical models.

Results of testing the grade St3s constructional steel show considerable diversity of the electromagnetic characteristics. This may be attributed either to differences in chemical composition of the tested samples — see Table 1, or to differences due to heat or mechanical processing [29]. The proper selection of the material data, represented by the function $\mathcal{F}(H_{xs})$, influences directly the calculated results. It has been also shown that the steel plate temperature influences the calculated electromagnetic field components in some measure. In consequence, as it is practically impossible to precisely determine the material data and the real temperature distribution for each case, considerable errors in determining the magnetic and electric field strengths on the solid iron surface are inevitable. This conclusion is confirmed by other authors [4], [18], [29].

The presented comparison of the measured and calculated results permitted to estimate the error due to the above. For the systems under analysis it is as high as 20% for the tangential component of the magnetic field strength on the solid iron surface and 10% for the normal component — see Table 2.

REFERENCES

1. R. M. Bozorth: *Ferromagnetism*. New York, D. van Nostrand, 1951
2. R. Bracewell: *Przekształcenie Fouriera i jego zastosowania*. Warszawa: WNT, 1968, (tłum. z ang.)
3. N.E. Kocin, J.A. Kibiel, N.W. Rose: *Teoreticzeskaja gidrodinamika*, Cz. II, Moskwa: Gosudarstvennoe Izd. Fiz-Matem. Literatury, 1963
4. G.T. Markow, A.F. Czaplín: *Wozbuzdzenie elektromagnitnych wołn*. Moskwa—Leningrad: Energja, 1967
5. A.H. Nayfeh: *Perturbation methods*. John Wiley Sons. Inc., New York, London, Sydney, Toronto 1973
6. M. Stafl: *Electrodynamics of electrical machines*. Praga, Academia, 1967
7. P. Szulkin, S. Pogorzelski: *Podstawy teorii pola elektromagnetycznego*. Warszawa: WNT, 1964
8. J. Turowski: *Elektrodynamika techniczna*. Warszawa: WNT, 1968
9. *Metals Handbook*, T. 1, *Properties and selection of metals*, ASM, Metals Park, Ohio, s. 792—795
10. P.L. Arlett, A.K. Bahrani, O.C. Zienkiewicz: *Application of finite elements to the solution of Helmholtz's equation*. Proc. IEE, 1968, vol. 115, Nr 12, s. 1762—1766
11. S. Apanasewicz: *O pewnych własnościach struktury pola elektromagnetycznego*. Arch. Elektro-techn., 1971, t. XX, z. 3, s. 689—700
12. C.J. Carpenter: *Numerical solution of magnetic fields in the vicinity of current carrying conductors*. Proc. IEE, 1967, Vol. 114, Nr 11, s. 1793—1800
13. J. Cichy, M. Dąbrowski: *Badanie własności magnetycznych stali konstrukcyjnych*. Arch. Elektrotechn., 1975, t. XXIV, z. 2, s. 329—343
14. W.G. Deuring: *Induced losses in steel plates in the presence of alternating currents*. Trans. AIEE, 1957, p. III, Nr 6, 166—173
15. L. Hannakam: *Wirbelströme in leitendem Halbraum bei beliebiger Form der erregenden Leiter-schleife*. Archiv f. Elektrotechn., 1972, 54, s. 251—261
16. P. Jezierski: *Przybliżony sposób wyznaczania strat w płycie nieekranowanej i ekranowanej przy wzbudzeniu jednofazowym*. Rozprawy Elektrotechn., 1980, t. 26, z. 1, s. 29—45
17. P. Jezierski: *Przybliżony sposób wyznaczania strat w płycie stalowej nieekranowanej i ekranowanej przy wzbudzeniu trójfazowym*. Rozprawy Elektrotechn., 1980, t. 26, z. 2, s. 355—370
18. W.W. Karasjew, L.W. Leites: *Elektromagnitnyje charakteristiki konstrukcionnoj stali na pieriennom tokie i ich primienienie w transformatorostrojenii*. Elektrichestwo, 1967, Nr 8, s. 32—37

19. M. Kaźmierski: *Przenikalność zastępcza masywnego żelaza przy częstotliwości technicznej*. Rozprawy Elektrotechn., 1975, t. 21, z. 2, s. 435—453
20. M. Kaźmierski: *Pole elektromagnetyczne i straty wywołane przez prądy w układzie przewodów równoległych do ekranowanej półprzestrzeni o własnościach ferromagnetycznych*. Arch. Elektrotechn., 1975, T. XXIV, z. 4, s. 641—662
21. M. Krakowski: *Eddy current losses in a shielded or unshielded ferromagnetic due to currents in a ribbon conductors*. Arch. Elektrotechn., 1973, t. XXII, z. 2, s. 333—350
22. M. Krakowski: *Eddy current losses in a non-magnetic plate due to currents in a multi-conductor system*. Arch. Elektrotechn., 1973, t. XXII, z. 2, s. 322—332
23. A. N. Krawczenko, L. P. Niżnik: *Elektromagnitnoje pole i potieri sistemy priamolinijnych bieskonieczno dlinnych prowadow s pieriemennym tokom, raspolożonych nad prowadiaszczim poluprost-ranstwom*. Elektromagnitnyje processy w przyobrazowatelnich ustrojstwach, Kijew: Naukowa Dumka, 1967, 61—72
24. J. Lasociński: *Przybliżone metody analizy jednowymiarowego pola elektromagnetycznego w masywnym żelazie*. Rozprawy Elektrotechn., t. XIII, z. 3, 1967, s. 556—577
25. R. Leyvraz: *Verluste in parallelen Transformer-Verbindungsschienen und in benachbarten Kessel-blech*. Bull. Oerlikon, 1969, Nr 389—390, s. 21—30
26. W. Lipiński: *Analiza dynamiki pola elektromagnetycznego w środowiskach przewodzących*. Prace Nauk. Politechn. Szczecińskiej, Nr 63, 1976, s. 1—81
27. L. R. Niejman: *Powierzchniowy efekt w masywnych ferromagnitnych prowadach i magnitnych ciepiach*. Elektrizestwo, 1960, Nr 1
28. H. A. Panasienkow: *Powierzchniowy efekt w masywnych ferromagnitnych tielach s ucetom nieliniijnosti*. Elektrizestwo, 1958, Nr 9, s. 1—7
29. I. Ja. Podczerniajew, L. N. Kuzmina: *Ekspierimetalnoje izmierienja i czisliennyje rasczety magnitnych charakteristik ferromagnitnych tiel*. Problemy techniczskoj elektrodynamiki, wyp. 27, Naukowa Dumka, Kijew, 1974, s. 151—154
30. K. M. Poliwanow: *Opriedielenje kompleksnoj magnitnoj pronicajemosti wieszcziestwa iz efek-tiwnoj kompleksnoj pronicajemost tiela po metodu W. K. Arkadiewa*. W zb. Problemy ferromagnetizma i magnetodinamiki, AN SSSR, Otd. Tiechn. Nauk, Moskwa, 1946
31. H. Poritsky, R. P. Jerrard: *Eddy-current losses in a semi-infinite solid due to nearby alternating current*. Trans. AIEE, 1954, Nr 5, s. 97—106
32. A. I. Ruckij, A. N. Gierasimowicz, Ju. G. Rumiancew, W. N. Mazurkie-wicz: *Rasczet moszcznosti potier na wichriewyje toki i gistierezis w konstrukcyjnych stalach*. IZWUZ Energetyka, Nr 11, 1974, s. 3—7
33. A. Timotin, A. Tugulea, C. Fluerasu: *Quasi-stationary electromagnetic field of straight conductors through which a.c. flows in the presence of a plane shield of finite thickness*. Rev. Roum. Sci. Techn. — Electrotechn. et Energ., 1966, t. 11, Nr 3, 307—327
34. J. Turowski: *Straty i lokalne przegrzania wywołane strumieniami rozproszenia*. Zesz. Nauk. Politechn. Łódzkiej, Elektryka, 1963, z. 11, Nr 49, s. 89—179
35. K. Zakrzewski: *Analiza pola elektromagnetycznego w masywnym żelazie metodą numeryczną*. Arch. Elektrotechn., 1969, 18, Nr 3, 569—585
36. PN-72/H 84020. *Stal węglowa konstrukcyjna o zwykłej jakości ogólnego przeznaczenia*

APPENDICES

1. FORMULAE FOR LAME'S COEFFICIENTS

Let there be given an arbitrary smooth surface Γ — Fig. 12 — with determined point 0, being an origin of curvilinear coordinate system of s , t , n , where n is normal to surface and s and t are coplanar with Γ . Moreover two points are determined — $M(s, t, n)$ and

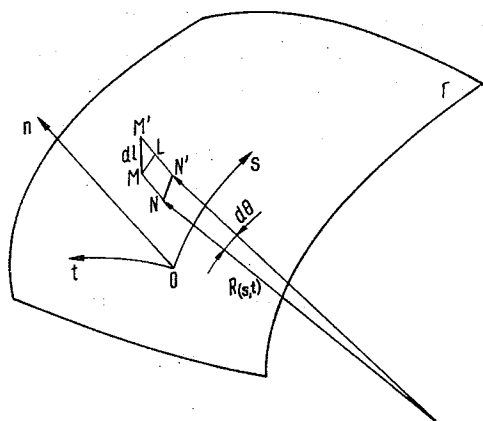


Fig. 12. For Lamé's coefficients determination

$M'(s+ds, t+dt, n+dn)$ — being in distance dl . In Cartesian system the coordinates of M and M' are x, y, z and $x+dx, y+dy, z+dz$ respectively. Square of distance dl is equal to

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{A.1})$$

or

$$dl^2 = e_1^2 ds^2 + e_2^2 dt^2 + e_3^2 dn^2, \quad (\text{A.2})$$

where e_1, e_2, e_3 are Lamé's coefficients.

Let normal lines with respect to surface Γ , running through points M and M' , intersect surface Γ in points N and N' . Let curvature radius of surface Γ is $R(s, t)$. It is assumed that $R(s, t)$ is a continuous function of s and t and having continuous first derivatives. From Fig. 12, with approximation due to neglecting infinitely small values of higher orders, it can be obtained

$$dl^2 = (MM')^2 = (ML)^2 + (LM')^2 \quad (\text{A.3})$$

Since $LM' = n$, $ML = [R(s, t) + n]d\theta$, $d\theta = \frac{NN'}{R(s, t)}$,

$NN' = \sqrt{ds^2 + dt^2}$, square of distance dl is equal to

$$dl^2 = \left[1 + \frac{n}{R(s, t)} \right]^2 (ds^2 + dt^2) + dn^2 \quad (\text{A.4})$$

And finally

$$e_1 = e_2 = 1 + \frac{n}{R(s, t)}; \quad e_3 = 1 \quad (\text{A.5})$$

Similar derivation in 2-dimensional system can be found in paper [3].

2. ESTIMATION OF THE EFFECT OF SIDE WALLS OF $\mu = \infty$ ON THE CALCULATION RESULTS

Existence of a side wall of infinite magnetic permeability in the system in Fig. 2, mostly affects the electromagnetic field in the region of outer conductors ($i = 1, k$). The effect will be estimated by considering a system consisting of a single current conductor with

and without a side wall by applying the image method — Fig. 13. Our considerations will be concentrated on the maximum value of the tangential component of the magnetic field strength on the solid iron surface ($x = 0, z = 0$). The component is equal to:

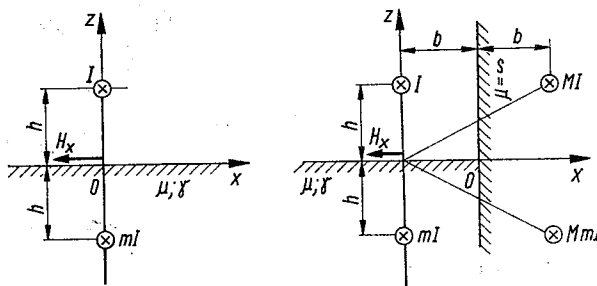


Fig. 13. Estimation of effect of side wall of $\mu = \infty$. a) system without side wall, b) system with side wall

— in a system without a side wall (Fig. 13a)

$$H'_{xsm} = \frac{\sqrt{2} I}{2\pi h} (1-m) \quad (\text{A.6})$$

— in a system with a side wall (Fig. 13b)

$$H''_{xsm} = \frac{\sqrt{2} I}{2\pi h} (1-m) + \frac{\sqrt{2} I}{2\pi} (1-m) M \frac{h}{h^2 + 4b^2} \quad (\text{A.7})$$

where the image coefficients are denoted by m for solid iron and M for an ideal ferromagnetic material respectively.

Denoting the error due to presence of the side wall by Δ we have

$$\Delta = \frac{|H'_{xsm} - H''_{xsm}|}{H'_{xsm}} = M \frac{h^2}{h^2 + 4b^2} \quad (\text{A.8})$$

Assuming that $M = 1$, the minimum distance between the side wall and the conductor can be expressed in terms of Δ and h by the following formula:

$$b_{\min} = \sqrt{\frac{1-\Delta}{4\Delta}} h \quad (\text{A.9})$$

For example, for $h = 0,1$ m and $\Delta = 1\%$, $b_{\min} = 0,5$ m.

3. CONSIDERATIONS RE. SIMPLIFICATION OF EQN. (26)

The simplified form of eqn. (26) results directly from (10) and (11), which in turn are a consequence of simplification of formula (8). Corectness of the procedure can be proved in another way too.

Generally, for solid iron, the following inequality applies — [8], [11], [19]:

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \gg \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} \quad (\text{A.10})$$

which will be used by introducing the dimensionless variables $x' = x/l'$, and $z' = z \cdot k$ into eqn. (18), where k is determined by eqn. (20a). Distance l' (the distance between the outer conductors) is characteristic for the vector potential variations along x -axis and

$1/k = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_z \gamma}}$ is the depth of penetration of the electromagnetic field which characterizes the A_y change along z -axis. Thus equation (19) takes a form

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial z'^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 A_y}{\partial x'^2} = 2A_y e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)} \quad (\text{A.11})$$

where $\varepsilon^2 = 1/l'^2 \cdot k^2$ is a very small dimensionless parameter ($\varepsilon^2 \ll 1$)⁶⁾. Employing the perturbation methods [5] for (A.11), unknown function A_y may be expressed by a power series with respect to parameter ε^2

$$A_y = A_y^{(0)} + A_y^{(1)}\varepsilon^2 + A_y^{(2)}\varepsilon^4 + \dots \quad (\text{A.12})$$

By substituting (A.12) in (A.11) and grouping the terms with the same power of we get

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 A_y^{(0)}}{\partial z'^2} = 2A_y^{(0)} e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)} & n = 0 \\ \frac{\partial^2 A_y^{(n)}}{\partial z'^2} + \frac{\partial^2 A_y^{(n-1)}}{\partial x'^2} = 2A_y^{(n)} e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)} & n \geq 1 \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

The form of eqn. (26) used in the paper corresponds to zero term of the series (A.12):

$$A_y^{(0)}(x, z) = A_{ys}(x) e^{\alpha z} \quad (\text{A.14})$$

Error due to such procedure will be estimated basing on eqn. (26). In numerical solution of an infinite set of the equations (39) the series terms above $n = N$, when the left side of the equation ($\lambda_n W_n$) is in practice equal to zero, are rejected. The term $e^{-\lambda_n h}/l$ — see (32), is crucial from this point of view. Usually, for practical systems, taking into consideration 20...30 terms of the series is quite sufficient. For $n = 30$ and typical values — $f = 50$ 1/s, $\mu_z = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 400$ Vs/Am, $\gamma = 6 \cdot 10^6$ 1/ Ω m we get — $|\alpha|^2 = 10^6$, $\lambda_n^2 = 10^4$. Thus the error for the thirtieth term of the series is as follows:

$$\Delta = \frac{\sqrt{|\alpha|^2 + \lambda_n^2} - |\alpha|}{\sqrt{|\alpha|^2 + \lambda_n^2}} \cdot 100 = 0,5\%$$

Of course, the error for the sum is substantially lower.

Similar accuracy estimation for a 3-dimensional system by using a triple trigonometric series has been given in [34].

4. CONSIDERATIONS RE. REJECTION OF THE ZERO TERM ($n = 0$) WHEN EXTENDING THE VECTOR POTENTIAL INTO A COSINE SERIES

For $n = 0$, after taking (12) into account we have from (23) and (32)

$$\lambda_0 = 0, \quad W_0 = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} e^{-\lambda_n h}}{l \lambda_n} \sum_{i=1}^k I_i e^{j p_i} \cos \lambda_n x_i = 0.$$

⁶⁾ Let us assume for example, as in real systems, that $l = 2$ m and $1/k = 5$ mm. Thus $\varepsilon^2 = 6,25 \cdot 10^{-6}$.

Thus, from the condition (36), which now has a form

$$0 = \mathcal{F}(x) D_0$$

and for a finite value of $\mathcal{F}(x)$ it follows that $D_0 = 0$.

Moreover it should be proved that in eqn. (38) the zero term is equal to zero too. The integrand of the right hand side of the second equation (38) is proportional to the tangential component of the magnetic field strength on the iron surface

$$\mathcal{F}(x) \sum_{j=1}^{\infty} D_j \cos \lambda_j x = \mu_0 H_{xs} \quad (\text{A.15})$$

Integral of the tangential component on the boundary surface and over the region under consideration ($0 \leq x \leq l$) can be calculated by using the Ampere's circuital law and by

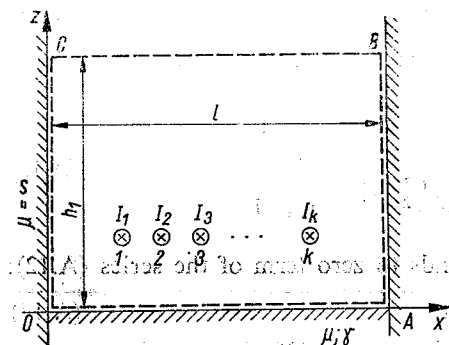


Fig. 14. For $\int_0^l H_{xs}(x) dx$ calculation.

assuming the path of integration as in Fig. 14. Dimension h_1 is so chosen as to get the magnetic field equal to zero at h_1 high. Thus:

$$\int_{\text{OABC}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^A H_{xs} dx + \int_A^B H_z(x=l) dz + 0 + \int_c^0 H_z(x=0) dz \quad (\text{A.16})$$

As on the walls of $\mu = \infty$ ($x=0, l$) the H_z component disappears, and considering the fact that the ampere-flow through OABC contour is equal to zero — see eqn. (12), we have

$$\int_{\text{OABC}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^l H_{xs} dx = 0 \quad (\text{A.17})$$

Hence also $D_0 = 0$.

M. KAŹMIERSKI

PRZYCZYNEK DO ANALIZY POŁA ELEKTROMAGNETYCZNEGO NA POWIERZCHNI
MASYWNEJ STALI O ZMIENNEJ PRZENIKALNOŚCI MAGNETYCZNEJ

Streszczenie

W pracy uzasadniono teoretycznie możliwość stosowania zespolonej zastępczej przenikalności magnetycznej μ_z masywnego żelaza do analizy wolnozmiennego pola elektromagnetycznego, o ile wymiary po-

wierzchniowe obiektów stalowych przekraczają kilka centymetrów. Przenikalność tę, zazwyczaj wyznaczaną pomiarowo na próbkach pierścieniowych, można wprowadzić bezpośrednio do równań Maxwella, czego następstwem jest uproszczenie równań końcowych do postaci jak przy $\mu = \text{const}$ i przesunięcie środka ciężkości zagadnienia do nieliniowych warunków brzegowych. Sposób postępowania zilustrowano na przykładzie analizy pola elektromagnetycznego w układzie przewodów równoległych z prądem przeniennym, umieszczonych równolegle nad półprzestrzenią przewodzącą ferromagnetyczną. Ponadto wskazano na wpływ wartości parametrów elektromagnetycznych masywnej stali ($\mu = f(H)$; γ) i temperatury na wyniki końcowe obliczeń numerycznych, które to parametry, z uwagi na rozrzut w składzie chemicznym i wpływ obróbki cieplnej i mechanicznej metalu, mogą przyjmować wartości znacznie różniące się między sobą w odniesieniu do tego samego gatunku stali konstrukcyjnej, co w sposób oczywisty ogranicza możliwość do uzyskania zgodność wyników obliczeń numerycznych z wynikami pomiarów.

M. KAŻMIERSKI

CONTRIBUTION A L'ANALYSE DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE SUR LA SURFACE DE L'ACIER SOLIDE A PERMEABILITE MAGNETIQUE VARIABLE

R é s u m é

Dans cet article on a motivé théoriquement la possibilité de l'application de la perméabilité magnétique équivalente complexe $\underline{\mu}_z$ du fer solide à l'analyse du champ électromagnétique lentement variable, quand les dimensions superficielles des objets d'acier dépassent quelques centimètres. Cette perméabilité, ordinairement mesurée à l'aide des échantillons annulaires, on peut l'introduire directement aux équations de Maxwell. En conséquence les équations finales de Maxwell prennent la forme simplifiée de celles où $\mu = \text{const}$ et le centre de gravité du problème est déplacé comme pour les conditions aux limites non-linéaires. La manière de procéder a été illustrée par un exemple de l'analyse du champ électromagnétique dans le système de conducteurs parallèles à courant alternatif, installés en parallèle au-dessus du demi-espace ferromagnétique. En outre, on a indiqué l'influence des valeurs de paramètres électromagnétiques de l'acier solide ($\mu = f(H)$, γ) et celle de la température sur les résultats finals des calculs numériques. Vu la dispersion dans la composition chimique et l'influence du traitement thermique et mécanique du métal, ces paramètres peuvent prendre les valeurs très différentes pour la même sorte de l'acier de construction. De cette manière la congruence des valeurs de calcul numérique avec les valeurs de mesure possibles à obtenir est limitée.

M. KAŻMIERSKI

BEITRAG ZUR ANALYSE EINES ELEKTROMAGNETISCHEN FELDES AN DER OBERFLÄCHE VOM MASSIVEN STAHL MIT VARIABLER MAGNETPERMEABILITÄT

Zusammenfassung

In der Bearbeitung wird die Anwendungsmöglichkeit der komplexen Ersatz-permeabilität $\underline{\mu}_z$ eines massiven Eisens für die Analyse des elektromagnetischen Wechselfeldes theoretisch begründet im Falle, wenn die Objektmessungen mindestens einige Zentimeter betragen. Diese Permeabilität, die üblicherweise mittels Messungen an Ringproben bestimmt wird, kann unmittelbar in die Maxwellschen Gleichungen eingeführt werden, wodurch die Endgleichungen zu gleichen Formen, wie bei $\mu = \text{const}$, vereinfacht werden, und das Grundproblem zu nichtlinearen Grenzbedingungen verschoben wird. Die Handlungsweise wird am Beispiel der Analyse eines elektromagnetischen Feldes in einer Anordnung mit parallelen Wechselstromleitern veranschaulicht, die parallel zu den ferromagnetischen Halbraum untergebracht sind. Es wird außerdem auf den Einfluß der Werte der elektromagnetischen Parameter des massiven Stahls ($\mu = f(H)$; γ) und der Temperatur auf die Endergebnisse der numerischen Berechnungen hingewiesen. Diese Parameter können wesentlich unterschiedliche Werte wegen erheblicher Streuung der chemischen Zusammensetzung sowie des Einflusses der thermalen und mechanischen Bearbeitungsweise des Metalls annehmen, und zwar bei gleichen Arten des Konstruktionsstahls, was offensichtlich die Möglichkeit einer Übereinstimmung der Ergebnisse der numerischen Berechnungen mit den Meßergebnisse beschränkt.

М. КАЗЬМЕРСКИ

К ВОПРОСУ ОБ АНАЛИЗЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТИ
МАССИВНОЙ СТАЛИ С НЕЛИНЕЙНОЙ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ

Резюме

Теоретически доказана возможность применения эквивалентной магнитной комплексной проницаемости μ_z массивной стали к анализу переменного электромагнитного поля в случае, когда поверхностные размеры стальных элементов превышают несколько сантиметров. Эта проницаемость, обыкновенно определяемая по измерениям на кольцевых образцах, может быть введена непосредственно в уравнения Максвелла, вследствие чего получается упрощение результирующих уравнений к виду как при $\mu = \text{const}$ и передвижение центра тяжести проблемы к нелинейным граничным условиям. Метод проиллюстрирован на примере анализа электромагнитного поля системы параллельных проводов ведущих переменный ток, расположенных параллельно над ферромагнитным полупространством.

Кроме того указано влияние электромагнитных параметров массивной стали ($\mu = f(H); \gamma$) и температуры на результаты нумерических вычислений. Эти параметры, принимая во внимание рассеяние в химическом составе и влияние термической и механической обработки металла, могут на много отличаться друг от друга для того же сорта конструкционной стали, что конечно ограничивает возможность совпадений результатов вычисления и измерений.

Numeryczna analiza rozkładu pola magnetycznego w maszynie prądu stałego

PAWEŁ STASZEWSKI (Warszawa)

Instytut Maszyn Elektrycznych, Politechnika Warszawska

Otrzymano 1986.03.25

W artykule przedstawiono numeryczną analizę pola magnetycznego w maszynie prądu stałego dla stanu jałowego i obciążenia. Zaproponowano oryginalną metodę wyznaczania rozkładu prądów w strefie uzwojenia twornika. W obliczeniach zastosowano metodę elementów skończonych i wykorzystano uniwersalny pakiet programów. Przedstawiono wyniki w postaci rysunków rozkładów linii sił pola i rozkładów indukcji w szczelinie dla stanu jałowego i obciążenia.

1. WPROWADZENIE

Ciągły rozwój automatycznej techniki obliczeniowej w zakresie sprzętu i oprogramowania powodują wzrost zastosowań numerycznych metod wyznaczania rozkładów pól do analizy i obliczeń projektowych obwodów elektromagnetycznych. Metody te umożliwiają szczegółowe uwzględnienie rzeczywistej geometrii maszyn oraz nieliniowości materiałów magnetycznych traktowanych jako obwody o parametrach rozłożonych. W tej sytuacji, numeryczne metody analizy obwodów elektromagnetycznych maszyn elektrycznych mają charakter precyzyjnego narzędzia do badania zjawisk i własności tych maszyn, dostarczając coraz więcej informacji wykorzystywanych w procesie optymalnego projektowania.

W niniejszym artykule dokonano połowej, dwuwymiarowej analizy obwodu elektromagnetycznego krajowego silnika prądu stałego PXOVKf104b-2, 170 kW, 1500 obr/min. (EMIT-Żychlin) z zastosowaniem metody elementów skończonych pierwszego rzędu^{*)}. Rozpatrzono bieg jałowy i dowolne obciążenie silnika w ustalonym stanie pracy. Uzyskane wyniki w postaci rozkładów linii sił pola magnetycznego i indukcji są podstawą do identyfikacji parametrów i charakterystyk pracy maszyny, obliczanych w oparciu o wielkości całkowite pola.

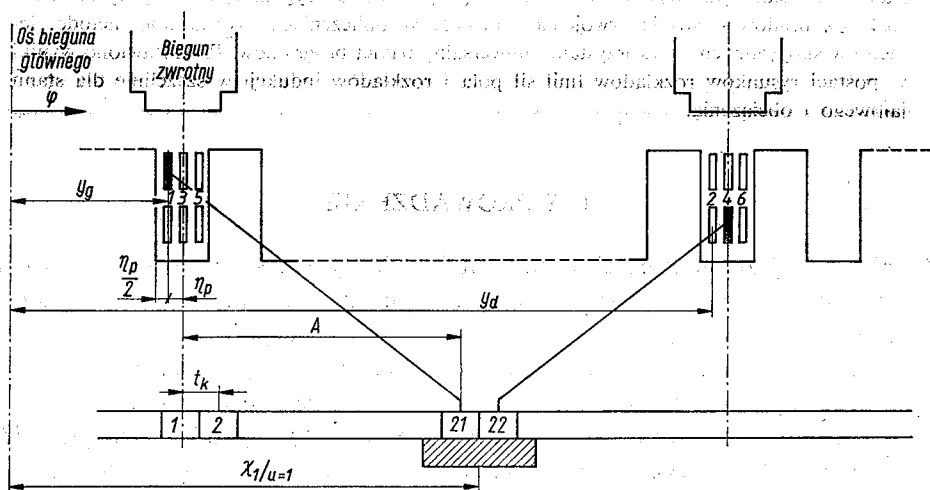
^{*)} Prace prezentowane w tym artykule zrealizowane zostały w ramach problemu węzłowego 05.5A „Wybrane podstawowe problemy w dziedzinie elektrotechniki”.

Ostatnio coraz większą uwagę zwraca się na uniwersalność algorytmów i programów obliczeń polegającą m.in. na: możliwości operowania różnorodnymi warunkami brzegowymi, automatycznej generacji i weryfikacji danych jak również różnorodnej formie przedstawienia wyników. Prezentowana w niniejszym artykule numeryczna analiza obwodu magnetycznego silnika prądu stałego wykonana została z wykorzystaniem specjalnie opracowanego pakietu programów spełniającego niektóre wymagania co do uniwersalności.

2. OKREŚLENIE ROZKŁADU PRĄDÓW W OBSZARACH ŹRÓDŁOWYCH

2.1. OPTYMALNE POŁOŻENIE SZCZOTKI

Wzajemne usytuowanie biegunów komutacyjnych, wycinków komutatora i szczotek w rozpatrywanym przykładzie uzwojenia pętlicowego schodkowego, przedstawione jest na rys. 1. Optymalne położenie szczotek na komutatorze wyznaczyć można przez dwa warunki:



Rys. 1. Poglądowy szkic usytuowania obszaru rotora (żłobków i komutatora) względem biegunów komutacyjnych

Warunek 1: Jeżeli środki prętów górnych znajdują się w osi bieguna komutacyjnego, to zestyki wycinków (od prętów górnych i dolnych połączonych szeregowo) powinny być położone w osi szczotki.

Warunek 2: Optymalne ustawienie szczotki dla poszczególnych położań prętów górnych i dolnych musi odpowiadać momentowi gdy w połowie okresu komutacji sąsiednie wycinki komutatora położone są w osi szczotki, wtedy gdy pręty położone są najbliżej (jednocześnie) osi biegunów komutacyjnych.

W oparciu o te warunki wyprowadzić można [1] wzór na współrzędną kątową optymalnego ustawienia szczotki związanej z N -tą strefą biegunową maszyny

$$\chi_{opt}(N) = \sum_n [\chi_{(n)} + 0,5\varepsilon_{(n)}] (3 + (N-1)\pi)p \quad \text{dla} \quad N = 1, \dots, 2p \quad (1)$$

przy czym $\chi_{(n)}$, $\varepsilon_{(n)}$ oznaczają odpowiednio: współrzędną kątową ustawienia szczotki z punktu widzenia n -tego zezwoju oraz skrót zezwoju dla kolejnych $n = 1, 2, 3$ zezwojów, których górne boki znajdują się w analizowanym żłobku komutującym.

2.2. PRĄDY W PRĘTACH KOMUTUJĄCYCH

Prąd w pręcie komutującym wyznacza się z prostej zależności:

$$I = 2I_a \delta_{kom} / \gamma_{sz} \quad (2)$$

gdzie I_a i γ_{sz} oznaczają prąd gałęzi równoległej i kątową szerokość szczotki. Kąt komutacji δ_{kom} określa położenie wycinka komutującego względem osi szczotki i wyraża się zależnością [1]:

$$\delta_{kom} = \chi_{opt} - (\beta^{(g)} + 0,5t_k) \quad (2a)$$

przy czym: t_k — podziałka komutatorowa;

χ_{opt} — współrzędna optymalnego ustawienia szczotki (p. 2.1);

$\beta^{(g)}$ — współrzędna osi rozpatrywanego, komutującego wycinka komutatora połączonego z określonym górnym prętem.

Współrzędna $\beta^{(g)}$ obliczana jest z zależności:

$$\beta^{(g)} = \gamma^{(g)} + \alpha^{(g)} \quad (2b)$$

przy czym: $\gamma^{(g)}$ — współrzędna położenia rozważanego pręta górnego;

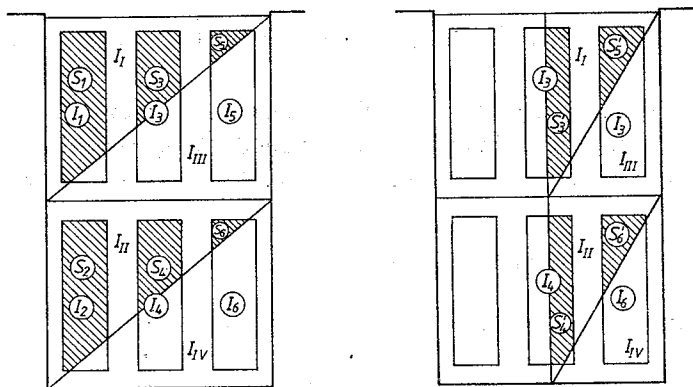
$\alpha^{(g)}$ — kątowa odległość tegoż pręta od rozważanego wycinka komutatora z nim połączonego [1].

Prąd komutacji obliczony dla górnych prętów zezwoju odnosi się również do połączonych szeregowo prętów dolnych, które identyfikowane są co do numerów i współrzędnych według znanych zależności opisujących uzwojenia.

2.3. PRĄDY ZASTĘPCZE W TRÓJKĄTACH DISKRETYZACYJNYCH W PODOBSZARZE UZWOJENIA TWORNIKA

W obliczeniach numerycznych rozkładu pola magnetycznego w maszynach elektrycznych zachodzi konieczność dyskretyzacji obszarów. Ze względu na lokalizację prądów w prętach zezwojów należy dokonać transformacji prądów „prętowych” (1, ..., 6) w prądy związane z elementami (trójkątnymi) dyskretyzującymi (I, ..., IV) ten obszar (rys. 2). W przypadku uzwojenia twornika transformacja dotyczy zarówno prądów w prętach żłobków, w których prąd jest ustalony, jak również prądów w prętach komutujących.

Wyróżnia się dwa przypadki obliczeniowe związane z różnymi możliwymi obszarami strefy żłobkowo-zębowej maszyny, które mogą być rozważane: przypadek przynależności całego żłobka oraz przypadek przynależności połowy żłobka (lewej, lub prawej) do analizowanego numerycznie obszaru maszyny (patrz rys. 2).



Rys. 2. Szkice przekrojów żłobków z oznaczonymi prądami przewodów ($I_1, \dots, I_6$) i prądami w trójkątach dyskretyzujących ($I_{1I}, \dots, I_{6I}$) a) pełny żłobek; b) pół żłobka (przypadek graniczny)

Na podstawie zależności geometrycznych w podzielonym żłobku, wartości prądów w poszczególnych trójkątach dyskretyzacyjnych wynoszą:

— dla przypadku całego żłobka:

$$\begin{aligned} I_{1I} &= C_{11}I_1 + C_{13}I_3 + C_{15}I_5 \\ I_{3I} &= C_{31}I_1 + C_{33}I_3 + C_{35}I_5 \\ I_{2I} &= C_{22}I_2 + C_{24}I_4 + C_{26}I_6 \\ I_{4I} &= C_{42}I_2 + C_{44}I_4 + C_{46}I_6, \end{aligned} \quad (3)$$

przy czym współczynniki C obliczać należy z następujących zależności [2] — cz. V, rys. 2:

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{35} = S_1/S & C_{22} &= C_{46} = S_2/S \\ C_{15} &= C_{31} = S_5/S & C_{42} &= C_{26} = S_6/S \\ C_{13} &= C_{33} = C_{24} = C_{44} = S_3/S = S_4/S \end{aligned}$$

— dla przypadku połowy żłobka:

$$\begin{aligned} I_{1I} &= C_{13}I_3 + C_{15}I_5 \\ I_{3I} &= C_{33}I_3 + C_{35}I_5 \\ I_{2I} &= C_{24}I_4 + C_{26}I_6 \\ I_{4I} &= C_{44}I_4 + C_{46}I_6, \end{aligned} \quad (4)$$

przy czym:

$$\begin{aligned} C_{13} &= S_3/S; & C_{15} &= S_5/S; & C_{33} &= 0,5 - S_3/S; & C_{35} &= 0,5 - S_5/S \\ C_{24} &= S_4/S; & C_{26} &= S_6/S; & C_{44} &= 0,5 - S_4/S; & C_{46} &= 0,5 - S_6/S \end{aligned}$$

W przypadku żłobków całych, w których żaden z prętów nie komutuje prąd I jednakowy dla każdego z czterech trójkątów dyskretyzacyjnych może być również obliczony z prostszej zależności:

$$I = I_1 = I_{1I} = I_{3I} = I_{2I} = I_{4I} = Q_2 I_{1N} \cdot u / (2a \cdot n_2) \quad (5)$$

gdzie:

I_{tN} — nominalny prąd twornika;

u — liczba czynnych prętów w żłobku;

a — liczba par gałęzi równoległych uzwojenia twornika;

n_z — liczba trójkątów dyskretyzacyjnych (jednakowych) w żłobku;

Q_2 — współczynnik określający stopień obciążenia maszyny w stosunku do obciążenia znamionowego.

2.4. PRĄDY ZASTĘPCZE W OBSZARACH UZWOJENIA BIEGUNÓW GŁÓWNYCH I KOMUTACYJNYCH

Wartość prądu zastępczego dla trójkąta związanego z obszarem uzwojenia biegunów głównych obliczana jest z zależności:

$$I_g = Q_1 I_{fN} z_g / n_g \quad (6)$$

przy czym I_{fN} , z_g , n_g oznaczają odpowiednio: znamionowy prąd wzbudzenia maszyny, liczbę zwojów uzwojenia bocznikowego (na jednym biegunie) oraz liczbę jednakowych trójkątów, na które podzielona została powierzchnia przekroju poprzecznego boku cewki uzwojenia bocznikowego.

Podobnie określa się wartość prądu zastępczego dla trójkątów związanych z obszarem uzwojenia komutacyjnego:

$$I_k = Q_2 \cdot I_{tN} z_k / n_k \quad (7)$$

w zależności od znamionowego prądu twornika I_{tN} oraz parametrów z_k , n_k analogicznych do parametrów z_g , n_g występujących we wzorze (6). Współczynniki $Q_1 = I_f / I_{fN}$, $Q_2 = I_t / I_{tN}$ występujące we wzorach (5), (7) umożliwiają wyznaczenie rozkładu prądów w trójkątach dyskretyzacyjnych dla dowolnego stanu namagnesowania i obciążenia maszyny, w tym również dla stanu jałowego ($Q_2 = 0$).

3. CHARAKTERYSTYKA METODY I PROGRAMÓW OBLICZEŃ W STANIE JAŁOWYM I W STANIE OBCIĄŻENIA MASZyny

Wiele programów obliczeń spotykanych w literaturze, dotyczących numerycznej analizy pola magnetycznego ma ograniczone zastosowania z uwagi na specyfikę sformułowanych zadań oraz specyfikę obiektów dla których te programy zostały napisane [3, 4, 5].

Celowe wydaje się zatem opracowywanie uniwersalnych pakietów programów przeznaczonych do analizy określonych rodzajów zjawisk i zależności w obwodach elektromagnetycznych odpowiednich grup maszyn elektrycznych. Uniwersalność takich pakietów programów powinna polegać m.in. na:

- jednolitym sposobie przygotowania danych dla różnych przykładów obliczeń;
- automatycznej, bądź półautomatycznej generacji siatek dyskretyzujących różne rozpatrywane obszary;
- automatycznej weryfikacji dużej ilości danych dotyczących dyskretyzacji;
- możliwości zadawania różnorodnych warunków brzegowych, specyficznych dla określonych zadań obliczeniowych;

- możliwości analizy różnych stanów pracy maszyny;
- możliwości wszechstronnej (tabelarycznej, graficznej, itp.) prezentacji wyników obliczeń.

Scharakteryzowane poniżej algorytmy i programy obliczeń spełniają w większości powyższe wymagania.

3.1. METODA WYZNACZENIA ROZKŁADU POLA MAGNETYCZNEGO

Problemy wyznaczania rozkładu pola magnetycznego metodami numerycznymi w maszynach elektrycznych były wielokrotnie analizowane w literaturze. Obszernym opracowaniem na ten temat jest również pozycja bibliograficzna [2] cz. II. Zgodnie z przedstawionymi tam wnioskami do analizy pól magnetostatycznych, wygodnie jest zastosować wielokrotnie zweryfikowaną, powszechnie stosowaną metodę elementu skończonego (MES).

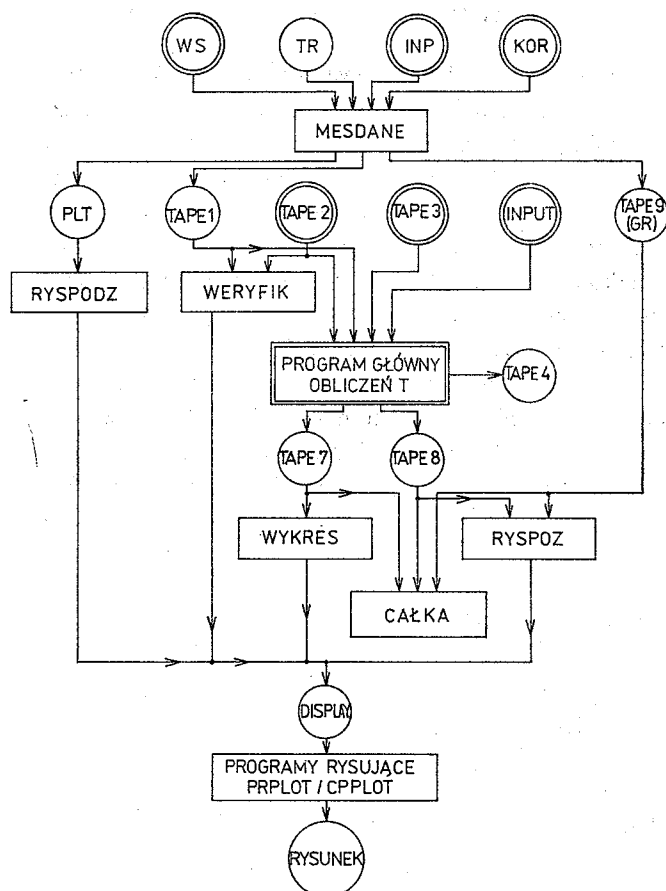
Teoretyczne podstawy MES tzn.: sformułowanie nieliniowego układu równań i metoda jego rozwiązania, sposób określenia elementów wektora źródeł, macierzy układu i macierzy Jacobiego, warunki początkowe oraz kryteria zbieżności związane z iteracyjną metodą obliczeń podano w opracowaniu [2] cz. III i nie będą tu przytaczane ze względu na ich konwencjonalną formę.

