

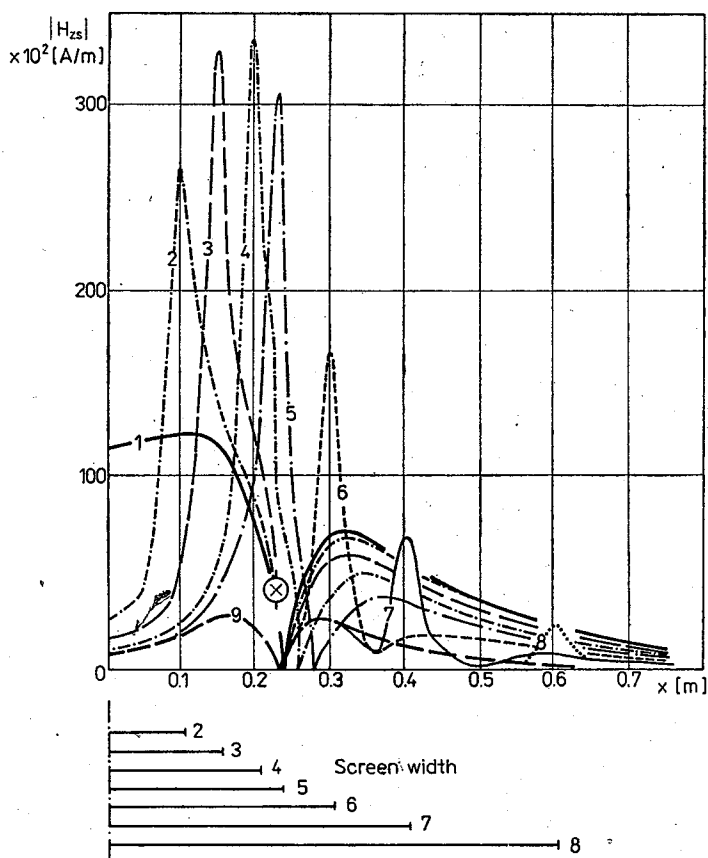


Fig. 7. Distributions of the normal component amplitude of the magnetic field strength on the steel surface for different widths of the screen. The arrangement data: $c = 0,23$ m, $h = 0,1$ m, $\Delta = 2$ mm, $d_e = 3$ mm, $I = 5000$ A. Curve 1 — for the arrangement without screen; curves 2...8 — for different widths of the screen (given in the figure); curve 9 — for fully screened case

increasing in the screen edge vicinity, especially when $a \leq c$. It follows from forcing-out the magnetic flux from the screen region. The flux by-passing the screen is concentrated in the vicinity of the screen edge — Fig. 6c. Considerable increase of the tangential component of the magnetic field strength on the screen surface for the screen edge region — Fig. 8, is the next consequence of this phenomenon. H_x component on the screen surface — Fig. 9, as well as E_y — Fig. 10 decrease after introducing a screen (even a narrow one) into the system. With the arrangement dimensions considered here the tangential components of the electric field strength (E_y) on both screen surfaces and on the steel surface are practically equal (similar as for H_z).

It thus follows that introducing the conducting screen into the arrangement under consideration decreases H_x and E_y components on the screened medium surface and consequently reduces the stray loss. However, considerable increase of H_x on the screen edge region is noticed.

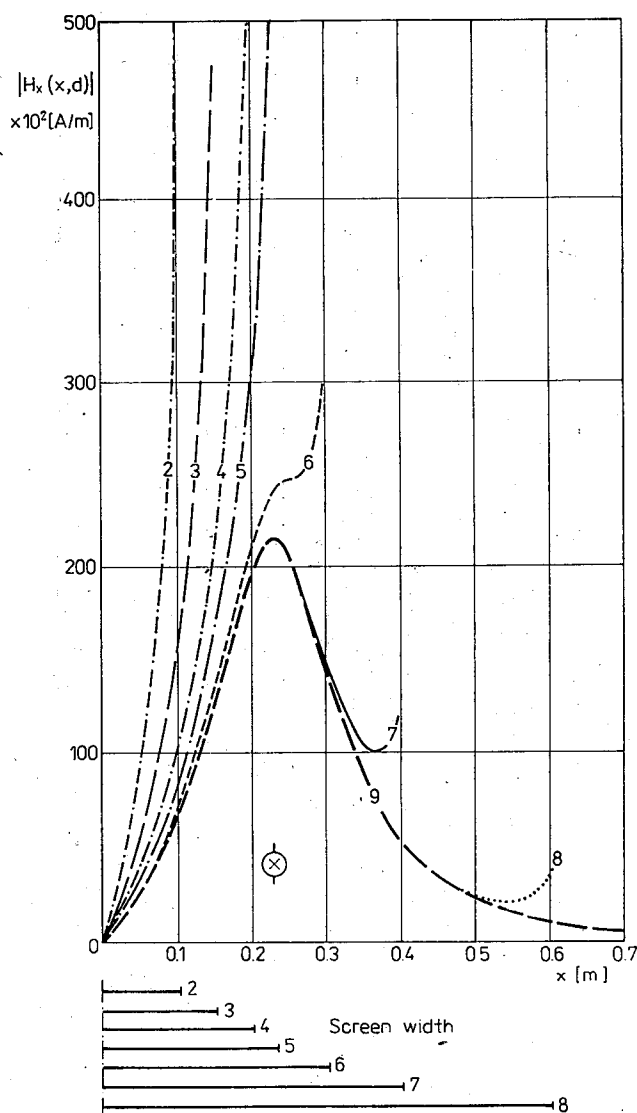


Fig. 8. Distributions of the tangential component amplitude of the magnetic field strength on the copper screen surface for different widths of the screen. Arrangement data and designations — see Fig. 7

The effectiveness of screening by the copper screen, for the arrangement presented in Fig. 1 for $c = 0,23$ m is estimated basing on numerical calculations for a number of alternatives. The screening effect has been determined taking into account both — the local overheating (the stray loss density distribution for different variants) as well as the total power loss in the screen and the screened wall.

The maximum value of the stray loss density on a metal surface (screen and a screened wall) is decisive for the local overheating hazard — [3]. The effectiveness of screening from this point of view is determined by ratios m_p :

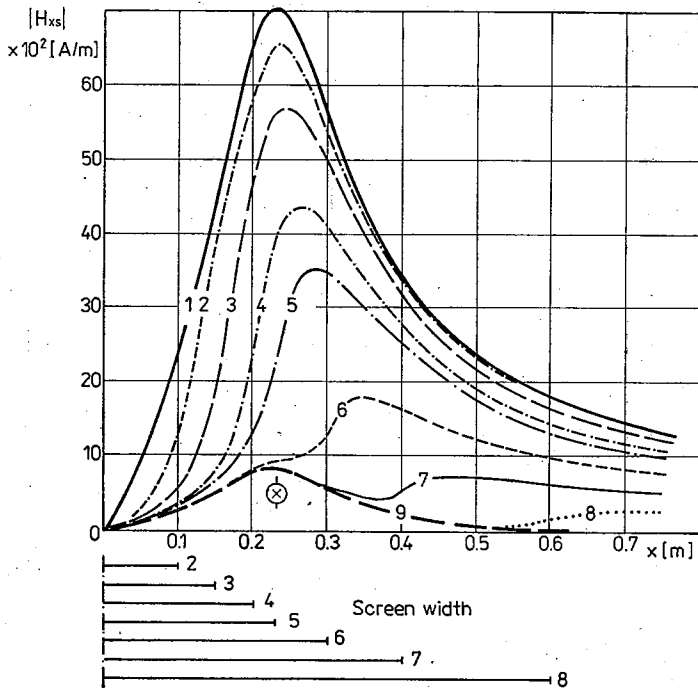


Fig. 9. Distributions of the tangential component amplitude of the magnetic field strength on the steel surface for different widths of the screen. Arrangement data and designations — see Fig. 7

$$m_{p1} = \frac{p_{kmax}}{p_{kmaxne}}; \quad m_{p2} = \frac{p_{emax}}{p_{kmaxne}} \quad (32)$$

where p_{kmax} and p_{emax} — W/m^2 — are maximum values of the stray loss density on the surfaces — of the screened wall and of the screen, respectively, and p_{kmaxne} is the maximum value on the steel wall in an arrangement without a screen.

It should be noted that coefficient m_p is a ratio of maximum values of the stray loss densities in two different arrangements — partially screened and unscreened, no matter where the maximum loss would occur. Usually — see Figs. 9 and 10, the maximum loss spots in the above mentioned arrangements have different coordinates. Thus m_p ought not to be identified with so called „screening coefficient” — [3], [10] which determines a change of the stray loss density due to introducing a screen but for spots of identical coordinates.

Apart from the maximum stray loss density it is also of practical interest to compare the loss calculated for the unit length along y-axis: within the screen — P_e , within the screened medium — P_k and total loss — P_c , from eqns. (23) ... (25). The screening effectiveness is for that purpose defined by the following ratios

$$m_{c1} = \frac{P_k}{P_{kne}}; \quad m_{c2} = \frac{P_e}{P_{kne}}; \quad m_{c3} = \frac{P_c}{P_{kne}} \quad (33)$$

where P_{kne} is the loss value determined for the unscreened arrangement.

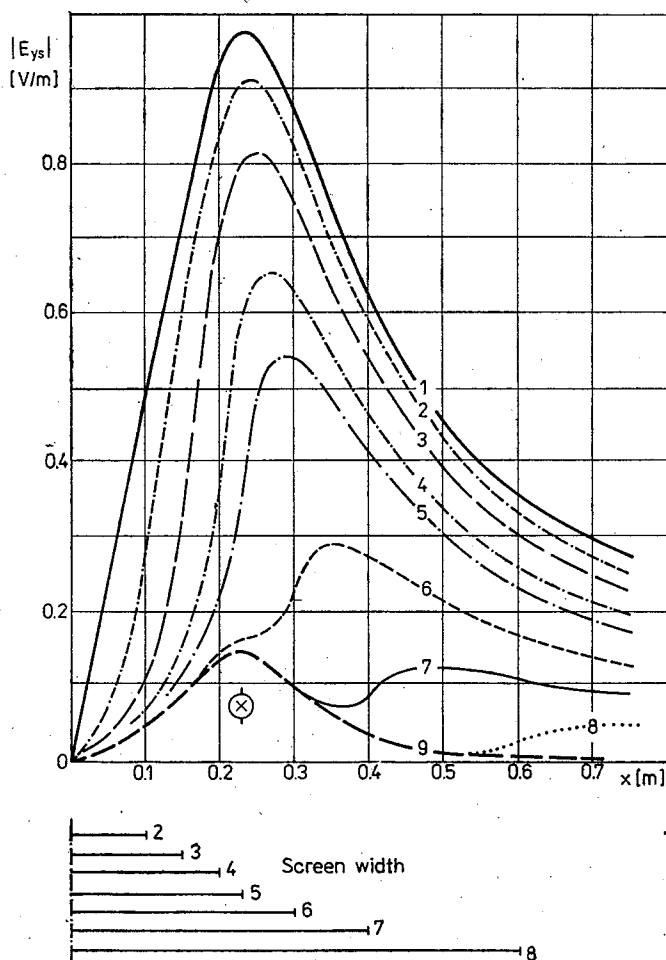


Fig. 10. Distributions of the tangential component amplitude of the electric field strength on the steel surface for different widths of the screen. Arrangement data and designations — see Fig. 7

Loading of the arrangement by the eddy-currents induced within the screen — I_e , within the screened medium — I_k , and by the total eddy-currents — I_c (eqns. (26)...(28)) can be characterized by m_i ratios:

$$m_{1i} = \frac{I_k}{I_{kne}}; \quad m_{i2} = \frac{I_e}{I_{kne}}; \quad m_{i3} = \frac{I_c}{I_{kne}}, \quad (34)$$

where I_{kne} is a r.m.s. value of the induced current in the arrangement without the screen.

In general, for $l \gg c$, ratios m_p , m_c and m_i are functions of the geometrical dimensions of the arrangement and the current I generating the field. It has been concluded, basing on calculations, that these parameters affect the ratios differently. As an example graphs of ratios m versus the relative (related to the distance between conductors) screen width is presented in Figs. 11...13.

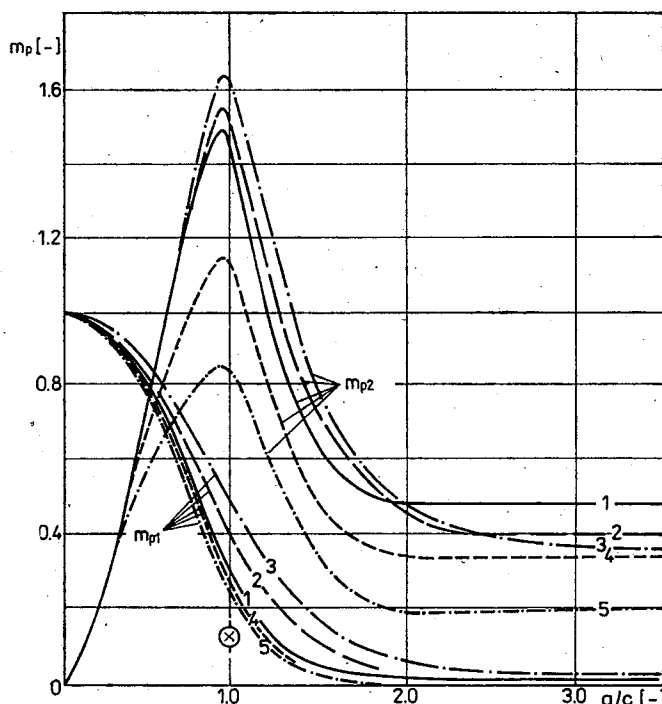


Fig. 11. m_p vs. relative copper screen width. 1 — $d_e = 3$ mm, $h = 0,1$ m; 2 — $d_e = 3$ mm, $h = 0,15$ m; 3 — $d_e = 3$ mm, $h = 0,2$ m; 4 — $d_e = 5$ mm, $h = 0,1$ m; 5 — $d_e = 10$ mm, $h = 0,1$ m. Calculations were carried out for $\Delta = 2$ mm and $I = 5000$ A

Fig. 11 represents $m_p = f(a/c)$ for several h and d_e values. It is clear from that figure that use of the screen results in a reduction of the maximum value of the loss density on the screened medium surface, independently of the screen width. This reduction, small for the narrow screens (e.g. for $a = 0.5c$ is equal to about 20%), becomes considerable higher for the screens of larger widths. For „ a ” higher than $(1,5...2)c$ and subject to h and d_e values, p_{kmax} does not differ practically from the maximum value of the loss density on the surface of the fully screened wall.

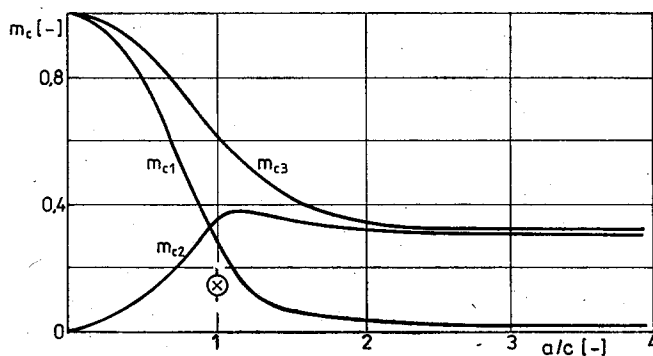


Fig. 12. m_c vs. relative copper screen width for $h = 0,1$ m, $d_e = 3$ mm, $\Delta = 2$ mm, $I = 5000$ A

The maximum value of the loss density within the screen ($p_{e\max}$) exceeds $p_{k\max}$ for the screen width greater than about $0,5c$ and amounts to up to 60% for thin screens ($d_e = 3 \dots 5$ mm) and for $a \cong c$. Considerable reduction of the loss density within the screen down to a value corresponding to the screen covering the whole surface to be screened takes place for the screens of $a = (2 \dots 2,5)c$ widths.

The screen width effect on the total loss referenced to a unit length in the y-axis direction is presented in Fig. 12. In order to make the drawing as legible as possible only values m_c expressed as functions of a/c ratio, calculated for $h = 0,1$ m and $d_e = 3$ mm, are illustrated. Introduction of the screen results in similar effect i.e. in decreasing the loss p_k in the screened medium. This decrease, small for the narrow screens (20% reduction is observed for $a \cong 0,5c$) is constant for $a \geq (1,5 \dots 2)c$. Loss within the screen (P_e) increases within the screen width up to $a = (1,2 \dots 1,5)c$ and remains unchanged for larger screen widths.

The total loss P_c is represented by ratio m_{c3} in Fig. 12. Calculations carried out for many variants have shown that m_{c3} is less than 1 over the whole range of the parameters considered. The conclusion is not in accordance with the one presented in paper [17] where, basing on an arrangement consisting of a single current-carrying conductor placed above a fully screened conducting half-space, it has been shown that in certain cases the total loss would be higher after screening. It follows from Fig. 12 that m_{c3} is constant for $a \geq (2 \dots 2,5)c$.

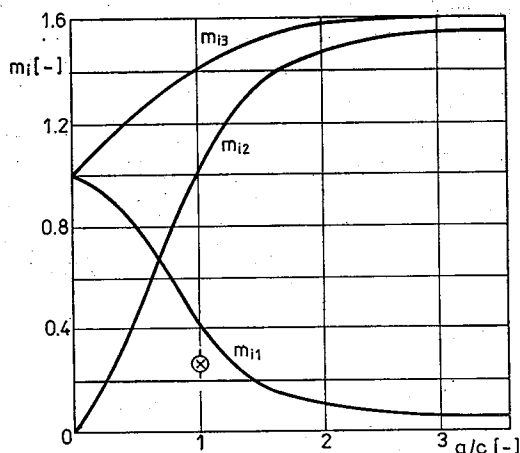


Fig. 13. m_i vs. relative copper screen width for $h = 0,1$ m, $d_e = 3$ mm, $\Delta = 2$ mm, $I = 5000$ A

Coefficients m_i versus the relative screen width are illustrated in Fig. 13. The curves shown on this Fig. correspond very well with the plots presented in Fig. 10. For „a” greater than $(0,7 \dots 0,8)c$ the current induced in the screen is greater than the current induced in the screened medium. For „a” greater than $(2,5 \dots 3)c$ the m_i values can be treated as constants.

SUMMARY AND CONCLUSIONS

The accurate and approximate solutions of the electromagnetic field problems in an arrangement consisting of a partial longitudinal conducting screen and a pair of current-carrying conductors has been presented. The applicability of the method as well as the accuracy of the solution has been verified by comparing the theoretical results with the measured ones. Basing on the calculations, carried out for a number of variants, it has been shown that the presence of a partial conducting screen in the arrangement considerably „disturbs” the electromagnetic field in the vicinity of the screened wall surface. This results in local increase of the tangential component of the magnetic field strength in the vicinity of the screen edge. In consequence, in some cases, it can lead to local overheating hazard. It has been also shown that the effectiveness of the partial screens depends on the arrangement geometry. Generally the screens of approximate width twice the distance between the current-carrying conductors (source of the field) are sufficiently effective. For such a screen the stray loss density and the total loss are close to those for a fully screened arrangement. Thus, further increase of the screen width is useless. Application of the narrow screens ($a \leq 0,5c$) is also no purpose because only small decrease of the stray loss density on the screened medium surface and the total loss is obtained. The screens of width approximately equal to the distance between conductors ($a \cong c$) can be locally overheated, a result of marked increase of the stray loss density at the screen edge.

It follows from the above considerations that for greater distances between leads and the metal surface wider screens should be applied. Better effectiveness of the partial screens can be obtained when thicker screens are used, the effect being more pronounced for wider screens.

It has been also shown that changes of the gap between a partial screen and a screened wall over a 0...5 mm interval have no practical effect on the electromagnetic field components on the partial screen and on the screened medium. This conclusion is in accord with these given in papers [4] and [21] for fully screened systems. Moreover it has been concluded that the effectiveness of the screens under consideration is unaffected by variations of the current through the leads over a 1...15 kA interval.

The results presented above can be used in analysing real systems of electrical equipment and particularly of large power transformers.

APPENDIX

Approximate solution of Laplace-Helmholtz equation for a thick layer. For a screen of thickness d_e the Helmholtz's equation

$$\nabla^2 A_y = \alpha_e^2 A_y$$

after introducing the following dimensionless variables

$$x' = \frac{x}{2a}; \quad z' = \frac{z}{d_e}$$

can be rewritten in the form

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 A_y}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z'^2} = \alpha_e^2 d_e^2 A_y, \quad (\text{A.1})$$

where $\varepsilon = d_e/2a$ is a small parameter ($\varepsilon^2 \ll 1$). Employing the perturbation methods [1] the solution of eqn. (A.1) may be expressed as follows

$$A_y = \sum_{m=0}^{\infty} \xi_m(x', z') \varepsilon^m \quad (\text{A.2})$$

By substituting (A.2) in (A.1) and grouping the terms of the same power of ε we get

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial z'^2} &= \alpha_e^2 d_e^2 \xi_0 & m=0 \\ \frac{\partial^2 \xi_{m-1}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \xi_m}{\partial x'^2} &= \alpha_e^2 d_e^2 \xi_m & m \geq 1. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

The first approximation ($m=0$) of the solution of eqn. (A.3) has the form of eqn. (8):

$$A_y^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} [B_{1n} \text{sh } \alpha_e(z-\Delta) + B_{2n} \text{ch } \alpha_e(z-\Delta)] \sin \lambda_n x.$$

For a free-space layer of thickness d_e the solution of Laplace's equation has a form

$$A_y = \sum_{m=0}^{\infty} \xi_m^*(x) (z-\Delta)^m \quad (\text{A.4})$$

By substituting (A.4) in (3) and grouping the terms of the same power of $(z-\Delta)$ it can be found that

$$\frac{\partial^2 \xi_m^*}{\partial x^2} + (m+1)(m+2) \xi_{m+2}^* = 0. \quad (\text{A.5})$$

The series (A.4) may be limited to three of the first terms

$$A_y = \xi_0^*(x) + \xi_1^*(x)(z-\Delta) + \xi_2^*(x)(z-\Delta)^2.$$

After some algebra the form of eqn. (8) is obtained

$$A_y^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ B_{3n} \left[1 + \lambda_n^2 \frac{(z-\Delta)^2}{2} \right] + B_{4n}(z-\Delta) \right\} \sin \lambda_n x.$$

It is evident that eqn. (8) is the solution of the set of equations (A.5) with max. error resulting from the neglected terms (A.4).

Eqn. (8) can be also obtained from a general solution of the Laplace's equation for a free-space layer

$$A_y = \sum_{n=1}^{\infty} [B_{3n} \text{ch } \lambda_n(z-\Delta) + B_{4n}^* \text{sh } \lambda_n(z-\Delta)] \sin \lambda_n x. \quad (\text{A.6})$$

For small value of the product $\lambda_n(z-\Delta)^{*})$ the functions $\text{ch } \lambda_n(z-\Delta)$ and $\text{sh } \lambda_n(z-\Delta)$ may be expressed in an approximated form

$$\text{ch } \lambda_n(z-\Delta) = 1 + \frac{\lambda_n^2(z-\Delta)^2}{2!} + \frac{\lambda_n^4(z-\Delta)^4}{4!} + \dots \cong 1 + \frac{\lambda_n^2(z-\Delta)^2}{2!}$$

$$\text{sh } \lambda_n(z-\Delta) = \lambda_n(z-\Delta) + \frac{\lambda_n^3(z-\Delta)^3}{3!} + \dots \cong \lambda_n(z-\Delta)$$

and $B_{4n} = B_{4n}^* \lambda_n$.

REFERENCES

1. A. H. Nayfeh: *Perturbation methods*. New York, London, Sydney, Toronto: John Wiley Sons Inc., 1973
2. M. Stafl: *Electrodynamics of electrical machines*. Praha: Academia, 1967
3. J. Turowski: *Elektrodynamika techniczna*. Warszawa: WNT, 1968
4. S. Apanasewicz: *Rozkład pola elektromagnetycznego w układzie grupa przewodników równoległych, ekran i półprzestrzeń metalowa*. Rozprawy Elektrotech., 1973, nr 1
5. S. Apanasewicz, M. Kaźmierski: *Rozkład pola elektromagnetycznego i strat na powierzchni częściowo ekranowanej kadzi transformatora*. Arch. Elektrotechniki, 1977, nr 2, s. 241—256
6. S. Apanasewicz: *Metody analizy elektromagnetycznego pola rozproszenia w transformatorach i strat mocy w różnych przypadkach częściowego ekranowania ich kadzi*. Prace Inst. Elektrotechn., 1978, nr 104, s. 21—84
7. W. Dietrich: *Schirmwirkung und Verluste elektrische gut leitenden Abschirmung von Transformatorkesseln*. ETZ-A, 1976, nr 22
8. P. Jezierski: *Przybliżony sposób wyznaczania strat w płycie nieekranowanej i ekranowanej przy wzbudzeniu jednofazowym*. Rozprawy Elektrotech., 1980, 26, nr 1, s. 29—45
9. M. Kaźmierski: *Przenikalność zastępcza masywnego żelaza przy częstotliwości technicznej*. Rozprawy Elektrotech., 1975, 21, nr 2, s. 435—453
10. M. Kaźmierski: *Przenikalność zastępcza ferromagnetyków ekranowanych*. Rozprawy Elektrotechn., 1976, 22, nr 2, s. 287—301
11. M. Kaźmierski: *Pole elektromagnetyczne i straty wywołane przez prądy w układzie przewodów równoległych do ekranowanej półprzestrzeni o właściwościach ferromagnetycznych*. Arch. Elektrotechn., 1975, nr 4, s. 641—662
12. M. Kaźmierski: *A contribution to analysis of electromagnetic field on solid iron surface of variable magnetic permeability*. Rozprawy Elektrotechn., 1987, 33, nr 3—4, s. 669—694
13. M. Kaźmierski, D. Przybylak, I. Kersz: *Optimum mathematical model for electromagnetic field analysis in an arrangement with partial longitudinal conducting screens*. Arch. Elektrotechn., 1986, nr 1, s. 29—47
14. M. Krakowski: *Eddy current losses in a shielded or unshielded ferromagnetic solid due to a.c. flowing through parallel conductors*. Rozprawy Elektrotechn., 1976, nr 2, s. 239—268
15. N. Mullineux, J.R. Reed: *Eddy current shielding of transformer tanks*. Proc. IEE, 1966, nr 5
16. G.G. North: *Harmonic analysis of a short stator linear induction machine using a transformation technique*. IEE Trans. on Power App. and Syst., 1972, vol. PAS-92, nr 5, s. 1733—1743

* In practice the number of terms of (A.5) series is limited to $N = 30 \dots 50$. Increasing the number of terms above this value does not affect the final result (differences are lower than 0.1%). Hence, for a sufficiently small Δ , the product $\lambda_n(z-\Delta) < 1$.

17. A. Patecki, G. Szymański: *Analiza strat wirowych w szczególnych przypadkach ekranowania elektromagnetycznego półprzestrzeni ferromagnetycznej*. Mat. IX Sympozjum nt. Zastosowanie Maszyn Matem. w Elektrotechnice, Łódź 1984, s. 39—43
18. T. Sato, Y. Irui, S. Saito: *Solution of magnetic field, eddy current and circulating current problems taking magnetic saturation and effect of eddy current and circulating current paths into account*. IEEE PES, Winter Meeting, New York, 1977, Paper no. A 77 168—8
19. J. Stepina: *Stinění nádob transformátoru hliníkem pro omezení přídavných ztrát*. Elektrotechn. Obzor, 1962, nr 7
20. J. Stepina: *Stinění nádob transformátoru hliníkovými stítníky pro omezení přídavných ztrát*. Elektrotechn. Obzor, 1968, nr 3
21. J. Turowski, J. Brulikowski: *Wpływ odległości ekranu od ściany stalowej na straty mocy w układzie ekranowanym*. Mat. Sesji 25 lecia Wydz. Elektr. PŁ, z. 2, Łódź, maj 1970
22. J. Turowski, M. Turowski: *A network approach to the solution of stray field problems in large transformers*. Rozprawy Elektrotechn., 1985, nr 2, s. 405—422
23. J. Turowski, J. Fleszar, E. Gierczak, E. Mendrela: *Kryteria stosowalności metody przedłużeń analitycznych do obliczania pola metodą szeregów Fouriera*. Krajowa Konf. Teorii Pola Elektromagn., Warszawa, Jadwisin 28—29 września 1982, s. 91—96

M. KAŹMIERSKI, I. KERSZ

EFEKTYWNOŚĆ PODŁUŻNYCH EKRANÓW PRZEWODZĄCYCH CZĘŚĆ I: POLE ELEKTROMAGNETYCZNE I STRATY

Streszczenie

W pracy przedstawiono analizę pola elektromagnetycznego i strat w układzie z częściowym podłużnym ekranem przewodzącym, ekranującym maszyną stal o zmiennej przenikalności magnetycznej. Poprawność metody obliczeń zweryfikowano poprzez porównanie wyników obliczeń z rezultatami pomiarów na dużym modelu fizycznym. Oceniono skuteczność ekranów częściowych z punktu widzenia maksymalnej wartości strat jednostkowych na powierzchni ekranu i środowiska ekranowanego, strat całkowitych w układzie i wartości prądów indukowanych w układzie. Wykazano, że wystarczająco skutecznymi są ekrany o szerokości równej w przybliżeniu podwójnej odległości między przewodami z prądem wzbu-
dzającym pole magnetyczne.

M. KAŹMIERSKI, I. KERSZ

EFFICACITÉ DES ÉCRANS CONDUCTEURS LONGITUDINAUX PARTIE I: CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE ET LES PERTES

Résumé

Dans l'étude on donne l'analyse du champ électromagnétique et des pertes dans le système à l'écran conducteur longitudinal partiel, blindant un acier solide à perméabilité magnétique variable. On vérifie la correction de la méthode de calculs, en comparant les résultats des calculs avec les mesures prises sur un grand modèle physique. On apprécie l'efficacité des écrans partiels du point de vue de la valeur maximale des pertes unitaires sur la surface de l'écran et sur celle de l'ambiance blindée, les pertes totales dans le système et la valeur des courants induits dans le système. On montre, que l'écran, dont la largeur est égale à la double distance entre les conducteurs avec le courant induisant le champ électromagnétique, a une efficacité suffisante.

M. KAŻMIERSKI I. KERSZ

WIRKSAMKEIT DER LEITENDEN LÄNGSABSCHIRMUNG
TEIL I: ELEKTROMAGNETISCHES FELD UND VERLUSTE

Zusammenfassung

In der Bearbeitung wurde eine Analyse des elektromagnetischen und der Leistungsverluste bei einer Anlage mit leitender Teilabschirmung dargestellt, wobei massiver Stahl mit veränderlicher Permeabilität abgeschirmt wird. Die Richtigkeit der angewandten mathematischen Methode wurde mittels Vergleichs der Berechnungsergebnisse mit den an einem grossen Modell gemessenen Daten geprüft. Die Wirksamkeit der Teilabschirmung wurde von verschiedenen Gesichtspunkten aus beurteilt: des Maximalwertes der Einzelverluste an der Schirmoberfläche und des abgeschirmten Stahls, der Gesamtverluste und der Grösse der induzierten Ströme in die Anlage. Es wurde nachgewiesen, dass die Kupferschirme eine ausreichende Wirksamkeit haben, wenn die Breite der Schirme ungefähr zweimal so gross, wie der Abstand zwischen den Stromleitungen ist, die das magnetische Feld induzieren.

М. КАЗЬМЕРСКИ, И. КЕРШ

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРОДОЛЬНЫХ ПРОВОДЯЩИХ ЭКРАНОВ
ЧАСТЬ 1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ПОТЕРИ

Резюме

Проведен анализ электромагнитного поля и потерь в системе с частичным продольным проводящим экраном, экранирующим массивную сталь с переменной магнитной проницаемостью. Корректность метода вычислений проверена путем сравнения результатов вычислений с измерениями на большой физической модели. Дана оценка эффективности частичных экранов с точки зрения максимальной величины удельных потерь на поверхности экрана и экранируемой области, суммарных потерь и индуцированных токов в системе. Показано, что достаточно эффективны экраны шириной приблизительно равной двойному расстоянию между проводами с током возбуждающим магнитное поле.

Effectivity of longitudinal conducting screens PART II: Temperature rise in screened systems

MARCELI KAŹMIERSKI, IGOR KERSZ

Instytut Energetyki, Zakład Badań Transformatorów w Łodzi

Received 1987.05.27

Authorized 1988.06.22

Four algorithms of different simplification level are presented for calculating the steady-state temperature rise in a system comprising a solid steel plate shielded from the stray flux by means of a partial longitudinal conducting screen and cooled with oil on one side and air on the other. The stray loss in the system is determined in conformity with paper. The applicability of the solutions is verified by comparison between calculated results and experimental tests carried out on a full-size model. In the general case, the temperature rise of metal elements (screen and screened plate) can be expressed as a sum of two different factors; the temperature rise due to heat flow from hot oil to ambient air θ_0 , and the temperature rise due to stray loss in the system — $\Delta\theta$. Only when $\Delta\theta$ prevails in the total temperature rise θ , hence, in systems with high stray losses, the screen is efficient for reducing temperature rise.

1. INTRODUCTION

Screening is one of more effective methods for controlling the electromagnetic and heat effects of highly concentrated stray flux which affect structural members of electrical equipment of large capacity. For a given system the screen should not only reduce the total loss in the system but also the local stray loss density on the structural member surface to the value for which the temperature rise of the member is below a permitted level applicable by standards [7].

In the first part of the paper — [6] — an analysis of the electromagnetic field in an arrangement consisting of a partial longitudinal conducting screen is presented, and the stray loss density for both — the screened medium (steel plate) and the screen is determined. The second part deals with determination of the steady state temperature rise in a 2-dimensional arrangement with the partial screen for given distribution of the stray loss density.

The work reported in this paper was carried out as a part of the government-sponsored project 05.5A „Chosen fundamental problems in electrical engineering”.

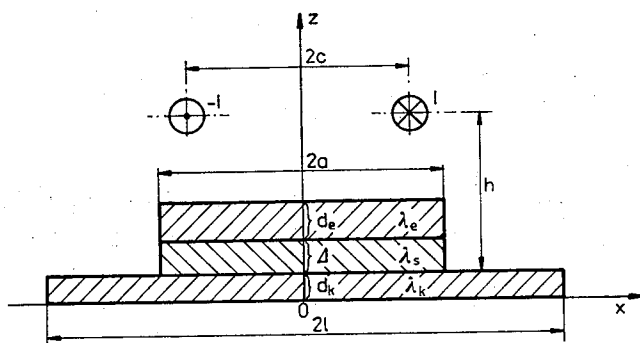


Fig. 1. Arrangement under analysis

The arrangement under analysis, presented in Fig. 1, consists of a metallic plate of width $2l$ and thickness d_k , a partial screen, having $2a$ width and d_e thickness, and a gap between the screen and the screening plate. The gap $\Delta = 0,5 \dots 5$ mm appears in practical systems and is due to manufacturing requirements.

Finite width $2l$ of the metal plate is directly connected with the model, described and analysed in paper [6] and it also enables to get the solution of the heat equation in the Fourier series form. For practical systems, such as partially screened transformer tanks, width $2l$, substantially hard to define, has no essential influence on the analysis results due to a local, limited to the middle region of the system, character of the electromagnetic and heat phenomena. Taking $l \gg c$ for the model under consideration gives sufficient approximation for real conditions.

It has been assumed that the thermal conductivities of the plate (λ_k), gap (λ_s) and screen (λ_e) are constant within the range temperatures considered. Comments referred to the choice of λ_s value are presented in Appendix 1. It has been also assumed that for $z < 0$ the heat is transmitted to the air at temperature θ_p and for $z > 0$ to the oil at temperature θ_{oi} . The heat-transfer to air and oil coefficients are α_p and α_{oi} respectively and their values as well as θ_p and θ_{oi} are assumed as constants.

2. FORMULATION OF THE PROBLEM

It has been assumed that the temperature of the metal plate, the gap and the screen satisfy the equation of conduction of heat with boundary conditions of the third kind at the surfaces in contacts with air or oil and of the fourth kind at the surfaces of separation of two media of different conductivities*).

In general case, when neglecting the changes of the field along y-axis, the stray loss densities in the screened plate and in the screen are functions of two variables — x and z . However, owing to small thickness of the plate and screen relative to other characteristic

*) In English-language literature these two kinds of the boundary conditions are referred to „radiation” boundary condition or linear heat transfer at the surface and boundary condition at the surface of separation of two media of different conductivities respectively — see Carslaw H. S., Jaeger J. C.: *Conduction of heat in solids*, Oxford, Clarendon Press, 1973.

dimensions of the arrangement as well as to the essential influence of the thermal conductivity of the conducting media, e.g. the screened plate (usually of constructional steel) and the screen (of copper or aluminum) on temperature equalization in normal direction to their surfaces (z -axis direction), it is assumed that the loss within the screen and the plate is uniformly distributed along the metal thickness. Thus the rate of heat generation per unit volume (in W/m^3) is $p_k(x)/d_k$ for the screened plate and $p_e(x)/d_e$ for the screen, where $p_k(x)$ and $p_e(x)$ are the stray loss densities (in W/m^2) on the metal plate surface and on the screen surface respectively — [6].

Let ϑ_k , ϑ_s , ϑ_e and ϑ_{ol} be the temperature rise of the plate, gap, screen and oil respectively above the ambient temperature. The following equations apply [2], [4]:

— for the screened plate

$$\frac{\partial^2 \vartheta_k(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_k(x, z)}{\partial z^2} = -\frac{p_k(x)}{d_k \lambda_k}, \quad (1)$$

— for the gap

$$\frac{\partial^2 \vartheta_s(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_s(x, z)}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

— for the screen

$$\frac{\partial^2 \vartheta_e(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_e(x, z)}{\partial z^2} = -\frac{p_e(x)}{d_e \lambda_e} \quad (3)$$

with the following boundary conditions:

for $z = 0$

$$\lambda_k \frac{\partial \vartheta_k(x, 0)}{\partial z} - \alpha_p \vartheta_k(x, 0) = 0, \quad (4)$$

for $x = \pm l$

$$\lambda_k \frac{\partial \vartheta_k(\pm l, z)}{\partial x} \pm \alpha_{ol} [\vartheta_k(\pm l, z) - \vartheta_{ol}] = 0, \quad (5)$$

for $|x| \in \langle 0, a \rangle$ and $z = d_k$

$$\vartheta_k(x, d_k) = \vartheta_s(x, d_k) \quad (6)$$

$$\lambda_k \frac{\partial \vartheta_k(x, d_k)}{\partial z} = \lambda_s \frac{\partial \vartheta_s(x, d_k)}{\partial z}, \quad (7)$$

for $|x| \in \langle a, l \rangle$ and $z = d_k$

$$\lambda_k \frac{\partial \vartheta_k(x, d_k)}{\partial z} - \alpha_{ol} [\vartheta_k(x, d_k) - \vartheta_{ol}] = 0, \quad (8)$$

for $x = \pm a$

$$\lambda_s \frac{\partial \vartheta_s(\pm a, z)}{\partial z} \pm \alpha_{ol} [\vartheta_s(\pm a, z) - \vartheta_{ol}] = 0, \quad (9)$$

for $z = d + \Delta = d_2$

$$\vartheta_s(x, d_2) = \vartheta_e(x, d_2) \quad (10)$$

$$\lambda_s \frac{\partial \vartheta_s(x, d_2)}{\partial z} = \lambda_e \frac{\partial \vartheta_e(x, d_2)}{\partial z}, \quad (11)$$

for $x = \pm a$

$$\lambda_e \frac{\partial \vartheta_e(\pm a, z)}{\partial x} \pm \alpha_{0l} [\vartheta_e(\pm a, z) - \vartheta_{0l}] = 0, \quad (12)$$

and for $z = d_k + \Delta + d_e = d_3$

$$\lambda_e \frac{\partial \vartheta_e(x, d_3)}{\partial z} + \alpha_{0l} [\vartheta_e(x, d_3) - \vartheta_{0l}] = 0. \quad (13)$$

3. SOLUTION OF THE PROBLEM

3.1. ALGORITHM No. 1 — THE ACCURATE SOLUTION

Eqs. (1)...(3) with the conditions (4)...(13) are solved by separation of the variables. Due to symmetry of the arrangement the solution is as follows

$$\vartheta_k^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \cos \nu_n x [C_{1n} \operatorname{ch} \nu_n z + C_{2n} \operatorname{sh} \nu_n z + c_n] + \vartheta_{0l},$$

$$\vartheta_s^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \cos \varepsilon_n x [B_{1n} \operatorname{ch} \varepsilon_n (z - d_k) + B_{2n} \operatorname{sh} \varepsilon_n (z - d_k)] + \vartheta_{0l},$$

$$\vartheta_e^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \cos \beta_n x [A_{1n} \operatorname{ch} \beta_n (z - d_2) + A_{2n} \operatorname{sh} \beta_n (z - d_2) + a_n] + \vartheta_{0l}.$$

Functions $\vartheta_k^{(1)}$ and $\vartheta_e^{(1)}$ may be expressed combining the general solution of the homogeneous equation and the particular solution of the non-homogeneous equation. The given functions $p_k(x)$ and $p_e(x)$ can be expanded into a Fourier series in terms of $\cos \nu_n x$ and $\cos \beta_n x$.

Hence

$$p_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n \cos \nu_n x \quad (14)$$

$$p_e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n \cos \beta_n x, \quad (15)$$

where

$$c_n = \frac{\tilde{c}_n}{\nu_n^2 d_k \lambda_k}; \quad a_n = \frac{\tilde{a}_n}{\beta_n^2 d_e \lambda_e}.$$

Values of ν_n , ε_n , β_n are determined from (5), (9), (12). It follows from (5) that

$$\sum_{n=0}^{\infty} [C_{1n} \operatorname{ch} \nu_n z + C_{2n} \operatorname{sh} \nu_n z + c_n] \left[-\nu_n \sin \nu_n l + \frac{\alpha_{0l}}{\lambda_k} \cos \nu_n l \right] = 0.$$

Therefore

$$\nu_n = \frac{\alpha_{0l}}{\lambda_k} \operatorname{ctg} \nu_n l \quad (16)$$

and similarly

$$\varepsilon_n = \frac{\alpha_{0l}}{\lambda_s} \operatorname{ctg} \varepsilon_n a \quad (17)$$

$$\beta_n = \frac{\alpha_{0l}}{\lambda_e} \operatorname{ctg} \beta_n a. \quad (18)$$

From the solution of eqns. (16)...(19) an infinite series of eigenvalues ν_n , ε_n , β_n is obtained. It can be easily shown that the set of functions $\{\cos \beta_n x\}$ and $\{\cos \varepsilon_n x\}$, where β_n and ε_n results from (18) and (17), are orthogonal within the interval $\langle 0, a \rangle$ and the set $\{\cos \nu_n x\}$, where ν_n results from (16), is orthogonal within the interval $\langle 0, 1 \rangle$.

The norms of the functions are equal to

$$W_1(n) = \|\cos \beta_n x\| = \int_0^a \cos^2 \beta_n x dx = \frac{1}{2} \left[a + \frac{\sin 2\beta_n a}{2\beta_n} \right] \quad (19)$$

$$W_2(n) = \|\cos \varepsilon_n x\| = \frac{1}{2} \left[a + \frac{\sin 2\varepsilon_n a}{2\varepsilon_n} \right] \quad (20)$$

$$W_3(n) = \|\cos \nu_n x\| = \frac{1}{2} \left[l + \frac{\sin 2\nu_n l}{2\nu_n} \right]. \quad (21)$$

Substituting ϑ_e into (13) we get

$$\begin{aligned} & \lambda_e \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \cos \beta_n x [A_{1n} \operatorname{sh} \beta_n d_e + A_{2n} \operatorname{ch} \beta_n d_e] + \\ & + \alpha_{0l} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \beta_n x [A_{1n} \operatorname{ch} \beta_n d_e + A_{2n} \operatorname{sh} \beta_n d_e + a_n] = 0, \end{aligned}$$

therefore

$$\beta_n \lambda_e [A_{1n} \operatorname{sh} \beta_n d_e + A_{2n} \operatorname{ch} \beta_n d_e] + \alpha_{0l} [A_{1n} \operatorname{ch} \beta_n d_e + A_{2n} \operatorname{sh} \beta_n d_e + a_n] = 0.$$

By introducing the following designations:

$$\kappa = \frac{\alpha_{0l}}{\lambda_e};$$

$$K_n^{(1)} = \beta_n \operatorname{sh} \beta_n d_e + \kappa \operatorname{ch} \beta_n d_e; \quad K_n^{(2)} = \beta_n \operatorname{ch} \beta_n d_e + \kappa \operatorname{sh} \beta_n d_e$$

we get

$$A_{1n} K_n^{(1)} + A_{2n} K_n^{(2)} = -\kappa a_n. \quad (22)$$

It follows from condition (10) that

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos \beta_n x [A_{1n} + a_n] = \sum_{n=0}^{\infty} \cos \varepsilon_n x [B_{1n} \operatorname{ch} \varepsilon_n \Delta + B_{2n} \operatorname{sh} \varepsilon_n \Delta],$$

hence

$$A_{1n} + a_n = \frac{1}{W_1(n)} \sum_{i=0}^{\infty} [B_{1i} \operatorname{ch} \varepsilon_i \Delta + B_{2i} \operatorname{sh} \varepsilon_i \Delta] R_{n,i}^{(1)}, \quad (23)$$

where

$$R_{n,i}^{(1)} = \int_0^a \cos \beta_n x \cos \beta_i x dx.$$

Condition (11), which after some algebra becomes

$$\lambda_e \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \beta_n \cos \beta_n x = \lambda_s \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos \varepsilon_n x [B_{1n} \operatorname{sh} \varepsilon_n \Delta + B_{2n} \operatorname{ch} \varepsilon_n \Delta]$$

gives the following equation

$$\lambda_e \beta_n A_{2n} = \frac{\lambda_s}{W_1(n)} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i [B_{1i} \operatorname{sh} \varepsilon_i \Delta + B_{2i} \operatorname{ch} \varepsilon_i \Delta] R_{n,i}^{(1)}. \quad (24)$$

And from (4)

$$\lambda_k \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} \nu_n \cos \nu_n x - \alpha_p \left[\sum_{n=0}^{\infty} (C_{1n} + c_n) \cos \nu_n x + \vartheta_{0l} \right] = 0$$

by presenting ϑ_{0l} in the interval $\langle 0, l \rangle$ in the form

$$\vartheta_{0l} = \sum_{n=0}^{\infty} K_n \cos \nu_n x,$$

we finally get

$$C_{2n} \nu_n \lambda_k = \alpha_p [C_{1n} + c_n + K_n], \quad (25)$$

where

$$K_n = \frac{\vartheta_{0l}}{W_3(n)} \int_0^l \cos \nu_n x dx.$$

Similarly from condition (6) of the new form

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{1n} \cos \varepsilon_n x = \sum_{n=0}^{\infty} \cos \nu_n x [C_{1n} \operatorname{ch} \nu_n d_k + C_{2n} \operatorname{sh} \nu_n d_k + c_n]$$

we get

$$B_{1n} = \frac{1}{W_2(n)} \sum_{i=0}^{\infty} [C_{1i} \operatorname{ch} \nu_i d_k + C_{2i} \operatorname{sh} \nu_i d_k + c_i] R_{n,i}^{(2)}, \quad (26)$$

where

$$R_{n,i}^{(2)} = \int_0^a \cos \varepsilon_n x \cos \nu_i x dx.$$

Conditions (7) and (8) can be presented in the form

$$\frac{\partial \vartheta_k^{(1)}}{\partial z} = \begin{cases} \frac{\lambda_s}{\lambda_k} \frac{\partial \vartheta_s}{\partial z} & \text{for } |x| \in \langle 0, a \rangle \\ -\frac{\alpha_{0l}}{\lambda_k} (\vartheta_k - \vartheta_{0l}) & \text{for } |x| \in \langle a, l \rangle, \end{cases} \quad (7a)$$

therefore

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} v_n \cos v_n x [C_{1n} \operatorname{sh} v_n d_k + C_{2n} \operatorname{ch} v_n d_k] = \\ & = \begin{cases} \frac{\lambda_s}{\lambda_k} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \varepsilon_n \cos \varepsilon_n x & \text{for } |x| \in \langle 0, a \rangle \\ \frac{\alpha_{0l}}{\lambda_k} \sum_{n=0}^{\infty} \cos v_n x [C_{1n} \operatorname{ch} v_n d_k + C_{2n} \operatorname{sh} v_n d_k + c_n] & \text{for } |x| \in \langle a, l \rangle \end{cases} \end{aligned}$$

and finally

$$\begin{aligned} v_n [C_{1n} \operatorname{sh} v_n d_k + C_{2n} \operatorname{ch} v_n d_k] &= \frac{1}{W_3(n) \lambda_k} \left\{ \lambda_s \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i B_{2i} R_{i,n}^{(2)} - \right. \\ & \left. - \alpha_{0l} \sum_{i=0}^{\infty} [C_{1i} \operatorname{ch} v_i d_k + C_{2i} \operatorname{sh} v_i d_k + c_i] R_{i,n}^{(4)} \right\}, \end{aligned} \quad (27)$$

where

$$R_{n,i}^{(4)} = \int_a^l \cos v_n x \cos v_i x dx.$$

Six sets of equations (22)...(27) with six unknowns are obtained in that way. After elimination of four or them the following set of equations is obtained

$$\sum_{i=0}^{\infty} [B_{2i} Z_{n,i}^{(1)} + C_{1i} Z_{n,i}^{(2)}] = L_n^{(1)} \quad (28)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} [B_{2i} Z_{n,i}^{(3)} + C_{1i} Z_{n,i}^{(4)}] = L_n^{(2)} \quad (29)$$

where

$$Z_{n,i}^{(1)} = \frac{\varepsilon_i \lambda_s R_{n,i}^{(2)}}{W_3(n)},$$

$$Z_{n,i}^{(2)} = - \left\{ \operatorname{ch} v_i d_k \left[\frac{\alpha_{0l} R_{n,i}^{(4)}}{W_3(n)} + \delta_{n,i} \alpha_p \right] + \operatorname{sh} v_i d_k \left[\lambda_k v_i \delta_{n,i} + \frac{\alpha_p \alpha_{0l} R_{n,i}^{(4)}}{\lambda_k v_i W_3(n)} \right] \right\},$$

$$Z_{n,i}^{(3)} = \frac{R_{n,i}^{(1)}}{W_1(n)} \left[K_n^{(1)} \operatorname{sh} \varepsilon_i \Delta + \frac{\lambda_s \varepsilon_i}{\lambda_e \beta_n} K_n^{(2)} \operatorname{ch} \varepsilon_i \Delta \right].$$

$$\begin{aligned}
Z_{n,i}^{(4)} &= \frac{K_i^{(3)}}{W_1(n)} \left[K_n^{(1)} P_{n,i}^{(1)} + K_n^{(2)} P_{n,i}^{(2)} \frac{\lambda_s}{\lambda_e \beta_n} \right], \\
L_n^{(1)} &= \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ c_i \left[\frac{\alpha_{0i} R_{n,i}^{(4)} \left[1 + \frac{\alpha_p \operatorname{sh} \nu_i d_k}{\lambda_k \nu_i} \right]}{W_3(n)} + \alpha_p \operatorname{ch} \nu_i d_k \delta_{n,i} \right] + \right. \\
&\quad \left. + K_i \left[R_{n,i}^{(4)} \operatorname{sh} \nu_i d_k \frac{\alpha_p \alpha_{0i}}{\lambda_k \nu_i W_3(n)} + \alpha_p \operatorname{ch} \nu_i d_k \delta_{n,i} \right] \right\}, \\
L_n^{(2)} &= -[\alpha a_n + S_n^{(1)} K_n^{(1)} + S_n^{(2)} K_n^{(2)}], \\
S_n^{(1)} &= \frac{1}{W_1(n)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{R_{n,i}^{(1)} \operatorname{ch} \varepsilon_i \Delta}{W_2(i)} \sum_{j=0}^{\infty} [c_j Q_j^{(1)} + Q_j] R_{i,j}^{(2)} - a_n, \\
S_n^{(2)} &= \frac{\lambda_s}{W_1(n) \lambda_e \beta_n} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{R_{n,i}^{(1)} \varepsilon_i \operatorname{sh} \varepsilon_i \Delta}{W_2(i)} \sum_{j=0}^{\infty} [c_j Q_j^{(2)} + Q_j] R_{i,j}^{(2)}, \\
P_{n,i}^{(1)} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{R_{n,j}^{(1)} R_{i,j}^{(2)} \operatorname{ch} \varepsilon_j \Delta}{W_2(j)}, \\
P_{n,i}^{(2)} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{R_{n,j}^{(1)} R_{i,j}^{(2)} \varepsilon_j \operatorname{sh} \varepsilon_j \Delta}{W_2(j)}, \\
Q_n &= \frac{\alpha_p}{\lambda_k \nu_n} K_n \operatorname{sh} \nu_n d_k, \\
Q_n^{(1)} &= \operatorname{ch} \nu_n d_k + \frac{\alpha_p}{\lambda_k \nu_n} \operatorname{sh} \nu_n d_k, \\
Q_n^{(2)} &= 1 + \frac{\alpha_p}{\lambda_k \nu_n} \operatorname{sh} \nu_n d_k,
\end{aligned}$$

and

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 0 & \text{for } n \neq k \\ 1 & \text{for } n = k. \end{cases}$$

is Kronecker's symbol.

3.2. ALGORITHM No. 2. — WITH APPROXIMATE BOUNDARY CONDITION

In practical systems, e.g. when screening partially a tank of a large power transformer, the dimensions l and a are so large that the temperature changes on the edges of the plate and the screen affects only slightly the temperature of the middle region. Thus, the boundary conditions (5), (9), (12) can be modified as follows:

$$\frac{\partial \theta_k^{(2)}(\mp l, z)}{\partial x} = 0 \quad (5a)$$

$$\frac{\partial \vartheta_s^{(2)}(\mp a, z)}{\partial x} = 0 \quad (9a)$$

$$\frac{\partial \vartheta_e^{(2)}(\mp a, z)}{\partial x} = 0 \quad (12a)$$

From (5a) and (12a) it follows that

$$\nu_n = \frac{n\pi}{l}; \quad \beta_n = \frac{n\pi}{a}.$$

Particular solutions of eqns. (1) and (3) can be expressed as

$$\begin{aligned} \vartheta_k^{(2)} &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \nu_n x + C^{(0)} + C^{(1)}z + \frac{1}{2} c_0 z^2 \\ \vartheta_e^{(2)} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \beta_n x + A^{(0)} + A^{(1)}(z-d_2) + \frac{1}{2} a_0 (z-d_2)^2. \end{aligned}$$

Assuming that

$$c_0 = -\frac{1}{d_k \lambda_k} \tilde{c}_0 \quad (30a); \quad c_n = \frac{1}{\nu_n^2 d_k \lambda_k} \tilde{c}_n \quad (30)$$

and

$$a_0 = -\frac{1}{d_e \lambda_e} \tilde{a}_0 \quad (31a); \quad a_n = \frac{1}{\beta_n^2 d_e \lambda_e} \tilde{a}_n \quad (31)$$

we get

$$\nabla^2 \vartheta_k^{(2)} = -\frac{p_k(x)}{d_k \lambda_k}; \quad \nabla^2 \vartheta_e^{(2)} = -\frac{p_e(x)}{d_e \lambda_e}.$$

The solutions for individual regions are now expressed by

$$\begin{aligned} \vartheta_k^{(2)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \cos \nu_n x [C_{1n} \operatorname{ch} \nu_n z + C_{2n} \operatorname{sh} \nu_n z + c_n] C^{(0)} + C^{(1)}z + \frac{1}{2} c_0 z^2. \\ \vartheta_s^{(2)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \cos \beta_n x [B_{1n} \operatorname{ch} \beta_n (z-d_k) + B_{2n} \operatorname{sh} \beta_n (z-d_k)] + B^{(0)} + B^{(1)}(z-d_k) \\ \vartheta_e^{(2)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \cos \beta_n x [A_{1n} \operatorname{ch} \beta_n (z-d_2) + A_{2n} \operatorname{sh} \beta_n (z-d_2) + a_n] + A^{(0)} + \\ &\quad + A^{(1)}(z-d_2) + \frac{1}{2} a_0 (z-d_2)^2. \end{aligned}$$

Proceeding analogically as in p. 3.1 the final set of algebraic equations can be obtained.

3.3. ALGORITHM No. 3 — FOR THE AVERAGE TEMPERATURE

In practice the temperature changes across the thickness of the metal plate (e.g. the tank wall) and of the screen are so small that average temperature rises on the plate and

the screen thickness can be introduced instead. The latter are defined by the following formulae

$$\vartheta_{km}(x) = \vartheta_k^{(3)}(x) = \frac{1}{d_k} \int_0^{d_k} \vartheta_k(x, z) dz$$

$$\vartheta_{em}(x) = \vartheta_e^{(3)}(x) = \frac{1}{d_e} \int_{d_2}^{d_3} \vartheta_e(x, z) dz.$$

Integration of the individual terms of eqn. (1) between limits of interval $\langle 0, d_k \rangle$ implies that

$$\frac{1}{d_k} \int_0^{d_k} \frac{\partial^2 \vartheta_k(x, z)}{\partial x^2} dz = \frac{d^2 \vartheta_k^{(3)}}{dx^2}$$

$$\frac{1}{d_k} \int_0^{d_k} \frac{\partial^2 \vartheta_k(x, z)}{\partial z^2} dz = \frac{1}{d_k} \left[\left[\frac{\partial \vartheta_k^{(3)}}{\partial z} \right]_{z=d_k} - \left[\frac{\partial \vartheta_k^{(3)}}{\partial z} \right]_{z=0} \right]$$

$$\frac{1}{d_k} \int_0^{d_k} \left[-\frac{p_k(x)}{d_k \lambda_k} \right] dz = -\frac{p_k(x)}{d_k \lambda_k}$$

by application of the condition (4) and (7a) we obtain

$$\left[\frac{\partial \vartheta_k^{(3)}}{\partial z} \right]_{z=0} = \frac{\alpha_p}{\lambda_k} \vartheta_k(x, 0) \approx \frac{\alpha_p}{\lambda_k} \vartheta_k^{(3)}(x),$$

$$\left[\frac{\partial \vartheta_k^{(3)}}{\partial z} \right]_{z=d_k} = \begin{cases} \frac{\lambda_s}{\lambda_k} \left[\frac{\partial \vartheta_s}{\partial z} \right]_{z=d_k} & \text{for } |x| \in \langle 0, a \rangle \\ -\frac{\alpha_{0l}}{\lambda_k} [\vartheta_k^{(3)} - \vartheta_{0l}] & \text{for } |x| \in \langle a, l \rangle. \end{cases}$$

Finally eqn. (1) becomes

$$\frac{d^2 \vartheta_k^{(3)}}{dx^2} - \frac{\alpha_p}{\lambda_k d_k} + \frac{1}{d_k} \left[\frac{\lambda_s}{\lambda_k} \left[\frac{\partial \vartheta_s}{\partial z} \right]_{z=d_k} |x| \in \langle 0, a \rangle \right. \\ \left. - \frac{\alpha_{0l}}{\lambda_k} [\vartheta_k^{(3)} - \vartheta_{0l}] |x| \in \langle a, l \rangle \right] = -\frac{p_k(x)}{d_k \lambda_k}. \quad (1a)$$

From eqn. (3) by analogy

$$\frac{d^2 \vartheta_e^{(3)}}{dx^2} - \frac{1}{\lambda_e d_e} \left[\alpha_{0l} (\vartheta_e^{(3)} - \vartheta_{0l}) + \lambda_s \left[\frac{\partial \vartheta_s}{\partial z} \right]_{z=d_2} \right] = -\frac{p_e(x)}{\lambda_e d_e}. \quad (3a)$$

Moreover it is assumed that boundary conditions (5), (6), (10) and (12) have the forms:

$$\left[\frac{d \vartheta^{(3)}}{dx} \right]_{x=l} = 0 \quad (5b)$$

$$\vartheta_s(x, d_k) = \vartheta_k^{(3)} \quad (6a)$$

$$\vartheta_s(x, d_2) = \vartheta_e^{(3)} \quad (10a)$$

$$\left[\frac{d \vartheta_e^{(3)}}{dx} \right]_{x=a} + \frac{\alpha_{0l}}{\lambda_e} [\vartheta_e^{(3)}(a) - \vartheta_{0l}] = 0. \quad (12b)$$

Finally the problem has been reduced to the solution of eqns. (1a), (2), (3a) with boundary conditions (5a), (6a), (9a), (10a), (12b) from which the final set of algebraic equations obtained.

3.4. ALGORITHM No. 4 — FOR THE AVERAGE TEMPERATURES AND WITH THE APPROXIMATE BOUNDARY CONDITIONS

The average temperature rises for the plate and for the screen and approximate (as in Sec. 3.2) boundary conditions for $x = l$ and $x = a$ are considered. For the screen the boundary condition has the form

$$\left[\frac{d\theta_e^{(4)}}{dx} \right]_{x=0} = 0. \quad (12c)$$

Thus the problem has been limited to the solution of eqns. (1a), (2) and (3a) with boundary conditions (5b), (6a), (9a), (10a), (12c) which, as previously, lead to the final set of equations.

4. CALCULATION EXAMPLES

In order to verify the practical usefulness of the presented algorithms the temperature rises for an arrangement consisting of a partial longitudinal conducting screen (copper screen of 3 mm thickness) and a field generator in the form of a pair of a.c. carrying

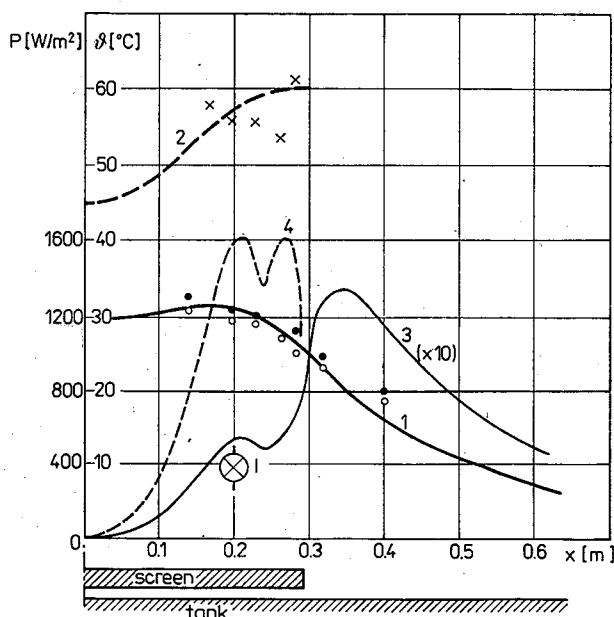


Fig. 2. Results of the calculations and experimental test carried out on a full-scale model presented in Fig. 1 (consisting of a copper screen). The arrangement data: $c = 0,2$ m; $h = 0,1$ m; $d_k = 8$ mm; $\Delta = 2$ mm; $d_e = 3$ mm

1 — calculated temperature rise of the steel plate, 2 — calculated temperature rise of the screen, 3 — distribution of the stray loss density on the steel plate surface, 4 — distribution of the stray loss density in the screen

● — measurement points on the inner (covered by the screen) plate surface, ○ — measurement points on the outer plate surface, × — measurement points on the screen

conductors — Fig. 1 — have been calculated. The arrangement is described in paper [6] and the measurement of the temperature rise distributions across the steel plate and across the screen has been carried out using a full-scale physical model representing the arrangement. The model was air-cooled. The distributions of the stray loss density $p_k(x)$ and $p_e(x)$ have been calculated according to paper [6]. When calculating the temperature rise the heat transfer coefficients were assumed as follows: outer surface of the model (the wall not covered by the screen) to air — $\alpha_p = 10,5 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$, and inner surface (the wall covered by the screen) — $\alpha_{oi} = 9,5 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$. Oil temperature rise was obviously taken to be zero. The comments regarding the choice of the values of α_p and α_{oi} have been given in Appendix 2 (calculations for $I = 5000 \text{ A}$).

The comparison of the results of calculations with the experiments is illustrated in Fig. 2. In spite of the limited technical accuracy of the temperature rise measurement (it is normally estimated at $\pm 2^\circ\text{C}$) the „agreement” is very good, especially for the steel plate.

Fig. 2 illustrates also the calculated distributions of the stray loss densities — in the screen (curve 4) and on the steel plate (curve 3). Please note that in that figure the $p_k(x)$ ordinates (curve 3) have been enlarged ten times.

Table 1

Comparison of the temperature rise, calculated by using the algorithms 1 to 4 for an arrangement consisting of a partial conducting screen and for two methods of cooling and two currents through the conductors. The arrangement data as in Fig. 2

			$\theta_{[^\circ\text{C}]}$ calculated for current I and by using Algorithm No.							
			$I = 5000 \text{ A}$				$I = 2500 \text{ A}$			
			1	2	3	4	1	2	3	4
		No. $x_{[m]}$								
Cooling by air from both sides α_p — according to Appendix	steel plate	0	29,00	29,44	29,26	29,24	8,69	8,74	8,68	8,67
		0,2	30,32	30,86	30,70	30,93	8,43	8,49	8,43	8,50
		0,29	25,97	26,13	26,03	26,23	7,26	7,26	7,16	7,23
		0,5	10,87	10,84	10,82	10,86	3,21	3,21	3,20	3,22
	screen	0	45,44	45,78	45,42	44,89	13,05	13,14	13,05	12,88
		0,2	56,33	57,00	56,51	57,41	15,58	15,70	15,57	15,81
		0,29	59,00	59,65	58,99	60,51	16,23	16,38	16,22	16,63
Colling by air and by oil $\alpha_p =$ $= 15 \text{ W/m}^2\text{ }^\circ\text{C}$ $\alpha_{oi} =$ $= 100 \text{ W/m}^2\text{ }^\circ\text{C}$ $\theta_{oi} = 35^\circ\text{C}$	steel plate	0	29,61	29,01	32,47	28,90	26,18	25,61	29,03	25,62
		0,2	33,84	33,53	36,61	33,62	27,58	27,12	30,21	27,11
		0,29	34,87	34,19	36,49	34,26	29,06	29,12	31,48	29,15
		0,5	31,83	31,73	33,35	31,81	30,67	30,59	32,20	30,67
	screen	0	35,80	35,35	36,49	35,04	32,82	32,37	33,53	32,41
		0,2	42,19	41,93	42,90	42,11	34,40	34,04	35,11	34,04
		0,29	43,16	43,40	44,13	43,72	34,65	34,59	35,61	34,49
Computing time [sec]			100	22	38	19				

The results of the temperature rise calculations are listed in Table 1. They are presented for some selected points of the arrangement and air cooling for both surfaces, and for air cooling for outer and oil cooling for the inner surface. The results have been obtained by using all four algorithms. For only air-cooling the results obtained by applying different algorithms are very close (differences are lower than 1°C). A little worse agreement is for a combination air and oil cooling (differences are slightly greater than 3°C). However even in this case the results obtained by applying algorithm No. 4, with the shortest computing time, are close to those for algorithm No. 1 (differences are less than $0,8^{\circ}\text{C}$). It results from compensation of the errors due to both approximations — the average temperature across the metal thickness (the plate and the screen) and the approximate boundary conditions for $x = a, l$.

5. EFFECT OF ARRANGEMENT PARAMETERS ON THE MAXIMUM TEMPERATURE RISE

The analysis of changes of the maximum temperature rises due to changes of the geometrical parameters of the arrangement presented in Fig. 1 is directly related with the effectiveness of the partial conducting screen used for reduction local overheatings of metal elements. The arrangement can be treated as a simplified model of a partially screened tank of a large generator power transformer in which along its height heavy-current L.V. leads are placed.

In general case the temperature rise of the metal surface can be expressed by combining the following two terms

$$\vartheta = \vartheta_0 + \Delta\vartheta \quad (32)$$

The first term ϑ_0 describes the heat flow from the hot oil to the ambient air through the partially screened metal plate. The second term $\Delta\vartheta$ results from stray losses in the screen and in the screened plate.

Temperature rises ϑ_0 for the screened plate (ϑ_{0k}) and for the screen (ϑ_{0e}) can be calculated by applying formulae shown in Sec. 3 with an assumption that the stray loss functions $p_e(x)$ and $p_k(x)$ are equal to zero. For an unscreened plate the temperature rise ϑ_0 is given by a simple formula [5]

$$\vartheta_{0kne} = \frac{\alpha_{0l}}{\alpha_{0l} + \alpha_p} \vartheta_{0l} \quad (33)$$

As an example, the calculated distributions of the temperature rise ϑ_0 , $\Delta\vartheta$ and ϑ for the steel plate and the screen of one selected variant and for different screen widths are presented in Figs. 3 and 4. Use of a conducting screen, as it would be expected, results in reducing the temperature rise of the screened plate — Fig. 3, whereas heating of the screen depends on the screen width. The hottest spot on the screen in the arrangement under analysis is for $a = c$ (curve 4 in Fig. 4).

