ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1988, 34, z. 1, ss. 201-235

621.316.761

# Kompensator statyczny ze sterownikiem prądu indukcyjnego

ZBIGNIEW HANZELKA (Kraków)

*Instytut Automatyki Napędu i Urządzeń Przemysłowych*
*Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków*

*Artykuł wpłynął 1986.04.17*
*Autoryzowano do druku 1987.02.20*

W artykule poddano analizie kompensator trójfazowy ze sterownikiem prądu indukcyjnego z uwzględnieniem między innymi takich zagadnień jak: generacja wh charakterystycznych i niecharakterystycznych oraz współpraca stopnia dławikowego z równoległą baterią kondensatorów.

## WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

$a, b$ — współczynniki rozwinięcia funkcji w szereg Fouriera
$B$ — susceptancja ($B_L$ — indukcyjna; $B_C$ — pojemnościowa)
$C$ — pojemność
$i$ — wartość chwilowa prądu
$i_{a1(2,3)}$ — wartość chwilowa prądu liniowego fazy 1(2, 3)
$i_{12(23,31)}$ — wartość chwilowa prądu fazowego
$i_{I \div VI}$ — wartość chwilowa prądu zaworu o numerze porządkowym I ÷ VI
$I_0$ — prąd bierny fazowy odbiornika ($I_{12,0}$ $I_{23,0}$ $I_{31,0}$)
$I_{(n)}$ — wartość $n$-tej harmonicznej prądu
$I_{1(n)}$ — wartość n-tej harmonicznej prądu liniowego $i_1$
$I_{12(n)}$ — wartość n-tej harmonicznej prądu fazowego $i_{12}$
$I_{(1)}^{(2)}$ — składowa symetryczna kolejności przeciwnej prądu dla częstotliwości podstawowej
$I_C$ — prąd kondensatora
$I_K$ — prąd kompensatora
$I_m$ — wartość szczytowa harmonicznej podstawowej prądu
$I_\Sigma$ — wartość prądu wypadkowego
$I_{\Sigma(1)}$ — wartość podstawowej harmonicznej prądu wypadkowego
$L$ — indukcyjność
$n$ — liczba naturalna oznaczająca rząd harmonicznej
$R$ — rezystancja
$t$ — czas
$u$ — wartość chwilowa napięcia ($u_{12}, u_{23}, u_{31}$)
$U_m$ — wartość szczytowa napięcia
$X$ — reaktancja ($X_L$ — indukcyjna; $X_C$ — pojemnościowa)
$X_{L(1)}$ — wartość reaktancji indukcyjnej dla harmonicznej podstawowej
$Z$ — impedancja ($Z_{12}, Z_{23}, Z_{31}$)
$\alpha, \gamma$ — kąty opóźnienia wysterowania zaworów mierzone od punktu przejścia przez zero sinusoidy napięcia ($\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}$)

$\alpha_w, \gamma_w$ — kąty wyłączania zaworów
$\alpha_{min}$ — minimalna wartość kąta opóźnienia wysterowania zaworów
$\beta$ — wartość połowy kąta przewodzenia zaworu: $\beta = \Theta/2$
$\delta, \Delta\alpha$ — kąty będące miarą nierówności kątów wysterowania zaworów łącznika
$\Gamma$ — kąt nieprzewodzenia zaworu
$\Theta$ — kąt przewodzenia zaworu
$\omega$ — pulsacja

## 1. WSTĘP

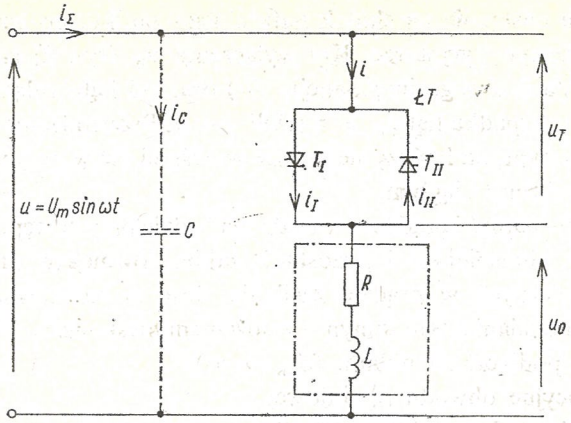
Dowolny nieliniowy odbiornik energii elektrycznej nazwiemy, z punktu widzenia sieci zasilającej, skompensowanym jeżeli w efekcie podjętych działań uzyskana zostanie sinusoidalność przebiegu oraz współfazowość prądu i skojarzonego z nim napięcia zasilania. Dla przypadków, które są najczęstsze w praktyce przemysłowej, stan taki osiągany jest poprzez podłączenie równolegle do kompensowanego odbiornika, urządzenia zwanego kompensatorem. Istnieją teoretycznie dwa rodzaje takich urządzeń różniące się pomiędzy sobą zasadą działania.

Pierwszą grupą są kompensatory, które pracując jako źródła prądu wytwarzają prądy będące w przeciwfazie w stosunku do niepożądanych składowych prądu kompensowanego odbioru (wg definicji Budeanu). Idea tej metody polega więc na kompensowaniu składowej biernej harmonicznej podstawowej prądu obciążenia oraz na generowaniu do systemu prądów harmonicznych będących w przeciwfazie do wyższych harmonicznych (wh) prądu powodowanych pracą odbiornika nieliniowego w celu ich neutralizacji. Ten rodzaj działania w chwili obecnej jest raczej na etapie eksperymentalnym, wymaga bowiem użycia elektronicznych źródeł prądu, które nawet jeżeli są technicznie realizowalne, charakretyzują się dużymi kosztami i dużym stopniem komplikacji. Ta metoda nie wydaje się być jeszcze realną ofertą techniczną na skalę przemysłową.

Drugim rodzajem kompensatorów są urządzenia, które kompensują składową bierną harmonicznej podstawowej prądu odbiornika, a wchodzące w ich skład filtry wh stanowiąc dla prądów filtrowanych harmonicznych gałęzie o praktycznie zerowych impedancjach, odciążają system zasilania od ich obecności. W tej grupie urządzeń można dokonać podziału na:

— układy kompensacji parametrycznej stosowane do kompensacji odbiorników, których składowe prądu pozostają stałe w czasie
— układy sterowane w funkcji zmian zachodzących w prądzie odbiornika.

Zmianę prądu biernego kompensatora można uzyskać przez zmianę wartości elementów biernych wchodzących w skład kompensatora. Podstawowym zagadnieniem technicznym jest opracowanie sposobu lub metody dokonywania takiej zmiany. Jednym z możliwych rozwiązań jest kompensator ze sterownikiem prądu indukcyjnego, będący przedmiotem niniejszych rozważań. Podstawą tej metody, zwanej niekiedy kompensacją pośrednią, jest podłączenie, równolegle do kompensowanego obciążenia nieliniowego, baterii kondensatorów o odpowiednio dobranej wartości pojemności (pracującej najczęściej jako filtr wh) oraz gałęzi szeregowej $RL$ ($\omega L \gg R$) wraz z łącznikiem tyrystorowym złożonym z dwóch przeciwrównolegle połączonych tyrystorów sterowanych fazowo. Obwód ten przedstawiony jest schematycznie na rys. 1.

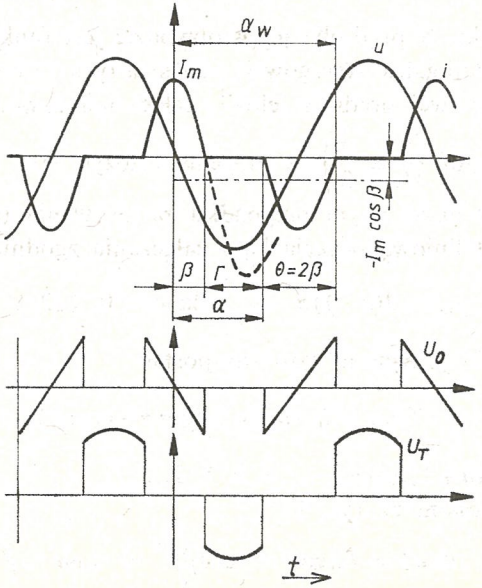



Rys. 1. Schemat jednofazowego kompensatora statycznego ze sterownikiem prądu indukcyjnego

## 2. PRZEBIEGI NAPIĘĆ I PRĄDÓW PODCZAS ŁĄCZENIA GAŁĘZI SZEREGOWEJ RL

Łącznik ŁT (rys. 1) jest sterowany fazowo w sposób symetryczny tzn. taki, przy którym prąd gałęzi szeregowej nie zawiera składowej stałej, a przyłączenie do sieci zasilającej następuje w każdym półokresie napięcia. Przy takim sposobie sterowania tyrystory $T_I$ i $T_{II}$ załączane są w kolejnych półokresach, w chwilach czasu gdy $\omega t = k\pi + \alpha$ dla $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$ (kąt $\alpha$ liczony jest od punktu przejścia przez zero sinusoidy napięcia).

Dla każdej impedancji, prąd i napięcia na poszczególnych elementach składowych obwodu, są nieparzystymi funkcjami czasu, których ujemna część przebiegu jest geometryczną inwersją części dodatniej (rys. 2).




Rys. 2. Przebiegi czasowe napięć i prądów dławika ($\varphi \simeq \frac{\pi}{2}$)

Wyłączenie prądu następuje na skutek naturalnego zaniku, po zmianie biegunowości napięcia na przewodzącym tyrystorze. Kąt wyłączenia $\alpha_W$ (rys. 2) zależy od charakteru gałęzi szeregowej (kąta fazowego impedancji — $\varphi$) oraz od kąta załączania tyrystorów $\alpha$. Dla rozpatrywanego przypadku kąt $\alpha_W > \pi$ jeżeli $\alpha < \pi$. Przewodzenie impulsu prądowego dla danego półokresu napięcia kończy się zawsze wcześniej niż w przypadku prądu sinusoidalnego przy przewodzeniu ciągłym.

Analiza przebiegów napięć i prądów prowadzona będzie przy następujących założeniach:

— napięcie sieci jest sinusoidalne i pozostanie takim również w przypadku obecności wyższych harmonicznych w prądzie zasilania. Jest to równoważne z pominięciem impedancji źródła zasilania, tym samym z założeniem nieskończenie dużej mocy zwarcia ($S_{zw}$) w punkcie podłączenia układu ($S_{zw} \to \infty$).

— elementy reaktancyjne obwodu są liniowe,

— tyrystor jest idealnym bezstratnym łącznikiem,

— pominięto pojemności doziemne układu, gdyż ich wpływ na charakter przebiegów łączeniowych jest znikomy.

Poczynione założenia upraszczające nie pogarszają w znaczący sposób rezultatów rozważań, ponieważ praktyczne układy są bardzo bliskie ich spełnieniu. Zależność opisująca przebieg prądu podczas przewodzenia tyrystorów dla pierwszego okresu napięcia zasilania ma postać:

$$\begin{aligned} i(\omega t) = I_m \{ & \sin(\omega t-\varphi)\Big|_{0;\alpha;\pi+\alpha}^{\alpha_W-\pi;\alpha_W;2\pi} \\ & +\sin(\alpha-\varphi)\exp[-\operatorname{ctg}\varphi(\omega t+\pi-\alpha)]_0^{\alpha_W-\pi} \\ & -\sin(\alpha-\varphi)\exp[-\operatorname{ctg}\varphi(\omega t-\alpha)]_\alpha^{\alpha_W} \\ & +\sin(\alpha-\varphi)\exp[-\operatorname{ctg}\varphi(\omega t-\pi-\varphi)]_{\pi+\alpha}^{2\pi}\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Z zależności (2.1) wynika, że prąd płynący w obwodzie jest funkcją kąta załączania oraz kąta fazowego impedancji gałęzi szeregowej, a różnica tych kątów $(\alpha-\varphi)$ decyduje o wartości składowej przejściowej prądu w chwili załączania zaworu.

Dla gałęzi indukcyjnej $\left(\varphi \simeq \frac{\pi}{2}\right)$, a możemy założyć że z takim rodzajem obwodu mamy do czynienia w omawianym przypadku zastosowania (duża dobroć dławików), kąt wyłączania $\alpha_W$ jest liniową funkcją kąta załączania zgodnie z zależnością:

$$\alpha_W = 2(n+1)\pi-\alpha \quad \text{dla } n = 0, 1, 2... \tag{2.2}$$

Przebieg czasowy prądu przyjmuje wówczas postać:

$$i(\omega t) = i_{\mathrm{I}} + i_{\mathrm{II}} = I_m(\cos\alpha-\cos\omega t) \tag{2.3a}$$

dla $\alpha+2\pi n \leqslant \omega t \leqslant 2(n+1)\pi-\alpha \quad n = 0, 1, 2...$
lub zgodnie z oznaczeniami na rys. 2

$$\begin{aligned} i(\omega t) &= I_m(\cos\omega t-\cos\beta) \quad 0 \leqslant \omega t \leqslant \beta \\ i(\omega t) &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad \beta \leqslant \omega t \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{2.3b}$$

Wraz ze zmniejszaniem kąta sterowania $\alpha$ rośnie wartość maksymalna impulsu prądowego

$$I_{max} = (1-\cos\beta)I_m \tag{2.4}$$

i przy $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $(= \beta)$ prąd w indukcyjności staje się sinusoidalny.

Przy regulacji prądu dławika od wartości 0 do wartości maksymalnej, kąt załączenia $\alpha$ zmienia się w przedziale

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \pi. \tag{2.5}$$

Zawsze spełniony jest warunek

$$2\pi-\alpha \leqslant \pi+\alpha \tag{2.6}$$

co oznacza, że prąd zmaleje do zera przed rozpoczęciem przewodzenia następnego tyrystora.

## 3. HARMONICZNE CHARAKTERYSTYCZNE PRĄDU OBCIĄŻENIA

Generowanie wyższych harmonicznych prądu przy rozpatrywanym sposobie regulacji uzależnione jest od rodzaju stosowanego układu tyrystorowego oraz od parametrów załączanej gałęzi. Dla przyjętego sterownika, funkcja opisująca przebieg czasowy prądu (2.1) spełnia warunki Dirichleta i może być przedstawiona w postaci szeregu trygonometrycznego Fouriera. Ponieważ krzywa prądu ma przebieg antysymetryczny, w szeregu znikają: składowa stała i wszystkie harmoniczne parzyste, a szereg przyjmuje postać:

$$i(\omega t) = \sum_{n=0}^{\infty} \{a_{(2n+1)}\cos[(2n+1)\omega t] + b_{(2n+1)}\sin[(2n+1)\omega t]\} \tag{3.1}$$

gdzie — $n$ jest rzędem harmonicznej.

Dla obciążenia indukcyjnego, uwzględniając fakt, że krzywa prądu jest symetryczna względem osi rzędnych (zerują się w szeregu wyrażenia z sinusami), zależności określające współczynniki Fouriera redukują się do postaci

$$a_{(1)}\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{I_m}{\pi}[2(\pi-\alpha)-\sin 2(\pi-\alpha)] \tag{3.2a}$$

$$a_{(2n+1)}\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2I_m}{\pi(2n+1)}\left[\frac{\sin 2n(\pi-\alpha)}{2n} - \frac{\sin 2(n+1)(\pi-\alpha)}{2(n+1)}\right] \tag{3.2b}$$

$n = 1, 2, 3 \ldots$

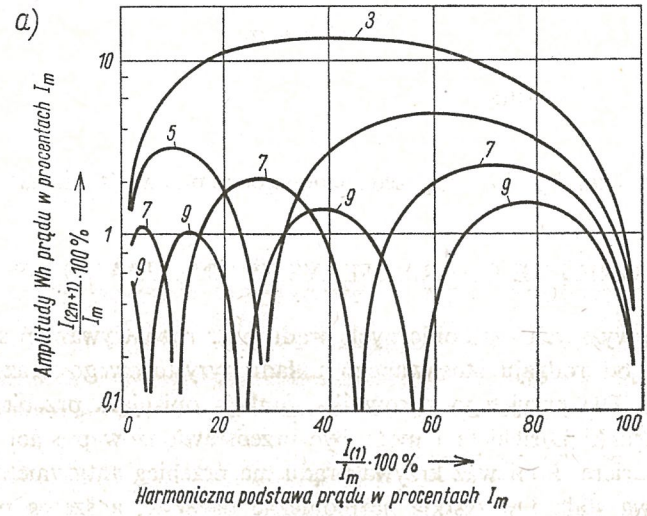
Tak więc szereg Fouriera dla tego przypadku przyjmuje ostateczną postać określoną zależnością (3.3), przy czym amplitudy kolejnych harmonicznych prądu tzw. charakterystycznych są równe wartościom bezwzględnym współczynników szeregu.

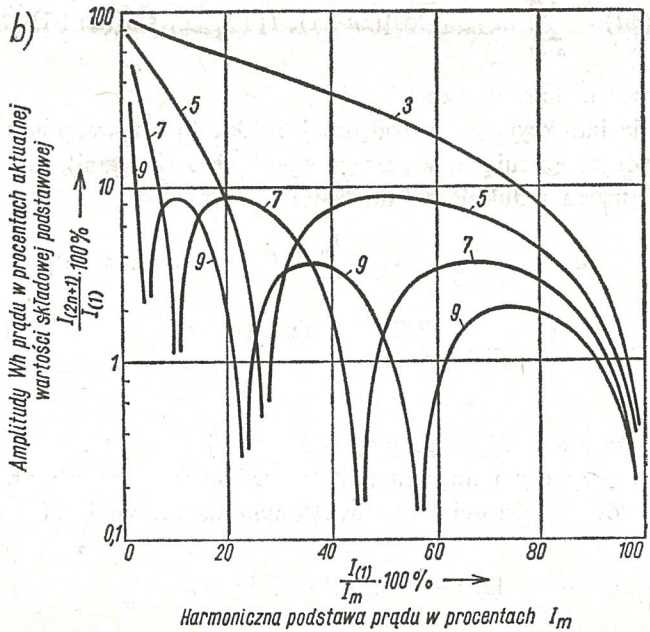
$$\frac{i}{I_m} = -\frac{1}{\pi}[2(\pi-\alpha)-\sin 2(\pi-\alpha)]\cos\omega t - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{\sin 2n(\pi-\alpha)}{2n} - \frac{\sin 2(n+1)(\pi-\alpha)}{2(n+1)}\right]\cos n\omega t \tag{3.3}$$

Wartości ekstremalne amplitudy harmonicznej rzędu $(2n+1)-I^{Ex}_{(2n+1)}$, oraz kąty $\alpha$ przy których są one osiągane — $\alpha^{Ex}_{(2n+1)}$ określone są wyrażeniami:

$$I^{Ex}_{(2n+1)} = \mathrm{Abs}\left[\frac{4}{\pi[(2n+1)^2-1]}\sin\left(\frac{2\pi n}{2n+1}k\right)\right] \tag{3.4}$$

$$\alpha^{Ex}_{(2n+1)} = \frac{\pi}{2n+1}\cdot k \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$




Rys. 3. a) Zależność amplitud wh prądu od wartości harmonicznej podstawowej; b) zależność amplitud wh prądu (w procentach aktualnej wartości składowej podstawowej) od wartości harmonicznej podstawowej

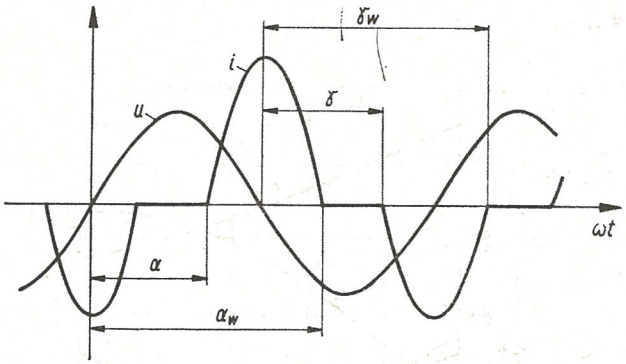
Parametr $k$ jest liczbą naturalną z przedziału: $\frac{1}{2}(2n+1) < k < (2n+1)$. Dla najmniejszej wartości liczby $k$ amplituda harmonicznej osiąga wartość maksymalną — $I^{max}_{(2n+1)}$ (dla $\alpha^{max}_{(2n+1)}$). Z dokładnością dostateczną dla celów praktycznych (dla $(2n+1) \geqslant 7$ błąd nie przekracza 10%) wartość tej amplitudy może być wyrażona zależnością:

$$I^{max}_{(2n+1)} \simeq \frac{4}{\pi(2n+1)^2}. \tag{2.6}$$

Rys. 3a i b przedstawia amplitudy prądów wyższych harmonicznych w zależności od wartości składowej podstawowej prądu obciążenia. Osie odciętych na rys. 3a i 3b wymiarowane są w procentach amplitudy harmonicznej podstawowej $I_m$. Osie rzędnych podane są w skali logarytmicznej.

## 4. PRACA ASYMETRYCZNA

Zastosowania praktyczne analizowanego obwodu (układy kompensacji) sprawiają, że ten rodzaj pracy tzn. asymetria kątów załączania tyrystorów łącznika jest rezultatem stanu awaryjnego, niewłaściwego wykonania (ze zbyt dużą tolerancją) obydwu torów wypracowujących sygnały załączania tyrystorów lub kompensacji szybkozmiennego obciążenia. Załóżmy przypadek pracy asymetrycznej takiej, że kąty załączania poszczególnych tyrystorów są większe od kąta fazowego impedancji obciążenia tzn. $\alpha > \varphi$ (tyrystor $T_I$) i $\gamma > \varphi$ (tyrystor $T_{II}$) oraz $\alpha \neq \gamma$ (Rys. 4)




Rys. 4. Przebiegi czasowe prądu i napięcia przy sterowaniu asymetrycznym łącznika

Prąd obciążenia przyjmuje wówczas postać znakozmiennych impulsów zawartych wewnątrz półokresów prądu sinusoidalnego przy przewodzeniu ciągłym.

Szczególny rodzaj pracy może powstać przy sterowaniu asymetrycznym gdy spełnione są nierówności

$$\alpha > \varphi \quad \gamma < \alpha_w - \pi. \tag{4.1}$$

W tym przypadku ujemne impulsy prądu są inicjowane w chwili zaniku impulsu dodatniego (lub wcześniej). Ten stan pracy kompensatora można traktować jako awaryjny i dlatego

nie będzie on przedmiotem osobnej analizy. Wzajemną relację kątów załączania tyrystorów przy pracy asymetrycznej można zapisać w formie równości

$$\gamma = \alpha + \Delta\alpha, \tag{4.2}$$

gdzie $\Delta\alpha$ jest miarą asymetrii kątów wysterowania.

Przy niesymetrii kątów zapłonu tyrystorów łącznika generowane są wszystkie, zarówno parzyste (zwane niecharakterystycznymi) jak i nieparzyste wyższe harmoniczne wraz ze składową stałą. Obecność składowej stałej może w pewnych przypadkach powodować nasycenie rdzenia transformatora zasilającego. Asymetria sterowania nie ma znaczącego wpływu na wartość wyższych harmonicznych charakterystycznych.

Dla obciążenia indukcyjnego wartości współczynników cosinusowego szeregu Fouriera określane są zależnościami:

$$\frac{I_{(0)}}{I_m} = \frac{1}{\pi}[(\pi-\alpha)\cos\alpha+\sin\alpha] - \frac{1}{\pi}[(\pi-\gamma)\cos\gamma+\sin\gamma] \tag{4.3a}$$

składowa stała prądu $i_{\mathrm{I}}$ składowa stała prądu $i_{\mathrm{II}}$

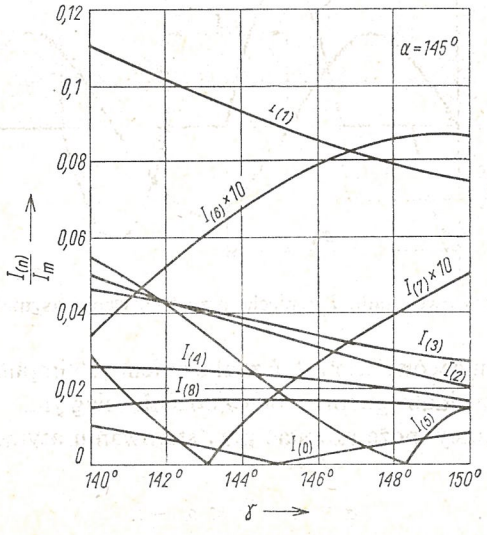
$$\frac{I_{(1)}}{I_m} = \frac{1}{2\pi}[2(\pi-\alpha)-\sin 2(\pi-\alpha)] + \frac{1}{2\pi}[2(\pi-\gamma)-\sin 2(\pi-\gamma)] \tag{4.3b}$$

harmoniczna podstawowa prądu $i_{\mathrm{I}}$ harmoniczna podstawowa prądu $i_{\mathrm{II}}$

$$\frac{I_{(n)}}{I_m} = \frac{1}{\pi n}\left[\frac{\sin(n-1)\alpha}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\alpha}{n+1}\right] - (-1)^n \cdot \frac{1}{\pi \cdot n}\left[\frac{\sin(n-1)\gamma}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\gamma}{n+1}\right] \tag{4.3c}$$

$n$-ta harmoniczna prądu $i_{\mathrm{II}}$ $n$-ta harmoniczna prądu $i_{\mathrm{II}}$

dla $n = 2, 3, 4 \ldots$




Rys. 5. Zmienność wartości wh prądu o rzędach zawartych w przedziale 0÷10 dla $\alpha = 145°$ przy zmianie kąta $\gamma$ w przedziale 140°÷150°

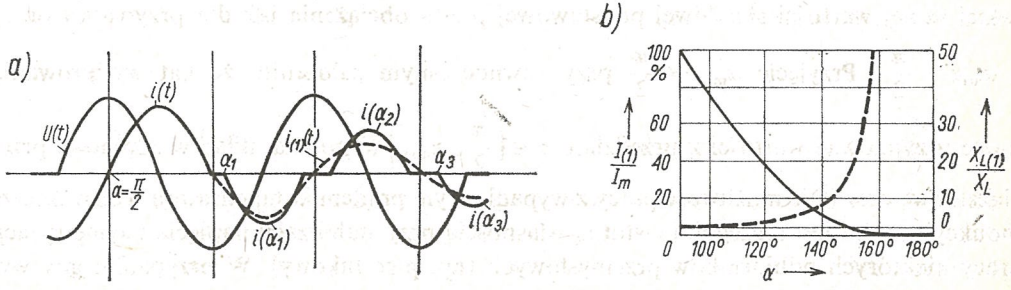
Z zależności (4.3) widać wyraźnie, że równość kątów zapłonu tyrystorów powoduje zerowanie się składowej stałej $I_{(0)}$ oraz składowych parzystych.

Na rys. 5 przedstawiono zmienność wartości wyższych harmonicznych o rzędach zawartych w przedziale $0 \div 10$ dla wybranej wartości kąta $\alpha = 145°$ przy zmianie kąta $\gamma$ w granicach $140° \div 150°$. Widać że wartości wh niecharakterystycznych dla przykładowo wybranych kątów załączania (i założonej asymetrii) są współmierne z wartościami pewnych wh charakterystycznych. Przy dużej asymetrii sterowania musi więc być uwzględniona ich obecność w analizie współpracy kompensatora z siecią zasilającą.

## 5. KOMPENSATOR JEDNOFAZOWY

Podstawowy obwód jednofazowego kompensatora przedstawiony schematycznie na rys. 1 jest połączeniem szeregowym sterowanego fazowo łącznika tyrystorowego z dławikiem i równoległą baterią kondensatorów. Ze względu na wyższe harmoniczne, kondensator $C$ jest zazwyczaj łączony jako filtr. Wzajemna relacja $X_L$ i $X_C$ może być dobierana dowolnie w zależności od przeznaczenia instalacji, a poprzez ten wybór mogą być w układzie uzyskane dowolne wartości prądu, zawarte w przedziale ograniczonym dwoma stanami sterowania — pełne wysterowanie $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ i brak prądu dławika ($\alpha = \pi$). Przy maksymalnej wartości prądu wypadkowego o charakterze pojemnościowym łącznik tyrystorowy jest całkowicie wyłączony. To automatycznie eliminuje dławik z obwodu i cały prąd kondensatora jest dostarczony do sieci. Dla zerowej wartości prądu wypadkowego łącznik jest albo w pełni otwarty (gdy $X_C = X_L$) albo częściowo otwarty ($X_L > X_C$). W tym stanie prąd dławika kompensuje prąd kondensatora. Pomiędzy tymi dwoma elementarnymi punktami pracy łącznik jest sterowany fazowo. Zmiana kąta sterowania fazowego $\alpha$ powoduje jako skutek zmianę wartości podstawowej harmonicznej prądu obciążenia (rys. 6), tym samym można w sposób płynny regulować wartość reaktancji indukcyjnej dla podstawowej harmonicznej — $X_{L(1)}$.

$$X_{L(1)} = \frac{U_m}{I_{(1)}(\alpha)} = \frac{\omega L \cdot \pi}{2(\pi-\alpha)-\sin 2(\pi-\alpha)} = \frac{X_L \cdot \pi}{2(\pi-\alpha)-\sin 2(\pi-\alpha)}. \tag{5.1}$$




Rys. 6. a) Przebieg czasowy prądu dla różnych wartości kąta $\alpha$; b) zależność wartości względnej podstawowej harmonicznej i reaktancji zastępczej $\frac{X_{L(1)}}{X_L}$ od kąta wysterowania $\alpha$

W przedziale regulacji $-\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ wartość prądu całkowitego dla podstawowej harmonicznej $I_{\Sigma(1)}$ określona jest zależnością

$$I_{\Sigma(1)} = I_C - I_{(1)}(\alpha) = \frac{U}{X_C} - \frac{U}{X_L} \cdot \frac{1}{\pi} [2(\pi - \alpha) - \sin 2(\pi - \alpha)] \tag{5.2}$$

gdzie $U$, $I_C$, $I_{(1)}$ są wartościami odpowiednio: napięcia zasilania, prądu kondensatora i prądu dławika dla podstawowej harmonicznej. Prąd $I_{\Sigma(1)}$ jest dodatni gdy ma charakter pojemnościowy ($I_C > I_{(1)}$) i ujemny gdy ma charakter indukcyjny ($I_{(1)} > I_C$).

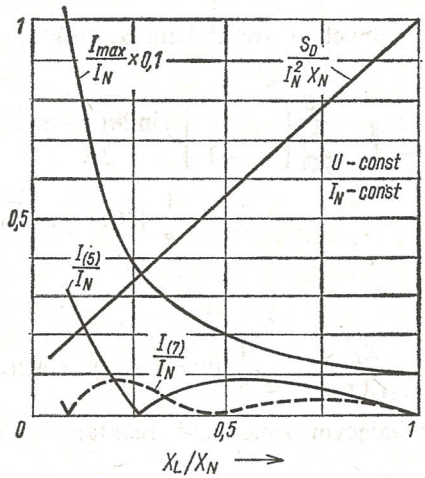
Gdy tyrystory łącznika są w pełni przewodzące, gałąź dławika jest niesterowalna i wówczas pobiera prąd indukcyjny proporcjonalny do napięcia zasilania. W tym stanie układ jednofazowego kompensatora stanowi obwód równoległy $LC$, mający admitancję o charakterze indukcyjnym tylko poniżej częstotliwości własnej rezonansowej. Poprzez projektowanie, ta częstotliwość rezonansowa jest zwykle zlokalizowana w pobliżu częstotliwości systemu zasilania. W ten sposób admitancja widziana przez system dla częstotliwości powyżej naturalnej ma charakter pojemnościowy.

## 6. MINIMALNY KĄT ZAPŁONU $\alpha_{min}$

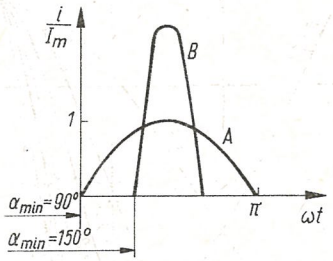
W większości stosowanych kompensatorów, indukcyjność $L$ (rys. 1) stanowi dławik powietrzny. Dławik z rdzeniem żelaznym, stosowany dużo rzadziej między innymi ze względu na większe straty mocy czynnej oraz zwiększone wymagania odnośnie liniowości charakterystyki magnesowania, daje duże korzyści głównie jeżeli chodzi o znacznie mniejszą jego objętość w stosunku do powietrznego (przy tej samej indukcyjności) oraz większą łatwość produkcji i montażu.

Przy regulacji prądu dławika od 0 do wartości maksymalnej kąt załączania $\alpha$ zmienia się w przedziale: $\left(\alpha_{min} = \frac{\pi}{2}\right) \div \pi$. Zwiększenie kąta $\alpha_{min}$, a więc zmniejszenie zakresu regulacji do przedziału $\left(\alpha_{min} > \frac{\pi}{2}\right) < \alpha < \pi$ daje możliwość zmniejszenia indukcyjności użytego dławika, tym samym zmniejszenia jego gabarytów i kosztów, przy zachowaniu takiej samej wartości składowej podstawowej prądu obciążenia jak dla przypadku pracy z $\alpha_{min} = \frac{\pi}{2}$. Przyjęcie $\alpha_{min} > \frac{\pi}{2}$ przy równoczesnym założeniu, że kąt wysterowania może przyjmować wartości z przedziału $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \alpha_{min}\right)$ wyposaża układ w zdolności przeciążeniowe oraz daje możliwość pracy z wypadkowym prądem kompensatora o charakterze indukcyjnym co jest szczególnie istotną własnością przy stabilizacji napięcia i symetryzacji pracy niektórych odbiorników przemysłowych (np. piec łukowy). W przypadku gdy wymagana jest duża szybkość działania układu, przedział $\left(\frac{\pi}{2} \div \alpha_{min}\right)$ może być wykorzystany dla potrzeb układu sterowania (dodatkowy czas pomiaru). Korzyścią wynikającą z przy-

jęcia $\alpha_{min} > \frac{\pi}{2}$ jest również możliwość użycia reaktancji rozproszenia transformatora zasilającego w roli regulowanej indukcyjności tzw. układ dławik/transformator. Może ona być wykorzystana jako część lub całość wymaganej wartości. Dodatkowo możliwość wyboru transformatorów o różnych napięciach znamionowych pozwala optymalnie wybrać parametry prądowe i napięciowe zaworów. Zwiększenie kąta $\alpha_{min}$ przy zachowaniu tej samej wartości podstawowej harmonicznej prądu jak dla przypadku pracy z $\alpha_{min} = \frac{\pi}{2}$ prowadzi do wzrostu wartości maksymalnej prądu obciążenia, a więc zwiększone zostają wymagania odnośnie liniowości charakterystyki magnesowania rdzenia dławika (rys. 7 i 8).




Rys. 7. Zależność wartości maksymalnej prądu $I_{max}$ 5 i 7 harmonicznej oraz mocy dławika $S_D(= X_{L(1)} I_N^2)$ od wartości reaktancji dławika dla podstawowej harmonicznej $X_L$; $X_N = \frac{U_N}{I_N}$ gdzie $U_N$ i $I_N$ są założonymi wartościami znamionowymi dla harmonicznej podstawowej




Rys. 8. Prąd dławika dla dwóch różnych wartości kąta $\alpha_{min}$ przy założeniu tej samej wartości składowej podstawowej prądu

Zwiększenie $\alpha_{min}$ do $120° \div 130°$ nie powoduje znaczących zmian wartości średniej i skutecznej prądów zaworów (przy wzroście wartości maksymalnej), tak więc nie powoduje to konieczności znaczącego przewymiarowywania tyrystorów. Publikowane wyniki badań potwierdzają ten fakt [1]. Wynika z nich bowiem, że straty mocy na tyrystorach łącznika —

miarą których jest temperatura złącza półprzewodnikowego — w bardzo szerokim zakresie zmiany kąta sterowania $\alpha_{(90°\div 140°)}$ prawie nie zależą od wartości tego kąta. Ze względów techniczno-ekonomicznych logicznym jest zatem projektowanie układu przy założeniu $\alpha_{min} > \frac{\pi}{2}$. Nie jest to pozbawione jednak pewnych wad. Wybór mniejszej wartości indukcyjności powoduje znaczący wzrost wyższych harmonicznych prądu.

Dla obwodu jak na (rys. 1) dla większości instalacji spełniony jest warunek:

$$I_{(1)}(\alpha_{min}) = I_C = I_N \tag{6.1}$$

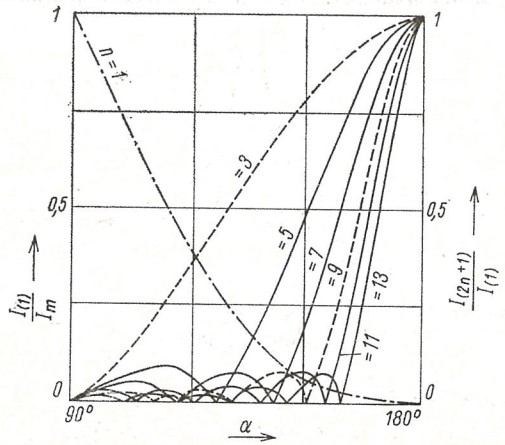
$I_N$ — prąd znamionowy instalacji dla harmonicznej podstawowej. Prąd znamionowy w gałęzi dławika występuje przy $\alpha_{min} > \frac{\pi}{2}$. Stąd współczynnik zawartości wyższych harmonicznych dla poszczególnych wartości kąta $\alpha$, traktując kąt $\alpha_{min}$ jako parametr, określony jest zależnością:

$$K_{wh} = \frac{\sqrt{\sum_{m=2}^{\infty} I_{(m)}^2}}{I_{\Sigma(1)}} = \frac{\frac{2}{\pi}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2n+1}\left[\frac{\sin 2n(\pi-\alpha)}{2n} - \frac{\sin 2(n+1)(\pi-\alpha)}{2(n+1)}\right]\right\}^2}}{K_{\alpha_{min}} - \frac{1}{\pi}[2(\pi-\alpha) - \sin 2(\pi-\alpha)]} \tag{6.2}$$

gdzie

$$K_{\alpha_{min}} = \frac{X_L}{X_{L(1)}(\alpha_{min})} = \frac{1}{\pi}[2(\pi-\alpha_{min}) - \sin 2(\pi-\alpha_{min})] \tag{6.3}$$

jest współczynnikiem określającym zmienność reaktancji indukcyjnej dla przypadku $\alpha_{min} > \frac{\pi}{2}$. Względna wartość podstawowej harmonicznej prądu wypadkowego wyraża się wzorem (6.4)




Rys. 9. Zależność prądów wh (odniesionych do aktualnej wartości harmonicznej podstawowej) od kąta sterowania $\alpha$

$$\overset{*}{I}_{(1)} = \frac{I_{\Sigma(1)}}{I_N} = 1 - \frac{\frac{1}{\pi}[2(\pi-\alpha)-\sin 2(\pi-\alpha)]}{K_{\alpha_{\min}}}. \tag{6.4}$$

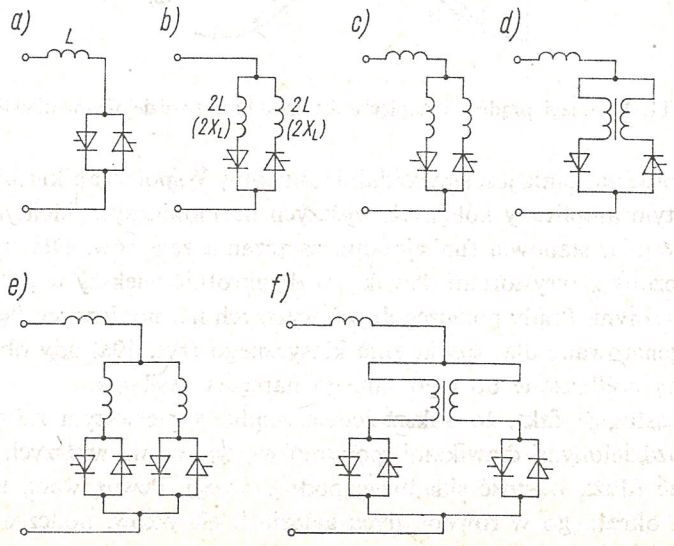
Rys. 9 jest prezentacją graficzną zmian wartości wh prądu w funkcji kąta sterowania $\alpha$.

Na rysunku tym wyższe harmoniczne przedstawione są w wielkościach względnych, odniesione do harmonicznej podstawowej. Linią przerywaną zaznaczono przebieg 3 i 9 harmonicznej. Harmoniczne te nie występują bowiem w prądach liniowych układu trójfazowego przy pracy symetrycznej systemu. Z rysunku wynika, że kąt zapłonu zawarty w przedziale $150° \div 180°$ prowadzi do znaczącego wzrostu wartości wyższych harmonicznych, natomiast przedział $90° \div 130°$ charakteryzuje się stosunkowo małym udziałem wyższych harmonicznych w ogólnej wartości prądu.

## 7. INNE ROZWIĄZANIA GAŁĘZI DŁAWIKOWEJ

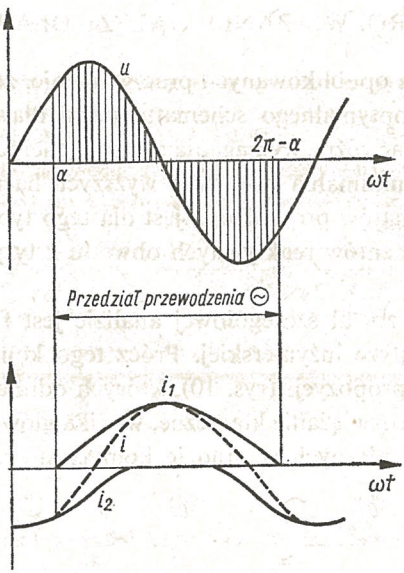
Przeprowadzona analiza opublikowanych prac wskazuje, że główna uwaga ukierunkowana jest na znalezienie optymalnego schematu gałęzi dławikowej kompensatora statycznego tak, aby zrealizować różne wymagania systemu energetycznego (szybkość i zakres regulacji prądu biernego; minimalna zawartość wyższych harmonicznych w prądzie sieci i.t.p.). Optymalizacja schematów prowadzona jest dla tego typu kompensatora na drodze różnorodnego łączenia elementów reaktywnych obwodu z tyrystorami w celu osiągnięcia zamierzonego efektu.

Układ, który poddany został szczegółowej analizie jest fundamentalną konfiguracją najpowszechniejszą w praktyce inżynierskiej. Prócz tego konwencjonalnego rozwiązania istnieje cały szereg innych propozycji (rys. 10), których odmienność w stosunku do schematu bazowego, jakim jest rozwiązanie klasyczne, wynika głównie z chęci minimalizowania zawartości wyższych harmonicznych w prądzie kompensatora.




Rys. 10. Zestawienie różnych schematów gałęzi dławikowej kompensatora

Układ z rysunku 10b jest znany w polskiej literaturze technicznej pod nazwą układu z rozdzielonymi dławikami [13], [15]. W rozwiązaniu tym wymagana reaktancja indukcyjna $X_L$ jest podzielona na dwie części, każda o wartości $2X_L$. W pracy układu można wyróżnić dwa charakterystyczne przedziały. Przedział pierwszy odpowiada kątom sterowania $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. W przedziale tym kąt przewodzenia każdego tyrystora $\Theta > \pi$ (rys. 11). Istnieją przedziały czasu, w których przewodzą obydwa tyrystory, dzięki czemu prąd zasilania jest ciągły w czasie. W drugim przedziale dla kątów sterowania $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ kąt przewodzenia $\Theta < \pi$. Praca w tym przedziale sterowania jest identyczna jak dla rozwiązania klasycznego. Ponadto dla $\alpha = 0$ i $\alpha = \alpha_{gr}$ ($\alpha_{gr}$ — kąt załączenia tyrystorów stanowiący granicę pomiędzy przewodzeniem ciągłym i impulsowym) nie występują wyższe

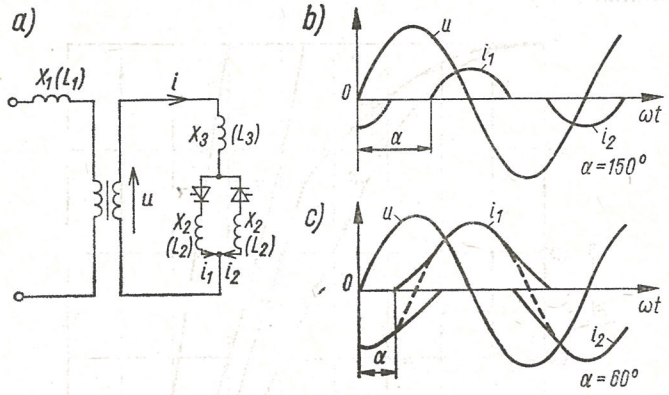



Rys. 11. Przebiegi prądów i napięcia dla układu z rozdzielonymi dławikami

harmoniczne, a prąd zasilania jest sinusoidalnie zmienny. Współczynniki rozkładu Fouriera, a w związku z tym amplitudy kolejnych wyższych harmonicznych identyczne w obydwu zakresach sterowania, stanowią funkcję kąta załączania zaworów. Dla tego rozwiązania szeregowo połączony z tyrystorami dławik jest dwukrotnie większy w porównaniu z rozwiązaniem klasycznym. Prądy poszczególnych wyższych harmonicznych będą więc połową tych, które są generowane dla rozwiązania klasycznego (rys. 10a) gdy obydwa porównywane obwody są podłączone do tego samego napięcia zasilania.

Na uwagę zasługuje fakt, że odkształcenie prądu w pierwszym zakresie sterowania dla układu z rozdzielonymi dławikami, pomimo występowania wyższych harmonicznych jest bardzo małe (duża wartość składowej podstawowej). Pewną wadą tego układu jest przepływ prądu okrężnego w równoległych gałęziach dławików, podczas równoczesnego przewodzenia obydwu tyrystorów.

Układ z rys. 10c jest znany w anglojęzycznej literaturze technicznej pod nazwą „UM — concept" [10]. W nowej konfiguracji następuje zmniejszenie napięcia na nieprzewodzącym tyrystorze (w stosunku do poprzedniego rozwiązania). Dodanie reaktancji oznaczonej na schemacie $X_3$ (rys. 12) powoduje, że istnieje ogromna liczba możliwych kombinacji wartości elementów reaktywnych obwodu $X_1, X_2, X_3$, a wybór jednej spośród nich jest zagadnieniem optymalizacji.




Rys. 12. Układ „UM — concept" a) schemat obwodu; przebiegi napięć i prądów dla b) $\alpha = 150°$, c) $\alpha = 160°$

Wszystkie omówione wcześniej schematy gałęzi dławikowej mogą być traktowane jako szczególne przypadki tego rozwiązania. Jeżeli przyjąć jako wielkość bazową — $X$

$$X_1 + X_2 + X_3 = X \tag{7.1a}$$

lub

$$\frac{X_1}{X} + \frac{X_2}{X} + \frac{X_3}{X} = \overset{*}{X}_1 + \overset{*}{X}_2 + \overset{*}{X}_3 = 1 \tag{7.1b}$$

wówczas można wyróżnić poszczególne przypadki w następujący sposób:

$\overset{*}{X}_1 = \overset{*}{X}_2 = 0 \quad \overset{*}{X}_3 = 1$ rozwiązanie klasyczne

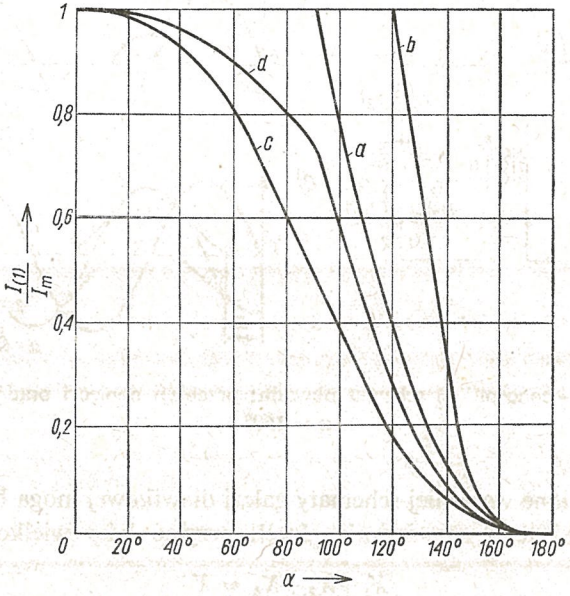
$\overset{*}{X}_1 = \overset{*}{X}_3 = 0 \quad \overset{*}{X}_2 = 1$ układ z rozdzielonymi dławikami

$\overset{*}{X}_2 = \overset{*}{X}_3 = 0 \quad \overset{*}{X}_1 = 1$ układ w którym reaktancja rozproszenia transformatora jest elementem podlegającym regulacji tzw. dławik/transformator.

Oczywistą jest rzeczą, że dla każdej z tych konfiguracji, dla tego samego kąta $\alpha$, w gałęzi dławikowej płynie prąd o różnej wartości. Najbardziej znaczącą cechą tej konfiguracji jest to, że kąt $\alpha$ może przyjmować dowolną wartość z przedziału $0 \div \pi$. Dla porównania, w przypadku schematu klasycznego, przedział regulacji jest ograniczony do $\frac{\pi}{2} \div \pi$, dla dławika/transformatora, przedział jest ograniczony do $\frac{2}{3}\pi \div \pi$, (gdyż w układzie tym pracującym jako trójfazowy, strona wtórna transformatora jest połączona w trójkąt).

Na rys. 13 przedstawiono zestawienie porównawcze charakterystyk sterowania, w funkcji kąta $\alpha$, dla liniowego dławika, dławika/transformatora, układu z rozdzielonymi dławikami oraz szczególnego przypadku rozwiązania „UM — concept".

Nachylenie charakterystyk sterowania może być zmienione w zależności od wzajemnej relacji $L_2$ i $L_3$. Jak widać z rys. 13, rozciągnięcie przedziału sterowania czyni prąd gałęzi dławikowej mniej wrażliwym na zmianę kąta $\alpha$ i stąd w praktycznych układach podnosi stabilność sterowania.




Rys. 13. Charakterystyki sterowania

a) układu klasycznego $\overset{*}{x}_1 = \overset{*}{x}_2 = 0$; $\overset{*}{x}_3 = 1$, b) układu dławik/transformator $\overset{*}{x}_2 = \overset{*}{x}_3 = 0$; $\overset{*}{x}_1 = 1$, c) układu z rozdzielonymi dławikami $\overset{*}{x}_1 = \overset{*}{x}_3 = 0$; $\overset{*}{x}_2 = 1$, d) układu „UM — concept" $\overset{*}{x}_1 = 0$; $\overset{*}{x}_2 = 0{,}35$; $\overset{*}{x}_3 = 0{,}65$

Z analizy porównawczej zaprezentowanych układów wynikają następujące wnioski [10]:

1) rozwiązanie „UM" generuje najmniej wyższych harmonicznych. Jeżeli wartość $L_2$ wzrasta następuje redukcja zawartości wyższych harmonicznych, zarówno charakterystycznych jak i niecharakterystycznych.

2) W przeciwieństwie do innych rozwiązań schemat „UM" posiada przedziały kąta sterowania, gdzie nie ma lub występuje nieznaczna zawartość generowanych wyższych harmonicznych. Poprzez odpowiedni dobór wartości poszczególnych indukcyjności istnieje możliwość lokalizacji tych regionów w obszarze najczęstszej pracy układu.

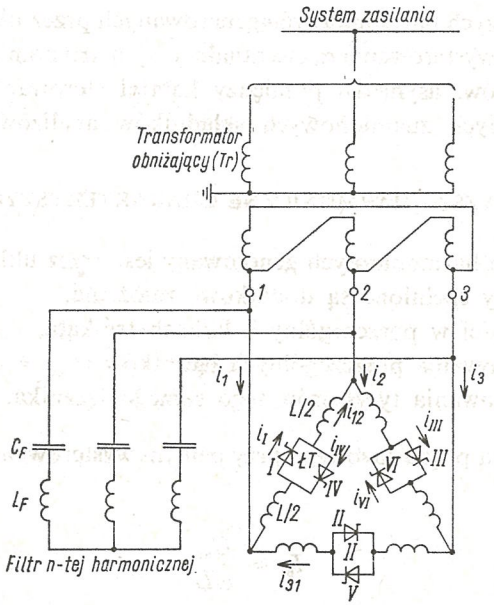
Należy zwrócić uwagę na bardzo istotny fakt, że szczytowa wartość wyższych harmonicznych nie jest najistotniejszym wskaźnikiem jakości pracy kompensatora. Istotna jest bowiem również wielkość przedziału kąta sterowania, w którym występuje duża wartość tej wyższej harmonicznej. W układzie z rozdzielonymi dławikami oraz „UM" dla kątów sterowania $\alpha < \frac{\pi}{2}$, pomiędzy równoległymi gałęziami tyrystorowymi płynie prąd okrężny,

którego wartość zależy od $L_2$. W efekcie tego zjawiska koniecznym jest zwiększenie obciążalności prądowej dławika $L_2$ oraz ze względu na występujące wówczas dodatkowe straty, dławik $L_2$ musi mieć dużą dobroć, a tyrystorom należy zapewnić odpowiednio intensywniejsze chłodzenie.

Układ z rys. 10d jest specyficzną odmianą rozwiązania „UM", w której użyto magnetycznie sprzężone dławiki. Rozwiązania z rys. 10e i f są konfiguracjami stworzonymi w celu zlikwidowania zjawiska prądów okrężnych oraz w celu dalszej redukcji generowania wyższych harmonicznych, w efekcie zastosowania asymetrycznego zapalania tyrystorów [11].

## 8. TRÓJFAZOWY UKŁAD KOMPENSATORA

Klasyczny układ trójfazowy omawianego typu kompensatora statycznego jest przedstawiony schematycznie na rys. 14.




Rys. 14. Schemat trójfazowego kompensatora statycznego ze sterowanym fazowo stopniem dławikowym

Układ zawiera dławiki o stałej indukcyjności $\left(\frac{L}{2}\right)$ połączone w trójkąt, których podstawowa harmoniczna prądu jest regulowana przez sterowanie fazowe łączników tyrystorowych (ŁT) znajdujących się w każdym z boków trójkąta. Łączniki sterowane są z układu pomiarowo-regulacyjnego w taki sposób, aby w zależności od przeznaczenia systemu, kontrolować napięcie zasilania (stabilizatory) lub kompensować prąd bierny obciążenia. W celu optymalnego wykorzystania parametrów prądowo-napięciowych użytych tyrystorów, często stosowany jest transformator obniżający (Tr), niekiedy o wyższej niż w typo-

wych zastosowaniach reaktancji rozproszenia, co pozwala na redukcję (w granicznym przypadku do zera) reaktancji dławików. Połączenie dławików w trójkąt ma techniczne i ekonomiczne uzasadnienie. W przedstawionej konfiguracji maleją parametry prądowe użytych tyrystorów, oraz bardzo znacznie zmniejsza się zawartość wyższych harmonicznych w prądzie zasilania w stosunku do układu połączonego w gwiazdę o takiej samej mocy.

Dla wyższych napięć i mocy, dławiki w bokach trójkąta są dzielone jak na rys. 14 ze względów napięciowych (poziom izolacji), łatwości wykonania oraz możliwości ograniczenia ewentualnych prądów zwarciowych. Przy analizie układu trójfazowego obowiązują wcześniej poczynione założenia. Dodatkowo przyjęto symetryczność i sinusoidalność napięć trójfazowego systemu zasilającego oraz pominięto w rozpatrywanych obwodach elementy dysypacyjne ($R \simeq 0$).

## 9. WYŻSZE HARMONICZNE PRĄDU UKŁADU TRÓJFAZOWEGO

Rząd i wartość wyższych harmonicznych generowanych przez układ zwany 6-pulsowym (rys. 14), zależy od kąta wysterowania $\alpha$, ewentualnej asymetrii pomiędzy kątami sterowania poszczególnych łączników, asymetrii pomiędzy kątami sterowania tyrystorów łącznika oraz od tolerancji danych znamionowych składników analizowanego obwodu.

### 9.1. WYŻSZE HARMONICZNE CHARAKTERYSTYCZNE

Ten rodzaj wyższych harmonicznych generowany jest przez układ pracujący w warunkach idealnych tzn. gdy spełnione są dodatkowe założenia,
— równość indukcyjności w poszczególnych bokach trójkąta,
— równość kątów sterowania poszczególnych łączników ($\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{31}$)
— równość kątów sterowania tyrystorów tego samego łącznika.

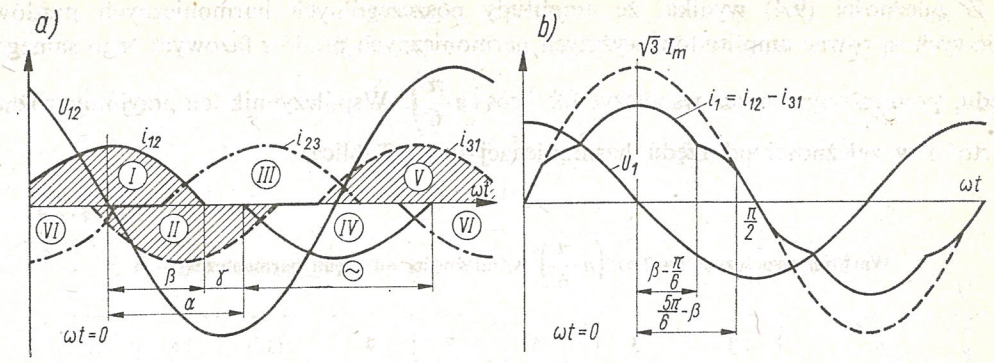
Wartość maksymalna prądu fazowego przy pełnym wysterowaniu łącznika $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ — $-I_m$ wynosi:

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L} \tag{9.1}$$

gdzie $U_m$ — amplituda napięcia międzyfazowego.
W dalszej analizie prąd ten został przyjęty jako baza wielkości względnych.

Wartości wyższych harmonicznych prądów liniowych generowanych przez układ można przedstawić jako funkcję $I_m$, $\Theta$ (kąt przewodzenia tyrystorów zmieniający swą wartość w przedziale $0 \div \pi$)lub $\Gamma$ (kąt nieprzewodzenia tyrystorów) przy czym te dwa kąty są ze sobą ściśle związane: $\Gamma = \pi - \Theta$ (rys. 15). Dogodnie jest wyrazić zależności opisujące kształt prądu w funkcji połowy kąta przewodzenia $\beta = \frac{\Theta}{2}$ $\left(\text{rys. 15 } \alpha < \frac{2 \cdot \pi}{3}\right)$.

Kąt zapłonu tyrystorów odniesiony do punktu przejścia przez zero napięcia międzyfazowego ma wówczas wartość $\alpha = \pi - \beta$. Przyjmując początek układu współrzędnych




Rys. 15. Przebiegi czasowe prądów: fazowych i liniowego na tle napięcia zasilania $\left(\alpha < \frac{2\pi}{3}\right)$

w chwili gdy wybrany prąd fazowy (np. $i_{12}$ rys. 15a) osiąga wartość maksymalną można jego przebieg czasowy $i(\omega t)$ wyrazić zgodnie z zależnością 3.3 przez cosinusowy szereg Fouriera o nieparzystych składowych:

$$\frac{i}{I_m} = \sum_{m=1}^{\infty} i_{(n)} = \sum_{m=1}^{\infty} I_{(n)} \cos n\omega t =$$

$$= \frac{2\beta - \sin 2\beta}{\pi} \cos\omega t + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \left[ \frac{\sin(n-1)\beta}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\beta}{n+1} \right] \cos(n\omega t) =$$

$$= \frac{\Theta - \sin\Theta}{\pi} \cos\omega t + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \left[ \frac{\sin(m-1)\Theta}{m-1} - \frac{\sin m\Theta}{m} \right] \cdot \cos(n\omega t) \qquad (9.2)$$

$$n = 2m-1.$$

Harmoniczne tego samego rzędu w pozostałych bokach trójkąta przesunięte są w fazie, jak dla układu trójfazowego, odpowiednio o kąt $\frac{2\pi}{3}$ $(i_{23})$ oraz $\frac{4\pi}{3}$ $(i_{31})$.

Prąd liniowy fazy pierwszej $i_1$ określony zależnością (9.3):

$$i_1 = i_{12} - i_{31} \qquad (9.3)$$

jest przedstawiony graficznie na rys. 15b. Szereg Fouriera dla tego prądu można wyprowadzić na podstawie rys. 15b, na którym początek układu współrzędnych został przesunięty do punktu zbieżnego z chwilą czasu, w której prąd liniowy osiąga wartość maksymalną. Stąd $n$-ta harmoniczna prądu liniowego $i'_{(n)}$ jest równa:

$$i'_{(n)} = I_{(n)} \cos n\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) + I_{(n)} \cos n\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) = 2I_{(n)} \cos(n\omega t) \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 2\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) \cdot i_{(n)}. \qquad (9.4)$$

Z zależności (9.4) wynika, że amplitudy poszczególnych harmonicznych prądów liniowych są równe amplitudom wyższych harmonicznych prądów fazowych tego samego rzędu, pomnożonym przez współczynnik $2\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)$. Współczynnik ten przyjmuje różne wartości w zależności od rzędu harmonicznej — $n$. (Tablica)

Tablica

**Wartości współczynnika $2\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)$ w zależności od rzędu harmonicznej — n**

| $n$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)$ | $\sqrt{3}$ | 0 | $-\sqrt{3}$ | $-\sqrt{3}$ | 0 | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}$ | itd. |

Widać wyraźnie zerowanie się składowych o rzędach będących krotnością trzech.

Nieciągłość prądów w efekcie sterowania fazowego łączników powoduje obecność wyższych harmonicznych w prądach liniowych przy czym:

— harmoniczne o rzędach $6n+1n = 0, 1, 2 \ldots$ tj. 1, 7, 13 ... tworzą składowe symetryczne kolejności zgodnej

— harmoniczne o rzędach $6n+3$ $n = 0, 1, 2 \ldots$ tj. 3, 9, 15 ... tzw. „potrójne" tworzą składowe symetryczne kolejności zerowej

— harmoniczne o rzędach $6n+5n = 0, 1, 2 \ldots$ tj. 5, 11, 17 ... tworzą składowe symetryczne kolejności przeciwnej.

Dla założonych warunków pracy analizowanego układu, harmoniczne „potrójne" krążą w obwodzie połączonych w trójkąt indukcyjności i nie pojawiają się w prądach liniowych. Tak więc wyższymi harmonicznymi charakterystycznymi prądów liniowych zasilających połączone w trójkąt i sterowane fazowo indukcyjności, czyli tzw. układu 6-pulsowego są harmoniczne o rzędach $6n \pm 1$, dla $n = 0, 1, 2 \ldots$

Szereg Fouriera dla prądu liniowego można otrzymać również poprzez całkowanie, w przedziale $0 \div \frac{\pi}{2}$, poszczególnych segmentów przebiegu czasowego prądu.

Zgodnie z rys. 15b poszczególne segmenty prądu opisane są następującymi zależnościami analitycznymi $\left(\text{w przedziale } 0 < \omega t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$:

dla $\frac{\pi}{3} < \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$ lub $\frac{2\pi}{3} < \Theta \leqslant \pi$,

$$i(\omega t) = I_m(\sqrt{3}\cos\omega t - 2\cos\beta), \qquad 0 < \omega t \leqslant \beta - \frac{\pi}{6}$$

$$i(\omega t) = I_m\left[\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\beta\right], \qquad \beta - \frac{\pi}{6} < \omega t \leqslant \frac{5\pi}{6} - \beta$$

$$i(\omega t) = I_m\sqrt{3}\cos\omega t, \qquad \frac{5\pi}{6} - \beta < \omega t \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

dla $\frac{\pi}{6} < \beta \leqslant \frac{\pi}{3}$ lub $\frac{\pi}{3} < \Theta \leqslant \frac{2\pi}{3}$:

$$i(\omega t) = I_m(\sqrt{3}\cos\omega t - 2\cos\beta) \qquad 0 < \omega t \leqslant \beta - \frac{\pi}{6}$$

$$i(\omega t) = I_m\left[\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\beta\right] \qquad \beta - \frac{\pi}{6} < \omega t \leqslant \beta + \frac{\pi}{6}$$

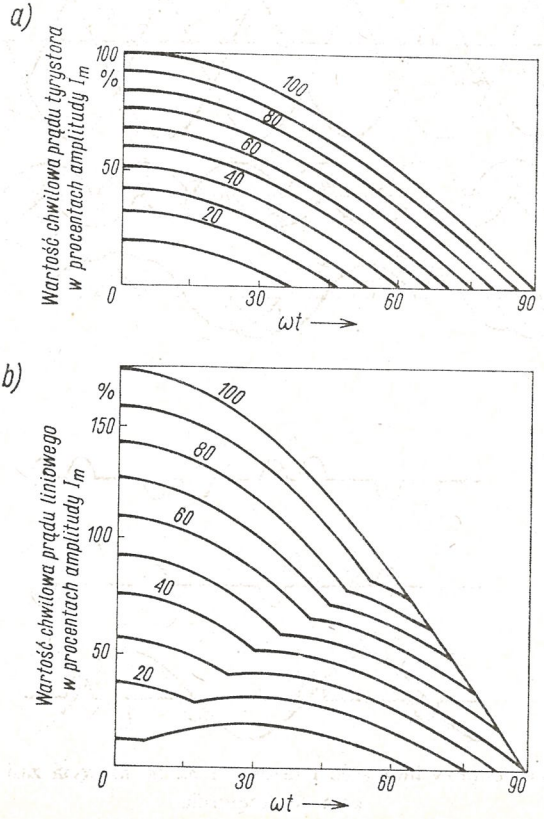
$$i(\omega t) = 0 \qquad \beta + \frac{\pi}{6} < \omega t \leqslant \frac{\pi}{2}$$

dla $0 < \beta \leqslant \frac{\pi}{6}$ lub $0 < \Theta \leqslant \frac{\pi}{3}$ (9.5)

$$i(\omega t) = 0 \qquad 0 < \omega t \leqslant \frac{\pi}{6} - \beta$$

$$i(\omega t) = I_m\left[\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\beta\right] \qquad \frac{\pi}{6} - \beta < \omega t \leqslant \frac{\pi}{6} + \beta$$

$$i(\omega t) = 0 \qquad \frac{\pi}{6} + \beta < \omega t \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

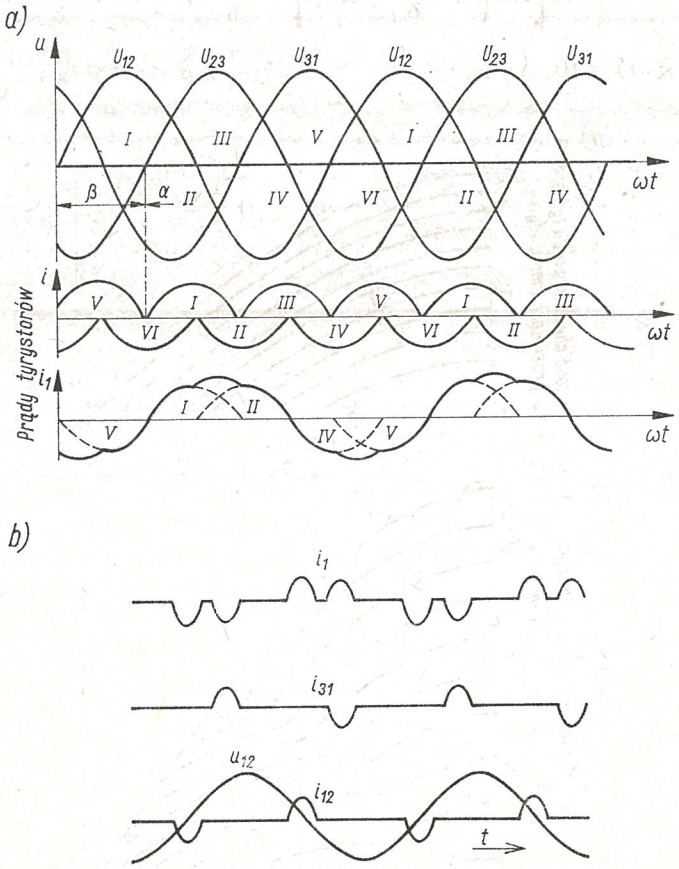



Rys. 16. Przebieg czasowy prądu: (a) tyrystora i (b) liniowego w przedziale $0 \leqslant \omega t \leqslant \pi/2$ dla różnych wartości składowej podstawowej przyjętej jako parametr

Na rys. 16 przedstawiono przebieg czasowy krzywej prądu tyrystora (rys. 16a) i prądu liniowego (rys. 16b), dla różnych procentowych wartości składowej podstawowej przyjętej jako parametr (wartości prądów podane są w procentach amplitudy prądu przy pełnym wysterowaniu — $I_m$)

Na rys. 17a i b przedstawiono przebiegi czasowe prądów liniowych i fazowych dla dwóch wybranych wartości kąta wysterowania: a) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ b) $\alpha > \frac{2\pi}{3}$. Na rys. 15a i 17a przedstawiona jest dodatkowo sekwencja przewodzenia poszczególnych tyrystorów układu (zgodnie z oznaczeniami na rys. 14). Wartości średnie i skuteczne prądu liniowego mogą być uzyskane w efekcie numerycznego obliczenia całek i ich kwadratów dla przebiegu prądu $i(\omega t)$ zgodnie z zależnościami (9.5).

Wystarczająco dokładny wynik można uzyskać przez sumowanie kwadratów współczynników Fouriera dla dużej liczby składników. Na rys. 18 przedstawiono współczynnik zawartości wyższych harmonicznych $K_{wh}$



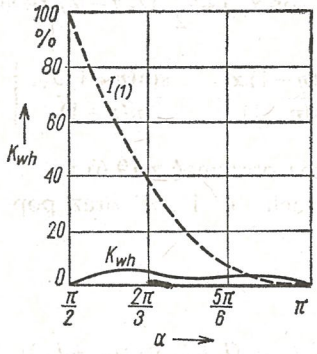

Rys. 17. Przebiegi czasowe prądów liniowych i fazowych na tle napięcia zasilania dla dwóch wartości kąta wysterowania

a) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ b) $\alpha > \frac{2\pi}{3}$

$$K_{wh} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{59} I_{(n)}^2}}{I_{(1)}} 100\% \tag{9.6}$$

w funkcji kąta wysterowania $\alpha$.

Sposób kojarzenia transformatora obniżającego (Tr) nie ma wpływu na zależność składowej podstawowej i wyższych harmonicznych prądu strony pierwotnej od kąta wysterowania $\alpha$. Ma natomiast wpływ na fazę początkową poszczególnych harmonicznych.




Rys. 18. Zależność współczynnika zawartości harmonicznych prądu członu dławikowego ($K_{wh}$) od kąta wysterowania $\alpha$

## 9.2. WYŻSZE HARMONICZNE NIECHARAKTERYSTYCZNE

W praktyce system idealnie symetryczny występuje bardzo rzadko. W ogromnej większości przypadków układ połączonych w trójkąt dławików, których prąd podstawowej harmonicznej jest regulowany poprzez sterowanie fazowe łączników tyrystorowych, generuje oprócz wyższych harmonicznych charakterystycznych również tzw. wh niecharakterystyczne, a więc takie których rząd jest różny od $6n \pm 1$ ($n = 0, 1, 2 \ldots$). Jest to rezultat wielu różnych rodzajów asymetrii, które mogą wystąpić w realnych warunkach indywidualnie albo w dowolnej wzajemnej kombinacji.