Przedstawiony w artykule uniwersalny algorytm obliczeń rozkładu pola metodą elementu skończonego umożliwia rozwiązywanie zadań z warunkami brzegowymi zerowymi, zerowo-periodycznymi, zerowo-antyperiodycznymi, periodycznymi i antyperiodycznymi [2] — cz. IV. Przy odpowiednich adaptacjach możliwe jest również uwzględnienie warunku Neumanna. Każdy z w/w warunków opisany jest poprzez tzw. wektor koincydencji z uwzględnieniem którego obliczane są elementy macierzy Jacobiego w przyjętej metodzie nieliniowych iteracji Newtona. Do rozwiązywania układu równań liniowych wykorzystano metodę iteracyjną sprzężonych gradientów JCG [6]. Do aproksymacji charakterystyki magnesowania materiałów ferromagnetycznych wykorzystano metodę *spline* funkcji w postaci wielomianów drugiego i trzeciego stopnia [7].

3.2. PAKIET PROGRAMÓW

Struktura pakietu programów liczących, kreślących i weryfikujących przedstawiona jest na rys. 3. Użytkownik przygotowuje siedem zbiorów danych (rys. 3 — kółka z podwójnym obrzeżem) tzn.: zbiór WS współrzędnych węzłów, listę trójkątów TR, zbiór INP określający przynależność trójkątów do poszczególnych podobszarów, zbiór KOR jako wektor koincydencji, zbiór TAPE 2 zawierający wybrane parametry i dane konstrukcyjno-materiałowe, zbiór TAPE 3 określający wartości prądów w podobszarach źródłowych oraz zbiór INPUT stanowiący zespół parametrów sterujących pracą głównego programu obliczeń T. Aktualny stan rozwoju metod programowania umożliwia półautomatyczną generację zbiorów WS i TR. Instytut Maszyn Elektrycznych Politechniki Warszawskiej posiada obecnie taką możliwość.

Program MESDANE przygotowuje dane dotyczące dyskretyzacji obszaru, zaś program RYSPODZ realizuje rysowanie siatki podziału rozpatrywanego obszaru maszyny na



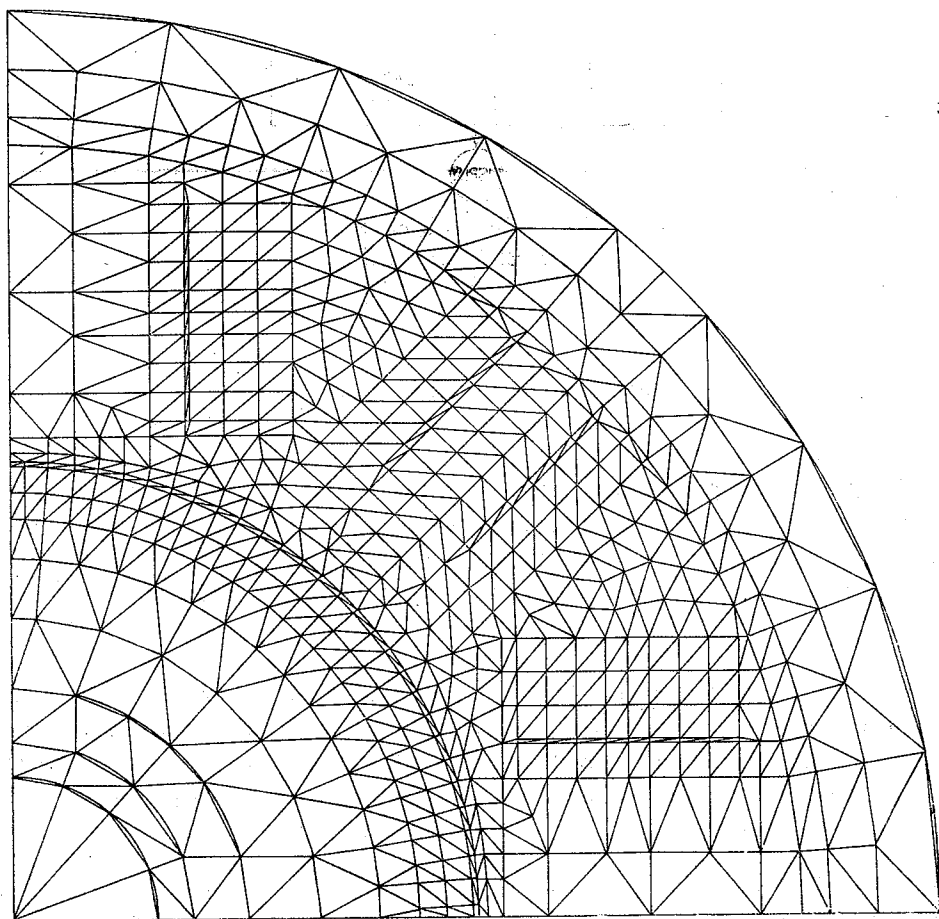
Rys. 3. Struktura pakietu programów

elementy trójkątne, z zaznaczeniem numeracji węzłów lub trójkątów. Program WERYFIK służy do sprawdzenia poprawności przydzielenia trójkątów do poszczególnych podobszarów oraz sprawdzenia poprawności sporządzonej przez użytkownika listy trójkątów z obciążeniem prądowym (TAPE 3). Program główny obliczeń T wyznacza rozkład pola magnetycznego w przekroju poprzecznym maszyny metodą elementów skończonych (p. 3.1). Program RYSPDZ umożliwia wykonanie kilku rodzajów rysunków przedstawiających trajektorie linii sił pola magnetycznego w ćwiartce lub w połowie przekroju poprzecznego maszyny. Program CAŁKA przewidziany jest do przetwarzania wyników obliczeń programu głównego T . Znajduje on m.in. punkty charakterystyczne w rozwiązywaniu dla potencjału wektorowego. Program WYKRES przeznaczony jest do rysowania rozkładu składowej radialnej indukcji w szczelinie przytwornikowej przy biegu jałowym lub obciążeniu maszyny**.

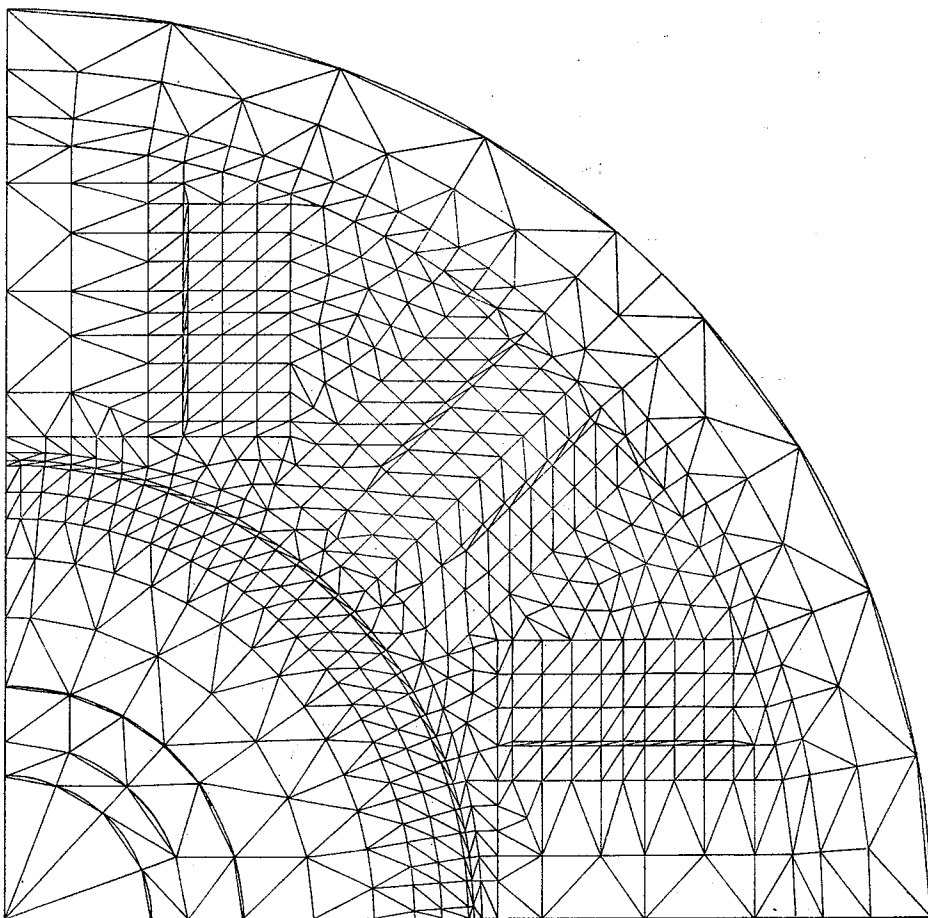
**) Zagadnienia związane z zaprogramowaniem algorytmów obliczeń opracowane zostały szczegółowo w pracy [2] przy współudziale zespołu numeryków-programistów w składzie: W. Guziński, R. Piętak, R. Stankiewicz.

4. PRZYKŁADOWE WYNIKI OBLICZEŃ

Przy rozpatrywaniu idealnego biegu jałowego silnika PXOVKf 104b-2 do numerycznej analizy przyjęto obszar o rozpiętości podziałki biegunowej τ pomiędzy osiami sąsiednich biegunów ($1/4$ przekroju poprzecznego maszyny — I ćwiartka). W tym przypadku można skorzystać z zerowego warunku brzegowego Dirichleta dla potencjału wektorowego formułując stosowny dla biegu jałowego maszyny wektor koincydencji. W stanie obciążenia niezbędne jest przyjęcie do analizy obszaru o rozpiętości 2τ pomiędzy osiami sąsiednich biegunów jednakimiennych ($1/2$ przekroju poprzecznego maszyny, I i II ćwiartka). W tym przypadku korzysta się z warunków zerowo-periodycznych dla potencjału ze względu na spowodowaną obciążeniem asymetrię rozkładu pola względem osi geometrycznych biegunów. Dla innego obszaru i innych warunków brzegowych tworzy się odpowiedni dla stanu obciążenia wektor koincydencji. Należy zaznaczyć, że dla badanego silnika uzyskanie rozwiązania dla stanu obciążenia w obszarze o rozpiętości τ z warunkami brzegowymi zerowo-antyperiodycznymi jest niemożliwe z uwagi na fakt, iż pełna symetria



Rys. 4. Dyskretyzacja obszaru dla stanu obciążenia, numeracja węzłów, pierwsza ćwiartka



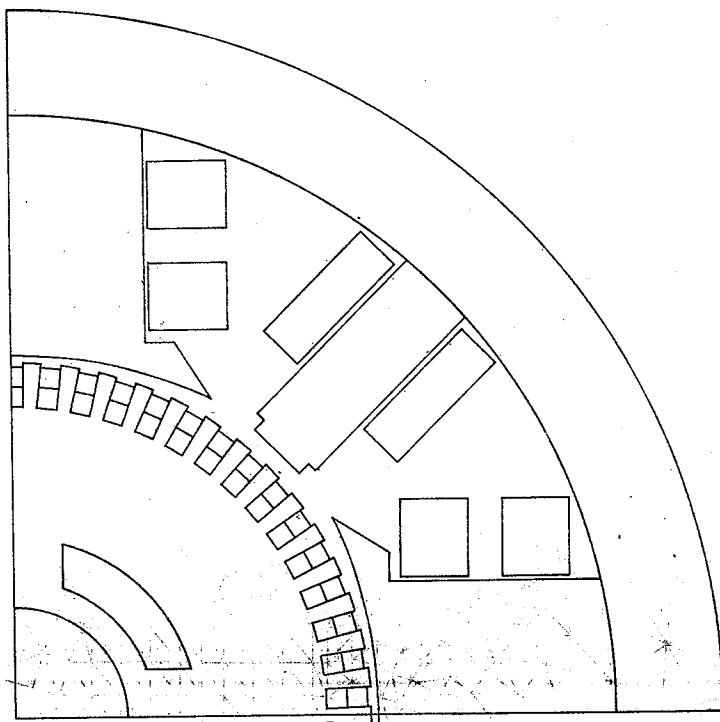
Rys. 5. Dyskretyzacja obszaru dla stanu obciążenia, numeracja trójkątów, druga ćwiartka

prądów i geometrii maszyny występuje z okresem 2π , a nie π . Potwierdziły to obliczenia testowe.

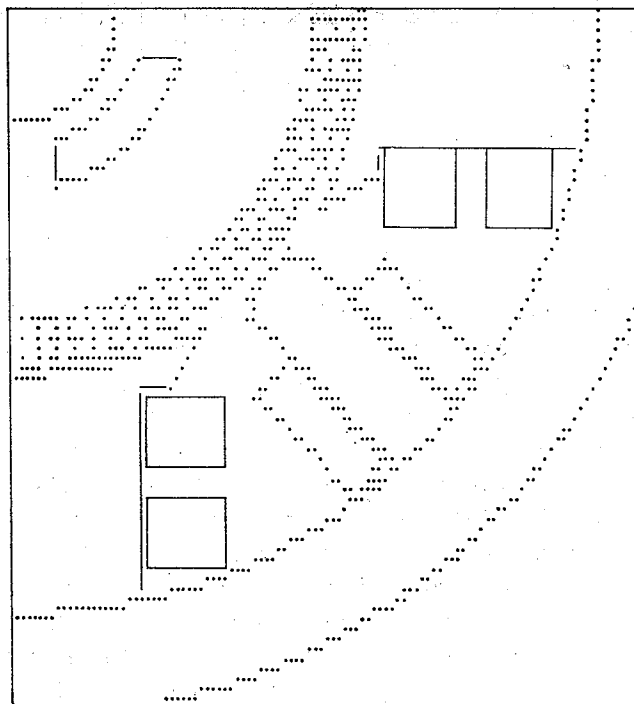
Podział połowy przekroju maszyny na trójkąty z zaznaczeniem przykładowo numeracji węzłów w I ćwiartce i numeracji trójkątów w II ćwiartce, przedstawiają odpowiednio rys. 4 i rys. 5. Rysunki te są wynikiem działania programu RYSPODZ. Na każdym rysunku rysowane są również kontury obszaru.

Weryfikacja poprawności dyskretyzacji obszaru pod kątem przynależności trójkątów do poszczególnych podobszarów przedstawiona jest przykładowo dla I ćwiartki na rys. 6 — jako wynik programu WERYFIK. Program kreśli kontur obszaru i w środku każdego trójkąta pisze numer podobszaru, do którego trójkąt ten należy.

Weryfikację poprawności deklarowanej przez użytkownika listy trójkątów z obciążeniem prądowym na przykładzie II ćwiartki maszyny przedstawia rys. 7 wykonany również przez program WERYFIK. W konturach obszaru zaznaczone są w tym przypadku wyłącznie numery trójkątów znajdujących się w podobszarach źródłowych. Rysunki 4÷7 wyko-



Rys. 6. Weryfikacja poprawności dyskretyzacji, pierwsza ćwiartka



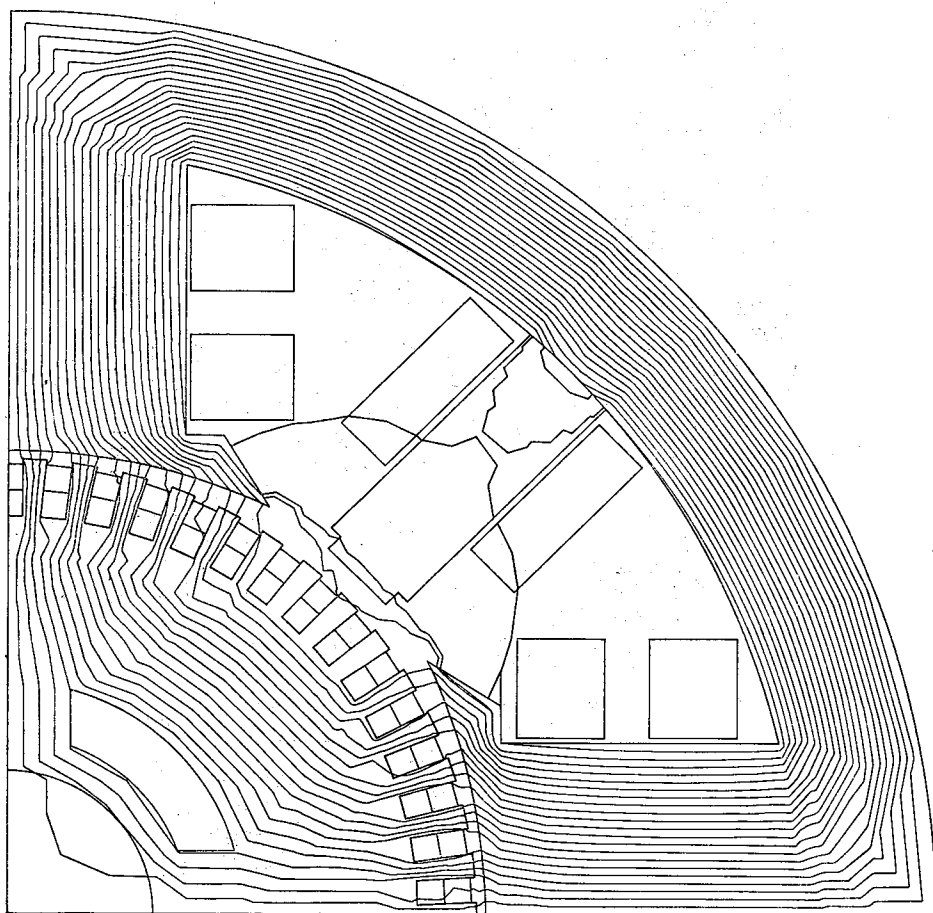
Rys. 7. Weryfikacja poprawności rozkładu prądów

nywane przez programy RYSPOZ i WERYFIK są bardzo użyteczne — szczególnie w zadaniach związanych z dużymi, szczegółowo dyskretyzowanymi obszarami — umożliwiają one bowiem szybką kontrolę poprawności podziału, numeracji elementów i poprawności zadania obciążeń prądowych.

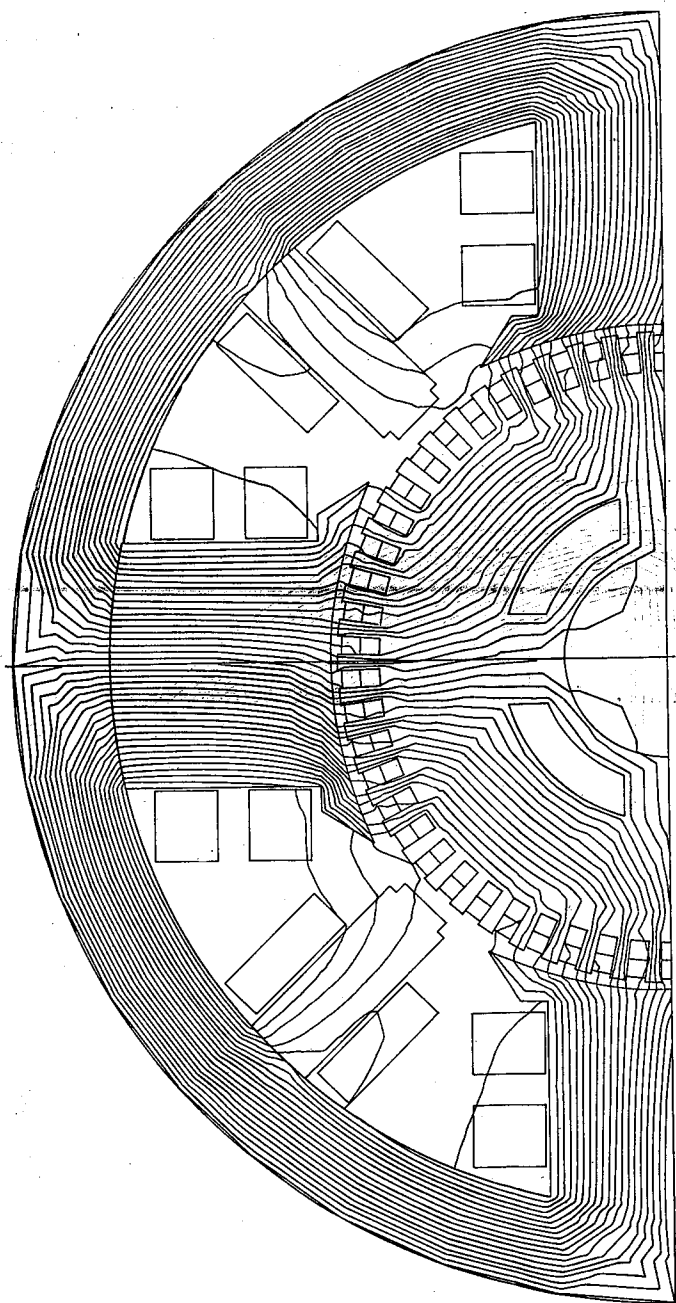
Tabulogramy wydruku danych i wyników obliczeń programu głównego T wyznaczającego rozkład pola magnetycznego zawierają m.inn.:

- zbiór parametrów sterujących programem, wybrane parametry znamionowe, niektóre dane konstrukcyjno-materiałowe maszyny, fragment listy prądów z obszaru twornika;
- listy węzłów i trójkątów;
- stabelaryzowane rozwiązania dla potencjału wektorowego w węzłach siatki oraz dla składowych wektora indukcji w trójkątach.

Tabulogramy te (jak również tabulogramy pozostałych programów, danych i wyników) przedstawione są, ze względu na ich obszerność, w załącznikach opracowania [2]. Rozkład wektora indukcji magnetycznej w przekroju poprzecznym maszyny jest poprawny pod względem strukturalnym. Wartości indukcji w poszczególnych elementach obwodu magne-



Rys. 8. Rozkład linii sił pola dla biegu jałowego maszyny $I/I_N = 0$, $I_f/I_{fN} = 1$



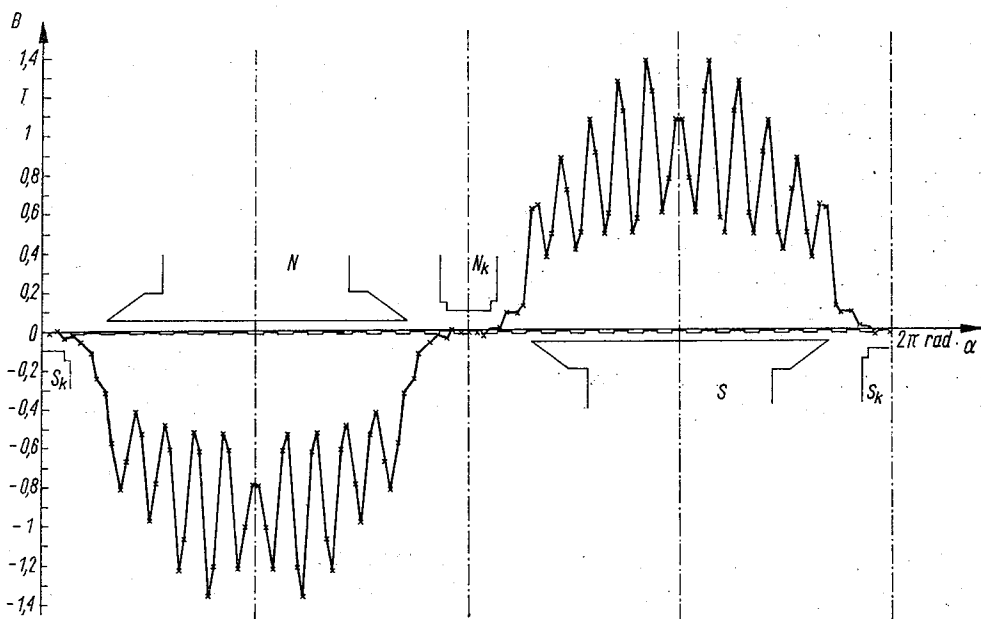
Rys. 9. Rozkład linii sił pola dla obciążenia maszyny $I/I_N = 1$, $I_r/I_N = 1$

tycznego odpowiadają wartościom wynikającym z obwodowej teorii maszyn i zawierają się w granicach $0 \div 3T$. Najwyższa wartość indukcji występuje w przewężeniu nabiegunka.

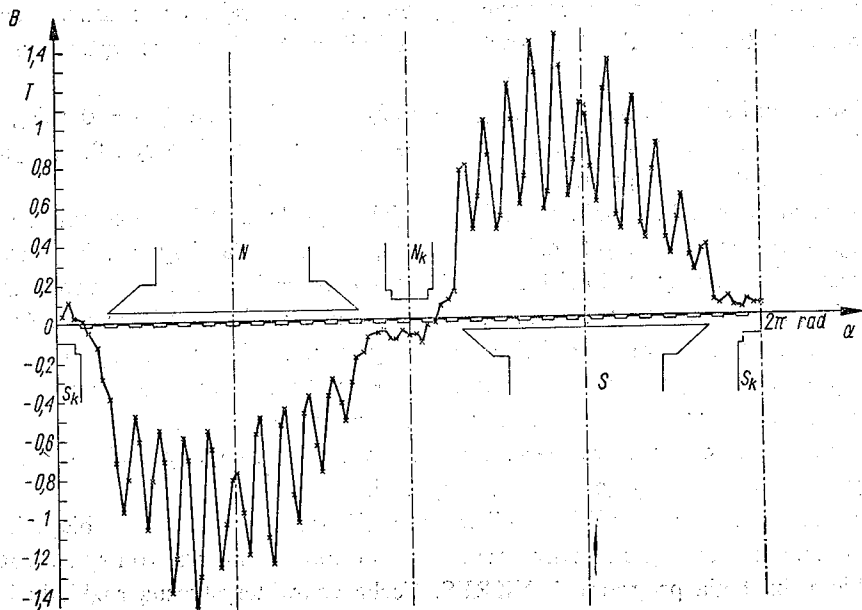
Rozkłady linii sił pola magnetycznego ze stałym skokiem dla $I/I_N = 0$ (bieg jałowy) oraz $I/I_N = 1$ (obciążenie nominalne) przy $I_f/I_{fN} = 1$ przedstawiają rys. 8, 9. Rysunki te są wynikiem działania programu RYSPOZ.

O poprawności rozkładu pola w stanie biegu jałowego (rys. 8) świadczy m.inn. symetria pola względem geometrycznych osi biegunów głównych, właściwy rozptył strumienia magnetycznego pomiędzy środowiskami o różnych własnościach magnetycznych np. układ zęb-żłobek, prawidłowe kąty załamania linii sił pola przecinających granice środowisk itp. Rozkład linii sił pola w stanie obciążenia maszyny (rys. 9) jest również poprawny strukturalnie i ilościowo. Wyraża się to poprzez charakterystyczne skrócenie strumienia w stosunku do osi geometrycznej bieguna, nierównomierną gęstość linii sił w strefach prawego i lewego nabiegunka oraz przesunięcie neutralnej osi magnetycznej bieguna komutacyjnego w stosunku do jego osi geometrycznej.

Rozkład składowej radialnej indukcji w szczelinie przytwornikowej dla biegu jałowego i obciążenia znamionowego maszyny przedstawiają odpowiednio rys. 10 i rys. 11. Rysunki są wynikiem działania programu WYKRES. Cechą charakterystyczną rozkładu indukcji w stanie biegu jałowego jest jego symetria względem osi geometrycznych biegunów głównych oraz zerowe wartości w strefie bieguna komutacyjnego. W stanie obciążenia zauważalny jest typowy niesymetryczny przebieg średniej wartości indukcji pod biegunem oraz niezerowe wartości indukcji w strefie bieguna komutacyjnego. W obu przypadkach wi-



Rys. 10. Radialna składowa indukcji w szczelinie w stanie biegu jałowego



Rys. 11. Radialna składowa indukcji w szczelinie w stanie obciążenia nominalnego

Wartość indukcji w szczelinie jest bardzo silnie zależna od kształtu i rozmieszczenia zębów wirnika. W szczególności bardzo silny wpływ uzębienia wirnika (złobki otwarte) na rozkład indukcji w szczelinie, przejawiający się dużym udziałem harmonicznych złobkowych.

Odbiegające w zauważalnym stopniu od normalnego poziomu wartości indukcji w pobliżu osi biegunów głównych mogą wynikać z dużej nieregularności i niejednakowej gęstości siatki w tym podobszarze.

Przedstawione powyżej rezultaty obliczeń w postaci rozkładów linii sił pola oraz rozkładów indukcji w szczelinie wnoszą istotne informacje dla konstruktora maszyny dotyczące rozłożenia obciążeń magnetycznych, wyzyskania obwodu magnetycznego, stopnia oddziaływania twornika itp. Rezultaty te potwierdzają poza tym poprawność zastosowanych algorytmów obliczeń, ponieważ są poprawne pod względem fizycznym.

Przedstawione w niniejszym artykule wyniki obliczeń stanowią pierwszy, podstawowy etap numerycznej analizy obwodu elektromagnetycznego badanego silnika. Wyniki te są podstawą do prowadzenia dalszych obliczeń numerycznych m.in.: identyfikacji parametrów rozproszenia biegunów głównych, obliczeń napięć indukowanych w uzwojeniu twornika oraz wyznaczania charakterystyk obciążenia silnika w oparciu o wielkości całkowite pola. Zagadnienia te są przedmiotem następnych opracowań autora.

5. PODSUMOWANIE, UWAGI KOŃCOWE

W artykule przedstawiono numeryczną analizę rozkładu pola magnetycznego w przekroju poprzecznym silnika prądu stałego PXOVKf 104b-2 typowej konstrukcji dla stanu jałowego i obciążenia. Do obliczeń zastosowano metodę elementu skończonego.

Przy wykorzystaniu oryginalnej koncepcji optymalnego ustawienia szczotek na komu-

tatorze, zależności określające wartości prądów w prętach komutujących oraz wzory sprowadzające prądy w prętach do prądów związanych z trójkątami dyskretyzacyjnymi, rozwiązano zagadnienie rozkładów prądów w podobszarach uzwojenia twornika. Podobnie podano zależności na prądy zastępcze w trójkątach dyskretyzacyjnych w podobszarach uzwojenia biegunów głównych i komutacyjnych.

W dalszej kolejności scharakteryzowano pokrótce zastosowany algorytm MES wyznaczania rozkładu pola magnetycznego oraz przedstawiono strukturę i charakterystykę uniwersalnego pakietu programów, przeznaczonego do numerycznej analizy zagadnień magnetostatycznych. Uniwersalność tego pakietu polega na:

- możliwości zadawania różnorodnych warunków brzegowych;
- możliwości wykonywania obliczeń zarówno dla biegu jałowego jak i dla dowolnego obciążenia maszyny;
- automatycznej weryfikacji danych dotyczących dyskretyzacji obszaru;
- komplementarnym charakterze trzech grup programów (liczące, weryfikujące i kreślące) z punktu widzenia wszechstronnej prezentacji wyników obliczeń.

W efekcie uzyskano wyniki numerycznej analizy obwodu magnetycznego badanego silnika w postaci automatycznie wykonanych rysunków rozkładu linii sił pola oraz rozkładów indukcji w szczelinie dla stanu jałowego i obciążenia maszyny. Równocześnie, również w postaci rysunków, przedstawiono wyniki automatycznej weryfikacji danych związanych z procesem dyskretyzacji. Wykazano, że uzyskane rezultaty są poprawne pod względem strukturalno-ilościowym. Są one podstawą do dalszych obliczeń numerycznych badanego silnika m.in.: identyfikacji parametrów rozproszenia biegunów głównych oraz wyznaczania charakterystyk obciążenia — co jest przedmiotem dalszych prac autora.

Scharakteryzowany w p. 3.2 uniwersalny pakiet programów liczących, weryfikujących i kreślących może być z powodzeniem wykorzystywany do analizy zjawisk w podobnych strukturalnie obwodach elektromagnetycznych przetworników elektromechanicznych w celu identyfikacji i weryfikacji ich parametrów, określenia własności i charakterystyk pracy oraz optymalizacji procesu projektowania.

BIBLIOGRAFIA

1. W. Przyborowski, P. Staszewski: *Model węzła komutacyjnego dla polowej analizy maszyn prądu stałego*. Rozprawy Elektrotechniczne (w przygotowaniu)
2. P. Staszewski, W. Przyborowski, G. Kamiński, R. Stankiewicz, R. Pięta, W. Guziński: *Zastosowanie metod polowych w obliczeniach i projektowaniu obwodów elektromagnetycznych maszyn elektrycznych, cz. I—V*. Dokumentacja Instytutu Maszyn Elektrycznych Politechniki Warszawskiej nr 043/501/005/2, Warszawa, 1981—85
3. S. H. Minnich i in.: *Load characteristics of synchronous generators by the finite-element method* Paper F80206-3 of the IEEE PES Winter Meeting, N. Y. February 3—8, 1980
4. N. A. Demerdash, M. R. Shah: *A practical approach to inclusion of electromagnetic fields nonlinearities in dynamic modelling of large turbogenerators*, Pt. 1: Basic principles for inclusion of instantaneous magnetic saturation. IEEE Trans. on PAS. 1981, vol. 100 nr 1
5. V. Sitaraman, R. B. Saxena: *Transient thermal analysis of turbogenerator rotor by finite element method*. ICEM, Athens, 1980, 15—17 September

6. L. A. Hageman, D. M. Young: *Applied iterative methods*. Academic Press Inc., N.Y., London, 1981
7. P. Staszewski: *Pełnozakresowa aproksymacja charakterystyki magnesowania ferromagnetyków funkcjami giętymi*. Materiały XIII Sympozjum Maszyn Elektrycznych, Kazimierz Dolny, 1977

P. STASZEWSKI

NUMERICAL ANALYSIS OF ELECTROMAGNETIC CIRCUIT OF DC MACHINES

Summary

The article presents a numerical analysis of the magnetic field in a dc machine in no-load and on-load modes. This original method enables determination of current distribution in the armature winding zone. The finite element method is applied for the calculations. Otherwise the universal programs package is used. The results have the form of equipotential distribution figures and air-gap induction distributions for both no-load and on-load operational conditions.

P. STASZEWSKI

ANALYSE NUMÉRIQUE DU CIRCUIT ÉLECTROMAGNETIQUE
D'UNE MACHINE À COURANT CONTINU

Résumé

Dans l'étude on a présenté l'analyse numérique du champ magnétique dans une machine électrique à courant continu en régime à vide et de charge. On a proposé la méthode originale de détermination de la répartition des courants dans la zone d'enroulement de l'induit. La méthode des éléments finis est appliquée dans les calculs. On a utilisé le paquet universel des programmes. Les résultats sont présentés en forme de dessins de répartition des lignes équipotentielles et de répartition de l'induction dans l'entrefer pour le régime à vide et de charge.

P. STASZEWSKI

NUMERISCHE ANALYSE DES ELEKTROMAGNETISCHEN KREISES
EINER GLEICHSTROMMASCHINE

Zusammenfassung

In dem vorliegenden Aufsatz wurde die Analyse eines magnetischen Feldes einer Gleichstrommaschine für den Leerlauf- und Belastungs zustand geschildert. Eine originelle Methode für die Bestimmung der Stromverteilung in der Zone der Ankerwicklung wurde vorgeschlagen. Bei den Berechnungen wurde die Methode der endlichen Elemente angewandt, und das universale Programmpaket ausgenutzt. Die Ergebnisse wurden in Form von Zeichnungen der Verteilungen von Äquipotentiallinien sowie der Induktionsverteilungen im Luftspalt für den Leer- und Belastungszustand dargestellt.

И. СТАШЕВСКИ

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЦЕПИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МАШИНЫ
ПОСТОЯННОГО ТОКА

Резюме

Представлен численный анализ магнитного поля в электрической машине постоянного тока при холостом ходе и нагрузке. Предложен оригинальный метод распределения токов в зоне якорной обмотки. Вычисления произведены методом конечных элементов при использовании универсального пакета программ. Результаты представлены в виде рисунков распределений линий магнитного поля и распределений индукции в воздушном зазоре при холостом ходе и нагрузке.

Elementy teorii elektrodynamicznych drgań dużych maszyn elektrycznych

WŁODZIMIERZ PRZYBOROWSKI (Warszawa)

Instytut Maszyn Elektrycznych, Politechnika Warszawska

Otrzymano 1986.05.23

W pracy rozpatrzono model strukturalny (modułowy) turbogeneratora, przystosowany do opisu efektów elektro-magneto-elastokinetycznych (wibracyjnych) zachodzących w tych maszynach. Na podstawie zasady Hamiltona, ujmującej oddziaływanie mechaniczne i elektromagnetyczne, wyprowadzono ogólne równania teorii. Wykorzystując specyfikację materiałów obwodów elektromagnetycznych maszyny, określono równania dla modeli modułowych uzyskując, w granicznym przypadku struktury tych modeli, uproszczony wariant teorii.

1. WSTĘP

Efekty wibracyjne w maszynach elektrycznych są badane w przeważającej liczbie prac na podstawie uproszczonych modeli fizykalno-matematycznych tych maszyn, a więc przy znacznym ograniczeniu aspektu fizycznego zjawisk elektromagnetycznych i związanych z nimi zjawisk mechanicznych, jak również przy uproszczeniu równań opisujących te efekty [1], [3], [5], [10], [15], [16], [17].

W związku ze sformułowaniem przed kilkunastoma latami nowej dyscypliny naukowej syntezującej opis sprzężonych pól elektromagnetycznych i sprężystych (elastokinetycznych) [9], wydaje się celowe włączenie zagadnień drgań w maszynach elektrycznych w całością problematyki pól sprzężonych. Wskazane jest więc zastosowanie metod tej teorii do określonych problemów wibracyjnych, w szczególności w jednostkach najwyższej mocy — turbogeneratorach. W maszynach tych bowiem, sprzężenie zjawisk o różnej naturze fizycznej (elektromagnetycznych, wibracyjnych, cieplnych) istotnie decyduje o efektywności ich pracy.

Należy zaznaczyć, że zastosowanie teorii i metod mechaniki kontinuum i elektromagnetyzmu, umożliwia określenie dokładniejszych modeli maszyny i wypracowanie ogólniejszych i wszechstronniejszych metod obliczeniowych procesów wibracyjnych w tych maszynach, w porównaniu do ujęć bazujących na metodach układów dyskretnych [5], [17]. Nie ulega oczywiście wątpliwości, że badanie (jakościowe i ilościowe) rozważanych problemów w ujęciu kontinualnym jest znacznie trudniejsze aniżeli innymi metodami.

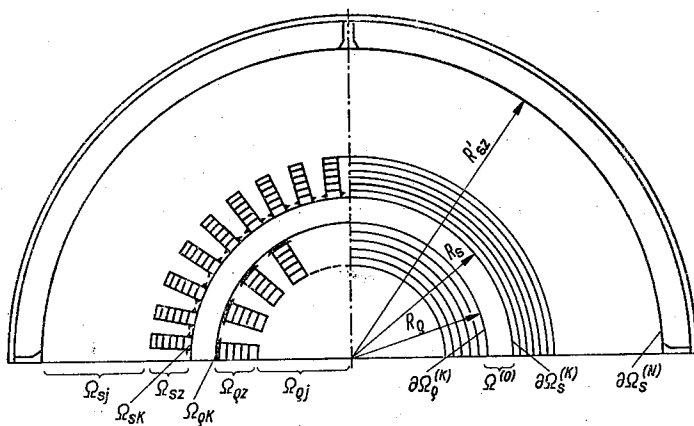
Niniejsza praca ma charakter podstawowy, ponieważ omówiono ogólny model i element modułowy modelu dużej maszyny elektrycznej, dla którego przedstawiono, w sposób ogólny i jednolity teoretycznie, podstawy opisu efektów elektro-magneto-elasto-kinetycznych.

Punktem wyjścia prezentowanego ujęcia są: przestrzeń odniesienia dla różnych zjawisk oraz funkcje (gęstość masy, prądów, i energii) z dziedziny mechaniki ciał okształconych i elektromagnetyzmu, charakteryzujące określone modele jako układy elektromagneto-dynamiczne. Aparatem formalnym teorii jest formalizm wariacyjny w zastosowaniu do zasady Hamiltona, obejmującej oddziaływania mechaniczne i elektromagnetyczne.

W oparciu o specyfikację konstytutywnych własności środowisk, określono odpowiednie układy równań, a przede wszystkim składniki (w tych równaniach) dotyczące sił elektrodynamicznych, dla sklasyfikowanych uprzednio podukładów maszyny. Przedstawiono również pewien uproszczony wariant teorii, polegający na sprowadzeniu determinant stanu vibracyjnego ustroju maszyny elektrycznej do kontaktowych sił elektrodynamicznych.

2. MODEL STRUKTURALNY MASZINY

Strefę aktywną ustrojów magneśnicy i twornika turbogeneratora, z pominięciem elementów konstrukcyjnych stanowiących zawieszenie i kadłub maszyny, można sklasyfikować na kilka podukładów (obszarów) różniących się funkcjonalnością w realizacji zjawisk fizycznych oraz zróżnicowanych konstrukcyjnie, geometrycznie i materiałowo. Magneśnicę (rotor — ρ) maszyny można rozdzielić na trzy zasadnicze podobszary: $\Omega_{\rho j}$ — stanowiący rdzeń magneśnicy, $\Omega_{\rho z}$ — obejmujący strefę żłobkowo-zębową z aktywnymi obwodami elektrycznymi oraz $\Omega_{\rho k}$ — obejmujący strefę żłobkowo-zębową z obwodami zwartymi. Osobliwym obszarem turbogeneratora jest szczelina powietrzna Ω_s , która ma zasadnicze znaczenie w transformacji energii elektromagnetycznej lecz wydzielona jest z rozważań efektów mechanicznych. Obszar twornika (statora — s) dzieli się, analogicznie jak magneśnicę, na trzy zasadnicze podobszary: $\Omega_{s k}$ — stanowiący strefę żłobkowo-zębową z klinami, $\Omega_{s p z}$ — obejmujący strefę żłobkowo-zębową z aktywnymi obwodami prądowymi



Rys. 1. Szkic przekroju turbogeneratora z wyszczególnionymi strefami rotora i statora

oraz Ω_{sj} — stanowiący jarzmo twornika. Ze względu na niejednoznaczność (geometryczną) obszaru jarzma maszyny, wskutek istnienia w tym obszarze osiowych kanałów wentylacyjnych, można dokonać dalszych podziałów na podobszary obejmujące poszczególne rzędy tych kanałów — $\Omega_{sj}^{(k)} (k = 1, \dots, N_j)$ (rys. 1).

Szczególnie osobliwą strefą maszyny elektrycznej są podobszary żłobkowo-zębowe z aktywnymi obwodami elektrycznymi ponieważ posiadają strukturę kompozytową. A ponadto pręty uzwojeń są zbiorem przewodów o niewielkich wymiarach w stosunku do całego pręta i niejednokrotnie mają konstrukcję niejednoznacznie geometryczną. Ze względu na charakterystyczną kompozytową strukturę strefy żłobkowo-zębowej, konstrukcje prętów (i przewodów) oraz znaczny wymiar radialny żłobków, można dokonać dalszego podziału tej strefy na elementy modułowe $\Omega_{Az}^{(kx)}$ ($A = q, s; k = 1, 2, 3, \dots, N_z$).