In order to find a relationship between the maximum temperature rise of the screened wall in an arrangement with a screen and without a screen as well as the temperature rise of the screen, ratios m_1 and m_2 have been introduced:

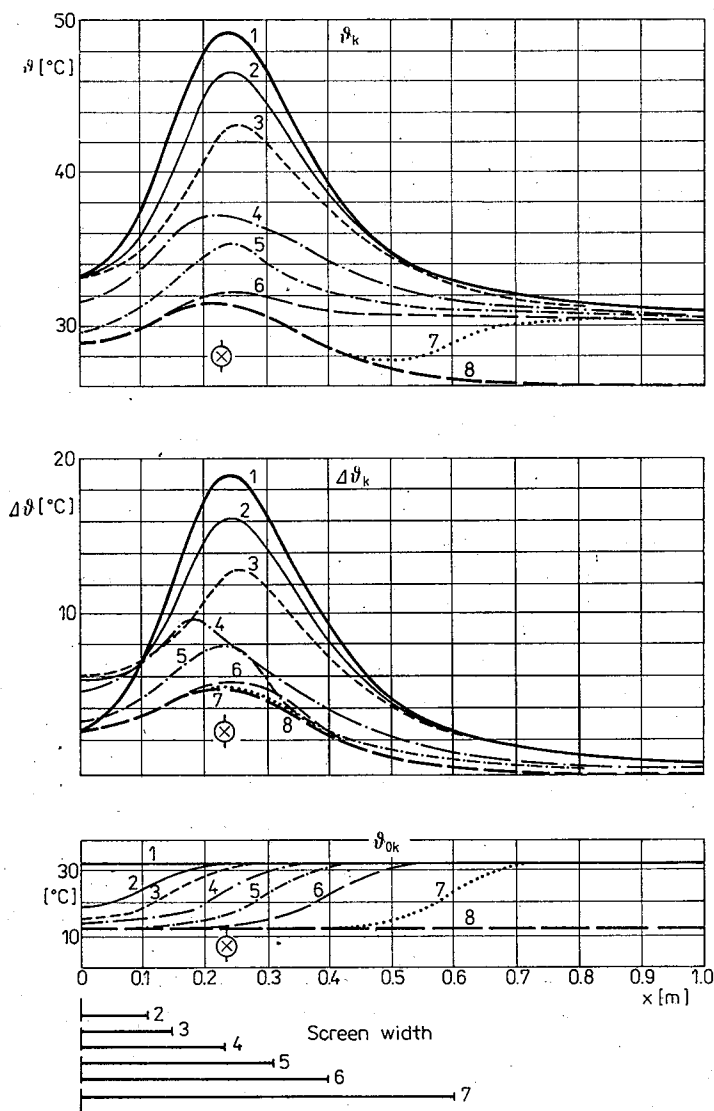


Fig. 3. Temperature rise of the steel plate, calculated for different widths of the screen used in the arrangement from Fig. 1. The arrangement data: $I = 5000$ A; $l = 1$ m; $c = 0,23$ m; $h = 0,1$ m; $d_k = 8$ mm; $\Delta = 2$ mm; $d_e = 3$ mm. The calculated results are for: $\alpha_{ol} = 100$ W/m² °C; $\alpha_p = 15$ W/m² °C; $\lambda_k = 45$ W/m °C; λ_s — according to the Appendix; $\lambda_e = 300$ W/m °C
 1 — $a = 0$ (the arrangement without screen); 2 — $a = 0,1$ m; 3 — $a = 0,15$ m; 4 — $a = 0,23$ m; 5 — $a = 0,3$ m; 6 — $a = 0,4$ m; 7 — $a = 0,6$ m; 8 — $a = l$ (fully screened arrangement)

$$\begin{aligned}
 m_{1k} &= \frac{\vartheta_{0km}}{\vartheta_{0kne}}; & m_{1e} &= \frac{\vartheta_{0em}}{\vartheta_{0kne}} \\
 m_{2k} &= \frac{\Delta\vartheta_{km}}{\Delta\vartheta_{knem}}; & m_{2e} &= \frac{\Delta\vartheta_{em}}{\Delta\vartheta_{knem}}
 \end{aligned}
 \quad (34)$$

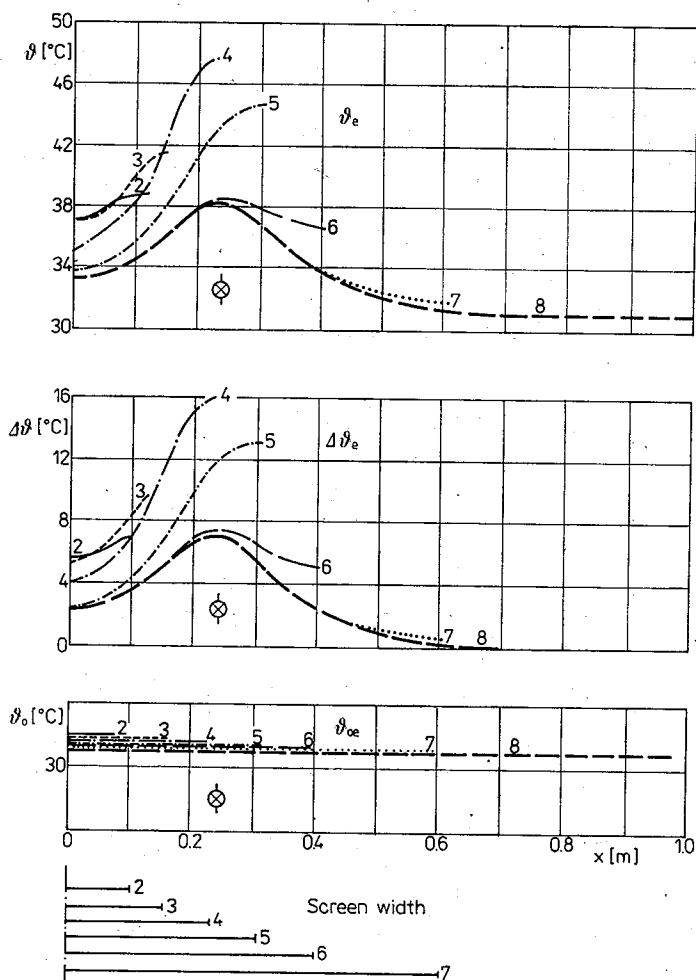


Fig. 4. Temperature rise of the screen used in the arrangement from Fig. 1. Refer to Fig. 3 for data and description of the curves

where ϑ_{0kne} is defined by (33) and $\Delta\vartheta_{kne}$ is the maximum temperature rise of the steel plate above temperature rise ϑ_{0kne} , calculated for unscreened arrangement. ϑ_{0km} and ϑ_{0em} are the temperature rises of the screened wall and of the screen respectively, due to the heat flow from the hot oil to the ambient air whereas $\Delta\vartheta_{km}$ and $\Delta\vartheta_{em}$ are the temperature rises of the screened wall and of the screen due to stray loss. Values of ϑ_{0km} , ϑ_{0em} , $\Delta\vartheta_{km}$ and $\Delta\vartheta_{em}$ are determined for the hottest spot coordinate x_m for which the total temperature (of the screened wall — ϑ_k or of the screen — ϑ_e), calculated from (32) are at maximum.

Temperature rise ϑ_0 is a function of the heat parameters of the system, its geometrical dimensions and also of oil temperature rise. Temperature rise $\Delta\vartheta$ depends on the same factors and additionally on $p_k(x)$ and $p_e(x)$ functions, i.e. on h and c dimensions and the current through the leads [6]. Hence m_1 and m_2 as well as x_m coordinate are

functions of the same factors. The influence of some of these factors, namely α_{ol} , d_e , Δ , a , h and I^* , on the temperature rise is analysed for values found in large power transformers.

It has been shown that functions $\vartheta_{ok}(x)$ and $\vartheta_{oe}(x)$ (illustrated in Figs. 3 and 4) practically depend only on α_{ol} and a . Ratio m_{1e} is also a function of α_{ol} and a whereas m_{1k} additionally depends on x_m which is a complex function of the other parameters. As it may be seen from Fig. 3 ϑ_{okm} varies with the position of x_m within the limits defined by the

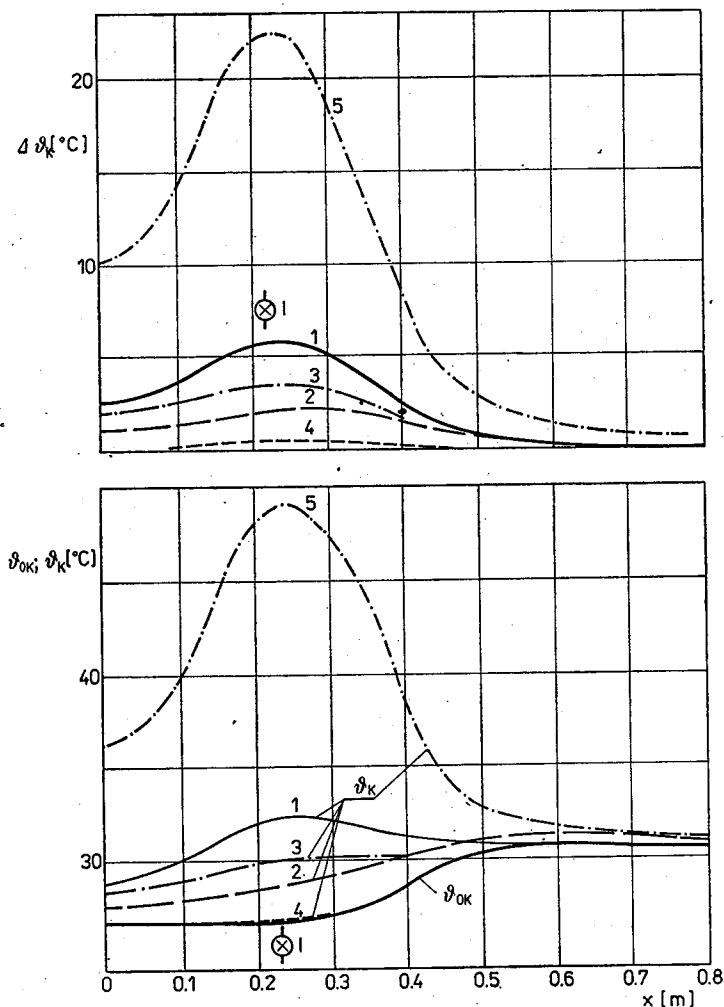


Fig. 5. Temperature rise ϑ_{ok} , $\Delta\vartheta_k$ and ϑ_k for the arrangement consisting of a partial screen of 0.4 width

1 — $h = 0,1$ m,	$d_e = 3$ mm,	$I = 5000$ A,	$x_m = 0,25$ m,
2 — $h = 0,2$ m,	$d_e = 3$ mm,	$I = 5000$ A,	$x_m = 0,6$ m,
3 — $h = 0,1$ m,	$d_e = 5$ mm,	$I = 5000$ A,	$x_m = 0,6$ m,
4 — $h = 0,1$ m,	$d_e = 3$ mm,	$I = 1000$ A,	$x_m = 1,0$ m,
5 — $h = 0,1$ m,	$d_e = 3$ mm,	$I = 10000$ A,	$x_m = 0,24$ m.

*) Other values have been assumed to be constant and equal to: $\lambda_k = 45$ W/m °C, $\lambda_e = 300$ W/m °C, $c = 0,23$ m, $d_k = 8$ mm. Values of $\lambda_s = f(\Delta)$ are according to the Appendix.

line 1 (temperature rise for the unscreened system) and by the line 8 (temperature rise for fully screened system). An example, illustrating the change of position of x_m and consequently of ϑ_{0km} is given in Fig. 5. The maximum temperature rise $\Delta\vartheta_k$ appears in Fig. 5 in the vicinity of the maximum stray loss — [6] whereas the hottest spot coordinate depends on the relation between ϑ_{0k} and $\Delta\vartheta_k$. For small values of $\Delta\vartheta_k$, a consequence of small stray loss density on the screening plate surface, x_m is moving towards the vicinity of the screen edge. The change of x_m position from 0,24 m to 1 m results in the ϑ_{0km} variation of almost 4°C i.e. 14% of the ϑ_{0km} values, calculated for $x_m = 0,24$ m — see Table 2.

Table 2
Maximum temperature rise for an arrangement presented in Fig. 5

Curve No.	x_m	ϑ_{km}	ϑ_{0km}	$\Delta\vartheta_{km}$	$\Delta\vartheta_{km}^*$
	m	°C	°C	°C	°C
1	0,25	32,23	26,64	5,59	5,62
2	0,6	31,02	30,38	0,64	3,35
3	0,6	30,66	30,38	0,28	2,08
4	1,0	30,44	30,43	0,1	0,2
5	0,24	49,00	26,62	22,38	22,38

The next consequence of the change of x_m position for small stray loss is a difference between the maximum temperature rise $\Delta\vartheta_{km}^*$ and the temperature rise calculated for $x_m(\Delta\vartheta_{km})$. In some cases (curves 2 and 3 in Fig. 5) the latter may be significantly lower.

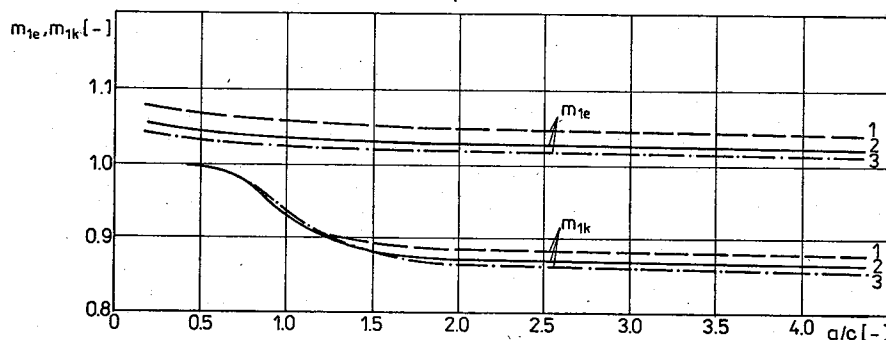


Fig. 6. m_1 versus the relative width of the copper screen
1 — $\alpha_{0l} = 50$ W/m²C, 2 — $\alpha_{0l} = 100$ W/m²C, 3 — $\alpha_{0l} = 150$ W/m²C

In Figs. 6 and 7 curves of m_{1k} , m_{1e} and m_{2k} , m_{2e} versus a/c ratio are presented. Plots of m_1 (Fig. 6) are for several values of α_{0l} whereas plots of m_2 (Fig. 7) for several values of h , d_e , I . It follows from Figs. 6 and 7 and also from the calculations, carried out for a number of variants, that for the screens of width greater than about $0,5c^*)$ the total temperature rise of the screen exceeds the total temperature rise of the screened plate.

^{*)} It follows from Fig. 7 that $m_{2e} > m_{2k}$ for the screen width greater than about $0,8c$. However, since the total temperature rises of the plate and of the screen are equal to $\vartheta_{kem} = m_{1k(e)}\vartheta_{0kne} + m_{2k(e)}\Delta\vartheta_{kne}$ and $m_{1e} > m_{1k}$ — see Fig. 6, then $\vartheta_{em} > \vartheta_{km}$ for the screen width greater than about $0,5c$.

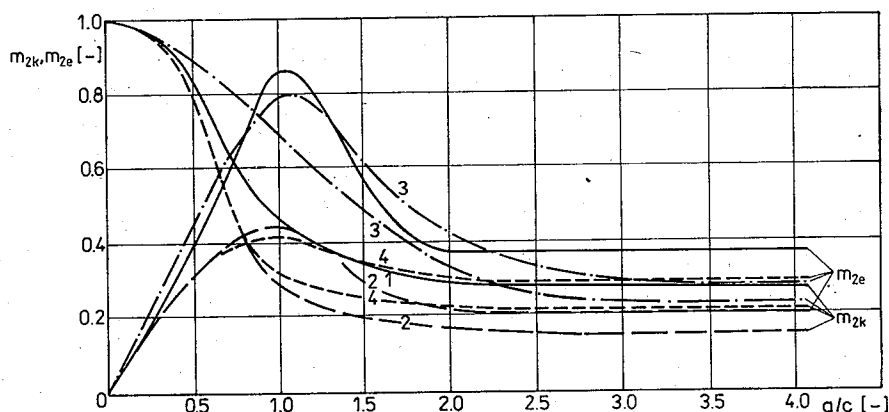


Fig. 7. m_2 versus the relative width of the copper screen

- | | | |
|------------------|---------------|----------------|
| 1 — $h = 0,1$ m, | $d_e = 3$ mm, | $I = 5000$ A, |
| 2 — $h = 0,1$ m, | $d_e = 5$ mm, | $I = 5000$ A, |
| 3 — $h = 0,2$ m, | $d_e = 3$ mm, | $I = 5000$ A, |
| 4 — $h = 0,1$ m, | $d_e = 3$ mm, | $I = 10000$ A. |

Increasing the cooling intensity by the oil results in a slight reduction of the temperature drop on the screened plate-gap-screen arrangement (due to heat flow from the hot oil to the ambient air) for narrow screens and remains almost constant for wider screens. The reduction of the total temperature rises ϑ_k and ϑ_e is lower for the partially screened arrangement and higher for the unscreened one. For instance, for a change of α_{ol} from 50 to 150 W/m²°C ϑ_k for the unscreened arrangement is higher than for the partially screened one by 10 to 15%.

Change of the gap size Δ within the 2...5 mm limits practically does not affect the temperature rises of the arrangement. Change of this size within the 0,5...2 mm range only very slightly affects the temperature rise (m_{2k} decreases approx. 5% whereas m_{3e} increases approx. 3%) and its effect can be neglected.

Increase of the screen thickness visibly reduces temperature rise $\Delta\vartheta$ for the arrangements with wider screens ($a > c$). However, because the effect of the screen thickness on the maximum temperature rise — of the screened plate ϑ_{km} and of the screen ϑ_{em} , depends on the relation between $\Delta\vartheta$ and ϑ_0 , it may be comparatively low (even for substantial increase of screen thickness) for small values of $\Delta\vartheta$. For instance, with the screen thickness increased from 3 mm up to 10 mm and for $I = 5000$ A and $h = 0,1$ m the temperature rise of the screened plate was reduced by only 5% and of the screen by approx. 10%. For extremal cases, when $\Delta\vartheta_e$ is close to zero, the temperature rise of the screen has the same value or may even be slightly higher than that of the metal plate in a similar arrangement but without the screen. Similar effect may be noticed when the distance between conductors and the plate is increased (in this case it is associated with a decrease of the values of $p_k(x)$ and $p_e(x)$ functions). Because increasing the distance h causes the points of the maximum values of the stray loss density on the screen surface to move away from the conductor axes — [6] and because also x_m moves in some direction (due to small values of the losses) use of wider screens is recommended (of width $3c$ or more at $h = 0,2...0,3$ m for the arrangement discussed).

A more general conclusion is therefore quite obvious. Effectiveness of the discussed screens becomes more significant for higher losses, i.e. when the temperature rise $\Delta\vartheta$ is prevailing in the total temperature rise. For the arrangement under analysis it takes place for bigger current through the leads generating the electromagnetic field. For the screens of large width ($a \gg 2c$), the total temperature rise of the screened plate and of the screen, calculated for $I = 5000 \text{ A}^*$, decreases by no more than 35% and 20% respectively, in comparison with the temperature rise of this plate without a screen while for $I = 15\,000 \text{ A}$ the reduction is equal to 75% and 70% respectively.

6. SUMMARY AND CONCLUSIONS

A method is presented for calculating the temperature rise in steady-state in systems consisting of a partial longitudinal conducting screen, screening a metal plate from the stray flux, and cooled by oil from one side and by air from the other. To verify the applicability of the method the results of calculation have been compared with the experimental tests carried out, on a full-size model. Moreover, it has been shown that the approximations applied, namely the average temperature rises across the thickness of the screen and screened plate and the approximate boundary conditions on the side surfaces of the screen and screened plate, are permissible and the results thus obtained are sufficiently accurate for practical purposes.

In a general case the temperature rise of the metal elements (the screen — ϑ_e and the screened plate — ϑ_k) can be expressed as a sum of two factors of different character — the temperature rise due to the heat flow from the hot oil to the ambient air — ϑ_o , and the temperature rise due to stray loss in the system — $\Delta\vartheta$. Usefulness of a screen as a means for reducing the temperature rise is influenced by a correlation between ϑ_o and $\Delta\vartheta$. A screen is effective, i.e. a significant reduction of the temperature rise of the screened part results, only when $\Delta\vartheta$ is prevailing in the total temperature rise. It takes place in systems where the stray losses are high. In the arrangement under analysis — for high currents through the leads and for small distance between the conductors and the screened plate. In other cases, the use of a screen gives only slight decrease of the temperature rise of the screened plate, while the screen temperature rise may be, in extremal cases, equal to — or even higher than — the temperature rise of the plate without screen.

Relations, illustrating the general conclusion specified above, referred to an arrangement consisting of heavy-current leads and a transformer tank wall, are given in Figs. 6 and 7.

It has been shown, basing on the example arrangement, that for high stray losses (large $\Delta\vartheta$) screens of $a = (2...3)c$ widths (upper limit is for larger distance between the conductors and the screened plate) are sufficiently effective. Further increase of their width has only very limited effect on the temperature rise. Application of narrow screens ($a < 0,5c$) or screens of width approx. equal to distance between the conductors ($a \approx c$) is inexpedient. The latter screens are characterized by large stray loss in the vicinity of the screen edge — [6] and in consequence by appropriate high temperature rise — see Fig. 7.

^{*)} results obtained for $d_e = 3 \text{ mm}$, $h = 0,1 \text{ m}$, $\Delta = 2 \text{ mm}$, $\alpha_{oi} = 100 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$.

REFERENCES

1. G. Gotter: *Erwärmung und kühlung elektrischen Maschinen*. Berlin (Göttingen), Heidelberg: Springer-Ferlag, 1954
2. M. Hering: *Termokinyka dla elektryków*. Warszawa: WNT, 1980
3. E. Jezierski: *Transformatory. Podstawy teoretyczne*. Warszawa: WNT, 1965
4. S. Wiśniewski: *Wymiana ciepła*. Warszawa: PWN, 1979
5. M. Kaźmierski: *Ocena konieczności ekranowania kadzi transformatora z punktu widzenia lokalnych przegrzań*. Prace Inst. Elektrotechn., nr 74, 1972, s. 61-93
6. M. Kaźmierski, I. Kersz: *Effectiveness of longitudinal conduting screens*, Pt. I. *Electromagnetic field and stray losses*. Rozprawy Elektrotechn., 35, 387-411, 1989
7. IEC, *Loading Guide for Oil-immersed Transformes*. Publ. 354, 1972

APPENDIX

1. THERMAL CONDUCTIVITY OF THE GAP BETWEEN A SCREEN AND A METAL PLATE

A small gap Δ between a screen and a screened metal plate is due to technological process requirements. For instance, when screening a tank of large power transformer by magnetic shunts, the gap, filled normally with pressboard, is equal to the thickness of the steel elements welded to the tank and applied for fixing the shunts to the tank wall. When using conducting screens (copper, aluminum) locally riveted to a tank, the gap varies from zero in place of riveting to 0,5...2 mm between the rivets. Even the no-gap area because of the surface layers of oxides on the screen and the tank creates a significant resistance for the conduction of heat.

From the point of view of the heat phenomena the gap is a closed system in which thickness of the liquid boundary layer is comparable with a channel width — [2].

In such a case the heat flow through the gap may be considered as of a conductive character only. In consequence the fluid is not characterized by its real thermal conductivity λ_{rs} but by an equivalent one λ_s . According to [2] λ_s and λ_{rs} are related by

$$\frac{\lambda_s}{\lambda_{rs}} = 1 + \frac{C_1 Ra_s^n}{Ra_s + C_2} \quad (A.1)$$

where

$$Ra_s = \frac{g \Delta \beta_s \Delta t}{a_s \nu_s} \quad (A.2)$$

is Rayleigh number, and: $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ is the acceleration due to gravity, Δ — gap size (m), β_s — coefficient of volume expansion of the fluid ($1/^\circ\text{C}$), a_s — thermal diffusivity of the fluid (m^2/s), ν_s — kinematic viscosity of the fluid (m^2/s), Δt — difference of temperatures of the walls ($^\circ\text{C}$), C_1, C_2, n — dimensionless constants.

For vertical gaps, which are found in transformers $C_1 = 0,0236$; $C_2 = 1,01 \cdot 10^{-4}$; $n = 1,393$ — [2].

The ratio λ_s/λ_{rs} is calculated for the oil gaps of 0...5 mm size from eqn. (A.1) and

presented in Fig. 8. For the air gaps the ratio λ_s/λ_{rs} is equal to 1 within +2% accuracy for all practical values of $\Delta\theta_s^*)$ and Δt . The λ_{rs} values for oil and for air as a functions of θ_s , according to [1] and [4], are presented in Fig. 9.

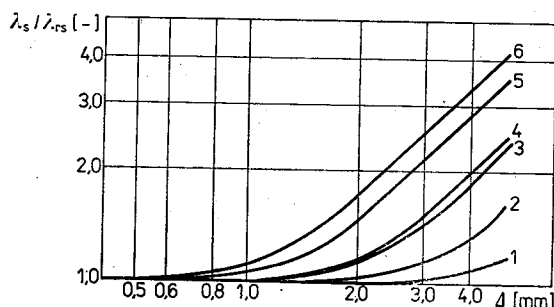


Fig. 8. λ_s/λ_{rs} versus the oil gap size

	θ_s (°C)	Δt (°C)
1	20	10
2	50	10
3	50	30
4	100	10
5	100	30
6	100	50

θ_s — the oil temperature inside the gap; Δt — the difference of the steel plate temperature and the screen temperature

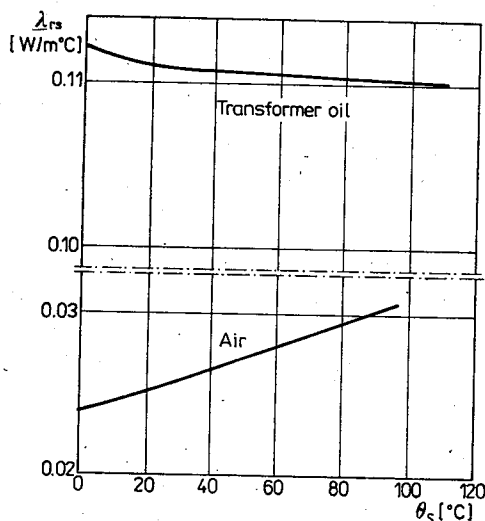


Fig. 9. $\lambda_{rs} = f(\theta_s)$ for the air (according to [1]) and for the oil (according to [4])

2. HEAT-TRANSFER TO AIR COEFFICIENT

α_p has been calculated for one of the variants of the experimental test carried out on the full-scale model (the variant described in Fig. 2). The temperature distributions has been measured for two values of the current through the leads $I = 5000$ A and $I = 2500$ A.

*) θ_s denotes the fluid temperature inside the gap.

Coefficient α_p is taken (see — [1], [2], [3], [4]) as a sum of the following two heat transfer coefficients — by convection α_{pk} and by radiation α_{ppr} . α_{pk} has been determined according to [2] and referenced to the maximum temperature of the screen (about 80°C for $I = 5000$ A and about 40°C for $I = 2500$ A*) and the ambient temperature $\theta_p = 20^\circ\text{C}$. The computed temperature — θ_m is then equal to $(80+20)/2 = 50^\circ\text{C}$ for $I = 5000$ A and $(40+20)/2 = 30^\circ\text{C}$ for $I = 2500$ A.

According to [2] for vertical plates with the heat transmission to the air from both sides α_{pk} is equal to

$$\alpha_{pk} = \frac{Nu_m \lambda_m}{L} \quad (\text{A.3})$$

where λ_m is the thermal conductivity of the air, L is the plate height and Nu_m is Nusselt number for θ_m .

$$Nu_m = C \cdot Ra_m^n \quad (\text{A.4})$$

where $C = 0,1$, $n = 1/3$ are constants and Ra_m is the Rayleigh number described by (A.2). After assuming (according to [1]) that

$\theta_m = 50^\circ\text{C}$	$\theta_m = 30^\circ\text{C}$
$\beta = 3,1 \cdot 10^{-3}$	$3,3 \cdot 10^{-3} \text{ } 1/\text{C}$
$\Delta t = 60$	20°C
$a = 0,2535 \cdot 10^{-4}$	$0,226 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$
$\nu = 0,1874 \cdot 10^{-4}$	$0,166 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$

and $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $L = 1,5 \text{ m}$ we get: $\alpha_{pk} = 4,2 \text{ W/m}^2\text{C}$ for $I = 5000$ A and $\alpha_{pk} = 3,1 \text{ W/m}^2\text{C}$ for $I = 2500$ A.

α_{ppr} coefficient is calculated by application of Kűchler and Montsinger's approximate formula given in [3].

$$\alpha_{ppr} = 2,38 \varepsilon \theta^{0,25} (1 + 0,011 \theta_p) \quad (\text{A.5})$$

where ε is a relative radiation coefficient. Since heat is radiated from the system to the ambient air partially by the copper screen and partially by the steel surface, the resultant radiation coefficient from the surface, covered partially by the screen, may be determined from the following formula

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_{Cu} S_{Cu} + \varepsilon_{Fe} S_{Fe}}{S_{Cu} + S_{Fe}} \quad (\text{A.6})$$

where S_{Fe} and S_{Cu} are the surfaces — of the steel plate and the screen respectively.

Taking from [1] and [3] that $\varepsilon_{Cu} = 0,15$, $\varepsilon_{Fe} = 0,8$ and that $S_{Cu} = 0,85 \times 1,5 \text{ m}^2$; $S_{Fe} = (2,5 - 0,58) \times 1,5 \text{ m}^2$ the following α_{ppr} values are obtained

	for $I = 5000$ A	for $I = 2500$ A
external surface	6,46	4,91
surface partially screened	5,25	4,0

*) Values obtained experimentally.

Finally the following values of α_p have been used for the computation

	for $I = 5000$ A	for $I = 2500$ A
external surface	$10,67 \approx 10,5$	$8,01 \approx 8,0$ W/m ² °C
surface partially screened	$9,45 \approx 9,5$	$7,1 \approx 7,0$ W/m ² °C

M. KAŻMIERSKI, I. KERSZ

EFEKTYWNOŚĆ PODŁUŻNYCH EKRANÓW PRZEWODZĄCYCH CZĘŚĆ II. PRZYROSTY TEMPERATURY W UKŁADACH EKRANOWANYCH

Streszczenie

W pracy przedstawiono 4 algorytmy o różnym stopniu uproszczenia do obliczania ustalonych przyrostów temperatury w układzie z częściowym ekranem przewodzącym, ekranującym płytę z masywnej stali od strumienia rozproszenia i chłodzonym dwustronnie — z jednej strony olejem a z drugiej powietrzem. Straty wydzielające się w układzie wyznaczono w oparciu o pracę [6]. Na podstawie porównania wyników obliczeń z rezultatami pomiarów na dużym modelu fizycznym stwierdzono poprawność otrzymanych rozważań. W ogólnym przypadku przyrost temperatury elementów metalowych (ekranu i płyty ekranowanej) można wyrazić jako sumę dwóch czynników o różnym charakterze — przyrostu temperatury wynikającego z przepływu ciepła od nagranego oleju do otoczenia poprzez częściowo ekranowaną płytę stalową — θ_0 i przyrostu temperatury uwarunkowanego wydzielaniem się strat dodatkowych w układzie — $\Delta\theta$. Wykazano, że zastosowanie ekranu jako środka prowadzącego do obniżenia przyrostów temperatury jest celowe tylko w przypadku, gdy decydującą rolę w przyroście temperatury sumarycznym ma przyrost $\Delta\theta$, a więc w układach, gdzie występują straty rozproszeniowe o dużej wartości.

M. KAŻMIERSKI, I. KERSZ

EFFICACITÉ DES ÉCRANS CONDUCTEURS LONGITUDINAUX PARTIE II. ELÉVATIONS DE LA TEMPÉRATURE DANS LES SYSTÈMES BLINDÉS

Résumé

Dans l'étude on donne quatre algorithmes de différent degré de simplification pour calculer un relèvement déterminé de la température dans le système avec un écran conducteur partiel, blindant un plateau en acier solide contre le flux de diffusion. Le plateau est réfrigéré de deux côtés — d'un côté par l'huile, de l'autre par l'air. Les pertes dans le système sont calculées prenant pour base l'étude [6]. On vérifie la correction des résultats des calculs obtenus en les comparant avec les effets des mesures. En général, on peut exprimer l'élévation de la température des éléments métalliques (écran et plateau en acier) comme somme de deux éléments du caractère différent: de l'élévation de la température θ_0 — étant l'effet du flux calorifique passant de l'huile chauffée à l'air et traversant le plateau en acier partiellement blindé et — de l'élévation de la température $\Delta\theta$ — étant l'effet des pertes additionnelles du système. On montre, que pour abaisser les élévations de la température, le blindage n'est efficace que dans le cas où l'élévation $\Delta\theta$ est grande, c'est à dire dans les systèmes où les pertes de dissipation ont une grande valeur.

M. KAŻMIERSKI, I. KERSZ

WIRKSAMKEIT DER LEITENDEN LÄNGSABSCHIRMUNG TEIL II: TEMPERATURANSTIEG IN ABSCHIRMUNGSSYSTEMEN

Zusammenfassung

In der Bearbeitung wurden 4 Algorithmen verschiedener Vereinfachungsgrade für die Berechnung des Temperaturanstieges in einem Abschirmungssystem dargestellt. Das Abschirmungssystem besteht aus leitenden Langsteilschirmen, die eine dicke Stahlplatte vom Streufluss abschirmen, die zweiseitig gekühlt

wird: von der einen Seite mit Öl, von der anderen mit Luft. Verluste im System wurden mathematisch [6] bestimmt, und an einem grossen Modell gemessen. Beide Ergebnisse wurden verglichen, und es hat sich erwiesen, dass die Genauigkeit der mathematischen Methode befriedigend ist. Im Allgemeinen kann der Temperaturanstieg der Metallteile (Schirm und Platte) als Summe von zwei Faktoren ausgedrückt werden. Der erste Faktor ϑ_0 stammt von der Wärmezufuhr vom warmen Öl in die Umgebung durch die teilweise abgeschirmte Platte, und der zweite Faktor $\Delta\vartheta$ — vom Temperaturanstieg, der durch die zusätzlichen Verluste im System verursacht wird. Es wurde nachgewiesen, dass die Anwendung der Abschirmung nur dann zweckmässig ist, wenn der Faktor $\Delta\vartheta$ für den Temperaturanstieg ausschlaggebend ist, also bei Systemen, bei denen grosse Streuverluste auftreten.

М. КАЗЬМЕРСКИ, И. КЕРШ

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРОДОЛЬНЫХ ПРОВОДЯЩИХ ЭКРАНОВ ЧАСТЬ 2. ПЕРЕГРЕВ В ЭКРАНИРУЕМЫХ СИСТЕМАХ

Резюме

Приведены 4 алгоритма, разной степени симплификации, для расчета стационарных перегревов в системе с частичным продольным проводящим экраном, экранирующим массивную сталь от потока рассеяния и двухсторонне охлаждающейся — с одной стороны маслом, а со второй воздухом. Потери в системе рассчитаны на основе [6]. Проведено сравнение результатов вычислений с измерениями на большой физической модели. В общем случае перегрев металлических элементов (экрана и экранируемой плиты) можно представить в виде суммы двух слагаемых разного характера — перегрева вытекающего из течения тепла от нагретого масла к окружающей среде через частично экранируемую стальную плиту — ϑ_0 и перегрева зависящего от удельных потерь в системе — $\Delta\vartheta$. Показано, что применение экрана как средства ведущего к понижению перегрева целесообразно только в случае когда решающего роль играет $\Delta\vartheta$, то есть в системах с большими величинами удельных потерь.

Zarys metodyki obliczania niezawodności zabrudzeniowej izolatorów napowietrznych

ZBIGNIEW GACEK

Instytut Elektroenergetyki i Sterowania Układów. Politechnika Śląska

Otrzymano 1987.11.16

Autoryzowano do druku 1988.08.25

W artykule omówiono podstawowe zagadnienia metodyczne dotyczące obliczania niezawodności wysokonapięciowych izolatorów napowietrznych na terenach przemysłowych. Przedstawioną metodę matematycznego modelowania zmienności w czasie narażenia zabrudzeniowego zilustrowano przykładami obliczeniowymi. Zaproponowano metodę obliczania niezawodności izolatorów w oparciu o wyniki ich badań terenowych oraz rozważono zakres stosowania tej metody.

1. WSTĘP

Niezawodność zabrudzeniowa izolatorów można zdefiniować jako zdolność do wykazywania przez nie dostatecznej wytrzymałości powierzchniowej w określonych warunkach pracy i danym przedziale czasu. Poniżej omówiono podstawowe zagadnienia metodyczne dotyczące obliczania niezawodności pojedynczych napowietrznych układów izolacyjnych, pracujących w warunkach zabrudzeń przemysłowych. Zdaniem autora, dobre rezultaty w tym zakresie uzyskuje się na drodze statystycznego modelowania zmienności w czasie narażenia zabrudzeniowego i związanych z tym losowych strumieni zakłóceń spowodowanych przeskokami zabrudzeniowymi. Zakres rozważań nie obejmuje zagadnień związanych z oceną niezawodności zbiorów izolatorów liniowych lub stacyjnych o zadanych strukturach funkcjonalnych.

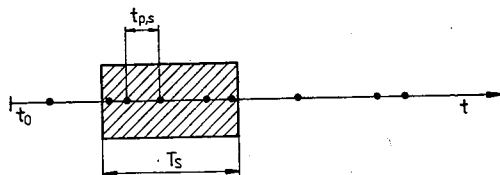
2. PODSTAWY MODELOWANIA NARAŻENIA ZABRUDZENIOWEGO I OBLICZANIA NIEZAWODNOŚCI IZOLATORÓW

Miarą niezawodności zabrudzeniowej układu izolacyjnego przy napięciu roboczym — najbardziej znaczącej na terenach przemysłowych — jest prawdopodobieństwo jego pracy bez przeskoku zabrudzeniowego w danym czasie i określonych warunkach eksploatacji¹⁾. Aby obliczyć to prawdopodobieństwo należy:

¹⁾ Dalsze rozważania dotyczą wyłącznie niezawodności izolatorów przy przemiennym napięciu roboczym, ponieważ ryzyko zapoczątkowania i rozwoju przeskoku zabrudzeniowego podczas większości przepięć można uznać za pomijalnie małe [2].

- określić charakter strumienia zakłóceń zabrudzeniowych rejestrowanych w liniach lub stacjach;
- stworzyć możliwie proste, ale zbliżone do rzeczywistości modele zmienności w czasie narażenia zabrudzeniowego.

Przebieg procesu występowania kolejnych przeskoków zabrudzeniowych, rejestrowanych podczas badania lub eksploatacji izolatorów, ma charakter stochastyczny. Zależy on zarówno od losowej zmienności oddziaływań środowiskowych, jak i od własności powierzchniowych izolatorów. Chwile występowania przeskoków, będące realizacjami tego strumienia, są zmiennymi losowymi (rys. 1). Analizując taki strumień w oparciu



Rys. 1. Ilustracja realizacji strumienia zakłóceń zabrudzeniowych

● — oznaczenie zakłócenia na osi czasu, t_0 — chwila zainstalowania lub rozpoczęcia badania układu izolacyjnego, T_s — przedział czasu o zadanej długości i określonym położeniu względem chwili t_0 , $t_{p,s}$ — czas między kolejnymi zakłóceniami w okresie T_s (zmienna losowa)

o wyniki statystycznego badania zakłóceń lub specjalnych badań doświadczalnych (laboratoryjnych, terenowych, symulacyjnych) należy więc posługiwać się metodami probabilistycznymi.

Zakłócenia spowodowane przeskokami zabrudzeniowymi tworzą w ogólnym przypadku niestacjonarne strumienie zdarzeń losowych. Niestacjonarność strumieni — wynikająca z nierównomiernego występowania w czasie zakłóceń zabrudzeniowych — jest spowodowana przede wszystkim zmiennością oddziaływań środowiskowych. Największe znaczenie praktyczne ma ich zmienność sezonowa, o której świadczy duża nierównomierność występowania zakłóceń w różnych okresach roku. Wynika to głównie ze zmiennej częstości występowania różnorodnych opadów atmosferycznych, wiatru o określonej sile i ukierunkowaniu oraz temperatury powietrza — tzn. czynników współdecydujących wraz ze stałymi i gazowymi zanieczyszczeniami atmosferycznymi o chwilowej wytrzymałości powierzchniowej izolatorów. Wymienione oddziaływania środowiskowe wykazują jednocześnie wyraźną cykliczność roczną.

Ze względu na zazwyczaj bardzo małą częstość rejestrowanych przeskoków zabrudzeniowych oraz ich wyraźną zmienność w czasie, dokładne matematyczne odwzorowanie strumienia zakłóceń w sieciach elektroenergetycznych jest praktycznie niemożliwe. Dotychczasowe doświadczenia i wyniki obliczeń weryfikacyjnych (opublikowane w pracach [3] i [4]) potwierdzają, że strumienie te są wprawdzie niestacjonarne, ale jednocześnie wykazują:

a) pojedynczość — oznaczającą praktyczną niemożliwość wystąpienia dwóch lub większej liczby przeskoków w bardzo krótkim przedziale czasu (m.in. ze względu na małą liczbę rejestrowanych zakłóceń);

b) brak następstw — tj. niezależność prawdopodobieństwa przeskoku w danym przedziale czasu od przeskoków wcześniejszych (ze względu na możliwość pominięcia

zjawisk starzeniowych oraz kilkutygodniowych okresów czasu bezpośrednio po wymianie lub czyszczeniu izolatorów)²⁾.

Oznacza to, że strumień zakłóceń zabrudzeniowych może być w przybliżeniu traktowany jako niestacjonarny prosty strumień Poissona [1]. Taki strumień charakteryzuje się m.in. zależnością oczekiwanej liczby przeskoków nie tylko od długości rozpatrywanego przedziału czasu, ale również od położenia tego przedziału na osi czasu względem chwili zainstalowania lub rozpoczęcia badania układu izolacyjnego. Podstawowym parametrem strumienia jest intensywność zakłóceń $\lambda(t)$, tj. warunkowa gęstość czasu poprawnej pracy układu izolacyjnego (pracującego bez przeskoku do chwili t). W przybliżeniu, jest to prawdopodobieństwo przeskoku w dostatecznie małym przedziale czasu $(t, t + dt)$, pod warunkiem, że nie wystąpił on do rozpatrywanej chwili t [1].

Intensywność zakłóceń jest w ogólnym przypadku funkcją czasu, uzależnioną od losowych realizacji chwilowej wytrzymałości powierzchniowej izolatorów. Miara tej wytrzymałości jest statystyczne napięcie przeskoku zabrudzeniowego U_z odniesione do napięcia roboczego sieci $U_m/\sqrt{3}$, czyli poziom wytrzymałości powierzchniowej wyrażony w jednostkach względnych³⁾. Ponieważ wytrzymałość ta ulega przypadkowym zmianom pod wpływem oddziaływań elektrycznych i środowiskowych, dlatego też zmienną $z = \sqrt{3}U_z/U_m$ należy traktować jak skalarną funkcję losową $z(t)$. Dotyczy to również intensywności zakłóceń, która jest uzależniona od wartości chwilowych wytrzymałości powierzchniowej izolatorów, czyli kolejnych realizacji zmiennej $z(t)$. Ze względu na nieznaną postać tej funkcji, niezawodność zabrudzeniowa układu izolacyjnego wyraża się ogólnym wzorem

$$\begin{aligned} R(t) = P(t_p \geq t) &= 1 - F(t_p \leq t) = \exp \left\{ - \int_{t_0}^{t_0+t_p} \lambda(t) dt \right\} = \\ &= \exp \left\{ - \int_{t_0}^{t_0+t_p} \lambda[z(t)] dt \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

w którym: t_0 — chwila zainstalowania lub rozpoczęcia badania układu izolacyjnego; t_p — czas do przeskoku lub między kolejnymi przeskokami (zmienna losowa); $F(t_p \leq t) = F(t)$ — dystrybucja czasu do przeskoku lub czasu między kolejnymi przeskokami; $f(t_p \leq t) = f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$ — gęstość prawdopodobieństwa przeskoków w czasie;

$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$ — intensywność zakłóceń (przeskoków) zabrudzeniowych; $z(t) = \sqrt{3}U_z(t)/U_m$ — skalarna funkcja losowa względnej wytrzymałości powierzchniowej układu izolacyjnego; $U_z(t)$ — statystyczne napięcie przeskoku zabrudzeniowego (funkcja losowa, wyrażona w wartościach skutecznych napięcia); U_m — największe dopuszczalne międzyprzewodowe napięcie robocze sieci (wartość skuteczna).

²⁾ Założenie o braku następstw może być niekiedy nieuzasadnione i w konkretnych okolicznościach wymaga dodatkowej weryfikacji (np. w przypadku izolatorów kombinowanych z tworzyw syntetycznych).

³⁾ Wytrzymałość powierzchniową można również wyrazić pośrednio za pomocą innych wielkości mierzalnych; np. konduktywności powierzchniowej powłoki zabrudzeniowej lub maksymalnego prądu wpływu (rejestrowanego bezpośrednio przed przeskokiem).

Obliczenie prawdopodobieństwa (1) jest praktycznie możliwe jedynie wtedy, gdy proces zmian wytrzymałości zabrudzeniowej izolatorów można uznać w przybliżeniu za stacjonarny w określonych przedziałach czasu. Przy takim założeniu:

- prawdopodobieństwo wystąpienia przeskoku w zadanym przedziale czasu zależy wyłącznie od jego długości, a nie od położenia względem chwili t_0 ;
- losowe realizacje poziomu wytrzymałości $z(t)$ i związanej z nim intensywności zakłóceń $\lambda(t)$ oscylują okresowo wokół wartości ustalonych.

Ponieważ istotnymi właściwościami narażenia zabrudzeniowego są cykliczność roczna i zmienność sezonowa, dlatego też w konkretnych przypadkach należy wyznaczyć i zweryfikować model sezonowej zmienności tego narażenia w ciągu roku⁴⁾. Dzieląc rok na kilka okresów (sezonów) uzyskuje się kilkustanowy model obliczeniowy, zawierający „s” przedziałów czasowych o stałych oraz zmieniających się skokowo intensywnościach zakłóceń i odpowiadających im poziomach wytrzymałości układu izolacyjnego. Rozkłady prawdopodobieństwa czasów między kolejnymi zakłóceniami są wtedy w każdym z takich sezonów zbliżone do rozkładów wykładniczych, a strumienie zakłóceń — do stacjonarnych strumieni Poissona. Znając model zmienności narażenia zabrudzeniowego w ciągu roku można kolejno obliczyć:

- sezonową niezawodność układu izolacyjnego

$$R(T_s) = 1 - F(T_s) \cong \exp(-\lambda_s T_s), \quad s = 1, 2, \dots, k \quad (2)$$

- roczną niezawodność układu izolacyjnego

$$R(T) \cong \prod_{s=1}^k R(T_s) = \exp\left(-\sum_{s=1}^k \lambda_s T_s\right), \quad s = 1, 2, \dots, k \quad (3)$$

gdzie: s — wskaźnik sezonowości narażenia izolacji w ciągu roku; T_s — czas trwania jednego z sezonów w ciągu roku; $T = \sum_{s=1}^k T_s$ — czas trwania roku kalendarzowego; $F(T_s)$ — dystrybuenta czasu między kolejnymi zakłóceniami w jednym z sezonów; λ_s — sezonowa intensywność zakłóceń.

Założenie o okresowej stacjonarności strumieni zakłóceń jest uzasadnione wieloletnimi doświadczeniami eksploatacyjnymi, wskazującymi na istnienie wyraźnej cykliczności i sezonowości oddziaływań środowiskowych w czasie [2, 3, 4]. Z badań terenowych wynika również, że losowe realizacje konduktywności i wytrzymałości powierzchniowej izolatorów w określonych warunkach zabrudzeniowych oscylują na ogół wokół wartości ustalonych, nie przekraczając pod względem statystycznym wartości granicznych dla danej strefy⁵⁾.

⁴⁾ Zakłócenia zabrudzeniowe wykazują również zmienność dobową, ponieważ przeskoki rejestruje się najczęściej w nocy i we wczesnych godzinach rannych. Wynika ona przede wszystkim z nierównomiernego występowania w czasie lokalnych mgieł i obniżonych temperatur powietrza — czynników ułatwiających skraplanie się pary wodnej na izolatorach. Zmienność dobową można jednak pominąć w praktycznych obliczeniach niezawodnościowych, od których nie oczekuje się dokładności większej niż jeden dzień kalendarzowy.

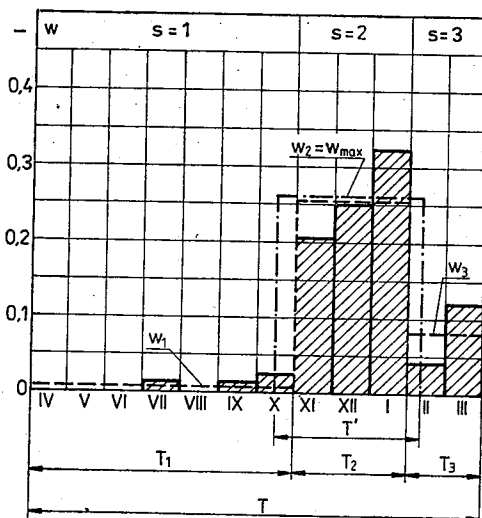
⁵⁾ Nie jest to oczywiście słuszne w przypadku izolacji źle dobranej pod względem wytrzymałości powierzchniowej, gdy przeskok może nastąpić jeszcze przed osiągnięciem stanu „nasylenia” powłoki zabrudzeniowej.

3. MODELE ZMIENNOŚCI NARAŻENIA ZABRUDZENIOWEGO

Badania wykonane przez autora wskazują, że niezawodność zabrudzeniową izolatorów można określić w oparciu o uproszczone modele obliczeniowe, odwzorowujące sezonową zmienność w czasie oddziaływań środowiskowych i wynikającą stąd częstość zakłóceń. Modele te uzyskuje się na podstawie wyników statystycznego badania zakłóceń w liniach lub stacjach elektroenergetycznych, rejestrowanych podczas wielu lat eksploatacji.

Metodę tę zastosowano po raz pierwszy posługując się wynikami wieloletnich rejestracji wartości szczytowych prądu upływu przed przeskokami zabrudzeniowymi na izolatorach, zainstalowanych we francuskich stacjach doświadczalnych 120 kV [5]. Dla warunków krajowych wykorzystano w tym celu dane pomiarowe pochodzące ze stacji doświadczalnych 110 kV „Zabrze” i „Bolesław” (udostępnione przez ZE Gliwice) oraz statystykę zakłóceń zabrudzeniowych w liniach 110 i 220 kV z terenu Południowego Okręgu Energetycznego (opracowaną przez autora). Wykonane analizy potwierdziły, że izolatory napowietrzne są najbardziej zagrożone w okresie jesienno-zimowym, kiedy występuje najczęściej mgieł, mżawek i topniejącego śniegu (szczególnie w niesprzyjających warunkach termicznych i wiatrowych). Znacznie mniejsze zagrożenie występuje w okresie wiosennym, a szczególnie letnim — kiedy widoczne są efekty samooczyszczania się izolatorów.

Na rys. 2 pokazano przykład modelu odwzorowującego sezonową zmienność narażenia zabrudzeniowego izolatorów badanych w krajowych stacjach doświadczalnych. Model ten jest wynikiem analizy częstości (liczebności względnych) przeskoków w po-



Rys. 2. Przykład modelu sezonowej zmienności narażenia zabrudzeniowego izolatorów napowietrznych badanych w stacjach doświadczalnych 110 kV (wg [4]):

— — — — — 3 stanowy model obliczeniowy, — — — — — 1 stanowy zastępczy model obliczeniowy, w_1, w_2, w_3 — średnie sezonowe częstości przeskoków, w_{max} — największa sezonowa częstość przeskoków, $s = 1, 2, 3$ — wskaźnik sezonowości narażenia zabrudzeniowego, T_1, T_2, T_3 — czasy trwania sezonów narażenia, T' — zredukowany rok obliczeniowy, T — rok kalendarzowy

szczególnych miesiącach roku. Materiał statystyczny pochodzi z 10-letniego okresu obserwacji. Trójstanowy model obliczeniowy opisano za pomocą sezonowych częstości przeskoków — przedziałami stałych i zmieniających się skokowo. Poprawność tego modelu potwierdziły pozytywne wyniki testów χ^2 — Pearsona, F — Fishera i WE — Shapiro [4]. Po zweryfikowaniu modelu, przekształcono go do jeszcze prostszej zastępczej postaci jednostanowej, w której występuje jedynie największa sezonowa częstość przeskoków w okresie tzw. zredukowanego roku obliczeniowego T' (w rozpatrywanym przypadku $T' \cong 0,3 T$). Przeliczono w tym celu czasy trwania poszczególnych sezonów w ten sposób, aby oczekiwane częstości przeskoków przed i po przekształceniu nie uległy zmianie. Ponieważ dla 3 stanowego modelu obliczeniowego, w którym $w_2 = w_{max} = const$ i $T_2 = T'_2$, sezonowość strumienia zakłóceń w okresie T_2 jest z założenia równa jedności a w dwóch pozostałych wynika ze wzoru

$$q_s = \frac{w_{max}}{w_s} = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_s}, \quad s = 1, 3, \quad (4)$$

więc zredukowane czasy trwania rozpatrywanych sezonów

$$T'_s = \frac{1}{q_s} T_s = \frac{w_s T_s}{w_{max}} = \frac{\lambda_s T_s}{\lambda_{max}}, \quad s = 1, 3 \quad (5)$$

przy czym: w_{max} , λ_{max} — największa średnia sezonowa częstość i intensywność zakłóceń (przeskoków) w ciągu roku; w_s , λ_s — średnia częstość i średnia intensywność zakłóceń (przeskoków) w okresach T_1 i T_3 . Po przekształceniu czasów trwania kolejnych sezonów wg wzoru (5) otrzymuje się bardzo prosty model obliczeniowy, w którym intensywność zakłóceń jest stała i równa największej intensywności sezonowej w roku obliczeniowym, zredukowanym do $T' = \sum_{s=1}^k T'_s$.

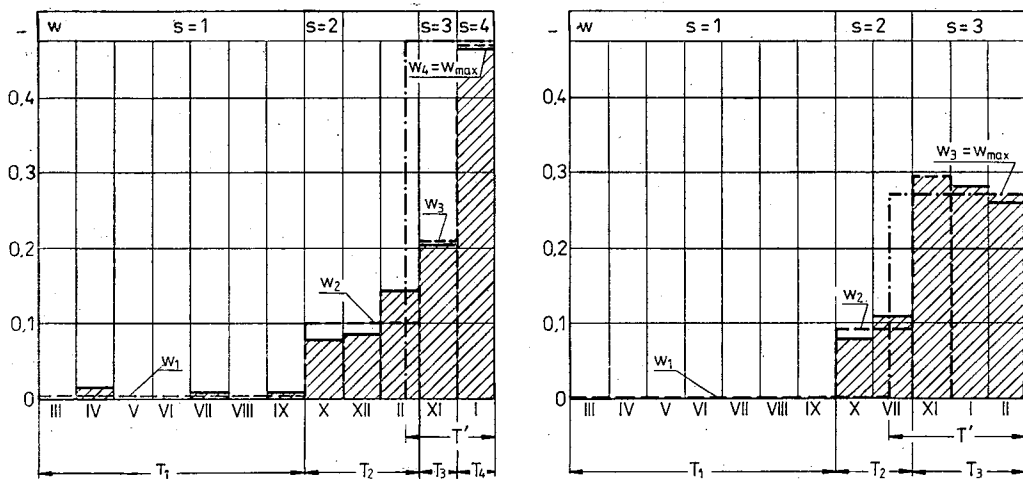
Bardziej skomplikowane modele sezonowej zmienności narażenia zabrudzeniowego obowiązują dla linii napowietrznych 110 i 220 kV (tab. 1 i rys. 3). Uzyskano je w oparciu

Tablica 1

Modele sezonowej zmienności narażenia zabrudzeniowego izolacji linii napowietrznych 110 i 220 kV w Południowym Okręgu Energetycznym [4]

Napięcie znamionowe linii U_n	Liczba stanów narażenia k	Czas trwania sezonu narażenia T_s				Zredukowany rok obliczeniowy	
		T_1	T_2	T_3	T_4	T'	
kV	—	doby				doby	lata
110	4	214 (IV—IX)	90 (X, XII, II)	30 (XI)	31*) (I)	73	0,2
220	3	214 (III—IX)	62 (X, XII)	89 (XI, I, II)	— —	111	0,3

*) Okres występowania największego narażenia zabrudzeniowego izolatorów w ciągu roku.



Rys. 3. Przykłady modeli sezonowej zmienności narażenia zabrudzeniowego izolacji linii napowietrznych 110 i 220 kV (wg [4] i danych w tab. 1): a) linie 110 kV, b) linie 220 kV

▨ — miesięczna częstość zakłóceń zabrudzeniowych (zarejestrowano łącznie 202 zakłócenia w liniach 110 kV i 64 zakłócenia w liniach 220 kV), pozostałe oznaczenia jak na rys. 2

o wyniki badania zakłóceń zabrudzeniowych w ciągu 10 lat eksploatacji. Postacie modeli zweryfikowano za pomocą trzech różnych testów statystycznych (podobnie jak w przypadku badań w stacjach terenowych). Zróżnicowanie postaci modeli dla linii 110 i 220 kV należy tłumaczyć przede wszystkim ich odmiennym układem przestrzennym i strukturalnym. Linie 110 kV w rozpatrywanym obszarze stanowią część sieci rozdzielczej. Wchodzą one ponadto znacznie głębiej w strefy większych zabrudzeń niż linie 220 kV, które są zaliczane już do linii przesyłowych.

4. OBLICZANIE NIEZAWODNOŚCI ZABRUDZENIOWEJ IZOLATORÓW NA PODSTAWIE WYNIKÓW BADAŃ TERENOWYCH

Badania wykonywane w terenowych stacjach doświadczalnych mają na celu przede wszystkim sprawdzenie przydatności izolatorów do pracy w trudnych warunkach zabrudzeniowych. Są one dotychczas nieznormalizowane. Ze względu na ograniczone możliwości wykonywania przekonywających prób laboratoryjnych oraz na znaczną niejednorodność rozwiązań izolacji liniowej i stacyjnej, badania terenowe dostarczają ważnych informacji o własnościach różnych izolatorów. Badania te traktuje się jako najbardziej miarodajne, chociaż mają one w zasadzie charakter porównawczy i odnoszą się do lokalnych warunków zabrudzeniowych. Wykonuje się je jednak w rzeczywistych warunkach sieciowych i środowiskowych.

Próby bezpośredniego wykorzystania wyników badań terenowych do oceny niezawodności izolatorów nie dają zwykle spodziewanych rezultatów. Wynika to nie tylko z niekiedy zbyt krótkiego czasu trwania tych badań, ale przede wszystkim — z nieuwzględnienia sezonowej zmienności narażenia zabrudzeniowego. Zmienność ta powoduje, że zarejestrowanych czasów do przeskoku nie można zazwyczaj wykorzystać w bezpośredni

sposób do obliczeń niezawodnościowych. Konieczny jest podział tych czasów na tzw. czasy sezonowe, nagromadzone łącznie w każdym z okresów T_s , wynikających z modelu zmienności narażenia w ciągu roku (np. jak na rys. 2). Sezonowe czasy do przeskoku mają w przybliżeniu wykładnicze rozkłady prawdopodobieństwa, ponieważ sezonowe intensywności zakłóceń

$$\lambda_s \cong \frac{1}{\bar{t}_{p,s}} = \text{const}, \quad (6)$$

przy czym $\bar{t}_{p,s}$ — wartość średnia z sezonowych czasów do przeskoku $t_{p,s}$, nagromadzonych łącznie w rozpatrywanym przedziale $(0, T_s)$.

Jeśli czas do przeskoku t_p (zarejestrowany dla danego układu izolacyjnego) jest dłuższy od roku kalendarzowego, to $t_{p,s}$ jest sumą czasów sezonowych w kolejnych latach trwania badania. Wartość średnią $\bar{t}_{p,s}$ oblicza się z wyników badań co najmniej kilku takich samych układów izolacyjnych. Sezonowe czasy do przeskoku są więc jednoznacznie związane z czasem do przeskoku zarejestrowanym dla układu izolacyjnego, ponieważ jego wartość średnia wyraża się wzorem

$$\bar{t}_p = \sum_{s=1}^k \bar{t}_{p,s}. \quad (7)$$

Znając postać modelu sezonowej zmienności narażenia zabrudzeniowego oraz wyniki pomiarów czasu do przeskoku dla badanego układu izolacyjnego należy rozłożyć zarejestrowaną wartość średnią tego czasu na składniki odpowiadające każdemu z okresów T_s . Uwzględniając wzory (2), (3) i (6) można na tej podstawie obliczyć:

— niezawodność sezonową badanego układu izolacyjnego

$$R(T_s) = \exp\left(-\frac{T_s}{\bar{t}_{p,s}}\right), \quad s = 1, 2, \dots, k \quad (8)$$

— niezawodność roczną badanego układu izolacyjnego

$$R(T) = \exp\left(-\sum_{s=1}^k \frac{T_s}{\bar{t}_{p,s}}\right) \cong R(T') = \exp(-\lambda_{\max} T'). \quad (9)$$

Proponowany sposób postępowania zastosował autor m.in. do obliczania niezawodności układów izolacyjnych, badanych w stacjach doświadczalnych „Zabrze” i „Bolesław”. Szczegółowe wyniki obliczeń są opublikowane w pracach [4] i [6]. Stacje te znajdują się w terenie o dużym zanieczyszczeniu atmosfery, odpowiadającemu warunkom zbliżonym do strefy IV (konduktywnościom powierzchniowym powłok na izolatorach ok. 25–30 μS). Wyniki obliczeń niezawodnościowych — wykonanych jedynie w oparciu o badania układów izolacyjnych zainstalowanych w takich stacjach terenowych — nie zawsze pozwalają jednak na formułowanie daleko idących wniosków, ponieważ:

1) badania te mają charakter lokalny i są wykonywane zazwyczaj w najcięższych z założenia warunkach zabrudzeniowych w danym obszarze;

2) materiał statystyczny jest znacznie ograniczony a ponadto dotyczy często izolatorów instalowanych w różnych porach roku (co ma istotne znaczenie zwłaszcza dla

izolatorów zawieszanych latem, na których przeskoki występują w najbliższym okresie jesienno-zimowym);

3) ze względu na konieczność skrócenia czasu trwania prób bada się układy izolacyjne o niedopuszczalnie małej powierzchniowej wytrzymałości (niezawodności rocznej mogącej osiągać zaledwie wartość 0,04);

4) nieliniowe i trudne do określenia zależności między niezawodnością a parametrami konstrukcyjnymi izolatorów (np. drogą upływu) mogą być przyczyną błędnej oceny własności powierzchniowych praktycznie stosowanych rozwiązań, tzn. o niezawodności rocznej znacznie przekraczającej wartość 0,99.

Należy podkreślić, że dysponując wynikami badań terenowych można wykonywać przybliżone obliczenia niezawodnościowe również dla hipotetycznych układów izolacyjnych — składających się z większej liczby zbadanych izolatorów. Pozwala to na porównywanie ich właściwości niezawodnościowych w warunkach zbliżonych do eksploatacyjnych. W monografiach [2] i [3] opisano sposób wykorzystania w tym celu tzw. charakterystyk zawodnościowych, czyli zależności między roczną zawodnością zabrudzeniową a drogą upływu izolatorów. Zaproponowano również metodę graficzno-analitycznego wyznaczania tej zawodności m.in. w oparciu o wyniki laboratoryjnych prób wytrzymałościowych izolatorów. Zagadnienia te wykraczają jednak poza przyjęty zakres rozważań i wymagają oddzielnej publikacji.

PODSUMOWANIE

Narażenie zabrudzeniowe napowietrznych izolatorów wysokiego napięcia wykazuje wyraźną zmienność sezonową w ciągu roku. Zmienność dobową tego narażenia może być pominięta w praktycznych obliczeniach niezawodnościowych. Sezonową zmienność narażenia zabrudzeniowego w ciągu roku opisują w dostateczny sposób kilkustanowe modele obliczeniowe, wyrażone przedziałami stałych i skokowo zmieniających się intensywności zakłóceń. Sezonowe strumienie zakłóceń są wtedy zbliżone do stacjonarnych strumieni Poissona.

Niezawodność roczną układu izolacyjnego w warunkach zabrudzeń przemysłowych można obliczać w oparciu o wyniki rejestracji czasów do przeskoku. Wymaga to jednak odpowiedniego przetworzenia danych pomiarowych — przy uwzględnieniu sezonowości narażenia zabrudzeniowego w ciągu roku. Proponowane metody obliczeniowe umożliwiają efektywne wykorzystanie wyników badań izolatorów w terenowych stacjach doświadczalnych do różnych analiz niezawodnościowych. Mają one na celu m.in. ocenę wpływu kształtu geometrycznego i położenia izolatorów na ich własności powierzchniowe podczas eksploatacji.

BIBLIOGRAFIA

1. B. W. Gniedenko i in.: *Matematyczne metody w teorii niezawodności*. Warszawa: WNT, 1968
2. Z. Gacek: *Niezawodność izolacji linii napowietrznych wysokiego napięcia na terenach przemysłowych*. Zesz. Nauk. Pol. Śląskiej Elektryka nr 642, Gliwice 1980

3. Z. Gacek: *Techniczne i ekonomiczne aspekty zawodności zabrudzeniowej izolacji liniowej wysokiego napięcia*. Zesz. Nauk. Pol. Śląskiej Elektryka nr 513, Gliwice 1977
4. Z. Gacek, W. Kiś: *Modele obliczeniowe zawodności zabrudzeniowej izolacji liniowej*. Zesz. Nauk. Pol. Śląskiej Elektryka nr 488, Gliwice 1977
5. Z. Gacek: *Quelques paramètres d'isolation de lignes aériennes du point de vue de la probabilité sous pollution naturelle*. Note EdF HM/72/2922, Clamart 1974
6. Z. Gacek: *Wykorzystanie wyników prób terenowych do oceny zagrożenia zabrudzeniowego izolatorów*. Energetyka, 1977 nr 3

Z. GACEK

OUTLINE OF THE METHODOLOGY ALLOWING TO CALCULATE THE POLLUTION RELIABILITY OF OVERHEAD INSULATORS

Summary

Essential problems concerned with calculation of the reliability of H. V. outdoor insulators in industrial areas are considered. The presented mathematical modelling method of pollution hazard variation versus time is illustrated by analytical examples. A method, allowing to estimate the reliability of insulators basing on field investigation results, is proposed and the applicability of the method is assessed.

Z. GACEK

ESQUISSE DE LA MÉTHODOLOGIE PERMETTANT DE CALCULER LA FIABILITÉ DES ISOLATEURS AÉRIENS POLLUÉS

Résumé

Dans l'article on a considéré les problèmes essentiels concernant le calcul de la fiabilité des isolateurs aériens de haute tension dans les régions industrialisées. La méthode présentée, qui permet de simuler mathématiquement le changement dans le temps du risque de pollution, a été illustrée par des exemples de calcul. S'étant appuyé sur les résultats des essais in situ, on a proposé la méthode permettant de calculer la fiabilité des isolateurs et on a considéré aussi l'étendue de son usage.

Z. GACEK

WAHL DES BERECHNUNGSVERFAHRENS FÜR DIE VERSCHMUTZUNGSBESTÄNDIGKEIT VON FREILUFTISOLATOREN

Zusammenfassung

Die dargestellten Verfahren befassen sich mit der Berechnung der Beständigkeit von Hochspannungs-Freiluftisolatoren in Industriegebieten. Die betrachteten mathematischen Modellierungsverfahren der zeitlich veränderlichen Verschmutzungsgefährdung werden anhand von Berechnungsbeispielen geschildert. Das vorgeschlagene Verfahren gestattet, die Beständigkeit von Isolatoren auf Basis praktischer Untersuchungsergebnisse zu bestimmen. Die praktische Anwendung des Verfahrens wird an den genannten Beispielen demonstriert.

З. ГАЦЕК

ЭСКИЗ МЕТОДИКИ ВЫЧИСЛЕНИЯ НАДЁЖНОСТИ ЗАГРЯЗНЕННЫХ ВОЗДУШНЫХ ИЗОЛЯТОРОВ

Резюме

Представлены основные проблемы касающиеся вычисления надёжности высоковольтных воздушных изоляторов в промышленных районах. Представленный метод математического моделирования изменчивости во времени возникающей вследствие загрязнений изоляторов иллюстрирован численными примерами. Предложен метод вычисления надёжности изоляторов на основании результатов их местных исследований, а также обсуждены области применения этого метода.

Model matematyczny łuku elektrycznego stabilizowanego wirowym strumieniem gazu w plazmotronie prądu przemiennego

ANIELA KAMIŃSKA-PRANKE

Instytut Elektroenergetyki, Politechnika Poznańska

Otrzymano 1987.08.15

Autoryzowano do druku 1988.08.18

W pracy przedstawiono model łuku elektrycznego prądu przemiennego stabilizowanego strumieniem gazu. Podstawowe parametry modelu opisano wyrażeniami analitycznymi, uwzględniającymi nieliniową zależność właściwości gazu plazmotwórczego od przestrzennie-czasowego rozkładu potencjału cieplnego. Podano ocenę dokładności modelu i zależności analitycznych przeprowadzoną na podstawie weryfikacji doświadczalnej.

1. WPROWADZENIE

Łuk elektryczny występujący w plazmotronie stanowi fizycznie tak kompleksową strukturę, że nie należy się w najbliższym czasie spodziewać jego ścisłego opisu. W tej sytuacji podejmowane są próby odwzorowania procesów dynamicznych występujących w łuku elektrycznym przez odpowiednie modele.