### Asymetria sterowania

*a) asymetria kątów sterowania pomiędzy tyrystorami tego samego łącznika*

Zgodnie z (3.3) i na podstawie rys. 14 prądy poszczególnych tyrystorów określone są zależnościami (9.6) i (9.7). Dla napięcia międzyfazowego $u_{12} = U_m \sin\omega t$:

$$\frac{i_I}{I_m} = \frac{1}{\pi}\left\{[(\pi-\alpha_I)\cos\alpha_I + \sin\alpha_I] + \frac{1}{2}[2(\pi-\alpha_I) - \sin 2(\pi-\alpha_I)]\cos\omega t + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{\sin(n-1)\alpha_I}{n(n-1)} - \frac{\sin(n+1)\alpha_I}{n(n+1)}\right]\cdot\cos(n\omega t)\right\} \tag{9.6a}$$

$$\frac{i_{IV}}{I_m} = \frac{1}{\pi}\left\{-[(\pi-\alpha_{IV})\cos\alpha_{IV} + \sin\alpha_{IV}] + \frac{1}{2}[2(\pi-\alpha_{IV}) - \sin 2(\pi-\alpha_{IV})]\cos\omega t - \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{\sin(n-1)\alpha_{IV}}{n(n-1)} - \frac{\sin(n+1)\alpha_{IV}}{n(n+1)}\right]\cos(n\omega t)\right\} \tag{9.6b}$$

Podobnie dla napięcia międzyfazowego $u_{23}$

$$\frac{i_{III}}{I_m} = \frac{1}{\pi}\left\{[(\pi-\alpha_{III})\cos\alpha_{III}+\sin\alpha_{III}]+\frac{1}{2}[2(\pi-\alpha_{III})-\sin 2(\pi-\alpha_{III})]\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)\right.$$
$$\left.+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{\sin(n-1)\alpha_{III}}{n(n-1)}-\frac{\sin(n+1)\alpha_{III}}{n(n+1)}\right]\cos n\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)\right\} \tag{9.7a}$$

$$\frac{i_{VI}}{I_m}\frac{1}{\pi}\left\{[-(\pi-\alpha_{VI})\cos\alpha_{VI}+\sin\alpha_{VI}]+\frac{1}{2}[2(\pi-\alpha_{VI})-\sin 2(\pi-\alpha_{VI})]\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)\right.$$
$$\left.-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{\sin(n-1)\alpha_{VI}}{n(n-1)}-\frac{\sin(n+1)\alpha_{VI}}{n(n+1)}\right]\cos n\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)\right\}. \tag{9.7b}$$

Zależności dla napięcia $u_{31}$ można otrzymać z (9.6) i (9.7) poprzez wprowadzenie odpowiednich indeksów przy symbolach „$i$" i „$\alpha$" oraz poprzez zmianę fazy początkowej $\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

Prąd fazowy fazy 1:

$$i_1 = (i_I+i_{IV})-(i_{III}+i_{VI}) \tag{9.8}$$

Analogicznie dla pozostałych prądów fazowych.

Wartość $n$-tej harmonicznej prądu $i_1(I_{1(n)})$ określona jest zależnością (9.9):

$$\frac{I_{1(n)}}{I_m} = \left[\left\{[I_{(n)}+(-1)^{n+1}I_{IV(n)}]-[I_{III(n)}+(-1)^{n+1}I_{VI(n)}]\cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right)\right\}^2\right.$$
$$\left.+\left\{[I_{III(n)}+(-1)^{n+1}I_{VI(n)}]\sin\left(n\frac{2\pi}{3}\right)\right\}^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{9.9}$$

gdzie

$$I_{I(n)} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n-1\alpha_I}{n(n-1)}-\frac{\sin(n+1)\alpha_I}{n(n+1)}\right].$$

Analogicznie dla tyrystorów — III, IV, VI.

Wartość harmonicznej prądu fazowego $i_{12}(I_{12(n)})$:

$$I_{12(n)} = I_{I(n)}+(-1)^{n+1}I_{IV(n)} \quad \text{itd.} \tag{9.10}$$

Kąt fazowy $n$-tej harmonicznej prądu $i_1$ wynosi:

$$\Phi_{1(n)} = \operatorname{arctg}\left\{\frac{[I_{IV(n)}+(-1)^{n+1}I_{VI(n)}]\sin\left(n\frac{2\pi}{3}\right)}{[I_{I(n)}+(-1)^{n+1}I_{IV(n)}]-[I_{III(n)}+(-1)^{n+1}I_{VI(n)}]\cos\left(n\frac{2\pi}{3}\right)}\right\} \tag{9.11}$$

W tych warunkach pracy, generowane są więc w prądach liniowych wszystkie, zarówno parzyste jak i nieparzyste wh. Najbardziej interesującymi z punktu widzenia współpracy z siecią, prócz 3-ciej harmonicznej jest składowa stała i parzyste wh. Prądy te można określić zależnościami (9.12; 9.13) będącymi inną postacią wyrażeń (9.6) i (9.7) dla tych harmonicznych.

$$I_{12(2n)} = I_{(2n)}(\alpha, \delta_{12}) \Big/ -2n\frac{\pi}{2}$$

$$I_{23(2n)} = I_{(2n)}(\alpha, \delta_{23}) \Big/ -2n\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) \tag{9.12}$$

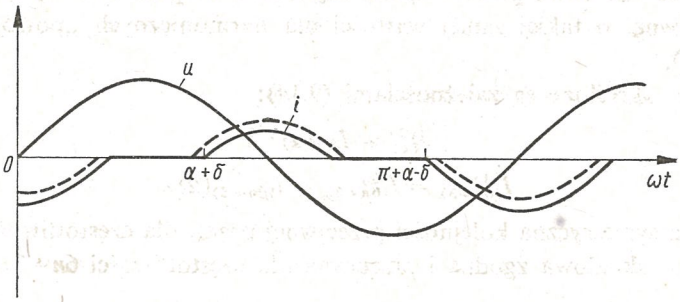
$$I_{31(2n)} = I_{(2n)}(\alpha, \delta_{31}) \Big/ -2n\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) \qquad n = 0, 1, 2$$

gdzie zgodnie z rys. 19

$$\frac{I_{(0)}(\alpha, \delta)}{I_m} = \frac{2}{\pi}[\cos(\pi-\alpha)\sin\delta + (\pi-\alpha)\sin(\pi-\alpha)\sin\delta - \delta\cos(\pi-\alpha)\cos\delta] \tag{9.13a}$$

$$\frac{I_{(2n)}(\alpha, \delta)}{I_m} = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{2n}\left[\frac{1}{2n+1}\cdot\cos(2n+1)(\pi-\alpha)\cdot\sin(2n+1)\delta\right.$$
$$\left. -\frac{1}{2n-1}\cdot\cos(2n-1)(\pi-\alpha)\cdot\sin(2n-1)\delta\right]. \tag{9.13b}$$

Generacja parzystych wh, w szczególności drugiej (jeżeli istnieją warunki jej transformacji do systemu) oraz trzeciej harmonicznej, może doprowadzić do zjawisk rezonansowych w sieci zasilającej. Parzyste wh o rzędach większych od dwóch mają dużo mniejsze wartości. Występująca składowa stała prądu może prowadzić do nasycenia transformatora obniżającego (jeżeli występuje w instalacji), a to może być źródłem dodatkowych wh.




Rys. 19. Przebieg czasowy prądu łącznika przy asymetrycznym sterowaniu tyrystorów

*b) asymetria kątów zapłonu tyrystorów w poszczególnych fazach*

Ze względu na symetrię kątów sterowania dla tyrystorów tego samego łącznika, parzyste harmoniczne nie występują w prądach liniowych, natomiast pojawiają się tam harmoniczne „potrójne", a wśród nich najbardziej znacząca — trzecia. Maksimum 3 harmonicznej w sieci wystąpi wówczas, jeżeli w jednym z boków trójkąta indukcyjności kąt sterowania $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, a w pozostałych bokach $\alpha = \pi$ lub $\alpha = \frac{\pi}{2}$. W tym przypadku nie ma trzeciej harmonicznej krążącej w obwodzie trójkąta dławików, natomiast cała 3 harmoniczna wytworzona w układzie płynie do sieci zasilającej. Należy zauważyć, że jeżeli maksimum 3 harmonicznej w prądzie liniowym jest równe maksymalnej wartości 3 harmonicznej

w boku trójkąta, oznacza to, że maksymalna względna wartość 3 harmonicznej w prądzie liniowym w procentach jego wartości maksymalnej wynosi: $\frac{13.8}{\sqrt{3}} \cdot 100\% \simeq 8\%$.

Asymetria sterowania — czynniki a i b — będąca wewnętrznym problemem układu sterowania, może być usunięta w różny sposób np. poprzez precyzyjne wykonanie poszczególnych kanałów sterowania lub poprzez wymuszenie — przy pomocy pomocniczego sprzężenia zwrotnego — identyczności „dodatnich" i „ujemnych" półokresów prądów tyrystorów. Niekiedy praca asymetryczna kompensatora jest rezultatem celowego działania. Sieć zasilająca jest symetryczna w ustalonych warunkach pracy i wówczas w kompensatorze pełniącym rolę stabilizatora napięcia, tyrystory w stopniu dławikowym są sterowane we wszystkich trzech fazach w sposób symetryczny. Asymetria sterowania zaworów dla symetryzacji pracy odbioru jest stosowana głównie w przypadku kompensatorów przemysłowych przeznaczonych np. do redukcji oddziaływania pieców łukowych na system energetyczny.

Asymetria elementów

*c) nierówna wartość indukcyjności dławików w bokach trójkąta*

Gdy indukcyjności nie są jednakowe, generowane są oprócz składowej podstawowej również wszystkie harmoniczne nieparzystych rzędów, tworząc w zależności od rzędu wh — układ składowych symetrycznych o kolejności zerowej, zgodnej i przeciwnej. Dodatkowo można wyróżnić składową przeciwną dla częstotliwości podstawowej oraz składowe — zgodnąi przeciwną, o takiej samej wartości dla harmonicznych „potrójnych" — $6n+3$ ($n = 0, 1, 2 \ldots$).

Składowe te określone są zależnościami (9.14):

$$I^{(2)}_{(1)} = I_{(1)}(\alpha) \cdot \lambda$$
$$I^{(1)}_{(6n+3)} = I^{(2)}_{(6n+3)} = I_{(6n+3)}(\alpha)\lambda \tag{9.14}$$

$I^{(2)}_{(1)}$ — składowa symetryczna kolejności przeciwnej prądu dla częstotliwości podstawowej $I^{(1)}_{(6n+3)}$, $I^{(2)}_{(6n+3)}$ — składowa zgodna i przeciwna dla częstotliwości $6n+3$ ($n = 0, 1, 2 \ldots$)

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{l_{12}^2} + \frac{1}{l_{23}^2} + \frac{1}{l_{31}^2} - \frac{1}{l_{12} l_{23}} - \frac{1}{l_{23} l_{31}} - \frac{1}{l_{31} l_{12}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$l_{12} = \frac{L_{12}}{L_0}; \quad l_{23} = \frac{L_{23}}{L_0}; \quad l_{31} = \frac{L_{31}}{L_0}; \quad \frac{1}{L_0} = \frac{1}{3}\left( \frac{1}{L_{12}} + \frac{1}{L_{23}} + \frac{1}{L_{31}} \right). \tag{9.15}$$

$I_{(1)}(\alpha)$ i $I_{(6n+3)}(\alpha)$ definiowane są zgodnie z zależnością 9.16 (wartość $L_0$ zgodnie z 9.15). Zależności (9.16) definiują wartości wh prądów liniowych generowanych w idealnych warunkach pracy ($L_{12} = L_{23} = L_{31} = L_0$).

$$I_{12(2n+1)} = I_{(2n+1)}(\alpha) \Big/ -(2n+1)\frac{\pi}{2} \qquad n = 0, 1, 2.$$

$$I_{23(2n+1)} = I_{(2n+1)}(\alpha) \Big/ -(2n+1)\left( \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$I_{31(2n+1)} = I_{(2n+1)}(\alpha) \Big/ -(2n+1)\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\frac{I_{(2n+1)}}{I_m} = I^m_{(2n+1)} K_{(2n+1)}(\alpha) \qquad I_m = \frac{u_m}{\omega L_0}$$

$$I^m_{(1)} = 1 \tag{9.16}$$

$$K_{(1)}(\alpha) = \frac{1}{\pi}\left[2(\pi-\alpha) - \sin 2(\pi-\alpha)\right]$$

$$I^m_{(2n+1)} = \frac{1}{\pi}\,\frac{2}{2n+1}\left[\frac{1}{2n}\sin 2n\,\frac{\pi}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\sin(2n+2)\,\frac{\pi}{2n+1}\right]$$

$n = 1, 2, 3 \ldots$

$$K_{(2n+1)}(\alpha) = \frac{1}{\pi}\,\frac{2}{2n+1}\left[\frac{1}{2n}\sin 2n(\pi-\alpha) - \frac{1}{2n+2}\sin(2n+2)(\pi-\alpha)\right]\cdot\frac{1}{I^m_{(2n+1)}}.$$

Przykładowo przy 1%-wej asymetrii indukcyjności

$$l_{12} = \frac{1}{0{,}99} \qquad l_{23} = \frac{1}{1{,}01} \qquad l_{31} = 1 \qquad \text{wówczas } \lambda \simeq 10^{-2}.$$

Dla tego przypadku wartość składowej symetrycznej kolejności zgodnej i przeciwnej wynosi 1% wartości składowej symetrycznej zerowej harmonicznych „potrójnych". Wpływ asymetrii indukcyjności na wartość wh charakterystycznych jest pomijalny.

Jak dotychczas, trudno uzyskać zadowalające rezultaty redukcji harmonicznych „potrójnych" jeżeli użyte są w bokach trójkąta trzy oddzielne dławiki. Problem ten wynika z trudności wyprodukowania różnych jednostek mających identyczne charakterystyki magnesowania.

*d) nierówność reaktancji fazowych transformatora*

Tolerancja wartości reaktancji fazowych transformatora ma bardzo mały wpływ na wartość wh generowanych przez układ, w porównaniu ze znacznie większym efektem wynikającym z asymetrii indukcyjności dławików.

Asymetria zasilania

*e) niesymetria napięcia sieci w punkcie podłączenia stopnia dławikowego*

Łatwo zauważyć, że niesymetria napięcia zasilania daje taki sam efekt jak nierówność wartości indukcyjności dławików. W normalnych warunkach pracy składowa przeciwna napięcia zasilania jest mała. Jednakże w przypadku zakłóceń jej wartość może być znacząca, a to prowadzi w konsekwencji do generacji odpowiednich składowych prądów wprowadzanych do systemu.

*f) niesinusoidalność napięcia*

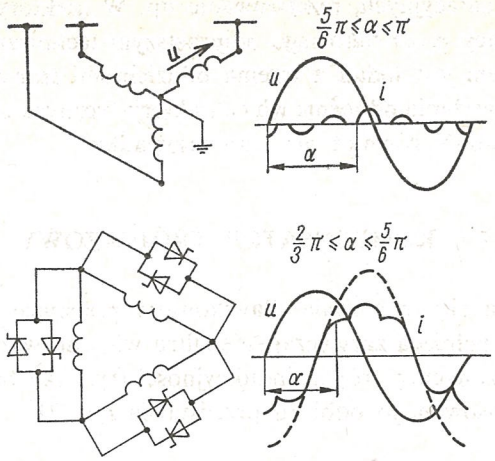
Wyższe harmoniczne w napięciach powodują trudności precyzyjnego określania punktów czasu, w których harmoniczne podstawowe odpowiednich napięć międzyfazowych przyjmują wartość zerową lub wartości maksymalne i minimalne. Napięcia te spełniają w układzie sterowania rolę napięć synchronizujących, a wyróżnione w ich przebiegu czasowym punkty (wartości zerowe, maksymalne i minimalne) są punktami odniesienia do określenia kątów wysterowania tyrystorów.

Każdy z wyszczególnionych czynników a ÷ f jest źródłem niecharakterystycznych wh i równocześnie ma niewielki wpływ na wartość wh charakterystycznych (dla stopnia asymetrii występującego w praktycznych układach). Badania wykazały, że wh niecharakterystyczne spowodowane odstępstwami w stosunku do wartości idealnych są około dziesięć razy mniejsze od dominujących wh charakterystycznych. Jednakże nie mogą być one pominięte w rozważaniach na temat współpracy kompensatora z systemem energetycznym, w szczególności te najniższych rzędów — 2 i 3. Pewnego bardziej szczegółowego komentarza wymaga 3 harmoniczna, jest ona bowiem pod względem wartości względnie duża i w związku z tym bardzo kłopotliwa. Zamykanie się tej harmonicznej w obrębie trójkąta indukcyjności w praktyce nigdy nie jest idealne. W rzeczywistości pewna asymetria pomiędzy fazami występuje zawsze i ta harmoniczna pojawia się w sieci zasilającej. Źródłem trzeciej harmonicznej są czynniki a ÷ e, d — w bardzo małym stopniu, przy czym c, d i e wpływają na wartości harmonicznej w stopniu największym gdy kąt wysterowania $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

## 10. UKŁAD DŁAWIK/TRANSFORMATOR

Schemat ideowy systemu przedstawia rys. 20a

Układ ten stosuje się w celu redukcji kosztów zespołu dławik-transformator. Jest to transformator mający bardzo duże — w granicznym przypadku 100%-we napięcie zwarcia, wysoki poziom nasycenia rdzenia i liniową w szerokim zakresie zmian prądu charakterystykę magnesowania. Po stronie wtórnej unika się raczej stosowania dławików, starając się dobrać, zgodnie z potrzebami, wartość reaktancji rozproszenia transformatora. Jedno z uzwojeń jest łączone w trójkąt w celu likwidacji w prądach liniowych harmonicznych o rzędach będących krotnością trzech. W przypadku skojarzenia transformatora typu gwiazda/gwiazda do tego celu stosuje się dodatkowe uzwojenia połączone w trójkąt ściśle przylegające do uzwojenia wtórnego. Dla układu współpracującego z siecią wysokiego napięcia strona pierwotna bywa najczęściej połączona w gwiazdę z uziemionym punktem zerowym, podczas gdy uzwojenie wtórne jest połączone w trójkąt (rys. 20a). Gdy kąt wysterowania zaworów $\alpha$, odniesiony do punktów przejścia przez zero odpowiednich napięć fazowych, przyjmuje wartość z przedziału $5\frac{\pi}{6} \div \pi$ (rys. 20b), w dowolnej chwili przewodzi tylko jeden z tyrystorów (lub żaden nie przewodzi) i zwierając skojarzone z nim uzwojenie tworzą pierwszy obwód zwarcia. Impuls prądu zwarcia jest ograniczony reak-




Rys. 20. Schemat ideowy układu dławik/transformator (a) oraz przebiegi czasowe napięć fazowych i prądów liniowych dla dwóch różnych wartości kąta wysterowania $\alpha$ (b, c)

tancją rozproszenia transformatora. W tym samym czasie przewodzący zawór zwiera również drugi obwód utworzony z szeregowo połączonych dwóch pozostałych uzwojeń (boków trójkąta). Impulsy tego prądu zwarciowego będą miały dwukrotnie mniejszą wartość, jako że są ograniczone przez dwie reaktancje rozproszenia. Tak więc w prądzie liniowym, w każdej połowie okresu wystąpią trzy impulsy prądowe, największy związany z pierwszym obwodem zwarcia, oraz dwa o połowę mniejsze, które związane są z przepływem prądu zwarcia przez dwa szeregowo połączone uzwojenia w pozostałych fazach (drugi obwód zwarcia). Gdy kąt wysterowania przyjmie wartość zawartą w granicach $2\pi/3 \div 5\pi/6$, przedziały przewodzenia poszczególnych tyrystorów zachodzą na siebie i w każdej połowie okresu w przebiegu prądu można wyróżnić pięć segmentów (rys. 20c). Dla kąta wysterowania $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ prąd ma kształt sinusoidalny.

Rozwiązanie to stawia przed układem sterowania wysokie wymagania, głównie w celu wykluczenia warunków mogących spowodować stan magnesowania rdzenia składową stałą prądu.

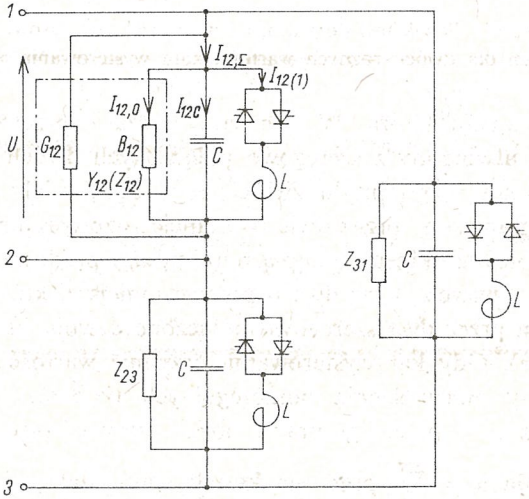
Układ ten posiada szereg zalet, spośród których najistotniejszymi są:
— zespolona i zwarta struktura,
— możliwość podłączenia do szyn średniego i wysokiego napięcia bez pośrednictwa transformatora obniżającego,
— ze względu na wysoką impedancję prąd zwarcia jest równy lub tego samego rzędu co prąd znamionowy,
— posiada podobnie jak każdy transformator zdolność przeciążeniową,
— stwarza warunki korzystnego wyboru parametrów prądowo-napięciowych tyrystorów.

Podobnie jak dla transformatora, również w tym przypadku aktualnym bywa niekiedy pytanie: transformator trójfazowy czy trzy jednostki jednofazowe Podstawą takiej decyzji jest każdorazowa analiza techniczno-ekonomiczna uwzględniająca między innymi takie aspekty jak: napięcie systemu, moc całkowitą instalacji, wymiary, ciężar, koszty,

możliwość awarii eksploatacyjnych, rezerwowanie itp. W niektórych zastosowaniach np. w celu symetryzacji pracy pieca łukowego najprostszym technicznie, z punktu widzenia sterowania, rozwiązaniem jest układ z trzema oddzielnymi transformatorami. Wszelkie uczynione wcześniej rozważania odnośnie wh charakterystycznych i niecharakterystycznych zachowują swoją aktualność również dla tego przypadku.

## 11. KOMPENSATOR TRÓJFAZOWY

Kompensator składa się ze stopnia dławikowego pracującego równolegle ze stałą baterią kondensatorów pełniącą zazwyczaj rolę filtru wh, zarówno dla kompensowanego odbioru jak i dla połączonych w trójkąt indukcyjności (rys. 14). Schemat zastępczy kompensatora oraz kompensowanego odbioru przedstawia rys. 21.




Rys. 21. Schemat zastępczy kompensatora oraz kompensowanego odbioru
$Z_{12}$, $Z_{23}$, $Z_{31}$ — impedancje kompensowanego obciążenia

Kąt wysterowania łączników tyrystorowych ustalony jest poprzez układ sterowania tak, aby przy zmianach prądu biernego obciążenia $I_0$ (dla odbioru symetrycznego) wypadkowy prąd fazowy $I_{\Sigma(1)}$ miał zawsze stałą wartość wynikającą z dopuszczalnego poziomu nieskompensowania tzn. aby dla harmonicznej podstawowej spełniona była zależność:

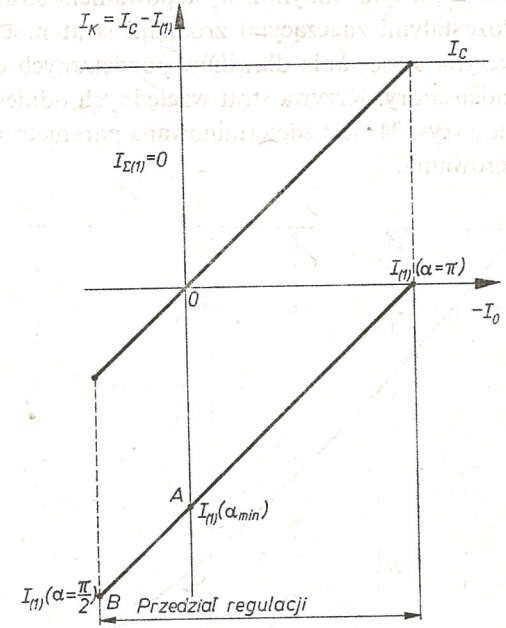
$$I_{\Sigma(1)} = I_C - I_{(1)} - I_0 = const \tag{11.1}$$

gdzie $I_0$ — prąd bierny fazowy płynący przez połączone w trójkąt zastępcze impedancje $Z_{12}$, $Z_{23}$, $Z_{31}$ reprezentujące rzeczywiste kompensowane obciążenie
$I_C$ — prąd fazowy stałej baterii kondensatorów.
Stąd prąd fazowy dławia $I_{(1)}$ wynosi:

$$I_{(1)} = \frac{I_m}{\pi}[2(\pi-\alpha) - \sin 2(\pi-\alpha)] = I_C - I_0 - I_{\Sigma(1)} \tag{11.2}$$

Tak więc funkcją układu pomiarowo-regulacyjnego jest ustalenie, w oparciu o dokonany pomiar, wartości kątów sterowania $\alpha$ dla każdego z łączników, aby przy zadanych wartościach $I_C$, $I_0$, $I_{\Sigma(1)}$ spełniona była ogólna zależność (11.2).

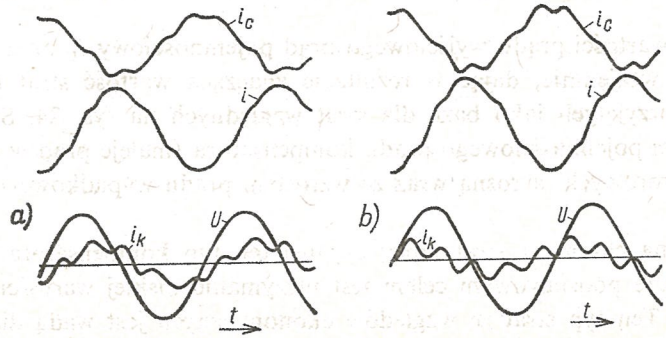
Jeżeli dla przykładu założyć kompensację idealną tzn. $I_{\Sigma(1)} = 0$, wówczas zależność prądu kompensatora $I_K = (I_C - I_{(1)})$ od prądu obciążenia $I_0$ ma charakter jak na rys. 22.




Rys. 22. Charakterystyka sterowania kompensatora ze stałą baterią kondensatorów oraz sterowanym fazowo stopniem dławikowym

Punkt A na rys. 22 odpowiada pracy przy $\alpha_{min}$ tzn. w tym punkcie spełniony jest warunek $I_C = -I_{(1)}(\alpha_{min})$.

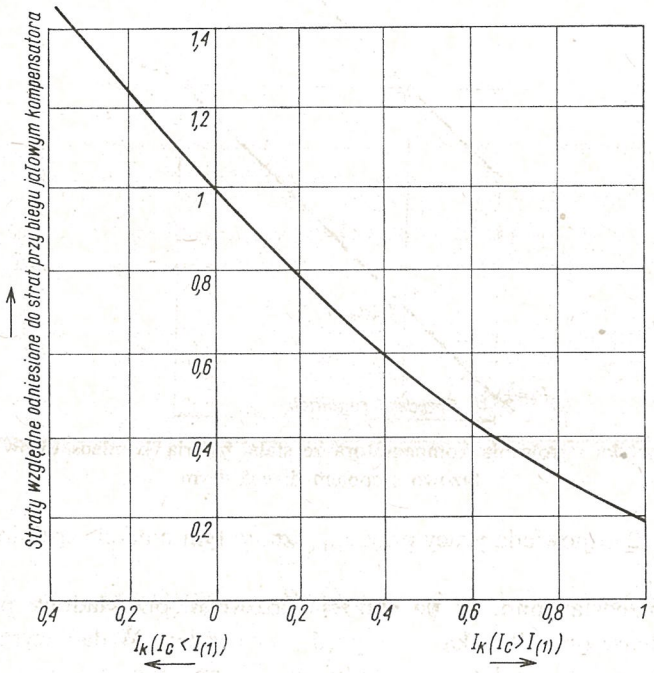
Na rys. 23 przedstawiono, na tle napięcia fazowego, przykładowe przebiegi prądów liniowych: kondensatora, dławika oraz prąd sumaryczny. Widać wyraźnie (rys. 23a), że zarejestrowane przebiegi dotyczą układu, w którym moc stopnia dławikowego była




Rys. 23. Przebiegi czasowe prądów liniowych kondensatora — $i_C$, dławika $i$, kompensatora — $i_K$ na tle napięcia fazowego ($u$) dla a) $I_C < I_{(1)}$; b) $I_C > I_{(1)}$

większa od mocy kondensatorów, dzięki czemu możliwa była praca z prądem wypadkowym dla podstawowej harmonicznej o charakterze indukcyjnym.

Klasyczne rozwiązanie tego typu kompensatora wymaga przy wyższych napięciach i pracy bez transformatora pośredniczącego, zastosowania łączników tyrystorowych o odpowiednio wysokiej klasie napięciowej, co wiąże się zazwyczaj z koniecznością szeregowej współpracy tyrystorów, a tym samym z występowaniem strat mocy na elementach półprzewodnikowych. Pozostałymi znaczącymi źródłami strat mocy czynnej w układzie są: dławiki (jest to przyczyna stosowania dławików powietrznych charakteryzujących się dużą dobrocią) oraz kondensatory. Krzywa strat względnych odniesionych do strat mocy przy biegu jałowym układu (rys. 24) jest zdeterminowana parametrami elementów obwodu oraz przyjętą zasadą sterowania.




Rys. 24. [5]. Zależność względnych strat mocy czynnej w funkcji prądu kompensatora

Dla zerowej wartości prądu wyjściowego prąd pojemnościowy $I_C$ oraz indukcyjny $I_{(1)}$ kompensują się wzajemnie, dając w rezultacie znacząca wartość strat biegu jałowego kompensatora, przyjętych jako baza dla strat względnych na rys. 24. Straty te maleją wraz ze wzrostem pojemnościowego prądu kompensatora (maleje prąd w dławikach oraz łącznikach tyrystorowych) a rosną wraz ze wzrostem prądu wypadkowego o charakterze indukcyjnym.

Ze względu na charakter strat mocy czynnej ten typ kompensatora stosowany jest głównie tam, gdzie podstawowym celem jest utrzymanie niskiej wartości wypadkowego prądu biernego. Ten typ strat ze względów ekonomicznych jest wadą dla zastosowania kompensatora w systemie transmisyjnym w celu kompensacji dynamicznej, gdyż wówczas wartość średnia prądu kompensatora jest niska.

Odwrotna relacja występuje dla zastosowań przemysłowych, gdzie średnia wartość prądu jest z reguły duża i w związku z tym praca odbywa się w bardziej ekonomicznym przedziale kątów wysterowania. Przy pracy poza przedziałem regulacji, kompensator stanowi z punktu widzenia systemu zasilania stałą baterię kondensatorów lub baterię kondensatorów połączoną równolegle z indukcyjnością. Tak utworzony obwód (z uwzględniem impedancji systemu) przy dużej dobroci elementów składowych, wykazuje niekiedy skłonność do słabo tłumionych oscylacji o częstotliwości równej jego częstotliwości rezonansowej. Tak więc dla dużych zakłóceń, gdy punkt pracy układu wychodzi poza przedział regulacji, zachowanie się kompensatora jest niekontrolowane i zdeterminowane tylko parametrami elementów obwodu. Dodatkowo stała bateria kondensatorów podnosi wartość dynamicznej mocy zwarcia.

## 12. ZAKOŃCZENIE

Rosnące zapotrzebowanie na szybką kompensację prądów biernych, symetryzację niektórych odbiorników przemysłowych oraz stabilizację napięcia w systemach energetycznych, wymaga coraz lepszej znajomości własności i reakcji urządzeń służących do tych celów w różnych warunkach pracy. Taka wiedza pozwala bowiem na lepsze, pod względem technicznym i ekonomicznym, projektowanie tych systemów. Umożliwia również wyposażenie ich układów sterowania w dodatkowe funkcje podnoszące wartość użytkową oraz pozwala zmniejszyć do minimum negatywne aspekty ich współpracy z systemem zasilania.

Prace związane z kompensatorami statycznymi zawierającymi gałęzie dławikowe, prowadzone w wielu ośrodkach badawczych, zmierzają między innymi w kierunku optymalizacji schematów części siłowej układu w celu poprawienia jego własności energetycznych. Powstało i prawdopodobnie powstanie jeszcze wiele różnych rozwiązań szczegółowych, ale w ogromnej większości przypadków będą one jedynie mniej lub bardziej rozbudowanymi modyfikacjami układu podstawowego. Dlatego też znajomość procesów dokonujących się w tym układzie ma bardzo duże znaczenie. W artykule nie analizowano przypadku współpracy łącznika tyrystorowego z indukcyjnością nieliniową, zakładając że stan taki jest nieprawidłowy w normalnej pracy układu, a jego przyczyną może być błąd projektowy lub stan awaryjny instalacji.

## BIBLIOGRAFIA

1. H. Achenbach, W. Hanke, W. Hochstetter: *Controllable static reactive power compensators in electrical supply system.* II IFAC Symposium on Control in Power Electronics and Electrical Drives, Düsseldorf October 1977
2. C.B. Cooper, S. Assir Hussayni: *Thyristor switched reactors for distribution systems.* Technical Seminar on Control of Reactive Compensation for AC Power Systems, London 1980
3. M.M. Gavrilovic, G. Sybille, V.Q. Do, I.Y. Lemay: *Controlled reactive compensation modelling on the IREQ power system simulator.* International Symposium on Controlled Reactive Compensation, Quebec Canada 1979
4. L. Gyugyi, E.R. Taylor: *Operating and performance characteristics of static, thyristor controlled shunt compensators.* International Symposium on Controlled Reactive Compensation, Quebec Canada 1979

5. L. Gyugyi, E. R. Taylor: *Characteristics of static, thyristor — controlled shunt compensators for power transmission system applications.* IEEE Tran. Vol PAS — 99 No. 5 1980
6. Z. Hanzelka, St. Piróg: *Statyczny kompensator obciążeń biernych.* Konferencja Naukowo-Techniczna, Białystok 1984
7. Z. Hanzelka: *Analiza wyższych harmonicznych (wh) prądu, generowanych przez statyczny kompensator z regulowanym prądem indukcyjnym.* Sympozjum — „Systemy Elektroenergetyczne — eksploatacja i rozwój", Wrocław 26—27 wrzesień 1985
8. T. Himci, S. Nakonishi, S. Funabiki: *Generalized analytical model for thyristor controlled variable inductor.* International Semiconductor Power Converter Conference Florida 1982
9. W. Hudjakow, A. Czwanow: *Uprawlajemyj staticzieskij istocznik reaktiwnoj moszcznosti.* Elektriczestwo 1969 No. 1
10. R. M. Marthur: *Thyristor controlled compensators: evaluation of a new concept.* International Symposium on Controlle Reactive Compensation, Quebec Canada 1979
11. R. M. Marthur: *A study of non-characteristic harmonics generated by thyristor phase-controlled reactors.* International Conference on Thyristor and Variable Static Equipment for ac and dc transmission. London 1981
12. W. Mc Murray: *A comparative study of symmetrical three-phase circuits for phase-controlled ac motor drives.* IEEE Transactions 1974 Vol. IA — 10 No. 3
13. H. Tunia: *Układy energoelektroniczne.* Warszawa: WNT, 1982
14. W. Shepherd, P. Zand: *Energy flow and power factor in nonsinusoidal circuits.* Cambridge University Press Cambridge 1979
15. H. Supronowicz: *Poprawa współczynnika mocy układów przekształtnikowych.* Warszawa: WNT, 1981

Z. HANZELKA

## STATIC REACTIVE CURRENT COMPENSATOR WITH THYRISTOR CONTROLLED REACTORS

### Summary

The author analyses a three-phase static compensator provided with an inductive current regulator, taking into account problems concerning the generation of characteristic and non-characteristic harmonics and the TCR/FC co-operation.

Z. HANZELKA

## STATOCOMPENSATEUR À COMBINATEUR DU COURANT INDUCTIF

### Résumé

L'article contient une analyse du compensateur triphasé à combinateur du courant inductif qui touche entre autres tels problèmes que génération des harmoniques caractéristiques et non caractéristiques du courant, ainsi que collaboration de l'inductance avec la batterie parallèle des condensateurs.

Z. HANZELKA

## STATISCHER KOMPENSATOR MIT STEUERUNG MITTELS INDUKTIVEN BLINDSTROMS

### Zusammenfassung

Im Artikel werden Untersuchungen mit einem Dreiphasenkompensator mit Steuerung mittels induktiven Blindstroms beschrieben. Es wurden u.a. auch Fragen der ordentlichen und außerordentlichen Stromoberwellen untersucht sowie die Zusammenarbeit einer Drosselstufe mit einer Kondensatorbatterie.

З. ХАНЗЕЛЬКА

# СТАТИЧЕСКИЙ ИСТОЧНИК РЕАКТИВНОЙ МОЩНОСТИ (И. Р. М.) С УПРАВЛЯЕМЫМ ВЕНТИЛЯМИ РЕАКТОРОМ

Р е з ю м е

Проанализирована работа трехфазного компенсатора с управляемым вентилями реактором. В частности, анализированы проблемы характеристических гармоник и работу параллельно соединненых: управляемого реактора и нерегулируемой батерии конденсаторов.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1988, 34, z. 1, ss. 237-251

621.396.67.012

# Anteny paskowe
# Część I: Pojedyncze promienniki

DANIEL J. BEM (Wrocław)

*Instytut Telekomunikacji i Akustyki, Politechnika Wrocławska*

RYSZARD J. KATULSKI (Gdańsk)

*Instytut Telekomunikacji, Politechnika Gdańska*

*Artykuł wpłynął 1985.12.10*
*Autoryzowano do druku 1987.04.03*

W pracy przedstawiono podstawy projektowania i technologii pojedynczych promienników anten paskowych. Opisano budowę i właściwości elektryczne takich anten. Dokonano klasyfikacji anten paskowych, wyróżniając łatową antenę paskową z prostokątnym promiennikiem jako typ podstawowy, mający największe znaczenie praktyczne. Omówiono metodykę analizowania właściwości promienników anten paskowych przy użyciu modeli zastępczych, wskazując na przydatność modelu transmisyjnego do analizy właściwości polowych oraz modelu wnękowego do analizy właściwości obwodowych promiennika. Zamieszczono także metodykę projektowania promiennika prostokątnego i kołowego wraz z analizą wyboru podłoża dielektrycznego.

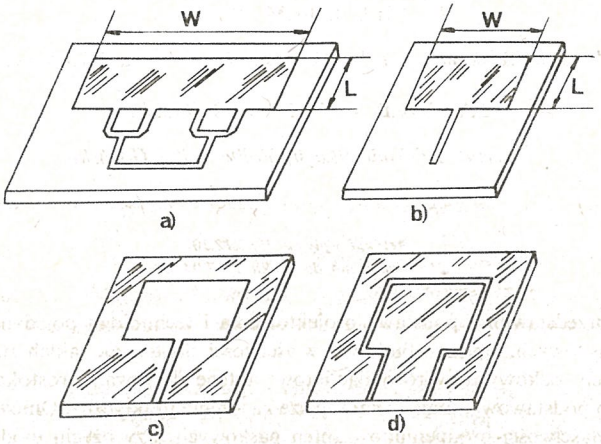
## 1. WPROWADZENIE

Rozwój techniki lotniczej i rakietowej zrodził zapotrzebowanie na anteny, których konstrukcja nie pogarszałaby właściwości aerodynamicznych pojazdów latających. Wymagania takie spełnia antena, której budowa jest podobna do konstrukcji niesymetrycznej linii paskowej, z czego wywodzi się jej nazwa antena paskowa. Antena taka składa się z promiennika i przewodzącej podstawy, pomiędzy którymi znajduje się dielektryk. Dla typowych, spotykanych w praktyce wymiarów promienników oraz grubości warstwy dielektrycznej, całkowita masa anteny paskowej jest niewielka. Ponadto geometria takiej anteny zapewnia dużą stabilność mechaniczną [1].

Antena paskowa promieniuje w kierunku prostopadłym do powierzchni promiennika. Zysk energetyczny pojedynczego promiennika zależy od jego kształtu i nie przekracza kilku dB. Odpowiada temu szerokość wiązki głównej w przedziale od 70° do 120°. Sprawność energetyczna anten paskowych jest duża i zależy przede wszystkim od jakości zastosowanego dielektryka. Dla dielektryków o małej stratności może dochodzić do 95...98%. Wadą anten paskowych jest niewielka względna szerokość pasma pracy, zawierająca się w granicach od 0,5 do 3,5% [2].

## 2. KLASYFIKACJA ANTEN PASKOWYCH

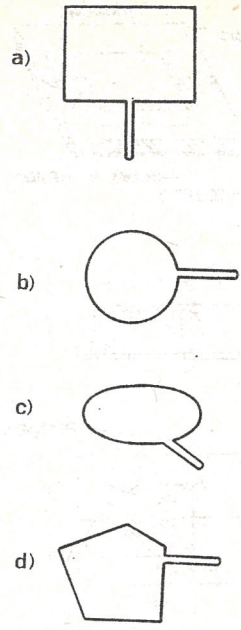
Uwzględniając budowę oraz mechanizm promieniowania, anteny paskowe dzielimy na cztery podstawowe grupy [1]:
— szerokie anteny paskowe WMA (Wide Microstrip Antennas),
— łatowe anteny paskowe PMA (Patch Microstrip Antennas),
— szczelinowe anteny paskowe MSA (Microstrip Slot Antennas),
— koplanarne anteny paskowe CSA (Coplanar Slot Antennas).
Budowę promienników wymienionych typów anten paskowych pokazano na rys. 1.




Rys. 1. Typowe rodzaje promienników anten paskowych:
a) szeroki, b) łatowy, c) szczelinowy, d) koplanarny

W promiennikach szerokich i łatowych ma miejsce zjawisko promieniowania pola przez linię paskową o odpowiednio dobranych wymiarach tak, aby jak największa część energii pola elektromagnetycznego zgromadzona w pobliżu krawędzi paska została wypromieniowana w otaczającą przestrzeń. Podstawową różnicą pomiędzy szeroką (WMA) a łatową (PMA) anteną paskową jest wartość stosunku szerokości $W$ promiennika do jego długości $L$. Przyjmuje się, że w szerokich antenach paskowych $W/L > 2$, zaś w łatowych antenach paskowych wartość tego stosunku zawiera się w granicach od 1 do 2. Poza tym, promienniki szerokich anten paskowych są zasilane w dwu lub więcej punktach. W łatowych antenach paskowych natomiast promienniki są zasilane w jednym punkcie. Zagadnienie to omawiamy w rozdziale dotyczącym projektowania promienników anten paskowych. Promienniki szczelinowych i koplanarnych anten paskowych są zbudowane ze szczelin w przewodzących płaszczyznach i pracują na zasadzie promieniowania fali elektromagnetycznej przez linie szczelinową lub koplanarną również o odpowiednio dobranych rozmiarach spełniających warunki wypromieniowania.

Przedstawioną klasyfikację, w odniesieniu do łatowych anten paskowych, można rozszerzyć dokonując podziału promienników ze względu na ich kształt. Na tej podstawie promienniki łatowych anten paskowych dzielimy na (rys. 2) [2]:
— prostokątne,
— kołowe,




Rys. 2. Typowe kształty promienników łatowych:
a) prostokątny, b) kołowy, c) eliptyczny, d) pięcioboczny

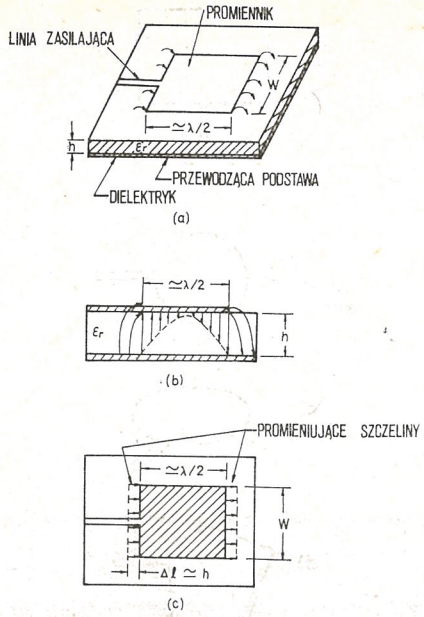
— eliptyczne,
— pięcioboczne.

W praktyce najczęściej stosuje się łatowe anteny paskowe z prostokątnym, rzadziej z kołowym promiennikiem.

## 3. MECHANIZM PROMIENIOWANIA ANTENY PASKOWEJ

Mechanizm promieniowania anteny paskowej można najlepiej wyjaśnić na prostym przykładzie anteny z prostokątnym promiennikiem zasilanym za pomocą niesymetrycznej linii paskowej w sposób pokazany na rys. 3a, przy czym długość $L$ promiennika jest równa około połowie długości fali pobudzającej antenę. Źródłem promieniowania jest pole w szczelinach pomiędzy krawędzią promiennika i przewodzącą podstawą. Ma tutaj miejsce zjawisko analogiczne do promieniowania otwartego końca linii transmisyjnej, w tym przypadku niesymetrycznej linii paskowej [2]. Dobierając odpowiednio rozmiary elektryczne promiennika, można uzyskać żądany rozkład pola na jego krawędziach. W podstawowej strukturze prostokątnej anteny paskowej (rys. 3a) rozkład pola elektrycznego wzdłuż krawędzi promiennika poprzecznych do kierunku transmisji jest równomierny, wzdłuż krawędzi wzdłużnych natomiast zmienia się w sposób pokazany na rys. 3b.

Źródłem pola promieniowanego przez antenę paskową są szczeliny utworzone przez poprzeczne krawędzie promiennika oraz przewodzącą podstawę. Pole w tych szczelinach ma charakter pola *TM* — obok składowej prostopadłej pola elektrycznego występuje, składowa styczna względem przewodzącej podstawy. Składowe prostopadłe tego pola




Rys. 3. Łatowa antena paskowa z prostokątnym promiennikiem:
a) struktura anteny, b) rozkład pola wzdłuż krawędzi bocznych promiennika, c) rozkład pola wzdłuż krawędzi poprzecznych promiennika

w obu promieniujących szczelinach są w przeciwfazie i stąd ich oddziaływanie w przestrzeni nad promiennikiem się znosi. Składowe styczne pola w promieniujących szczelinach są współfazowe i stanowią źródło pola promieniowanego przez antenę paskową [1].

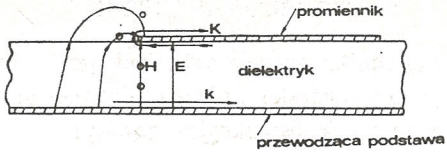
Przedstawiony mechanizm promieniowania anteny paskowej można opisać analitycznie stosując zasadę ekwiwalentności, tzn. wyznaczając zastępcze rozkłady gęstości prądu elektrycznego na powierzchni przewodzącego promiennika i przewodzącej podstawy lub gęstości prądu magnetycznego w promieniujących szczelinach. Rozkłady te są parametrami pierwotnymi do wyznaczenia pola promieniowanego przez antenę paskową. Podstawą do wyznaczenia gęstości prądu elektrycznego $\boldsymbol{K}$ oraz gęstości prądu magnetycznego $\boldsymbol{M}$ są powszechnie znane warunki brzegowe dla pola elektromagnetycznego obowiązujące na powierzchni idealnego przewodnika elektrycznego lub na powierzchni idealnego przewodnika magnetycznego jakim jest powierzchnia promieniującej szczeliny. Warunki te można sformułować w następujący sposób

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H} \tag{1a}$$

na powierzchni promiennika i przewodzącej podstawy lub

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E} \tag{1b}$$

w płaszczyznach promieniujących szczelin, przy czym $\boldsymbol{n}$ — wektor normalny do tych powierzchni. Wzajemne położenie linii sił pobudzającego antenę pola elektrycznego $\boldsymbol{E}$ i pola magnetycznego $\boldsymbol{H}$ oraz wektorów gęstości prądu elektrycznego $\boldsymbol{K}$ oraz gęstości prądu magnetycznego $M$ na krawędzi promiennika przedstawiono graficznie na rys. 4. Jak widać




Rys. 4. Położenie linii sił pola elektrycznego $E$ i magnetycznego $H$ oraz wektorów gęstości prądu elektrycznego $K$ oraz gęstości prądu magnetycznego $M$ na krawędzi promiennika

źródłem pola promieniowanego przez antenę paskową jest rozkład gęstości prądu elektrycznego na powierzchni promiennika lub rozkład gęstości prądu magnetycznego w promieniujących szczelinach. Uwzględniając oznaczenia przedstawione na rys. 5 można to sformułować w następujący sposób:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -j\frac{\omega\mu}{4\pi}\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\int_S \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}')e^{jk_0 r'\cos\psi}\mathrm{d}S \tag{2a}$$

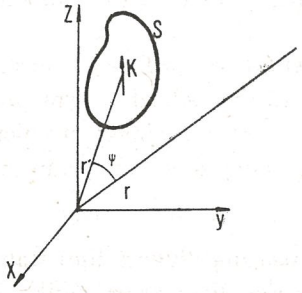
oraz

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = -j\cdot\frac{\omega\mu}{4\pi}\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\int_S \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')e^{jk_0 r'\cos\psi}\mathrm{d}S \tag{2b}$$

przy czym: $\boldsymbol{r}$ — wektor położenia punktu obserwacji pola promieniowanego przez antenę paskową w strefie dalekiej, w półprzestrzeni nad promiennikiem,

$\boldsymbol{r}'$ — wektor położenia punktu całkowania gęstości prądu w określonej płaszczyźnie promieniującej $S$,

$\psi$ — kąt pomiędzy wektorami położenia punktu obserwacji pola i punktu całkowania prądu.




Rys. 5. Określenie pola promieniowanego przez antenę paskową

## 4. METODY ANALIZY WŁAŚCIWOŚCI ANTEN PASKOWYCH

Do analizy właściwości anteny paskowej posługujemy się zastępczymi modelami promiennika. Najczęściej stosuje się dwa rodzaje zastępczych modeli promiennika: model transmisyjny i model wnękowy [1, 2, 3]. Modele te umożliwiają wyznaczenie podstawowych parametrów elekrycznych anteny paskowej takich jak: impedancja wejściowa, częstotliwość rezonansowa, charakterystyka promieniowania, dobroć, szerokość pasma i sprawność.

### 4.1. MODEL TRANSMISYJNY

Transmisyjny model promiennika anteny paskowej omówimy na przykładzie łatowej anteny paskowej z prostokątnym promiennikiem pokazanej na rys. 6. Na rysunku tym oznaczono podstawowe parametry konstrukcyjne anteny:

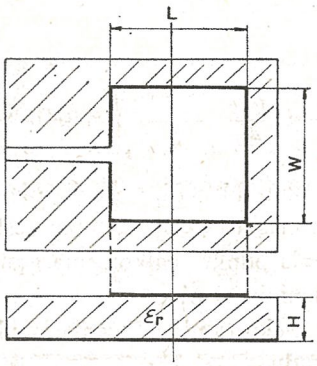
— szerokość $W$ i długość $L$ promiennika,

— grubość warstwy dielektrycznej $H$, która w praktyce jest dużo mniejsza od długości $\lambda_d$ fali w dielektryku ($H \ll \lambda$), przy czym

$$\lambda_d = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}, \tag{3}$$

gdzie: $\lambda_0$ — długość fali w próżni,

$\varepsilon_r$ — względna przenikalność elektryczna podłoża.




Rys. 6. Budowa anteny paskowej z prostokątnym promiennikiem

Mając na uwadze przedstawiony w rozdziale 3 mechanizm promieniowania anteny paskowej, a zwłaszcza fakt, że istotny udział w tym promieniowaniu mają poprzeczne szczeliny promiennika, w modelu transmisyjnym promiennik przedstawia się jako dwie identyczne, równoległe szczeliny połączone linią transmisyjną o długości

$$L' = L + \Delta L, \tag{4}$$

przy czym $\Delta L$ — oznacza równoważną długość linii transmisyjnej wynikającą z rozproszenia pola w szczelinie promiennika [2]

$$\Delta L = 0{,}412H \frac{(\varepsilon_{sk} + 0{,}3) \cdot \left(\frac{W}{H} + 0{,}264\right)}{(\varepsilon_{sk} - 0{,}258) \cdot \left(\frac{W}{H} + 0{,}8\right)}. \tag{5}$$

Odpowiadająca temu sieć elektryczna składa się z zastępczych admitancji $(G + jB)$ promieniujących szczelin, które są połączone linią transmisyjną o admitancji charakterystycznej $Y_d$ i długości $L'$ (rys. 7). Admitancja charakterystyczna $Y_d$ linii transmisyjnej łączącej promieniujące szczeliny, będąca w omawianej sytuacji niesymetryczną linią paskową, wynika z rozmiarów poprzecznych promiennika oraz rodzaju i grubości dielektryka [1]

$$Y_d = \frac{1}{Z_0} \cdot \frac{H}{W} \cdot \sqrt{\varepsilon_r}, \tag{6}$$

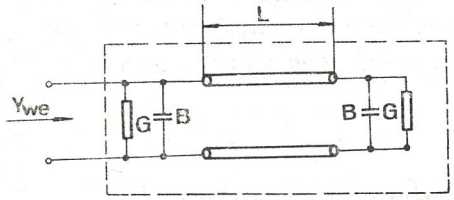
przy czym $Z_0$ — impedancja charakterystyczna próżni.

Przy założeniu pomijalnie małych strat w dielektryku, co na ogół ma miejsce w praktyce, można stałą propagacji omawianej linii transmisyjnej wyrazić tylko poprzez jej część urojoną $\beta$ [1]

$$\beta = j\frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\varepsilon_{sk}}, \tag{7}$$

przy czym $\varepsilon_{sk}$ — skuteczna przenikalność elektryczna dielektryka określona wyrażeniem [2]

$$\varepsilon_{sk} = \frac{\varepsilon_r+1}{2} + \frac{\varepsilon_r-1}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+10\frac{H}{W}}}. \tag{8}$$




Rys. 7. Transmisyjny model promiennika anteny paskowej

Admitancja $(G+jB)$ promieniującej szczeliny jest zależna od jej rozmiarów elektrycznych [2]

$$G+jB = \frac{\pi W}{\lambda Z_0}\{1+j[1-0{,}636\ln(k_0 H)]\}, \tag{9}$$

przy czym $k_0$ — liczba falowa próżni.

Admitancja wejściowa $Y_{wej}$ promiennika określona na podstawie modelu transmisyjnego jest sumą admitancji $(G+jB)$ sąsiadującej z punktem zasilania poprzecznej szczeliny promieniującej oraz admitancji drugiej promieniującej szczeliny przetransformowanej poprzez linię transmisyjną długości $L'$, admitancji charakterystycznej $Y_d$ i stałej propagacji $\beta$

$$Y_{wej} = G+jB+Y_d\frac{G+j[B+Y_d\operatorname{tg}(\beta L')]}{Y_d+j[G+jB\operatorname{tg}(\beta L')]}. \tag{10}$$

Najkorzystniejsze warunki pracy promiennika anteny paskowej występują w warunkach rezonansu, tzn. wtedy, gdy część urojona admitancji wejściowej anteny jest równa zeru. Przy założonej częstotliwości pracy anteny paskowej stan rezonansu zachodzi dla określonej długości $L$ promiennika $(L = L'-\Delta L)$, którą można wyznaczyć przyrównując do zera w wyrażeniu (10) część urojoną admitancji wejściowej anteny paskowej

$$\operatorname{tg}(\beta L') = \frac{2Y_d \cdot B}{B^2+G^2-Y_d{}^2}. \tag{11}$$

Z drugiej strony, przy określonej długości $L$ promiennika, stan rezonansu wystąpi przy częstotliwości

$$f_r = \frac{C}{2(L+\Delta L\sqrt{\varepsilon_{sk}})}. \tag{12}$$

Częstotliwość określona zależnością (12) nosi nazwę częstotliwości rezonansowej. W stanie rezonansu admitancja wejściowa promiennika anteny paskowej równa się podwojonej wartości konduktancji jednej z promieniujących szczelin i na podstawie zależności (9, 10) wyraża się wzorem

$$Y_{wej} = \frac{2\pi W}{\lambda Z_0}. \tag{13}$$

Model transmisyjny umożliwia również wyznaczenie charakterystyki promieniowania anteny paskowej, przy czym należy mieć na uwadze przedstawiony w rozdziale 3 mechanizm promieniowania anteny. Każda z dwóch promieniujących szczelin anteny paskowej zachowuje się jak dipol magnetyczny, z określonym rozkładem gęstości prądu magnetycznego $M$, którego wartość, uwzględniając odbicie względem przewodzącej podstawy, można określić zależnością

$$M = 2V_0/H, \tag{14}$$

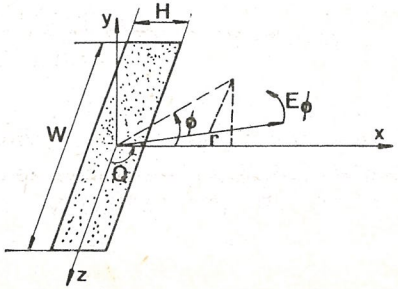
w której $V_0$ — napięcie pobudzające promiennik.

Pole elektryczne w strefie dalekiej w odległości $r$ od początku układu współrzędnych pokrywającego się ze środkiem szczeliny (rys. 8) ma tylko składową $E_\Phi$ opisaną wyrażeniem

$$E_\Phi = -j2V_0 W k_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{r} F(\Theta, \Phi), \tag{15}$$

w którym: $F(\Theta, \Phi)$ — charakterystyka promieniowania szczeliny określona zależnością

$$F(\Theta, \Phi) = \frac{\sin[(k_0 H/2)\sin\Theta\cos\Phi]}{(k_0 H/2)\sin\Theta\cos\Phi} \cdot \frac{\sin[(k_0 W/2)\cos\Theta]}{(k_0 W/2)\cos\Theta}. \tag{16}$$




Rys. 8. Promieniująca szczelina w biegunowym układzie współrzędnych

Podstawiając we wzorze (15) $\Theta = \pi/2$ oraz uwzględniając promieniowanie dwóch szczelin leżących w odległości $L$ od siebie, otrzymujemy wzór na charakterystykę promieniowania promiennika prostokątnego w płaszczyźnie $E$

$$F(\Theta) = \frac{\sin[(k_0 H/2)\cos\Phi]}{(k_0 H/2)\cos\Phi} \cdot \cos[(k_0 L/2)\cos\Phi]. \tag{17}$$

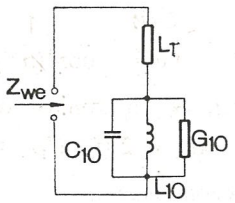
Przyjmując natomiast we wzorze (15) $\Phi = \pi/2$ otrzymujemy zależność na charakterystykę promieniowania promiennika w płaszczyźnie $H$, która nie zależy od odległości między szczelinami

$$F(\Theta) = \frac{\sin[(k_0 W/2)\cos\Theta]}{(k_0 W/2)\cos\Theta} \cdot \sin\Theta. \tag{18}$$

Istotną cechą transmisyjnego modelu promiennika jest jego prostota. Za pomocą tego modelu można w prosty sposób wyznaczyć impedancję wejściową promiennika zarówno w stanie rezonansu (13), jak również przy odstrojeniu (10), a także częstotliwość rezonansową (12) i charakterystykę promieniowania (17, 18). Należy jednak pamiętać, że model transmisyjny nadaje się tylko do opisu własności łatowej anteny paskowej z prostokątnym promiennikiem. Ponadto w modelu transmisyjnym nie uwzględnia się strat w dielektryku. Pomimo tych ograniczeń model transmisyjny jest powszechnie stosowany do analizy właściwości promiennika prostokątnego, zwłaszcza do opisu jego właściwości polowych [3, 4].

### 4.2. MODEL WNĘKOWY

Antena paskowa jest podobna do wnęki rezonansowej zbudowanej z odpowiednio usytuowanych ścian elektrycznych (promiennik i przewodząca podstawa) i magnetycznych (szczeliny pomiędzy krawędziami promiennika i przewodzącą podstawą). Podobieństwo to stało się punktem wyjścia do opracowania modelu wnękowego anteny, któremu odpowiada schemat zastępczy w postaci równoległego obwodu RLC (rys. 9) [5]. Model ten —



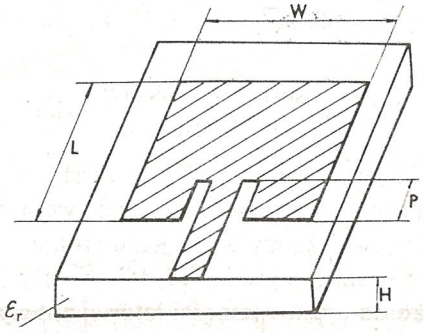

Rys. 9. Wnękowy model promiennika anteny paskowej

dla porównania z modelem transmisyjnym — omówimy również na przykładzie łatowej anteny paskowej z prostokątnym promiennikiem. Dodatkowo uwzględnimy możliwość zmiany impedancji wejściowej anteny poprzez zmianę głębokości $P$ zanurzenia linii zasilającej w promienniku (rys. 10).

Z punktu widzenia działania omawianej paskowej wnęki rezonansowej jako anteny, istotny jest rozkład pola na ścianach magnetycznych. Z rozważań zawartych w rozdziale 3 wynika, że są to rozkłady rodzaju $TM_{mn}$. Indeksy $m$ i $n$ opisują zmienność rozkładu pola

wzdłuż krawędzi promiennika, ich wartość określa ile razy zmienia się faza pola wzdłuż określonej krawędzi promiennika.

Rodzaj pola odpowiadający wypromieniowaniu największej mocy nazywa się rodzajem podstawowym. Jest to rodzaj $TM_{10}$, co oznacza że jeden raz zmienia się faza rozkładu pola wzdłuż krawędzi promiennika położonych równolegle do kierunku transmisji fali oraz stałość fazy pola wzdłuż krawędzi promiennika położonych poprzecznie do tego




Rys. 10. Antena paskowa z zanurzonym promiennikiem

kierunku (rys. 3). W schemacie zastępczym rodzaj podstawowy jest reprezentowany przez elementy $G_{10}$, $C_{10}$, $L_{10}$. Element $G_{10}$ opisuje trzy zjawiska fizyczne zachodzące w promienniku anteny paskowej:

— promieniowanie fali elektromagnetycznej $G_{rad}$,
— straty w dielektryku $G_{di}$,
— straty w promienniku i przewodzącej podstawie $G_{cu}$.

Konduktancja $G_{10}$ decyduje o impedancji wejściowej promiennika w rezonansie

$$G_{10} = \frac{1}{Z_{wej}} = G_{rad} + G_{di} + G_{cu}. \tag{19}$$

Konduktancję promieniowania $G_{rad}$ określa zależność

$$G_{rad} = \frac{2\pi W}{\lambda_0 Z_0} \frac{1}{\cos^2(\pi P/L)}. \tag{20}$$

Konduktancję strat dielektrycznych $G_{di}$ natomiast opisuje wyrażenie

$$G_{di} = 2\pi f_r \cdot C_{10} \cdot \operatorname{tg}\delta, \tag{21}$$

w którym: $f_r$ — częstotliwość rezonansowa,
$\operatorname{tg}\delta$ — stratność dielektryka,
$C_{10}$ — pojemność wnęki dla rodzaju $TM_{10}$, opisana wzorem

$$C_{10} = \frac{C_0}{2} \frac{1}{\cos^2(\pi P/L)}, \tag{22}$$

przy czym $C_0$ — pojemność kondensatora płaskiego dla prądu stałego utworzonego przez promiennik i przewodzącą podstawę

$$C_o = \frac{WL \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}{H}. \tag{23}$$

Ostatni ze składników wyrażenia (18), tzn. konduktancja strat w miedzi $G_{cu}$ wyraża się zależnością

$$G_{cu} = R_s \frac{\pi^2 W}{2\omega^2 \cdot \mu^2 \cdot LH}, \tag{24}$$

przy czym $R_s$ — rezystancja warstwy przewodzącej określona wyrażeniem

$$R_s = \sqrt{\frac{\mu \cdot \omega_r}{2\delta_{cu}}}, \tag{25}$$

w którym: $\delta_{cu} = 5{,}7 \cdot 10^7$ S/m oraz $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

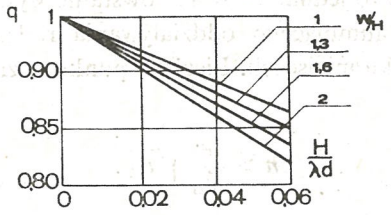
Indukcyjność $L_{10}$ wnęki dla rodzaju $TM_{10}$ odzwierciedla fakt gromadzenia energii w polu magnetycznym. Ilość energii gromadzonej w polu magnetycznym jest niewielka, indukcyjność $L$ ma małą wartość i nie wpływa istotnie na właściwości anteny. Obok pola rodzaju podstawowego $TM_{10}$ w antenie mogą się wzbudzać również wyższe rodzaje, które nie promieniują pola elektromagnetycznego. Przyjmuje się, że łączna moc pola wyższych rodzajów jest pomijalnie mała w porównaniu z mocą pola rodzaju podstawowego. Te wyższe rodzaje pól są reprezentowane w schemacie zastępczym przez indukcyjność $L$, do której wyznaczenia można się posłużyć wyrażeniem

$$x_L \cong \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi H}{\lambda_d}\right). \tag{26}$$

Na podstawie modelu wnękowego można również wyznaczyć częstotliwość rezonansową promiennika

$$f_r = \frac{qc}{2L\sqrt{\varepsilon_r}}, \tag{27}$$

przy czym współczynnik $q$ jest zależny od parametrów konstrukcyjno-technologicznych promiennika (rys. 11) [2].




Rys. 11. Zależność współczynnika $q$ od parametrów konstrukcyjno-technologicznych promiennika

Model wnękowy umożliwia dodatkowo, w porównaniu z modelem transmisyjnym określenie dobroci, szerokości pasma pracy i sprawności anteny. Całkowitą dobroć $Q$, anteny określa zależność

$$Q = 2\pi f_r (C_{10}/G_{10}). \tag{28}$$

Szerokość $B$ pasma pracy anteny paskowej określa się poprzez zakres częstotliwości, w którym współczynnik odbicia na wejściu promiennika wzrasta dwukrotnie w stosunku do wartości przy częstotliwości rezonansowej. Określa ją wyrażenie

$$B = 0{,}707/Q. \tag{29}$$

Sprawność anteny paskowej określa stosunek konduktancji promieniowania $G_{rad}$ do konduktancji $G_{10}$

$$\eta = \frac{G_{rad}}{G_{10}}. \tag{30}$$

Modelu wnękowego nie stosuje się do wyznaczenia charakterystyki promieniowania anteny paskowej ze względu na złożony charakter takich obliczeń. Model wnękowy nadaje się zatem do dokładnej analizy właściwości obwodowych anten paskowych z promiennikami o dowolnym kształcie.

## 5. METODYKA PROJEKTOWANIA PROMIENNIKÓW ANTEN PASKOWYCH

Projektowanie promiennika anteny paskowej polega na wyznaczeniu jego parametrów konstrukcyjno-technologicznych na podstawie wymagań dotyczących parametrów elektrycznych anteny. Podstawowym parametrem anteny jest częstotliwość środkowa $f_0 (f_0 = f_r)$ pasma pracy anteny. Od wartości tej częstotliwości zależą rozmiary promiennika, na które ma również wpływ grubość $H$ podłoża dielektrycznego oraz jego względna przenikalność elektryczna $\varepsilon_r$ [4, 6].

Najczęściej stosuje się promiennik prostokątny (rys. 6 i rys. 10). Szerokość $W$ takiego promiennika określa wyrażenie [1]

$$W \geqslant \frac{\lambda_0}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon_r + 1}{2}}}. \tag{31}$$

Ze wzrostem szerokości promiennika polepszają się w pewnych granicach właściwości kierunkowe anteny. Pociąga to jednak za sobą powstanie wyższych rodzajów pola. Zachowanie w takiej sytuacji dominującego oddziaływania rodzaju podstawowego wymaga zasilania promiennika w kilku miejscach. Liczbę $n$ punktów zasilania promiennika określa warunek

$$n > \frac{w}{\lambda_0} \sqrt{\varepsilon_{sk}}. \tag{32}$$

Z nierówności (32) wynika, że jeżeli $W\sqrt{\varepsilon_{sk}} > \lambda_0$, to promiennik anteny paskowej powinien mieć więcej niż jeden punkt zasilania. Długość $L$ promiennika prostokątnego oblicza się z wzoru (11)

$$L = \frac{\lambda_0}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{sk}}} - 2\Delta L. \tag{33}$$

W praktyce stosuje się również promienniki kołowe. Promień $R$ promiennika kołowego zależy od częstotliwości $f_0$ oraz od przenikalności dielektryka w następujący sposób [1]

$$R = \frac{1{,}841c}{2\pi f_0 \sqrt{\varepsilon_r}}. \tag{34}$$

W tym przypadku należy uwzględnić rozproszenie pola na krawędzi promiennika, powodujące wzrost pojemności, a tym samym zwiększenie elektrycznej długości promienia $R$ promiennika do wartości $R_{sk}$ opisanej zależnością

$$R_{sk} = R\sqrt{\ln + \frac{2H}{\pi R \varepsilon_r}\left(1\frac{\pi R}{2H} + 1{,}7726\right)}. \tag{35}$$

Podłoże dielektryczne stosowane do budowy promienników anten paskowych charakteryzuje przenikalność elektryczną $\varepsilon_r$ i współczynnik stratności $\operatorname{tg}\delta$. W tablicy zestawiono parametry dielektryków stosowanych najczęściej do budowy anten paskowych. Dla porównania w tablicy podano również parametry laminatu szklano-epoksydowego. Wartość przenikalności elektrycznej nie decyduje o jakości podłoża. Przy małych częstotliwościach mikrofalowych najlepiej jest stosować materiały dielektryczne o dużej przenikalności elektrycznej. Przy częstotliwościach większych od kilkunastu GHz należy stosować dielektryki o małej przenikalności elektrycznej ze względu na dokładność wykonania promiennika. Z oczywistych względów podłoże dielektryczne jest tym lepsze, im ma mniejszy współczynnik stratności.

**Typowe materiały dielektryczne stosowane do budowy promienników anten paskowych**

| Materiał | Parametr $\varepsilon_r$ | $\operatorname{tg}\delta$ |
|---|---|---|
| Ceramika alundowa 99,5% $AL_2O_3$ | 9,7 | 0,0001 |
| Ceramika alundowa 96% $AL_2O_3$ | 9,2 | 0,0006 |
| Ceramika berylowa 99,5% $B_2O$ | 6,4 | 0,0003 |
| Teflon | 2,1 | 0,00015 |
| Polistyren | 2,55 | 0,0005 |
| PTFE*) | 2,1 | 0,0004 |
| Laminat | 4,7 | 0,022 |

*) PTFE — polytetrafluoroethylene

## PODSUMOWANIE

Przedstawione w pracy zagadnienia nie wyczerpują całości problematyki dotyczącej promienników anten paskowych. Obecnie w głównych ośrodkach naukowo-badawczych zajmujących się problematyką antenową prowadzi się intensywne prace teoretyczno-konstrukcyjne o szerokim zakresie tematycznym. Obejmują one rozbudowane metody numerycznej analizy promienników anten paskowych głównie za pomocą metody momentów oraz zagadnienia konstrukcyjno-technologiczne ze szczególnym uwzględnieniem problematyki doboru materiałów podłożowych. Prace te zmierzają głównie do poszerzenia pasma pracy oraz uzyskania określonego typu polaryzacji takich anten [7, 8].