Poważnymi trudnościami w poszukiwaniu rozwiązań pól elektromagnetycznych i mechanicznych w ustrojach o konstrukcji i konfiguracji strefy żłobkowo-zębowej, są istotnie różne własności materiałowe prętów i zębów oraz ich naprzemienne usytuowanie na obwodzie maszyny. Proponuje się więc ujednolicenie (wzdłuż obwodu), w zakresie materiałowym i konstrukcyjnym modułowych elementów tej strefy, polegające na zastąpieniu struktury żłobkowo-zębowej, strukturą (warstwowo) ciągłą, jednorodną i jednorodną (mechanicznie). Tak więc modułowy element rzeczywisty zostaje zastąpiony modelem modułem zawierającym (w ogólnym przypadku) nieskończenie cienką warstwę przewodów, warstwę o skończonej grubości i warstwę magnetyczną (nieprzewodzącą). Wydzielenie warstwy przewodów o infinytezymalnej grubości, uzasadnione jest cienkością ścianek (w przekroju poprzecznym) przewodów pręta. A zatem, dla części przewodów nie uzasadnione byłoby odwzorowanie obwodów prądowych w obszary objętościowe. Wyróżnienie powierzchni prądowych ma również na celu uproszczenie formy i struktury oddziaływań elektrodinamicznych, a w przypadku gęstej dyskretyzacji tego obszaru w kierunku radialnym, obszar objętościowy prądów zbiega do obszaru powierzchniowego. Należy w tym miejscu zaznaczyć, że źródła czynnych obciążeń mechanicznych o naturze elektromagnetycznej, zlokalizowane są w strefach żłobkowo-zębowych.

Uszeregowanie (w kierunku radialnym) poszczególnych warstw modułowych zależy od konkretnej konstrukcji maszyny i w tym miejscu nie będzie szczegółowo dyskutowane. Można jednakże zaznaczyć, że dwie struktury modułu modelowego są dość ogólne, a więc możliwe jest sprowadzenie do nich różnych wersji konstrukcji stref żłobkowo-zębowych i jarzm dużych maszyn elektrycznych.

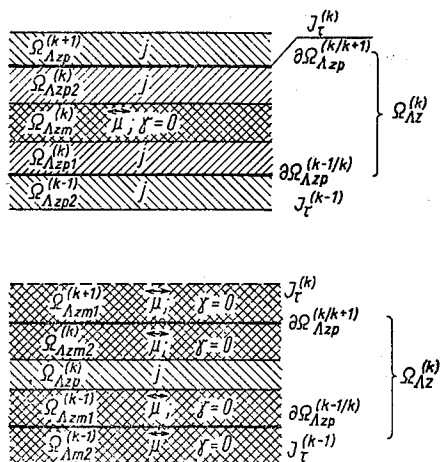
W obu przypadkach obszar liniowej gęstości prądu $\partial\Omega_{Azp}^{(k)}$ stanowi (walcowe) powierzchnie brzegowe obszaru modułu, wewnątrz którego: w pierwszym przypadku — warstwą środkową jest środowisko magnetyczne Ω_{Azm} , objęte warstwami z wymuszonymi prądami $\Omega_{Azp}^{(k)}$ (rys. 2a)

$$\Omega_{Az} = \Omega_{Azp1}^{(k)} \cup \Omega_{Azm}^{(k)} \cup \Omega_{Azp2}^{(k)} \cup \partial\Omega_{Azp}^{(k)}$$

w drugim przypadku usytuowanie jest odwrotne, czyli warstwa prądowa otoczona jest środowiskiem magnetycznym (rys. 2b)

$$\Omega_{Az}^{(k)} = \Omega_{Azp}^{(k)} \cup \Omega_{Azm1}^{(k)} \cup \Omega_{Azp}^{(k)} \cup \Omega_{Azm2}^{(k)} \cup \partial\Omega_{Azp}^{(k)}$$

Za powyższym ujednoliceniem i rozdzieleniem strefy żłobkowo-zębowej na szereg modułów, które można utożsamiać z warstewką przewodów w przecie, przemawia równość



Rys. 2. Szkice modelowych modułów strefy żłobkowo-zębowej turbogenerators. a) zwielokrotnione obszary prądowe; b) zwielokrotnione obszary magnetyczne.

obciążeń prądowych poszczególnych warstewek prądowych na wysokości żłobka oraz (prawie) identyczność parametrów materiałowych (elektromagnetycznych i mechanicznych) wydzielonych modułów. Ponieważ wydzielony moduł jest najbardziej złożonym (pod względem strukturalnym, kompozytowym i materiałowym) podobszarem maszyny, zarówno dla stref żłobkowo-zębowych jak i stref rdzeni, przeto dalsze rozważania będą ograniczone do określonego modułu. Tak więc z ustroju maszyny jako odkształcalnego ośrodka ciągłego zostaje wydzielona jego część jako ciało¹⁾ $\Omega_A^{(k)}$ otoczone powierzchnią $\partial\Omega_A^{(k)} (A = p, s)$. Ciało to zawiera podobszary $\Omega_{Am}^{(k)}$, $\Omega_{Ap}^{(k)}$ o różnych własnościach elektromagnetycznych i mechanicznych, tworzące obszar $\Omega_A^{(k)} = \Omega_{Am}^{(k)} \cup \Omega_{Ap}^{(k)}$. Elementy $\Omega_A^{(k)}$ — o rozpiętości przestrzennej:

$$\Omega_A^{(k)} = \{(r, \varphi, z); \quad r \in \langle r_{A1}^{(k)}, r_{A2}^{(k)} \rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, z \in \langle 0, L_{Fe} \rangle\}$$

$$r_{A2}^{(k)} \leq R_q, \quad r_s^{(k)} \in \langle R_s, R_{sz} \rangle, \quad |r_{A2}^{(k)} - r_{A1}^{(k)}| \ll L_{Fe};$$

R_q — promień beczki rotora, R_s, R_{sz} — promienie statora odpowiednio wewnętrzny i zewnętrzny (rys. 1), L_{Fe} — osiowa długość czynnego żelaza turbogenerators — tworzą ustrój maszyny i oddziałują między sobą, stykając się przez powierzchnie $\partial\Omega_A^{(k-1/k)}$ i $\partial\Omega_A^{(k/k+1)}$; $\partial\Omega_A^{(k)} = \partial\Omega_A^{(k-1/k)} \cup \partial\Omega_A^{(k/k+1)} \cup \partial\Omega_{Az}^{(k)}(\partial, L_{Fe})$ ²⁾. Sąsiednie moduły mogą być podobne strukturalnie lecz różne konstytutywnie. W granicznym przypadku elementy modułowe ustrojów maszyny sąsiadują z obszarem powietrznym Ω_δ , w którym również zlokalizowane jest pole elektromagnetyczne. W poszczególnych podukładach turbogenerators (magneśnica i twornik) zakłada się, że elementy modułowe są ze sobą idealnie (bez szczelin) spójne. Tak więc ustrój maszyny jest naturalnym zespołem (układem) elementów modułowych, współdziałających ze sobą elektromagnetycznie i mechanicznie.

Pomimo, iż związki i parametry konstytutywne będą omawiane w następnych częściach pracy, w tym miejscu jednak należy przedstawić ogólne uwagi o własnościach elektro-

¹⁾ W mechanice ośrodków ciągłych, ciałem określa się układ dynamiczny wraz z charakteryzującymi go funkcjami (pkt. 3) [2, 19].

²⁾ $\partial\Omega_{Az}^{(k)}(\partial, L_{Fe})$ — powierzchnie skrajne elementów modułowych.

magnetycznych ustrojów maszyny. Jest to bowiem związane z przeprowadzonym podziałem i specyfikacją elementów modułowych. Zastąpienie ustrojów konstrukcyjnych — o periodycznych i lokalnie niejednostopójnych strukturach zawierających różne materiały — modelem o strukturze jednostopójnej oraz warstwami materiałowo jednorodnymi, skłania do przyjęcia modelu ciała anizotropowego dla obszarów magnetycznych. Jest to naturalnie związane również z ukierunkowaniem strumieni magnetycznych w tej strefie. Obszary magnetyczne przyjmuje się jednocześnie jako nieprzewodzące. Obszary prądowe $\Omega_{Ap}^{(k)}$ natomiast są niemagnetyczne i zawierają wymuszone prądy. Jedynymi obszarami przewodzącymi są obwody zwarte i elementy lite magneśnicy, przy czym obszary te są nieznaczne (w sensie metrycznym) w stosunku do pozostałych. Należy w tym miejscu zwrócić uwagę na aspekt metodyczny i interpretacyjny dokonywanych strukturalnych przekształceń ustrojów maszyny i związanych z tym funkcji pola stosowanych do opisu rozważanych zagadnień. Otóż, wskutek określonych przekształceń ośrodków ustroju maszyny, funkcje pól będą w istocie pewnymi wielkościami uśrednionymi.

Kończąc analizę strukturalną ustroju maszyny wypada zaznaczyć, że określony powtarzalny element modułowy maszyny należy usytuować w przestrzeni, w której może się poruszać, i w której jednocześnie, należy określić wpływ na niego oddziaływań elektromagnetycznych. Przestrzeń odniesienia ma więc w tym zakresie zagadnień dość istotne znaczenie. Pole magnetyczne jest bowiem, w przypadku ogólnym, zewnętrznie generowane względem ciała odkształcalnego, lecz do niego wnika. Pole to jednocześnie nie obejmuje całej przestrzeni, lecz jej część, która nie jest zadana, a zależy od ruchu ciała. Należy więc również poszukiwać pola poza częściami ciała odkształcalnego. W związku z powyższym, jak również w celu uzasadnienia jednolitego opisu, w następnym punkcie przedstawione będą podstawowe pojęcia i sposoby opisu zagadnień mechaniki ciał odkształcalnych.

3. POJĘCIA WSTĘPNE I FUNKCJE PÓL

Badanie ruchu ciał, jak również ich stanu elektromagnetycznego, wymaga wprowadzenia uprzednio układu odniesienia (w czasoprzestrzeni)³⁾, względem którego ruch ten jest rozpatrywany. Wprowadza się więc jeden podstawowy układ współrzędnych (ξ_1, ξ_2, ξ_3, t) związany ze statorem maszyny; przy czym $(\xi_\alpha, t; \alpha = 1, 2, 3)$ ⁴⁾ interpretuje się jako współrzędne walcowe (r, φ, z) parametryzujące przestrzeń fizyczną, a t jest czasem. Oś z układu pokrywa się z osią maszyny. Ze względu na ogólność rozważań należy zaznaczyć, że w pewnych przypadkach badania drgań podukładów maszyny, znajdujących się w rotorze lub samego ustroju rotora, wygodniej będzie przyjąć układ współrzędnych (r, φ, z, t) z nim związany. Wobec sztywnego (synchronicznego) wirowania rotora, relacje między współrzędnymi obu układów mają postać $r = r'$, $\varphi = \varphi' - \omega' t$, $z = z'$, gdzie ω' jest prędkością obrotową rotora.

³⁾ Pomimo, iż elektrodynamika jest teorią (niejawnie) relatywistyczną, rozważane problemy odnosi się do czasoprzestrzeni Galileusza. Rozpatruje się bowiem małe prędkości, zaniedbując efekty relatywistyczne.

⁴⁾ Współrzędne punktów oraz składowe funkcji wektorowych i tensorowych, indeksowane są literami greckimi.

Nie wnikając w szczegóły mechaniki ośrodków ciągłych, należy jednak w tym miejscu zasygnalizować kilka zasadniczych pojęć i relacji charakterystycznych dla tej dziedziny [2], [18], [19].

Ruch ośrodka ciągłego względem układu współrzędnych opisuje się funkcją deformacji χ (wektor funkcją), której dziedziną są punkty $x = (x^1, x^2, x^3)$ oznaczające współrzędne cząstek ciała jako ośrodka ciągłego. A zatem ma sens rozważanie ruchu ośrodka względem pewnej konfiguracji odniesienia ruchu $x = \chi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$, przy czym funkcje χ i κ ($\kappa_\alpha(x, t) = \xi_\alpha$) są jednoznaczne $\left(\det \frac{\partial \kappa_\alpha}{\partial x^\alpha} \neq 0\right)$. Jednocześnie w opisie ruchu cząstek ciała można stosować funkcje $u_\alpha = u_\alpha(x, t)$ zdefiniowane wzorem

$$u_\alpha = \kappa_\alpha(x, t) - \kappa_\alpha(x, t_0), \quad (1)$$

które oznaczają przemieszczenie ciała od położenia w chwili t_0 . Wyrażając poglądowo powyższe funkcje i relacje można stwierdzić, że w mechanice ciał odkształcalnych stosuje się (co najmniej) dwa rodzaje „układów współrzędnych” (zmiennych niezależnych), a więc dwa sposoby opisu ruchu i pola przemieszczeń. W tak zwanym opisie przestrzennym (Eulera) przyjmuje się jako zmienne niezależne współrzędne ξ_α punktu materialnego w chwili t . Rozważa się więc punkty przestrzeni zajmowane w różnych chwilach czasowych przez różne cząstki ciała. W opisie materialnym (Lagrange’a), jako zmienne niezależne, przyjmuje się współrzędne cząstek materialnych ciała przed odkształceniem. Opis przestrzenny różni się od opisu materialnego zarówno pod względem postaci tak zwanych tensorów odkształcenia, jak również formami pochodnych czasowych funkcji opisujących stan ośrodka [2], [8]. Różnice w opisach znikają jeśli odkształcenia są bardzo małe i można pominąć człony nieliniowe w stosunku do liniowych. Jednocześnie wtedy, gradienty przemieszczeń są pomijalnie małe względem jedności i wygodniej jest korzystać z pojęcia przemieszczenia w opisie ruchu ciała, a właśnie ma to miejsce w problemie drgań maszyn elektrycznych przy rozważaniu małych drgań ustroju (statora) maszyny względem położenia początkowego⁵⁾. Należy w tym miejscu zaznaczyć, że w zagadnieniach elektrodynamiki technicznej stosuje się opis przestrzenny⁶⁾. Pomijając szczegółową dyskusję zalet i wad obu metod opisu [2] wypada nadmienić, że w opisie materialnym dogodniejsze jest określenie warunków brzegowych na powierzchniach materialnych, a więc powierzchniach, które w trakcie ruchu składają się z tych samych cząstek jak w konfiguracji odniesienia. Ponieważ w rozważanym problemie przyjmuje się małe odkształcenia (o czym nadmieniono powyżej) oraz liniowość związków między odkształceniami i naprężeniami, a ponadto zakłada się znikomość przemieszczeń drgań względem charakterystycznych wymiarów elementów konstrukcyjnych ustroju maszyny — to można zaniedbać różnice między opisem przestrzennym i materialnym. Stosować się więc będzie zmienne z przestrzeni fizycznej w aktualnej konfiguracji. Jednocześnie powierzchnie graniczne wyróżnionych obszarów będą traktowane jako powierzchnie materialne.

Nie dyskutując (szczegółowo) w tym miejscu pojęć pierwotnych mechaniki ośrodków ciągłych i elektromagnetyzmu wymienione zostaną tylko funkcje, które określają te pojęcia

⁵⁾ Z powyższej dyskusji wynika, że opis elektro-elastokinetyczny pewnych części konstrukcyjnych (np. połączeń czołowych) dużych maszyn elektrycznych wymagać będzie zastosowania obu metod opisu.

⁶⁾ Równania Maxwella można również sformułować w opisie materialnym.

i opisują procesy mechaniczno-elektromagnetyczne. Funkcjami tymi są — w zakresie mechaniki: funkcja gęstości masy ρ , funkcja deformacji χ lub przemieszczenia u (omówione pokrótce powyżej), gęstości sił kontaktowych $t_{\partial\Omega}$ na powierzchniach otaczających obszar Ω , gęstości sił objętościowych f_Ω w obszarze Ω , funkcje gęstości energii ciała sprężystego W_m ; w zakresie elektromagnetyzmu: funkcja gęstości prądu j i liniowej gęstości prądu I , funkcje pola elektromagnetycznego: E — natężenia pola elektromagnetycznego, H — natężenia pola magnetycznego, B — indukcji magnetycznej; funkcje gęstości energii elektromagnetycznej W_{EM} oraz energii dotyczącej sprzężenia obu rodzaju pól W_{mM} . Oprócz powyżej określonych funkcji wprowadza się wielkości pochodne jak tensor odkształcenia ε wyrażony gradientem składowych wektora przemieszczenia oraz tensor naprężenia σ i objętościową gęstość sił wewnętrznych $\text{div} \sigma$, zdefiniowanych przez wektor gęstości sił kontaktowych. Również odpowiednie funkcje pola elektromagnetycznego określają tensor naprężeń Maxwella T i objętościową gęstość elektrodynamicznych sił wewnętrznych $\text{div} T$. W zakresie zagadnień elektromagnetycznych, w celu ujednolicenia analiz i usprawnienia obliczeń wprowadza się również potencjał wektorowy A , który mianowany jest współrzędną uogólnioną układu. Z powyższych rozważań wyłącza się funkcje charakteryzujące zjawiska magnetostrykcyjne, ładunki swobodne ($\rho_e = 0$) i prądy przesunięcia ($\frac{\partial D}{\partial t} = 0$).

Zestawione powyżej wielkości, mianowane ogólnie funkcjami, zostały sklasyfikowane pod względem fizycznym lecz mają one również określone znaczenie formalne. Niektóre z tych wielkości są tak zwanymi funkcjami stanu — $W_{(.)}$, inne zaś konstytuujące je, zwane są parametrami stanu — $B, H, \sigma, \varepsilon$. Jednocześnie odpowiednie parametry nie są od siebie niezależne.

Wobec powyższych rozważań można stwierdzić, że efekty mechaniczno-elektromagnetyczne w ustrojach maszyn elektrycznych są procesami zlokalizowanymi w przestrzeni konfiguracji i przestrzeni stanów. Procesy te opisywane są wymienionymi funkcjami, zwanymi ogólnie zmiennymi elektro-magneto-dynamicznymi, które charakteryzują wskazane uprzednio modele modułowe ustroju maszyny, jako układy elektrodynamiczne. Jedynymi zmiennymi niezależnymi układu są oczywiście współrzędne przestrzeni i czasu.

Z powyższych uwag wynika, że pola mechaniczne i elektromagnetyczne są ze sobą naturalnie związane (sprężone) w sposób fizyczny przez siły $t_{\partial\Omega m}$ i $f_{\Omega m}$ o naturze elektromagnetycznej. Należy przy tym podkreślić, że weryfikację eksperymentalną schematów obliczeniowych i metod analiz zjawisk wibracyjnych w turbogeneratorach najdogodniej jest przeprowadzić badając stan wibracyjny maszyn w zależności od ich energetycznego stanu obciążenia [10], [11] — generowanej mocy czynnej P , mocy biernej Q i napięcia U . Tak więc główne determinanty drgań $t_{\partial\Omega m}$ i $f_{\Omega m}$ trzeba przedstawić jako funkcje (m.in.) parametrów energetycznego stanu obciążenia maszyny (P, Q, U). Jest to zatem dodatkowe zagadnienie rozważanego problemu drgań turbogeneratorskiego i związane jest z określeniem funkcji prądów magnesu i twornika w zakresie wartości amplitud jak i przestrzenno-czasowego rozkładu. Ponieważ właśnie funkcje prądów skorelowane są ze stanem energetycznego obciążenia (i parametrami obwodowymi) maszyny [7].

Uprowadzając dalszy tok rozważań, gdzie zostaną sformułowane funkcje (i funkcjonały)

opisujące własności elektromagnetodynamiczne i konstytutywne rozpatrywanego układu elektrodynamicznego, należy w tym miejscu zwrócić uwagę na osobliwy związek konstytutywny, którym jest równanie Ohma.

Równanie Ohma w ogólnej postaci dla przypadku ciał wolnoporuszających się ruchem sztywnym (obrotowym) i doznających efektów elastokinematycznych można przedstawić

$$j_{\alpha} = \gamma_{\alpha\beta} [\mathbf{E} + \boldsymbol{\omega}^r \times \mathbf{R} \times \mathbf{B} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}]_{\beta}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

gdzie: $\gamma_{\alpha\beta}$ — tensor przewodności elektrycznej, $\boldsymbol{\omega}^r$ — prędkość obrotowa rotora, $\mathbf{R}$ — promień strefy rotora zawierającej elementy przewodzące, $\mathbf{u}$ — prędkość przemieszczenia. Powyższe równanie, jak zaznaczono uprzednio, odnosi się tylko do jednego podobszaru rotora, który stanowią obwody zwarte i elementy lite (Ω_{ok}).

Osobliwość tego równania polega (w sensie formalnym) na strukturze związku między wielkościami $\mathbf{j}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{u}$, oraz w sensie fizycznym ujmuje naturę transformacyjną i rotacyjną prądów indukowanych, a ponadto wymaga się niezmienniczości tego równania przy transformacjach Lorentza. Wobec powyższych uwag, niezwykle trudno (pod względem formalnym i interpretacyjnym) jest włączyć ten związek w tworzone funkcje do formułowania równań pola i utworzyć jednolity opis. Należy jednocześnie zaznaczyć, że obszar, w którym to równanie w pełni obowiązuje jest bardzo nieznaczny oraz prądy indukowane wskutek elastokinematycznych przemieszczeń (cząstek) ośrodka są niewielkie w stosunku do prądów indukowanych wskutek innych efektów. Można ogólnie stwierdzić, że w badaniach drgań (zasadniczych podukładów) dużych maszyn elektrycznych efekt „silnego”⁷⁾ sprzężenia pól elektromagnetycznego i elastokinematycznego, ujęty tym równaniem (2), można pominąć.

4. UWAGI O SIŁACH ELEKTRODYNAMICZNYCH

Jednym z ważnych zagadnień w formułowaniu fenomenologicznych teorii elektromagnetyzmu ciał odkształcalnych lub oddziaływania ośrodka odkształcalnego z polem elektromagnetycznym jest określenie tak zwanych sił „ponderomotorycznych”. Ponieważ zagadnienia dotyczące tych sił są rozważane (dość obszernie) w kilku monografiach i publikacjach [4], [16], [18], przeto w tym miejscu zostaną rozpatrzone tylko pewne zasadnicze zależności oraz uogólnienia, względnie adaptacje tych wielkości do rozpatrywanych zagadnień.

Fundamentalną zależnością w fenomenologicznym ujęciu „siłowych” oddziaływań elektromagnetycznych jest związek

$$f_{\alpha} = T_{\alpha\beta, \beta} \quad (3)^8$$

wyrażający równość sił objętościowych z dywergencją tensora naprężenia (Maxwella). Związek ten określa się w oparciu o tensor energii — pędu pola elektromagnetycznego, z czego wynika również forma tensora naprężenia [6].

⁷⁾ Użyte określenie na stopień sprzężenia pól ma charakter umowny i odnosi się tylko do aspektu formalnego określonych zależności.

⁸⁾ Zastosowanie notacji wskaźnikowej z konwencją oznaczania przecinkiem pochodnych absolutnych i konwencją sumacyjną po wskaźnikach powtarzających się (np. $\text{div } \mathbf{B} = B_{\alpha, \alpha}$) ma na celu ujednolicenie

Ponieważ w rozpatrywanym zagadnieniu rozważa się deformacje odkształcalnego ośrodka anizotropowego (elektromagnetycznie i mechanicznie) na gruncie symetrycznej teorii sprężystości, przeto wyrażenie na tensor naprężenia przyjmuje się w formie

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [H_{\alpha} B_{\beta} + B_{\alpha} H_{\beta} - \delta_{\alpha\beta} (H_{\gamma} B_{\gamma})] \quad (4)$$

zapewniającej symetryczność tego tensora. W oparciu o zależności (3), (4) można napisać wzory na siły elektrodynamiczne wyrażone explicite przez wielkości pola.

Ogólna zależność dla objętościowych sił elektromagnetycznych ma postać

$$f_{\alpha} = \frac{1}{2} \{B_{\beta} [H_{\alpha,\beta} - H_{\beta,\alpha}] + H_{\beta} [B_{\alpha,\beta} - B_{\beta,\alpha}] + B_{\alpha} H_{\gamma,\gamma}\}. \quad (5)^9$$

W obszarze prądowym turbogeneratorsiły objętościowe określa się wyrażeniem

$$f_{\alpha} = B_{\beta} [H_{\alpha,\beta} - H_{\beta,\alpha}]. \quad (6)$$

W obszarach bezprądowych lecz magnetycznych¹⁰⁾ $\Omega_{Am}^{(k)}$ ($\text{rot } H = 0$) wyrażenie (5) upraszcza się do postaci

$$f_{\alpha} = \frac{1}{2} \{H_{\beta} [B_{\alpha,\beta} - B_{\beta,\alpha}] + B_{\alpha} H_{\gamma,\gamma}\}, \quad (7)$$

a przy założeniu jednorodności ośrodka ($\mu = \text{const.}$) ma formę

$$f_{\alpha} = \frac{1}{2} \{B_{\alpha} H_{\beta,\beta} + H_{\beta} H_{\alpha,\beta} (\mu_{\alpha} - \mu_{\beta})\} \quad (8)$$

natomiast w przypadku niejednorodnego i nieprzewodzącego ośrodka izotropowego, wzór (5) redukuje się do postaci

$$f_{\alpha} = -\frac{H_{\beta} H_{\beta}}{2} \mu_{,\alpha}. \quad (9)$$

W kontekście powyższych zależności wypada zauważyć, że w ośrodku magnetycznym, nieprzewodzącym, jednorodnym i izotropowym znikają siły objętościowe. Na podstawie zależności (5) można wyprowadzić dalsze wzory uwzględniające relacje między składowymi pól B_{α} , H_{α} oraz parametrami konstytutywnymi μ_{α} , μ_{β} .

Naprężenia elektromagnetyczne na granicach ośrodków — siły kontaktowe, określa się przez tensor naprężenia według zależności

$$t_{\alpha M}^{(k/k+1)} = [T_{\alpha\beta}^{(k)} - T_{\alpha\beta}^{(k+1)}]_{,n_{\beta}}, \quad (10)$$

zapisu wielkości mechanicznych i elektromagnetycznych. Ponadto w pewnych przekształceniach sił objętościowych nie zawsze notacja wektora jest wygodna. W zależnościach dla pola elektromagnetycznego stosowana jest notacja wektorowa.

⁹⁾ Równanie (5) w notacji wektorowej ma postać

$$f_{\alpha} = \frac{1}{2} \{ [\text{rot } H \times B]_{\alpha} + [\text{rot } B \times H]_{\alpha} + B_{\alpha} \text{div } H \}$$

¹⁰⁾ Określone zależności stosuje się również do ośrodków ferromagnetycznych rdzeni maszyny przyjmując, że są to magnetyki o znikomej histerezie i magnetyzmie szczątkowym. Naturalnie, otrzymane formy sił objętościowych, w przypadku ośrodka ferromagnetycznego, są siłami zastępczymi pewnych naprężeń rzeczywistych.

gdzie: n_β jest wektorem normalnym do powierzchni $\partial\Omega_A^{(k/k+1)}$ rozdziału obszarów $\Omega_A^{(k)}$, $\Omega_A^{(k+1)}$.

Należy w tym miejscu zwrócić uwagę na fakt, że analiza ilościowa elektromagnetycznych sił objętościowych i kontaktowych w obszarze przyszczelinowym stref żłobkowo-zębowych turbogenerатора jest bardzo trudna i nie dokonano jeszcze obecnie takiej analizy dla rzeczywistych struktur tego obszaru. Interesujące jednak jest określenie, przybliżonej relacji między jednostkowymi siłami wypadkowymi z gęstości sił objętościowych i kontaktowych, co można przeprowadzić w sposób szacunkowy, dla proponowanego modułowego modelu maszyny. Przyjmując jako wielkość bazową wartość indukcji szczelinowej równą 1 T oraz przyjmując relację podziałki żłobkowej i szerokości żłobka $t_z/b_z = 2$, średnie nasycenie obszaru zębów, znamionowe wartości prądów w prętach twornika ($8 \div 12$ kA) dla standardowych turbogeneratorów oraz zakładając łagodną zmienność indukcji w obszarze zębów i żłobków, a przy tym silne zróżnicowanie wartości indukcji w tych obszarach, to stosunek jednostkowej siły wypadkowej z sił kontaktowych oraz gęstości sił objętościowych (w różnych reprezentacjach $(6) \div (9)$) kształtuje się w przedziale wartości $\langle 10^2 \div 10^3 \rangle$. Charakterystyczna jest więc dominacja sił kontaktowych nad objętościowymi, naturalnie dla zaproponowanego modelu rozważanej strefy maszyny. Należy zauważyć, że w wielu zagadnieniach analiz pól elektromagnetycznych w maszynach elektrycznych, przyjmowane założenia odnośnie struktury i materiałów dla ośrodków ustroju tych maszyn implikują znikomość sił objętościowych. Ogólnie jednak należy stwierdzić, że oddziaływania elektrodynamiczne w maszynach elektrycznych są realizowane przez siły objętościowe i kontaktowe.

5. RÓWNANIA MAGNETO-ELASTOKINETYKI

Jak zaznaczono uprzednio (pkt. 2) z ustroju maszyny wydziela się jego część stanowiącą modułowy element $\Omega_A^{(k)}$, otoczony powierzchnią $\partial\Omega_A^{(k)}$, który jest podstawowym elementem ustroju maszyny w odniesieniu do rotora ($A = \varrho$) i statora ($A = s$). Element ten może w ogólnym przypadku zawierać również podobszary o różnych własnościach materiałowych — co będzie rozważane w zależnościach finalnych.

W ogólnym przypadku na częściach powierzchni $\partial\Omega_A^{(k)}$ mogą być zadane: naprężenia mechaniczne $t_{\alpha m}^* - \partial\Omega_{\alpha t}^{(k)}$, naprężenia magnetyczne $t_{\alpha M}^* = T_{\alpha\beta} n_\beta - \partial\Omega_{\alpha t}^{(k)}$, przemieszczenia $\Pi_\alpha^* - \partial\Omega_{\alpha u}^{(k)}$, liniowe gęstości prądów $I_{\alpha(r)}^* - \partial\Omega_{\alpha J}^{(k)}$, przy czym —

$$\partial\Omega_A^{(k)} = \partial\Omega_{\alpha t}^{(k)} \cup \partial\Omega_{\alpha T}^{(k)} \cup \partial\Omega_{\alpha u}^{(k)} \cup \partial\Omega_{\alpha J}^{(k)}.$$

Rozważa się więc modułowy element, w obszarze $(\Omega_A^{(k)})$ i na powierzchni $(\partial\Omega_A^{(k)})$ którego istnieją pola magnetyczne i mechaniczne. Pomija się oddziaływanie obu rodzajów pól ujęte uogólnionym związkami Ohma (2) (pkt. (3)) oraz zakłada się pomijalny wpływ deformacji ośrodka na zniekształcenie pola elektromagnetycznego w punktach przestrzeni, zajmowanych przez cząstki ośrodka przed deformacją.

Konkludując założenia należy stwierdzić, że teorię efektów wibracyjnych w maszynach elektrycznych formułuje się przy założeniu co najwyżej „średniego” sprzężenia zjawisk elektromagnetycznych i mechanicznych. Tak więc deformacje nie mają wpływu na rozkład pola elektromagnetycznego, a pole to oddziałuje na ośrodek odkształcalny siłami

elektrodynamicznymi. Naturalnie siły te muszą być uprzednio obliczone na podstawie schematów obliczeniowych i metod teorii maszyn elektrycznych i elektromagnetyzmu.

Jedną z metodyk formułowania równań procesów fizycznych jest zasada wariacyjna Hamiltona. Należy więc rozpatrywany układ elektrodynamiczny opisać odpowiednim funkcjonałem działania, określonym zmiennymi dynamicznymi (i ich pochodnymi) charakteryzującymi jednocześnie ten układ z punktu widzenia elektro-magneto-elastokinetycznego. Charakterystyczne w tym ujęciu jest to, że własności materiałowe ośrodka ujęte są w odpowiednich formach funkcjonału działania, czyli pewne funkcje opisujące własności elektrodynamiczne ciała pełnią rolę równań konstytutywnych. Ze względu na pewnego rodzaju niejawnosci opisu tego zagadnienia, należy wyraźnie stwierdzić, że wobec kompozytowej struktury ustroju maszyny i anizotropii materiałów [12] przyjmuje się anizotropowość mechaniczną i magnetyczną rozpatrywanych ciał. W związku z powyższym, oprócz funkcji energii o różnej naturze (sprężystości kinetycznej, magnetycznej itp.) wprowadza się również funkcje tak zwanej energii komplementarnej: W_{Km} mechanicznej i W_{KEM} elektromagnetycznej, które ustalają jednoznaczność między wielkościami odpowiednio $\sigma_{\alpha\beta} \sim \varepsilon_{\alpha\beta}$ i $H_\alpha \sim B_\alpha$. Jak zaznaczono powyżej funkcjonal działania charakteryzujący własności elektryczno-magnetyczne i mechaniczne układu elektrodynamicznego musi zawierać składniki odnoszące się do efektów mechanicznych, elektromagnetycznych i oczywiście te składniki, które ujmują wzajemne oddziaływania (sprężenie) pól. Składnikami funkcjonału są funkcje, które są tak zwanymi gęstościami skalarowymi. Funkcjonał działania ma więc postać:

$$\begin{aligned}
 S = & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{\Omega_A} \left[\frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}}_\alpha \dot{\mathbf{u}}_\alpha - \sigma_{\alpha\beta} \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{\alpha,\beta} + \mathbf{u}_{\beta,\alpha}) + W_{Km} + f_\alpha \mathbf{u}_\alpha \right] dv + \int_{(\partial\Omega_{At} + \partial\Omega_{AT})} (t_{\alpha m}^* + \right. \\
 & + t_{\alpha M}^*) \mathbf{u}_\alpha ds + \int_{\Omega_A} T_{\alpha\beta} \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{\alpha,\beta} + \mathbf{u}_{\beta,\alpha}) dv + \int_{\partial\Omega_A} (t_{\alpha m} + t_{\alpha M}) (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha^*) ds + \\
 & \left. + \int_{\Omega_A} (-B_\alpha \mu_\alpha^{-1} \text{rot}_\alpha A - W_{KEM} + j_\alpha A_\alpha) dv + \int_{\partial\Omega_{AJ}} J_{\alpha i}^* A_\alpha ds \right\} dt, \quad (11)
 \end{aligned}$$

przy czym: $W_{Km} = \sigma_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} A_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\delta}$ — energia komplementarna sprężystości,

$W_{KEM} = B_\alpha H_\alpha - \frac{1}{2} \mu_\alpha H_\alpha H_\alpha$ — energia komplementarna (koenergia) magnetyczna, $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$

tensor sprężystości, μ_α — współrzędne tensora przenikalności magnetycznej ośrodka ($\mu_\alpha = \mu_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta}$)¹¹⁾. Utworzony funkcjonal działania wyrażony jest explicite m.in. przez parametry stanu $\sigma_{\alpha\beta}$ i B_α ponieważ: elementem sprzężenia zjawisk są naprężenia magnetyczne $T_{\alpha\beta}$ co jest odpowiednikiem $\sigma_{\alpha\beta}$, zaś przy wyborze indukcji magnetycznej na zmienną, otrzymuje się pewnego rodzaju jednolitość opisu. Oczywiście, można również odpowiedni funkcjonal działania wyrazić przez zmienne $\varepsilon_{\alpha\beta}$ i H_α . Wobec określonego wyboru zmiennych $\langle \sigma_{\alpha\beta}, B_\alpha \rangle$, funkcje energii komplementarnych $W_{Km}(\sigma_{\alpha\beta})$ $W_{KEM}(B_\alpha)$ są potencjałami dla odpowiednich zmiennych dualnych $\langle \varepsilon_{\alpha\beta}, H_\alpha \rangle$. Traktując przyrosty wirtualne $\delta \mathbf{u}_\alpha$, $\delta \sigma_{\alpha\beta}$,

¹¹⁾ Rozważa się ośrodek magnetycznie ortotropowy; $\delta_{\alpha\beta}$ symbol Kroneckera.

δB_α , δA_α , $\delta T_{\alpha\beta}$ jako niezależne, dokonuje się wariacji funkcjonału [11]. Na powierzchni $\partial\Omega_{\Lambda t}^{(k)}$, na której działają obciążenia, przyrostów wirtualnych doznają przemieszczenia; na powierzchni $\partial\Omega_{\Lambda t}^{(k)}$ zmiany doznają naprężenia; na powierzchni $\partial\Omega_{\Lambda t}^{(k)}$ przyrostu doznaje potencjał wektorowy A_α . Funkcje Π_α^* , $t_{\alpha m}^*$, $J_{\alpha(r)}^*$, $T_{\alpha\beta}^*$ są oczywiście funkcjami zadanymi i nie doznają przyrostów. Jednocześnie należy zauważyć, że przy infinitezymalnych zmianach przemieszczeń $\delta\Pi_\alpha$ i wielkości elektromagnetycznych δB_α , δA_α , parametry wymuszeń zewnętrznych: siły objętościowe f_α i prądy j_α — nie doznają wariacji.

Biorąc pod uwagę: relację $\delta\Pi_\alpha|_{t_1} = 0$, co oznacza znikanie wariacji przemieszczeń na końcach przedziału czasowego rozważanego procesu elektrodynamicznego, oraz zależności

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\Lambda t}^{(k)}} \sigma_{\alpha\beta} \Pi_{\alpha,\beta} dv &= \int_{\partial\Omega_{\Lambda t}^{(k)}} \sigma_{\alpha\beta} \delta\Pi_{\alpha,\beta} ds - \int_{\Omega_{\Lambda t}^{(k)}} \sigma_{\alpha\beta,\beta} dv, \\ \int_{\Omega_{\Lambda t}^{(k)}} B_\alpha \mu_\alpha^{-1} \operatorname{rot}_\alpha \delta A dv &= \int_{\Omega_{\Lambda t}^{(k)}} \{ \operatorname{rot}_\alpha [B_\beta \mu_\beta^{-1}] \delta A_\alpha + \operatorname{div} [B_\alpha \mu_\alpha^{-1} \times \delta A] \} dv = \\ &= \int_{\Omega_{\Lambda t}^{(k)}} \operatorname{rot}_\alpha [B_\beta \cdot \mu_\beta^{-1}] \delta A_\alpha dv - \int_{\partial\Omega_{\Lambda t}^{(k)}} [n \times B_\alpha \cdot \mu_\alpha^{-1}]_\tau \delta A_\alpha ds, \end{aligned} \quad (12)$$

można wariację funkcjonału, przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{\Omega_{\Lambda t}^{(k)}} \left\{ (\sigma_{\alpha\beta,\beta} + T_{\alpha\beta,\beta} + f_\alpha - \rho \dot{\Pi}_\alpha) \delta A_\alpha - \left[\frac{1}{2} (\Pi_{\alpha,\beta} + \Pi_{\beta,\alpha}) - \frac{\partial W_{Km}}{\partial \sigma_{\alpha\beta}} \right] \delta \sigma_{\alpha\beta} \right\} dv + \right. \\ &+ \int_{\partial\Omega_{\Lambda t}^{(k)}(t+\tau)} \{ (\sigma_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta}) n_\beta - t_{\alpha m}^* - t_{\alpha M}^* \} \delta \Pi_{\alpha,\beta} ds + \int_{\partial\Omega_{\Lambda t}^{(k)}} (\Pi_{\alpha,\beta} - \Pi_{\beta,\alpha}^*) (\delta t_{\alpha m} + \delta t_{\alpha M}) ds + \\ &+ \int_{\Omega_{\Lambda t}^{(k)}} \left\{ [j_\alpha - \operatorname{rot}_\alpha (\mu^{-1} \mathbf{B})] \delta A_\alpha - \left[\mu_\alpha^{-1} \operatorname{rot}_\alpha \mathbf{A} - \frac{\partial W_{KEM}}{\partial B_\alpha} \right] \delta B_\alpha \right\} dv + \\ &+ \int_{\partial\Omega_{\Lambda t}^{(k)}} \{ \mathbf{J}_\tau^* + [n \times \mu_\alpha^{-1} \operatorname{rot}_\alpha \mathbf{A}] \} \delta A_\alpha ds \Big\} dt. \end{aligned} \quad (13)$$

Wobec niezależności wariacji $\delta\Pi_\alpha$, $\delta\sigma_{\alpha\beta}$, $\delta t_{\alpha m}$, $\delta t_{\alpha M}$, δB_α , δA_α otrzymuje się następujące równania problemu wariacyjnego

— mechaniczne:

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} + T_{\alpha\beta,\beta} + f_\alpha - \rho \dot{\Pi}_\alpha = 0 \quad (\text{magneto elastokinetyczne}) \quad (14)$$

$$\frac{\partial W_{Km}}{\partial \sigma_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} (\Pi_{\alpha,\beta} + \Pi_{\beta,\alpha}) = \varepsilon_{\alpha\beta} \quad (15)$$

$$[\sigma_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta}] n_\beta = t_{\alpha m}^* + t_{\alpha M}^* \cdot \partial\Omega_{\Lambda t}^{(k)}(t+\tau) \quad (16)^{2)}$$

$$\Pi_\alpha = \Pi_\alpha^* \cdot \partial\Omega_{\Lambda t}^{(k)} \quad (17)$$

— elektromagnetyczne:

$$\operatorname{rot}_\alpha (\mu^{-1} \mathbf{B}) = j_\alpha \quad (18)$$

¹²⁾ $[[f]]$ oznacza skok funkcji $[[f]] = f^+ - f^-$ gdzie f^+ i f^- są wartościami granicznymi funkcji z obu stron powierzchni $\partial\Omega_{\Lambda t}$.

$$\frac{\partial W_{\text{KEM}}}{\partial B_\alpha} = \mu_\alpha^{-1} \text{rot}_\alpha \mathbf{A} = H_\alpha \quad (19)$$

$$[[n \times \mu_\alpha^{-1} \text{rot}_\alpha \mathbf{A}]]_\tau = J_{\alpha\tau|\partial\Omega_A^{(k)}}^* \quad (20)^{13)}$$

Z powyższych związków (16), (19) oraz postaci energii komplementarnych W_{km} , W_{KEM} wynikają formy związków konstytutywnych:

— mechanicznych

$$\sigma_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta}, \quad (21)$$

— magnetycznych

$$B_\alpha = \mu_\alpha H_\alpha. \quad (22)$$

Z zależności (10), (13) wynika równanie

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (23)$$

a stąd następny warunek brzegowy

$$[[n \cdot \mathbf{B}]]_n = 0_{|\partial\Omega_A^{(k)}}. \quad (24)^{13)}$$

Powyższe wyniki można ująć w następującym twierdzeniu: jeżeli funkcje u_α , $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\alpha\beta}$, H_α , B_α , A_α , $T_{\alpha\beta}$ nadają funkcjonałowi wartość stacjonarną $\delta S = 0$, to wobec niezależności wariacji tych funkcji i ich dowolności, funkcje te spełniają równania liniowe magneto-elastokinetiki i pola elektromagnetycznego oraz odpowiednie związki elektrokinetyki i elektromagnetyzmu.