Modele łuku elektrycznego można podzielić na dwie grupy, a mianowicie: modele matematyczne kanałowe, zwane również modelami matematyczno-fizycznymi oraz modele adaptatywne zwane również modelami zaciskowymi lub modelami „czarnej skrzynki” (model black-box).

Modele matematyczno-fizyczne łuku elektrycznego palącego się w plazmotronie były przedmiotem wielu opracowań, między innymi [1—9]. Niestety modele te nie dają zadowalającej odpowiedzi na temat zachowania się plazmotronu podczas pracy w obwodzie zasilającym. Dlatego też zachodzi potrzeba sformułowania modelu zaciskowego łuku elektrycznego, który może zostać w sposób bezpośredni związany z układem równań sieci elektrycznej. Rozwiązanie takiego układu równań daje ostatecznie przebiegi prądowe i napięciowe a także pozwala na badania innych procesów, ważnych z punktu widzenia poprawnej pracy plazmotronu takich jak na przykład stabilność obwodu, nieprzerwane palenie się łuku elektrycznego.

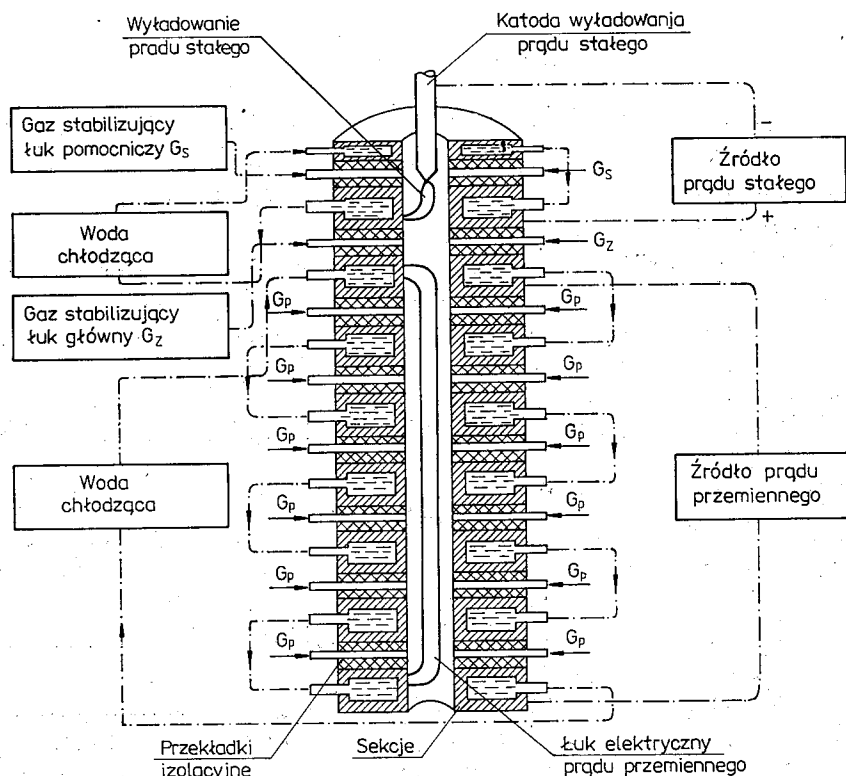
Opierając się na fizycznych modelach łuku, w pracy przedstawiono model adaptacyjny łuku elektrycznego prądu przemiennego palącego się w plazmotronie, w którym dominują procesy cieplne. Parametry modelu wyznaczano analitycznie przy uwzględnieniu nieliniowej zależności właściwości gazu od przestrzennego rozkładu temperatury

w kolumnie łukowej, zmieniającego się wraz ze zmianami natężenia prądu przemiennego. Analiza modelu łuku elektrycznego wraz z równaniami obwodu pozwoliła wyznaczyć przebiegi prądu, konduktancji oraz napięcia łuku. Przebiegi te oraz parametry modelu weryfikowano doświadczalnie.

2. WARUNKI PALENIA SIĘ ŁUKU ELEKTRYCZNEGO W PLAZMOTRONIE PRĄDU PRZEMIENNEGO

Łuk elektryczny o natężeniach prądu przemiennego stosowanych w plazmotronach (rzędu setek amperów) i odległościach między elektrodami od kilku do kilkudziesięciu centymetrów, gaśnie przy każdym przejściu prądu przez wartość zerową. Zachodzi więc konieczność dostarczania dodatkowej energii w obszarze zera prądu tak, aby zapewnić ponowny zapłon łuku elektrycznego. Źródłem tej energii może być wyładowanie pomocnicze prądu stałego, zapewniające dostarczenie energii wystarczającej do zapłonu ciepłego łuku, bądź też wyładowanie wysokiego napięcia dużej częstotliwości, zapewniające elektryczny zapłon łuku.

Z perspektywy czasu można stwierdzić, że korzystniejsze warunki pracy urządzenia uzyskano przy stosowaniu wyładowania pomocniczego prądu stałego i stąd w większości



Rys. 1. Zasada konstrukcji i zasilania jednofazowego plazmotronu prądu przemiennego

konstrukcji plazmotronów wykorzystuje się właśnie tą metodę zapewnienia nieprzerwanego palenia się łuku. Tytułem przykładu wymienimy tu niektóre tylko prace [10—15].

Przedstawiony w niniejszej pracy model matematyczny dotyczy łuku elektrycznego prądu przemiennego, stabilizowanego wirowym strumieniem gazu, którego nieprzerwane palenie jest zapewniane przez stosowanie wyładowania pomocniczego prądu stałego. Zasadę konstrukcji oraz zasilania plazmotronu przedstawiono na rysunku 1.

Łuk elektryczny prądu stałego małej mocy pali się między wolframową katodą i pierwszą sekcją plazmotronu. Nagrzewany w tym obszarze gaz roboczy o przepływie G_s przemieszcza się w kierunku wylotu plazmotronu, dzięki czemu temperatura ośrodka znajdującego się między pozostałymi sekcjami jest stosunkowo wysoka (zależna od parametrów wyładowania pomocniczego). Podłączenie do drugiej i ostatniej sekcji plazmotronu napięcia przemiennego powoduje samoczynny zapłon łuku elektrycznego i jego nieprzerwane palenie przy zmianach prądu przemiennego.

Nagrzewany wyładowaniem prądu przemiennego gaz roboczy o przepływie G_z stanowi główny strumień plazmy niskotemperaturowej. Łuk elektryczny stabilizowany jest strumieniem gazu doprowadzonym stycznie do komory wyładowczej plazmotronu. Ten sposób stabilizacji stosowany jest najczęściej w plazmotronach. W tym przypadku ruch gazu jest ruchem płaskim kołowym [16], w którym można wyróżnić dwa obszary, a mianowicie obszar w otoczeniu punktu $r = 0$ tzn. dla $r < r_0$, w którym prędkości obwodowe są proporcjonalne do promienia, czyli $v_\theta = C \cdot r$ (rdzeń wiru) i obszar dla $r > r_0$, w którym rozkład prędkości jest opisany zależnością $v_\theta = C/r$.

Z równania Bernoulliego dla obszaru otaczającego rdzeń wiru wynika zależność

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\varrho \frac{v_\theta^2}{r} \quad (1)$$

gdzie: p — ciśnienie gazu, ϱ — gęstość gazu.

Powyższe równanie wyraża ideę stabilizacji łuku elektrycznego wirowym strumieniem gazu. Wynika bowiem z niego istnienie promieniowego gradientu ciśnienia w wirze. Należy przy tym podkreślić, że najwyższe ciśnienie panuje w pobliżu rdzenia wiru (dla $r \approx r_0$), a przy dalszym zbliżaniu się do rdzenia przepływu wirowego następuje jego gwałtowny spadek. W samym rdzeniu ciśnienie jest stałe, a prędkość kątowna gazu jest proporcjonalna do promienia.

Z powyższych rozważań wynika, że stabilne palenie się łuku elektrycznego jest możliwe w rdzeniu wiru, w obszarze, w którym składowa promieniowa prędkości jest równa zero. Należy również zauważyć, że przepływający w plazmotronie gaz będzie miał osiową składową prędkości. Składowa ta wynika z różnicy ciśnień na wlocie i wylocie komory wyładowczej plazmotronu.

3. ROZKŁAD POTENCJAŁU CIEPLNEGO W KOMORZE WYŁADOWCZEJ PLAZMOTRONU WYTWORZONY WYŁADOWANIEM POMOCNICZYM PRĄDU STAŁEGO

Jak już wspomniano gaz roboczy, nagrzewany w obszarze wyładowania łukowego prądu stałego, przepływa w kierunku wylotu plazmotronu. Przy założeniu, że w komorze wyładowczej plazmotronu występuje tylko łuk elektryczny prądu stałego określenie tem-

peratury gazu w przestrzeni między elektrodami wyładowania prądu przemiennego, a mówiąc dokładniej jej rozkładu przestrzennego, jest zagadnieniem określenia warunków początkowych dla wyładowania prądu przemiennego. Opracowanie modelu łuku elektrycznego występującego w plazmotronie rozpoczęło więc od analizy łuku pomocniczego prądu stałego.

Podstawowym równaniem, pozwalającym wyznaczyć rozkład temperatury w kolumnie łukowej, jest równanie bilansu mocy. Dla opisanego w rozdziale 2 modelu przepływu gazu w komorze wyładowczej plazmotronu oraz przy założeniu, że $\partial T / \partial \theta = 0$, które oznacza, że temperatura gazu nie zależy od współrzędnej azymutalnej, równanie bilansu mocy dla jednostki objętości łuku ma postać

$$\sigma E_0^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - U_{pr} - c_p \varrho v_{zs} \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

gdzie: E_0 — natężenie pola elektrycznego, T — temperatura, v_{zs} — prędkość osiowa strumienia plazmy, σ — konduktywność plazmy, λ — współczynnik przewodzenia ciepła, c_p — ciepło właściwe, ϱ — gęstość właściwa gazu, U_{pr} — moc promieniowania, r, z — współrzędne biegunowe.

Równanie (2) jest bardzo trudne do wykorzystania w obliczeniach z uwagi na złożoną zależność od temperatury współczynników λ , c_p , ϱ i σ [17—21]. Dokonano więc przekształcenia, wprowadzając w miejsce temperatury potencjał cieplny gazu opisany zależnością

$$S = \int_{T_0}^T \lambda dT. \quad (3)$$

Występującą w równaniu bilansu cieplnego prędkość gazu można wyznaczyć znając wypływ masy G_s gazu stabilizującego w jednostce czasu i uwzględniając związek

$$v_{zs} = \frac{G_s}{\pi r_w^2 \varrho}, \quad (4)$$

gdzie: r_w — promień kanału wyładowczego.

Wprowadzając zależności (3) i (7) do równania (2) otrzymano

$$\sigma E_0^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial S}{\partial r} \right) - U_{pr} - \frac{G_s}{\pi r_w^2} \frac{c_p}{\lambda} \frac{\partial S}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

Ponieważ równanie (5) jest nierozwiązywalne metodami analitycznymi przy uwzględnieniu rzeczywistej zależności wyżej wymienionych współczynników od potencjału cieplnego, dlatego przyjęto liniową zależność konduktywności gazu i energii promieniowania od potencjału cieplnego w postaci

$$\sigma = a_{\sigma i, j} S, \quad U_{pr} = a_{ui, j} S, \quad (6)$$

natomiast stosunek c_p / λ przyjęto stały, to znaczy

$$\frac{c_p}{\lambda} = a_{pi, j}. \quad (7)$$

Indeksy i, j określają element objętości kolumny łukowej przy czym założono, że długość łuku podzielono na i przedziałów, natomiast promień na j przedziałów.

Różnica w stosunku do znanych z literatury [22—26] rozwiązań równania bilansu mocy łuku elektrycznego polega na tym, że przyjęto, iż zależności (6) i (7) są słuszne tylko dla dostatecznie małych elementów objętości łuku.

Równanie (5) analizowano przy następujących warunkach brzegowych

$$\frac{\partial S}{\partial r}(0, z) = 0 \quad (8)$$

$$S(r_w, z) = 0 \quad (9)$$

$$S(r, 0) = \varphi(r). \quad (10)$$

Funkcja $\varphi(r)$ występująca w warunku (10) określa promieniowy rozkład potencjału cieplnego w wyładowaniu prądu stałego w pobliżu katody. Dla jej znalezienia założono, że gaz stykający się z katodą ma potencjał cieplny wynikający z istnienia w przekroju kolumny łukowej o współrzędnej $z = 0$, źródła ciepła o wydajności

$$g_c = \frac{I^2 \varrho_w}{\pi^2 a^4} = j^2 \varrho_w \quad (11)$$

gdzie: I — przepływający przez katodę prąd elektryczny, ϱ_w — rezystywność materiału katody, a — promień katody, j — gęstość prądu na katodzie.

Rozkład potencjału cieplnego gazu, znajdującego się w pobliżu katody może być więc obliczony z równania

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} \right) = -j^2 \varrho_w \quad \text{dla } 0 < r < a, \quad (12)$$

Rozwiązaniem równania (12) przy warunku brzegowym (8) oraz warunku, że dla $r = a$, $S = 0$ jest funkcja

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \frac{1}{4} j^2 \varrho_w (a^2 - r^2) & \text{dla } 0 < r < a \\ \varphi(r) &= 0 & \text{dla } a \leq r \leq r_w. \end{aligned} \quad (13)$$

Rozwiązując równanie (5) przy podanych warunkach brzegowych oraz uwzględnieniu zależności (6) i (7) otrzymano funkcję opisującą rozkład potencjału cieplnego w elemencie objętości kolumny łuku pomocniczego. Funkcja ta ma postać

$$\begin{aligned} S(r, z) &= \exp \left(\frac{\pi r_w^2}{G_s a_{pi,j}} a_{si,j} E_0^2 z - \frac{\pi r_w^2}{G_s a_{pi,j}} a_{ui,j} z \right) \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp \left(- \frac{\pi \gamma_n^2}{G_s a_{pi,j}} z \right) \cdot I_0 \left(\frac{\gamma_n}{r_w} \cdot r \right), \end{aligned} \quad (14)$$

gdzie: γ_n — kolejne dodatnie pierwiastki równania $I_0/(\gamma_n) = 0$.

Współczynniki A_n występujące w powyższym wzorze wyznaczono z warunku brzegowego (10), skąd wynika

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n I_0 \left(\frac{\gamma_n}{r_w} r \right) = \varphi(r), \quad (15)$$

a więc

$$A_n = \frac{j^2 \varrho_w \int_0^{r_w} (a^2 - r^2) r I_0 \left(\frac{\gamma_n}{r_w} r \right) dr}{4 \int_0^{r_w} r I_0^2 \left(\frac{\gamma_n}{r_w} r \right) dr}. \quad (16)$$

Po obliczeniu całek występujących w zależności (16) otrzymano

$$A_n = \frac{2j^2 \varrho_w r_w^3}{\gamma_n^3 I_1(\gamma_n) a}. \quad (17)$$

Mając określony rozkład potencjału cieplnego w kolumnie łuku pomocniczego można przejść do określenia potencjału cieplnego gazu znajdującego się w przestrzeni między elektrodami wyładowania prądu przemiennego. Zakładamy przy tym nadal, że w komorze wyładowczej plazmotronu istnieje tylko wyładowanie prądu stałego. Rozpatrywany obszar jest obszarem bezźródłowym, a zatem równanie opisujące potencjał cieplny gazu ma postać

$$\frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} - U_{pr} - \frac{c_p}{\lambda} \varrho v_z \frac{\partial S}{\partial z_p} = 0. \quad (18)$$

Współrzędna z_p występująca w powyższym równaniu jest nadal współrzędną osiową, jednakże jej początek ($z_p = 0$) znajduje się w punkcie oddalonym od powierzchni katody o długość l_s łuku prądu stałego.

W obszar wyładowania prądu przemiennego podawany jest dodatkowo gaz, którego gęstość przepływu masy oznaczono przez G_z . Składowa osiowa jego prędkości przepływu będzie

$$v_{zz} = \frac{G_z}{\pi r_w^2 \varrho} \quad (19)$$

Prędkość wypadkowa gazu w kierunku osiowym jest więc sumą dwóch składowych

$$v_z = v_{zs} + v_{zz} = \frac{G_s + G_z}{\pi r_w^2 \varrho}. \quad (20)$$

Wstawiając zależność (20) do równania (18) i uwzględniając związki (6) oraz (7) otrzymano równanie

$$\frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} - \frac{G_s + G_z}{\pi r_w^2} a_{pm,k} \frac{\partial S}{\partial z_p} - a_{um,k} S = 0. \quad (21)$$

Wprowadzone w powyższym równaniu współczynniki $a_{pm,k}$ i $a_{um,k}$ są wyznaczane tak samo jak współczynniki $a_{pi,j}$ oraz $a_{ui,j}$. Zmiana indeksów została wprowadzona dla

odróżnienia obszaru kolumny łuku prądu stałego i obszaru znajdującego się poza tą kolumną.

Równanie (21) spełnia następujące warunki brzegowe

$$\frac{\partial S}{\partial r}(0, z_p) = 0, \quad (22)$$

$$S(r_w, z_p) = 0, \quad (23)$$

$$S(r, 0) = \varepsilon(r). \quad (24)$$

Funkcja $\varepsilon(r)$ jest określona wyrażeniem (14) dla $z = l_s$, czyli

$$\begin{aligned} \varepsilon(r) = \exp \left(-\frac{\pi r_w^2}{G_s a_{pi,j}} a_{oi,j} E_0^2 l_s - \frac{\pi r_w^2}{G_s a_{pi,j}} a_{ui,j} l_s \right) \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp \left(-\frac{\pi \gamma_n^2}{G_s a_{pi,j}} l_s \right) I_0 \left(\frac{\gamma_n}{r_w} r \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Rozwiązaniem równania (21) przy podanych warunkach brzegowych jest funkcja

$$\begin{aligned} \Psi(r, z_p) = S(r, z_p) = \exp \left[-\frac{\pi r_w^2}{(G_s + G_z) a_{pm,k}} a_{um,k} z_p \right] \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp \left[-\frac{\pi \gamma_n^2}{(G_s + G_z) a_{pm,k}} z_p \right] I_0 \left(\frac{\gamma_n}{r_w} r \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Uwzględniając wzór (25) wartości współczynników B_n wyznaczono z warunku brzegowego (24), z którego wynika

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} B_n I_0 \left(\frac{\gamma_n}{r_w} r \right) = \exp \left(-\frac{\pi r_w^2}{G_s a_{pi,j}} E_0^2 l_s a_{oi,j} - \frac{\pi r_w^2}{G_s a_{pi,j}} l_s \right) \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp \left(-\frac{\pi \gamma_n^2}{G_s a_{pi,j}} l_s \right) I_0 \left(\frac{\gamma_n}{r_w} r \right), \end{aligned} \quad (27)$$

stąd po przekształceniach otrzymano

$$B_n = A_n \exp \left[\frac{\pi l_s}{G_s a_{pi,j}} (r_w^2 a_{oi,j} E_0^2 - r_w^2 a_{ui,j} - \gamma_n^2) \right] \quad (28)$$

Podane wyżej zależności, opisujące rozkład potencjału cieplnego między elektrodami wyładowania prądu przemiennego, wytworzony wyładowaniem pomocniczym prądu stałego, określają warunki początkowe dla wyładowania prądu przemiennego. Trzeba przy tym podkreślić, że obliczenia należy rozpocząć od przekroju kolumny łuku prądu stałego dla $z = 0$, co pozwala określić początkowe wartości współczynników a_p , a_u i a_o , a następnie oblicza się wartości potencjału cieplnego w kolejnych przekrojach kolumny łukowej i poza nią, oddalonych o krok z , dobierając odpowiednie wartości wyżej wymienionych współczynników.

4. RÓWNANIE ŁUKU DYNAMICZNEGO

Przeprowadzona w poprzednim rozdziale analiza warunków panujących w przestrzeni międzyelektrodowej umożliwia przejście do zasadniczego problemu jakim jest określenie równania łuku dynamicznego prądu przemiennego.

Bilans mocy jednostki objętości łuku wyraża równanie

$$\frac{\rho c_p}{\lambda} \frac{\partial S}{\partial t} = a_{\sigma m, k} S E^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial S}{\partial r} \right) - a_{um, k} S - \frac{G_s + G_z}{\pi r_w^2} a_{pm, k} \frac{\partial S}{\partial z_z} \quad (29)$$

przy warunku początkowym

$$S(r, z_z, 0) = \Psi(r, z_z). \quad (30)$$

Przyjęto, że występujący w równaniu (29) stosunek $\rho c_p / \lambda$ ma wartość stałą tylko dla odpowiednio małego elementu objętości kolumny łukowej i wprowadzono oznaczenie

$$\frac{\rho c_p}{\lambda} = a_{Hm, k}. \quad (31)$$

Rozwiązanie równania (29) można przedstawić w postaci iloczynu dwóch funkcji

$$S = S_m(t) \Psi(r, z_z). \quad (32)$$

Jedna z funkcji reprezentuje rozkład potencjału cieplnego wytworzony w chwili początkowej wyładowaniem pomocniczym, natomiast druga amplitudę potencjału cieplnego zależną od wartości prądu przemiennego.

Wstawiając wyrażenie (32) do równania (29) i uwzględniając związek (31), a następnie całkując to równanie po objętości, otrzymano zależność opisującą zmianę amplitudy potencjału cieplnego. Zależność ta przedstawia się równaniem w następującej postaci

$$\begin{aligned} \int_0^{l_z} \int_0^{r_w} \sum_{m, k} a_{Hm, k} \Psi(r, z_z) r dr dz_z \frac{\partial S_m}{\partial t} &= \int_0^{l_z} \int_0^{r_w} E^2 \sum_{m, k} a_{\sigma m, k} \Psi(r, z_z) r dr dz_z S_m + \\ &+ \int_0^{l_z} \int_0^{r_w} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(r, z_z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi(r, z_z)}{\partial r^2} - \frac{G_s + G_z}{\pi r_w^2} \sum_{m, k} a_{pm, k} \frac{\partial \Psi(r, z_z)}{\partial z_z} - \right. \\ &\left. - \sum_{m, k} a_{um, k} \Psi(r, z_z) \right] r dr dz_z S_m, \end{aligned} \quad (33)$$

gdzie: l_z — długość łuku prądu przemiennego.

Związek między konduktancją łuku i amplitudą potencjału cieplnego, wyznaczony na podstawie prawa Ohma dany jest wzorem

$$g = 2\pi S_m \int_0^{l_z} \int_0^{r_w} \sum_{m, k} a_{\sigma m, k} \Psi(r, z_z) r dr dz_z. \quad (34)$$

Po uwzględnieniu wzoru (34) i przekształceniach równania (33) otrzymano

$$\begin{aligned}
 & \frac{\int_0^{l_z} \int_0^{r_w} \sum_{m,k} a_{Hm,k} \Psi(r, z_z) r dr dz_z}{2 \int_0^{l_z} \int_0^{r_w} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(r, z_z)}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Psi(r, z_z)}{\partial r^2} + \frac{G_s + G_z}{\pi r_w^2} + \sum_{m,k} a_{pm,k} \frac{\partial \Psi(r, z_z)}{\partial z_z} + \sum_{m,k} a_{um,k} \Psi(r, z_z) \right] r dr dz_z} \times \\
 & \times \frac{dg^2}{dt^2} + g^2 = \\
 & = \frac{\int_0^{l_z} \int_0^{r_w} \sum_{m,k} a_{om,k} \Psi(r, z_z) r dr dz_z}{\int_0^{l_z} \int_0^{r_w} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(r, z_z)}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Psi(r, z_z)}{\partial r^2} + \frac{G_s + G_z}{\pi r_w^2} \sum_{m,k} a_{pm,k} \frac{\partial \Psi(r, z_z)}{\partial z_z} + \sum_{m,k} a_{um,k} \Psi(r, z_z) \right] r dr dz_z} i^2.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Powyższe równanie zapiszemy w postaci

$$\Theta \frac{dg^2}{dt} + g^2 = \frac{i^2}{P_g}. \tag{36}$$

Równanie w postaci (35) jest równaniem łuku dynamicznego i ma budowę równania Cassiego [26] z tą jednak zasadniczą różnicą, że parametry Θ oraz P_g nie są stałe (jak to przyjmuje Cassie) lecz zależą od potencjału cieplnego zmieniającego się wraz ze zmianami natężenia prądu. Parametr Θ ma wymiar czasu i dlatego jest on nazywany stałą czasową łuku elektrycznego.

5. WYZNACZANIE PARAMETRÓW Θ I P_g WYŁADOWANIA ŁUKOWEGO PRĄDU PRZEMIENNEGO ORAZ OBLICZANIE PRZEBIEGU PRĄDU I NAPIĘCIA ŁUKU

Rozwiązanie równania łuku dynamicznego w postaci (36) nie stwarza większych trudności. Podstawowa trudność polega natomiast na określeniu parametrów występujących w tym równaniu a należy podkreślić, że wartości tych parametrów w znacznym stopniu wpływają na otrzymane wyniki. Parametry te wyznacza się najczęściej na drodze doświadczalnej, przy czym stosowane metody opierają się na badaniu przebiegu napięcia i prądu łuku w obszarze jego zapłonu, bądź też w obszarze przejścia przez zero [27, 28]. Otrzymane tą drogą wyniki są słuszne jedynie dla ściśle określonych warunków, w których badania były prowadzone.

Zależności analityczne pozwalające obliczyć wartości parametrów Θ i P_g były podane między innymi w pracach [25, 26, 29, 30]. Przy ich wyznaczaniu poczyniono jednakże daleko idące założenia upraszczające. Przyjmuje się na przykład, że temperatura w całym przekroju kolumny łukowej jest stała, a więc stałe są również współczynniki σ , c_p , ϱ i λ . Nie uwzględnia się również niejednorodności warunków cieplnych wzdłuż długości kolumny łukowej. Powoduje to, że obliczone wartości parametrów Θ i P_g odbiegają znacznie od wartości rzeczywistych.

W prezentowanej pracy parametry Θ i P_g wyładowania łukowego wyznaczono analitycznie przy uwzględnieniu rozkładu temperatury w przekroju poprzecznym kolumny łukowej, od którego zależą właściwości gazu σ , λ , ρ i c_p . Ponieważ w komorze wyładowczej plazmotronu występują różnice w warunkach cieplnych wzdłuż odległości międzyelektrodowej, stąd w rozważaniach teoretycznych należało uwzględnić niejednorodność kolumny łukowej wzdłuż jej długości, a także różnice w warunkach zapłonu łuku przy różnej polaryzacji elektrod napięciem przemiennym. Należy również podkreślić, że uwzględniony rozkład temperatury dotyczył nie tylko przestrzeni ale także czasu, którego funkcją jest natężenie prądu przemiennego.

Z równań (35) i (36) wynika, że parametr Θ wyraża się zależnością

$$\Theta = \frac{\int_0^{l_z} \int_0^{r_w} \sum_{m,k} \dot{a}_{Hm,k} \Psi(r, z_z) r dr dz_z}{2 \int_0^{l_z} \int_0^{r_w} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(r, z_z)}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Psi(r, z_z)}{\partial r^2} + \frac{G_s + G_z}{\pi r_w^2} \sum_{m,k} a_{pm,k} \frac{\partial \Psi(r, z_z)}{\partial z_z} + \sum_{m,k} a_{um,k} \Psi(r, z_z) \right] r dr dz_z} \quad (37)$$

W celu obliczenia tego parametru długość łuku podzielono na m przedziałów, natomiast promień na k przedziałów. W ten sposób objętość kolumny łukowej została podzielona na $m \times k$ elementów objętościowych. Podany w rozdziale 3 rozkład potencjału cieplnego $\Psi(r, z_z)$ określa warunki początkowe dla wyładowania prądu przemiennego.

Obliczając całki występujące w wyrażeniu (37) otrzymano

$$S = \int_0^{l_z} \int_0^{r_w} \sum_{m,k} a_{Hm,k} \Psi(r, z_z) r dr dz_z = \sum_m \sum_k a_{Hm,k} \sum_{n=1}^{\infty} B_n K_n \Big|_{l_{m-1}}^{l_m} \frac{r_w}{\gamma_n} r I_1 \left(\frac{\gamma_n}{r_w} r \right) \Big|_{r_{k-1}}^{r_k}, \quad (38)$$

$$Q_1 = \int_0^{l_z} \int_0^{r_w} -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(r, z_z)}{\partial r} r dr dz_z = \sum_m \sum_k \sum_{n=1}^{\infty} B_n K_n \Big|_{l_{m-1}}^{l_m} \frac{1}{\gamma_n^2} I_0 \left(\frac{\gamma_n}{r_w} r \right) \Big|_{r_{k-1}}^{r_k}, \quad (39)$$

$$Q_2 = \int_0^{l_z} \int_0^{r_w} \frac{\partial^2 \Psi(r, z_z)}{\partial r^2} r dr dz_z = \sum_m \sum_k \sum_{n=1}^{\infty} B_n K_n \Big|_{l_{m-1}}^{l_m} \times \\ \times \frac{1}{\gamma_n^2} \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{\gamma_n}{2r_w} r \right)^{2p+2}}{p!(p+1)!(p+1)} - \gamma_n I_1 \left(\frac{\gamma_n}{r_w} r \right) \right] \Big|_{r_{k-1}}^{r_k}, \quad (40)$$

$$Q_3 = \int_0^{l_z} \int_0^{r_w} \sum_{m,k} a_{pm,k} \frac{G_s + G_z}{\pi r_w^2} \frac{\partial \Psi(r, z_z)}{\partial z_z} r dr dz_z = \sum_m \sum_k \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{G_s + G_z}{r_w^2} \times \\ \times a_{pm,k} \exp \left[-\frac{\pi \gamma_n^2 + \pi a_{um,k} r_w^2}{(G_s + G_z) a_{pm,k}} z_z \right] \Big|_{l_{m-1}}^{l_m} \frac{r_w}{\gamma_n} r I_1 \left(\frac{\gamma_n}{r_w} r \right) \Big|_{r_{k-1}}^{r_k}, \quad (41)$$

$$Q_4 = \int_0^{l_z} \int_0^{r_w} \sum_{m,k} a_{um,k} \Psi(r, z_z) r dr dz_z = \sum_m \sum_k a_{um,k} \sum_{n=1}^{\infty} B_n K_n \Big|_{l_{m-1}}^{l_m} \frac{r_w}{\gamma_n} r I_1 \left(\frac{\gamma_n}{r_w} r \right) \Big|_{r_{k-1}}^{r_k}, \quad (42)$$

gdzie

$$K_n = - \frac{(G_s + G_z) a_{pm,k}}{\pi \gamma_n^2 + \pi a_{um,k} r_w^2} \exp \left[- \frac{\pi \gamma_n^2 + \pi a_{um,k} r_w^2}{(G_s + G_z) a_{pm,k}} z_z \right]$$

Wykorzystując podane wyżej oznaczenia wzór (37) można zapisać w postaci

$$\Theta = \frac{1}{2} \frac{S}{Q_1 - Q_2 + Q_3 + Q_4} \quad (43)$$

Jak wynika z równań (35) i (36) parametr P_g określony jest zależnością

$$P_g = \frac{\int_0^{l_z} \int_0^{r_w} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(r, z_z)}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Psi(r, z_z)}{\partial r^2} + \frac{G_s + G_z}{\pi r_w^2} \sum_{m,k} a_{pm,k} \frac{\partial \Psi(r, z_z)}{\partial z_z} + \sum_{m,k} a_{um,k} \Psi(r, z_z) \right] r dr dz_z}{\int_0^{l_z} \int_0^{r_w} \sum_{m,k} a_{om,k} \Psi(r, z_z) r dr dz_z} \quad (44)$$

Występująca w mianowniku wyrażenia (44) całka dana jest wzorem

$$P = \int_0^{l_z} \int_0^{r_w} \sum_{m,k} a_{om,k} \Psi(r, z_z) r dr dz_z = \sum_m \sum_k a_{om,k} \sum_{n=1}^{\infty} B_n K_n \Big|_{l_{m-1}}^{l_m} \frac{r_w}{\gamma_n} r I_1 \left(\frac{\gamma_n}{r_w} r \right) \Big|_{r_{k-1}}^{r_k} \quad (45)$$

Uwzględniając zależność (45) oraz wcześniej obliczone całki Q_1, Q_2, Q_3 i Q_4 wzór na parametr P_g przyjmie postać

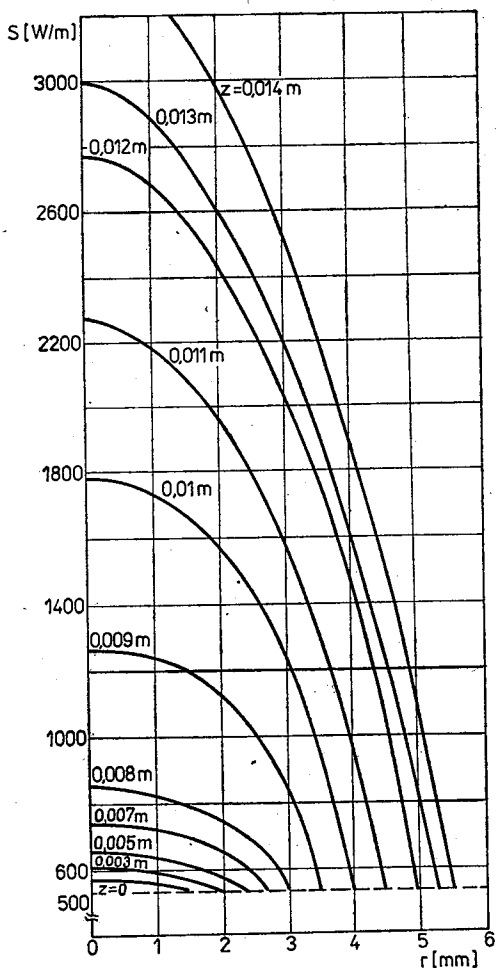
$$P_g = \frac{Q_1 - Q_2 + Q_3 + Q_4}{P} \quad (46)$$

Korzystając z przedstawionych w rozdziale 3 zależności obliczono rozkład potencjału ciepłego w kolumnie łuku prądu stałego palącego się w atmosferze argonu, a następnie rozkład potencjału ciepłego gazu znajdującego się między elektrodami wyładowania prądu przemiennego. Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunkach 2 i 3. Współrzędna z_z jest współrzędną osiową, której początek ($z_z = 0$) pokrywa się z początkiem wyładowania prądu przemiennego i jest oddalony od końca wyładowania prądu stałego o około 0,03 m. Stąd wynikają różnice w wartościach potencjału ciepłego podane na rysunku 2 dla $z = l_s$ oraz na rysunku 3 dla $z_z = 0$.

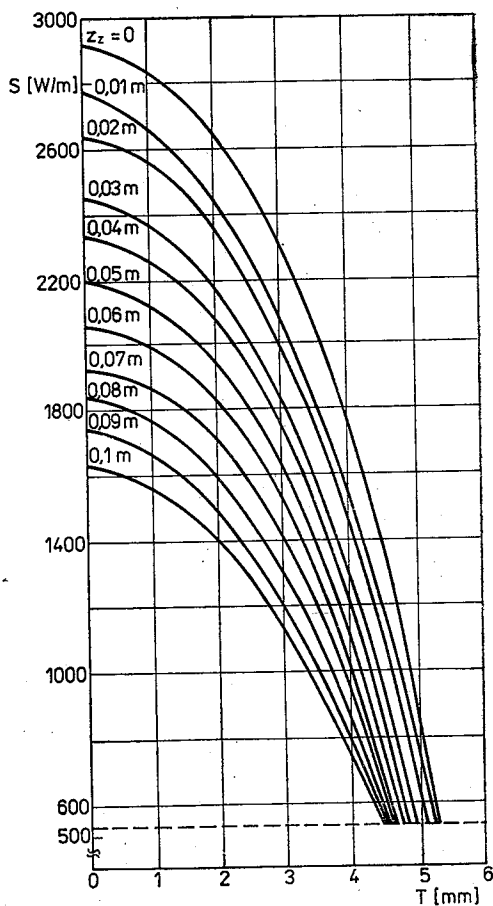
Należy przy tym podkreślić, że obliczenia przeprowadzono przy mniejszym kroku z i r niż wynika to z przedstawionych na rysunkach krzywych. Miało to na celu zapewnienie dostatecznej dokładności przy doborze współczynników a_p , a_u i a_σ szczególnie w obszarze szybko zmieniających się wartości potencjału ciepłego.

Dla podanego na rysunku 3 rozkładu potencjału ciepłego obliczono wartości początkowe parametrów wyładowania łukowego prądu przemiennego, przy polaryzacji elektrod plazmotronu przedstawionej na rysunku 4. Wyniki obliczeń zestawiono w tabelicy 1.

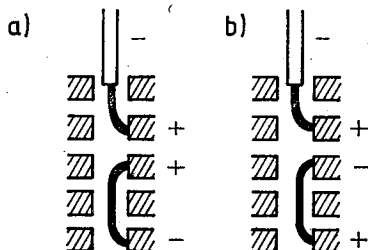
Podane wartości Θ i P_g były weryfikowane doświadczalnie w układzie opisanym w pracy [31], zgodnie z podaną tam metodą określania tych parametrów w oparciu o badania



Rys. 2. Obliczony rozkład potencjału ciepłego w kolumnie łuku prądu stałego dla $I = 86,7$ A, $E_0 = 1928$ V/m, $G_s = 1,65$ g/s, $r_w = 6$ mm, $a = 1,5$ mm, $l_s = 14$ mm



Rys. 3. Rozkład potencjału ciepłego gazu, znajdującego się między elektrodami wyładowania prądu przemiennego, wytworzonego wyładowaniem pomocniczym dla parametrów wyładowania prądu stałego jak na rys. 2 i $G_z = 1,02$ g/s



Rys. 4. Polaryzacja elektrod plazmotronu prądu przemiennego

Tablica 1

Obliczone i pomierzone wartości parametrów wyładowania łukowego dla różnych polaryzacji elektrod plazmotronu

Parametry łuku	Polaryzacja elektrod zgodna z rys. 4a		Polaryzacja elektrod zgodna z rys. 4b	
	obliczone	pomierzone	obliczone	pomierzone
Θ [ms]	0,602	0,57	0,398	0,38
P_g [V ²]	1370,4	1280	1360,8	1308

eksperymentalne. W układzie badawczym wykonano oscylogramy prądu i napięcia w pobliżu przejścia prądu przemiennego przez wartość zerową i na ich podstawie wyznaczono interesujące parametry, przy czym wartość amplitudy prądu przemiennego wynosiła 20 A. Wykonanie badań przy tak małej wartości natężenia prądu miało na celu wyeliminowanie wpływu tego prądu na parametry Θ i P_g określone dla obszaru połukowego. Wyznaczone eksperymentalnie parametry podano w tablicy 1, przy czym są to wartości średnie z 20 pomiarów.

Z danych przedstawionych w tablicy 1 wynika, że w przypadku polaryzacji elektrod przedstawionej na rysunku 4a warunki zapłonu łuku są korzystniejsze niż w przypadku polaryzacji podanej na rysunku 4b. Odpowiada to większej wartości stałej Θ oraz mniejszej wartości parametru P_g .

Porównując obliczone i pomierzone wartości parametrów Θ i P_g można stwierdzić, że różnice wartości obliczonych i pomierzonych odniesione do wartości pomierzonych nie przekraczają 8%. Różnice te są wynikiem dwóch podstawowych faktów:

- złożonej natury zjawisk występujących w wyładowaniu łukowym, zmuszającej do przyjmowania założeń upraszczających,
- losowego charakteru zjawisk mikroskopowych powodującego, że również wielkości makroskopowe takie jak konduktancja, prąd, napięcie mają charakter losowy.

Uwzględnienie powyższych faktów pozwala uznać otrzymaną dokładność za wystarczającą, a metodę przydatną do obliczeń praktycznych.

Przepływający przez kolumnę łukową prąd przemienny powoduje wzrost temperatury gazu znajdującego się w jej obszarze i zmianę parametrów Θ i P_g wyładowania łukowego. W celu obliczenia konduktacji kolumny łukowej rozwiązywano równanie łuku dynamicznego w postaci (36) przy początkowych wartościach parametrów wyładowania łukowego wyznaczonych ze wzorów (43) i (46). Następnie dla małej wartości prądu obliczono konduktancję łuku oraz natężenie pola elektrycznego korzystając ze związku

$$E_z = \frac{i}{gl_z}. \quad (47)$$

Rozkład przestrzenny potencjału cieplnego w kolumnie łukowej prądu przemiennego opisany jest funkcją w postaci

$$S_l(r, z_z) = \exp \left[\frac{\pi r_w^2 a_{sm,k} E_z^2}{(G_s + G_z) a_{pm,k}} z_z - \frac{\pi r_w^2 a_{um,k}}{(G_s + G_z) a_{pm,k}} z_z \right] \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp \left[- \frac{\pi \gamma_n^2}{(G_s + G_z) a_{pm,k}} z_z \right] I_0 \left(\frac{\gamma_n}{r_w} r \right). \quad (48)$$

Dla wyznaczenia współczynników C_n skorzystano z warunku brzegowego, a mianowicie

$$S_l(r, 0) = \Psi(r, z_z = 0), \quad (49)$$

który oznacza, że potencjał cieplny w kolumnie łuku prądu przemiennego dla $z_z = 0$ jest równy potencjałowi cieplnemu wytworzonymu przez wyładowanie prądu stałego.

Z warunku (49) wynika

$$C_n = B_n \exp \left[- \frac{\pi r_w^2 a_{um,k} + \pi \gamma_n^2}{(G_s + G_z) a_{pm,k}} z_{p0} \right], \quad (50)$$

gdzie: z_{p0} — odległość początku wyładowania prądu przemiennego od końca kolumny łuku prądu stałego.

Parametry wyładowania łukowego, odpowiadające rozkładowi potencjału cieplnego opisanego wyrażeniem (48) wyznaczono ze wzorów

$$\Theta = \frac{1}{2} \frac{R}{V_1 - V_2 + V_3 + V_4}, \quad (51) \quad P_g = \frac{V_1 - V_2 - V_3 - V_4}{Y}, \quad (52)$$

gdzie:

$$R = \int_0^{l_z} \int_0^{r_w} \sum_{m,k} a_{Hm,k} S_l(r, z_z) r dr dz_z = \sum_m \sum_k a_{Hm,k} \sum_{n=1}^{\infty} B_n P_n \left| \frac{r_w}{\gamma_n} r I_1 \left(\frac{\gamma_n}{r_w} r \right) \right|_{l_{m-1}}^{l_m} \Big|_{r_{k-1}}^{r_k}, \quad (53)$$

$$V_1 = \int_0^{l_z} \int_0^{r_w} - \frac{1}{r} \frac{\partial S_l(r, z_z)}{\partial r} r dr dz_z = \sum_m \sum_k \sum_{n=1}^{\infty} B_n P_n \left| \frac{1}{\gamma_n^2} I_0 \left(\frac{\gamma_n}{r_w} r \right) \right|_{l_{m-1}}^{l_m} \Big|_{r_{k-1}}^{r_k}, \quad (54)$$

$$V_2 = \int_0^{l_z} \int_0^{r_w} \frac{\partial^2 S(r, z_z)}{\partial r^2} r dr dz_z = \sum_m \sum_k \sum_{n=1}^{\infty} B_n P_n \left| \frac{1}{\gamma_n^2} I_0 \left(\frac{\gamma_n}{r_w} r \right) \right|_{l_{m-1}}^{l_m} \times \\ \times \frac{1}{\gamma_n^2} \left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{\gamma_n}{2r_w} r \right)^{2p+2}}{p!(p+1)!(p+1)} - \gamma_n I_1 \left(\frac{\gamma_n}{r_w} r \right) \right] \Big|_{l_{m-1}}^{l_m} \Big|_{r_{k-1}}^{r_k}, \quad (55)$$

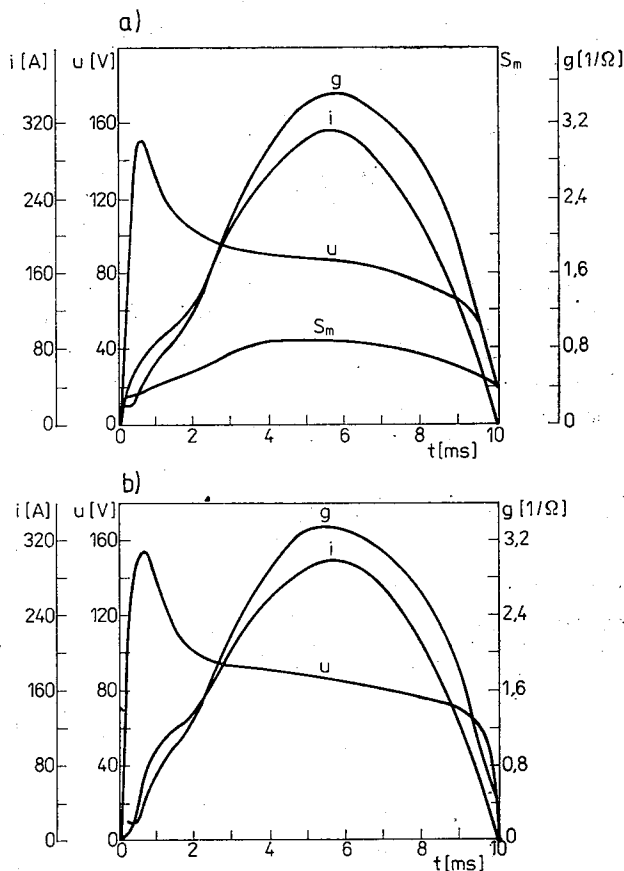
$$V_3 = \int_0^{l_z} \int_0^{r_w} \sum_{m,k} \frac{G_s + G_z}{\pi r_w^2} a_{pm,k} \frac{\partial S_l(r, z_z)}{\partial z_z} r dr dz_z = \sum_m \sum_k \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{G_s + G_z}{r_w^2} a_{pm,k} \times \\ \times \exp \left[- \frac{\pi \gamma_n^2 + \pi r_w^2 a_{um,k} - \pi r_w^2 a_{sm,k} E_z^2}{(G_s + G_z) a_{pm,k}} z_z \right] \left| \frac{r_w}{\gamma_n} r I_1 \left(\frac{\gamma_n}{r_w} r \right) \right|_{l_{m-1}}^{l_m} \Big|_{r_{k-1}}^{r_k} \quad (56)$$

$$V_4 = \int_0^{l_z} \int_0^{r_w} \sum_{m,k} a_{um,k} S_l(r, z_z) r dr dz_z = \sum_m \sum_k a_{um,k} \sum_{n=1}^{\infty} B_n P_n \left|_{l_{m-1}}^{l_m} \frac{r_w}{\gamma_n} r I_1 \left(\frac{\gamma_n}{r_w} r \right) \right|_{r_{k-1}}^{r_k}, \quad (57)$$

$$Y = \int_0^{l_z} \int_0^{r_w} \sum_{m,k} a_{\sigma m,k} S_l(r, z_z) r dr dz_z = \sum_m \sum_k a_{\sigma m,k} \sum_{n=1}^{\infty} B_n P_n \left|_{l_{m-1}}^{l_m} \frac{r_w}{\gamma_n} r I_1 \left(\frac{\gamma_n}{r_w} r \right) \right|_{r_{k-1}}^{r_k}, \quad (58)$$

$$P_n = - \frac{(G_s + G_z) a_{pm,k}}{\pi \gamma_n^2 + \pi r_w^2 a_{um,k} - \pi r_w^2 a_{\sigma m,k} E_z^2} \exp \left[- \frac{\pi \gamma_n^2 + \pi r_w^2 a_{um,k} - \pi r_w^2 a_{\sigma m,k} E_z^2}{(G_s + G_z) a_{pm,k}} z_z \right].$$

Dalsze obliczenia prowadzono zwiększając natężenie prądu o wartość Δi , a następnie wyznaczono konduktancję, natężenie pola elektrycznego, rozkład potencjału cieplnego i parametry wyładowania łukowego. Taki sposób prowadzenia obliczeń umożliwił uwzględnienie zależności parametrów wyładowania łukowego od natężenia prądu.



Rys. 5. Przebiegi amplitudy potencjału cieplnego S_m , napięcia u , prądu i oraz konduktancji g w obszarze wyładowania łukowego przy $E_m = 332$ V, $L = 1,45$ mH, $R = 0,33$ Ω , $I = 120$ A, $G_s = 1,65$ g/s, $G_z = 0,8$ g/s, a) przebiegi obliczone, b) przebiegi eksperymentalne

Korzystając z podanych zależności analitycznych przeprowadzono obliczenia konduktancji oraz napięcia łuku. Ponieważ w obwodach zasilających plazmotrony przebieg prądu zależy nie tylko od parametrów obwodu, ale także od parametrów łuku elektrycznego, stąd też obliczenia przeprowadzono rozwiązując układ równań w postaci

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{1}{2\Theta} g + \frac{i^2}{2\Theta P_g g} \quad (59)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{E_m}{L} \sin(\omega t + \varphi) - \frac{R}{L} i - \frac{i}{gL}, \quad (60)$$

gdzie: E_m — amplituda napięcia zasilającego, L — indukcyjność obwodu, R — rezystancja obwodu, φ — przesunięcie fazowe między prądem i napięciem zasilającym.

Przebiegi napięcia, prądu oraz konduktancji łuku przedstawiono na rysunku 5, przy czym na rysunku 5a podano przebiegi obliczone, natomiast na rysunku 5b przebiegi eksperymentalne, otrzymane dla tych samych warunków to znaczy jednakowych wartości natężenia prądu łuku pomocniczego, wydatku gazu stabilizującego wyładowanie pomocnicze i wyładowanie główne oraz parametrów obwodu zasilającego.

Mimo pewnych różnic występujących między wartościami obliczonymi i pomierzonymi należy uznać dużą dokładność metody obliczeniowej, biorąc pod uwagę złożoność procesów występujących w wyładowaniu łukowym.

PODSUMOWANIE

Przedstawiony model łuku elektrycznego, stabilizowanego strumieniem gazu uwzględnia specyficzne warunki występujące w komorze wyładowczej plazmotronu jednofazowego tzn. stabilizację łuku elektrycznego oraz metodę zapewnienia nieprzerwanego palenia się łuku poprzez dogrzewanie gazu w przestrzeni międzyelektrodowej wyładowaniem pomocniczym prądu stałego.

Podano równanie łuku dynamicznego (równanie (36)) słuszne dla łuku, w którym dominują procesy cieplne. Parametry wyładowania łukowego, występujące w tym równaniu wyznaczano analitycznie przy uwzględnieniu nieliniowej zależności właściwości gazu od przestrzennego rozkładu temperatury w kolumnie łukowej, zmieniającego się wraz ze zmianami prądu przemiennego.

Równania łuku dynamicznego i obwodu były następnie rozwiązywane, co pozwoliło wyznaczyć przebieg prądu, konduktancji oraz napięcia łuku. Przebiegi te jak również obliczone wartości parametrów wyładowania łukowego poddano weryfikacji doświadczalnej. Weryfikacja ta wykazała, że przedstawiony model łuku elektrycznego poprawnie opisuje zarówno w sensie jakościowym jak i ilościowym zjawiska makroskopowe występujące w łuku elektrycznym.

BIBLIOGRAFIA

1. A. S. Korotiejew i inni: *Генераторы низкотемпературной плазмы*. Izd. Nauka, 1969
2. M. F. Żukow, W. J. Smoliakov, B. A. Uriukow: *Elektrodogowyje nagriewatieli (plazmotrony)*. Izd. Nauka, 1973

3. M. F. Żukow, A. S. Korot'ejew, B. A. Uriukow: *Prikladnaja dinamika termicznej plazmy*. Izd. Nauka. Nowosybirsk, 1975
4. *Mat. VII Wsjesojuz. Konf. po Gienieratoram Nizkotiemperturnoj Plazmy*. Alma-Ata 1977
5. *Mat. VIII Wsjesojuz. Konf. po Gienieratoram Niskotiemperturnoj Plazmy*. Nowosybirsk 1980
6. W. S. Engelszt: *Matematiczeskoje modelirovanije elektricznej dugi*. Frunze: Ilim, 1983
7. M. F. Żukow, A. S. Korot'ejew: *Teorija termicznej elektrodugowej plazmy*. Izd. Nauka, Nowosybirsk, 1987
8. S. M. Krizanskij: *Teoreticzeskaja model dugi pieriemennogo toka w prodolnym potokie gaza*. Elektrizestwo, 1975, Nr 6
9. H. A. Stine, V. R. Watson: *The theoretical enthalpy distribution of steady flow along the axis of a direct current electric arc*. NASA TN, D-1331, 1962
10. E. M. Esibyan: *Plasma-arc equipment*. Moscow: Mir Publishers, 1973
11. Patent nr 7900328, Francja, 1979
12. Patent nr 3024350, U.S.A., 1962
13. Patent nr 1469629, Francja, 1967
14. Patent nr 1472761, Francja, 1969
15. Patent nr 135746, Polska, 1985
16. J. Bukowski: *Mechanika płynów*. Warszawa: PWN 1968
17. O. W. Andriejewa, M. E. Zarudi, I. A. Zibier: *Swojstwa gazow pri wysokich tiemperturach*. Moskwa. Izd. Eniergija, 1969
18. R. S. Devoto: *Transport coefficients of ionized argon*. The Physics of Fluids. 1973, vol. 16, No 5
19. W. E. Jonin, A. P. Matycin, W. S. Popienko: *Issledowanie parametrow elektricznej dugi w argonie*. Swarocznoje proizwodstwo. 1967, Nr 8
20. J. Kopainsky: *Strahlungstransportmechanismus und Transportkoeffizienten im Ar-Hochdruckbogen*. Z. Physik. 1971, No 248
21. J. Kopainsky: *Messungen am Ar-Hochdruckbogen*. Z. Physik 1971, No 248
22. K. S. W. Champion: *The energy balance equation for the positive columns of high pressure arcs*. Proc. Phys. Soc., 1953, vol. BL XVI
23. J. J. Lowke, C. H. Ludwig: *A simple model for high-current arcs stabilized by forced convection*. J. Appl. Phys., 1970, No 46
24. J. J. Lowke, R. J. Zollweg, R. W. Liebermann: *Theoretical description of a. c. arcs in mercury and argon*. J. of Appl. Phys., 1975, vol. 46, No 2
25. O. Mayr: *Beitrage zur Theorie des statischen und dynamischen Lichtbogens*. Archiv. f. Elektrotechnik. 1943, Bd. 37
26. A. M. Cassie: *Arc Rupture and Circuit Severity*. CIGRE 1939, Rep. No 102
27. R. Amsinck: *Verfahren zur Ermittlung der des Ausschaltverhalten bestimmenden Lichtbogenkenngrößen*. ETZ-a, 1977, Bd. 98, H. 8
28. K. Zuckler: *Untersuchungen zum dynamischen Verhalten von Schalterlichtbögen*. ETZ-a, 1978, Bd. 99, H. 9
29. H. Ambrosch, B. Oswald: *Mehrstufiges Ausschalten von 400 kV Kompensationsdrosselspulen*. Mat. V Inter. Symp. Switching Arc Phenomena. Łódź 1985
30. W. Hermann, K. Ragaller: *Theoretical description of the current interruption in HV gas blast breakers*. IEEE Trans. 1977, vol. PAS 96
31. A. Kamińska-Pranke: *Analiza warunków palenia się łuku elektrycznego w jednofazowym palniku łukowo-plazmowym prądu przemiennego*. Praca doktorska. Poznań 1982

A. KAMIŃSKA-PRANKE

MATHEMATICAL MODEL OF AN ELECTRIC ARC IN A PLASMATRON WITH A VORTEX GAS STABILIZATION

Summary

A model of a gas stabilized A. C. electric arc is presented. The basic parameters of the model are described by means of analytic formulae, assuming a non-linear dependence of the characteristics of

plasma-generating gas on the spatio-temporal distribution of the thermal potential. An analysis of the adequacy of the model and of analytical dependences based on a detailed experimental verification, is given.

A. KAMIŃSKA-PRANKE

MODÈLE MATHÉMATIQUE D'UN ARC ÉLECTRIQUE STABILISÉ D'UN VORTEX DANS DU COURANT ALTERNATIF

Résumé

Dans le travail on a présenté le modèle de l'arc électrique du courant alternatif stabilisé d'un flux de gaz. Les paramètres de ce modèle sont déterminés par les expressions analytiques, qui tiennent compte de la relation non-linéaire entre les propriétés du gaz et la répartition du potentiel thermique. Le modèle obtenu et les expressions analytiques ont été soumis à une vérification expérimentale qui a prouvé leur justesse.

A. KAMIŃSKA-PRANKE

MATHEMATISCHES MODELL EINES DURCH GASSTROMWIRBEL IM WECHSELSTROMPLASMATRON STABILISIERTEN LICHTBOGENS

Zusammenfassung

In der Bearbeitung wird ein gasstromstabilisiertes Wechselstromlichtbogenmodell dargestellt. Die Hauptparameter dieses Modells werden durch analytische Ausdrücke beschrieben, die die nichtlineare Abhängigkeit der Plasmatröngaseigenschaften von zeit-räumlicher Wärmepotentialverteilung berücksichtigen. Das Modell ist experimentell untersucht worden, wobei seine Richtigkeit bestätigt wurde.

A. КАМИНЬСКА-ПРАНКЕ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ СТАБИЛИЗИРОВАННОЙ ВИХРЕВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА В ПЛАЗМОТРОНЕ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Резюме

Представлена модель электрической дуги переменного тока стабилизированной потоком газа. Основные параметры модели описаны аналитическими выражениями, учитывающими нелинейную зависимость свойств плазмообразующего газа от пространственно-временного распределения теплового потенциала. Приведена оценка точности методов и аналитических зависимостей на основе экспериментальных исследований.

Przebiegi napięć i prądów w obwodzie zasilania plazmotronu prądu przemiennego

ANIELA KAMIŃSKA-PRANKE

Instytut Elektroenergetyki, Politechnika Poznańska

Otrzymano 1987.08.15

Autoryzowano do druku 1988.08.18

Przedstawiono dwie metody obliczania napięć i prądów w obwodzie zasilającym plazmotron, w obszarze przejścia prądu przemiennego przez zero. Jedna z nich polega na rozwiązywaniu równania łuku dynamicznego i równania obwodu, przy czym parametry łuku są funkcjami zmieniającego się w czasie rozkładu potencjału cieplnego. Druga z metod opiera się na założeniu, że konduktancja połukowa maleje wykładniczo, a jej przebieg dany jest zależnością wyznaczoną empirycznie. Przedstawione metody poddano weryfikacji doświadczalnej, która potwierdziła ich słusność.

1. WPROWADZENIE

Obecność łuku w obwodzie elektrycznym wywołuje odkształcenie przebiegu prądu od przebiegu sinusoidalnego. W przedziale zmian prądu można przy tym wyróżnić dwa podstawowe obszary, a mianowicie: obszar wyładowania łukowego i obszar połukowy.

Przyjęto, że obszar połukowy jest to przedział liczony od chwili zgaśnięcia łuku do chwili jego ponownego zapłonu, występujący w otoczeniu przejścia prądu przemiennego przez wartość zerową. W obszarze tym rezystancja łuku gwałtownie wzrasta, w wyniku czego występuje silne odkształcenie prądu od przebiegu sinusoidalnego. W obszarze wyładowania łukowego przebieg prądu jest zbliżony do przebiegu sinusoidalnego a napięcie łuku ma w przybliżeniu wartość stałą.

Obszarowi połukowemu przypisano pojęcie przejściowego napięcia międzyelektrodowego (w skrócie zwanego napięciem międzyelektrodowym) natomiast obszarowi wyładowania — pojęcie napięcia łuku. Takie rozróżnienie wynika z faktu, że w obszarze wyładowania łukowego napięcie mierzone na elektrodach plazmotronu zależy od procesów zachodzących w łuku elektrycznym. Napięcie mierzone na elektrodach w obszarze połukowym jest wynikiem stanu nieustalonego wywołanego gwałtownym zmniejszeniem prądu płynącego w obwodzie i zależy nie tylko od parametrów wyładowania łukowego, ale przede wszystkim od parametrów obwodu. W terminologii stosowanej w dziedzinie łuku łączeniowego odpowiada ono w pewnym przybliżeniu napięciu powrotnemu.

W badaniach łuku łączeniowego wiele uwagi poświęca się wyznaczaniu napięć powrotnych przy założeniu o pomijalnym wpływie na ich przebieg łuku elektrycznego [1-9]. Przy czym należy podkreślić, że w odniesieniu do układu, w którym pracuje łącznik

założenie to jest najczęściej słuszne. Natomiast w układach zasilających plazmotrony, łuk elektryczny w znaczący sposób wpływa na przebieg napięcia międzyelektrodowego.

Przedstawione w pracy rozważania dotyczą przebiegów prądu i napięcia w obszarze połukowym. Podano metody obliczania napięć i prądów uwzględniające łuk elektryczny jako element nieliniowy obwodu. Wyniki obliczeń porównano z wynikami badań eksperymentalnych. Praca zawiera również omówienie przebiegów napięć i prądów występujących w układach rzeczywistych oraz wnioski praktyczne dla projektowania układów zasilających plazmotrony.

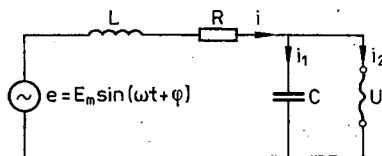
2. WYZNACZANIE PRZEBIEGU NAPIĘCIA MIĘDZYELEKTRODOWEGO ORAZ PRĄDU POŁUKOWEGO NA PODSTAWIE RÓWNANIA ŁUKU DYNAMICZNEGO I RÓWNANIA OBWODU

Równanie łuku dynamicznego, palącego się w jednofazowym plazmotronie prądu przemiennego podano w pracy [10]. Równanie to dla kolumny łukowej, w której dominują procesy cieplne ma postać

$$\frac{1}{g} \frac{dg}{dt} = \frac{1}{(1+k)\Theta} \left(\frac{i^2}{P_g g^{1+k}} - 1 \right), \quad (1)$$

gdzie: g — konduktancja kolumny łukowej, i — natężenie prądu, Θ — stała czasowa łuku elektrycznego, P_g — parametr charakteryzujący moc oddawaną z kolumny łukowej, k — współczynnik zależny od konduktancji plazmy łuku.

Zwróćmy uwagę, że równanie (1) dla $k = 0$, ma budowę równania Mayra, natomiast dla $k = 1$ równania Cassiego z tą jednak zasadniczą różnicą, że parametr Θ we wzorach Mayra i Cassiego ma wartość stałą w całym zakresie zmian prądu przemiennego. Również parametr P_g w tych wzorach ma wartość stałą i wyraża moc łuku w pobliżu wartości maksymalnej prądu. Parametry Θ i P_g występujące w równaniu (1) są natomiast wyznaczone w zależności od wartości chwilowej prądu przemiennego, od której zależy przestrzenny rozkład temperatury w kolumnie łukowej.



Rys. 1. Schemat zastępczy obwodu do obliczeń przebiegu napięcia międzyelektrodowego i prądu połukowego

Schemat zastępczy obwodu zasilającego plazmotron jednofazowy przedstawiono na rys. 1. Jeśli w tym obwodzie $L \approx 0$ i $C \approx 0$, to obwód zasilający ma charakter rezystancyjny i słuszne jest wówczas równanie

$$E_m \sin(\omega t + \varphi) = Ri + u_p \quad (2)$$

gdzie: E_m — amplituda napięcia zasilającego, u_p — napięcie międzyelektrodowe, ω — pulsacja napięcia zasilającego.

Przesunięcie fazowe φ określa kąt charakteryzujący wcześniejsze przejście prądu przez zero w obwodzie z łukiem elektrycznym w porównaniu z naturalnym przejściem prądu przez zero. Przesunięcie to zależy od w przybliżeniu stałej wartości napięcia łuku U_{ls} w pobliżu maksymalnej wartości prądu i jest określone zależnością [11]

$$\varphi = \arcsin U_{ls}/E_m. \quad (3)$$

Uwzględniając związek $u_p = i/g$, z równania (2) wynika

$$i = \frac{E_m \sin(\omega t + \varphi)}{R + 1/g}. \quad (4)$$

Podstawiając wyrażenie (4) do równania (1) otrzymano

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{1}{(1+k)\Theta} g + \frac{1}{(1+k)\Theta} \frac{E_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi)}{P_g(Rg+1)^2} g^{2-k} \quad (5)$$

Równanie (5) było rozwiązywane metodą przybliżoną Rungego-Kutty przy warunku początkowym

$$g|_{t=0} = g_0 \quad (6)$$

przy czym g_0 jak również parametry wyładowania łukowego Θ i P_g wyznaczono korzystając z metody opisanej w pracy [12], dla czasu $t = 0$, przyjętego jako czas, w którym prąd przemienny przechodzi przez wartość zerową. Również napięcie łuku U_{ls} wyznaczono analitycznie korzystając z zależności podanych w wyżej wymienionej pracy.

Dla obwodu rezystancyjno-indukcyjnego, tzn. obwodu przedstawionego na rys. 1, w którym $C \approx 0$, przebieg prądu oraz konduktancji wyznaczono rozwiązując układ równań

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= -\frac{1}{(1+k)\Theta} g + \frac{i^2}{(1+k)\Theta P_g} g^{-k} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{E_m}{L} \sin(\omega t + \varphi) - \frac{R}{L} i - \frac{i}{gL}, \end{aligned} \quad (7)$$

przy warunkach początkowych

$$g|_{t=0} = g_0, \quad i|_{t=0} = 0. \quad (8)$$

Obliczenia prowadzono metodą przybliżoną Rungego-Kutty.

Występujące w obwodzie rezystancyjno-indukcyjnym z łukiem elektrycznym przesunięcie fazowe między prądem i napięciem zasilającym wyznaczono korzystając z równania [11]:

$$\begin{aligned} \frac{E_m^2}{R^2 + (\omega L)^2} \sin^2 \varphi + \frac{2E_m U_{ls}}{R^2 + (\omega L)^2} \frac{1 - \exp\left(-\frac{\pi R}{\omega L}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{\pi R}{\omega L}\right)} \sin \varphi + \frac{U_{ls}^2}{R^2} \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{\pi R}{\omega L}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{\pi R}{\omega L}\right)} \right]^2 - \\ - \left[\frac{E_m \omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right]^2 = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

3. METODA UPROSZCZONA OBLICZANIA PRZEBIEGU NAPIĘCIA MIĘDZYELEKTRODOWEGO

Rozważania teoretyczne oraz badania eksperymentalne wykazały [11], że przy dużych stałych czasowych łuku elektrycznego oraz stosunkowo niskich napięciach zasilających (rzędu setek voltów), konduktancja kolumny połukowej, w której mogą wystąpić zapłony termiczne, zmienia się w przybliżeniu zgodnie z zależnością

$$g = g_0 \exp \left[- \frac{t}{(1+k)\Theta} \right], \quad (10)$$

gdzie: g_0 — wartość konduktancji dla czasu $t = 0$, przyjmowanego jako czas gaśnięcia łuku.

Korzystając z zależności (10) i równania obwodu można wyznaczyć przebieg prądu oraz napięcia międzyelektrodowego.

W obwodzie zasilającym indukcyjnym czas, liczony od chwili zgaśnięcia do chwili zapłonu łuku, jest bardzo krótki (rzędu ułamka milisekundy). Można zatem przyjąć, że wartość napięcia zasilającego jest stała w czasie wystąpienia przejściowego napięcia międzyelektrodowego. Równanie obwodu indukcyjnego z łukiem elektrycznym ma wówczas postać następującą

$$E_\varphi = L \frac{di}{dt} + u_p, \quad (11)$$

gdzie: E_φ — wartość napięcia źródła zasilającego w chwili gaszenia łuku, u_p — przejściowe napięcie międzyelektrodowe.

Napięcie międzyelektrodowe jest związane z prądem i konduktancją połukową zależnością

$$u_p = \frac{i}{g} = \frac{1}{g_0} \exp \left(\frac{t}{T} \right) i, \quad \text{w której: } T = (1+k)\Theta. \quad (12)$$

Wprowadzając wyrażenie (12) do równania (11) otrzymano

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{g_0 L} \exp \left(\frac{t}{T} \right) i = \frac{E_\varphi}{L}. \quad (13)$$

Rozwiązaniem równania (13) jest funkcja

$$i = \exp \left[- \frac{T}{g_0 L} \exp \left(\frac{t}{T} \right) \right] \left\{ \frac{E_\varphi}{L} \int \exp \left[\frac{T}{g_0 L} \exp \left(\frac{t}{T} \right) \right] dt + C \right\}. \quad (14)$$

W celu obliczenia całki występującej w wyrażeniu (14) wprowadzono nową zmienną z w postaci

$$z = \frac{T}{g_0 L} \exp \left(\frac{t}{T} \right). \quad (15)$$

Różniczkując wyrażenie (15) otrzymano

$$\frac{1}{g_0 L} \exp \left(\frac{t}{T} \right) dt = dz, \quad \text{a stąd } dt = T \frac{dz}{z}. \quad (16)$$

Po wprowadzeniu nowej zmiennej i jej pochodnej do funkcji (14) oraz obliczeniu całki, przebieg prądu opisany będzie zależnością:

$$i = \exp(-z) \left(\frac{E_\varphi}{L} T \int \frac{\exp z}{z} dz + C \right) = \\ = \exp(-z) \left[\frac{E_\varphi}{L} T \left(\ln z + \frac{z}{1 \cdot 1!} + \frac{z^2}{2 \cdot 2!} + \frac{z^3}{3 \cdot 3!} + \dots \right) + C \right]. \quad (17)$$

Dla czasu $t = 0$ napięcie międzyelektrodowe jest równe napięciu gaśnięcia łuku u_g a stąd wynika, że $i = -i_0 = -u_g g_0$. Stała całkowania występująca w równaniu (17) wynosi zatem

$$C = -u_g g_0 \exp \left(\frac{T}{g_0 L} \right) - \frac{E_\varphi}{L} T \left[\ln \frac{T}{g_0 L} + \frac{T}{g_0 L} + \frac{1}{2 \cdot 2!} \left(\frac{T}{g_0 L} \right)^2 + \frac{1}{3 \cdot 3!} \left(\frac{T}{g_0 L} \right)^3 + \dots \right]. \quad (18)$$

Ostatecznie przebieg prądu połukowego opisany jest funkcją w postaci

$$i = \exp \left[-\frac{T}{g_0 L} \exp \left(\frac{t}{T} \right) \right] \left\{ \frac{E_\varphi}{L} t - u_g g_0 \exp \left(\frac{T}{g_0 L} \right) + \frac{E_\varphi T}{L} \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot k!} \left(\frac{T}{g_0 L} \right)^k \left[\exp \left(\frac{k \cdot t}{T} \right) - 1 \right] \right\}. \quad (19)$$

Prześciowe napięcie międzyelektrodowe można wyznaczyć ze wzoru (12) wykorzystując zależność (19).