## BIBLIOGRAFIA

1. I. J. Bahl: *Build Microstrip Antennas with Paper-Thin Dimension Microwaves.* 1979 vol. 18, nr 10, s. 50—63
2. K. R. Carver, J. W. Mink: *Microstrip Antenna Technology.* IEEE Trans. AP-29, 1981 nr 1, s. 2—24
3. E. H. Van Lil, A. R. Van de Capelle: *Transmission Line Model for Mutual Coupling Between Microstrip Antennas.* IEEE Trans. AP-32, 1984 nr 8, s. 816—821
4. R. J. Katulski: *Design and Analysis of Microstrip Antennas.* Proc. of the Intl. Symposium on Antennas and EM Theory — ISAE'85, Beijing China 1985, s. 216—221
5. W. F. Richards, Y. T. Lo, D. D. Harrison: *An Improved Theory for Microstrip Antennas and Applications*, IEEE Trans. AP-29, 1981 nr 1, s. 38—46
6. A. G. Derneryd: *Circular and Rectagular Microstrip Antenna Elements.* Ericsson Technics, 1978 nr 3, s. 159—177
7. K. C. Gupta: *Recent Advances in Microstrip Antennas.* Microvawe Journal, 1984 nr 10, s. 50—67
8. W. F. Richards, S. E. Davidson, S. A. Long: *Dual-Band Reactively Loaded Microstrip Antenna.* IEEE Trans. AP-33, 1985 nr 5, s. 556—561

D. J. BEM, R. J. KATULSKI

## MICROSTRIP ANTENNAS PART I: SINGLE RADIATING ELEMENTS

### Summary

The paper gives a basis for designing and the manufacturing of single radiating elements of microstrip antennas. The design and electrical characteristics of such antennas are described. A classification of microstrip antennas is made, distinguishing the patch microstrip antenna with a rectangular radiating element as the basis type of the greatest practical importance. Methods of analysing the properties of radiating elements of microstrip antennas by means of equivalent models, stressing the usefulness of a transmission-line model for the analysis of field properties and a cavity model for the analysis of circuit properties of the radiating element, are discussed. Methods of designing rectangular and circular radiating elements as well as the choice of the dielectric base, are presented.

D. J. BEM, R. J. KATULSKI

## ANTENNES DE COURROIE I PARTIE: SIMPLES ÉLÉMENTS DE RADIATION

### Résumé

Dans le travail on a présenté les bases de projection et la technologie d'éléments simples des antennes de courroie. On à dérit la construction et les caractéristiques électriques de ces antennes. On a fait la classification des antennes de courroie en distinguant les antennes à éléments rectangulaires, en tant qu'un type principal, ayant la plus grande importance. On à discuté la méthodologie de l'analyse des propriétés des antennes de courroie et en se servant des modèles équivalents on à démontré leur utilité à l'analyse du champ et à celle de l'influence de la forme de l'antenne. On a rédigé aussi les principes de projection les éléments de radiation rectangulaires et circulaires et les indications du choix convenable de son support diélectrique.

D. J. BEM, R. J. KATULSKI

## MIKROSTREIFEN-ANTENNEN. TEIL I: EINZELSTRAHLEN


### Zusammenfassung

Es wurden Projektierungsprinzip sowie technologische Prinzipien für Einzelstrahler dargestellt. Struktur und elektrische Eigenschaften solcher Antennen wurden beschrieben. Eine Klassifizierung von Mikrostreifen-Antannen wurde durchgeführt, wobei als Grundtyp eine patch-Antenne mit rechteckigem Strahler gewählt worden ist, die praktisch die größte Bedeutung hat. Die Analysenmethodik der Eigenschaften eines Mikrostreifen-Antennenstrahlers wurde beschrieben, wobei auf die Eignung des Transmissionsmodells für die Analyse von Feldeigenschaften und eines Hohlraummodells beim Analysieren von Schaltungseigenschaften hingewiesen wurde. Es wurde auch eine Projektierungsmethode von rechteckigen und kreisförmigen Strahlern beschrieben unter Berücksichtigung des Wahlprinzips bezüglich der Dielektrikumschicht.


Д. Ю. БЭМ, Р. Я. КАТУЛЬСКИ

## СТЕРЖНЕВЫЕ АНТЕННЫ. ЧАСТЬ 1: ПРОСТЫЕ ИЗЛУЧИТЕЛИ


### Резюме

Представлены основы проектирования и технологии простых излучителей стержневых антенн. Рассмотрено строение и электрические свойства таких антенн. Сделана классификация стержневых антенн, выделяя доржковую стержневую антенну с прямоугольным излучителем как основной вид, имеющий самое большое практическое значение. Рассмотрена методика анализа свойств излучителей сержневых антенн при использовании замещающих моделей, указывая на пригодность передаточных моделей для анализа полевых свойств, а так же полосной модели для анализа контурных свойств излучителя. Дан также метод проектирования прямоугольного и кругового излучителя вместе с анализом выбора диэлектрического основания для постройки излучителей стержневых антенн.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1987, 34, z. 4, ss. 253-259

621.396.67.012

# Anteny paskowe
# Część II: Układy anten paskowych

DANIEL J. BEM (Wrocław)
*Instytut Telekomunikacji i Akustyki, Politechnika Wrocławska*

RYSZARD J. KATULSKI (Gdańsk)
*Instytut Telekomunikacji, Politechnika Gdańska*

*Artykuł wpłynął 1985.12.10*
*Autoryzowano do druku 1987.04.03*

W pracy przedstawiono podstawy metodyki projektowania liniowych i prostokątnych układów anten paskowych. Pokazano budowę oraz sposób analizy właściwości układu liniowego takich anten. Opisano budowę prostokątnego podukładu podstawowego oraz zasadę tworzenia na jego podstawie złożonych prostokątnych układów anten paskowych. Zamieszczono również zasady projektowania sieci zasilającej w technologii niesymetrycznej linii paskowej.

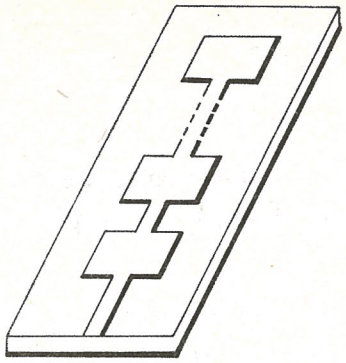
## 1. WPROWADZENIE

Pojedyncze promienniki anten paskowych charakteryzują się małym zyskiem energetycznym. W praktyce buduje się więc układy anten paskowych złożone z kilkudziesięciu i więcej promienników, których zysk energetyczny przekracza 20 dB [1]. Spotykane w praktyce układy anten paskowych są najczęściej liniowymi lub prostokątnymi układami łatowych promienników [2]. Ważnym zagadnieniem jest tutaj dopasowanie impedancyjne poszczególnych promienników układu do linii zasilającej.

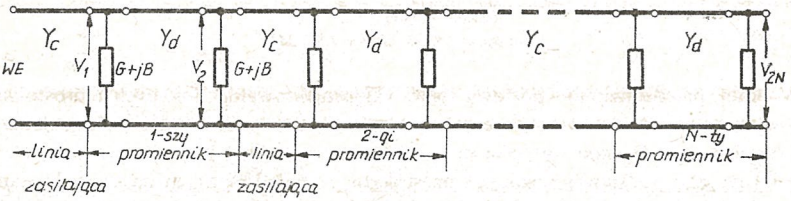
## 2. LINIOWY UKŁAD ANTEN PASKOWYCH

Do budowy liniowego układu anten paskowych stosuje się najczęściej łatowe promienniki prostokątne, które łączy się ze sobą linią transmisyjną w sposób pokazany na rys. 1.

Analizę właściwości takiego układu antenowego opiera się na transmisyjnym modelu promiennika. Przedmiotem analizy jest zysk energetyczny oraz impedancja wejściowa układu antenowego. W tym celu liniowy układ promienników paskowych przedstawia się jako kaskadowe połączenie transmisyjnych modeli każdego z nich za pomocą linii transmisyjnej o admitancji charakterystycznej $Y_c$ [3, 4]. Zastępczą sieć elektryczną liniowego układu promienników paskowych opartą na modelu transmisyjnym przedstawiono na rysunku 2.



Rys. 1. Liniowy układ anten paskowych




Rys. 2. Transmisyjny model liniowego układu anten paskowych

Sumaryczne pole wypromieniowane przez taki układ antenowy jest sumą pól wypromieniowanych przez każdą z promieniujących szczelin układu. Omawiany układ składa się z jednakowych i jednakowo zorientowanych elementów promieniujących, zatem w celu określenia wyrażenia na charakterystykę promieniowania układu należy znać charakterystykę promieniowania pojedynczego elementu promieniującego i mnożnik układu. Sposób wyznaczenia pierwszej z tych wielkości opisano w pierwszej części pracy [5]. Mnożnik układu natomiast opisuje wyrażenie [6]

$$AF(\Phi) = \sum_{n=1}^{2N} V_n e^{jk_0 d_n \cos \Phi}, \tag{1}$$

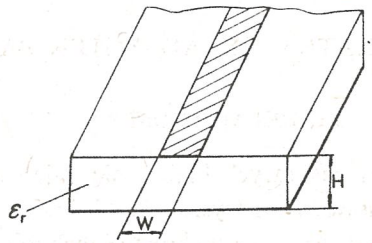
w którym: $N$ — liczba promienników,
$V_n$ — napięcie na $n$-tej szczelinie układu,
$k_o$ — liczba falowa próżni,
$d_n$ — odległość pomiędzy pierwszą a $n$-tą szczeliną układu.

Napięcie $V_n$ występujące na $n$-tej szczelinie układu można obliczyć na podstawie schematu zastępczego (rys. 2) stosując ogólnie znaną metodykę analizy linii transmisyjnej oraz przyjmując określoną wartość napięcia pobudzającego $V_1$.

Znając napięcie występujące na poszczególnych szczelinach możemy obliczyć kierunkowość $D_A$ układu anten paskowych, która wyraża się zależnością

$$D_A = \frac{\left|\sum_{n=1}^{2N} V_n\right|^2}{\sum_{n=1}^{2N} |V_n|^2}. \tag{2}$$

Właściwości kierunkowe omawianego układu anten paskowych możemy optymalizować przez odpowiedni dobór rozmiarów promienników oraz odległości między nimi. Posługujemy się przy tym modelem transmisyjnym układu. Należy mieć również na uwadze konieczność spełnienia warunku dopasowania impedancyjnego w punktach, w których promienniki układu łączą się z linią zasilającą wykonaną w technologii NLP. Impedancja charakterystyczna NLP zależy od jej rozmiarów poprzecznych (rys. 3) oraz od rodzaju zastosowania dielektryka [7].




Rys. 3. Budowa niesymetrycznej linii paskowej

W celu wyznaczenia wartości tej impedancji rozróżniamy dwa przypadki. Pierwszy, gdy stosunek szerokości $W$ do grubości $H$ warstwy dielektrycznej jest mniejszy lub równy jedności ($W/H \leqslant 1$), wówczas impedancję charakterystyczną $Z_c$ niesymetrycznej linii paskowej określa wyrażenie

$$Z_c = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_{sk}}} \ln(8H/W + 0{,}25W/H), \tag{3}$$

w którym

$$\varepsilon_{sk} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} [(1 + 12H/W)^{-1/2} + 0{,}04(1 - W/H)^2]. \tag{4}$$

Drugi przypadek ma miejsce wówczas, gdy wymieniony stosunek jest większy od jedności ($W/H > 1$)

$$Z_c = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_{sk}}[1{,}393 + W/H + 0{,}667 \ln (W/H + 1{,}444)]}, \tag{5}$$

przy czym

$$\varepsilon_{sk} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} (1 + 12H/W)^{-1/2}. \tag{6}$$

Przy większych częstotliwościach, praktycznie powyżej kilku GHz, należy uwzględnić zjawisko dyspersji, polegające na zmianie skutecznej przenikalności elektrycznej dielektryka wraz ze zmianą częstotliwości. Należy wówczas we wzorach (3) i (5) zamiast skutecznej

przenikalności elektrycznej $\varepsilon_{sk}$ stosować jej wartość skorygowaną $\varepsilon'_{sk}$ określoną wyrażeniem

$$\varepsilon'_{sk} = \varepsilon_r - \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_{sk}}{1+g(f/f_p)^2}, \tag{7}$$

w którym $g = 0{,}6+0{,}009\ Z_0$ ($Z_0$ — impedancja falowa próżni), natomiast

$$f_p = Z/(2\mu_0 H). \tag{8}$$

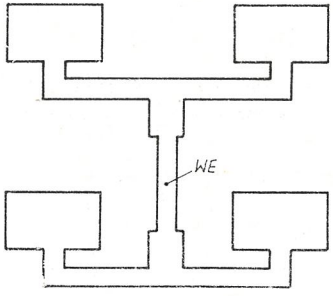
Impedancję wejściową promiennika można w pierwszym przybliżeniu wyznaczyć za pomocą wzorów wynikających z modelu transmisyjnego. Jednakże w celu zwiększenia dokładności obliczeń należy posługiwać się modelem wnękowym, zwłaszcza gdy chcemy uwzględnić stratność materiału podłoża.

## 3. PROSTOKĄTNY UKŁAD ANTEN PASKOWYCH

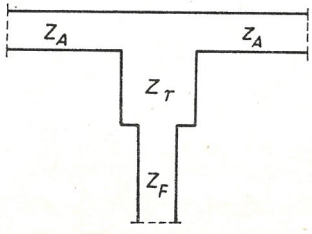
### 3.1. UKŁAD PODSTAWOWY

Prostokątne układy anten paskowych buduje się najczęściej z symetrycznych czteroelementowych układów podstawowych (rys. 4) [8, 9]. Układ podstawowy obok promienników paskowych zawiera sieć zasilającą wykonaną technologią NLP. W rozgałęzieniach sieci stosuje się ćwierćfalowe transformatory dopasowujące wykonane również technologią NLP.

Procedura projektowania rozgałęzienia sieci zasilającej (rys. 5) jest następująca. NLP zasilająca promienniki układu powinna mieć tak dobraną szerokość, aby jej impedancja




Rys. 4. Prostokątny podukład podstawowy anten paskowych




Rys. 5. Rozgałęzienie sieci zasilającej z transformatorem impedancji

charakterystyczną $Z_A$ była równa impedancji wejściowej promiennika. Grubość i rodzaj warstwy dielektrycznej są narzucone przez konstrukcję promiennika. W punkcie, w którym łączą się linie zasilające od dwóch promienników należy dokonać transformacji impedancji z wartości równej połowie ich impedancji charakterystycznych, (równoległe połączenie linii zasilających) do przyjętej wartości impedancji $Z_F$ linii zasilającej od strony wejścia układu. Szerokość NLP spełniającej rolę transformatora powinna być zatem tak dobrana aby jej impedancja charakterystyczna $Z_T$ była równa

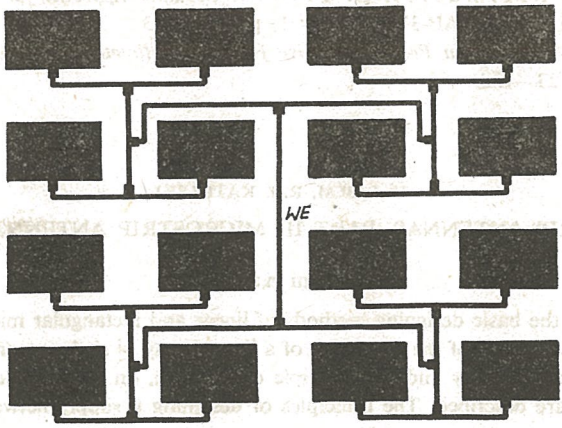
$$Z_T = \sqrt{\frac{Z_A Z_F}{2}}. \tag{9}$$

Jeżeli nie ma narzuconych wymagań dotyczących wartości impedancji charakterystycznej $Z_F$, wówczas można stosować rozwiązanie rozgałęzienia sieci zasilającej bez transformatora dopasowującego. W takiej sytuacji wartości impedancji charakterystycznych poszczególnych fragmentów rozgałęzienia powinny być związane zależnością

$$Z_F = \frac{1}{2} Z_A. \tag{10}$$

### 3.2. PROSTOKĄTNE UKŁADY ZŁOŻONE

Z omówionych układów podstawowych można budować złożone prostokątne układy anten paskowych [8, 9]. Przykładowe rozwiązanie układu składające się z szesnastu łatowych promienników prostokątnych przedstawiono na rys. 6.




Rys. 6. Prostokątny szesnastoelementowy układ anten paskowych

Właściwości kierunkowe takiego układu antenowego analizuje się za pomocą ogólnie znanych metod obowiązujących dla prostokątnych układów antenowych [6]. Napięcie na promieniujących szczelinach analizowanego układu obliczamy posługując się transmisyjnym modelem promiennika.

Układy anten paskowych składające się z dużej liczby symetrycznie rozmieszczonych, jednakowych i jednakowo zorientowanych promienników można traktować jako antenę

powierzchniową z pseudorównomiernym rozkładem pola. Kierunkowość $D$ takiego układu określa się w przybliżeniu za pomocą znanego wyrażenia

$$D = 4\pi A/\lambda_0^2 \tag{11}$$

w którym: $A$ — powierzchnia układu antenowego,
$\lambda_0$ — długość fali próżni.

Dokładność obliczeń w tym przypadku jest tym większa, im większa jest liczba promienników w układzie.

## BIBLIOGRAFIA

1. F. W. Cipolla: *A 7.5-GHz Microstrip Phased Array for Aircraft-to-Satellite Communication.* IEEE Trans. AP-29, 1981, nr 1, p. 166—171
2. R. J. Mailloux, J. F. Mcllvenna, N. P. Kernweis: *Microstrip Array Technology,* IEEE Trans. AP-29, nr 1, 1981, p. 25—37
3. A. G. Derneryd: *Linearly Polarized Microstrip Antennas.* IEEE Trans. AP-24, 1976, nr 1, p. 846—851
4. A. Van de Capelle, B. Nauwelaers, R. Lepla, F. Kissembeek: *Analysis of Linear Microstrip Resonator Arrays.* Proc. of the 1983 URSI Symp., p. 433—437
5. D. J. Bem, R. J. Katulski: *Anteny paskowe, część I — Pojedyncze promienniki.* Rozprawy Elektrotechniczne, 1988, XXXIV, z. 1
6. D. J. Bem: *Anteny i Rozchodzenie się Fal Radiowych.* Warszawa: WKiŁ, 1973 s. 257—271
7. I. J. Bahl, D. K. Trivedi: *A Designer's Guide to Microstrip Line. Microwaves.* 1977, nr 5, p. 174—182
8. J. Askenazy, P. Perlmutter, D. Treves: *Modular Approach for the Design of Microstrip Array Antennas.* IEEE Trans. AP-31, 1983, nr 1, p. 190—193
9. K. Solbach: *Hybrid Design Proves Effective for Flat Milimeter-Wave Antennas.* MSN and CT, 7/1985, vol. 15, p. 123—138

D. J. BEM, R. J. KATULSKI

## MICROSTRIP ANTENNAS. PART II: MICROSTRIP ANTENNA ARRAYS

### Summary

The paper presents the basic designing methods of linear and rectangular microstrip antenna arrays. The construction and an analysis of the properties of a linear array of such antennas are shown. The construction of a rectangular subarray and the principle of building, on its basis, larger rectangular arrays of microstrip antennas are described. The principles of designing a supply network in a microstrip line technology are given.

D. J. BEM, R. J. KATULSKI

## ANTENNES DE COURROIE II PARTIE: RESEAUX DES ANTENNES DE COURROIE

### Résumé

Cet ouvrage présente les principes de la méthodologie de la projection des réseaux linéaires et rectangulaires des antennes de courroie. On à montré la construction et la méthode d'analyse des propriétés d'un réseau linéaire des antennes de ce type. On à aussi décrit la construction d'un sous-réseau rectangulaire

de base, ainsi que les principes de l'établissement des circuits rectangulaires composés d'antennes de courroie. Y sont aussi présentés les principes de la projection des réseaux d'alimentation dans la technologie asymétrique de la ligne de courroie.

D. J. BEM, R. J. KATULSKI

## MIKROSTREIFEN-ANTENNEN TEIL II: MIKROSTREIFEN-ANTENNENGRUPPEN

Zusammenfassung

Das Prinzip der Projektierungsmethode von linearen und rechteckförmigen Mikrostreifen-Antennengruppen wurde dargestellt. Struktur und Analysenmethode der Eigenschaften linearer Mikrostreifen-Antennengruppen wurden beschrieben. Die Struktur einer rechteckförmigen Untergruppe und das Prinzip der Bildung auf dieser Basis von Mehrfach-Antennengruppen wurden erläutert. Auch wurden Grundlagen für die Projektierungsmethode von aus Mikrostreifenleitungen bestehenden Speisenetzen gebracht.

Д. Ю. БЕМ, Р. Я. КАТУЛЬСКИ

## СТЕРЖНЕВЫЕ АНТЕННЫ. ЧАСТЬ 2: СИСТЕМЫ СТЕРЖНЕВЫХ АНТЕНН

Резюме

Представлены основы метода проектирования линейных и прямоугольных систем стержневых антенн. Показана структура и метод анализа свойств линейной системы таких антенн. Рассмотрена структура прямоугольной подсистемы — основной и принцип образования на её основе сложных прямоугольных систем стержневых антенн. Даны также принципы проектирования питающей сети в технологии несимметрической стержневой линии.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1988, 34, z. 1, ss. 261-267

621.317.7

# Kalibratory napięć i prądów-część cyfrowa

A. OLENCKI, J. SZMYTKIEWICZ, K. URBAŃSKI (Zielona Góra)
*Ośrodek Badawczo-Rozwojowy Metrologii Elektrycznej LUMEL*

*Artykuł wpłynął 1986.05.12*
*Autoryzowano do druku 1987.02.08*

W artykule przedstawiono ewolucję cyfrowej części kalibratora. Szczególną uwagę zwrócono na funkcje programowe kalibratora. Jedną z tych funkcji omówiono na przykładzie kalibratora napięć termoelektrycznych typu SQ11 opracowanego w OBR ME „Lumel" w Zielonej Górze.

## WSTĘP

Znaczny wzrost produkcji aparatury pomiarowej obserwowany w ostatnich latach wymaga stosowania źródeł napięć i prądów umożliwiających sprawdzanie aparatury pomiarowej na coraz wyższym poziomie. Spowodowało to rozwój nowoczesnych wzorców napięć i prądów zwanych kalibratorami. Rozwój kalibratorów przebiega w dwóch zasadniczych kierunkach, które mają na celu:

— rozszerzenie zastosowań kalibratorów przez polepszenie ich parametrów metrologicznych,
— zwiększenie wydajności procesów sprawdzania aparatury pomiarowej przy użyciu kalibratorów.

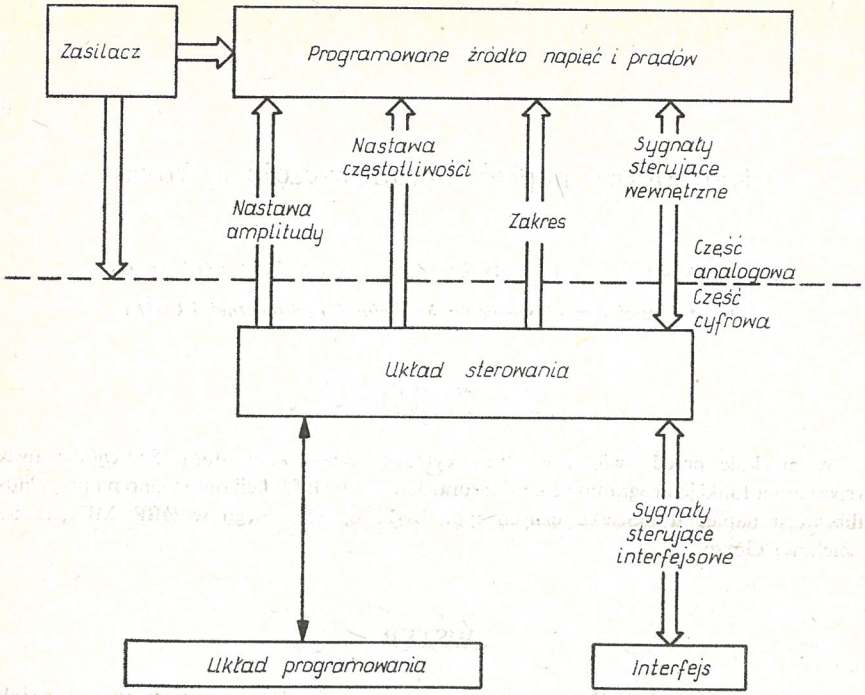
Zastosowanie w części cyfrowej kalibratora systemów mikroprocesorowych zmieniło sposób obsługi kalibratora oraz jego wygląd, a także spowodowało pojawienie się nowych typów tych urządzeń:

— kalibratora termoelektrycznego do sprawdzania termoelektrycznych mierników temperatury,
— kalibratora mocy do sprawdzania mierników mocy i liczników energii.

## SCHEMAT KALIBRATORA

W schemacie kalibratora napięć i prądów wyróżnić można część cyfrową i analogową jak pokazano na rys. 1.

Część analogową kalibratora stanowi źródło napięć i prądów wraz z zasilaczem. Część cyfrową stanowi układ sterowania wraz z układem programowania i/lub interfejsem. Do programowanego źródła napięć i prądów doprowadzane są z układu sterowania następujące sygnały:




Rys. 1. Schemat kalibratora

— nastawy amplitudy i zakresu,
— nastawy częstotliwości (dla kalibratorów napięć i prądów przemiennych),
— nastawy polaryzacji (dla kalibratorów napięć i prądów stałych),
— nastawy kąta przesunięcia fazowego (dla kalibratorów mocy),
— sterujące wewnętrzne np. zmiany stałej całkowania regulatora czy zerowania wyjścia (standby/operate).

## FUNKCJE PROGRAMOWE KALIBRATORA

Funkcje programowe są to właściwości kalibratora określające zasady pracy z kalibratorem i sposoby jego programowania. Wśród funkcji programowych kalibratora wyróżnić można następujące grupy funkcji:

a) funkcje modyfikacji nastaw umożliwiające realizację programów usprawniających proces sprawdzania przyrządów pomiarowych. Do funkcji tych zaliczyć można:
— funkcję narostu „⇅" umożliwiającą zmianę ze stałą prędkością nastawy. Funkcja narost jest szczególnie przydatna do określania wartości błędu miernika na określonej działce a także histerezy czy tarcia miernika.
— funkcję delta Δ umożliwiającą wielokrotne zwiększenie lub zmniejszanie wartości wielkości wyjściowej o zadeklarowaną wartość odchyłki. Funkcja delta jest szczególnie przydatna do sprawdzania klasy dokładności mierników wskazówkowych.

— funkcję zapisu/odczytu zawartości komórek pamięci kalibratora, która jest szczególnie przydatna do wzorcowania mierników lub sprawdzania klasy dokładności mierników cyfrowych,

b) funkcje sterujące wewnętrzne umożliwiające prawidłową pracę kalibratora, wygodną i bezpieczną obsługę. Do funkcji tych zaliczyć można:

— funkcję zerowania wyjścia (standby/operate) umożliwiającą w stanie „standby" bezpieczne przyłączanie obciążeń do zacisków wyjściowych kalibratora a następnie w stanie „operate" wytworzenie sygnału wyjściowego zgodnie z wcześniej zaprogramowaną nastawą,
— funkcję bezpiecznej zmiany zakresu polegającą na kontrolowanej kolejności przełączania przełączników zakresowych kalibratora co umożliwia bezpieczny proces przejściowy spowodowany zmianą zakresu, bezpieczny zarówno dla układów wewnętrznych kalibratora jak i dla sprawdzanego przyrządu pomiarowego.
— funkcję sygnalizacji przeciążeń kalibratora,
— funkcję sygnalizacji błędów popełnionych przez operatora w procesie programowania kalibratora,
— funkcję zmiany stałej całkowania regulatora polegającą na doborze dynamiki kalibratora w zależności od zakresu celem, zapewnienia możliwie krótkiego czasu odpowiedzi kalibratora.

c) funkcje sterujące interfejsowe umożliwiające programowanie kalibratora za pomocą sygnałów cyfrowych,

d) funkcje autowzorcowania umożliwiające wzorcowanie kalibratora bez konieczności kręcenia elementów regulacyjnych (potencjometrów) i otwierania obudowy.

## ETAPY ROZWOJU CZĘŚCI CYFROWEJ KALIBRATORÓW

Etapy rozwoju części cyfrowej kalibratorów ilustruje tablica w której zestawione są cechy kalibratorów kolejnych generacji dotyczących różnych odmian realizacji części cyfrowej. Kalibratory drugiej generacji są zjawiskiem przejściowym nie mającym ani wyróżniających zalet ani perspektyw rozwojowych. Pierwsza w krajach RWPG realizacja układu programowania kalibratora za pomocą klawiatury i wyświetlaczy, w kalibratorze uniwersalnym typu GA1 [4] okupiona została zastosowaniem układu kalkulatorowego „obrośniętego" setką cyfrowych układów scalonych średniej skali integracji.

Zastosowanie mikroprocesorów w części cyfrowej kalibratorów trzeciej generacji spowodowało pojawienie się nowych zjawisk takich jak:

— zastosowanie nowych, dotychczas nierealizowanych funkcji modyfikacji nastaw,
— realizacja pierwszych kalibratorów z funkcją autowzorcowania [7], [8],
— realizacja pierwszych kalibratorów z wygodnym, płaskim pulpitem sterującym [9], [6],
— realizacja kalibratorów termoelektrycznych [10], [5].

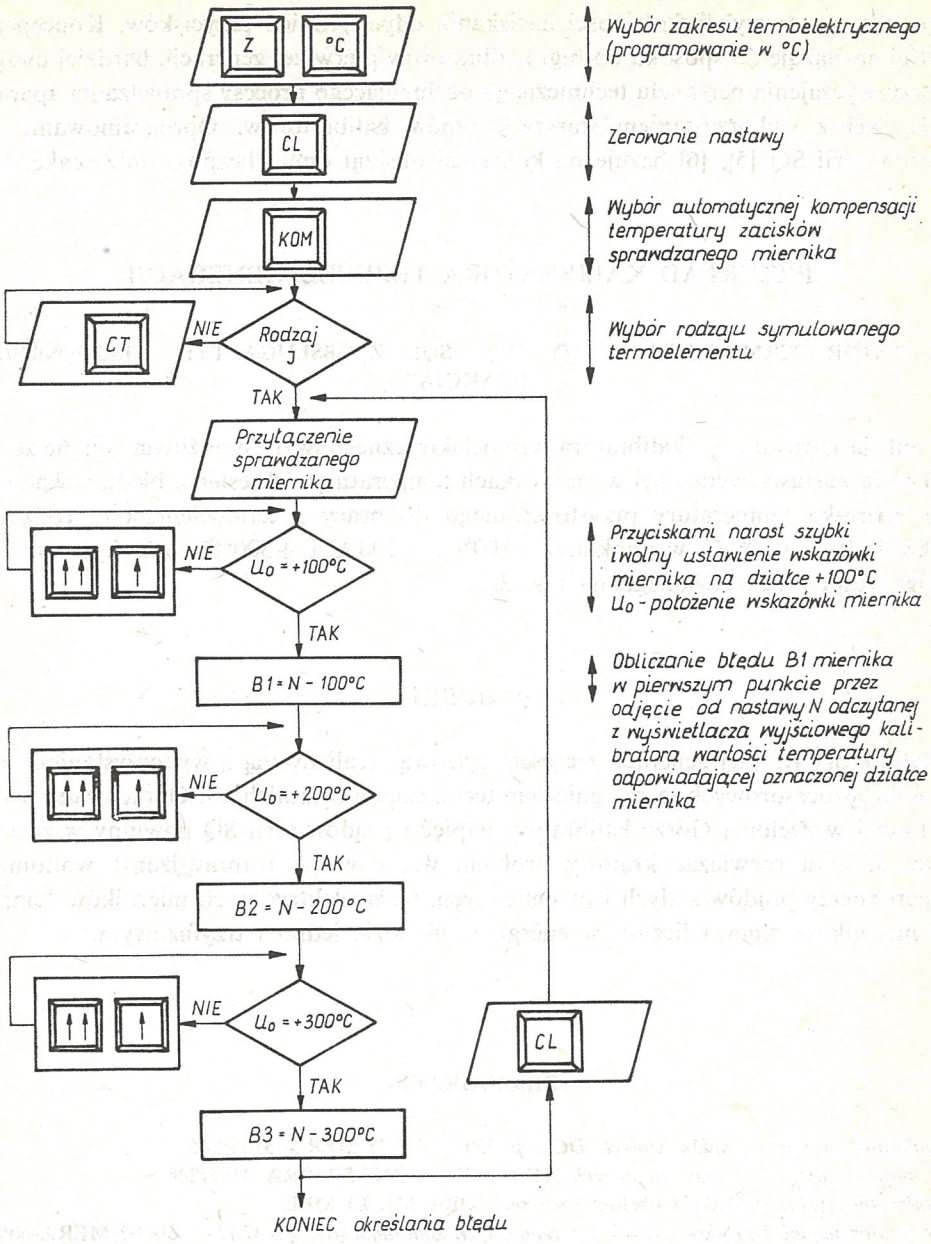
**Porównanie cech kalibratorów pierwszej, drugiej i trzeciej generacji**

| Cechy kalibratorów | | | |
|---|---|---|---|
| Kolejna cecha | pierwszej generacji | drugiej generacji | trzeciej generacji |
| Układ sterowania | występuje w formie szczątkowej | cyfrowe układy średniej skali integracji i ewentualnie wielkiej skali integracji jak kalkulatory i pamięci | układy mikroprocesorowe |
| Układ programowania | zespół przełączników obrotowych numerycznych czy typu isostat | zespół przełączników i/lub klawiatura | |
| Funkcje modyfikacji nastaw | jeżeli występują realizowane w sposób analogowy | realizowane w sposób analogowy i/lub cyfrowy | realizowane w sposób cyfrowy |
| Funkcje sterujące wewnętrzne | ze wzrostem numeru generacji zwiększa się liczba funkcji | | |
| Funkcje sterujące interfejsowe | nie występują | występują | |
| Wyróżniające zalety | prosta realizacja i prosta obsługa | | nieograniczona możliwość realizacji funkcji modyfikacji nastaw |
| Zalecane obszary zastosowań | proste i tanie kalibratory | brak perspektyw rozwojowych | kalibratory wielofunkcyjne i specjalistyczne |
| Typ kalibratora firmy Lumel 1) | DC 120 [1]<br>AC 100 [2]<br>SQ12 | GA1 [4] | SQ11 [5]<br>SQ10 [6]<br>SQ33 |

Uwaga: 1) Kalibratory DC120, AC100 i GA1 — zakończona produkcja.
Kalibratory SQ10, SQ11 i SQ12 — rozpoczęcie produkcji 1986 r.
Kalibrator trzyfazowy mocy typ SQ33 — w opracowaniu.

## DWIE KONCEPCJE OBSŁUGI KALIBRATORÓW TRZECIEJ GENERACJI

W obu koncepcjach obsługi kalibratorów oprogramowanie ich ma wspólny cel: ułatwić proces sprawdzania aparatury pomiarowej i zmniejszyć pracochłonność tego procesu. Koncepcja obsługi typu „konwersacja" polega na wyświetlaniu na wyświetlaczach komunikatów informujących o każdym kolejnym kroku, który operator powinien wykonać celem realizacji wybranego wcześniej jednego z kilku stałych programów. Jeden przycisk może spełniać różne funkcje w zależności od numeru realizowanego programu. Koncepcja




Rys. 2. Algorytm określania błędu wskazań miernika temperatury

ta wymaga rozbudowanych opisów technicznych kalibratora celem właściwego wykorzystania programów [11].

Koncepcja obsługi typu „bezpośrednia reakcja" polega na tym, że naciśnięcie przycisku powoduje określoną i stałą dla danego przycisku reakcję wyjścia kalibratora niezależnie od poprzednio realizowanej funkcji. Operator ma możliwość komponowania własnych

programów przez wybór kolejności naciskania odpowiednich przycisków. Koncepcja ta bardziej nawiązuje do sposobu obsługi kalibratorów pierwszej generacji, bardziej uwzględnia przyzwyczajenia personelu technicznego obsługującego procesy sprawdzania aparatury pomiarowej z wykorzystaniem starszych typów kalibratorów. Oprogramowanie kalibratorów serii SQ [5], [6] bazuje na koncepcji obsługi typu „bezpośrednia reakcja".

## PRZYKŁAD KALIBRATORA TRZECIEJ GENERACJI

### KALIBRATOR TERMOELEKTRYCZNY TYPU SQ11 Z OBSŁUGĄ TYPU „BEZPOŚREDNIA REAKCJA"

Funkcja narostu „↑↓" kalibratora termoelektrycznego SQ11 umożliwia zmianę ze stałą prędkością nastawy wyrażonej w jednostkach temperatury. Określenie błędu wskazówkowego miernika temperatury przystosowanego do pracy z termoelementem rodzaju J, o zakresie 0 ... +300°C, w punktach +100°C, +200°C i +300°C może być wykonane wg algorytmu przedstawionego na rys. 2.

## WNIOSKI

Kalibratory trzeciej generacji z częścią cyfrową zrealizowaną z wykorzystaniem układów mikroprocesorowych są osiągnięciem technicznym ostatnich lat. Opracowane w OBR ME Lumel w Zielonej Górze kalibratory napięć i prądów serii SQ powinny w zdecydowanym stopniu rozwiązać krajowy problem wzorcowania i sprawdzania woltomierzy i amperomierzy prądów stałych i przemiennych, termoelektrycznych mierników temperatury, mierników mocy i liczników energii w układzie jedno i trzyfazowym.

## BIBLIOGRAFIA

1. *Kalibrator napięć i prądów stałych DC typ 120* — ZN-75/MERA 3105/245
2. *Kalibrator napięć i prądów zmiennych AC typ 100* — ZN-75/MERA 3105/246
3. *Kalibrator SQ12.* Instrukcja obsługi i serwisu, OBR ME LUMEL
4. *Kalibrator napięć i prądów stałych i przemiennych sinusoidalnych typ GA1* — ZN-82/MERA-005/293
5. *Kalibrator SQ11.* Instrukcja obsługi i serwisu, OBR ME LUMEL
6. *Kalibrator napięć i prądów stałych i przemiennych typ SQ10.* Karta informacyjna, OBR ME LUMEL
7. *4200 Autocal AC Standart — seminar notes.* Datron Instruments
8. *The Autocal 4000/A Calibrator.* Karta informacyjna — Datron Instruments
9. *Microcomputer — Calibrator IS 3000.* Karta informacyjna. Knick
10. *DIGI-CAL III Series.* Karta informacyjna, ANALOGIC
11. *Calibration Dialog BO152. Questions and Answers on the 5440A/732A/752A Precision Direct Voltage Calibration System.* Technical Data Fluke.

A. OLENCKI, J. SZMYTKIEWICZ, K. URBAŃSKI

## VOLTAGE AND CURRENT CALIBRATORS — DIGITAL PART

Summary

This paper presents the evolution of the digital control part of calibrators. Special attention is paid to program functions. One of these functions is discussed taking as an example a thermocouple-voltage calibrator SQ11, manufactured by OBR ME LUMEL in Zielona Góra.

A. OLENCKI, J. SZMYTKIEWICZ, K. URBAŃSKI

## CALIBREURS DE TENSION ET DE COURANT — PARTIE NUMÉRIQUE

Résumé

L'article présente le développement de la partie numérique des calibreurs de tension et de courant. On attire particulièrement l'attention sur les fonctions de programme du calibreur. Une de ces fonctions est décrite à la base du calibreur des tensions thermoélectriques. Ce calibreur, nommé SO11 à été élaboré dans le Centre des Recherches et du Développement de la Métrologie Electrique „LUMEL" à Zielona Góra (Pologne).

A. OLENCKI, J. SZMYTKIEWICZ, K. URBAŃSKI

## KALIBRATOREN DER SPANNUNGEN UND DER STRÖME-DIGITAL-TEIL

Zusammenfassung

Im Artikel wurde die Evolution des Steur-Digital-Teils der Kalibratoren dargestellt. Besondere Auf merksamkeit wurde auf die Programmierungsfunktionen der Kalibratoren gerichtet. Eine von der Funktionen wurde am Beispiel des Kalibrators Typ SQ11 erörtert, der im OBR ME „Lumel" in Zielona Góra erzeugt wird.

А. ОЛЕНЦКИ, Е. ШМЫТКЕВИЧ, К. УРБАНЬСКИ

## КАЛИБРАТОРЫ НАПРАЖЕНИЙ И ТОКОВ — ЦИФРОВАЯ ЧАСТЬ

Резюме

Представлена эволюция цифровой части калибратора. Одна из функций обсуждена на примере исполнения калибратора термоэлектрических напряжений типа SQ11 разработанного в ОБР МЕ ЛЮМЭЛЬ в Зелёной Гуре.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1988, 34, z. 1, ss. 269-289

621.313.3

# Analiza układów szybkiego tłumienia strumienia resztkowego wirnika w silnikach indukcyjnych dużej mocy

KRZYSZTOF PIEŃKOWSKI, RYSZARD BRZEZIŃSKI (Wrocław)

*Instytut Układów Elektromaszynowych, Politechnika Wrocławska*

*Artykuł wpłynął 1986.10.15*
*Autoryzowano do druku 1987.04.07*

Podano zależności opisujące strumień resztkowy wirnika w silnikach indukcyjnych dużej mocy po ich odłączeniu od sieci zasilającej. Przedstawiono układy tłumienia tego strumienia pozwalające na ograniczenie niekorzystnych zjawisk przejściowych występujących po powtórnym włączeniu silnika. Sformułowano równania różniczkowe silnika dla poszczególnych układów tłumienia. Wyznaczono wartości pierwiastków równania charakterystycznego decydujących o wartości amplitud i współczynników tłumienia oraz częstotliwości przebiegów przejściowych. Określono przebiegi przejściowe strumieni sprzężonych, prądów i momentu elektromagnetycznego silnika podczas tłumienia strumienia resztkowego wirnika. Przedstawiono wyniki symulacji cyfrowej stanów przejściowych. Dokonano porównania własności poszczególnych układów tłumienia.

## 1. WSTĘP

Po wyłączeniu silnika indukcyjnego z sieci zasilającej prądy w uzwojeniu stojana są równe zeru, natomiast w zamkniętym uzwojeniu wirnika powstają prądy przejściowe starające się utrzymać ciągłość strumienia magnetycznego sprzężonego z tym uzwojeniem. Strumieniem resztkowym wirnika nazywany jest strumień magnetyczny wytwarzany przez prądy przejściowe wirnika po wyłączeniu silnika.

Występowanie tego strumienia wpływa bardzo niekorzystnie na przebieg elektromagnetycznych procesów przejściowych powstających podczas szybkich przełączeń silnika do nowych stanów pracy. Przejawia się to szczególnie w silnikach indukcyjnych dużej mocy, w których ze względu na duże wartości indukcyjności a małe wartości rezystancji uzwojeń strumień resztkowy może mieć dużą wartość i długi czas zanikania. Po wyłączeniu silnika w otwartym uzwojeniu stojana indukowane jest napięcie resztkowe wytwarzane przez zanikający strumień resztkowy wirnika wirujący z prędkością wirnika. Jeżeli prędkość kątowa wirnika jest bliska prędkości synchronicznej silnika to amplituda napięcia resztkowego w pierwszych chwilach czasu po wyłączeniu silnika jest prawie równa amplitudzie napięcia sieci zasilającej silnik przed wyłączeniem [9—11]. Ponieważ silniki indukcyjne dużej mocy wykonywane są przeważnie jako silniki wysokonapięciowe, to po ich wyłączeniu z normalnej pracy na zaciskach stojana utrzymuje się przez dość długi czas wolnozanikające napięcie resztkowe o stosunkowo znacznej i niebezpiecznej dla obsługi i otoczenia wartości.

Szczególnie niekorzystne warunki występują, jeżeli zachodzi konieczność szybkiego zahamowania silników indukcyjnych dużej mocy przez przełączenie ich na hamowanie dynamiczne prądem stałym. Wartość napięcia stałego zasilającego wówczas uzwojenie stojana niezbędna do wytworzenia pożądanego momentu hamującego nie przekracza zwykle kilku procent napięcia znamionowego silnika. Napięcie resztkowe o dużej amplitudzie może spowodować więc zniszczenie elementów półprzewodnikowych, z których zbudowany jest przeważnie układ zasilania prądem stałym silnika podczas hamowania. Nawet w przypadku doboru elementów tego układu o odpowiedniej wytrzymałości, obecność strumienia resztkowego wirnika powoduje, że po przełączeniu silnika na hamowanie powstają duże udary momentu elektromagnetycznego i prądów silnika [10]. Ma to niekorzystny wpływ na pracę silnika, układu mechanicznego i układu zasilania silnika.

Podobnie niekorzystny przebieg zjawisk ma miejsce przy powtórnym włączeniu silnika indukcyjnego dużej mocy do sieci prądu przemiennego. Stan taki może być wywołany krótkotrwałym zanikiem napięcia zasilania silnika, przełączeniem silnika na zasilanie rezerwowe lub koniecznością dokonania nawrotu. Szczególnie duże udary momentu elektromagnetycznego i prądów powstają wówczas gdy przy powtórnym włączeniu występuje duża różnica faz napięcia sieci i napięcia resztkowego indukowanego przez strumień resztkowy wirnika [9], [11].

Wyeliminowanie tych niekorzystnych zjawisk można uzyskać, jeżeli ponowne włączenie silnika do nowego stanu pracy zostanie dokonane po całkowitym zaniknięciu lub odpowiednim zmniejszeniu się wartości strumienia resztkowego wirnika [3—9], [13]. Uzyskanie tych warunków przez stworzenie odpowiednio długiego odstępu czasu wystarczającego do naturalnego zaniknięcia strumienia resztkowego nie jest racjonalne, gdyż stała czasowa zanikania tego strumienia w silnikach indukcyjnych dużej mocy jest dość duża i może wynosić do kilku sekund. Dlatego w układach wymagających szybkich przełączeń rozważane jest zastosowanie odpowiednich układów szybkiego tłumienia strumienia resztkowego wirnika [10], [11].

Zagadnienia analizy stanów przejściowych w silnikach indukcyjnych dużej mocy występujących podczas tłumienia pola resztkowego stanowią mało poznaną dziedzinę teorii stanów nieustalonych maszyn elektrycznych.

W pracy tej przeprowadzono analizę najczęściej stosowanych układów tłumienia strumienia resztkowego. Sformułowano równania opisujące silnik indukcyjny podczas tłumienia strumienia, wyznaczono powstające wówczas przebiegi przejściowe momentu elektromagnetycznego, prądów silnika i dokonano porównania własności poszczególnych układów tłumienia.

## 2. ZAŁOŻENIA I RÓWNANIA WYJŚCIOWE

### 2.1. ZAŁOŻENIA UPRASZCZAJĄCE

1. Uzwojenie stojana i wirnika jest trójfazowe i symetryczne. W przypadku silników klatkowych uzwojenie klatkowe rozpatruje się jako sprowadzone do zastępczego uzwojenia trójfazowego.

2. Pomija się wpływ nasycenia obwodu magnetycznego, wypierania prądu w przewodach i strat w żelazie silnika. Zakłada się sinusoidalny rozkład indukcji magnetycznej w szczelinie.

3. Przyjmuje się, że wszelkie procesy łączeniowe związane z załączeniem i wyłączeniem silnika odbywają się bardzo szybko (natychmiastowo) i równocześnie we wszystkich fazach silnika. W łącznikach zakłada się szybkie i równoczesne otwieranie się lub zamykanie ich styków. W pracach [1], [2] wykazano, że występująca w praktyce niejednoczesność otwierania się styków oraz czas wyłączania łączników mocy ma nieznaczny wpływ na pole magnetyczne wirnika po odłączeniu silnika.

4. Zakłada się, że silnik w chwili poprzedzającej odłączenie pracował w stanie ustalonym elektromagnetycznym i mechanicznym.

5. Po odłączeniu napięcia zasilania nie następuje wymiana energii z innymi silnikami, czyli rozpatruje się pracę indywidualną silnika. Odłączenie pojedynczego silnika różni się od odłączenia grupy silników, których uzwojenia stojanów są powiązane wzajemnie z sobą przez szyny zbiorcze. Analiza wybiegu grupowego silników była rozważana w pracach [1], [12].

Wielkości przyporządkowane stojanowi oznaczono indeksem $s$, a wirnikowi indeksem $r$. Wszystkie wielkości elektromagnetyczne wirnika zostały sprowadzone na stronę stojana.

Przyjęte założenia powodują, że wyniki dalszej analizy są słuszne dla silników indukcyjnych pierścieniowych i klatkowych, w których nie występuje wypieranie prądów. W przypadku silników nie spełniających powyższych założeń wyniki analizy należy traktować jako przybliżone.

### 2.2. RÓWNANIA WEKTOROWE SILNIKA INDUKCYJNEGO

Do analizy przyjęto opis wekorowy maszyny indukcyjnej. Równania wektorowe wyrażone w ogólnym wspólnym dla stojana i wirnika układzie współrzędnych wirującym z przyjętą dowolnie prędkością kątową $\omega_k$ ma postać [11]:

$$\begin{bmatrix} u_s \\ u_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_s + j\omega_k & -k_r\alpha_s \\ -k_s\alpha_r & \alpha_r + j(\omega_k - \omega_e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_s \\ \psi_r \end{bmatrix} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} \psi_s \\ \psi_r \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$i_s = (\psi_s - k_r\psi_r)/\sigma L_s \tag{2a}$$

$$i_r = (\psi_r - k_s\psi_s)/\sigma L_r \tag{2b}$$

$$M_e = \frac{3}{2}\varrho Im(\psi_s^* i_s) = k_M Im(\psi_s^* \psi_r) \tag{3}$$

$$J\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega = \frac{J}{\varrho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega_e = M_e + M_m \tag{4}$$

gdzie:

$$\alpha_s = R_s/\sigma L_s \qquad \alpha_r = R_r/\sigma L_r \tag{5}$$

$$k_s = L_m/L_s \qquad k_r = L_m/L_r \tag{6}$$

$$k_M = -\frac{3}{2}\varrho\frac{k_r}{\sigma L_s} \tag{7}$$

$$\sigma = 1 - L_m^2/L_s L_r = 1 - k_r k_s \tag{8}$$

W równaniach (1)—(8) przyjęto następujące oznaczenia:

$u_s, u_r, i_s, i_r, \psi_s, \psi_r$ — odpowiednio wektory przestrzenne napięć, prądów oraz strumieni sprzężonych stojana i wirnika;

$R_s, R_r, L_s, L_r, L_m$ — odpowiednio rezystancje, indukcyjności własne uzwojenia stojana i wirnika oraz indukcyjność magnesowania silnika;

$M_e, M_m, J$ — odpowiednio moment elektromagnetyczny silnika, moment oporowy i moment bezwładności układu napędowego;

$\varrho, \omega, \omega_e$ — liczba par biegunów silnika, prędkość kątowa wirnika i prędkość elektryczna wirnika;

$k_s, k_r$ — odpowiednio współczynnik sprzężenia stojana i wirnika;

$\sigma$ — współczynnik rozproszenia silnika;

$j = \sqrt{-1}$.

Równania (1) są równaniami napięciowymi równowagi elektrycznej stojana i wirnika, równania (2) określają związki między strumieniami sprzężonymi i prądami silnika, równanie (3) wyznacza moment elektromagnetyczny silnika, a równanie (4) jest równaniem ruchu układu napędowego.

Tablica

**Dane znamionowe, parametry i współczynniki silnika indukcyjnego dużej mocy**

| | |
|---|---|
| Typ silnika | SZUre 136t |
| Moc znamionowa $P_n$ | 1000 kW |
| Napięcie znamionowe stojana $U_1$ | 6000 V |
| Napięcie wienika $U_{20}$ | 1160 V |
| Prąd znamionowy stojana $I_{1n}$ | 118 A |
| Prąd znamionowy wirnika $I_{2n}$ | 545 A |
| Prędkość znamionowa $n_n$ | 990 obr/min |
| Rezystancja uzwojenia stojana $R_s$ | 0,248 Ω |
| Rezystancja uzwojenia wirnika $R'_r$ | 0,290 Ω |
| Reaktancja rozproszenia stojana $X_{\sigma s}$ | 3,38 Ω |
| Reaktancja rozproszenia wirnika $X'_{\sigma r}$ | 4,12 Ω |
| Reaktancja magnesująca $X_m$ | 99,4 Ω |
| Współczynniki i stałe czasowe: | |
| $k_s$ | 0,967 |
| $k_r$ | 0,960 |
| $\sigma$ | 0,071 |
| $\alpha_s$ | 10,60 1/s |
| $\alpha_r$ | 12,31 1/s |
| $T_r$ | 0,88 s |

W tablicy przedstawiono dane znamionowe, wartości parametrów i współczynników wybranego silnika indukcyjnego dużej mocy wykorzystane do obliczeń ilustrujących wyniki analizy przeprowadzonej w tej pracy.

## 2.3. WYZNACZENIE WARTOŚCI POCZĄTKOWEJ STRUMIENIA RESZTKOWEGO WIRNIKA

Duża wartość momentu bezwładności wirnika silnika indukcyjnego dużej mocy i sprzężonego z nim układu mechanicznego pozwala przyjąć, że w momencie wyłączania silnika z sieci zasilającej prądu przemiennego jego prędkość kątowa nie ulega zmianie i jest równa:

$$\omega_e = \omega_1(1-s_0) \tag{9}$$

gdzie:

$\omega_1$ — pulsacja napięcia zasilającego silnik przed wyłączeniem;

$s_0$ — poślizg silnika przed wyłączeniem.

Z założenia ciągłości strumienia sprzężonego wirnika w chwili $t = -0$ bezpośrednio przed wyłączeniem silnika z sieci i w chwili $t = +0$ bezpośrednio po wyłączeniu otrzymuje się:

$$\Psi_r(-0) = \Psi_r(+0) = \Psi_{r0}. \tag{10}$$

Przyjmując, że silnik indukcyjny przed wyłączeniem zasilany był symetrycznym trójfazowym napięciem przemiennym i pracował w stanie ustalonym, to z równań (1) i (10) otrzymuje się następujące wyrażenie określające wartość początkową strumienia resztkowego wirnika:

$$\Psi_{r0} = \frac{\alpha_r k_s}{\alpha_s \alpha_r - s_0 \omega_1^2 + j(\alpha_s s_0 + \alpha_r)} U_{fm} e^{j\gamma_0} \tag{11}$$

gdzie:

$U_{fm}$ — amplituda napięcia fazowego zasilającego silnik przed wyłączeniem,

$\gamma_0$ — faza napięcia zasilającego w momencie wyłączenia silnika.

Równanie (11) odpowiada transformacji homograficznej strumienia $\Psi_{r0}$ względem parametru rzeczywistego $s_0$, czyli poślizgu silnika przed włączeniem. Na płaszczyźnie Gaussa miejscem geometrycznym $\Psi_{r0}$ przy zmianie poślizgu $s_0$ w szerokich granicach jest okrąg. Strumień resztkowy wirnika uzyskuje największą wartość jeżeli wyłączenie silnika zostało dokonane przy małej wartości bezwzględnej poślizgu silnika $s_0$ czyli pracy silnika przy prędkości wirnika zbliżonej do prędkości synchronicznej. Odpowiada to stanowi pracy silnika przy którym najczęściej dokonuje się przełączeń.

Po odłączeniu silnika z sieci obwód stojana silnika pozostaje otwarty i nie płyną w nim prądy, czyli $i_s = 0$. Z równań (2) wynika, że zachodzi wówczas następujący związek między wektorami strumienia sprzężonego stojana i wirnika:

$$\Psi_s = k_r \Psi_r \quad t \geqslant +0, \tag{12}$$

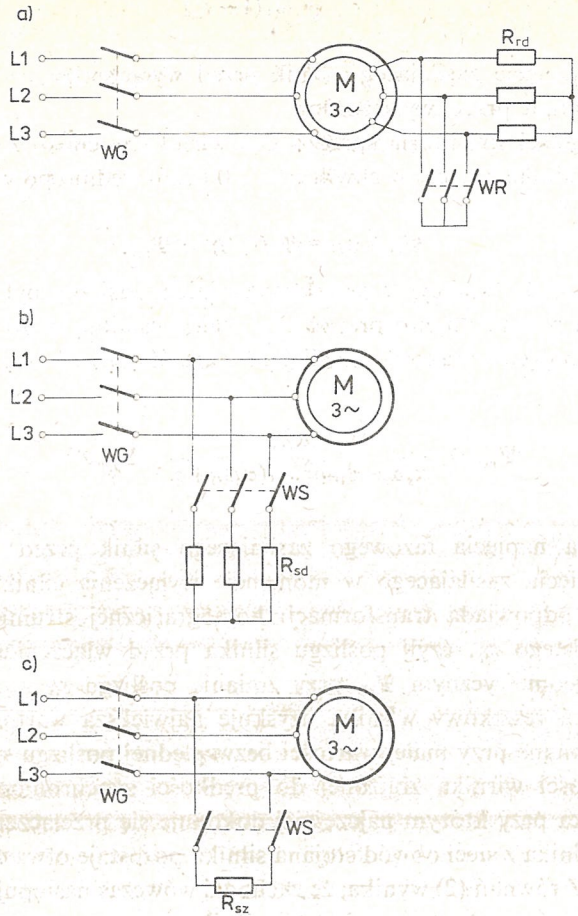
czyli jest również

$$\Psi_s(+0) = k_r \Psi_r(+0) = k_r \Psi_{r0}. \tag{13}$$

## 3. UKŁADY SZYBKIEGO TŁUMIENIA STRUMIENIA RESZTKOWEGO WIRNIKA

Na rys. 1 przedstawiono stosowane najczęściej w praktyce układy szybkiego tłumienia strumienia resztkowego wirnika w silnikach indukcyjnych.

Układ tłumienia wg rys. 1a może być stosowany wyłącznie do silników indukcyjnych pierścieniowych. Tłumienie strumienia resztkowego uzyskuje się tu dokonując bezpośrednio po wyłączeniu silnika z sieci włączenia w obwód wirnika trójfazowych symetrycznych rezystancji tłumiących $R_{rd}$. Jako te rezystancje mogą być wykorzystane rezystancje początkowych stopni rozruchowych silnika, których wartości w silnikach indukcyjnych dużej mocy są wielokrotnie większe od rezystancji fazowych wirnika.




Rys. 1. Układy szybkiego tłumienia strumienia resztkowego wirnika w silnikach indukcyjnych a) przez włączenie rezystancji tłumiących do obwodu wirnika, b) przez symetryczne trójfazowe zwarcie uzwojenia stojana, c) przez dwufazowe zwarcie uzwojenia stojana

Układy tłumienia wg rys. 1b i 1c stosowane są przeważnie do silników indukcyjnych klatkowych, możliwe jest jednak ich użycie również do silników indukcyjnych pierścieniowych. Tłumienie strumienia resztkowego wirnika uzyskuje się tu przez symetryczne trójfazowe lub niesymetryczne dwufazowe zwarcie uzwojenia stojana. Ze względu na prostotę układu stosuje się najczęściej zwarcie bezpośrednie uzwojenia stojana. W pracy rozpatrzono ogólny przypadek tłumienia strumienia wirnika przez zwarcie uzwojenia stojana przez dodatkowy układ symetrycznych rezystancji tłumiących $R_{sd}$ lub zwarcia dwufazowego przez rezystancję $R_{sz}$.

## 4. ANALIZA TŁUMIENIA STRUMIENIA RESZTKOWEGO WIRNIKA PRZEZ ZWIĘKSZENIE REZYSTANCJI UZWOJENIA WIRNIKA

Analizę tłumienia strumienia resztkowego wirnika wg układu z rys. 1a dogodnie jest prowadzić w układzie współrzędnych wirującym z prędkością kątową wirnika ($\omega_k = \omega_e$).

Uwzględniając w równaniach (1) zależność (12) otrzymuje się równanie opisujące zmienność strumienia resztkowego wirnika po wyłączeniu silnika:

$$\frac{d}{dt}\Psi_r = -\alpha_r \sigma \Psi_r \quad t > +0. \tag{14}$$

Rozwiązanie tego równania ma następującą postać:

$$\Psi_r = \Psi_{r0} e^{-\alpha_r \sigma t} = \Psi_{r0} e^{-t/T_r} \quad t > +0. \tag{15}$$

Strumień resztkowy wirnika utrzymuje więc stałe niezależne od czasu położenie względem wirnika, a jego amplituda zanika wykładniczo ze stałą czasową $T_r$, która wynosi:

$$T_r = 1/\alpha_r \sigma = L_r/R_r. \tag{16}$$

Stała czasowa zanikania strumienia resztkowego wirnika jest niezależna od prędkości kątowej silnika i równa stałej czasowej obwodu wirnika.

Uwzględniając w równaniu (2b) zależność (12) otrzymuje się równanie opisujące wektor prądów przejściowych wirnika po wyłączeniu silnika:

$$i_r = \Psi_r/L_r = \Psi_{r0}/L_r e^{-t/T_r} \quad t > +0. \tag{17}$$

Z równania (17) wynika, że po wyłączeniu silnika w uzwojeniu wirnika płyną prądy przejściowe o stałym kierunku, lecz zmniejszającej się wykładniczo wartości. Pracę maszyny indukcyjnej podczas rozpatrywanego stanu można więc przyrównać do pracy maszyny synchronicznej z otwartym uzwojeniem twornika i zanikającym wykładniczo prądem wzbudzenia.

Możliwość uzyskania szybszego tłumienia strumienia resztkowego wirnika w tym układzie wynika bezpośrednio z równań (15)—(16). Dokonując natychmiast po wyłączeniu silnika z sieci włączenia w obwód wirnika trójfazowych rezystancji $R_{rd}$ uzyskuje się zmniejszenie stałej czasowej zanikania strumienia resztkowego wirnika do wartości:

$$T_r' = \frac{L_r}{R_r + R_{rd}} = \frac{R_r}{R_r + R_{rd}} T_r. \tag{18}$$

Dobierając odpowiednio dużą wartość rezystancji $R_{rd}$ można uzyskać zmniejszenie czasu zanikania strumienia resztkowego wirnika do wartości zbliżonej do czasu działania aparatury łączeniowej.

Ponieważ podczas tego sposobu tłumienia obwód uzwojenia stojana jest otwarty, to moment elektromagnetyczny silnika jest równy zeru i silnik znajduje się w stanie wybiegu. Jedyną niekorzystną cechą tego układu tłumienia jest indukowanie przez zanikający strumień resztkowy wirnika napięcia resztkowego w uzwojeniu stojana, którego wartość początkowa może być stosunkowo duża [10].

## 5. ANALIZA TŁUMIENIA STRUMIENIA RESZTKOWEGO WIRNIKA PRZEZ TRÓJFAZOWE ZWARCIE UZWOJENIA STOJANA

### 5.1. RÓWNANIA SILNIKA DLA STANU TRÓJFAZOWEGO ZWARCIA STOJANA

Rozpatrywany sposób tłumienia strumienia resztkowego wirnika polega na dokonaniu natychmiast po odłączeniu silnika symetrycznego trójfazowego zwarcia uzwojenia stojana

przez rezystyncje $R_{sd}$ lub bezpośrednio, gdy $R_{sd} = 0$ (rys. 1b). Równania napięciowe silnika (1) dla zwartego przez rezystancje tłumiące uzwojenia stojana wyrażone w nieruchomym względem stojana układzie współrzędnych wynoszą:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\Psi_s\\ \Psi_r\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\alpha_s & -k_r\alpha_s\\ -k_s\alpha_r & \alpha_r - j\omega_e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Psi_s\\ \Psi_r\end{bmatrix}. \tag{19}$$

W powyższym układzie równań współczynnik $\alpha_s$ ujmuje również wartość rezystancji tłumiącej $R_{sd}$ zwierającej uzwojenie stojana.

Zwarcie uzwojenia stojana przy różnych od zera elektromagnetycznych warunkach początkowych powoduje przepływ prądów przejściowych stojana i wirnika oraz powstanie przejściowego momentu elektromagnetycznego.

Badanie zjawisk występujących w układzie tłumienia wymaga rozwiązania układu równań (19) łącznie z równaniem momentu (3) i równaniem ruchu (4). Przy zmiennej prędkości kątowej silnika ten układ równań jest układem nieliniowym i jego rozwiązanie można otrzymać tylko metodami numerycznymi lub modelowania analogowego. Ponieważ prędkość silników dużej mocy podczas ich wybiegu zmienia się dość wolno a czas trwania rozpatrywanych stanów nieustalonych jest krótki, dlatego uzasadnione jest przyjęcie do analizy stałej prędkości kątowej silnika.

Przy takim założeniu zachodzi możliwość rozwiązania zagadnienia analitycznie stosując rachunek operatorowy. Równania (19) poddane transformacji Laplace'a wynoszą:

$$\begin{bmatrix}p+\alpha_s & -k_r\alpha_s\\ -k_s\alpha_r & p+\alpha_r - j\omega_e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Psi_s(p)\\ \Psi_r(p)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Psi_s(+0)\\ \Psi_r(+0)\end{bmatrix}, \tag{20}$$

gdzie przez $p$ oznaczono operator transformacji Laplace'a. Warunki początkowe dla strumieni sprzężonych stojana i wirnika określone są zależnościami (11) i (13).

### 5.2. ANALIZA PIERWIASTKÓW RÓWNANIA CHARAKTERYSTYCZNEGO

Rozwiązania układu równań (20) zależne są od wartości pierwiastków równania charakterystycznego, które jest równaniem kwadratowym o współczynnikach zespolonych:

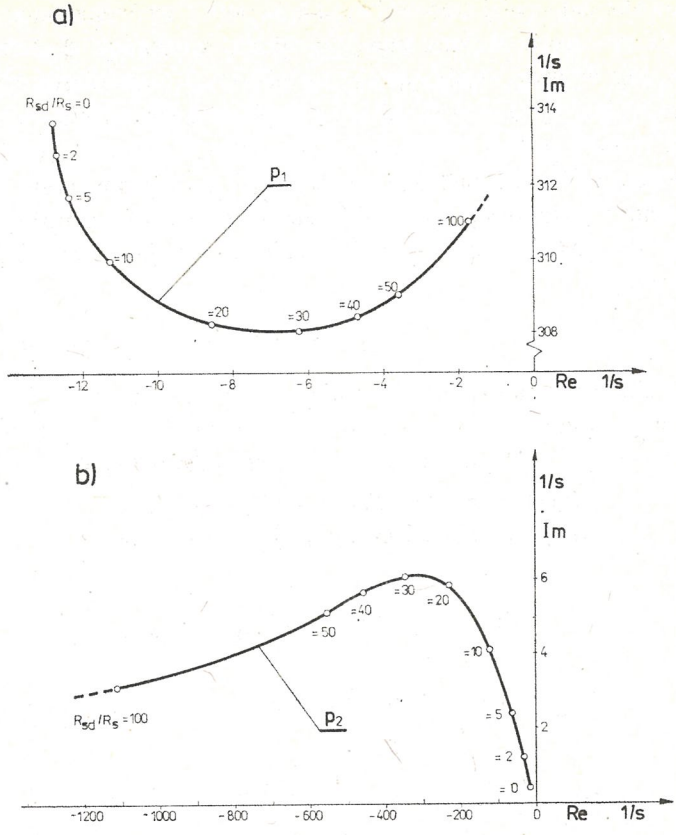
$$p^2 + p(\alpha_s + \alpha_r - j\omega_e) + \alpha_s(\alpha_r\sigma - j\omega_e) = 0. \tag{21}$$

W ogólnym przypadku równanie (21) może mieć pierwiastki zespolone, które można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} p_1 &= -\alpha_1 + j(\omega_e - \omega_a) = -\alpha_1 + j\beta_1\\ p_2 &= -\alpha_2 + j\omega_a = -\alpha_2 + j\beta_2, \end{aligned} \tag{22}$$

gdzie $\alpha_1$, $\alpha_2$ są liczbami dodatnimi określającymi tłumienie składowych przejściowych, a $\beta_1$, $\beta_2$ wyznaczają częstotliwość tych przebiegów.

W zależności od wielkości parametrów silnika, rezystancji zwierających uzwojenie stojana oraz prędkości kątowej silnika pierwiastki $p_1$, $p_2$ mogą zawierać się w bardzo szerokich granicach wartości liczbowych. Dla omawianego zagadnienia najbardziej interesujące jest wyznaczenie ich wartości przy prędkości kątowej wirnika zbliżonej lub równej prędkości synchronicznej, ponieważ w tych warunkach następuje przeważnie odłączenie silnika od sieci. Położenie pierwiastków $p_1$, $p_2$ na płaszczyźnie zespolonej, wyznaczone




Rys. 2. Wartości pierwiastków równania (21) dla silnika o mocy 1000 kW

dla parametrów silnika podanych w tablicy 1, przedstawiono na rys. 2. Dla bezpośredniego zwarcia uzwojenia stojana ($R_{sd} = 0$) części rzeczywiste pierwiastków $\alpha_1$ i $\alpha_2$ różnią się między sobą nieznacznie, natomiast część urojona pierwiastka $p_1$ jest prawie równa elektrycznej prędkości kątowej wirnika, a pierwiastka $p_2$ jest bardzo mała $\omega_a \ll \omega_1$.
Z twierdzenia Viety o sumie pierwiastków wynika, że spełniony jest warunek

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_s + \alpha_r. \tag{23}$$

W szczególnym przypadku jednakowych stałych czasowych stojana i wirnika czyli $\alpha_s = \alpha_r$, wartości współczynników tłumienia $\alpha_1$, $\alpha_2$ są sobie równe

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_r.$$

Stosunek tych wartości do wartości współczynnika tłumienia pola niestłumionego wirnika przy otwartym uzwojeniu stojana określonego równaniem (15) wynosi:

$$d = \frac{\alpha_{1,2}}{\alpha_r \sigma} = \frac{\alpha_r}{\alpha_r \sigma} = \frac{1}{\sigma}.$$

Stosując więc symetryczne bezpośrednie zwarcie uzwojenia stojana otrzymuje się w przybliżeniu $1/\sigma$-krotne zmniejszenie stałych czasowych zanikania pola niestłumionego

wirnika, w porównaniu do stałej czasowej zanikania pola przy otwartym uzwojeniu stojana.

Jeżeli zwarcie uzwojenia stojana następuje przez rezystancje dodatkowe $R_{sd}$, to ze wzrostem $R_{sd}$ maleje wartość współczynnika tłumienia $\alpha_1$, natomiast szybko zwiększa się wartość współczynnika $\alpha_2$. Jedna składowa przejściowa strumienia sprzężonego silnika będzie tłumiona wolniej, a druga znacznie szybciej w porównaniu z przebiegami dla bezpośredniego zwarcia stojana. Zwiększenie rezystancji $R_{sd}$ nie powoduje więc zwiększenia szybkości tłumienia wypadkowego pola niestłumionego wirnika i może być uzasadnione jedynie dążeniem do ograniczenia amplitud przebiegów przejściowych prądów i momentu elektromagnetycznego.

### 5.3. PRZEBIEGI PRZEJŚCIOWE STRUMIENI SPRZĘŻONYCH I PRĄDÓW SILNIKA

Rozwiązując układ równań (20) i dokonując następnie transformacji odwrotnej otrzymuje się następujące wyrażenia dla wektorów strumieni skojarzonych stojana i wirnika w nieruchomym względem stojana układzie współrzędnych ($\omega_k = 0$):

$$\Psi_s(t) = \Psi_{s1}(t)+\Psi_{s2}(t) = A_{s1}e^{p_1 t}+A_{s2}e^{p_2 t} \tag{24a}$$

$$\Psi_r(t) = \Psi_{r1}(t)+\Psi_{r2}(t) = A_{r1}e^{p_1 t}+A_{r2}e^{p_2 t}, \tag{24b}$$

gdzie:

$$A_{s1} = \frac{p_1+\alpha_s+\alpha_r-j\omega_e}{p_1-p_2}\Psi_s(+0) = A'_{s1}\Psi_s(+0) \tag{25a}$$

$$A_{s2} = \frac{-p_2+\alpha_s+\alpha_r-j\omega_e}{p_1-p_2}\Psi_s(+0) = A'_{s2}\Psi_s(+0) \tag{52b}$$

$$A_{r1} = \frac{p_1+\alpha_s+\alpha_r(1-\sigma)}{p_1-p_2}\Psi_r(+0) = A'_{r1}\Psi_r(+0) \tag{25c}$$

$$A_{r2} = \frac{-p_2+\alpha_s+\alpha_r(1-\sigma)}{p_1-p_2}\Psi_r(+0) = A'_{r2}(+0) \tag{25d}$$

przy czym:

$$A'_{s1}+A'_{s2} = 1 \quad A'_{r1}+A'_{r2} = 0. \tag{26}$$

Wyrażenia na strumienie skojarzone stojana i wirnika nie zawierają składowej ustalonej i składają się tylko ze składowych przejściowych, zanikających w ogólnym przypadku z różnymi współczynnikami tłumienia.