Do związków (14÷20) i (21÷24) należy dołączyć jeszcze równanie brzegowe dla prędkości przemieszczeń, które nie wynika z równań teorii lecz z równania ciągłości masy

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \text{div} \mathbf{u} = 0. \quad (25)$$

Na powierzchni rozdziału ośrodków o różnej gęstości obowiązuje równanie

$$[[\varrho \mathbf{u}_n]] = 0_{|\partial\Omega_A^{(k)}}. \quad (26)$$

6. SPECYFIKACJA RÓWNAŃ MAGNETO-ELASTOKINETYKI W PROBLEMIE DRGAŃ TURBOGENERATORÓW

Przechodząc z ogólnych wyrażeń wyprowadzonych w poprzednim punkcie do zależności bezpośrednich dla sklasyfikowanych (w pkt. 2) modułów ustroju maszyny, należy uprzednio rozpatrzyć relacje między konstytutywnymi elektromagnetycznymi parametrami ośrodków. Oprócz bowiem osobliwości konstrukcyjnych obwodów elektrycznych i magnetycznych turbogeneratorów, znamioną osobliwością jest również silne zróżnicowanie własności materiałowych

¹³⁾ Indeksy τ i n oznaczają odpowiednio składową normalną i styczną (wielkości wektorowej) do powierzchni granicznej.

$$\begin{aligned}\gamma_{\text{elek}} &\gg \gamma_{\text{mag}} \approx 0 \\ \mu_0 &\simeq \mu_{\text{elek}} \ll \mu_{\text{mag}}\end{aligned}\quad (27)$$

μ_0 — przenikalność magnetyczna powietrza.

Uwzględniając powyższe relacje oraz korzystając z równań geometrycznych (15) i konstytutywnych (21), a przy tym pomijając masowe siły mechaniczne, można określić następujące układy równań (analogicznie do (14), (18)) magneto-elastokinytyki i pola elektromagnetycznego dla poszczególnych podukładów (modułów) maszyny:

$$\frac{1}{2} A_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(k)} [\sqcup_{\gamma, \delta\beta}^{(k)} + \sqcup_{\alpha, \gamma\beta}^{(k)}] - \varrho \ddot{\sqcup}_{\alpha}^{(k)} = -B_{\beta}^{(k)} [H_{\alpha, \beta}^{(k)} - H_{\beta, \alpha}^{(k)}] \quad \xi \in \Omega_{\Lambda p}^{(k)} \quad (28)$$

$$\text{rot}_{\alpha} \mathbf{H}^{(k)} = \mathbf{j}_{\alpha}^{(k)}$$

$$\frac{1}{2} A_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(k)} [\sqcup_{\gamma, \delta\beta}^{(k)} + \sqcup_{\alpha, \gamma\beta}^{(k)}] - \varrho \ddot{\sqcup}_{\alpha}^{(k)} = \begin{cases} \frac{1}{2} H_{\beta}^{(k)} [B_{\alpha, \alpha}^{(k)} - B_{\beta, \alpha}^{(k)}] + B_{\alpha}^{(k)} H_{\beta, \beta}^{(k)} & \xi \in \Omega_{\Lambda zm}^{(k)} \\ \frac{1}{2} [B_{\alpha}^{(k)} H_{\beta, \beta}^{(k)} - H_{\beta}^{(k)} H_{\alpha, \beta}^{(k)}] (\mu_{\alpha}^{(k)} - \mu_{\beta}^{(k)}) & \xi \in \Omega_{\Lambda j}^{(k)} \end{cases} \quad (29)$$

$$\text{rot}_{\alpha} \mathbf{H}^{(k)} = 0 \quad \xi \in \Omega_{\Lambda zm}^{(k)} \cup \Omega_{\Lambda j}^{(k)}.$$

Analogicznie do zależności (16), (20), (24), (26) można napisać następujące warunki brzegowe na powierzchniach rozdziału poszczególnych modułów (i ich powierzchniach wewnętrznych)

$$\begin{aligned} & [A_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(k)} [\sqcup_{\gamma, \delta\beta}^{(k)} + \sqcup_{\alpha, \gamma\beta}^{(k)}] + [H_{\alpha}^{(k)} B_{\beta}^{(k)} + H_{\beta}^{(k)} B_{\alpha}^{(k)} - \delta_{\alpha\beta} (H_{\gamma}^{(k)} B_{\gamma}^{(k)})]] + \xi \in \partial\Omega_{\Lambda}^{(k/k+1)} \\ & - A_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(k+1)} [\sqcup_{\gamma, \delta\beta}^{(k+1)} + \sqcup_{\alpha, \gamma\beta}^{(k+1)}] - [H_{\alpha}^{(k+1)} B_{\beta}^{(k+1)} + H_{\beta}^{(k+1)} B_{\alpha}^{(k+1)} - \delta_{\alpha\beta} (H_{\gamma}^{(k+1)} B_{\gamma}^{(k+1)})]] n_{\beta} = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

$$n \times [H^{(k)} - H^{(k+1)}] = \begin{cases} 0 & \xi \in \partial\Omega_{\Lambda}^{(k/k+1)}, \\ \mathbf{j}_{\tau}^{(k)} & \xi \in \partial\Omega_{\Lambda j}^{(k/k+1)}, \end{cases} \quad (31)$$

$$B_n^{(k)} - B_n^{(k+1)} = 0, \quad \xi \in \partial\Omega_{\Lambda}^{(k/k+1)}, \quad (32)$$

$$\varrho^{(k)} \ddot{\sqcup}_n^{(k)} - \varrho^{(k+1)} \ddot{\sqcup}_n^{(k+1)} = 0 \quad \xi \in \partial\Omega_{\Lambda}^{(k/k+1)}. \quad (33)$$

Do powyższych równań należy dołączyć jeszcze warunki w punktach i na powierzchniach osobliwych. Tak więc, wymaga się regularności rozwiązań na osi maszyny ($r = 0$) oraz na powierzchni zewnętrznej statora $\partial\Omega_s^{(N*)}(R_{sz})$ gdzie przyjmuje się:

$$\begin{aligned} & [\sigma_{\alpha\beta}^{(N*)} + T_{\alpha\beta}^{(N*)}] n_{\beta} = 0 \\ & B_n^{(N*)} = 0 \end{aligned} \quad \xi \in \partial\Omega_s^{(N*)}(R_{sz}). \quad (33)$$

Osobliwym obszarem maszyny (jak wcześniej zaznaczono) jest szczelina powietrzna (Ω_{δ}). W obszarze tym należy przyjąć tożsamościowo równe zero funkcje wielkości mechanicznych $\sqcup_{\alpha}^{(\delta)} = 0$, $\sigma_{\alpha\beta}^{(\delta)} = 0$, jednorodne równania pola ($\text{rot} H = 0$), a warunki brzegowe analogicznie do zależności (31), (32). Natomiast, naprężeniowe warunki brzegowe na zewnętrznej powierzchni rotora i wewnętrznej powierzchni statora $\partial\Omega_{\Lambda}^{(N\delta)} (\Lambda = \varrho, s)$ (ograniczających obszar szczeliny), można przyjąć dla postulowanego modelu maszyny w następującej formie [12], [13]:

$$\sigma_{rr}^{(N\delta)} = \frac{(B_r^{(0)})^2}{2\mu_0} - \mu_{\varphi}^{(N\delta)} (H_{\varphi}^{(0)})^2 \quad \xi \in \partial\Omega_{\Lambda}^{(N\delta)}$$

$$\sigma_{r\varphi}^{(N_2)} = \frac{1}{2} B_r^{(0)} H_\varphi^{(0)} \quad (A = \varrho, s). \quad (34)^{14)}$$

Specyfikacja materiałów modułów, pozwala na pewne uproszczenie formy determinant drgań elektrodynamicznych, lecz stopień trudności rozwiązywania równań (28), (29) pozostaje dokładnie taki sam jak pełnych równań magneto-elastokinetyki (14).

Dalszych uproszczeń równań magneto-elastokinetyki można dokonać w oparciu o: przesłanki fizyczne, zmiany strukturalne modułów oraz przyjęcie pewnych zmienności konstytutywnych parametrów magnetycznych. Znamiennym efektem zjawisk elektromagnetycznych w obszarze żłobkowo-zębowym maszyn elektrycznych (a właściwie naturalnym wobec relacji $\mu_{\text{elek}} \ll \mu_{\text{magnet}}$) jest mała wartość indukcji magnetycznej w żłobkach — obszarach prądowych, w stosunku do wartości indukcji w obszarach zębów — magnetycznych. Jednocześnie, w przypadku wielu przewodów drażonych lub ich cienkości wobec rozmiarów prętów uzwojeń (magneśnicy i twornika), należy dokonywać gęstszych podziałów tej strefy maszyny, co w granicznym przypadku prowadzi do nieskończenie wielu warstw prądowych. Warstwy te stanowią powierzchnie rozdziału modułów elementarnych o różnych własnościach magnetycznych i nieprzewodzących. Wobec powyższego, równania magnetoelastyki (28) stają się jednorodne. W przypadku dużej dyskretyzacji obszarów maszyny, zwraca uwagę fakt małej zmienności funkcji pola elektromagnetycznego i przenikalności magnetycznych w tych podobszarach. Równocześnie, strefy jednorodne maszyny (jarzma) można przyjąć jako ośrodki izotropowe, a strefy kompozytowe jako niejednorodne. Tak więc, równania (29₁) można napisać w postaci

$$\frac{1}{2} A_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(k)} (\sqcup_{\gamma,\delta\beta}^{(k)} + \sqcup_{\delta,\gamma\beta}^{(k)}) - \varrho \ddot{\sqcup}_{\alpha}^{(k)} = \begin{cases} \frac{1}{2} H_e^{(k)} H_e^{(k)} \mu_{,\alpha}^{(k)} & \xi \in \Omega_{Az m}^{(k)} \\ 0 & \xi \in \Omega_{AJ}^{(k)}. \end{cases} \quad (35)$$

Uwzględniając w tym miejscu uwagi, przedstawione w pkt. 4, o relacjach sił objętościowych i kontaktowych, można w granicznym przypadku, sprowadzić równania magneto-elastokinetyki do równań elastokinetyki, czyli przyjąć równania (28), (29) w formie jednorodnej [13], [15]. W rozważanym więc przypadku, formalne (słabe) sprzężenie efektów magnetycznych i mechanicznych, zawarte jest w równaniach brzegowych (30).

Interpretując fizycznie powyższe wyniki, można stwierdzić, że w omówionym granicznym przypadku struktury modułów i zmienności przestrzennej funkcji pola elektromagnetycznego i konstytutywnych parametrów magnetycznych, oddziaływania elektrodynamiczne nie są przenoszone przez cząstki ośrodka, lecz przez powierzchnie graniczne modułów elementarnych.

7. ZAKOŃCZENIE

Punktem wyjścia w opisie zjawisk elektro-magneto-wibracyjnych w dużych maszynach elektrycznych, na gruncie polowych teorii elektromagnetyzmu i sprężystości, jest idealizacja

¹⁴⁾ Dla powierzchni statora ($A = s$) należy po stronie naprężeń Maxwella zmienić znaki na przeciwnie.

Górny indeks (o) oznacza, że wielkości te odnosi się do obszaru szczeliny.

strukturalna ustrojów tych maszyn. Idealizacja ta polega na zastąpieniu ośrodków strukturalnie i materiałowo niejednorodnych, ośrodkami anizotropowymi rozdzielonymi na moduły, cechujące się różnymi parametrami konstytutywnymi. Następnie w oparciu o określone ogólne funkcje (funkcjonały) charakteryzujące elektromagnetodynamiczny stan (właściwości) modeli, oraz na podstawie postulowanych zasad, wyznacza się równania opisujące ten model.

Z uzyskanych ogólnych zależności, dla lokalnego¹⁵⁾ modułowego modelu elektromagnetodynamicznego, można przejść do prostszych zależności w wyniku specyfikacji materiałów ośrodków i strukturalnych modyfikacji modułów. W granicznym przypadku prezentowanego ujęcia, w oparciu o pewne fizyczne aspekty przebiegu zjawisk elektromagnetycznych, dochodzi się do przybliżonego wariantu teorii elektro-magneto-dynamicznych drgań turbogeneratorów, gdzie detrementy drgań sprowadza się tylko do sił kontaktowych. Należy jednak podkreślić, że schemat obliczeniowy i określone równania dla tego przypadku granicznego są bardzo znacznym uogólnieniem metod dotychczas stosowanych. Metod — bazujących na jednopowierzchniowych źródłach obciążeń [13], [15], [16] i jedno-składowych [16] lub dwuskładowych [13] obciążeniach.

Należy w tym miejscu zaznaczyć, że w strefie aktywnej turbogeneratorsa można rozpatrywać wyłącznie jednoskładowe pole prądów — j_z . Tak więc jednoskładowe jest również pole potencjału wektorowego A_z . Jednocześnie wielkości te nie zależą od zmiennej z . Z powyższego wynika płaski stan pola elektromagnetycznego B_α , H_α ($\alpha = r, \varphi$), zatem pole naprężeń maxwellowskich oraz sił objętościowych jest również płaskie i niezależne od zmiennej z — $T_{zz} = 0$, $T_{zz} = 0$, $T_{\alpha\beta, z} = 0$ $\alpha, \beta = r, \varphi$.

Na zakończenie należy zauważyć, że w oparciu o zaproponowane podejście rozważanego problemu drgań turbogeneratorów można dokonać (w prosty stosunkowo sposób) pewnych dalszych uogólnień polegających na uwzględnieniu innych zjawisk (cieplnych) zachodzących w tych maszynach. Jak również dokonać modyfikacji sił elektrodynamicznych, rozszerzając je o tak zwane efekty reluktancyjne lub wprowadzić zastępcze siły objętościowe.

BIBLIOGRAFIA

1. P. Bölder, H. Jordan, G. Röder: *Ermittlung der Biegeeigenfrequenz für die Vierknoten-schwingung des Ständerblechpakets von Turbogenerator*. AEG-Mitteilungen No 1, 1967
2. W. Derski: *Zarys mechaniki ośrodków ciągłych*. Warszawa: PWN, 1975
3. F.M. Detinko, G.A. Zagorodnaja, W.M. Fastowski: *Procznost i koljebanija elektriceskich maszin*. Leningrad: Energia, 1969
4. W.P. Głuchow, W.A. Drozdow: *Obobszczennyje urawnienija elektrodynamiki twierdogo tiela*. Wkn. Beskontaktnyje elektriceskije masziny 12, Izd. Zinatnje Riga 1973
5. N.W. Grigorjewa, i in.: *Wibracija energeticeskich maszin*. Maszynostrojenije, Leningrad 1974
6. R.S. Ingarden, A. Jamiołkowski: *Elektrodynamika klasyczna*. Warszawa: PWN, 1981
7. W. Latek: *Turbogeneratory*. Warszawa: WNT, 1973
8. W. Nowacki: *Teoria sprężystości*. Warszawa: PWN, 1970
9. W. Nowacki: *Efekty elektromagnetyczne w stałych ciałach odkształcalnych*. Warszawa: PWN, 1983

¹⁵⁾ modelu opisanego czysto różniczkowymi równaniami.

10. W. Przyborowski: *Zagadnienia naprężeń dynamicznych i drgań rdzenia statora turbogenerators. Materiały XIV Sympozjum Maszyn Elektrycznych, Warszawa 1978*
11. W. Przyborowski, W. Partyka: *Influence of vibrations and noise on Large Turbogenerators Canadian Communications and Power Conference, Montreal 1978*
12. W. Przyborowski: *Drgania ortotropowego rdzenia statora turbogenerators. IX Sympozjum nt. Drgania w układach fizycznych, Poznań 1980*
13. W. Przyborowski: *Zagadnienia wibracji statorów turbogeneratorów. I Krajowa Konferencja Teorii Pola Elektromagnetycznego, W-wa 1982*
14. W. Przyborowski: *Elektromagnetyczne naprężenia i siły objętościowe. PNPW Elektryka, Warszawa 1981 z. 65*
15. W. M. Rabinowicz: *Rascziet koljebanij szichtowannogo sierdecznika statora turbogenerators W kn. Mietody rasczietu turbo- i gidrogeneratorow, Nauka, Leningrad 1975*
16. L. Ja. Stanisławskij, L. G. Gawriłow, E. S. Osternik: *Wibracjonnaja nadeżnost moszcznych turbogeneratorow. Energia, Moskwa 1973*
17. I. G. Szubow, *Szum i wibracja elektryczeskich maszyn. Nauka, Moskwa 1972*
18. I. E. Tamm: *Podstawy teorii elektryczności. Warszawa: WNT, 1967*
19. Cz. Woźniak: *Podstawy dynamiki ciał odkształcalnych. Warszawa: PWN 1969*

W. PRZYBOROWSKI

CONTRIBUTION TO THE THEORY OF ELECTRODYNAMIC VIBRATION IN LARGE ELECTRIC MACHINES

Summary

A module structural model of a turbo-generator adapted to electromagnetic elastokinetic phenomena is studied. Basing upon Hamilton's principle concerning the mechanical and electromagnetic influence general theoretical equations are derived. Taking into account the specification of materials used in the electromagnetic circuits of a machine for classifying models, module model equations are deduced, obtaining for the border conditions of these models a simplified variant of the theory.

W. PRZYBOROWSKI

ELEMENTS DE LA THEORIE DES VIBRATIONS ÉLECTRODYNAMIQUES DANS DE GRANDES MACHINES ELECTRIQUES

Résumé

Dans cette étude on a considéré le modèle structural d'un turbogénérateur. Il est possible, d'après ce modèle, de décrire des effets électro-magnéto-élastocinétiques se produisant dans ces machines. On a déduit des équations générales de la théorie, en se basant sur le principe de Hamilton, exprimant des interactions mécaniques et électromagnétiques. En tenant compte de la spécification des matériaux constituant les circuits électromagnétiques d'une machine, on a défini des équations pour les modèles classifiés. On a obtenu une variante simplifiée de la théorie pour le cas aux limites, où il s'agit des changements de la structure des éléments modulaires.

W. PRZYBOROWSKI

THEORIELEMENTE ELEKTRODYNAMISCHER SCHWINGUNGEN BEI GROSSEN ELEKTROMASCHINEN

Zusammenfassung

Im Aufsatz wurde das Strukturmodell eines Turbogenerators erwogen, der der Beschreibung von elektro-magnet-elastkinetischen (vibrierenden) Effekten angepasst ist, die bei diesen Maschinen auftreten.

Auf Grund der die mechanischen und elektromechanischen Einwirkungen erfassenden Hamilton-Regel wurde die allgemeine Theoriegleichung abgeleitet. In Anlehnung an die Spezifikation der Materialien der Kreismedien elektromagnetischer Maschinen wurden Gleichungen für klassifizierte Modelle bestimmt, wobei im Grenzfall der Strukturänderungen von Modulelementen eines Modells eine vereinfachte Theorievariante gewonnen wird.

В. ПШИБОРОВСКИ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ БОЛЬШИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

Резюме

Рассмотрена структурная модель турбогенератора приспособенная к описанию электро-магнитно-эластокинетических эффектов, выступающих в этих машинах. Исходя из вариационного принципа Гамильтона, примененного к вопросам механических и электромагнитных явлений, определены общие уравнения теории. На основании спецификации материалов электромагнитных сердечников и обмоток выведены уравнения (магнитоупругости) для классифицированных моделей. В граничном случае структуры модульных элементов модели турбогенератора получен самый простой вариант теории, в котором магнитовибрационное состояние зависит от поверхностных нагрузок.

Model reluktancyjny anizotropowego obwodu magnetycznego silnika indukcyjnego dla biegu jałowego

ZDZISŁAW RUTKOWSKI (Łódź)

Instytut Maszyn Elektrycznych i Transformatorów, Politechnika Łódzka

Otrzymano 1986.02.17

Współczesne projektowanie obwodu magnetycznego maszyny indukcyjnej wymaga stosunkowo dokładnej znajomości przestrzenno-czasowego rozkładu indukcji we wszystkich elementach obwodu. Klasyczne metody obliczania obwodów magnetycznych trójfazowych silników indukcyjnych nie pozwalają w sposób zadawalający na spełnienie tego warunku. Proponowany w pracy model obliczeniowy, oparty na metodzie zastępczego schematu reluktancyjnego (MSR) umożliwia wyznaczenie rozkładu indukcji w przestrzeni i dowolnej chwili czasowej. W artykule podano sposób budowy siatkowego schematu reluktancyjnego anizotropowego obwodu magnetycznego silnika indukcyjnego dla biegu jałowego. Wyprowadzono wzory określające poszczególne reluktancje oraz siły magnetomotoryczne siatki. Przedstawiony schemat reluktancyjny został opisany układem równań algebraicznych nie-liniowych z wykorzystaniem metody strumieni oczkowych.

1. WSTĘP

Nowoczesne blachy elektrotechniczne walcowane na zimno stosowane w ostatnich latach w budowie rdzeni maszyn indukcyjnych trójfazowych pozwoliły na zwiększenie wykorzystania obwodu magnetycznego. Jednakże lepsze parametry magnetyczne tych blach tzn. większa magnesowalność i mniejsza stratność zwykle związane są ze wzrostem anizotropii magnesowalności i stratności [7]. Klasyczne metody obliczania obwodów magnetycznych trójfazowych silników indukcyjnych, oparte w znacznym stopniu na współczynnikach empirycznych ustalonych dla blachy izotropowej, nie dają rezultatów zadowalających w porównaniu z eksperymentem, jeżeli rdzenie tych silników wykonane są z blachy dowlacowywanej na zimno. W związku z tym zaistniała potrzeba opracowania efektywnej i szybkiej metody obliczania obwodu magnetycznego opartej na zasadzie dyskretyzacji przestrzeni oraz uwzględniającej anizotropię magnesowalności blachy. Dla wyznaczania rozkładu pola magnetycznego w poszczególnych elementach obwodu maszyny indukcyjnej można zastosować metodę połową np. metodę elementów skończonych (MES) lub metodę obwodową — równoważnych schematów reluktancyjnych (MSR). Zainteresowanie metodą MSR ostatnio znacznie wzrosło w literaturze krajowej i zagra-

nicznej, co można tłumaczyć jej łatwością w użyciu i przejrzystością [1, 2, 4, 5, 8, 9]. Warunkiem jednak szerokiego zastosowania tej metody do analizy pola magnetycznego silników indukcyjnych jest posiadanie odpowiednio szybkiego i prostego w obsłudze programu numerycznego, podobnego do tych, jakie stosowane są do analizy rozgałęzionych obwodów elektronicznych.

Program taki ze specjalnym przystosowaniem do analizy pola w anizotropowym obwodzie magnetycznym silnika indukcyjnego dla biegu jałowego został opracowany i udostępniony do użytku w Politechnice Łódzkiej pod nazwą UFOM.

Metoda zastępczego schematu reluktancyjnego nawiązuje bezpośrednio do stosowanej od wielu lat metody obliczania obwodów magnetycznych maszyn elektrycznych i tzw. „rurek magnetycznych” w metodzie Lehmana [3]. Siatkowy schemat otrzymuje się dzieląc obwód magnetyczny trójfazowego silnika indukcyjnego na elementarne obwody magnetyczne, które zastępuje się odpowiednimi parametrami skupionymi (reluktancje, siły magnetomotoryczne). Podstawowym problemem do rozwiązania w MSR jest wybranie struktury siatki oraz sposobu wyznaczania wartości parametrów skupionych skonstruowanego schematu zastępczego.

2. MODEL OBLICZENIOWY SIATKOWEGO SCHEMATU ZASTĘPCZEGO

Metoda siatkowego schematu reluktancyjnego (MSR) oparta jest na wykorzystaniu teorii obwodów i „magnetycznego prawa Ohma”

$$U_{\mu} = R_{\mu} \cdot \Phi \quad (1)$$

oraz „magnetycznych praw Kirchhoffa” dla węzłów i oczek

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i = 0 \quad \sum_{j=1}^m U_{\mu j} = 0, \quad (2)$$

gdzie:

n — liczba gałęzi siatki dochodzących do węzła,

m — liczba gałęzi siatki, które zawiera oczko.

Przy tworzeniu siatkowego schematu reluktancyjnego oraz wykorzystania MSR do obliczania rozkładu pola magnetycznego silnika indukcyjnego zostały wprowadzone następujące założenia:

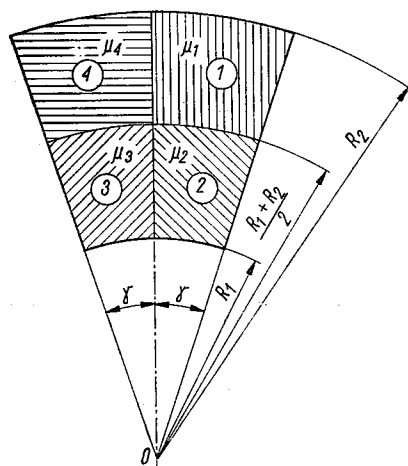
- opracowana metoda dotyczy trójfazowych silników indukcyjnych w stanie biegu jałowego,
- zanedbuje się prąd występujący w uzwojeniu wirnika,
- obwód magnetyczny maszyny jest symetryczny pod względem geometrycznym,
- uzwojenia fazowe stojana wykonane są z całkowitą liczbą żłobków na biegun i fazę,
- prądy magnesujące w poszczególnych uzwojeniach fazowych posiadają tę samą amplitudę i pierwsze harmoniczne tych prądów są przesunięte względem siebie o kąt $2\pi/3$,
- w maszynie nie występuje wnikanie strumienia magnetycznego do kadłuba.

Model obliczeniowy siatkowego schematu zastępczego polega na dyskretyzacji przestrzennej obwodu magnetycznego maszyny na segmenty wyznaczone podziałem linii radialnych i współśrodkowymi okręgami. Dla poszczególnych segmentów są wyznaczane reluktancje oraz siły magnetomotoryczne.

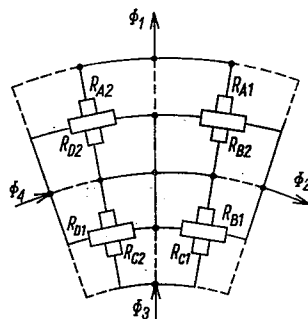
3. WYZNACZANIE RELUKTANCJI

3.1. RELUKTANCJE JARZM STOJANA I WIRNIKA ORAZ WAŁU

Wycinek jarzma (rys. 1) składa się z czterech podobszarów o różnych przenikalnościach magnetycznych. Każdy podobszar zastąpiono dwiema reluktancjami składowymi: jedna w kierunku promieniowym, druga w kierunku stycznym.



Rys. 1. Wycinek jarzma



Rys. 2. Reluktancyjny schemat zastępczy segmentu jarzma z rys. 1.

Na schemacie zastępczym segmentu jarzma (rys. 2) zaznaczono przykładowy rozkład strumienia magnetycznego. Połączenie reluktancji zastępczych czterech podobszarów segmentu jarzma węzłem środkowym 0 wynika z tożsamości równania połowego $\text{div } \vec{B} = 0$ oraz równania obwodowego wynikającego z „magnetycznego prawa Kirchhoffa” $\sum \Phi_i = 0$ dla zastępczego schematu segmentu jarzma [1]. Reluktancje składowe poszczególnych

podobszarów można wyznaczyć znając wymiary geometryczne podobszaru, usytuowanie wycinka jarzma względem położenia przyjętego za początkowe oraz wypadkową wartość indukcji magnetycznej i jej kierunek w podobszarze. Wyznaczanie składowych oraz wypadkowej indukcji magnetycznej w podobszarze przedstawiono w [1].

Reluktancje składowe w określonym podobszarze segmentu jarzma wyznacza się z następujących zależności:

— dla reluktancji radialnej

$$R_r = \frac{1}{\gamma \mu \cdot L} \ln \frac{R_z}{R_w}, \quad (3)$$

— dla reluktancji stycznej

$$R_s = \frac{\gamma}{\mu L \cdot \ln \frac{R_z}{R_w}}, \quad (4)$$

gdzie:

μ — przenikalność magnetyczna określonego podobszaru, w H/m ,

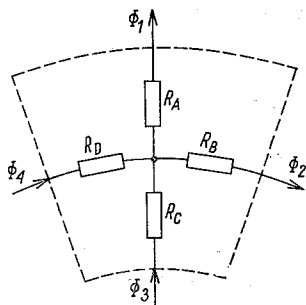
L — długość rdzenia zmniejszona o grubość izolacji międzyblachowej, w m,

γ — kąt, w rad (rys. 1),

R_z, R_w — promienie określające podobszar, w m; dla podobszaru 1 (rys. 1)

$$\mu \equiv \mu_1, \quad R_z = R_2, \quad R_w = \frac{R_1 + R_2}{2}.$$

Schemat zastępczy segmentu jarzma z rys. 2 można przekształcić do schematu na rys. 3.



Rys. 3. Przekształcony schemat zastępczy segmentu jarzma z rys. 1.

Poszczególne reluktancje w schemacie zastępczym z rys. 3 wyznacza się z następujących zależności:

$$R_A = \frac{1}{\gamma(\mu_1 + \mu_4)L} \ln \frac{2R_2}{R_1 + R_2}, \quad (5)$$

$$R_B = \frac{\gamma}{L \left(\mu_1 \ln \frac{2R_2}{R_1 + R_2} + \mu_2 \ln \frac{R_1 + R_2}{2R_1} \right)}, \quad (6)$$

$$R_C = \frac{1}{\gamma(\mu_2 + \mu_3)L} \ln \frac{R_1 + R_2}{2R_1}, \quad (7)$$

$$R_D = \frac{\gamma}{L \left(\mu_3 \ln \frac{R_1 + R_2}{2R_1} + \mu_4 \ln \frac{2R_2}{R_1 + R_2} \right)} \quad (8)$$

Jarzma stojana i wirnika oraz wał dzieli się na warstwy wzdłuż wysokości, przy czym ograniczone są one współśrodkowymi okręgami. Osie symetrii segmentów poszczególnych warstw tworzą promienie poprowadzone ze środka wału przez osie symetrii żłobków i zębów stojana lub wirnika. Kąt γ (rys. 1) wynosi:

— dla jarzma stojana $\gamma_1 = \frac{\pi}{Z_1}$,

— dla jarzma wirnika oraz wału $\gamma_2 = \frac{\pi}{Z_2}$,

gdzie:

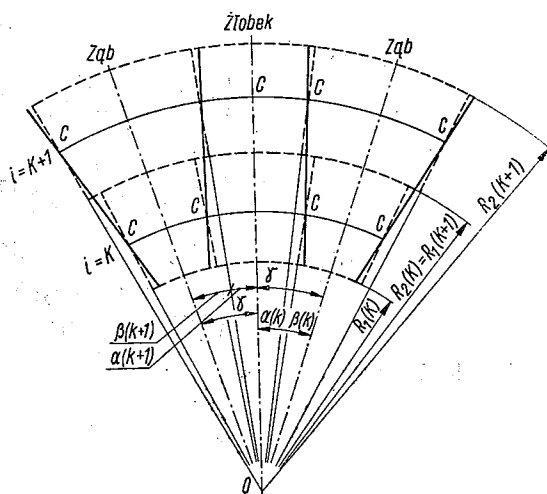
Z_1 — liczba żłobków stojana,

Z_2 — liczba żłobków wirnika.

Dla biegu jałowego silnika indukcyjnego w obliczeniach uwzględnia się wszystkie warstwy wału, mimo że jest on wykonany nie z blach lecz z materiału masywnego.

3.2. RELUKTANCJE ZĘBÓW I ŻŁOBKÓW STOJANA ORAZ WIRNIKA

W przykładowym fragmencie strefy zębowo-żłobkowej wirnika silnika indukcyjnego (rys. 4.) żłobek i ząb dzieli się na warstwy wzdłuż wysokości ograniczone współśrodkowymi okręgami. Segmenty poszczególnych warstw żłobków i zębów tworzą promienie poprowadzone ze środka wału przez wspólny punkt żłobka i zęba w środku warstwy (pkt. C rys. 4).



Rys. 4. Fragment strefy zębowo-żłobkowej wirnika

Dla segmentów żłobków i zębów na określonej warstwie strefy zębowej istnieje zależność

$$\alpha(i) + \beta(i) = \gamma, \quad (9)$$

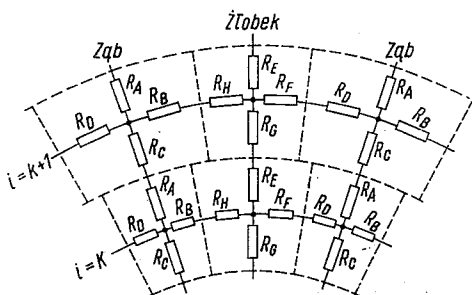
przy czym:

$\alpha(i)$ — kąt dla segmentu żłobkowego, w rad,

$\beta(i)$ — kąt dla segmentu zębowego, w rad,

γ — kąt dla segmentu jarzmowego, w rad.

Na określonej warstwie strefy liczba wszystkich segmentów żłbkowych i zębowych równa jest podwójnej liczbie żłbków. Warstwy strefy zębowo-żłbkowej stojana i wirnika przylegające do szczeliny powietrznej mogą być podzielone na większą liczbę segmentów żłbkowych i zębowych niż podwójna liczba żłbków, jeżeli potrzeba taka wynika z ukształtowania zęba i żłbka.



Rys. 5. Reluktancyjny schemat zastępczy strefy zębowo-żłbkowej z rys. 4

W zastępczym schemacie fragmentu strefy zębowo-żłbkowej (rys. 5.) reluktancje poszczególnych segmentów żłbków i zębów oblicza się analogicznie do reluktancji segmentów jarzm wału ze wzorów:

— dla zębów

$$R_A(i) = \frac{1}{\beta(i)(\mu_1 + \mu_4)L} \ln \frac{2R_2(i)}{R_1(i) + R_2(i)}, \quad (10)$$

$$R_B(i) = \frac{\beta(i)}{L \left(\mu_1 \ln \frac{2R_2(i)}{R_1(i) + R_2(i)} + \mu_2 \ln \frac{R_1(i) + R_2(i)}{2R_1(i)} \right)}, \quad (11)$$

$$R_C(i) = \frac{1}{\beta(i)(\mu_2 + \mu_3)} \ln \frac{R_1(i) + R_2(i)}{2R_1(i)}, \quad (12)$$

$$R_D(i) = \frac{\beta(i)}{L \left(\mu_3 \ln \frac{R_1(i) + R_2(i)}{2R_1(i)} + \mu_4 \ln \frac{2R_2(i)}{R_1(i) + R_2(i)} \right)}, \quad (13)$$

— dla żłbków

$$R_E(i) = \frac{1}{2\alpha(i)\mu_0L} \ln \frac{2R_2(i)}{R_1(i) + R_2(i)}, \quad (14)$$

$$R(i) = \frac{\alpha(i)}{\mu_0L \ln \frac{R_2(i)}{R_1(i)}}, \quad (15)$$

$$R_G(i) = \frac{1}{2\alpha(i)\mu_0L} \ln \frac{R_1(i) + R_2(i)}{2R_1(i)}, \quad (16)$$

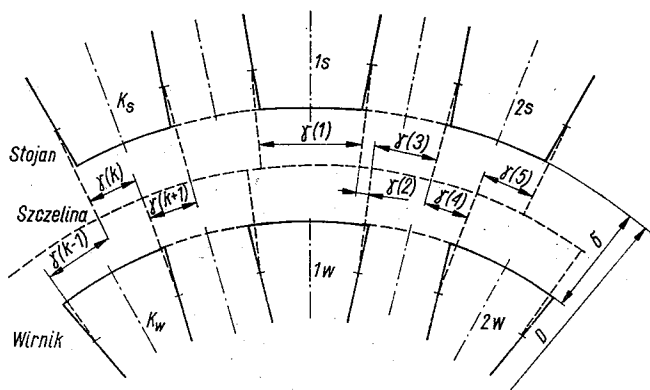
$$R_H(i) = \frac{\alpha(i)}{\mu_0 L \ln \frac{R_2(i)}{R_1(i)}}, \quad (17)$$

gdzie:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}} \text{ — przenikalność magnetyczna powietrza.}$$

3.2. RELUKTANCJA SZCZELINY POWIETRZNEJ

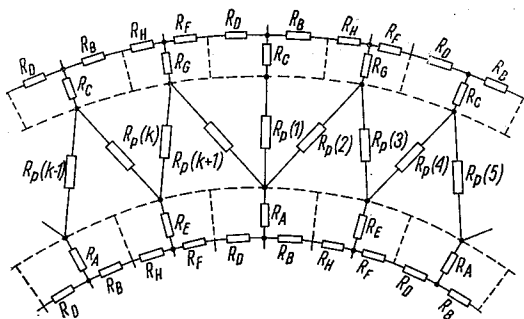
Reluktancja poszczególnych elementów szczeliny powietrznej silnika indukcyjnego w siatkowym schemacie reluktancyjnym zależy od wzajemnego usytuowania względem siebie zębów i żłobków stojana oraz wirnika. Ze względu na różną liczbę żłobków stojana i wirnika usytuowanie kolejnych zębów i żłobków stojana oraz wirnika względem siebie jest zmienne. W przedstawionym przykładowo usytuowaniu kilku zębów i żłobków stojana oraz wirnika względem siebie w strefie przyszczelinowej (rys. 6.) przyjęto symetryczne



Rys. 6. Przykładowe usytuowanie zębów i żłobków stojana oraz wirnika w strefie przyszczelinowej

ustawienie zęba stojana oznaczonego numerem 1s względem zęba wirnika oznaczonego numerem 1w oraz liczbę żłobków stojana większą od liczby żłobków wirnika.

W zastępczym schemacie fragmentu szczeliny powietrznej (rys. 7) reluktancja poszcze-



Rys. 7. Zastępczy schemat reluktancyjny fragmentu szczeliny powietrznej z rys. 6

gólnych elementów szczeliny powietrznej jest wyznaczana jako element skupiony jednowymiarowy i wartość jej zależna jest od geometrycznego, wzajemnego usytuowania żłobków i zębów stojana oraz wirnika, a także liczby segmentów żłobkowych i zębów stojana oraz wirnika w warstwach przylegających do szczeliny powietrznej. Reluktancję k -tego elementu szczeliny powietrznej oblicza się z następującej zależności:

$$R_p(k) = \frac{1}{\gamma(k) \cdot \mu_0 \cdot L_i} \ln \frac{D}{D - 2\delta}, \quad (18)$$

gdzie:

D — średnica wewnętrzna rdzenia stojana, w m,

δ — szerokość szczeliny powietrznej, w m,

L_i — idealna długość rdzenia, w m,

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}},$$

$\gamma(k)$ — kąt k -tego segmentu szczeliny powietrznej zmienny zależnie od położenia wirnika, w rad (rys. 6).

4. OKREŚLENIE SIŁ MAGNETOMOTORYCZNYCH (SMM) ŹRÓDEŁ

Siły magnetomotoryczne źródeł w siatkowym schemacie zastępczym obwodu magnetycznego trójfazowej maszyny indukcyjnej można określić na podstawie znajomości rozkładu wypadkowej krzywej przepływu. Wypadkowa krzywa przepływu trójfazowego silnika indukcyjnego w zależności od miejsca jej usytuowania na obwodzie maszyny zmienia swój kształt i amplitudę. Kształt krzywej przepływu zależy od rodzaju uzwojenia, liczby żłobków na biegun i fazę oraz od przebiegu w czasie prądu magnesującego. Wypadkową krzywą przepływu można rozpatrywać jako wynik superpozycji przepływów wszystkich zezwojów maszyny. Przepływ określonego zezwoju wynosi

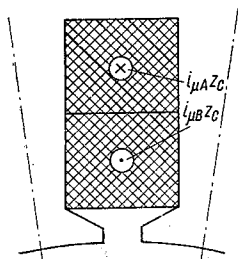
$$\Theta(t) = i_\mu \cdot z_c, \quad (19)$$

przy czym:

i_μ — wartość chwilowa prądu magnesującego płynącego w określonym zezwoju, w A,

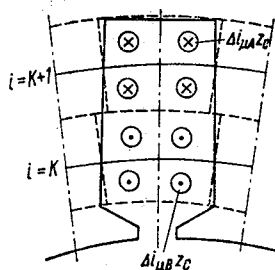
z_c — liczba zwojów szeregowych zezwoju.

W celu określenia SMM źródeł zastępczego schematu reluktancyjnego należy znać rozkład przepływu w poszczególnych żłobkach stojana. W przedstawionym przykładowo rozkładzie przepływu w żłobku stojana dla uzwojenia dwuwarstwowego (rys. 8) przyjęto,

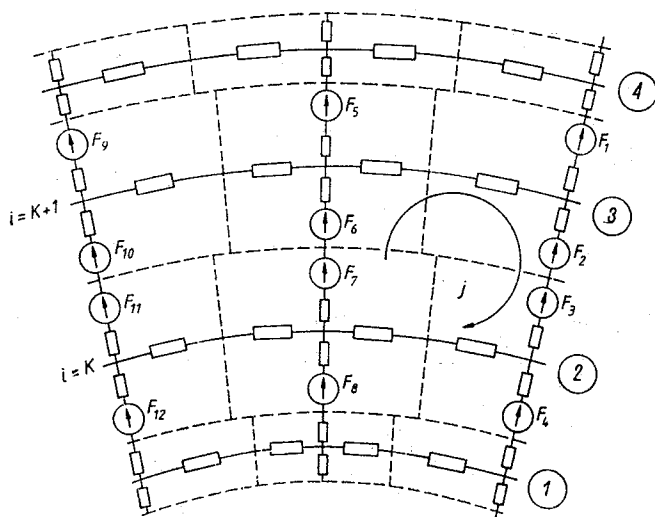


Rys. 8. Przykładowy rozkład przepływu w żłobku stojana

że przepływ usytuowany jest poniżej sklepienia żłobka i w przypadku uzwojeń dwuwarstwowych przepływ jednego zezwoju obejmuje tę samą powierzchnię co przepływ drugiego zezwoju. Segmenty poszczególnych warstw strefy zębowo-żłobkowej stojana obejmują swoją powierzchnią część przepływu zezwoju. Przepływ podobszaru segmentu żłobkowego oblicza się ze stosunku powierzchni określonego podobszaru do powierzchni zajmowanej przez określony zezwój w żłobku (rys. 9). W schemacie zastępczym fragmentu strefy



Rys. 9. Przepływy podobszarów segmentów żłobkowych z rys. 8



Rys. 10. Siatkowy schemat zastępczy fragmentu strefy zębowo-żłobkowej stojana z rys. 9 ① — sklepienie żłobka, ②, ③ — część żłobka z przepływem, ④ — fragment jarzma

zębowo-żłobkowej z rysunków 8 i 9 (rys. 10) przedstawiono rozmieszczenie SMM źródeł. Siły magnetomotoryczne dla warstwy $i = K$ strefy zębowej wynoszą

$$F_7 = F_3 - \Delta i_{\mu B} Z_C,$$

$$F_8 = F_4 - \Delta i_{\mu B} Z_C,$$

$$F_{11} = F_3 - 2\Delta i_{\mu B} Z_C,$$

$$F_{12} = F_4 - 2\Delta i_{\mu B} Z_C.$$

(20)

[6]. Dla j -tego oczka można napisać równanie w postaci

$$R(j, j)\Phi(j) - R(j, j+1)\Phi(j+1) - R(j, j-1)\Phi(j-1) - R(j, j+k)\Phi(j+k) + R(j, j-k)\Phi(j-k) = 0, \quad (22)$$

gdzie:

— strumienie magnetyczne oczkowe

$$\Phi(j), \Phi(j+1), \Phi(j-1), \Phi(j+k), \Phi(j-k),$$

— reluktancje wzajemne oczka j

$$-R(j, j+1), -R(j, j-1), -R(j, j+k), -R(j, j-k),$$

znak minus występuje ze względu na przyjęte zwroty strumieni oczek sąsiadujących,

— reluktancja własna oczka j

$$R(j, j) = R(j, j+1) + R(j, j-1) + R(j, j+k) + R(j, j-k).$$

W celu rozwiązania siatkowego schematu maszyny indukcyjnej należy ułożyć układ równań analogicznych do równania (22), który w zapisie macierzowym ma postać

$$[R(m)][\Phi(m)] = [\Theta(m)], \quad (23)$$

gdzie:

$[R(m)]$ — macierz kwadratowa reluktancji oczkowych,

$[\Phi(m)]$ — macierz kolumnowa strumieni magnetycznych oczkowych,

$[\Theta(m)]$ — macierz kolumnowa wypadkowych SMM oczkowych.