Obwód rezystancyjno-indukcyjny z łukiem elektrycznym opisuje równanie

$$E_\varphi = L \frac{di}{dt} + Ri + u_p. \quad (20)$$

Wyrażając napięcie międzyelektrodowe za pomocą prądu oraz konduktancji otrzymano

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i + \frac{1}{g_0 L} \exp \left(\frac{t}{T} \right) i = \frac{E_\varphi}{L}. \quad (21)$$

Rozwiązaniem równania (21) jest funkcja

$$i = \exp \left[-\frac{R}{L} t - \frac{T}{g_0 L} \exp \left(\frac{t}{T} \right) \right] \left\{ \int \frac{E_\varphi}{L} \exp \left[\frac{R}{L} t + \frac{T}{g_0 L} \exp \left(\frac{t}{T} \right) \right] dt + C \right\}. \quad (22)$$

Dla obliczenia całki występującej w wyrażeniu (22) wprowadzono zmienną z określoną wzorem (15). Logarytmując tą zmienną otrzymano

$$\ln \frac{g_0 L}{T} + \ln z = \frac{t}{T} \quad (23)$$

stąd

$$t = T \ln \frac{g_0 L}{T} + T \ln z. \quad (24)$$

Uwzględniając wzory (15), (16) oraz (24), zależność (22) zapisano w postaci

$$i = \exp \left[-\frac{R}{L} t - \frac{T}{g_0 L} \exp \left(\frac{t}{T} \right) \right] \left\{ \int \frac{E_\varphi}{L} \exp \left(-\frac{TR}{L} \ln \frac{g_0 L}{T} \right) \times \right. \\ \times \exp \left(-\frac{TR}{L} \ln z \right) \exp z T \frac{dz}{z} + C \Big\} = \exp \left[-\frac{R}{L} t - \frac{T}{g_0 L} \exp \left(\frac{t}{T} \right) \right] \times \\ \times \left[\frac{E_\varphi}{L} T \left(\frac{g_0 L}{T} \right)^{\frac{TR}{L}} \int z^{\frac{TR}{L}-1} \exp z dz + C \right]. \quad (25)$$

Ponieważ $T \cdot R/L < 1$, stąd całka występująca w wyrażeniu (25) będzie

$$F(z) = \int_z \frac{\exp z}{1 - \frac{TR}{L}} dz = -\frac{L}{TR} \exp z \times \\ \times \left[\frac{z^{\frac{TR}{L}}}{1} + \frac{z^{\frac{TR}{L}+1}}{-\frac{TR}{L}-1} + \frac{z^{\frac{TR}{L}+2}}{\left(-\frac{TR}{L}-1\right)\left(-\frac{TR}{L}-2\right)} + \dots \right]. \quad (26)$$

Funkcję (26) można zapisać w postaci szeregu

$$F(z) = \exp z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-z^{\frac{TR}{L}+k}}{\prod_{n=0}^k \left(-\frac{TR}{L} - n \right)}. \quad (27)$$

Dla czasu $t = 0$, funkcja (27) przyjmuje postać

$$F(0) = \exp \frac{T}{g_0 L} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-\left(\frac{T}{g_0 L} \right)^{\frac{TR}{L}+k}}{\prod_{n=0}^k \left(-\frac{TR}{L} - n \right)}. \quad (28)$$

Uwzględniając zależności (27) i (28) oraz warunek początkowy, że dla $t = 0$, $i = -i_0 = -u_g g_0$ otrzymano wyrażenie opisujące przebieg prądu w postaci

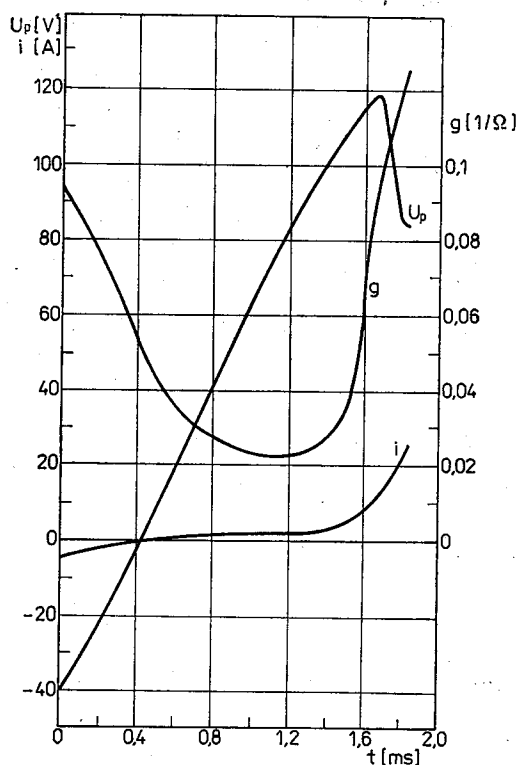
$$i = \exp \left[-\frac{R}{L} t - \frac{T}{g_0 L} \exp \left(\frac{t}{T} \right) \right] \left\{ \frac{E_\varphi}{R} \left(\frac{g_0 L}{T} \right)^{\frac{TR}{L}} [F(z) - F(0)] - \right. \\ \left. - u_g \cdot g_0 \exp \left(\frac{T}{g_0 L} \right) \right\}. \quad (29)$$

Przebieg napięcia międzyelektrodowego można wyznaczyć z zależności (12) przy wykorzystaniu równania (29).

4. PRZEBIEGI NAPIĘĆ MIĘDZYELEKTRODOWYCH I PRĄDÓW POŁUKOWYCH W OBWODACH ZASILAJĄCYCH PLAZMOTRONY JEDNOFAZOWE

Przedstawione metody obliczania przebiegów napięć i prądów, uwzględniające łuk elektryczny jako jeden z elementów obwodu, odpowiadają rzeczywistym warunkom układu zasilającego plazmotron. Powstaje zatem pytanie, z jaką dokładnością podane metody opisują przebiegi napięć i prądów. Aby odpowiedzieć na to pytanie przeprowadzono obliczenia interesujących przebiegów dla warunków, jakie można było realizować na stanowisku laboratoryjnym opisanym w pracy [11]. Umożliwiało to porównanie otrzymanych rezultatów obliczeń z wynikami eksperymentalnymi. Oprócz weryfikacji doświadczalnej badania teoretyczne oraz eksperymentalne miały również cel praktyczny. Jest nim mianowicie uzyskanie informacji koniecznych dla projektowania przemysłowych układów zasilających plazmotrony jednofazowe, a dotyczących zachowania się łuku elektrycznego w obwodzie zasilającym o charakterze rezystancyjnym, rezystancyjno-indukcyjnym i indukcyjnym.

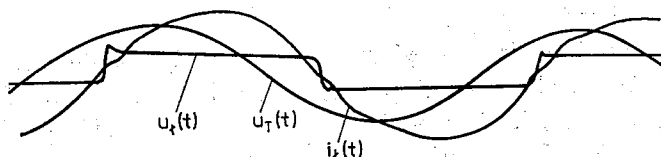
Obliczone przebiegi napięcia międzyelektrodowego u_p , prądu połukowego i oraz konduktancji g w obwodzie rezystancyjnym przedstawiono na rysunku 2. W chwili gaśnięcia łuku wartości napięcia oraz prądu połukowego zależą od warunków panujących w obszarze jego palenia się. Początkowo zmniejszeniu prądu towarzyszy wzrost napięcia



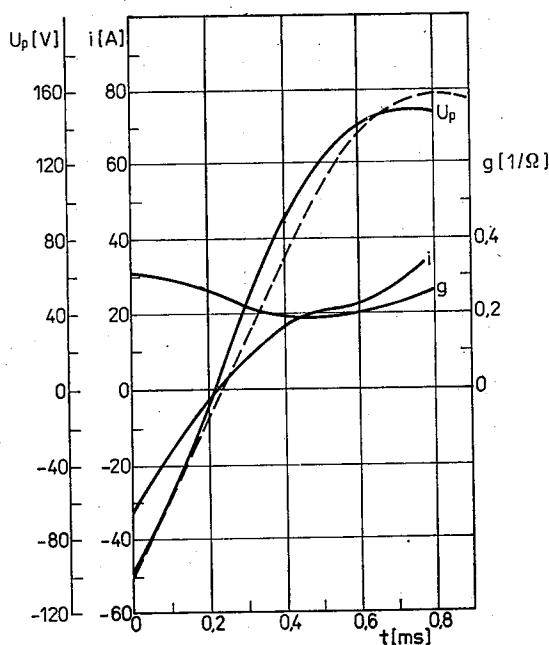
Rys. 2. Przebiegi napięcia międzyelektrodowego u_p , prądu połukowego i oraz konduktancji g w obwodzie rezystancyjnym przy $E_m = 332$ V, $R = 0,5 \Omega$

międzyelektrodowego oraz zmniejszenie konduktancji połukowej. Dalszy wzrost napięcia powoduje wzrost konduktancji oraz prądu, przy czym gwałtowny wzrost wartości tych wielkości występuje w chwili zapłonu łuku elektrycznego. Należy zauważyć, że w obwodzie rezystancyjnym czas upływający od chwili zgaśnięcia łuku do chwili jego zapłonu jest stosunkowo długi (może dochodzić nawet do 5 ms), co wpływa niekorzystnie na proces wytwarzania plazmy niskotemperaturowej stosowanej w procesach technologicznych. Omawiany układ jest niekorzystny nie tylko z punktu widzenia długich czasów bezprądowych, ale również z uwagi na niestabilność obwodu zasilającego z łukiem elektrycznym. Utrata stabilności prowadzi do gaśnięcia łuku, a przerwy bezprądowe mogą osiągać kilka okresów zmian napięcia zasilającego.

Po zapłonie łuku napięcie międzyelektrodowe gwałtownie maleje do stosunkowo niewysokiego napięcia łuku w obszarze jego palenia się, powodując gwałtowny wzrost wartości prądu.



Rys. 3. Przebiegi napięcia łuku $u_l(t)$, prądu łuku $i_l(t)$ oraz napięcia zasilającego $u_T(t)$ w układzie eksperymentalnym, rezystancyjno-indukcyjnym

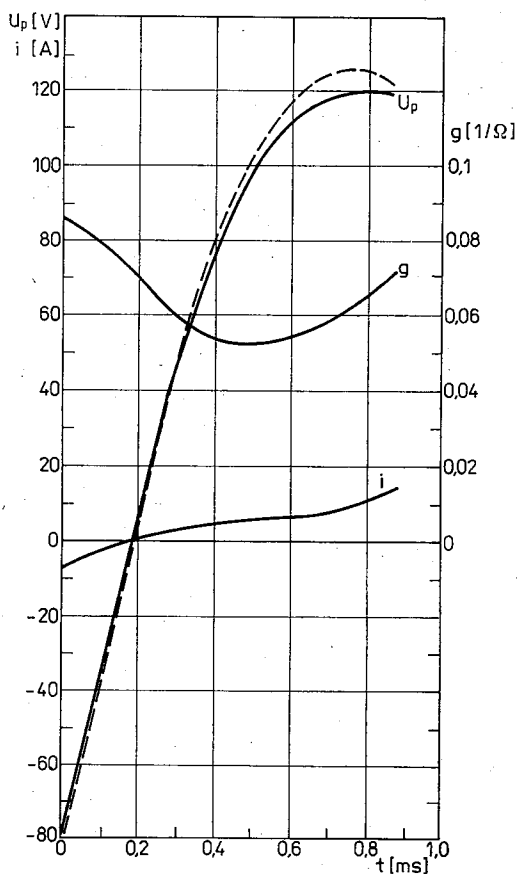


Rys. 4. Przebiegi napięcia międzyelektrodowego u_p , prądu połukowego i oraz konduktancji g w obwodzie rezystancyjno-indukcyjnym; — — — przebieg napięcia międzyelektrodowego obliczony metodą uproszczoną (wg wzorów (12) i (29))

$$E_m = 332 \text{ V}, L = 1,45 \text{ mH}, R = 0,33 \Omega$$

Uproszczona metoda obliczania napięcia międzyelektrodowego zakłada, że konduktancja połukowa maleje wykładniczo do zapłonu łuku elektrycznego. Wobec długiego czasu do zapłonu, w obwodzie rezystancyjnym stosowanie tej metody może prowadzić do dużych błędów. W tej sytuacji nie była ona wykorzystywana w obliczeniach przebiegu napięcia w tym obwodzie.

Włączenie do obwodu zasilającego indukcyjności poprawia warunki pracy plazmotronu zarówno z punktu widzenia stabilności układu jak i skrócenia czasu do zapłonu łuku. Przykładowe przebiegi prądu i napięcia międzyelektrodowego otrzymane podczas badań eksperymentalnych przedstawiono na rysunku 3. Obliczone przebiegi napięcia międzyelektrodowego, prądu połukowego i konduktacji podano na rysunkach 4 i 5.



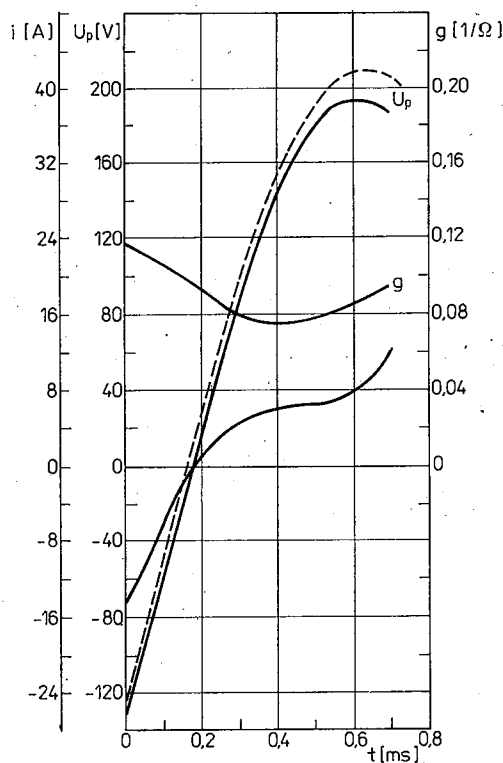
Rys. 5. Przebiegi napięcia międzyelektrodowego u_p , prądu połukowego i oraz konduktancji g w obwodzie rezystancyjno-indukcyjnym; — — — przebieg napięcia międzyelektrodowego obliczony metodą uproszczoną (wg wzorów (12) i (29))

$$E_m = 332 \text{ V}, L = 4 \text{ mH}, R = 1,84 \text{ } \Omega$$

Analiza przebiegów wykazuje, że im większa jest indukcyjność obwodu zasilającego tym większa stromość narastania napięcia międzyelektrodowego i niższa wartość napięcia zapłonu. Należy jednakże podkreślić znaczenie nie tylko wartości indukcyjności obwodu

zasilającego, ale również stosunku indukcyjności do rezystancji (będącej sumą rezystancji obwodu zewnętrznego i łuku), który warunkuje wartość napięcia zasilającego w chwili gaśnięcia łuku. Z przedstawionych danych wynika także, że wartość prądu i jego przebieg w obszarze połukowym zależą od konduktancji w chwili gaśnięcia łuku.

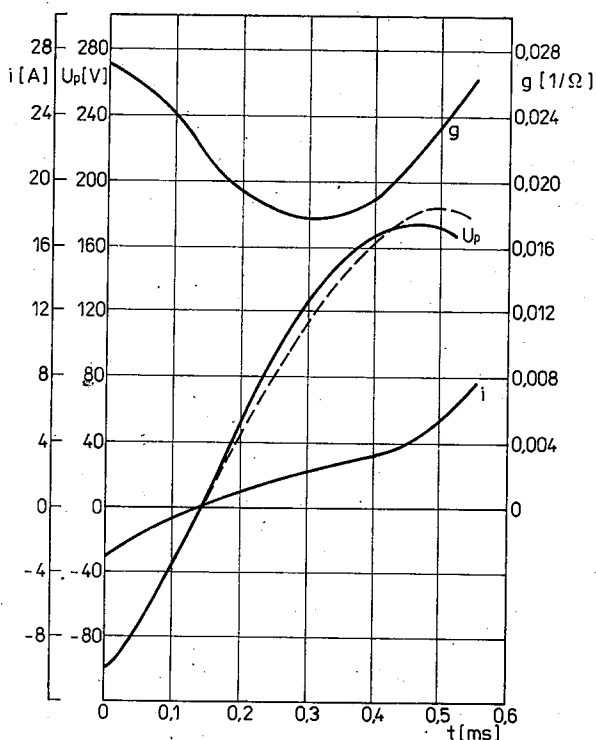
Przebiegi napięcia międzyelektrodowego, obliczone metodą uproszczoną przedstawiono (linią przerywaną) na rysunkach 4 i 5. Należy podkreślić, że przebieg napięcia osiąga wartość maksymalną, co pozwala wyznaczyć czas gaśnięcia łuku, liczony od chwili pojawienia się napięcia gaśnięcia do chwili przejścia prądu przez zero i czas zapłonu łuku elektrycznego. Ponadto podane wyrażenie analityczne ułatwia teoretyczne badanie wpływu parametrów obwodu zasilającego i łuku elektrycznego na przebieg napięcia międzyelektrodowego.



Rys. 6. Przebiegi napięcia międzyelektrodowego u_p , prądu połukowego i oraz konduktancji g w obwodzie indukcyjnym; — — — przebieg napięcia międzyelektrodowego obliczony metodą uproszczoną (wg wzorów (12) i (19))

$$E_m = 332 \text{ V}, L = 3,83 \text{ mH}$$

Najkorzystniejszy z punktu widzenia pracy plazmotronu jest obwód zasilający indukcyjny, w którym jak wynika z rysunków 6 i 7 czas do zapłonu łuku jest najkrótszy, przy czym zależy on również od wartości indukcyjności. Dzięki krótkiemu czasowi upływającemu od chwili zgaszenia do chwili zapłonu łuku, konduktancja kolumny połukowej nie ulega dużym zmianom, a zatem wartość napięcia zapłonu jest niższa niż w obwodzie



Rys. 7. Przebiegi napięcia międzyelektrodowego u_p , prądu połukowego i oraz konduktancji g w obwodzie indukcyjnym; — — — przebieg napięcia międzyelektrodowego obliczony metodą uproszczoną (wg wzorów (12) i (19))

$$E_m = 332 \text{ V}, L = 15,8 \text{ mH}$$

rezystancyjno-indukcyjnym. Należy jednak zauważyć, że w praktyce przypadek ten występuje rzadko ponieważ wszystkie elementy obwodu posiadają określoną rezystancję i przy małej indukcyjności rezystancja ta decyduje o charakterze obwodu zasilającego.

Duża szybkość narastania napięcia międzyelektrodowego jest także przyczyną mniejszego niż w omawianym uprzednio układzie, odkształcenia prądu od przebiegu sinusoidalnego, przy czym odkształcenie to zależy w dużej mierze od warunków cieplnych panujących w obszarze połukowym.

Porównanie przebiegów obliczonych z przebiegami pomierzonymi wykazuje, że przedstawione metody wyznaczania napięć i prądów poprawnie opisują, w sensie jakościowym, procesy zachodzące w łuku elektrycznym oraz obwodzie zasilającym. Opis analityczny uwzględnia wpływ na te przebiegi podstawowych wielkości takich jak natężenie prądu przemiennego, parametry obwodu zasilającego oraz przepływ gazu stabilizującego wyładowanie. Wyżej wymienione wielkości uwzględnione są w sposób bezpośredni w równaniu łuku dynamicznego oraz równaniu obwodu lub też w sposób pośredni przez uzależnienie od nich parametrów Θ i P_g łuku dynamicznego.

Ocena uzyskanych wyników w sensie ilościowym musi uwzględniać losowy charakter procesów występujących w kolumnie łukowej oraz w obwodzie elektrycznym, od których zależy powtarzalność badanych przebiegów.

Rozpatrując procesy wpływające na powtarzalność przebiegów można wyróżnić dwie grupy tych procesów. Do pierwszej z nich należy zaliczyć procesy mikroskopowe takie jak zderzenia cząstek, jonizacja, dejonizacja, wzbudzenie cząstek, dyfuzja. Procesy te ze swej natury są procesami przypadkowymi, stąd też wartości wielkości makroskopowych, które są ich wynikiem mają określoną wartość prawdopodobieństwa.

Do drugiej grupy zaliczać będziemy te procesy, które zależą od stanu układu elektrycznego, bądź też warunków panujących w plazmotronie, a których wpływ na powtarzalność przebiegów można wyeliminować bądź ograniczyć. W tej grupie należy wymienić przede wszystkim zjawiska występujące w układzie niestabilnym.

W odniesieniu do układów energetycznych z plazmotronami należy wyróżnić dwa podstawowe rodzaje niestabilności, a mianowicie niestabilność układu z łukiem elektrycznym oraz niestabilność łuku w przestrzeni konfiguracyjnej^{*)}.

Wspomniano już, że układ zasilający o charakterze rezystancyjnym jest układem niestabilnym. Powtarzalność przebiegów napięcia i prądu jest w tym przypadku bardzo mała. Włączenie w obwód indukcyjności pozwala uzyskać stan równowagi stabilnej a przez to wyeliminować wpływ tego czynnika na powtarzalność wartości mierzonych.

Zapewnienie stabilności łuku w przestrzeni konfiguracyjnej jest związane z prawidłowym ustaleniem przepływu gazu stabilizującego wyładowanie łukowe w zależności od natężenia prądu przemiennego. Prawidłowy dobór wartości przepływu w znacznym stopniu zwiększa powtarzalność badanych przebiegów. W tej grupie należy wymienić jeszcze jeden czynnik zwiększający powtarzalność wartości wielkości mierzonych. Jest nim mianowicie wyładowanie pomocnicze prądu stałego. Jeśli w obszarze połukowym potencjał cieplny, wytworzony wyładowaniem pomocniczym prądu stałego jest znacznie większy od potencjału cieplnego wytworzonego prądem przemiennym to powtarzalność przebiegów jest znacznie większa niż w przypadku dużego wpływu na ten potencjał wyładowania prądu przemiennego.

O ile zapewnienie stabilności łuku w przestrzeni konfiguracyjnej i w układzie a także ustalonych warunków cieplnych, wytworzonych wyładowaniem pomocniczym jest możliwe do realizacji w układzie eksperymentalnym, o tyle wyeliminowanie przypadkowości zjawisk mikroskopowych jest niemożliwe. Stąd też mierzone wartości będą bardziej lub mniej powtarzalne.

Uwzględniając powyższe spostrzeżenia, badania eksperymentalne przeprowadzono dla warunków pozwalających uzyskać maksymalną (w układzie rzeczywistym) powtarzalność przebiegów mierzonych. Dla takich warunków wykonano obliczenia teoretyczne, pozwalające ocenić dokładność zaproponowanych metod.

Ponieważ, jak stwierdzono, powtarzalność przebiegów w obwodzie rezystancyjnym jest bardzo mała, stąd nie przeprowadzono oceny ilościowej otrzymanych w tym obwodzie rezultatów a tylko ocenę jakościową.

Różnice występujące między pomierzonymi przebiegami napięcia i prądu w kolejnych półokresach zmian, uniemożliwiają porównanie przebiegu obliczonego z pojedynczym, wybranym przebiegiem odpowiednich wielkości. Stąd też porównywano obliczone i po-

^{*)} Pojęcie stabilności w przestrzeni konfiguracyjnej oznacza utrzymywanie strumienia plazmy łukowej w przestrzeni o określonej konfiguracji (w tym przypadku walca) za pomocą gazu o wysokim ciśnieniu, które wytwarzane jest w przepływie wirowym.

mierzone wartości maksymalne napięcia międzyelektrodowego (napięcia zapłonu łuku) oraz czasy t_g przyjmowane jako czasy od chwili gaśnięcia łuku do chwili przejścia prądu przez zero i czasy t_z przyjmowane jako czasy od chwili przejścia prądu przez zero do chwili zapłonu łuku. Wartości wielkości mierzonych wyznaczano na podstawie 20 przebiegów, określając przedział ufności dla wartości przeciętnej przy poziomie ufności 0,99. Wyznaczano następnie procentowe błędy maksymalne obliczane jako maksymalną różnicę między wartością obliczoną a wartością graniczną przedziału ufności odniesioną do wybranej wartości granicznej przedziału.

Uzyskane wyniki wskazują na dużą dokładność metody obliczeń opartej na rozwiązaniu równania łuku dynamicznego i równania obwodu. Obliczone w wyżej podany sposób błędy dla napięć zapłonu nie przekraczają 6,5%, natomiast dla czasów gaszenia 8%. Mniejszą dokładność uzyskano przy obliczeniach napięcia metodą uproszczoną.

Na zakończenie zwróćmy uwagę na jeszcze jedną specyficzną cechę obwodów zasilających plazmotrony prądu przemiennego, różniącą je od obwodów łączeniowych. Otóż w obwodach tych nie uwzględnia się pojemności własnych elementów układu, gdyż wpływ tych pojemności na przebieg napięcia międzyelektrodowego i prądu połukowego jest eliminowany przez dużą konduktancję łuku elektrycznego.

PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono rezultaty obliczeń przejściowego napięcia międzyelektrodowego, pojawiającego się w obszarze przejścia prądu przemiennego przez wartość zerową, w obwodzie zasilającym plazmotron jednofazowy. Obliczenia przeprowadzono korzystając z równania łuku dynamicznego oraz równania obwodu, co pozwoliło uwzględnić wpływ wyładowania łukowego na przebieg napięcia oraz prądu połukowego.

Podano metodę uproszczoną wyznaczania napięcia międzyelektrodowego opartą na założeniu, że konduktancja w obszarze połukowym maleje wykładniczo a jej przebieg dany jest wyrażeniem analitycznym. Rozwiązując równanie obwodu elektrycznego przy zadanym przebiegu konduktancji otrzymano wyrażenie opisujące przebieg napięcia międzyelektrodowego, uwzględniające zarówno parametry obwodu jak również parametry wyładowania łukowego, tzn. stałą czasową łuku oraz parametr P_g charakteryzujący moc oddawaną z kolumny łukowej.

Podane metody weryfikowano doświadczalnie stwierdzając, że opisują one poprawnie przebiegi napięć i prądów w obwodach zasilających plazmotrony jednofazowe.

Przedstawiono również analizę wyżej wymienionych przebiegów w obwodach zasilających o charakterze rezystancyjnym i rezystancyjno-indukcyjnym.

BIBLIOGRAFIA

1. Cz. Królikowski: *Technika łączenia obwodów elektroenergetycznych*. Warszawa—Poznań: PWN, 1975
2. Z. Ciok: *Procesy łączeniowe w układach elektroenergetycznych*. Warszawa: WNT, 1983

3. H. Ambrosch, B. Oswald: *Mehrstufiges Ausschalten von 400 kV Kompensationsdrosselspulen*. Mat, V Int. Symp. „Switching Arc Phenomena” 1985, Łódź
4. J. E. Browne: *Study of a. c. arc behavior near current zero by means of mathematical models*. Trans. of AIEE. 1948, vol. 67
5. S. Berneryd: *La coupure des faibles courants inductifs*. Electra No 72, 1980
6. G. C. Damstra: *L'arrachement de courant et les surtension comme fonction des paramètres du réseau*. CIGRE No 120, 1964
7. H. Fang, J. Brannen: *A current-zero based on forced convection*. IEEE Trans. on Plasma. No 1, 1980
8. W. M. C. Heuvel, B. C. Papadias: *Les interaction entre phases au cours des manoeuvres de selfs triphasées*. Electra No 91, 1983
9. P. Verre: *Les surtension lors de la coupure des faibles courants inductifs en haute tension*. Revue Générale de l'Electricité No 72, 1962
10. A. Kamińska-Pranke: *Analiza zjawisk cieplnych i elektrycznych w plazmotronie oraz obwodzie zasilającym prądu przemiennego w procesie wytwarzania plazmy niskotemperaturowej*. Wyd. Politechn. Poz. Seria Rozprawy. Nr 186, 1987
11. A. Kamińska-Pranke: *Analiza warunków palenia się łuku elektrycznego w jednofazowym palniku łukowo-plazmowym prądu przemiennego*. Praca doktorska, Poznań 1982
12. A. Kamińska-Pranke: *Model matematyczny łuku elektrycznego stabilizowanego wirowym strumieniem gazu w plazmotronie prądu przemiennego*. Rozprawy Elektrot. 1989, 35, z. 2, ss. 449—466

A. KAMIŃSKA-PRANKE

CALCULATION OF THE ARC VOLTAGE AND CURRENT INTENSITY IN THE POWER CIRCUIT OF AN A C. PLASMATRON

Summary

Two calculation methods of the current intensity and of the arc voltage in the power circuit of a plasmatron in the current-zero area, are presented. One of these methods consists in solving the dynamic arc equation and the circuit equation, where the arc parameters depend on the time dependent thermal potential distribution. The second method rests on the assumption that the post-arc conductance falls exponentially and that its course is determined by the empirically assigned dependence. The analytic methods were subjected to experimental verification confirming their validity.

A. KAMIŃSKA-PRANKE

TENSION ET COURANTS DANS LE CIRCUIT D'ALIMENTATION DU PLASMATRON DU COURANT ALTERNATIF

Résumé

Cet article présente deux méthodes de calculs de la tension d'arc et du courant dans le circuit d'alimentation du plasmatron dans la zone de passage du courant par zéro. L'une d'elles consiste en résolution des équations du circuit et de l'arc électrique. Les paramètres de l'équation de l'arc dépendent de la répartition du potentiel thermique, qui change avec le changement du courant. La deuxième méthode se base sur le principe, que dans la zone du passage du courant par zéro, la conductance de l'arc diminue exponentiellement et son allure est déterminée par l'expression empirique. Les résultats positifs d'une vérification expérimentale confirment que les méthodes présentées sont correctes.

A. KAMIŃSKA-PRANKE

STROM- UND SPANNUNGSVERLAUF IM SPEISEKREIS EINES
WECHSELSTROMPLASMATRONS

Zusammenfassung

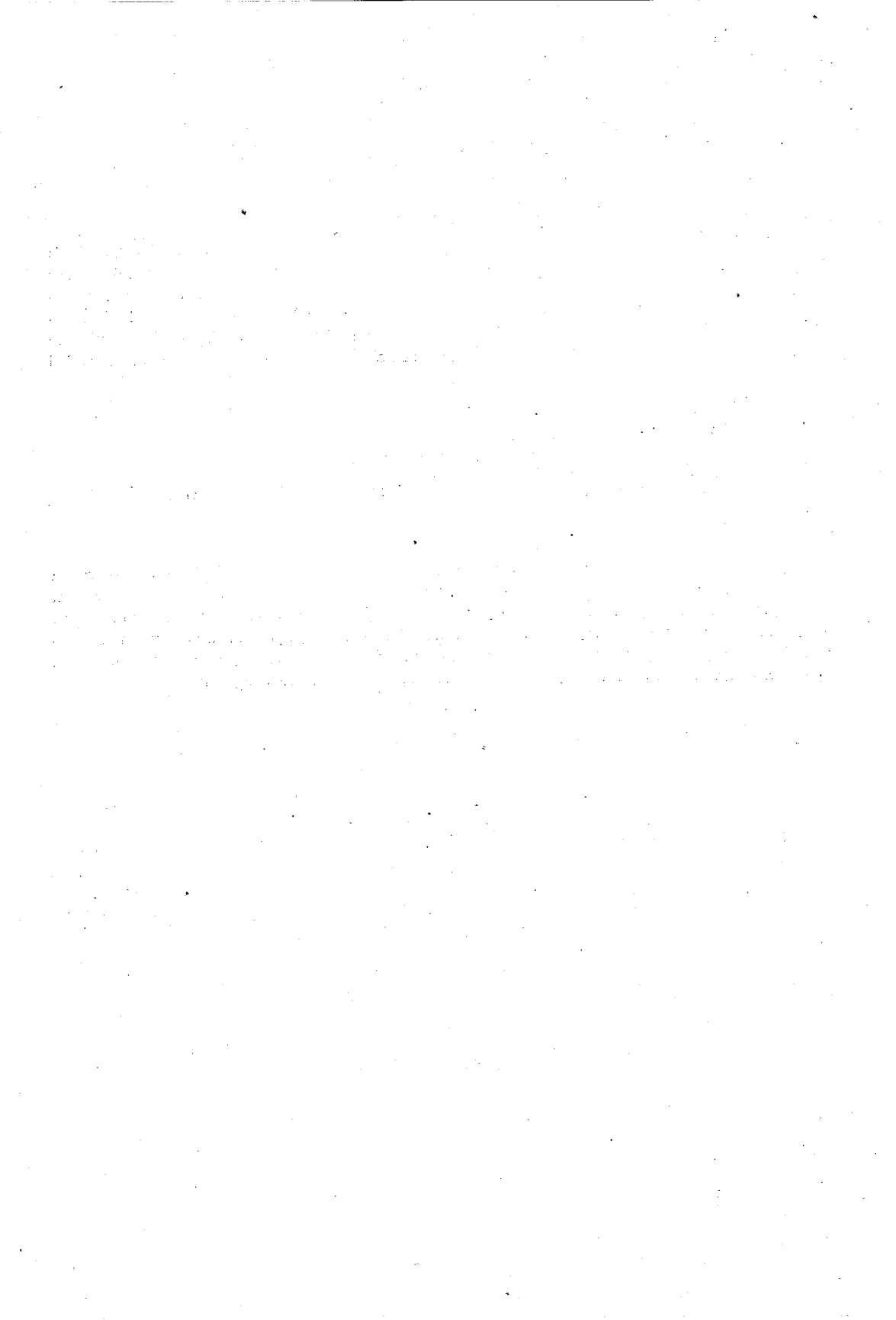
In dieser Bearbeitung werden zwei Berechnungsmethoden für Spannung und Strom im Speisekreis eines Plasmotrons im Nulldurchgangsbereich beschrieben. Die erste Methode beruht auf der Lösung der Gleichung für einen dynamischen Bogen sowie der Kreisgleichung, wobei die Bogenparameter Funktionen der zeitveränderlichen Wärmepotentialverteilung sind. Die zweite Methode basiert auf der Voraussetzung, dass die Nachbogenkonduktanz exponential absinkt, und ihr Verlauf durch empirisch bestimmte Abhängigkeit gegeben wird. Die obengenannten Methoden sind experimentell untersucht worden, wobei ihre Richtigkeit bestätigt wurde.

А. КАМИНЬСКА-ПРАНКЕ

НАПРЯЖЕНИЯ И СИЛЫ ТОКА В ЦЕПИ ПЛАЗМОТРОНА ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Резюме

Представлены два метода расчета напряжения дуги и силы тока в цепи питания плазмотрона в области нуля тока. Один из них основан на решении системы уравнений динамической дуги и электрической цепи причем параметры дуги являются функциями изменяющегося во времени распределения теплового потенциала. Другой метод основан на допущении о том, что проводимость дуги в области нуля тока изменяется экспоненциально и описана эмпирической зависимостью. Приведена оценка точности методов на основе экспериментальных исследований.



Współczynniki efektywności obsługi zgłoszeń w systemach modularnych

KRZYSZTOF RZYMKOWSKI

Instytut Problemów Jądrowych. Świerk

Otrzymano 1988.09.14

Autoryzowano do druku 1988.12.2

Przedstawiono i określono współczynniki obsługi zgłoszeń z priorytetami względnymi i bezwzględnymi w magistralowych systemach modularnych stosowanych w technice jądrowej.

1. WPROWADZENIE

W technice jądrowej do automatyzacji pomiarów i sterowania wykorzystywane są systemy modularne NIM, CAMAC, FASTBUS, VME, AMS-M, MULTIBUS I, G-64, G-96, HPIB, a ostatnio prowadzone są prace adaptacyjne nad systemami MULTIBUS II i NuBUS [3, 4, 5, 6, 7].

System modularny może w eksperymencie jądrowym spełniać rolę systemu interfejsowego lub pracować jako specjalizowany wieloprocesorowy zestaw autonomiczny.

Podstawowa komunikacja pomiędzy elementami systemu odbywa się po magistrali, do której dołączone są moduły zawierające mikrokomputery żądające dostępu do magistrali w celu przejęcia sterowania pracą systemu oraz moduły pomocnicze wysyłające sygnały przerwania — żądania obsługi [1, 2, 3]. Łączna ilość modułów dołączonych do magistrali (różna dla różnych systemów) wynosi maks. 25 (system FASTBUS). Ze względu na możliwość wykorzystania różnych metod ustalania kolejności dostępu do magistrali dla poszczególnych modułów w danym systemie konieczne jest sformułowanie kryteriów umożliwiających porównanie i wybór odpowiedniego wariantu dla projektowanego doświadczenia jądrowego.

2. WSPÓŁCZYNNIKI EFEKTYWNOŚCI OBSŁUGI ZGŁOSZEŃ

W systemie modularnym uzyskanie dostępu do magistrali (zgłoszenie) jest możliwe w wyniku procesu arbitracji lub przerwania.

W niektórych systemach modularnych np. VME, MULTIBUS II protokół obsługi przerwania przewiduje również konieczność przeprowadzenia procesu arbitracji przez moduł przerywający. W rozważaniach zakłada się, że procesy związane z pojawianiem się i obsługą zgłoszeń są niezależne i pojawiające się zgłoszenie jest obsługiwane natych-

fniast, pod warunkiem, że istnieje dostęp do magistrali. Jeżeli w chwili pojawienia się zgłoszenia magistrala jest zajęta, to w zależności od jego rodzaju oraz algorytmu kolejności obsługi, pojawiające się zgłoszenie przerywa pracę na magistrali lub oczekuje na swoją kolejkę.

W systemach wieloprocesorowych stosowane są następujące algorytmy kolejności obsługi zgłoszeń:

- z priorytetem względnym, w którym niemożliwe jest przerwanie rozpoczętego działania
- z priorytetem bezwzględnym, w którym możliwe jest przerwanie obsługi zgłoszeń o niższym priorytecie
- mieszane.

Charakterystyczną cechą systemów modularnych jest niemożność przerywania rozpoczętej operacji tzn. operacja (np. zapisu), w czasie której pojawiło się przerwanie musi być dokończona. Wyjątek stanowi rozbudowany system CAMAC z magistralą ACB i gałęzią szeregową, w którym rozpoczęta operacja CAMAC może zostać przerwana, ale tylko do chwili pojawienia się pierwszego sygnału strobowego S_1 .

Przy nieograniczonym czasie oczekiwania zgłoszeń w modułach jednym z kryteriów oceny efektywności systemu może być współczynnik efektywności obsługi zgłoszeń określony zależnością

$$Q_a = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot \lambda_i \cdot W_i, \quad (2.1)$$

gdzie: W_i — średni czas oczekiwania zgłoszeń w kolejce, λ_i — intensywność zgłoszeń, α_i — względna waga zgłoszeń.

W zależności od doboru współczynników α_i , Q_a może posiadać różną interpretację np. przy $\alpha_i = 1$, Q_a określa średnią długość kolejki lub zakładając, że α_i określa jednostkową wielkość kosztu oczekiwania zgłoszenia w kolejce, to Q_a opisuje całkowity średni koszt w jednostce czasu funkcjonowania systemu [3].

Przy ocenie efektywności różnych algorytmów precyzujących kolejność obsługi zgłoszeń porównywane są względne zmiany Q_a w odniesieniu do algorytmu typu FIFO przyjętego za wzorcowy. Np. porównując $\frac{Q_a}{Q_{\text{FIFO}}}$ przy $\alpha_i = 1$ można ocenić, ile razy zmniejsza się średnia długość kolejki zgłoszeń. Stosowanie efektywniejszych algorytmów określających kolejność obsługi zgłoszeń (przydział priorytetów) odpowiada zwiększeniu zdolności przetwarzania informacji przez system. Priorytety należy przyznawać zgodnie z kierunkiem, w jakim maleją ilorazy [3]

$$\frac{\alpha_k}{T_k} \geq \frac{\alpha_{k+1}}{T_{k+1}}, \quad (2.2)$$

gdzie: α_k — numer priorytetu ($k = 1$ priorytet najmniejszy), T — czas realizacji zadania wywołanego zgłoszeniem.

Współczynnik efektywności przetwarzania informacji przez system

$$Q_p = \frac{T_i}{T_{\text{FIFO}}}$$

określa, ile razy należałoby zwiększyć zdolność przetwarzania informacji przez system realizując algorytm FIFO, aby uzyskać taki sam efekt jaki przewidywany jest z zależności 2.1. Przy ocenie efektywności algorytmów z priorytetami względnymi i bezwzględnymi Q_p wyraża się zależnością [3]:

$$Q_p = \frac{1}{2} \varrho + \sqrt{\frac{1}{4} \varrho^2 + B(1-\varrho)}, \quad (2.3)$$

gdzie:

$\varrho = \lambda_k T_k$ — obciążenie systemu wywołane obsługą zgłoszenia o priorytecie k ;

Dla priorytetów względnych

$$B = \frac{\sum_{k=1}^N \alpha_k \cdot \lambda_k}{(1-\varrho) \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k \cdot \lambda_k}{(1-R_{k-1})(1-R_k)}}, \quad (2.4)$$

gdzie $R_k = \sum_{j=1}^k \varrho_j$;

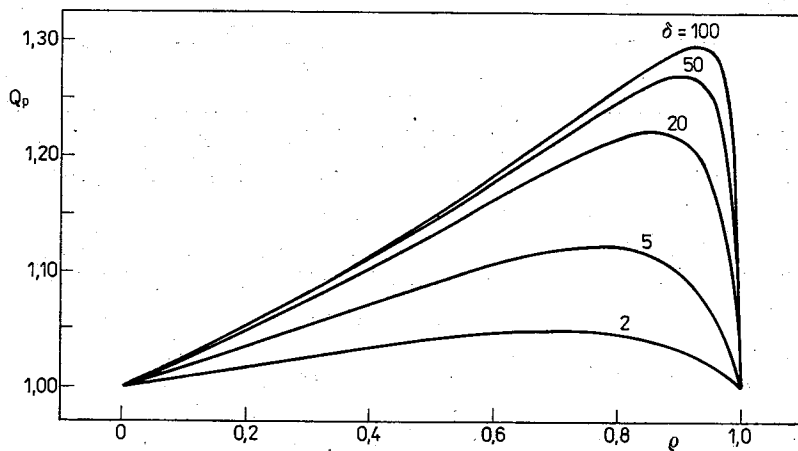
Dla priorytetów bezwzględnych

$$B = \frac{\frac{1}{2} M_N \sum_{k=1}^N \alpha_k \cdot \lambda_k}{(1-\varrho) \sum_{k=1}^N \alpha_k \cdot \lambda_k \left[\frac{T_k R_{k-1}}{1-R_{k-1}} + \frac{1/2 M_k}{(1-R_{k-1})(1-R_k)} \right]}, \quad (2.5)$$

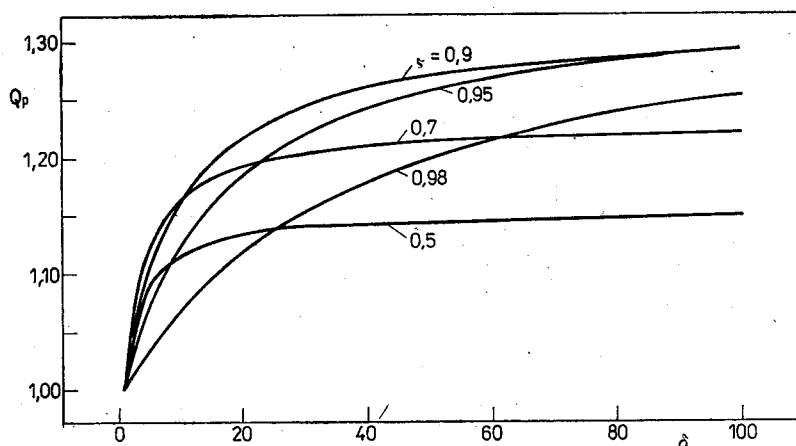
gdzie:

$$M_N = \sum_{k=1}^N \lambda_k \cdot \varrho_k (1-\nu_k^2); \quad M_k = \sum_{j=1}^k \lambda_j \varrho_j (1-\nu_j^2)$$

ν — współczynnik zmienności czasu obsługi zgłoszenia o priorytecie k zmieniającym się w granicach $0 \div 1$.



Rys. 1. Efektywność systemu z priorytetami względnymi w funkcji ϱ



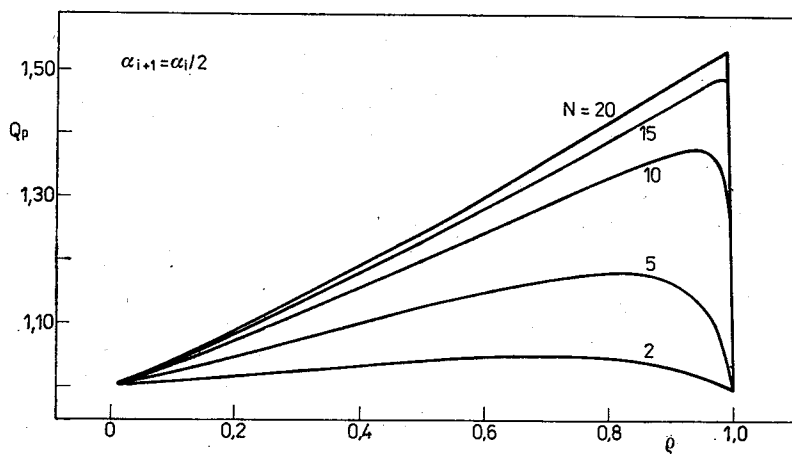
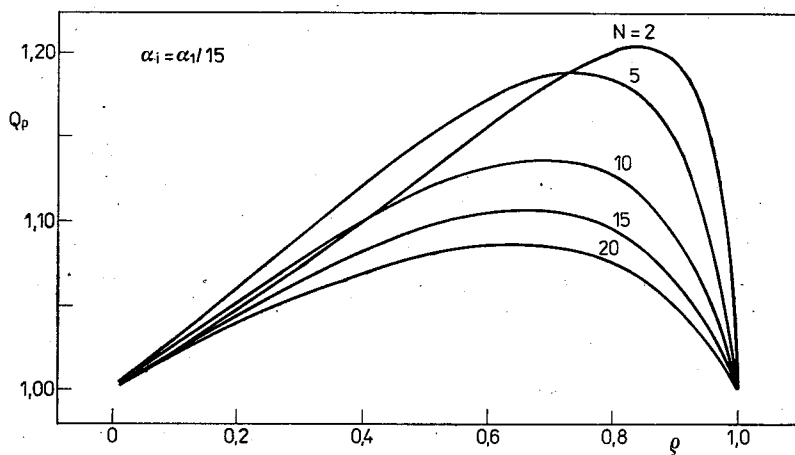
Rys. 2. Efektywność systemu z priorytetami względnymi w funkcji δ

Na rys. 1 przedstawiono wzrost efektywności systemu z priorytetami względnymi (zależności 2.3 i 2.4) przy założeniu, że $N = 2$. Parametr $\delta = \frac{1}{2}$ opisuje zgodnie z zależnościami 2.1 i 2.2 stosunek względnych wag zgłoszeń przypisanych zgłaszającym się modułom. W obliczeniach przyjęto, że $\varrho_1 = \varrho_2$. Z przedstawionego wykresu wynika, że efektywność systemu, w którym znajdują się dwa moduły wysyłające zgłoszenia wzrasta wraz z większym uprzywilejowaniem jednego z nich (wzrost ϱ) i osiągnięty zysk może wynosić 30%.

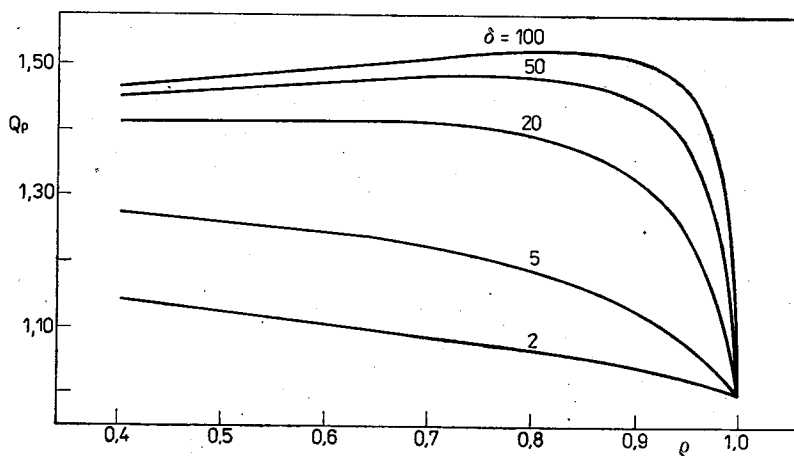
Na rys. 2 przedstawiono wzrost efektywności systemu z priorytetami względnymi przy założeniu $N = 2$ i $\varrho_1 = \varrho_2$ w zależności od zmiany parametru δ tzn. od zmiany wielkości uprzywilejowania jednego z modułów. Z przedstawionego wykresu wynika, że wzrost efektywności zależy od obciążenia systemu tzn. od szybkości obsługi napływających zgłoszeń. Efektywność systemu dla małych wartości ϱ rośnie ze wzrostem uprzywilejowania jednego z modułów (wzrost δ), jednakże po przekroczeniu pewnej wielkości (w danym przykładzie $\varrho = 0,9$) wzrost efektywności jest mniejszy. Zbliżając konfigurację systemu do systemu hierarchicznego uzyskuje się zmniejszenie efektywności systemu, ponieważ następuje przeciążenie jednego z modułów i niewykorzystanie pozostałych. Korzystając z obu wykresów można stwierdzić, że w systemie z dwoma modułami wysyłającymi zgłoszenia współczynnik uprzywilejowania jednego z nich δ nie powinien przekraczać 10. Wówczas można spodziewać się wzrostu efektywności systemu z priorytetami względnymi około 8%.

Na rys. 3a i 3b przedstawiono wzrost efektywności systemu z priorytetami względnymi w funkcji obciążenia systemu dla różnych wag przypisywanych zgłoszeniom (rys. 3a przy małych różnicach pomiędzy wagami $\alpha_i = \alpha_1/15$ oraz rys. 3b przy dużych różnicach $\alpha_{i+1} = \alpha_i/2$).

Z przedstawionych wykresów wynika, że efektywność systemu przy małych różnicach między wagami maleje ze wzrostem ilości modułów. Największy przyrost efektywności uzyskuje się przy $N = 2$. Wprowadzając znaczne zróżnicowanie między modułami przypisując im różne priorytety (duże różnice między wagami) uzyskuje się wraz ze wzrostem



Rys. 3. Wpływ ilości modułów na efektywność systemu z priorytetami względnymi

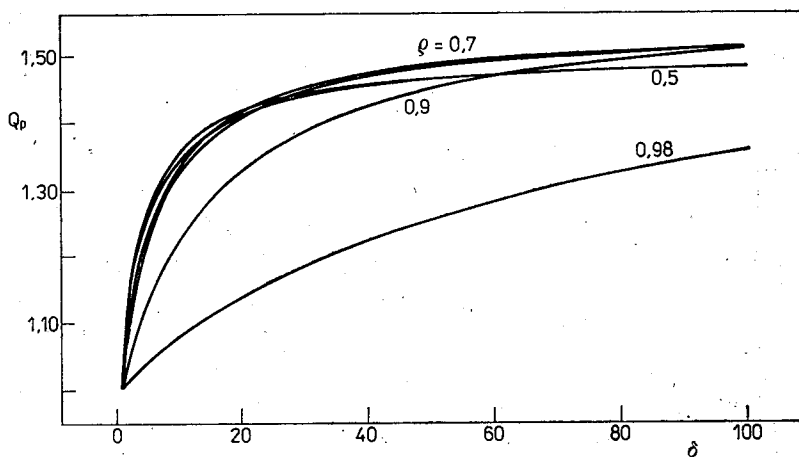


Rys. 4. Efektywność systemu z priorytetami bezwzględnymi w funkcji δ

ilości modułów znaczną efektywność systemu. Tego rodzaju rozwiązanie zastosowane jest w arbitracji systemów MULTIBUS II i NuBUS.

Na rys. 4 przedstawiono efektywności systemu z priorytetami bezwzględnymi (zależności 2.3 i 2.5) przy założeniu $N = 2$ oraz $\rho_1 = \rho_2$. Z przedstawionego wykresu wynika analogicznie jak na rys. 2.1, że efektywność systemu, w którym znajdują się dwa moduły wysyłające zgłoszenia wzrasta wraz z większym uprzywilejowaniem jednego z nich osiągając znacznie większe przyrosty efektywności niż w systemie z priorytetami względnymi.

Na rys. 5 przedstawiono (analogicznie jak na rys. 2) efektywność systemu zawierającego dwa moduły wysyłające zgłoszenia w zależności od zróżnicowania stopnia uprzywilejowania między nimi. Analogicznie jak w przypadku systemu z priorytetami względnymi.



Rys. 5. Efektywność systemu z priorytetami bezwzględnymi

Tabela 1

Efektywność systemów z priorytetami względnymi i bezwzględnymi

Przydział priorytetu Nr modułu			Efektywność z priorytetami względnymi		Efektywność z priorytetami bezwzględnymi					
					B			Qp		
I	II	III	B	Qp	v = 0	v = 0,5	v = 1	v = 0	v = 0,5	v = 1
1	2	3	0,9326	0,9679	1,0556	1,0574	1,0600	1,0257	1,0265	1,0277
1	3	2	0,9734	0,9875	1,3122	1,3146	1,3181	1,1363	1,1372	1,1387
2	1	3	0,9561	0,9792	1,1371	1,1386	1,1409	1,0621	1,0628	1,0638
2	3	1	1,0425	1,0197	1,7211	1,7236	1,7273	1,2921	1,2930	1,2943
3	1	2	1,0325	1,0151	1,5327	1,5341	1,5363	1,2229	1,2235	1,2243
3	2	1	1,0751	1,0345	2,0146	2,0163	2,0188	1,3928	1,3934	1,3942

I, II, III nr. priorytetu

Moduł 1

Moduł 2

Moduł 3

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 2$

$\lambda_3 = 3$

$T_1 = 0,05$

$T_2 = 0,02$

$T_3 = 0,01$

$\alpha_1 = 5$

$\alpha_2 = 30$

$\alpha_3 = 50$

$\rho_1 = 0,05$

$\rho_2 = 0,04$

$\rho_3 = 0,03$

$\rho = 0,12$

nymi można zaobserwować, że ze wzrostem uprzywilejowania jednego z modułów i wzrostem obciążenia systemu ρ , jego efektywność rośnie, a po przekroczeniu pewnej wartości obciążenia ($\rho \approx 0,7$) efektywność będzie maleć. Korzystając z obu wykresów można stwierdzić, że w systemie z priorytetami bezwzględnymi przy $N = 2$ współczynnik uprzywilejowania δ nie powinien przekraczać $\sim 10\%$. Można się wówczas spodziewać wzrostu efektywności systemu około 30% . Z przedstawionych wykresów wynika, że bardziej efektywny jest system z priorytetami bezwzględnymi.

W tabeli 1 przedstawiono porównanie systemów z priorytetami względnymi i bezwzględnymi dla trzech różnych modułów systemu przy strumieniach zgłoszeń $\lambda_1 = 1,0$, $\lambda_2 = 2,0$ i $\lambda_3 = 3,0$ oraz przy zmianie kolejności ich priorytetów. W tabeli 2 przedsta-

Tabela 2

Efektywność systemów z priorytetami względnymi i bezwzględnymi

Przydział priorytetu Nr modułu			Efektywność z priorytetami względnymi		Efektywność z priorytetami bezwzględnymi					
					B			Q_p		
I	II	III	B	Q_p	$v = 0$	$v = 0,5$	$v = 1,0$	$v = 0$	$v = 0,5$	$v = 1,0$
1	2	3	0,4697	0,9261	0,4872	0,4872	0,4873	0,9287	0,9287	0,9287
1.	3	2	0,9764	0,9969	0,1385	0,1386	1,1387	1,0178	1,0178	1,0178
2	1	3	0,4992	0,9305	0,5102	0,5102	0,5102	0,9321	0,9321	0,9321
2	3	1	1,2354	1,0299	1,3783	1,3784	1,3785	1,0474	1,0474	1,0474
3	1	2	2,4958	1,1700	3,3561	3,3564	3,3568	1,2521	1,2521	1,2521
3	2	1	3,4839	1,2636	5,5082	5,5087	5,5094	1,4284	1,4850	1,4285

I, II, III nr priorytetów

Moduł 1

Moduł 2

Moduł 3

 $\lambda_1 = 7$ $\lambda_2 = 15$ $\lambda_3 = 20$ $T_1 = 0,05$ $T_2 = 0,02$ $T_3 = 0,01$ $\alpha_1 = 5$ $\alpha_2 = 30$ $\alpha_3 = 50$ $\rho_1 = 0,35$ $\rho_2 = 0,3$ $\rho_3 = 0,2$ $\rho = 0,85$

wiono analogiczne porównanie dla większych strumieni zgłoszeń $\lambda_1 = 7,0$, $\lambda_2 = 15,0$, $\lambda_3 = 20,0$. W obu przypadkach widać, że przy zastosowaniu systemu z priorytetami bezwzględnymi uzyskuje się większą efektywność systemu. Istotną rolę odgrywa kolejność przydziału priorytetów. Przydział najwyższego priorytetu modułowi obsługującemu największy strumień zgłoszeń powiększa efektywność systemu dla obu rodzajów obsługi zgłoszeń. Z porównania obu tabel wynika, że przy dużych strumieniach zgłoszeń, przy zachowaniu stałych czasów obsługi ich priorytetów efektywności systemu wzrośnie (tzn. przy około 7-krotnym wzroście strumienia zgłoszeń wzrost efektywności wynosi około 20% w zależności od kolejności priorytetów przypisanych modułom).

BIBLIOGRAFIA

1. B. W. Gniedienko, I. N. Kowalenko: *Wstęp do teorii obsługi masowej*. Warszawa: PWN, 1966
2. S. Grabowski, St. Koślacz: *Podstawy i praktyka programowania mikroprocesorów*. Warszawa: WNT, 1980

3. W. W. Lipajew, K. K. Kolinik: *Oprogramowanie podstawowe maszyn cyfrowych*. Warszawa: PWN, 1975
4. M. Płomiński, K. Rzymkowski: *Mikrokomputerowe systemy modularne MULTIBUS II*. PTJ CIE. Warszawa, 1986
5. K. Rzymkowski: *Architektura cyfrowych systemów modularnych o zdecentralizowanym sterowaniu do automatyzacji eksperymentów naukowych*. PTJ CIE, nr 2-3-4, Warszawa, 1985
6. K. Rzymkowski: *Mikrokomputerowy system modularny VME*. Informatyka, nr 6, 1984
7. K. Rzymkowski: *Problemy wyboru nowoczesnego systemu modularnego do automatyzacji i sterowania w technice jądrowej*. PTJ CIE, nr 10-11-12, 1984

K. RZYMKOWSKI

EFFECTIVITY FACTORS OF HANDLING ENTRIES IN MODULAR SYSTEMS

Summary

The effectivity factors of handling entries, with relative and absolute priorities, in bus modular systems applied in nuclear technology, are presented.

K. RZYMKOWSKI

COEFFICIENTS D'EFFICACITÉ DE LA DESSERTE DES APPELS DANS LES SYSTÈMES MODULAIRES

Résumé

On a donné et on a déterminé les coefficients de desserte des appels de priorités relatives et absolutes dans les systèmes modulaires, appliqués dans la technique nucléaire.

K. RZYMKOWSKI

EFFEKTIVITÄTSFAKTOREN DER BEDIENUNG VON MELDUNGEN IN MODULARSYSTEMEN

Zusammenfassung

Es werden Bedienungsfaktoren von Meldungen mit relativen und absoluten Prioritäten bei modularen, in der Kerntechnik angewendeten Magistralssystemen dargestellt und bestimmt.

К. ЖИМКОВСКИ

КОЭФФИЦИЕНТЫ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОБСЛУЖИВАНИЯ ЗАПРОСОВ В МОДУЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Резюме

Определены и рассчитаны коэффициенты эффективности обслуживания относительных и абсолютных запросов в модульных системах применяемых в ядерной технике.

Przepustowość magistrali systemu modularnego

KRZYSZTOF RZYMKOWSKI

Instytut Problemów Jądrowych, Świerk

Otrzymano 1988.09.14

Autoryzowano do druku 1988.12.2

Przedstawiono obliczenie przepustowości informacji magistrali systemów modularnych stosowanych w technice jądrowej.

1. WPROWADZENIE

Do automatyzacji pomiarów i sterowania w technice jądrowej stosowane są systemy modularne NIM, CAMAC, FASTBUS, VME, AMS-M, MULTIBUS I, G-64, G-128, a ostatnio prowadzone są prace nad adaptacją systemów MULTIBUS II i NuBUs [3, 4].

Systemy modularne stosowane w technice jądrowej są przystosowane do jednoczesnego analizowania wyników pomiarów w czasie rzeczywistym i archiwacji dużych ilości informacji. Tzn. część zbieranych informacji jest przetwarzana w czasie rzeczywistym dla celów kontrolnych i sterowania, a pozostałe informacje są zbierane i zapisywane, a następnie analizowane po zakończeniu eksperymentu. Mimo prowadzonej na bieżąco selekcji zapisywanej informacji archiwacja wyników pomiarów wymaga dużej szybkości przesyłania pakietów informacji i zgromadzenia znacznej ilości pamięci masowych. Wynika to ze specyfiki eksperymentów jądrowych, w których ze względu na losowy charakter badanych zjawisk istotna jest każda informacja.

Określenie zdolności przepustowej magistrali systemu należy do jednego z ważniejszych zadań przy projektowaniu doświadczenia jądrowego [3.4].

2. PRZEPUSTOWOŚĆ MAGISTRALI

W systemie modularnym po magistrali przesyłane są informacje będące wynikiem zbierania i przetwarzania przez moduł informacji wejściowych z urządzeń współpracujących. Ze względu na dużą ilość losowych warunków określających odstęp czasu między zgłoszeniami można strumień zgłoszeń traktować jak strumień o rozkładzie Poissona [1.2] i można wyznaczyć rzeczywistą zdolność przepustową magistrali z uwzględnieniem ograniczenia dopuszczalnego czasu oczekiwania na obsługę. Jest to zgodne z większością protokołów przesyłania informacji po magistralach w szczególności po magistralach synchronicznych.

Zakłada się, że zgłoszenie opuszcza kolejkę przy obsłudze typu FIFO, gdy zostanie przekroczony dopuszczalny czas oczekiwania na obsługę t_0 .

Wówczas rzeczywista zdolność przepustowa systemu jest definiowana [2]

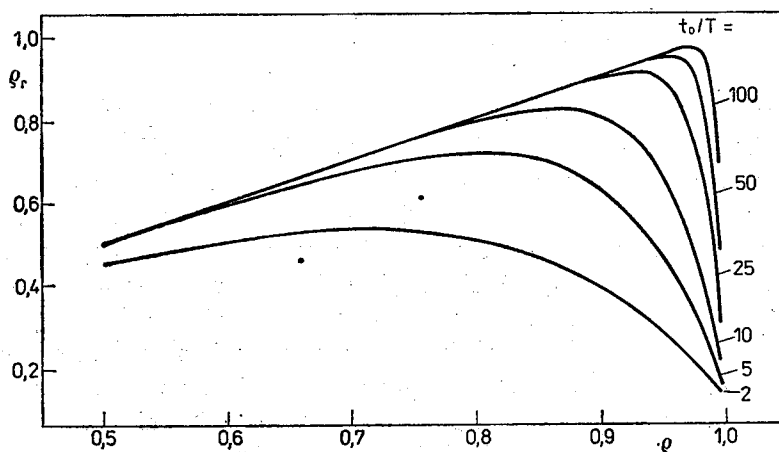
$$\varrho_r = \varrho[1 - P(t > t_0)]$$

gdzie: ϱ — obciążenie systemu, T — stały czas obsługi, $P(t > t_0)$ opisane jest przybliżoną zależnością:

$$P(t > t_0) = \frac{(1 - \varrho) \exp \left[-\frac{t_0}{T} (i - \varrho) \right]}{i - 1};$$

jest to prawdopodobieństwo przesłania informacji oczekującej na obsługę dłużej niż dopuszczalny czas t_0 tzn. system przekazuje informacje nieaktualne, a i jest zależne od ϱ i można opisać je zależnością przybliżoną

$$i(\varrho) = 2.15 - 0.859\varrho$$



Rys. 1. Zdolność przepustowa systemu przetwarzania danych

Z przedstawionego na rysunku wykresu wynika, że przy zwiększaniu obciążenia systemu przetwarzania informacji i wysyłania wyników przetwarzania w kolejności ich pojawiania się (FIFO) zdolność przepustowa systemu, poczynając od pewnej wartości, gwałtownie maleje w wyniku wzrostu czasu oczekiwania i bezczynności systemu, szczególnie dla małych $\frac{t_0}{T}$. W wyniku tego pojawiające się na wyjściu informacje są przedawnione.

Z wykresu wynika, że dla każdej wartości $\frac{t_0}{T}$ istnieje wartość maksymalna zdolności przepustowej systemu i dalsze zwiększanie jego obciążenia ϱ powoduje spadek ϱ_r . Pełne wykorzystanie zdolności przepustowej systemu jest możliwe przy tego rodzaju pracy jedynie przy nieograniczonym czasie oczekiwania. W praktyce zwiększenie zdolności przepustowej systemu można uzyskać zwiększając t_0 i zmniejszając T . Utrata wyników systemu pracującego w czasie rzeczywistym zależy od t_0 lub od przyjętych założeń.

W systemach modularnych czas oczekiwania na obsługę może być mniejszy od czasu trwania jednego cyklu (przy małym obciążeniu i pojawieniu się zgłoszenia w trakcie wykonywania operacji na magistrali) lub może wynosić kilka cykli. Protokoły pracy magistral nie przewidują ograniczenia tego czasu. Czas obsługi zgłoszenia T odpowiada czasowi trwania jednego cyklu. Zatem zdolność przepustowa magistrali systemów modularnych może osiągać bardzo znaczne wartości zbliżone do aktualnego obciążenia systemu tzw. $q_r \approx q$.

BIBLIOGRAFIA

1. B. W. Gniedienko, I. N. Kowalenko: *Wstęp do teorii obsługi masowej*. Warszawa: PWN, 1966
2. W. W. Lipajw, K. K. Kolinik: *Oprogramowanie podstawowe maszyn cyfrowych*. Warszawa: PWN 1975
3. M. Płomiński, K. Rzymkowski: *Mikrokomputerowe systemy modularne MULTIBUS II*. CIE Warszawa 1986
4. K. Rzymkowski: *Problemy wyboru nowoczesnego systemu modularnego do automatyzacji i sterowania w technice jądrowej*. P.T.J., CIE, nr 10-11-12, 1984

K. RZYMKOWSKI

EFFICIENCY FACTORS OF THE BUS THROUGHPUT OF MODULAR SYSTEMS

Summary

The factors of the efficiency of the bus throughput of modular systems applied in nuclear technology, are defined and calculated.

K. RZYMKOWSKI

TRANSMITTANCE DES CONDUITES PRINCIPALES DU SYSTÈME MODULAIRE

Résumé

On a présenté le calcul de la transmittance d'information de la conduite principale des systèmes modulaires utilisés dans la technique nucléaire.

K. RZYMKOWSKI

DURCHLASSVERMÖGEN EINER MAGISTRALE DES MODULARSYSTEMS

Zusammenfassung

Es wurde eine Berechnung für das Durchlassvermögen von Informationen einer Magistrale der in der Kerntechnik angewendeten Modulareysteme dargestellt.

К. ЖИМКОВСКИ

ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ МАГИСТРАЛИ МОДУЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Резюме

Рассчитана пропускная способность магистрали модульных систем применяемых в ядерной технике.

Współczynniki efektywności wykorzystania magistrali w systemach modularnych

KRZYSZTOF RZYMKOWSKI

Instytut Problemów Jądrowych, Świerk

Otrzymano 1988.09.14

Autoryzowano do druku 1988.12.2

Zdefiniowano i obliczono współczynniki wykorzystania magistrali systemów modularnych stosowanych w technice jądrowej.

1. WPROWADZENIE

W eksperymentach fizyki jądrowej stosowane są powszechnie systemy modularne NIM (NUCLEAR INSTRUMENTATION MODULES), CAMAC, FASTBUS a ostatnio również VME, AMS-M, MULTIBUS I, G-64, G-128, G-96, HPIB. Prowadzone są prace adaptacyjne nad systemami MULTIBUS II i NuBUS.