Uwzględniając zależności (2) i (25) prądy przejściowe stojana i wirnika można wyrazić następująco:

$$i_s(t) = i_{s1}(t)+i_{s2}(t) = B_{s1}e^{p_1 t}+B_{s2}e^{p_2 t} \tag{27a}$$

$$i_r(t) = i_{r1}(t)+i_{r2}(t) = B_{r1}e^{p_1 t}+B_{r2}e^{p_2 t}, \tag{27b}$$

gdzie:

$$B_{s1} = (A_{s1}-k_r A_{r1})/\sigma L_s = B'_{s1}\Psi_s(+0) \tag{28a}$$

$$B_{s2} = (A_{s2}-k_r A_{r2})/\sigma L_s = B'_{s2}\Psi_s(+0) \tag{28b}$$

$$B_{r1} = (A_{r1}-k_s A_{s1})/\sigma L_r = B'_{r1}\Psi_r(+0) \tag{28c}$$

$$B_{r2} = (A_{r2}-k_s A_{s2})/\sigma L_r = B'_{r2}\Psi_r(+0) \tag{28d}$$

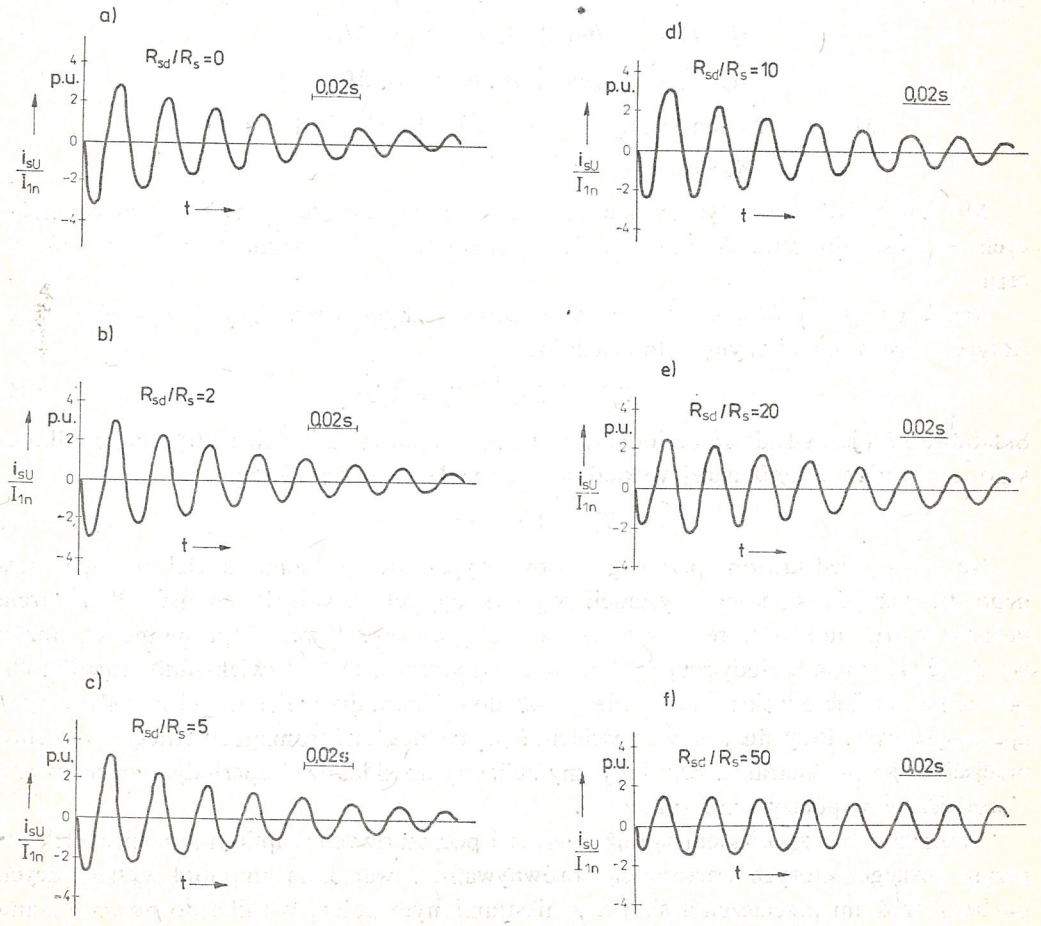
przy czym:

$$B'_{s1}+B'_{s2} = 0 \quad B'_{r1}+B'_{r2} = 1. \tag{29}$$

W przebiegu czasowym prądu stojana i wirnika występują jedynie tłumione składowe przejściowe, a składowe ustalone są równe zeru. Uwzględniając wartości pierwiastków równania charakterystycznego (21) otrzymuje się, że składnik pierwszy prądu stojana jest prądem periodycznym o pulsacji zbliżonej do elektrycznej prędkości kątowej wirnika, zanikającym ze stałą czasową równą $1/\alpha_1$, natomiast składnik drugi jest prądem prawie aperiodycznym (o pulsacji zbliżonej do zera) i tłumionym ze stałą czasową $1/\alpha_2$. Z warunków (29) wynika, że w pierwszej chwili zwarcia wartości amplitud składnika periodycznego i aperiodycznego są sobie równe, a ich odchylenie na płaszczyźnie zespolonej wynosi 180 stopni.

Prądy fazowe stojana i wirnika otrzymać można rzutując wektory $\boldsymbol{i}_s$ oraz $\boldsymbol{i}_r$ na osie fazowe stojana i wirnika. Wypadkowe prądy fazowe złożone są więc z tych samych składników co określające je wektory.

Na rys. 3 przedstawiono przebiegi czasowe prądu przejściowego w uzwojeniu fazy $U$ stojana dla różnych wartości rezystancji $R_{sd}$ zwierających uzwojenie stojana. Zwiększanie




Rys. 3. Przebiegi czasowe prądu w uzwojeniu fazy $U$ stojana silnika o mocy 1000 kW podczas tłumienia strumienia resztkowego wirnika przez symetryczne trójfazowe zwarcie uzwojenia stojana

wartości $R_{sd}$ powoduje zmniejszenie amplitudy prądu przejściowego, która w przypadku zwarcia bezpośredniego może kilkakrotnie przekraczać wartość znamionową. Dla zwarcia bezpośredniego w przebiegu czasowym prądu stojana można wyróżnić składową periodyczną i prawie aperiodyczną. Przy większych wartościach $R_{sd}$ składowa prawie aperiodyczna jest szybko tłumiona i prąd wypadkowy zbliżony jest do wolniej zanikającej składowej periodycznej.

### 5.4. PRZEBIEG PRZEJŚCIOWY MOMENTU ELEKTROMAGNETYCZNEGO SILNIKA

Moment elektromagnetyczny silnika powstający po symetrycznym zwarciu uzwojenia stojana i różnej od zera wartości początkowej strumienia resztkowego wirnika, na podstawie zależności (3) i (24) można wyrazić następująco:

$$M_e(t) = k_M Im(\Psi_s^* \Psi_r) = k_M Im[(A_{s1} e^{p_1 t} + A_{s2} e^{p_2 t}) \cdot (A_{r1} e^{p_1 t} + A_{r2} e^{p_2 t})] = M_{e1}(t) + M_{e2}(t) + M_{e3}(t), \tag{30}$$

gdzie:

$$M_{e1}(t) = k_M Im(A_{s1}^* A_{r1}) e^{-2\alpha_1 t} = M_1 e^{-2\alpha_1 t} \tag{31}$$

$$M_{e2}(t) = k_M Im(A_{s2}^* A_{r2}) e^{-2\alpha_2 t} = M_2 e^{-2\alpha_2 t} \tag{32}$$

$$M_{e3}(t) = k_M Im[A_{s1}^* A_{r2} e^{-j(\beta_1 - \beta_2)t} + A_{s2}^* A_{r1} e^{j(\beta_1 - \beta_2)t}] e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t} = M_3 \sin(\omega_e t + \gamma) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t}. \tag{33}$$

Moment elektromagnetyczny składa się z trzech składowych przejściowych zanikających w czasie do zera. Wartość ustalona momentu elektromagnetycznego jest równa zeru.

Składowe $M_{e1}$ i $M_{e2}$ są składowymi aperiodycznymi zanikającymi wykładniczo ze stałymi czasowymi równymi odpowiednio:

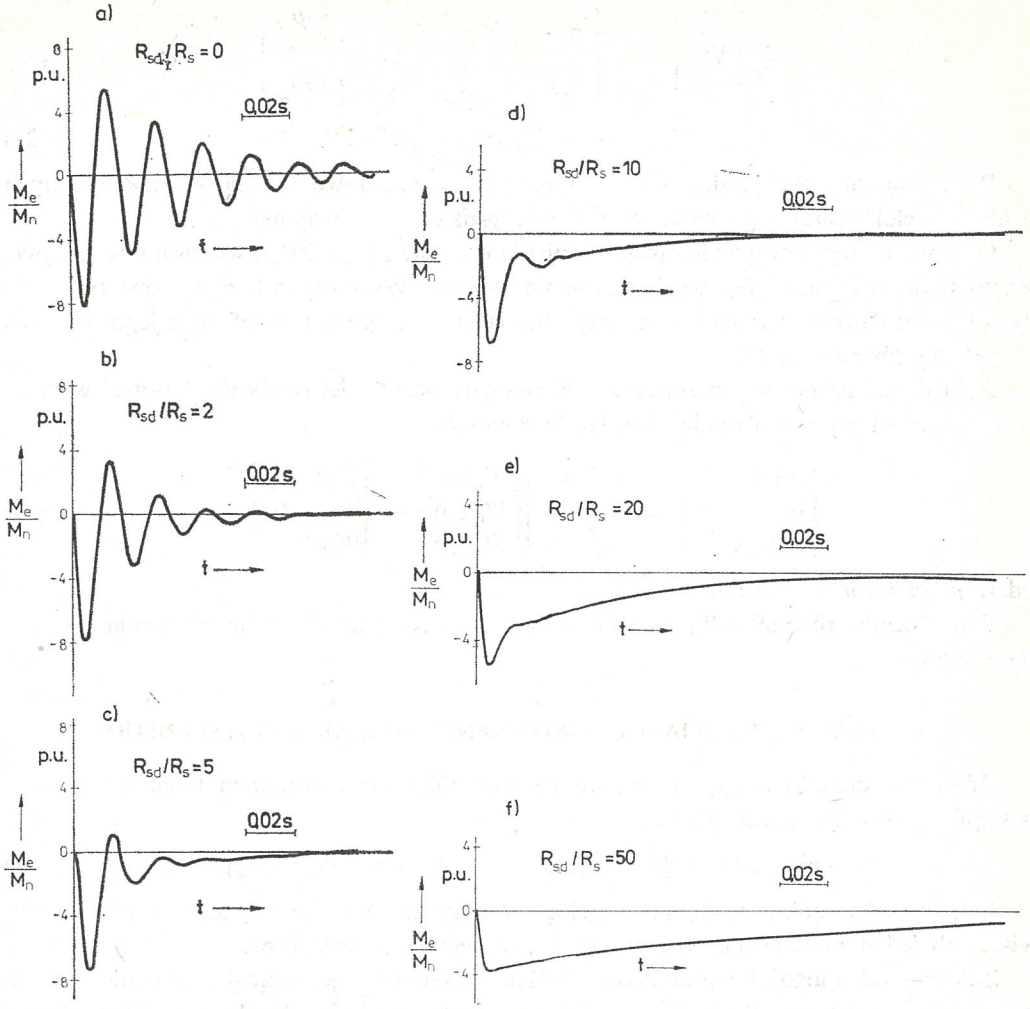
$$T_1 = 1/2\alpha_1 \qquad T_2 = 1/2\alpha_2. \tag{34}$$

Składowa $M_{e3}$ jest składową periodycznie zmienną o pulsacji równej elektrycznej prędkości kątowej wirnika i zanikającej wykładniczo ze stałą czasową równą

$$T_3 = 1/(\alpha_1 + \alpha_2). \tag{35}$$

Na rys. 4 przedstawiono przebiegi czasowe wypadkowego momentu elektromagnetycznego dla różnych wartości rezystancji $R_{sd}$ zwierających uzwojenie stojana. Dla zwarcia bezpośredniego lub przez rezystancje $R_{sd}$ o małej wartości w przebiegu momentu można wyróżnić składową periodyczną i składowe aperiodyczne. Dalsze zwiększanie wartości $R_{sd}$ powoduje szybkie zwiększenie tłumienia składowej periodycznej i jednej ze składowych aperiodycznych. Przy dużych wartościach $R_{sd}$ przebieg elektromagnetycznego momentu przejściowego ma charakter aperiodyczny zbliżony do składowej aperiodycznej momentu o mniejszym współczynniku tłumienia.

Niekorzystnym zjawiskiem są duże wartości początkowych amplitud momentu elektromagnetycznego, których wartości są porównywalne z wartością amplitud występujących po bezpośrednim przełączeniu silnika z niestłumionym polem wirnika do nowego stanu pracy. Ograniczenie tych amplitud uzyskuje się dopiero dla dużych wartości rezystancji tłumiących $R_{sd}$.




Rys. 4. Przebiegi czasowe momentu elektromagnetycznego silnika o mocy 1000 kW podczas tłumienia strumienia resztkowego wirnika przez symetryczne trójfazowe zwarcie uzwojenia stojana

## 6. ANALIZA TŁUMIENIA STRUMIENIA RESZTKOWEGO WIRNIKA PRZEZ DWUFAZOWE ZWARCIE UZWOJENIA STOJANA

### 6.1. RÓWNANIA SILNIKA DLA STANU DWUFAZOWEGO ZWARCIA UZWOJENIA STOJANA

Rozpatrywany w tym przypadku sposób tłumienia strumienia resztkowego wirnika polega na dokonaniu natychmiast po odłączeniu silnika z sieci zwarcia dwu faz stojana bezpośrednio lub przez rezystancję $R_{sz}$ (rys. 1c).

Przyjmując nieruchomy względem stojana układ współrzędnych prostokątnych $\alpha$, $\beta$ usytuowany w ten sposób, że jego oś rzeczywista $\alpha$ pokrywa się z osią uzwojenia fazy $U$ stojana oraz zakładając, że zwarcie dwufazowe zachodzi między fazami $V$ i $W$ stojana z równań ogólnych (1—8) otrzymuje się następujący układ równań silnika:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\Psi_{s\beta}\\ \Psi_{r\alpha}\\ \Psi_{r\beta}\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\alpha_s & 0 & -k_r\alpha_s\\ 0 & \alpha_r\sigma & \omega_e\\ -k_s\alpha_r & -\omega_e & \alpha_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Psi_{s\beta}\\ \Psi_{r\alpha}\\ \Psi_{r\beta}\end{bmatrix} \tag{36}$$

$$M_e = -k_M \cdot \Psi_{r\alpha}(\Psi_{s\beta} - k_r\Psi_{r\beta}). \tag{37}$$

W równaniach tych indeksami $\alpha$, $\beta$ oznaczono składowe wektorów przestrzennych wielkości elektromagnetycznych w osi rzeczywistej $\alpha$ i urojonej $\beta$.

Całkowitą rezystancję zwierającą uzwojenia dwu faz $R_{sz} = 2R_{sd}$, włączono po połowie wartości do rezystancji fazowych uzwojenia stojana. Współczynnik $\alpha_s$ w równaniu (36) ujmuje więc również wartość rezystancji tłumiącej $R_{sz}$, zgodnie z definicją jego wartości określonej równaniem (5).

Zakładając, że procesy przejściowe przebiegają przy stałej prędkości kątowej wirnika równania (36) po transformacji Laplace'a wynoszą:

$$\begin{bmatrix}p+\alpha_s & 0 & -k_r\alpha_s\\ 0 & p+\sigma\alpha_r & \omega_e\\ -k_s\alpha_r & -\omega_e & p+\alpha_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Psi_{s\beta}(p)\\ \Psi_{r\alpha}(p)\\ \Psi_{r\beta}(p)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Psi_{s\beta}(+0)\\ \Psi_{r\alpha}(+0)\\ \Psi_{r\beta}(+0)\end{bmatrix}, \tag{38}$$

gdzie $p$ operator Laplace'a.

Rozwiązania równań (38) zależne są od wartości pierwiastków równania charakterystycznego.

### 6.2. ANALIZA PIERWIASTKÓW RÓWNANIA CHARAKTERYSTYCZNEGO

Równanie charakterystyczne układu równań (38) jest równaniem trzeciego stopnia o współczynnikach rzeczywistych:

$$p^3 + p^2[\alpha_s\alpha_r(1+\sigma)] + p[\sigma\alpha_r(2\alpha_s+\alpha_r)+\omega_e^2] + \alpha_s[(\sigma\alpha_r)^2+\omega_e^2] = 0. \tag{39}$$

Rozwiązanie ogólne równania trzeciego stopnia może mieć trzy pierwiastki rzeczywiste lub jeden pierwiastek rzeczywisty i dwa zespolone sprzężone.

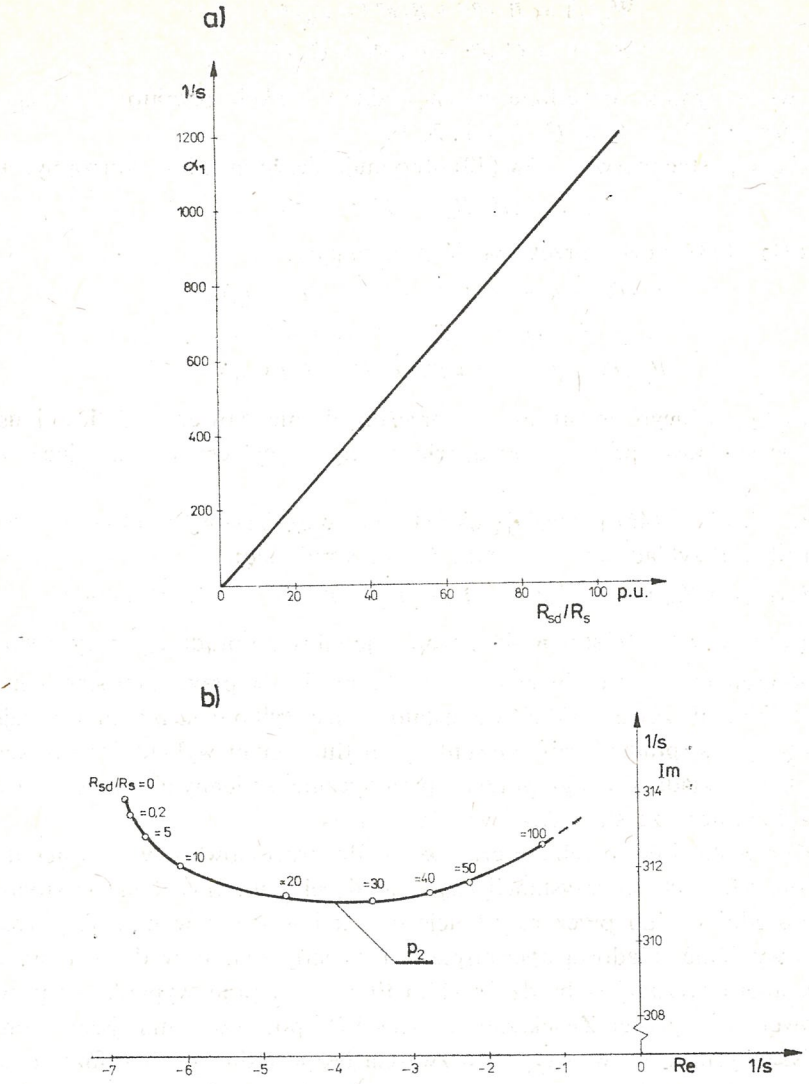
Zależnie od wartości parametrów silnika, rezystancji zwierającej uzwojenie stojana oraz prędkości kątowej silnika pierwiastki te mogą zawierać się w bardzo szerokim zakresie zmian wartości liczbowych. Przyjmując, że odłączenie silnika z sieci następuje przy prędkości kątowej wirnika zbliżonej lub równej prędkości synchronicznej i uwzględniając, że wartości parametrów silników dużej mocy zbliżone są do podanych w tablicy to z rozwiązania równania (39) otrzymuje się jeden pierwiastek rzeczywisty i dwa zespolone sprzężone.

Pierwiastki te można zapisać następująco:

$$p_1 = -\alpha_1 \quad p_2 = -\alpha_2 + j\beta \quad p_3 = -\alpha_2 - j\beta, \tag{40}$$

gdzie: $\alpha_1$, $\alpha_2$ są liczbami dodatnimi określającymi tłumienie składowych przejściowych, a $\beta$ wyznacza częstotliwość tych przebiegów.

Wartości pierwiastków $p_1$, $p_2$ wyznaczone dla różnych wartości rezystancji zwierających dwie fazy uzwojenia stojana silnika indukcyjnego o parametrach podanych w tablicy przedstawiono na rys. 5. Wartości $p_3$ otrzymuje się jako wartości sprzężone pierwiastka $p_2$. Jeżeli zwarcie faz następuje bezpośrednio, to wartości współczynników tłumienia




Rys. 5. Wartości pierwiastków równania (39) dla silnika o mocy 1000 kW

$\alpha_1, \alpha_2$ różnią się między sobą nieznacznie. Zwiększanie wartości $R_{sd}$ powoduje szybki wzrost wartości $\alpha_1$, a zmniejszanie wartości $\alpha_2$. Część urojona $\beta$ pierwiastków $p_2, p_3$ zależy w niewielkim stopniu od wartości rezystancji $R_{sd}$ i przyjmuje wartości zbliżone do elektrycznej prędkości kątowej wirnika.

### 6.3. PRZEBIEGI PRZEJŚCIOWE STRUMIENI SPRZĘŻONYCH I PRĄDÓW SILNIKA

Po rozwiązaniu układu równań (38) i dokonaniu transformacji odwrotnej otrzymuje się następującą postać czasową strumieni sprzężonych silnika:

$$\Psi_{s\beta}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t} \tag{41}$$

$$\Psi_{r\alpha}(t) = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t} + B_3 e^{p_3 t} \tag{42}$$

$$\Psi_{r\beta}(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + C_3 e^{p_3 t} \tag{43}$$

gdzie: $W_i$ — współczynniki określone przez rozkład funkcji operatorowej na ułamki proste ($W = A, B, C$; $i = 1, 2, 3$).

Uwzględniając postać pierwiastków (40) otrzymuje się, że spełnione muszą być warunki

$$A_2 = A_3^* \quad B_2 = B_3^* \quad C_2 = C_3^*$$

a równania (41)—(43) można przekształcić następująco:

$$\Psi_{s\beta}(t) = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_{23} e^{-\alpha_2 t} \cos(\beta t + \gamma_A) \tag{44}$$

$$\Psi_{r\alpha}(t) = B_1 e^{-\alpha_1 t} + B_{23} e^{-\alpha_2 t} \cos(\beta t + \gamma_B) \tag{45}$$

$$\Psi_{r\beta}(t) = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_{23} e^{-\alpha_2 t} \cos(\beta t + \gamma_C). \tag{46}$$

Przebieg czasowy każdego ze strumieni sprzężonych nie zawiera składowej ustalonej lecz tylko dwie składowe przejściowe: aperiodyczną i oscylacyjną, zanikające w czasie do zera.

Zależności (2), (44)—(46) pozwalają określić przebieg czasowy prądów przejściowych stojana i wirnika. Przykładowo dla prądu $i_{s\beta}$ otrzymuje się:

$$i_{s\beta}(t) = \left(\Psi_{s\beta}(t) - k_r \Psi_{r\beta}(t)\right)/\sigma L_s = D_1 e^{-\alpha_1 t} + D_{23} e^{-\alpha_2 t} \cos(\beta t + \gamma_D). \tag{47}$$

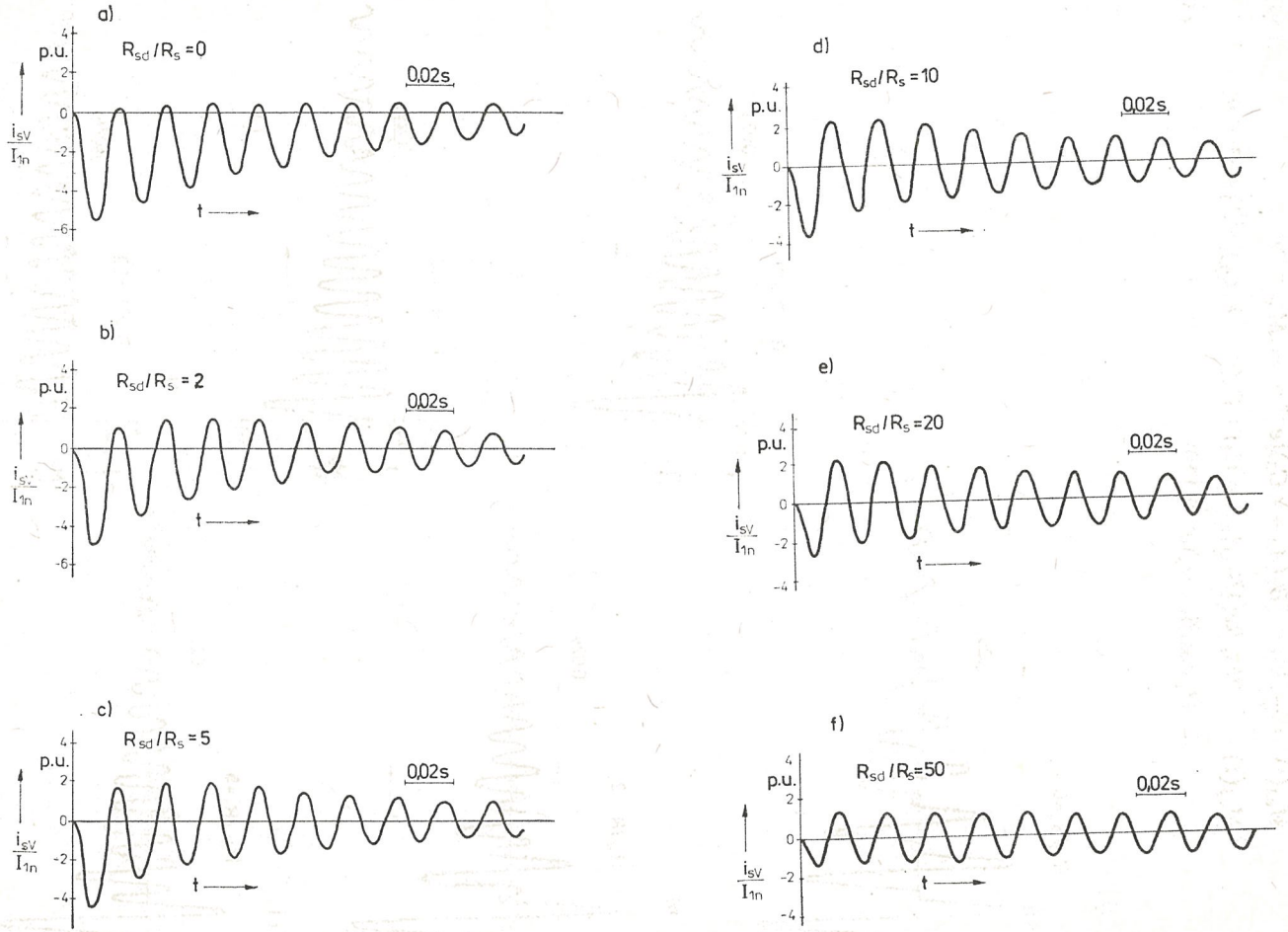
Prąd w uzwojeniu fazy $V$ i $W$ stojana jest proporcjonalny do prądu $i_{s\beta}$, przy czym współczynnik proporcjonalności jest równy $\sqrt{3}/2$. Podobnie jak w przypadku strumieni sprzężonych prąd stojana nie zawiera składowej ustalonej, lecz tylko dwa składniki przejściowe. Składnik pierwszy jest prądem jednokierunkowym tłumionym wykładniczo ze stałą czasową równą $1/\alpha_1$, składnik drugi prądem periodycznie zmiennym o pulsacji równej $\beta$ tłumionym wykładniczo ze stałą czasową równą $1/\alpha_2$.

Na rys. 6 przedstawiono przebiegi czasowe prądu przejściowego w uzwojeniu fazy $V$ stojana dla różnych wartości rezystancji $R_{sd}$ zwierającej uzwojenia dwu faz stojana. Dla zwarcia bezpośredniego lub przez rezystancję o małej wartości w przebiegu czasowym prądu można wyróżnić składową aperiodyczną i periodyczną. Przy dużych wartościach $R_{sd}$ składowa aperiodyczna jest bardzo szybko tłumiona i prąd wypadkowy prawie jest równy składowej periodycznej. Zwiększanie wartości $R_{sd}$ powoduje zmniejszenie amplitudy prądów przejściowych, które w przypadku zwarcia bezpośredniego dwu faz mogą kilkakrotnie przekraczać wartość prądu znamionowego silnika. Porównując wartości prądów przejściowych dla tłumienia pola wirnika przez symetryczne zwarcie trójfazowe uzwojenia stojana i zwarcie dwufazowe można stwierdzić, że w obu przypadkach otrzymuje się bardzo szybkie tłumienie strumienia resztkowego wirnika. Układ drugi jest jednak mniej korzystny, gdyż występujące przy jego stosowaniu prądy przejściowe uzyskują znacznie wyższe wartości.

### 6.4. PRZEBIEGI PRZEJŚCIOWE MOMENTU ELEKTROMAGNETYCZNEGO

Podstawiając w równaniu (37) wartości strumieni sprzężonych silnika określonych równaniami (44)—(46) otrzymuje się następujące wyrażenie na przejściowy moment elektromagnetyczny powstający po dwufazowym zwarciu uzwojenia stojana:

$$M_e(t) = M_{e1}(t) + M_{e2}(t) + M_{e3}(t) + M_{e4}(t), \tag{48}$$



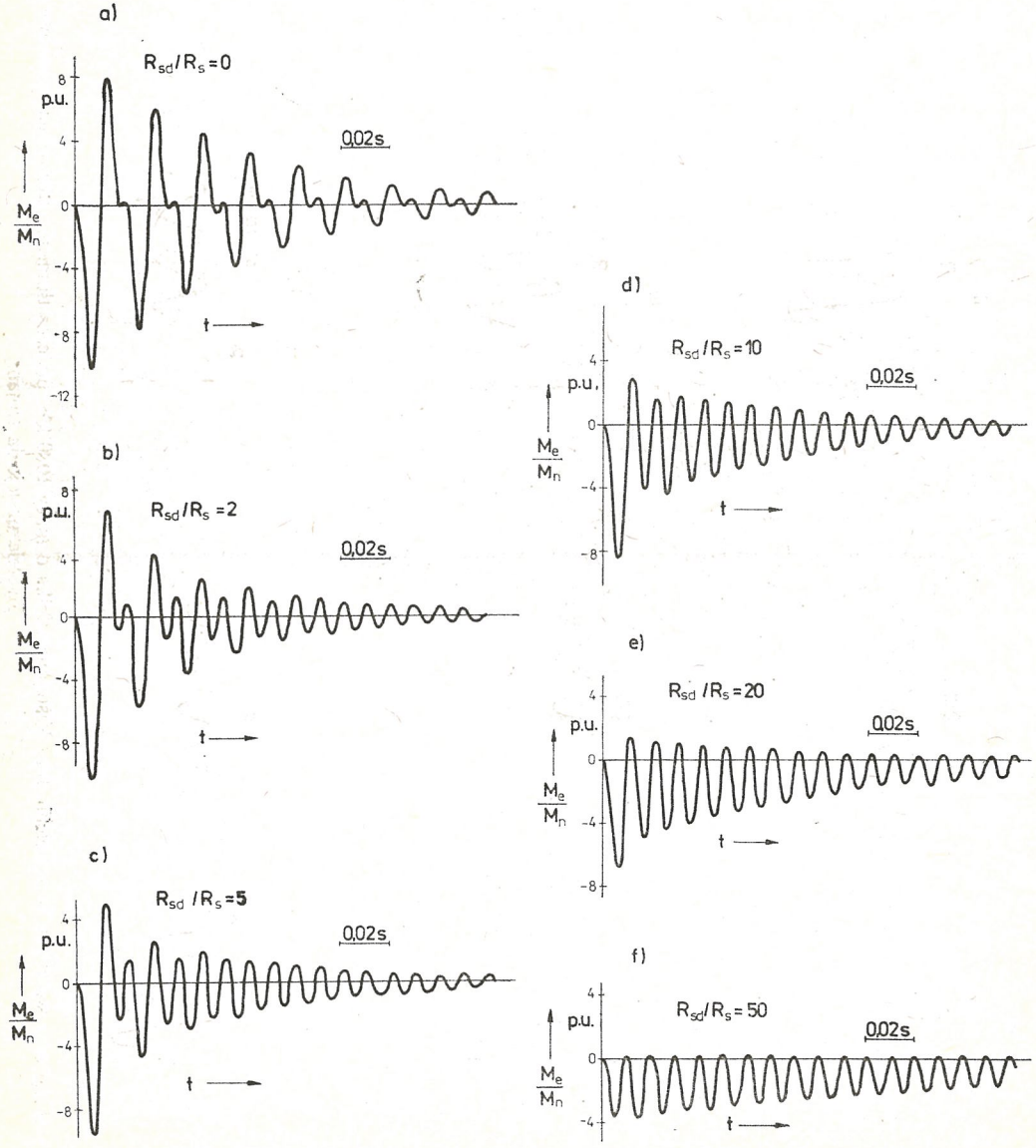

Rys. 6. Przebiegi czasowe prądu w uzwojeniu fazy V stojana silnika o mocy 1000 kW podczas tłumienia strumienia resztkowego wirnika przez dwufazowe zwarcie uzwojenia stojana

gdzie poszczególne składowe momentu są równe

$$M_{e1}(t) = -k_M B_1(A_1 - k_r C_1)e^{-2\alpha_1 t} = M_1 e^{-2\alpha_1 t} \tag{49}$$

$$M_{e2}(t) = -2k_M Re[B_2(A_3 - k_r C_3)]e^{-2\alpha_2 t} = M_2 e^{-2\alpha_2 t} \tag{50}$$

$$M_{e3}(t) = -2k_M Re\left([B_1(A_2 - k_r C_2) + B_2(A_1 - k_r C_1)]e^{j\beta t}\right)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t} = \\ = M_3 \cos(\beta t + \gamma_3)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t} \tag{51}$$




Rys. 7. Przebiegi czasowe momentu elektromagnetycznego silnika o mocy 1000 kW podczas tłumienia strumienia resztkowego wirnika przez dwufazowe zwarcie uzwojenia stojana

$$M_{e4}(t) = -2k_M Re[B_2(A_2 - k_r C_2)e^{j2\beta t}]e^{-2\alpha_2 t} = \\ = M_4 \cos(2\beta t + \gamma_4)e^{-2\alpha_2 t}. \quad (52)$$

Moment elektromagnetyczny składa się z czterech składowych przejściowych zanikających w czasie do zera. Ustalona wartość momentu jest równa zeru.

Składowe $M_{e1}$ i $M_{e2}$ są składowymi aperiodycznymi zanikającymi wykładniczo ze stałymi czasowymi równymi odpowiednio

$$T_1 = 1/2\alpha_1 \quad T_2 = 1/2\alpha_2. \quad (53)$$

Składowe $M_{e3}$ i $M_{e4}$ są składowymi periodycznie zmiennymi, zanikającymi wykładniczo ze stałymi czasowymi

$$T_3 = 1/(\alpha_1 + \alpha_2) \quad T_4 = 1/2\alpha_2. \quad (54)$$

Pulsacja składowej momentu $M_{e3}$ jest w przybliżeniu równa elektrycznej prędkości kątowej wirnika, a składowej $M_{e4}$ dwukrotnie większa.

Na rys. 7 przedstawiono przebiegi czasowe wypadkowego momentu elektromagnetycznego powstającego podczas zwarcia dwufazowego uzwojenia stojana przez różne wartości rezystancji $R_{sd}$. Dla zwarcia bezpośredniego lub przez rezystancję $R_{sd}$ o małej wartości w przebiegu czasowym można wyróżnić występowanie wszystkich składowych przejściowych momentu. Zwiększenie wartości rezystancji $R_{sd}$ powoduje szybkie zwiększenie tłumienia składowej aperiodycznej $M_{e1}$ i składowej periodycznej $M_{e3}$. Przy dużych wartościach $R_{sd}$ w przebiegu czasowym momentu decydujący udział ma składowa aperiodyczna $M_{e2}$ i składowa periodyczna $M_{e4}$ o pulsacji równej w przybliżeniu podwójnej elektrycznej prędkości kątowej wirnika. Występowanie momentów przejściowych o dużej częstotliwości wpływa niekorzystnie na pracę poszczególnych elementów układu napędowego. Podobnie niekorzystny wpływ spowodowany jest również znacznymi wartościami amplitud momentu przejściowego, których wartość jest porównywalna z amplitudami momentu udarowego powstającymi po przełączeniu natychmiastowym silnika do nowych warunków pracy bez tłumienia pola wirnika. Ograniczenie tych amplitud następuje dopiero dla dużych wartości rezystancji $R_{sd}$ zwierających uzwojenie stojana.

## 7. WNIOSKI

Wszystkie przedstawione w pracy układy tłumienia pozwalają na zmniejszenie czasu zanikania strumienia resztkowego wirnika po odłączeniu silnika indukcyjnego od sieci zasilającej.

Tłumienie pola wirnika przez zwiększenie rezystancji uzwojenia wirnika po odłączeniu silnika może być zastosowane do silników indukcyjnych pierścieniowych. Ten sposób tłumienia jest łatwy w realizacji i nie powoduje wystąpienia niekorzystnych chwilowych momentów udarowych i prądów.

Stosując symetryczne bezpośrednie zwarcie trójfazowe lub dwufazowe uzwojenia stojana można wielokrotnie zmniejszyć czas zanikania strumienia resztkowego wirnika w porównaniu do czasu zanikania naturalnego występującego przy otwartym uzwojeniu stojana. Niekorzystną cechą tych układów jest występowanie po zwarciu stojana przebiegów przejściowych prądu i momentu elektromagnetycznego o dużych udarowych

wartościach w początkowych chwilach czasowych. Przebiegi przejściowe prądów i momentu elektromagnetycznego złożone są ze składowych aperiodycznych i periodycznych o różnych częstotliwościach i współczynnikach tłumienia.

Układ tłumienia przez zwarcie dwufazowe uzwojenia stojana jest mniej korzystny od układu tłumienia przez zwarcie trójfazowe, gdyż dla tych samych wartości rezystancji tłumiących $R_{sd}$ w układzie pierwszym powstają większe wartości udarowe prądów przejściowych i momentu elektromagnetycznego silnika. W obu przypadkach dla zwarcia bezpośredniego początkowe amplitudy przebiegów przejściowych wielkości elektromagnetycznych mogą przekraczać kilkakrotnie wartości znamionowe. Ograniczenie amplitud składowych przejściowych uzyskać można przez zwiększenie wartości rezystancji tłumiących $R_{sd}$ zwierających uzwojenie stojana. Powoduje to jednak skomplikowanie układu napędowego i jego sterowania.

## BIBLIOGRAFIA


1. M. Abbe: *Transients Verhalten von Asynchronmotorengruppen bei Speisungsunterbrechungen und Netzumschaltungen.* Dissertation, Erlangen-Nürnberg Universität, 1978
2. R. Arentowicz: *Die Vorgänge in einer Induktionsmachine während und nach dem Abschalten durch verschiedene Schaltgeräte.* Dissertation, Karlsruhe Universität, 1963
3. J. Bendl, L. Schreier: *Analysis of transient phenomena due to reconnecting an induction motor to the voltage before dying the rotor currents away.* Acta Technica CSAV, 1981, Z. 5, s. 589—607
4. J. Bendl, L. Schreier: *Some transient phenomena by reclosing induction machines.* Acta Technica CSAV, 1982, Z. 4, s. 470—492
5. J. Bendl, L. Schreier: *Electro-mechanical transient processes by starting induction motors with given initial currents in the rotor.* Acta Technica CSAV, 1983, Z. 4, s. 429—448
6. Z. Cerovsky: *Analysis of the reswitching surge current in an induction motor.* Acta Technica CSAV, 1975, Z. 5, s. 530—547
7. Z. Cerovsky: *Surge of the transient torque of an induction motor due to its rapid reconnection.* Acta Technica CSAV, 1976 Z. 2, s. 219—230.
8. F.P. Flynn, R.D. Slater, W.S. Wood: *Transient negative torques in induction motors due to rapid reconnection of the supply.* Proceedings of the IEE, 1969, V. 116, No 12, p. 2009—2014
9. W. Paszek: *Stany nieustalone w maszynach elektrycznych.* Cz. I, Skrypt nr 922, Politechnika Śląska, Gliwice 1981
10. K. Pieńkowski: *Stany dynamiczne i praca ustalona napędu przenośników taśmowych o ujemnym kącie nachylenia.* Praca doktorska, Politechnika Wrocławska, 1980
11. Praca zbiorowa: *Elektromagnetyczne procesy przejściowe w asynchronicznym napędzie elektrycznym.* W-wa: WNT, 1970
12. J. Skierski: *Analiza wybiegu grupowego silników asynchronicznych dużej mocy.* Rozprawy Elektrotechniczne, 1978 Z. 4, s. 893—930
13. I.R. Smith, S. Sriharan: *Induction-motor reswitching transients.* Proceeding of the IEE, 1967, V. 114, No 4, p. 503—509


K. PIEŃKOWSKI, R. BRZEZIŃSKI

## ANALYSIS OF THE SYSTEMS OF DAMPING OF RESIDUAL ROTOR FIELD IN HIGH POWER INDUCTION MOTORS

### Summary

In the paper, the equations which describe residual rotor field in high power induction motors after disconnection from the supply are given. The systems of damping of this field are presented. The equations

for treating transient process in induction motors corresponding to the systems of field damping are formulated. The solution is obtained by digital simulation. The time behaviour of the torque and stator currents are presented.

K. PIEŃKOWSKI, R. BRZEZIŃSKI

## ANALYSE DES SYSTÈMES D'ATTÉNUATION DU CHAMP RÉSIDUEL DU ROTOR DANS LES MOTEURS À INDUCTION DE GRANDE PUISSANCE

Résumé

On à indiqué les relations décrivant le champ résiduel du rotor dans les moteurs à induction de grande puissance après leur débranchement du réseau d'alimentation. On à présenté les systèmes d'atténuation de ce champ permettant de limiter les effects transitoires défavorables ayant lieu après un réenclenchement du moteur. On à établi les équations différentielles du moteur pour les systèmes d'atténuation particuliers. On à trouvé les valeurs des racines de l'équation séculaire décidant de la valeur des amplitudes et des coefficients d'atténuation ainsi que de la fréquence des régimes transitoires. On à déterminé les régimes transitoires des flux accouplés, des courants et du moment électromagnétique du moteur pendant l'atténuation du champ du rotor. On à présenté les résultats de la simulation digitale des régimes transitoires. On à comparé les propriétés des systèmes particuliers d'atténuation.

K. PIEŃKOWSKI, R. BRZEZIŃSKI

## ANALYSE DER ROTORRESTFELDDÄMPFUNGSSYSTEMEN IN DER HOCHLEISTUNGSINDUKTIONMOTOREN

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden die Abhängigkeiten angegeben, die das Rotorrestfeld in Hochleistungsinduktionmotoren nach dem Abschalten vom Speisenetz beschreiben. Ferner werden die Dämpfungssysteme dieses Feldes dargestellt, die die Begrenzung der beim Wiedereinschalten des Motors aufretenden ungünstigen transienten Verhalten ermöglichen. Es wurden die Differenzialgleichungen des Motors für einzelne Dämpfungssysteme formuliert. Untersucht wurden transiente Verläufe der Flüsse, der Ströme und des elektromagnetischen Moments des Motors beim Dämpfen des Rotorrestfeld. Anschliessend wurden die Ergebnisse der Digitalsimulation dargestellt und die Eigenschaften enzelner Dämpfungssysteme wurden verglichen.

К. ПЕНЬКОВСКИ, Р. БЖЕЗИНСКИ

## АНАЛИЗ СИСТЕМ ГАШЕНИЯ НЕЗАТУХАЮЩЕГО ПОЛЯ РОТОРА В МОЩНЫХ АСИНХРОННЫХ ДВИГАТЕЛЯХ

Резюме

Представлены зависимости, описывающие незатухающее поле ротора в мощных асинхронных двигателях после их отключения от питающей сети. Представлены системы гашения этого поля, позволяющие ограничить неблагоприятные переходные явления, выступающие после повторного включения двигателя. Сформулированы дифференциальные уравнения двигателя для отдельных систем гашения. Определены значения корней характеристического уравнения, обуславливающих значения амплитуд и коэффициентов гашения, а также частоты переходных характеристик. Определены переходные характеристики связанных потоков, токов и электромагнитного момента двигателя во время гашения поля ротора. Представлены результаты цифрового моделирования переходных состояний. Произведено сравнение отдельных свойств системы гашения.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1988, 34, z. 1, s. 291-294

## TREŚĆ

J. Grabowski: *Jubileusz 85-lecia urodzin Profesora Witolda Nowickiego* . . . . . 4
J. Sikora: *Analiza wrażliwościowa i perspektywy jej zastosowania do zagadnień odwrotnych* . 9
M. Tadeusiewicz, A. Kuczyński: *Obliczanie wrażliwości i gradientu błędu w dziedzinie czasu w obwodach nieliniowych* . . . . . 23
M. Żółtowski: *O globalnej stabilności synchronizmu pętli fazowej drugiego rzędu z niejednostajnym próbkowaniem* . . . . . 37
A. K. Gąsiorski: *Straty mocy w dwóch walcowych przewodach umieszczonych w harmonicznym odkształconym polu poprzecznym* . . . . . 59
J. Tokarzewski: *Krzepka stabilność układów regulacji — granica zmian parametrów* . . . 77
Z. Drzycimski: *Statystyczny model szumu tłowego w kanale telefonicznym* . . . . . 87
J. Siuzdak: *Dynamika układów kompensacji fazy* . . . . . 93
S. Jagiełło: *Metoda formułowania modeli matematycznych maszyn komutatorowych* . . . . 101
Z. Krzemiński: *Równania różniczkowe silnika asynchronicznego dla celów syntezy nieliniowego sterowania z uwzględnieniem nasycenia głównego obwodu magnetycznego* . . . . . 117
I. Dudzikowski: *Metoda obliczania obwodów magnetycznych maszyn prądu stałego wzbudzanych magnesami dwukomponentowymi* . . . . . 133
T. J. Sobczyk, K. Weinreb: *Równania ustalonych stanów pracy silników indukcyjnych klatkowych. Cz. I: Przypadek dowolnej konfiguracji zezwojów stojana* . . . . . .
T. J. Sobczyk, K. Weinreb: *Równania ustalonych stanów pracy silników indukcyjnych klatkowych. Cz. II: Przypadek symetrycznego uzwojenia stojana* . . . . . 165
S. Kaczmarek: *Model ruchowy mikroprocesorowego układu określania drogi połączeniowej w polach komutacyjnych T-S...-S-T* . . . . . 189
Z. Hanzelka: *Kompensator statyczny ze sterownikiem prądu indukcyjnego* . . . . . 201
D. J. Bem, R. J. Katulski: *Anteny paskowe. Cz. I: Pojedyncze promienniki* . . . . . 237
D. J. Bem, R. J. Katulski: *Anteny paskowe. Cz. II Układy anten paskowych* . . . . . 253
A. Olencki, J. Szmytkiewicz, K. Urbański: *Kalibratory napięć i prądów — część cyfrowa* . . . . . 261
K. Pieńkowski, R. Brzeziński: *Analiza układów szybkiego tłumienia strumienia resztkowego wirnika w silnikach indukcyjnych dużej mocy* . . . . . 269

## CONTENTS — TABLES DES MATIERES — INHALT

J. Grabowski: *Jubilee of eighty-fifth anniversary of Professor Witold Nowicki* . . . . 4
*Jubile de la 85 anniversaire du Professor Witold Nowicki* . . . . . .
*Jubileum zum 85. Geburstag vom Professor Witold Nowicki* . . . . . .
J. Sikora: *Sensivity analysis and its application to inverse problems* . . . . . 9
*Analyse de la sensibilité et les perspectives de son application aux problemes inverses* . . . .
*Empfindlichkeitanylyse und ihre Anwendungsaussichten bei inversen Problemen* . . . . . .
M. Tadeusiewicz, A. Kuczyński: *Sensitivity and error gradient calculation in time domain for nonlinear networks* . . . . . 23
*Calcul de la sensibilite et du gradient d'erreur dans le domaine de temps dans les circuits non lineaires*

*Die Berechnung der Empfindlichkeit und des Fehlergradients in dem Zeitgebiet von nichtlinearen Stromkreisen* . . . .

M. Żółtowski: *On global stability of phase entraiment in nonuniform sampling discrete time phase-locked loop of second order* . . . . 37

*Stabilité globale du synchronisme dans une boucle de phase du deuxiéme ordre foncionnant en tems discrete* . . . .

*Zur globalen Stabilität des Gleichaufes einer Phasenregelschleife 2. Ordnung mit ungleichförmiger Probeentnahme* . . . .

A. K. Gąsiorski: *Power losses in two long cylindrical conductors placed in harmonic non-sinusoidal transverse magnetic field* . . . . 59

*Pertés de puissance de deux longs conducteurs cylindriques places dans un champ magnétique harmonique, deforme et transversal* . . . .

*Leistungverluste in zwei langen Walzleitern in einem harmonischen deformierten magnetischen Querfeld* . . . .

J. Tokarzewski: *Robust stability of uncertain system — bounds of large parameter variations* 85

*Stabilité permanente des systèmes de réglage-limites des variations des paramèters* . . . .

*Robuste Stabilität der Regelsysteme — Grezen der Parameteränderungen* . . . .

Z. Drzycimski: *Statistical model of backgroung noise in telephone channel* . . . . 87

*Modèle statistique du bruit propre dans le canal téléphonique* . . . .

*Statistisches Modell für das Grundrauschen im Telefonkanal* . . . .

J. Siuzdak: *Dynamics of phase compensation circuits* . . . . 93

*Dynamique des systèmes de compensation de la phase* . . . .

*Dynamik der Systeme der Phasenkompensation* . . . .

A. S. Jagiełło: *Formulation of mathematical modes of commutator machines* . . . . 101

*Méthode de la formulation des modèles mathématiques des machines à collecteur* . . . .

*Formulierungsmethode für mathematische Modelle der Kommutatormaschinen* . . . .

Z. Krzemiński: *Differential equations of an induction motor for the purpose of a nonlinear control synthesis with account taken of saturation of the main magnetic path.* . . . . 117

*Equations differentialles d'un moteur à induction pour la synthese de la commande non lineaire ou la saturation du circuit magnétique principal est donne* . . . .

*Differentialgleichungen für ein Induktionsmotor zweks Synthese der nichtlinearen Steuerung unter Berücksichtigung der Sättigung des magnetischen Hauptstromkreises* . . . .

I. Dudzikowski: *A method of calculating the magnetic circuits of D.C. motors excited by two-component magnets.* . . . . 133

*Méthode de calcul des circuits magnétiques des moteurs à courant continu excités par des aimants à deux composants* . . . .

*Berechnungsmethode für Magnetkreise dr durch Zweikomponentenmagnete erregbaren Gleichstrommotoren* . . . .

T. J. Sobczyk, K. Weinreb: *Steady-state equations of squirrel-cage induction motors. Part I: Case of arbitrary configuration of stator coils* . . . . 147

*Equations des etats stationnaires du travail des moteurs à cage. I Partie: Les cas de la configuration arbitraire des bobines du stator* . . . .

*Gleichungen für stationäre Arbeitszustände der Käfigläufmotoren. Teil I: Beliebige Gruppierung der Statorwicklungsspulen* . . . .

T. J. Sobczyk, K. Weinreb: *Steady-state equations of squirrel-cage induction motors. Part II: The case of the symmetry of the stator winding* . . . . 165

*Equations des etats stationnaires du travail des moteurs à cage. II Partie: Le cas de l'enroulement symétrique du stator* . . . .

*Gleichungen für stationäre Arbeitszustände der Käfigläufermotoren Teil II: Symmetrische Statorwicklungen* . . . .

S. Kaczmarek: *The traffic model of a microprocessor circuit evaluating the connection path in T-S-...-S-T switching networks* . . . . 189

*Modèle mobile d'un śysteme microprocesseur de la détermination de la voie de liaison dans les champs de commutation T-S-...-S-T* . . . . . .
*Verkehrsmodell einer Mikroprozessorenanlage für die Bestimmung des Verbindungsweges in T-S-...-S-T — Koppelfeldern* . . . . . .
Z. Hanzelka: *Static reactive current compensator with thyristor controlled reactors* . . . . 201
*Statocompensateur à combinateur du courant inductif* . . . . . .
*Statischer Kompensator mit Steuerung mittels induktiven Blindstroms* . . . . . .
D. J. Bem, R. J. Katulski: *Microstrip antennas. Part I: Single radiating elements*. . . . 237
*Antennes de courroie. I Partie: Simples éléments de radiation* . . . . . .
*Mikkrostreifen-Antennen. Teil I: Einzelstrahlen* . . . . . .
D. J. Bem, R. J. Katulski: *Microstrip antennas. Part I: Microstrip antenna arrays* . . . 253
*Antennes de courroie. II Partie: Reseaux des antennes de courroie* . . . . . .
*Mixrostreifen-Antennen. Teil II: Mikrostreifen-Antennendruppen* . . . . . .
A. Olencki, J. Szmytkiewicz, K. Urbański: *Voltage and current calibrators — digital part* . . . . . 261
*Calibreurs de tension et de courant — partie numérique* . . . . . .
*Kalibratoren der Spannungen und der Ströme — Digital — Teil* . . . . . .
K. Pieńkowski, R. Brzeziński: *Analysis of the systems of damping of residual rotor field in high power induction motors* . . . . . 269
*Analyse des systèmes d'atténuation du champ résiduel du rotor dans les moteurs à induction de grande puissance*. . . . . .
*Analyse der Rotorrestfelddampfungssystemen in der Hochleistungsinduktionmotoren*. . . .

## СОДЕРЖАНИЕ

Я. Грабовски: Юбилéй по поводу 85 годовщины Профéссора Витольда Новицкего . . . 4
Я. Сикора: Чувствительностный анализ и перспективы его применения к обратным проблемам . . . . . 9
М. Тадеусевич, А. Кучиньски: Анализ чувствительности и градиента погрешности в области времени в нелинейных цепях . . . . . 23
М. Жултовски: О глобальной устойчивости синхронизма фазового кольца второго порядка с неравномерной дискретизацей . . . . . 37
А. К. Гонсиорски: Потери мощности от вихревых токов двух длинных круглых проводников, расположенных в гармоническом несинусоидальном попречном магнитном поле . . 59
Е. Токажевски: Сильная устойчивость систем регулирования — пределы изменений параметров . . . . . 77
З. Джицимски: Статистическая модель фонового шума в телефонном канале . . . . . 87
Е. Сюздак: Динамика схем слежения за фазой . . . . . 93
А. С. Ягелло: Метод составления математических моделей коллекторных машин . . . . . 101
З. Кшеминьски: Учет насыщения главной магнитной цепи в дифференциальных уравнениях асинхронного двигателя при синтезе нелинейного управления . . . . . 117
И. Дудзиковски: Метод расчета магнитных цепей двигателей постоянеого тока, возбуждаемых двухкомпонентными магнитами . . . . . 133
Т. Й. Собчык, К. Вейнрэб: Уравнения установившихся режимов работы индукционных короткозамкнутых двигателей . . . . . 147
Часть 1: Случай произволной конфигурации секций статора . . . . . .
Т. Й. Собчык, К, Вейнрэб: Уравнения установившихся режимов работы индукционных короткозамкнутых двигателей . . . . . 165
Часть 2: Случай симметрической обмотки статора . . . . . .
С. Качмарэк: Модель телетрафика микропроцессорного устройства определяющего соединительный] путь коммутационной схемы В-П-...-П-В . . . . . 189

З. Ханзелька: Статический источник реактивной мощности (И. Р. М.) с управляемым вентилями реактором . . . . . 201
Д. Ю. Бэм, Р. Я. Катульски: Стержневые антенны . . . . . 237
Часть 1: Простые излучители . . . . . .
Д. Ю. Бэм, Р. Я. Катульски: Стержневые антенны . . . . . 253
Часть 2: Системы стержневых антенн . . . . . .
А. Оленцки, Е. Шмыткевич, К. Урбаньски: Калибраторы напряжений и токов — цифровая часть . . . . . 261
К. Пеньковски: Анализ систем гашения незатухающего поля ротора в мощных асинхронных двигателях . . . . . 269

## ERRATA

Tytuł artykułu Pana Marka Brodzkiego, zamieszczony w Rozprawach Elektrotechnicznych 1987 r., t. XXXIII, z. 2, strony 375—400 powinien być następujący:

"Certaine interprétation de la théorie des réseaux électriques dans la théorie des fibrations"

Redakcja przeprasza Autora za błędy w wydrukowanym tytule artykułu.

rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót: rys.). U samego dołu rysunku (a przy fotografiach na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, tytuł pracy i nazwisko autora. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.

7. *Streszczenia.* Do każdej nadsyłanej pracy należy dołączyć krótkie streszczenie (analizę) w języku polskim (w 5 egz.) oraz streszczenie (w 2 egz.) w językach obcych: angielskim, francuskim, niemieckim i rosyjskim. W razie niemożności przygotowania streszczeń w językach obcych Autor powinien podać przynajmniej terminy obcojęzyczne niezbędne do wykonania tłumaczenia.

8. *Bibliografia.* Na końcu maszynopisu należy podać w przyjętej przez Autora kolejności (np. chronologicznej, alfabetycznej itp.) wykaz publikacji, na które Autor w tekście się powołuje, lub które uważa za słuszne wymienić z innych powodów. W każdej pozycji wykazu należy podać w następującej kolejności: pierwsze litery imion, nazwisko autora, po czym po przecinku pełny tytuł dzieła lub artykułu; dalej, w przypadku książki — wydawcę, miejsce wydania i rok, a w przypadku artykułu — tytuł czasopisma, numer zeszytu, rok wydania i ewent. numer strony. Pozycje wykazu powinny być ponumerowane.

9. *Informacje dodatkowe.*

— Niezastosowanie się Autora do podanych wyżej wytycznych pociągnie za sobą konieczność potrącenia z honorarium autorskiego kosztów związanych z doprowadzeniem dostarczonych materiałów do postaci wymaganej przez Redakcję.

— Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egz. odbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze Autor może zamówić w Redakcji na własny koszt.

— **Autora obowiązuje korekta autorska, którą należy zwracać w ciągu 3 dni** pod adresem Redakcji.

— Redakcja prosi Autorów o podawanie miejsca pracy i adresu prywatnego, a także o powiadamianie o zmianie adresu.

Cena zł 250,—

# Rozprawy Elektrotechniczne

*Kwartalnik*

Prenumeratę na kraj przyjmują i informacji o cenach udzielają urzędy pocztowe i doręczyciele na wsi oraz Oddziały RSW „Prasa-Książka-Ruch" w miastach.

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch", Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto PKO BP XV Oddział w Warszawie Nr 1658-201045-139-11. Wysyłka za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zleceniodawców indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy.

Terminy przyjmowania prenumerat na kraj i za granicę:
— do dnia 10 listopada na I półrocze roku następnego i na cały rok następny,
— do dnia 1 czerwca na II półrocze roku bieżącego.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN, Pałac Kultury i Nauki, 00-901 Warszawa.

Subscription orders for all the magazines published in Poland available through the local press distributors or directly through the Foreign Trade Enterprise ARS POLONA, 00-068 Warszawa, Krakowskie Przedmieście 7, Poland.

Our bankers:

BANK HANDLOWY WARSZAWA S.A.

Rozpr. Elektrot. T. 34, z. 1, 1—296, Warszawa 1988

**Indeks 37483**

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

PL ISNN 0035-9386

# ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XXXIV ZESZYT 2

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

WARSZAWA 1988

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTROTECHNIKI
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

# ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XXXIV — ZESZYT 2

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1988

RADA REDAKCYJNĄ

*Przewodniczący*
prof. dr inż. ADAM SMOLIŃSKI
członek rzeczywisty PAN

*Członkowie*

prof. dr hab. DANIEL JÓZEF BEM, prof. dr hab. inż. MICHAŁ BIAŁKO — czł. rzecz. PAN, prof. dr inż. KAZIMIERZ DZIĘCIOŁOWSKI, prof. dr hab. inż. STEFAN HAHN — czł. koresp. PAN, prof. dr inż. ANDRZEJ HAŁAS, prof. dr inż. ZDZISŁAW KACHLICKI, prof. dr hab. inż. BOHDAN MROZIEWICZ, prof. dr inż. JERZY OSIOWSKI, prof. dr inż. WITOLD ROSIŃSKI, prof. dr inż. STANISŁAW SŁAWIŃSKI, prof. dr hab. inż. STEFAN WĘGRZYN, prof. dr hab. inż. WIESŁAW WOLIŃSKI, prof. dr inż. ANDRZEJ ZIELIŃSKI, prof. dr inż. MARIAN ZIENTALSKI

REDAKCJA

*Redaktor Naczelny*
prof. dr hab. inż. WIESŁAW WOLIŃSKI

*Zastępca Redaktora Naczelnego*
doc. dr inż. KRYSTYN PLEWKO

*Sekretarz Odpowiedzialny*
mgr KRYSTYNA LELAKOWSKA

ADRES REDAKCJI

*00-665 Warszawa, ul. Nowowiejska 15/19*
*Politechnika, Instytut Telekomunikacji, Gmach Elektroniki, pok. 401*

*Dyżury Redakcji: środy i piątki, godz. 11—13*
*tel. 28 89 81 lub 210 07-737*

*Telefony domowe: redaktora naczelnego — 12 17 65*
*zastępcy redaktora naczelnego — 26 83 41*
*sekretarza odpowiedzialnego — 25 29 18*

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — WARSZAWA

| | |
|---|---|
| Nakład 510 (420+90) | Oddano do składania 8.XII.1987 r. |
| Ark. druk. 25,5 | Podpis. do druku w kwietniu 1989 r. |
| Ark. wyd. 31,75 | Druk ukończono w czerwcu 1989 r. |
| Papier druk. kl. III, 70 g. A-99 | Zam. 5150/12/87. Cena zł 250,— |

DRUKARNIA IM. REWOLUCJI PAŹDZIERNIKOWEJ, WARSZAWA

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1988, 34, z. 2, ss. 299–324

621.372

# Geometrical methods in the description of non-linear RLC circuits: Dynamic equations and dynamic spaces of RLC systems

ANDRZEJ SZATKOWSKI

*Instytut Technologii Elektronowej, Politechnika Gdańska*

*Received 1986.03.13*
*Authorized 1987.03.24*

Certain new ideas useful for the description of non-linear, time-varying electric circuits consisting of resistors and inductive and capacitive elements (RLC circuits), are introduced. Theorems characterising the vector fields generated by RLC circuits are given and a method of finding the dynamic equations and spaces of non-linear RLC circuits is proposed. Methods of differential geometry are applied.

## 1. INTRODUCTION

In the geometric approach to electrical networks, we consider the response of a network starting from a given operating point as motion occuring in a differential manifold[1] being the dynamic space (the space where the dynamics takes place) of the network. The notion of manifold, which plays a central role in differential geometry and in differential topology, provides a natural framework for the study of trajectory problems of general nonlinear *RLC* networks.

The main advantages of the geometric approach to electrical networks are the following.

1. It is coordinate free: the results obtained by a geometric method do not depend on the particular choice of a tree, a loop matrix, state variables etc. (see for example the Theorems 5 and 6). Therefore, this method is suitable for studying intrinsic properties of networks.
2. The restrictions on nonlinearities in a network are very weak; (thus, a very broad class of networks is covered).
3. The concepts of the state space and the state equation appear in a natural way and they are given in a rigorous manner; this seems to be one of the main advantages of the geometric approach to nonlinear *RLC* networks.
4. An another important advantage of the geometric (topological) approach has been pointed out by R. Thom [25]: „La topologie est précisemént la discipline mathématique qui permet le passage du local au global". Thus, by using local (differential) methods

[1] The mathematical definitions which are explored in the paper are enclosed in Chapter 2.

it is possible to obtain global (qualitative) results, with the aid of topology and group theory.

5. Generally, the geometric approach is suitable for studying more or less qualitative (global) properties.

6. The concept of the tangent bundle connects in a natural way the theories of nonlinear and linear networks.

The paper consists of the Introduction, three Chapters and the Concluding Remarks. Chapter 2 contains the basic mathematical notions and definitions which are explored in the paper: the notion of differential manifold (submanifold), the definitions of the tangent bundle of a manifold and of the vector field on a manifold, and the definition of the flow on a manifold.

Chapter 3 contains the definition of an RLC network and the definitions of the dynamic space of a network and of the vector field generated by a network.

In Chapter 4, the conditions are given which guarantee that an RLC network generates the vector field on its dynamic space. Several theorems are presented, which characterize the dynamic spaces, the equations of motion and the state variables of RLC networks. The vector field generated by *RLC* network is interprated as a submanifold of the tangent bundle of the dynamic space of the network; the definitions of the Maxwell space and of the Kirchhoff-Maxwell space of an *RLC* network enable to solve the problem of the formulation of the equations of motion and of the state equations in a general as well as synthetic manner. The Theorems 5 and 6 concerning the question of finding the dynamic space and the equation of motion of an RLC network contain the most general solution of this question.

## 2. BASIC MATHEMATICAL NOTIONS AND DEFINITIONS

In this Section we review some basic mathematical notions and definitions that are needed in the later sections.

The notion of manifold plays a central role in differential topology and in differential geometry [20]—[23] and it is widely explored in many branches of research [26], [27].

Manifolds appear also in a natural way in the study of trajectory problems for general nonlinear electrical networks.

Roughly speaking, manifold is the topological space which is equivalent locally (homeomorphically equivalent) to the Euclinean space $R^m$ (the topology on $R^m$ is the topology defined by the Euclidean metric $||x_a - x_b|| = \left(\sum_{i=1}^{m} (x_a^i - x_b^i)^2\right)^{1/2}$).

Manifolds which are considered in this paper are the subsets of the Euclidean spaces, and hence they are called submanifolds.

*Definition 1.*

Let $M$ be a topological subspace of the Euclidean space $R^n$ (the topology on $M$ is induced by the topology on $R^n$, i.e., a set $U \subseteq M$ is an open subset of $M$ if, and only if, there is an open subset 0 of $R^n$ such that $U = 0 \cap M$).

The space $M$ is an $m$-dimensional, $(1 \leqslant m \leqslant n)$, regular $C^k$-hypersurface in $R^n$ ($k$ is the natural number, the symbol $\infty$, or the symbol $\omega$ denoting analyticity of a map), if for each point $y \in M$ there exists a $C^k$-map $F(\cdot)$ of an open subset $V \subseteq R^m$ into $R^n$ such that:

i. $F(\cdot)$ is an immersion (i.e., the rank of the Jacobi matrix of $F(\cdot)$ is equal to $m$, at each point $x \in V$);

ii. $F(\cdot)$ maps $V$ homeomorphically onto an open neighbourhood $U$ of $y$ in $M$ [29].

One-dimensional regular hypersurfaces (the case $m = 1$) are called regular curves, and two-dimensional regular hypersurfaces are called regular surfaces (of the appropriate differentiability class $C^k$).

We note that each nonempty open subset of $R^n$ is an $n$-dimensional regular hypersurface of an arbitrarily high differentiability class $C^k$ ($k = 1, 2, \ldots, k = \infty$ or $k = \omega$). Also, each nonempty open subset of an m-dimensional regular $C^k$-hypersurface is an $m$-dimensional regular $C^k$-hypersurface.

Let $F(\cdot) \in C^k(V, R^n)$, where $V$ is an open subset of $R^m$. Write $y$ for a point from $R^m$ and write z for a point from $R^n$; $y = (y^1, y^2, \ldots, y^m)$ and $z = (z^1, z^2, \ldots, z^n)$.

The set

$$\{(y, z)_{\text{pt.}} \in R^{m+n};\ y \in V,\ z = F(y)\}, \tag{1}$$

where $(y, z)_{\text{pt.}}$ is a permutation of the sequence $(y^1, \ldots, y^m, z^1, \ldots, z^n)$ is called the graph of the function $F(\cdot)$ in the space of points $(y^1, \ldots, y^m, z^1, \ldots, z^n)_{\text{pt.}}$. We denote the set (1) by Graph $(F(\cdot))$. From the definition of the graph of function $F(\cdot)$ it follows that the set Graph $(F(\cdot))$, with the topology induced by the topology on $R^{m+n}$ is the regular $m$-dimensional $C^k$-hypersurface in $R^{m+n}$.

One can define a regular hypersurface in the following equivalent way.

Let $M$ be the subset of the Euclidean space $R^n$ and let for each point $y' \in M$ there exist an open neighbourhood 0 of $y'$ in $R^n$ and a $C^k$-map $g(\cdot): 0 \to R^{n-m}$ such that:

$$0 \cap M = \{y \in 0:\ g(y) = 0\},$$

where the rank of $g(\cdot)$ at the points from the set $0 \cap M$ is equal to $n-m$. Then the set $M$, with the topology induced by the topology on $R^n$, is an $m$-dimensional regular $C^k$-hypersurface in $R^n$.

The $C^k$-map $F(\cdot)$ of an open subset $V \subseteq R^m$ into $R^n$ such that: $F(\cdot)$ is an immersion and $F(\cdot)$ maps $V$ homeomorphically onto its image $F(V)$ in $R^n$, where the topology on $F(V)$ is induced by the topology on $R^n$, is called the $C^k$-embedding of $V$ into $R^n$. If $F(\cdot)$ is the $C^k$-embedding of $V$ into $R^n$, then $F(\cdot)$ is the $C^k$-diffeomorphism of $V$ onto $F(V)$, i.e., $F(\cdot)$ is the one-to-one map of $V$ onto $F(V)$, $F(\cdot)$ is the $C^k$-map and $F^{-1}(\cdot)$ is the $C^k$-map, i.e., $F^{-1}(\cdot)$ can be expressed in the form

$$F^{-1}(\cdot) = (\varphi \cdot l_U)(\cdot),$$

where

$u = F(v)$, $l_U(\cdot): U \ni y \to y \in R^n$ and $\varphi(\cdot) \in C^k(R^n, R^m)$.

From the Definition 1 of an $m$-dimensional regular $C^k$-hypersurface $M$ it follows that there exists such an open cover $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ($A$ being a set of indices, $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, $U_\alpha$

is an open subset of $M$) of $M$, that for each $\alpha \in A$ there exists a map $f_\alpha(\cdot)$ of an open subset $V_\alpha \subseteq R^m$ into $R^n$ being the $C^k$-diffeomorphism of $V_\alpha$ onto $U_\alpha$. A$_\alpha$ pair $(U_\alpha, \varphi_\alpha(\cdot)) = (U_\alpha, f_\alpha^{-1}(\cdot))$ is called the local chart (or the local coordinate system) on $M$, and the set $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha(\cdot))\}_{\alpha \in A}$ is called the $C^k$-atlas on the $C^k$-hypersurface $M$.

Obviously, on each regular $C^k$-hypersurface one can define infinitely many different $C^k$-atlases.

The sets $U_\alpha$, $\alpha \in A$, are called the coordinate neighbourhoods on $M$ and the associated maps $\varphi_\alpha(\cdot)$, $\alpha \in A$, are called the coordinate maps. The maps $f_\alpha(\cdot)$, $\alpha \in A$, are the local parametrizations for $M$, and the $C^k$-map $(\varphi_{\alpha''}, \varphi_{\alpha'}^{-1})(\cdot)$ defines the coordinates change on $U_{\alpha'} \cap U_{\alpha''}$, where $\alpha', \alpha'': U_{\alpha'} \cap U_{\alpha''} \neq \emptyset$.