Wypadkowa siła magnetomotoryczna oczkowa dla oczka j -tego jest równa zero, dla oczka i -tego wynosi $\Theta(i) = F_1 - F_2$ i jest równa przepływowi obejmowanemu przez to oczko,

Układ równań (23) można rozwiązać metodą numeryczną np. metodą Gaussa-Seidla. Ze względu na występujące w układzie równań reluktancje rdzenia ferromagnetycznego ostateczne rozwiązanie siatkowego schematu reluktancyjnego otrzymuje się drogą kolejnych iteracji stosując np. metodę relaksacji lub zmodyfikowaną metodę Newtona. Dla rdzeni maszyn indukcyjnych zbudowanych z blachy izotropowej oraz wału reluktancje określone są jedną charakterystyką magnesowania materiału ferromagnetycznego $B_m = f(H_m)$. W silnikach indukcyjnych, których rdzeń jest wykonany z blachy anizotropowej trzeba uwzględnić różny przebieg charakterystyki $B_m = f(H_m)$ w zależności od kierunku indukcji magnetycznej w określonym podobzdarze segmentu jarzma lub zęba. Oznacza to, że w obliczeniach reluktancji należy korzystać z charakterystyk magnesowania wyznaczonych dla próbek pod różnymi kątami w stosunku do kierunku walcowania. W praktyce ścisłe spełnienie tego warunku jest niemożliwe, dlatego korzysta się z charakterystyk magnesowania dla kilku określonych kątów względem kierunku walcowania.

W wyniku rozwiązania układu równań (23) otrzymuje się wartości strumienia magnetycznego oczkowego $\Phi(m)$. W celu wyznaczenia składowych radialnych i stycznych indukcji magnetycznej w poszczególnych elementach obwodu magnetycznego trójfazowego silnika indukcyjnego należy obliczyć strumienie magnetyczne w gałęziach siatkowego schematu reluktancyjnego jako różnicę strumieni oczkowych.

6. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Obiektami badań, dla których wykonano przykładowe obliczenia rozkładu pola magnetycznego metodą siatkowego schematu reluktancyjnego były klatkowe sześciobiegunkowe silniki typu Sf 132, których rdzenie zostały wykonane z wybranych dwóch gatunków blach elektrotechnicznych:

- bezkrzemowej Fe 64.50 — silnik MB6,
- krzemowej M4 — silnik MT6.

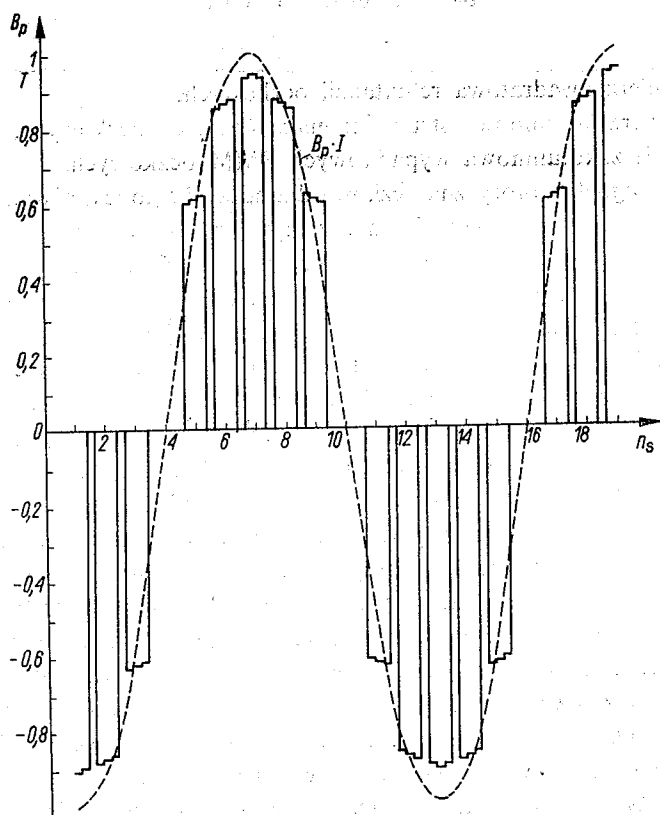
Blachy te posiadają różną magnesowalność (B) wzdłuż kierunku walcowania i wykazują różny stopień anizotropii magnesowalności (ΔB). Dla natężenia pola magnetycznego

$$H_m = 2500 \frac{\text{A}}{\text{m}} \text{ parametry te wynoszą:}$$

$$\text{Fe 64.50} \rightarrow B_{25} = 1,62 \text{ T}, \quad \Delta B_{25} = 0,06 \text{ T},$$

$$\text{M4} \rightarrow B_{25} = 1,9 \text{ T}, \quad \Delta B_{25} = 0,47 \text{ T}.$$

Dla wymienionych blach zostały wyznaczone dynamiczne charakterystyki magnesowania $B_m = f(H_m)$ dla próbek wyciętych pod kątami co 15° w stosunku do kierunku walcowania [7]. Ponadto znana jest charakterystyka $B_m = f(H_m)$ stali, z której wykonano wał maszyny [3].

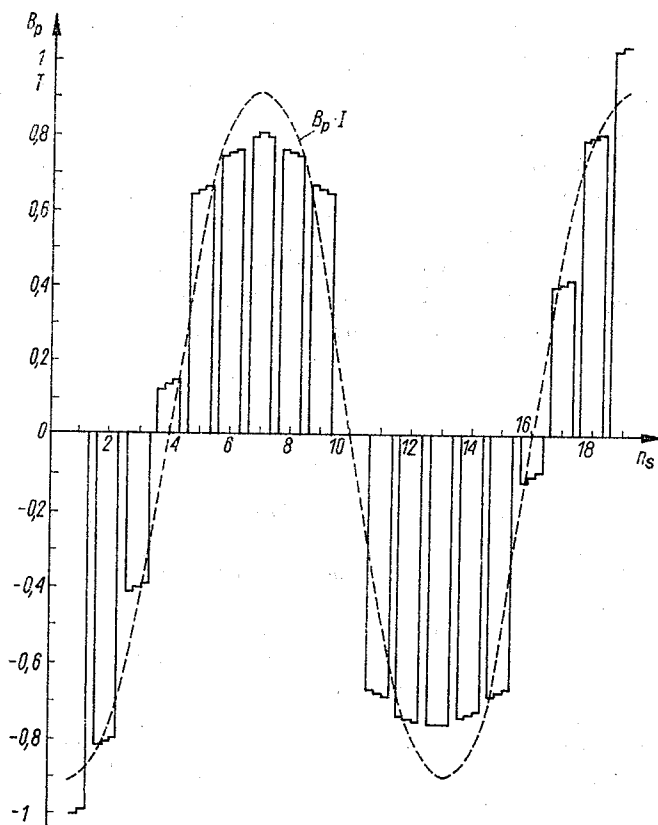


Rys. 12. Rozkład indukcji magnetycznej w szczelinie powietrznej B_p silnika modelowego MB6

Przykładowe obliczenia silnika, którego rdzeń wykonano z blachy transformatorowej gatunku M4 miały na celu wykazanie, że skonstruowany model reluktancyjny w pełni nadaje się do obwodów o dużym stopniu anizotropii.

Żłobki stojana i wirnika są półzamknięte i liczba ich wynosi $Z_1 = 36$ oraz $Z_2 = 33$. Jarzma stojana i wirnika oraz wał maszyny podzielono wzdłuż wysokości na 2 warstwy, zaś strefę zębowo-żłobkową stojana i wirnika na 4 warstwy. Ponadto zęby stojana w warstwie przyszczelinowej podzielono na 3 segmenty. W rezultacie otrzymano siatkowy schemat reluktancyjny o $m = 1038$ oczek.

Przykładowe obliczenia wykonano dla sinusoidalnego prądu magnesującego o wartości $I_\mu = 5A$. Wypadkową krzywą przepływu badanych silników usytuowano w siatkowym schemacie zastępczym tak, że jej maksymalna wartość pokrywa się z kierunkiem walcowania blachy 0 oraz z osiami zębów stojana i wirnika (rys. 11).



Rys. 13. Rozkład indukcji magnetycznej w szczelinie powietrznej B_p silnika modelowego MT6

Na rysunkach 12 i 13 przedstawiono przykładowe rozkłady indukcji magnetycznej w szczelinie powietrznej B_p wzdłuż obwodu maszyny na wewnętrznej powierzchni stojana. Rozkłady te wykreślono tylko dla jednej połowy obwodu magnetycznego ze względu na analogiczny ich obraz dla drugiej połowy. Na rysunkach tych zaznaczono ponadto przebieg podstawowej harmonicznej indukcji B_{p1} .

Dla silnika MB6, którego rdzeń został wykonany z blachy praktycznie izotropowej rozkłady indukcji B_p pod każdym biegunem są symetryczne (kształt i amplituda) w porównaniu z silnikiem MT6, w którym występuje asymetria przebiegu indukcji spowodowana znaczną anizotropią magnesowalności blachy.

7. WNIOSKI

1. Przedstawiony w artykule model reluktancyjny pozwala na wyznaczenie rozkładu pola magnetycznego w poszczególnych elementach obwodu magnetycznego trójfazowych silników indukcyjnych z różnymi kształtami żłobków stojana i wirnika.
2. Metoda schematu reluktancyjnego umożliwia obliczenia pola podczas biegu jałowego dla różnych przebiegów czasowych prądu magnesującego przy różnym wzajemnym położeniu zębów i żłobków stojana oraz wirnika, a także przy różnym usytuowaniu krzywej przepływu na obwodzie maszyny.
3. MSR pozwala na uwzględnienie w obliczeniach zjawiska nasycenia i anizotropii magnesowalności blachy elektrotechnicznej.
4. Siatkowy schemat reluktancyjny obwodu magnetycznego maszyny indukcyjnej jest prostym i efektywnym narzędziem analizy rozkładu pola magnetycznego w silniku.
5. Wyniki obliczeń numerycznych rozkładu pola magnetycznego w obwodzie silnika indukcyjnego otrzymane z rozwiązania modelu reluktancyjnego pozwalają analizować wpływ zjawisk nasyceniowych i anizotropowych na parametry biegu jałowego np. prąd magnesujący, straty w rdzeniu czy też hałas magnetyczny.

BIBLIOGRAFIA

1. J. Anuszczyk, Z. Rutkowski: *Zastępczy schemat reluktancyjny ferromagnetyka*. Archiwum Elektrot. 1985, z. 3-4, s. 849—854
2. L. Ciganek: *Ekwiwalentna schema magnitnoj cepi asinchronnogo dwigatiela*. Elektromechanika 1961, No 5, s. 23—29
3. M. Dąbrowski: *Pola i obwody magnetyczne maszyn elektrycznych*. Warszawa: WNT, 1971
4. A. Iwanow-Smolenski: *Razwitiie metodow rascziota magnitnych polej w elektryczeskich maszinach s ucziotom dwuchstoronnej pazowosti i nasyszczenia*. XXII Internationales Wiss. Kollegium TH Ilmenau, 1977, s. 91—96
5. W. Kłak, A. Kostowski: *Rozwiązywanie niesymetrycznych obwodów magnetycznych maszyn elektrycznych metodą układu zastępczego na maszynie cyfrowej*. Prace Nauk. Instytutu Układów Elektromaszynowych Politechniki Wrocławskiej 1976, Nr 21, ss. 61—72
6. B. Konorski: *Podstawy elektrotechniki*, Tom I, Warszawa: PWN, 1965
7. T. Koter, P. Kowalewicz: *Anizotropia magnetyczna blachy elektrotechnicznej*. Przegląd elektrotechniczny, 1980, Nr 5, s. 196—201
8. Z. Rutkowski: *Wyznaczenie rozkładu indukcji w obwodzie magnetycznym trójfazowej maszyny indukcyjnej metodą zastępczego schematu siatkowego*. Zesz. Nauk. Politechniki Łódzkiej, Elektryka, 1983, Nr 74, s. 61—78
9. J. Turowski: *Model reluktancyjny pola rozproszenia transformatorów*. Rozprawy Elektrot., 1984 Tom 30, z. 4, s. 1121—1144

Z. RUTKOWSKI

RELUCTANCE MODEL OF AN ANISOTROPIC MAGNETIC CIRCUIT OF AN INDUCTION MOTOR NO-LOAD STATE

Summary

Modern designing of magnetic circuits of induction motors requires a precise calculation of the time/space distribution of the flux density in all parts of the magnetic circuit. Conventional methods of calculation of magnetic circuits do not allow to fulfill the above condition with sufficient accuracy. The calculation model proposed by the author, based on the equivalent reluctance scheme (MSR), gives possibilities to calculate the distributions of spacial flux density for an arbitrary chosen moment. The paper presents the method of building up the reluctance network diagram for an anisotropic magnetic circuit of an induction motor in the no-load state. The formulae describing the particular reluctances and m.m.f. are derived. The proposed reluctance model of an induction motor is described by a set of non-linear algebraic equations applying the mesh fluxes method.

Z. RUTKOWSKI

MODÈLE DE RELUCTANCE DU CIRCUIT MAGNÉTIQUE ANISOTROPE DU MOTEUR A INDUCTION MARCHANT À VIDE

Résumé

Actuellement, l'établissement d'un projet du circuit magnétique de la machine à induction nécessite une connaissance détaillée de la répartition spatiale-temporelle de l'induction magnétique dans tous les éléments du circuit. Les méthodes classiques de calcul des circuits magnétiques des moteurs à induction triphasés ne permettent pas de remplir cette condition d'une manière satisfaisante. Le modèle numérique, proposé dans l'article, basé sur la méthode du réseau équivalent de réluctance, permet de déterminer la répartition du champ magnétique dans un instant arbitrairement choisi. On a présenté la manière de construire le réseau de réluctance du circuit magnétique anisotrope du moteur à induction marchant à vide. On a établi les formules déterminant les réluctances et les ampères-conducteurs du réseau. Le schéma de réluctance présenté a été décrit par le système d'équations algébriques non linéaires basé sur la méthode des flux de mailles.

Z. RUTKOWSKI

RELUKTANZMODELL FÜR DEN ANISOTROPEN MAGNETKREIS EINES INDUKTIONSMOTORS WÄHREND SEINES LEERLAUFES

Zusammenfassung

Die moderne Projektierung des Magnetkreises eines Induktionsmotors erfordert eine verhältnismäßig genaue Kenntnis der Induktionsverteilung aller Elemente des Kreises. Die klassischen Berechnungsmethoden der magnetischen Kreise dreiphasiger Induktionsmotoren gestatten es nicht, diese Bedingung in zufriedenstellender Weise zu erfüllen. Das im vorliegenden Bereich vorgeschlagene Modell, das sich auf die Methode eines Ersatzschaltplanes eines Reluktanznetzes stützt, ermöglicht die räumliche Bestimmung der Induktionsverteilung im beliebigen Zeitpunkt. Im Artikel wurde die Bauart eines Reluktanznetzschemas des anisotropen Magnetkreises eines Induktionsmotors während seines Leerlaufes angegeben. Die einzelnen Reluktanzen und magnetmotorische Kräfte beschreibenden Formeln wurden angeführt. Das Reluktanzschema wurde mittels nichtlinearen Gleichungssystems unter Nutzung der Methode der Maschinenflüsse beschrieben.

З. РУТКОВСКИ

РЕЛЮКТАНЦИОННАЯ МОДЕЛЬ АНИЗОТРОПНОЙ МАГНИТНОЙ ЦЕПИ
ИНДУКЦИОННОГО ДВИГАТЕЛЯ ДЛЯ ХОЛОСТОГО ХОДА

Резюме

Современные проектирование магнитной цепи индукционной машины требует относительно подробного знания пространственного и временного распределения индукции в отдельных элементах цепи. Классические методы расчёта магнитных цепей трёхфазных индукционных двигателей не позволяют на правильное соблюдение этого условия. Предложенная расчетная модель обоснованная на методе эквивалентной схемы магнитных сопротивлений (МСР) позволяет определить распределение индукции в пространстве и во времени. В публикации представлен способ постройки сеточной схемы анизотропной магнитной цепи индукционного двигателя для холостого хода. Выведены формулы определяющие магнитные сопротивления и магнитодвижущие силы сетки. Приведенная релюктанционная схема описана системой алгебраических нелинейных уравнений с использованием метода ячейных потоков.

Analiza rozkładu pola w obwodzie magnetycznym silnika indukcyjnego z uwzględnieniem anizotropii blachy elektrotechnicznej

TADEUSZ KOTER, JAN ANUSZCZYK, ZDZISŁAW RUTKOWSKI (Łódź)

Instytut Maszyn Elektrycznych i Transformatorów, Politechnika Łódzka

Otrzymano 1986.03.25

W artykule przedstawiono wybrane wyniki badań w zakresie rozkładu pola magnetycznego w obwodzie silnika indukcyjnego wykonanego z blachy elektrotechnicznej anizotropowej. Stosując metodę zastępczej sieci reluktancyjnej wyznaczono rozkład składowych stycznej i promieniowej indukcji w poszczególnych elementach obwodu magnetycznego silnika. Wykazano, że w jarzmie stojana silnika występuje przemagnesowanie obrotowe, zależne od wymiarów geometrycznych i własności magnetycznych rdzenia. Przedstawiono wpływ anizotropii magnetycznej blachy na charakter i rozkład indukcji oraz prąd magnesujący i straty w rdzeniu maszyny indukcyjnej.

1. WSTĘP

W ostatnich latach obserwuje się znaczny wzrost wykorzystania materiałów czynnych stosowanych w budowie silników indukcyjnych, w tym także zwiększone wykorzystanie obwodu magnetycznego. Uzyskuje się to głównie przez stosowanie blach elektrotechnicznych dowlcowywanych na zimno. Blachy te charakteryzują się zwiększoną magnesowalnością^{*)} i zmniejszoną stratnością ale często powiększoną anizotropią magnetyczną.

Zastosowanie w obwodzie magnetycznym blachy o znacznej anizotropii magnetycznej wywołuje w maszynie dodatkowe zjawiska, które nie występowały w silnikach budowanych z blachy magnetycznie izotropowej (gorącowlcowanej).

Klasyczne metody obliczania obwodu magnetycznego, zawierające szereg współczynników empirycznych właściwych dla blachy izotropowej, mogą okazać się niedostatecznie dokładne gdy rdzeń maszyny jest wykonany z blachy o wyraźnej anizotropii magnetycznej. W warunkach stosowania blachy anizotropowej w silnikach indukcyjnych może powstać pytanie jak duża anizotropia blachy może być dopuszczona aby zachować poprawne warunki i parametry eksploatacyjne silnika.

^{*)} magnesowalność — podatność ferromagnetyka na magnesowanie zewnętrznym polem magnetycznym.

Nowoczesne metody wyznaczania rozkładu pola magnetycznego w silniku indukcyjnym powinny uwzględniać:

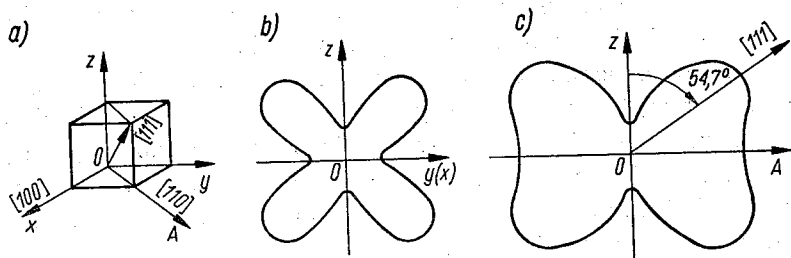
- strukturę fizyczną elementów obwodu i skomplikowaną ich geometrię,
- nieliniowość charakterystyki magnesowania,
- różny charakter przemagnesowania w poszczególnych częściach obwodu magnetycznego,
- zjawisko anizotropii magnetycznej blachy elektrotechnicznej.

Obecnie obserwuje się coraz większy rozwój metod pozwalających na wyznaczenie przestrzennego lub przestrzenno-czasowego rozkładu pola, opartych na dyskretyzacji obwodu magnetycznego maszyny indukcyjnej (metoda elementów skończonych, metoda siatki reluktancyjnej, siatki pojemnościowej itp.). W związku z tym zostały podjęte prace badawcze mające na celu analizę rozkładu pola w obwodzie magnetycznym silnika indukcyjnego, którego rdzeń jest wykonany z blachy elektrotechnicznej anizotropowej. Prace te były prowadzone w Instytucie Maszyn Elektrycznych i Transformatorów Politechniki Łódzkiej w ramach podproblemu 05.5A „Wybrane badania podstawowe w dziedzinie elektrotechniki” koordynowanego przez Zakład Badań Podstawowych Elektrotechniki MHiPM i PAN.

W artykule przedstawiono niektóre wyniki prac wykonanych w latach 1981—85 w ramach tematu „Analiza zjawisk w ferromagnetycznych elementach obwodu magnetycznego z uwzględnieniem anizotropii blach elektrotechnicznych” realizowanego w IV grupie tematycznej „Teoria przetworników elektromechanicznych”.

2. ANIZOTROPIA BLACHY ELEKTROTECHNICZNEJ

Anizotropia magnetyczna blachy elektrotechnicznej zaznacza się zróżnicowaniem jej kierunkowych własności magnetycznych. Najlepsze własności (największa magnesowalność, najmniejsza stratność) są osiągane przy przemagnesowaniu blachy zgodnym z kierunkiem walcowania, przy innych kierunkach te własności są mniej korzystne. Anizotropia magnetyczna blachy wynika z anizotropowych własności monokryształu żelazo — krzem, który charakteryzuje się różnymi momentami magnetycznymi dla różnych kierunków kryształu. Według domenowej teorii Weissa w materiale ferromagnetycznym bez zewnętrznego pola magnetycznego występuje samorzutna magnetyzacja (polaryzacja magnetyczna) nasycenia



Rys. 1. Energia anizotropii magnetycznej kryształu żelaza [8] a) model komórki krystalicznej b) zmiana energii anizotropii w płaszczyźnie bocznej kryształu, c) zmiana energii anizotropii w płaszczyźnie przekątnej kryształu

w poszczególnych domenach spowodowana polem molekularnym. Kierunek wektora magnetyzacji jest zgodny z krystalograficznym kierunkiem łatwego magnesowania zgodnie z zasadą najmniejszego stanu energetycznego kryształu. Przy działaniu zewnętrznego pola magnetycznego, gdy wektor magnetyzacji zostanie obrócony do innego położenia zgodnie z wymuszeniem zewnętrznym zostanie wykonana praca przeciw siłom wewnętrznym kryształu. Ta praca zmagazynowana w domenie nosi nazwę energii anizotropii. Energia anizotropii w różnych płaszczyznach kryształu żelaza została przedstawiona na rys. 1 [8].

Usytuowanie kryształów w procesie technologicznym blachy elektrotechnicznej decyduje o jej własnościach magnetycznych w różnych kierunkach. Stąd też w zależności od procesu technologicznego oraz zawartości krzemu uzyskuje się blachy o różnym stopniu anizotropii magnetycznej. Anizotropia blachy elektrotechnicznej może występować w odniesieniu do różnych własności magnetycznych jak magnesowalność, stratność, magnetostrykcja. Anizotropia magnesowalności polega na różnej podatności na magnesowanie blachy dla różnych kierunków w stosunku do kierunku odniesienia, za który przyjmuje się zwykle kierunek walcowania blachy, gdyż magnesowalność dla tego kierunku jest największa. Zwykle ilościowo anizotropię magnesowalności wyraża się zależnością:

$$\Delta B(\alpha) = B_0 - B_\alpha \quad \text{przy} \quad H_m = \text{const}, \quad (1)$$

w której

B_0 — magnesowalność dla kierunku zgodnego z kierunkiem walcowania, B_α — magnesowalność dla kierunku pod kątem α względem kierunku walcowania; obie wartości wyznaczone są dla tego samego natężenia pola magnetycznego.

Dla blach stosowanych w budowie maszyn elektrycznych wartość anizotropii magnesowalności podawana jest jako różnica magnesowalności dla kierunku zgodnego i prostopadłego do kierunku walcowania przy natężeniu pola $H_m = 2500 \text{ A/m}$.

$$\Delta B_{25} = B_0 - B_{90} \quad \text{przy} \quad H_m = 2500 \text{ A/m}. \quad (2)$$

Istnieją także propozycje innego określenia anizotropii magnesowalności np. jako różnicy natężeń pola magnetycznego przy stałej wartości indukcji [11].

Anizotropia stratności określa różną wartość stratności dla różnych kierunków magnesowania blachy elektrotechnicznej. Ilościowo anizotropię stratności wyznacza się jako stosunek różnicy stratności wyznaczonej dla próbek mieszanych Δp_m i stratności dla kierunku zgodnego z kierunkiem walcowania Δp_0 do stratności próbek mieszanych dla danej wartości indukcji i wyraża się ją zwykle w procentach [13]

$$A_p = \frac{\Delta p_m - \Delta p_0}{\Delta p_m} 100\% \quad \text{przy} \quad B_m = \text{const}. \quad (3)$$

Jeśli przyjąć, że $\Delta p_m \approx \frac{1}{2} (\Delta p_0 + \Delta p_{90})$, to

$$A_p = \frac{\Delta p_{90} - \Delta p_0}{\Delta p_{90} + \Delta p_0} 100\%. \quad (4)$$

W ten sposób wartość procentowa anizotropii może być wyznaczona na podstawie stratności wyznaczonych dla kierunku zgodnego i prostopadłego do kierunku walcowania blachy.

Blachy elektrotechniczne gorącowałcowane były uważane powszechnie za blachy o właściwościach izotropowych. Nowoczesne blachy dowałcowywane na zimno jakkolwiek zachowały nazwę „blach nieorientowanych” posiadają zauważalną anizotropię własności magnetycznych w zależności od procesu technologicznego i zawartości krzemu. Anizotropia magnesowalności i stratności zależy od stanu nasycenia. Największa występuje w obszarze kolana charakterystyki magnesowania przy indukcji około 1,4...1,6 T, przy większych wartościach maleje. Wartości anizotropii magnetycznej niektórych blach elektrotechnicznych stosowanych w budowie maszyn elektrycznych podano w tabl. 1. Dla porównania

Tablica 1

Własności magnetyczne niektórych blach elektrotechnicznych

Oznaczenie	Rodzaj blachy	Grubość	Indukcja ^{*)} przy $H_m =$ $= 2500 \text{ A/m}$	Stratność ^{**)} przy $B_m = 1,5 \text{ T}$	Anizotropia magnesowal- ności ΔB_{25}	Anizotropia stratności przy $B_m = 1,5 \text{ T}$
		mm	T	W/kg	—	%
Fe 64.50	bezkrzemowa	0,5	1,62	5,68	0,06	2,6
Ei 60	niskokrzemowa	0,5	1,57	4,70	0,11	7,7
EP 14	niskokrzemowa	0,5	1,61	2,35	0,21	16,2
M4 ^{**) (M4**)}	krzemowa	—	—	—	—	—
	transformatorowa	0,28	1,9	1,19	0,47	48,7

^{*)} wartości wyznaczone dla próbek wyciętych w kierunku zgodnym z kierunkiem walcowania blachy

^{**) dla próbek niewyżarzonych}

podano także wartości anizotropii dla blachy anizotropowej M4 stosowanej w budowie transformatorów.

3. ZASTOSOWANIE SIATKOWEGO SCHEMATU RELUKTANCYJNEGO DO WYZNACZANIA ROZKŁADU POLA W OBWODZIE MAGNETYCZNYM SILNIKA INDUKCYJNEGO

Do analizy rozkładu pola w obwodzie magnetycznym silnika indukcyjnego zastosowano metodę siatkowego schematu reluktancyjnego o nieliniowych elementach skupionych. Istotnym zagadnieniem jest zbudowanie schematu zastępczego, który będzie możliwie wiernie odwzorowywał obwód magnetyczny maszyny, a jego rozwiązanie metodami numerycznymi będzie ekonomiczne.

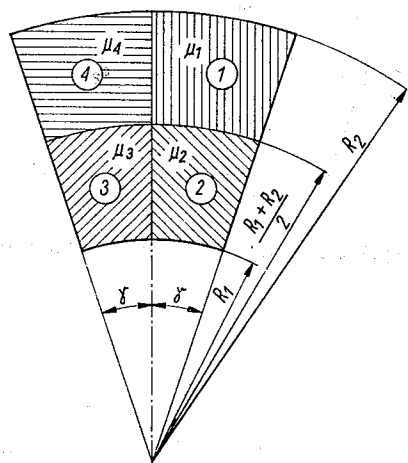
Przy budowie siatkowego schematu zastępczego o parametrach skupionych przeznaczonego do wyznaczania rozkładu pola magnetycznego w obwodzie maszyny indukcyjnej wprowadzono następujące założenia:

- obwód magnetyczny maszyny jest symetryczny pod względem geometrycznym,
- trójfazowa maszyna indukcyjna znajduje się w stanie biegu jałowego i pomija się prądy w uzwojeniu wirnika,
- prądy magnesujące w poszczególnych uzwojeniach fazowych stojana mają taką samą

wartość skuteczną, a ich pierwsze harmoniczne są przesunięte względem siebie o kąt $\frac{2\pi}{3}$,

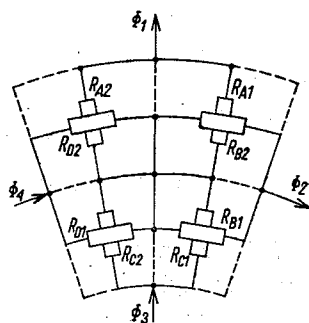
- nie występuje wnikanie strumienia magnetycznego do kadłuba, natomiast uwzględnia się przechodzenie strumienia przez wał maszyny.

Podstawowym zadaniem przy tworzeniu siatkowego schematu zastępczego o skupionych parametrach jest podział obwodu magnetycznego na segmenty i zastąpienie ich odpowiednimi reluktancjami. W tym celu cały obwód magnetyczny dzieli się współśrodkowymi okręgami, które dają podział na pierścienie (warstwy) i liniami radialnymi poprowadzonymi ze środka wału maszyny, które dzielą warstwy na segmenty. Osie segmentów w poszczególnych warstwach tworzą linie radialne poprowadzone ze środka wału przez osie symetrii żłobków i zębów stojana lub wirnika. Liczba segmentów w warstwie jest równa podwójnej liczbie żłobków. Przyszczelinowe warstwy strefy zębowo-żłobkowej mogą być podzielone na większą liczbę segmentów żłobkowych i zębowych niż podwójna liczba żłobków, jeżeli potrzeba taka wynika z ukształtowania zęba i żłobka.



Rys. 2. Segment ferromagnetyczny obwodu

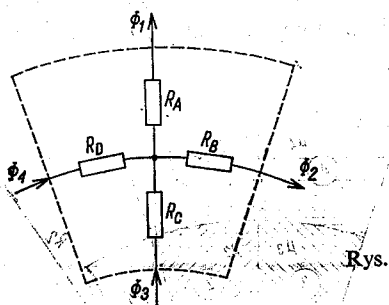
Każdy segment składa się z czterech elementów (rys. 2). Przenikalność magnetyczna w elemencie jest stała i określa ją dla ferromagnetyka wypadkowa wartość indukcji występująca w elemencie i odpowiednia charakterystyka magnesowania uwzględniająca kierunek magnesowania elementu w stosunku do kierunku walcowania blachy [5]. Oznacza to



Rys. 3. Reluktancyjny schemat zastępczy segmentu

że dla wyznaczenia przenikalności magnetycznej elementów segmentu ferromagnetyka trzeba korzystać z rodziny charakterystyk magnesowania blachy $B_m = f(H_m)$ wyznaczonych dla różnych kierunków magnesowania w stosunku do kierunku walcowania blachy. W praktyce korzysta się zwykle z charakterystyk wyznaczonych dla próbek wyciętych dla kilku określonych kierunków. Przenikalność magnetyczną elementu wyznacza się na podstawie interpolacji lub charakterystyki magnesowania najbliższej kierunkowi wypadkowej indukcji w elemencie.

Element segmentu jest reprezentowany w schemacie zastępczym układem dwóch wzajemnie prostopadłych reluktancji. Połączenie tych reluktancji dla segmentu złożonego z czterech elementów przedstawiono na rys. 3, gdzie zaznaczono także przykładowy rozkład strumieni magnetycznych w segmencie. Schemat reluktancji segmentu przedstawiony na rys. 3 może być przekształcony do schematu, jak na rys. 4, w którym poszczególne



Rys. 4. Przekształcony reluktancyjny schemat zastępczy segmentu z rys. 2

reluktancje wyznacza się z następujących zależności:

$$R_A = \frac{1}{\gamma(\mu_1 + \mu_4)L} \ln \frac{2R_2}{R_1 + R_2}, \quad (5)$$

$$R_B = \frac{\gamma}{\left(\mu_1 \ln \frac{2R_2}{R_1 + R_2} + \mu_2 \ln \frac{R_1 + R_2}{2R_1} \right) L} \quad (6)$$

$$R_C = \frac{l_1}{\gamma(\mu_2 + \mu_3)L} \ln \frac{R_1 + R_2}{2R_1} \quad (7)$$

$$R_D = \frac{\gamma}{\left(\mu_3 \ln \frac{R_1 + R_2}{2R_1} + \mu_4 \ln \frac{2R_2}{R_1 + R_2} \right) L} \quad (8)$$

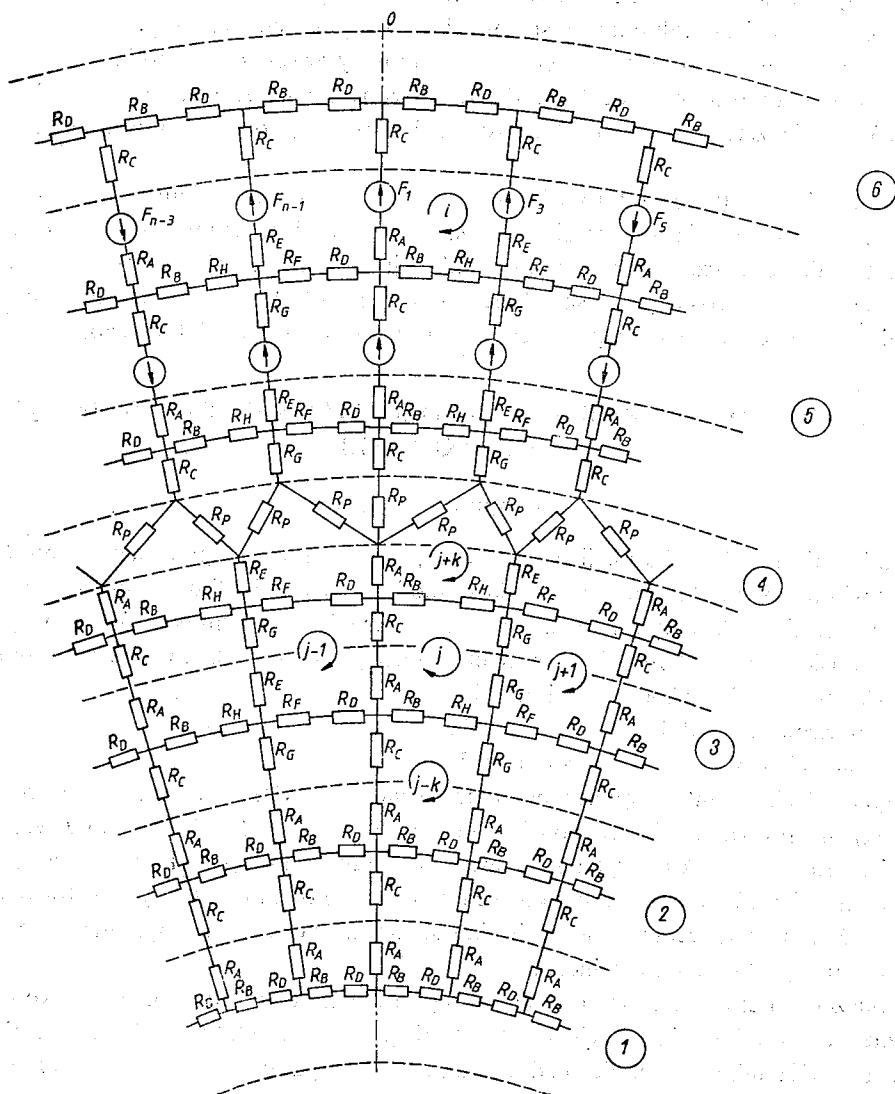
gdzie:

- $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ — przenikalności magnetyczne elementów,
- L — długość rdzenia bez izolacji międzyblachowej,
- R_1, R_2 — promienie wyznaczające określoną warstwę,
- 2γ — kąt wyznaczający określony segment.

Schemat zastępczy segmentu żłobka silnika indukcyjnego jest analogiczny, jak dla ferromagnetyka, przy czym przenikalność magnetyczna we wszystkich elementach jest stała i równa przenikalności powietrza. Szczelina powietrzna reprezentuje sobą jedną

z warstw obwodu, przy czym reluktancje poszczególnych elementów szczeliny są wyznaczane dla kierunku radialnego. Wartości reluktancji szczeliny zależą od wzajemnego usytuowania względem siebie segmentów strefy żłobkowo-zębowej stojana i wirnika w warstwach przyszczelinowych.

Siły magnetomotoryczne źródeł w siatkowym schemacie reluktancyjnym trójfazowego silnika indukcyjnego dla biegu jałowego można wyznaczyć na podstawie wypadkowej krzywej przepływu. Siatkowy schemat reluktancyjny, którego fragment przedstawiono na rys. 5 otrzymuje się przez odpowiednie połączenie reluktancji i sił magnetomotorycznych



Rys. 5. Fragment siatkowego schematu zastępczego obwodu magnetycznego maszyny indukcyjnej
 1 — wał, 2 — jarzmo wirnika, 3 — strefa zębowo-żłobkowa wirnika, 4 — szczelina powietrzna, 5 — strefa zębowo-żłobkowa stojana, 6 — jarzmo stojana.

poszczególnych segmentów. Wypadkowa siła magnetomotoryczna oczka siatki reluktancyjnej jest równa przepływowi obejmowanemu przez to oczko. Bardziej szczegółowy opis budowy siatkowego schematu reluktancyjnego ferromagnetyka i obwodu magnetycznego trójfazowej maszyny indukcyjnej został przedstawiony w pracach [5], [14] i [15].

Rozwiązanie obwodu siatkowego zostało wykonane metodą strumieni oczkowych. Układ równań w zapisie macierzowym ma postać

$$[R(m)][\Phi(m)] = [\Theta(m)] \quad (9)$$

gdzie:

$[R(m)]$ — macierz kwadratowa reluktancji oczkowych,

$[\Phi(m)]$ — macierz kolumnowa strumieni magnetycznych oczkowych,

$[\Theta(m)]$ — macierz kolumnowa sił magnetomotorycznych oczkowych.

Siła magnetomotoryczna oczkowa dla zaznaczonych na rys. 5 oczek $j, j+k, j-k, j+1, j-1$ równa się zero, zaś dla oczka i równa jest przepływowi obejmowanemu przez to oczko.

Układ równań (9) został rozwiązany numerycznie metodą Gaussa-Seidla-Newtona. W wyniku rozwiązania otrzymuje się wartości strumieni magnetycznych oczkowych $\Phi(m)$. Składowe styczne i promieniowe indukcji magnetycznych w poszczególnych elementach ferromagnetycznych i szczeliny powietrznej silnika wyznacza się na podstawie strumieni magnetycznych gałęziowych zastępczego schematu siatkowego.

4. ROZKŁAD INDUKCJI W OBWODZIE MAGNETYCZNYM MASZyny INDUKCYJNEJ

4.1. OBIEKTY BADAŃ

Obliczenia rozkładu indukcji magnetycznej metodą siatkowego schematu reluktancyjnego wykonano dla klatkowych silników modelowych z kadłubem niemagnetycznym, których rdzenie zostały wykonane z typowych wykrojów blach silników indukcyjnych serii f o wzniosie wału 132 mm i wybranych trzech gatunków blachy elektrotechnicznej:

- bezkrzemowej Fe 64.50 — silnik MB,
- niskokrzemowej EP 14 — silnik MP,
- krzemowej M4 — silnik MT.

Dla tych blach zostały wyznaczone dynamiczne charakterystyki magnesowania $B_m = f(H_m)$ dla próbek wyciętych pod kątami co 15° w stosunku do kierunku walcowania oraz jest znana charakterystyka magnesowania stali, z której wykonano wał maszyny.

Badania silników modelowych, których rdzenie wykonano z blachy transformatorowej gatunku M4 miały na celu uwypuklenie zjawisk związanych z anizotropią magnesowalności blachy w pracy silnika indukcyjnego.