Urządzenia systemów stosowanych w technice jądrowej do automatyzacji pomiarów i sterowania są przeznaczone do zbierania i przetwarzania danych pomiarowych oraz informacji umożliwiającej sterowanie eksperymentem [5].

Zgodnie ze szczegółową klasyfikacją aparatury elektronicznej do automatyzacji pomiarów i sterowania przedstawioną w pracach [1, 2, 3, 4, 6, 7, 9] można stwierdzić, że systemy do automatyzacji eksperymentów fizyki jądrowej spełniają jednocześnie wymagania dla aparatury do automatyzacji badań naukowych i systemów informatyczno-pomiarowych do scentralizowanego zbierania i rejestracji danych.

Systemy modularne mogą w technice jądrowej spełniać rolę systemów interfejsowych lub pracować jako specjalizowane zestawy autonomiczne. Niektóre z nich mogą być wykorzystywane jako rozbudowane komputery o zdecentralizowanym sterowaniu. Ponieważ istnieje możliwość adaptacji różnych systemów modularnych dla potrzeb techniki jądrowej wydaje się konieczne prowadzenie prac nad sformułowaniem kryteriów porównawczych systemów, oceny ich przydatności, jakości oraz sformalizowania ich opisu.

2. WSPÓŁCZYNNIKI EFEKTYWNOŚCI WYKORZYSTANIA WIELOPROCESOROWEGO SYSTEMU MODULARNEGO

Efektywność wieloprocessorowego systemu modularnego (sterującego lub pełniącego rolę interfejsu) pracującego w czasie rzeczywistym zależy od algorytmów sterowania kolejnością wykonywania zadań, przyjmowania i przetwarzania informacji pochodzących

ze źródeł zewnętrznych oraz kolejności jej wysyłania do innych urządzeń lub systemów.

Proces przyjmowania informacji, jej przetwarzania i wysyłania odpowiednich sygnałów do obiektów sterowanych może być zsynchronizowany. Przy zachowaniu stałych i równych odcinków oraz zgodności faz tych procesów można wykorzystać pełną szybkość pracy systemu bez strat informacji i opóźnień. Uzyskanie pełnej szybkości pracy systemu będzie możliwe przy synchronizacji czasów przyjęcia informacji z chwilą zakończenia przetwarzania poprzedniej. Ze względu na przypadkowość zachodzących procesów pracę systemów modułowych można analizować przy użyciu teorii masowej obsługi.

2.1. OKREŚLENIE WSPÓŁCZYNNIKA EFEKTYWNOŚCI WYKORZYSTANIA MAGISTRALI SYSTEMU JEDNOMAGISTRALOWEGO

System jednomagistralowy posiada prostą konstrukcję, jest uniwersalny, umożliwia łatwe zwiększenie swoich rozmiarów oraz umożliwia najczęściej równoległe przesyłanie dużej ilości informacji po tzw. magistrali równoległej stosowanej np. w systemach VME, AMS, CAMAC. W systemie MULTIBUS II magistralą równoległą jest również magistrala lokalna. Magistrale szeregowie w systemach jednomagistralowych są obecnie rzadko stosowane.

W rozważaniach przyjmuje się, że do magistrali dołączonych jest N niezależnych modułów mikrokomputerowych stanowiących źródła zgłoszeń o rozkładzie Poissona o intensywności $\lambda = \frac{1}{E}$, E — średni czas między dwoma kolejnymi zgłoszeniami. Czas

dostępu do magistrali opisany jest również przez ten rozkład z parametrem $\mu = \frac{1}{L}$, L —

średni czas pracy mikrokomputera z magistralą. Iloraz $\frac{L}{E}$ określa stosunek czasu pracy mikrokomputera z magistralą do czasu pracy nie wymagającej dostępu do magistrali.

Mikrokomputer pracuje wg sekwencji:

przygotowanie pakietu informacji — oczekiwanie na dostęp do magistrali — praca z magistralą.

Współczynnik efektywności systemu jednomagistralowego można zdefiniować

$$Q_1 = \frac{N-\eta}{N}, \quad (2.1)$$

gdzie η — średnia ilość mikrokomputerów oczekujących na dostęp do magistrali (nieczynnych).

Zgodnie z [2, 3, 8]

$$\eta = \sum_{i=1}^N (i-1) P_i, \quad (2.2)$$

gdzie

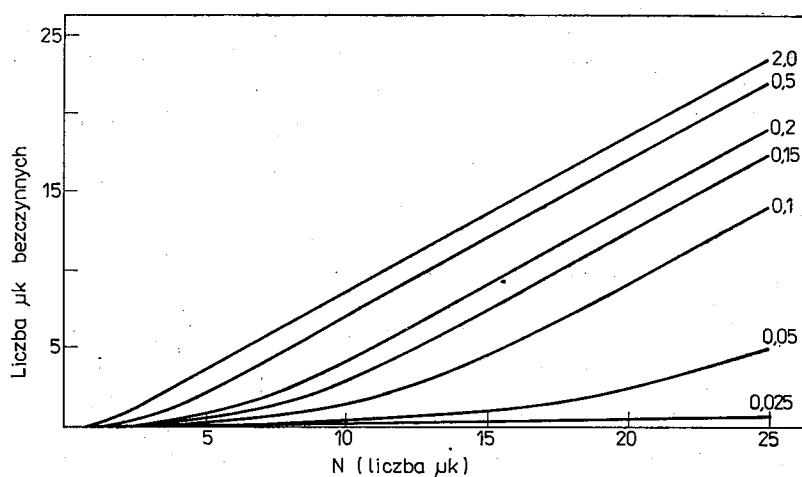
$$P_i = \frac{N!}{(N-i)!} \left(\frac{L}{E} \right)^i P_0, \quad i = 1, \dots, N$$

określa prawdopodobieństwo, że na dostęp do magistrali oczekuje i mikrokomputerów;

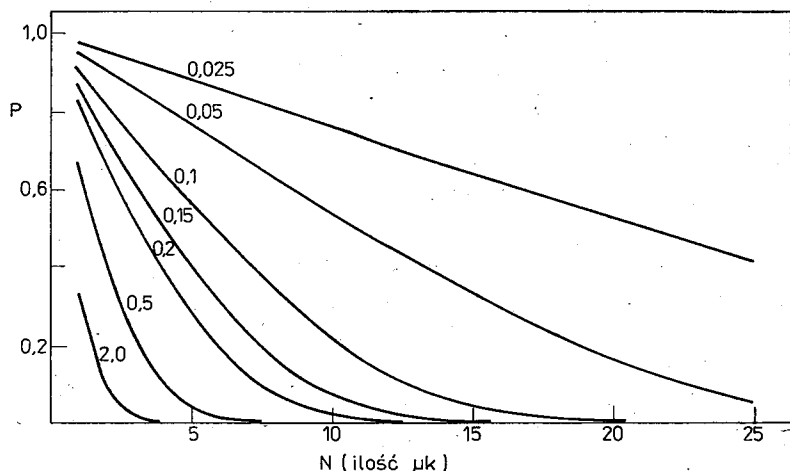
$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^N \frac{N!}{(N-i)!} \left(\frac{L}{E} \right)^i \right]^{-1} \quad (2.3)$$

określa prawdopodobieństwo niezajętości magistrali.

Na rys. 1, 2 i 3 przedstawiono zależności kolejno 2.2 (η), 2.3 (P_0) i 2.1 (Q_1).

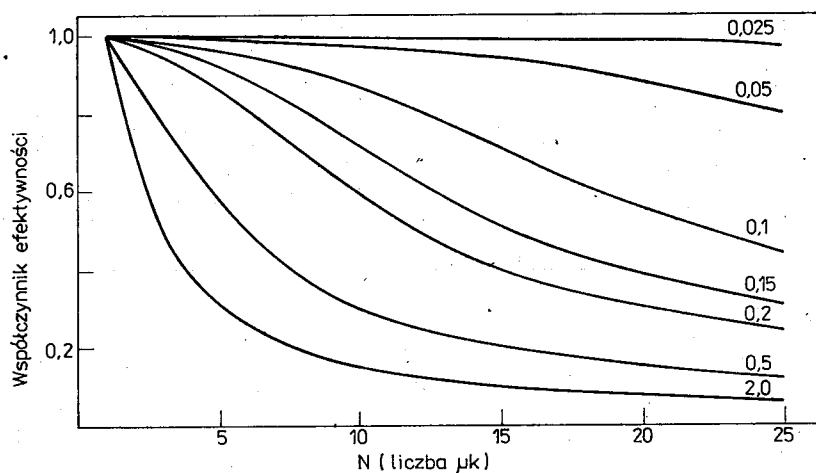


Rys. 1. Średnia ilość μ_k oczekujących na dostęp η



Rys. 2. Prawdopodobieństwo niezajętości magistrali P_0

Z analizy uzyskanych rezultatów wynika, że ze wzrostem $\frac{L}{E}$ i N efektywność Q_1 systemu jednomagistralowego maleje tzn. w systemie jednomagistralowym dużą efektywność można uzyskać przy niewielkiej ilości mikrokomputerów i małej intensywności

Rys. 3. Efektywność systemu jednomagistralowego Q_1

zgłoszeń. Ponadto z [2, 3] wynika, że przy małych wartościach $\frac{L}{E}$ mikrokomputery większość czasu przeznaczają na wykonywanie działań wewnątrz bloku, maleje wykorzystanie magistrali i efektywność systemu rośnie.

Jedną z metod zwiększenia efektywności systemu — współczynnika Q — jest zwiększenie ilości magistral. Tendencję tę można zaobserwować na przykładzie systemów CAMAC, VME, MULTIBUS (wersja MULTIBUS I wykazywała omawiane właściwości i obecnie stanowi podsystem MULTIBUS II).

2.2. OKREŚLENIE WSPÓŁCZYNNIKA EFEKTYWNOŚCI SYSTEMU WIELOMAGISTRALOWEGO

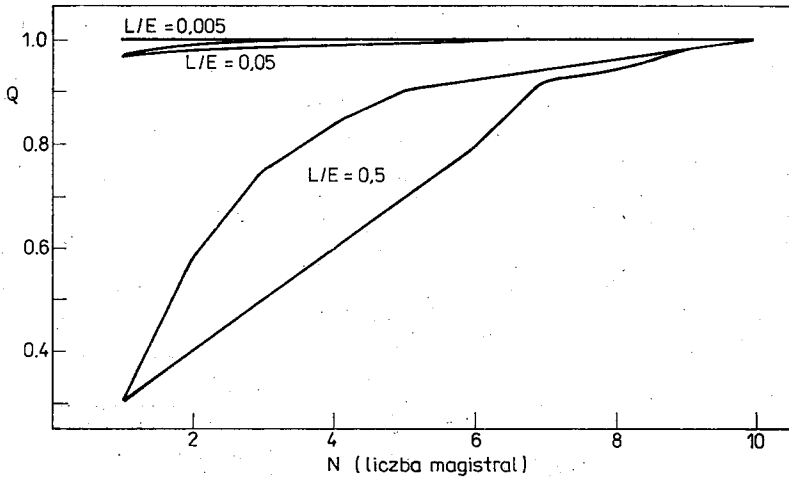
Zachowując poprzednie oznaczenia i zakładając niezależność magistral współczynnik efektywności systemu wielomagistralowego można zdefiniować

$$Q_w = \frac{\sum_{m=1}^M (N_m - \eta_m)}{\sum_{m=1}^M N_m}, \quad (2.4)$$

gdzie: m — oznacza ilość magistral w systemie. Poszczególnym magistralom można przypisać różne współczynniki wagowe określające hierarchię magistral. Współczynnik efektywności przybiera wówczas postać

$$Q_w = \frac{\sum_{m=1}^M \omega_m (N_m - \eta_m)}{\sum_{m=1}^M \omega_m N_m}. \quad (2.5)$$

ω — współczynniki wagowe.



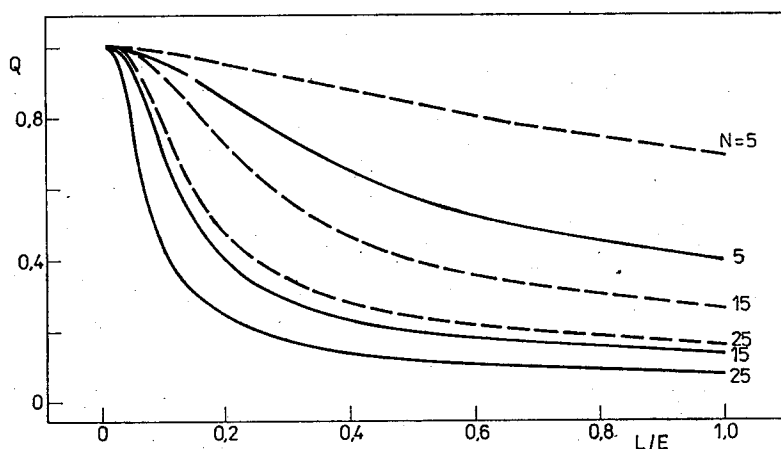
Rys. 4. Zmiany efektywności systemu wielomagistralowego

Na rys. 4 przedstawiono zmiany efektywności systemu wielomagistralowego zgodnie z zależnością 2.3. W obliczeniach założono, że w systemie pracuje 10 modułów mikrokomputerowych. Przebadano różne warianty podziału magistral między moduły mikrokomputerowe poczynając od rozkładu, w którym z jedną magistralą pracuje 9 mikrokomputerów, a na drugiej magistrali 1 (w systemie dwumagistralowym), aż do uzyskania równomiernego podziału modułów między magistralami (w systemie dwumagistralowym po 5). Analogiczne obliczenia wykonano dla różnej ilości magistrali zakładając różne $\frac{L}{E}$ (jednakowe dla wszystkich modułów). Zakres zmian efektywności systemu

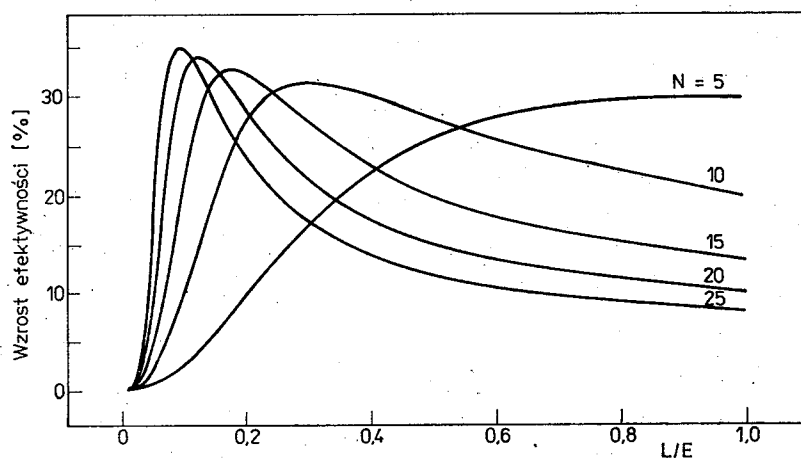
wskazuje, że najszybszy przyrost efektywności uzyskuje się przy małym $\frac{L}{E}$ (krótki czas korzystania z dostępu do magistrali przez moduł mikrokomputerowy) uzyskując wartość maksymalną. Przy dużym $\frac{L}{E}$ zwiększenie efektywności systemu uzyskiwane jest trudniej.

Dodawanie kolejnych magistral powoduje wzrost efektywności, jednakże osiągnięcie wartości maksymalnej uzyskiwane jest w przedstawionym modelu wówczas, gdy każdy z 10 modułów mikrokomputerowych steruje indywidualne magistrale. W celu uzyskania dużej efektywności systemu należy dążyć do skrócenia czasu zajętości magistrali przez poszczególne moduły.

Na rys. 5 przedstawiono zmiany efektywności systemów jedno- i dwumagistralowego zgodnie z zależnością 2.4 dla różnych ilości modułów mikrokomputerowych współpracujących z magistralami. W systemie dwumagistralowym efektywność obliczono przy założeniu równomiernego podziału modułów między obu magistralami (tzn. dla nieparzystej ilości modułów przyjęto na jednej magistrali ilość $(N-1)/2$, na drugiej $(N+1)/2$. Z przedstawionego wykresu wynika, że ze wzrostem L/E efektywność systemu jednomagistralowego maleje szybciej niż systemu dwumagistralowego. Ze wzrostem ilości mikrokomputerów współpracujących z magistralami szybkości spadku efektywności obu systemów zbliżają się.



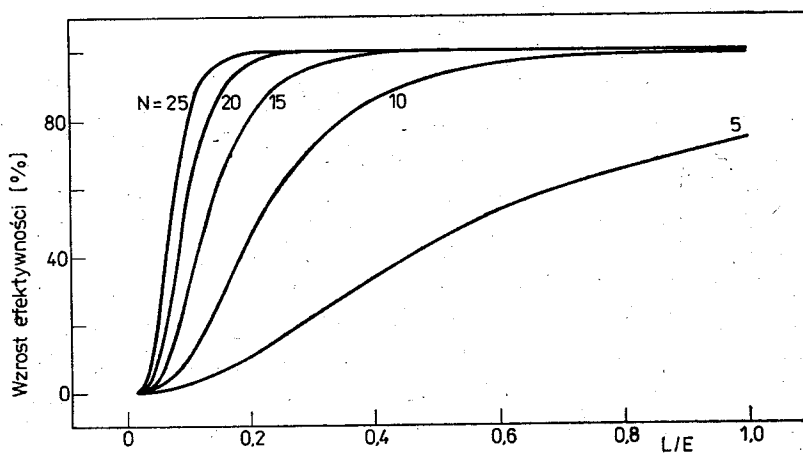
Rys. 5. Efektywność systemu jedno- i dwumagistralowego



Rys. 6. Bezwzględny wzrost efektywności po dołączeniu dodatkowej magistrali

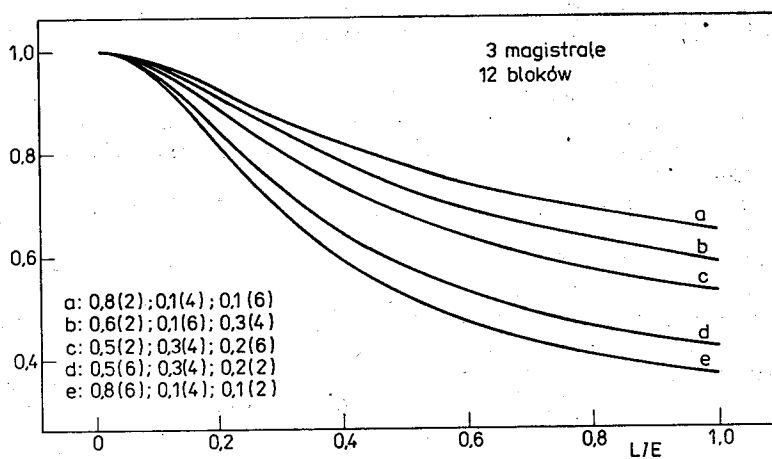
Na rys. 6 przedstawiono bezwzględny wzrost efektywności systemu magistralowego po dołączeniu dodatkowej magistrali. Z wykresu wynika, że ze wzrostem L/E przy dużej ilości modułów mikrokomputerowych efektywność systemu maleje. Wynika to ze zbyt długiego czasu współpracy modułów z magistralą. W celu uzyskania większej efektywności systemu należałoby dołączyć dodatkowe kolejne magistrale.

Na rys. 7 przedstawiono wzrost efektywności systemu dwumagistralowego w odniesieniu do jednomagistralowego. Z rysunków 6 i 7 wynika, że największe przyrosty efektywności uzyskuje się dla dużej ilości modułów mikrokomputerowych i małych L/E . W systemach, w których ilość modułów mikrokomputerowych jest niewielka lub możliwości obliczeniowe mikrokomputerów w modułach są nieduże, tzn. moduły nie mogą rozwiązywać samodzielnie większość zadań, stosowanie systemu o wielu magistralach jest niecelowe. Należy ponadto podkreślić, że w systemie wielomagistralowym każda z magistral pracuje wg innego protokołu i mikrokomputery o ograniczonych możli-



Rys. 7. Wzrost efektywności systemu po dołączeniu dodatkowej magistrali

wościach np. 8- lub 16-bitowe większość swoich zasobów muszą poświęcić na obsługę tych protokołów. Np. stosowanie starszych typów mikroprocesorów 16-bitowych (8086-INTEL) lub 8-bitowych uniemożliwi uzyskanie wysokiej efektywności systemu.



Rys. 8. Zmiany efektywności systemu wielomagistralowego

Na rys. 8 przedstawiono efektywności systemów wielomagistralowych obliczone z zależności 2.5. Przebadano różne warianty systemu składającego się z 12 modułów mikrokomputerowych dołączonych do trzech magistral. Z wykresu wynika, że efektywność maleje najszybciej w systemie, w którym najwięcej mikrokomputerów dołączonych jest do magistrali głównej (krzywa e, $\omega_1 = 0,8$, ilość komputerów 6; $\omega_2 = 0,1$, ilość komputerów 4; $\omega_3 = 0,1$, ilość komputerów 2). Wpływ pozostałych magistral jest mniej znaczący.

ZAKOŃCZENIE

Z analizy współczynników efektywności systemu wynika, że ze wzrostem ilości magistral rośnie efektywność systemu. Aby uzyskać duży wzrost efektywności należy dążyć do tego, by czas zajęcia magistrali przez dołączony do niej moduł był możliwie mały. Z uzyskanych rezultatów liczbowych wynika, że największą efektywność uzyskanoby w systemie, w którym każdy z modułów sterowałby własną magistralą tzn. najlepsza byłaby sieć niezależnych komputerów, co stanowi odejście od koncepcji systemu modularnego.

Zwiększenie ilości magistral wewnątrz systemu modularnego, mimo że powoduje wzrost efektywności, jest problematyczne, gdyż każda z magistral, z którą łączy się moduł wymaga odrębnego protokołu pracy. Pociąga to za sobą rozbudowę układową i programową. Jest to niekorzystne ze względu na ograniczone wymiary modułów. Wydaje się, że dobrym rozwiązaniem byłoby zastosowanie w systemie np. dwóch jednakowych magistral z jednakowym protokołem pracy. Informacja przesyłana byłaby przez moduł po aktualnie nie zajętej magistrali. Obsługa programowa byłaby również uproszczona.

BIBLIOGRAFIA

1. Z. Pawlak: *Systemy informacyjne. Podstawy teoretyczne*. Warszawa, 1983
2. M. Płomiński, K. Rzymkowski: *Mikrokomputerowe systemy modularne MULTIBUS II* CIE Warszawa, 1986
3. K. Rzymkowski: *Architektura cyfrowych systemów modularnych o zdecentralizowanym sterowaniu do automatyzacji eksperymentów naukowych*. DTJ CIE, nr 2-3-4, 1985, Warszawa
4. K. Rzymkowski: *Wybór wskaźników efektywności do oceny właściwości systemów modularnych*, PTJ CIE, nr 2-3-4, 1985
5. И. Ф. Колпак: *Электронная аппаратура на линии ЭВМ в физическом эксперименте*. Москва: Атомиздат, 1974
6. Б. Н. Малиновский (под ред.): *Введение в кибернетическую технику*. Москва: Научова Думка, 1979
7. Ф. Ю. Певчев, К. Б. Фиученов: *Автоматизация физического эксперимента*. Москва: Энергоатомиздат, 1986
8. В. Н. Рогинский: *Системы управления информационных систем*. Москва: Наука, 1988
9. В. М. Ордынцев: *Системы автоматизации экспериментальных научных исследований*. Москва: Машиностроение, 1986

K. RZYMKOWSKI

BUS THROUGHPUT CAPABILITY OF MODULAR SYSTEMS

Summary

The calculation of the bus throughput of information in modular systems used in nuclear technology is described.

K. RZYMKOWSKI

COEFFICIENTS D'EFFICACITÉ DE L'EXPLOITATION LES CONDUITES PRINCIPLES
DU SYSTÈMES MODULAIRES

Résumé

On a présenté la définition et le calcul de la coefficients d'efficacité de la exploitation des systèmes modulaires utilisés dans la technique nucléaire.

K. RZYMKOWSKI

EFFEKTIVITÄTSFAKTOREN DER AUSNUTZUNG EINER MAGISTRALE
IN MODULARSYSTEMEN

Zusammenfassung

Es wurden die Ausnutzungsfaktoren einer Magistrale der bei der Kerntechnik angewendeten Modularsysteme definiert und berechnet.

К. ЖИМКОВСКИ

КОЭФФИЦИЕНТЫ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАГИСТРАЛИ
МОДУЛЬНЫХ СИСТЕМ

Резюме

Определены и рассчитаны коэффициенты эффективности использования магистралей модульных систем применяемых в ядерной технике.



SPIS TREŚCI

W. Nakwaski: Prąd progowy laserów złączowych (InGa)(AsP)/InP. Cz. I: Warunek progowy, wzmocnienie lokalne, rekombinacja powierzchniowa, wyznaczenie prądu progowego	227
W. Nakwaski: Prąd progowy laserów złączowych (InGa)(AsP)/InP. Cz. II: Straty wewnętrzne, progowa koncentracja nośników, prądy ucieczki, zależność prądu progowego od temperatury	239
J. Klamka: Mikrofalowe przyrządy z fosforku indu na zakres fal milimetrowych	253
J. Mulałka, Z. Soporek: Realizacja rezystancji w filtrach scalonych MOS	267
W. Dziech: Metoda wyznaczania optymalnych parametrów adaptacyjnej dyskretyzacji sygnałów pomiarowych	285
K. Pacholski: Analiza dynamicznych właściwości amplitudowo-częstotliwościowych operacyjnych przetworników wartości średniej	295
M. Luft: Charakterystyki dynamiczne wybranych przetworników elektromechanicznych w automatycznych systemach pomiarowych	323
J. Szmitkowski: Analiza pracy wybranych układów różnicowych analogowego przetwornika ciśnienia z diodą tunelową	333
M. Nowak: Wspomagane komputerem projektowanie obwodów komutacji w falownikach o modulowanej szerokości impulsów napięcia wyjściowego	345
K. T. Januszkiewicz: Nagrzewanie indukcyjne w przesuwie rur niemagnetycznych	371
M. Kaźmierski, I. Kersz: Efektywność podłużnych ekranów przewodzących. Cz. I: Pole elektromagnetyczne i straty	387
M. Kaźmierski, I. Kersz: Efektywność podłużnych ekranów przewodzących. Cz. II: Przyrosty temperatury w układach ekranowanych	413
Z. Gacek: Zarys metodyki obliczania niezawodności zabrudzeniowej izolatorów napowietrznych	437
A. Kamińska-Pranke: Model matematyczny łuku elektrycznego stabilizowanego wirowym strumieniem gazu w plazmotronie prądu przemiennego	449
A. Kamińska-Pranke: Przebiegi napięć i prądów w obwodzie zasilania plazmotronu prądu przemiennego	467
K. Rzymkowski: Współczynniki efektywności obsługi zgłoszeń w systemach modularnych	483
K. Rzymkowski: Przepustowość magistrali systemu modularnego	491
K. Rzymkowski: Współczynniki efektywności wykorzystania magistrali w systemach modularnych	495

SUMMARY — RÉSUMÉ — ZUSAMMENFASSUNG

W. Nakwaski: Threshold current of (InGa)(AsP)/InP junction lasers. Part I: Threshold condition, local gain, interfacial recombination, threshold current	227
Courant de seuil des lasers conjugués (InGa)(AsP)/InP. P. I: Condition de seuil, amplification locale, recombinaison superficielle, détermination du courant de seuil	
Schwellenstrom der (InGa)(AsP)/InP-Laserdioden. Teil I: Schwellenbedingung, Platzstärkung, Flächenrekombination, Schwellenstrombestimmung	
W. Nakwaski: Threshold current of (InGa)(AsP)/InP junction lasers. Part II: Internal losses,	

threshold carrier concentration, leakage currents, simplified model, temperature dependence of threshold current	239
Courant de seuil des lasers conjugués (InGa)(AsP)/InP. P. II: Pertes internes, densité de seuil des porteurs, courants de fuite, dépendance du courant de seuil de la température	
Schwellenstrom der (InGa)(AsP)/InP — Laserdioden. Teil II: Inne Verluste, Schwellenkonzentration der Ladungsträger, Fluchtströme, Vereinfachtes Modell, Temperaturabhängigkeit des Schwellenstroms	
J. Klamka: Indium phosphide microwave devices for millimeter-waves	253
Les composants microondes de phosphure d'indium dans le niveau des ondes millimétriques	
Mikrowellenbauelemente aus Indiumphosphid für den Längenbereich der Millimeterwellen	
J. Mula wka, Z. Soporek: The resistance in MOS integrated filters	267
Réalisation de la résistance en filtres intégrés MOS	
Resistanzrealisationen in integrierten Filtern MOS	
W. Dziech: Method of determining optimum parameters of adaptively sampled measuring signals	285
Méthode de détermination des paramètres optimaux d'échantillonnage adaptatif des signaux mesurés	
Bestimmungsmethode für die Optimalkenndaten der adaptiven Messsignalabtastung	
K. Pacholski: Analysis of frequency characteristics of operational rectifiers	295
Analyse des propriétés fréquentielles des redresseurs opérationnels pleine-onde	
Analyse der dynamischen Eigenschaften der Amplitude und des Einflusses der Frequenz bei Operationswandlern des Mittelwertes	
M. Luft: Dynamic characteristics of selected electro-mechanical transducers in automatic measuring systems	323
Caractéristiques dynamiques des convertisseurs électromécaniques choisis dans les systèmes de mesure automatiques	
Dynamische Charakteristiken gewählter elektromechanischer Wandler in automatischen Messsystemen	
J. Szmitkowski: Analysis of the operation of certain differential systems of an analog pressure transducer provided with tunnel diode	333
Analyse du travail des systèmes différentiels choisis du transducteur de pression à diode tunnel	
Arbeitsanalyse gewählter Differentialsysteme eines Analogdruckumsetzers mit Tunneldiode	
M. Nowak: Computer aided design of commutation circuits for PWM inverters	345
Etablissement du projet des circuits de commutation à l'aide d'un ordinateur, dans les onduleurs à modulation d'impulsions de tension de sortie en largeur	
Komputergestütztes Entwerfen von Löschsaltungen für Pulswechselrichter	
K. T. Januszkiewicz: Continuous induction heating of non-magnetic tubes	371
Chauffage par induction des tubes non-magnétiques en continu	
Induktive Vorschubserwärmung der nichtmagnetischen Röhren	
M. Kaźmierski, I. Kersz: Effectivity of longitudinal conducting screens. Part I: Electromagnetic field and stray losses	387
Efficacité des écrans conducteurs longitudinaux. Partie I: Champ électromagnétique et les pertes	
Wirksamkeit der leitenden Längsabschirmung. Teil I: Elektromagnetisches Feld und Verluste	
M. Kaźmierski, I. Kersz: Effectivity of longitudinal conducting screens. Part II: Temperature rise in screened systems	413
Efficacité des écrans conducteurs longitudinaux. Partie II: Elévations de la température dans les systèmes blindés	
Wirksamkeit der leitenden Längsabschirmung. Teil II: Temperaturanstieg in Abschirmungssystemen	
Z. Gacek: Outline of the methodology allowing to calculate the pollution reliability of overhead insulators	437

Esquisse de la méthodologie permettant de calculer la fiabilité des isolateurs aériens pollués	
Wahl des Berechnungsverfahrens für die Verschmutzungsbeständigkeit von Freiluftisolatoren	
A. Kamińska-Pranke: Mathematical model of an electric arc in a plasmatron with a vortex gas stabilisation	449
Modèle mathématique d'un arc électrique stabilisé d'un vortex dans un plasmatron du courant alternatif	
Mathematisches Modell eines durch Gasstromwirbel im Wechselstromplasmatron stabilisierten Lichtbogens	
A. Kamińska-Pranke: Calculation of the arc voltage and current intensity in the power circuit of an A. C. plasmatron	467
Tensions et courants dans le circuit d'alimentation du plasmatron du courant alternatif	
Strom- und Spannungsverlauf im Speisekreis eines Wechselstromplasmatrons	
K. Rzymkowski: Effectivity factors of handling entries in modular systems	483
Coefficients d'efficacité de la desserte des appels dans les systèmes modulaires	
Effektivitätsfaktoren der Bedienung von Meldungen in Modularsystemen	
K. Rzymkowski: Efficiency factors of the bus throughput of modular systems	491
Transmittance des conduites principales du système modulaire	
Durchverlassvermögen einer Magistrale des Modularsysteme	
K. Rzymkowski: Bus throughput capability of modular systems	495
Coefficients d'efficacité de l'exploitation les conduites principales du systèmes modulaires	
Effektivitätsfaktoren der Ausnutzung einer Magistrale in Modularsystemen	

СОДЕРЖАНИЕ

В. Накваски: Пороговый ток лазерных диодов на основе (InGa)(AsP)/InP Часть 1. Пороговое условие, местное усиление, поверхностная рекомбинация, пороговый ток	227
В. Накваски: Пороговый ток лазерных диодов на основе (InGa) (AsP)/InP Часть 2. Внутренние потери, пороговая концентрация носителей, токи утечки, упрощенная модель, температурная зависимость порогового тока	239
Е. Клямка: Микроволновые приборы из фосфида индия, работающие в диапазоне миллиметровых волн	253
Я. Мулявка, З. Сопорек: О реализации активных сопротивлений в интегральных фильтрах MOS	267
В. Дзех: Метод определения оптимальных параметров адаптивной дискретизации измерительных сигналов	285
К. Пахольски: Анализ динамических амплитудно-частотных свойств операционных преобразователей среднего значения	295
М. Люфт: Динамические характеристики некоторых электромеханических Датчиков измерительных систем	323
Ю. Шмитковски: Анализ работы избранных схем разностного аналогового преобразователя давления с туннельным диодом	333
М. Новак: Проектирование с помощью вычислительных машин схем коммутации инверторов работающих с модуляцией импульсов выходного напряжения	345
К. Янушкевич: Индукционный нагрев при передвижении немагнитных труб	371
М. Казьмерски, И. Керш: Эффективность продольных проводящих экранов Часть 1. Электромагнитное поле и потери	387
М. Казьмерски, И. Керш: Эффективность продольных проводящих экранов Часть 2. Перегрев в экранируемых системах	413
З. Гацек: Эскиз методики вычисления надёжности загрязненных воздушных изоляторов	437

А. Каминьска - Пранке: Математическая модель электрической дуги стабилизированной вихревым потоком газа в плазмотроне переменного тока	449
А. Каминьска - Пранке: Напряжения и силы тока в цепи плазмотрона переменного тока	467
К. Жимовски: Коэффициенты эффективности обслуживания запросов в модульных системах	483
К. Жимовски: Пропускная способность магистрали модульной системы	491
К. Жимовски: Коэффициенты эффективности использования магистрали модульных систем	495

WYTYCZNE DLA AUTORÓW

Komitety Redakcyjne proszą o przestrzeganie następujących wytycznych przy przygotowywaniu maszynopisów artykułów nadsyłanych do opublikowania.

1. *Tematyka i charakter artykułów.* Redakcja przyjmuje do druku prace przeglądowe, kompilacyjne i monograficzne, wchodzące w zakres szeroko pojętej elektrotechniki, które powinny jednak zawierać własny wkład twórczy Autora polegający na: oryginalnym ujęciu zagadnienia, własnej klasyfikacji, krytycznej ocenie (teorii lub metod), wyciągnięciu wniosków co do celowości takiego lub innego działania, prognoście itp. Autorów obowiązuje jak najdalej posunięta zwięzłość.

2. *Wymagania podstawowe.* Artykuły należy nadsyłać w maszynopisie, w dwóch egzemplarzach, w zasadzie w języku polskim; dopuszczalne są jednak również artykuły w językach: angielskim, francuskim, niemieckim i rosyjskim. Maszynopis powinien być napisany jednostronnie przez czarną taśmę, na maszynie do pisania z niezabrudzonymi i nieuszkodzonymi znakami. Dopuszcza się odręczne czytelne uzupełnianie tekstu atramentem lub długopisem kolorem czarnym lub ciemnoniebieskim znaków specjalnych oraz znaków w językach, których alfabetów nie ma na maszynach do pisania, np. znaków matematycznych, chemicznych, liter greckich. Maszynopis powinien być napisany na papierze do maszyny do pisania koloru białego, formatu A4; numeracja ciągła na wszystkich stronach.

3. *Sposób pisania tekstu.* Tekst w maszynopisie powinien być pisany bez używania wyróżnień, a w szczególności nie dopuszcza się spacjowania (rozstrzelenia), podkreślania i pisania tekstów dużymi literami, z wyjątkiem wyrazów, które umownie pisze się dużymi literami (np. FORTRAN). Proponowane wyróżnienia Autor może zaznaczyć w maszynopisie (zwykłym ołówkiem) za pomocą przyjętych znaków adiustacyjnych (podkreślenie linią przerywaną — spacjowanie, podkreślenie linią ciągłą — pogrubienie, podkreślenie wężykiem — kursywa itp.). Na jednej stronie maszynopisu powinno być 30 wierszy po około 60 znaków łącznie z odstępami. Marginesy każdej strony powinny mieć następujące wymiary: górny — ok. 25 mm, lewy — ok. 35 mm. Tekst maszynopisu powinien być napisany z podwójnym odstępem między wierszami; tytuły i podtytuły małymi literami. Akapity należy rozpoczynać z wcięciem równym trzem uderzeniom maszyny do pisania.

4. *Sposób pisania tablic.* Tablice powinny być napisane w układzie zbliżonym do układu zecerskiego. Tytuły rubryk pionowych i poziomych powinny być napisane małymi literami z podwójnym odstępem między wierszami. Przypisy (notki) dotyczące tablic należy pisać bezpośrednio pod tablicą. Tablice należy numerować kolejno liczbami arabskimi; u góry każdej tablicy podać tytuł. Tablice umieścić na końcu maszynopisu.

5. *Sposób pisania wzorów matematycznych.* Rozmieszczenie znaków, cyfr, liter i odstępów powinno być zbliżone do rozmieszczenia elementów druku. Wskaźniki i wykładniki potęg powinny być napisane wyraźnie i być prawidłowo obniżone lub podwyższone w stosunku do linii wiersza podstawowego. Znaki nad literami i cyframi: strzałki, linie, kropki, daszki itp. powinny być napisane dokładnie nad tymi elementami, do których się odnoszą. Numery wzorów należy umieszczać z prawej strony.

6. *Przygotowanie materiału ilustracyjnego.* Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonywać zgodnie z obowiązującymi normami Polskiego Komitetu Normalizacji, Miar i Jakości (oznaczonymi literą E i numeracją od 01200 do 01245; przydatna może się okazać książka K. Michela, T. Sapińskiego: „Rysunek techniczny elektryczny”), na oddzielnych arkuszach, z podaniem kolejnych numerów rysunków. W maszynopisie artykułu na marginesie, obok właściwego tekstu należy podać jedynie odnośny numer rysunku, a na oddzielnym arkuszu wykaz podpisów pod rysunki. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót: rys.). U samego dołu rysunku (a przy fotografiach na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, tytuł pracy i nazwisko autora. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.

7. *Streszczenia.* Do każdej nadsyłanej pracy należy dołączyć krótkie streszczenie (analizę) w języku polskim (w 2 egz.) oraz streszczenie (w 2 egz.) w języku angielskim. W razie niemożności

przygotowania streszczeń w języku obcym Autor powinien podać przynajmniej terminy obcojęzyczne niezbędne do wykonania tłumaczenia.

8. *Bibliografia.* Na końcu maszynopisu należy podać w przyjętej przez Autora kolejności (np. chronologicznej, alfabetycznej itp.) wykaz publikacji, na które Autor w tekście się powołuje, lub które uważa za słuszne wymienić z innych powodów. W każdej pozycji wykazu należy podać w następującej kolejności: pierwsze litery imion, nazwisko autora, po czym po przecinku pełny tytuł dzieła lub artykułu; dalej, w przypadku książki — wydawcę, miejsce wydania i rok, a w przypadku artykułu — tytuł czasopisma, numer zeszytu, rok wydania i ewent. numer strony. Pozycje wykazu powinny być ponumerowane, bez nawiasów kwadratowych.

9. *Informacje dodatkowe.*

— Niezastosowanie się Autora do podanych wyżej wytycznych pociągnie za sobą konieczność potrącenia z honorarium autorskiego kosztów związanych z doprowadzeniem dostarczonych materiałów do postaci wymaganej przez Redakcję.

— Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egz. odbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze Autor może zamówić w Redakcji na własny koszt.

— Autora obowiązuje korekta autorska, którą należy zwracać w ciągu 5 dni pod adresem Redakcji.

— Redakcja prosi Autorów o podawanie miejsca pracy i adresu prywatnego, a także o powiadamianie o zmianie adresu.

Rozprawy Elektrotechniczne

Kwartalnik

Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne. Informacji o cenach udzielają urzędy pocztowe oraz oddziały kolportażowe w miastach.

Prenumeratę przyjmują:

- oddziały kolportażowe właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora — odbioru zamówionych egzemplarzy dokonuje prenumerator w wyznaczonych punktach sprzedaży lub w inny, uzgodniony sposób,
- urzędy pocztowe i listonosze — od prenumeratorów z terenów wiejskich lub innych miejscowości, w których nie ma oddziałów kolportażowych, a w miastach tylko od osób niepełnosprawnych — poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pod wskazany adres pod warunkiem uiszczenia dodatkowej opłaty za każdy doręczony egzemplarz. Wysokość opłat za każdy kwartał ustala poczta,
- Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 — tylko od prenumeratorów zlecających dostawę za granicę.

Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą — koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.

Terminy przyjmowania prenumeraty:

- na kraj i za granicę — do 20.XI. na I kw. roku następnego
do 20.II. na II kw.
do 20.V. na III kw.
do 20.VIII. na IV kw.

Bieżące i wcześniejsze numery można nabyć w Księgarni Państwowego Wydawnictwa Naukowego, ul. Miodowa 10, Warszawa. Również można je nabyć, a także zamówić (przesyłka za zaliczeniem pocztowym) we Wzorcowni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN, Pałac Kultury i Nauki, 00-901 Warszawa.

Subscription orders for all the magazines published in Poland available through the local press distributors or directly through the Foreign Trade Enterprise ARS POLONA, 00-068 Warszawa, Krakowskie Przedmieście 7, Poland. Our bankers: BANK HANDLOWY S.A. 20 1061-710-15107-787.

Rozpr. Elektrot. T. 35, z. 2, 225—512, Warszawa 1989

Indeks 37483

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

PLISSN 0035-9386

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XXXV — ZESZYT 3

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1989

KOMUNIKAT

Jak już informowaliśmy naszych AUTORÓW i CZYTELNIKÓW

„ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE”

decyzją Wydziału IV Nauk Technicznych Polskiej Akademii Nauk od 1988 r. stały się czasopismem Komitetu Elektroniki i Telekomunikacji PAN, natomiast „Archiwum Elektrotechniki” jest czasopismem Komitetu Elektrotechniki PAN. W związku z powyższym uległy zmianie profile tematyczne obu tych kwartalników.

„Rozprawy Elektrotechniczne” publikują prace naukowe związane z podstawami elektroniki i telekomunikacji oraz prace z zakresu mikroelektroniki i zastosowań elektroniki, radiotechniki, telekomunikacji i elektroniki medycznej.

Zamieszczane są prace oryginalne, w tym przyczynkowe oraz zawierające analizy porównawcze metod lub systemów, systematyczne ujęcie określonej dziedziny wiedzy, omówienie aktualnego stanu lub postępu danej gałęzi techniki oraz omówienie perspektyw rozwojowych. Czasopismo jest przeznaczone dla specjalistów oraz studentów zajmujących się powyższą tematyką.

„Archiwum Elektrotechniki” natomiast publikuje prace naukowe dotyczące podstaw elektrotechniki oraz prace z zakresu energoelektroniki, elektroenergetyki, konstrukcji maszyn i urządzeń elektrycznych itp.

Redakcja „Rozpraw Elektrotechnicznych” poczynając od początku roku 1989 przyjmuje prace odpowiadające nowemu profilowi tematycznemu czasopisma.

W związku z powyższymi zmianami, za zgodą władz Polskiej Akademii Nauk, od pierwszego zeszytu 1990 roku

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

będą wydawane pod nowym tytułem

KWARTALNIK ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI
(ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATIONS QUARTERLY)

Redakcja

ROZPRAW ELEKTROTECHNICZNYCH

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

TOM XXXV — ZESZYT 3

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA

RADA REDAKCYJNA

Przewodniczący

prof. dr ADAM SMOLIŃSKI
członek rzeczywisty PAN

Członkowie

prof. dr hab. DANIEL JÓZEF BEM, prof. dr hab. inż. MICHAŁ BIAŁKO — czł. rzecz. PAN, prof. dr inż. KAZIMIERZ DZIECIOŁOWSKI, prof. dr hab. inż. STEFAN HAHN — czł. koresp. PAN, prof. dr inż. ANDRZEJ HAŁAS, prof. dr inż. ZDZISŁAW KACHLICKI, prof. dr hab. inż. BOHDAN MROZIEWICZ, prof. dr inż. JERZY OSIOWSKI, prof. dr inż. WITOLD ROSIŃSKI, prof. dr inż. STANISŁAW SŁAWIŃSKI, prof. dr hab. inż. STEFAN WĘGRZYN, prof. dr hab. inż. WIESŁAW WOLIŃSKI, prof. dr inż. ANDRZEJ ZIELIŃSKI, prof. dr inż. MARIAN ZIENTALSKI

REDAKCJA

Redaktor Naczelny

prof. dr hab. inż. WIESŁAW WOLIŃSKI

Zastępca Redaktora Naczelnego

doc. dr inż. KRYSTYN PLEWKO

Sekretarz Odpowiedzialny

mgr KRYSTYNA LELAKOWSKA

ADRES REDAKCJI

00-665 Warszawa, ul. Nowowiejska 15/19 Politechnika,
Instytut Telekomunikacji, Gmach im. prof. JANUSZA GROSZKOWSKIEGO

Dyżury Redakcji: środy i piątki, godz. 14—16
tel. 28 89 81 lub 210 07-737

Telefony domowe: Redaktora Naczelnego: 12 17 65
Zast. Red. Naczelnego: 26 83 41
Sekretarza Odpowiedzialnego: 25 29 18

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

Warszawa, ul. Miodowa 10

Nakład 480(402+78)	Oddano do składania w maju 1989 r.
Ark. wyd. 18,5	Podpisano do druku w lipcu 1990 r.
Ark. druk. 14,5	
Papier druk. b. sat. kl. III 70 g, 70×100	Cena w prenumeracie 350,—
Zamówienie nr 452/12/89	

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

O pewnym zastosowaniu zasady minimum mocy

CZESŁAW RAJSKI

*Instytut Podstaw Elektroniki, Politechnika Warszawska**Otrzymano 1989.01.04**Autoryzowano do druku 1989.01.11*

Praca dotyczy teorii stacjonarnych, nieliniowych systemów dynamicznych o stałych skupionych. W poprzedniej pracy autor wykazał, że istnieje taka klasa systemów, dla której pewna wielkość — zwana mocą sterującą — w każdej chwili osiąga minimum dla rzeczywistego ruchu. W pracy zbadano możliwość zastosowania zasady minimum mocy sterującej do numerycznego rozwiązywania niektórych obwodów elektrycznych. Analiza prostego obwodu nieliniowego R, C przy wymuszeniu sinusoidalnym wykazała, że prąd w obwodzie może być wyznaczony bez użycia interpolacji lub aproksymacji. W postępowaniu numerycznym są wykorzystywane jedynie bezpośrednie wyniki pomiarów charakterystyk elementów. Wydaje się jednakże, że nawet w przypadkach liniowych omawiana zasada nie zapewnia korzyści w obliczeniach numerycznych.

Praca niniejsza stanowi próbę zastosowania zasady minimum mocy do stacjonarnych sieci elektrycznych o stałych skupionych. Opisując układy dynamiczne o skończonej liczbie stopni swobody będziemy używali oznaczeń następujących:

- q — macierz wierszowa uogólnionych niezależnych współrzędnych tzn. ładunków na kondensatorach, skojarzeń magnetycznych w cewkach, przesunięć liniowych lub obrotów,
- $\dot{q}$ — macierz wierszowa niezależnych uogólnionych szybkości tzn. natężeń prądu, różnic potencjałów, szybkości liniowych lub kątowych,
- p — macierz wierszowa niezależnych uogólnionych pędów tzn. skojarzeń magnetycznych, ładunków na kondensatorach, pędów lub momentów pędu,
- $\dot{p}$ — macierz wierszowa niezależnych uogólnionych sił tzn. różnic potencjałów, natężeń prądu, sił lub momentów sił.

Definiujemy trzy skalary: koenergię kinetyczną, energię potencjalną i funkcję strat.

$$T' = \int_0^t \dot{p} \dot{q}^t; \quad U = \int_0^t \dot{p} dq^t; \quad F = \frac{1}{2} \int_0^t \dot{p} \dot{q}^t.$$

Wskaźnik t oznacza transpozycję.

Zasada minimum mocy głosi, że ruch układu dynamicznego w przestrzeni fazowej odbywa się w ten sposób, iż w każdej chwili

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}^t} \left[\frac{d}{dt} (T' + U) + F \right] = \mathbf{0}^t \quad (1)$$

tn. iż w każdej chwili trajektoria układu jest stacjonarna ze względu na macierz szybkości uogólnionych. Przeważnie jest tak, że każdy punkt trajektorii jest nie tylko stacjonarny ale stanowi minimum. Można dowieść [2, str. 39], że zachodzi to wówczas i tylko wówczas, gdy funkcja strat zależy od wszystkich szybkości uogólnionych.

Można ponadto wykazać, że warunkiem dostatecznym i koniecznym ważności zasady minimum mocy jest znikanie wszystkich mieszanych drugich pochodnych funkcji Lagrange'a względem uogólnionych współrzędnych i uogólnionych szybkości [2, str. 37]. Pomimo tego, że warunków tych jest n^2 (przy n stopniach swobody), istnieje obszerna klasa układów dynamicznych spełniających te warunki. Należą do niej m.in. wszystkie stacjonarne sieci elektryczne o stałych skupionych, zarówno liniowe, jak i nieliniowe, zarówno parametryczne, jak i nieparametryczne.

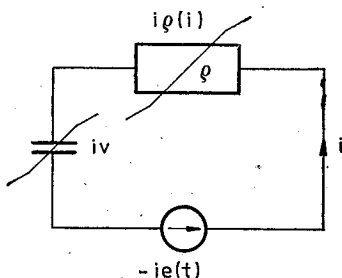
W dalszym ciągu będziemy rozpatrywali tylko sieci oporowo-pojemnościowe. Energii kinetycznej w takich układach nie ma [1, str. 20], pod warunkiem, oczywiście, że jako współrzędne uogólnione przyjmiemy ładunki. Przy takim ograniczeniu równanie (1) można uprościć korzystając ponadto z okoliczności, że jeśli funkcja różniczkowana zależy wyłącznie od czasu i od macierzy położenia i szybkości, to operator pochodnej całkowitej względem czasu można przekształcić w sposób następujący

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}. \quad (2)$$

Ponieważ w naszym przypadku energia potencjalna nie zależy w sposób jawny od czasu, to zasada minimum mocy, którą będziemy ściślej nazywali zasadą minimum mocy sterującej, przybiera postać

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} (\mathbf{p}\dot{\mathbf{q}}^t + F) = \mathbf{0}^t. \quad (3)$$

Próbie zastosowania tej zasady zaczniemy od pojedynczego obwodu zasilanego harmonicznym źródłem napięciowym (rys. 1). Zasada minimum mocy sterującej została po-



Rys. 1. Składowe mocy sterującej w obwodzie z elementami nieliniowymi

myślana dla systemów biernych. Aby ją uogólnić na systemy zawierające źródła energii uznamy każde źródło za element akumulujący ujemną energię potencjalną. Wartość jej pochodnej całkowitej względem czasu jest równa mocy dostarczanej przez źródło.

Niechaj i oznacza prąd w obwodzie, u — napięcie na kondensatorze, zaś $e(t)$ — SEM źródła. W tym przypadku macierz $\dot{q}$ uogólnionych szybkości należy zastąpić skalarem i a macierz $\dot{p}$ uogólnionych sił należy zastąpić skalarem u różnicy potencjałów na kondensatorze. W wyniku tych podstawień otrzymujemy warunek stacjonarności mocy w postaci

$$-\frac{\partial}{\partial i} [iu + iq(i) - ie(t)] = 0, \quad (4)$$

w którym q oznacza charakterystykę rezystora. Ponieważ skądinąd wiemy, że w każdym punkcie stacjonarności zachodzi minimum, to równanie (4) wolno jest zapisać w równoważnej mu postaci następującej

$$\text{Jeśli } P(i) = iu + iq(i) - ie(t) \quad (5)$$

$$\text{to } (\exists j)(i = j) \rightarrow P(i) = P_{\max}.$$

Wyrażenie w nawiasach kwadratowych we wzorze (4) stanowi sumę spadków napięć w obwodzie. W klasycznym ujęciu żądamy, aby ta suma w każdej chwili była równa zeru. Zasada minimum mocy żąda, aby ta suma dla rzeczywistego przebiegu przyjmowała w każdej chwili wartość minimalną. Jest to, oczywiście, warunek słabszy a naszym zadaniem będzie wykazanie, że co najmniej w naszym przykładzie jest on dostateczny. Obecnie przygotujemy metodę numeryczną rozwiązywania układu równań (5) i (6).

Oznaczmy przez $i_1, i_2, \dots, i_N$ wartości prądu, przy których będziemy mierzyli spadki napięć na rezystorze. Załóżmy ponadto, że prąd wirtualny w obwodzie może przyjmować tylko wartości należące do tego zbioru prądów. Jeśli chodzi o kondensator, to założymy, że dysponujemy układem pomiarowym, który pozwala na mierzenie pojemności przyrostowej w funkcji napięcia polaryzującego u' . Pomiar wykonujemy przy napięciach polaryzujących $u'_1, u'_2, \dots, u'_N$ kolejno równych pomierzonym spadkom napięcia na rezystorze. Zatem dla każdego wskaźnika k zachodzi

$$u'_k = q(i_k) \quad (7)$$

Niechaj wartość pojemności przyrostowej w otoczeniu k -tego punktu pomiaru będzie C_k . Wobec tego przyrost ładunku w otoczeniu k -tego punktu pomiaru będzie $C_k u'_k$ a ładunek q_n wprowadzony na kondensator przy zmianie napięcia polaryzującego od 0 do u'_n będzie

$$q_n = \sum_{k=1}^n C_k u'_k$$

Moc sterująca określona równaniem (5) zależy od prądu oraz od dwóch parametrów: napięcia u' na kondensatorze i czasu t . Obliczenia będziemy wykonywali dla czasów różniących się kolejno od siebie o pewien stały odstęp czasu np. t' . Przyjmiemy również, że w chwili początkowej np. t_1 napięcie na kondensatorze jest równe zeru. Wobec tego moc sterującą wyznacza równanie dla chwili t_1

$$P_1(i_1) = i_1 q(i_1) - i_1 e(t_1)$$

Na podstawie tego wzoru obliczamy zbiór możliwych wartości mocy sterującej dla wartości prądu w granicach od i_{-N} do i_N . Niechaj j_1 będzie wartością prądu minimizującą ten zbiór. Przechodzimy do obliczenia prądu w chwili t_2 . Ponieważ $t_2 = 2t'$, to mając znaną

postać analityczną przebiegu SEM możemy obliczyć $e(2t')$. W czasie od t_1 do t_2 ładunek na kondensatorze wzrośnie do wartości $j_1 t_1$ a napięcie na nim osiągnie wartość $C_1 j_1 t_1$. Aby uniknąć interpolacji za wartość j_2 , która minimizuje moc sterującą w chwili t_2 przyjmujemy najbliższą dopuszczalną wartość prądu, np. j'_2 . Wobec tego napięcie na kondensatorze w chwili t_2 będziemy liczyli ze wzoru

$$u'_2 = u'_1 + C_1 j'_1 t'$$

zaś moc sterującą w chwili t_2 będziemy liczyli ze wzoru

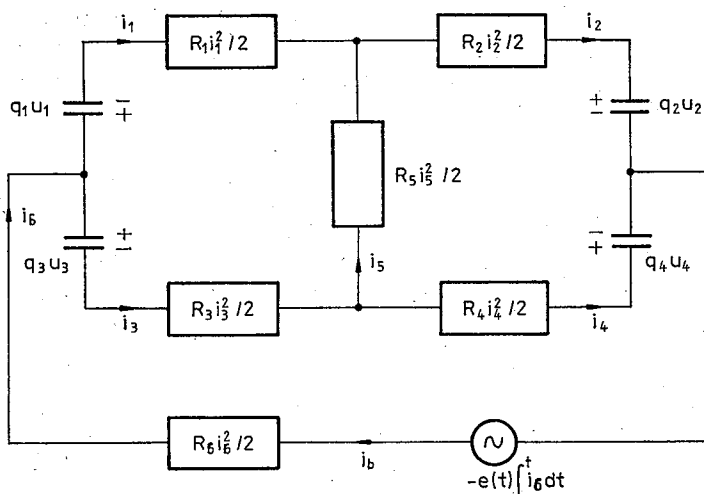
$$P_2(i_2) = i_2 u'_2 + i_2 \varrho(i_2) - i_2 e(t_2)$$

Proces minimizacji wyłoni nam pewien prąd j_2 , który określi następny przyrrost napięcia na kondensatorze $u'_3 - u'_2 = C_2 j'_2 t'$ itd.

Podstawą wyżej opisanej metody iteracyjnej jest to, że dla napięcia skokowego kondensator w pierwszej chwili stanowi zwarcie. Wobec tego obliczenie przebiegu prądu sprowadza się w każdym cyklu obliczeniowym do rozwiązywania obwodu prądu stałego. W każdym cyklu obliczamy wartość SEM oraz wartość przeciwnapięcia na kondensatorze. Istotną trudność stanowi brak kryterium końca postępowania iteracyjnego. Dla układów nieliniowych nie ma bowiem podziału analitycznego na składową ustaloną i składową przejściową. Dla pokonania tej trudności można zastosować postępowanie następujące.

Rozpatrzmy parę obwodów zawierających takie same elementy bierne ale nieco inne źródła, jedno z SEM o postaci $e_m \sin \omega t$ drugie zaś postaci $e_m \cos \omega t$. Niezależnie od charakteru nieliniowości elementów obwodu suma kwadratów prądów ma w stanie ustalonym stałą wartość. Obliczamy, wobec tego, ciąg różnic kolejnych kwadratów prądów sum i obliczenia przerywamy wówczas, gdy różnica kolejnych wyrazów staje się dostatecznie mała wobec wyrazu ostatnio obliczonego.

Z kolei rozpatrzmy zastosowanie zasady minimum mocy sterującej do układu mostkowego (rys. 2). Równania układu otrzymuje się z rozważań następujących. Energia poten-



Rys. 2. Energia potencjalna i funkcja strat w układzie liniowym

cialna układu jest sumą energii potencjalnych pól elektrycznych kondensatorów oraz ujemnej energii potencjalnej źródła

$$U = u_1 q_1 + u_2 q_2 + u_3 q_3 + u_4 q_4 - e(t) \int i_6 dt.$$

Dolna granica całki jest w tym przypadku obojętna. Funkcja strat F jest połową mocy traconej

$$F = R_1 i_1^2/2 + R_2 i_2^2/2 + R_3 i_3^2/2 + R_4 i_4^2/2 + R_5 i_5^2/2 + R_6 i_6^2/2.$$

Biorąc pod uwagę, że dla wyznaczenia pochodnej całkowitej energii potencjalnej względem czasu trzeba zamiast wzoru (2) użyć wzoru ogólniejszego

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + \dot{q}_3 \frac{\partial}{\partial q_3} + \dot{q}_4 \frac{\partial}{\partial q_4} + \dot{q}_6 \frac{\partial}{\partial q_6},$$

z którego otrzymujemy na moc sterującą wyrażenie następujące

$$P = \frac{d}{dt} U + F = u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3 + u_4 i_4 + e(t) i_6 + R_1 i_1^2/2 + R_2 i_2^2/2 + R_3 i_3^2/2 + R_4 i_4^2/2 + R_5 i_5^2/2 + R_6 i_6^2/2.$$

Wykorzystując zależności

$$i_1 = i_a, \quad i_2 = i_b, \quad i_3 = i_c - i_a, \quad i_4 = i_c - i_b, \quad i_5 = i_b - i_a, \quad i_6 = i_c$$

i biorąc pochodne cząstkowe mocy sterującej względem prądów obwodowych otrzymujemy następujące równania układu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial i_a} P &= u_1 - u_3 + (R_1 + R_3 + R_5) i_a - R_5 i_b - R_3 i_c = 0 \\ \frac{\partial}{\partial i_b} P &= u_2 - u_1 - R_5 i_a + (R_2 + R_4 + R_5) i_b - R_4 i_c = 0 \\ \frac{\partial}{\partial i_c} P &= u_3 + u_4 - e(t) - R_3 i_a - R_4 i_b + (R_3 + R_4 + R_6) i_c = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

W równaniach tych nieznane są zarówno napięcia, jak i prądy. Próbuąc ponownie zastosować metodę iteracyjną moglibyśmy wartości napięć na kondensatorach w pewnej chwili przyjąć jako znane i rozwiązywać układ równań (5) względem prądów. W tym przypadku metoda minimum mocy sterującej nie daje żadnych ułatwień, ponieważ rozwiązanie tego układu wymaga odwrócenia macierzy oporności obwodowych, dokładnie tak samo, jak w przypadku postępowania klasycznego.

Z tego wynika, że zasada minimum mocy sterującej może być użyteczna tylko dla prostych obwodów nieliniowych. Zaletą postępowania iteracyjnego wywodzącego się z tej metody jest oparcie obliczeń bezpośrednio o wyniki pomiarów charakterystyk elementów. Unika się tym samym procedur interpolacji i aproksymacji.

BIBLIOGRAFIA

1. R. Ładziński: *Opis matematyczny układów dynamicznych o skończonej liczbie stopni swobody*. Prace Instytutu Automatyki PAN, Warszawa, 1967, z. 62
2. C. Rajski: *On a stationarity principle for discrete non-linear dissipative dynamic systems*. Journal of Non-Linear Mechanics. 1982, Vol. 17, No. 1, pp. 35—40

C. RAJSKI

ON APPLICATION OF MINIMUM POWER PRINCIPLE

Summary

The paper deals with the theory of non-linear, stationary, lossy dynamic systems with lumped constants. It was shown in the author's former paper that a function — later called steering power or simply power, reaching minimum at any moment during actual movement of system, exists in this class of systems. The author tries to apply this principle to the numerical solution of some electric circuits. The analysis of a simple non-linear RC circuit supplied from an a.c. source shows that the current can be determined without interpolation or approximation. Only direct results of measurements of the characteristics of the circuit elements are used. It seems that no advantage is provided by this principle for the numerical solution of many-loop circuits, even linear ones.

CZ. RAJSKI

SUR UNE CERTAINE APPLICATION DU PRINCIPE DU POUVOIR MINIMAL

Résumé

L'article concerne la théorie de non-linéaires, stationnaires systèmes dynamiques avec pertes aux constantes concentrées. Dans l'un des articles précédents l'auteur a démontré que, pour les systèmes de cette espèce, il existe une fonction — dite pouvoir directeur ou pouvoir minimal — ayant la propriété d'être minimale à chaque instant pendant le mouvement réel du système. Dans l'article on examine la possibilité de l'application dudit principe à quelques circuits électriques. L'analyse d'un simple circuit non-linéaire R. C. alimenté par une source du courant alternatif démontre, que le courant peut être déterminé sans avoir recours à l'interpolation ou bien à l'approximation. Il paraît que ci-présenté principe n'offre pas d'avantages pour les circuits ayant plusieurs degrés de liberté, ni pour des circuits linéaires.

CZ. RAJSKI

ÜBER GEWISSE ANWENDUNG DES PRINZIPS MINIMALER LEISTUNG

Zusammenfassung

Der Beitrag betrifft die Theorie von stationären, nichtlinearen, dynamischen Systemen mit konzentrierten Konstanten. In vorheriger Bearbeitung hat der Autor nachgewiesen, daß eine derartige Systemklasse besteht, wofür eine gewisse Größe, die Steuerleistung genannt wird, in jedem Moment das Minimum der realen Bewegung erreicht. Zurzeit wurde die Anwendungsmöglichkeit des Minimumprinzips der Steuerleistung für die numerische Lösung mancher elektrischen Kreise untersucht. Die Analyse eines einfachen, nichtlinearen RC-Kreises bei sinusförmiger Erzwungung hat erwiesen, daß Strom im Kreis ohne Anwendung von Interpolation oder Approximation bestimmt werden kann. Im numerischen Verfahren werden nur unmittelbare Ergebnisse der Vermessungen von charakteristischen Elementen ausgenutzt. Es erscheint jedoch, daß sogar in linearen Fällen das erwogene Prinzip keine Vorteile bei numerischen Berechnungen zusichert.

Ч. РАЙСКИ

ОБ ОДНОМ ИЗ ПРИМЕНЕНИЙ ПРИНЦИПА МИНИМУМ МОЩНОСТИ

Резюме

Труд касается теории стационарных динамических систем с сосредоточенными постоянными. В предыдущем труде автор доказал что существует класс систем для которых некоторая величина, называемая управляющей мощностью в каждом моменте времени обретает минимальное значение для действительного движения. Исследована возможность применения принципа минимум управляющей мощности к цифровому решению определенных электрических контуров. Анализ простейшего нелинейного контура R, C при синусоидальном вынуждении доказал, что ток в контуре может быть определен без применения интерполяции или аппроксимации. В цифровом процессе используются исключительно непосредственные результаты измерений характеристик элементов. Кажется однако, что даже в случае линейных систем обсуждаемый принцип не обеспечивает превосходства в цифровых расчетах.



Rozkład pola elektrycznego i wytrzymałość elektryczna układu płyta — ostrze hiperboloidalne z uwzględnieniem ładunku przestrzennego

RYSZARD NAWROWSKI

Instytut Elektrotechniki Przemysłowej, Politechnika Poznańska

Otrzymano 1987.02.12

Autoryzowano do druku 1988.10.27

W artykule wyznaczono rozkład pola elektrycznego oraz współczynnik niejednorodności i wzmocnienia pola w układzie płyta-ostrze hiperboloidalne z uwzględnieniem ładunku przestrzennego. Przedstawiono wyniki pomiarów stałych napięć przeskoku U_b dla próżniowych (10^{-3} Pa) przerw o długościach (0,5–3) mm, między elektrodą płaską a hiperboloidalnymi o kątach wierzchołkowych od 30° do 180° . Podano wyniki analizy wartości napięć przeskoku i natężenia pola elektrycznego.

1. WPROWADZENIE

Stałe napięcie przeskoku w próżni, między elektrodami wytwarzającymi niejednorodne pole elektryczne jest uwarunkowane występującymi jednocześnie czynnikami, takimi jak:

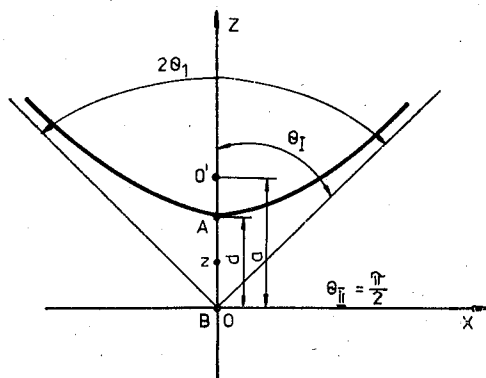
- rozkład pola elektrycznego przy powierzchni elektrod i w przestrzeni międzyelektrodowej,
- wartość ładunku przestrzennego,
- biegunowość elektrod,
- efektywna powierzchnia elektrod.

W dotychczasowych rozważaniach nad efektem biegunowości elektrod w próżniowych układach izolacyjnych nie uwzględniono ładunku przestrzennego [2, 3].

W pracy określono rozkład pola elektrycznego dla układu płyta-ostrze hiperboloidalne ze zmiennym ładunkiem przestrzennym. Zbadano związek między wartościami pola a napięciami przeskoku w przyjętym układzie.

2. ROZKŁAD POLA ELEKTRYCZNEGO MIĘDZY ELEKTRODAMI

Analizowany układ elektrod: płyta-ostrze hiperboloidalne (rys. 1) przedstawiono w parabolicznym układzie współrzędnych [1, 3]. Jeżeli uwzględni się, że gęstość ładunku



Rys. 1. Układ elektrod: płaszczyzna — ostrze hiperboloidalne

przestrzennego jest malejącą funkcją odległości od elektrody ostrzowej, określoną wyrażeniem:

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\alpha(\theta - \theta_I)} = \varrho_1 e^{-\alpha_I \theta}, \quad (1)$$

wówczas równanie Poissona na osi symetrii przyjmuje postać:

$$\frac{1}{a^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 V_p}{\partial \theta^2} + \cotg \theta \frac{\partial V_p}{\partial \theta} \right) = - \frac{\varrho}{\varepsilon} \quad (2)$$

gdzie: θ — współrzędna układu,

$2\theta_I$ — kąt wierzchołkowy elektrody hiperboloidalnej,

α, α_I — współczynniki gęstości ładunku elektrycznego.