*Definition 2.*

The maximal $C^k$-atlas on the regular $C^k$-hypersurface, being the set of all local $C^k$-charts on $M$, is called the $C^k$-differential structure on $M$.

The $C^k$-differential structure on the regular $C^k$-hypersurface in $R^n$ is given uniquely.

*Definition 3.*

A pair $(M, \{(U_\beta, \varphi_\beta(\cdot))\}_{\beta \in B})$, where $M$ is the regular $C^k$-hypersurface in $R^n$ and $\{(U_\beta, \varphi_\beta(\cdot))\}_{\beta \in B}$ is the maximal $C^k$-atlas on $M$ is called the $C^k$-submanifold of $R^n$.

We note, that each regular $C^k$-hypersurface in $R^n$ is also the regular $C^r$-hypersurface in $R^n$, $1 \leqslant r < k$. Thus, each regular $C^k$-hypersurface $M$ in $R^n$ has (the unique) $C^r$-differential structure, $1 \leqslant r \leqslant k$, $k = 1, 2, \ldots, k = \infty$ or $k = \omega$.

Let $z$ be an $m$-dimensional (ordered) sequence of the coordinates of a point $y$ from $R^n$: $z = (y^{k_1}, \ldots, y^{k_m})$, $1 \leqslant k_j \leqslant n$, and $k_j \neq k_p$ for $1 \leqslant j \neq p \leqslant n$. Denote by $R_z^m$ an $m$-dimensional Euclidean space of points $z$, where the coordinates $z^1, \ldots, z^m$ of $z$ have been identified with the successive coordinates $y^{k_1}, \ldots, y^{k_m}$. And the space $\overline{R}_z^m$ is defined as the following subset of $R^n$:

$$\overline{R}_z^m = \left\{ y \in R^n : \; y^j = 0, \text{ for each } j \notin \{k_1, k_2, \ldots, k_m\} \right\}.$$

(The space $\overline{R}_z^m$ is the $m$-dimensional Euclidean subspace of $R^n$; obviously, it has the differential structure of an $m$-dimensional differential submanifold of $R^n$, of an arbitrarily high differentiability class).

Write $p_z(\cdot)$ for the projection map from $R^n$ onto $R_z^m$, $p_z(\cdot): R^n \ni y = (y^1, \ldots, y^n) \to z = p_z(y) = (y^{k_1}, \ldots, y^{k_m}) \in R_z^m$.

*Theorem 1.* ([29]).

Let $M$ be an $m$-dimensional regular $C^k$-hypersurface in $R^n$; $(R^n \ni y = (y^1, y^2, \ldots, y^n))$. There is an open cover $\{U_\beta\}_{\beta \in B}$ of $M$ and there exists a set $\{z_\beta\}_{\beta \in B}$ of $m$-dimensional (ordered) sequences $(y^{k_1(\beta)}, \ldots, y^{k_m(\beta)})$, where $k_j(\beta) \neq k_p(\beta)$ for $1 \leqslant j \neq p \leqslant n$, such that the set

$$\left\{ \left(U_\beta, (p_{z_\beta} \circ l_{U_\beta}(\cdot))\right) \right\}_{\beta \in B}$$

is the $C^k$-atlas on the hypersurface $M$.

Each atlas having the form as in the Theorem 1 is called the natural $C^k$-atlas on the $C^k$-hypersurface $M$.

Let $M$ be a regular $C^k$-hypersurface in $R^n$. The introduced $C^k$-differential structure on $M$ (Definition 2), which defines $M$ as the $C^k$-submanifold of $R^n$ is the natural structure in the sense that it is the one induced by the $C^k$-differential structure on $R^n$. More precisely, one can prove the following statements:

i. $F(\cdot): M \to R$ is the $C^r$-map if, and only if, there exists a function $\overline{F}(\cdot) \in C^r(R^n, R)$ such that

$$F(\cdot) = (\overline{F} \cdot l_M)(\cdot),$$

$(l_M(\cdot): M \ni y \to y \in R^n)$, and

ii. $f(\cdot): R \to M$ is the $C^r$-map if, and only if, $(l_M \circ f)(\cdot)$ is the $C^r$-map of $R$ into $R^n$.

Example 1.

Let $M$ be a 1-dimensional regular $C^k$-hypersurface in $R^2$ ($M$ is a smooth regular curve in $R^2$). The curve (the hypersurface) $M$, with the differential structure induced by the $C^k$-differential structure on $R^2$, is the 1-dimensional $C^k$-submanifold of $R^2$.

An example of 1-dimensional differential submanifold of $R^2$ is given in Fig. 1; we have marked one of the local charts $(U, \varphi(\cdot))$ on $M$.

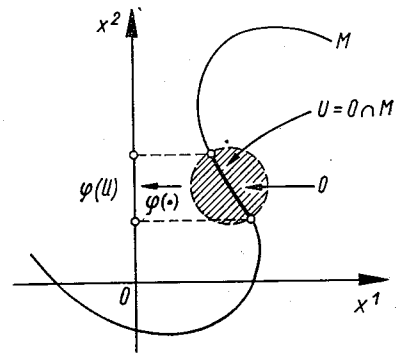



Fig. 1. 1 — dimensional differential submanifold of $R^2$

Example 2.

Each regular surface in $R^3$ is the smooth 2-dimensional submanifold of $R^3$, if one defines the differential structure on $M$ as the differential structure induced from the ambient space $R^3$.

An example of 2-dimensional differential submanifold of $R^3$ (being obviously the regular surface) is given in Fig. 2, where we have marked one of the local charts $(U, \varphi(\cdot))$; the map $\varphi(\cdot)$ has been defined as the contraction of the projection map $p_{x^1,x^2}(\cdot)$ to the subset $U = 0 \cap M$ of $R^3$ (of $M$).

Remark 1.

In the following, we use the name „differential submanifold" for each subset of $R^n$, which being a topological subspace of $R^n$ is a regular hypersurface in $R^n$. We shall define the differential structure on the hypersurface, if it will be needed for our considerations, as the unique differential structure induced from the ambient Euclidean space.

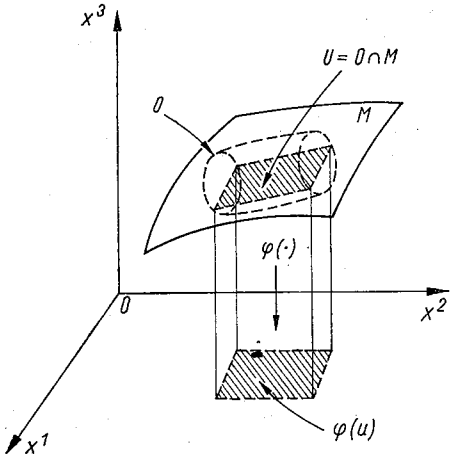



Fig. 2. 2 — dimensional differential submanifold of $R^3$

Example 3.

Let us consider an RC network shown in Fig. 3. It consists of linear capacitor and of nonlinear resistor.

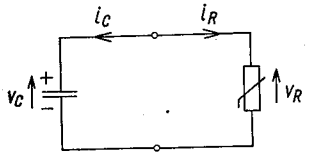



Fig 3. Nonlinear *RC* network

The constitutive relations of the elements are given by the equations:

$$q_C = C \cdot v_C, \tag{2}$$

and

$$i_R = g_R(v_R), \tag{3}$$

where

$g_R(\cdot)$ is the smooth function whose graph is given in Fig. 4.

The Kirchhoff equations impose the following constraints on the values of network variables:

$$v_C = v_R, \tag{4}$$

and

$$i_C = -i_R. \tag{5}$$

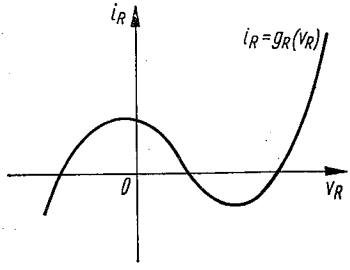



Fig. 4. The constitutive relation of nonlinear resistor: a 1 — dimensional $C^k$ — submanifold of $R^2$

Equations (2)—(5) give the complete set of (algebraic) constraints for the electrical variables of the *RC* network of Fig. 3. The equations (2)—(5) define a 1-dimensional smooth submanifold $\sum$ in the space $R^5$ of points $x = (q_C, v_C, v_R, i_C, i_R)$. $\sum$ is the graphs of the following function of the variable $q_C$:

$$R \ni q_C \to (v_C, v_R, i_C, i_R) = \left(\frac{1}{C} q_C, \frac{1}{C} q_C, -g_R\left(\frac{1}{C} q_C\right), g_R\left(\frac{1}{C} q_C\right)\right). \tag{6}$$

The submanifold $\sum$ is shown in Fig. 5. The submanifold $\sum$ is the dynamic space of the considered *RC* network (precise definition of the dynamic space of an *RLC* network is given in Chapter 3 (Definition 14)). With the aid of (6), the solutions of the equation

$$\frac{dq_C}{dt} = -g_R\left(\frac{1}{C} q_C\right)$$

prescribe the change of all network variables in time.

Let us introduce now an important notion of the tangent space of the differential submanifold. Let $M$ be an $m$-dimensional $C^k$-submanifold of $R^n$ and let $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha(\cdot))\}_{\alpha \in A} \triangleq \{(U_\alpha, f_\alpha^{-1}(\cdot))\}_{\alpha \in A}$ be a $C^k$-atlas for $M$. Write $(Df_\alpha)_{f_\alpha^{-1}(Y)}(\cdot)$, $Y \in U_\alpha$, for the derivative of the map $f_\alpha(\cdot)$ at the point $y = f_\alpha^{-1}(Y) \in V_\alpha$, $V_\alpha \triangleq \varphi_\alpha(U_\alpha)$. The derivative $(Df_\alpha)_{f_\alpha^{-1}(Y)}(\cdot)$ is the linear map of the vector space $R^m$ into the vector space $R^n$. The image $Im((Df_\alpha)_{f_\alpha^{-1}(Y)}(\cdot))$ is an $m$-dimensional linear subspace of $R^n$. We denote this linear subspace by $T_Y(M)$ and we call it the tangent space to $M$ at the point $Y \in M (Y \in U_\alpha)$. $((Df_\alpha)_{f_\alpha^{-1}(Y)}$ is the Jacobi matrix of $f_\alpha(\cdot)$, defined at the point $f_\alpha^{-1}(Y)$, $Y \in U_\alpha)$.

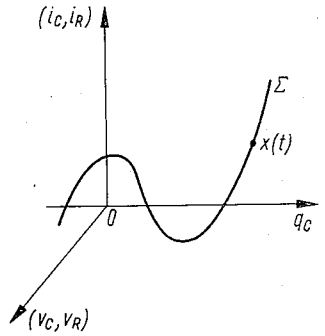



Fig. 5. The set $\sum$ is the 1-dimensional smooth submanifold of the space $R^5$ of points $x = (q_C, v_R, v_R, i_C, i_R)$. The submanifold $\sum$ is the dynamic space of the considered network ($\sum$ is the space where the network's dynamics takes place)

It can be shown, that $T_Y(M)$ does not depend on the particular choice of the local coordinate system $(U_\alpha, f_\alpha^{-1}(\cdot))$, which enters in the above definition of $T_Y(M)$. We note also, that in the above interpretation, vectors from the tangent space $T_Y(M)$ are the vectors from $R^n$. Geometrically, the tangent space $T_Y(M)$ may be interprated as the best linear approximation of the submanifold (nonlinear space) $M$ at the point $Y \in M$.

From a point of view of nonlinear *RLC* networks theory, the notion of the tangent space to the differential submanifold $M$ has the following interpretation: if $M$ is the dynamic space of an *RLC* network, then (for *RLC* networks of practical interest [8]) $T_Y(M)$ is the dynamic space of "*small-signal RLC network*" obtained by linearization of the constitutive relation of the original *RLC* network at the operating point $Y$.

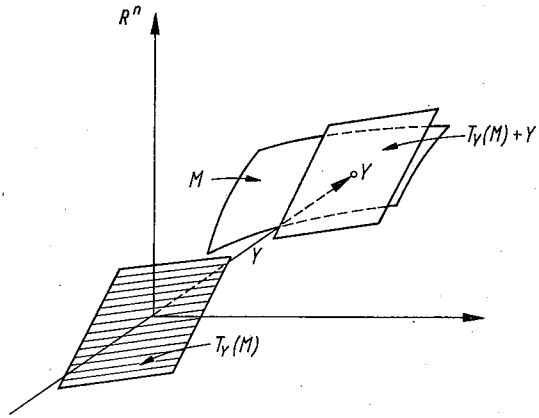



Fig. 6. The tangent space $T_Y(M)$ to the submanifold $M$ at the point $Y \in M$, and the affine tangent subspace $T_Y(M)+Y$ to $M$ at the point $Y$. $T_Y(M)+Y$ is the space of all points (vectors) $\xi$ in $R^n$, which may be expressed as $\xi = \eta + Y$, where $\eta \in T_Y(M)$

There is another (and equivalent) way of defining the space $T_Y(M)$. Let $Y^0 \in M$ and let $Y(\cdot)$ be a smooth curve contained in $M$ and passing through $Y^0$, i.e., $Y(\cdot)$ is the differentiable map of an open interval in $R$ contaning 0 into $M$ and such that $Y(0) = Y^0$ Then

$$\eta \stackrel{\Delta}{=} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} Y\right)(0) \in R^n$$

is the vector tangent to $M$ at the point $Y^0$. The space $T_{Y_0}(M)$ is exactly the space of all vectors $\eta$ in $R^n$, such that each of them is tangent to some smooth curve $Y(\cdot)$ in $M$, which passes through $Y^0$ at $s = 0$.

*Definition 4.* (The tangent bundle of the differential submanifold).

The tangent bundle $T(M)$ of the differential submanifold $M \subseteq R^n$ is defined in the following way:

$$T(M) \stackrel{\Delta}{=} \bigcup_{Y \in M} (Y, T_Y(M)).$$

The space $T(M)$ may be given the structure of the differential submanifold [20].This can be done in the following way. Let $R^{2n}$ be the space of points (vectors) $Z = (Y, \eta)$, where $Y \in R^n$ and $\eta \in R^n$. Let $M$ be an m-dimensional $C^k$-submanifold of $R^n$, $k \geqslant 2$, and let $\{(U_\alpha, f_\alpha^{-1}(\cdot))\}_{\alpha \in A}$ be a $C^k$-atlas on $M$. We define the topology on $T(M)$ as the topology induced by the topology on $R^{2n}$, $T(M) \subseteq R^{2n}$. Then, one can consider the topological subspace $T(M)$ as the regular $2m$-dimensional $C^{k-1}$-hypersurface in $R^{2n}$. Denote by $T(U_\alpha)$ the subset $\bigcup_{Y \in U\alpha} (Y, T_Y(M))$ of $R^{2n}$. Then the set

$$\left\{\left(T(U_\alpha), \left((f_\alpha^{-1} \circ p_Y, (Df_\alpha)_{f_\alpha^{-1} \cdot p_Y(\cdot)} \circ p_\eta\right) \circ l_{T(U_\alpha)}\right)(\cdot)\right\}_{\alpha \in A},$$

where

$l_{T(U_\alpha)}(\cdot)$ denotes the inclusion map of $T(U_\alpha)$ into $R^{2n}$, $l_{T(U_\alpha)}(\cdot): T(U_\alpha) \ni (Y, \eta) \to (Y, \eta) \in R^{2n}$, is the $C^{k-1}$-atlas on the regular $2m$-dimensional hypersurface $T(M)$.

Example 4.

Let $M$ be graph of the function $F(\cdot): R \ni y \to z = y^2$ in the space $R^2$ of points $Y = (y, z)$. $M$ being the topological subspace of $R^2$ is the 1-dimensional regular $C^\omega$-hypersurface in $R^2$. The space $T(M)$, considered as the topological subspace of $R^4$, is the regular 2-dimensional $C^\omega$-hypersurface in $R^4$; the map

$$f(\cdot): R^2 \ni (y, \eta^1) \to (y, (y)^2, \eta^1, 2\eta^1)$$

$((Y, \eta) = (y, z, \eta^1, \eta^2))$ is the $C^\omega$-diffeomorphism of $R^2$ onto $T(M)$. One can define the $C^\omega$-atlas on $T(M)$ in the form of the following global chart on $T(M)$,

$$(T(M), (p_y, p_{\eta 1}) \circ l_{T(M)}(\cdot)).$$

Let us now introduce the definition of transversality relation for smooth submanifolds in $R^n$. We shall use this definition in the considerations in Chapter 4.

*Definition 5.* ([22], [23]).

Let $M_1$ and $M_2$ be the differential submanifolds of $R^n$. We shall say that $M_1$ and $M_2$ are transversal ($M_1 \pitchfork M_2$), if

$$T_Y(M_1) + T_Y(M_2) = R^n, \tag{7}$$

for each point $Y \in M_1 \cap M_2$.

The sum in (7) is the algebraic sum of subsets of the vector space: for $0_1, 0_2 \subseteq R^n$ $0_1 + 0_2 = \{Y \in R^n$: there exist vectors $Y_1 \in 0_1$ and $Y_2 \in 0_2$ such that $Y = Y_1 + Y_2\}$; if one of the sets $0_1$ or $0_2$ is an empty set, then $0_1 + 0_2 = \emptyset$.

One can say, that the transversality condition for submanifolds of $R^n$ is, in fact, the condition on differential independence of the families of constraints defining $M_1$ and $M_2$ [5], [6]. In Fig. 7 we have three examples illustraiting the definition of the transversality

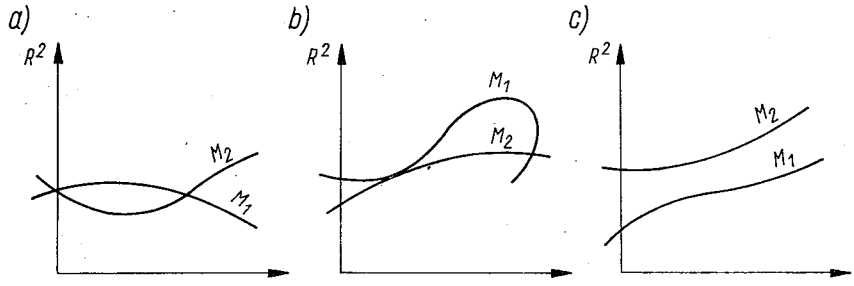



Fig. 7. 1-dimensional differential submanifolds of $R^2$

relation for submanifolds. The submanifolds in Figs. 7a and 7c are transversal, and the submanifolds in Fig. 7b are not transversal.

The following Definition 6 contains three equivalent versions of the definition of the vector field on the differential submanifold. Recall that a topological subspace of $R^n$ is an $m$-dimensional (topological or $C^0$)-submanifold of $R^n$ if each point of this subspace has an open neighbourhood (in this subspace) which is homeomorphic to the space $R^m$.

*Definition 6.*

Let $M$ be a $C^k$-submanifold of $R^n$ $k \geqslant 1$.

i. A vector field on the submanifold $M$ is a map $\eta(\cdot)$, which assigns each point $Y \in M$ a vector $\eta \in T_Y(M)$.

If, in addition, $\eta(\cdot)$ is the $C^r$-map (of $M$ into $R^n$), $0 \leqslant r \leqslant k-1$, then $\eta(\cdot)$ is the $C^r$-vector vector field.

ii. A vector field on the submanifold $M$ is a map $\eta(\cdot)$ of $M$ into the tangent bundle (submanifold) $T(M)$, such that

$$\eta(Y) = \big(Y, p_\eta(\eta(Y))\big),$$

for each point $Y \in M$($p_\eta(\cdot)$ is the projection map, $p_\eta(\cdot): T(M) \ni (Y, \eta) \to p_\eta(Y, \eta) = \eta \in R^n$).

If in addition $\eta(\cdot)$ is the $C^r$-map, $0 \leqslant r \leqslant k-1$, then $\eta(\cdot)$ is the $C^r$-vector field.

iii. A vector field on the submanifold $M$ is a subset $\eta$ of $T(M)$, such that $(p_Y \circ l_\eta)(\cdot)$ is the one-to-one map of $\eta$ onto $M$.

If in addition $\eta$ $(p_Y \circ l_\eta)^{-1}(\cdot)$ is the $C^r$ map, $0 \leqslant r \leqslant k-1$, then $\eta$ is the $C^r$-vector field.

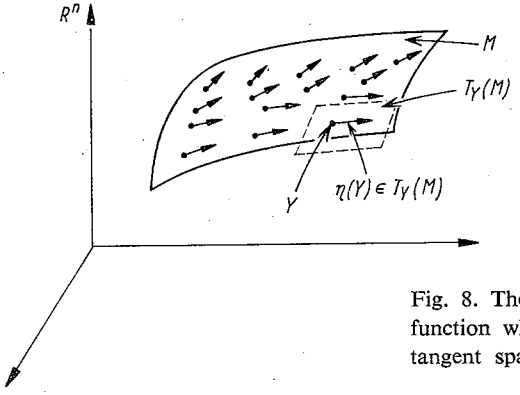



Fig. 8. The vector field $\eta(\cdot)$ on the submanifold $M$ is the function which assigns each point $Y \in M$ a vector from the tangent space $T_Y(M)$. (Here, we identify the spaces $T_Y(M)$ and $T_Y(M)+Y$)

In the approach presented in this paper, the response of an *RLC* network is considered as motion occuring in a differential submanifold, being the dynamic space of the network. This motion is the flow defined by a vector field on the dynamic space of the network.

*Definition 7.*

Let $M$ be a differential submanifold of $R^n$. We call the flow on $M$ each map $\sigma(\cdot)$ of an open subset $U \subseteq M \times R$ containing $M \times \{0\}$ onto $M$, which satisfies the following conditions:

i. $\sigma(Y, 0) = Y$, for each point $Y \in M$;

ii. $\sigma(Y, s'+s'') = \sigma(\sigma(Y, s'), s'')$, for all $Y$, $s'$, $s''$ for which both sides of the equation are well defined;

iii. the map $\sigma(\cdot)$ is continuous.

If in addition $\sigma(\cdot)$ is a smooth map, then $\sigma(\cdot)$ is a differentiable flow on $M$.

Let $\sigma(\cdot)$ be a differentiable flow on the smooth submanifold $M$ of $R^n$. For each point $Y^0 \in M$, $\sigma(Y^0, \cdot)$ is the smooth curve in $M$ passing through the point $Y^0$, $\sigma(Y^0, 0) = Y^0$. The equation

$$\eta = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}\sigma\right)(Y^0, 0)$$

defines vector tangent to the submanifold $M$ at the point $Y^0 \in M$. Thus, for each differentiable flow on the submanifold $M$ we have a uniquely defined associated vector field $\eta(\cdot)$ on $M$:

$$\eta(\cdot): M \ni Y \to \eta(Y) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}\sigma\right)(Y, 0).$$

And inversly [22], if $\eta(\cdot)$ is the $C^r$-vector field on the $C^k$-submanifold $M$ of $R^n$, $k \geqslant 2$, $1 \leqslant r \leqslant k-1$, then the vector field $\eta(\cdot)$ generates the (uniquely defined) $C^r$-flow $\sigma_\eta(\cdot)$ on $M$. The flow $\sigma_\eta(\cdot)$ is given in the following way: for each point $Y \in M$ there exists a unique $C^{r+1}$-function $\sigma_\eta(Y, \cdot)$ defined on an open and maximal interval $\mathrm{Dom}(\sigma_\eta(Y, \cdot))$ in $R$ containing 0, and satisfying the differential equation

$$\frac{\mathrm{dY}}{\mathrm{ds}} = \eta(Y) \tag{8}$$

and the initial condition

$$\sigma_\eta(Y, 0) = Y. \tag{9}$$

The function $\sigma_\eta(Y, \cdot)$ is the solution of the initial problem (8)—(9). (From the assumption $\eta(\cdot)$ is $C^r$, $r \geqslant 1$, we have that the solutions of the equation (8) are defined uniquely and each of them is the $C^{r+1}$-function of variable $s$, for $s$ in an open and maximal interval in $R$ containing 0, the interval where the solution exists [22]).

Let

$$\mathbf{U}_\eta \stackrel{\Delta}{=} \{(Y, s) \in M \times R: \; s \in \mathrm{Dom}(\sigma_\eta(Y, \cdot))\}.$$

Then the map $\sigma_\eta(\cdot): \mathbf{U}_\eta \ni (Y, s) \to \sigma_\eta(Y, s) \in M$ is the $C^r$-flow on the submanifold $M$.

If the dynamic space of an *RLC* network is a differential submanifold $M$ of an Euclidean space $R^n$, and if the response of this network is given, when it is starting from a given operating point, by the solution of a differential equation (8) on $M$ with the initial condition (9) prescribed by the state of the network at $s = t - t^0 = 0$, then we say that this network generates the vector field $\eta(\cdot)$ on its dynamic space. The dynamics (the set of solutions) of the network is given then by the flow $\sigma_\eta(\cdot)$. generated by the vector field $\eta(\cdot)$ on the dynamic space $M$.

For a broad class of *RLC* networks, the dynamics of the network is prescribed by a vector field on the dynamic space of the network. Moreover, if the dynamic space is given (if it is known), then this vector field is prescribed uniquely [31].

## 3. DEFINITION OF AN *RLC* NETWORK. THE DYNAMIC SPACE OF THE NETWORK AND THE VECTOR FIELD GENERATED BY THE NETWORK

We begin our considerations with abstract definitions of a network [30] and of an *RLC* network.

*Definition 8.* (Definition of a network).

A network is an ordered triple $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{B}, \psi(\cdot))$ where:

i. $\mathcal{N}$ is a nonempty finite set called the set of nodes;

ii. $\mathcal{B}$ is a finite set called the set of branches, and the sets $\mathcal{N}$ and $\mathcal{B}$ are disjoint;

iii. $\psi(\cdot)$ is a map of $\mathcal{B}$ into $\mathcal{N}\,\&\,\mathcal{N}$, where $\mathcal{N}\,\&\,\mathcal{N} = \{\{v', v''\}: v' \in \mathcal{N} \text{ and } v'' \in \mathcal{N}\}$.

*Definition 9.*

Let $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{B}, \psi(\cdot))$ be a network. The network $(\mathcal{N}', \mathcal{B}', \psi'(\cdot))$ is a subnetwork of $\mathcal{G}$ if: $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}$, $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$, and $\psi'(\cdot) = \psi(\cdot)_{|\mathcal{B}'}$.

In the following we will assume that:

j. $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{B}, \psi(\cdot))$ does not contain isolated nodes (i.e., for each node $v' \in \mathcal{N}$ there is a node $v' \in \mathcal{N}$ and there is $\mathcal{B}_j \in \mathcal{B} \neq \emptyset$ such that $\{v', v''\} = \psi(\mathcal{B}_j)$;

jj. the network does not contain self-loops, (i.e., the set $\mathrm{Im}(\psi(\cdot))$ does not conatin the elements of the type $\{v, v\}$, where $v \in \mathcal{N}$). Thus, [18], $\mathrm{Im}(\psi(\cdot)) \subseteq \mathcal{N}:\mathcal{N} \triangleq \{\{v', v''\}: v' \in \mathcal{N}, v'' \in \mathcal{N}, \text{ and } v' \neq v''\}$.

*Definition 10.*

A network $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{B}, \psi(\cdot))$ is connected if there do not exist subnetworks $(\mathcal{N}', \mathcal{B}', \psi'(\cdot))$ and $(\mathcal{N}'', \mathcal{B}'', \psi''(\cdot))$ of $\mathcal{G}$ such that $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ and $\mathcal{N}' \cap \mathcal{N}'' = \emptyset$.

*Definition 11.* (Definition of an *RLC* network).

Let $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{B}, \psi(\cdot))$ be a network satisfying the assumptions j. and jj.

Assume that the elements of the sets $\mathcal{N}$ and $\mathcal{B}$ have been ordered, and let $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_C, \mathcal{B}_L, \mathcal{B}_R)$, where $\mathcal{B}_C$, $\mathcal{B}_L$ and $\mathcal{B}_R$ are the disjoint ordered subsets of $\mathcal{B}$. Write $b_C$, ($b_L$ and $b_R$, resp.), for the number of branches in $\mathcal{B}_C$, (in $\mathcal{B}_L$ and in $\mathcal{B}_R$, resp.).

Set $\bar{b} = b_C + b_L$ and let $\bar{b} \geqslant 1$. The successive elements from $\mathcal{B}_C$ are denoted by $C_1, C_2, \ldots, C_{b_C}$, the successive elements from the set $\mathcal{B}_L$ are denoted by $L_1, L_2, \ldots, L_{b_L}$ and the successive elements from the set $\mathcal{B}_R$ are denoted by $R_1, R_2, \ldots, R_{b_R}$.

To each $C_j \in \mathcal{B}_C$, $j = 1, 2, \ldots, b_C$, we assign a triple $(q_{C_j}, v_{C_j}, i_{C_j}) \in R^3$ of variables, to each $L_k \in \mathcal{B}_R$, $k = 1, 2, \ldots, b_L$, we assigne a triple $(\Phi_{L_k}, v_{L_k}, i_{L_k}) \in R^3$ of variables, and to each $R_l \in \mathcal{B}_L$, $l = 1, 2, \ldots, b_R$, we assigne a pair $(v_{R_l}, i_{R_l}) \in R^2$ of variables. The elements from $\mathcal{B}_C$ are called capacitive branches, the elements from $\mathcal{B}_L$ are called inductive branches, and the elements from $\mathcal{B}_R$ are called resistive branches. The variables $q_{C_j}, v_{C_j}, i_{C_j}$ are called, respectively, charges, voltages and currents associates with the capacitive branches $C_j$, $j = 1, 2, \ldots, b_C$, the variables $\Phi_{L_k}, v_{L_k}, i_{L_k}$ are called, respectively, fluxes, voltages and currents associated with the inductive branches $L_k$, $k = 1, 2, \ldots, b_L$, and the variables $v_{R_l}, i_{R_l}$ are called, respectively, voltages and currents associated with the resistive branches $R_l$, $l = 1, 2, \ldots, b_R$.

Set $b = b_C + b_L + b_R$ and let $n = \bar{b} + 2b$, ($\bar{b} = b_C + b_L$). Denote by $R_x^n$ and n-dimensional Euclidean space of points (vectors) $x: R_x^n \ni x = (q_C, \Phi_L, v_C, v_L, v_R, i_C, i_L, i_R) = (q_C, \Phi_L, v, i)$, $q_C = (q_{C_1}, \ldots, q_{C_{b_C}}) = (q_C^1, \ldots, q_C^{b_C})$, ..., and $i_R = (i_{R_1}, \ldots, i_{R_{b_R}}) = (i_R^1, \ldots, i_R^{b_R})$, and let $R_\pi^{n+1} = R_x^n \times R_t$, where $R_t$ is the time axis. (We use the symbol $\pi$ to denote an *RLC* network). A point from $R_\pi^{n+1}$ is denoted by $X$, $X = (x, t) \in R_\pi^{n+1}$.

A quartet $\pi \triangleq (\mathcal{N}_\pi, \mathcal{B}_\pi, \psi_\pi(\cdot), N_\pi)$, where $(\mathcal{N}_\pi, \mathcal{B}_\pi, \psi_\pi(\cdot)) = (\mathcal{N}, \mathcal{B}, \psi(\cdot))$

and $N_\pi$ is a subset of $R_\pi^{n+1}$, is called an *RLC* network. The set $N_\pi$ is called the constitutive relation of $\pi$ and $R_\pi^{n+1}$ is the space of network $\pi$.

Remark 2.

i. In the following, we identify the terms: an $R$ (resp., $L$, $C$) branch and an $R$ (resp., $L$, $C$) two-terminal element of an *RLC* network.

ii. Note that in the presented definition of an *RLC* network, "couplings" among elements of the same kind, as well as "couplings" among elements of different kinds are allowed.

iii. An *RLC* network $\pi$ from the Definition 11 is time-dependent. The adjective "time-dependent" means that the considered network is not necessarily time-invariant. The network $\pi = (\mathscr{G}_\pi, N_\pi)$ is said to be time-invariant (autonomous) if for each $t'$ and $t'' \in R_t$, $N_\pi^{t'} = N_\pi^{t''}$, where $N_\pi^{t^0}$ is the intersection of $N_\pi$ and $\{X = (x, t) \in R_\pi^{n+1} : t = t^0\}$. In that case $N_\pi = N_\pi^0 \times R_t$.

Remark 3.

In the following we will assume that for $\pi = (\mathscr{G}_\pi, N_\pi)$ being an *RLC* network, $\mathscr{G}_\pi = (\mathscr{N}_\pi, \mathscr{B}_\pi, \psi_\pi(\cdot))$ is the connected and directed network; each branch of $\pi$ has assigned direction, and this denotes that $\psi_\pi(\cdot)$ is the map of $\mathscr{B}_\pi$ into $\mathscr{N}_\pi \times \mathscr{N}_\pi$.

Given a directed connected *RLC* network $\pi = (\mathscr{G}_\pi, N_\pi)$, pick any tree $\mathscr{T}$ for $\pi$ (for $\mathscr{G}_\pi$) and let $\mathscr{L}$ be an associated cotree. Let $B_\mathscr{L}$ and $D_\mathscr{T}$ be the fundamental loop and cut set matrices associated with $\mathscr{L}$ and $\mathscr{T}$, respectively.

*Definition 12.*

The Kirchhoff space $K_\pi$ of network $\pi$ is defined as a $(\bar{b}+b+1)$-dimensional linear subspace of $R_\pi^{n+1}$,

$$K_\pi \triangleq \{X = (q_C, \Phi_L, v, i, t) \in R_\pi^{n+1} : B_\mathscr{L} \cdot v^T = 0 \text{ and } D_\mathscr{T} \cdot i^T = 0\}.$$

$K_\pi$ is then the space of all points $X = (q_C, \Phi_L, v, i, t)$ whose voltage and current coordinates $v$ and $i$, respectively, satisfy the Kirchhoff equations.

Set

$$\sum\nolimits_\pi = K_\pi \cap N_\pi.$$

*Definition 13.*

Let $X_{(t^0)}(\cdot) : s \to X_{(t^0)}(s) \in \sum_\pi$, $t^0 \in R_t$, be a function defined on an open and maximal interval $\mathrm{Dom}(X_{(t^0)}(\cdot))$ in $R$ containing 0, and such that

$$X_{(t^0)}(\cdot) : \mathrm{Dom}(X_{(t^0)}(\cdot) \ni s \to X_{(t^0)}(s) = (x_{(t^0)}(s), t^0 + s) \in \sum\nolimits_\pi^{t^0+s},$$

where $\sum_\pi^{t^0+s} \triangleq \sum_\pi \cap \{X = (x, t) \in R_\pi^{n+1} : t = t^0 + s\}$.

Then, $X_{(t^0)}(\cdot)$ is the solution of network $\pi$ if:

i. the function $(p_{q_C, \Phi_L} \circ X_{(t^0)})(\cdot)$ is continuously differentiable on $\mathrm{Dom}\,(X_{(t^0)}(\cdot))$ and

ii.

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} p_{q_C, \Phi_L} \circ X_{(t0)}\right)(s) = p_{i_C, x_L} \circ X_{(t0)}(s), \tag{10}$$

for all $s \in \mathrm{Dom}(X_{(t0)}(\cdot))$.

*Definition 14.*

The dynamic space $M_\pi \subseteq \sum_\pi$ of network $\pi$ is given by:

$M_\pi = \{R_\pi^{n+1} \ni X$: there exists a solution $X_{(t0)}(\cdot)$ of $\pi$ such that $X_{(t0)}(0) = X\}$.

Observe that in the general case $M_\pi \subseteq \sum_\pi$ and there are *RLC* networks such that $M_\pi \subset \sum_\pi$ (see Example 5).

Write $S_\pi$ for the set of the solutions of network $\pi$.

*Definition 15.*

Let $M_\pi$ (the dynamic space of an *RLC* network $\pi$) be a $C^1$-submanifold of $R_\pi^{n+1}$ and let $\eta_\pi$ be a vector field on $M_\pi$. Assume that $\eta_\pi$ defines a flow $\sigma_{\eta\pi}$ on $M_\pi$.

We say that $\eta_\pi$ is the vector field generated by the network $\pi$ on its dynamic space $M_\pi$, if

$$\bigcup_{X \in M_\pi} \sigma_{\eta_\pi}(X, \cdot) = S_\pi.$$

## 4. THEOREMS CHARACTERIZING THE DYNAMIC SPACES AND THE EQUATIONS OF MOTION OF *RLC* NETWORKS

For the first time, the geometric point of view has been presented in the theory of nonlinear *RLC* networks in the reference [1] and it was next developed in the references [2]—[13]. The basic idea is the following. The equations describing the constitutive relation of an *RLC* network $\pi$ define a differentiable submanifold (a smooth regular hypersurface) $N_\pi^s$ in the Euclidean space $R_\pi^{n+1}$, whose coordinates are assigned electrical variables associated with the elements of *RLC* network; and the Kirchhoff equations define a linear subspace (a submanifold) $K_\pi$ in $R_\pi^{n+1}$. The intersection $\sum_\pi = K_\pi \cap N_\pi$ is, for *RLC* networks which are of practical interest, a smooth submanifold of $R_\pi^{n+1}$. The dynamic space $M_\pi$ of the network $\pi$ is a subspace of $\sum_\pi$. For a large class of *RLC* networks $M_\pi = \sum_\pi$, but for *RLC* networks containing capacitor-only loops and/or inductor-only cutsets one usually has $M_\pi \subset \sum_\pi$; $M_\pi$ is a proper subset of $\sum_\pi$.

Let us consider now the tangent bundle of $\sum_\pi$. At each solution of the network $\pi$ the velocities $\dot{q}_C$ and $\dot{\Phi}_L$ are the values of currents in the capacitive branches and the values of voltages in the inductive branches of $\pi$, respectively:

$$\dot{q}_C(t) = i_C(t) \tag{11}$$

and

$$\dot{\Phi}_L(t) = v_L(t). \tag{12}$$

If the equations (11) and (12) define a smooth submanifold $\eta$ in the tangent bundle $T(\sum_\pi)$. and if $\eta$ is the vector field on a smooth submanifold $M \subseteq \sum_\pi$ then, for each "*sufficiently smooth*" *RLC* network, $M$ is the dynamic space $M_\pi$ of the network $\pi$ and $\eta$ is the vector field generated by the network on its dynamic space $M_\pi = M$. In this situation, one can consider the response (the motion) of $\pi$ as flow generated by the vector field $\eta$ on $M_\pi$.

The following Theorem 2 gives the conditions which guarantee that an *RLC* network $\pi$ generates the $C^1$-vector field on its dynamic space $M_\pi$. This theorem is the direct extension of the Theorem 1 of the reference [7], where the class of time-invariant *RLC* networks has been considered.

*Theorem 2.*

Assume that the dynamic space $M_\pi$ of an *RLC* network $\pi$ is an $(1 \leqslant l_\pi \leqslant \bar{b}+1)$-dimensional $C^2$-submanifold of $R_\pi^{n+1}$, and assume that $M_\pi$ has $C^2$-atlas $\{(U_\alpha, f_\alpha^{-1}(\cdot))\}_{\alpha \in A}$ ($A$ being a set of indices) such that $f_\alpha^{-1}(\cdot) = (p_{z(\alpha),t} \circ l_{U_\alpha})(\cdot)$, where: $z(\alpha) = (q_C^{j_1(\alpha)}, \ldots, q_C^{j_{r(\alpha)}(\alpha)}, \Phi_L^{m_1(\alpha)}, \ldots, \Phi_L^{m_{u(\alpha)}(\alpha)})$,
$1 \leqslant j_1(\alpha) < j_2(\alpha) < \ldots < j_{r(\alpha)}(\alpha) \leqslant b_C$,
$1 \leqslant m_1(\alpha) < m_2(\alpha) < \ldots < m_{u(\alpha)}(\alpha) \leqslant b_L$, and $r(\alpha)+u(\alpha) = l_\pi - 1$;
$l_{U_\alpha}(\cdot)$ is the inclusion map, $l_{U_\alpha}(\cdot): U_\alpha \ni X \to X \in R_\pi^{n+1}$, and $p_{z(\alpha),t}(\cdot)$ denotes the natural projection from $R_\pi^{n+1}$ onto the space of points $(z(\alpha), t)$. If the above is satisfied, the network $\pi$ generates a $C^1$-vector field on $M_\pi$.

Set $w(\alpha) = (i_C^{j_1(\alpha)}, \ldots, i_C^{j_{r(\alpha)}(\alpha)}, v_L^{m_1(\alpha)}, \ldots, v_L^{m_{u(\alpha)}(\alpha)})$. Then, in the local coordinates, the vector field $\xi_\pi$ generated by the network $\pi$ of the Theorem 2 becomes:

$$\xi_\pi\colon\ \xi_\pi(\cdot)\colon\ U_\alpha \ni X \to \xi_\pi(X) = (Df_\alpha)_{f_\alpha^{-1}(x)} \cdot (p_{w(\alpha)}(X), 1)^T \in T_X(M_\pi),$$

for each $\alpha \in A$.

The content of the Theorem 2 may be summarized as follows: if the dynamic space $M_\pi$ of an *RLC* network $\pi$ is an $(1 \leqslant l_\pi \leqslant \bar{b}+1)$-dimensional $C^2$-submanifold of $R_\pi^{n+1}$, and if for each fixed point $X \in M_\pi$, one can define local coordinates parametrizing $M_\pi$ in some open neighbourhood of $X$ in $M_\pi$ in such a way, that they are the time variable $t$ and $(l_\pi - 1)$ charge and flux variables selected from the set of all charge and flux variables associated with the capacitive and inductive branches of $\pi$, respectively, then the network $\pi$ generates a smooth vector field on $M_\pi$.

The assumptions of the Theorem 2 are satisfied by most *RLC* networks which are of practical interest. There are however examples of *RLC* networks, being of practical interest, (relaxation oscillators, for example) for which the analysis of the solutions in the area of the dynamic space is not sufficient (for these networks, the dynamic space is not a closed subset of $R_\pi^{n+1}$); here the solutions are thought in the sense of Definition 13.

In the general case, $M_\pi \subseteq \sum_\pi$. In the following Theorems 3 and 4 we consider the situation when $M_\pi = \sum_\pi$ and the Theorems 5 and 6 concern the general case, when $M_\pi \subseteq$

$\subseteq \sum_{\pi}$. The Theorem 3 is an extension of the Theorems 2 and 3 of the reference [7] for the class of time-varying *RLC* networks.

*Theorem 3.* (The proof is given in the reference [7]).

**3.1.** Assume that the space $\sum_{\pi}$ of an *RLC* networks $\pi$ is a $(b_C+b_L+1)$-dimensional $C^2$-submanifold of $R_{\pi}^{n+1}$ and assume that there exists a $C^2$-atlas $\{(U_\gamma, f_\gamma^{-1}(\cdot))\}_{\gamma\in\Gamma}$, $\Gamma$ being a set of indices, on $\sum_{\pi}$ such that

$$f_\gamma^{-1}(\cdot) = (p_{q_C\Phi_L,t} \circ l_{U_\gamma})(\cdot),$$

for each $\gamma \in \Gamma$. Then $\sum_\pi$ is the dynamic space of $\pi$. The network $\pi$ generates the $C^1$-vector field $\xi_\pi$ on $M_\pi = \sum_\pi$; in the local charts $\xi_\pi$ becomes:

$$\xi_\pi\colon\ \xi_\pi(\cdot)\colon\ U_\gamma \ni X \to \xi_\pi(X) = (Df_\gamma)_{f_\gamma^{-1}(X)} \cdot (p_{i_C v_L}(X), 1)^T \in T_X\Big(\sum_\pi\Big),$$

for each $\gamma \in \Gamma$.

**3.2.** Let $\sum_{\pi}$ be an $(1 \leqslant l'_\pi \leqslant \bar{b}+1)$-dimensional $C^2$-submanifold of $R_\pi^{n+1}$. Assume that $\sum_{\pi}$ admits a $C^2$-atlas $\{(U_\gamma, f_\gamma^{-1}(\cdot))\}_{\gamma\in\Gamma}$ such that $f_\gamma^{-1}(\cdot) = (p_{z(\gamma),t} \circ l_{U_\gamma})(\cdot)$, for each $\gamma \in \Gamma$:

$z(\gamma) \triangleq (q_C^{j_1(\gamma)}, \ldots, q_C^{j_{r(\gamma)}(\gamma)}, \Phi_L^{m_1(\gamma)}, \ldots, \Phi_L^{m_{u(\gamma)}(\gamma)})$, where

$1 \leqslant j_1(\gamma) < j_2(\gamma) < \ldots < j_{r(\gamma)}(\gamma) \leqslant b_C$,

$1 \leqslant m_1(\gamma) < m_2(\gamma) < \ldots < m_{u(\gamma)}(\gamma) \leqslant b_L$, and $r(\gamma)+u(\gamma) = l'_\pi - 1$.

Then, $\sum_\pi$ is the dynamic space of $\pi$ if, and only if, the relation

$$(p_{i_C v_L}(X))^T = (D(p_{q_C\Phi_L} \circ f_\gamma))(Df_\gamma)_{f_\gamma^{-1}(X)} \cdot (p_{w(\gamma)}(X), 1)^T \tag{13}$$

holds for each $\gamma \in \Gamma$ and for all $X \in U_\gamma$, $(w(\gamma) = (i_C^{j_1(\gamma)}, \ldots, i_C^{j_{r(\gamma)}(\gamma)}, v_L^{m_1(\gamma)}, \ldots, v_L^{m_{u(\gamma)}(\gamma)}))$.

**3.3.** If $\sum_{\pi}$ is the submanifold satisfying the conditions given in 3.2 and if the relation (13) holds for each $\gamma \in \Gamma$ and for all $X \in U_\gamma$, then $\sum_{\pi}$ is the dynamic space of the network $\pi$ and $\pi$ generates the $C^1$-vector field $\xi_\pi$ on $\sum_{\pi}$. The vector field $\xi_\pi$ is given explicitly (in local charts) by:

$$\xi_\pi\colon\ \xi_\pi(\cdot)\colon\ U_\gamma \ni X \to \xi_\pi(X) = (\mathrm{D}f_\gamma)(Df_\gamma)_{f_\gamma^{-1}(X)} \cdot (p_{w(\gamma)}(X), 1)^T \in T_X\Big(\sum_\pi\Big),$$

for each $\gamma \in \Gamma$.

Let us interprete the vector field generated by an *RLC* network $\pi$ on its dynamic space $M_\pi$ as a subset of the Euclidean space $R_\pi^{2(n+1)} \triangleq R_\pi^{n+1} \times R^{n+1}\colon R_\pi^{2(n+1)} \ni Y \triangleq (X, \eta)$, there $\eta = (\eta^1, \ldots, \eta^{n+1})^T \in R^{n+1}$.

Let $\pi$ be an *RLC* network satisfying the conditions specified in the Definition 15.

The subspace $\eta^\pi$ of $R^{2(n+1)}$ ($\eta_n(\cdot)$ is the vector field generated by network $\pi$ on $M_\pi$) is given by:

$$\eta^\pi = \{Y = (X, \eta) \in R_\pi^{2(n+1)} : X \in M_\pi \quad \text{and} \quad \eta = \eta_\pi^r(X)\}.$$

$\eta^\pi$ is the subspace of $T(M_\pi)$ and in the following we identify $\eta_\pi(\cdot)$ and $\eta^\pi$ (version iii. in the Definition 6 of vector field on the submanifold).

Note that for an *RLC* network $\pi$ of the Theorem 2, the vector field $\eta^\pi = \xi^\pi$ generated by $\pi$ on its dynamic space $M_\pi$ is an $l_\pi$-dimensional $C^1$-submanifold of $R_\pi^{2(n+1)}$.

The definitions of the Maxwell space and of the Kirchhoff-Maxwell space given below are useful in the description of the vector fields generated by *RLC* networks.

*Definition 16.*

i. The Maxwell space $S_M$ of an *RLC* network is defined as a $(2(n+1)-\bar{b}-1)$-dimensional affine subspace (submanifold) of $R_\pi^{2(n+1)}$:

$$S_M \stackrel{\Delta}{=} \{Y(x, \eta) \in R_\pi^{2(n+1)} : \eta^j = X^{\bar{b}+b+j}, \quad \text{for} \quad j = 1, 2, \ldots, b_C,$$
$$\eta^{b_C+k} = X^{\bar{b}+b_C+k}, \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots, b_L, \quad \text{and} \quad \eta^{n+1} = 1\}.$$

ii. Let $T(K_\pi)$ be the tangent bundle of the Kirchhoff space (submanifold) $K_\pi$ of an *RLC* network $\pi$. The space

$$S_{KM} \stackrel{\Delta}{=} T(K_\pi) \cap S_M$$

is called the Kirchhoff-Maxwell space of the network $\pi$. The space $S_{KM}$ is an $(n+1)$-dimensional affine subspace (submanifold) of $R_\pi^{2(n+1)}$.

Observe that for an *RLC* network $\pi$ of the Theorem 2,

$$\xi^\pi = S_M \cap T(M_\pi),$$

($T(M_\pi)$ is the tangent bundle of the submanifold $M_\pi$).

These networks with $M_\pi = \sum\limits_\pi$, $\sum\limits_\pi$ being a differentiable submanifold of $R_\pi^{n+1}$, and with $\dim \sum\limits_\pi = b_C + b_L + 1$ (Theorem 3.1) are most often considered ones in electrical networks theory. The following Theorem 4 concerns this class of *RLC* networks.

*Theorem 4.*

Assume that: the constitutive relation $N_\pi$ of an *RLC* network $\pi$ is a $(\bar{b}+b+1)$ -dimensional $C^2$-submanifold of $R_\pi^{n+1}$ $N_\pi \pitchfork K_\pi$ (Definition 5) and $N_\pi \cap K_\pi \neq \emptyset$. Then the space

$$\eta^\pi = S_{KM} \cap T(N_\pi)$$

is the vector field on $\sum\limits_\pi$ (Definition 6.iii.) if, and only if, the submanifold $\sum\limits_\pi$ is locally $C^2$-parametrized by the variables $q_C$, $\Phi_L$ and $t$, (i.e., for each point $X \in \sum\limits_\pi$ there is an open neighbourhood $U$ of $X$ in $\sum\limits_\pi$ such that $(p_{q_C, \Phi_L, t} \circ l_U)(\cdot)$ is the $C^2$-embedding).

If $\eta^\pi = S_{KM} \cap T(N_\pi)$ is the vector field on $\sum\limits_\pi$ then it is the $C^1$-vector field generated by the network $\pi$ on its dynamic space $M_\pi = \sum\limits_\pi$ (we note that in that case $T(N_\pi) \pitchfork S_{KM}$).

(We omit the proof which is a slight modification of the proof of Theorem 3 of [8], where autonomous *RLC* networks have been considered).

Theorem 4 explains why the capacitor charges, inductor fluxes and time are the basic quantities in describing the dynamics of *RLC* networks: for the class of *RLC* networks considered in Theorem 4, (and this class of networks is very broad), the network constitutive relation and the Kirchhoff equations and the equations (11) and (12) define a $C^1$-vector field $\eta_\pi$ on $\sum_\pi$, (in that case $\eta_\alpha$ is the vector field generated by the network $\pi$ on its dynamic space $M_\alpha = \sum_\pi$), if, and only if, the submanifold $\sum_\pi$ is locally $C^2$-parametrized by the variables $q_C$, $\Phi_L$ and $t$.

Let us propose the following general procedure for finding the dynamic space and the dynamic equation for an *RLC* network $\pi$. Here, we consider the general situation when $M_\pi \subseteq \sum_\pi$.

*Theorem 5.*

Let $\pi$ be an *RLC* network such that the constitutive relation $N_\pi$ and the dynamic space $M_\pi$ of $\pi$ are the $C^1$-submanifolds of $R_\pi^{n+1}$.

If the network $\pi$ generates the vector field $\xi_\pi(\cdot)$ on $M_\pi$ then there exists a subset $\tilde{\eta}_\pi$ in $R_\pi^{2(n+1)}$ such that:

i. $\tilde{\eta}^\pi \subseteq \eta^\pi \stackrel{\Delta}{=} T(N_\pi) \cap S_{KM}$;

ii. $p_X(\eta^\pi)$ is the $C^1$-submanifold of $R_\pi^{n+1}$ (thus, $\tilde{\eta}^\pi \neq \emptyset$);

iii. $\tilde{\eta}^\pi$ is the vector field on $p_X(\tilde{\eta}^\pi)$ and the differential equation $\frac{dX}{ds} = \tilde{\eta}_\pi(X)$ on $p_X(\tilde{\eta}^\pi)$ has well-defined solutions (i.e., for each point $X \in p_X(\tilde{\eta}^\pi)$, there is a solution $X(\cdot)$ of $\frac{dX}{ds} = \tilde{\eta}^\pi(X)$ satisfying the initial condition $X(0) = X$):

iv. $\tilde{\eta}^\pi$ is not a proper subset of another subset in $\eta^\pi$ satisfying ii. and iii.

The conditions specified in i.—iv. prescribe the set $\eta^\pi$ uniquely and $\tilde{\eta}^\pi$ is exactly the vector field generated by the network $\pi$ on its dynamic space $M_\pi$:

$$\xi^\pi = \tilde{\eta}^\pi,$$

and

$$M_\pi = p_X(\tilde{\eta}^\pi).$$

*Proof.*

Let $X$ be any fixed point from $M_\pi$. Because $M_\pi$ is the $C^1$-submanifold of both $K_\pi$ and $N_\pi$, then $(X, \xi_\pi(X)) \in T(K_\pi) \cap T(N_\pi)$, and because $\xi_\pi(\cdot)$ is the vector field generated by the network $\pi$, then $(X, \xi_\pi(X)) \in S_M$. Thus, $(X, \xi_\pi(X)) \in \eta^\pi$ for each point $X \in M_\pi$ and hence, $\xi^\pi \subseteq \eta^\pi$.

The set $\xi^\pi$ satisfies the conditions specified for $\tilde{\eta}^\pi$ in i.—iii.

Let $\bar{\eta}^\pi = \tilde{\eta}^\pi$ be any subset of $R_\pi^{2(n+1)}$ satisfying i.—iii. Fix a point $X^0 \in p_X(\bar{\eta}^\pi)$. There is a solution $X(\cdot)$ of $\frac{dX}{ds} = \bar{\eta}_\pi(X)$ passing through $X^0$ at $s = 0$; $X(\cdot)$ satisfies the relation

(10) for all $s \in \mathrm{Dom}(X(\cdot))$, and hence, $X(\cdot)$ is a part of some solution of the network $\pi$. This implies that $X^0 \in M_\pi$ and $(X^0, \bar{\eta}_\pi(X^0)) = (X^0, \xi_\pi(X^0)) \in \xi^\pi$. Thus, $\bar{\eta}^\pi \subseteq \xi^\pi$.

Noting that the set $\xi^\pi$ satisfies the conditions i.—iii. which have been specified for $\tilde{\eta}^\pi$, the maximality condition iv. on $\tilde{\eta}^\pi$ yields $\tilde{\eta}^\pi = \xi^\pi$.

The following Theorem 6 gives a practical method for finding the dynamic space and the dynamic equation for a nonlinear *RLC* network. The method is valid for a very broad class of *RLC* networks; it enables also to "detect" nonholonomic constraints which appear for example in networks containing capacitor-only loops and/or inductor-only cut sets [2], [3], [13].

*Theorem 6.*

1. Let $\pi$ be an *RLC* network, which has the constitutive relation $N_\pi$ being the $C^1$-submanifold of $R_\pi^{n+1}$, and let the solutions of $\pi$ be differentiable;

2. Set $\tilde{\sum_\pi} = p_X(T(N_\pi) \cap S_{KM})$ and assume that $\tilde{\sum_\pi}$ is the $C^1$-submanifold of $R_\pi^{n+1}$, (note that there are networks $\pi$ such that $\tilde{\sum_\pi} \subset \sum_\pi$ — Example 5);

3. Define $\tilde{\eta}^\pi = T\left(\tilde{\sum_\pi}\right) \cap S_M$;

4. If the space $\tilde{\eta}^\pi$ is the $C^0$-vector field on $\tilde{\sum_\pi}$ and if the differential equation $\frac{dX}{ds} = \tilde{\eta}_\pi(X)$ on $\tilde{\sum_\pi}$ has unique solutions, then $\tilde{\sum_\pi}$ is the dynamic space of the network $\pi$ and $\tilde{\eta}^\pi$ is the vector field generated by $\pi$ on its dynamic space $\tilde{\sum_\pi}$.

*Proof.*

Note that $\tilde{\sum_\pi} \subseteq \sum_\pi$. Because each solution of the differential equation $\frac{dX}{ds} = \tilde{\eta}_\pi(X)$ on $\tilde{\sum_\pi}$ satisfies the relation (10), then each of them is a part of some solution of the network $\pi$. Thus, $\tilde{\sum_\pi} \subseteq M_\pi$.

Suppose that $\tilde{\sum_\pi} \neq M_\pi$. Then $\tilde{\sum_\pi}$ is the proper subset of $M_\pi$. Fix a point $X^0 \in M_\pi - \tilde{\sum_\pi} \subset \sum_\pi$. It follows from the definition of the dynamic space of an *RLC* network that there exists a solution $X(\cdot)$ of $\pi$ passing through $X^0$ at $s = 0$ and, by assumption, the function $X(\cdot)$ is differentiable. Thus, we have a well defined vector $\eta^0 \triangleq \left(\frac{d}{ds}X\right)(0)$ which is tangent both to $N_\pi$ an $K_\pi$ at the pont $X^0$ and by the definition of the solution of an *RLC* network, the coordinates of $(X^0, \eta^0)$ satisfy the relations specified in the Definition 16.i. of the Maxwell space $S_M$ of and *RLC* network.

From the above it follows that $(X^0, \eta^0) \in T(N_\pi) \cap S_{KM}$ and hence $X^0 \in \tilde{\sum_\pi}$. We have

reached a contradiction which implies that $\tilde{\sum_{\pi}} = M_{\pi}$. Noting that: the solutions of $\frac{dX}{ds} = \tilde{\eta}_{\pi}(X)$ are defined uniquely, each solution of $\frac{dX}{ds} = \tilde{\eta}_{\pi}(X)$ is the solution of network $\pi$ and each solution of $\pi$ satisfies the differential equation $\frac{dX}{ds} = \tilde{\eta}_{\pi}(X)$, we obtain that: the solutions of $\frac{dX}{ds} = \tilde{\eta}_{\pi}(X)$ define a flow on $\tilde{\sum_{\pi}}$ and $\tilde{\eta}^{\pi}$ is the vector field generated by the network $\pi$ on its dynamic space $\tilde{\sum_{\pi}}$.

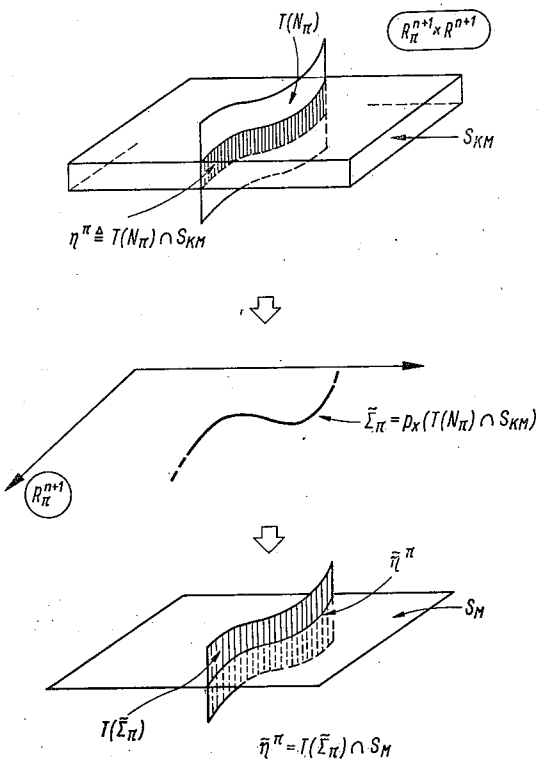



Fig. 9. The space $\tilde{\sum_{\pi}} = p_X(T(N_\pi) \cap S_{KM})$ which is the dynamic space of network $\pi$ of the Theorem 6, and the space $\eta^\pi = T(p_X(T(N_\pi) \cap S_{KM})) \cap S_M$, which is the vector field generated by the network $\pi$ of Theorem 6

The procedure described in the Theorem 6 is illustrated in Fig. 9. In the following example we use the method described in the Theorem 6.

Example 5.

Consider an autonomous *RC* network $\pi$ of Fig. 10. It consists of a capacitive loop and of a resistor connected in parallel. The space $R_x^8$ of network $\pi$ is the space of points

$$x = (q_{C_1}, q_{C_2}, v_{C_1}, v_{C_2}, v_R, i_C, i_C, i_R).$$

Let the constitutive relation of the network $\pi$ be given as the set of all points $x \in R_x^8$ whose coordinates satisfy the following system of equations:

$$v_{C_1} = g_{C_1}(q_{C_1}), v_{C_2} = g_{C_2}(q_{C_2}), i_R = g_R(v_R), \tag{14}$$

where

$g_{c_1}(\cdot)$, $g_{c_2}(\cdot)$ and $g_R(\cdot)$ are the $C^2$-functions defined on $R$.

We assume also that $g_{c_2}^{-}(\cdot)$ is the $C^2$-diffeomorphism of $R$ onto $R$ and

$$D(g_{c_2}^{-} \circ g_{c_1})q_{c_1} \neq -1, \tag{15}$$

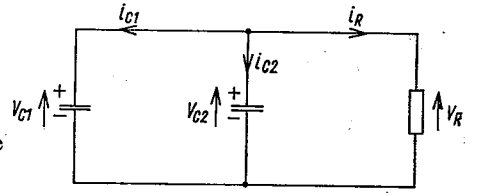



Fig. 10. An autonomous RC network containing the capacitor-only loop

for all $q_{c_1} \in R$.

The constitutive relation $N_\pi$ of network $\pi$ has the following $C^2$-parametric representation:

$$R^5 \ni (q_{c_1}, q_{c_2}, v_R, i_{c_1}, i_{c_2}) \to x = (q_{c_1}, q_{c_2}, g_{c_1}(q_{c_1}), g_{c_2}(q_{c_2}), v_R, i_{c_1}, i_{c_2}, g_R(v_R)).$$

$N_\pi$ has the structure of 5-dimensional $C^2$-submanifold of $R_x^8$.

The Kirchhoff equations yield:

$$v_{c_1} = v_{c_2} = v_R, \tag{16}$$

and

$$i_{c_1} + i_{c_2}^{\P} + i_R = 0. \tag{17}$$

From (14), (16) ahd (17) we have that $N_\pi \pitchfork K_\pi$. The space $\sum_\pi = N_\pi \cap K_\pi$ has the structure of 2-dimensional $C^2$-submanifold of $R_x^8$ with the following $C^2$-parametrization:

$$R^2 \ni (q_{c_1}, i_{c_1}) \to x = (q_{c_1}, (g_{c_2}^{-1} \circ g_{c_1})(q_{c_1}^{-}), g_{c_1}(qc_1), g_{c_1}(q_{c_1}), g_{c_1}(q_{c_1}), i_{c_1}, -$$
$$-(g_R \circ g_{c_1})(q_{c_1}) - i_{c_1}, (g_R \circ g_{c_1})(q_{c_1})). \tag{18}$$

Note that $\sum_\pi$ is not the dynamic space of the considered network $\pi$ [2], [3], [13].

Let us now proceed as it has been described in the Theorem 6. The constrains defining the space

$$T(N_\pi) \cap S_{KM} = \left( \bigcup_{x \in \Sigma_\pi} \left( x, T_x\left(\sum_\pi\right)\right)\right) \cap S_M$$

in $R_x^8 \times R^8$ are given by:

$$\left.\begin{aligned} &v_{c_1} - g_{c_1}(q_{c_1}) = 0, \\ &v_{c_2} - g_{c_2}(q_{c_2}) = 0, \\ &i_R - g_R(v_R) = 0, \\ &i_{c_1} + i_{c_2} + i_R = 0, \\ &v_{c_1} - v_{c_2} = 0, \\ &v_R - v_{c_2} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

(constraints for $\sum_\pi$, $x \in R_x^8$),

and

$$\left.\begin{aligned}
&\eta^3-(Dg_{C_1})q_{C_1}\cdot\eta^1=0,\\
&\eta^4-(Dg_{C_2})q_{C_2}\cdot\eta^2=0,\\
&\eta^8-(Dg_R)v_R\cdot\eta^5=0,\\
&\eta^6+\eta^7+\eta^8=0,\\
&\eta^3-\eta^4=0,\\
&\eta^5-\eta^4=0,
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

(constraints for $T_x(\sum_\pi)$ $x\in\sum_\pi$, $q_{C_1}=p_{q_{C_1}}(x)$, $q_{C_2}=p_{q_{C_2}}(x)$, $v_R=p_{v_R}(x)$, $\eta\in R^8$),

and

$$\left.\begin{aligned}
&i_{C_1}-\eta^1=0,\\
&i_{C_2}-\eta^2=0,
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

(constraints for $S_M$, $x\in R^8_x$, $\eta\in R^8$), and by the assumption (15), the relations (19)—(21) yield the following additional constraint for the coordinates in $\sum_\pi$:

$$i_{C_1}=-\frac{g_R\circ g_{C_1}(q_{C_1})}{1+D(g_{C_2}^{-1}\circ g_{C_1})_{q_{C_1}}}.$$

The set $\tilde{\sum_\pi}\overset{\Delta}{=}p_x(T(N_\pi)\cap S_{KM})$ has the structure of 1-dimensional $C^1$-submanifold of $R^8_X$ and $\tilde{\sum_\pi}$ has the following $C^1$-parametric representation:

$$x=F(q_{C_1}):\ (q_{C_1}\in R)\quad\begin{cases}
q_{C_1}=q_{C_1},\\
q_{C_2}=g_{C_2}^{-1}\circ g_{C_1}(q_{C_1}),\\
v_{C_1}=g_{C_1}(q_{C_1}),\\
v_{C_2}=g_{C_1}(q_{C_1}),\\
v_R=g_{C_1}(q_{C_1}),\\
i_{C_1}=-\dfrac{g_R\circ g_{C_1}(q_{C_1})}{1+D(g_{C_2}^{-1}\circ g_{C_1})_{q_{C_1}}},\\
i_{C_2}=-\dfrac{D(g_{C_2}^{-1}\circ g_{C_1})q_{C_1}}{1+D(g_{C_2}^{-1}\circ g_{C_1})q_{C_1}}\cdot g_R\circ g_{C_1}(q_{C_1}),\\
i_R=g_R\circ g_{C_1}(q_{C_1}).
\end{cases}$$

Finally, $\dot\eta^\pi=T(\tilde{\sum_\pi})\cap S_M$ is the $C^0$-vector field on $\tilde{\sum_\pi}$,

$$\tilde\eta_\pi\colon\ \eta_\pi(\cdot)\colon\ \tilde{\sum_\pi}\ni x\to$$

$$-(DF)_{p_{q_{C_1}}}(x)\cdot\frac{(g_R\circ g_{C_1})(p_{q_{C_1}}(x))}{1+D(g_{C_2}^{-1}\circ g_{C_1})p_{q_{C_1}}(x)},$$

and the solutions of $\frac{dX}{ds}=\tilde\eta_\pi(X)$ are defined uniquely.

From the Definition 13 of the solution of an *RLC* network and from the parametric description (18) of the submanifold $\sum_\pi$ it follows that the solutions of the considered

network $\pi$ are differentiable functions of $t$. Thus, from the Theorem 6 it follows that $\tilde{\sum_{\pi}}$ is the dynamic space of the considered network $\pi$ and $\tilde{\eta}^{\pi} = T(\tilde{\sum_{\pi}}) \cap S_M$ is the vector field generated by $\pi$ on $\tilde{\sum_{\pi}}$.

## 5. CONCLUDING REMARKS

In the paper, the problem of finding dynamic spaces and equations of motion (the equations describing the dynamics) for nonlinear *RLC* networks has been considered.

The mathematical method which has been explored is a geometric one. The dynamic space of an *RLC* network is (by assumption) a differentiable submanifold (a hypersurface in $R^n$), and the solutions of an *RLC* network are given by the flow generated by a vector field on the dynamic space of the network.

Theorems 5 and 6, which have been proposed by the author, are the most general theorems concerning description of the dynamic spaces of *RLC* networks and the formulation of the equations of motion for these networks.

Theorem 5 gives the criteria, which enable to distinguish, in a unique manner, the set $\xi^{\pi}$ (the vector field generated by an *RLC* network $\pi$) among all other subsets of the space $R_{\pi}^{2(n+1)}$ (the extended space of network $\pi$), for each *RLC* network, which generates the vector field on its dynamic space (the constitutive relation of the network is, by assumption, a differentiable submanifold).

Theorem 6 is constructive in its character, because it encloses a general algorithm for finding the dynamic space $M_{\pi}$ of an *RLC* network $\pi$ and the vector field $\xi^{\pi}$ generated by *RLC* network $\pi$ on $M_{\pi}$. The expressions

$$M_{\pi} = p_x(T(N_{\pi}) \cap S_{KM})$$

and

$$\xi^{\pi} = T(p_x(T(N_{\pi}) \cap S_{KM})) \cap S_M$$

provide the most general formulas for $M_{\pi}$ and $\xi^{\pi}$. The Theorem 6 concerns a very broad class of nonlinear *RLC* networks; for example, it can be applied to *RLC* networks containing capacitor-only loops and/or inductor-only cut sets.

In contrast to other theorems of Chapter 4 (for example, the Theorems 2 and 3). Theorem 5 as well as Theorem 6 have been formulated in the coordinate free manner: they do not refer to any special coordinate systems on the submanifolds. Thus, Theorems 5 and 6 have topological (global) character. In the considerations in Chapters 3 and 4, vector formalism has been explored (the notion of the tangent bundle is of basic importance). An alternative approach to the problems considered in this paper has been presented in the references [2], [4]—[6] and [9] where the differential vector forms have been explored; as a result, the description presented in the specified references includes physical interpretation: the vector forms, which have been defined there, describe some energetic relations (the flow of energy) in the networks. However, the description given in the above references is more complicated, it is not intrinsic [13] and, on the other hand, it concerns smaller class of *RLC* networks.

The vector formalism has been used also in [13], where the constrained differential equations (on manifolds) have been explored. However, the class of networks considered in [13] is not so broad as it is in this paper.

Because geometric method is one of the basic mathematical tools in the theory of dynamical systems [24], one can expect that the geometric approach to electrical networks will help in the prospective development of the methods of theoretical dynamics in the analysis of electrical networks. One can consider the definition of an *RLC* network which has been introduced in this paper as too wide. In fact, it comprises networks which are not *RLC* networks in the classical sense. Perhaps the term "*lumped electrical network*" would be more appropriate.

To avoid terminological problems, one can proceed in the following way. Define a lumped electrical network $\pi$ as a pair $(\mathcal{G}, N)$, where $\mathcal{G}$ is a graph (with no isolates nodes and self — loops); each of $b$ branches of $\mathcal{G}$ is assigned a quadruple $(q, \Phi, v, i)$ of variables and $N$ is a subset in the space $R^{4b} \times R_t$, where $R^{4b}$ is the space of electrical variables of the network $\pi$. The set $N$ is called the constitutive relation of the network $\pi$. This definition includes also networks containing memristors [14] (this is true partly with the reference to our definition of an *RLC* network). And then, one can easily reformulate the basic theorems on the dynamic spaces and the equations of motion (contained in Chapter 4) for this extended class of networks.

This paper is the part of the author's Ph.D. dissertation [31]. For further results concerning the subject see the reference [32].