Obliczenia numeryczne metodą siatkowego schematu reluktancyjnego wykonano dla modelowych silników indukcyjnych 4 i 6 biegunowych. Żłobki stojana i wirnika obu maszyn są półzamknięte; ich liczba dla silnika czterobiegunowego $\dot{Z}_1 = 36$ oraz $\dot{Z}_2 = 28$, zaś dla silnika sześciobiegunowego — $\dot{Z}_1 = 36$ oraz $\dot{Z}_2 = 33$. Strefy zębowo-żłobkowe maszyn podzielono wzdłuż wysokości na 4 warstwy, jarzma stojana — na 3 warstwy, jarzma wirnika — na 2 warstwy, a wał maszyny — na 1 warstwę. Zęby stojana i wirnika

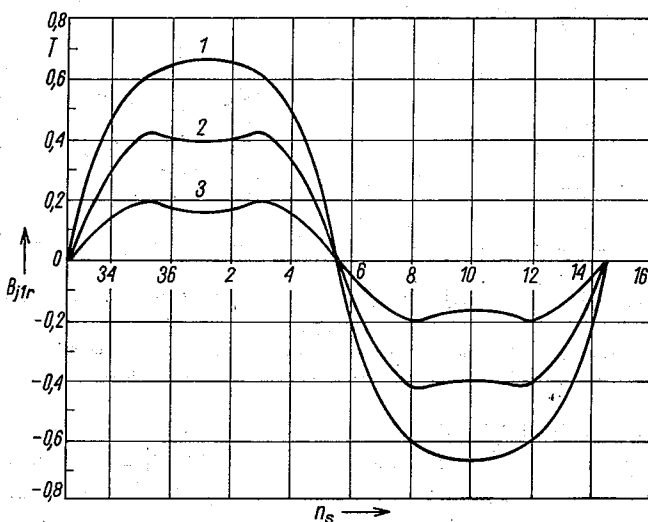
w warstwach przyszczelinowych podzielono na 3 segmenty. W rezultacie otrzymano siatkowe schematy reluktancyjne: — dla silnika czterobiegunowego o $m = 1024$ oczkach, — dla silnika sześciobiegunowego o $m = 1104$ oczkach. Wypadkowa krzywa przepływu badanych silników została usytuowana w siatkowym schemacie zastępczym tak, że jej maksymalna wartość pokrywa się z kierunkiem walcowania blachy oraz z osią jednego z uzwojeń fazowych stojana, a także z osiami zębów stojana $1s$ i wirnika $1w$ (rys. 5).

4.2. ROZKŁAD INDUKCJI MAGNETYCZNEJ W FERROMAGNETYCZNYCH ELEMENTACH SILNIKA INDUKCYJNEGO

Na rysunkach 6÷15 przedstawiono wybrane wyniki obliczeń rozkładów indukcji magnetycznej w ferromagnetycznych elementach obwodu magnetycznego czterobiegunowych silników modelowych wyznaczone dla sinusoidalnego prądu magnesującego o wartości $I_\mu = 6,5$ A. Rozkłady promieniowych i stycznych składowych indukcji w jarzmach stojana i wirnika wykreślono wzdłuż obwodu maszyny tylko dla jednej pary biegunów ze względu na analogiczny ich obraz pod drugą parą biegunów. Na rysunkach 6 do 18 n_s i n_w oznaczają kolejne zęby stojana i wirnika.

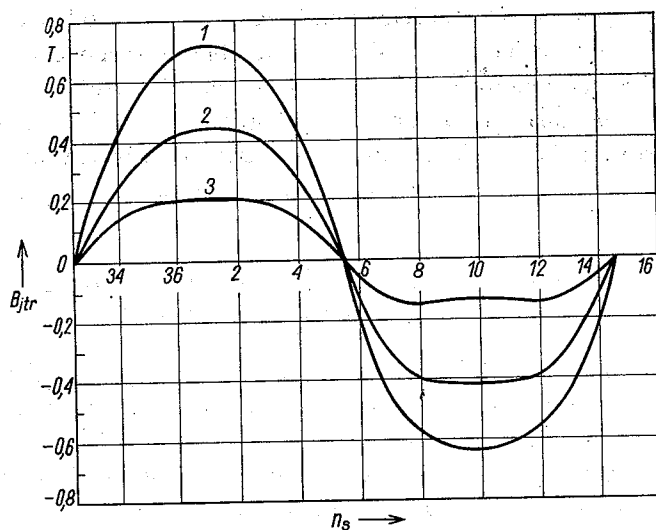
Obliczone rozkłady składowej promieniowej indukcji magnetycznej w jarzmie stojana B_{j1r} , na granicy poszczególnych warstw (rys. 6, 7, 8) wskazują na nierównomierny rozkład tej składowej wzdłuż wysokości jarzma. W miarę wzrostu stopnia anizotropii magnesowności blachy występuje zaostrzający się charakter przebiegów oraz asymetria amplitudowa na poszczególnych podziałkach biegunowych.

Rozkład składowej stycznej indukcji B_{j1s} w warstwie przyzębowej jarzma stojana jest praktycznie taki sam niezależnie od rodzaju blachy (rys. 9). Rozkłady B_{j1s} w pozostałych



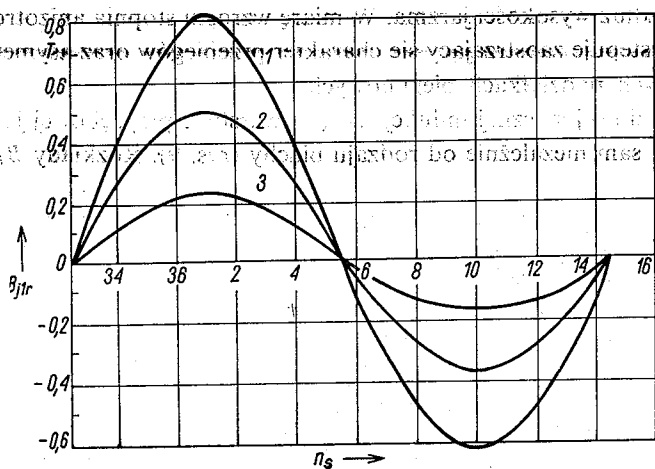
Rys. 6. Rozkład składowej promieniowej indukcji magnetycznej w jarzmie stojana B_{j1r} , silnika modelowego MB4

1 — na granicy strefy zębowo-żłobkowej i pierwszej warstwy jarzma stojana, 2 — na granicy między pierwszą i drugą warstwą jarzma stojana, 3 — na granicy między drugą i trzecią warstwą jarzma stojana.



Rys. 7. Rozkład składowej promieniowej indukcji magnetycznej w jarzmie stojana B_{j1r} , silnika modelowego MP4

1 — na granicy strefy zębowo-żłobkowej i pierwszej warstwy jarzma stojana, 2 — na granicy między pierwszą i drugą warstwą jarzma stojana, 3 — na granicy między drugą i trzecią warstwą jarzma stojana.

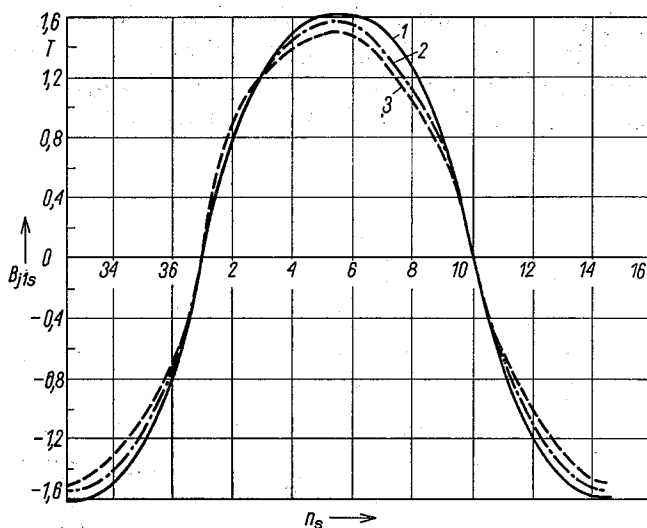


Rys. 8. Rozkład składowej promieniowej indukcji magnetycznej w jarzmie stojana B_{j1r} , silnika modelowego MT4

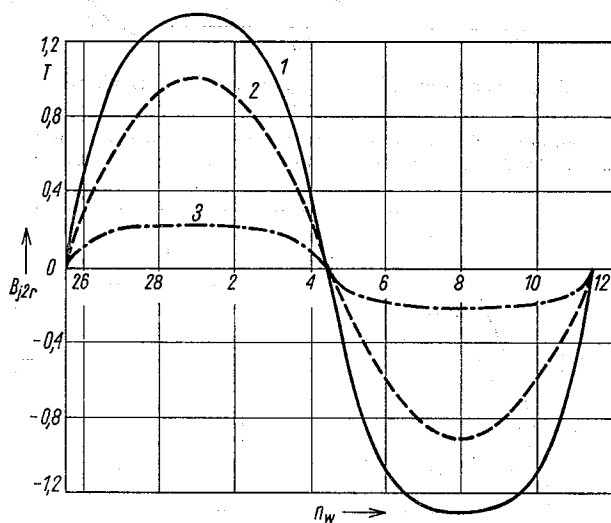
1 — na granicy strefy zębowo-żłobkowej i pierwszej warstwy jarzma stojana, 2 — na granicy między pierwszą i drugą warstwą jarzma stojana, 3 — na granicy między drugą i trzecią warstwą jarzma stojana.

dwóch warstwach nieznacznie różnią się od przebiegów w warstwie przyzębowej. Amplituda składowej stycznej indukcji magnetycznej B_{j1s} jest najmniejsza w silniku MT4, mimo że blacha transformatorowa, z której wykonano rdzeń tego silnika posiada najlepszą magnesowalność wzdłuż kierunku walcowania. Przyczyną tego jest największa anizotropia magnesowalności tej blachy w porównaniu z pozostałymi blachami.

Na podstawie rysunków 10, 11, 12 można stwierdzić, że rozkłady składowej promieniowej indukcji magnetycznej w jarzmie wirnika B_{j2r} , silnika MT4 w wyraźny sposób



Rys. 9. Rozkład składowej stycznej indukcji magnetycznej w pierwszej warstwie stojana B_{j1s}
 1 — silnik modelowy MB4, 2 — silnik modelowy MP4, 3 — silnik modelowy MT4



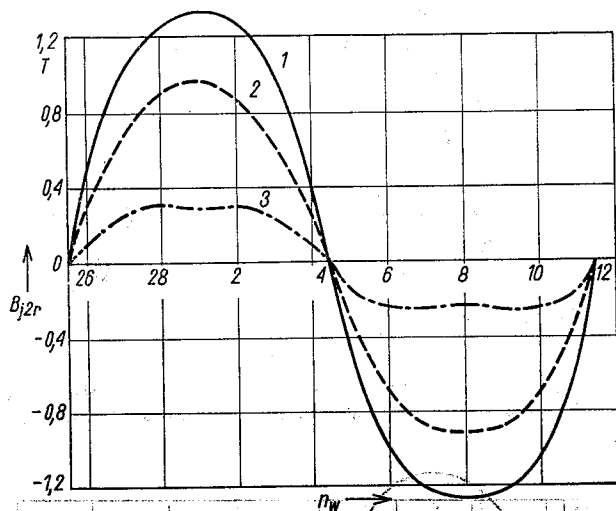
Rys. 10. Rozkład składowej promieniowej indukcji magnetycznej w jarzmie wirnika B_{j2r} silnika modelowego MP4

1 — na granicy strefy zębowo-żłobkowej i pierwszej warstwy jarzma wirnika, 2 — na granicy między pierwszą i drugą warstwą jarzma wirnika, 3 — na granicy między drugą warstwą jarzma wirnika i wałem.

odbiegają od rozkładów w dwóch pozostałych silnikach. Występuje tutaj silne zaostrenie przebiegu w jarzmie na podziałce biegunowej, której oś pokrywa się z kierunkiem walcowania blachy oraz silne odkształcenie na granicy między wałem a drugą warstwą jarzma wirnika.

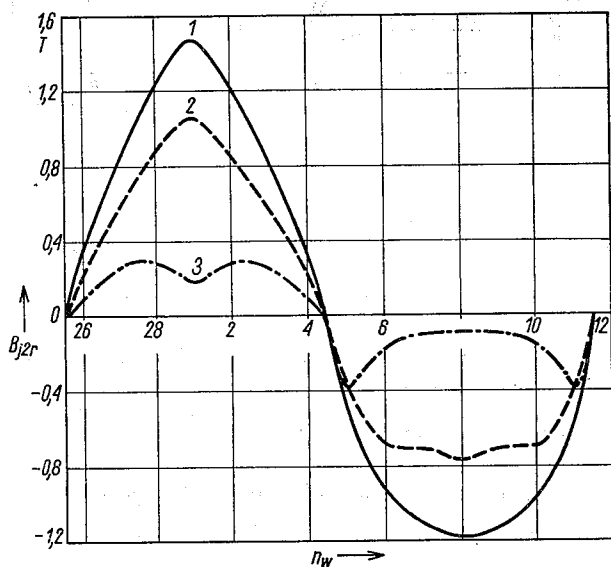
Rozkłady składowej stycznej indukcji B_{j2s} w poszczególnych warstwach jarzma wirnika są praktycznie takie same niezależnie od rodzaju blachy (rys. 13, 14, 15). Amplituda

składowej stycznej B_{j2s} w jarzmie wirnika jest najmniejsza w silniku wykonanym z blachy transformatorowej. Mimo, że w wykonywanych obliczeniach uwzględniono wnikanie strumienia magnetycznego na całą grubość wału, to amplituda B_{j2s} w wale jest wyraźnie mniejsza od amplitudy B_{j2s} w jarzmie wirnika (najmniejsza dla silnika MB4). Jest to



Rys. 11. Rozkład składowej promieniowej indukcji magnetycznej w jarzmie wirnika B_{j2r} silnika modelowego MP4

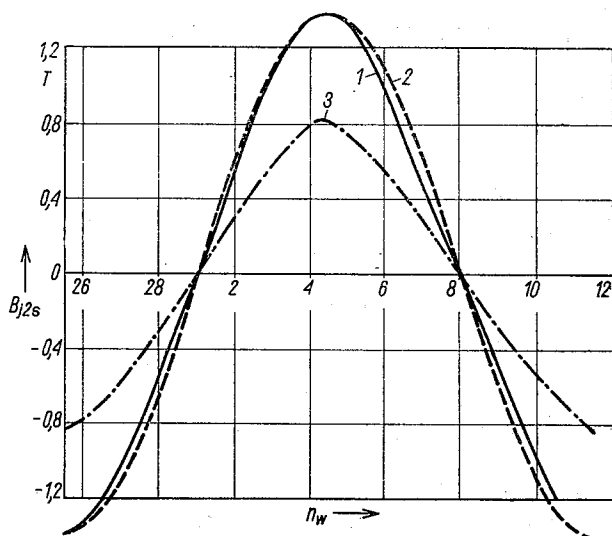
1 — na granicy strefy zębowo-żłobkowej i pierwszej warstwy jarzma wirnika, 2 — na granicy między pierwszą i drugą warstwą jarzma wirnika, 3 — na granicy między drugą warstwą jarzma wirnika i wałem.



Rys. 12. Rozkład składowej promieniowej indukcji magnetycznej w jarzmie wirnika B_{j2r} silnika modelowego MT4

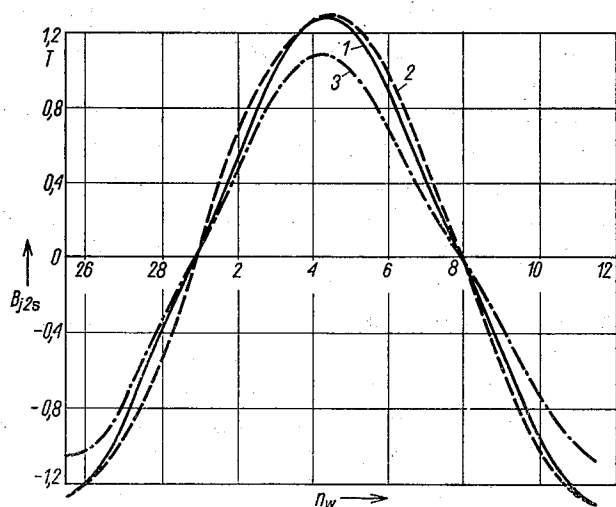
1 — na granicy strefy zębowo-żłobkowej i pierwszej warstwy jarzma wirnika, 2 — na granicy między pierwszą i drugą warstwą jarzma wirnika, 3 — na granicy między drugą warstwą jarzma wirnika i wałem.

spowodowane dużo mniejszą magnesowością stali, z której wykonano wał maszyny w porównaniu z magnesowością blachy. Jak widać z przedstawionych wyżej rozkładów indukcji anizotropia magnesowości blachy elektrotechnicznej powoduje asymetrię kształtu i amplitudy składowych indukcji w elementach ferromagnetycznych obwodu magnetycznego silnika indukcyjnego.



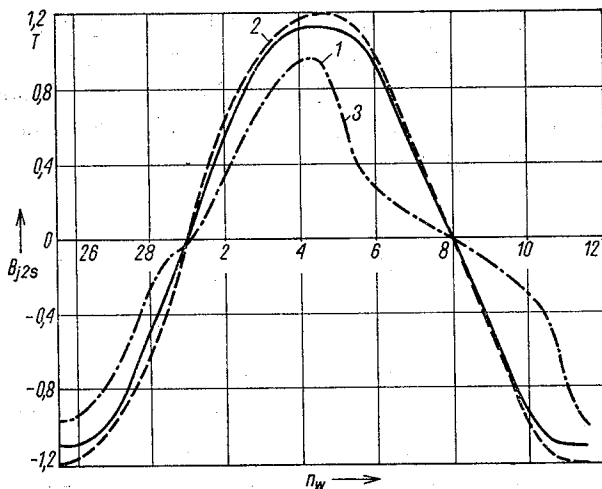
Rys. 13. Rozkład składowej stycznej indukcji magnetycznej w jarzmie wirnika B_{j2s} , silnika modelowego MB4

1 — w pierwszej warstwie jarzma wirnika, 2 — w drugiej warstwie jarzma wirnika, 3 — w wale.



Rys. 14. Rozkład składowej stycznej indukcji magnetycznej w jarzmie wirnika B_{j2s} , silnika modelowego MP4

1 — w pierwszej warstwie jarzma wirnika, 2 — w drugiej warstwie jarzma wirnika, 3 — w wale.



Rys. 15. Rozkład składowej stycznej indukcji magnetycznej w jarzmie wirnika B_{t2s} silnika modelowego MT4

1 — w pierwszej warstwie jarzma wirnika, 2 — w drugiej warstwie jarzma wirnika, 3 — w wale.

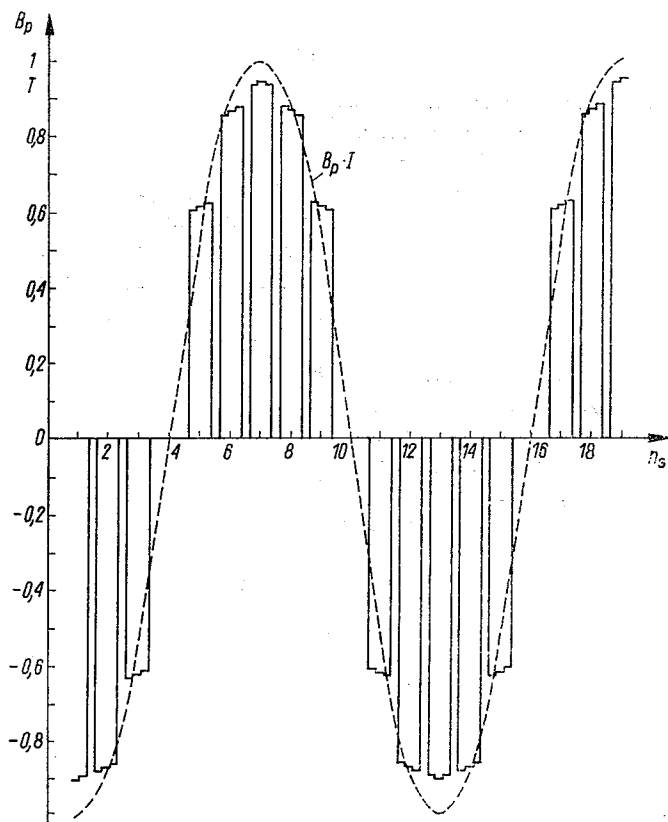
4.3. ROZKŁAD INDUKCJI W SZCZELINIE POWIETRZNEJ SILNIKA INDUKCYJNEGO

Metoda siatki reluktancyjnej pozwala na wyznaczenie indukcji magnetycznej w szczelinie powietrznej B_p jako wartości średniej w poszczególnych obszarach dyskretyzacji szczeliny. Na rysunkach 16÷18 przedstawiono rozkłady indukcji B_p na wewnętrznej powierzchni stojana sześciobiegunowych silników modelowych dla sinusoidalnego prądu magnesującego o wartości $I_\mu = 5$ A. Rozkłady indukcji B_p wykreślono dla trzech biegunów, ponieważ ze względu na występujące w maszynach liczby żłobków stojana i wirnika oraz własności anizotropowe blachy, rozkłady indukcji magnetycznej w szczelinie powietrznej dla pozostałych biegunów będą analogiczne. Na rysunkach tych zaznaczono także przebieg podstawowej harmonicznej indukcji B_{p1} .

W silniku MB6, którego rdzeń wykonano z blachy o własnościach praktycznie izotropowych, rozkład indukcji B_p na wszystkich podziałkach biegunowych jest symetryczny pod względem kształtu i amplitudy oraz spłaszczony w porównaniu z krzywą przepływu (rys. 16). Wykresy rozkładów indukcji B_p w silnikach MP6 (rys. 17) oraz MT6 (rys. 18) wskazują, że na jednej z podziałek biegunowych następuje spłaszczenie, na drugiej zaś zaostrenie rozkładów w porównaniu z krzywą przepływu. Ponadto na poszczególnych podziałkach biegunowych występuje asymetria amplitudy i kształtu, której przyczynę należy upatrywać w zjawisku anizotropii magnesowności blachy elektrotechnicznej. Asymetria ta jest tym większa, im większa jest liczba biegunów maszyny indukcyjnej.

W związku z występowaniem nierównomiernego rozkładu indukcji magnetycznej w szczelinie powietrznej B_p wzdłuż obwodu maszyny indukcyjnej, której rdzeń jest wykonany z blachy anizotropowej dokonano rozkładu na harmoniczne krzywej indukcji B_p metodą szeregu Fouriera. Obliczenia wykonano dla silników cztero- i sześciobiegunowych wykonanych z trzech gatunków blach elektrotechnicznych.

Dla ustalenia wpływu anizotropii magnesowności blachy na zawartość harmonic-

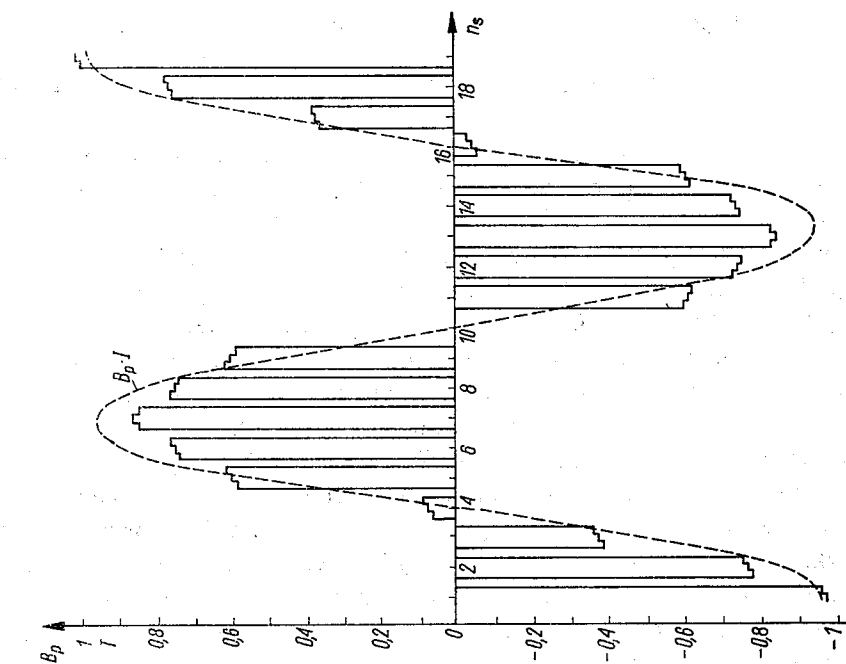


Rys. 16. Rozkład indukcji magnetycznej w szczelinie powietrznej silnika modelowego MB6.

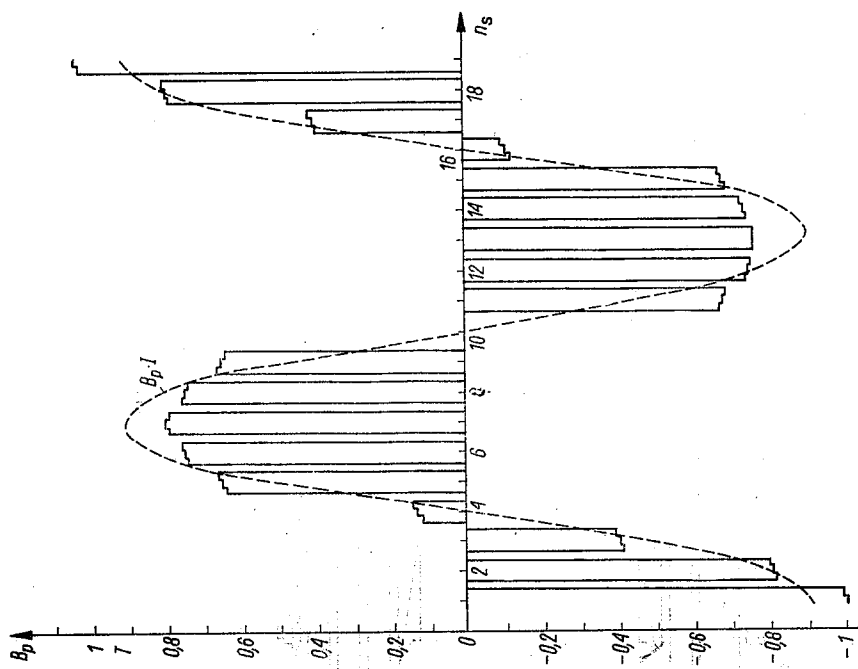
nych przestrzennych w krzywej indukcji B_p wykonano obliczenia rozkładu pola w silniku indukcyjnym metodą schematu reluktancyjnego dla dwóch przypadków w każdym z badanych silników:

- w założeniu, że silnik jest wykonany z blachy izotropowej o charakterystyce magnesowania zgodnej z kierunkiem walcowania rzeczywistej blachy anizotropowej (oznaczenie MB4-0, MP4-0, MT4-0 — analogicznie dla silników sześciobiegunowych),
- dla silnika wykonanego z blachy anizotropowej przy uwzględnieniu całej rodziny charakterystyk magnesowania, dla różnych kierunków magnesowania w stosunku do kierunku walcowania blachy (oznaczenia MB4-X itd.).

Różnica w rozkładach przestrzennych indukcji w tych dwóch przypadkach daje pogląd na wpływ anizotropii magnesowalności blachy na wartość i rozkład indukcji w poszczególnych elementach obwodu magnetycznego, w tym także w szczelinie powietrznej. Wyniki obliczeń rozkładu krzywych indukcji B_p na szereg Fouriera zestawiono w tablicy 2. Udział w procentach poszczególnych harmonicznych przestrzennych obliczono w stosunku do podstawowej harmonicznej. Jako podstawową harmoniczną krzywej indukcji magnetycznej w szczelinie powietrznej przyjęto harmoniczną odpowiadającą częstotliwości pierwszej harmonicznej krzywej przepływu. Dla silników czterobiegunowych harmoniczna podsta-



Rys. 17. Rozkład indukcji magnetycznej w szczelinie powietrznej silnika modelowego MP6



Rys. 18. Rozkład indukcji magnetycznej w szczelinie powietrznej silnika modelowego MT6

Tablica 2

Rozkład indukcji magnetycznej B_p w szczelinie powietrznej silników o $2p = 4$ oraz $2p = 6$

Numer harm. p	$I_\mu = 6,5 \text{ A}$						$I_\mu = 5 \text{ A}$					
	MB4-0		MB4-X		MP4-0		MP4-X		MT4-0		MT4-X	
	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	—	—	0,7	—	—	—	6,1	—	—	—	—	—
5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6	12,8	12,1	12,1	10,8	10,8	9,2	4,35	—	9,2	0,62	0,65	—
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	—	—	0,1	—	—	—	1,95	—	—	1,43	—	—
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,01	—	—
10	0,28	0,35	0,35	0,88	0,88	1,38	0,92	—	—	9,2	10,21	—
11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,6	—	—
12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,71	—	—
14	2,35	2,3	0,05	2,3	2,3	3,12	0,42	—	—	0,75	—	—
15	—	—	—	—	—	—	2,28	—	—	—	—	—
18	2,93	2,67	2,67	2,52	2,52	3,04	2,04	—	—	2,64	2,88	—
21	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,13	0,11	—
22	1,47	1,48	1,48	1,49	1,49	1,98	1,49	—	—	1,87	1,35	—
27	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,02	—
30	1,03	0,82	0,82	0,98	0,98	0,8	0,51	—	—	3,45	3,33	—
33	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,12	0,12	—
34	5,88	5,88	5,88	5,88	5,88	5,88	5,88	—	—	9,1	9,1	—
												0,01
												0,05

wowa odpowiada $p = 2$, dla silników sześciobiegunowych harmoniczna podstawowa odpowiada $p = 3$.

W krzywej przepływu występują tylko harmoniczne uzwojeniowe $5p, 7p, 11p$ itd., nie występują zaś harmoniczne, które są wielokrotnością liczby $3p$. Wskutek nasycenia obwodu magnetycznego w krzywej indukcji B_p pojawiają się harmoniczne $3p, 9p, 27p$, itd. W silnikach indukcyjnych, których rdzenie są wykonane z blachy izotropowej i geometria obwodu magnetycznego na każdej podziałce biegunowej jest taka sama, w rozkładzie indukcji magnetycznej w szczelinie powietrznej występują tylko harmoniczne uzwojeniowe i nasyceniowe. Procentowy udział harmonicznych ułobkowania (dla $2p = 4$ — harmoniczna 34, dla $2p = 6$ — harmoniczna 33) nie zależy od nasycenia obwodu oraz anizotropii blachy. Jak widać z zestawienia harmonicznych w tablicy 2 anizotropia magnesywalności blachy elektrotechnicznej jest źródłem generowania całego widma harmonicznych parzystych w silnikach czterobiegunowych oraz harmonicznych nieparzystych w silnikach sześciobiegunowych. Amplitudy generowanych harmonicznych (harmonicznych anizotropowych) mogą osiągać znaczne wartości rzędu harmonicznych ułobkowania.

W silnikach sześciobiegunowych wykonanych z blachy anizotropowej pojawiają się w rozkładzie indukcji także subharmoniczne. Anizotropia magnesywalności blachy elektrotechnicznej powoduje zmianę zawartości harmonicznych uzwojeniowych i nasyceniowych jakie występowały przy blasze izotropowej (np. zmniejszanie udziału 3 harmonicznej).

Na podstawie dokonanej analizy harmonicznej można stwierdzić, że anizotropia magnesywalności blachy generuje widmo harmonicznych parzystych w silnikach o p parzystym oraz widmo harmonicznych nieparzystych w silnikach o p nieparzystym. W silnikach o $p > 2$ w rozkładzie indukcji B_p pojawiają się subharmoniczne. Powyższa analiza została dokonana dla sinusoidalnego prądu magnesującego. Można analogiczną analizę przeprowadzić dla prądu magnesującego odkształconego, jeżeli znana jest zawartość wyższych harmonicznych prądu.

5. WPŁYW ANIZOTROPII MAGNESOWALNOŚCI BLACHY ELEKTROTECHNICZNEJ NA PRĄD MAGNESUJĄCY TRÓJFAZOWEGO SILNIKA INDUKCYJNEGO

Na podstawie analizy harmonicznej wykonanej w p. 4.3 wyznaczono harmoniczne podstawowe rozkładu indukcji magnetycznej B_{pI} w szczelinie powietrznej, co w konsekwencji dla silników, których uzwojenia stojana skojarzone są w gwiazdę pozwoliło obliczyć napięcie fazowe z zależności:

$$U_f \approx E_{1f} - I_\mu \cdot X_r \quad (10)$$

gdzie:

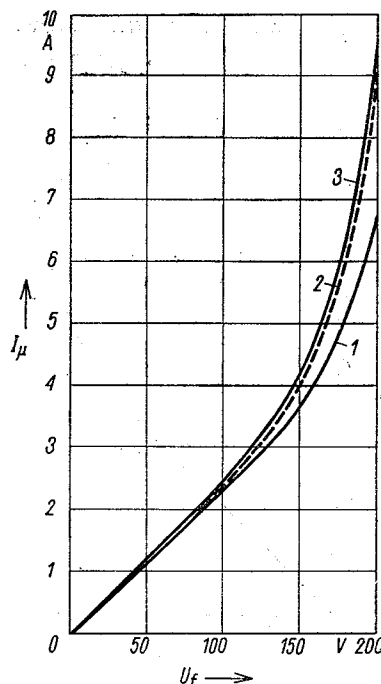
E_{1f} — siła elektromotoryczna indukowana w uzwojeniu stojana przez podstawową harmoniczną indukcji B_{pI} ,

I_μ — wartość skuteczna sinusoidalnego prądu magnesującego,

X_r — reakcja rozproszenia uzwojeń stojana.

Metodą siatkowego schematu reluktancyjnego z wykorzystaniem charakterystyk

$B_m = f(H_m)$ próbek wyciętych co 15° w stosunku do kierunku walcowania wyznaczono zależności $I_\mu = f(U_f)$ dla trzech modelowych silników czterobiegunowych (rys. 19).



Rys. 19. Charakterystyki $I_\mu = f(U_f)$ obliczone z wykorzystaniem metody siatkowego schematu reluktancyjnego oraz charakterystyk $B_m = f(H_m)$ dla różnych kątów w stosunku do kierunku walcowania blachy

1 — silnik MB4, 2 — silnik MP4, 3 — silnik MT4

Jak wynika z przedstawionych wykresów charakterystyka $I_\mu = f(U_f)$ silnika MB4 w wyraźny sposób przebiega poniżej charakterystyk dwóch pozostałych silników. Mimo, że blacha transformatorowa M4 posiada najlepszą magnesowalność wzdłuż kierunku walcowania z trzech badanych blach, prąd magnesujący silnika MT4 jest znacznie większy niż silnika MB4. Przyczyną tego jest duża wartość anizotropii magnesowalności blachy M4. Magnesowalność blachy EP14 wzdłuż kierunku walcowania jest praktycznie taka sama jak blachy Fe64.50, to jednak większa anizotropia magnesowalności blachy EP14 powoduje, że prąd magnesujący silnika MP4 jest w całym zakresie zmiany napięcia U_f znacznie większy i zbliżony do prądu silnika MT4.

W wyniku powyższych obliczeń można stwierdzić, że anizotropia magnesowalności blachy elektrotechnicznej powoduje wzrost prądu magnesującego trójfazowego silnika indukcyjnego.

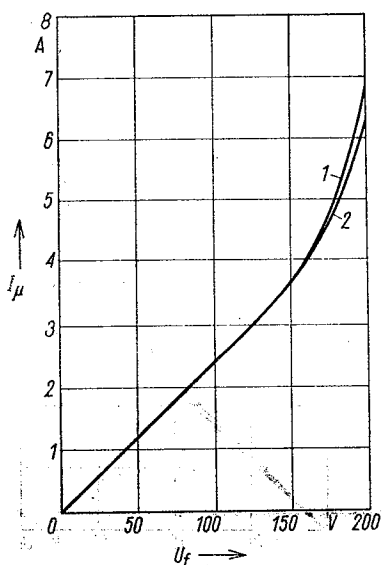
Dla oceny ilościowej wpływu anizotropii magnesowalności blachy na wartość prądu magnesującego obliczono dla badanych czterobiegunowych silników modelowych charakterystyki $I_\mu = f(U_f)$ z wykorzystaniem charakterystyki magnesowania $B_m = f(H_m)$ zgodnej z kierunkiem walcowania (rys. 20, 21, 22). Dla napięcia $U_p = 200$ V ($B_p \approx 0,85$ T) obliczono względny wzrost prądu magnesującego wskutek zjawiska anizotropii według zależności:

$$\Delta I_\mu = \frac{I_\mu - I_{\mu 0}}{I_{\mu 0}} 100\%, \quad (11)$$

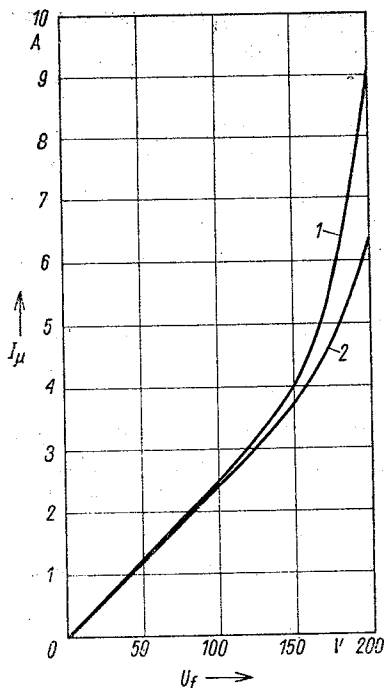
gdzie:

I_μ — wartość prądu magnesującego obliczona z wykorzystaniem kątowych charakterystyk $B_m = f(H_m)$,

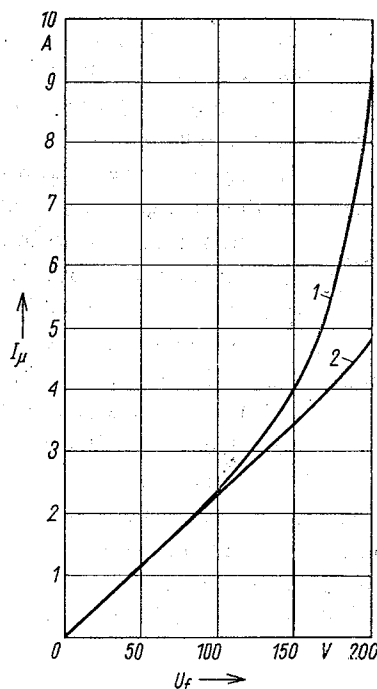
$I_{\mu 0}$ — wartość prądu magnesującego obliczona z wykorzystaniem charakterystyki $B_m = f(H_m)$ zgodnej z kierunkiem walcowania.



Rys. 20. Charakterystyki $I_\mu = f(U_f)$ dla silnika MP4
1 — charakterystyki magnesowania, dla różnych kątów względem kierunku walcowania, 2 — charakterystyka magnesowania dla kierunku zgodnego z kierunkiem walcowania.



Rys. 21. Charakterystyki $I_\mu = f(U_f)$ dla silnika MP4
1 — charakterystyki magnesowania dla różnych kątów względem kierunku walcowania, 2 — charakterystyka magnesowania dla kierunku zgodnego z kierunkiem walcowania.



Rys. 22. Charakterystyki $I_\mu = f(U_f)$ dla silnika MT4

1 — charakterystyki magnesowania dla różnych kątów względem kierunku walcowania, 2 — charakterystyka magnesowania dla kierunku zgodnego z kierunkiem walcowania.

Dla badanych silników modelowych wzrost prądu magnesującego wynosi:

- dla silnika MB4 — o 6%,
- dla silnika MP4 — o 45%,
- dla silnika MT4 — o 87%.

Z powyższego zestawienia wynika, że stosując w budowie rdzenia silnika indukcyjnego blachę anizotropową należy się liczyć ze wzrostem prądu magnesującego tym większym im większy jest stopień anizotropii magnesowalności blachy elektrotechnicznej [16, 7]

6. PRZEMAGNESOWANIE OBROTOWE W JARZMIE SILNIKA INDUKCYJNEGO I JEGO WPŁYW NA STRATY PODSTAWOWE W RDZENIU

6.1. POLE OBROTOWE W JARZMIE SILNIKA INDUKCYJNEGO

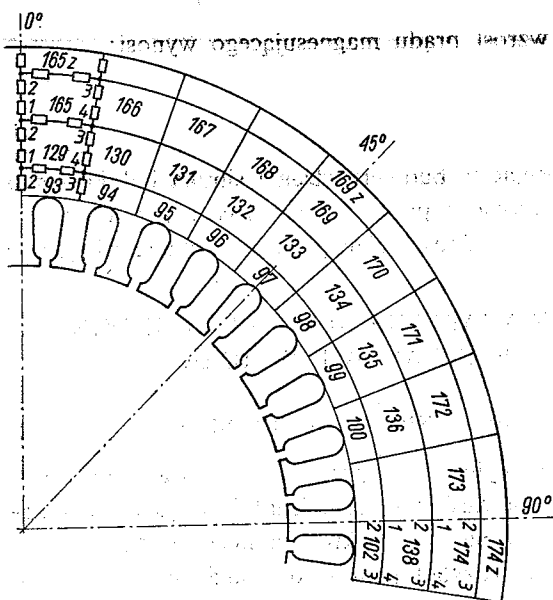
Jarzmo rdzenia trójfazowego silnika indukcyjnego jest przemagnesowywane obrotowo co znaczy, że wektor indukcji zmienia w czasie zarówno wartość, jak i położenie w płaszczyźnie wykrojów blach. Anizotropia magnetyczna blach elektrotechnicznych stosowanych w budowie rdzeni zaznacza swój wpływ na rozkład pola w obwodzie magnetycznym silnika indukcyjnego, jak również na obraz przemagnesowania obrotowego w jarzmie. Obraz przemagnesowania obrotowego w wyodrębnionych elementarnych obszarach jarzma można wyznaczyć stosując metodę schematu reluktancyjnego. W obliczeniach i analizie pola obrotowego występującego w jarzmie trójfazowego silnika indukcyjnego wykorzystano przedstawioną w p. 3 metodę zastępczego schematu reluktancyjnego.

Przy wyznaczaniu przemagnesowania obrotowego w jarzmie silnika indukcyjnego metodą siatkowego schematu reluktancyjnego przyjęto ogólne założenia podane w p. 3

(bieg jałowy, symetria geometryczna obwodu magnetycznego, symetria prądów fazowych itd.). Założono ponadto sinusoidalny kształt prądu zasilania silnika jako podstawę rozkładu wypadkowej krzywej przepływu wymuszającej strumień w obwodzie magnetycznym. Z rozwiązania układu równań (9) dla przepływów wynikających z wartości prądów fazowych w kolejnych chwilach czasowych otrzymuje się, w każdym z elementarnych obszarów jarzma, moduły i argumenty wektorów indukcji w tych chwilach czasowych. Obwiednia poprowadzona przez końce wyznaczonych wektorów indukcji daje obraz pola obrotowego w danym elementarnym obszarze jarzma. Szczegółowy opis wyznaczania przemagnesowania obrotowego podano w pracach [1, 2].

Przedstawione wyniki obliczeń numerycznych dotyczą silników indukcyjnych wielkości mechanicznej 132 o rdzeniach z izotropowej blachy bezkrzemowej Fe64.50 (oznaczenie silnika MB4) oraz z blachy transformatorowej M4 (oznaczenie silnika MT4). W danych do obliczeń blachy Fe64.50 opisana jest przez jedną charakterystykę magnesowania w kierunku 0° (stąd nazwa izotropowa), natomiast blachy M4 przez rodzinę kątowych charakterystyk magnesowania. Dobrane materiały rdzenia (blacha izotropowa i silnie anizotropowa) uwypuklają wpływ anizotropii magnetycznej na charakter przemagnesowania obrotowego w jarzmie.