Należy podkreślić, że zmienny ładunek elektryczny występuje np. przy inicjowaniu przeskoku w próżni emisją polową. Dla dużych gęstości prądu emisji występuje wówczas zmniejszenie natężenia pola elektrycznego. Rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego (2) jest funkcja:

$$V_p = V_L + V_1(\theta),$$

lub

$$V_p = c \ln \tg \frac{\theta}{2} + D + V_1(\theta). \quad (3)$$

Wstawiając wyrażenia (3) do (2) oraz uwzględniając, że V_L spełnia równanie jednorodne (2), otrzymano:

$$\frac{b}{\partial \theta} \left(\frac{\partial V_1(\theta)}{\partial \theta} \sin \theta \right) + b e^{-\alpha_I \theta} \sin^2 \theta = 0, \quad (4)$$

gdzie:

$$b = \frac{a^2 \varrho_1}{\varepsilon}.$$

Poszukiwane funkcje: $V_1(\theta)$ i $\frac{\partial V_1(\theta)}{\partial \theta}$ wyznaczono, całkując wyrażenie (4):

$$V_1(\theta) = \frac{-b\alpha_I}{(\alpha_I^2 + 9)(\alpha_I^2 + 1)} \left[e^{-\alpha_I \theta} \alpha_I \sin^2 \theta + \frac{5}{2} e^{-\alpha_I \theta} \sin 2\theta + \right.$$

$$+ \frac{3}{\alpha_I} e^{-\alpha_I \Theta} \cos 2\Theta + \frac{2e^{-\alpha_I \Theta} + 1}{\alpha_I} \left] - \frac{6b}{(\alpha_I^2 + 9)(\alpha_I^2 + 1)} \left[e^{-\alpha_I \Theta} - 1 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{4,5}{\alpha_I + 1} e^{-(\alpha_I + 1)\Theta} - \frac{0,945}{\alpha_I} e^{-\alpha_I \Theta} \right] \right. \\ \left. \frac{\partial V_1(\Theta)}{\partial \Theta} = b \left[\frac{e^{-\alpha_I \Theta} \sin \Theta}{\alpha_I^2 + 9} (\alpha_I \sin \Theta + 3 \cos \Theta) + \frac{6}{\alpha_I^2 + 9} \frac{e^{-\alpha_I \Theta}}{\alpha_I^2 + 1} (\alpha + \operatorname{ctg} \Theta) \right] \right.$$

Uwzględniając warunki brzegowe:

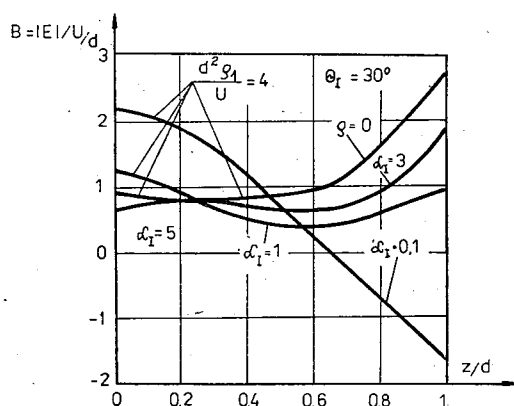
$$\Theta = \Theta_{II} = \frac{\pi}{2}, \quad V_L = 0 \quad \text{oraz} \quad \Theta = \Theta_I, \quad V_L = U,$$

oraz rozwiązanie równania Laplace'a [1] można wyznaczyć z (3) rozkład potencjałów a następnie względne natężenie pola elektrycznego:

$$V_p = \frac{U + V_1\left(\Theta = \frac{\pi}{2}\right) - V_1(\Theta = \Theta_I)}{\operatorname{Intg} \frac{\Theta_I}{2}} - \operatorname{Intg} \frac{\Theta}{2} - V_1\left(\Theta = \frac{\pi}{2}\right) + V_1(\Theta) \quad (6)$$

$$\beta = \frac{|E|}{\frac{U}{d}} = \frac{1}{\cos \Theta_I \sin^2 \Theta \operatorname{Intg} \frac{\Theta_I}{2}} - \frac{d^2 \varrho_1}{\cos^2 \Theta_I U} \left[\frac{V_1\left(\Theta = \frac{\pi}{2}\right) - V_1(\Theta = \Theta_I)}{\sin^2 \Theta \operatorname{Intg} \frac{\Theta_I}{2}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial V_1(\Theta)}{\partial \Theta} \right]$$

Współczynnik niejednorodności pola elektrycznego β charakteryzuje się zmianą natężenia pola układu płyta-ostrze z ładunkiem przestrzennym w stosunku do natężenia pola układu płaskiego bez ładunku. Przykładowe wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 2.

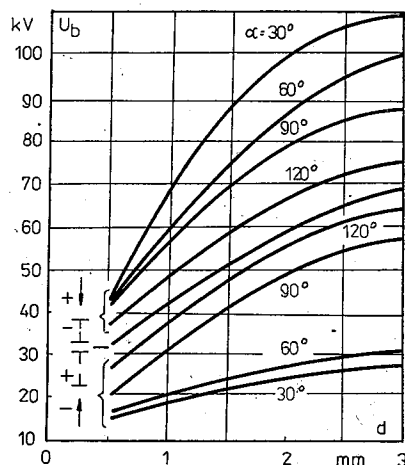


Rys. 2. Rozkład pola elektrycznego układu: płyta-ostrze, z uwzględnieniem ładunku przestrzennego

3. ZAKRES, METODYKA I WYNIKI POMIARÓW

Pomiary napięć przeskoku wykonano dla elektrod umieszczonych w próżni 10^{-3} Pa [3]. Elektrody z miedzi próżniowej są elektrodami płaskimi średnicy 20 mm i zaokrągleniu krawędzi wg krzywej Rogowskiego oraz elektrodami ostrzowymi hiperboloidalnymi o kątach wierzchołkowych ($2\theta_1$) 30° , 60° , 90° i 120° .

Pomiary wykonano dla odstępów międzyelektrodowych w zakresie $(0,5 \div 3)$ mm. Przed próbami elektrody były polerowane mechanicznie i odtłuszczone. Badania poprowadzono kondycjonowaniem układu prądem przedprzeskokowym. Układ uznawano za ustabilizowany, gdy ustalały się napięcia przeskoku i prąd przedprzeskokowy [3]. Wyniki pomiarów przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Napięcie przeskoku układu: płyta-ostrze w funkcji odstęp międzyelektrodowego

Pomiary dla każdej krzywej wykonano co najmniej 5 razy. Krzywe odpowiadają wartościom średnim. W czasie badań stwierdzono niszczenie powierzchni elektrod, nadtapianie wierzchołków ostrzy oraz osadzania się na elektrodach luźno związanych cząstek pochodzących z ich erozji. Celem ograniczenia tych czynników poszczególne charakterystyki dla jednej i drugiej biegunowości sporządzano na przemian w co najmniej 5 cyklach. Każdy cykl pomiarowy poprzedzony był czyszczeniem, polerowaniem i kondycjonowaniem elektrod. Dla każdego punktu charakterystyk wykonano co najmniej 30 pomiarów. Określone z pomiarów odchylenie standardowe od wartości średnich wynosiło 8% [3].

4. ANALIZA PORÓWNAWCZA ROZKŁADU POŁA I WYTRZYMAŁOŚCI ELEKTRYCZNEJ

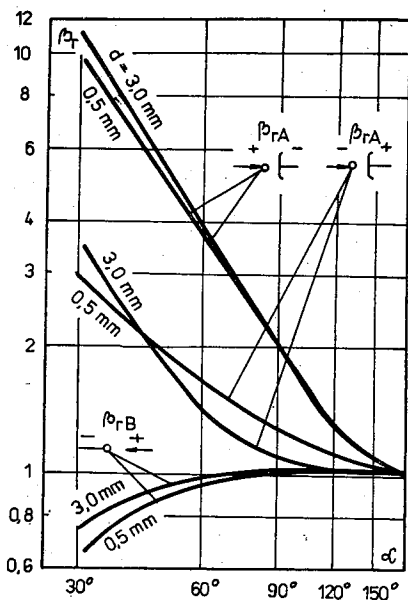
Korzystając ze zmierzonych napięć przeskoku (rys. 3) można wyznaczyć średnie natężenie pola przeskoku $E_a = U_b/d$. Dla danej wartości współczynnika niejednorodności pola elektrycznego β (rys. 2) zmianę natężenia pola w przestrzeni międzyelektrodowej określa zależność $E = E_a\beta$ [3].

Dla przerw próżniowych o wartości napięcia przeskoku decydują natężenia pola $E_{A\mu}$ i $E_{B\mu}$:

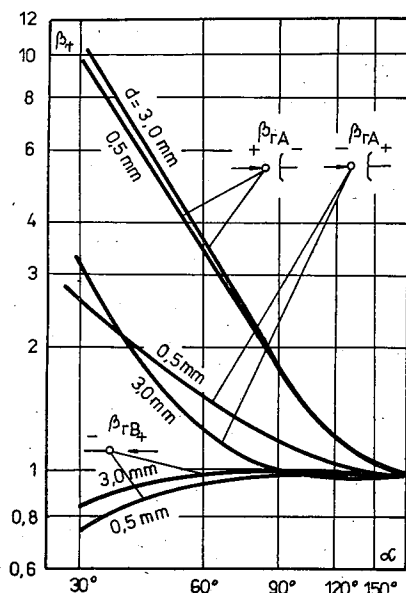
$$\begin{aligned} E_{A\mu} &= E_a \beta_A \mu_A, \\ E_{B\mu} &= E_a \beta_B \mu_B. \end{aligned} \quad (7)$$

Współczynniki μ_A i μ_B są wzmocnieniami pola elektrycznego na mikronierównościach elektrod w punktach A i B (rys. 1). Zmieniają się one w zależności od mikroprofilu powierzchni elektrod, przyjmując wartości od kilku do kilkuset [1]. Dla przerw próżniowych rozwój wyładowania jest zależny od zjawisk na elektrodach, co powoduje, że decydujący wpływ na wytrzymałość tych układów mają współczynniki wzmocnienia pola μ .

Na rys. 4 i 5 przedstawiono względne natężenie pola przeskoku β_{rA} i β_{rB} zdefiniowane



Rys. 4. Względne natężenia pola przeskoku β_r w funkcji kąta wierzchołkowego ostrza ($q = 0$)



Rys. 5. Względne natężenia pola przeskoku β_r w funkcji kąta wierzchołkowego ostrza ($\alpha_i = 5$)

jako odpowiednie stosunki $E_{A\mu}$ lub $E_{B\mu}$ dla układu z elektrodą o danym kącie wierzchołkowym ostrza, do natężenia pola przeskoku układu płaskiego.

Przebiegi β_r dla obu rozpatrywanych punktów A i B, silnie zależą od biegunowości ostrza. Dla kąta $2\theta_I = 30^\circ$ przy ujemnym ostrzu i $q = 0$ współczynnik β_r na wierzchołku ostrza nie przekracza wartości 4 (rys. 4). Zmiana biegunowości ostrza na przeciwny powoduje wzrost β_r do 12. W centrum ujemnej elektrody płaskiej β_r wzrasta od wartości około 0,7 przy kącie $2\theta_I = 30^\circ$ do jedności, dla kąta wierzchołkowego ostrza około 90° . Przy dodatniej elektrodzie płaskiej względne natężenia pola przeskoku są dla małych kątów θ_{II} o rząd wielkości mniejsze niż dla elektrody płaskiej ujemnej. Z wykresów widać, że współczynniki niejednorodności pola μ_A i μ_B nie mogą się w rozpatrywanym przypadku różnić więcej niż dwukrotnie, ponieważ β_{rA} przy $\beta_A = 7$, jest mniejsze od 12 dla dodatniego ostrza o kącie 30° i jednocześnie nie większe od 4 dla ostrza ujemnego o tym samym kącie wierzchołkowym. Dla dodatniego ostrza i małych kątów wierzchołkowych (np.

$2\theta_I = 30^\circ$) stosunek względnego natężenia pola przeskoku na wierzchołku ostrza do względnego natężenia pola przeskoku w centrum elektrody płaskiej wynosi około 20. Dla ostrza ujemnego jest on rzędu 10^2 . Stosunek ten maleje ze wzrostem kąta wierzchołkowego np. dla elektrody ostrzowej dodatniej o kącie 90° jest już równy tylko 2.

Uwzględnienie ładunku przestrzennego np. dodatniego (rys. 5) powoduje, że wartość natężenia pola przeskoku β_r na dodatnim ostrzu i dodatniej elektrodzie płaskiej są mniejsze. Dla ujemnej biegunowości ostrza i elektrody płaskiej wartości β_r są większe.

Wydaje się zatem, że stosunkowo niewielkie natężenie pola elektrycznego na płaskiej katodzie jest, obok wpływu ładunku przestrzennego, przyczyną wysokiej wytrzymałości elektrycznej układu ostrze-płyta przy małych kątach wierzchołkowych ostrza. Dowodzi to dominującego udziału mechanizmu katodowego w zjawisku przeskoku w próżni w badanym układzie [3].

5. WNIOSKI

1. Wytrzymałość elektryczna układu ostrze-płyta w stosunku do układu płaskiego jest w próżni zależna od biegunowości elektrod. Wytrzymałość większą posiada układ: dodatnie ostrze-płyta. W przyjętym zakresie parametrów d i θ_I wzrasta ona wraz ze zmniejszeniem kąta wierzchołkowego ostrza. Dla ujemnego ostrza wytrzymałość układu jest mniejsza niż układu płaskiego i maleje w miarę zmniejszenia kąta. W badanym układzie napięcia przeskoku dla ostrza dodatniego otrzymano około 4 razy wyższe niż dla ostrza ujemnego.

2. Największe natężenie pola elektrycznego w układzie ostrze hiperboloidalne-płyta, występuje na ostrzu w osi symetrii elektrod. Współczynnik niejednorodności pola dla kątów wierzchołkowych ostrza większych od 30° nie przekracza liczby 7. Wprowadzenie do układu dodatniego ładunku przestrzennego rosnącego z odległością od elektrody ostrzowej powoduje zmniejszenie natężenia pola przy dodatnim ostrzu i jego zwiększenie przy elektrodzie płaskiej.

3. Rozkład pola elektrycznego między elektrodami wzdłuż osi symetrii jest zbliżony do jednorodnego dla kątów wierzchołkowych ostrza większych od 90° .

Obszar wzmocnienia pola przy elektrodzie ostrzowej jest stosunkowo niewielki np. dla $2\theta_I = 30^\circ$ jego zakres określa stosunek $z/d > 0,76$. W zakresie kątów od 20° do 120° obraz pola przy powierzchni ostrza zmierza do jednorodnego już w punktach odległych o połowę odległości międzyelektrodowej od osi symetrii układu. Współczynnik niejednorodności pola na elektrodzie płaskiej może być mniejszy od 1, szczególnie dla małych kątów wierzchołkowych. Przy dużych wartościach ładunku przestrzennego ($\alpha_I < 1$) natężenie pola na elektrodzie płaskiej jest większe niż na ostrzu.

4. Stosunek względnego natężenia pola przeskoku na wierzchołku (β_{rA}) do względnego natężenia pola przeskoku w centrum elektrody płaskiej (β_{rB}) wynosił od 20 dla $2\theta_I = 30^\circ$ i dodatniego ostrza do 100 dla ostrza ujemnego. Dla kątów $2\theta_I \geq 90^\circ$ jest on bliski jedności. Wprowadzenie ładunku przestrzennego do rozważanego układu zmienia obraz pola, zależnie od jego wartości i polaryzacji.

5. Przyczyną wysokiej wytrzymałości układu dodatnie ostrze-płyta jest stosunkowo niewielkie natężenie pola elektrycznego na płaskiej katodzie.

BIBLIOGRAFIA

1. P. Moon, O. Spencer: *Teoria pola*. Warszawa: WNT, 1968
2. Cz. Królikowski, J. Dobrogowski, R. Nawrowski: *Electric spark initiation of an electrical discharge in the air for minimum voltages and currents*. Int. Symp. on High Volt. Eng., Athens, 1983, No. 44, pp. 1—4
3. J. Dobrogowski, Z. Kołaczowski, R. Nawrowski, A. Rybski: *Zum Polaritätseffekt der Elektroden in kurzen Luft und Vakuumstrecken mit Ungleichförmigen Feldverteilung*. Elektrie 1988, No. 7, s. 264—266
4. R. Kosztaluk (praca zbiorowa): *Technika badań wysokonapięciowych*, Warszawa: WNT, 1985

R. NAWROWSKI

ELECTRIC FIELD DISTRIBUTION AND ELECTRIC WITHSTAND STRENGTH
OF A PLATE-HIPERBOLOID POINT SYSTEM
WITH ACCOUNT TAKEN OF SPACE CHARGE

Summary

The electric field distribution as well as inhomogeneity and amplification factors in plate-hiperboloid point systems with account taken of the space charge, are determined. Results of measurements of the d.c. flashover voltage U_b of a vacuum (10^{-3} Pa) gap ($0.5 \div 3$) mm long, between a flat electrode and a hiperboloid point with apex angle between 30° and 180° . Results of the analysis of flashover voltage values and the electric field intensity are presented.

R. NAWROWSKI

RÉPARTITION DU CHAMP ÉLECTRIQUE ET DE LA RIGIDITÉ
DIÉLECTRIQUE DU SYSTÈME D'ÉLECTRODE PLAQUE — POINTE
D'HYPERBOLOÏDE PRENANT EN CONSIDÉRATION
LA CHARGE D'ESPACE

Résumé

Dans cet article on a déterminé la répartition du champ électrique ainsi que le coefficient d'hétérogénéité et le renfort du champ dans le système d'électrode plaque — pointe d'hyperboloïde, prenant en considération la charge d'espace. On a présenté les résultats de mesures des tensions constantes de claquage pour les distances de vide de 0,5 mm à 3 mm, entre la plaque et la pointe d'hyperboloïde à l'angle de 30° à 180° . Les valeurs de la tension de claquage et des intensités du champ électrique ont été analysées.

R. NAWROWSKI

VERTEILUNG DES ELEKTRISCHEN FELDES UND ELEKTRISCHE
FESTIGKEIT DES SYSTEMS PLATTE-HYPERBOLOIDSPITZE
UNTER BERÜCKSICHTIGUNG EINER RAUMLADUNG

Zusammenfassung

Im vorliegenden Beitrag wurden Verteilung des elektrischen Feldes sowie der Inhomogenitäts- und der Feldverstärkungsfaktor für das System Platte-Hyperboloidspitze unter Berücksichtigung einer Raumladung dargelegt. Man hat Meßergebnisse der konstanten Überschlagnspannungen U_b für das Vakuum (10^{-3} Pa) mit Länge ($0,5 \div 3$) mm zwischen plattenförmiger Elektrode und den Hyperboloidelektroden mit Scheitelwinkeln im Bereich von 30° bis 180° angegeben. Es wurden auch Ergebnisse der Analyse der Überschlagnspannungswerte und der elektrischen Feldstärke angeführt.

Р. НАВРОВСКИ

ОБРАЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ И ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОЧНОСТЬ СИСТЕМЫ
ПЛОСКОСТЬ-ГИПЕРБОЛОИДАЛЬНОЕ ОСТРИЕ С УЧЕТОМ ПРОСТРАНСТВЕННОГО
ЗАРЯДА

Резюме

Определен образ электрического поля и коэффициент неоднородности и концентрации поля в системе плоскость-гиперboloидальное острие с учетом пространственного заряда. Представлены результаты исследований разрядных напряжений постоянного тока I_0 для вакуумных (10^{-3} па) промежутков длиной (0,5 ... 3) мм между плоскостью и гиперboloидальным острием с вершинным углом от 30° до 180° . Приведены результаты анализа значений разрядных напряжений и напряжений электрического поля.

Estymacja parametrów rozkładu Nakagamiiego na podstawie danych pomiarowych sygnału

KRYSTYNA NOGA

*Instytut Automatyki Okrętowej
Wyższa Szkoła Morska w Gdyni*

Otrzymano 1988.07.15

Autoryzowano do druku 1989.01.30

W systemach radiokomunikacyjnych przesyłanie sygnałów odbywa się w obecności losowych zakłóceń. Do opisu zakłóceń multiplikatywnych (zaników) bardzo często stosuje się rozkład Nakagamiiego. Rozkład ten dobrze odzwierciedla fenomenologię zaników. Ponadto dobrze aproksymuje szeroką klasę rozkładów obwiedni losowego sygnału. W artykule przedstawiono sposób estymacji parametrów rozkładu Nakagamiiego na podstawie danych uzyskanych w czasie pomiaru sygnału w warunkach eksploatacyjnych.

Sygnał podczas transmisji przez kanał radiowy podlega losowym zmianom — zakłóceniom multiplikatywnym, które bardzo często nazywamy zanikami oraz zakłóceniem addytywnym. Jako model zakłóceń addytywnych najczęściej przyjmuje się szum o normalnym rozkładzie wartości chwilowych. Natomiast do opisu zaników najczęściej wykorzystuje się rozkłady Rayleigha, Rice'a, Nakagamiiego.

Sygnał na wyjściu wielodrogowego kanału radiowego można przedstawić w następującej postaci:

$$y(t) = \sum_{l=1}^L a_l(t) u[t - \tau_l(t)] + n(t) = a_s(t) \cos[w_0 t - \varphi_s(t)] + n(t) = s(t) + n(t), \quad (1)$$

gdzie: $a_l(t)$ — zakłócenie multiplikatywne, $u[\cdot]$ — sygnał nadany, $\tau_l(t)$ — czas propagacji sygnału, $a_s(t)$ — obwiednia sygnału użytecznego $s(t)$, przy czym

$$a_s(t) = \sqrt{x^2(t) + z^2(t)}, \quad (1.1)$$

$$x(t) = a_s(t) \cos \varphi_s(t) = \sum_{l=1}^L a_l(t) \cos \varphi_l(t), \quad (1.2)$$

$$z(t) = a_s(t) \sin \varphi_s(t) = \sum_{l=1}^L a_l(t) \sin \varphi_l(t). \quad (1.3)$$

Jeżeli liczba dróg L kanału radiowego jest wystarczająco duża można założyć, że $x(t)$ oraz $z(t)$ posiadają rozkład normalny o wartości średniej odpowiednio μ_x , μ_z i wariancji

σ_x^2, σ_z^2 . Zależność statystyczna pomiędzy $x(t)$ oraz $z(t)$ określa współczynnik korelacji wzajemnej (unormowana kowariancja) R_{xz} . Wówczas łączną gęstość prawdopodobieństwa można przedstawić jako [2]

$$p(x, z) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_z(1-R_{xz}^2)} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-R_{xz}^2)} \left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(z-\mu_z)^2}{\sigma_z^2} - \frac{2R_{xz}(x-\mu_x)(z-\mu_z)}{\sigma_x\sigma_z} \right] \right\}. \quad (2)$$

Przy modelowaniu funkcji losowej, np. obwiedni $a_s(t)$, najczęściej zakłada się jej lokalną, np. w przedziale obserwacji, stacjonarność. Wówczas jej gęstość prawdopodobieństwa pierwszego rzędu można zastąpić rozkładem pojedynczej zmiennej losowej a_s [15].

Obwiednia $a_s(t)$ sygnału użytecznego, w zależności od wartości parametrów $\mu_x, \mu_z, \sigma_x, \sigma_z$, może posiadać różną gęstość prawdopodobieństwa. Jeżeli $\mu_x = \mu_z$ i $\sigma_x \neq \sigma_z$, obwiednia sygnału posiada rozkład Hoyta [14]

$$p(a_s) = \frac{a_s}{\sigma_x\sigma_z} \exp \left(-\frac{\sigma_x^2 + \sigma_z^2}{4\sigma_x^2\sigma_z^2} a_s^3 \right) I_0 \left(\frac{\sigma_z^2 - \sigma_x^2}{4\sigma_x^2\sigma_z^2} a_s^2 \right), \quad (3)$$

gdzie $I_0(\cdot)$ jest zmodyfikowaną funkcją Bessela pierwszego rodzaju rzędu zerowego [4].

W wielu pracach, np. [4, 7, 9, 11], przyjmuje się, że obwiednia $a_s(t)$ posiada rozkład Nakagamiiego

$$p(a_s) = \frac{2}{\Gamma(m_s)} \left(\frac{m_s}{\Omega_s} \right)^{m_s} a_s^{2m_s-1} \exp \left(-\frac{m_s}{\Omega_s} a_s^2 \right) \quad (4)$$

gdzie:

$$\Omega_s \stackrel{\text{df}}{=} E[a_s^2(t)]; \quad m_s \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\Omega_s^2}{E[a^2(t) - \Omega_s]^2} \geq \frac{1}{2} \quad (4.1)$$

$\Gamma(m_s)$ jest funkcją gamma [1].

Z analizy literatury wynika, że rozkład Nakagamiiego odzwierciedla szeroką klasę mechanizmów propagacyjnych i spośród rozkładów dwuparametrowych najdokładniej odwzorowuje fenomenologię zaników. Ponadto rozkład ten uogólnia inne prostsze rozkłady (dla $m_s = 1$ staje się rozkładem Rayleigha, dla $m_s = 0,5$ jednostronnym rozkładem Gaussa, natomiast dla $m_s > 1$ dobrze aproksymuje rozkład Rice'a).

Do określania parametrów rozkładu Nakagamiiego na podstawie danych pomiarowych sygnału najczęściej wykorzystuje się wielkości proporcjonalne do logarytmu obwiedni. Niech logarytmiczna obwiednia $v(t)$ reprezentuje zmienną losową v zdefiniowaną jako

$$v \stackrel{\text{df}}{=} 20 \log(a_s/w_s), \quad (5)$$

gdzie w_s jest wielkością odniesienia (podstawą normowania). Jeżeli zmienna losowa a_s posiada rozkład Nakagamiiego, to zmienna losowa v ma wykładniczy rozkład Nakagamiiego o gęstości prawdopodobieństwa [3, 13]

$$p(v) = \frac{2}{K\Gamma(m_s)} m_s^{m_s} \exp \left\{ m_s \left[\frac{2(v-v_0)}{K} - \exp \frac{2(v-v_0)}{K} \right] \right\} \quad (6)$$

gdzie:

$$K \stackrel{\text{df}}{=} 20 \log e = 8.686,$$

$$v_0 \stackrel{\text{df}}{=} 10 \log(\Omega_s/w_s^2).$$

Jeżeli założymy, że wielkość odniesienia $w_s = \sqrt{\Omega_s}$ to $v_0 = 0$, wówczas też

$$v_n \stackrel{\text{df}}{=} 20 \log(a_s/\Omega_s) \quad (7)$$

jest znormalizowaną logarytmiczną wielkością, która posiada znormalizowany wykładniczy rozkład Nakagamiiego [3]

$$p(v_n) = \frac{2}{K\Gamma(m_s)} m_s^{m_s} \exp \left\{ m_s \left[\frac{2v_n}{K} - \exp \left(\frac{2v_n}{K} \right) \right] \right\}. \quad (8)$$

Wartość średnią, średniokwadratową i wariancję zmiennej v_n można określić odpowiednio na podstawie zależności [3]

$$E(v_n) = \frac{K}{s} [\Psi(m_s) - \ln m_s], \quad (9)$$

$$E(v_n^2) = \frac{K^2}{4} \{ [\Psi(m_s) - \ln m_s]^2 - \Psi'(m_s) \}, \quad (10)$$

$$\text{Var}(v_n) = \text{Var}(v) = \frac{K^2}{4} \Psi'(m_s), \quad (11)$$

gdzie: $\Psi(m_s)$ jest funkcją psi Eulera [1],

$\Psi'(m_s)$ jest pochodną funkcji psi Eulera.

Parametry m_s , Ω_s rozkładu Nakagamiiego można określić na podstawie momentów znormalizowanego wykładniczego rozkładu Nakagamiiego (8). Do określenia wartości parametru m_s najbardziej przydatny jest moment centralny drugiego rzędu zmiennej v_n określony zgodnie z równaniem (11), który jest niezależny od wielkości odniesienia w_s . W równaniu tym występuje pochodna funkcji psi Eulera, niemożliwe jest więc analityczne wyznaczenie wartości m_s jako rozwiązania tego równania. Funkcję $\Psi'(m_s)$ można przybliżyć wyrażeniem

$$\Psi'(m_s) \approx C_1 m_s^{B_1}; \quad C_1 > 0. \quad (12)$$

W pracy [3] dokonano takiej aproksymacji dla $m_s \in \langle 0.5, 5 \rangle$. Wydaje się jednak, że przyjęcie tak małego zakresu zmian parametru m_s nie jest uzasadnione. Z wykresów przedstawionych w pracy [10], obrazujących dynamiczne prawdopodobieństwo błędu elementowego, które jest jedną z miar jakości transmisji binarnej przez kanał radiokomunikacyjny z zanikami widać, że znaczny wpływ parametru m_s na jakość transmisji obserwuje się dla $m_s \in \langle 0.5, 10 \rangle$. Jest więc uzasadnione dokonanie aproksymacji (12) funkcji $\Psi'(m_s)$ dla $m_s \in \langle 0.5, 10 \rangle$. Stałe C_1 , B_1 funkcji aproksymującej można określić stosując metodę regresji. Natomiast dokładne wartości funkcji $\Psi'(m_s)$ dla wybranych m_s można obliczyć na podstawie zależności [1]:

$$\Psi'(1) = \frac{1}{6} \pi^2; \quad \Psi'(1/2) = \frac{1}{2} \pi^2$$

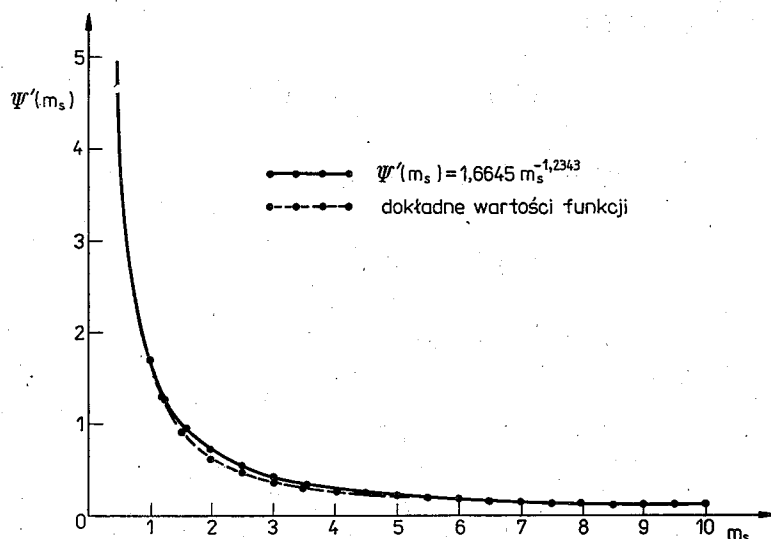
$$\Psi'(L) = \Psi'(1) - \sum_{l=1}^{L-1} 1/l^2; \quad l = 2, 3, \dots \quad (13)$$

$$\Psi'(L+1/2) = \Psi'(1/2) - 4 \sum_{l=1}^L 1/(2l-1)^2; \quad L = 1, 2, \dots$$

Po zastosowaniu metody regresji dla wartości $\Psi'(m_s)$ obliczonych na podstawie (13) uzyskano następującą postać funkcji aproksymującej [10]

$$\Psi'(m_s) \approx 1.6645 m_s^{-1.2343} \quad (14)$$

Współczynnik korelacji krzywoliniowej [8], będący oceną jakości uzyskanej aproksymacji, wynosi 0.9941. Na rys. 1 przedstawiono wartości funkcji $\Psi'(m_s)$ jako wynik zasto-



Rys. 1. Dokładne wartości funkcji $\Psi'(m_s)$ oraz wartości obliczone na podstawie funkcji aproksymującej

sowania analizy regresyjnej oraz dokładne wartości tej funkcji obliczone na podstawie (13). Zależność (14) umożliwia uzyskanie estymatora parametru m_s , który przyjmuje postać [10]

$$\hat{m}_s = 16.3201 [\widehat{\text{Var}}(v)]^{-0.8102} \quad (15)$$

gdzie: $\hat{m}_s$ — jest estymatą parametru m_s ,

$\widehat{\text{Var}}(v) = \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^I [v_i - E(v)]^2$ jest estymatorem wariancji obwiedni $v(t)$

$\widehat{E}(v) = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I v_i$ jest estymatorem wartości średniej obwiedni $v(t)$

I — jest liczbą pomiarów.

Drugi parametr rozkładu Nakagami Ω_s można określić na podstawie porównania znormalizowanego wykładniczego rozkładu Nakagami (8) z nieznormalizowanym wykładniczym rozkładem Nakagami (6). Wielkość v_0 , po uwzględnieniu (9), można przedstawić jako

$$v_0 = 10 \log(\Omega_s/w_s^2) = E(v) - E(v_n) = E(v) - \frac{K}{2} [\Psi(m_s) - \ln m_s]. \quad (16)$$

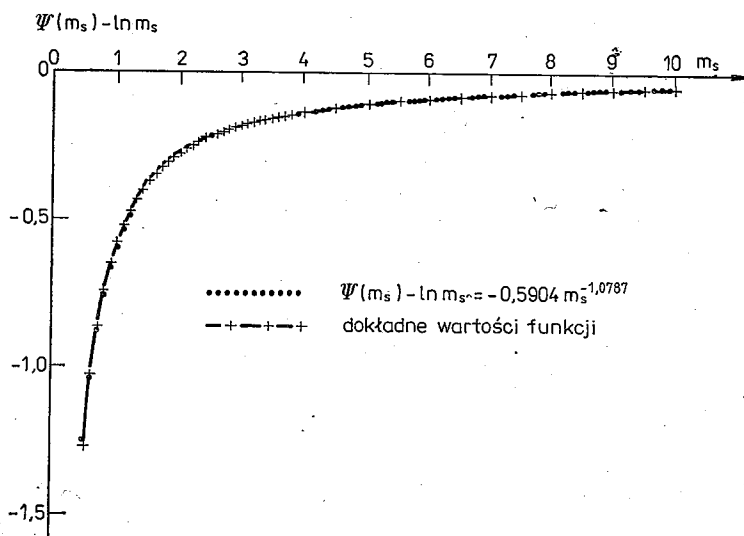
W celu określenia parametru Ω_s ponownie korzystamy z metody regresji. Przyjmujemy aproksymację

$$\ln m_s - \Psi(m_s) \approx C_2 m_s^{B_2}; \quad C_2 > 0. \quad (17)$$

W wyniku zastosowania metody regresji, dokładne wartości $\Psi(m_s)$ dla $m_s \in \langle 0.5, 10 \rangle$ zaczerpnięto z tablic [1], uzyskano następujące wartości parametrów funkcji aproksymującej: $B_2 = -1.0787$ oraz $C_2 = 0.5904$, przy czym współczynnik korelacji krzywoliniowej wynosi 0.9992. Uwzględniając otrzymany wynik zależność (9) można zapisać w następujący sposób

$$E(v_n) = -2.5641 m_s^{-1.0787}. \quad (18)$$

Dokładne wartości funkcji $\Psi(m_s) - \ln m_s$ dla $m_s \in \langle 0.5, 10 \rangle$ oraz wartości funkcji aproksymującej (17) przedstawiono na rys. 2, z którego wynika, że odpowiednie wartości są prawie takie same.



Rys. 2. Dokładne wartości funkcji $\Psi(m_s) - \ln m_s$ oraz wartości obliczone na podstawie funkcji aproksymującej

Wartość parametru Ω_s można określić na podstawie zależności

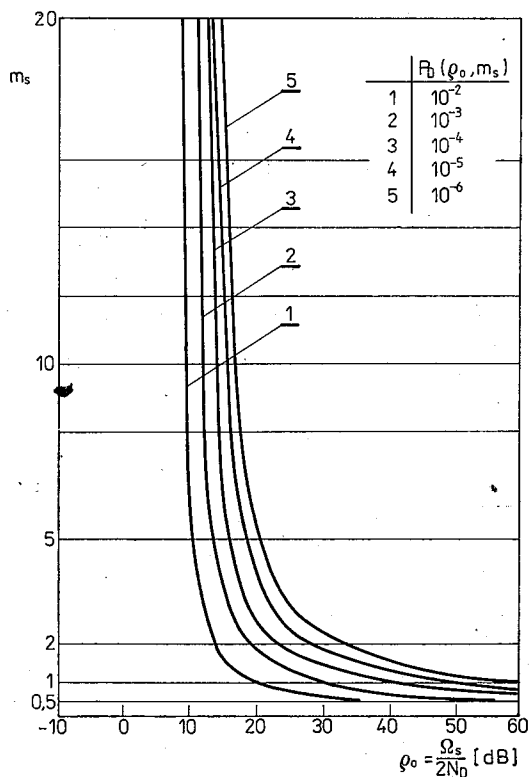
$$10 \log(\Omega_s/w_s^2) = E(v) + 2.5641 m_s^{-1.0787} \quad (19)$$

Wyrażenie (19) umożliwia uzyskanie estymatora $\hat{\Omega}_s$, który przyjmuje następującą postać [10]

$$\hat{\Omega}_s = w_s^2 10^{0.1 \hat{v}_0} \quad (20)$$

gdzie: $\hat{v}_0 = \widehat{E(v)} + 2.5641 \hat{m}_s^{-1.0787}$ jest estymatorem v_0 .

Uzyskane na podstawie (15), (20) estymaty parametrów m_s i Ω_s rozkładu Nakagamię umożliwiają bieżącą ocenę jakości transmisji binarnej poprzez oszacowanie np. na podstawie rys. 3 dynamicznego prawdopodobieństwa błędu elementowego $P_D(\varrho_0, m_s)$, które



Rys. 3. Zależność parametru m_s od średniego stosunku mocy sygnału użytecznego do mocy szumu normalnego dla odbioru NCFSK

jest jedną z miar jakości transmisji przez kanał radiowy z zanikami [10]; przy czym na rys. 3 przedstawiono zależność parametru m_s od średniego stosunku mocy sygnału użytecznego do mocy szumu normalnego $\varrho_0 = \Omega_s/2N_0$ dla odbioru NCFSK, (ang.: non-coherent frequency shift keying) i różnych wartości $P_D(\varrho_0, m_s)$. Należy tutaj zaznaczyć, że estymacja parametrów rozkładu Nakagamię opisującego obwiednię sygnału użytecznego dla dużych ϱ_0 jest możliwa na podstawie analizy (obróbki statystycznej) sygnału odebranego; wówczas decydującą rolę odgrywają zaniki (wpływ szumu addytywnego można pominąć).

Z przedstawionych rozważań wynika, że estymacja parametrów rozkładu Nakagami na podstawie danych pomiarowych sygnału wymaga uprzedniej estymacji wartości średniej i wariancji obwiedni sygnału. Nieco inny sposób, oparty na maksymalizacji funkcji wiarygodności, został przedstawiony w [5, 6]. Uzyskane estymatory mają postać

$$\hat{\Omega}_s = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I a_{si}^2 \quad (21)$$

$$\hat{m}_s = 0.504 \left(\ln \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I a_{si}^2 - \frac{2}{I} \sum_{i=1}^I \ln a_{si} \right)^{-1} - 0.126, \quad (22)$$

gdzie a_{si} jest wartością obwiedni w i -tym pomiarze.

Możliwe jest również oszacowanie parametrów rozkładu Nakagami bezpośrednio na podstawie definicji tych parametrów (4.1), zastępując jedynie momenty obwiedni ich estymatami, wówczas

$$\hat{m}_s = \hat{\Omega}_s^2 \left/ \left(\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I a_{si}^4 - \hat{\Omega}_s^2 \right) \right. \quad (23)$$

gdzie $\hat{\Omega}_s$ jest estymatą parametru Ω_s uzyskaną w oparciu o (21).

Przedstawione estymatory umożliwiają oszacowanie parametrów rozkładu Nakagami na podstawie danych pomiarowych sygnału na wyjściu kanału radiowego. Znajomość tych parametrów jest niezbędna przy ocenie jakości transmisji przez kanał z zanikami, umożliwia między innymi określenie prawdopodobieństwa błędu elementowego i charakterystyk strumienia błędów [10].

BIBLIOGRAFIA

1. J. Antoniewicz: *Tablice funkcji dla inżynierów*. Warszawa: PWN 1969
2. R. Brown Grover: *Random signal analysis and Kalman filtering*. New York 1983
3. T. Buch: *Messung der Verteilungsparameter der Empfangsfeldstärke bei Funkwellenausbreitungsuntersuchungen*. Nachrichtentechnik Elektronik, 1982, 32, H. 6
4. L. M. Fink: *Teorija pieredaczi diskretnych soobsczenij*. Sowietsoje Radio, Moskwa 1963
5. G. W. Gusinskaja: *Ocenka parametrow m-raspriedielenija*. Radioelektronika, 1977 t. 20, Nr 4
6. P. A. Iwankin, E. W. Liebiedyński: *Ob ocenke parametra m raspriedielenija werojatnostiej Nakagami*. Radiotekhnika i Elektronika, 1978, Nr 4
7. D. O. Kłowski, W. J. Kontorowicz, S. M. Szirukow: *Modieli nieprierywnych kanalow swiazi na osnowie stochasticzeskich differencjalnych urawnienij*. Radio i Swiaź, Moskwa 1984
8. K. Mańczak: *Metody identyfikacji wielowymiarowych obiektów sterowania*. Warszawa: WNT, 1979
9. M. Nakagami: *The m-distribution a general formula of intensity distribution of rapid fading; in Hoffman W. C. (ed): Statistical Methods in Radio Wave Propagation*. London, Pergamon, 1960
10. K. Noga: *Probabilistyczne charakterystyki transmisji binarnej w kanale radiokomunikacyjnym*

- z wolnymi zanikami; odbiór pojedynczy i zbiorczy. Rozprawa doktorska, Wydział Elektroniki Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 1986
11. A. A. Sikarijew, A. I. Falko: *Optymalnyj prijom diskretnych soobszczzenij*. Swiaź, Moskwa 1978
 12. M. Suchański: *Eksperymentalna analiza fluktuacji sygnałów radiokomunikacji ruchomej w środowisku pozamiejskim*. Archiwum Elektrotechniki, 1985, tom 34
 13. H. Suzuki: *A statistical model for urban radio propagation*. IEEE Trans. on Commun. 1977, Vpl. COM-25, No 7
 14. K. K. Wienskauskas, S. G. Kargopołow, S. A. Michajłow, D. P. Stiepanienko: *Sistemy i sredstva radioswiazj morskoj podwiznoej sluzby, sprawocznik*. Sudostrojenije, Leningrad 1986
 15. A. Wojnar: *Probabilistyczna analiza zasięgów w radiokomunikacji*. Biuletyn Wojskowej Akademii Technicznej, 1983, Nr 10

K. NOGA

ESTIMATION OF THE NAKAGAMI DISTRIBUTION PARAMETERS BASING ON MEASURED SIGNAL DATA

Summary

In telecommunication, the transmission of signals takes place in the presence of random disturbances. The Nakagami distribution is often applied for the description of multiplicative disturbances (fadings). The latter distribution reflects very well the phenomenology of fadings and, moreover, well approximates the wide class of distributions of the envelope of a random signal. This paper presents a method of estimation of the Nakagami distribution parameters, basing on data gained from measurements of the signal in service conditions.

K. NOGA

ESTIMATION DES PARAMÈTRES DE RÉPARTITION DE NAKAGAMI EN TENANT COMPTE DES DONNÉES DE MESURE DU SIGNAL

Résumé

Dans les systèmes de radiocommunication on transmet des signaux en présence des perturbations aléatoires. Pour décrire les multiples perturbation on applique souvent la répartition de Nakagami. Cette répartition reflète le phénomène de fading et aide à détecter dans une large classe de répartition d'enveloppe le signal aléatoire. Dans cet article on décrit la méthode d'estimation des paramètres de répartition de Nakagami, en tenant compte des données de mesures obtenues pendant les conditions d'exploitation.

A. NOGA

PARAMETERESTIMATION DER NAKAGAMI — VERTEILUNG AUF GRUND VON MEBDATEN EINES SIGNALS

Zusammenfassung

In Radioverkehrssystemen werden Signale im Beisein stochastischer Störungen übersendet. Für die Beschreibung der multiplikativen Störungen (Schwunde) wird sehr oft die Nakagami — Verteilung angewandt, da sie die Phänomenologie der Schwunde gut widerspiegelt. Darüber hinaus approximiert sie die breite Verteilungs-klasse des Umkreises des stochastischen Signals. ID Artikel wurde die Art und Weise der Parameterestimation der Nakagami — Verteilung auf Grund von gewonnenen Daten während der Messung des Signals in Betriebsverhältnissen dargestellt.

К. НОГА

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ РАЗЛОЖЕНИЯ НАКАГАМЫ НА ОСНОВАНИИ ДАННЫХ
ИЗМЕРЕНИЯ СИГНАЛА

Р е з ю м е

В системах радио-связи трансмиссия сигналов происходит в присутствии случайных помех. Для описи мультипликативных помех (затуханий) очень часто применяется разложение Накагамы. Это разложение хорошо отображает феноменологию затуханий. Кроме того удачно аппроксимирует широкий класс разложений ответа случайного сигнала. Представлен способ оценки параметров разложения Накагамы на основании данных полученных во время измерений сигнала в условиях эксплуатации.

Zastosowanie programowania nieliniowego do równomiernie falistej aproksymacji stałego opóźnienia grupowego skutecznym opóźnieniem grupowym dolnoprzepustowego filtra LC

FELICJA WYSOCKA-SCHILLAK

Wyższa Szkoła Pedagogiczna, Bydgoszcz

Otrzymano 1987.10.15

Autoryzowano do druku 1989.01.11

W pracy zaproponowano sposób rozwiązania zadania równomiernie falistej aproksymacji stałego opóźnienia grupowego skutecznym opóźnieniem grupowym dolnoprzepustowego filtra LC. Zadanie to jest mianowicie przekształcane w odpowiednie zadanie programowania nieliniowego z ograniczeniami, które jest następnie rozwiązywane przy użyciu wybranej metody optymalizacji. Praca zawiera ponadto opis opracowanego programu APOG oraz przykładowe wyniki obliczeń przeprowadzonych przy użyciu tego programu.

1. WSTĘP

W wielu zastosowaniach wymagane jest, aby sygnał niesinusoidalny przy przejściu przez określony czwórnik nie ulegał zniekształceniu. Spełnienie tego wymagania jest możliwe w przypadku, gdy charakterystyka przesuwności skutecznej czwórnika jest liniowa w pasmie przepustowym, lub, co jest równoważne, gdy charakterystyka opóźnienia grupowego jest w tym pasmie stała. Ani liniowej charakterystyki przesuwności skutecznej, ani stałej charakterystyki opóźnienia grupowego nie da się jednak zrealizować w rzeczywistych układach liniowych, stacjonarnych, zawierających elementy skupione. Charakterystyki te można jednak aproksymować charakterystykami realizowalnymi, przy czym z reguły, ze względu na prostszą formę matematyczną, przeprowadza się aproksymację stałej charakterystyki opóźnienia grupowego.

Stałą charakterystykę opóźnienia grupowego $\tau = \tau_0 = \text{const}$ można aproksymować przy wykorzystaniu różnych kryteriów [12]. Konkretnie metody rozwiązywania zadań aproksymacji charakterystyki τ_0 w oparciu o te kryteria można znaleźć m.in. w pracach [2, 4, 6, 8, 10, 13, 14].

Zagadnienie równomiernie falistej aproksymacji charakterystyki τ_0 jest przedstawione w pracy [14]. W pracy tej zaproponowano sposób rozwiązania zadania aproksymacji charakterystyki τ_0 w drodze iteracyjnego rozwiązywania układu n zespolonych równań

nieliniowych, po uprzednim wprowadzeniu odpowiedniej transformacji zmiennej niezależnej ω .

W niniejszej pracy przedstawiono sposób rozwiązania zadania równomiernie falistej aproksymacji charakterystyki opóźnienia grupowego bez wykonywania obliczeń na liczbach zespolonych i bez korzystania z transformacji zmiennej niezależnej ω . Zadanie to jest mianowicie rozwiązywane w drodze rozwiązywania odpowiedniego zadania programowania nieliniowego z ograniczeniami.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozważmy czwórnik reaktancyjny włączony między stałe rezystancje. Funkcja tamowności skutecznej $S(\lambda)^{1)}$ takiego czwornika jest określona następująco

$$S(\lambda) \cdot S(-\lambda) = \frac{P_0}{P_2} \quad (1)$$

gdzie: $\lambda = jx$,

$x = \omega/\omega_0$ — częstotliwość zredukowana,

ω — pulsacja bieżąca,

ω_0 — pulsacja odniesienia,

P_0 — moc, jaką źródło wydziela na dopasowanym do niego odbiorniku,

P_2 — moc, jaką źródło poprzez czwórnik dostarcza do obciążenia.

Funkcja $S(\lambda)$ wyraża się jako iloraz dwóch wielomianów $g(\lambda)$ i $f(\lambda)$:

$$S(\lambda) = \frac{g(\lambda)}{f(\lambda)}, \quad (2)$$

przy czym wielomiany te spełniają następujące warunki:

- 1) wielomiany $g(\lambda)$ i $f(\lambda)$ są rzeczywiste,
- 2) wielomian $g(\lambda)$ jest wielomianem Hurwitza, tzn. jego zera muszą znajdować się w lewej otwartej półpłaszczyźnie,
- 3) wielomian $f(\lambda)$ jest wielomianem parzystym lub nieparzystym,
- 4) stopień n wielomianu $g(\lambda)$ jest wyższy lub równy stopniowi m wielomianu $f(\lambda)$.

Ważnym przypadkiem szczególnym funkcji tamowności skutecznej jest tzw. funkcja wszechprzepustowa $S_w(\lambda)$, dla której:

$$g(\lambda) = [g_1(\lambda)]^2 \quad (3)$$

$$f(\lambda) = g_1(\lambda) \cdot g_1(-\lambda), \quad (4)$$

gdzie: $g_1(\lambda)$ — wielomian Hurwitza,

$g_1(-\lambda)$ — wielomian sprzężony z wielomianem Hurwitza.

Podstawiając (3) i (4) do (2) dostajemy

$$S_w(\lambda) = \frac{[g_1(\lambda)]^2}{g_1(\lambda) \cdot g_1(-\lambda)} = \frac{g_1(\lambda)}{g_1(-\lambda)}. \quad (5)$$

¹⁾ Funkcja $S(jx)$ bywa również nazywana w literaturze współczynnikiem tamowności skutecznej [11, str. 38], transmitancją [12, str. 25] lub przenoszeniem skutecznym [7, str. 11].

Pomiędzy funkcją $S(jx)$ czwórnika a jego tłumiennością skuteczną Γ_s , tłumiennością skuteczną A_s i przesuwnością skuteczną B_s zachodzi następująca zależność

$$\Gamma_s(jx) = \ln S(jx) = A_s(x) + jB_s(x). \quad (6)$$

Opóźnienie grupowe $\tau(x)$ jest definiowane jako pochodna przesuwności skutecznej względem częstotliwości

$$\tau(x) = \frac{dB_s(x)}{dx}. \quad (7)$$

Opóźnienie to wyraża się wzorem [6, 8, 9]:

— dla parzystego stopnia n wielomianu $g(jx)$

$$\tau(x) = - \sum_{i=1}^{n/2} \left[\frac{\beta_i}{\beta_i^2 + (\Omega_i - x)^2} + \frac{\beta_i}{\beta_i^2 + (\Omega_i + x)^2} \right], \quad (8)$$

— dla nieparzystego stopnia n wielomianu $g(jx)$

$$\tau(x) = - \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} - \sum_i^{(n-1)/2} \left[\frac{\beta_i}{\beta_i^2 + (\Omega_i - x)^2} + \frac{\beta_i}{\beta_i^2 + (\Omega_i + x)^2} \right] \quad (9)$$

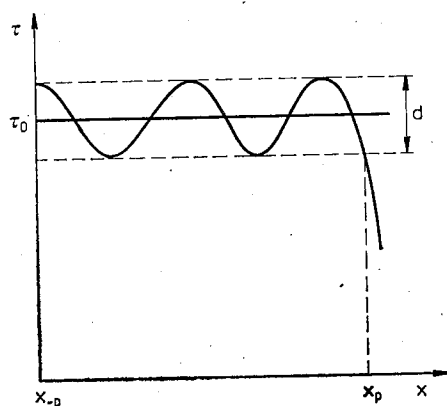
gdzie: α — rzeczywiste zero wielomianu $g(jx)$,

$\beta_i \pm j\Omega_i$ — sprzężona para zespolonych zer wielomianu $g(jx)$.

Jak widać ze wzorów (8) i (9), opóźnienie grupowe jest zależne jedynie od położenia zer wielomianu $g(jx)$. Zadanie aproksymacji charakterystyki opóźnienia grupowego sprowadza się więc do znalezienia odpowiednich wartości zer tego wielomianu. Znając postać wielomianu $g(jx)$ można następnie przeprowadzić syntezę czwórnika realizującego zadane opóźnienie grupowe.

Rozważmy przypadek równomiernie falistej aproksymacji stałego opóźnienia grupowego skutecznym opóźnieniem grupowym dolnoprzepustowego filtra LC. Aproksymacja równomiernie falista uważana jest za bardziej efektywną niż aproksymacja maksymalnie płaska, gdyż przy takim samym stopniu wielomianu $g(jx)$ uzyskuje się aproksymację stałej charakterystyki opóźnienia grupowego w szerszym przedziale częstotliwości niż w przypadku aproksymacji maksymalnie płaskiej [8, 9]. Danymi wyjściowymi do przeprowadzenia równomiernie falistej aproksymacji stałego opóźnienia grupowego są zwykle stopień n wielomianu $g(jx)$ oraz wartość falowania międzyszczytowego d wokół średniego opóźnienia grupowego τ_0 (rys. 1) [6, 9, 12, 14]. W pracy [14] wykazano, że przy takich danych wyjściowych istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zadania równomiernie falistej aproksymacji stałego opóźnienia grupowego.

Stopień n wielomianu $g(jx)$ jest najczęściej przyjmowany w zależności od wymaganej wartości τ_0 . Im większa jest ta wartość, tym większy należy przyjąć stopień n . Dla określonej wartości τ_0 i zadanej szerokości pasma przepustowego $P = \langle x_p, x_p \rangle$ odpowiedni stopień n wielomianu $g(jx)$ można wyznaczyć np. posługując się wykresami podanymi w literaturze [14]. Należy ponadto zwrócić uwagę na fakt, że dla danego n wartość τ_0 nie jest stała; rośnie ona również w pewnym stopniu wraz ze zwiększaniem wartości falowania międzyszczytowego d [14].



Rys. 1. Równomiernie falista charakterystyka opóźnienia grupowego

Niech d będzie określonym falowaniem międzyszczytowym wokół średniego opóźnienia grupowego τ_0 w pasmie przepustowym $P = \langle x_{-p}, x_p \rangle$, a $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ — wektorem parametrów y_j , $j = 1, 2, \dots, n$, przy czym

— dla n parzystego

$$\left. \begin{aligned} y_{2i-1} &= \beta_i \\ y_{2i} &= \Omega_i \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, n/2 \quad (10)$$

— dla n nieparzystego

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \alpha, \\ y_{2i} &= \beta_i, \\ y_{2i+1} &= \Omega_i \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} \quad (11)$$

Ponadto niech $\tau(Y, x)$ będzie charakterystyką opóźnienia grupowego otrzymaną w wyniku aproksymacji, a Θ_l , $l = 1, 2, \dots, n-1$, ($n \geq 2$)²⁾ — przedziałami określonymi następująco

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \langle -x_{-p}, x_1 \rangle, \\ \Theta_k &= \langle x_{k-1}, x_k \rangle, \quad k = 2, \dots, n-2 \\ \Theta_{n-1} &= \langle x_{n-2}, x_p \rangle, \end{aligned} \quad (12)$$

gdzie: $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$ są częstotliwościami, dla których spełnione są odpowiednio warunki:

— w przypadku n parzystego

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\tau(Y, x)}{dx} \right|_{x=x_k} &< 0, \quad \text{dla } k = 1, 3, \dots, n-3 \\ \left. \frac{d\tau(Y, x)}{dx} \right|_{x=x_k} &> 0, \quad \text{dla } k = 2, 4, \dots, n-2 \end{aligned} \quad (13)$$

²⁾ W przypadku $n = 1$ nie ma potrzeby rozpatrywania tak określonych przedziałów (patrz wzór (17) dla $n = 1$). W przypadku $n = 2$ można przyjąć, że $x_1 = x_p$, czyli wystarczy rozpatrywać przedział $\Theta_1 = \langle x_{-p}, x_p \rangle$.

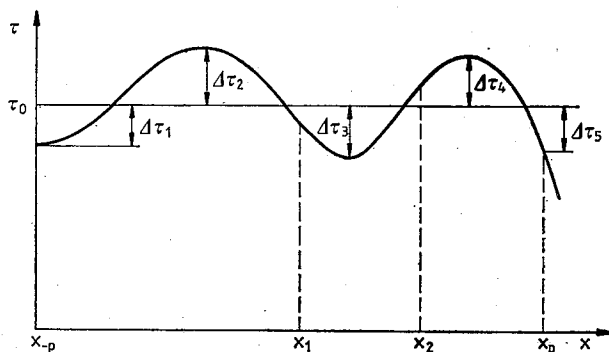
— w przypadku n nieparzystego

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\tau(Y, x)}{dx} \right|_{x=x_k} &> 0, \quad \text{dla } k = 1, 3, \dots, n-2 \\ \left. \frac{d\tau(Y, x)}{dx} \right|_{x=x_k} &< 0, \quad \text{dla } k = 2, 4, \dots, n-3. \end{aligned} \quad (14)$$

Aproksymację uważamy za optymalną, gdy dla przyjętego stopnia n wartości największych różnic $\Delta\tau_i(Y)$, $i = 1, \dots, n+1$, pomiędzy charakterystyką opóźnienia grupowego $\tau(Y, x)$ otrzymaną w wyniku aproksymacji i stałą charakterystyką $\tau(x) = \tau_0 = \text{const}$ są równe zadanej liczbie δ , przy czym

$$\delta = \frac{d}{2}. \quad (15)$$

Wartości największych różnic $\Delta\tau_i(Y)$, $i = 1, \dots, n+1$, określamy następująco (rys. 2):



Rys. 2. Sposób wyznaczania wartości największych różnic $\Delta\tau_i(Y)$, $i = 1, \dots, 4$

— w przypadku n parzystego:

$$\begin{aligned} \Delta\tau_1(Y) &= \tau_0 - \tau(Y, x_{-p}) = \delta \\ \Delta\tau_i(Y) &= \max_{x \in \Theta_{i-1}} (\tau(Y, x) - \tau_0) = \max_{x \in \Theta_{i-1}} (\tau(Y, x)) - \tau_0, \quad i = 2, 4, \dots, n \\ \Delta\tau_i(Y) &= \max_{x \in \Theta_{i-1}} (\tau_0 - \tau(Y, x)) = \tau_0 - \min_{x \in \Theta_{i-1}} (\tau(Y, x)), \quad i = 3, 5, \dots, n-1 \\ \Delta\tau_{n+1}(Y) &= \tau_0 - \tau(Y, x_p), \end{aligned} \quad (16)$$

— w przypadku n nieparzystego:

$$\begin{aligned} \Delta\tau_1(Y) &= \tau(Y, x_{-p}) - \tau_0 = \delta, \\ \Delta\tau_i(Y) &= \max_{x \in \Theta_{i-1}} (\tau_0 - \tau(Y, x)) = \tau_0 - \min_{x \in \Theta_{i-1}} (\tau(Y, x)), \quad i = 2, 4, \dots, n-1, \\ \Delta\tau_i(Y) &= \max_{x \in \Theta_{i-1}} (\tau(Y, x) - \tau_0) = \max_{x \in \Theta_{i-1}} (\tau(Y, x)) - \tau_0, \quad i = 3, 5, \dots, n, \\ \Delta\tau_{n+1}(Y) &= \tau_0 - \tau(Y, x_p). \end{aligned} \quad (17)$$

Zadanie aproksymacji formułujemy w sposób następujący:

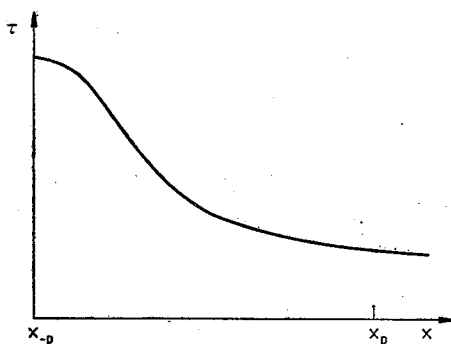
Dla przyjętego stopnia n wielomianu $g(jx)$ wyznaczyć taki wektor $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$, dla którego

$$\bigwedge_{i=1, \dots, n+1} \Delta \tau_i(Y) = \delta \quad (18)$$

3. SPOSÓB ROZWIĄZANIA ZADANIA APROKSYMACJI

Dla $n = 1$ charakterystyka opóźnienia grupowego ma przebieg pokazany na rysunku 3. Zadanie aproksymacji charakterystyki τ_0 można w tym przypadku stosunkowo łatwo rozwiązać w sposób analityczny w drodze rozwiązania równania

$$\tau(\alpha, x_{-p}) - \tau(\alpha, x_p) = d. \quad (19)$$



Rys. 3. Charakterystyka opóźnienia grupowego dla $n = 1$

Przyjmując $x_{-p} = 0$, $x_p = 1$ oraz podstawiając (9) do (19) otrzymujemy

$$-\frac{\alpha}{\alpha^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} = d. \quad (20)$$

Po odpowiednich przekształceniach dostajemy równanie

$$d\alpha^3 + d\alpha + 1 = 0, \quad (21)$$

którego rzeczywiste rozwiązanie $\alpha < 0$ stanowi jednocześnie rozwiązanie zadania aproksymacji.

W przypadku $n \geq 2$ rozwiązanie zadania aproksymacji charakterystyki opóźnienia grupowego jest bardziej skomplikowane. W niniejszej pracy zostanie zaproponowany sposób rozwiązania tego zadania w drodze rozwiązania odpowiedniego zadania programowania nieliniowego z ograniczeniami.

W celu znalezienia współrzędnych wektora $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$, a tym samym optymalnego, dla przyjętego stopnia n i założonego falowania międzyszczytowego d , położenia zer wielomianu $g(jx)$, należy mianowicie określić taką funkcję $w(Y)$, która przy spełnieniu warunku (18) osiąga minimum globalne. Jako funkcję tę przyjmujemy funkcję postaci

$$w(Y) = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\Delta \tau_i(Y) - \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \Delta \tau_k(Y)}{n+1} \right)^2. \quad (22)$$

Można wykazać, że przy spełnieniu warunku (18) tak określona funkcja $w(Y)$ osiąga minimum globalne równe zero.

Problem wyrównania różnic $\Delta \tau_i$ sprowadza się w ten sposób do zadania znalezienia takich współrzędnych wektora Y , dla których funkcja $w(Y)$ osiąga minimum globalne przy ograniczeniach

— w przypadku n parzystego:

$$\bigwedge_{i=1, \dots, n/2} \beta_i < 0, \quad (23)$$

$$\bigwedge_{i=1, \dots, n/2} -\Omega_i < 0, \quad (24)$$

$$\bigwedge_{i=1, \dots, n+1} -\Delta \tau_i(Y) < 0, \quad (25)$$

— w przypadku n nieparzystego:

$$\alpha < 0, \quad (26)$$

$$\bigwedge_{i=1, \dots, \frac{n-1}{2}} \beta_i < 0, \quad (27)$$

$$\bigwedge_{i=1, \dots, \frac{n-1}{2}} -\Omega_i < 0, \quad (28)$$

$$\bigwedge_{i=1, \dots, n+1} -\Delta \tau_i(Y) < 0. \quad (29)$$

Spełnienie ograniczeń odpowiednio (23) w przypadku n parzystego lub (26) i (27) w przypadku n nieparzystego zapewnia, że otrzymany w wyniku aproksymacji wielomian $g(jx)$ jest wielomianem Hurwita.

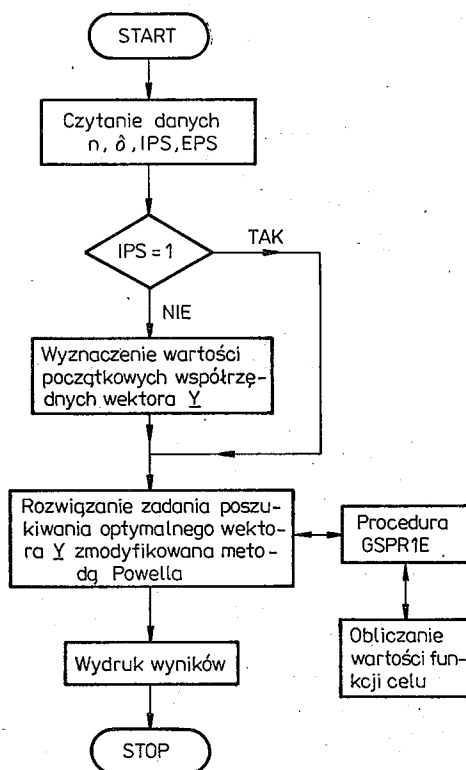
Zadanie znalezienia wektora Y minimalizującego funkcję $w(Y)$ jest zadaniem programowania nieliniowego z ograniczeniami. Z podanych w literaturze [3, 5, 15] metod poszukiwania minimum z ograniczeniami do rozwiązania rozpatrywanego zadania zastosowano zmodyfikowaną metodę Powella (z przesuwaną funkcją kary). Metoda ta umożliwia sprowadzenie zadania z ograniczeniami do ciągu zadań bez ograniczeń poprzez odpowiednią modyfikację funkcji celu³⁾. Zadania programowania nieliniowego bez ograniczeń rozwiązywano metodą gradientu sprzężonego Polaka-Ribiery z estymacją gradientu [3, 5].

Do określenia wartości funkcji w Y niezbędna jest znajomość wartości maksymalnych różnic $\Delta \tau_i(Y)$, $i = 1, \dots, n+1$. W celu wyznaczenia wartości tych różnic ze wzorów (16) lub (17) należy z kolei znać wartości odpowiednio maksimum lub minimum funkcji w przedziałach Θ_k , $k = 1, \dots, n-1$. Wartości odpowiednio maksimum lub minimum funkcji $\tau(Y, x)$ w każdym z przedziałów Θ_k , $k = 1, \dots, n-1$, wyznaczono posługując się metodą złotego podziału [3, 5, 15].

³⁾ Funkcją celu nazywamy funkcję, której minimum poszukujemy.

4. OPIS PROGRAMU APOG

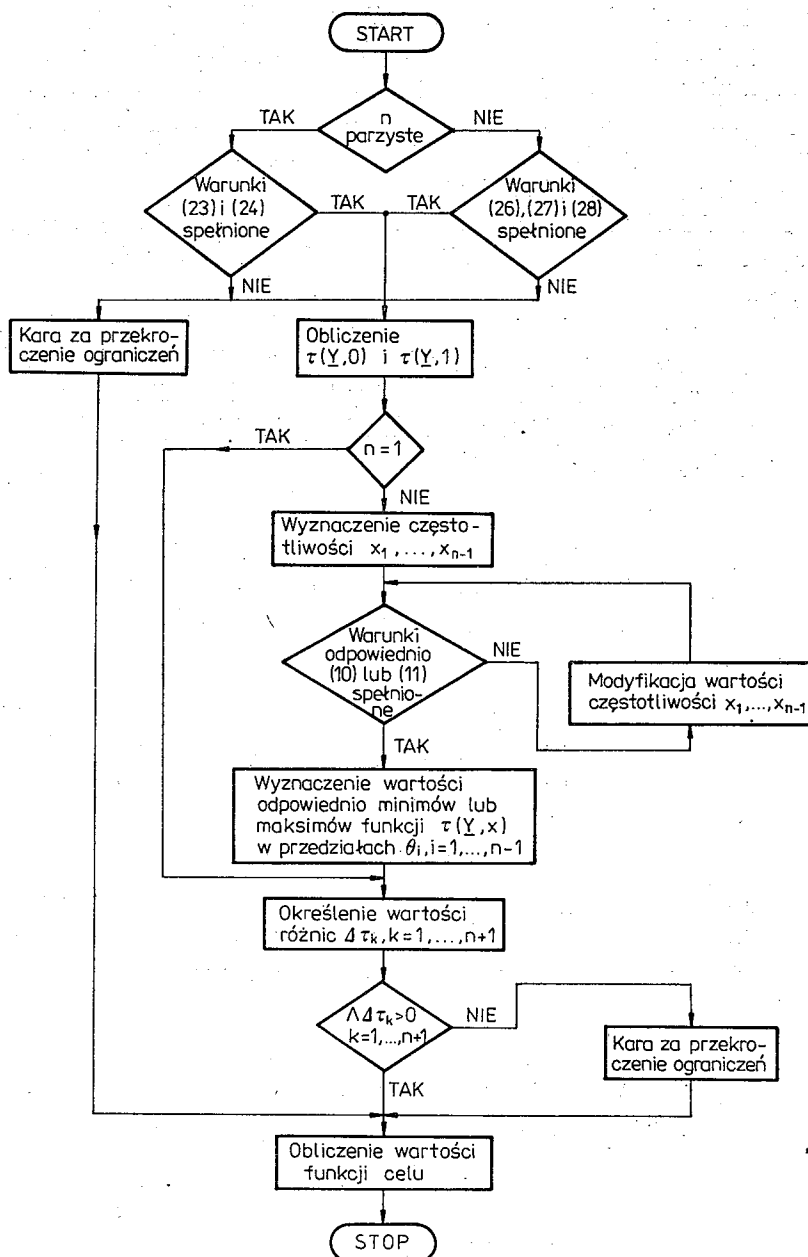
Przedstawiony sposób aproksymacji posłużył do opracowania programu APOG umożliwiającego równomiernie falistą aproksymację dolnoprzepustowych charakterystyk opóźnienia grupowego. Program ten został napisany w języku Fortran w dwóch wersjach. Pierwsza wersja jest przystosowana do maszyny cyfrowej SM-4, a druga do mikrokomputera Amstrad CPC 6128. Ogólna sieć działań programu APOG jest pokazana na rysunku 4, natomiast sieć działań procedury obliczającej wartość funkcji celu jest pokazana na rysunku 5.