## REFERENCES


1. R. K. Brayton, J. K. Moser: *A theory of nonlinear RLC networks.* I, II, Qt. Appl. Math. 1964, vol. 22, no 1 and no 2, pp. 1—33 and 81—104
2. S. Smale: *On the mathematical foundations of electrical circuit theory.* J. Diff. Geom., 1972, vol .7, pp. 193—210
3. C. A. Desoer, F. F. Wu: *Trajectories of nonlinearRLC networks: a geometric approach.* IEEE Trans. Circuit Theory, 1972, vol. CT-19, no 6, pp. 562—571.
4. T. Matsumoto: *On the dynamics of electrical networks.* J. Diff. Equations, 1976, vol. 21, no 1, pp. 179—196
5. T. Matsumoto: *On several geometric aspects of nonlinear networks.* J. Franklin Inst., 1976, vol. 301, pp. 203—225
6. T. Matsumoto, L. O. Chua, H. Kawakami and S. Ichiraku: *Geometric properties of dynamic nonlinear networks: transversality, local-solvability and eventual passivity.* IEEE Trans. Circuits and Systems, 1981, vol. CAS-28, no 5, pp. 406—428
7. A. Szatkowski: *On the dynamic spaces and on the equations of motion of non-linear RLC networks.* Int. J. Cir. Theor. Appl., 1982, vol. 10, no 2, pp. 99—122
8. A. Szatkowski: *One the dynamics of non-linear RLC networks from a geometric point of view.* Int. J. Cir. Theor. Appl., 1983, vol. 11, no 2, pp. 117—129
9. S. Ichiraku: *Nonlinear time-varying circuits: transversality and local-solvability.* IEEE Trans. Circuits and Syste[illegible]1983, vol. CAS-30, no 3, pp. 169—172
10. S. Ichiraku: *On the transversality conditions in electrical circuits.* Yokohama Math. J., 1977, vol. 25, no 1, pp. 85—89
11. S. Ichiraku: *On singular points of electrical circuits.* Yokohama Math. J., 1978, vol. 26, no 2, pp. 151—156

12. S. Ichiraku: *Connecting electrical networks: transversality and well-posedness.* Yokohama Math. J., 1979, vol. 27, no 2, pp. 111—126
13. B. Haggman, P. R. Bryant: *Solutions of singular constrained differential equations: a generalization of circuits containing capacitor-only loops and inductor-only cutsets.* IEEE Trans. Circuits and Systems, 1984, vol. CAS-31, no 12, pp. 1015—1029
14. L. O. Chua: *Device modeling via basic nonlinear circuit elements.* IEEE Trans. Circuits and Systems, 1982, vol. CAS-27, no 11, pp. 1014—1044
15. L. O. Chua, E. W. Szeto: *High-order non-linear circuits elements: circuit-theoretic properties.* Int. J. Cir. Theor. Appl., 1983, vol. 11, pp. 187—206
16. L O. Chua, E. W. Szeto: *State-space theory of nonlinear two-terminal higher-order elements,* J. Franklin Inst., 1983, vol. 316, no 1, pp. 1—50
17. L. O. Chua: *Dynamic nonlinear networks: state-of-the art.* IEEE Trans. Circuits and Systems 1980, vol. CAS-27, no 11, pp. 1059—1087
18. P. Slepian: *Mathematical Foundations of Network Analysis.* Springer-Verlag, New York, 1968
19. S. Seshu: *Linear Graphs and Electrical Networks.* Addison-Wesley. Inc., London, 1961
20. L. Auslander, R.E. MacKenzie: *Rozmaitości różniczkowalne* (Differentiable Manifolds). Warszawa: PWN, 1963
21. K. Radziszewski: *Wstęp do współczesnej geometrii różniczkowej* (Introduction to Modern Differential Geometry). Warszawa: PWN, 1973
22. M. W. Hirsch: *Differential Topology.* Springer-Verlag, New York, 1976
23. R. Sulanke, P. Wintgen: *Geometria różniczkowa i teoria wiązek* (Differential Geometry and Bundles Theory). Warszawa: PWN, 1977
24. W. Szlenk: *Wstęp do teorii gładkich układów dynamicznych.* (Introduction to the Theory of Smooth Dynamical Systems). Warszawa: PWN, 1982
25. T. Thom: *Stabilité structurelle et morphogénèse.* W. A. Benjamin, Inc., London, 1972
26. W. I. Arnold: *Metody matematyczne mechaniki klasycznej.* (Mathematical Methods of Classi, cal Mechanics). Warszawa: PWN, 1981
27. H. Flanders: *Differential Forms: with Applications to the Physical Sciences.* Academic Press-New York, 1963
28. K. Maurin: *Analiza, części I i II.* (Analysis, parts I and II). Warszawa: PWN, 1973 i 1971
29. R. Sikorski: *Rachunek różniczkowy i całkowy.* (Differential and Integral Calculus). Warszawa: PWN, 1969.
30. N. Deo: *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science.* Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J., 1974
31. A. Szatkowski: *Metody dynamiki teoretycznej w analizie nieliniowych układów RLC.* (Methods of theoretical dynamics in the analysis of nonlinear RLC networks). Ph. D. thesis, Gdańsk, 1986
32. A. Szatkowski: O równaniach ruchu systemów dynamicznych. (On the equation of motion of dynamic systems). Proc. XI SPETO, pp 375—386, Gliwice, 1988

A. SZATKOWSKI

## METODY GEOMETRYCZNE W OPISIE NIELINIOWYCH UKŁADÓW RLC: PRZESTRZENIE I RÓWNANIA DYNAMICZNE UKŁADÓW RLC

Streszczenie

Wprowadzono szereg nowych pojęć użytecznych w opisie nieliniowych, zmiennych w czasie układów elektrycznych zbudowanych z rezystorów, elementów indukcyjnych i pojemnościowych (układów *RLC*). Podano twierdzenia charakteryzujące pola wektorowe generowane przez układy *RLC* oraz zaproponowano metodę znajdowania przestrzeni i równań dynamicznych nieliniowych układów *RLC*. W rozważaniach wykorzystano metody geometrii różniczkowej.

A. SZATKOWSKI

## MÉTHODES GEOMETRIQUES DANS LA DESCRIPTION DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES RLC: ESPACES ET EQUATIONS DYNAMIQUES DES SYSTÈMES RLC

Résumé

On a introduit une suite de nouvelles notions utiles dans la description de non linéaires, variables dans le temps, systèmes électriques composés de résistances, d'éléments inductifs et capacitifs (des systèmes RLC). On a donné des théorèmes caractérisant les champs vectoriels générés par les systèmes RLC et on a proposé la méthode de désignation de l'espace et des èquations dynamiques des systèmes non linéaires RLC. Dans les considérations on s'est servi des méthodes de la géometrie différentielle.

A. SZATKOWSKI

## GEOMETRISCHE METHODEN FÜR DIE BESCHREIBUNG DER NICHTLINEAREN RLC-SCHALTUNGEN: RÄUME UND DYNAMISCHE GLEICHUNGEN DER RLC-SCHALTUNGEN

Zusammenfassung

Es wurden neue Begriffe eingeführt, die für die Beschreibung der aus Widerständen, Induktivitäten und Kondensatoren gebauten nichtlinearen, zeitveränderlichen, elektrischen Schaltungen — der RLC-Schaltungen — sehr nützlich sind. Theoreme wurden angegeben, die mittels RLC-Schaltungen generierte Vektorenfelder charakterisieren. Eine Bestimmungsmethode für Räume und dynamische Gleichungen der nichtlinearen RLC-Schaltungen wurde vorgeschlagen. Bei den Erwägungen wurden Methoden differentialer Geometrie genutzt.

А. ШАТКОВСКИ

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ RLC ЦЕПЕЙ: ПРОСТРАНСТВА И ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ RLC ЦЕПЕЙ

Резюме

Введены новые понятия полезные для описания нелинейных неавтономных электрических цепей составленных из резисторов, индуктивных и ёмкостных элементов. Представлены теоремы касающиеся векторных полей генерированных RLC цепями. Предложен метод нахождения пространств и динамических уравнений нелинейных RLC цепей. В рассуждениях использованы методы дифференциальной геометрии.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1988, 34, z. 2, ss. 325–338

537-962:517.52

# Alternative method of finite-difference time-domain as applied to the analysis of two-dimensional microwave circuits

WOJCIECH K. GWAREK

*Instytut Radioelektroniki, Politechnika Warszawska*

*Received 1987.02.27*
*Authorized 1987.07.24*

Several improvements in the finite difference time domain method [7] of two-dimensional circuit analysis are discussed. The Fourier transform is introduced for fast calculations of frequency dependent circuit parameters and applications to both deterministic and eigenvalue problems are described. A possibility to analyze a lossy circuit is discussed. The proposed version of finite difference time domain (FD-TD) method is compared to commonly used methods like the contour integral (CI) method [2] and the transmission line matrix (TLM) method [3]. It is shown that the FD-TD method in its improved form becomes a strong competitor to these methods and is superior to them in many applications.

## 1. INTRODUCTION

A two-dimensional circuit as understood here is a circuit in which the fields may be characterized by a scalar function

$$U(x, y, z, t) = V(x, y, t)f(z), \tag{1}$$

where

$f(z)$ is a known one-dimensional eigenfunction

$V(x, y)$ obeys a two-dimensional wave equation

$$\nabla_{xy}^2 V(x, y, t) - \beta_t^2 \frac{\partial^2 V(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \tag{2}$$

with proper boundary conditions.

There are many microwave circuits characterised accurately or approximately by the equation (2). As examples we may quote strip-line or microstrip junctions or resonators and also some types of waveguide discontinuities. That is why the solution of this equation was investigated by many researchers. If the boundary is of complicated shape only numerical methods can be used. These methods can be divided in two groups. The methods of the first group require a certain amount of analytical proprocessing before the particular problem may be solved by a computer. As example we may quote the Green's function method supported by segmentation techniques [1]. Another group of methods assumes that the analytical preprocessing should be practically nonexistent and that it is up to the computer to do the entire job. In this group we find the contour integral

method [2], the transmission-line matrix method [3] and the finite-difference method which will be the subject of this paper.

The finite difference time domain method (FD-TD) was first introduced by Yee [4] and since then applied by many authors. These applications, however, concentrated in the domain of scattering [5] and accelerator physics [6]. Application of the FD-TD method to microwave ciruit analysis has so far attracted little attention.

The paper described several improvements of the FD-TD method presented in [7]. A pulse excitation by a matched source is introduced for fast calculations of frequency dependent two-dimensional circuits characteristics. Application of the method to both deterministic and eigenvalue problems is described and a possibility of analysis of lossy circuits is discussed.

In the FD-TD method for 2-D circuits analysis instead of solving the second order equation (2) a pair of the first order equations is solved.

$$\nabla V(x, y, t) = -L_s \frac{\partial \boldsymbol{J}(x, y, t)}{\partial t} \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J}(x, y, t) = -C_s \frac{\partial V(x, y, t)}{\partial t}. \tag{4}$$

In the fundamental mode of propagation (with $f(z) = \text{const}$ in (1)) variables and constants in the equations (3) and (4) have the following interpretations: $V$ — voltage, $\boldsymbol{J}$ — surface current density, $C_s$ — capacitance of a unit square of the circuit, $L_s$ — inductance of an arbitrary square of the circuit. The $xy$ — plane is divided into square meshes of the size $a$. The coordinates of the middle of a mesh in the $k$-th row and the l-th column are denoted by $x_l$ and $y_k$''. Replacing the differentials in (3) and (4) by finite differences $\Delta t$ and $a$ yields

$$J_x\left(x_l+\frac{a}{2}, y_k, t_0+\frac{\Delta t}{2}\right) = J_x\left(x_l+\frac{a}{2}, y_k, t_0-\frac{\Delta t}{2}\right) - \\ - \left(V(x_l+a, y_k, t_0) - V(x_l, y_k, t_0)\right)\frac{\Delta t}{L_s a} \tag{5}$$

$$J_y\left(x_l, y_k+\frac{a}{2}, t_0+\frac{\Delta t}{2}\right) = J_y\left(x_l, y_k+\frac{a}{2}, t_0-\frac{\Delta t}{2}\right) - \\ - \left(V(x_l, y_k+a, t_0) - V(x_l, y_k, t_0)\right)\frac{t}{L_s a}, \tag{6}$$

$$V(x_l, y_k, t_0+\Delta t) = V(x_l, y_k, t_0) - \left(J_x\left(x_l+\frac{a}{2}, y_k, t_0+\frac{\Delta t}{2}\right) - \right. \\ - J_x\left(x_l-\frac{a}{2}, y_k, t_0+\frac{\Delta t}{2}\right) + J_y\left(x_l, y_k+\frac{a}{2}, t_0+\right. \\ \left.\left. + \frac{\Delta t}{2}\right) - J_y\left(x_l, y_k-\frac{a}{2}, t_0+\frac{\Delta t}{2}\right)\right)\frac{\Delta t}{C_s a}. \tag{7}$$

Consecutive calculations of (5), (6) and (7) simulate the process of wave propagation in the circuit. As it was shown in [7] it is possible to introduce simple relations to account for the boundary conditions.

## 2. PULSE EXCITATION

In the approach used in [7] the circuit with zero initial values of $V(x, y, t)$ and $\boldsymbol{J}(x, y, t)$ was excited by a sinusoidal source of a frequency $w$. Circuit parameters at that frequency were obtained from the steady state achieved in the circuit after a sufficiently long time. This caused that the time for computing a wide-band frequency response was very long.

The equations (5), (6) and (7) show that all the operations in the FD-TD algorithm are linear. This it is possible to use the Fourier analysis to obtain the circuit frequency response from the transient response. However, we need a proof that this approach does not sacrifice the accuracy of the method.

Let us consider a relation between a voltage at the input $V_0$ and a voltage at the output $V_l$. We may write

$$V_l(t) = \boldsymbol{L}(V_0(t)) = L'(V_0(t)) + \Delta\boldsymbol{L}(V_0(t)), \tag{8}$$

where

$\boldsymbol{L}$ — a linear operator of the FD-TD algorithm

$\boldsymbol{L}'$ — an operator of the transformation between input and output of the original circuit which is linear due to the linearity of Maxwell's equations

$\Delta\boldsymbol{L}$ — an operator describing the error of the FD-TD method which has to be linear due to the linearity of the two former operators.

Let us write the Fourier transform of the equation (8)

$$V_l(\omega) = T(\omega)V_0(\omega) = (T'(\omega) + \Delta T(\omega))V_0(\omega) \tag{9}$$

where

$V_0(\omega)$, $V_l(\omega)$ — The Fourier transforms of $V_0(t)$, $V_l(t)$

$T(\omega)$, $T'(\omega)$, $\Delta T(\omega)$ — describe the operators $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{L}'$, $\Delta\boldsymbol{L}$ in the frequency domain, which yields:

$$\frac{V_l}{V_0}\frac{(\omega)}{(\omega)} = T(\omega) = T'(\omega) + \Delta T(\omega). \tag{10}$$

Equation (14) suggests that for any particular frequency $\omega$ the error of the FD-TD method does not depend on the shape of the input signal and that the function $V_0(t)$ may be chosen to be the most convenient for use in the computer algorithm. In most cases the best choice is a function close to the Dirac function $\delta_0$. Since $V(t)$ in the FD-TD algorithm is defined only at the instants $t = n\,\Delta t$ we put:

$$V_0(t) = \begin{matrix} 1 \text{ for } t = 0 \\ 0 \text{ for } t = n\Delta t; \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{matrix} \tag{11}$$

For this excitation $V_0(\omega) = \text{const}$ for all frequencies obeying the condition

$$|\omega| \ll \frac{1}{\Delta t}. \tag{12}$$

The frequencies not obeying condition (12) are not considered anyway due to the unacceptable in the finite difference approximation.

To check the idea the pulse excitation of the form (11) is applied to the circuits previously analysed in [7] with the sinusoidal excitation. The results are virtually identical.

The obvious profit of the pulse excitation is displayed in the computing time. With the pulse excitation, a wide-band frequency characteristic is computed in a time which is almost the same as that needed for calculations at one frequency when the sinusoidal excitation was used.

## 3. DETERMINISTIC AND EIGENVALUE PROBLEMS

The FD-TD method models the energy flow in the circuit. Thus it is well suited to deterministic problems in which it is assumed that the energy is pumped into the curcuit through a part of the boundary. The eigenvalue problems can be solved indirectly through the deterministic solutions. Both will be shown on examples.

As an example of a deterministic problem let us consider a circular resonator connected to two uniform transmission lines (Fig. 1). It is assumed that the widths of the transmission lines are much smaller than the wavelength and thus only the dominant width mode propagates through the input and the output. The area of the circuit is divided into square meshes. The size of a mesh is $a = 1/23$ the of circle's diameter.

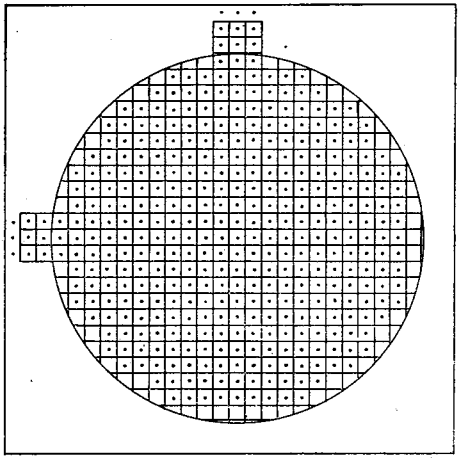


Fig. 1. The circuit considered in the example of solution of a deterministic problem divided into a set of meshes as assumed for calculations

To calculate the $S$ matrix of the circuit a matched source and a matched load should be modelled in the algorithm. This is obtained by using an equivalent circuit of the input which is shown in Fig. 2. The input line contains three rows of meshes with three identical sources connected to them. In each row the values of the voltage and the current at the input are calculated as follows:

$$I_1\left(t_0+\frac{\Delta t}{2}\right)=I_1\left(t_0-\frac{\Delta t}{2}\right)-\left(V_2(t_0)-V_1(t_0)\right)\frac{\Delta t}{L'} \tag{13}$$

$$V_1(t_0+\Delta t)=V_0(t_0+\Delta t)-I_1\left(t_0+\frac{\Delta t}{2}\right)Z_0 \tag{14}$$

where:

$$Z_0=\sqrt{\frac{L}{C}};\quad L'=\frac{L}{2}+L''=\frac{L}{2}+\frac{\Delta t\lambda}{2aT}L$$

The meaning of the voltages and the currents used in (13) and (14) is explained in Fig. 2a. The output is modelled in a similar way but with no exciting source, that is:

$$I_{n-1}\left(t_0+\frac{\Delta t}{2}\right)=I_{n-1}\left(t_0-\frac{\Delta t}{2}\right)+\left(V_{n-1}(t_0)-V_n(t_0)\right)\frac{\Delta t}{L'} \tag{15}$$

$$V_n(t_0+\Delta t)=I_{n-1}\left(t_0+\frac{\Delta t}{2}\right)Z_0. \tag{16}$$

The output model is shown in Fig. 2b. The additional inductance $L''$ is introduced as a correction element to lower the matching errors caused by the fact that in the FD-TD

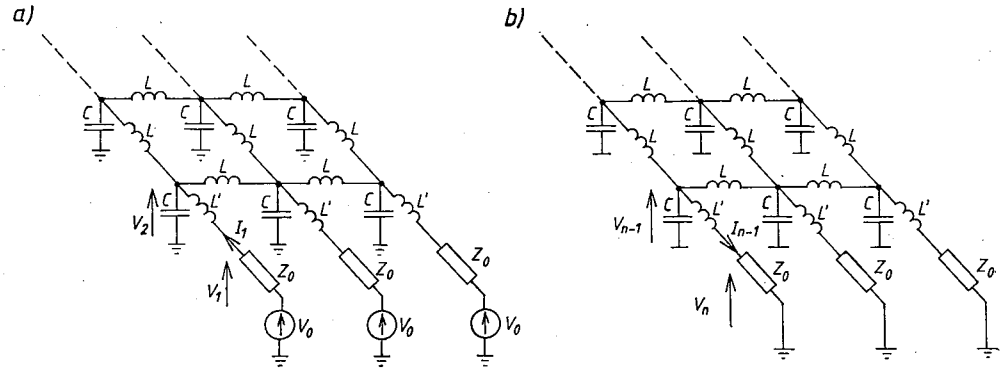



Fig. 2. The equivalent lumped circuit of the input (a) and the output (b) of the circuit of Fig. 1

algorithm the voltage is defined at the points of time and space different then the points where the current is defined. Because of that it is also necessary to introduce some correction terms in the formulas for the $S$ matrix elements. Let us assume that $V_0(\omega)$, $V_1(\omega)$ ... are the complex amplitudes calculated by Fourier transformation of $V_0(t)$, $V_1(t)$ ... and $I_1(\omega)$, $I_2(\omega)$ ... are the complex amplitudes calculated by Fourier transformation of $I_1\left(t-\frac{\Delta t}{2}\right)$, $I_2\left(t-\frac{\Delta t}{2}\right)$ ... Resolving the circuit equations at the input and at the output we obtain:

$$S_{21}=\frac{2V_n(\omega)\cos\Phi}{V_1(\omega)}e^{-i\Phi} \tag{17}$$

$$S_{11}=\frac{Z_{in}-Z_0}{Z_{in}-Z_0} \quad \text{with} \quad Z_{in}=\frac{V_1(\omega)}{I_1(\omega)}e^{-i\Phi}-j\omega L'' \tag{18}$$

where

$\Phi=\omega\Delta t/2$.

Fig. 3 shows the calculated $|S_{21}|$ of the circuit of Fig. 1 as a function of the normalized frequency. The frequency is assumed to be unity when the wavelength equals the circle's diameter. When the described algorithm is implemented in Pascal on an IBM PC XT computer (with 8087 coprocessor and 8 Mhz clock) The time of computing the S matrix parameters in a wide frequency band takes about 30 min (2000 interations).

Let us now solve the eigenvalue problem of the same circular resonator. The consi-

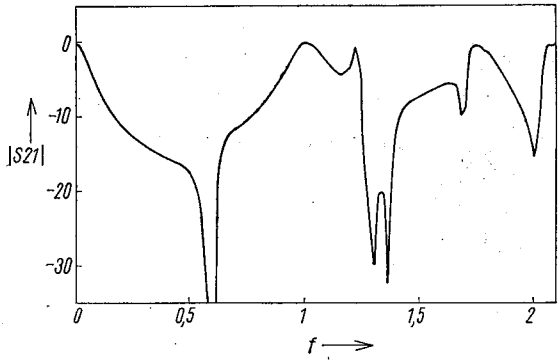



Fig. 3. $|S_{21}|$ of the circuit of Fig. 1 calculated by the presented method

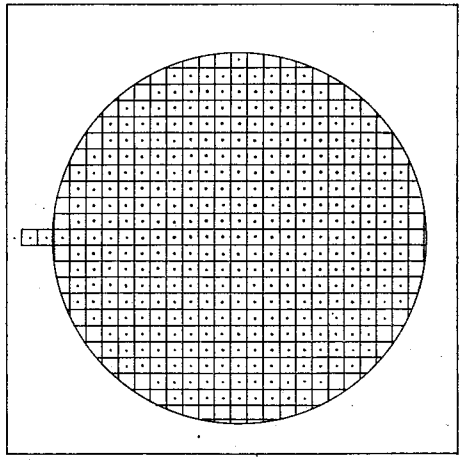


Fig. 4. The circuit considered in the calculations of eigenvalues of a circular resonator

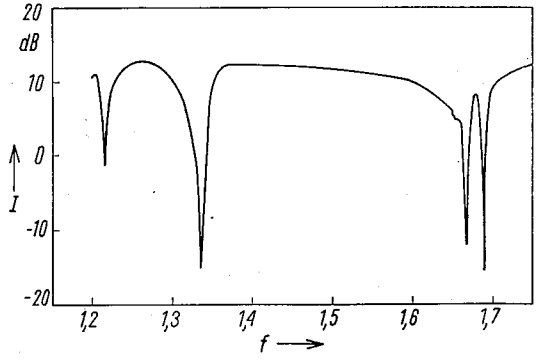



Fig. 5. Current $I_T$ at the junction of the input line and the resonator of Fig. 4. The minima indicate the consecutive eigenfrequencies

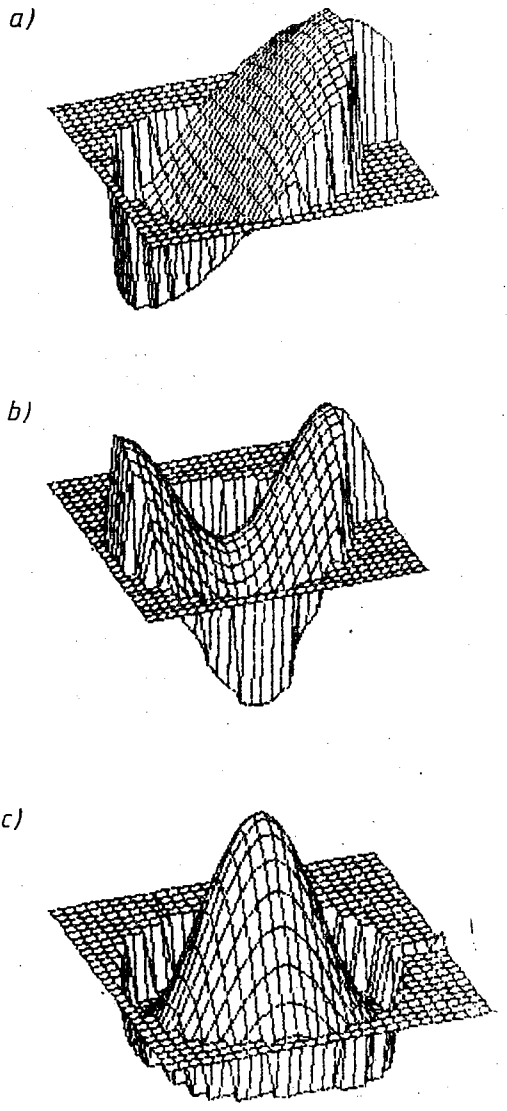



Fig. 6. Three-dimensional graph of the $V(x, y)$ function in the circuit of Fig. 4 excited by a sinusoidal source of the frequency a) $f_{11}$, b) $f_{21}$, c) $f_{01}$

dered circuit is modified to the form shown in Fig. 4 and, as before, is excited by a pulse source. Now we calculate the current $I_T$ flowing through the junction of the line and the resonator. The minima of the current indicate the circuit eigenfrequencies. Fig. 5 shows a fragment of the $T_T(\omega)$ curve indicating four eigenfrequencies. Table 1 compares the obtained eigenfrequencies with those calculated analytically for a circular resonator. A certain part of the error is due to a dispersion which can be accounted for (see Chapter *V*) and, thus, lowering the method's error. The obtained results are very good if we consider that the assumed net of meshes was relatively rough (for $f = 2$, $\lambda/a = 11.5$). They confirm the effectivity of the boundary approximation described in [7].

When the eigenfrequencies are known, each eigenfunction may be calculated by exciting the circuit of Fig. 4 with a sinusoidal source at a particular eigenfrequency. Fig. 6 shows the functions $V(x, y)$ obtained with the sinusoidal drive at the frequencies $f_{11}$, $f_{21}$ and $f_{01}$. The familiar patterns of the corresponding modes are easily recognizable.

## 4. LOSSY CIRCUITS

The equations (5), (6) and (7) correspond to an equivalent lumped elements model compased of series inductances $L = L_s$ and parallel capacitances $C = a^2 C_s$ [7]. When the circuit is lossy the lumped-element model takes the form pressented in Fig. 7 where $G$ represents dielectric losses and is calculated as

$$G = C\frac{Im(\varepsilon)}{Re(\varepsilon)}, \tag{19}$$

where

$\varepsilon$ is the complex permittivity of the dielectric.

In Fig. 7 R represents the active power losses and is equal to the resistance per square

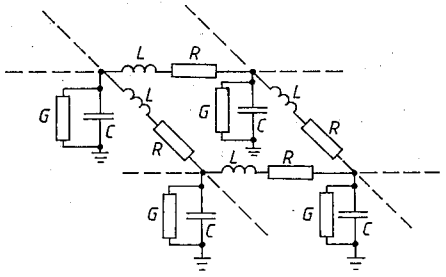



Fig. 7. Lumped circuit equivalent to a segment of a lossy two-dimensional circuit

of the metal sheet multiplied by two (since the upper and the lower sheet contribute to the losses). Losses in the considered model cause that the equations (5) and (7) need to be modified to:

$$J_x\left(x_l+\frac{a}{2}, y_k, t_0+\frac{\Delta t}{2}\right) = J_x\left(x_l+\frac{a}{2}, y_k, t_0-\frac{\Delta t}{2}\right) -$$

$$-\left(V(x_l+a, y_k, t_0)-V(x_l, y_k, t_0)+R_s a J_x\left(x_l+\frac{a}{2}, y_k, t_0-\frac{\Delta t}{2}\right)\right)\frac{\Delta t}{a\left(L_s+\frac{R_s\Delta t}{2}\right)} \tag{20}$$

$$V(x_l, y_k, t_0+\Delta t) = V(x_l, y_k, t_0)-\left(J_x\left(x_l+\frac{a}{2}, y_k, t_0+\frac{\Delta t}{2}\right)-\right.$$

$$-J_x\left(x_l-\frac{a}{2}, y_k, t_0+\frac{\Delta t}{2}\right)+J_y\left(x_l, y_k+\frac{a}{2}, t_0+\frac{\Delta t}{2}\right)-J_y\left(x_l, y_k-\frac{a}{2}, t_0+\frac{\Delta t}{2}\right)+$$
$$-aG_sV(x_l, y_k, t_0)\Bigg)\frac{\Delta t}{a\left(C_s+\frac{G_s\Delta t}{2}\right)} \tag{21}$$

with $G_s = G/a^2$; $R_s = R$.

These are then used to simulate the process of wave propagation in a lossy circuit.

## 5. COMPARISON WITH OTHER METHODS

As it was pointed out in the introduction there are many numerical methods of field analysis, but to make a comparative evaluation of of the proposed method we can limit our considerations to the methods which can be apolied to a similar class of problems and under similar assumptions. If we assume that the method has to produce a versatile computer algorithm capable of solving an arbitrarily shaped circuit without analytical preprocessing (with user's involvement reduced to defining the circuit's shape) two met-

Table 1

**Comparison of eigenfrequencies of a circular resonator calculated analytically and numerically**

| Mode | eigenfrequency calculated analytically | eigenfrequency calculated numerically | error [%] |
|---|---|---|---|
| 11 | 0.58606 | 0.5864 | −0.06 |
| 21 | 0.97219 | 0.9711 | −0.11 |
| 01 | 1.21967 | 1.2189 | −0.60 |
| 31 | 1.3373 | 1.3356 | −0.12 |
| 41 | 1.6926 | 1.6882 | −0.26 |
| 12 | 1.6970 | 1.6953 | −0.10 |
| 51 | 2.0421 | 2.0356 | −1.32 |

hods remain in the competition beside the FD-TD method; these are: contour integral (CI) method [2] and the transmission-line matrix method [3].

In the CI method the circuit border is divided into a set of N border elements. Weber's solution for cylindrical waves of a particular frequency $\omega$ permits to formulate a set of $N$ complex linear equations with $N$ complex unknowns described by a $N \times N$ complex matrix. For example to approximate the boundary of Fig. 1 with a similar accuracy we would need about $N = 70$ boundary elements. The time needed to solve the set of linear equations is comparable with that needed for inversion of such a matrix which, in the considered example, takes about 7 min in Fortran on an IBM PC XT computer (with 8087 coprocessor and 8 Mhz clock). Comparing this time to the results presented in Chapter III we find that in the time needed for wide band calculations by the FD-TD method only results for few chosen frequencies can be obtained by the CI method. It has to be pointed out that the circuit in the presented example having a circular shape has a small ratio of the contour length to the surface which is advantageous for the CI method.

An advantage of the CI method is the possibility of using boundary elements of various length while it is difficult to use the FD-TD method with varying mesh size. On the other hand, there are drawbecks. A very important one is that its applicability is restricted to homogeneous circuits. Another one is related to numerical techniques. Operations on large matrices are sensible to the round-off errors of computer arithmetics. This kind of operation typically requires a computer arithmetics of double precision which uses more computer memory and in some cases can be difficult to implement on a personal computer.

The FD-TD method and the transmission-line matrix (TLM) method [3], [9] are close to each other in many aspects. They both use a net of square or rectangular meshes and both consider a pulse propagation in the net (although the algorithm for simulating the pulse propagation is different). To the author's knowledge the TLM method was not yet applied to the $S$ matrix calculations by modelling the circuit with matched input and output but such an approach seems straightforward and the range of possible applications of the TLM method seems as wide as that of the FD-TD method.

Similarities of both methods permit a direct comparison between them. To compare the two methods four aspects will be concerned.

### *A. Computer memory*

When a net of identical square meshes is concerned and the medium is assumed to be homogeneous the FD-TD method requires the strorage space for four real numbers per node (1-voltage, 2-current components, 1-for circuit description) while the TLM method requires five real numbers per node. When each mesh is equiped with specific permittivity and permeability the total number is brought to six per mesh fo FD-TD method and seven per mesh for TLM method.

### *B. Time of computing*

The number of required iterations is similar in both methods if a circuit is analysed using the same mesh size. Thus the computing time is mostly affected by the number of routine operations per iteration and per mesh required in each method. These are:

in the FD-TD method — 11 additions of indexed variables
3 multiplications

in the TLM method — 16 additions of indexed variables
4 multiplications

### *C. Accuracy of calculations*

One of the sources of error is the anisotropic dispersion introduced by both methods. It means that the velocity of propagation, as modelled in the algorithm depends on the mesh size as well as on the direction of propagation with respect to the main axes. The dispersion of the TLM method was calculated by Johns and Beurle [3]. The FD-TD method dispersion calculated under assumption of $\beta\ a = \sqrt{2}\omega\ \Delta t$ is almost the same. In both methods the error in velocity drops below 0.5% for the mesh size smaller than $1/13\ \lambda$.

The dispersion is only one source of error $c$ used by the finite mesh size. In the FD-TD method a more comprehensive analysis of errors caused by the mesh size and field distri-

bution can be based on the Talor series expansion [7]. The author is not aware of a comparable analysis for the TLM method.

Matching the boundary line is another source of errors in both methods. If the boundary line passes through a mesh, the mesh parameters taken for calculations are accordingly modified in the FD-TD method [7]. This allows a precise approximation of the boundary. To the author's knowledge no similar procedure has been reported for the TLM method and the boundary line is then unprecisely approximated by a piecewise straight line passing halfway between the nodes.

*D. Variety of applications and convenience of use*

Both methods have a similar variety of applications. They may be applied to both deterministic and eigenvalue problems. Lossless as well as lossy circuits may be analyzed. With a sinusoidal excitation these methods may be used to both linear and nonlinear problems. If a linear circuit is investigated a pulse excitation can be used for effective calculations of the frequency response pf the circuit. Both methods lead to relatively simple computer programs capable of solving a variety of problems.

An advantage of the FD-TD method is that it deals directly with twe voltage and the current. This gives better description of the circuit from the user's point of view and facilitates introduction of lumped impedances. The voltage and the current distribution may be monitored during the calculations providing deep insight into the physical properties of the circuit. Tis also helps in debugging the programs.

## CONCLUSIONS

The finite difference time domain method is significantly improved by using the pulse excitation and calculating the Fourier transform of the output. Wide-band frequency dependent characteristics of arbitrarily shaped circuits can be calculated in reasonable time even on a personal computer. Both lossless and lossy circuits can be analysed and both deterministic and eigenvalue problems solved. The FD-TD method in its improved form competes strongly with other methods used for 2-D circuit analysis, i.e. the contour integral method and the transmission-line matrix method and is superior to them in many applications.

## REFERENCES

1. R. Sorrentino: *Planar Circuits, Waveguide Models, and Segmentation Method.* IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-33, pp. 1057—1066, Oct. 1985
2. T. Okoshi, T. Miyoshi: *The Planar Circuit — An Approach to Microwave Integrated Circuitry.* IEEE Trans on Microwave Theory Tech., vol. MTT-20, pp. 245—252, Apr. 1972
3. P. B. Johns, R. L. Beurle: *Numerical Solution of 2-dimensional Scattering Problems Using a Transmission-Line Matrix.* Proc. Inst. Elec. Eng., vol. 118, np. 9, pp. 1203—1208, Sept. 1971
4. K. S. Yee: *Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media.* IEEE Trans. on Antennas and Propagation, vol. AP-14, p. 585, May 1966
5. K. Umashankar, A. Taflove: *A Novel Method to Analyze Electromagnetic Scattering of Complex Objects.* IEEE Trans. on Electromagnetic Comp., vol. EMC-24, pp. 397—405, Nov. 1982

6. T. Weiland: *Numerical Solution of Maxwell's Equations for Static, Resonant and Transiet Problems.* U.R.S.I. Int. Symp. on Electromagnetic Theory, Budapest 1986, pp. 537—542
7. W. K. Gwarek: *Analysis of an Arbitrarily-Shaped Planar Circuit — A Time Domain Approach.* IEEE Trans. on Microwave Theory Tech., vol. MTT-33, pp. 1067—1072, Oct. 1985
8. W. K. Gwarek: *Two-Dimensional Circuit Analysis by Wave Simulation.* U.R.D.I. In . Symp. on Electromagnetic Theory, Budapest 1986, pp. 580—582
9. W. J. R. Hoefer: *The Transmission-Line Matrix Method — Theory and Applications.* IEEE Trans. Microwave Theory Tech. vol. MTT-33, pp. 882—893, Oct. 1985

W. K. GWAREK

## NOWA WERSJA METODY RÓŻNIC SKOŃCZONYCH W DZIEDZINIE CZASU W ZASTOSOWANIU DO ANALIZY DWUWYMIAROWYCH OBWODÓW MIKROFALOWYCH

Streszczenie

W pracy przedstawiono nową wersję metody różnic skończonych w dziedzinie czasu w zastosowaniu do analizy dwuwymiarowych obwodów mikrofalowych. W wersji tej wprowadzono symulację pobudzania impulsowego z zastosowaniem transformaty Fouriera do szybkiego obliczania charakterystyk częstotliwościowych obwodów. Wskazano na możliwość zastosowania metody do analizy zarówno problemów deterministycznych jak i własnych. Uogólniono metodę na przypadek obwodów stratnych. Nowa wersja metody została porównana z innymi powszechnie używanymi metodami to znaczy: metodą elementu brzegowego [2] oraz metodą macierzy linii transmisyjnych [3]. Wykazano, że metoda różnic skończonych w proponowanej formie jest konkurencyjna w stosunku do tamtych metod a w wielu przypadkach daje wyniki wyraźnie lepsze.

W. K. GWAREK

## NOUVELLE VERSION DE LA MÉTHODE DE DIFFÉRENCES FINIES DANS LE DOMAINE DE TEMPS APPLIQUÉE A L'ANALYSE DES CIRCUITS DE MICRO-ONDES BIDIMENSIONNELS

Résumé

Dans le travail on a présenté la nouvelle méthode de différences finies dans le domaine de temps, appliquée a l'analyse des circuits de micro-ondes bidimensionnels. Dans cette version on a introduit la simulation d'excitation per impulsions, en appliquant la transformée de Fourrier pour le calcul rapide des caractéristiques de fréquence des circuits. On a montré la possibilité de l'application de cette méthode à l'analyse des problèmes déterministes ainsi qu'aux propres problèmes. On a généralise la méthode au cas des circuits de pertes. La nouvelle version de la méthode a été comparée avec les autres méthodes généralement utilisées, à savoir: méthode d'éléments aux limites [2] et méthode de matrice des lignes des transmission [3]. On a montré que la méthode de différences finies, dans sa forme ci-dessus proposée, est compétitive par rapport aux autres méthodes et dans beaucoup de cas elle donne des résultats visiblement meilleurs.

W. K. GWAREK

## NEUE VARIANTE DER METHODE BEENDETER DIFFERENZEN IM ZEITBEREICH ZWECKS ANWENDUNG FÜR EINE ZWEIDIMENSIONALE ANALYSE VON MIKROWELLENKREISEN

Zusammenfassung

Im Artikel wurde eine neue Variante der Methode beendeter Differenzen im Zeitbereich zwecks Anwendung für eine zweidimensionale Analyse von Mikrowellenkreiseh gebracht. Hierbei wurde die Simulation der Impulserregung unter Anwendung der Fournier-Transformierten für eine schnelle Berechnung der Frequenzcharakteristiken von Kreisen angewandt. Es wurde auf die Anwendungsmöglichkeiten dieser

Methode für die Analyse sowohl der deterrminischen, als auch eigener Probleme hingewiesen. Es erfolgte auch eine Verallgemeinerung der Methode für den Fall von Verlustkreisen. Die neue Variante der Methode wurde mit anderen, allgemein benzutzten Methoden verglichen, d.h. mit der Methode des Randelements (2) sowie mit der Methode der Linientransmissionsmatrix (3). Es wurde nachgewiesen, daß die Methode der beendeten Differenzen in der von uns vorgeschlagenen Form konkurrenzfähig ist hinsichtlich der genannten Methoden, und in zahlreichen Fällen deutlich bessere Ergebnisse aufweist.

В. К. ГВАРЕК

## О ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ АНАЛИЗА ДВУХМЕРНЫХ СВЧ ЦЕПЕЙ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

Р е з ю м е

Представлены некоторые достоинства метода конечных разностей используемого для анализа цепей с распределёнными параметрами расположенными на плоскости. Анализ выполняется во временной области. С этой целью применено трансформату Фуръе, что позволяет расчитывать зависимости параметров анализируемых схем от частоты. Указана возможность учёта диссипативных потерь. Представленный алгоритм сравнен с известными до сих пор методами интегрирования по контуру и методом матриц передачи. Доказано, что предлагаемый подход является более эффективным во многих применениях.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1988, 34, z. 2, ss. 339–356

621.316.72:518

# Wyznaczanie parametrów transmitancji zastępczych, obiektów z opóźnieniem rozłożonym, metodami analizy numerycznej

ANDRZEJ BRYKALSKI

*Instytut Elektroniki i Informatyki Politechnika Szczecińska*

*Artykuł wpłynął 1986.12.17*
*Autoryzowano do druku 1987.06.25*

W pracy przedstawiono algorytm wyznaczania parametrów transmitancji założonego typu, charakteryzujących dynamikę obiektów o parametrach rozłożonych. Do identyfikacji wykorzystuje się zmodyfikowaną metodę momentów oraz jedną z metod numerycznego rozwiązywania zagadnień czasowo-przestrzennych np. metodę elementów skończonych. Algorytm umożliwia wykonanie obliczeń korygujących, dla pewnej klasy zagadnień nieliniowych.

## 1. WSTĘP

Określenie własności dynamicznych obiektów ma istotne znaczenie m.in. przy badaniu układów regulacji automatycznej, ze względu na stabilność całego systemu sterowania. Zagadnienie to nabiera szczególnej wagi w przypadku, gdy obiekt charakteryzuje się opóźnieniem skupionym lub rozłożonym oraz, gdy sterowanie automatyczne odbywa się przy wykorzystaniu czujników pomiarowych wnoszących błędy dynamiczne [1, 7, 17, 21].

Przeprowadzenie identyfikacji obiektu związane jest zwykle z rozwiązaniem dwóch zagadnień [6]:

— pomiarów technicznych,

— aproksymacji.

W rezultacie otrzymuje się określony model matematyczny, pozwalający przeprowadzić analizę systemu obiekt-regulator.

Klasyczna metoda identyfikacji polega na wykorzystaniu odpowiedzi obiektu na zdeterminowany sygnał wejściowy (najczęściej odpowiedzi na skok jednostkowy). W przypadku obiektu istniejącego, odpowiedź czasową można uzyskać wykonując odpowiedni eksperyment pomiarowy. Obiekt będący w fazie projektowania może zostać poddany jedynie badaniom teoretycznym np. polegającym na opracowaniu i przeprowadzeniu eksperymentu numerycznego.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie algorytmu pozwalającego wyznaczyć parametry transmitancji zastępczej pewnego obiektu o parametrach rozłożonych. Punktem wyjścia do rozważań, są wyniki prac [3] i [13]. W pracy [3] opracowany został algorytm numerycznego wyznaczania zastępczej stałej czasowej procesów dyfuzyjnych, wyko-

rzystujący metodę elementów skończonych (MES). Jakkolwiek zastępcza stała czasowa jest wygodnym parametrem określającym czas trwania zaburzeń aperiodycznych, to w przypadku analizy pracy układu obiekt-regulator, może się okazać parametrem niewystarczającym. Występujące w obiekcie opóźnienia mogą być przyczyną drgań w układzie zamkniętym (jako reakcji na zaistniałe zakłócenia), a nierzadko powodują utratę stabilności. Z tego względu może się okazać niezbędne numeryczne wyznaczenie stałych czasowych wyższego rzędu lub opóźnień i wykorzystanie ich na etapie projektowania.

Do identyfikacji obiektów z opóźnieniem na podstawie odpowiedzi czasowych stosuje się szereg metod. W literaturze [6] opisana jest metoda powierzchni oraz metoda momentów. Przy założeniu aproksymacji obiektu za pomocą modelu inercyjnego z opóźnieniem, stosowana jest metoda opracowana przez Küpfmüllera, a dla modelu inercyjnego $m$-tego rzędu metoda Strejca [6] oraz metoda Skoczowskiego [15]. Wśród innych metod na uwagę zasługuje uogólnienie metody rozwijania transmitancji obiektu w szereg potęgowy (zmodyfikowana metoda momentów podana przez Purczyńskiego w [14]). Podczas, gdy „*klasyczna*" metoda momentów [6] jest stosowana tylko w przypadku odpowiedzi impulsowych (wymuszenie jest sygnałem krótkotrwałym), zmodyfikowana metoda momentów (ZMM) rozszerza zakres stosowalności na odpowiedzi czasowe przy wymuszeniach trwających nieskończenie długo. W szczególności może być ona wykorzystana w przypadku znajomości odpowiedzi skokowej, pozwalając wyznaczyć parametry pewnego założonego modelu zastępczego. Podobnie jak inne wymienione metody, ZMM umożliwia identyfikację obiektu, po przeprowadzeniu określonego eksperymentu pomiarowego. Jak zostanie dalej wykazane, może być ona również stosowana do badań o charakterze teoretycznym, w połączeniu z numerycznymi algorytmami rozwiązywania zagadnień czasowo-przestrzennych.

W dalszej części pracy omówiony zostanie schemat obliczeniowy wykorzystujący MES do ZMM i pozwalający wyznaczyć parametry założonej transmitancji obiektu z opóźnieniem rozłożonym. Algorytm może znaleźć zastosowanie przy wyznaczaniu parametrów czasowych czujników pomiarowych [1, 2, 8, 11]. Jako przykład obliczeniowy, rozpatrzony zostanie model czujnika szybkości oddawania ciepła (aktywnego czujnika pogodowego), przedstawionego w opracowaniu [4].

## 2. ZARYS ZMODYFIKOWANEJ METODY MOMENTÓW

Zmodyfikowana metoda momentów przedstawiona została szczegółowo w pracy [14]. W artykule [13] ZMM omówiona została w odniesieniu do odpowiedzi układu typu continuum na wymuszenie skokowe.

Dla funkcji $u(P, t)$ będącej pewną odpowiedzią czasową układu w danym punkcie przestrzeni $P$, należy wyznaczyć wartości pomocnicze $G_k(P)$ zdefiniowane za pomocą całki:

$$G_k(P) = k \int_0^{\infty} \frac{u(P, t) - u(P, \infty)}{u(P, 0) - u(P, \infty)} t^{k-1} \mathrm{d}t, \tag{2.1}$$

dla $k = 1, 2, \ldots, N$, gdzie $N$ jest liczbą poszukiwanych parametrów zastępczej transmi-

tancji obiektu. Przy założeniu określonej postaci transmitancji, jej parametry wyznacza się z pewnych zależności zawierających wartości pomocnicze $G_k(P)$ [14]. Jak łatwo zauważyć $G_1$ określa bezpośrednio uśrednioną stałą czasową przebiegu $u$. Identyfikacja za pomocą ZMM jest zadaniem poszukiwania głównie tych parametrów transmitancji, które charakteryzują dynamikę obiektu. Z tego względu, w dalszej części pracy nie będzie brane pod uwagę wzmocnienie $K_0$, będące jedynie współczynnikiem proporcjonalności. Jego wartość można wyznaczyć znając zarówno warunek początkowy (stan przed zaburzeniem), stan ustalony jak i wielkość skoku funkcji wymuszającej. Podane w pracy [13]

Tablica 1

**Parametry przykładowych transmitancji zastępczych**

| $i$ | $K_i(s)$ | Parametry transmitancji |
|---|---|---|
| 1 | $\dfrac{1}{1+s\bar{\tau}}$ | $\bar{\tau} = G_1$ |
| 2 | $\dfrac{e^{-s\tau_0}}{1+s\tau}$ | $\tau = \sqrt{G_2-G_1^2}$<br>$\tau_0 = G_1-\sqrt{G_2-G_1^2}$ |
| 3 | $\dfrac{1}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}$ | $\tau_{1,2} = 0{,}5(G_1 \pm \sqrt{2G_2-3G_1^2})$ |
| 4 | $\dfrac{1}{(1+s\tau_m)^m}$ | $\tau_m = (G_2-G_1^2)/G_1$<br>$m = G_1^2/(G_2-G_1^2)$ |

wzory wiążące parametry najczęściej stosowanych transmitancji $K_i(s)$ obiektów z opóźnieniem [6], z wartościami pomocniczymi $G_k$, zostały zestawione w Tab. 1. Jeżeli przebieg $u(P, t)$ nie jest funkcją wyznaczoną przy pomocy pomiarów technicznych, lecz metodami analizy numerycznej, to wartości $G_k$ wygodniej jest obliczać nie z zależności całkowej (2.1), lecz ze wzoru przekształconego, zawierającego transformatę Laplace'a $u^*(P, s)$ funkcji $u(P, t)$:

$$G_k(P) = (-1)^{k+1} \frac{\lim\limits_{s\to 0}[su^*(P, s)]^{(k)}}{u(P, 0)-u(P, \infty)}. \tag{2.2}$$

## 3. ALGORYTM NUMERYCZNEGO WYZNACZANIA PARAMETRÓW TRANSMITANCJI

Analiza stanów nieustalonych w obiektach o parametrach rozłożonych sprowadza się do rozwiązania równania różniczkowego, cząstkowego typu parabolicznego wraz z odpowiednimi warunkami granicznymi. Rozwiązywanie tego typu zagadnień brzegowych metodami numerycznymi np. metodą różnic (MRS) lub elementów (MES) skończonych, polega na zastąpieniu równania różniczkowego cząstkowego, układem równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu z pochodnymi względem czasu [9]. Współczynniki

odpowiednich macierzy uzyskuje się poprzez dyskretyzację równania względem zmiennych przestrzennych. W przypadku MRS pochodne są zastępowane ilorazami różnicowymi, natomiast w przypadku MES stosuje się aproksymację szukanej funkcji $u$ w podobszarach (elementach skończonych) za pomocą kombinacji liniowej odpowiednich funkcji kształtu (Dodatek). W rezultacie, dla obu metod otrzymuje się układ następującej postaci:

$$[H]\{u\}+[C]\{\dot{u}\}+\{F\}=0, \tag{3.1}$$

z układem warunków początkowych

$$\{u\}=\{u\}_0, \quad \text{dla chwili } t=0 \tag{3.2}$$

gdzie $\{u\}$ jest wektorem szukanej funkcji $u(P,t)$, w węzłach utworzonej siatki. Z operatorowej postaci zagadnienia początkowego (3.1—3.2)

$$[H]\{u^*\}+[C](s\{u^*\}-\{u\}_0)+\{F^*\}=00, \tag{3.3}$$

gdzie * symbolizuje transformatę Laplace'a, wynika rozwiązanie

$$\{u^*\}=s^{-1}([H]+s[C])^{-1}(s[C]\{u\}_0-\{F\}) \tag{3.4}$$

oraz zależności [3]:

$$\{u(t\to 0)\}=\lim_{s\to\infty} s\{u^*\}=[C]^{-1}[C]\{u\}_0-\{u\}_0, \tag{3.5}$$

$$\{u(t\to\infty)\}=\lim_{s\to 0} s\{u^*\}=-[H]^{-1}\{F\}, \tag{3.6}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s\{u^*\})=([H]+s[C])^{-1}[C](\{u\}_0-s\{u^*\}). \tag{3.7}$$

W celu wyznaczenia wartości pomocniczych $G_k$, dla $k=\geqslant 2$ należy wyznaczyć pochodne wyższego rzędu. Jeżeli znana jest pochodna rzędu $(k-1)$, dla $k\geqslant 2$, to pochodna rzędu $(k)$ oblicza się z zależności rekurencyjnej:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}(s\{u^*\})=-k([H]+s[C])^{-1}[C]\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}s^{k-1}}(s\{u^*\}). \tag{3.8}$$

*Dowód* (indukcyjny):

1) Wykazana zostanie słuszność wzoru (3.8) dla $k=2$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}(s\{u^*\}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[([H]+s[C])^{-1}[C](\{u\}_0-s\{u^*\})]\\ &= -([H]+s[C])^{-1}[C]([H]+s[C])^{-1}[C](\{u_0\}-s\{u^*\})\\ &\quad -([H]+s[C])^{-1}[C]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s\{u^*\})\\ &= -2([H]+s[C])^{-1}[C]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s\{u^*\}).\end{aligned}$$

2) Zakłada się słuszność wzoru (3.8) dla pewnej liczby $k=n\geqslant 2$.

Wykazana zostanie prawdziwość związku rekurencyjnego (3.8) również dla następnej liczby $k$, tzn. dla $k=n+1$

$$\frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}}(s\{u^*\}) = \frac{d}{ds}\left[\frac{d^n}{ds^n}(s\{u^*\})\right]$$

$$= -n\frac{d}{ds}\left[([H]+s[C])^{-1}[C]\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}(s\{u^*\})\right]$$

$$= n([H]+s[C])^{-1}[C]([H]+s[C])^{-1}[C]\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}(s\{u^*\})$$

$$-n([H]+s[C])^{-1}[C]\frac{d^n}{ds^n}(s\{u^*\})$$

$$= ([H]+s[C])^{-1}[C]\left[n([H]+s[C])^{-1}[C]\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}(s\{u^*\})\right.$$

$$\left.-n\frac{d^n}{ds^n}(s\{u^*\})\right] = -(n+1)([H]+s[C])^{-1}[C]\frac{d^n}{ds^n}(s\{u^*\}).$$

3) Zasada indukcji matematycznej kończy dowód.

W punktach 1) i 2) dowodu wykorzystano zależności dotyczące różniczkowania funkcji macierzowych [10]. Niech $\{v^{(k)}\}$, dla $k = 1, 2, \ldots, N$ będzie pewnym wektorem pomocniczym takim, że

$$\{v^{(k)}\} = \lim_{s\to 0}\frac{d^k}{ds^k}(s\{u^*\}). \tag{3.9}$$

Na podstawie wzorów (3.7) i (3.8) utworzyć można ciąg wekorów $\{v^{(1)}\}$, $\{v^{(2)}\}, \ldots,$ $\{v^{(N)}\}$, przy czym

$$\{v^{(1)}\} = [H]^{-1}[C](\{u\}_0 - \{u\}_\infty) \tag{3.10}$$

oraz

$$\{v^{(k)}\} = -k[H]^{-1}[C]\{v^{k-1}\}, \quad k = 2, 3, \ldots, N. \tag{3.11}$$

Stąd obliczyć można wartości pomocnicze $G_k$ w $j$-tym węźle siatki

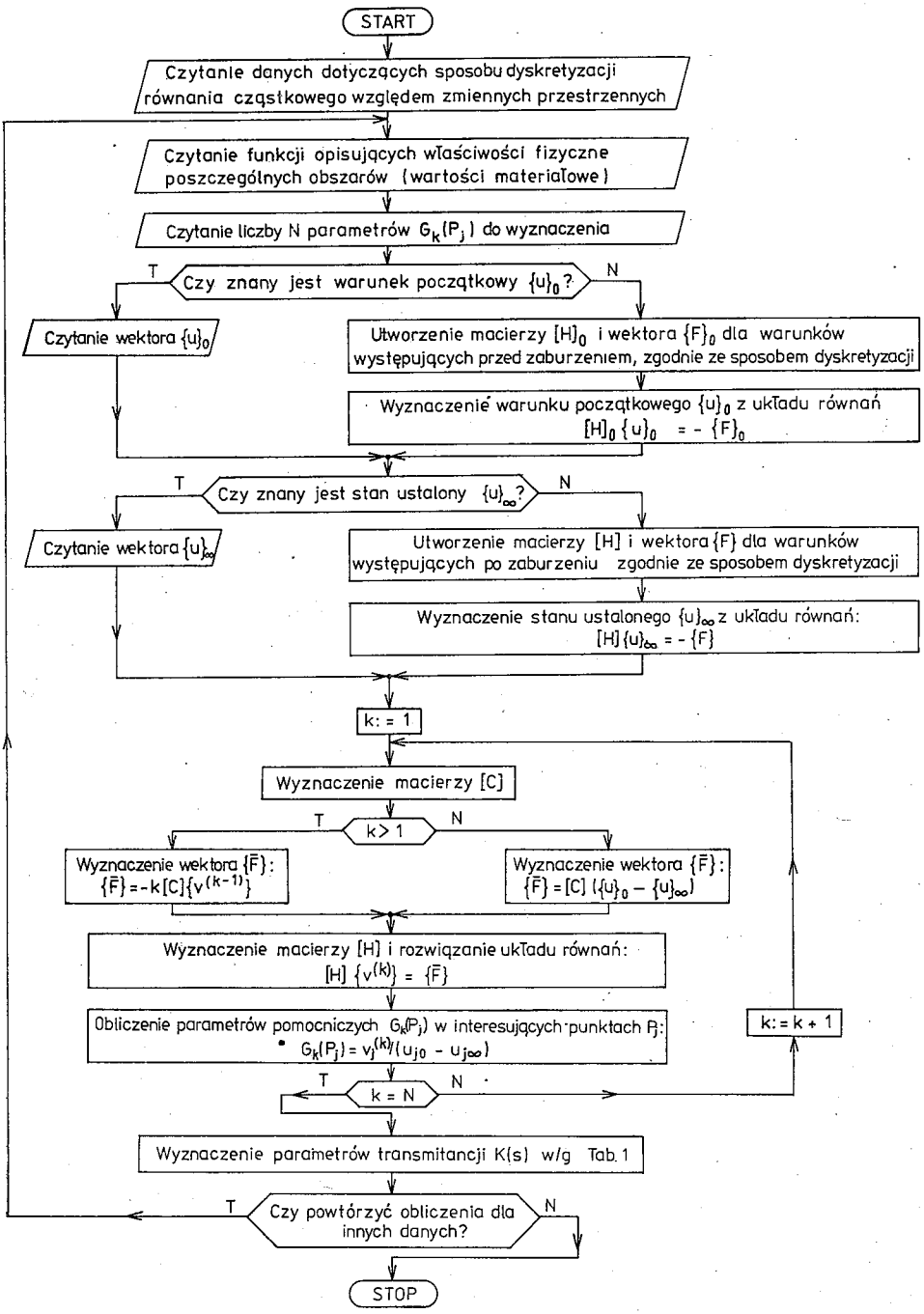
$$G_k(P_j) = v_j^{(k)}/(u_{j0} - u_{j\infty}). \tag{3.12}$$

Z zależności (3.10—3.12) oraz (3.5—3.6) wynika algorytm (rys. 1) wyznaczania parametrów transmitancji zastępczej obiektu wykorzystujący ZMM w połączeniu z numeryczną metodą rozwiązywania zagadnień brzegowych np. MES. Na uwagę zasługuje fakt, że do obliczenia wektorów $\{v^{(k)}\}$ rozwiązywane są układy równań z tą samą macierzą główną $[H]$, która tworzona jest przy poszukiwaniu stanu ustalonego $\{u\}_\infty$. Oznacza to, że algorytm ten pozwala na efektywne wykorzystanie metod i oprogramowania stosowanego do zagadnień stacjonarnych. Przy odpowiedniej organizacji obliczeń można napisać program wymagający tylko nieznacznie większego obszaru pamięci, niż typowe programy wykorzystywane do obliczeń stanów ustalonych. Oszczędność pamięci wynika z faktu, że macierze $[H]$ i $[C]$ mogą być generowane jedna po drugiej i umieszczone w tym samym obszarze pamięci. Do obliczenia wartości $G_k(P_j)$, dla kolejnych liczb $k$, wystarczy deklaracja trzech tablic jednowymiarowych, w których zapamiętuje się:

— różnicę $\{u\}_0 - \{u\}_\infty$,

— poprzedni, $(k-1)+$wektor $\{v^{(k-1)}\}$, dla $k \geqslant 2$

— wektor prawych stron układu równań




Rys. 1. Algorytm wyznaczania parametrów transmitancji zastępczych

$$\text{a) } [C](\{u\}_0 - \{u\}_\infty), \quad \text{dla } k = 1$$
$$\text{b) } -k[C]\{v^{(k-1)}\}, \quad \text{dla } k \geqslant 2$$

który po rozwiązaniu układu równań zawiera poszukiwane elementy wektora $\{v^{(k)}\}$. Rozwiązanie jakiegokolwiek zagadnienia stacjonarnego za pomocą MES, wymagałoby zadeklarowania tablicy dwuwymiarowej, zapamiętującej półpasmo macierzy $[H]$ i jednego wektora.

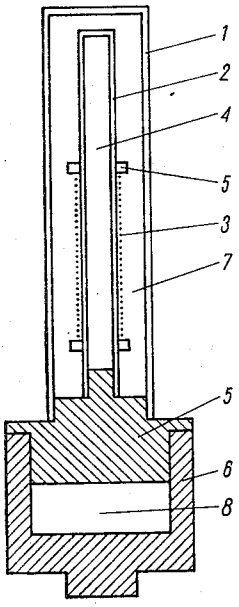
Przedstawiony na rys. 1 schemat obliczeniowy zawiera bloki służące do wyznaczenia stanu przed zaburzeniem $\{u\}_0$ oraz stanu ustalonego $\{u\}_\infty$. Konieczność wyznaczenia wektora $\{u\}_\infty$ wydaje się oczywista, natomiast wątpliwości może budzić występujący fragment algorytmu, w którym wyznaczany jest warunek początkowy. Przy rozpatrywaniu stanów przejściowych, w wielu przypadkach nie jest znany stan przed zaburzeniem (warunek początkowy) i należy go wyznaczyć na podstawie aktualnie występujących danych. Zagadnienie to zostanie zilustrowane w dalszej części pracy przykładem obliczeniowym.

## 4. ANALIZA DYNAMIKI AKTYWNEGO CZUJNIKA ODDAWANIA CIEPŁA

### 4.1. PRZEZNĄCZENIE I MODEL OBLICZENIOWY CZUJNIKA

Układy sterowania automatycznego dostawy ciepła, występujące coraz powszechniej w węzłach ciepłowniczych typu wymiennikowego, wymagają stałych pomiarów i kontroli szeregu przebiegów temperaturowych, zarówno po stronie wody sieciowej jak i instalacyjnej. W szczególności zastosowanie regulatora elektronicznego R303 lub R304 (VEB Wetron Weida), umożliwiającego zaprogramowanie dostawy ciepła na potrzeby c.o. w poszczególnych dniach tygodnia, wiąże się z koniecznością pomiaru temperatury wody zasilającej (po stronie instalacyjnej) oraz temperatury powietrza na zewnątrz ogrzewanego budynku. Regulator wykorzystując pewną zadaną charakterystyką, steruje za pośrednictwem siłownika typu KLIMACT, sprzężonego z zaworem, wielkością przepływu wody sieciowej dostarczanej do wymiennika [20].

Temperatura pomieszczeń wewnątrz budynku zależy nie tylko od wymienionych temperatur lecz również od pozostałych warunków atmosferycznych, takich jak wiatr, wilgotność powietrza i nasłonecznienie. Dla efektywnego wysterowania instalacji c.o. nie wystarcza zatem pomiarowe określenie warunków zewnętrznych przy pomocy zwykłego termometru elektrycznego z rezystorem platynowym Pt 100 [21]. W pracy [4] opracowano koncepcję aktywnego czujnika przetwarzania zewnętrznych warunków atmosferycznych. Aktywne działanie czujnika, które uzyskano przez zastosowanie rezystora Pt 100 z nawiniętym mikrogrzejnikiem oporowym o stałej wydajności cieplnej (rys. 2), pozwala uwzględnić nie tylko zmiany temperatury zewnętrznej, ale i wpływ wiatru, a pośrednio wilgotności powietrza. Zmiana warunków atmosferycznych wpływa na zmianę warunków wymiany ciepła na powierzchni czujnika. Przy występującym wewnętrznym źródle ciepła, powoduje to zmianę mierzonej temperatury. Czujnik współpracuje z pewnym układem elektronicznym i musi posiadać określone własności dynamiczne [4], zatem jego projektowanie związane było z teoretycznymi badaniami stanów nieustalonych, przy różnego




Rys. 2. Aktywny czujnik szybkości oddawania ciepła
1 — osłona mosiężna, 2 — rurka stalowa, 3 — mikrogrzejnik, 4 — rezystor PT 100, 5 — krążek, 6 — osłona zacisków, 7 — powietrze, 8 — powietrze

rodzaju wymuszeniach. Przy badaniu współpracy występujących elementów automatyki (czujnik, układ elektroniczny, regulator) wygodnie jest przyjąć pewien model aproksymujący czujnik. Korzystając z omówionego algorytmu łączącego ZMM I MES, wyznaczone zostaną parametry założonych transmitancji czujnika. Analizując nieustalone pole temperatury wewnątrz czujnika, przyjmuje się następujące założenia upraszczające:

1. Ponieważ zmiany temperatury wewnątrz czujnika, wywołane przez zmianę zewnętrznych warunków atmosferycznych, są stosunkowo małe oraz przewyższenie temperatury w środku czujnika (w stosunku do temperatury zewnętrznej) nie powinno przekraczać 20°C [4], zakłada się, że współczynniki materiałowe są niezależne od temperatury, a zagadnienie będzie rozpatrywane jako liniowe.

2. Wymiana ciepła w szczelinach powietrznych (rys. 2) odbywa się tylko na skutek przewodnictwa ciepła. Przy tak małych szczelinach otrzymuje się iloczyn liczb Grashofa i Prandtla GrPr < 1000. Nierówność ta jest spełniona w całym, praktycznie występującym zakresie temperatur zewnętrznych, zatem zgodnie z kryterium Michiejewa [16], można pominąć zjawisko konwekcji swobodnej w przestrzeniach zamkniętych.

3. Oddawanie ciepła do otoczenia przez powierzchnię zewnętrzną, przebiega tylko na skutek konwekcji. W występującym zakresie temperatur można pominąć straty radiacyjne.

Na podstawie tak przyjętych założeń, stan nieustalony pola temperatury $T$ można opisać równaniem przewodzenia ciepła [16]

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + q_v = c_p \varrho \frac{\partial T}{\partial t}, \tag{4.1}$$

wraz z warunkiem brzegowym wynikającym z równania Newtona

$$\lambda \operatorname{grad} T = \alpha(T_f - T), \tag{4.2}$$

gdzie poszczególne symbole oznaczają: $\lambda$ — przewodność cieplną; $q_v$ — wydajność przestrzennego źródła ciepła; $c_p$ — ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu; $\varrho$ — gęstość; $\alpha$ — współczynnik przejmowania ciepła; $T_f$ — temperatura płynu (tu powietrza zewnętrznego) w dużej odległości od ścianki.

### 4.2. WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Przedstawiony na rys. 1 algorytm posłuży do wyznaczenia parametrów założonych transmitancji czujnika, wiążących temperaturę zewnętrzną $T_f$ (wymuszenie) oraz średnią temperaturę w obszarze rezystora platynowego $T_{\mathrm{Pt}100}$ (odpowiedź). Temperatura $T_{\mathrm{Pt}100}$ w postaci odpowiedniego, proporcjonalnego przebiegu napięciowego, jest sygnałem wejściowym dla układu elektronicznego, współpracującego z regulatorem R303.

Osiowosymetryczne zagadnienie brzegowe rozwiązane zostało przy pomocy MES. Obszar został podzielony na 537 liniowych elementów trójkątnych [18] i zawierał 310 węzłów (rys. 3). Przyjęte do obliczeń wartości materiałowe zaczerpnięto z pracy[5] i zestawiono w Tab. 2. Zasilany prądem stałym mikrogrzejnik ma moc 0,46 W; długość urządzenia wynosi 125 mm.

Transmitancja czujnika wyznaczona została na podstawie odpowiedzi skokowej $T$ na zmianę temperatury $T_f$ z 23,9°C na 1,3°C, dla współczynnika $\alpha = 15{,}3$ W/(m$^2$K). Przeprowadzony eksperyment numeryczny wymagał wyznaczenia zarówno temperatury $T_{\mathrm{Pt}100}$ przed zaburzeniem ($T_f = 23{,}9$°C), jak i w stanie ustalonym ($T_f = 1{,}3$°C). Na podstawie obliczeń sporządzono rys. 4ab ilustrujący rozkład izoterm w obszarze czujnika. Na rys. 5 przedstawiono rozkład linii zastępczej stałej czasowej $\overline{\tau} = \mathrm{const}$ ($G_1 = \mathrm{const}$). Opisy linii $\overline{\tau} = \mathrm{const}$ podane zostały w minutach. Jak wynika z rysunku, proces zmiany temperatury będzie trwał najdłużej w obszarze rezystora platynowego 4. Średnia wartość stałej czasowej $\overline{\tau}$ w tym obszarze wynosi 18'37''. Obliczając trzy parametry pomocnicze $G_1$, $G_2$, $G_3$ otrzymano ich średnie wartości w obszarze 4:

$$G_1 = 1{,}117 \cdot 10^3 \ [\mathrm{s}],$$
$$G_2 = 2{,}028 \cdot 10^6 \ [\mathrm{s}^2],$$
$$G_3 = 5{,}187 \cdot 10^9 \ [\mathrm{s}^3].$$

Korzystając z Tab. 1 można wyznaczyć parametry założonej transmitancji zastępnej $K_i(s)$. Wyniki obliczeń zestawiono w Tab. 3.