Dla ułatwienia interpretacji obliczeń na rys. 23 przedstawiono fragment przekroju



Rys. 23. Fragment przekroju poprzecznego rdzenia stojana z siecią podziałową i numeracją oczek

poprzecznego rdzenia stojana modelu obliczeniowego silnika z siecią podziałową w części jarzmowej. Zastosowano podział jarzma na trzy warstwy. Na przekroju oś 0° pokrywa się z kierunkiem walcowania blachy. Ilustrację wyników obliczeń sprowadzono do segmentów jarzma leżących na dwóch charakterystycznych kierunkach 0° i 90° w stosunku do kierunku walcowania blachy:

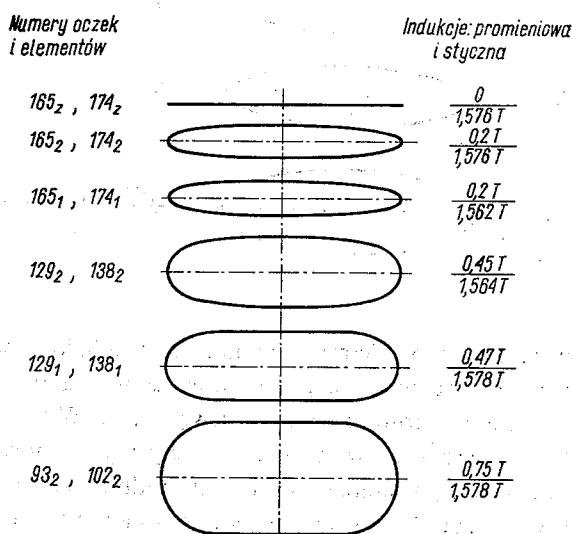
segmenty 0° — oczka: $93_2, 129_1, 129_2, 165_1, 165_2, 165_z$,

segmenty 90° — oczka: $102_2, 138_1, 138_2, 174_1, 174_2, 174_z$,

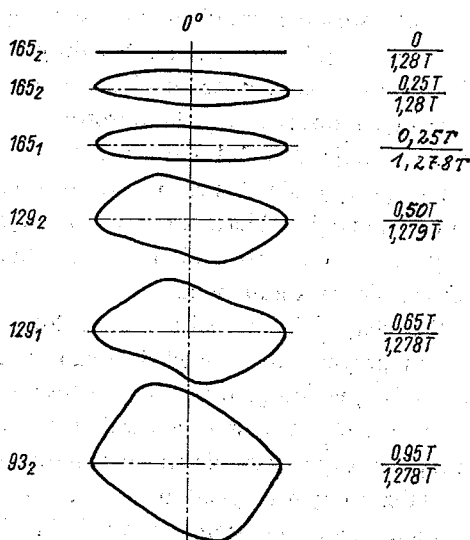
(indeksy oznaczają elementy w oczku, z — element zewnętrzny).

Graficzną ilustrację pola obrotowego w wybranych segmentach jarzma przedstawiono na rys. 24 dla silnika MB4 oraz na rysunkach 25 i 26 dla silnika MT4. Po lewej stronie rysunków podano numery oczek i elementów w jarzmie, których dotyczą te rozkłady. Po prawej stronie ilorazy amplitud promieniowej i stycznej indukcji magnetycznej w elementach.

Dla silnika MB4 z rdzeniem izotropowym (rys. 24) stwierdzono zbliżoną do eliptycznej, praktycznie jednakową zmienność wektora indukcji we wszystkich segmentach dla dowol-

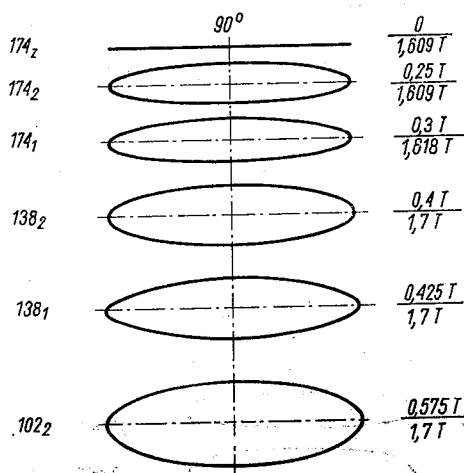


Rys. 24. Rozkład pola obrotowego w wybranych elementach jarzma silnika MB4 z rdzeniem izotropowym



Rys. 25. Rozkłady pola obrotowego w elementach segmentów na osi 0° silnika MT4 z rdzeniem anizotropowym

nego ich położenia na obwodzie jarzma. Kilkuprocentowe różnice w wartościach składowych stycznych indukcji w tych samych warstwach różnie usytuowanych segmentów wynikają ze zmiany amplitudy przepływu wypadkowego w rozkładzie poobwodowym



Rys. 26. Rozkłady pola obrotowego w elementach segmentów na osi 90° silnika MT4 z rdzeniem anizotropowym

w szczelinie powietrznej silnika. Z rozkładów pola obrotowego wynika, że składowa promieniowa indukcji jest największa w warstwie wewnętrznej jarzma od strony zębów i maleje w kierunku warstwy zewnętrznej. W warstwie zewnętrznej występuje tylko składowa styczna co wynika z dyskretyzacji w przyjętym modelu reluktancyjnym jarzma. Dla badanego silnika, w którym średnica zewnętrzna jarzma $D_z = 0,208$ m i średnica wewnętrzna $D_w = 0,134$ m, przy średniej indukcji stycznej w jarzmie około 1,57 T otrzymano maksymalną wartość „eliptyczności” przemagnesowania w warstwie nad zębami $\kappa_e \approx 0,5$ (stosunek indukcji promieniowej do stycznej).

W pracy [2] stwierdzono, że eliptyczność pola obrotowego bardzo wyraźnie zależy od wymiarów geometrycznych jarzma. Przy jarzmach wysokich możliwe jest występowanie w pewnych obszarach pola obrotowego o większym od podanego udziale składowej promieniowej indukcji, jak również pola obrotowego kołowego. W silniku MT4 z rdzeniem anizotropowym dla elementów na osi 0° (rys. 25) obserwuje się wzrost składowej promieniowej indukcji w kierunku łatwego magnesowania. Z uwagi na to, że oś symetrii rozpatrywanych elementów nie leży dokładnie na kierunku 0° ma miejsce charakterystyczne wyboczenie rozkładu pola.

Dla elementów na osi 90° (rys. 26) kształt pola obrotowego jest zbliżony do elipsy. W tym przypadku kierunek łatwego magnesowania jest kierunkiem składowej stycznej indukcji co powoduje wzrost jej wartości w porównaniu z wartością w elementach segmentów w osi 0°. Wzrost składowej stycznej indukcji w elementach segmentów w osi 90° i związane z tym wahania wartości indukcji stycznej w rozkładzie poobwodowym są duże. W analizowanym przypadku zawierają się w granicach 1,28 ÷ 1,70 T. Podobnie występują wahania składowej promieniowej indukcji magnetycznej.

6.2. PRZEMAGNESOWANIE OBROTOWE I ANIZOTROPIA BLACH W OBLICZENIACH STRAT PODSTAWOWYCH W RDZENIU

Straty podstawowe w rdzeniu silnika indukcyjnego stanowią część strat całkowitych w rdzeniu związaną z częstotliwością podstawową przemagnesowania wynikającą z częstotliwości napięcia zasilającego. Przemagnesowanie obrotowe i anizotropia magnetyczna rdzenia wymagają nowego podejścia do obliczeń tych strat. W zaproponowanej metodzie prowadzącej do użytecznej dla praktyki inżynierskiej zależności (12) wykorzystuje się odmienne stratności do obliczeń strat w jarzmie i w zębach rdzenia

$$\Delta P_{r50} = \Delta p_0 m_j + \Delta p_z m_z, \quad (12)$$

gdzie:

ΔP_{r50} — straty podstawowe w rdzeniu przy częstotliwości przemagnesowania 50 Hz,

Δp_0 — stratność przy przemagnesowaniu obrotowym dla maksymalnej wartości indukcji stycznej w jarzmie stojana,

Δp_z — stratność zastępcza dla maksymalnej wartości indukcji w zębach stojana,

m_j, m_z — masa jarzma i zębów rdzenia.

Podana zależność nie uwzględnia strat w pakiecie rdzenia silnika wskutek zwarć międzyblachowych oraz wskutek prasowania, a także wzrostu stratności materiału w procesie tłoczenia.

Stratność przy przemagnesowaniu obrotowym warunkowana jest rzeczywistym polem występującym w jarzmie silnika. Można ją obliczyć w uproszczony sposób korzystając ze stratności przy przemagnesowaniu osiowym dla amplitud składowych indukcji promieniowej i stycznej rozkładu pola obrotowego lub wyznaczyć metodą eksperymentalną dla próbki pierścieniowej w specjalnym urządzeniu pomiarowym [3].

Stratność zastępcza jest uśrednioną stratnością przy przemagnesowaniu osiowym uwzględniającą fakt jednoczesnego przemagnesowania osiowego materiału zębów w różnych kierunkach przy założeniu tej samej amplitudy indukcji przemagnesowującej (jak wynika z pomiarów dla rdzeni anizotropowych różnice w wartościach indukcji maksymalnej w zębach na podziałce biegunowej są kilkuprocentowe). Stratność zastępczą można wyznaczyć w wyniku scałkowania funkcji stratności kątowych $\Delta p = f(\alpha)$ przy indukcji $B_m = \text{const.}$ według zależności

$$\Delta p_z = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\alpha) d\alpha, \quad (13)$$

gdzie:

α — kąt określający kierunek przemagnesowania względem kierunku walcowania blachy.

Podane granice całkowania wynikają z okresu zmienności własności anizotropowych ferromagnetyków równego π radianów.

W pracy [4] podano charakterystyki i tablice współczynników pozwalających określić dla zadanej indukcji wartości stratności przy przemagnesowaniu obrotowym i stratności zastępczej. Bezpośrednia ekstrapolacja podanych wartości stratności przy przemagnesowaniu obrotowym na obwody magnetyczne innych silników, powinna uwzględniać zbliżoność

geometrii tych obwodów do geometrii obwodu badanego, gdyż jak wykazano, charakter przemagnesowania obrotowego wyraźnie zależy od wymiarów jarzma i jego wysokości.

Stratność zastępcza potrzebna do obliczania strat w zębach jest wyznaczana w sposób obliczeniowy na podstawie stratności kątowych z aparatu Epsteina przy przemagnesowaniu osiowym. Tak wyznaczona stratność może być stosowana do obliczeń strat w zębach niezależnie od ich wymiarów geometrycznych. Przy braku kątowych charakterystyk stratności potrzebnych do wyznaczenia stratności zastępczej można, dla blach elektrotechnicznych o niewielkiej anizotropii (Fe64.50, Ei60), przyjmować do obliczeń strat w zębach zbliżoną co do wartości, stratność wyznaczoną aparatem Epsteina dla próbek mieszanych.

7. WNIOSKI

1. Metoda zastępczego schematu reluktancyjnego pozwala na wyznaczenie rozkładu indukcji w poszczególnych elementach obwodu magnetycznego trójfazowych silników indukcyjnych wykonanych z blachy izotropowej i anizotropowej. Reluktancje zastępczego schematu muszą być wyznaczone z uwzględnieniem zjawiska nieliniowości i anizotropii magnesowalności blachy elektrotechnicznej.
2. Zastosowana siatka reluktancyjna pozwala na wyznaczenie rozkładu przestrzennego pola magnetycznego podczas biegu jałowego silnika przy różnym wzajemnym położeniu zębów stojana i wirnika, a także przy dowolnym usytuowaniu krzywej przepływu na obwodzie stojana. Prąd magnesujący, który jest wymuszeniem strumienia magnetycznego może mieć przebieg sinusoidalny lub odkształcony.
3. Zastosowanie w budowie rdzenia trójfazowego silnika indukcyjnego blachy o własnościach anizotropowych powoduje asymetrię rozkładu indukcji magnetycznej (amplitudy i kształtu) na poszczególnych podziałkach biegunowych. Asymetria ta jest tym większa im większy jest stopień anizotropii magnesowalności blachy oraz im większa jest liczba biegunów maszyny.
4. Anizotropia magnetyczna blachy elektrotechnicznej powoduje generowanie w silniku dodatkowych harmonicznich indukcji w szczelinie powietrznej (harmoniczne anizotropowe), co może być przyczyną dodatkowych zjawisk pasożytniczych.
5. Anizotropia magnesowalności blachy powoduje wzrost wartości prądu magnesującego w porównaniu z silnikami z rdzeniem wykonanym z blachy izotropowej o tej samej magnesowalności jak blacha anizotropowa dla kierunku zgodnego z kierunkiem walcowania.
6. Jeżeli anizotropia magnesowalności blachy $\Delta B_{25} \geq 0,1$ T to klasyczne metody obliczania obwodu magnetycznego nie pozwalają na dostatecznie dokładne obliczenie prądu magnesującego i rozkładu indukcji w szczelinie. Wtedy obliczenia należy wykonywać innymi metodami np. metodą elementów skończonych lub metodą siatki reluktancyjnej.
7. Pole obrotowe w izotropowym jarzmie silnika indukcyjnego ma kształt zbliżony do elipsy. Udział składowej promieniowej indukcji w obrazie pola jest zależny od wymiarów geometrycznych i wysokości jarzma.
8. Anizotropia blachy elektrotechnicznej zniekształca eliptyczny obraz pola obrotowego w jarzmie silnika powodując wzrost składowych indukcji w kierunku łatwego magne-

sowania. Odształcenie zwiększa się ze wzrostem anizotropowych własności blachy i jest już widoczne przy blachach niskokrzemowych (np. Ei60 i EP14) stosowanych w budowie rdzeni silników indukcyjnych. Anizotropia magnetyczna powoduje wahania składowej promieniowej i stycznej indukcji w rozkładzie wzdłuż podziałki biegunowej silnika.

9. W obliczeniach strat podstawowych w rdzeniu silnika indukcyjnego, przy anizotropii stratności blachy $A_{p1,5}$ większej od 10%, powinno się korzystać ze stratności przy przemagnesowaniu obrotowym do wyznaczania strat w jarzmie zarówno dla blach izotropowych jak i anizotropowych oraz ze stratności zastępczej do wyznaczania strat w zębach.

BIBLIOGRAFIA

1. J. Anuszczyk: *Analiza przemagnesowania obrotowego w jarzmie trójfazowego silnika indukcyjnego*. ZN PŁ Elektryka 1983 z. 74
2. J. Anuszczyk: *Wyznaczanie przemagnesowania obrotowego w jarzmie silnika indukcyjnego metodą schematu reluktancyjnego*. Rozprawy Elektrotechniczne 1985 z. 1
3. J. Anuszczyk: *Sposób i urządzenie do pomiaru strat mocy w ferromagnetykach przemagnesowywanych obrotowo*. Patent PRL nr 127489
4. J. Anuszczyk: *Obliczanie strat podstawowych w rdzeniu silnika indukcyjnego z uwzględnieniem przemagnesowania obrotowego i anizotropii magnetycznej*. Rozprawy Elektrotechniczne 1986 z. 1
5. J. Anuszczyk, Z. Rutkowski: *Zastępczy schemat reluktancyjny ferromagnetyka*. Archiwum Elektrotechniki, 1985, z. 3-4, ss. 849—854
6. J. Anuszczyk, Z. Rutkowski: *Wpływ anizotropii magnetycznej blachy elektrotechnicznej na parametry biegu jałowego trójfazowych silników indukcyjnych*. Materiały III Konferencji Naukowo-Technicznej, Bochnia — Bartkowa, 1984, ss. 143—168
7. J. Anuszczyk, Z. Rutkowski: *Wpływ magnitnoizotropii stali na parametry chłodzonego choda trójfazowych asynchronicznych dwigateli*. Materiały Konferencji Naukowej Radzieckich i Polskich Młodych Pracowników Nauki, Kijów, 1984, ss. 117—124
8. F. Braisford: *Materiały magnetyczne*. Warszawa: PWN, 1964
9. J. Anuszczyk: *Straty w rdzeniu silników indukcyjnych wykonanych z blach o różnej anizotropii magnetycznej*. Przegląd Elektrotechniczny 1980 z. 5
10. A. Iwanow-Smolenski: *Razwitiye metodow rascziota magnitnykh polei w elektricheskikh mashinakh s uchiotom dwuchstronnei pazowosti i nasyszczenia*. XXII Internationales Wiss. Kolloquium TH Ilmenau, 1977, ss. 91—96
11. T. Koter, P. Kowalewicz: *Anizotropia magnetyczna blachy elektrotechnicznej*. Przegląd Elektrotechniczny 1980 z. 5
12. T. Koter, Z. Rutkowski: *Zastosowanie metody schematu reluktancyjnego do wyznaczania indukcji w obwodzie magnetycznym trójfazowej maszyny indukcyjnej*. Zbiór prac AN USSR, Kijów (złożony do druku)
13. Z. Matheisel: *Blachy elektrotechniczne walcowane na zimno*. Warszawa: WNT, 1973
14. Z. Rutkowski: *Model reluktancyjny anizotropowego obwodu magnetycznego silnika indukcyjnego dla biegu jałowego*. Rozprawy Elektrotechniczne, 1987, z. 3, ss. 729—744
15. Z. Rutkowski: *Wyznaczanie rozkładu indukcji w obwodzie magnetycznym trójfazowej maszyny indukcyjnej metodą zastępczego schematu siatkowego*. ZN PŁ Elektryka 1983, z. 74, ss. 61—78
16. Z. Rutkowski: *Prąd magnesujący w silnikach indukcyjnych trójfazowych wykonanych z różnych rodzajów blach*. Przegląd Elektrotechniczny 1980 z. 5
17. J. Turowski: *Model reluktancyjny pola rozproszenia transformatorów*. Rozprawy Elektrotechniczne, 1984, z. 4, ss. 1121—1144

T. KOTER, J. ANUSZCZYK, Z. RUTKOWSKI

FIELD DISTRIBUTION ANALYSIS IN THE MAGNETIC CIRCUIT OF AN INDUCTION MOTOR INCLUDING THE MAGNETIC ANISOTROPY OF ELECTRICAL SHEETS

Summary

The paper presents selected results of an analysis of the magnetic field distribution in the magnetic circuit of an induction motor made of anisotropic electrical sheet. The tangent and radial components of the flux density in particular magnetic elements of a motor are obtained by means of the reluctance network model. It is found that a rotational magnetization appears in the motor armature core depending on geometrical and magnetic properties of the latter. The effects of the magnetic anisotropy of electrical sheet on the flux density distribution, the magnetizing current and power losses in the core of induction machines, are presented.

T. KOTER, J. ANUSZCZYK, Z. RUTKOWSKI

ANALYSE DE LA RÉPARTITION DU CHAMP MAGNÉTIQUE DANS LE NOYAU DU MOTEUR A INDUCTION EN CONSIDERATION DE L'ANISOTROPIE DE LA TÔLE

Résumé

Dans l'article on a présenté les résultats choisis des essais de la répartition du champ magnétique dans le noyau du moteur à induction fait en tôle magnétique anisotrope. Appliquant la méthode du réseau de réluctance équivalente au circuit magnétique du moteur, on a déterminé la répartition de la composante tangente et radiale de l'induction magnétique dans tous les éléments particuliers du circuit. On a démontré que dans la culasse de la carcasse du moteur existe la magnétisation rotatoire, dépendant des dimensions géométriques et des propriétés magnétiques du noyau. On a présenté l'influence de l'anisotropie magnétique de la tôle sur le caractère et la répartition de l'induction magnétique ainsi que sur le courant magnétisant et les pertes dans le fer de la machine à induction.

T. KOTER, J. ANUSZCZYK, Z. RUTKOWSKI

ANALYSE DER FELDVERTEILUNG IM MAGNETISCHEN KREIS EINES INDUKTIONSMOTORS UNTER BERÜCKSICHTIGUNG DER ANISOTROPIE DES ELEKTROBLECHES

Zusammenfassung

In der Abhandlung werden gewählte Untersuchungsergebnisse im Bereich der Verteilung des magnetischen Feldes eines aus anisotropem Elektroblech hergestellten Induktionsmotors dargestellt. Unter Anwendung der Reluktanznetzmethode hat man die Tangential- und Radialkomponenten des Feldes in den einzelnen Elementen des magnetischen Kreises des Motors bestimmt. Es wurde nachgewiesen, dass im Statorjoch eines Induktionsmotors eine Umdrehungsübermagnetisierung auftritt, die von den geometrischen Ausmassen und magnetischen Eigenschaften des Kerns abhängt. Es wurde auch der Einfluss der magnetischen Anisotropie des Elektrobleches auf den Charakter und die Verteilung der Induktion sowie auf den Magnetisierungsstrom und die Kernverluste einer Asynchronmaschine dargestellt.

Т. КОТЭР, Я. АНУЩИК, З. РУТКОВСКИ

АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ В МАГНИТНОМ КОНТУРЕ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ С УЧЕТОМ АНИЗОТРОПИИ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКОЙ СТАЛИ

Резюме

Представлены избранные результаты исследований в области распределения магнитного поля в контуре асинхронного двигателя изготовленного из анизотропной электротехнической

стали. Применяя метод эквивалентной схемы магнитных сопротивлений определены тангенциальные и радиальные составляющие индукции в отдельных элементах магнитного контура двигателя. Доказано, что в спинке статора двигателя существует вращательное переманчивание, характер которого зависит от геометрических и магнитных параметров сердечника. Кроме того представлено влияние магнитной анизотропии электротехнической стали на характер и распределение индукции в воздушном зазоре, на намагничивающий ток а также на потери в сердечнике асинхронного двигателя.

Narastanie temperatury w trapezowych prętach uzwojeń klatkowych wirników silników indukcyjnych przy zmieniającej się skuteczności przejmowania ciepła z prętów przez rdzeń wirnika

JADWIGA PŁOSZYŃSKA, RYSZARD RUT (Rzeszów)

Zakład Maszyn Elektrycznych, Politechnika Rzeszowska

Otrzymano 1986.09.26

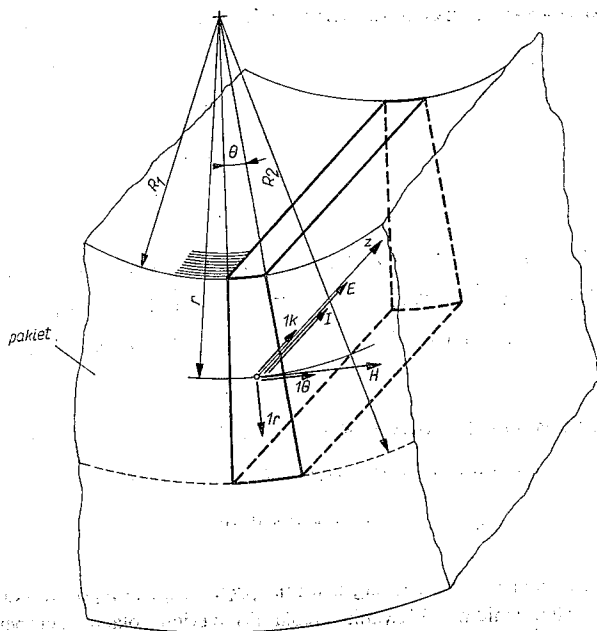
W pracy przedstawiono analizę nagrzewania pręta trapezowego silnika indukcyjnego klatkowego z uwzględnieniem oddawania ciepła do pakietu blach. Temperaturę pakietu przyjęto stałą i równą temperaturze początkowej. Przeanalizowano także wpływ szerokości szczeliny powietrznej między prętem a pakietem blach na skuteczność przejmowania ciepła przez zęby wirnika. Uzyskane wyniki obliczeń przedstawiono na rysunkach.

1. WSTĘP

W wyniku analizy adiabatycznego nagrzewania prętów trapezowych [7] w stanie zwarcia silników indukcyjnych stwierdzono, że w efekcie dużej szybkości narastania, temperatury w obszarze przekroju pręta uzyskują znaczne wartości już po kilku sekundach nagrzewania. Uzyskiwane wartości temperatur, których rozkład celem porównania zamieszczono na rys. 3, 4, w praktyce konstruktorskiej są mało przydatne ze względu na daleko upraszczające założenia jakim jest przyjęcie braku jakiegokolwiek wymiany ciepła między prętem a pakietem. Uzasadnione jest zatem przeprowadzenie analizy nagrzewania pręta trapezowego w warunkach bardziej zbliżonych do rzeczywistych. W pracy podjęto próbę wyznaczenia rozkładu temperatury w pręcie trapezowym wzdłuż jego wysokości z uwzględnieniem oddawania ciepła do pakietu. Ponadto przeanalizowano wpływ szerokości szczeliny powietrznej, wynikającej z luzu między prętem a pakietem, na skuteczność przejmowania ciepła przez pakiet blach wirnika przyjmując stałą wartość szczeliny na całym obwodzie pręta.

2. MODEL MATEMATYCZNY WYMIANY CIEPŁA POMIĘDZY PRĘTEM A PAKIETEM

Analizę nieustalonego stanu cieplnego w głębokożłobkowym pręcie trapezowym przeprowadzono w układzie współrzędnych biegunowych przy następujących założeniach:



Rys. 1. Wycinek pierścienia modelujący trapezowy pręt wraz z przyjętym układem współrzędnych

- pręt o przekroju trapezowym zastąpiono zbieżnym wycinkiem pierścienia (rys. 1);
- problem ograniczono do zagadnienia płaskiego w żłobkowej części pręta;
- pominięto istnienie klina blokującego pręt w żłobku;
- pominięto wpływ oddawania ciepła przez pręty poza pakietem oraz przez pierścienie zwierające;
- przyjęto stałą wartość temperatury pakietu zęba i równą temperaturze otoczenia — $T_z = \text{const} = T_0$;
- uwzględniono wpływ narastającej temperatury na rozkład źródeł wzdłuż wysokości pręta.

Równanie przewodnictwa w przyjętym układzie współrzędnych ma postać

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_m}{c_m \varrho_m} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{p_v(r, T)}{c_m \varrho_m}, \quad (1)$$

w którym:

- λ_m — przewodność cieplna właściwa materiału pręta,
- c_m — ciepło właściwe materiału pręta,
- ϱ_m — gęstość materiału pręta,
- $p_v(r, T)$ — straty w jednostce objętości pręta

$$p_v(r, T) = j^2(r, T) \varrho(T) \quad (2)$$

$\varrho(T)$ — rezystywność materiału pręta,

$$\varrho(T) = \varrho_0(1 + \alpha_\Delta T), \quad (3)$$

$j(r, T)$ — rozkład skutecznej gęstości prądu pręta,

$$j(r, T) = \frac{\sqrt{(C \cos \psi + D \cos \xi)^2 + (C \sin \psi + D \sin \xi)^2}}{\sqrt{2}}, \quad (4)$$

$$C = \frac{I_{mp}}{2r\Theta \sqrt{R_1 r}} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2k(r-R_2) - \cos 2k(r-R_2)}{\operatorname{ch} 2k(R_1-R_2) - \cos 2k(R_1-R_2)}}, \quad (4a)$$

$$D = \frac{\sqrt{2} I_{mp} k}{\Theta \sqrt{R_1 r}} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2k(r-R_2) + \cos 2k(r-R_2)}{\operatorname{ch} 2k(R_1-R_2) - \cos 2k(R_1-R_2)}}, \quad (4b)$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{\varrho(T)}}, \quad (4c)$$

$$\psi = \varphi_3 - \varphi_2, \quad (4d)$$

$$\xi = \varphi_4 + \varphi_3 - \frac{\pi}{4}, \quad (4e)$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{\cos k(r-R_2) \operatorname{sh} k(r-R_2)}{\sin k(r-R_2) \operatorname{ch} k(r-R_2)} \quad (4f)$$

$$\varphi_3 = \operatorname{arctg} \frac{\cos k(R_1-R_2) \operatorname{sh} k(R_1-R_2)}{\sin k(R_1-R_2) \operatorname{ch} k(R_1-R_2)}, \quad (4g)$$

$$\varphi_4 = \operatorname{arctg} \frac{\sin k(r-R_2) \operatorname{sh} k(r-R_2)}{\cos k(r-R_2) \operatorname{ch} k(r-R_2)}. \quad (4h)$$

Poczynione założenia narzucają warunki brzegowe (5a—d)

$$\lambda_m \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_1} = \alpha_m (T_m - T_0) \quad (5a)$$

$$-\lambda_m \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_2} = \frac{\lambda_{ef}}{\delta_p} (T_m - T_0) \quad (5b)$$

$$-\lambda_m \frac{\partial T}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = 0 \quad (5c)$$

$$-\lambda_m \frac{\partial T}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\frac{\Theta}{2}} = \frac{\lambda_{ef}}{\gamma} (T_m - T_0) \quad (5d)$$

oraz warunek początkowy (6)

$$T(r, 0) = T_0. \quad (6)$$

Biorąc pod uwagę, że grubość pręta jest niewielka i znacznie mniejsza od jego wysokości, można uśrednić rozkład temperatury na szerokości. Całkując zatem równanie (1) względem zmiennej kątowej otrzymuje się

$$\frac{2}{\Theta} \int_0^{\frac{\Theta}{2}} \frac{\partial T}{\partial t} d\varphi = \frac{2}{\Theta} \int_0^{\frac{\Theta}{2}} \left[\frac{\lambda_m}{c_m \varrho_m} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{p_v(r, T)}{c_m \varrho_m} \right] d\varphi \quad (7)$$

a po przekształceniach można je doprowadzić do postaci (8)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_m}{c_m \varrho_m} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\lambda_m}{c_m \varrho_m} \frac{2}{\Theta} \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=\frac{2}{\Theta}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} \bigg|_{\varphi=0} + \frac{p_v(r, T)}{c_m \varrho_m}. \quad (8)$$

Uwzględniając warunek brzegowy (5c, d) w równaniu (8) otrzymuje się wynikową postać równania przewodnictwa (9)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_m}{c_m \varrho_m} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{2\lambda_{ef}}{c_m \varrho_m r^2 \Theta \gamma} (T - T_0) + \frac{p_v(r, T)}{c_m \varrho_m} \quad (9)$$

gdzie:

λ_{ef} — efektywna przewodność cieplna szczeliny powietrznej,

γ — wartość kąta odpowiadająca szczelinie powietrznej dla danego promienia [6]

$$\gamma = \sqrt{\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \frac{\delta_p^2}{r^2}} - \frac{8}{3} \sqrt{1 - \frac{\delta_p^2}{r^2}} \quad (10)$$

δ_p — szczelina powietrzna.

Równanie (9) wraz z warunkami brzegowymi (5a, b) oraz warunkiem początkowym (6) opisuje przebieg narastania rozkładu temperatury wzdłuż wysokości trapezowego pręta w stanie zwarcia silnika.

3. ALGORYTM OBLICZEŃ NAGRZEWANIA PRĘTA TRAPEZOWEGO

Do wyznaczenia rozkładu temperatury wzdłuż wysokości pręta w czasie rozruchu wykorzystano EMC. Równanie różniczkowe (9) rozwiązano metodą przybliżoną, różnic skończonych, opartą o procedurę pośrednią ze wstecznym czasowym ilorazem różnicowym. Wyrażenia określające pochodną pierwszego i drugiego rzędu zastąpiono korzystając z centralnego ilorazu różnicowego.

Odpowiednie pochodne dają się zatem zapisać w postaci (11), (12a, b)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^n - T_i^{n-1}}{\Delta t} \quad (11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{\Delta r_1 + \Delta r_2} \quad (12a)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{2}{\Delta r_1 + \Delta r_2} \left(\frac{T_{i-1}^n - T_i^n}{\Delta r_1} + \frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{\Delta r_2} \right) \quad (12b)$$

gdzie:

Δt — długość kroku czasowego,

$\Delta r_1, \Delta r_2$ — przyrost promienia,

T_i^n — temperatura i -tego węzła ($i = 1, 2, \dots, M$) jednowymiarowego obszaru w n -tym kroku czasowym ($n = 1, 2, \dots, N$).

Podstawiając (11), (12a, b) do (9) otrzymano po przekształceniach równanie węzłowe (13)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a_m \Delta t}{(\Delta r_1 + \Delta r_2) r_2} - \frac{2a_m \Delta t}{\Delta r_1 + \Delta r_2} \frac{1}{\Delta r_1} \right) T_1^n + \left(1 + \frac{2a_m \Delta t}{\Delta r_1 \Delta r_2} + \frac{2\lambda_{ef} \Delta t}{c_m \varrho_m r_2^2 \Theta \gamma_2} \right) T_2^n - \\ & - \left(\frac{2a_m \Delta t}{(\Delta r_1 + \Delta r_2) \Delta r_2} + \frac{a_m \Delta t}{(\Delta r_1 + \Delta r_2) r_2} \right) T_3^n = \frac{\Delta t}{c_m \varrho_m} p_{v2} + T_2^{n-1} + \frac{2\lambda_{ef} \Delta t}{c_m \varrho_m r_2^2 \Theta \gamma_2} T_0; \quad (15) \end{aligned}$$

— dla $i = 3 - (M - 2)$

$$\Delta r_1 = \Delta r_2$$

$$\begin{aligned} r_i &= r_{i-1} - \Delta r_2 \\ \left(\frac{a_m \Delta t}{2 \Delta r_2 r_i} - \frac{a_m \Delta t}{\Delta r_2^2} \right) T_{i-1}^n &+ \left(1 + \frac{2 a_m \Delta t}{\Delta r_2^2} + \frac{2 \lambda_{ef} \Delta t}{c_m \varrho_m r_i^2 \Theta \gamma_i} \right) T_i^n + \\ - \left(\frac{a_m \Delta t}{\Delta r_2^2} + \frac{a_m \Delta t}{2 \Delta r_2 r_i} \right) T_{i+1}^n &= \frac{\Delta t}{c_m \varrho_m} p_{vi} + T_{i-1}^n + \frac{2 \lambda_{ef} \Delta t}{c_m \varrho_m r_i^2 \Theta \gamma_i} T_0; \end{aligned} \quad (16)$$

— dla $i = M - 1$

$$\begin{aligned} r_{M-1} &= r_{M-2} - \Delta r_2 \\ \left(\frac{a_m \Delta t}{(\Delta r_1 + \Delta r_2) r_{M-1}} - \frac{2 a_m \Delta t}{(\Delta r_1 + \Delta r_2) \Delta r_2} \right) T_{M-2}^n &+ \left(1 + \frac{2 a_m \Delta t}{\Delta r_1 \Delta r_2} + \right. \\ + \frac{2 \lambda_{ef} \Delta t}{c_m \varrho_m r_{M-1}^2 \Theta \gamma_{M-1}} \Big) T_{M-1}^n &- \left(\frac{2 a_m \Delta t}{(\Delta r_1 + \Delta r_2) \Delta r_1} + \frac{a_m \Delta t}{(\Delta r_1 + \Delta r_2) r_{M-1}} \right) T_M^n = \\ &= \frac{\Delta t}{c_m \varrho_m} p_{vM-1} + T_{M-1}^n + \frac{2 \lambda_{ef} \Delta t}{c_m \varrho_m r_{M-1}^2 \Theta \gamma_{M-1}} T_0; \end{aligned} \quad (17)$$

— dla $i = M$

$$\begin{aligned} r_M &= r_{M-1} - \Delta r_1 \\ - \frac{\lambda_m}{\lambda_m + \alpha_m \Delta r_1} T_{M-1}^n + T_M^n &= + \frac{\alpha_m \Delta r_1}{\lambda_m - \alpha_m \Delta r_1} T_0. \end{aligned} \quad (18)$$

Uzyskany układ równań węzłowych jest układem liniowym, który można zapisać w postaci równania macierzowego (19)

$$[A] \times [T] = [W]. \quad (19)$$

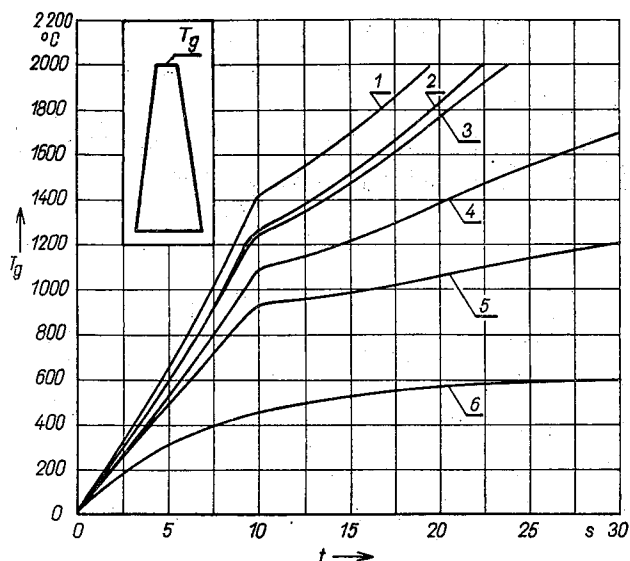
W równaniu (19) $[A]$ jest macierzą stałych współczynników o wymiarze $M \times M$ postaci (20)

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{il-1} & a_{il} & a_{il+1} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{M-2M-3} & a_{M-2M-2} & a_{M-2M-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{M-1M-2} & a_{M-1M-1} & a_{M-1M} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & a_{MM-1} & a_{MM} \end{bmatrix} \quad (20)$$

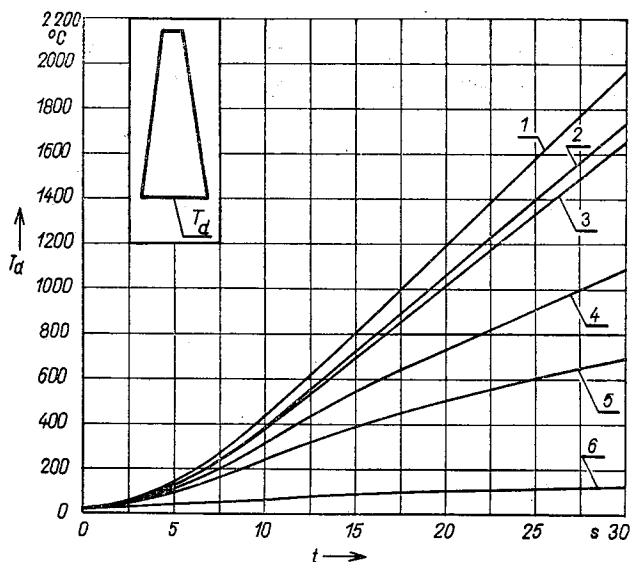
$[W] = \text{col}[w_i]$ stanowi macierz wymuszeń o elementach będących funkcją narastającej temperatury, $[T] = \text{col}[T]$ jest szukanym rozkładem temperatury pręta.

4. WYNIKI OBLICZEŃ

Obliczenia krzywych nagrzewania przeprowadzono dla pręta trapezowego wirnik silnika klatkowego typ SZJc 196 Ex 320 kW, 6000 V dla następujących danych:



Rys. 3. Krzywe nagrzewania górnej warstwy pręta trapezowego przy założeniu: 1 — nagrzewania adiabaticznego, 2 — $\delta_p = 1$ mm, 3 — $\delta_p = 0,5$ mm, 4 — $\delta_p = 0,1$ mm, 5 — $\delta_p = 0,05$ mm, 6 — $\delta_p = 0,01$ mm



Rys. 4. Krzywe nagrzewania dolnej warstwy pręta trapezowego przy założeniu: 1 — nagrzewania adiabaticznego, 2 — $\delta_p = 1$ mm, 3 — $\delta_p = 0,5$ mm, 4 — $\delta_p = 0,1$ mm, 5 — $\delta_p = 0,05$ mm, 6 — $\delta_p = 0,01$ mm

$$I_m = 5848 \text{ A}$$

$$\varrho_0 = 0,175 \cdot 10^{-7} \Omega \text{ m}$$

$$b_1 = 6,67 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\lambda_m = 372 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$b_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$c_m = 419 \text{ W s kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

$$h = 65 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

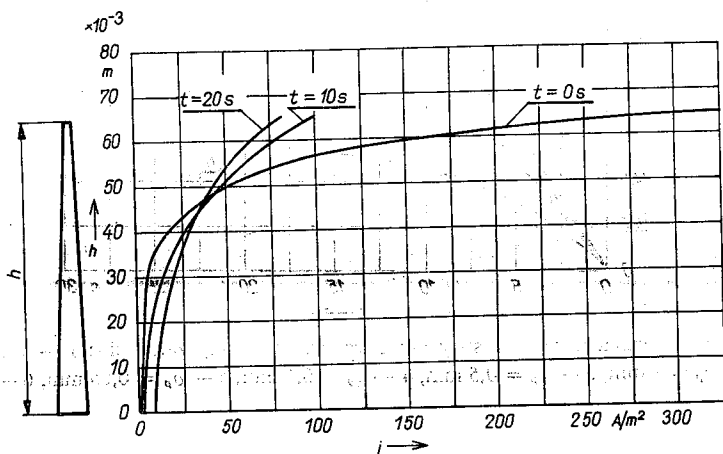
$$\varrho_m = 8900 \text{ kg m}^{-3}$$

$$\lambda_{ef} = 0,03 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

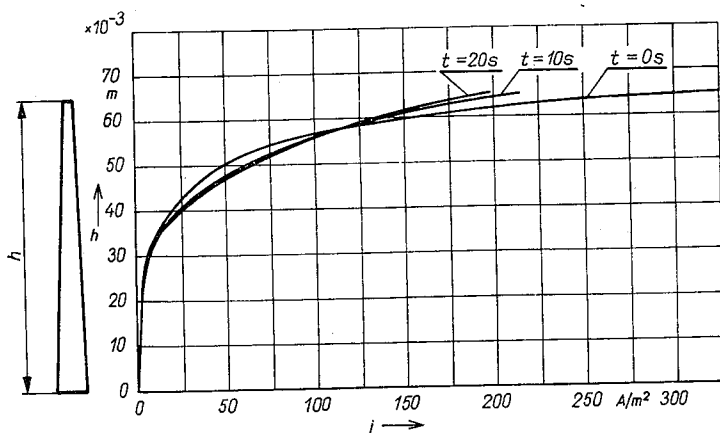
$$\alpha_m = 30 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$$

$$T_0 = 20 \text{ C}$$

Szerokość zastępczej szczeliny powietrznej wynikającej z luzu między prętem a pakietem zmieniano parametrycznie, przyjmując jej wielkość równą:



Rys. 5. Wpływ nagrzewania pręta na rozkład gęstości prądu wzdłuż jego wysokości bez uwzględnienia przejmowania ciepła przez pakiet zębów



Rys. 6. Wpływ nagrzewania pręta na rozkład gęstości prądu wzdłuż jego wysokości przy założeniu szerokości zastępczej szczeliny powietrznej $\delta_p = 0,01 \text{ mm}$

$$\delta_{p1} = 1 \text{ mm}$$

$$\delta_{p2} = 0,5 \text{ mm}$$

$$\delta_{p3} = 0,1 \text{ mm}$$

$$\delta_{p4} = 0,05 \text{ mm}$$

$$\delta_{p5} = 0,01 \text{ mm}$$

Wyniki obliczeń przedstawiono na wykresach (rys. 3, 4). Jednocześnie wykonano obliczenia rozkładu gęstości prądu wzdłuż wysokości pręta w chwili początkowej ($t = 0$ s) oraz po czasie nagrzewania $t = 10$ s i $t = 20$ s przy założeniu adiabatycznego przebiegu nagrzewania (rys. 5), a także z uwzględnieniem wymiany ciepła między prętem a pakietem przy szczelinie zastępczej $\delta_p = 0,01$ mm (rys. 6).