Rys. 4. Ogólna sieć działań programu APOG

Jako dane wejściowe do programu należy podać:

- liczbę n , czyli stopień wielomianu $g(jx)$ ($n \leq 10$),
- liczbę δ , czyli połowę wartości dopuszczalnego falowania międzyszczytowego wokół średniego opóźnienia grupowego,
- informację, czy podajemy początkowe współrzędne wektora Y , czy też współrzędne te mają być określone przez program (liczba informacyjna IPS równa odpowiednio 1 lub 0),
- wartość parametru EPS, zwanego parametrem testu stopu procedury minimalizacji



Rys. 5. Sieć działań procedury obliczającej wartość funkcji celu

bez ograniczeń [5] (procedura ta kończy swoje działanie, gdy norma gradientu funkcji celu $\|\nabla F\| \leq \text{EPS}$).

W programie APOG wykorzystano odpowiednio zmodyfikowaną procedurę GSPR1E opracowaną w Instytucie Automatyki Politechniki Warszawskiej [5]. Procedura ta umożliwia rozwiązywanie zadań programowania nieliniowego bez ograniczeń metodą gradientu

sprężonego Polaka — Ribieri, przy czym gradient funkcji celu jest estymowany numerycznie. W przypadku rozpatrywanej funkcji celu numeryczna estymacja gradientu jest niezbędna, gdyż nie ma możliwości jego wyznaczenia w sposób analityczny.

Po przeprowadzeniu obliczeń przy użyciu programu APOG jako wynik końcowy otrzymujemy wartości zer wielomianu $g(jx)$, przy których spełnione są warunki (18). Dla wyznaczonych wartości zer wielomianu $g(jx)$ obliczane są ponadto wartości odpowiednio maksimów i minimów funkcji $\tau(Y, x)$ w kolejnych przedziałach Θ_l , $l = 1, \dots, n-1$, wartości $\tau(Y, 0)$ i $\tau(Y, 1)$, a ponadto wartości maksymalnych różnic $\Delta\tau_k(Y)$, $k = 1, \dots, n+1$.

Przy użyciu programu APOG przeprowadzono aproksymację szeregu charakterystyk opóźnienia grupowego. Otrzymane w wyniku aproksymacji wartości zer wielomianu $g(jx)$ porównywano z odpowiednimi wartościami tych zer podanymi w pracy [14]. Pierwsze trzy cyfry znaczące były zawsze identyczne. Różnice pojawiały się dopiero w przypadku czwartej lub piątej cyfry znaczącej.

Tablica 1

Wyniki obliczeń dla danych $n = 4$, $\delta = 0,1$

Aproksymacja charakterystyki opóźnienia grupowego

dane:

 $n = 4$ $\delta = .10000$ Wartości zer wielomianu $g(jx)$ $\beta_1 = -.466150$ $\Omega_1 = .328774$ $\beta_2 = -.384350$ $\Omega_2 = .952878$ Wartości maksymalnych różnic $\Delta\tau_k(Y)$

k	1	2	3	4	5
x	0.000000	.319434	.623567	.879302	1.000000
$\tau(Y, x)$	3.593334	3.793318	3.593359	3.793293	3.593365
$\Delta\tau_k(Y)$	.099992	.099992	.099968	.099966	.099961

Tablica 2

Wyniki obliczeń dla danych $n = 5$, $\delta = 0,2$

Aproksymacja charakterystyki opóźnienia grupowego

dane:

 $n = 5$ $\delta = .20000$ Wartości zer wielomianu $g(jx)$ $\alpha = -.326191$ $\Omega_1 = .491902$ $\beta_1 = -.316607$ $\Omega_2 = .949147$ $\beta_2 = -.262302$ Wartości maksymalnych różnic $\Delta\tau_k(Y)$

k	1	2	3	4	5	6
x	0.000000	.245058	.485431	.712142	.906040	1.000000
$\tau(Y, x)$	5.457073	5.056264	5.458273	5.056017	5.457793	5.056425
$\Delta\tau_k(Y)$	.200099	.200711	.201298	.200957	.200819	.200550

Czas wykonywania obliczeń przy użyciu programu APOG jest zależny od liczb n , δ oraz EPS. Zwiększa się on w miarę wzrostu liczby n oraz w miarę zmniejszania liczb δ oraz EPS. Zarówno w przypadku wykonywania obliczeń na maszynie cyfrowej SM-4 jak i na mikrokomputerze Amstrad CPC 6128 czas ten waha się od kilku do kilkudziesięciu minut, przy czym takie same obliczenia wykonywane są na maszynie cyfrowej SM-4 nieco szybciej.

Przykładowe wyniki aproksymacji charakterystyki opóźnienia grupowego przeprowadzonej przy użyciu programu APOG są podane w tablicach 1 i 2. W obu tych przypadkach do obliczeń przyjęto wartość parametru $\text{EPS} = 0,00001$, a ponadto początkowe współrzędne wektora Y były określane przez program.

ZAKOŃCZENIE

W pracy zaproponowano sposób rozwiązania zadania równomiernie falistej aproksymacji charakterystyki opóźnienia grupowego w drodze rozwiązania odpowiedniego zadania programowania nieliniowego z ograniczeniami. Ponadto podano opis programu APOG oraz przykładowe wyniki obliczeń.

W porównaniu ze sposobem rozwiązania rozpatrywanego zadania przedstawionym w pracy [14], zaproponowany sposób jest prostszy, bowiem nie wykonuje się obliczeń na liczbach zespolonych. Dodatkową zaletą zaproponowanego sposobu jest fakt, że otrzymane zadanie programowania nieliniowego z ograniczeniami nie jest zbyt czułe na dobór punktu startowego. Wystarczy przyjąć taki punkt startowy, aby funkcja $\tau(Y, x)$ miała na przemian odpowiednio minima i maksima znajdujące się w przedziale $\langle x_{-p}, x_p \rangle$, a współrzędne takiego punktu można stosunkowo łatwo określić. W przypadku sposobu rozwiązania przedstawionego w pracy [14], a mianowicie iteracyjnego rozwiązywania układu zespolonych równań nieliniowych, do ustalenia punktu startowego niezbędne jest natomiast posiadanie informacji o rozmieszczeniu pierwiastków tego układu [1].

BIBLIOGRAFIA

1. G. Dahlquist, A. Björck: *Metody numeryczne*. Warszawa: PWN, 1983
2. S. Darlington: *Network synthesis using Tchebyshev polynomial series*. Bell Syst. Techn. J., July 1952, 31, p. 613—665
3. W. Findeisen, J. Szymanowski, A. Wierzbicki: *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji*. Warszawa: PWN, 1980
4. A. A. Lanne: *Optimalnyj sintiez linijnych električeskich schiem*. Moskwa: Izd. Swiaź, 1978
5. T. Kręglewski, T. Rogowski, A. Ruszczyński, J. Szymanowski: *Metody optymalizacji w języku FORTRAN*. Warszawa: PWN, 1984
6. R. Kwan, G. Bach: *Simultaneous Approximations in Filter Design*. IEEE Trans. on Circuit Theory, 1969, CT 16 p. 117—121
7. O. Przesmycki: *Metoda mieszana projektowania filtrów LC*. Instytut Telekomunikacji PW, Referaty, zeszyt 3, 1977
8. B. D. Rakovich: *Transfer functions approximating to a constant group delay. Part 1: Steady State Responses*. Electronic Engineering, May 1968, vol. 40, nr 483, p. 242—246

9. J.D. Robert, P.M. Stanimirovic: *Design of Band-Pass Filters Exhibiting Equiripple Group Delay and Amplitude Characteristics*. Proc. of the IREE, Jan. Feb. 1974, p. 15—22
10. J.O. Scanlan: *A class of transfer functions having approximately maximally flat group delay characteristics*. IRE Trans. on Circuit Theory, 1965, CT-12 p. 260—269
11. W. Soluch (red.): *Filtry piezoelektryczne*. Warszawa: WKiŁ, 1982
12. G.C. Temes, S.K. Mitra (red.): *Teoria i projektowanie filtrów*. Warszawa: WNT, 1978
13. W.E. Thomson: *Delay networks having maximally flat frequency characteristics*. Proc. IEE, 1949, vol. 96, p. 487—490
14. E. Ulbrich, H. Piloty: *Über den Entwurf von Allpässen, Tiefpässen und Bandpässen mit einer im Tschebyscheffschen Sinne approximierten konstanten Gruppenlaufzeit*. Arch. Elektr. Übertr., 1960, vol. 14, nr 10, S. 451—467
15. R. Wit: *Metody programowania nieliniowego. Minimalizacja funkcji gładkich*. Warszawa: WNT, 1986

F. WYSOCKA-SCHILLAK

APPLICATION OF NONLINEAR PROGRAMMING TO THE EQUIRIPPLE APPROXIMATION OF CONSTANT GROUP DELAY BY AN EFFECTIVE GROUP DELAY OF A LOW-PASS FILTER

Summary

The paper presents a method for the equiripple approximation of constant group delay by an effective group delay of a low-pass filter. The approximation problem in the method used is reduced to a properly constrained minimization problem. This is solved by a penalty function shifting method. A description of the computer program APOG is presented. Finally, two numerical examples are given.

F. WYSOCKA-SCHILLAK

APPLICATION DE LA PROGRAMMATION NON LINÉAIRE À L'APPROXIMATION ONDULÉE UNIFORMÉMENT DU DÉLAI DE GROUPE CONSTANT PAR LE DÉLAI DE GROUPE EFFECTIF DU FILTRE PASSE-BAS LC

Résumé

Dans l'étude on a proposé le mode de résolution du problème de l'approximation ondulée uniformément du délai de groupe constant par le délai de groupe effectif du filtre passe-bas LC. Ce problème est réduit au problème convenable de programmation non linéaire avec contraintes, qui est ensuite résolu à l'aide de la méthode choisie de l'optimisation. L'étude contient en outre le programme APOG et quelques exemples des résultats de calculs faits à l'aide de ce programme.

F. WYSOCKA-SCHILLAK

ANWENDUNG NICHTLINEARER PROGRAMMIERUNG FÜR DIE GLEICHMÄßIG WELLIGE APPROXIMATION DER KONSTANTEN GRUPPENLAUFZEIT MITTELS WIRKSAME VERZÖGERTER GRUPPENLAUFZEIT EINES LC-TIEFPASSES

Zusammenfassung

In diesem Aufsatz wurde ein Verfahren für die Lösung der Aufgabe einer gleichmäßig welligen Approximation der konstanten Gruppenlaufzeit mittels wirksamer Verzögerung der Gruppenlaufzeit eines LC-Tiefpasses vorgeschlagen. Diese Aufgabe wird nämlich in eine entsprechende Aufgabe der nichtlinearen Programmierung mit Beschränkungen umgestaltet. Diese Aufgabe wird dann mittels einer gewählten

Optimierungsmethode gelöst. Es wurde auch eine Beschreibung des erarbeiteten APOG-Programms gebracht, als auch Ergebnisbeispiele der unter Anwendung dieses Programms durchgeführten Berechnungen.

Ф. ВЫСОЦКА-ШИЛЛАК

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧИ РАВНОВОЛНОВОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПОСТОЯННОГО ГРУППОВОГО
ВРЕМЕНИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ РАБОЧЕГО ВРЕМЕНИ
ЗАПАЗДЫВАНИЯ ФИЛЬТРА LC НИЖНИХ ЧАСТОТ

Р е з ю м е

Представлен метод решения задачи равноволновой аппроксимации постоянного группового времени запаздывания характеристикой рабочего времени запаздывания фильтра LC нижних частот. В этом методе задача аппроксимации преобразована в соответствующую задачу нелинейного программирования с ограничениями. Для решения полученной задачи программирования использован метод штрафных функции. Приведено также описание составленной программы APOG и два численные примеры.

Warunki eliminacji dynamicznych zniekształceń intermodulacyjnych we wzmacniaczach z ujemnym sprzężeniem zwrotnym oraz kompensacją biegunem i zerem

MIECZYŚLAW GŁOWACKI, MARIAN PIERZCHAŁA, JÓZEF STANCLIK

Instytut Telekomunikacji i Akustyki, Politechnika Wrocławska

Otrzymano 1988.05.15

Autoryzowano do druku 1988.11.28

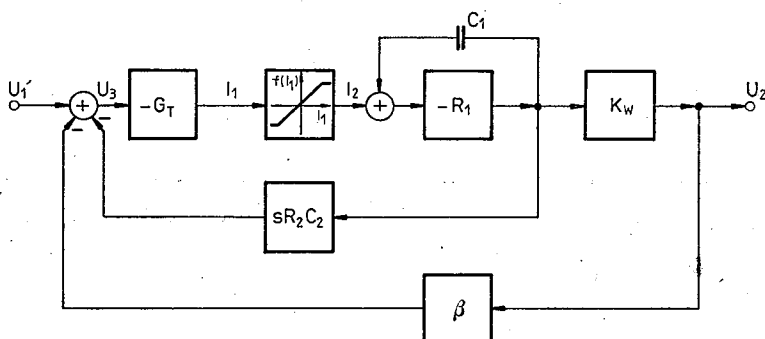
W pracy wyznaczono maksymalną wielkość napięcia sterującego stopień wejściowy wzmacniacza z ujemnym sprzężeniem zwrotnym i kompensacją biegunem i zerem. Umożliwiło to sformułowanie warunku, którego spełnienie ogranicza możliwość powstawania dynamicznych zniekształceń intermodulacyjnych w stopniu wejściowym wzmacniacza. Porównano właściwości struktury wzmacniacza z kompensacją biegunem i zerem z właściwościami struktury z kompensacją biegunem dominującym pod kątem podatności na powstawanie tych zniekształceń. Poprawność modelu i wyników analitycznych została potwierdzona doświadczalnie.

1. WSTĘP

W literaturze szczegółowo opisano mechanizmy powstawania dynamicznych zniekształceń intermodulacyjnych we wzmacniaczach z ujemnym sprzężeniem zwrotnym i kompensacją biegunem dominującym [1, 2, 6, 7, 8] oraz środki techniczne, których zastosowanie umożliwia eliminację tych zniekształceń [1, 2, 3, 7, 8]. Nie były natomiast analizowane warunki eliminacji takich zniekształceń we wzmacniaczach z ujemnym sprzężeniem zwrotnym oraz kompensacją biegunem i zerem. Takie wzmacniacze są interesujące z technicznego punktu widzenia ponieważ, jak to zostanie wykazane w niniejszej pracy, można w nich uniknąć powstawania dynamicznych zniekształceń intermodulacyjnych bez konieczności zwiększania dynamiki stopnia wejściowego.

2. ANALIZA WARUNKÓW ELIMINACJI DYNAMICZNYCH ZNIEKSZTAŁCEŃ INTERMODULACYJNYCH WE WZMACNIACZU Z UJEMNYM SPRĘŻENIEM ZWROTNYM ORAZ KOMPENSACJĄ BIEGUNEM I ZEREM

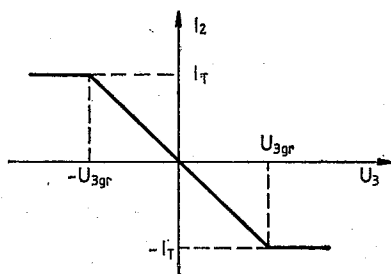
Schemat blokowy typowego wzmacniacza z ujemnym sprzężeniem zwrotnym oraz kompensacją biegunem i zerem podano na rys. 1. Schemat ten został utworzony przez



Rys. 1. Schemat blokowy wzmacniacza z kompensacją biegunem i zerem

dodanie bloku kompensacji zerem do analizowanego w pracy [2] schematu wzmacniacza z kompensacją biegunem dominującym. Transmittancja tego bloku ma postać $sR_2C_2/(1+sR_2C_2)$. W niniejszej pracy rozważa się jednak zakres częstotliwości, w którym jest spełniony warunek $\omega R_2C_2 \ll 1$ co jest uzasadnione ograniczoną w praktyce szybkością zmian sygnału wejściowego. W skład wzmacniacza wchodzi następujące bloki:

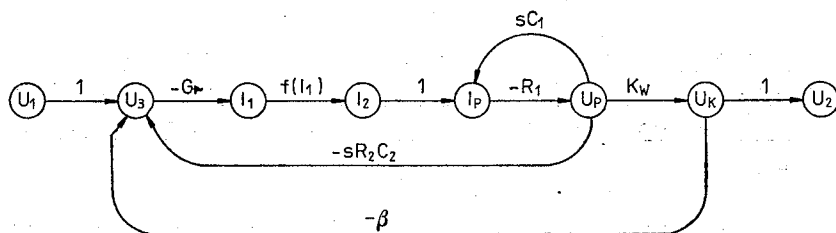
a) stopień wejściowy o transkonduktancji $-G_T$ i charakterystyce napięciowo-prądowej przedstawionej na rys. 2,



Rys. 2. Aproxymowana charakterystyka napięciowo-prądowa stopnia wejściowego

b) stopień sterujący o transrezystancji $-R_1$ wraz z układem kompensacji biegunem dominującym,

c) stopień wyjściowy o transmittancji K_W niezależnej od częstotliwości i impedancji wejściowej o wiele większej od impedancji wyjściowej stopnia sterującego,



Rys. 3. Graf przepływu sygnałów opisujący model wzmacniacza z rys. 1

d) blok kompensacji zerem o transmitancji sR_2C_2 ,

e) blok ujemnego sprzężenia zwrotnego o transmitancji β niezależnej od częstotliwości.

Schemat blokowy wzmacniacza o strukturze zgodnej z rys. 1 można opisać za pomocą grafu przepływu sygnałów przedstawionego na rys. 3. Ponieważ celem przeprowadzanej analizy jest wyznaczenie warunków, których spełnienie zapobiegnie powstawaniu dynamicznych zniekształceń intermodulacyjnych, założymy liniową pracę stopnia wejściowego wzmacniacza. Przy takim założeniu wyznaczone na podstawie grafu napięcie sterujące stopień wejściowy wzmacniacza wyraża się zależnością:

$$U_3(s) = \frac{s_1}{s_2} \frac{s+s_2}{s+As_1} U_1(s), \quad (1)$$

gdzie: $s_1 = \frac{1}{R_1C_1 + G_T R_1 R_2 C_2}$, $s_2 = \frac{1}{R_1C_1}$ oraz $A = 1 + G_T R_1 K_w \beta$.

Wzór (1) może służyć do obliczenia napięcia sterującego stopień wejściowy wzmacniacza pobudzonego dowolnym sygnałem U_1 . Najtrudniejsze warunki pracy stopnia wejściowego wystąpią, gdy sygnał U_1 będzie falą prostokątną o małej częstotliwości powtarzania (każdy inny sygnał o ograniczonej amplitudzie wywoła mniejsze napięcie sterujące stopień wejściowy). Napięcie U_3 można wtedy obliczyć dla czasu nieujemnego, uważając sygnał U_1 za sumę dwu pobudeń [2]:

a) skoku napięcia od 0 do $-U_{1m}$, który wystąpił tak dawno, że w chwili $t = 0$ układ znajduje się w stanie ustalonym,

b) skoku napięcia od 0 do $2U_{1m}$ w chwili $t = 0$.

Po przejściu w dziedzinę czasu otrzymujemy następujące wyrażenia określające napięcie sterujące stopień wejściowy:

$$U_3(t) = U_{1m} \left[2 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{A} \right) \exp(-As_1 t) + \frac{1}{A} \right], \quad (2)$$

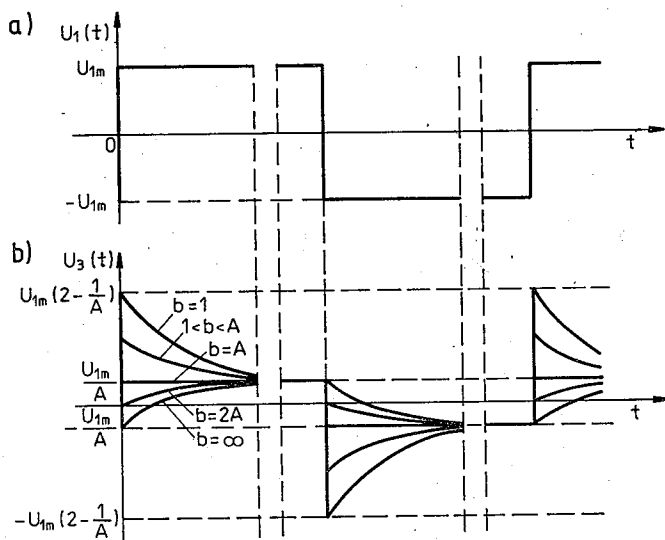
gdzie $b = \frac{s_2}{s_1} = 1 + G_T R_1 \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1}$. Zależność tego napięcia od czasu przy różnych wielkościach współczynnika b jest przedstawiona na rys. 4b. Moduł napięcia $U_3(t)$ przekracza wartość $\frac{U_{1m}}{A}$, odpowiadającą stanowi ustalonemu, gdy $b < A$. Największa wartość tego napięcia występuje wtedy dla $t = 0$ i wynosi:

$$U_{3max} = U_{1m} \left(\frac{2}{b} - \frac{1}{A} \right). \quad (3)$$

Współczynnik b może teoretycznie przyjmować wartości z przedziału $1 \leq b \leq +\infty$. Aby b było równe 1, stała czasu bloku kompensacji zerem $R_2 C_2$ musi być równa zero. Odpowiada to usunięciu bloku kompensacji zerem ze schematu przedstawionego na rys. 1. Wzmacniacz bez tego bloku stanowi układ z kompensacją biegunem dominującym, który był analizowany w pracach [2, 4]. Przy $b = 1$ zależności (1), (2) i (3) upraszczają się do postaci podanej w tych pracach. W szczególności maksymalna wielkość napięcia sterującego stopień wejściowy wynosi:

$$U'_{3max} = U_{1m} \left(2 - \frac{1}{A} \right). \quad (4)$$

Zwiększaniu współczynnika b od 1 do A towarzyszy zmniejszanie napięcia sterującego stopień wejściowy U_{3max} . Gdy $b = A$ napięcie $U_3(t)$ ma kształt fali prostokątnej, podobnie jak napięcie $U_1(t)$. Odpowiada to kompensacji bieguna As_1 transmitancji występującej w zależności (1) zerem s_2 tej transmitancji. Przy większych wartościach b zachodzi nierówność $|U_3(t)| \leq \frac{U_{1m}}{A}$ i dynamiczne zniekształcenia intermodulacyjne w stopniu wejściowym wzmacniacza nie powstają.



Rys. 4. Zależność od czasu napięć: a) wejściowego wzmacniacza, b) sterującego stopień wejściowy

Jeżeli chwilowa wartość napięcia $U_3(t)$ przekroczy granice przedziału napięć sterujących, odpowiadającego liniowej pracy stopnia wejściowego wzmacniacza (oznaczone na rys. 2 jako U_{3gr}), to pojawią się zniekształcenia sygnału. Warunek liniowej pracy stopnia wejściowego przyjmuje postać:

$$U_{3max} = U_{1m} \left(\frac{2}{b} - \frac{1}{A} \right) \leq U_{3gr}. \quad (5)$$

Spełnienie warunku (5) jest tym łatwiejsze im większą wartość przyjmuje współczynnik b . Jego zwiększenie można osiągnąć drogą zwiększania stałej czasu $R_2 C_2$ i (lub) zmniejszania stałej $R_1 C_1$. Zmniejszanie transrezystancji R_1 nie jest celowe, ponieważ prowadzi do redukcji wzmocnienia pętlowego wzmacniacza, istotnego ze względu na zniekształcenia nieliniowe. Podobnie pojemności C_1 nie można zmniejszyć poniżej $C_{1min} = C_c + C_m$, gdzie C_c jest pojemnością wewnętrzną tranzystora użytego w stopniu sterującym, zaś C_m stanowi pojemność montażową. Ze względu na konieczność zapewnienia stabilnej pracy wzmacniacza, może być konieczne zastosowanie większej niż C_{1min} pojemności tego kondensatora.

Stała czasu $R_2 C_2$ może być zwiększana również tylko w określonych granicach. Jest to związane z jej wpływem na górną częstotliwość graniczną i stabilność wzmacniacza. Górną częstotliwość graniczną wzmacniacza można wyznaczyć na podstawie grafu przedstawionego na rys. 3. Transmittancja wzmacniacza z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego jest określona zależnością:

$$K(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{G_T R_1 K_w}{s(R_1 C_1 + G_T R_1 R_2 C_2) + 1 + G_T R_1 K_w \beta}, \quad (6)$$

z której wynika wzór na pulsację graniczną wzmacniacza:

$$\omega_g = \frac{1 + G_T R_1 K_w \beta}{R_1 C_1 + G_T R_1 R_2 C_2}. \quad (7)$$

Jak zatem wynika z wzoru (7) zwiększanie stałej czasu $R_2 C_2$ jest ograniczone przez konieczność osiągnięcia założonego pasma wzmacniacza.

Wartość stałej czasu $R_2 C_2$ wpływa, podobnie jak $R_1 C_1$, na stabilność wzmacniacza. Stąd interpretując wzory zamieszczone w tej pracy nie można zakładać tych wartości dowolnie. Konieczne jest przyjmowanie takich wartości stałych czasu, aby była zagwarantowana stabilna praca wzmacniacza.

Osiągalna w praktyce wielkość współczynnika b zależy od rodzaju wzmacniacza. Na przykład we wzmacniaczach mocy m.cz. współczynnik ten wynosi od kilku do kilkudziesięciu. Takiej jego wartości odpowiada, przy typowym wzmocnieniu pętlowym wynoszącym kilkaset [5, 7], maksymalne napięcie sterujące stopień wejściowy wzmacniacza wielokrotnie przewyższające napięcie sterujące ten stopień w stanie ustalonym.

Spełnienie warunku liniowej pracy stopnia wejściowego jest łatwiejsze we wzmacniaczach z kompensacją biegunem i zerem. Aby uzasadnić to stwierdzenie obliczmy stosunek maksymalnych napięć sterujących stopień wejściowy dla obu typów wzmacniaczy:

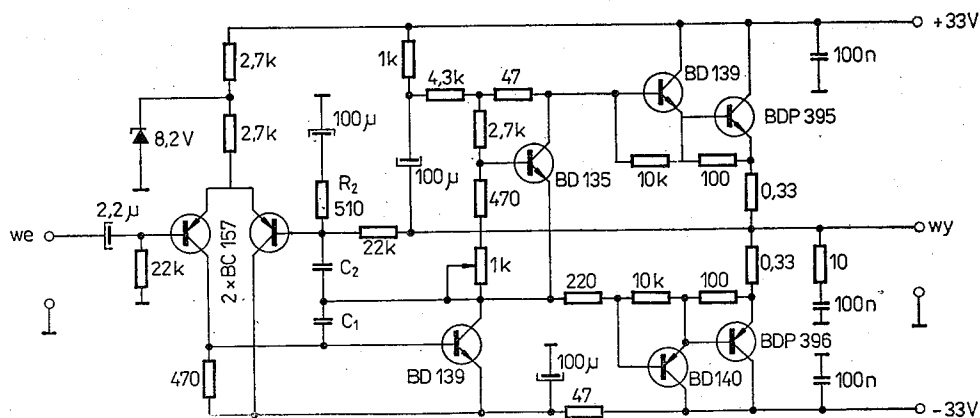
$$\frac{U_{3max}}{U'_{3max}} = \frac{\frac{2}{b} - \frac{1}{A}}{2 - \frac{1}{A}} \approx \frac{1}{b} \quad (8)$$

(zależność (8) obowiązuje, gdy $1 \leq b \leq A$, zaś przybliżona równość zachodzi, jeżeli $A \gg 1$ i $A \gg b$).

Z zależności (5) i (8) wynika ważna zaleta struktury wzmacniacza z kompensacją biegunem i zerem w stosunku do struktury z kompensacją biegunem dominującym, polegająca na około b -krotnym zmniejszeniu podatności tego wzmacniacza na powstawanie dynamicznych zniekształceń intermodulacyjnych w jego stopniu wejściowym.

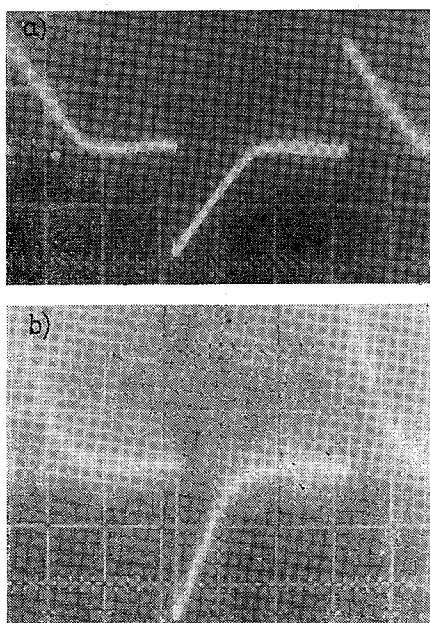
3. WERYFIKACJA DOŚWIADCZALNA WYNIKÓW ANALIZY

W celu uzyskania potwierdzenia poprawności przyjętego modelu wzmacniacza i otrzymanych wyników analitycznych wykonano serię pomiarów wzmacniacza mocy m.cz. o schemacie ideowym przedstawionym na rys. 5. Zmierzono górną częstotliwość graniczną i napięcie różnicowe, sterujące stopień wejściowy wzmacniacza pobudzonego falą prostą-



Rys. 5. Schemat ideowy przykładowego wzmacniacza mocy m.cz.

kątną przy różnych pojemnościach kondensatorów C_1 i C_2 . Pojemności tych kondensatorów dobrano w taki sposób, aby wzmacniacz pracował stabilnie a górna częstotliwość graniczna wzmacniacza zachowywała stałą wartość.



Fot. 1. Zależność napięcia sterującego stopień wejściowy wzmacniacza z rys. 5, pobudzonego falą prostokątną, od czasu: a) $C_1 = 2030$ pF, $C_2 = 0$, czułość torów Y 20 mV/cm, podstawa czasu 20 μ s/cm, b) $C_1 = 1030$ pF, $C_2 = 80$ pF, czułość torów Y 10 mV/cm, podstawa czasu 10 μ s/cm

Na fotografii 1a, b zamieszczono fotografie przedstawiające zależność od czasu napięcia sterującego stopień wejściowy wzmacniacza pobudzanego falą prostokątną przy różnych wartościach pojemności C_1 i C_2 . Napięcie to zmienia się zgodnie z przewidywaniami teoretycznymi (z zależnością (2) i rys. 4b).

Ilościową ocenę zgodności wyników analizy i pomiarów umożliwia tablica zawierająca ich zestawienie. Zamieszczono w niej wyniki pomiarów maksymalnej wielkości napięcia

sterującego stopień wejściowy wzmacniacza, odniesionej do amplitudy sygnału sterującego, oraz wyniki pomiarów górnej częstotliwości granicznej wzmacniacza, przy różnych pojemnościach kondensatorów C_1 i C_2 .

Zestawienie wyników pomiarów i obliczeń

Lp.	C_1	C_2	$\frac{U_{3max}}{U_{1m}} \Big _{pom}$	$f_g \text{ pom}$	b	$\frac{U_{3max}}{U_{1m}} \Big _{obl}$	$f_g \text{ obl}$
	pF	pF	—	kHz	—	—	kHz
1	2030	0	1,86	38,5	1,00	2,00	38,7
2	1030	80	1,09	39,0	1,97	1,02	38,8
3	500	120	0,48	40,7	4,00	0,50	39,4
4	230	150	0,21	39,6	9,15	0,22	39,5
5	140	150	0,14	41,6	14,4	0,14	41,3
6	86	150	0,093	42,4	22,8	0,088	42,5
7	30	150	0,031	43,1	63,5	0,032	43,7

Tablica ta zawiera również wartości współczynnika b , stosunku U_{3max}/U_{1m} i częstotliwości granicznej f_g wzmacniacza, obliczone na podstawie zależności (2), (3) i (7). Aby obliczyć te wielkości wyznaczono na podstawie schematu z rys. 5 wartości współczynników, występujących we wzorach (2), (3) i (7), jako: $G_T = 25 \text{ mS}$, $\beta = 0,022$, $K_w = 0,9$, $R_1 = 700 \text{ k}\Omega$ i $R_2 = 500 \Omega$. W obliczeniach uwzględniono również obecność pojemności C_c tranzystora T_3 i pojemności montażowej. Suma tych pojemności wynosi około 30 pF. Jak wynika z tablicy 1 uzyskano zadowalającą zgodność wyników obliczeń z wynikami pomiarów, co potwierdza poprawność przyjętego w pracy modelu wzmacniacza.

4. WNIOSKI

Wprowadzona w pracy zależność (3) umożliwia obliczanie maksymalnej wielkości napięcia sterującego stopień wejściowy wzmacniacza pobudzanego falą prostokątną. Jest ona podstawą określenia warunku projektowego (5), którego spełnienie zapobiegnie powstaniu dynamicznych zniekształceń intermodulacyjnych w jego stopniu wejściowym. Spełnienie tego warunku można uzyskać poprzez zmniejszenie napięcia U_{3max} , w wyniku zwiększenia współczynnika b , albo poprzez zwiększenie dynamiki stopnia wejściowego (co wymaga zmiany struktury i (lub) rodzaju elementów aktywnych użytych do jego budowy [3]). Z zależności (8), która umożliwia porównanie właściwości struktury wzmacniacza z kompensacją biegunem i zerem oraz struktury z kompensacją biegunem dominującym wynika, że w takich samych warunkach maksymalne napięcie sterujące stopień wejściowy wzmacniacza z kompensacją biegunem i zerem jest około b -krotnie mniejsze,

niż odpowiednie napięcie we wzmacniaczu z kompensacją biegunem dominującym. Dla tego spełnienie warunku liniowej pracy stopnia wejściowego (5) jest łatwiejsze w przypadku struktury z kompensacją biegunem i zerem.

BIBLIOGRAFIA

1. R. R. Cordell: *Another view of TIM*. Part 1, Audio, Vol. 64, No. 2, Feb. 1980, pp. 38—49, Part 2, Audio, Vol. 64, No. 3, March 1980, pp. 39—42
2. P. Garde: *Transient distortion in feedback amplifiers*. J. Audio Eng. Soc., Vol. 26, No. 5, May 1978, pp. 314—322
3. P. Garde: *Slope distortion and amplifier design*, J. Audio Eng. Soc., Vol. 26, No. 9, Sept. 1978, pp. 602—608
4. M. Głowacki, M. Pierzchała, J. Stanclik: *Wpływ filtru dolnoprzepustowego i skończonej szybkości zmian sygnału wejściowego na warunki powstawania dynamicznych zniekształceń intermodulacyjnych we wzmacniaczach mocy z kompensacją biegunem dominującym*. Rozprawy Elektrotechniczne, nr 1, 1987, ss. 257—268
5. M. Głowacki, M. Pierzchała, J. Stanclik: *Doskonalenie konstrukcji wzmacniaczy mocy m.cz. w celu zmniejszenia dynamicznych zniekształceń intermodulacyjnych*, Raport nr I-28/SPR-018/84, Wyd. Inst. Telekom. PWr., Wrocław, 1984
6. W. G. Jung, M. J. Stephens, C. C. Todd: *An overview of SID and TIM*. Part 1, Audio, Vol. 63, No. 6, June 1979, pp. 59—72, Part 2, Audio, Vol. 63, No. 7, July 1979, pp. 38—47, Part 3, Audio, Vol. 63, No. 8, Aug. 1979, pp. 42—59
7. W. M. Leach: *Transient IM distortion in power amplifiers*. Audio, Vol. 59, No. 2, Feb. 1975, pp. 34—41
8. M. Otala, E. Leinonen: *The theory of transient intermodulation distortion*, IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP-25, No. 1, Feb. 1977, pp. 2—8

M. GŁOWACKI, M. PIERZCHAŁA, J. STANCLIK

CONDITIONS OF ELIMINATION OF THE DYNAMIC INTERMODULATION DISTORTION IN FEEDBACK, POLE-ZERO COMPENSATED AMPLIFIERS

Summary

The maximum control voltage of the amplifier input stage is calculated. A design criterion is formulated allowing for the transient intermodulation distortion in the input stage to be avoided. Properties of lag-compensated and pole-zero compensated amplifiers are compared. The amplifier model and analytical results have been verified by measurements.

M. GŁOWACKI, M. PIERZCHAŁA, J. STANCLIK

CONDITIONS DE L'ÉLIMINATION DES DISTORSIONS DYNAMIQUES D'INTERMODULATION DANS UN AMPLIFICATEUR AVEC CONTRERÉACTION ET COMPENSATION À L'AIDE DES PÔLES ET DES ZÉROS

Résumé

Dans cet article on a déterminé la tension maximale de commande d'un étage d'entrée de l'amplificateur. La détermination de cette tension a facilité la formulation des conditions d'élimination des dis-

torsions d'intermodulation de l'amplificateur considéré. On a comparé l'efficacité de la compensation du déphasage arrière avec celle du déphasage en avant. Le modèle théorique et les résultats analytiques obtenus ont été vérifiés expérimentalement.

M. GŁOWACKI, M. PIERZCHAŁA, J. STANCLIK

BEDINGUNGEN FÜR DIE AUSSCHIEDUNG DYNAMISCHER INTERMODULATIONS- VERZERRUNGEN BEI VERSTÄRKERN MIT GEGENKOPPLUNG UND POL-NULL- KOMPENSIERUNG

Zusammenfassung

In der Bearbeitung wurde die maximale Größe der Steuerungs-spannung der Vorstufe des Verstärkers mit Gegenkopplung und Pol-Null-Kompensierung bestimmt. Diese Größe ermöglichte die Formulierung der Bedingung, deren Erfüllung verhindert, daß dynamische Intermodulationsverzerrungen in der Eingangstufe des Verstärkers gebildet werden. Ein Vergleich der Eigenschaften des Verstärkers mit der Pol-Null-Kompensierung und dem dominierenden Pol wurde vollzogen. Die Richtigkeit des Modells und der analytischen Ergebnisse wurden experimentell bestätigt.

М. ГЛОВАЦКИ, М. ПЕШЧАЛА, Ю. СТАНЦЛИК

УСЛОВИЯ ЕЛИМИНАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ИСКАЖЕНИЙ В УСИЛИТЕЛЕ МОЩНОСТИ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ И КОМПЕНСАЦИЕЙ ПОЛЮСОМ И НУЛЁМ

Резюме

Определена максимальная величина напряжения управления входной ступенью усилителя мощности с отрицательной обратной связью и компенсацией полюсом и нулём. Это позволило сформулировать условия, исполнение которого предохраняет перед возникновением динамических искажений в усилителе. Свойства структуры с компенсацией полюсом и нулём сравнены со свойствами структуры с компенсацией доминирующим полюсом с точки зрения восприимчивости на возникновение этих искажений. Достоверность модели и результатов анализа проверены экспериментально.

Stabilizacja częstotliwości generatora przestrajanego w dyskretnej pętli sprzężenia fazowego

MIROSLAW SADOWSKI

Instytut Podstaw Elektroniki, Politechnika Warszawska

Otrzymano 1988.04.27

Autoryzowano do druku 1989.01.27

W artykule opisano nowy sposób stabilizacji częstotliwości generatora przestrajanego, oparty o technikę pętli fazowej z cyfrowym przerzutnikiem typu D pracującym jako detektor fazy. Przedstawiono model matematyczny pętli, podstawowe nieliniowe równania różnicowe opisujące go w sposób ogólny, a także wybrane wyniki analiz numerycznych opartych o te równania. Przedstawiono metodę otrzymania zależności czasowej zmian częstotliwości w stanie ustalonym. Zawarto także wnioski o charakterze praktycznym, w tym wynikające z badań eksperymentalnych.

Zapewnienie dostatecznej stałości długoterminowej źródła sygnału harmonicznego należy do zagadnień o dużym znaczeniu praktycznym, szczególnie trudnym w przypadku generatorów o zmienianej częstotliwości. Zasadniczo są dwa sposoby podejścia do problemu: synteza częstotliwości lub zmniejszenie wpływu wewnętrznych i zewnętrznych czynników destabilizujących (optymalizacja układowa, kompensacja termiczna, specjalna konstrukcja mechaniczna itp.). Główne wady pierwszego rozwiązania to znaczna rozbudowa i koszt układu, natomiast drugi sposób jest uciążliwy ze względów konstrukcyjnych. Inne rozwiązanie, prowadzące do poprawy stałości długoterminowej częstotliwości generatora przestrajanego LC do stałości rzędu generatora kwarcowego prezentuje poniższy artykuł.

Prezentowany dalej układ składa się z generatora o częstotliwości zmienianej przez użytkownika oraz z autonomicznie działającego systemu, którego zadaniem jest dostrojenie (po zakończeniu przestrajania) i utrzymanie częstotliwości generatora na najbliższej wartości z określonego skończonego ich zbioru. Zbiór tych wartości określa siatkę równo-odległych możliwych częstotliwości pracy generatora w stanie ustalonym. W istocie rzeczy układ taki można traktować jako powielacz pewnej (teoretycznie dowolnie małej) częstotliwości, przy czym współczynnik powielenia może być bardzo duży. W układzie automatycznej synchronizacji wykorzystano typowy przerzutnik cyfrowy typu D jako detektor fazowy.

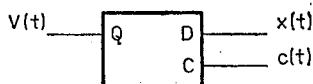
PRZERZUTNIK D JAKO DETEKTOR FAZY

Rozważmy wyzwalany zboczem (narastającym) przerzutnik typu D, przy czym przyjmujemy dla symetrii, że poziomy logiczne odpowiadają napięciom $+V$ i $-V$ (rys. 1). Niech jego sygnały wejściowe to idealne fale prostokątne, jakimi są przebiegi harmoniczne po przekształceniu przez idealne ograniczniki:

$$x(t) = V \operatorname{sgn}[X \sin \varphi(t)] \quad (1)$$

$$c(t) = V \operatorname{sgn}[C \sin(\omega_c t)]. \quad (2)$$

Przyjmijmy $V, X, C > 0$. Pulsacja zegarowa (taktująca) $\omega_c = 2\pi/T$ będzie traktowana jako wzorcowa, czyli wielkość T (zwana dalej okresem próbkowania) jest niezmienna w funkcji czasu.



Rys. 1. Przerzutnik typu D.

Zasada działania przerzutnika to przepisanie i zapamiętanie na wyjściu Q poziomu logicznego występującego na wejściu D w chwili narastania zbocza sygnału taktującego $c(t)$. Uzasadnione jest więc potraktowanie przerzutnika jako układu próbkującego sygnał $x(t)$ w dyskretnych momentach czasu $t = nT$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) i pamiętającego (idealnie!) próbkę do chwili $t = (n+1)T$. Uwzględniając czas propagacji układu t_p , wyjście Q można opisać dla czasu $nT < t < (n+1)T$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) wzorem:

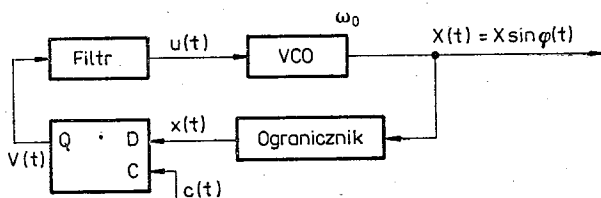
$$V(t - t_p) = V \operatorname{sgn} \sin \varphi(nT). \quad (3)$$

Zależność ta charakteryzuje przerzutnik jako detektor fazy. Dla równych pulsacji próbkowania i sygnału $x(t)$ wzór (3) określa prostokątną, okresową charakterystykę statyczną detektora fazowego, natomiast w przypadku ogólnym — zależność wartości chwilowej napięcia wyjściowego przerzutnika od spróbkowanej wartości fazy. $V(t)$ może przyjmować tylko wartości $+V$ lub $-V$.

Inne realizacje podobnie binarnie kwantujących detektorów fazy, stosowanych w całkowicie cyfrowych pętlach fazowych można znaleźć w [1], [2].

MODEL PĘTLI SPRZĘŻENIA FAZOWEGO

Układ przedstawiony na rys. 2 jest wspomnianym na wstępie nowym rozwiązaniem pętli fazowej do synchronizacji generatora przestrajanego. Pulsacja $\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$ tego generatora (VCO) może być regulowana niezależnie od siebie zarówno z zewnątrz, jak i przez wejście napięciowe. Chociaż fizycznym sygnałem wyjściowym układu jest napięcie $X(t)$, a wielkością regulowaną w pętli jest faza — z oczywistych względów pulsacja (lub częstotliwość) jest najbardziej interesująca.



Rys. 2. Układ pętli fazowej z przerzutnikiem

Po zakończeniu ręcznego przestrajania generatora, kiedy to wpływ pętli jest nieistotny, rozpoczyna się proces korekcji pulsacji VCO poprzez zmianę napięcia $u(t)$ tak, aby pulsacja wyjściowa po jego zakończeniu była wielokrotnością pulsacji próbkowania. Sprężenie zwrotne powinno także korygować dostatecznie wolne zmiany ω_0 , spowodowane zmianą warunków pracy generatora. Filtr musi być wystarczająco dużą stałą czasu całkowania dla minimalizacji fluktuacji napięcia sterującego $u(t)$. Ogranicznik przetwarza sygnał harmoniczny na wymagany przez przerzutnik D (detektor fazy) sygnał cyfrowy. Dalsza analiza dotyczy będzie układu przybliżonego, gdzie: generator VCO jest bezinercyjny i ma liniową charakterystykę przestrajania, właściwości przerzutnika nie zależą od częstotliwości sygnałów wejściowych, ogranicznik jest idealny, a zakłócenia — pomijalne. W związku z tym wartość chwilową fazy wyjściowej można wyrazić w postaci:

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0 + S_g \int_0^t u(t) dt, \quad (4)$$

gdzie S_g — nachylenie charakterystyki przestrajania VCO, φ_0 — faza początkowa drgań generatora. Składnik wydzielony z równania (4):

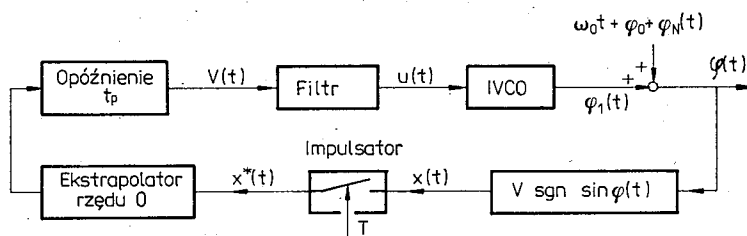
$$\varphi_1(t) = S_g \int_0^t u(t) dt \quad (5)$$

reprezentuje idealny integrator, nazywany dalej idealnym generatorem przestrajającym napięciem (IVCO). Równanie (3) zostanie zapisane w równoważnej, choć innej formalnie postaci ($1(t)$ to funkcja skoku jednostkowego):

$$V(t - t_p) = \sum_{k=0}^{\infty} x(nT) \cdot [1(t - kT) - 1(t - kT - T)], \quad (6)$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą nieujemną, a $x(t = nT)$ to n -ta próbka sygnału wyjściowego ogranicznika; dla danego t tylko jeden składnik sumy jest różny od zera. Tak napisana zależność upoważnia do przedstawienia przerzutnika w postaci szeregowego połączenia impulsatora idealnego, ekstrapolatora zerowego rzędu [3] oraz członu opóźniającego. Można sądzić, że takie połączenie dobrze modeluje własności przerzutnika D w zakresie prawidłowych amplitud sygnałów wejściowych, dopuszczalnych częstotliwości pracy oraz dostatecznie szybkich zboczy sygnału zegarowego. Jedynym elementem nieliniowym w pętli z rys. 2 jest idealny ogranicznik.

W efekcie otrzymuje się model nieliniowego systemu impulsowego ze sprzężeniem zwrotnym, przedstawiony na rys. 3. Jest to tak zwany układ trzeciego rodzaju [4], którego



Rys. 3. Uproszczony model matematyczny pętli fazowej

nie można przybliżyć układem liniowym nawet dla dowolnie małych odchyśleń. W modelu tym znajduje się idealny impulsator, próbkujący sygnał $x(t)$ w równoodległych chwilach $t = kT$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Formuje on sygnał $x^*(t)$, nie występujący fizycznie w układzie rzeczywistym, a składający się z odpowiednio przemnożonych funkcji δ -Diraca [3]:

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT) = V \sum_{k=0}^{\infty} \text{sgn} \sin \varphi(kT) \cdot \delta(t - kT). \quad (7)$$

Składnik $(\omega_0 t + \varphi_0)$ w zależności (4) i na rys. 3 ma charakter stałego wymuszenia i nie będzie tu interpretowany jako sygnał wejściowy pętli. Natomiast funkcja $\varphi_N(t)$ wprowadzona na rys. 3 ma reprezentować zjawiska destabilizujące pracę układu, na przykład zakłócenia zewnętrzne, niestabilność termiczną pulsacji ω_0 czy szumy fazy generatora. Na razie wpływ tych czynników nie będzie rozpatrywany ($\varphi_N(t) = 0$).

Analizowany autonomiczny system dyskretny ze względu na charakter nieliniowości nie może pracować bez drgań [4]. W przypadku traktowania układu jako powielacza częstotliwości oczywistym jest, że powielaniu podlegać może tylko pulsacja $\omega_c = 2\pi/T$ sygnału taktującego, który wtedy należy uznać za sygnał wejściowy układu.

Ekstrapolator, człon opóźniający, filtr oraz generator IVCO to liniowe analogowe elementy modelu, które łącznie można opisać transmitancją operatorową:

$$G(s) = \frac{\Phi_1(s)}{X^*(s)} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot e^{-t_p s} \cdot F(s) \cdot \frac{S_g}{s}, \quad (8)$$

w której $F(s)$ reprezentuje filtr. Jeśli odpowiedź impulsowa części analogowej modelu zostanie oznaczona jako:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] \quad (9)$$

to biorąc pod uwagę, że na jej wejściu działa sygnał (7) — otrzymamy na wyjściu:

$$\varphi_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot g(t - kT), \quad (10)$$

Celowe jest wyrażenie czasu w postaci $t = nT + \gamma T$, gdzie $n = 0, 1, 2, \dots$, $0 \leq \gamma < 1$. Dla $\gamma = 0$ powstanie ciąg kolejnych wartości fazy w chwilach próbkowania. Biorąc (1) oraz ponieważ $g(t) = 0$ dla $t < 0$:

$$\varphi_1(nT + \gamma T) = V \sum_{k=0}^n \text{sgn} \sin \varphi(kT) \cdot g(nT + \gamma T - kT). \quad (11)$$

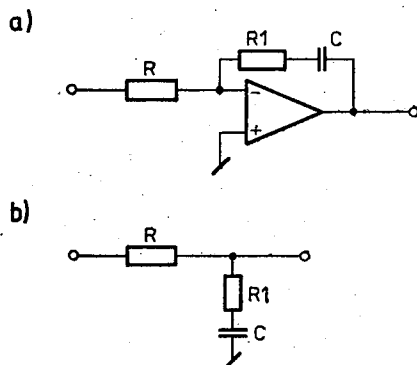
Ostatecznie, dla $\varphi_N(t) = 0$ otrzymuje się ogólne równanie, opisujące zachowanie się pętli sprzężenia fazowego:

$$\varphi(t) = V \sum_{k=0}^n \operatorname{sgn} \sin \varphi(kT) g(nT + \gamma T - kT) + \omega_0 nT + \omega_0 \gamma T + \varphi_0. \quad (12)$$

Jest to nieliniowe równanie różnicowe w postaci zależności rekurencyjnej, przy czym ze względu na charakter splotowy równanie (12) jest rzędu n . Znaczy to, że do wyznaczenia fazy dla n -tego próbkowania potrzebna jest znajomość wartości faz we wszystkich poprzednich chwilach kT ($k = 0, 1, 2, \dots$). Zależność (12) pozwala na wyznaczenie charakterystyk modelu matematycznego pętli z rys. 3 (np. czas dojścia do synchronizmu, warunki stabilności itp.). Z równania tego łatwo można otrzymać wzór wyrażający wartość chwilową pulsacji na wyjściu pętli:

$$\omega(nT + \gamma T) = V \sum_{k=0}^n \operatorname{sgn} \sin \varphi(kT) \cdot g'(nT + \gamma T - kT) + \omega_0. \quad (13)$$

Zależności (12) i (13) zasadniczo pozwalają na wyznaczenie fazy i pulsacji w dowolnej chwili czasu dla zadanych parametrów układu, w tym ω_0 i φ_0 , które należy traktować jako warunki początkowe. Możliwa jest więc analiza procesów przejściowych pętli, jak i stanów ustalonych. Jednak ponieważ liczba składników wchodzących do wzorów (12) i (13) rośnie bardzo szybko ze wzrostem n , zależności w takiej postaci nadają się tylko do analiz numerycznych.



Rys. 4. Schemat ideowy filtra dolnoprzepustowego: a) idealnego, b) biernego

Przyjęte do badań modelowych elementy pętli (p. rys. 2) wynikały z przesłanek praktycznych. I tak, jako najważniejszy element pętli — przerzutnik D — wybrano układ wykonany w technologii CMOS (MCY74013 = CD4013), głównie ze względu na symetrię jego charakterystyk. Przy zasilaniu przerzutnika napięciem $+15\text{ V}$ parametr V ma wartość $7,5\text{ V}$, a czas propagacji (opóźnienie) $t_p = 45\text{ ns}$. Często stosowany w technice PLL prosty filtr zapewniający stabilność pętli to układ proporcjonalno-całkujący. Stała czasu całkowania powinna być dla wygładzenia tętnień kilka rzędów wielkości większa od okresu

próbkowania. Sprawdzono w układzie dwa rodzaje filtrów. Pierwszy z nich (rys. 4a), zwany dalej filtrem idealnym charakteryzuje transmitancja operatorowa $F(s) = -\frac{1+sR_1C}{sRC}$.

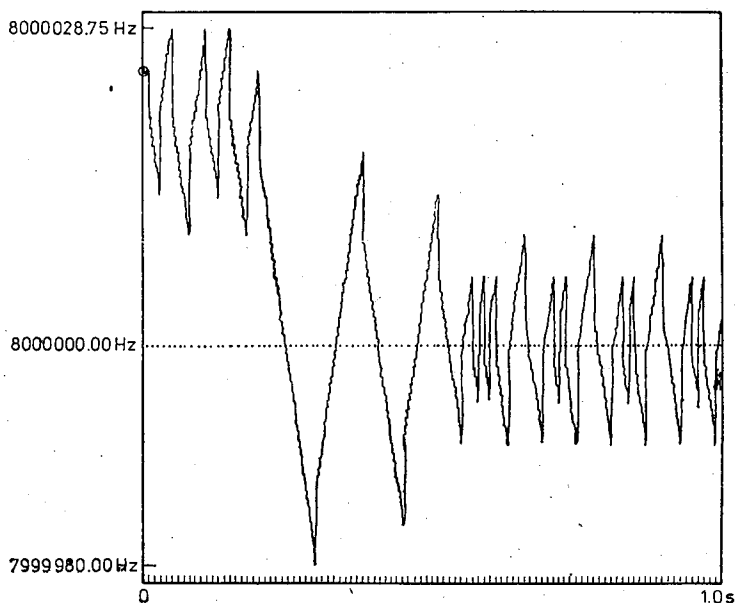
Filtr dolnoprzepustowy bierny o transmitancji $F(s) = \frac{1+sR_1C}{1+s(R_1+R)C}$ przedstawiono na rys. 4b.

ANALIZA NUMERYCZNA MODELU PĘTLI FAZOWEJ

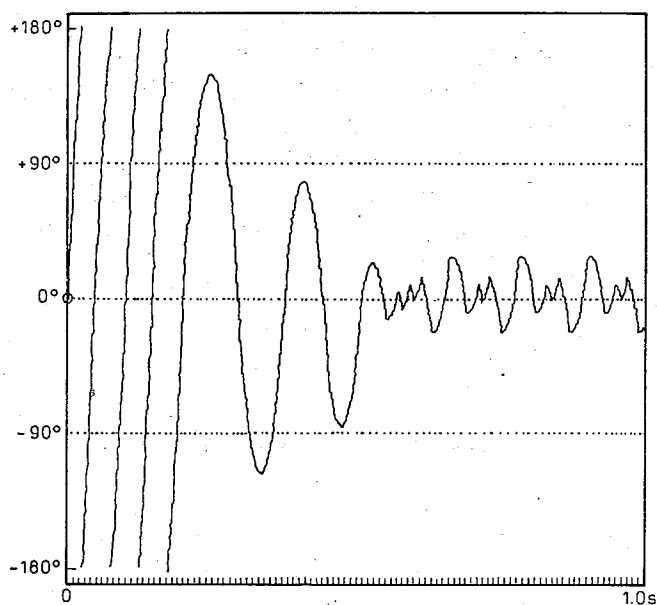
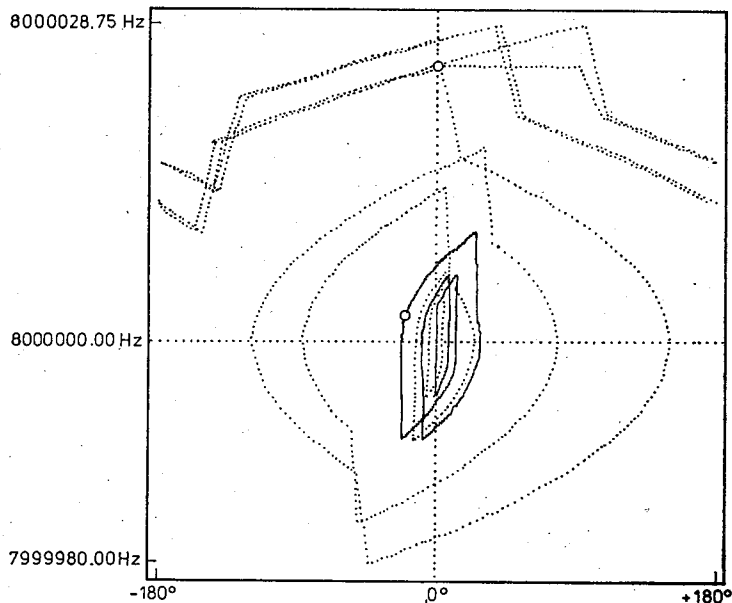
Wyznaczenie różnorodnych charakterystyk przytoczonego modelu w funkcji jego parametrów umożliwia specjalnie przygotowany program komputerowy (PC-XT, Turbo Pascal). Chociaż model matematyczny jest tylko przybliżeniem układu rzeczywistego, analizy numeryczne mogą dostarczyć cennych wniosków o charakterze aplikacyjnym. Program zezwala także na badanie reakcji na modyfikacje modelu, jak również zapewnia odpowiednią reprezentację graficzną wyników.

Najciekawsze z otrzymywanych wyników obliczeń programu to: wykresy czasowe częstotliwości sygnału wyjściowego pętli $f = F(t)$, zależność fazy (w stopniach, modulo 360°) tego sygnału w funkcji czasu $f_{i_{mod}} = F(t)$ oraz obraz płaszczyzny fazowej faza — częstotliwość $f_{i_{mod}} = F(f)$.

Weźmy przykładowy zbiór parametrów modelu, w którym czas próbkowania $T = 0,01$ s, poziom $V = 7,5$ V i czas opóźnienia $t_p = 45$ ns. Wybierzmy filtr idealny (rys. 4a) o stałych czasu: $RC = 100$ s i $R_1C = 0,01$ s. Niech generator IVCO ma nachylenie $K_g = 5000$ Hz/V, częstotliwość początkową (dla $t = 0$) równą $f_0 = 8\,000\,025$ Hz



Rys. 5. Zmienność częstotliwości wyjściowej układu modelowego w funkcji czasu

Rys. 6. Wykres czasowy fazy wyjściowej (modulo 360°)

Rys. 7. Płaszczyzna fazowa (częstotliwość — faza)

oraz fazę początkową równą 0° . Przyjmijmy jeszcze, że program ma wyznaczyć odpowiedzi dla stu początkowych okresów sygnału próbkującego ($t = 1$ s), wykonując obliczenia co $1/5$ okresu T . Efekty działania programu obrazują rysunki 5, 6 i 7. Pierwszy z nich przedstawia proces dostrajania częstotliwości generatora VCO. Oś pionowa wskazuje

częstotliwość; pozioma linia kropkowana odpowiada jej wartości równej $8 \text{ MHz} = 8 \cdot 10^4 \cdot 100 \text{ Hz} = 8 \cdot 10^4 \cdot f_c$. Na poziomej osi czasu oznaczone są kolejne momenty próbkowania. Otrzymany przebieg ma charakter oscylacyjny. Charakterystyczne odcinki liniowych zmian są efektem całkowania, natomiast skoki częstotliwości wynikają ze składowej proporcjonalnej, przenoszonej przez filtr. Począwszy od pewnej chwili (około $60 T$) sekwencja oscylacji zaczyna się powtarzać z okresem $T_G = 12T$. Jest to stan ustalony drgań częstotliwości w pętli. Rys. 6 to zależność próbkowanej fazy (branej modulo 360°) od czasu, natomiast rys. 7 to obraz płaszczyzny fazowej — parametryczna zależność częstotliwości i fazy sygnału wyjściowego pętli. Trajektoria w postaci linii ciągłej reprezentuje stan ustalony drgań w pętli — stabilny cykl graniczny.

BADANIA MODELOWE I DOŚWIADCZALNE UKŁADU PĘTLI FAZOWEJ

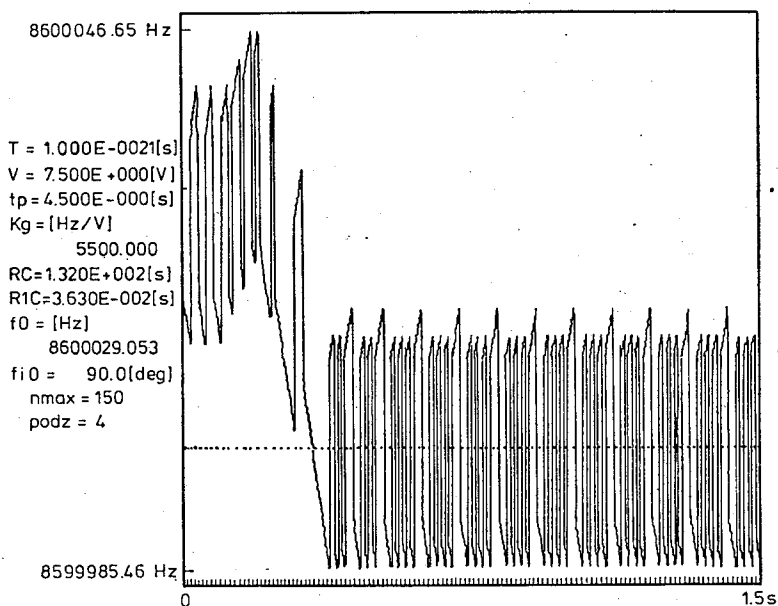
Układ eksperymentalny wykonano wykorzystując wspomniany wyżej układ typu MCY74013. Sprawdzono działanie pętli zarówno z filtrem idealnym (ze wzmacniaczem B 081 = TL 081), jak i biernym. Jako VCO pracował typowy generator LC (z tranzystorem bipolarnym lub polowym), przestrajany ręcznie w zakresie około 6—11 MHz i o nachyleniu przestrajania napięciem $K_g = 2,7\text{—}8,5 \text{ kHz/V}$ (zmiennym w funkcji częstotliwości). Prosty jednotranzystorowy ogranicznik umożliwiał regulację symetrii sygnału prostokątnego doprowadzanego do wejścia D. Obserwacje pracy układu doświadczalnego umożliwiły optymalizację układu, biorąc pod uwagę przede wszystkim stałość i stabilność częstotliwości wyjściowej generatora, mierzonej miernikiem cyfrowym przy różnych czasach otwarcia bramki. Stwierdzono, iż układ z filtrem biernym jest bardziej podatny na zakłócenia z powodu bardzo dużej impedancji widzianej z wejścia napięciowego VCO. Dalsze rozważania będą dotyczyły pętli z filtrem z rys. 4a.

Sygnał zegarowy wytworzony został w generatorze kwarcowym. Po podziale częstotliwości w zespole dzielników otrzymano właściwą częstotliwość $f_c = 100 \text{ Hz}$ (czyli okres $T = 0,01 \text{ s}$). Jest to jednocześnie wartość skoku rastra częstotliwości stabilizowanych.

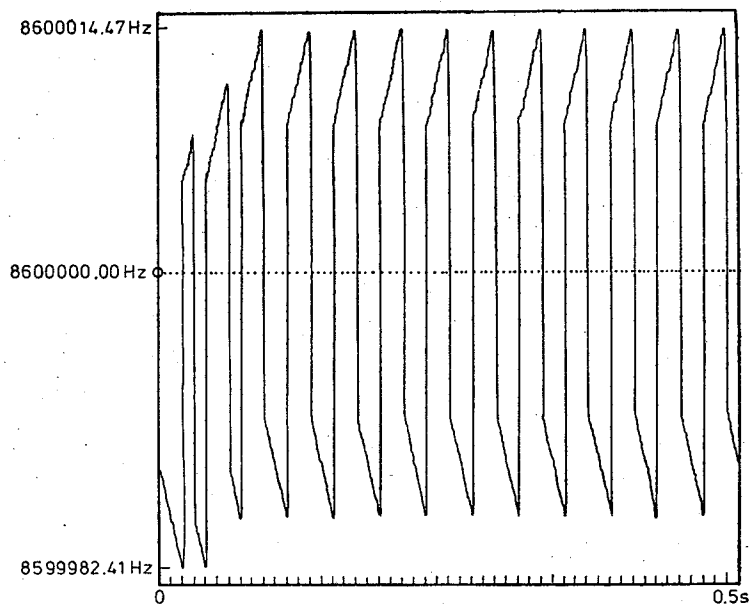
W wyniku eksperymentów przyjęto za optymalne następujące wartości stałych czasu filtru: $RC = 132 \text{ s}$, $RI C = 0,0363 \text{ s}$. Dalsze obliczenia numeryczne zostały oparte o właśnie takie, rzeczywiste wartości parametrów. Należy jednak zaznaczyć, że efekty obliczeń komputerowych modelu w zasadzie są niemożliwe do bezpośredniej weryfikacji doświadczalnej. Wynika to nie tylko z uproszczeń i pominięcia składnika $\varphi_N(t)$ w modelu, lecz również z natury badanych zjawisk, jakimi są wahania fazy i częstotliwości.

Wykonano szereg obliczeń, otrzymując charakterystyki dla różnych: wartości parametrów układu, warunków początkowych, wartości czasów pracy. Niektóre z własności modelu łatwo wysnuć wprost z równań (12) i (13). Na przykład charakter zmienności częstotliwości $f = F(t)$ dla danego zestawu parametrów jest identyczny dla wszystkich ω_0 spełniających warunek: $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi(nf_c + f_x)$, gdzie n — dowolna nieujemna liczba całkowita, a $f_x > 0$. Ten sam wniosek dotyczy zależności fazy (modulo 360°) branej w momentach próbkowania. Natomiast ogólnie — przebieg funkcji $f_{i\text{mod}} = F(t)$ zależy także od tego, jak „gęsto” określana jest wartość fazy między próbkowaniami (por. 12)).

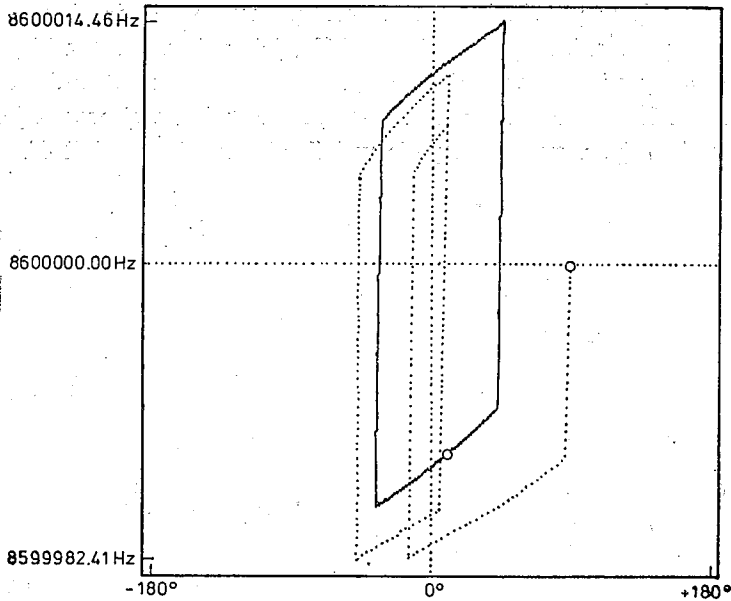
Do badań wygodnie jest wybrać taką częstotliwość początkową, która da w wyniku zakres zmienności tej fazy ograniczony do zakresu 360° , jak na rys. 6. Przebieg rozwiązania ustalonego nie zależy od fazy początkowej φ_0 . Zachowanie się modelu dla obu rodzajów filtru jest zbliżone. Zmiana znaku transmitancji części analogowej powoduje, że w stanie ustalonym faza f_{mod} (por. rys. 6) oscyluje wokół 180° zamiast wokół 0° .