Oznaczając przez $h_i(t)$ odpowiedź na skok jednostkowy obiektu o transmitancji $K_i(s)$ z Tab. 1, uzyskuje się [6, 13]:

$$h_1(t) = 1(t)\left[1-\exp\left(-\frac{t}{\overline{\tau}}\right)\right], \tag{4.3}$$

$$h_2(t) = 1(t-\tau_0)\left[1-\exp\left(-\frac{t-\tau_0}{\tau}\right)\right], \tag{4.4}$$

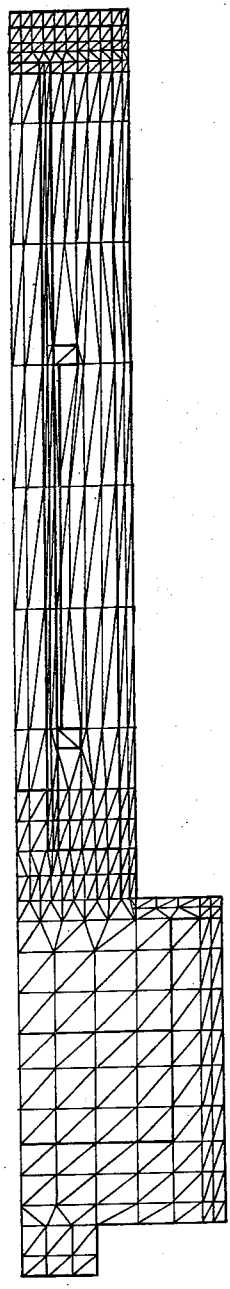
$$h_3(t) = 1(t)\left[1+\frac{\tau_1}{\tau_2-\tau_1}\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)-\frac{\tau_2}{\tau_2-\tau_1}\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)\right]. \tag{4.5}$$

Dla modelu czwartego w literaturze [6, 13] podawana jest odpowiedź skokowa przy

Tablica 2

**Dane materiałowe przyjęte do obliczeń**

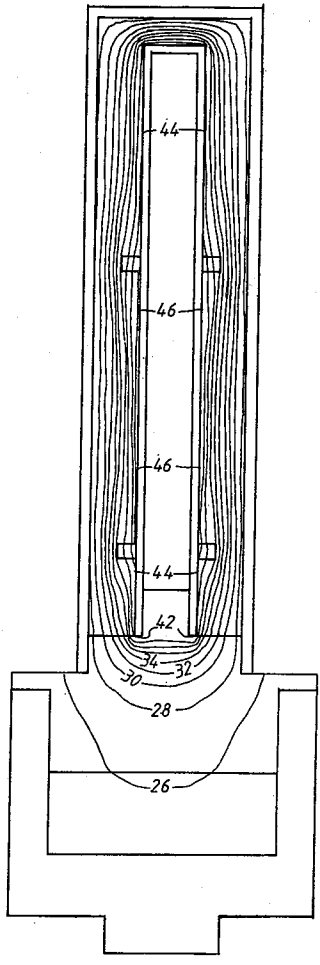
| Nr obszaru | $\varrho$ [kg/m$^3$] | $c_p$ [J/(kgK)] | $\lambda$ [W/(mK)] |
|---|---|---|---|
| 1 | 8520 | 385 | 110,6 |
| 2 | 7860 | 461 | 40,0 |
| 3 | 8920 | 410 | 22,69 |
| 4 | 2400 | 1090 | 1,035 |
| 5 | 1400 | 1507 | 0,337 |
| 6 | 2696 | 879 | 206,0 |
| 7 | 1,124 | 1005 | 0 028 |
| 8 | 1,164 | 1005 | 0,027 |

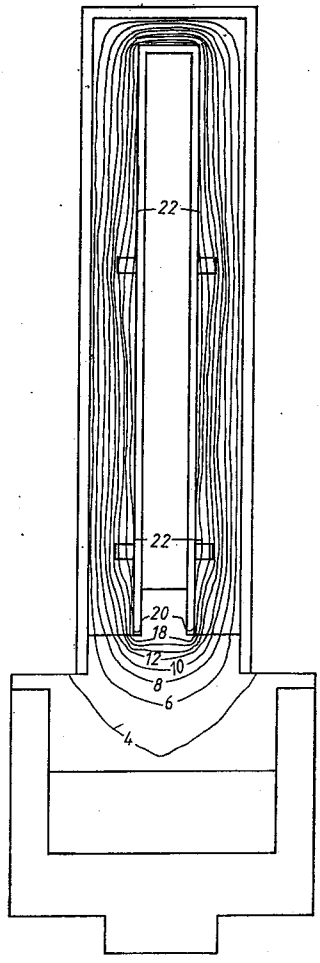


Rys. 3. Podział obszaru obliczeniowego na elementy skończone

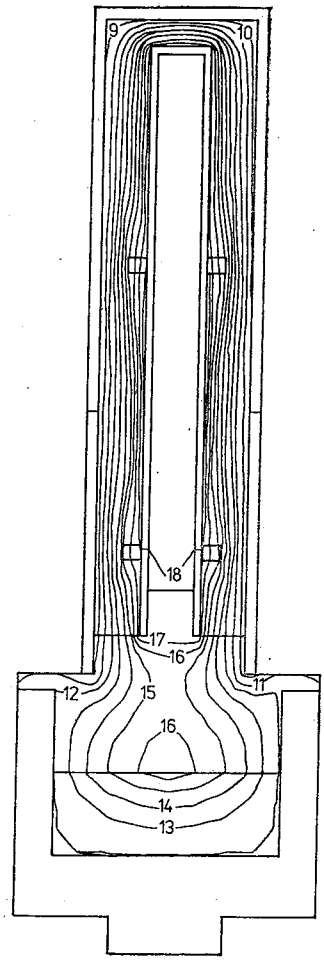
założeniu, że $m = 0{,}5\,n$, gdzie $n = 2, 3, \ldots$. W ogólności liczba $m$ nie spełnia tego warunku i odpowiedź skokową należy wyznaczyć z zależności [12]:

$$h_4(t) = \frac{1(t)}{\Gamma(m)\,\tau_m^m} \int_0^t t^{m-1} \exp(-t/\tau_m)\,\mathrm{d}t. \tag{4.6}$$




Rys. 4. Rozkład temperatur w czujniku [°C] a) stan przed zaburzeniem ($t = 0$), b) stan ustalony po zaburzeniu ($t \to \infty$)




Rys. 5. Rozkład linii uśrednionej stałej czasowej $\bar{\tau} = \text{const}$ (opisy linii podano w minutach)

Tablica 3

**Wyznaczone parametry transmitancji zastępczych $K_i(s)$ z tablicy 1**

| $i$ | Parametry transmitancji |
|---|---|
| 1 | $\bar{\tau} = 18'37''$ |
| 2 | $\tau_0 = 3'54''$; $\tau = 14'43''$ |
| 3 | $\tau_1 = 4'39''$; $\tau_2 = 13'58''$ |
| 4 | $\tau_m = 11'39''$; $m = 1{,}599$ |

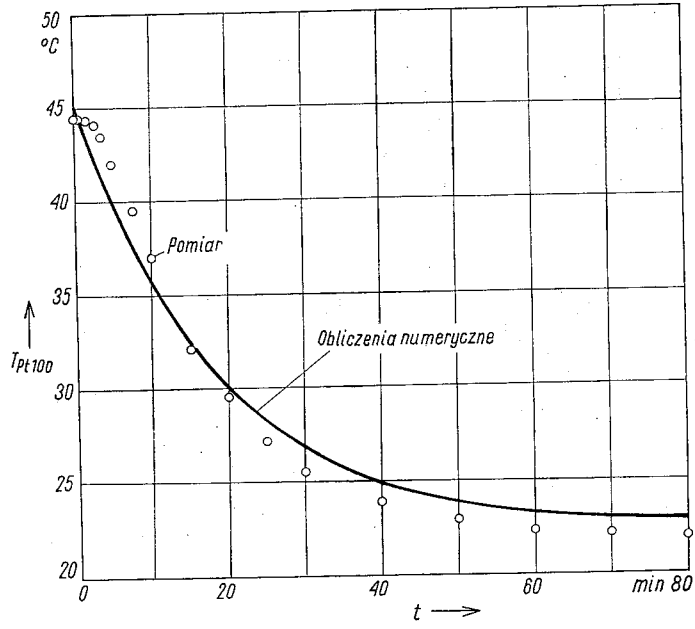
Rozwijając funkcję e(...) w szereg potęgowy i całkując otrzymuje się [19]

$$h_4(t) = \frac{1(t)}{\Gamma(m)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+m)} (t/\tau_m)^{k+m}. \tag{4.7}$$

Przybliżoną odpowiedź czujnika dla pewnej zastępczej transmitancji $K_i(s)$ można opisać wzorem

$$T_{\mathrm{Pt100}}(t) = T_{\mathrm{Pt100}}(0) + [T_{\mathrm{Pt100}}(\infty) - T_{\mathrm{Pt100}}(0)]h_i(t), \tag{4.8}$$

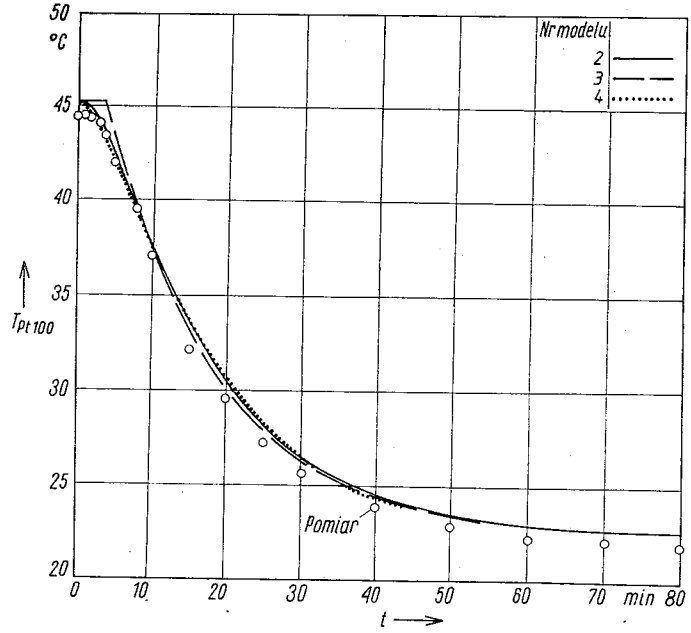
w którym $T_{\mathrm{Pt100}}$ symbolizuje średnią temperaturę w obszarze 4 termometru elektrycznego, proporcjonalną do napięcia mierzonego na rezystorze PT 100. Cechą charakterystyczną różnych transmitancji otrzymywanych za pomocą ZMM jest to, że wyznaczony na ich podstawie niestacjonarny przebieg (4.8), posiada taką samą uśrednioną stałą czasową, co stanowi dodatkową, istotną zaletę metody.



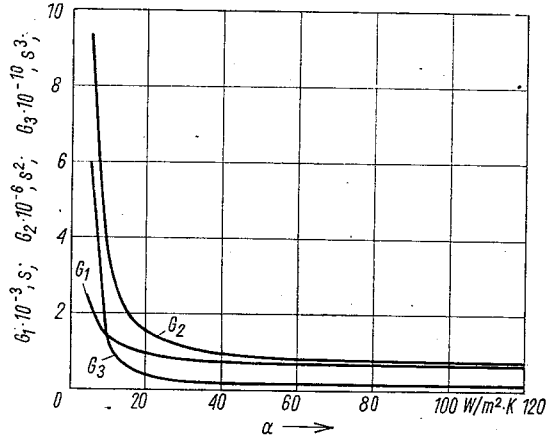

Rys. 6. Odpowiedź czasowa czujnika dla wyznaczonej transmitancji, przy założeniu modelu inercyjnego 1-go rzędu

Na rys. 6 Przedstawiono przybliżoną odpowiedź czujnika przy założeniu, że można go aproksymować używając modelu inercyjnego 1-go rzędu ($i = 1$) z uśrednioną stałą czasową. Wynik aproksymacji porównano z wynikami eksperymentu pomiarowego. Dokładniejszą aproksymację można uzyskać przy użyciu modelu 2, 3 lub 4. Modele te są stosowane powszechnie do opisu dynamiki elektrycznych czujników temperatury [1, 4, 17, 20]. Przybliżona odpowiedź (4.8), przy wykorzystaniu transmitacnii $K_i(s)$, $i = 2, 3, 4$ przedstawiona jest na rys. 7. Przyczyna rozbieżności wyników eksperymentu numerycznego i pomiarowego jest różnorodna. Błędy wynikają z jednej strony z przy-

bliżonego charakteru zarówno ZMM jak i MES, z drugiej strony są efektem prawdopodobnej niezgodności przyjętych z tablic współczynników i stałych materiałowych w porównaniu ze współczynnikami rzeczywistymi. Szczególnie istotne znaczenie ma właściwe przyjęcie współczynnika przejmowania ciepła $\alpha$. Jest on zwykle wyznaczany na podstawie liczb Reynoldsa (Re) i Nusselta (Nu), w przypadku konwekcji wymuszonej oraz liczb Grashofa (Gr) i Prandtla (Pr), w przypadku konwekcji swobodnej. Wykorzystywane są przy tym różne wzory empiryczne np. Hilperta [16] lub Michiejewa [5].




Rys. 7. Odpowiedzi czasowe czujnika odpowiadające transmitancjom $K_i/s$) z Tab. 1, dla $i = 2, 3, 4$




Rys. 8. Zależność parametrów pomocniczych $G_k$ od współczynnika $\alpha$

Zdaniem niektórych autorów [2, 7], wyznaczony w ten sposób współczynnik $\alpha$ jest zaniżony. Tezę tą potwierdzają również wyniki przedstawione w niniejszej pracy. Na rys. 8 przedstawiono zależność wyliczonych parametrów pomocniczych $G_1$, $G_2$, $G_3$ (wartości średnie w obszarze 4) od współczynnika $\alpha$. Wyniki potwierdzają ogólną cechę czujników temperatury, omówioną w pracach [1, 7]: czujnik reaguje „szybciej" (ma mniejszą stałą czasową), dla większych wartości współczynnika $\alpha$, tzn. przy wietrze o większej prędkości.

## 5. OBLICZENIA KORYGUJĄCE DLA PEWNEJ KLASY ZAGADNIEŃ NIELINIOWYCH

Występujące w równaniach różniczkowych funkcje określające własności fizyczne poszczególnych podobszarów (wartości materiałowe), są zwykle zależne od poszukiwanego pola. Należy zatem rozwiązać pewne zagadnienie nieliniowe. Jakkolwiek do opracowania przedstawionego na rys. 1 algorytmu wykorzystano przekształcenie Laplace'a, stosowane jedynie do problemów liniowych, to ostatecznie otrzymano schemat trójkrokowy, w którym występujące funkcje są niezależne od czasu (a więc i od zmiennej $s$):

— wyznaczenie warunku początkowego $\{u\}_0$;
— wyznaczenie stanu ustalonego $\{u\}_\infty$,
— wyznaczenie parametrów pomocniczych $G_k(P_j)$.

Przy obliczeniach istnieje możliwość dokonania pewnych korekt, prowadzących do zwiększenia dokładności wyników. W celu wprowadzenia korekty przy zagadnieniach nieliniowych, musi być znana zależność funkcji opisujących własności fizyczne podobszaru (charakterystyka) od poszukiwanego pola. W równaniu (4.1) od temperatury zależą zarówno współczynnik przewodnictwa cieplnego $\lambda$, jak i gęstość $\varrho$. Krok 1) i 2) realizuje się dwuetapowo:

— obliczenia wstępne przeprowadza się dla pewnych założonych (średnich) wartości materiałowych, stałych w danym podobrzarze,
— obliczenia korygujące wykonywane są iteracyjnie przy założeniu znanego rozkładu wartości materiałowych w podobszarze. Wartości materiałowe wyznaczane są w oparciu o znaną charakterystykę i wyniki obliczeń wstępnych.

Należy jednak pamiętać, że proces iteracyjny jest zbieżny tylko dla pewnej klasy zagadnień nieliniowych [9]. Postępowanie iteracyjne można łatwo zrealizować stosując MES. Rozkład funkcji opisującej wartości materiałowe, wykorzystywany w drugim etapie, oblicza się na podstawie wartości szukanego pola w węzłach (wyliczonego wcześniej) i przyjmuje jako stały w elemencie. W kroku 3), wartości materiałowe oblicza się w oparciu o średnie wartości pola wyznaczone w kroku 1) i 2) tzn. $0{,}5(\{u\}_0 + \{u\}_\infty)$ i przyjmuje się jako stałe w poszczególnych elementach. W ten sposób wartości materiałowe, początkowo stałe w podobszarze, stają się zależne od zmiennych przestrzennych (ściślej od numeru elementu skończonego).

Dla przykładu przedstawionego w p. 4, obliczenia korygujące wykonuje się wykorzystując zależność współczynników $\lambda$ i $\varrho$ w szczelinach powietrznych od temperatury, zaczerpniętą z pracy [5]. Współczynniki materiałowe pozostałych obszarów można w rozpatrywanym zakresie zmian temperatur uznać za stałe. Wyniki numerycznych

obliczeń korygujących wskazują w tym przypadku, na nieznaczny wpływ nieliniowości środowiska. Obliczone na podstawie średnich wartości parametrów pomocniczych $G_k$ w obszarze 4, parametry transmitancji zastępczych (modele 1 – 4), nie różniły się w sposób istotny od parametrów zestawionych w Tab. 3. Stanowi to potwierdzenie słuszności założeń przyjętych w p. 4.1. Brak istotnych różnic wynika z faktu, że zarówno przegrzanie $(T_{\mathrm{Pt100}} - T_f)$ jak i skok temperatury $(T_{f0} - T_{f\infty})$ wynoszą, zgodnie z [4], ok. 20°C. W takim, stosunkowo niedużym zakresie temperatur, nieliniowe własności powietrza nie wpływają na wyniki obliczeń.

## 6. ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiono numeryczny algorytm identyfikacji obiektów o parametrach rozłożonych łączący zmodyfikowaną metodę momentów i metody numerycznego rozwiązywania zagadnień brzegowych. Algorytm pozwala na wykorzystanie gotowych pakietów programów, stosowanych do zagadnień stacjonarnych i umożliwia sporządzenie programu na EMC charakteryzującego się stosunkowo dużą oszczędnością pamięci. Po wyznaczeniu pola w stanie ustalonym oraz określeniu stanu przed zaburzeniem (warunku początkowego) można wyznaczyć za pomocą ZMM parametry założonej transmitancji charakteryzującej dynamikę obiektu oraz wyznaczyć przybliżoną odpowiedź na pewne wymuszenie. Niezależnie od przyjętego modelu (postaci transmitancji) uzyskuje się odpowiedzi czasowe o takiej samej uśrednionej stałej czasowej. Przedstawiony algorytm uogólnia i rozszerza metodę obliczeniową zaproponowaną w pracy [3] oraz stanowi uzupełnienie prac [13, 14]. Metodę zilustrowano przykładem obliczeniowym czujnika pogodowego stosowanego jako element automatyki w systemach c.o. [4]. Pole temperatur opisano równaniem przewodnictwa ciepła i wyznaczono metodą elementów skończonych. Wyniki obliczeń numerycznych zostały zweryfikowane eksperymentem pomiarowym.

## DODATEK

Niech funkcja $u$ spełnia w obszarze $\Omega$ ograniczonym brzegiem $S = S_1 \cup S_2$ $(S_1 \cap S_2 = \Phi)$, równanie cząstkowe typu parabolicznego:

$$\operatorname{div}[\lambda(P)\operatorname{grad} u(P, t)] + Q(P, t) - D(P)\frac{\partial u(P, t)}{\partial t} = 0, \tag{7.1}$$

oraz warunek brzegowy

$$[u - u_b]_{P \in S_1} = 0, \tag{7.2}$$

$$[\lambda \operatorname{grad} u + \alpha u + f]_{P \in S_2} = 0. \tag{7.3}$$

Po podziale obszaru $\Omega$ na elementy skończone $e_m$ zdefiniowane przez węzły $i, j, k, \ldots$ szukaną funkcją $u$ aproksymuje się w tym elemencie kombinacją liniową funkcji kształtu $N_i, N_j, N_k, \ldots$

$$u(P, t) = [N_i(P), N_j(P), N_k(P), \ldots] \begin{Bmatrix} u_i(t) \\ u_j(t) \\ u_k(t) \\ \vdots \end{Bmatrix} = [N(P)]\{u(t)\}^{e_m} \tag{7.4}$$

Stosując metodę Galerkina do zagadnienia (7.1—7.2) otrzymuje się układ równań różniczkowych (3.1) wraz ze współczynnikami [18]

$$H_{ij} = \sum_{e_m(i,j)} \left[ \int_{\Omega_m} \operatorname{grad} N_i \, \lambda \operatorname{grad} N_j \, \mathrm{d}\Omega_m + \int_{S_m} N_i \, \alpha N_j \, \mathrm{d}S_m, \right] \tag{7.5}$$

$$C_{ij} = \sum_{e_m(i,j)} \int_{\Omega_m} N_i \, D N_j \, \mathrm{d}\Omega_m, \tag{7.6}$$

$$F_i = \sum_{e_m(i,j)} \left[ - \int_{\Omega_m} Q N_i \, \mathrm{d}\Omega_m + \int_{S_m} f N_i \, \mathrm{d}S_m, \right. \tag{7.7}$$

przy czym $e_m(i,j)$ symbolizuje $m$-ty element zawierający węzły $i$, $j$.

## BIBLIOGRAFIA


1. R. Antkowiak: *Analiza metrologiczna korekcji dynamicznej elektrycznych termometrów przemysłowych.* Praca doktorska, Politechnika Szczecińska 1983
2. T. Brokmann: *Ein numerisches Berechnungsverfahren der Übergangsfunktion von Berührungsthermometern bei konvektivem Wärmeübertragung.* Dissertation, Technische Hochschule Illmenau, 1976
3. A. Brykalski: *Zastosowanie metody elementów skończonych do wyznaczania czasu trwania zaburzeń aperiodycznych w trój- i dwuwymiarowych układach o parametrach rozłożonych.* Rozprawy Elektrotech. 1987, 33, z. 2
4. M. Durnaś: *Opracowanie układu automatycznej regulacji dostawy ciepła na potrzeby c.o. minimalizującego dobowe zmiany przepływu wody sieciowej.* Wykonane na zlecenie OBRC w Warszawie w ramach PR 8. Szczecin 1985
5. W. Gogół: *Wymiana ciepła.* Tablice i wykresy. Warszawa: WPW, 1984
6. H. Górecki: *Analiza i synteza układów regulacji z opóźnieniem.* Warszawa: WNT, 1971
7. D. Hofmann: *Dynamische Temperaturmessung.* VEB Verlag Technik, Berlin 1976
8. C. Hortopan, V. Hortopan: *Eine allgemeine Theorie der Messwiderstande im Übergangszustand.* ETZ-A 92, 1971, H. 8, 470—474
9. J. i M. Jankowscy, M. Dryja: *Przegląd metod i algorytmów numerycznych.* Cz. II, Warszawa: WNT, 1982
10. T. Kaczorek: *Macierze w automatyce i elektrotechnice.* Warszawa: WNT, 1984
11. K. Kohlgrüber, G. Woelk: *Instationäre Temperaturfelderechnung in Körpern mit kleinen Abmessungen.* Elektrowärme International, 43, 1985, B4, 183—189
12. G. A. Korn, T. M. Korn: *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers.* New York: McGraw-Hill., 1961
13. J. Purczyński: *Przybliżone modele obiektów opisywanych równaniami typu parabolicznego.* Rozprawy Elektrotech., 1986, 32, z. 4, 1055—1068
14. J. Purczyński: *Dynamika układów o parametrach rozłożonych.* WPSz. Szczecin: 1987
15. S. Skoczowski: *Einige Bemerkungn zur Approximierung von Regelstrecken mit Ausgleich.* Regelungstechnik 1983, 31, H. 7, 231—234
16. B. Staniszewski: Wymiana ciepła. Podstawy teoretyczne. Warszawa: PWN, 1979
17. E. G. Woschni: *Messdynamik.* Hierzl Verlag, Leipzig 1972
18. O. C. Zienkiewicz: *Metoda elementów skończonych.*Arkady, Warszawa: 1972
19. A. Żuchowski: *O uproszczonym modelu dynamiki elementów z ułamkowym rzędem inercji* Pomiary, Automatyka, Kontrola, 1985, 31, nr 2, 48—50
20. Praca zbiorowa: *Zautomatyzowanie rozdziału u użytkowania ciepła w węzłach szeregowo-równoległych c.o. i c.w. i w szklarniach magistrali ciepłowniczej D 800 w Szczecinie.* Wykonane na zlecenie OBRC w Warszawie w ramach PR 8. Szczecin 1982—1985
21. *Elektrische Thermometer,* Katalog, VEB Thermometerwerk Geraberg

A. BRYKALSKI

## DETERMINATION OF PARAMETERS OF EQUIVALENT TRANSMITTANCE OF OBJECTS WITH DISTRIBUTED DELAY BY MEANS OF NUMERICAL METHODS


### Summary

An algorithm for the determination of parameters of the transmittance of an assumed type characteristing the dynamics of an object with distributed parameters, is established. The suggested algorithm is based on a combination of the modified moments method and the finite element method. The algorithm allows to perform correction computations for a certain class of nonlinear problems.


A. BRYKALSKI

## DESIGNATION DES PARAMÈTRES DE TRANSMITTANCE DES ORGANES EQUIVALENTS A RETARD REPARI A L'AIDE DES MÈTHODES D'ANALYSE NUMERIQUE


### Résumé

L'article présente l'algorithme de désignation des paramètres de transmittance du type admis, caractérisant la dynamique des organes aux paramètres répartis. Au course de l'identification on s'est servi de la méthode modifiée des omments et de l'une des méthodes numériques de résolution des problèmes espace-temps, telle que par example méthode d'éléments finis. L'algorithme permet d'effectuer des calculs corrigeants pour certaine classe de problèmes non linéaires.


A. BRYKALSKI

## PARMETERBESTIMMUNG DER ERSATZÜBERGANGSFUNKTIONEN VON OBIEKTEN MIT VERTEILTER VERZUGSZEIT MITTELS METHODEN DER NUMERISCHEN ANALYSE


### Zusammenfassung

In der Bearbeitung wurde ein Algorithmus eargestellt, der gestattet, die die Dynamik von Objekten mit verteilten Parametern charakterisierenden Übergangsfunktionsparameter zu bestimmen. Für die Identifizierung würde neben der modifizierten Momentenmethode eine der numerischen Lösungsmethoden zür reitlich-räumliche Probleme angewandt, z.B. das EE-Verfahren. Der Algorithmus ermöglicht die Auswertung von korrigierenden Berechnungen für eine gewisse Klasse nicht linearer Probleme.


А. БРЫКАЛЬСКИ

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПЕРЕХОДНЫХ ФУНКЦИИ, ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, МЕТОДАМИ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА


### Резюме

Представлен алгоритм определения параметров переходной функции принятого типа, характеризующих динамику объектов с распределенными параметрами. Для идентификации используется модифицированный метод моментов и один из методов численного решения временно-пространственных проблемов н. пр. методом конечных элементов. Алгоритм позволяет провести коррективные вычисления для некоторого класса нелинейных проблемов.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1988, 34, z. 2, ss. 357–382

621.3.042:621.333
513.881

# Model matematyczny falownika tyrystorowego o komutacji sieciowej w metodzie przestrzeni stanów

RYSZARD PORADA

*Instytut Elektrotechniki Przemysłowej, Politechnika Poznańska*

*Artykuł wpłynął 1986. 12. 19*
*Autoryzowano do druku 1987. 08.05*

W pracy przedstawiono liniowy model matematyczny w metodzie przestrzeni stanów, falownika tyrystorowego 3-fazowego o komutacji sieciowej, stosowanego do odzysku energii hamowania silników spalinowych lokomotyw trakcyjnych, dla założeń odwzorowujących komutację natychmiastową i rzeczywistą (prostą). Określono macierze układu i sterowania oraz warunki początkowe wymagane do rozwiązania równania stanu dla wszystkich struktur powstających w czasie pracy falownika. Umożliwia to, dzięki zastosowaniu postaci algebraicznych wektora stanu, uzyskanie wektora odpowiedzi dla dowolnej chwili czasu i dowolnej struktury falownika, przy obu założonych rodzajach komutacji.

## 1. WSTĘP

Analiza układów energoelektronicznych przedstawia zwykle znaczne trudności natury matematycznej ze względu na nieliniowość charakterystyk napięciowo-prądowych elementów składowych (tyrystory, dławiki, transformatory) oraz fakt, że zjawiska zachodzące podczas ich pracy opisywane są różnymi układami równań różniczkowych dla każdej struktury układu. Z tego względu niemożliwe jest uzyskanie rozwiązań analitycznych równań opisujących pracę układów. Analizę przeprowadza się zwykle przy założeniach upraszczających, polegających na pominięciu parametrów układów mających niewielki wpływ na przebiegi procesów elektromagnetycznych lub na założeniu liniowości elementów składowych. Rozwiązanie równań opisujących pracę układów uzyskuje się różnymi metodami znanymi z teorii obwodów, zależnie od złożoności układów i wymaganej dokładności. Dla układów o dużej złożoności korzystne jest zastosowanie metody przestrzeni stanów, gdyż jest ona podstawą wielu numerycznych metod analizy. Metoda ta jest szczególnie przydatna w przypadkach, gdy analityczne rozwiązanie równań opisujących układ w różnych stanach pracy jest skomplikowane.

W niniejszej pracy przedstawiono model matematyczny w metodzie przestrzeni stanów, falownika tyrystorowego o komutacji sieciowej w układzie mostka 3-fazowego sterowanego symetrycznie, zasilanego z sieci elektroenergetycznej w/n przez transformator dwuzwojeniowy [1, 2]. Układ ten służy do odzyskiwania energii hamowania podczas prób poremontowych lokomotyw spalinowo-elektrycznych. Celem ostatecznym

badań było uzyskanie informacji co do wielkości mocy i jej składowych, oddawanych i pobieranych z sieci elektroenergetycznej oraz współczynników mocy i sprawności w ustalonym stanie pracy falownika. W tym celu niezbędne było wyznaczenie przebiegów czasowych napięć i prądów falownika, które to wielkości poddane dalej analizie harmonicznej umożliwiają określenie współczynników i charakterystyk energetycznych falownika. Uwzględnienie wszystkich parametrów transformatora (przede wszystkim indukcyjności własnych i wzajemnych transformatora) powoduje znaczne trudności przy analizie pracy układu. Dla ich ominięcia zastosowano do budowy modelu matematycznego metodę przestrzeni stanów oraz znane z literatury postacie algebraiczne wektora stanu, co wyeliminowało konieczność całkowania numerycznego równań stanu układu.

W pracy przedstawiono szczegółowy, liniowy model matematyczny badanego układu falownika, określając macierze stanu oraz macierze sterowania i warunki początkowe wymagane do rozwiązania równań stanu dla wszystkich struktur powstających w czasie pracy układu. Umożliwia to, dzięki zastosowaniu postaci algebraicznej wektora stanu, uzyskanie wektora odpowiedzi dla dowolnej chwili czasu i dowolnej struktury przy założeniach odwzorowujących komutację natychmiastową oraz rzeczywistą (prostą).

## 2. MODEL MATEMATYCZNY FALOWNIKA W METODZIE PRZESTRZENI STANÓW

Dla modelu falownika w metodzie przestrzeni stanów przyjęto następujące założenia:

1. Napięcie sieci jest sinusoidalne i symetryczne pod względem amplitudy, fazy i częstotliwości.
2. Elementy pasywne układu falownika (rezystancja indukcyjności) są elementami liniowymi, określonymi przez parametry skupione, niezmienne w czasie.
3. Pomiędzy elementami pasywnymi układu mogą występować sprzężenia magnetyczne i elektryczne, a cały układ znajduje się w środowisku symetrycznym pod względem magnetycznym i elektrycznym.
4. Tyrystory są elementami idealnymi.
5. Załączanie tyrystorów jest symetryczne.
6. SEME prądnicy jest stała w całym zakresie obciążenia układu.

Dla przyjętych założeń układ falownika jest układem liniowym stacjonarnym, a jego równanie stanu i równanie wyjścia mają postać [6, 9]

$$[\dot{x}(t)] = [A][x(t)] + [B][u(t)], \tag{1}$$

$$[y(t)] = [C][x(t)] + [D][u(t)], \tag{2}$$

przy czym:

$[x(t)]$ — wektor stanu
$[(y(t)]$ — wektor odpowiedzi
$[u(t)]$ — wektor sterowania
$[A]$ — macierz układu o wymiarach $n \times n$,
$[B]$ — macierz sterowania o wymiarach $n \times p$,
$[C]$ — macierz odpowiedzi o wymiarach $q \times n$,
$[D]$ — macierz transmisyjna o wymiarach $q \times p$.

Rozwiązanie układu równań różniczkowych niejednorodnych (1) spełniające warunek początkowy

$$[x(t_0)] = [x_0] \tag{3}$$

ma postać

$$[x(t)] = e^{[A](t-t_0)}[x_0] + \int_{t_0}^{t} e^{[A](t-\tau)}[B][u(\tau)]\,d\tau. \tag{4}$$

W pracach [7, 8] podano postaci algebraiczne wektora stanu dla wektora sterowania o składowych sinusoidalnych

$$[u(t)] = \begin{bmatrix} U_{m1}\sin(\omega t \pm \psi_1) \\ U_{m2}\sin(\omega t \pm \psi_2) \\ \vdots \\ U_{mp}\sin(\omega t \pm \psi_p) \end{bmatrix} \tag{5}$$

w postaci

$$\begin{aligned}[x(t)] = {} & e^{[A]t}[x(0)] + [\omega^2[A]^{-1} + [A]^{-1}e^{[A]t}[[B][u(0)] + [A]^{-1}[B][u'(0)]] - \\ & -[\omega^2[A]^{-1} + [A]]^{-1}[[B][u(t)] + [A]^{-1}[B][u'(t)]],\end{aligned} \tag{6}$$

oraz dla wektora sterowania o składowych stałych i sinusoidalnych

$$[u(t)] = \begin{bmatrix} U_1 \pm U_{m1}\sin(\omega t \pm \psi_1) \\ U_2 \pm U_{m2}\sin(\omega t \pm \psi_2) \\ \vdots \\ U_p \pm U_{mp}\sin(\omega t \pm \psi_p) \end{bmatrix} \tag{7}$$

w postaci

$$\begin{aligned}[x(t)] = {} & e^{[A]t}[[x(0)] + [A]^{-1}[B][u(0)]] + \\ & + [A]^{-1}[\omega^2[A]^{-1} + [A]]^{-1}e^{[A]t}[[B][u'(0)] + [A]^{-1}[B][u''(0)]] - \\ & - [A]^{-1}[B][u(t)] - \\ & - [A]^{-1}[\omega^2[A]^{-1} + [A]]^{-1}[[B][u'(t)] + [A]^{-1}[B][u''(t)]],\end{aligned} \tag{8}$$

przy czym:

$[x(0)]$ — wektor stanu dla $t = 0$,

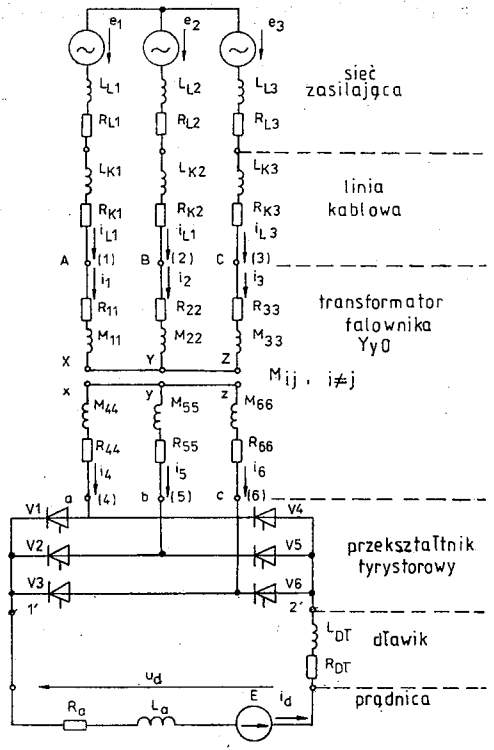
$[u(0)]$, $[u'(0)]$, $[u''(0)]$ — wektor sterowania oraz jego pierwsza i druga pochodna dla $t = 0$,

$[u'(t)]$, $[u''(t)]$ — pierwsza i druga pochodna wektora sterowania.

Wzory (6) i (8) umożliwiają w prosty sposób analizę procesów nieustalonych i ustalonych zachodzących w układach wielowymiarowych dla podanych rodzajów wektora sterowania bez konieczności całkowania numerycznego równań stanu. Jedynym warunkiem koniecznym istnienia postaci algebraicznej wektora stanu jest istnienie macierzy odwrotnej układu $[A]^{-1}$.

Szczegółowy schemat ideowy analizowanego układu falownika przedstawiono na rysunku 1, na którym oznaczono:

$R_L$, $R_K$, $R_{11}$ ... $R_{66}$, $R_{Dl}$, $R_a$ — rezystancja, odpowiednio: linii zasilającej, linii kablowej, uzwojeń obu stron transformatora, dławika, twornika prądnicy,




Rys. 1. Schemat ideowy obwodu głównego falownika 3-fazowego mostkowego

$L_L, L_K, M_{11} \ldots M_{66}, M_{ij}(i \neq j), L_{DI}, L_a$ — indukcyjność, odpowiednio: linii zasilającej, linii kablowej, własna uzwojeń obu stron transformatora, wzajemna obu stron transformatora, dławika, twornika prądnicy.

Jako współrzędne wektora stanu dla rozpatrywanego układu wybrano prądy fazowe obu stron transformatora $i_1 \ldots i_6$. Ponieważ celem analizy jest określenie mocy oraz współczynników mocy i sprawności układu na podstawie znajomości prądów i napięć układu, tym samym jako współrzędne wektora odpowiedzi przyjęto współrzędne wektora stanu. Określono więc macierz odpowiedzi $[C]$ jako macierz jednostkową, natomiast macierz transymisyjną $[D]$ jako macierz zerową.

Macierz układu $[A]$ oraz macierz sterowania $[B]$ można wyznaczyć na podstawie naturalnych równań równowagi elektroenergetycznej układu (rysunek 1), które w postaci ogólnej, dla przyjętych założeń, określa zależność

$$[L]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[i(t)] + [R][i(t)] = [u(t)], \tag{9}$$

przy czym:

$[L]$ — macierz indukcyjności układu,

$[R]$ — macierz rezystancji układu,

$[i(t)]$ — wektor stanu,

$[u(t)]$ — wektor sterowania.

Sprowadzając równanie (9) do postaci w metodzie przestrzeni stanów otrzymano

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[i(t)] = -[L]^{-1}[R][i(t)] + [L]^{-1}[u(t)]. \tag{10}$$

Zatem macierz stanu określa zależność

$$[A] = -[L]^{-1}[R], \tag{11}$$

a macierz sterowania

$$[B] = [L]^{-1}. \tag{12}$$

Dla analizowanego układu (rysunek 1) przyjęto, że 3-fazowa linia elektroenergetyczna i kabel zasilający reprezentowane są jedynie przez indukcyjności własne i rezystancje (pomija się występowanie sprzężeń magnetycznych oraz pojemności). Zatem macierze indukcyjności oraz rezystancji linii i kabla mają wymiar $3 \times 3$ i można je przedstawić w postaci, odpowiednio:

— macierz indukcyjności linii

$$[L_L] = \mathrm{diag}[L_{L1}, L_{L2}, L_{L3}], \tag{13}$$

— macierz rezystancji linii

$$[R_L] = \mathrm{diag}[R_{L1}, R_{L2}, R_{L3}], \tag{14}$$

— macierz indukcyjności kabla

$$[L_K] = \mathrm{diag}[L_{K1}, L_{K2}, L_{K3}], \tag{15}$$

— macierz rezystancji kabla

$$[R_K] = \mathrm{diag}[R_{K1}, R_{K2}, R_{K3}]. \tag{16}$$

Macierze indukcyjności i rezystancji transformatora mogą być przedstawione jako macierze blokowe o wymiarach $3 \times 3$, odpowiednio: macierz indukcyjności transformatora

$$[M_T] = \begin{bmatrix} [M_{T11}] & [M_{T12}] \\ [M_{T21}] & [M_{T22}] \end{bmatrix}, \tag{17}$$

przy czym

— $[M_{T11}]$ — podmacierz indukcyjności własnych i wzajemnych strony pierwotnej transformatora

$$[M_{T11}] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ \hline M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ \hline M_{31} & M_{32} & M_{33} \\ \hline \end{array}, \tag{18}$$

— $[M_{T12}]$ — podmacierz indukcyjności wzajemnych strony pierwotnej i wtórnej transformatora

$$[M_{T12}] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline M_{14} & M_{15} & M_{16} \\ \hline M_{24} & M_{25} & M_{26} \\ \hline M_{34} & M_{35} & M_{36} \\ \hline \end{array}, \tag{19}$$

— $[M_{T21}]$ — podmacierz indukcyjności wzajemnych strony wtórnej i pierwotnej transformatora

$$[M_{T21}] = \begin{array}{|c|c|c|}\hline M_{41} & M_{42} & M_{43} \\ \hline M_{51} & M_{52} & M_{53} \\ \hline M_{61} & M_{62} & M_{63} \\ \hline \end{array}, \tag{20}$$

— $[M_{T22}]$ — podmacierz indukcyjności własnych i wzajemnych strony wtórnej transformatora

$$[M_{T22}] = \begin{array}{|c|c|c|}\hline M_{44} & M_{45} & M_{46} \\ \hline M_{54} & M_{55} & M_{56} \\ \hline M_{64} & M_{65} & M_{66} \\ \hline \end{array}, \tag{21}$$

oraz macierz rezystancji transformatora

$$[R_T] = \begin{bmatrix} [R_{T11}] & [0] \\ [0] & [R_{T22}] \end{bmatrix}, \tag{22}$$

przy czym

— $[R_{T11}]$ — podmacierz rezystancji strony pierwotnej transformatora

$$[R_{T11}] = \mathrm{diag}[R_{11}, R_{22}, R_{33}], \tag{23}$$

— $[R_{T22}]$ — podmacierz rezystancji strony wtórnej transformatora

$$[R_{T22}] = \mathrm{diag}[R_{44}, R_{55}, R_{66}]. \tag{24}$$

Prądnica prądu stałego na schemacie ideowym (rysunek 1) reprezentowana jest przez rezystancję $R_a$ oraz indukcyjność $L_a$, natomiast dławik wygładzający $Dl$ — przez rezystancję $R_{Dl}$ oraz indukcyjność $L_{Dl}$. Zatem parametry obwodu prądu wyprostowanego określone są przez indukcyjność

$$L_0 = L_a + L_{Dl} \tag{25}$$

oraz rezystancję

$$R_0 = R_a + R_{Dl}. \tag{26}$$

Przy założeniu braku sprzężeń magnetycznych pomiędzy prądnicą i dławikiem oraz dla ujednolicenia zapisu parametry obwodu prądu wyprostowanego przedstawiono w postaci macierzy diagonalnych o wymiarach $3 \times 3$, odpowiednio:

— macierz indukcyjności obwodu prądu wyprostowanego

$$[L_0] = \mathrm{diag}[L_0, L_0, L_0], \tag{27}$$

— macierz rezystancji obwodu prądu wyprostowanego

$$[R_0] = \mathrm{diag}[R_0, R_0, R_0]. \tag{28}$$

Macierze indukcyjności i rezystancji układu $[L]$ oraz $[R]$ można również przedstawić w postaci macierzy blokowych, odpowiednio:

— macierz indukcyjności układu

$$[L] = \begin{bmatrix} [L_{11}] & [L_{12}] \\ [L_{21}] & [L_{22}] \end{bmatrix}, \tag{29}$$

— macierz rezystancji układu

$$[R] = \begin{bmatrix} [R_{11}] & [0] \\ [0] & [R_{22}] \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Poszczególne podmacierze w macierzach (29) i (30) zgodnie z przyjętymi założeniami oraz schematem ideowym układu można przedstawić w postaci sumy podmacierzy poszczególnych części układu, zatem:

$$[L_{11}] = [L_L] + [L_K] + [M_{T11}], \tag{31a}$$

$$[L_{12}] = [M_{T12}] \tag{31b}$$

$$[L_{21}] = [M_{T21}] \tag{31c}$$

$$[L_{22}] = [M_{T22}] + [L_0], \tag{31d}$$

oraz

$$[R_{11}] = [R_L] + [R_K] + [R_{T11}] \tag{32a}$$

$$[R_{22}] = [R_{T22}] + [R_0]. \tag{32b}$$

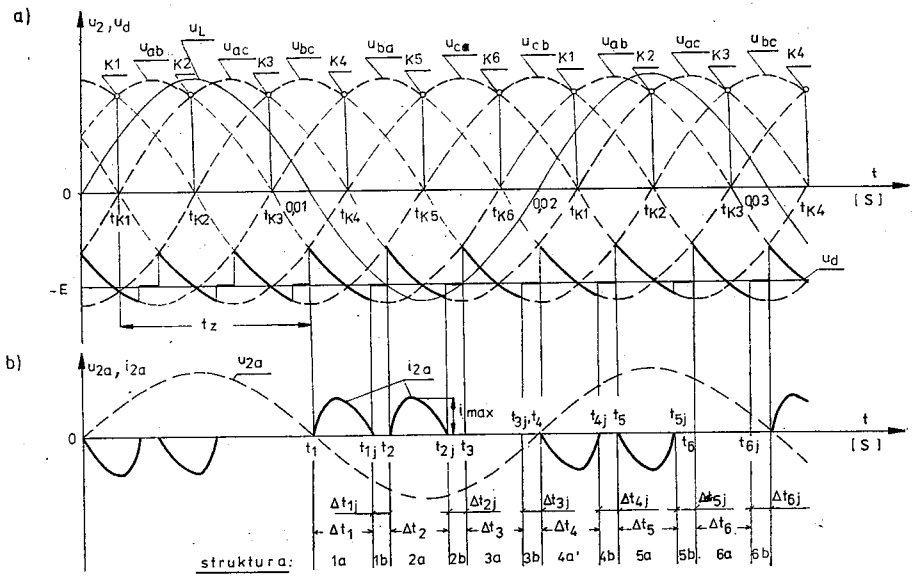
W ten sposób jednoznacznie zostały określone macierze indukcyjności i rezystancji układu, a tym samym — zgodnie z zależnościami (11) i (12) — macierz układu i macierz sterowania, niezbędne dla wyznaczenia postaci algebraicznej wektora stanu i wektora odpowiedzi. Dla występujących w układzie sterowań — stałych i sinusoidalnych — możliwe jest badanie procesów nieustalonych i ustalonych zachodzących w układzie przy założeniu stałej jego struktury. W analizowanym przypadku, układ posiada zmienną strukturę (wynika to z dyskretnej pracy prostownika tyrystorowego), niezbędne jest zatem ustalenie czasu trwania poszczególnych struktur oraz — dla każdej z nich — odpowiednich macierzy indukcyjności i rezystancji w celu określenia właściwego dla danej struktury wektora odpowiedzi.

## 3. MODEL MATEMATYCZNY FALOWNIKA DLA KOMUTACJI NATYCHMIASTOWEJ

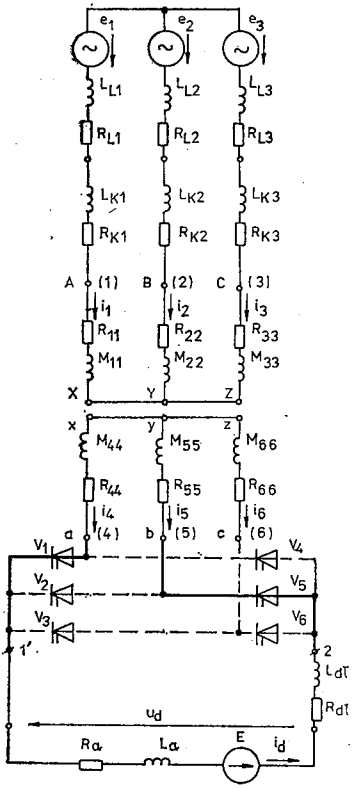
Dyskretna praca prostownika tyrystorowego połączonego z uzwojeniami strony wtórnej transformatora powoduje, że zależnie od sposobu przewodzenia prądu przez prądnicę (przewodzenie prądu impulsowe, graniczne lub ciągłe) oraz przyjętego z założenia rodzaju komutacji tyrystorów prostownika, transformator znajduje się w stanie pracy: trójfazowej (z niesymetrią obciążenia), dwufazowej (niesymetrycznej) lub pracy jałowej (prąd strony wtórnej jest równy zero). Z tego powodu wymagane jest określenie macierzy indukcyjności i rezystancji układu w każdej z powstających struktur oraz dla każdego sposobu przewodzenia prądu.

### Przewodzenie impulsowe

Przewodzenie impulsowe prądu charakteryzuje się powstawaniem przerw bezprądowych w czasie trwania każdej ze struktur układu. Przykładowe wybrane przebiegi napięć i prądów przedstawiono na rysunku 2.




Rys. 2. Przebiegi napięć i prądów falownika w zakresie impulsowego przewodzenia prądu: a) przebiegi napięć przewodowych strony wtórnej transformatora i napięcia wyjściowego, b) przebieg prądu fazowego strony wtórnej transformatora




Rys. 3. Schemat ideowy falownika dla struktury 1a

W czasie ustalonej pracy układu powstaje 12 struktur w ramach jednego okresu napięcia linii, z których 6 odpowiada pracy dwufazowej transformatora (struktury 1a ... ... 6a) — rysunek 2, natomiast w pozostałych transformator znajduje się w stanie jałowym (struktury 1b...6b). Schemat ideowy falownika dla struktury 1a przedstawiono na rysunku 3.

Zmiana struktury układu następuje po stronie wtórnej transformatora, zatem podmacierze indukcyjności $[L_{11}]$ oraz rezystancji $[R_{11}]$ dla każdej z dwunastu struktur określone są zależnościami (31a) oraz (32a). Zmianie ulegają jedynie pozostałe podmacierze macierzy indukcyjności $[L]$ oraz macierzy rezystancji $[R]$.

Na podstawie schematu z rysunku 3 napisano równania równowagi elektromagnetycznej strony wtórnej transformatora dla **struktury 1a** w postaci

$$M_{41}\frac{di_1}{dt}+M_{42}\frac{di_2}{dt}+M_{43}\frac{di_3}{dt}+M_{44}\frac{di_4}{dt}+M_{45}\frac{di_5}{dt}+R_{44}i_4-R_0i_4-$$
$$-L_0\frac{di_4}{dt}+E=M_{51}\frac{di_1}{dt}+M_{52}\frac{di_2}{dt}+M_{53}\frac{di_3}{dt}+M_{54}\frac{di_4}{dt}+M_{55}\frac{di_5}{dt}+R_{55}i_5, \tag{33a}$$

$$M_{51}\frac{di_1}{dt}+M_{52}\frac{di_2}{dt}+M_{53}\frac{di_3}{dt}+M_{54}\frac{di_4}{dt}+M_{55}\frac{di_5}{dt}-R_0i_5-L_0\frac{di_5}{dt}-E=$$
$$=M_{41}\frac{di_1}{dt}+M_{42}\frac{di_2}{dt}+M_{43}\frac{di_3}{dt}+M_{44}\frac{di_4}{dt}+M_{45}\frac{di_5}{dt}+R_{44}i_4. \tag{33b}$$

Po uporządkowaniu stronami otrzymano:

$$(M_{41}-M_{51})\frac{di_1}{dt}+(M_{42}-M_{52})\frac{di_2}{dt}+(M_{43}-M_{53})\frac{di_3}{dt}+$$
$$+[(M_{44}-M_{54})-L_0]\frac{di_4}{dt}+(M_{45}-M_{55})\frac{di_5}{dt}+(R_{44}-R_0)i_4-R_{55}i_5=-E, \tag{34a}$$

$$-(M_{41}-M_{51})\frac{di_1}{dt}-(M_{42}-M_{52})\frac{di_2}{dt}-(M_{43}-M_{53})\frac{di_3}{dt}-$$
$$-(M_{44}-M_{54})\frac{di_4}{dt}+[-(M_{45}-M_{55})-L_0]\frac{di_5}{dt}-R_{44}i_4+(R_{55}-R_0)i_5=E. \tag{34b}$$

Na podstawie równań (34a) i (34b) można napisać pozostałe podmacierze macierzy indukcyjności i rezystancji układu w postaci

— macierz $[L_{12}]$ o wymiarze $3\times 2$

$$[L_{12}]=\begin{array}{|c|c|}\hline M_{14} & M_{15}\\ \hline M_{24} & M_{25}\\ \hline M_{34} & M_{35}\\ \hline\end{array}, \tag{35}$$

— macierz $[L_{21}]$ o wymiarze $2\times 3$

$$[L_{21}]=\begin{array}{|c|c|c|}\hline (M_{41}-M_{51}) & (M_{42}-M_{52}) & (M_{43}-M_{53}),\\ \hline -(M_{41}-M_{51}) & -(M_{42}-M_{52}) & -(M_{43}-M_{53})\\ \hline\end{array} \tag{36}$$

— macierz $[L_{22}]$ o wymiarze $2\times 2$

$$[L_{22}] = \left[\begin{array}{c|c} (M_{44}-M_{54})-L_0 & (M_{45}-M_{55}) \\ \hline -(M_{44}-M_{54}) & -(M_{45}-M_{55})-L_0 \end{array}\right] \tag{37}$$

— macierz $[R_{22}]$ o wymiarze $2\times 2$

$$[R_{22}] = \left[\begin{array}{c|c} (R_{44}-R_0) & -R_{55} \\ \hline -R_{44} & (R_{55}-R_0) \end{array}\right]. \tag{38}$$

W analizowanym przypadku wektor stanu i wektor sterowania posiadają 5 współrzędnych, można je zatem przedstawić w postaci, odpowiednio

— wektor stanu

$$[i(t)] = \left[\begin{array}{c} i_1(t) \\ \hline i_2(t) \\ \hline i_3(t) \\ \hline i_4(t) \\ \hline i_5(t) \end{array}\right], \tag{39}$$

— wektor sterowania

$$[u(t)] = \left[\begin{array}{c} u_1(t) \\ \hline u_2(t) \\ \hline u_3(t) \\ \hline -E \\ \hline E \end{array}\right], \tag{40}$$

przy czym

— $i_1(t) \ldots i_5(t)$ — prądy fazowe transformatora,

— $u_1(t) \ldots u_3(t)$ — napięcie fazowe linii o postaci

$u_1(t) = U_m \sin\omega t$,

$u_2(t) = U_m \sin(\omega t - 120°)$,

$u_3(t) = U_m \sin(\omega t - 240°)$,

— $E$ — SEM $E$ prądnicy.

**Struktura 1b** powstająca po strukturze 1a charakteryzuje się pracą jałową transformatora i jest identyczna dla wszystkich pozostałych, tzn. 2b ... 6b. Macierz indukcyjności układu $[L]$ jest równa podmacierzy indukcyjności $[L_{11}]$

$$[L] = [L_{11}], \tag{41}$$

natomiast macierz rezystancji $[R]$ — podmacierzy rezystancji $[R_{11}]$

$$[R] = [R_{11}]. \tag{42}$$

Wektor stanu i wektor sterowania mają trzy współrzędne o postaci

— wektor stanu

$$[i(t)] = \left[\begin{array}{c} i_1(t) \\ \hline i_2(t) \\ \hline i_3(t) \end{array}\right], \tag{43}$$

— wektor sterowania

$$[u(t)] = \left[\begin{array}{c} u_1(t) \\ \hline u_2(t) \\ \hline u_3(t) \end{array}\right]. \tag{44}$$

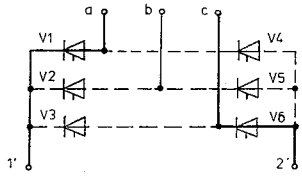
Postępując analogicznie dla pozostałych struktur, tzn. 2a...6a można wyznaczyć poszczególne podmacierze indukcyjności i rezystancji układu oraz wektor stanu i wektor sterowania.

**Struktura 2a**

Na rysunku 4 podano schemat prostownika odpowiadający schematowi z rysunku 3, zaznaczając drogę przewodzenia prądu w tej strukturze. Podmacierze macierzy indukcyjności i rezystancji układu oraz wektor stanu i wektor sterowania mają posatć:

— macierz $[L_{12}]$ o wymiarze $3\times 2$

$$[L_{12}] = \left[\begin{array}{c|c} M_{14} & M_{16} \\ \hline M_{24} & M_{26} \\ \hline M_{34} & M_{36} \end{array}\right], \tag{45}$$




Rys. 4. Uproszczony schemat falownika dla struktury 2a

— macierz $[L_{21}]$ o wymiarze $2\times 3$

$$[L_{21}] = \left[\begin{array}{c|c|c} (M_{41}-M_{61}) & (M_{42}-M_{62}) & (M_{43}-M_{63}) \\ \hline -(M_{41}-M_{61}) & -(M_{42}-M_{62}) & -(M_{43}-M_{63}) \end{array}\right], \tag{46}$$

— macierz $[L_{22}]$ o wymiarze $2\times 2$

$$[L_{22}] = \left[\begin{array}{c|c} (M_{44}-M_{64})-L_0 & (M_{46}-M_{66}) \\ \hline -(M_{44}-M_{64}) & -(M_{46}-M_{66})-L_0 \end{array}\right], \tag{47}$$

— macierz $[R_{22}]$ o wymiarze $2\times 2$

$$[R_{22}] = \left[\begin{array}{c|c} (R_{44}-R_0) & -R_{66} \\ \hline -R_{44} & (R_{66}-R_0) \end{array}\right], \tag{48}$$

— wektor stanu

$$[i(t)] = \left[\begin{array}{c} i_1(t) \\ \hline i_2(t) \\ \hline i_3(t) \\ \hline i_4(t) \\ \hline i_6(t) \end{array}\right], \tag{49}$$

— wektor sterowania

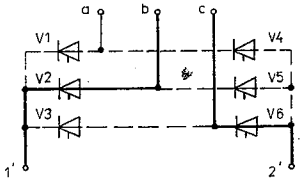
$$[u(t)] = \left[\begin{array}{c} u_1(t) \\ \hline u_2(t) \\ \hline u_3(t) \\ \hline -E \\ \hline E \end{array}\right]. \tag{50}$$

**Struktura 3a**

Na rysunku 5 podano schemat prostownika odpowiadający schematowi z rysunku 3 zaznaczając drogę przewodzenia prądu w tej strukturze. Podmacierze macierzy indukcyjności i rezystancji układu oraz wektor stanu i wektor sterowania mają postać:

— macierz $[L_{12}]$ o wymiarze $3\times 2$

$$[L_{12}] = \left|\begin{array}{c|c} M_{15} & M_{16} \\ \hline M_{25} & M_{26} \\ \hline M_{35} & M_{36} \end{array}\right|, \tag{51}$$




Rys. 5. Uproszczony schemat falownika dla struktury 3a

— macierz $[L_{21}]$ o wymiarze $2\times 3$

$$[L_{21}] = \left|\begin{array}{c|c|c} (M_{51}-M_{61}) & (M_{52}-M_{62}) & (M_{53}-M_{63}) \\ \hline -(M_{51}-M_{61}) & -(M_{52}-M_{62}) & -(M_{53}-M_{63}) \end{array}\right|, \tag{52}$$

— macierz $[L_{22}]$ o wymiarze $2\times 2$

$$[L_{22}] = \left|\begin{array}{c|c} (M_{55}-M_{65})-L_0 & (M_{56}-M_{66}) \\ \hline -(M_{55}-M_{65}) & -(M_{56}-M_{66})-L_0 \end{array}\right|, \tag{53}$$

— macierz $[R_{22}]$ o wymiarze $2\times 2$

$$[R_{22}] = \left|\begin{array}{c|c} (R_{55}-R_0) & -R_{66} \\ \hline -R_{55} & (R_{66}-R_0) \end{array}\right|, \tag{54}$$

— wektor stanu

$$[i(t)] = \left|\begin{array}{c} i_1(t) \\ \hline i_2(t) \\ \hline i_3(t) \\ \hline i_5(t) \\ \hline i_6(t) \end{array}\right|, \tag{55}$$

— wektor sterowania

$$[u(t)] = \left|\begin{array}{c} u_1(t) \\ \hline u_2(t) \\ \hline u_3(t) \\ \hline -E \\ \hline E \end{array}\right|. \tag{56}$$

W powstających kolejno strukturach układu 4a...6a zmienia się obwód przewodzenia prądu przez tyrystory prostownika (w strukturze 4a przewodzą tyrystory V2 i V4, 5a — tyrystory V3 i V4, 6a — tyrystory V3 i V5). Nie zmieniają się natomiast (ze względu na to, że prostownik jest układem dwukierunkowym) fazy strony wtórnej transformatora współpracujące z nim w tych strukturach w porównaniu ze strukturami 1a...3a. Tym samym można stwierdzić, że struktura 1a odpowiada strukturze 4a, struktura 2a — strukturze 5a, a struktura 3a — strukturze 6a. Przedstawione dla struktur 1a...3a podmacierze indukcyjności i rezystancji układu oraz wektor stanu są odpowiednio identyczne dla

truktur 4a...6a, zmianie ulega jedynie wektor sterowania, który dla tych trzech struktur, tzn. 4a...6a ma stałą postać

$$[u(t)] = \begin{vmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ E \\ -E \end{vmatrix}. \tag{57}$$

Przewodzenie prądu w układzie rozpoczyna się w chwilach, w których odpowiedniej pary tyrystorów znajdują się w stanie blokowania. Chwile te określone są przez punkty komutacji naturalnej, które oznaczono na rysunku 2 przez K1...K6. Przyjmując jako odniesienie zero napięcia fazowego fazy $R$ linii elektroenergetycznej, położenie punktów komutacji swobodnej prostownika 3-fazowego można wyznaczyć przez porównanie bezwzględnych wartości odpowiednich napięć fazowych indukowanych po stronie wtórnej transformatora znajdującego się w stanie jałowym, i tak:

— dla punktu K1

$$|u_a(t_{K1})| = |u_c(t_{K1})|, \tag{58a}$$

— dla punktu K2

$$|u_b(t_{K2})| = |u_c(t_{K2})|, \tag{58b}$$

— dla punktu K3

$$|u_a(t_{K3})| = |u_b(t_{K3})|, \tag{58c}$$

— dla punktu K4

$$|u_c(t_{K4})| = |u_a(t_{K4})|, \tag{58d}$$

— dla punktu K5

$$|u_c(t_{K5})| = |u_b(t_{K5})|, \tag{58e}$$

— dla punktu K6

$$|u_b(t_{K6})| = |u_a(t_{K6})|. \tag{58f}$$

Napięcia te opisane są równaniami równowagi elektromagnetycznej strony wtórnej transformatora w stanie jałowym, odpowiednio:

$$u_a(t) = M_{41}\frac{di_1}{dt} + M_{42}\frac{di_2}{dt} + M_{43}\frac{di_3}{dt}, \tag{59a}$$

$$u_b(t) = M_{51}\frac{di_1}{dt} + M_{52}\frac{di_2}{dt} + M_{53}\frac{di_3}{dt}, \tag{59b}$$

$$u_c(t) = M_{61}\frac{di_1}{dt} + M_{62}\frac{di_2}{dt} + M_{63}\frac{di_3}{dt}. \tag{59c}$$

Przyjęto, że pierwsza struktura układu zaczyna się w chwili załączenia tyrystorów V1 i V5. Jej początek może być opóźniony względem punktu komutacji naturalnej K1

o czas $t_z$, odpowiadający kątowi załączenia tyrystorów $\alpha_z$ — rysunku 2. Czas trwania tej struktury $\Delta t_1$ określony jest czasem przewodzenia pary tyrystorów V1 i V5, który zależy od parametrów układu, napięć wymuszających oraz kąta załączenia tyrystorów. Koniec tej struktury wyznacza początek następnej — 1b, która odpowiada stanowi jałowemu transformatora. Czas trwania struktury 1b wynosi $\Delta t_{1j}$, a jej koniec jest określony przez załączenie następnej pary tyrystorów, tzn. V1 i V6, zgodnie z sekwencją napięć indukowanych po stronie wtórnej transformatora. Przy założeniu symetrycznego sterowania tyrystorami falownika czas $t_z$ jest taki sam dla każdej nowo powstałej struktury.

Warunki początkowe wymagane dla rozwiązania równania równowagi elektromagnetycznej układu (10) w każdej strukturze wyznacza się ze znajomości prądów fazowych transformatora na początku i końcu każdej u nich, tzn. dla czasów $t_1 \ldots t_6$ oraz $t_{1j} \ldots t_{6j}$. Zatem wektor warunków początkowych dla poszczególnych struktur ma postać:
— dla struktur 1a...6a

$$[\boldsymbol{i}(t_n)] = \begin{bmatrix} i_1(t_n) \\ i_2(t_n) \\ i_3(t_n) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{60}$$

— dla struktur 1b...6b

$$[\boldsymbol{i}(t_{nj})] = \begin{bmatrix} i_1(t_{nj}) \\ i_2(t_{nj}) \\ i_3(t_{nj}) \end{bmatrix}, \tag{61}$$

przy czym $n = 1 \ldots 6$.

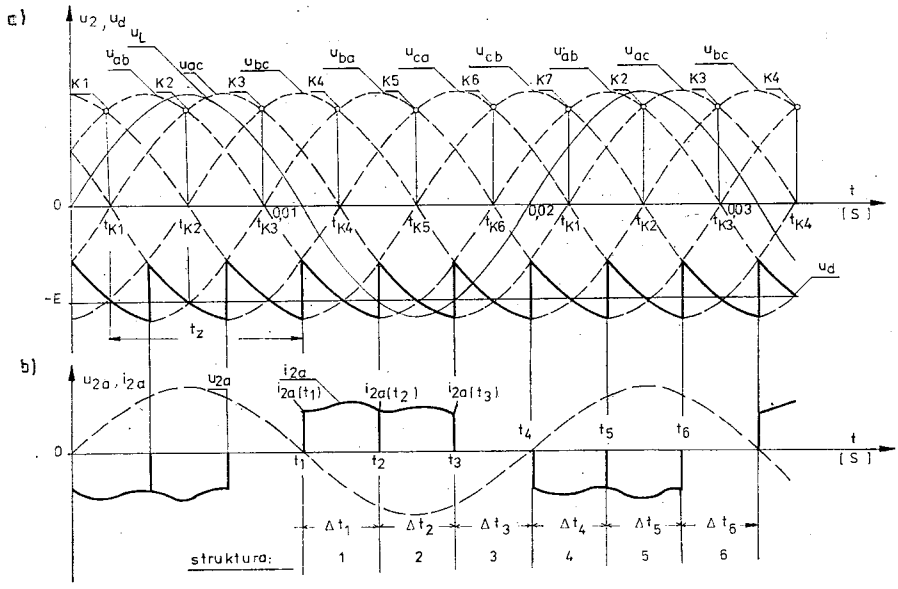
Analogicznie należy wyznaczyć fazy początkowe napięcia wymuszającego $\psi_1 \psi_3 \ldots$ oraz wartości tych napięć w punktach brzegowych poszczególnych struktur dla wektorów sterowania (5) i (7).

## Przewodzenie ciągłe

W przypadku ciągłego przewodzenia prądu w obwodzie prądu wyprostowanego znikają struktury 1b...6b, podczas trwania których prąd obwodu twornika prądnicy był równy zeru. Zmiany struktur układu następują przy różnej od zera wartości prądów strony wtórnej transformatora. Analizę tego stanu prący układu przeprowadzono przy założeniu komputacji natychmiastowej, tzn. że przejmowanie przewodzenia prądu przez kolejne tyrystory falownika następuje w czasie równym zero. Założenie takie jest teoretycznie możliwe pomimo istnienia indukcyjności obwodu komutacyjnego. Dla uproszczenia analizy pominięto także zjawiska brzegowe zachodzące przy skokowej zmianie struktury układu dla różnej od zera wartości prądu. Przykładowe wybrane przebiegi napięć i prądów układu przedstawiono na rysunku 6.

W przypadku ciągłego przewodzenia prądu zmiana struktury układu następuje również po stronie wtórnej transformatora, zatem podmacierze indukcyjności $[L_{11}]$ oraz rezystancji $[R_{11}]$ dla każdej z sześciu struktur określone są zależnościami (31a) i (32a). Zmianie ulegają jedynie pozostałe podmacierze macierzy indukcyjności $[L]$ oraz macierzy rezystancji $[R]$.

Ze względu na identyczność struktur 1a...6a oraz 1...6 można stwiedzić, że pozostałe podmacierze macierzy $[L]$ i $[R]$, tzn. $[L_{12}]$, $[L_{21}]$, $[L_{22}]$ oraz $[R_{22}]$, a także wektor stanu $[i(t)]$ i wektor sterowania $[u(t)]$ określone są zależnościami (35)÷(40) oraz (45)÷(57).




Rys. 6. Przebiegi napięć i prądów falownika w zakresie ciągłego przewodzenia prądu: a) przebiegi napięć przewodowych strony wtórnej transformatora i napięcia wyjściowego, b) przebieg prądu fazowego strony wtórnej transformatora

Położenie punktów komutacji naturalnej K1...K6 (rysunek 6) w tym stanie pracy układ można wyznaczyć z zależności (58a)÷(58f), jednak poszczególne napięcia $u_a(t)$, $u_b(t)$, $u_c(t)$ określone są innymi zależnościami niż przy impulsowym przewodzeniu prądu, odpowiednio:

— dla punktów K1 i K4

$$u_a(t) = M_{41}\frac{di_1}{dt} + M_{42}\frac{di_2}{dt} + M_{43}\frac{di_3}{dt} + M_{45}\frac{di_5}{dt} + M_{46}\frac{di_6}{dt}, \tag{62a}$$

$$u_b(t) = M_{51}\frac{di_1}{dt} + M_{52}\frac{di_2}{dt} + M_{53}\frac{di_3}{dt} + M_{55}\frac{di_5}{dt} + M_{56}\frac{di_6}{dt} + R_{55}i_5, \tag{62b}$$

$$u_c(t) = M_{61}\frac{di_1}{dt} + M_{62}\frac{di_2}{dt} + M_{63}\frac{di_3}{dt} + M_{65}\frac{di_5}{dt} + M_{66}\frac{di_6}{dt} + R_{66}i_6, \tag{62c}$$

— dla punktów K2 i K5

$$u_a(t) = M_{41}\frac{di_1}{dt} + M_{42}\frac{di_2}{dt} + M_{43}\frac{di_3}{dt} + M_{44}\frac{di_4}{dt} + M_{45}\frac{di_5}{dt} + R_{44}i_4, \tag{63a}$$

$$u_b(t) = M_{51}\frac{di_1}{dt} + M_{52}\frac{di_2}{dt} + M_{53}\frac{di_3}{dt} + M_{54}\frac{di_4}{dt} + M_{55}\frac{di_5}{dt} + R_{55}i_5, \tag{63b}$$

$$u_c(t) = M_{61}\frac{di_1}{dt} + M_{62}\frac{di_2}{dt} + M_{63}\frac{di_3}{dt} + M_{64}\frac{di_4}{dt} + M_{65}\frac{di_5}{dt}, \tag{63c}$$

— dla punktów K3 i K6

$$u_a(t) = M_{41}\frac{di_1}{dt} + M_{42}\frac{di_2}{dt} + M_{43}\frac{di_3}{dt} + M_{44}\frac{di_4}{dt} + M_{46}\frac{di_6}{dt} + R_{44}i_4, \tag{64a}$$

$$u_b(t) = M_{51}\frac{di_1}{dt} + M_{52}\frac{di_2}{dt} + M_{53}\frac{di_3}{dt} + M_{54}\frac{di_4}{dt} + M_{56}\frac{di_6}{dt}, \tag{64b}$$

$$u_c(t) = M_{61}\frac{di_1}{dt} + M_{62}\frac{di_2}{dt} + M_{63}\frac{di_3}{dt} + M_{64}\frac{di_6}{dt} + M_{66}\frac{di_6}{dt} + R_{66}i_6. \tag{64c}$$

Warunki początkowe wymagane dla rozwiązania równania równowagi elektromagnetycznej układu (10) w każdej strukturze, dla ciągłego przewodzenia prądu wyznacza się ze znajomości prądów fazowych transformatora na początku i końcu każdej z nich, tzn. dla czasów $t_1 \ldots t_6$. Zatem wektor warunków początkowych dla poszczególnych struktur ma postać

— dla struktury 1 — dla struktury 2 — dla struktury 3

$$[i(t_1)] = \begin{bmatrix} i_1(t_1) \\ i_2(t_1) \\ i_3(t_1) \\ i_4(t_1) \\ i_5(t_1) \end{bmatrix}, \quad [i(t_2)] = \begin{bmatrix} i_1(t_2) \\ i_2(t_2) \\ i_3(t_2) \\ i_4(t_2) \\ i_5(t_2) \end{bmatrix}, \quad [i(t_3)] = \begin{bmatrix} i_1(t_3) \\ i_2(t_3) \\ i_3(t_3) \\ i_4(t_3) \\ i_6(t_3) \end{bmatrix},$$

— dla struktury 4 — dla struktury 5 — dla struktury 6

$$[i(t_4)] = \begin{bmatrix} i_1(t_4) \\ i_2(t_4) \\ i_3(t_4) \\ i_6(t_4) \\ i_5(t_4) \end{bmatrix}, \quad [i(t_5)] = \begin{bmatrix} i_1(t_5) \\ i_2(t_5) \\ i_3(t_5) \\ i_4(t_5) \\ i_5(t_5) \end{bmatrix}, \quad [i(t_6)] = \begin{bmatrix} i_1(t_6) \\ i_2(t_6) \\ i_3(t_6) \\ i_4(t_6) \\ i_6(t_6) \end{bmatrix}. \tag{65}$$

Analogicznie należy wyznaczyć fazy początkowe napięcia wymuszającego $\psi_1 \ldots \psi_3$ oraz wartości tych napięć w punktach brzegowych poszczególnych struktur dla wektorów sterowania (5) i (7).