5. WNIOSKI

Przyjęty model termokinetyczny stwarza możliwości analizy wpływu skuteczności przejmowania ciepła przez pakiet zębów przy jednoczesnym uwzględnieniu wpływu narastającej temperatury na zmianę rozkładu źródeł ciepła wzdłuż wysokości pręta podczas nieustalonego procesu nagrzewania głębokożłobkowych trapezowych uzwojeń klatkowych. Rezultaty obliczeń (rys. 3, 4) dla danych jak w p. 4, przedstawiają przebiegi czasowe narastania temperatury dla górnej i dolnej warstwy pręta przy braku wymiany ciepła z pakietem zębów (krzywa 1) oraz przy uwzględnieniu przejmowania ciepła przez pakiet zębów o stałej temperaturze dla parametrycznie zmieniającej się szerokości zastępczej szczeliny powietrznej (luzu) między prętem a pakietem (krzywe 2—6). Przebieg nagrzewania pręta jest zależny od zmieniającego się pod wpływem temperatury rozkładu wzdłuż wysokości pręta, strat cieplnych wywołanych zmieniającym się w miarę nagrzewania rozkładem gęstości prądu (rys. 5, 6). Efekt ten jest widoczny w krzywych nagrzewania warstwy górnej pręta (rys. 3).

Z uzyskanych wariantów obliczeń przy takiej samej wartości przepływającego przez pręt skutecznego prądu, widać wpływ grubości szczeliny między prętem a pakietem zębów na osiągane temperatury w przecie. Wraz ze wzrostem dopasowania pręta i żłobka obniżają się temperatury pręta wskutek powiększającego się stopnia przejmowania ciepła przez pakiet zębów.

Praktyczne możliwości wykorzystania przedstawionej metody do obliczeń temperatury prętów trapezowych muszą być poprzedzone określeniem przedziału zastępczej szczeliny powietrznej między prętem a pakietem na drodze eksperymentalnych badań modeli cieplnych układu pręt-pakiet. Celowość tych badań uzasadniają znacznie różniące się wartości osiąganych temperatur dla dwu skrajnie przyjętych zastępczych szczelin powietrznych (rys. 3, 4; krzywe 2 i 6).

BIBLIOGRAFIA

1. A. Różycki: *Badania cieplnych stanów nieustalonych w maszynach elektrycznych z zastosowaniem cyfrowej i analogowej techniki obliczeniowej*. Praca doktorska. Politechnika Śląska, Gliwice 1977

2. S. Wiśniewski: *Wymiana ciepła*. Warszawa: PWN 1979
3. M. Hering: *Termokinetyka dla elektryków*. Warszawa: WNT 1980
4. L. Collatz: *Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych*. Warszawa: PWN, 1960
5. S.H. Crandall: *Engineering Analysis. A Survey of Numerical Procedures*. Mc Graw-Hill Book Company 1956
6. J. Królikiewicz, C. Steckiewicz: *Matematyka. Wzory, definicje, tablice*. Warszawa: WKŁ 1972
7. J. Płoszyńska, R. Rut: *Nagrzewanie trapezowych głębokożłobkowych prętów uzwojenia klatkowego silnika indukcyjnego w stanie zwarcia*. Rozprawy Elektrotechniczne, 1987 z. 1, (w druku)

J. PŁOSZYŃSKA, R. RUT

TEMPERATURE RISE IN TRAPEZOIDAL RODS OF SQUIRREL-CAGE WINDINGS OF INDUCTION-MOTOR ROTORS WITH VARIABLE EFFICIENCY OF THE HEAT DISSIPATION FROM ROD TO THE ROTOR CORE

Summary

The author makes an analysis of the temperature rise of a trapezoidal rod of an induction squirrel-cage motor, taking into account the heat dissipation in the sheet stack. It is assumed that the sheet stack temperature is constant and equalling the initial temperature. The influence of the dimension of the air gap between the rod and sheet stack on the efficiency of heat adsorption by the rotor teeth, is considered. The results obtained are shown in figures.

J. PŁOSZYŃSKA, R. RUT

ACCROISSEMENT DE LA TEMPERATURE DANS LES BARRES A SECTION TRAPEZOIDALE DES ENROULEMENTS A CAGE D'ECUREULL DES ROTORS DES MOTEURS A INDUCTION LORSQUE L'EFFICACITE D'INTERCEPTION DE LA CHALEUR DES BARRES PAR LE NOYAU DU ROTOR VARIE

Résumé

Dans la présente élaboration on a présenté l'analyse de l'échauffement d'une barre à section trapezoïdale d'un moteur à induction à cage d'écureuil prenant en considération la transmission de la chaleur au paquet de tôles. On a supposé la température du paquet constante et égale à la température initiale. On a aussi analysé l'influence de la largeur de l'entrefer entre la barre et le paquet de tôles sur l'efficacité d'interception de la chaleur par les dents du rotor. Les résultats des calculs sont présentés sur les dessins.

J. PŁOSZYŃSKA, R. RUT

TEMPERATURANWACHSEN IN TRAPEZSTÄBEN DER KÄFIGWICKLUNGEN VON INDUKTIONSMOTORLÄUFERN BEI WECHSELNDER WIRKSAMKEIT DES WÄRMEÜBERGANGES VON DEN STÄBEN IN DEN LÄUFERKERN

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurde die Erwärmungsanalyse eines Trapezstabes eines Induktionskäfigläufermotors dargestellt unter Berücksichtigung der Wärmeabgabe an das Blechpaket. Es wurde vorausgesetzt, dass die Pakettemperatur konstant ist und der Anfangstemperatur gleich. Auch der Einfluss der Luftspaltweite zwischen dem Stab und dem Blechpaket wurde hinsichtlich der Wirksamkeit des Wärmeüberganges an die Läuferzähne analysiert. Die gewonnenen Ergebnisse wurden auf Abbildungen dargestellt.

Я. ПЛОШИНСКА, Р. РУТ

НАРАСТАНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ТРАПЕЦЕИДАЛЬНЫХ СТЕРЖНЯХ БЕЛИЧЬИХ
КЛЕТОК ОБМОТОК РОТОРОВ АСИНХРОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ПРИ ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ
ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРОНИКНОВЕНИЯ ТЕПЛА ОТ СТЕРЖНЕЙ К СЕРДЕЧНИКУ
РОТОРА

Р е з ю м е

Представлен анализ нагревания трапецеидального стержня клетки ротора асинхронного двигателя с учётом передачи тепла пакету стали. Температуру пакета принято постоянной и равной начальной температуре. Проанализировано также влияние ширины воздушного зазора между стержнем и пакетом стали на эффективность проникновения тепла в сердечник ротора. Полученные результаты расчетов представлены на рисунках.

Wpływ przejmowania ciepła przez rdzeń wirnika na szybkość narastania temperatury w głębokożłobkowych prostokątnych prętach uzwojenia klatkowego silnika indukcyjnego

RYSZARD RUT (Rzeszów)

Zakład Maszyn Elektrycznych, Politechnika Rzeszowska

Otrzymano 1986.07.15

Uwzględniając w głębokożłobkowym prostokątnym przecie uzwojenia klatkowego wpływ temperatury na straty wywołane początkowym rozkładem składowej ustalonej prądu rozruchu, przeanalizowano w stanie zwarcia silnika czasowy przebieg narastania rozkładu temperatury wzdłuż wysokości pręta. Analizę tą prowadzono w układzie współrzędnych prostokątnych z uwzględnieniem przejmowania ciepła przez pakiet zębów dla parametrycznie zmiennej grubości zastępczej szczeliny powietrznej (luzu) między prętem a pakietem blach. Zamieszczono przykładowe obliczenia.

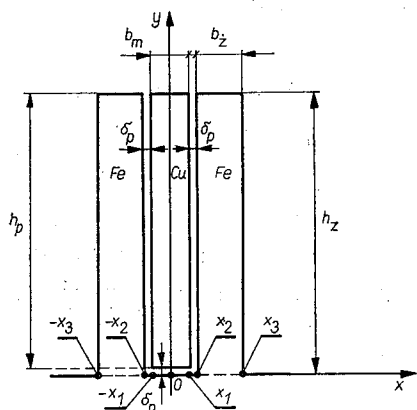
1. WSTĘP

Wystąpienie nierównomiernego rozkładu strat cieplnych w żłobkowej części głębokich prętów może być przyczyną niszczącego stanu naprężeń [1]. Wiąże się to z szybkością narastania nierównomiernego rozkładu temperatury wzdłuż wysokości żłobkowej pręta. Znaczący wpływ na szybkość narastania w czasie rozkładu temperatury w głębokich prętach uzwojeń klatkowych ma skuteczność przejmowania ciepła przez pakiet zębów wirnika, w czym istotny jest udział szczeliny powietrznej wynikającej z luzu między prętem a pakietem.

Dla stanu zwarcia silnika, analizę nieustalonego nagrzewania prętów prostokątnych z uwzględnieniem w przejmowaniu ciepła szczeliny powietrznej i pakietu zębów przedstawiono w pracy. Uwzględniono wpływ narastającej temperatury na rozkład strat cieplnych, ograniczając problem do zagadnienia płaskiego w żłobkowej części pręta.

2. MODEL WYMIANY I OPIS MATEMATYCZNY ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO

Model wymiany ciepła między prętem i pakietem zębów jest przedstawiony w układzie płaskim współrzędnych prostokątnych na rys. 1 i wynika z następujących założeń:



Rys. 1. Model głębokożłobkowego prostokątnego pręta w żłobku w układzie współrzędnych prostokątnych

1. Pomija się odprowadzenie ciepła przez części uzwojeń poza pakietem.
2. Głębokość żłobka jest równa wysokości pręta łącznie ze szczeliną na dnie żłobka.
3. Szczelina powietrzna między prętem a pakietem jest szczeliną zastępczą, równomierną wzdłuż całej długości pakietu.
4. Rdzeń nagrzewany jest stratami magnetycznymi o stałej wartości objętościowej.
5. Nagrzewanie pręta odbywa się jednakowo na całej długości pręta przy jednakowej głębokości w żłobku.
6. Odływ ciepła w górze pręta określa zastępczy współczynnik przejmowania.
7. Uwzględniono w analizie wpływ narastającej temperatury na rozkład źródeł ciepła wzdłuż wysokości pręta.

W analizie oznaczono:

$T_m(y, t)$ — temperatura w pręcie,

$T_z(y, t)$ — temperatura w pakiecie zęba,

a_m — współczynnik przewodzenia temperatury dla miedzi

$$a_m = \frac{\lambda_m}{c_m \varrho_m}$$

a_z — współczynnik przewodzenia temperatury dla pakietu blach

$$a_z = \frac{\lambda_z}{c_z \varrho_z}$$

λ_m — przewodność cieplna właściwa miedzi,

λ_z — przewodność cieplna właściwa pakietu blach,

λ_{ep} — efektywna przewodność cieplna szczeliny powietrznej [2], [3],

c_m — ciepło właściwe miedzi,

c_z — ciepło właściwe pakietu blach,

α_m — współczynnik przejmowania ciepła z miedzi,

α_z — współczynnik przejmowania ciepła z pakietu rdzenia,

b_m — szerokość pręta,

b_z — średnia szerokość zęba,

δ_p — grubość szczeliny między prętem a pakietem,

ϱ_m — gęstość miedzi,

ϱ_z — gęstość pakietu blach,

q_{vz} — objętościowe straty magnetyczne w zębie,

$q_{vm}(T)$ — straty mocy w jednostce objętości głębokożłobkowego prostokątnego pręta [3] gdzie:

$$q_{vm}(T) = \varrho(T) J^2(T, y)$$

$$\varrho(T) = \varrho_0(1 + \alpha \Delta T)$$

$$J(T, y) = \frac{I_{pm}}{b_m} k(T) \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2k(T)y + \cos 2k(T)y}{\operatorname{ch} 2k(T)h - \cos 2k(T)h}}$$

$$k(T) = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\varrho(T)}}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ [H m}^{-1}\text{]}$$

$$\omega = 2\pi f$$

f — częstotliwość prądu pręta,

$\varrho(T)$ — rezystywność miedzi,

I_{pm} — amplituda składowej ustalonej prądu zwarcia w przecię klatki.

Przy powyższych założeniach i oznaczeniach wymianę ciepła w układzie pręt-pakiet (rys. 1) opisują równania przewodnictwa (1a, b) z warunkami brzegowymi (2) i warunkiem początkowym (3)

$$\frac{\partial T_m(y, t)}{\partial t} = a_m \left[\frac{\partial^2 T_m(y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_m(y, t)}{\partial y^2} \right] + \frac{q_{vm}(T)}{c_m \varrho_m} \quad (1a)$$

$$\frac{\partial T_z(y, t)}{\partial t} = a_z \left[\frac{\partial^2 T_z(y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_z(y, t)}{\partial y^2} \right] + \frac{q_{vz}}{c_z \varrho_z} \quad (1b)$$

$$\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2a)$$

$$-\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial x} \Big|_{x=x_1} = \frac{\lambda_{ep}}{\delta_p} [T_m(x_1) - T_z(x_2)] \quad (2b)$$

$$-\lambda_z \frac{\partial T_z}{\partial x} \Big|_{x=x_2} = \frac{\lambda_{ep}}{\delta_p} [T_m(x_1) - T_z(x_2)] \quad (2c)$$

$$\lambda_z \frac{\partial T_z}{\partial x} \Big|_{x=x_3} = 0 \quad (2d)$$

$$\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial y} \Big|_{y=\delta_p} = \frac{\lambda_{ep}}{\delta_p} [T_m(y=0) - T_z(y=0)] \quad (2e)$$

$$\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial y} \Big|_{y=h_p} = \alpha_m [T_m(y=h_p) - T_0] \quad (2f)$$

$$\lambda_z \frac{\partial T_z}{\partial y} \Big|_{y=h_z} = \alpha_z [T_z(y=h_z) - T_0] \quad (2g)$$

$$T_{z,y=0} = T_0 \quad (2h)$$

$$T(x, y, 0) = T_0 \quad (3)$$

Uwzględniając jednowymiarowe wypieranie prądu oraz realne wymiary grubości pręta i blach zęba, możemy uśrednić temperatury na szerokości pręta i zęba, co nie wprowadzi uszczerbku w prowadzonej dalej analizie. Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami jak na rys. 1, całkując równanie (1a) w granicach od 0 do x_1 i uwzględniając (2a—d) oraz że $2x_1 = b_m$, oraz całkując równanie (1b) w granicach x_2 do x_3 i uwzględniając, że $2(x_3 - x_2) = b_z$, równania (1a, b) upraszczają się do postaci (4a) i (4b), które łącznie z warunkami brzegowymi (2e—h) oraz z warunkiem początkowym (3) opisują nieustalony stan cieplny w układzie głębokożłobkowy pręt-szczelina powietrzna-pakiet zęba wirnika. Występujące w równaniach (4a) i (4b) temperatury są temperaturami średnimi wzdłuż szerokości pręta i pakietu blach zęba wirnika. Otrzymano w ten sposób układ dwu równań opisujący wzdłuż wysokości rozkład średnich temperatur w pręcie i pakiecie:

$$\frac{\partial T_m(y, t)}{\partial t} = a_m \frac{\partial^2 T_m(y, t)}{\partial y^2} + \frac{q_{vm}(T)}{c_m \varrho_m} - 2 \frac{\lambda_{ep}}{c_m \varrho_m b_m \delta_p} [T_m(y, t) - T_z(y, t)] \quad (4a)$$

$$\frac{\partial T_m(y, t)}{\partial t} = a_z \frac{\partial^2 T_z(y, t)}{\partial y^2} + \frac{q_{vz}}{c_z \varrho_z} + 2 \frac{\lambda_{ep}}{c_z \varrho_z b_z \delta_p} [T_m(y, t) - T_z(y, t)]. \quad (4b)$$

3. NAGRZEWANIE GŁĘBOKOŻŁOBKOWEGO PROSTOKĄTNEGO PRĘTA W STANIE ZWARCIA SILNIKA PRZY UWZGLĘDNIENIU WPLYWU TEMPERATURY NA ROZKŁAD STRAT CIEPLNYCH

Rozwiązanie postawionego zagadnienia sprowadza się do rozwiązania równań (4a) i (4b) z warunkami brzegowymi (2e—h) i warunkiem początkowym (3). Dla rozpatrywanego przypadku równania (4a) i (4b) są równaniami o stałych współczynnikach przewodzenia temperatury z objętościowymi wewnętrznymi źródłami ciepła, których wartość dla równania (4a) w dowolnym punkcie wysokości jest uzależniona od temperatury w tym punkcie. Równania (4a) i (4b) rozwiązano metodą przybliżoną, metodą różnic skończonych, opartą o procedurę pośrednią (implicite) z wstecznym czasowym ilorazem różnicowym [4]. Równania różniczkowe (4a) i (4b) zastąpiono układem równań węzłowych, w którym pochodną drugiego rzędu przedstawiono korzystając z centralnego ilorazu różnicowego. Rozwiązania układu równań poszukiwano w paśmie $0 < y \leq h_p$ dla przedziału czasowego $0 < t \leq \tau_k$.

Zakładając wartość kroku różnicowego Δh oraz kroku czasowego l , odpowiednie pochodne temperatury dają się zapisać w postaci różnicowej (5), (6), (6a)

$$\frac{\partial T}{\partial t} \cong \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T_i^k - T_{i-1}^{k-1}}{l} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \cong \frac{\Delta^2 T}{\Delta y^2} = \frac{2}{\Delta h_1 + \Delta h_2} \left(\frac{T_{i+1}^k - T_i^k}{\Delta h_1} + \frac{T_{i-1}^k - T_i^k}{\Delta h_2} \right) \quad (6)$$

gdzie $\Delta h_1 = \Delta h_2 = \Delta h$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \cong \frac{\Delta^2 T}{\Delta y^2} = \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{\Delta h^2}, \quad (6a)$$

$$i = 4 - (n - 2) \quad (7)$$

$$-\frac{a_m l}{\Delta h_2^2} T_{mi-1}^k + \left(1 + \frac{2a_m l}{\Delta h_2^2} + \frac{2\lambda_{ep} l}{c_m Q_m b_m \delta_p} \right) T_{mi}^k - \frac{a_m l}{\Delta h_2^2} T_{mi+1}^k +$$

$$-\frac{2\lambda_{ep} l}{c_m Q_m b_m \delta_p} T_{\dot{z}n+i}^k = \frac{q_m l}{c_m Q_m} + T_{mi}^{k-1};$$

$$i = (n - 1)$$

$$-\frac{2a_m l}{(\Delta h_2 + \Delta h_1) \Delta h_2} T_{mn-2}^k + \left(1 + \frac{2a_m l}{\Delta h_1 \Delta h_2} + \frac{2\lambda_{ep} l}{c_m Q_m b_m \delta_p} \right) T_{mn-1}^k +$$

$$-\frac{2a_m l}{(\Delta h_2 + \Delta h_1) \Delta h_1} T_{mn}^k - \frac{2\lambda_{ep} l}{c_m Q_m b_m \delta_p} T_{\dot{z}2n-1}^k = \frac{q_m l}{c_m Q_m} + T_{mn-1}^{k-1};$$

$$i = n$$

$$-\frac{\lambda_m}{\lambda_m - \alpha_m \Delta h_1} T_{mn-1}^k + T_{mn}^k = -\frac{\alpha_m \Delta h_1}{\lambda_m - \alpha_m \Delta h_1} T_0;$$

— dla pakietu zęba w postaci (8)

$$i = n + 1$$

$$T_{\dot{z}n+1}^k = T_0;$$

$$i = n + 2$$

$$-\frac{2\lambda_{ep} l}{c_z Q_z b_z \delta_p} T_{m2}^k - \frac{2a_z l}{(\delta_p + \Delta h_1) \delta_p} T_{\dot{z}n+1}^k + \left(1 + \frac{2a_z l}{\delta_p \Delta h_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\lambda_{ep} l}{c_z Q_z b_z \delta_p} \right) T_{\dot{z}n+2}^k - \frac{2a_z l}{(\delta_p + \Delta h_1) \Delta h_1} T_{\dot{z}n+3}^k = \frac{q_z l}{c_z Q_z} + T_{\dot{z}n+2}^{k-1};$$

$$i = n + 3$$

$$-\frac{2\lambda_{ep} l}{c_z Q_z b_z \delta_p} T_{m3}^k - \frac{2a_z l}{(\Delta h_1 + \Delta h_2) \Delta h_1} T_{\dot{z}n+2}^k + \left(1 + \frac{2a_z l}{\Delta h_1 \Delta h_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\lambda_{ep} l}{c_z Q_z b_z \delta_p} \right) T_{\dot{z}n+3}^k - \frac{2a_z l}{(\Delta h_1 + \Delta h_2) \Delta h_2} T_{\dot{z}n+4}^k = \frac{q_z l}{c_z Q_z} + T_{\dot{z}n+3}^{k-1};$$

$$i = n + 4 \div (2n - 2)$$

$$-\frac{2\lambda_{ep} l}{c_z Q_z b_z \delta_p} T_{mi-n}^k - \frac{a_z l}{\Delta h_2^2} T_{\dot{z}i-1}^k + \left(1 + \frac{2a_z l}{\Delta h_2^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\lambda_{ep} l}{c_z Q_z b_z \delta_p} \right) T_{\dot{z}i}^k - \frac{a_z l}{\Delta h_2^2} T_{\dot{z}i+1}^k = \frac{q_z l}{c_z Q_z} + T_{\dot{z}i}^{k-1};$$

$$i = (2n - 1)$$

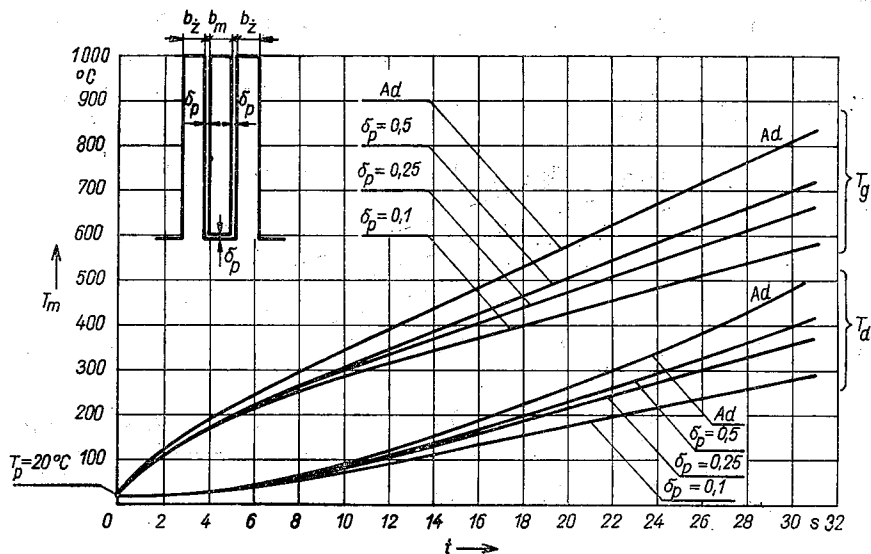
$$-\frac{2\lambda_{ep} l}{c_z Q_z b_z \delta_p} T_{mn-1}^k - \frac{2a_z l}{(\Delta h_2 + \Delta h_1) \Delta h_2} T_{\dot{z}2n-2}^k + \left(1 + \frac{2a_z l}{\Delta h_1 \Delta h_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\lambda_{ep} l}{c_z Q_z b_z \delta_p} \right) T_{\dot{z}2n-1}^k - \frac{2a_z l}{(\Delta h_2 + \Delta h_1) \Delta h_1} T_{\dot{z}2n}^k = \frac{q_z l}{c_z Q_z} + T_{\dot{z}2n-1}^{k-1};$$

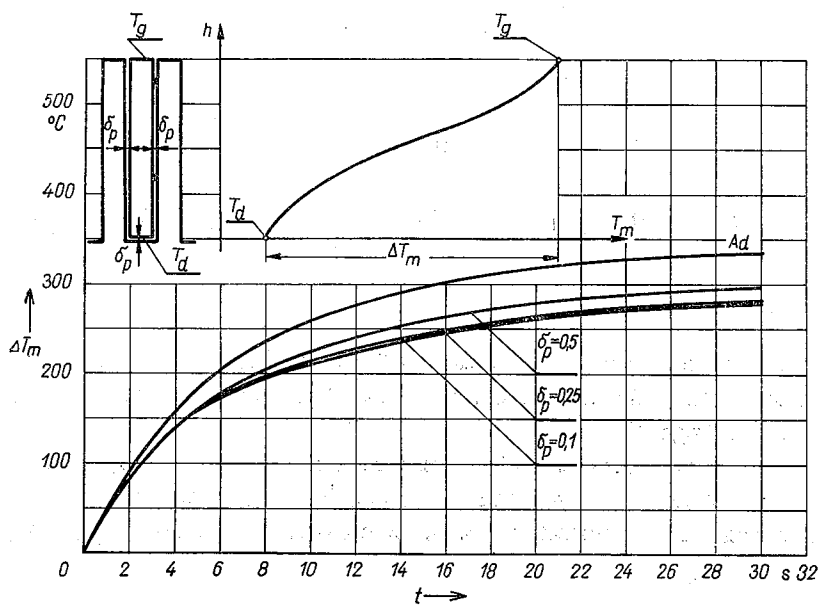
$$i = 2$$

$$-\frac{\lambda_z}{\lambda_z - \alpha_z \Delta h_1} T_{\dot{z}2n-1}^k + T_{\dot{z}2n}^k = -\frac{\alpha_z \Delta h_1}{\lambda_z - \alpha_z \Delta h_1} T_0.$$

(8)



Rys. 3. Krzywe nagrzewania górnej i dolnej warstwy prostokątnego pręta



Rys. 4. Narastanie w czasie nagrzewania przyrostu temperatury między górną i dolną warstwą prostokątnego pręta

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots & \dots 0 & 0 & 0 \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \dots & \dots 0 & 0 & 0 \\
 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \dots & \dots 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & & & & & & & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots & \dots a_{n-1n-2} & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots & \dots 0 & a_{nn-1} & a_{nn} \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots & \dots 0 & 0 & 0 \\
 0 & a_{n+22} & 0 & 0 & 0 \dots & \dots 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_{n-33} & 0 & 0 \dots & \dots 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & & & & & & & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots & \dots 0 & a_{2n-1n-1} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots & \dots 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

Dla dalszej analizy ułożono równania węzłowe (7), (8) dla danej chwili czasowej w poszczególnych węzłach pręta i pakietu zęba. Uzyskano układ równań, który zapisujemy w postaci równania macierzowego (9)

W równaniu (9) $[A]$ jest macierzą stałych współczynników, $[B] = \text{col}[b_i]$ stanowi macierz wymuszeń o elementach będących funkcją narastającej temperatury, zaś $[T] = \text{col}[T_i]$ jest szukanym rozkładem temperatury wzdłuż wysokości głębokościłobkowego pręta i zęba wirnika.

4. OBLICZENIA

Obliczenia przeprowadzono dla klatki silnika typu SZJc 196T Ex 6000 V, 320 kW. Głębokościłobkowy prostokątny pręt klatki w/w silnika w uproszczonym modelu żłobka przedstawia rys. 1.

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 \dots & \dots 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \dots & \dots 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_{3n+3} & 0 \dots & \dots 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & & & & & & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 \dots & \dots 0 & a_{n-12n-1} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \dots & \dots 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 \dots & \dots 0 & 0 & 0 \\
 a_{n+2n+1} & a_{n+2n+2} & a_{n+2n+3} & 0 \dots & \dots 0 & 0 & 0 \\
 0 & a_{n+3n+2} & a_{n+3n+3} & a_{n+3n+4} & \dots 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & & & & & & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 \dots & \dots a_{2n-12n-2} & a_{2n-12n-1} & a_{2n-12n} \\
 0 & 0 & 0 & 0 \dots & \dots 0 & 0 & a_{2n2n}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 T_{m1} \\
 T_{m2} \\
 T_{m3} \\
 \vdots \\
 T_{mn-1} \\
 T_{mn} \\
 T_{2n+1} \\
 T_{2n+2} \\
 T_{2n+3} \\
 \vdots \\
 T_{22n-1} \\
 T_{22n}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 b_1 \\
 b_2 \\
 b_3 \\
 \vdots \\
 b_{n-1} \\
 b_n \\
 b_{n+1} \\
 b_{n+2} \\
 b_{n+3} \\
 \vdots \\
 b_{2n-1} \\
 b_{2n}
 \end{bmatrix}$$

Dane do obliczeń:

$$I_{mp} = 7955 \text{ A}$$

$$\varrho = 0,175 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

$$h_p = 62 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$q_z = 0,17 \cdot 10^6 \text{ W m}^{-3}$$

$$\lambda_m = 372 \text{ W m}^{-1} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$$

$$c_m = 419 \text{ W s kg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$$

$$\varrho_m = 8900 \text{ kg m}^{-3}$$

$$\alpha_m = 30 \text{ W m}^{-2} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$$

$$\Delta h_1 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\lambda_{ep} = 0,03 \text{ W m}^{-1} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$$

$$\alpha = 0,004^\circ\text{C}^{-1}$$

$$b_m = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$b_z = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\lambda_z = 56 \text{ W m}^{-1} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$$

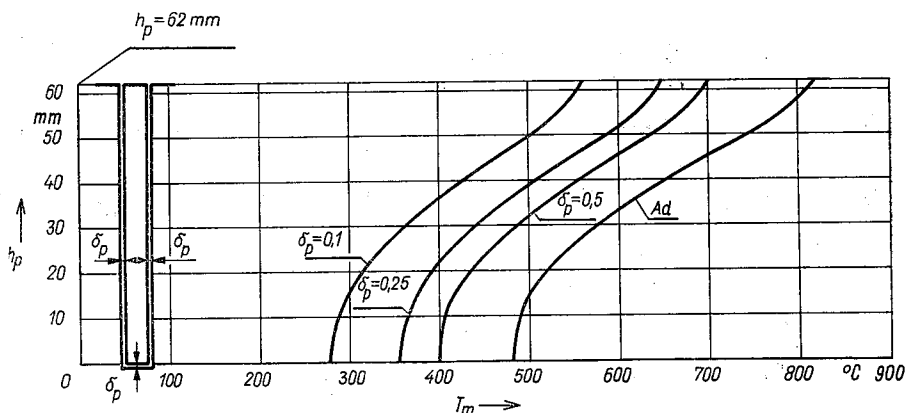
$$c_z = 461 \text{ W s kg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$$

$$\varrho_z = 7900 \text{ kg m}^{-3}$$

$$\alpha_z = 20 \text{ W m}^{-2} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$$

$$\Delta h_2 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$T_0 = 20^\circ\text{C}$$



Rys. 5. Rozkład temperatury wzdłuż wysokości pręta przy parametrycznie zmiennej zastępczej grubości szczeliny między prętem i pakietem po czasie nagrzewania $t = 30$ s

Obliczenia wykonano przy przepływie przez pręt składowej ustalonej prądu zwarcia dla trzech różnych szerokości szczeliny między prętem i pakietem zębów:

$$\delta_{p1} = 0,5 \text{ mm} \quad \delta_{p2} = 0,25 \text{ mm} \quad \delta_{p3} = 0,1 \text{ mm}$$

Wyniki zestawiono na rys. 3—5.

5. WNIOSKI

Przyjęcie do analizy uproszczenia w postaci zastępczej równomiernej szczeliny między prętem a pakietem blach, umożliwiło uzyskanie wyników (rys. 3—5), które mogą być przydatne w etapie projektowania i wykonawstwa głębokożłobkowych prostokątnych uzwojeń klatkowych. Spodziewany efekt wzrostu przejmowania ciepła do pakietu zębów w miarę zmniejszania zastępczej szczeliny (tzw. luzu), dla rozpatrywanego w stanie zwarcia nagrzewania uzwojenia wirnika silnika typu SZJc 196t Ex 320 kW, 6000 V, zaznacza się po 10 s. Po upływie tego czasu grubość szczeliny między prętem a pakietem ma znaczący wpływ na szybkość narastania rozkładów temperatur wzdłuż wysokości pręta. Natomiast zmiany grubości szczeliny nie wpływają w sposób zasadniczy na różnice w narastaniu temperatury między górną a dolną warstwą pręta. Uzyskane ilościowe rezultaty pozwalają na istotne z punktu trwałości uzwojenia klatkowego uogólnienia. Można stwierdzić konieczność dokładnego dopasowania wszystkich prętów i żłobków (minimalny luz). W miarę jak najdokładniejszego dopasowania prętów i żłobków należy w prętach uzwojenia klatkowego oczekiwać minimalnej wartości temperatury przy minimalnej niesymetrii narastania w czasie temperatury poszczególnych prętów. Efekt ten pociąga za sobą zminimalizowanie składowych naprężeń w uzwojeniach klatkowych wynikających z niesymetrii nagrzewania.

BIBLIOGRAFIA

1. R. Rut: *Działanie elektrodynamiczne i termiczne prądu w przecie klatki silnika asynchronicznego głęboko-żłobkowego w stanie zwarcia*. Praca doktorska. Politechnika Śląska, Gliwice 1974
2. A. Różycki: *Badania cieplne stanów nieustalonych w maszynach elektrycznych z zastosowaniem cyfrowej i analogowej techniki obliczeniowej*. Praca doktorska. Politechnika Śląska, Gliwice 1977
3. M. Hering: *Termokinetika dla elektryków*. Warszawa: WNT, 1980
4. L. Collatz: *Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych*. Warszawa: PWN, 1960
5. S. Wiśniewski: *Wymiana ciepła*. Warszawa: PWN, 1979
6. R. Kurdziel: *Działania cieplne i dynamiczne prądów zwarciovych*. Warszawa: PWT, 1957
7. A. Młotkowski, T. Niezgodziński: *Obliczanie naprężeń w klatce wirnika silnika indukcyjnego*. Przegląd Elektrotechniczny 1984 z. 4

R. RUT

EFFECT OF THE HEAT ADSORPTION BY THE ROTOR CORE ON THE TEMPERATURE RISE RATE IN DEEP-GROOVE SQUARE BARS OF AN INDUCTION-MOTOR SQUIRREL-CAGE WINDING

Summary

Taking into account temperature effect in a deep-groove square-bar of a squirrel-cage winding on the losses evolved by the initial distribution of the steady A.C. component, the temperature-rise/time curve along the bar height of the motor in short-circuit state, is analysed. The analysis is made in the Cartesian coordinate system with regard to the heat adsorption by the tooth stack for a parametrically variable equivalent air gap between the bar and the sheet stack. Typical calculations are quoted.

R. RUT

INFLUENCE DE L'INTERCEPTION DE LA CHALEUR PAR LE NOYAU DU ROTOR SUR LA VITESSE D'ACCROISSEMENT DE LA TEMPÉRATURE DANS LES BARRES RECTANGULAIRES À ENCOCHES PROFONDES DE L'ENROULEMENT À CAGE D'ECUREUIL DES MOTEURS À INDUCTION

Résumé

Tenant compte de l'influence de la température sur les pertes causées par la répartition initiale de la composante déterminée du courant de démarrage dans une barre à encoches profondes, on a analysé, en régime en court-circuit du moteur, le déroulement temporaire de l'accroissement de la répartition de la température le long de la barre. Cette analyse a été effectuée dans un système de coordonnées rectangulaires, tenant compte de l'interception de la chaleur par le paquet de dents, pour une grandeur suppléante paramétriquement variable de l'entrefer (jeu) entre la barre et le paquet de tôles. Un exemple de calculs a été présenté.

R. RUT

EINFLUSS DER WÄRMEÜBERNAHME DURCH DEN LÄUFERKERN AUF DIE GESCHWINDIGKEIT DES TEMPERATURANWACHSENS IN RECHTECKIGEN TIEFNUTSTÄBEN DER KÄFIGWICKLUNG EINES INDUKTIONSMOTORS

Zusammenfassung

Indem man den Einfluss der Temperatur im rechteckigen Tiefnutstab der Käfigwicklung auf die durch die Anfangsverteilung der stationären Komponente des Anlaufstroms hervorgerufenen Verluste berücksichtigte, analysierte man das Zeitverhalten des Anwachsens der Temperaturverteilung der Stabhöhe entlang im kurzgeschlossenen Zustand eines Motors. Die Analyse wurde im rechtwinkligen Koordinatensystem durchgeführt unter Berücksichtigung des Wärmeüberganges durch das Zähnpaket für die veränderliche Stärke des Ersatzluftspaltes zwischen Stab und Blechpaket. Es werden Berechnungsbeispiele angeführt.

Р. РУТ

ВЛИЯНИЕ ПРОНИКНОВЕНИЯ ТЕПЛА В СЕРДЕЧНИК РОТОРА НА СКОРОСТЬ УВЕЛИЧЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ГЛУБОКОПАЗНОМ ПРЯМОУГОЛЬНОМ СТЕРЖНЕ ОБМОТКИ КЛЕТОЧНОГО АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

Резюме

Учитывая влияние температуры на потери, вызванные начальным распределением составляющей тока пуска в глубокопазном прямоугольном стержне клеточной обмотки, проанализирована в режиме короткого замыкания двигателя временная схема увеличения распределения температуры по высоте стержня. Этот анализ проведен в прямоугольной системе координат с учетом проникновения тепла в сердечник для параметрически переменной толщины эквивалентного воздушного зазора между стержнем и пакетом стали. Представлены примеры расчетов.

Modelowanie rozkładu pola elektromagnetycznego w magnetowodach maszyn elektrycznych z uzwojeniem klatkowym

ANDRZEJ DEMENKO (Poznań)

Instytut Elektrotechniki Przemysłowej, Politechnika Poznańska

Otrzymano 1986.03.25

W pracy przedstawiono hybrydową metodę modelowania pola elektromagnetycznego w maszynie asynchronicznej klatkowej z zahamowanym wirnikiem. Analizowano zjawiska zachodzące przy wymuszonym przebiegu napięć zasilających uzwojenia stojana. Do opisu rozpatrywanych zjawisk zastosowano model matematyczny polowo-obwodowy. Model ten zawiera równanie opisujące rozkład wektorowego potencjału magnetycznego oraz równania, które językiem teorii obwodów opisują strukturę połączeń uzwojeń. Po zdyskretyzowaniu przestrzeni i czasu równania te zastąpiono układem równań różnicowych. Omówiono strukturę modelu siatkowego do symulacji magnetowodu z uzwojeniem klatkowym i przedstawiono procedurę rozwiązywania równań różnicowych przy użyciu tego modelu. Podano przykład zastosowania opracowanej metody.

Wykaz ważniejszych oznaczeń

- l — długość magnetowodu,
- S_{pq} — pole powierzchni przekroju q -tego przewodu,
- γ — konduktywność,
- Δt — długość kroku czasowego,
- ϑ — parametr wagowy,
- μ — przenikalność magnetyczna,
- Φ — iloczyn długości i wektorowego potencjału magnetycznego,
- $[i]$ — wektor prądów oczkowych,
- $[i_e]$ — wektor prądów w gałęziach,
- $[i_p]$ — wektor prądów w bokach zwojów i prętach klatki,
- $[k]$ — macierz opisująca połączenie gałęzi,
- $[R_p]$ — diagonalna macierz rezystancji boków zwojów i prętów klatki,
- $[R_s]$ — wypadkowa macierz rezystancji uzwojenia i elementów zewnętrznych,
- $[R_\mu]$ — macierz reluktancji statycznych,
- $[U_e]$ — wektor napięć zewnętrznych źródeł zasilających,
- $[U_e]$ — wektor napięć gałęziowych.

$[U_p]$ — wektor napięć na bokach zwojów,

$[\Phi_n]$ — wektor wartości funkcji Φ w węzłach siatki dyskretyzującej dla n -tej chwili czasowej,

$$[\tilde{x}_n] = \vartheta[x(t_n)] + (1 - \vartheta)[x(t_{n-1})]$$

(k) — numer kroku iteracyjnego.

1. WPROWADZENIE

Analizując zjawiska zachodzące w magnetowodach maszyn elektrycznych o strukturze walcowej można przyjąć, że wzniecane w nich pole magnetyczne jest płaskie. Wolno-zmienne, płaskie pole elektromagnetyczne w izotropowym, niejednorodnym i nieruchomym środowisku nieliniowym opisane jest równaniem różniczkowym cząstkowym typu parabolicznego:

$$\frac{1}{l} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right\} = \frac{\gamma}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - j_u \quad (1)$$

i jednoznacznie określone przez warunki brzegowe i początkowe. Dostateczną dokładność rozwiązania uzyskuje się przyjmując, że powierzchnia brzegowa L_β jest zewnętrzną powierzchnią jarzma stojana i że na powierzchni tej wektor indukcji magnetycznej jest równy zeru. Odpowiada temu zerowy warunek brzegowy Dirichleta: $\Phi(L_\beta) = 0$.

Występująca po prawej stronie równania (1) gęstość j_u prądów zewnętrznych zależy od napięć U_p na bokach zwojów (prętach klatki);

$$j_u = \gamma \frac{U_p}{l}$$

Napięcie to zwykle nie jest znane. Boki zwojów stanowią część obwodów elektrycznych o strukturze zależnej od połączeń uzwojeń i rozmieszczenia źródeł zasilających oraz dodatkowych rezystancji i indukcyjności zewnętrznych, np. rezystancji i indukcyjności połączeń czołowych. Przyjęto, że obwody te składają się z gałęzi, w których z każdym bokiem zwoju o długości l połączona jest szeregowo, dodatkowa rezystancja R_z i indukcyjność L_z oraz z gałęzi zawierających tylko elementy o stałych skupionych. Równania Kirchhoffa dla tych obwodów można w formie macierzowej zapisać następująco:

$$[U_e] = \left\{ [R_z] + \frac{d}{dt} [L_z] \right\} [i_e] + [k_1][U_p]; \quad (2.a)$$

$$[i_e] = [k][i]; \quad [i_p] = [k_1]^T [i_e]; \quad [U_c] = [k]^T [U_e]. \quad (2.c,d,e)$$

Występująca w tych zależnościach macierz $[k]$ opisuje strukturę połączeń gałęzi, a macierz $[k_1]$ określa, w których gałęziach znajdują się elementy o stałych skupionych. Jeśli w j -tej gałęzi występują tylko elementy o stałych skupionych to wszystkie wyrazy j -tego wiersza macierzy $[k_1]$ są równe zeru, natomiast gdy w skład j -tej gałęzi wchodzi p -ty bok zwojów to w j -tym wierszu macierzy $[k_1]$ różny od zera i równy 1 jest tylko wyraz p -tej kolumny. Oznaczenia występujące w powyższych zależnościach, przedstawiono na rysunku 1 i 2. Rysunek 1 dotyczy uzwojeń ze zwojami połączonymi szeregowo, np. w stojanie maszyny asynchronicznej dwufazowej. Na rysunku 2 pokazano zaś wycinek uzwojenia klatkowego.