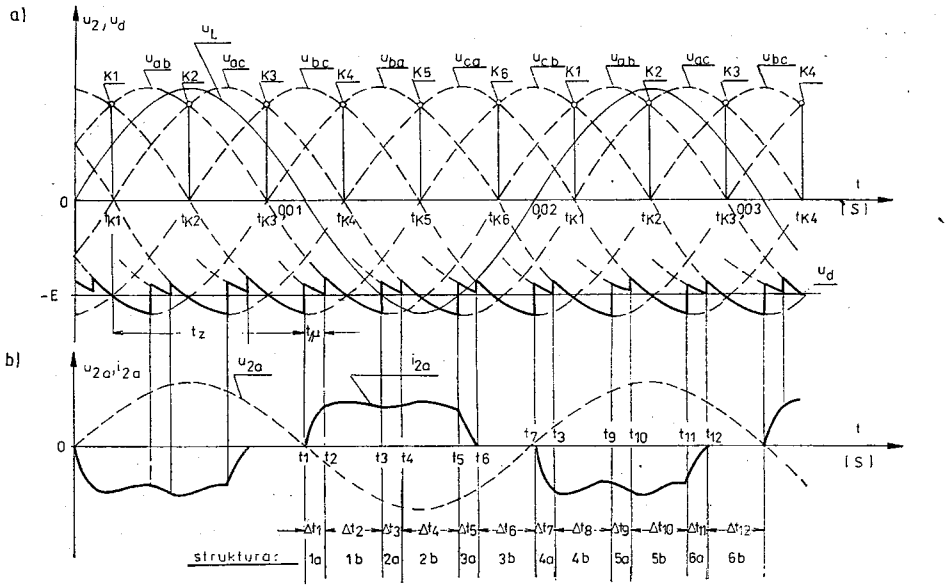
Trzecim stanem pracy układu jest **stan granicznego przewodzenia prądu** tzn., że w chwi-

lach zmiany struktury układu wartości prądu strony wtórnej transformatora jest równa zeru. W układzie powstają także same struktury jak w przypadku przewodzenia ciągłego. Wynika stąd, że podmacierze indukcyjności i rezystancji układu, a także wektor stanu, wektor sterowania i sposób wyznaczania punktów komutacji swobodnej tyrystorów falownika przedstawione dla przypadku ciągłego przewodzenia prądu słuszne są również dla stanu przewodzenia granicznego. Zmianie ulega jedynie wektór warunków początkowych, który określa zależność (60).

## 4. MODEL MATEMATYCZNY FALOWNIKA DLA KOMUTACJI RZECZYWISTEJ (PROSTEJ)

W punkcie 3 pracy przedstawiono model matematyczny falownika dla trzech stanów przewodzenia prądu w obwodzie prądu wyprostowanego, przy czym dla stanu przewodzenia ciągłego założono komutację natychmiastową tyrystorów falownika. W niniejszym punkcie pracy przedstawiono model matematyczny tego układu przy założeniu komutacji rzeczywistej (prostej). Założenie to dotyczy jedynie stanu ciągłego przewodzenia prądu, ponieważ komutacja tyrystorów odbywa się przy wartościach prądów różnych od zera. Praca układu w pozostałych stanach przewodzenia prądu tzn. impulsowego i granicznego jest niezależna od tego założenia, zatem dotyczący ich model matematyczny falownika jest słuszny również w tym przypadku.

Założenie komutacji rzeczywistej (prostej) oznacza, że przyjmowanie przewodzenia

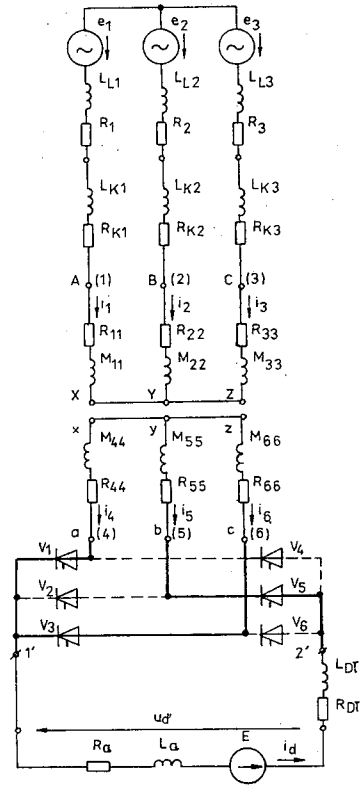



Rys. 7. Przebiegi napięć i prądów falownika w zakresie ciągłego przewodzenia prądu dla komutacji rzeczywistej (prostej): a) przebiegi napięć przewodowych strony wtórnej transformatora i napięcia wyjściowego, b) przebieg prądu fazowego strony wtórnej transformatora

prądu przez kolejne tyrystory falownika odbywa się w czasie różnym od zera, zależnym od rzeczywistych parametrów powstającego obwodu komutacyjnego, warunków początkowych oraz kąta załączenia tyrystorów falownika. Przykładowe wybrane przebiegi napięć i prądów układu przedstawiono na rysunku 7.

W czasie ustalonej pracy układu powstaje 12 struktur w ramach jednego okresu napięcia sieci, z których 6 odpowiada pracy dwufazowej transformatora (struktury 1b...6b) — rysunek 6, natomiast pozostałe 6 — pracy trójfazowej niesymetrycznej (struktury 1a...6a). W czasie ich trwania zachodzą procesy komutacyjne falownika. Zmiana struktury układu następuje po stronie wtórnej transformatora zatem podmacierze indukcyjności $[\boldsymbol{L}_{11}]$ oraz rezystancji $[\boldsymbol{R}_{11}]$ dla każdej z 12 struktur określone są zależnościami (31a) i (32a). Zmianie ulegają jedynie pozostałe podmacierze macierzy indukcyjności $[\boldsymbol{L}]$ oraz macierzy rezystancji $[\boldsymbol{R}]$.

Praca układu w strukturach 1b...6b (rysunek 7) odpowiada pracy przy założeniu komutacji natychmiastowej, której analizę przedstawiono w punkcie 3 pracy. Dla pozostałych struktur 1a...6a, odpowiadających procesom komutacyjnym falownika, wymagana jest odrębna analiza dla ustalenia macierzy indukcyjności i rezystancji układu. Zmiana struktury układu w procesie komutacji prostej nie zmniejsza maksymalnego wymiaru wektora stanu $n = 6$, stąd podmacierz indukcyjności $[\boldsymbol{L}_{12}]$ dla struktur 1a...6a opisana jest zależnością (31b). Zmianie ulegają jedynie podmacierze indukcyjności $[\boldsymbol{L}_{21}]$ i $[\boldsymbol{L}_{22}]$




Rys. 8. Schemat ideowy falownika dla struktury 1a

oraz podmacierz rezystancji $[R_{22}]$. Dla ich ustalenia napisano równania równowagi elektromagnetycznej strony wtórnej transformatora dla **struktury Ia** (rysunek 8) w postaci:

$$M_{41}\frac{di_1}{dt}+M_{42}\frac{di_2}{dt}+M_{43}\frac{di_3}{dt}+M_{44}\frac{di_4}{dt}+M_{45}\frac{di_5}{dt}+M_{46}\frac{di_6}{dt}+R_{44}i_4=$$

$$=M_{51}\frac{di_1}{dt}+M_{52}\frac{di_3}{dt}+M_{53}\frac{di_3}{dt}+M_{54}\frac{di_4}{dt}+M_{55}\frac{di_5}{dt}+M_{56}\frac{di_6}{dt}+R_{55}i_5- \quad (66a)$$

$$-R_0i_5-L_0\frac{di_5}{dt}-E,$$

$$M_{51}\frac{di_1}{dt}+M_{52}\frac{di_2}{dt}+M_{53}\frac{di_3}{dt}+M_{54}\frac{di_4}{dt}+M_{55}\frac{di_5}{dt}+M_{56}\frac{di_6}{dt}+R_{55}i_5-$$

$$-R_0i_5-L_0\frac{di_5}{dt}-E=M_{61}\frac{di_1}{dt}+M_{62}\frac{di_2}{dt}+M_{63}\frac{di_3}{dt}+M_{64}\frac{di_6}{dt}+ \quad (66b)$$

$$+M_{65}\frac{di_5}{dt}+M_{66}\frac{di_6}{dt}+R_{66}i_6,$$

$$M_{61}\frac{di_1}{dt}+M_{62}\frac{di_2}{dt}+M_{63}\frac{di_3}{dt}+M_{64}\frac{di_4}{dt}+M_{65}\frac{di_5}{dt}+M_{66}\frac{di_6}{dt}+R_{66}i_6= \quad (66c)$$

$$=M_{41}\frac{di_1}{dt}+M_{42}\frac{di_2}{dt}+M_{43}\frac{di_3}{dt}+M_{44}\frac{di_4}{dt}+M_{45}\frac{di_5}{dt}+M_{46}\frac{di_6}{dt}+R_{44}i_4.$$

Po uporządkowaniu stronami otrzymano:

$$(M_{41}-M_{51})\frac{di_1}{dt}+(M_{42}-M_{52})\frac{di_2}{dt}+(M_{43}-M_{53})\frac{di_3}{dt}+(M_{44}-M_{54})\frac{di_4}{dt}+ \quad (67a)$$

$$+[(M_{45}-M_{55})+L_0]\frac{di_5}{dt}+(M_{46}-M_{56})\frac{di_6}{dt}+R_{44}i_4-(R_{55}-R_0)i_5=-E$$

$$(M_{51}-M_{61})\frac{di_1}{dt}+(M_{52}-M_{62})\frac{di_2}{dt}+(M_{53}-M_{63})\frac{di_3}{dt}+(M_{54}+M_{64})\frac{di_4}{dt}+ \quad (67b)$$

$$+[(M_{55}-M_{65})-L_0]\frac{di_5}{dt}+(M_{56}-M_{66})\frac{di_6}{dt}+(R_{55}-R_0)i_5-R_{66}i_6=E,$$

$$(M_{61}-M_{41})\frac{di_1}{dt}+(M_{62}-M_{42})\frac{di_2}{dt}+(M_{63}-M_{43})\frac{di_3}{dt}+(M_{64}-M_{44})\frac{di_4}{dt}+ \quad (67c)$$

$$+(M_{65}-M_{45})\frac{di_5}{dt}+(M_{66}-M_{46})\frac{di_6}{dt}-R_{44}i_4+R_{66}i_6=0.$$

Na podstawie równań (67a)...(67c) można wyznaczyć pozostałe podmacierze macierzy indukcyjności i rezystancji układu w postaci:

— podmacierz $[L_{21}]$ o wymiarze $3\times 3$

$$[L_{21}]=\left[\begin{array}{c|c|c} (M_{41}-M_{51}) & (M_{42}-M_{52}) & (M_{43}-M_{53}) \\ \hline (M_{51}-M_{61}) & (M_{52}-M_{62}) & (M_{53}-M_{63}) \\ \hline (M_{61}-M_{41}) & (M_{62}-M_{42}) & (M_{63}-M_{43}) \end{array}\right], \quad (68)$$

— podmacierz $[L_{22}]$ o wymiarze $3\times 3$

$$[L_{22}] = \left[\begin{array}{c|c|c} (M_{44}-M_{54}) & (M_{45}-M_{55})+L_0 & (M_{46}-M_{56}) \\ \hline (M_{54}-M_{64}) & (M_{55}-M_{65})-L_0 & (M_{56}-M_{66}) \\ \hline (M_{64}-M_{44}) & (M_{65}-M_{45}) & (M_{66}-M_{46}) \end{array}\right], \tag{69}$$

— podmacierz $[R_{22}]$ o wymiarze $3\times 3$

$$[R_{22}] = \left[\begin{array}{c|c|c} R_{44} & -(R_{55}-R_0) & 0 \\ \hline 0 & (R_{55}-R_0) & -R_{66} \\ \hline -R_{44} & 0 & R_{66} \end{array}\right]. \tag{70}$$

W analizowanym przypadku wektor stanu i wektor sterowania posiadają 6 współrzędnych, można je zatem przedstawić w postaci, odpowiednio:

— wektor stanu

$$[i(t)] = \left[\begin{array}{c} i_1(t) \\ \hline i_2(t) \\ \hline i_3(t) \\ \hline i_4(t) \\ \hline i_5(t) \\ \hline i_6(t) \end{array}\right], \tag{71}$$

— wektor sterowania

$$[u(t)] = \left[\begin{array}{c} u_1(t) \\ \hline u_2(t) \\ \hline u_3(t) \\ \hline -E \\ \hline E \\ \hline 0 \end{array}\right]. \tag{72}$$

Postępując analogicznie dla pozostałych struktur, tzn. 2 ...6a można wyznaczyć poszczególne podmacierze indukcyjności i rezystancji układu oraz wektor stanu i wektor sterowania.

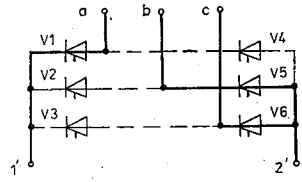
**Struktura 2a**

Na rysunku 9 podano schemat prostownika odpowiadający schematowi z rysunku 8, zaznaczając drogę przewodzenia prądu w tej strukturze.

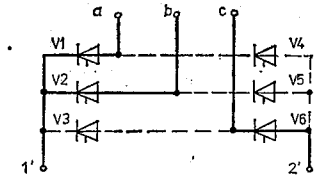
Podmacierze macierzy indukcyjności i rezystancji układu oraz wektor stanu i wektor sterowania mają postać:

— podmacierz $[L_{21}]$ o wymiarze $3\times 3$

$$[L_{21}] = \left[\begin{array}{c|c|c} (M_{41}-M_{51}) & (M_{42}-M_{52}) & (M_{43}-M_{53}) \\ \hline (M_{51}-M_{61}) & (M_{52}-M_{62}) & (M_{53}-M_{63}) \\ \hline (M_{61}-M_{41}) & (M_{62}-M_{42}) & (M_{63}-M_{43}) \end{array}\right], \tag{73}$$




Rys. 9. Uproszczony schemat falownika dla struktury 2a




Rys. 10. Uproszczony schemat falownika dla struktury 3a

— podmacierz $[L_{22}]$ o wymiarze $3\times 3$

$$[L_{22}] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline (M_{44}-M_{54})-L_0 & (M_{45}-M_{55}) & (M_{46}-M_{56}) \\ \hline (M_{54}-M_{64}) & (M_{55}-M_{65}) & (M_{56}-M_{64}) \\ \hline (M_{64}-M_{44})+L_0 & (M_{65}-M_{45}) & (M_{66}-M_{46}) \\ \hline \end{array}, \tag{74}$$

— podmacierz $[R_{22}]$ o wymiarze $3\times 3$

$$[R_{22}] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline (R_{44}-R_0) & -R_{55} & 0 \\ \hline 0 & R_{55} & -R_{66} \\ \hline -(R_{44}-R_0) & 0 & R_{66} \\ \hline \end{array}, \tag{75}$$

— wektor stanu

$$[i(t)] = \begin{array}{|c|} \hline i_1(t) \\ \hline i_2(t) \\ \hline i_3(t) \\ \hline i_4(t) \\ \hline i_5(t) \\ \hline i_6(t) \\ \hline \end{array}, \tag{76}$$

— wektor sterowania

$$[u(t)] = \begin{array}{|c|} \hline u_1(t) \\ \hline u_2(t) \\ \hline u_3(t) \\ \hline -E \\ \hline 0 \\ \hline E \\ \hline \end{array}. \tag{77}$$

**Struktura 3a**

Na rysunku 10 podano schemat prostownika odpowiadający schematowi z rysunku 8, zaznaczając drogę przewodzenia prądu w tej strukturze.

Podmacierze macierzy indukcyjności i rezystancji układu oraz wektor stanu i wektor sterowania mają postać:

— podmacierz $[L_{21}]$ o wymiarze $3\times 3$

$$[L_{21}] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline (M_{61}-M_{51}) & (M_{42}-M_{52}) & (M_{43}-M_{53}) \\ \hline (M_{51}-M_{61}) & (M_{52}-M_{62}) & (M_{53}-M_{63}) \\ \hline (M_{61}-M_{41}) & (M_{62}-M_{42}) & (M_{63}-M_{43}) \\ \hline \end{array}, \tag{78}$$

— podmacierz $[L_{22}]$ o wymiarze $3\times 3$

$$[L_{22}] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline (M_{44}-M_{54}) & (M_{45}-M_{55}) & (M_{46}-M_{56}) \\ \hline (M_{53}-M_{64}) & (M_{55}-M_{65}) & (M_{56}-M_{66})+L_0 \\ \hline (M_{64}-M_{44}) & (M_{65}-M_{45}) & (M_{66}-M_{46})-L_0 \\ \hline \end{array}, \tag{79}$$

— podmacierz $[R_{22}]$ o wymiarze $3\times 3$

$$[R_{22}] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline R_{44} & -R_{55} & 0 \\ \hline 0 & R_{55} & -(R_{66}-R_0) \\ \hline -R_{44} & 0 & (R_{66}-R_0) \\ \hline \end{array}, \tag{80}$$

— wektor stanu

$$[i(t)] = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \\ i_4(t) \\ i_5(t) \\ i_6(t) \end{bmatrix}, \quad (81)$$

— wektor sterowania

$$[u(t)] = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ 0 \\ -E \\ E \end{bmatrix}. \quad (82)$$

Dla powstających kolejno struktur układu 4a...6a — podobnie jak dla modelu falownika w przypadku komutacji natychmiastowej — można stwierdzić, że struktura 1a odpowiada strukturze 4a, struktura 2a — strukturze 5a, a struktura 3a — strukturze 6a. Przedstawione dla struktur 1a...3a podmacierze indukcyjności i rezystancji układu oraz wektor stanu są odpowiednio identyczne dla struktur 4a...6a, zmianie ulega jedynie wektor sterowania, który dla tych trzech struktur tzn. 4a...6a ma psotać, odpowiednio:

— dla struktury 4a

$$[u(t)] = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ E \\ -E \\ 0 \end{bmatrix},$$

— dla struktury 5a

$$[u(t)] = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ E \\ 0 \\ -E \end{bmatrix},$$

— dla struktury 6a

$$[u(t)] = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ 0 \\ E \\ -E \end{bmatrix}. \quad (83)$$

Przewodzenie prądu w układzie może rozpocząć się w chwilach, w których odpowiednie pary tyrystorów znajdują się w stanie blokowania. Chwile te określone są przez punkty komutacji naturalnej, które oznaczono na rysunku 6 przez K1...K6. Położenie tych punktów względem wybranego układu współrzędnych określono w punkcie 3 pracy.

Warunki początkowe wymagane dla rozwiązania równań równowagi elektromagnetycznej układu (10) w każdej strukturze wyznacza się ze znajomości prądów fazowych transformatora na początku i końcu każdej z nich tzn. dla czasów $t_1 \ldots t_{12}$. Zatem wektor warunków początkowych dla poszczególnych struktur ma postać, odpowiednio:

— dla struktury 1a

$$[i(t_1)] = \begin{bmatrix} i_1(t_1) \\ i_2(t_1) \\ i_3(t_1) \\ i_4(t_1) \\ i_5(t_1) \\ 0 \end{bmatrix},$$

— dla struktury 1b

$$[i(t_2)] = \begin{bmatrix} i_1(t_2) \\ i_2(t_2) \\ i_3(t_2) \\ i_4(t_2) \\ i_5(t_2) \\ 0 \end{bmatrix},$$

— dla struktury 2a

$$[i(t_3)] = \begin{bmatrix} i_1(t_3) \\ i_2(t_3) \\ i_3(t_3) \\ i_4(t_3) \\ 0 \\ i_6(t_3) \end{bmatrix},$$

— dla struktury 2b

$$[i(t_4)] = \begin{bmatrix} i_1(t_4) \\ i_2(t_4) \\ i_3(t_4) \\ i_4(t_4) \\ 0 \\ i_6(t_4) \end{bmatrix},$$

— dla struktury 3a

$$[i(t_5)] = \begin{bmatrix} i_1(t_5) \\ i_2(t_5) \\ i_3(t_5) \\ 0 \\ i_5(t_5) \\ i_6(t_5) \end{bmatrix},$$

— dla struktury 3b

$$[(it_6)] = \begin{bmatrix} i_1(t_6) \\ i_2(t_6) \\ i_3(t_6) \\ 0 \\ i_5(t_6) \\ i_6(t_6) \end{bmatrix},$$

— dla struktury 4a

$$[i(t_7)] = \begin{bmatrix} i_1(t_7) \\ i_2(t_7) \\ i_3(t_7) \\ i_4(t_7) \\ t_5(t_7) \\ 0 \end{bmatrix},$$

— dla struktury 4b

$$[i(t_8)] = \begin{bmatrix} i_1(t_8) \\ i_2(t_8) \\ i_3(t_8) \\ i_4(t_8) \\ i_5(t_8) \\ 0 \end{bmatrix},$$

— dla struktury 5a

$$[i(t_9)] = \begin{bmatrix} i_1(t_9) \\ i_2(t_9) \\ i_3(t_9) \\ i_4(t_9) \\ 0 \\ i_6(t_9) \end{bmatrix},$$

— dla struktury 5b

$$[i(t_{10})] = \begin{bmatrix} i_1(t_{10}) \\ i_2(t_{10}) \\ i_3(t_{10}) \\ i_4(t_{10}) \\ 0 \\ i_6(t_{10}) \end{bmatrix},$$

— dla struktury 6a

$$[i(t_{11})] = \begin{bmatrix} i_1(t_{11}) \\ i_2(t_{11}) \\ i_3(t_{11}) \\ 0 \\ i_5(t_{11}) \\ i_6(t_{11}) \end{bmatrix},$$

— dla struktury 6b

$$[i(t_{12})] = \begin{bmatrix} i_1(t_{12}) \\ i_2(t_{12}) \\ i_3(t_{12}) \\ 0 \\ i_5(t_{12}) \\ i_6(t_{12}) \end{bmatrix}. \quad (84)$$

Analogicznie (jak dla komutacji natychmiastowej) należy wyznaczyć fazy początkowe $\psi_1 \ldots \psi_3$ oraz wartości składowych wektora sterowania $[u(t)]$ w punktach brzegowych poszczególnych struktur.

## PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono model matematyczny falownika tyrystorowego o komutacji sieciowej w układzie 3-fazowego mostka sterowanego symetrycznie, w metodzie przestrzeni stanów, przy założeniach umożliwiających odwzorowanie komutacji natychmiastowej oraz komutacji rzeczywistej (prostej). Model ten ma złożoną postać (szczególnie model

odwzorowujący komutację prostą) i uwzględnia większość naturalnych parametrów układu decydujących o wielkości uzyskiwanych przez niego parametrów energetycznych. Określenie tego modelu jest możliwe dzięki znanym z literatury postaciom algebraicznym wektora stanu, co eliminuje konieczność całkowania numerycznego równań równowagi elektromagnetycznej układu, a także znacznie upraszcza budowę modelu. Uzyskane rozwiązania dynamiki układu stanowią podstawę do analizy harmonicznej prądów układu, obliczania jego wskaźników i charakterystyk energetycznych w ustalonym stanie pracy.

## BIBLIOGRAFIA


1. *Badania na maszynie cyfrowej wskaźników i charakterystyk układu hamowania z falownikami tyrystorowymi o różnej strukturze.* Opracowanie Instytutu Elektrotechniki Przemysłowej Politechniki Poznańskiej, Poznań 1984
2. *Badania modeli cyfrowych układu hamowania z falownikiem tyrystorowym 3-fazowym mostkowym sterowanym symetrycznie.* Opracowanie Instytutu Elektrotechniki Przemysłowej Politechniki Poznańskiej, Poznań 1985
3. Z. Bajorek: *Modelowanie matematyczne transformatorów trójfazowych przy pracy niesymetrycznej.* Warszawa: PWN, 1983.
4. S. W. Director, R. A. Rahrer: *Podstawy teorii układów elektrycznych.* Warszawa: PWN, 1976
5. T. Kaczorek: *Macierze w automatyce i elektrotechnice.* Warszawa: WNT 1984
6. T. Kaczorek: *Teoria sterowania.* Tom I i II. Warszawa: WNT, 1977
7. W. Krajewski: *Postać algebraiczna rozwiązania równania różniczkowego wektorowego dla wymuszeń harmonicznych w analizie trójfazowych silników pierścieniowych.* Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej, Elektryka, z. 23, 1981
8. W. Krajewski: *Postać algebraiczna rozwązania równania różniczkowego wektorowego dla wymuszeń harmonicznych ze składową stałą w analizie stanów pracy silnika prądu stałego obcowzbudnego.* Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej, Elektryka, 1981 z. 23
9. K. Ogata: *Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania.* Warszawa WNT, 1979
10. Praca zbiorowa (red. Tunia H.): *Układy energoelektroniczne, obliczanie, modelowanie, projektowanie.* WNT, 1982 Warszawa


R. PORADA

## MATHEMATICAL MODEL OF A THYRISTOR INVERTER WITH MAINS COMMUTATION BY STATE SPACE METHOD

### Summary

The paper presents a linear mathematical model, by the state space method, of a 3-phase thyristor inverter with mains commutation, applied for braking energy recuperation of combustion engines in traction locomotives, for assumptions simulating instantaneous and actual (simple) commutation. The matrices of the system and of the control are determined and the initial conditions required for solving the state equation for all structures appearing during the operation of the inverter are given. Owing to the application of an algebraic form of the state vector, this allows to obtain the vector of the response for any moment and any arbitrary structure of the inverter for both admitted kinds of commutation.

R. PORADA

## MODÉLE MATHEMATIQUE D'UN ONDULEUR À THYRISTOR À COMMUTATION RÉTICULAIRE DANS LA MÈTHODE DE L'ESPACE DES ETATS

Résumé

Dans l'étude on a présenté le modèle mathématique linéaire, dans la méthode de l'espace des étatsi d'un onduleur à thyristor triphasé à commutation réticulaire, utilisé pour la récupération de l'énerge, de freinage des moteurs à combustion interne des locomotives de traction, en admettant la représentation de la commutation immédiate et réelle (simple). On a déterminé les matrices du système et de la commande, ainsi que les conditions initiales éxigées pour la résolution de l'équation d'état de toutes les structures surgies pendant le travail de l'onduleur. Cela permet, grâce à l'application de la forme algébrique du vecteur d'état, d'obtenir le vecteur de réponse pour le moment et la structure arbitraire de l'onduleur, pour les deux genres de commutation admis.

R. PORADA

## MATHEMATISCHES HMODELL EINES THYRISTOR-WECHSELRICHTERS MIT NETZKOMMUTIERUNG FÜR DIE METHODE DES ZUSTANDSRAUMES

Zusammenfassung

In der Bearbeitung wurde ein mathematisches Linienmodell für die Methode des Zustandsraumes eines dreiphasigen Thyristor-Wechselrichters mit Netzkommutierung dargestellt, der für die Energierückgewinnung beim Bremsen von Verbrennungsmotoren der Zugloks zur Anwendung kommt zwecks Nachbilding der Prinzipien der Sofort- und (einfachen) Wirklichkeitskommutierung. Es wurden Matrizen für das System und Steuerung sowie Anfangsbedingungen bestimmt, die für die Lösung der Zustandsgleichung aller während der Arbeit des Wechselrichters entstandenen Strukturen benötigt werden. Dies ermöglicht dank Anwendung der algebraischen Formen des Zustandsvektors die Erlangung eines Antwortsvektors für beliebigen Zeitmoment und beliebige Struktur des Wechselrichters bei beiden angenommenen Kommutierungsarten.

Р. ПОРАДА

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТИРИСТОРНОГО ИНВЕРТОРА С СЕТЬЕВОЙ КОММУТАЦИЕЙ В МЕТОДЕ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ

Резюме

Представлена линейная математическая модель в методе пространства состояний тиристорного 3-фазного инвертора с сетьевой коммутацией применяемого для рекуперации энергии торможения дизельных железнодорожных локомотивов при предпосылках отображения моментальной и реальной (простой) коммутации. Определены матрицы системы и управления и начальные условия необходимые для решения уравнений состояния для всех структур возникающих во время работы инвертора. Это дает возможность, благодаря применю алгебраической формы вектора состояния, определения вектора ответа для произвольного момента времени и для произвольной структуры инвертора при определенных способах коммутации.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, 1987, 34, z. 4, ss. 383–396

621.3-681.32
519.68

# A method for concurrent fault detection in simple microprogrammed controllers

LESZEK WROŃSKI (Warszawa)

*Zakład Podstaw Telekomunikacji, Instytut Telekomunikacji, Politechnika Warszawska*

*Received 1986. 06 17*
*Authorized 1987.03.20*

A method for concurrent fault detection in the program sequencing in a Microprogrammed Control Unit is presented. An architecture of the Monitor circuit for a simple control unit is proposed. The fault coverage for the MCU and the Monitor is discussed.

## 1. INTRODUCTION

With growing complexity of digital systems testability is one of the major respensibilities of logic designers. One way to make a Microprogrammed Control Unit (MCU) testable is to design it with a built in CONCURRENT FAULT DETECTION mechanism. Concurrent error detection in digital systems means that errors are detected while the system is in its normal operation. This is usually provided by adding redundant logic to the system either by using error-detecting (error-correcting) codes or by replicating selected parts or the whole system [3]. Recently, there has been considerable research on the problem of concurrent detecting of faults causing errors in the sequencing of programs. Some authors concentrate on the errors in the program flow at the machine level [5]. Other works deal with error detection in microprogram sequencers [1], [2], [7]. It seems that many of the proposed solutions can be applied to detection of program flow errors at any level.

In this paper we consider the error detection in simple microprogram sequencers. The faults are detected by comparing outputs from the sequencer with outputs from a MONITOR curcuit. Both modules operate in parallel, and comparison is made at each microinstruction cycle. Any detectable error is detected during an incorrect transition. Our goal is to design a monitor circuit which is less complicated than duplication of the sequencer and is capable of detecting a large class of faults.

In section 2 models of controller, flow of control and faults are presented. In section a method for concurrent error detection is described. In section 4 an example of monitor circuit is discussed. Finally, conclusions are presented in section 5.

## 2. THE MODEL

### 2.1. MODELLING THE CONTROL UNIT

In this paper the sequencing of the controller is restricted to the jumps to addresses which can be determined for a given microprogram from the current microword and transitions to addresses by „*one*" higher than the current address. It means that the set

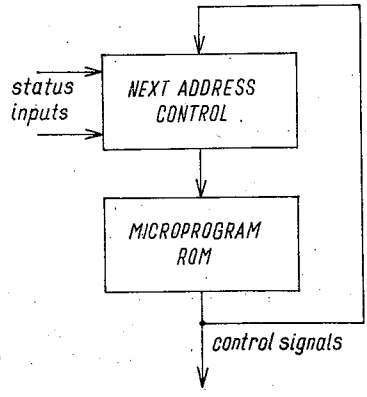



Fig. 1. Block diagram of the control unit

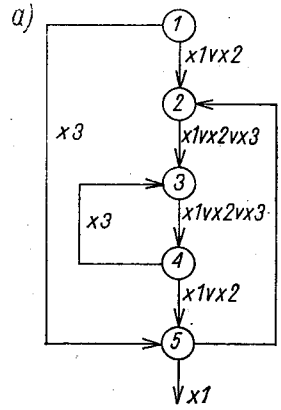
of next addresses for a particular affress has no more than two members. The block diagram of the control unit is given in Figure 1. The block diagram is general enough to include controllers with subroutine calls but in this study we assume that the microprogram does not have any subroutine calls.

### 2.2. MODELLING THE CONTROL FLOW

The flow of control for the control unit shown ealier can be represented by two high level models. The first, model is the flow table of the finite state machine (FSM) describing the control unit. There is a one-to-one correspondence between microprogram addresses and states of the FSM and, similarly, between the status input combinations and the input combinations for the FSM. Note that all the next state entries are uniquely defined. At this point we do not have to define any outputs for this FSM.

The second model, equivalent to the previous one, is the labelled and directed graph which represents the flow diagram corresponding to the flow tables of the FSM defined in the first model. The nodes of the graph correspond to the states of the FSM. The edges indicate transitions with the labels indicating the input combinations that cause the corresponding transitions. These models are illustrated by an example in Figure 2.

Although, in both models the state of the FSM is determined by the microprogram address, we can consider the state as a combination of the microword address and content of this microword. This idea will be applied in a general model of the monitor, presented in section 3.




b)

| | x1 | x2 | x3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 5 |
| 2 | 3 | 3 | 3 |
| 3 | 4 | 4 | 4 |
| 4 | 5 | 5 | 3 |
| 5 | - | 2 | 1 |

Fig. 2. Example of the control models

### 2.3. FAULT MODELLING

A number of fault models are reported. In this paper we will consider the most natural fault model, the general functional fault model. Consider a transition in the flow diagram from node $A$ to node $B$ under the set of input combinations $X_i$. We denote this by

$$N(s_a, X_i) = s_b,$$

where

$s_a$, $s_b$ — states corresponding to the nodes A, B

$X_i \subset X$ — subset of the set of all input combinations

$N: S \times X \to S$ — next state function of the flow table.

A fault can cause an incorrect transition from $A$ to $C$ (where $C$ differs from $B$, or $C$ does not exist in the flow diagram) for the set of input combinations $X_j \subset X_i$. In the general fault model a fault can cause a group of incorrect transitions of the type described above. This is illustrated in Figure 3. In the faulty graph, the transition from node

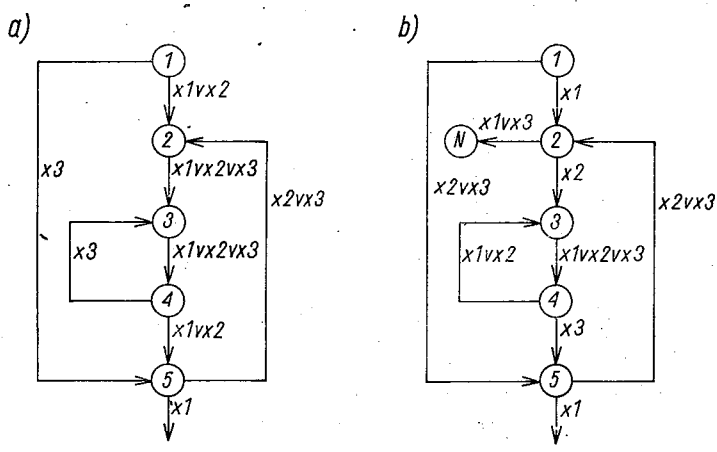



Fig. 3. Fault model. (a) Correct graph. (b) Faultly graph

2 to node N represents a transition to a nonexisting node. Except this fault, we see the following incorrect transitions

- from node 1 under $\times 2$ to node 5 instead of to node 2
- from node 4 under $\times 3$ to node 5 instead of to node 3
- from node 4 under $\times 1$ v $\times 2$ to nodes 3 instead of to node 5

Transition from node 5 under $\times 1$ denotes a transition to the next part of the control flow diagram.

## 3. TRANSITION CHECKING METHOD

The method is developed from the need for checking the correctness of transitions for every state. Consider the flow diagram of the FSM description of the controller. We will associate with each edge a key (binary vector) from a certein key space. Since each state has no more than two next states we can say that we associate with each state two keys from two key spaces. These key spaces are: the increment key space, *KI*, and the jump key space, *KJ*. Assume that we have a status line, *t*, that specifies whether the current transition is the increment transition ($t = 1$) or the current transition is a jump ($t = 0$). If we do not have an explicit signal line *t*, a little hardware is to be added to generate it. This relation can be expressed as a mapping

$$M: S \to KI \times KJ,$$

where

$S$ — state space

$KJ$ — jump key space ($t = 0$)

$KI$ — increment key space ($t = i$).

The aim of the monitor is to keep track of the transitions by predicting the fault-free values for the keys and comparing these values with the keys assigned to the states that are actually entered. This will be done by a sequential machine that computes the key for a transition based on the previous state, current state and status line *t* provided by the control unit or the appropriate combinational logic.

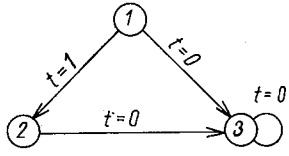



Fig. 4. A section of the flow diagram

Consider a section of the flow diagram given in Figure 4. Let the keys associated with states 1,2 and 3 be ($KI_1$, $KJ_1$), ($KI_2$, $KJ_2$) and ($KI_3$, $KJ_3$) respectively. To satisfy the goal specified earlier we must have

$$KJ_1 = F(s_1, s_3, t = 0)$$
$$KI_1 = F(s_1, s_2, t = 1)$$

$$KJ_2 = F(s_2, s_3, t = 0)$$
$$KJ_3 = F(s_3, s_3, t = 0)$$

where

$\{s_1, s_2, s_3\} \subset S$ — state space

$\{KI_1\} \subset KI$ — increment key space

$\{KJ_1, KJ_3, KJ_3\} \subset KJ$ — jump key space

$F: S \times S \times T \to (KI \cup KJ)$ — a function used by the monitor to calculate the keys.

The choice of functions $F$ and $M$ determines the complexity of the monitor circuit

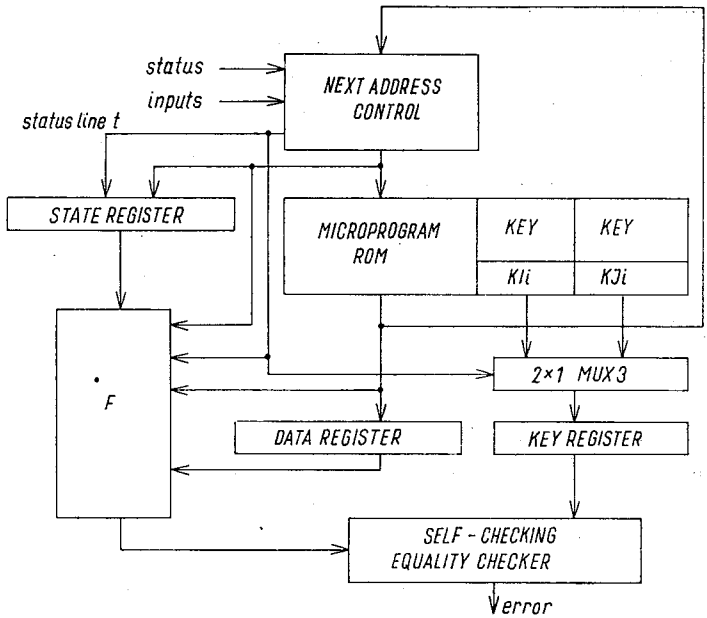



Fig. 5. Block diagram of the controller with the built-in monitor

and the fault coverage. In this paper we propose a monitor for simple microcontrollers. The general block diagram of the circuit is given in Figure 5.

A function $F$

$$F: S \times S \times T \to \{KI \cup KJ\},$$

where

$S$ — state space

$KI$ — increment key space

$KJ$ — jump key space

$T = \{0, 1\}$ — status line $t$ space

is given as

$$F(s_i, N(s_i, X_i), t = MUX(KJ_i, KI_i, t) \quad (1)$$
$$\text{for all } s_i \in S, X_i \subset X, t \in T$$

where

$N(s_i, X_i)$ — the next state function of the flow table describing the monitor and

$$MUX(KJ_i, KI_i, t) = KJ_i \quad \text{if } t = 0$$
$$MUX(KJ_i, KI_i, t) = KI_i \quad \text{if } t = 1.$$

A mapping $M$ from the set of states $S$ to the sets of keys $KI$, $KJ$ is in form of

$$M: S \to KI \times KJ.$$

The mapping $M$ is not arbitrary; it satisfies equation 1 with respect to some function F.

The keys corresponding to each state are stored in the corresponding microword. The combinational function $F$ determines the key corresponding to the last transition, based on the previous state, the current state and the value of the status line $t$. The State Register and Data Register are used to store the previous state. The key register is used to store either key $KI_i$ or key $KJ_i$, depending on the status line $t$. The key in the key register is compared with the key calculated by block $F$ to detect faults. We next discuss one method for designing the monitor circuit for one selected controller implementation.

## 4. MONITOR DESIGN

### 4.1. THE CONTROLLER IMPLEMENTATION — AN EXAMPLE

The structure of the controller is given in Figure 6. This controller performs conditional jumps based on the status inputs selected. The unconditional jump and the increment operations are provided by having two inputs to the Multiplexer 1 that are fixed

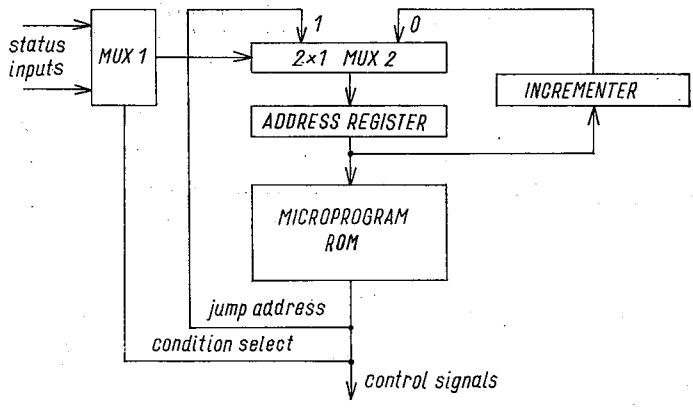



Fig. 6. Architecture of the controller — an example

at logic 1 and 0. The address width for the ROM is $n$ bits and the jump address field is $n$ bit wide. There are a total of m inputs to Multiplexer 1. The modules in this sample controller are

- m×1 Multiplexer 1 (MUX1)
- n bit, 2×1 Multiplexer 2 (MUX2)

- n bit Address Register
- n bit Incrementer
- $2^n \times n$ w bit ROM (w is the width of the word in the memory)

In the RTL level fault model, single module faults are assumed. We assume the same fault model but extend to the group of modules described later. The faults within the various modules or groups of modules are considered in the later subsection.

### 4.2. FAULT DETECTION BY CHECKING THE ADDRESS SEQUENCING

We consider one possible implementation of the monitor for the given controller architecture. With respect to the general model of the monitor, does not contain the Data Register. The structure of the monitor is given in Figure 7.

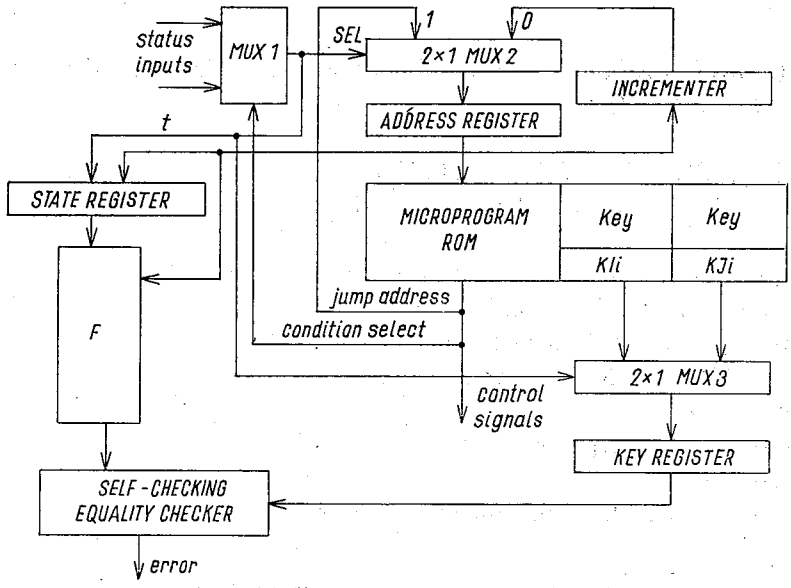



Fig. 7. Monitor circuit

We assume that every controller state is described by the corresponding microword address only. We can denote this by

$s_i = a_i$ where ai is a address of the microword. Let $[a_i]$ be a binary representation of $a_i$

$$[a_i] = (a_{i,n-1}, \ldots, a_{i,0}).$$

We assume that combinational function $F$ is given as

$$F(s_i, s_j, t) = F(a_i, a_j, t) = [2 \times a_j] EXOR [a_i] EXOR [t]$$

where

EXOR — bit-wise EXOR operation

[t] — $(0, \ldots, 0, \ldots, 0, t)$ $(n+1)$ bit binary vector
$a_j$, $a_i$ — next and current addresses stored in State Register respectively.
Function $F$ has a simple realization shown in Figure 8.

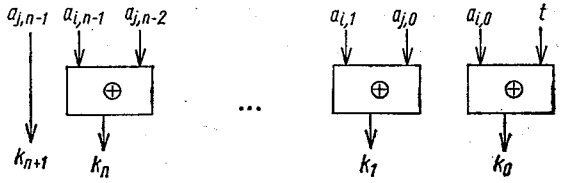



Fig. 8. Block diagram of the function F module

For every microword of address $a_i$, the key fields are calculated as follows

$[KI_i] = [2(a_i+1)]$ EXOR $[a_i]$ EXOR [0] if there exists a transition from address $a_i$ to address $a_i+1$ in the flow control

and

$[KI_i] = (0, \ldots, 0, \ldots, 0, \bar{a}_{i,0})$ if there exists no such transition ($\bar{a}_i$, 0 denotes a complement value of bit, $ai$, 0)

and

$[KJ_i] = [2a_j]$ EXOR $[a_i]$ EXOR $(\ldots, 0)$ if there exists a jump transition from address $a_i$ to address $a_j$ on the flow of control

and

$[KJ_i] = (0, \ldots, 0, \ldots, 0, a_{i,0})$ if there exists no such transition.

For that described monitor we need

- $2 \times (n+1)$ — bit key field in the microprogram ROM
- $(n+1)$ — bit, $2 \times 1$ Multiplexer 3 (MUX3)
- n, $2 \times 1$ EXOR gates
- $(n+1)$ — bit Key Register
- $(n+1)$ — bit State Register
- $(n+1)$ bit — Self-Checking Equality Checker

### 4.3. CONVERAGE OF THE MODULE FAULTS

In this subsection we discuss the detection capability for faults of a single module or a group of modules.

*Lemma 1*: All faults in MUX2, Address Register and Incrementer are detected.

*Proof*: Any fault in MUX2, Address Register or Incrementer can cause an incorrect transition from address $a_i$ to address $a_j$* that differs from the correct address $a_j$ ($a_j$ can be $a_i+1$). For the correct transition we have

$$F(a_i, a_j, t) = [2a_j]\text{EXOR}[a_i]\text{EXOR}[t] = \text{MUX3}(KI_i, KJ_i, t).$$

For the incorrect transition, $F$ will be claculated as follow

$$F(a_i, a_j^*, t) = [2a_j^*]\text{EXOR}[a_i]\text{EXOR}[t].$$

The fault is not detected if and only if

$$[2a_j^*]\text{EXOR}[a_i]\text{EXOR}[t] = [2a_j]\text{EXOR}[a_i]\text{EXOR}[t].$$

By EXOR-ing both sides of this equation with $[a_i]$ EXOR $[t]$ we obtain

$$2a_j^* = 2a_j.$$

This means that every fault in this group of modules is detected.

*Lemma 2*: All faults in *MUX*3 and Key Register are detected.

*Proof*: Any fault in MUX3 or Key Register can cause that an incorrect key value be given to the checker. Such fault is detected directly.

*Lemma 3*: All faults in State Register and *F* module are detected.

*Proof*: Any fault in *F* module or State Register can change the key value produced by *F*. Such fault is detected directly.

Faults in the microprogram ROM fall into two categories:

- incorrect word: an incorrect memory location is accessed (for example as a result of a stuck-at fault on an address line) but the microword is fault-free
- faulty word: the correct location is accessed but some bits in the fetched word are faulty.

*Lemma 4*: All faults of incorrect word type are detected.

*Proof*: First assume that a current transition (executed as a result of fetching an incorrect memory location $a_i^*$) is a jump to address $a_j^*$. Function $F$ is calculated as follows

$$F(a_i, a_j^*, t) = [2a_j^*]\text{EXOR}[a_i]\text{EXOR}[0].$$

The jump key, in the accessed word, is

$$KJ_i^* = [2a_j^*]\text{EXOR}[a_i^*]\text{EXOR}[0].$$

The fault is not detected if and only if

$$[2a_j^*]\text{EXOR}[a_i]\text{EXOR}[0] = [2a_j^*]\text{EXOR}[a_i^*]\text{EXOR}[0].$$

By EXOR-ing both sides of this equotion with $[2a_j^*]$ EXOR ([0] we obtain

$$a_i = a_i^*.$$

This means that the fault is detected.

Now assume that a current transition (executed as a result of fetching an incorrect memory location $a_i^*$) is increment to address $a_i^*+1$. Function $F$ is calculated as follows

$$F(a_i, a_j, t) = [2(a_i+1)]\text{EXOR}[a_i]\text{EXOR}[1].$$

The increment key, in the accessed word, is

$$KI_i^* = [2(a_i^*+1)]\text{EXOR}[a_i^*]\text{EXOR}[1].$$

The fault is not detected if and only if

$$[2(a_i+1)]\text{EXOR}[a_i]\text{EXOR}[1] = [2(a_i^*+1)\text{EXOR}[a_i^*]\text{EXOR}[1]$$

that is, if and only if

$$[2(a_i+1)]\text{EXOR}[a_i] = [2(a_i^*+1)]\text{EXOR}[a_i^*].$$

By EXOR-ing both sides of this equation with $[2(a_i^*+1)]$ EXOR $[a_i]$ we obtain

$$[2(a_i+1)]\text{EXOR}[2(a_i^*+1)] = [a_i]\text{EXOR}[a_i^*]$$

Assume that $[a_i]$ is equal to $[a_i^*]$ on bit positions from 0 to $k-1$ and differs ob bit position $k$. This means that $[2(a_i+1)]$ is equal to $[2(a_i^*+1)]$ on bit positions from 0 to $k$. Hence, the right side of the equation takes the value "*one*" on bit position $k$, whereas, the left side takes value zero on the same bit position. Hence, the equation holds if and only if $a_i = a_i^*$. This means that fault of incorrect word type is detected.

Consider the faults of the faulty word type. In every microword we have the following fields:

- control signals field
- condition select field
- jump field
- increment key field
- jump key field

The control signals field is responsible for control of the data part and is not discussed here. The errors in the condition select field are not covered by the proposed monitor. For detecting faults in both these fields some other method has to be used (e.g. error detecting coding). Consider the remaining fields. The monitor takes care either of the jump field and the jump key field, or of the increment key field, depending on the kind of the transition executed.

*Lemma 5*: All faults in the increment key field are detected.

*Proof*: Faults in the increment key field are revelant during the increment operation only, when the increment key is loaded, through *MUX*3, to the Key Register. This means that faults in the increment key field are equivalent to the faults in *MUX*3. By Lemma 2 such faults are detected.

*Lemma 6*: All faults in the jump key field provided that the jump field is fault-free are covered.

*Proof*: The reasoning follows the proof of Lemma 5.

*Lemma 7*: All faults in the jump field provided that the jump key field is fault-free are covered.

*Proof*: Faults in the jump field are equivalent to the faults in *MUX*2, so they are detected (Lemma 1).

A more complex situation occurs when both the jump and the jump key fields are faulty and a jump instruction is executed. Every faulty content of the jump key field can be represented as

$$KJ_i^* = [2a_j^*]\text{EXOR}[a_i^*]\text{EXOR}[t^*],$$

where
$a_j^*$, $a_i^*$ — some faulty addresses
$t^*$ — faulty value on the status line.
Without losing the generality we can take $a_i^* = a_i$. Then

$$KJ_i^* = [2a_j^*]\text{EXOR}[a_i]\text{EXOR}[t^*].$$

Errors in the jump field cause that function $F$ will be calculated for a wrong value of the second argument

$$F(a_i, a_j^{**}, t) = [2a_j^{**}]\text{EXOR}[a_i]\text{EXOR}[0] = [2a_j^{**}]\text{EXOR}[a_i],$$

where
$a_j^{**}$ — faulty jump address.
The fault will not be covered if and only if

$$[2a_j^*]\text{EXOR}[a_i]\text{EXOR}[t^*] = [2a_j^{**}]\text{EXOR}[a_i]$$

This equality holds if and only if

$$[t^*] = [0] = [t] \quad \text{and} \quad a_j^* = a_j^{**}.$$

Recalling the organization of the $F$ module (see Fig. 8) this result implies that the faults in the current transition may not be detected (they can be covered during the later transitions) only if

- the least significant bit in the jump key field is correct
- for any error in the jump key field, there is an error in the jump field on the corresponding bit position (bit $k$ in the jump field corresponds to bit $k+1$ in the jump key field).

This class of faults is very small. In addition, these faults can be easily detected by using a simple error-detecting code.

The faults in Multiplexer 1 are almost not detectable in this structure. Only the stuck-at output fault can be covered, provided that in every microprogram loop there is at least one unconditional increment transition and at least one unconditional jump transition. In a typical microprogram there is about 60% increment-type instructions. If some of them are made unconditional increments and some other are made next-address jumps, then only a few additional instructions may be required to ensure that the stuck-at faults on the MUX1 output are detected. For covering every fault in MUX1, a duplication of this module is required. If MUX1 is duplicated, no additional comparator for line $t$ is needed, because in this case, the output of the original MUX1 is fed to the controller, whereas the output of the duplicated module provides the signal $t$ for the monitor.

## 5. COMPARISON WITH THE EARLIER RESULTS

The monitor presented in this report allows for concurrent detection for a large class of faults. A simple extra hardware is needed (registers, EXOR gates and a two-input multiplexer). The advantage of this monitor is its regular structure independent of the microprogram. The monitor may therefore occupy a small area on the controller chip. The size of the key fields may seem large, but for the reported controllers [4] this increases the length of the microprogram word by 10% to 50%. Comparing the proposed monitor with the Two Key Monitor presented in [2] (for simple microcontrollers) we can see that

even when the size of the keys ($K_d$ and $K_s$) are the same (one bit shorter than the increment key and jump key size), the classes of detectable faults are nearly identical but the extra hardware required for the Two Key Monitor method increases up to the duplication of the controller. Also an enlargement of the described monitor for controllers with subroutine calls seems to be less expansive then the solution proposed in [2]. To adapt our solution to controllers with procedure calls, an internal monitor stack is needed which will store the increment key, $KI_i$, while a call is executed. During Ret, the instruction stack content will be latched in the Key Register (it requires, however, a third input to MUX3).

## REFERENCES

1. V. S. Iyengar and L. L. Kinney: *Concurrent testing of flow of control in simple microprogrammed units.* Proc. Int. Test Conf., Nov. 1982
2. V. S. Iyengar and L. L. Kinney: *Concurrent fault detection in microprogrammed control units.* IEEE Transaction on Computers, Sept. 1985, vol. c-34, no. 9
3. G. D. Kraft and W. N. Toy: *Microprogrammed control and reliable design of small computers.* Prentice-Hall, Inc., 1981
4. D. Sarma: *Testable microprogram control unit for VLSI procesors.* 28th Midwest Symposium on Circuits and Systems, Aug. 1985
5. J. P. Shen and M. A. Schuette: *On-line self-monitoring using signatured instruction streams.* Int. Test Conf., 1983
6. C. H. Staelin and A. Albicki: *Evaluation of monitor complexity for concurrently testing microprogrammed control units.* Int. Test Conf., 1985
7. C. Yu Wong, W. K. Fuchs, J. A. Abraham and E. S. Davidson: *The design of a microprogram control unit with concurrent error detection.* in Dig. of Pap. FTCS-13, Milano, Italy. June 1983

L. WROŃSKI

## METODA WYKRYWANIA USZKODZEŃ W CZASIE RZECZYWISTYM W PROSTYCH MIKROPROGRAMOWANYCH KONTROLERACH

Streszczenie

W artykule przedstawiono metodę wykrywania uszkodzeń w mikroprogramowanych kontrolerach. Metoda zapewnia kontrolę poprawności wykonywania mikroprogramu podczas normalnej pracy urządzenia. W opracowaniu przedstawiono przykładową realizację Monitora dla prostego mikrokontrolera. Analiza uszkodzeń wykrywanych w proponowanym rozwiązaniu potwierdza przydatność proponowanej metody.

L. WROŃSKI

## MÈTHODE DE DÈTECTION DES DEFAUTS DANS LES CONTROLEURS MICROPROGRAMMÉS

Résumé

Dans cet article on a présenté la méthode de détection des défauts dans les contrôleurs microprogrammés. Cette méthode assure le contrôle de la valadité de l'exécution d'un microprogramme, pendant le travail normal du dispositif. Dans cette élaboration on a présenté l'exemple de l'implantation d'un Moniteur pour un microcontrôleur simple. L'analyse des défauts découverts dans le résolution proposée confirmel'utilité de la méthode présentée.

L. WROŃSKI

## DEFEKTENTDECKUNDSVERFAHREN FÜR DIE ECHTZEIT BEI EINFACHEN MIKROPROGRAMMIERTEN KONTROLLERN

Zusammenfassung

Dieser Aufsatz schildert eine Entdeckungsweisse der Echtzeit bei einfachenmi kroprogrammierten Kontrollern. Die Methode bietet die Möglichkeit, den Verlauf des Mikroprogramms während normaler Arbeit der Vorrichtung zu kontrollieren. Als Beispiel wird die Bauweise eines einfachen Monitors dargestellt. Eine Analyse der entdeckten Beschädigungen mittels der vorgeschlagenen Lösung bestätigt die Nützlichkeit der präsenrterten Methode.

Л. ВРОНЬСКИ

## МЕТОД ОБНАРУЖИВАНИЯ ОШИБОК В УПРАВЛЯЮЩИХ УСТРОЙСТВАХ

Резюме

Показан метод обнаруживания повреждений в микропрограммных контрольных аппаратах. Вышеуказанный метод обеспечивает контроль провильности выполнения микропрограммы во время нормальной работы устройства. Представлена примерная реализация Монитора для простого микроконтролера. Анализ повреждений обнаруживаемых благодаря предлагаемому решению подтверждает пригодность метода.

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE 1988, 34, z. 2, ss. 397–426

621.032

# Algorytm automatycznej segmentacji pewnych klas obrazów binarnych

ZBIGNIEW M. WÓJCIK

*Przemysłowy Instytut Elektroniki (Warszawa)*

*Artykuł wpłynął 1985.09.20*
*Autoryzowano do druku 1987.06.05*

W pracy przedstawiono algorytmy segmentacji obrazu binarnego umożliwiające oddzielenie od siebie poszczególnych obiektów obrazu graficznego. Proces segmentacji umożliwia również wyznaczenie parametrów globalnych tych obiektów, jak również wykrywanie lokalnych nieprawidłowości obrazu. W artykule zamieszczono wyniki segmentacji rzeczywistych obrazów, które dowodzą poprawności przedstawionych algorytmów.

## 1. WPROWADZENIE

Segmentacja jest procesem, w którym oddzielane są od siebie poszczególne obiekty obrazu graficznego. Prawidłowa segmentacja pozwala na niezakłóconą analizę każdego obiektu oddzielnie, np. umożliwia poprawny, automatyczny pomiar jego powierzchni, położenia i rozpoznanie kształtu. Pozwala więc m. in. na dokładne przeanalizowanie parametrów każdej ścieżki metalizacji mikrostruktury z osobna.

Automatyczna segmentacja przedziela procesy wstępnej obróbki obrazu (tzw. przetwarzanie obrazu) i rozpoznawania obrazu. Przy okazji segmentacji wyznacza się także globalne parametry każdego wydzielonego obiektu, takie jak liczba komórek tworzących brzeg obiektu, powierzchnie obiektu, rozpiętość obiektu w pionie i w poziomie. Parametry globalne pozwalają na wstępne selekcjonowanie obiektów dla procesu rozpoznawania, zaoszczędzając czas na niepotrzebne rozpoznawanie kształtów tych obiektów, których globalne rozmiary odbiegają zanadto od rozmiarów obiektów poszukiwanych.

W wielu przypadkach analizy obrazu decyzję można opierać na parametrach globalnych obiektów wydzielonych w trakcie segmentacji, np. w metalografii ilościowej. Również w przypadku badań jakości mikroukładów półprzewodnikowych, można wstępnie oceniać na podstawie parametrów globalnych czy istnieją duże ubytki powierzchni poszczególnych podobszarów metalizacji.

## 2. ETAPY PODSTAWOWEGO PROCESU SEGMENTACJI

*Twierdzenie 1.*

Segmentacja obrazu binarnego jest przeprowadzalna przez kolejne wykonanie następujących operacji:

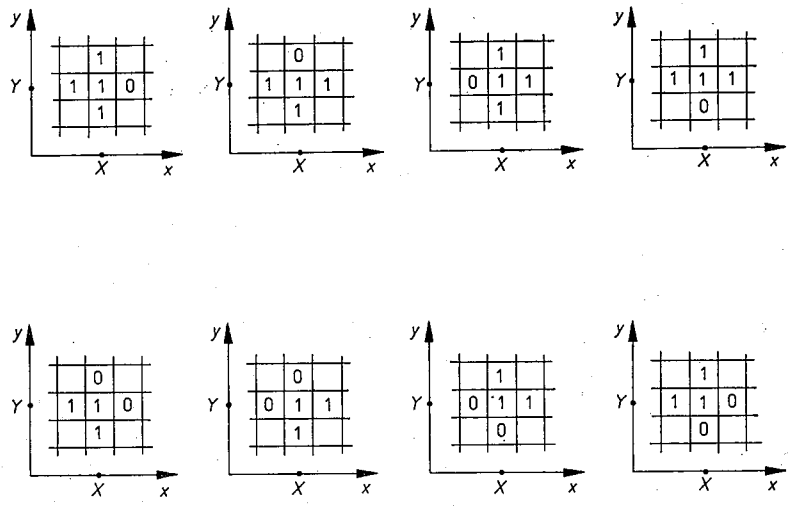
a) detekcji brzegów wszystkich obiektów łącznie;
b) śledzenia brzegu każdego obiektu z osobna;
c) wypełnianie wnętrza każdego wyśledzonego brzegu z osobna.

*Dowód.*

Ponieważ każda z operacji segmentacji opiera się o wynik operacji poprzedniej, przedstawione zostaną i udowodnione te trzy operacje w ich naturalnej kolejności za pomocą lematów 1-5.

*Założenie* 1.

Dowolna komórka $p$ $(X, Y)$ obrazu reprezentuje brzeg obiektu, jeżeli reprezentuje ona obiekt (tzn. jeśli $c(X, Y) = 1$) oraz jeżeli posiada ona w swoim najbliższym czteroelementowym sąsiedztwie (rys. 1) co najmniej jedną komórkę reprezentującą tło (tzn.



Rys. 1. Typowe konfiguracje cyfrowych wartości komórek operatora pięcioelementowego, przy których operator $e(X, Y)$ otrzymuje wartość 1

jeśli $c(X, Y-1) = 0$ lub $c(X, Y+1) = 0$, lub $c(X-1, Y) = 0$ lub $c(X+1, Y) = 0$) gdzie $c(X, Y)$ jest cyfrową wartością 0 albo 1 komórki obrazu.

*Lemat 1.* Brzegi obiektów obrazu binarnego są wykrywane za pomocą następującego operatora $e(X, Y)$:

$$e(X, Y) = c(X, Y) \wedge \sim [c(X+1, Y) \wedge c(X-1, Y) \wedge c(X, Y+1) \wedge c(X, Y-1)] \quad (1)$$

i tworzą następujący podzbiór $C$ obrazu binarnego $B$:

$$C = \{p(X, Y) \in B: e(X, Y) = 1\} \quad (2)$$

*Dowód.*

Obraz binarny składa się z obiektów i z ich tła, a obiekty składają się z wnętrz i brzegów. Jeżeli $p(X, Y)$ reprezentuje tło, wtedy $c(X, Y) = 0$ i dlatego $e(X, Y) = 0$. Komórka $p(X, Y)$

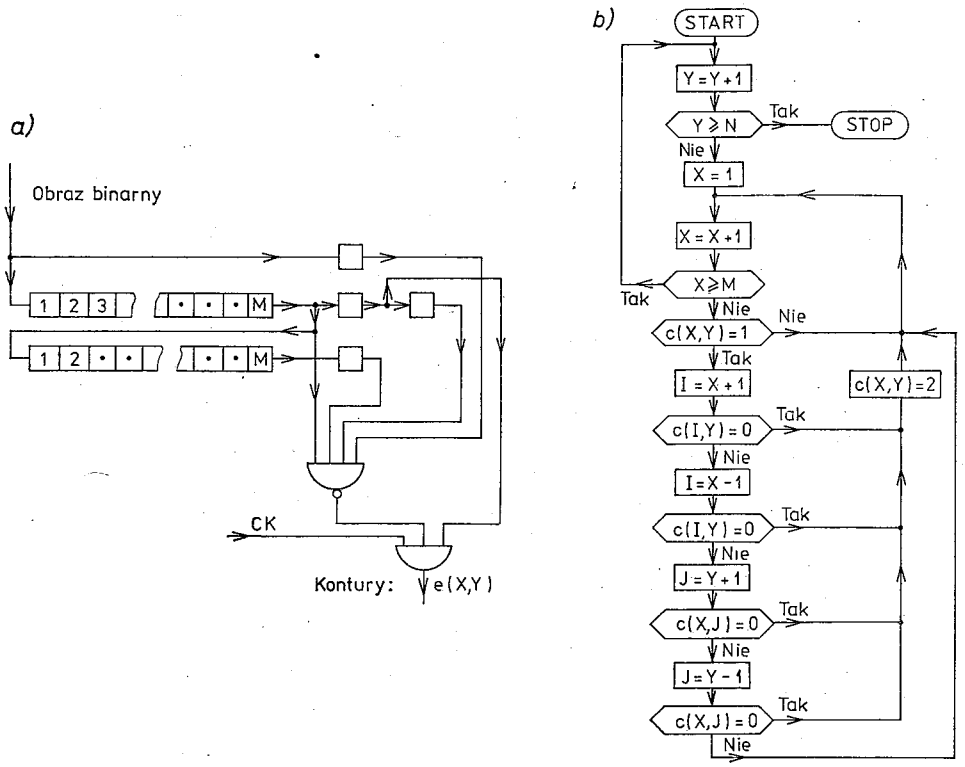
nie należy wtedy do podzbioru brzegów (krawędzi) $C$. Jeżeli $p(X, Y)$ reprezentuje wnętrze obiektu, wtedy $c(X, Y) = 1$ oraz wszystkie cztery komórki najbliższego sąsiedztwa posiadają wartości cyfrowe 1 i dlatego $e(X, Y) = 0$. Dlatego $p(X, Y) \notin C$. Natomiast jeśli co najmniej jeden z elementów najbliższego jej sąsiedztwa reprezentuje tło, wyrażenie w nawiasie kwadratowym wzoru (1) otrzymuje wartość 0 i dlatego $e(X, Y) = 1$, co oznacza że $p(X, Y) \in C$.

Ponieważ badane jest najbliższe sąsiedztwo, prawidłowa wartość $e(X, Y)$ jest wyznaczana na całym obrazie oprócz ramki jednoelementowej (tzn. w obszarze czynnym B). Wszystkie komórki wartości $e(X, Y) = 1$ tworzą więc brzegi obiektów, cbdu.

Algorytm rozpoznawania $h_c$ przetwarzający obraz $F$ we frazę „brzegi obiektów obrazu binarnego" albo w zbiór pusty $\Phi$ jest następujący

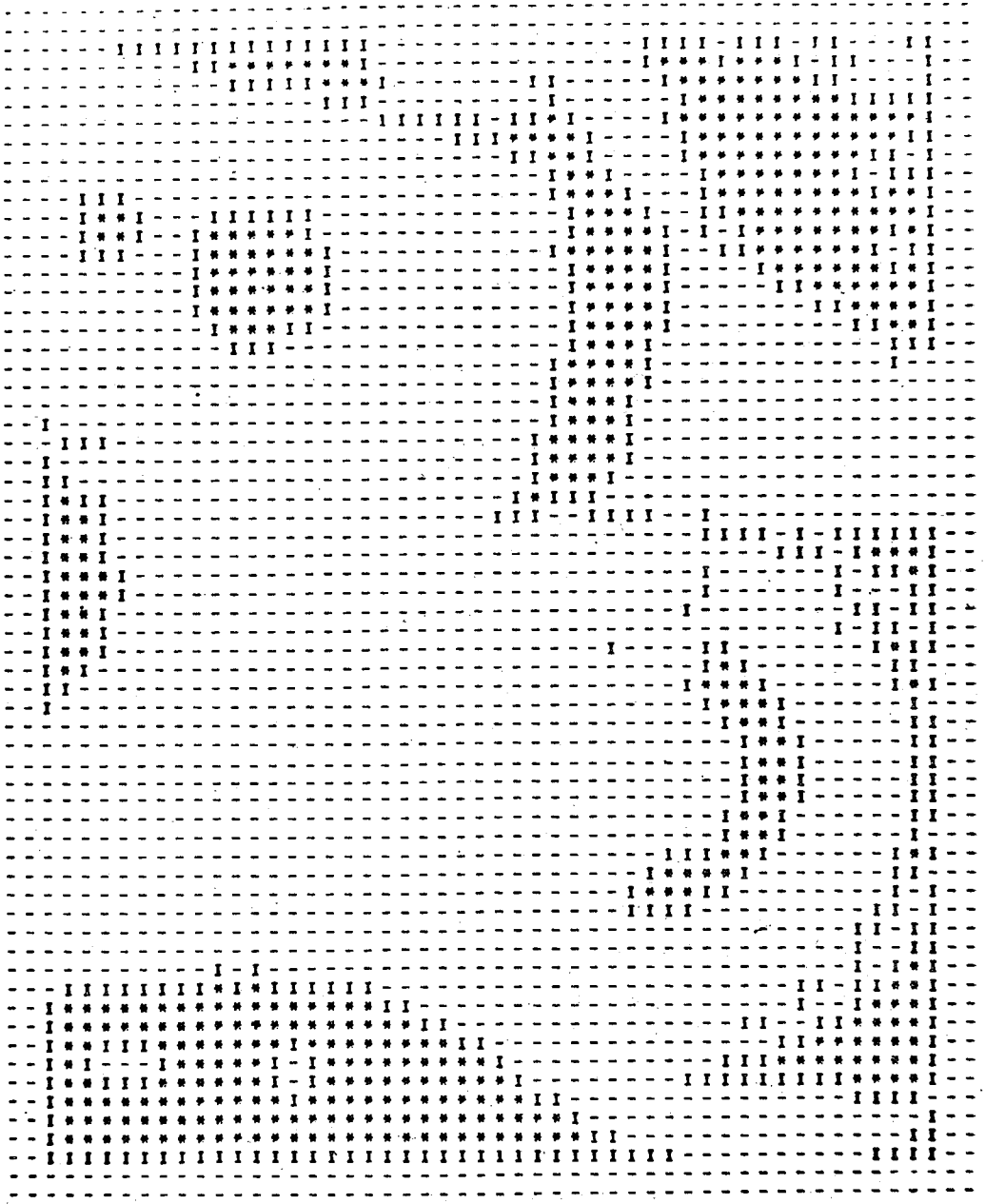
$$h_C : F \rightarrow \begin{cases} \text{brzegi obiektów obrazu binarnego,} \\ \text{jeśli } C \neq \Phi; \\ \Phi, \text{ jeśli } C = \Phi. \end{cases} \tag{3}$$

Przedstawiony operator $e(X, Y)$ jest wygodny w użyciu w przypadku detekcji krawędzi w wyspecjalizowanym układzie cyfrowym (rys. 2.a). Jeśli kontury są wydzielane przez




Rys. 2. Układ wydzielania brzegów obiektów, w którym użyto dwa rejestry przesuwające M-bitowe oraz cztery rejestry przesuwające 1-bitowe (a) oraz algorytm wydzielania brzegów (n)

uniwersalny komputer, można zastosować algorytm przedstawiony na rys. 2.b. W wyniku użycia tego algorytmu, komórki brzegowe obiektów otrzymują wartość $c(X, Y) = 2$. W algorytmie tym badane jest sąsiedztwo czterokomórkowe tylko tych elementów obrazu, które reprezentują obiekty (tzn. o wartości cyfrowej 1). W przypadku natrafienia w tym



Rys. 3. Binarny obraz głowicy silnika z brzegami obiektów wydzielonymi za pomocą operatora e (X