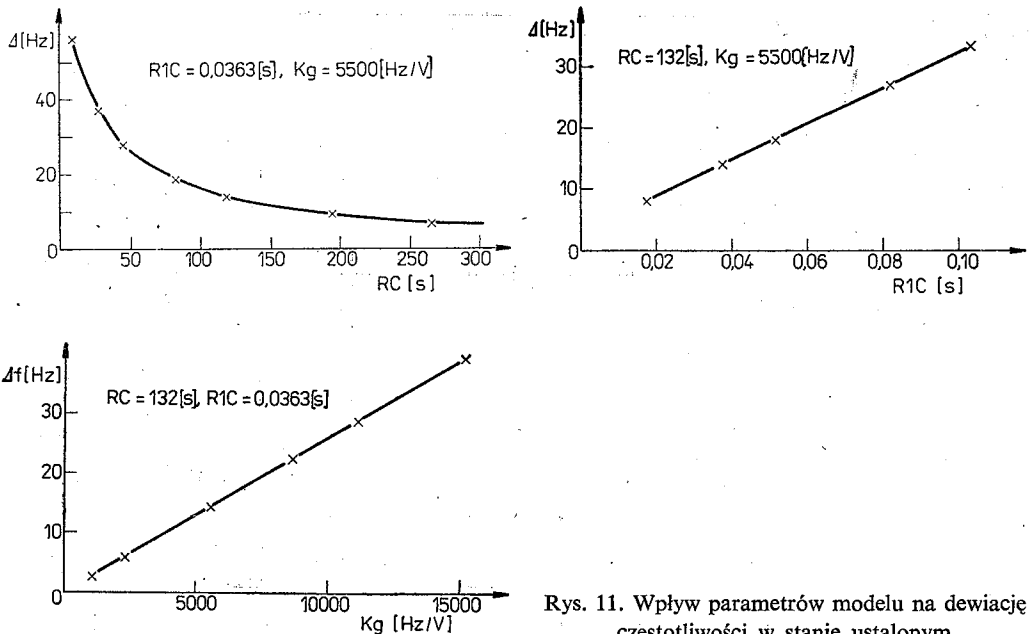
Rys. 8. Przykładowa zależność częstotliwości od czasu sygnału wyjściowego modelu



Rys. 9. Częstotliwość w funkcji czasu dla $f_0 = n f_c$

Rys. 10. Płaszczyzna fazowa dla przypadku $f_0 = n f_c$

Ponieważ kształt i okres przebiegów ustalonych zależy od f_0 (czy ω_0 — p. (12)) — liczba typów rozwiązań jest nieskończona. Typowym przykładem może być przebieg zmian częstotliwości $f = F(t)$, pokazany wraz z wartościami parametrów na rys. 8. Rozpatrując jednak wpływ czynników zakłócających można przypuszczać, że wpływ konkretnej wartości częstotliwości początkowej będzie zanikał z upływem czasu. Przyjęcie w (12) i (13) ω_0

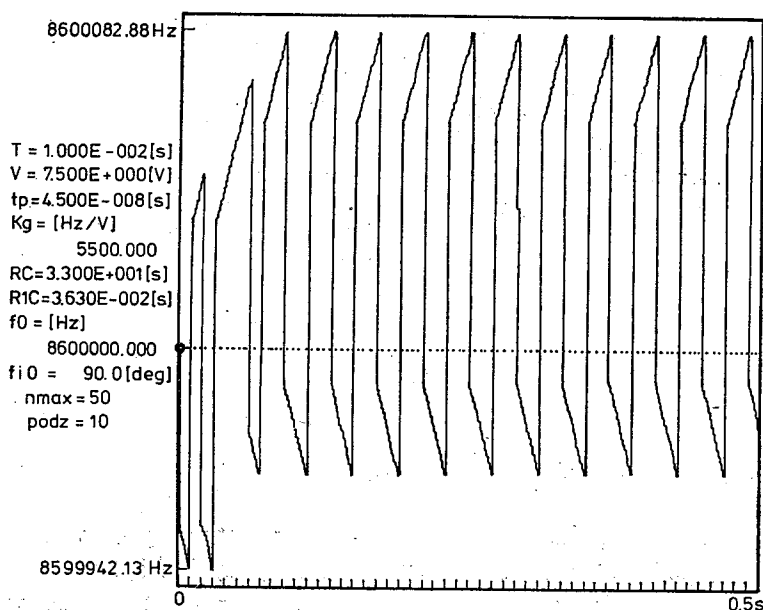


Rys. 11. Wpływ parametrów modelu na dewiację częstotliwości w stanie ustalonym

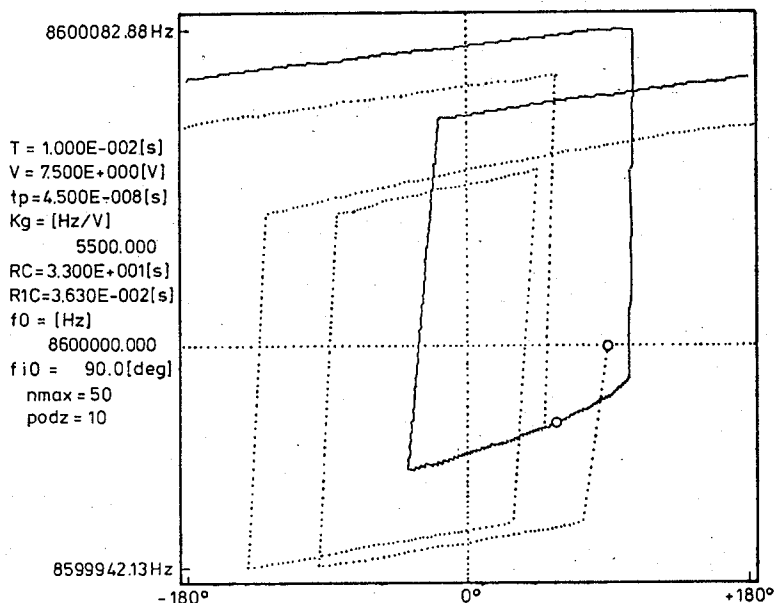
jako wielokrotności pulsacji próbkowania $\omega_c = 2\pi/T$ eliminuje całkowicie wpływ tego parametru na przebieg $f = F(t)$ z dokładnością do stałego składnika $f_0 = \omega_0/2\pi$. Biorąc jednocześnie fazę początkową $\varphi_0 = 0$ z modelu na rys. 3 można usunąć węzeł sumacyjny. Wydruki na rys. 9 i rys. 10 ilustrują wspomniany przypadek dla danych jak na rys. 8, za wyjątkiem $f_0 = 8\,600\,000$ Hz i liczby próbek $n_{max} = 50$. Otrzymany przebieg w stanie ustalonym jest regularny i symetryczny; okres drgań T_G wynosi $4T$, a maksymalne odchylenie Δf wartości chwilowej częstotliwości od średniej (równej f_0) ma wartość 14,463 Hz. Obliczenia wykonano dla kilkunastu przypadków przy parametrach K_g , RC i $R1C$ mających sens praktyczny. Rys. 11 obrazuje tendencje zmian istotnego wskaźnika jakości układu, jakim jest dewiacja częstotliwości Δf w stanie ustalonym — w funkcji podstawowych parametrów. Wszystkie te przypadki mają globalny okres rozwiązania $T_G = 4T$. Dłuższy okres $T_G = 8T$ uzyskano dopiero po znacznym zmniejszeniu obu stałych czasu ($RC = 33$ s, $R1C = 0,009$ s — wtedy $\Delta f = 36,25$ Hz), natomiast uzyskanie minimalnej wartości $T_G = 2T$ wymaga kilkakrotnego zwiększenia częstotliwości próbkowania, co oczywiście wiąże się z odpowiednim rozrzedzeniem rastra. Interesujący przypadek ilustrują rys. 12 i rys. 13 — dla dewiacji Δf większej od $0,5f_c$ możliwy jest stabilny asymetryczny

cykl graniczny o częstotliwości średniej $f_a = n \cdot f_G = n/T_G = n \cdot \frac{1}{NT}$, gdzie $N = T_G/T$ to parzysta liczba naturalna, a n — dowolna liczba naturalna większa od N . Możliwość istnienia takich przypadków jest łatwa do teoretycznego uzasadnienia.

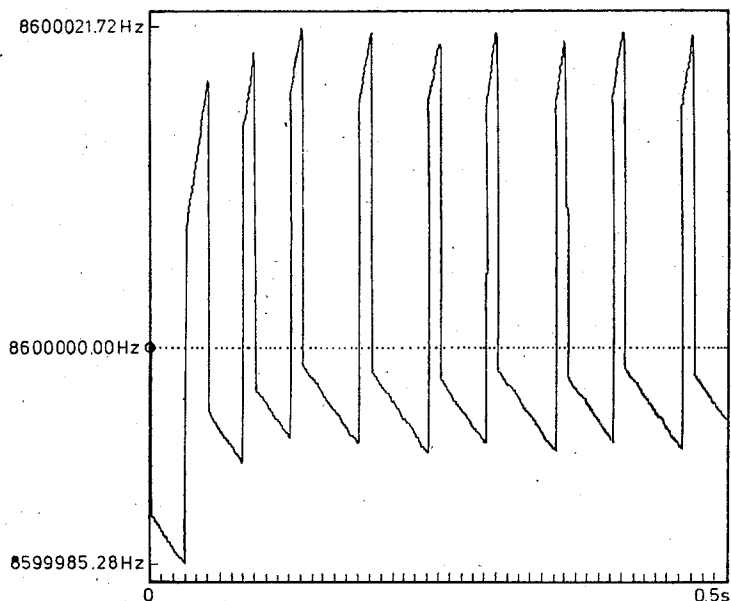
U podstaw idei budowy rozpatrywanej pętli fazowej było zapewnienie stałości długo-terminowej częstotliwości generatora przestrajanego. Zasadniczym źródłem „płynięcia” częstotliwości są efekty termiczne. Zjawiska takie można zasymulować w badanym układzie przez uzmiennienie pulsacji ω_0 w równaniach (12) i (13) lub odpowiednio f_0 w programie



Rys. 12. Przypadek dużej dewiacji częstotliwości (drgania wokół $f = 8\,600\,025$ Hz)

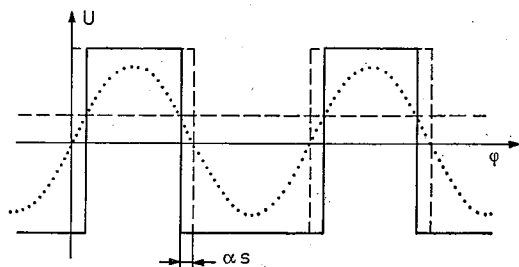


Rys. 13. Asymetryczny cykl graniczny



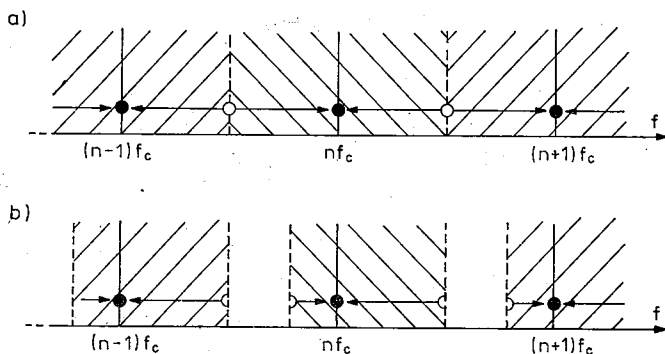
Rys. 14. Reakcja pętli na narastanie częstotliwości wolnobieżnej generatora

komputerowym. Rys. 14 pokazuje reakcję pętli o parametrach jak na rys. 9 przy dodatkowym założeniu, że częstotliwość f_0 narasta liniowo z szybkością 200 Hz/s. Tą metodą można określić maksymalną dopuszczalną szybkość zmian częstotliwości wolnobieżnej generatora (mieści się ona tutaj między 250 a 300 Hz/s).



Rys. 15. Określenie współczynnika asymetrii ogranicznika

Modyfikując program zbadano także wpływ asymetrii ograniczania, spowodowanej na przykład przez zmianę poziomu komparacji ogranicznika. Wpływ asymetrii, określonej współczynnikiem „ as ” (p. rys. 15) okazał się nadspodziewanie istotny. Odpowiednik układu z rys. 8 (gdzie oczywiście „ as ” = 0°) dla „ as ” = $+8^\circ$ w ogóle nie osiągał synchronizacji, natomiast dla „ as ” = -20° czas ustalania był znacznie krótszy niż dla „ as ” = 0° . Wniosek ilustruje rys. 16. W zakresach chwytania pętli w wyniku asymetrii ograniczania pojawiają się „dziury”. W układzie rzeczywistym z powodu zmniejszenia zakresów chwytania należy spodziewać się większej podatności na szумы i zakłócenia.

Rys. 16. Wpływ asymetrii ogranicznika a) $as = 0$, b) $as \neq 0$

STAN USTALONY W PĘTLI SPRZĘŻENIA FAZOWEGO

Jeżeli założymy, że znany jest przebieg drgań okresowych w pętli (wystarczy znajomość wartości $N = T_G/T$ oraz N kolejnych znaków faz w momentach próbkowania $\text{sgn} \sin \varphi(kT)$), to z (13) możliwe jest analityczne określenie funkcji opisującej wartość chwilową pulsacji. W szukanej funkcji, oznaczonej $\delta\omega(t)$ czas można wyrazić w sposób $t = mT + \gamma T$, gdzie $m = 0, 1, \dots, (N-1)$ oraz $0 \leq \gamma < 1$. Funkcję tą wyznacza się z przejścia granicznego:

$$\delta\omega(mT + \gamma T) = \lim_{j \rightarrow \infty} \omega(jNT + mT + \gamma T) \quad (14)$$

Granica ta istnieje wobec założenia, że $T_G = NT$. Niech l to dostatecznie duża liczba naturalna, dla której gdy $t \geq lT$ to pętla pracuje w stabilnym cyklu granicznym o okresie T_G . Wtedy z (13) i (14) mamy:

$$\begin{aligned} \delta\omega(mT + \gamma T) = & \omega_0 + \lim_{j \rightarrow \infty} V \sum_{k=0}^{lN-1} \operatorname{sgn} \sin \varphi(kT) g'(jNT + mT + \gamma T - kT) + \\ & + \lim_{j \rightarrow \infty} V \sum_{k=lN}^{jN} \operatorname{sgn} \sin \varphi(kT) g'(jNT + mT + \gamma T - kT). \end{aligned} \quad (15)$$

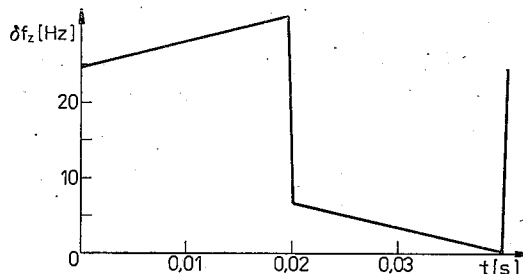
Zawierająca skończoną liczbę składników pierwsza suma, reprezentująca proces przejściowy — ma granicę skończoną równą Ω_3 , jeśli tylko istnieje granica pochodnej odpowiedzi impulsowej $g'(t)$. Jest to warunek konieczny synchronizmu pętli. Druga suma, opisująca stan ustalony może zostać podzielona na N składników, ponieważ te same wartości $\operatorname{sgn} \sin \varphi$ oraz pulsacji powtarzają się co okres czasu $t = NT$. Wyłączając nie zależące od zmiennej j wyrażenia $\operatorname{sgn} \sin \varphi(kT) = \operatorname{sgn} \sin \varphi(lNT + iT)$ przed nawias i przekształcając sumę wewnętrzną otrzymuje się:

$$\delta\omega(mT + \gamma T) = \omega_0 + \Omega_3 + V \sum_{i=0}^{N-1} [\operatorname{sgn} \sin \varphi(lNT + iT)] \left[\lim_{j \rightarrow \infty} V \sum_{n=0}^j g'(nNT + mT + \gamma T - iT) \right]. \quad (16)$$

Oznaczmy $\omega_0 + \Omega_3 = \Omega$. Wobec faktu, że $g'(t) = 0$ dla $t < 0$ otrzymuje się ostatecznie:

$$\begin{aligned} \delta\omega(mT + \gamma T) = & \Omega + V \sum_{i=0}^m \operatorname{sgn} \sin \varphi(lNT + iT) g'(mT + \gamma T - iT) + \\ & + V \sum_{i=0}^{N-1} \left[\operatorname{sgn} \sin \varphi(lNT + iT) \sum_{n=1}^{\infty} g'(nNT + mT + \gamma T - iT) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Przez analogię do przekątnikowych układów ze sprzężeniem zwrotnym, w których drgania są zawsze symetryczne [4] można przyjąć, że N jest parzyste, a w okresie T_G tyle samo razy funkcja $\operatorname{sgn} \sin \varphi(kT)$ jest równa $+1$, jak -1 . Potwierdza to zresztą przebadanie około 100 przypadków z różnymi parametrami modelu. Przy takim założeniu, w szczególnym przypadku pętli z filtrem idealnym (rys. 4a) łatwo wykazać, że trzeci składnik zależności (17) jest równy zeru. Funkcję zredukowanej częstotliwości $\delta f_z(t) = [\delta\omega(t) - \omega(4T)]/2\pi$, obliczoną dla przypadku z rys. 9 korzystając z równania (17) dla $0 \leq t \leq 4T$ przedstawia rys. 17.



Rys. 17. Zmiany wartości chwilowej częstotliwości w stanie ustalonym

WNIOSKI

Przedstawione rozwiązanie stabilizacji częstotliwości generatora przestrajanego poza interesującą teorią ma także wartość aplikacyjną. Maksymalny zakres stabilizowanych częstotliwości z przerzutnikiem D ze standardowej serii CMOS sięga 17 MHz (dużo!). Ponieważ ograniczenie to wynikać może tylko z własności dynamicznych przerzutnika można uznać, że są one mało istotne dla mniejszych częstotliwości pracy. Potwierdza to także pośrednio zasadność przybliżania przerzutnika za pomocą impulsatora i ekstrapolatora w przyjętym modelu matematycznym. Dla zwiększenia częstotliwości pracy układu można stosować szybsze przerzutniki, na przykład z rodzin 74 LS, 74HC czy ECL. W tym ostatnim przypadku próbny układ pracował poprawnie z częstotliwością wyjściową 150 MHz z rastrem 2 kHz (zastosowano dodatkowy dzielnik częstotliwości przez 2 po, czy raczej zamiast ogranicznika).

Korzystne cechy prezentowanego sposobu synchronizacji generatora to prostota i mały koszt układu przy stałości długoterminowej takiej, jak zastosowany wzorec. Główne wady to: oscylacje częstotliwości w stanie ustalonym (rozmycie prążka w widmie sygnału wyjściowego) oraz wrażliwość na zbyt szybkie zakłócenia zewnętrzne (powodujące „przeskakowanie” częstotliwości średniej). W niektórych zastosowaniach wady te mogą okazać się mało istotne. Na przykład przy zastosowaniu takiej pętli w heterodynie odbornika sygnału radiowego do rozważenia pozostaje wpływ wahań częstotliwości na jego własności szumowe i dynamiczne. W przypadku odbioru emisji AM przeprowadzone próby dały wynik pozytywny, jednak w przypadku odbiornika komunikacyjnego przy modulacji SSB oraz A1 (telegrafia) wpływ oscylującej częstotliwości jest zauważalny.

Powyższa analiza modelu matematycznego jest niepełna. Przewidywane są dalsze prace dotyczące symulacji zakłóceń i czynników losowych, badania w dziedzinie częstotliwości, analizy metodami: operatorowymi oraz zmiennych stanu. W podobny sposób będą badane także inne układy, w tym zarówno nowe rozwiązania, jak i znane pętle fazowo-częstotliwościowe z przerzutnikami typu D.

BIBLIOGRAFIA

1. J. R. Cessna, J. D. M. Levy: *Phase noise and transient times for a binary quantized digital phase-locked loop in white Gaussian noise*. IEEE Trans., vol. COM-20, Apr. 1972
2. A. Yamamoto, S. Mori: *Performance of a binary quantized all digital phase-locked loop with a new class of sequential filter*. IEEE Trans., vol. COM-26, Jan. 1978
3. J. Ackerman: *Regulacja impulsowa*. Warszawa: WNT, 1976
4. J. Z. Cypkin: *Teoria układów impulsowych*. Warszawa: PWN, 1965
5. M. Sadowski: *Dyskretna pętla fazowa z przerzutnikiem typu D*. XI Krajowa Konferencja TOIUE, Łódź—Rytro 1988

M. SADOWSKI

STABILISATION OF A TUNED OSCILLATOR FREQUENCY IN A DISCRETE
PHASE-LOCKED LOOP

Summary

A new method of long term frequency stabilisation of a tuned oscillator is presented. The method uses the PLL technique with a digital D-type flip-flop working as phase detector. The mathematical model of the loop, basic nonlinear equations and some numerical analyses are presented. The method of obtaining the steady state frequency-time function is described. Some practical applications including results from experimental works, are given.

M. SADOWSKI

STABILISATION DE FRÉQUENCE D'UN GÉNÉRATEUR RÉACCORDÉ DANS UNE
BOUCLE DISCRÈTE DE COUPLAGE DE PHASE

Résumé

Dans l'article on a décrit un mode nouveau du stabilisation de fréquence du générateur reaccordé, base sur la technique de la boucle de phase avec flip-flop D travaillant comme détecteur de phase. On a présenté le modèle mathématique de la boucle, les principales équations non-linéaires aux différences, le décrivant d'une manière générale, et aussi les résultats choisis des analyses numériques basées sur ces équations. On a présentée la méthode d'obtention de la dépendance temporelle des changements de fréquence dans un régime permanent. On y a inclus aussi les conclusions du caractère pratique tirées aussi des essais expérimentaux.

M. SADOWSKI

FREQUENZSTABILISIERUNG EINES SPANNUNGSGESTEUERTEN GENERATORS
MITTELS PLL-TECHNIK

Zusammenfassung

Eine neue Methode für die Frequenzstabilisierung der Hochfrequenzgeneratoren wird beschrieben. Diese Methode wird von der PLL-Technik mit einer als Phasendetektor arbeitenden D-Kippstufe benutzt. Ein mathematisches Schaltmodell wird vorgeschlagen und Simulationsergebnisse werden gebracht. Auch praktische Bemerkungen und experimentelle Folgerungen werden dargestellt.

М. САДОВСКИ

СТАБИЛИЗАЦИЯ ЧАСТОТЫ ГЕНЕРАТОРА ПЕРЕСТРАИВАЕМОГО
В ДИСКРЕТНОМ КОНТУРЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Резюме

Описан новый способ стабилизации частоты перестраиваемого генератора обоснованный на технике фазового контура с цифровым переключателем типа Д действующим в качестве детектора фазы. Представлена математическая модель контура, основные нелинейные разностные уравнения описывающие ее в общем виде, а также и избранные результаты цифровых анализ проведенных при использовании этих уравнений. Представлен метод получения временной зависимости изменений частоты в установившемся режиме. Приведены также выводы практического характера в частности вытекающие из экспериментальных исследований.

The shaping of phase locked loop transfer function

ROMAN ARTIUCH

Instytut Telekomunikacji i Akustyki, Politechnika Wrocławska

Received 1989.01.20

Authorized 1989.01.27

Designing principles of a linear PLL model are specified. A simple method of verifying the linearity is given. It is shown that selection of values for two parameters from the open-loop gain equation of PLL renders the effective shaping of the PLL transfer function possible.

INTRODUCTION

In general, phase locked loop (PLL) is a nonlinear system. Nevertheless, some of its useful parameters can be predicted and optimized by analysing a linear model. To construct such a model, it is necessary to determine the conditions under which the model will describe satisfactorily the operation of PLL. This reduces itself to the determination of permissible, for the model, values of the input signal at which the system is linear and it can be described explicitly by a transfer function. An important practical problem is the shaping of desired transfer function. It is of help here to determine the effect of parameters of particular PLL components on transfer function. Unfortunately, there are at least several of the parameters and their number depends on the type of the loop filter. This makes effective shaping of transfer function more difficult. Therefore, a smaller number of parameters which would characterize PLL or, more precisely, its linear model were sought. Damping factor and natural frequency are such parameters [1]. However, they characterize at the highest a loop of the second order.

The paper presents the principles of shaping the transfer function of PLL of any order by selecting values for two parameters that follow from the open-loop gain equation of PLL.

1. PHASE LOCKED LOOP TRANSFER FUNCTION

The fact that the output signal is synchronized by a signal from the reference generator is a characteristic feature of PLL systems. It is assumed, that the reference signal is defined by the formula:

$$A(t) = u_1 \sin(2\pi f_i t) \quad (1.1)$$

where f_i — frequency of reference signal,

u_1 — amplitude of reference signal.

The expected PLL output signal is defined by the relationship:

$$B(t) = u_2 \sin(2\pi N f_i t) = u_2 \sin(2\pi f_0 t), \quad (1.2)$$

where: f_0 — frequency of output signal,

u_2 — amplitude of output signal,

N — resultant division ratio of frequency dividers (including the reference signal divider, PLL may be multiloop).

In practice, the PLL output signal must be described by the relationship:

$$B(t) = u_2 \sin(2\pi f_0 t + \Theta_{on}(t)) \quad (1.3)$$

where Θ_{on} — spurious modulations of the output signal phase.

The cause of the spurious modulations of the PLL output signal is the noise introduced by all the PLL components and particularly by the spurious phase modulations of the reference signal [3].

In order to characterize, among other things, the noise properties of PLL, a mathematical model of PLL is built. The reference signal phase angle is the model input signal and the PLL output signal phase angle is the output signal of the model. Then, the reference signal assumes the form:

$$A(t) = u_1 \sin(2\pi f_i t + \Theta_i(t)). \quad (1.4)$$

and the PLL output signal:

$$B(t) = u_2 \sin(2\pi f_0 t + \Theta_o(t)). \quad (1.5)$$

Assuming that PLL, under certain conditions, is a linear system, its transfer function is a ratio of Laplace transforms of the PLL output signal phase angle to the reference signal phase angle:

$$H(s) = \frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} \quad (1.6)$$

where: Θ_o — model output signal, the PLL output signal phase angle,

Θ_i — model input signal, the reference signal phase angle,

$H(s)$ — PLL transfer function.

The PLL system can be described by a linear model if changes in the reference signal phase angle produce proportional changes in the PLL output signal phase angle. The permissible values of the reference signal phase angle at which the PLL system is still linear can be determined most reliably by measurements. The measuring method by means of which PLL transfer function is determined can be used for this purpose. The reference signal is modulated in a phase manner by a sinusoidal signal given by the formula:

$$C(t) = u_3 \sin(2\pi f_m t) \quad (1.7)$$

where: u_3 — amplitude of modulating signal,

f_m — frequency of modulating signal.

Then, the reference signal can be described by the relationship:

$$\begin{aligned} A(t) &= u_1 \sin(2\pi f_i t + k u_3 \sin(2\pi f_m t)) = \\ &= u_1 \sin(2\pi f_i t + \Phi \sin(2\pi f_m t)) \end{aligned} \quad (1.8)$$

where: k — modulation constant of the phase modulator,

Φ — peak phase deviation of the reference signal.

At this excitation, the output signal of the system is given by the relationship:

$$\begin{aligned} B(t) &= u_2 \sin(2\pi N f_i t + \Phi N |H(j2\pi f_m)| \sin(2\pi f_m t + \varphi_m)) = \\ &= u_2 \sin(2\pi f_0 t + \Phi' \sin(2\pi f_m t + \varphi_m)) \end{aligned} \quad (1.9)$$

where: Φ' — peak phase deviation of the output signal,

$N |H(j2\pi f_m t)| = \frac{\Phi'}{\Phi}$ — value of the transfer function modulus of the PLL system for a given modulating frequency, (1.10)

φ_m — phase shift introduced by the PLL system for a given modulating frequency.

To check the linearity, a real value of the peak phase deviation of the reference signal is selected and the value of the peak phase deviation of the output signal is measured. Then, the value of the reference signal peak phase deviation is increased and it is checked if a proportional increase in the peak phase deviation of the PLL output signal has occurred. If the condition is fulfilled, the PLL system operates in the linear range. If not, the peak phase deviation of the reference signal should be reduced and the check up should be repeated. A description of one of the systems of measuring the signal peak phase deviation can be found in Appendix 1. The linear system is characterized explicitly by transfer function. It is one of the basic characteristics of PLL systems. A designer must specify, measure and possibly shape it.

2. THE EFFECT OF PARAMETERS OF PLL COMPONENTS ON TRANSFER FUNCTION

It is essential for the designer to know the effect of changes of PLL components parameters on transfer function. Of course, measurement of transfer function is the most reliable method of determining this influence. Nevertheless, it is more effective to construct a linear model of PLL and to calculate the transfer function for different parameters of its components. Only after an initial selection of parameters has been made, the system is constructed and measurements are made. Then, the transfer function is corrected on the basis of the calculation results.

To illustrate the effect of PLL components parameters on transfer function, a PLL system with a loop filter having transmittance (1) (this filter is frequently used in typical systems of frequency synthesizers) was considered.

$$F(j\omega) = \frac{1 + j\omega\tau_2}{(j\omega)^2\tau_1\tau_3 + j\omega\tau_1} \quad (2.1)$$

where: τ_1, τ_2, τ_3 — time constants in loop filter.

In this case, the PLL transfer function is given by the formula:

$$H(j\omega) = \frac{N_1 K_D K_V F(j\omega)}{j\omega N_1 + K_D K_V F(j\omega)} = \frac{N_1 K_D K_V (1 + j\omega\tau_2)}{-\omega^2 N_1 \tau_1 (1 + j\omega\tau_3) + K_D K_V (1 + j\omega\tau_2)} \quad (2.2)$$

where: K_D — phase detector gain factor $\left[\frac{v}{\text{rad}} \right]$,

K_V — VCO gain factor $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s} \cdot v} \right]$,

N_1 — frequency divide division ratio in the feedback branch.

It was assumed in the calculations that the comparison frequency on the phase detector was $1 \cdot 10^3$ so the frequency of the PLL output signal was given by the formula:

$$f_0 = 1 \cdot 10^3 N_1 \quad (2.3)$$

The effect of loop components parameters on transfer function is illustrated in figures 2.1—2.5. The starting point is transfer function of PLL having parameters: $f_0 = 10$ MHz,

$\tau_1 = 9,66 \cdot 10^{-5}$, $\tau_2 = 4,83 \cdot 10^{-4}$, $\tau_3 = 8,28 \cdot 10^{-5}$, $K_D = \left[\frac{v}{\text{rad}} \right]$, $K_V = 1 \cdot 10^7 \left[\frac{\text{rad}}{\text{vs}} \right]$

Fig. 2.1 shows transfer functions for K_V equal to $2 \cdot 10^6$, $1 \cdot 10^7$, $5 \cdot 10^7 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s} \cdot v} \right]$, the values

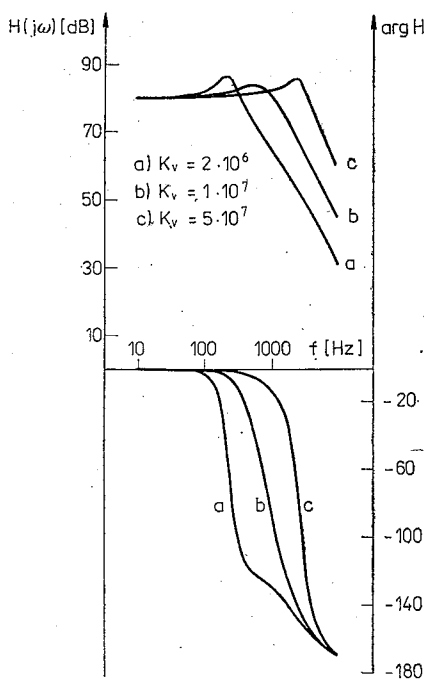


Fig. 1. PLL transfer functions depending on the VCO gain for: $f_0 = 10$ [MHz], $\tau_1 = 9,66 \cdot 10^{-5}$, $\tau_2 = 4,83 \cdot 10^{-4}$, $\tau_3 = 8,28 \cdot 10^{-5}$, $K_D = 1 \left[\frac{v}{\text{rad}} \right]$

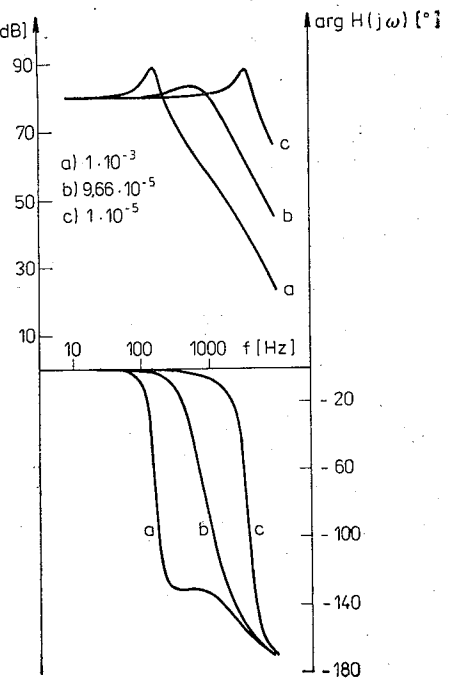


Fig. 2. PLL transfer functions depending on the time constant τ_1 for $f_0 = 10$ [MHz], $\tau_2 = 4,83 \cdot 10^{-4}$, $\tau_3 = 8,28 \cdot 10^{-5}$, $K_V = 1 \cdot 10^7 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s} \cdot v} \right]$, $K_D =$

$$= 1 \left[\frac{v}{\text{rad}} \right]$$

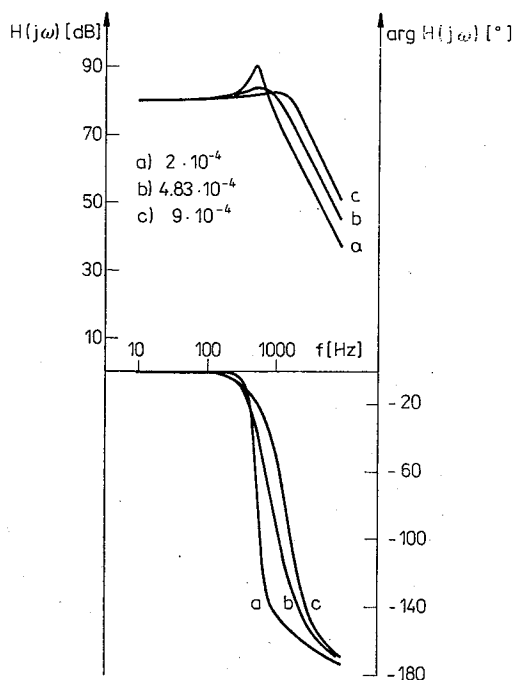


Fig. 3. PLL transfer functions depending on the time constant τ_2 for $f_0 = 10$ [MHz], $\tau_1 = 9,66 \cdot 10^{-5}$, $\tau_3 = 8,28 \cdot 10^{-5}$, $K_V = 1 \cdot 10^7 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s} \cdot \text{v}} \right]$, $K_D = 1 \left[\frac{\text{v}}{\text{rad}} \right]$

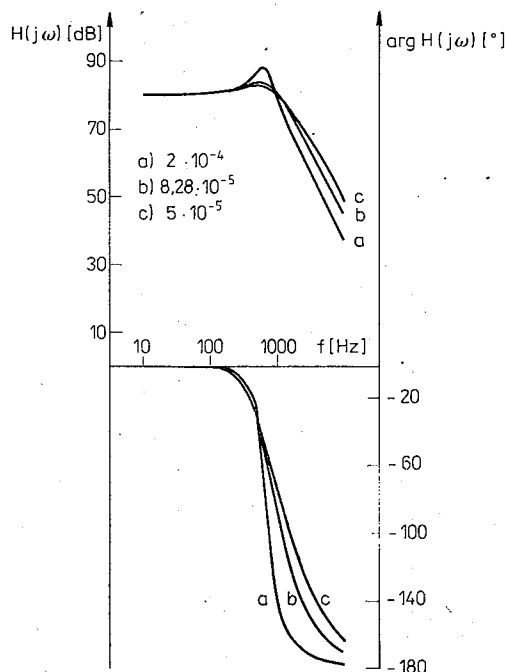


Fig. 4. PLL transfer functions depending on the time constant τ_3 for $f_0 = 10$ [MHz], $\tau_1 = 9,66 \cdot 10^{-5}$, $\tau_2 = 4,83 \cdot 10^{-4}$, $K_V = 1 \cdot 10^7 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s} \cdot \text{v}} \right]$, $K_D = 1 \left[\frac{\text{v}}{\text{rad}} \right]$

of the other parameters being unchanged. Fig. 2, 3, 4 show the influence of the values of filter time constants $\tau_1 = 1 \cdot 10^{-3}$, $9,66 \cdot 10^{-5}$, $1 \cdot 10^{-5}$; $\tau_2 = 2 \cdot 10^{-4}$, $4,83 \cdot 10^{-4}$, $9 \cdot 10^{-4}$; $\tau_3 = 2 \cdot 10^{-4}$, $8,28 \cdot 10^{-5}$, $5 \cdot 10^{-5}$ on PLL transfer function. Some regularities can be seen in the figures. For instance, as K_V increases so does the PLL width and at the same time the phase characteristic curve becomes steeper. The width of the loop can be increased by reducing τ_1 or increasing τ_2 . The phase characteristic curve becomes steeper and less steep in the first and the second case, respectively. Changes of τ_3 do not affect significantly the loop's width but they do change the shape of the transfer function modulus and the slope of the phase characteristic curve. Fig. 2.5 shows transfer function for different output frequencies: $f_0 = 40, 10, 2,5$ MHz.

The transfer function can be shaped on the basis of the observed regularities. For example, the band's width in fig. 2.6 was increased by lowering the values of time constants τ_1 and τ_3 and by increasing time constant τ_2 and K_V . The band's width in fig. 7 was decreased by changing the above parameters in the opposite direction. Nevertheless, it is difficult to select proper values of PLL parameters in order to obtain the desired modulus and phase of transfer function. Therefore, for a long time attempts have been made to characterize PLL by simple numerical parameters, a suitable selection of which would determine transfer function. A set of two parameters, i.e. damping factor ξ and natural frequency ω_n ,

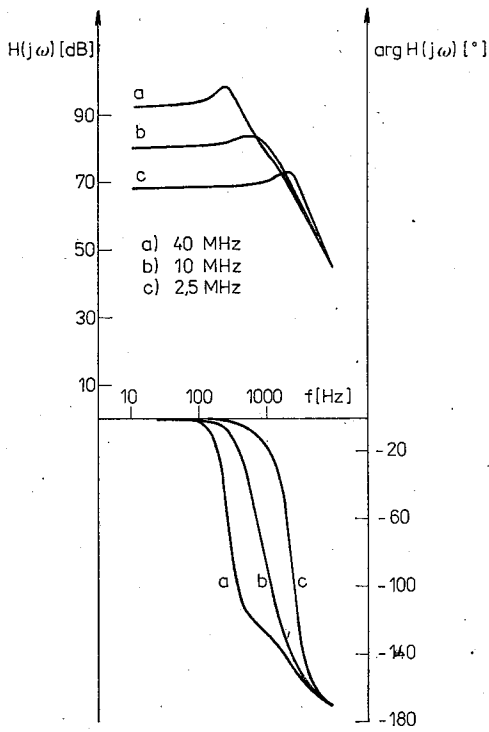


Fig. 5. PLL transfer functions depending on the output signal frequency for: $\tau_1 = 9,66 \cdot 10^{-5}$, $\tau_2 = 4,83 \cdot 10^{-4}$, $\tau_3 = 8,28 \cdot 10^{-5}$, $K_V = 1 \cdot 10^7 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s} \cdot \text{v}} \right]$,

$$K_D = 1 \left[\frac{\text{v}}{\text{rad}} \right]$$

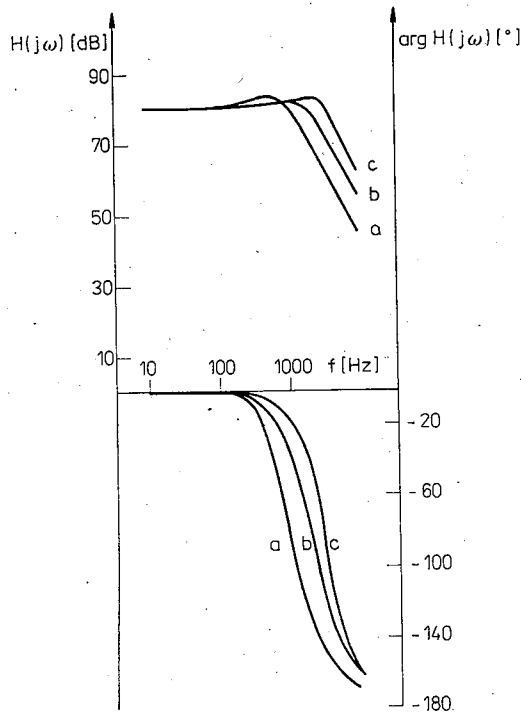


Fig. 6. PLL transfer functions for:

- | | | | | |
|------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|------------------------|-------------|
| a) $\tau_1 = 9,66 \cdot 10^{-5}$, | $\tau_2 = 4,83 \cdot 10^{-4}$, | $\tau_3 = 8,28 \cdot 10^{-5}$, | $K_V = 1 \cdot 10^7$, | $K_D = 1$; |
| b) $\tau_1 = 5 \cdot 10^{-5}$, | $\tau_2 = 5 \cdot 10^{-4}$, | $\tau_3 = 5 \cdot 10^{-5}$, | $K_V = 1 \cdot 10^7$, | $K_D = 1$; |
| c) $\tau_1 = 5 \cdot 10^{-5}$, | $\tau_2 = 5 \cdot 10^{-4}$, | $\tau_3 = 5 \cdot 10^{-5}$, | $K_V = 2 \cdot 10^7$, | $K_D = 1$ |

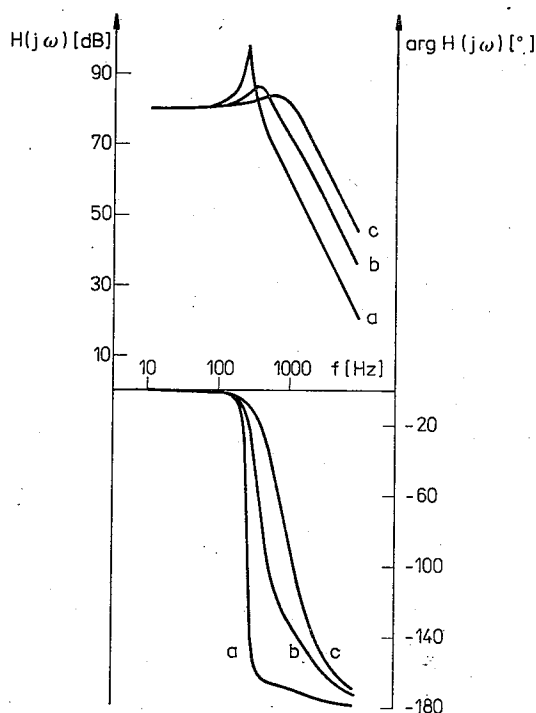


Fig. 7. PLL transfer functions for:

- a) $\tau_1 = 2 \cdot 10^{-4}$, $\tau_2 = 3 \cdot 10^{-4}$, $\tau_3 = 2 \cdot 10^{-4}$, $K_V = 5 \cdot 10^6$, $K_D = 1$;
 b) $\tau_1 = 1 \cdot 10^{-4}$, $\tau_2 = 4 \cdot 10^{-4}$, $\tau_3 = 1 \cdot 10^{-4}$, $K_V = 5 \cdot 10^6$, $K_D = 1$;
 c) $\tau_1 = 9,66 \cdot 10^{-5}$, $\tau_2 = 4,83 \cdot 10^{-4}$, $\tau_3 = 8,28 \cdot 10^{-5}$, $K_V = 1 \cdot 10^7$, $K_D = 1$

has become commonly used. However, the use of these parameters is limited to the loop of the second order. Another set of two numbers which characterize PLL follows from the open loop transfer function. It can be determined for PLL of any order and therefore, it will be described below.

3. PLL PARAMETERS THAT FOLLOW FROM THE OPEN-LOOP TRANSFER FUNCTION

In the case of one-loop PLL systems, it is possible to determine the open-loop transfer function. Two important numerical parameters follow from it, i.e. the frequency f_r at which the absolute value of the open loop transfer function equals one and the phase margin, Φ_r ; [4].

Let us go back to the example of the one-loop PLL with the filter described by formula (2.1). The open loop transfer function is given by the relationship:

$$\begin{aligned}
 H'(j\omega) &= \frac{K_D K_V F(j\omega)}{j\omega N_1} = \\
 &= \frac{K_D K_V}{\tau_1 N_1 \omega^2} \sqrt{\frac{1 + (\omega\tau_2)^2}{1 + (\omega\tau_3)^2}} \exp(j(\arctg \omega\tau_2 - \arctg \omega\tau_3 - 180^\circ))
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Assuming that the parameters of the PLL components are known:

a) frequency f_r is calculated from the equation:

$$\frac{K_D K_V}{\tau_1 N_1 (2\pi f)^2} \sqrt{\frac{1 + (2\pi f \tau_2)^2}{1 + (2\pi f \tau_3)^2}} = 1, \quad (3.2)$$

(solution in appendix 2)

b) the phase margin is calculated from the formula:

$$\varphi_r = \arctg 2\pi f_r \tau_2 - \arctg 2\pi f_r \tau_3 = \arctg \frac{2\pi f_r (\tau_2 - \tau_3)}{1 + (2\pi f_r)^2 \tau_2 \tau_3} \quad (3.3)$$

(f_r obtained from 3.2).

Table

Frequency f_r and phase margin for different values of PLL components parameters

		frequency f_r [Hz]	margin phase [°]
Fig. 1.	a	256	30
	b	795	45
	c	2467	30
Fig. 2.	a	168	22
	b	795	45
	c	3619	22
Fig. 3.	a	554	18
	b	795	45
	c	1254	48
Fig. 4.	a	675	23
	b	795	45
	c	828	53
Fig. 5.	a	294	33
	b	795	45
	c	2147	33
Fig. 6.	a	795	45
	b	1476	52
	c	2514	44
Fig. 7.	a	258	7
	b	422	31
	c	795	45

The values of frequency f_r and of the phase margin for different values of parameters of PLL components are compiled in the table (transfer functions are shown in figs. from 1 to 7). A comparison of transfer functions and the results presented in the table allow us to state that:

- For frequencies close to frequency f_r , the absolute value of PLL transfer function has a maximum.
- For frequencies smaller than f_r , the absolute value of PLL transfer function is close to $20 \log N$.
- For frequencies greater than f_r , the absolute value of PLL transfer function drops to $12 \frac{\text{dB}}{\text{oct}}$.
- The maximum value of absolute value of PLL transfer function depends on the phase margin. This relationship is inversely proportional.
- The maximum slope of the PLL phase curve occurs for frequencies close to frequency f_r .
- The slope of the phase curve depends on the value of the phase margin. This relationship is inversely proportional.

It follows from the above that frequency f_r and the phase margin characterize very well the PLL transfer function. If some useful parameters do not fulfill the requirements, they can be corrected by the PLL transfer function. Then, it is easy to decide in what direction frequency f_r and the phase margin should be changed. The minimization of the PLL phase noise can serve as an example here [1].

In order to shape the transfer function, the designer can follow along these lines:

a) Change the values of PLL components parameters, e.g. the filter time constants. Using formulas (3.2) and (3.3), calculate the values of f_r and φ_r . If it is necessary, continue the correction.

b) The desired values of f_r and φ_r are assumed a priori. The values of PLL components parameters are calculated from the formulas presented in [4].

$$\tau_3 = \frac{\sec \varphi_r - \tan \varphi_r}{2\pi f_r} \quad (3.4)$$

$$\tau_2 = \frac{1}{(2\pi f_r)^2 \tau_3} \quad (3.5)$$

$$\tau_1 = \frac{K_D K_V}{N_1 (2\pi f_r)^2} \sqrt{\frac{1 + (2\pi f_r \tau_2)^2}{1 + (2\pi f_r \tau_3)^2}} \quad (3.6)$$

The derivation of the formulas for PLL components parameters depending on the values of frequency f_r and phase margin may turn out to be very difficult. The fact that it is necessary to derive formulas analogous to (3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 and 3.6) for each loop filter is an inconvenience associated with the use of frequency f_r and the phase margin.

CONCLUSIONS

When using PLL transfer function, one must remember that it characterizes explicitly only linear systems. It is always necessary to verify the values of the model input signal for which this assumption is fulfilled. The measurement of the system's linearity is the only reliable method here (an exemplary measuring procedure is described in Appendix 1). If it is certain that the system is linear, some useful PLL parameters can be designed by

appropriate shaping of PLL transfer function. It has been shown that two parameters which follow from the PLL open-loop gain equation, i.e. frequency f_r and the phase margin are particularly useful for this purpose. Proper selection of values of these parameters ensures effective shaping of PLL transfer function.

REFERENCES

1. R. Artiuch: *An integral measure of the phase noise power in phase locked loops*. AEU, Band 41 [1987], Heft 5
2. J. M. Hall: *Applications of Phase-Modulated Signal Generator*. Hewlett Packard Journal, vol. 26, 11, 1975
3. V. F. Kroupa: *Noise Properties of PLL Systems*. IEEE COM-30, No. 10, 1982
4. A. B. Przedpełski: *Optimize phase-lock loops to meet your needs-or determine why you can't*. Electronic Design 19, September 13, 1978

APPENDIX 1

THE MEASURING OF THE PEAK PHASE DEVIATION OF THE PLL OUTPUT SIGNAL

The measuring system consist of: a reference signal generator, a modulating signal generator, a phase modulator and a spectrum analyser. The three first components of the measuring system form the phase-modulated reference signal. In practice, they are replaced by a highly frequency-stable generator which is capable of modulating the phase or the frequency from an internal or an external audiofrequency generator [2] (e.g. a Rohde Schwarz typ SMPC).

Spectral lines: one having basic frequency f_0 (carrier) and symmetrical lines set off from frequency f_0 , being a multiple of modulating frequency f_m , from the image of the phase modulated PLL output signal on the spectrum analyser. The modulation theory says that the levels of the carrier and of the lateral components are defined by Bessel functions in terms of peak phase deviation. In the considered case, the carrier assumes value $J_0(\Phi')$, the first component $J_1(\Phi')$, the second component $J_2(\Phi')$, etc. Since it is necessary to ensure linearity and because small phase deviations of the signals occur during normal operation, such a peak phase deviation of the output signal is selected when measuring transfer function, that the peak deviation is smaller than one radian. Then, the second and the next components can be practically neglected. Since the signal level in spectrum analysers is graduated in decibels, it is easy to determine the ratio of the first component level to the carrier:

$$20 \log \frac{J_1(\Phi')}{J_0(\Phi')} = \gamma. \quad (\text{A.1})$$

It should be remembered that γ has a negative value.

For small peak deviation ($\Phi' \ll 1$) the following relationship holds:

$$2 \frac{J_1(\Phi')}{J_0(\Phi')} = \Phi'. \quad (\text{A.2})$$

Using the above formulas, the peak phase deviation of the PLL output signal is determined depending on the ratio of the first component level to the carrier, y :

$$\Phi' = 2 \cdot 10^{x/20}. \quad (\text{A.3})$$

Having this value, one can determine the absolute value of PLL transfer function according to the formula (1.8) and the system's linearity according to the procedure described in the first chapter.

APPENDIX 2

THE DETERMINATION OF FREQUENCY f_r WHEN THE VALUES OF THE PLL COMPONENTS ARE KNOWN

In order to determine frequency f_r , the equation (3.2) must be solved the following denotation is introduced:

$$\omega^2 = x \quad (\text{A.4})$$

as a result, (3.2) assumes the form of a cubic polynomial

$$x^3(N_1 \tau_1 \tau_3)^2 + x^2(N_1 \tau_1)^2 - x(K_D K_V \tau_2)^2 - (K_D K_V)^2 = 0. \quad (\text{A.5})$$

which can be solved by the classic method.

Auxiliary quantities are introduced:

$$P_1 = -\frac{1}{3} \left[\left[\frac{K_D K_V \tau_2}{N_1 \tau_1 \tau_3} \right]^2 + \frac{1}{3\tau_3^4} \right], \quad (\text{A.6})$$

$$Q_1 = \frac{1}{27\tau_3^6} + \frac{(K_D K_V \tau_2)^2}{6N_1^2 \tau_1^2 \tau_3^4} - \left[\frac{K_D K_V}{N_1 \tau_1 \tau_3} \right] \frac{1}{2}. \quad (\text{A.7})$$

The solution of equation (A.5) depends on the value of the sum $Q_1^2 + P_1^3$:

$$\text{a) } Q_1^2 + P_1^3 > 0 \quad (\text{A.8})$$

then the polynomial has one real root:

$$x = u + v - \frac{1}{3\tau_3^2} \quad (\text{A.9})$$

where:

$$u = \sqrt[3]{-Q_1 + \sqrt{Q_1^2 + P_1^3}} \quad (\text{A.10})$$

$$v = \sqrt[3]{-Q_1 - \sqrt{Q_1^2 + P_1^3}}, \quad (\text{A.11})$$

$$\text{b) } Q_1^2 + P_1^3 = 0 \quad (\text{A.12})$$

then the polynomial has three real roots (including two identical ones):

$$x_1 = -2\sqrt[3]{Q_1} - \frac{1}{3\tau_3^2} \quad (\text{A.13})$$

$$x_{2,3} = \sqrt[3]{Q_1} - \frac{1}{3\tau_3^2} \quad (\text{A.14})$$

$$c) Q_1^2 + P_1^3 < 0 \quad (A.15)$$

then the polynomial has three real roots:

$$x_1 = 2|\sqrt{-P_1}| \cos \frac{1}{3} P_3 - \frac{1}{3\tau_3^2} \quad (A.16)$$

$$x_2 = -2|\sqrt{-P_1}| \cos \left[\frac{1}{3} P_3 + \frac{\pi}{3} \right] - \frac{1}{3\tau_3^2} \quad (A.17)$$

$$x_3 = -2|\sqrt{-P_1}| \cos \left[\frac{1}{3} P_3 - \frac{\pi}{3} \right] - \frac{1}{3\tau_3^2} \quad (A.18)$$

where

$$P_3 = \arccos \frac{-Q_1}{|\sqrt{-P_1^3}|} \quad (A.19)$$

The obtained real positive value of x is substituted into (A.4) and after transformation:

$$f_r = \frac{\sqrt{x}}{2\pi}. \quad (A.20)$$

R. ARTIUCH

KSZTAŁTOWANIE TRANSMITANCJI PĘTLI SYNCHRONIZACJI FAZY

Streszczenie

Zostały opisane zasady budowy liniowego modelu pętli synchronizacji fazy (PLL). Przedstawiono prostą metodę weryfikacji liniowości. Pokazano jak wybór dwóch parametrów wynikających z transmitancji otwartej pętli PLL wpływa na jej transmitancję.

R. ARTIUCH

FORMATION DE LA FONCTION DE TRANSFERT D'UNE BOUCLE DE VERROUILLAGE DE PHASE

Résumé

On décrit les principes de la formation d'un modèle linéaire d'une boucle de verrouillage de phase (PLL). On présente une simple méthode de la vérification de la linéarité. On montre à quel point le choix de deux paramètres, résultant de la transmittance en boucle ouverte PLL, influe sur sa transmittance.

R. ARTIUCH

GESTALTUNG DER ÜBERGANGSFUNKTION EINER PHASENSYNCHRONISIERUNGSSCHLEIFE

Zusammenfassung

Es wurden Bauprinzipien für ein Linienmodell einer Phasensynchronisierungsschleife (PLL) beschrieben. Eine einfache Methode für die Verifizierung der Linearität wurde geschildert. Man hat nachgewiesen wie die Wahl von zwei sich aus der Übergangsfunktion ergebenden Parametern einer offenen PLL-Schleife deren Übergangsfunktion beeinflusst.

Р. АРТЮХ

ФОРМИРОВАНИЕ ТРАНСМИТАНСА КОНТУРА СИНХРОНИЗАЦИИ ФАЗЫ

Резюме

Описаны принципы синтеза линейной модели контура синхронизации фазы (PLL). Представлен простой метод проверки линейности. Показано, как избрание двух параметров вытекающих из трансмитанса открытого контура PLL влияет на ее трансмитанс.

Efekt falowodowy w laserach paskowych z rezonatorami Fabry'ego — Perota

WŁODZIMIERZ NAKWASKI

Instytut Fizyki, Politechnika Łódzka

Otrzymano 1988.01.16

Autoryzowano do druku 1989.02.03

W artykule przedstawiono teoretyczną analizę efektu falowodowego w laserach paskowych o różnych konstrukcjach: planarnej, nieplanarnej i z zagrzebanym obszarem czynnym.

1. WPROWADZENIE

Optoelektronika półprzewodnikowa jest obecnie jedną z najszybciej rozwijających się dziedzin wiedzy. Spowodowane to zostało pojawieniem się ostatnio nowych, masowych zastosowań półprzewodnikowych przyrządów optoelektronicznych. Są one obecnie nie do zastąpienia nie tylko w światłowodowej telekomunikacji optycznej, ale również, a nawet przede wszystkim, w cyfrowych układach zapisu i odtwarzania dźwięku i obrazu z wykorzystaniem tzw. compact dysków. Roczna produkcja laserów złączowych przystosowanych do współpracy z compact dyskami wynosi już ponad 1 mln sztuk.

Masowemu rozwojowi technologii wytwarzania półprzewodnikowych przyrządów optoelektronicznych towarzyszy cały czas szybki rozwój teorii działania tych przyrządów. Wiedza w tej dziedzinie, jak w rzadko której, starzeje się niezwykle szybko.

Kilka lat temu opublikowałem dwie prace [1, 2] przedstawiające w zarysie teorie laserów paskowych z rezonatorami Fabry'ego-Perota. Opisano w nich między innymi efekt falowodowy, a ściślej mówiąc tzw. metodę efektywnego współczynnika załamania [3] w zastosowaniu do struktury lasera paskowego z samoistnym efektem falowodowym [4]. Obowiązywał wówczas powszechnie model T. L. Paoli'ego [4] tego zjawiska, wyjaśniający przekonująco znane wyniki doświadczalne [5], a potwierdzony dodatkowo obliczeniami [6] przeprowadzonymi za pomocą rachunku zaburzeń I rzędu. Znane też już były pierwsze prace J. Buusa (m.in. [7]), młodego i mało jeszcze znanego fizyka duńskiego, kwestionujące poprawność powyższego podejścia, ale zawarte w nich opinie były odosobnione i nie spotykały się początkowo z jakimś znaczącym odzewem.

Dzisiejsza sytuacja w tej dziedzinie jest diametralnie odmienna. Model T. L. Paoli'ego [4] uległ już praktycznie zapomnieniu, powszechnie stosuje się model J. Buusa, którego osiągnięcia naukowe w teorii pola elektromagnetycznego lasera złączowego [8—39] mogą

zaimponować. Niniejsza praca ma właśnie na celu zapoznanie polskiego czytelnika z modelem J. Buusa, stanowi więc uzupełnienie prac [1, 2]. W przygotowaniu znajduje się następna praca [40] autora poświęcona pokrewnym zagadnieniom, a mianowicie zasadom modelowania zjawisk fizycznych w nowoczesnych laserach złączowych.

Układ niniejszej pracy jest następujący: w rozdziale 2 wprowadza się pojęcie stałej propagacji i wyjaśnia związki łączące stałe optyczne i stałe elektryczne; rozdział 3 zawiera opis metody efektywnego współczynnika załamania; efekt falowodowy w laserach paskowych o strukturze planarnej wyjaśniono w rozdziale 4, a w laserach o strukturze nieplanarnej — w rozdziale 5; rozdział 6 poświęcono efektowi falowodowemu w laserach z nagrzanym obszarem czynnym. Pracę uzupełniono o dodatek, w którym zwięźle przedstawiono ograniczenie modów promieniowania w planarnym falowodzie aktywnym.

2. STAŁA PROPAGACJI

Oddziaływanie pola elektromagnetycznego promieniowania z materią, w szczególności z materiałem rezonatora lasera złączowego, opisuje się za pomocą równań Maxwella [41]:

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_c \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (4)$$

gdzie $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{j}$, ρ_c , t przedstawiają kolejno: natężenia pola elektrycznego i magnetycznego, indukcję elektryczną i magnetyczną, gęstość prądu, gęstość ładunku przestrzennego i czas. Wielkości te wiążą się ze sobą w następujący sposób:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}; \quad (5) \quad \vec{B} = \mu \vec{H}; \quad (6) \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}; \quad (7)$$

gdzie przez ϵ , μ i σ oznaczono odpowiednio przenikalności: dielektryczną i magnetyczną oraz przewodność właściwą.

Dla pól monochromatycznych o pulsacji ω stosuje się zwykle notację zespoloną:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \text{Re}[\vec{\mathcal{E}}(x, y, z, t)] = \text{Re}[\vec{\mathcal{E}}(x, y, z) \exp(i\omega t)] \quad (8)$$

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \text{Re}[\vec{\mathcal{H}}(x, y, z, t)] = \text{Re}[\vec{\mathcal{H}}(x, y, z) \exp(i\omega t)] \quad (9)$$

W dielektryku ($\sigma = 0$) jednorodnym bez ładunków ($\rho_c = 0$), jak również w dielektryku niejednorodnym, w którym względna zmiana $\Delta\epsilon/\epsilon$ przenikalności dielektrycznej na odcinku równym długości fali jest dużo mniejsza od 1 [42], można, licząc rotacje równań (1) i (2), otrzymać równania falowe w postaci następującej:

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} \quad (10)$$

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}}{\partial t^2} \quad (11)$$

gdzie przez $v = (\epsilon\mu)^{-1/2}$ oznaczono prędkość fali.

Stosując formalizm (8—9) w równaniach (10—11) otrzymujemy:

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} + \beta^2 \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (12)$$

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{H}} + \beta^2 \vec{\mathcal{H}} = 0 \quad (13)$$

gdzie przez

$$\beta = \omega(\mu\epsilon)^{1/2} \quad (14)$$

oznaczono fazę zespolonej stałej propagacji.

W ośrodku przewodzącym ($\sigma \neq 0$) postępowanie jest podobne. Wówczas równania falowe przyjmują postać następującą:

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} + \gamma^2 \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (15)$$

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{H}} + \gamma^2 \vec{\mathcal{H}} = 0 \quad (16)$$

Przez

$$\gamma = \beta - i\delta = \sqrt{-i\omega\mu(\sigma + i\omega\epsilon)} \quad (17)$$

oznaczono tu zespoloną stałą propagacji. Każdemu z powyższych równań falowych, noszących nazwę równań Helmholtza, można przypisać układ trzech analogicznych równań dla poszczególnych składowych wektorów $\vec{\mathcal{E}}$ i $\vec{\mathcal{H}}$.

Równanie falowe dla danej składowej, np. $\mathcal{E}_x$, można rozwiązać metodą rozdzielania zmiennych:

$$\mathcal{E}_x(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (18)$$

Wówczas równanie falowe przekształci się do postaci:

$$X'' + X\gamma_x^2 = 0 \quad (19a)$$

$$Y'' + Y\gamma_y^2 = 0 \quad (19b)$$

$$Z'' + Z\gamma_z^2 = 0 \quad (19c)$$

przy czym stałe rozdziału spełniają warunek:

$$\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2 = \gamma^2. \quad (20)$$

Rozwiązanie np. równania (19c) można przedstawić jako superpozycję dwóch fal rozchodzących się w kierunkach: dodatnim i ujemnym osi z :

$$Z(z) = A \exp(-i\gamma_z z) + B \exp(+i\gamma_z z) \quad (21)$$

Stała rozdziału jest w ogólnym przypadku zespolona:

$$\gamma_z = \beta_z - i\delta_z X \quad (22)$$

Rozpatrzymy jedynie falę rozchodzącą się w dodatnim kierunku osi z , tzn. przyjmijmy $B = 0$. Wówczas równanie (22) przyjmie postać:

$$Z(z, t) = A \exp(-\delta_z z) \exp[+i(\omega t - \beta_z z)]. \quad (23)$$

Weźmy pod uwagę przypadek szczególny fali płaskiej spolaryzowanej w kierunku osi x i rozchodzącej się w kierunku osi z , tzn.:

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{a}_x \mathcal{E}_z, \quad \mathcal{E}_y = \mathcal{E}_z = 0 \quad (24)$$

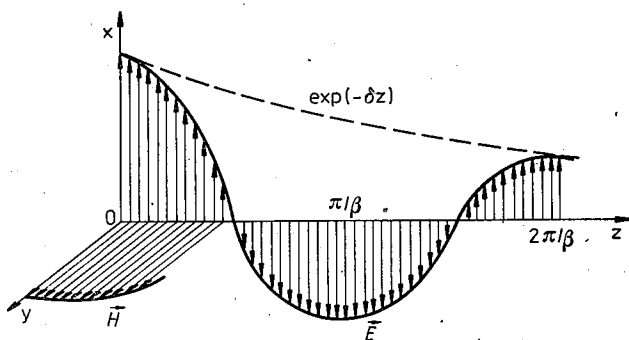
$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} = 0, \quad (25)$$

gdzie $\vec{a}_x$ jest wersorem osi x . Wówczas zespolone natężenie pola elektrycznego $\vec{\mathcal{E}}$ będzie równe [42]:

$$\vec{\mathcal{E}}(x, y, z, t) = \vec{a}_x \mathcal{E}_x = \vec{a}_x Z(z) = \vec{a}_x A \exp(-\delta z) \exp[i(\omega t - \beta z)] \quad (26)$$

a jego część rzeczywista:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{a}_x A \exp(-\delta z) \cos(\omega t - \beta z). \quad (27)$$



Rys. 1. Początkowy ($t = 0$) rozkład natężenia pola elektrycznego fali płaskiej spolaryzowanej w kierunku osi x , a rozchodzącej się w kierunku osi z w ośrodku stratnym [49]

Wykres $E(x, y, z, t)$ dla chwili początkowej pokazano na Rys. 1. Jedyna niezerowa składowa pola magnetycznego, tj. $\mathcal{H}_y$, będzie wówczas równa:

$$\mathcal{H}_y = \frac{\gamma}{i\omega\mu} A \exp(-\delta z) \exp[i(\omega t - \beta z)]. \quad (28)$$

Część urojona stałej propagacji, tj. δ , nosi nazwę stałej tłumienia lub tłumienności i równa się logarytmowi ze względnych zmian amplitudy na jednostkę drogi:

$$\delta = \ln \left| \frac{A(z)}{A(z+1)} \right|. \quad (29)$$

Podaje się ją zwykle w dB/km.

Część rzeczywista γ , tj. β , nazywa się z kolei współczynnikiem fazowym i wyraża zmienność fazy $\mathcal{E}(x, y, z, t)$ przypadającą na jednostkę drogi.

W niektórych pracach używa się innej notacji, a mianowicie w wykładniku exponenty rozwiązania (21) nie mnoży się stałej propagacji przez jednostkę urojoną. Wówczas oczywiście część rzeczywista takiej stałej propagacji będzie częścią urojoną stałej propagacji (17) itd.

Oznaczmy fazę stałej propagacji w próżni symbolem k_0 :

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c} \quad (30)$$

gdzie λ_0 jest długością fali w próżni. Wprowadźmy też zespolony współczynnik załamania:

$$N_R = n_R - ik_e \quad (31)$$

gdzie n_R jest współczynnikiem załamania, a k_e — stałą ekstynkcji. Alternatywnie, w miejsce zespolonego współczynnika załamania N_R , stosuje się też zespoloną stałą dielektryczną ϵ_R . Związki łączące te wielkości przedstawiono poniżej.

Związki łączące zespoloną stałą dielektryczną z zespolonym współczynnikiem załamania

$$\begin{aligned} N_R &= n_R - ik_e \\ \epsilon_R &= \epsilon' + i\epsilon'' \\ \epsilon_R &= N_R^2 \\ \epsilon' &= n_R^2 - k_e^2 \approx n_R^2 \\ \epsilon'' &= -2n_R k_e = \frac{\alpha n_R}{k_0} \end{aligned}$$

Zespoloną stałą propagacji można teraz wyrazić w funkcji zespolonego współczynnika załamania lub zespolonej stałej dielektrycznej:

$$\gamma^2 = N_R^2 k_0^2 = \epsilon_R k_0^2, \quad (32)$$

a stąd otrzymujemy wzory na obie części: rzeczywistą i urojoną, stałej propagacji w postaci:

$$\delta = k_0 k_e \quad (33)$$

$$\beta = k_0 n_R. \quad (34)$$

Zwykle do opisu strat energii pola elektromagnetycznego, zamiast współczynnika ekstynkcji k_e , czy też tłumienności δ , używa się współczynnika absorpcji α zdefiniowanego jako:

$$\alpha = -\frac{1}{I_0} \frac{dI}{dz}, \quad (35)$$

gdzie I_0 jest początkową wartością emitancji energetycznej I promieniowania lasera. Otrzymujemy wówczas:

$$I(z) = I_0 \exp(-2\delta z) = I_0 \exp(-\alpha z) \quad (36)$$

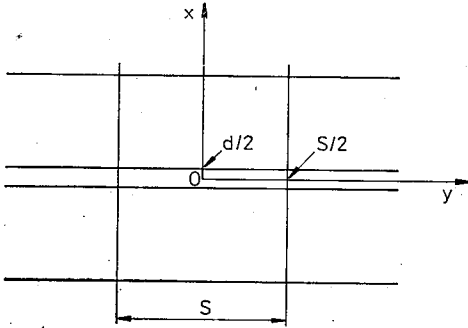
czyli

$$\alpha = 2\delta. \quad (37)$$

3. METODA EFEKTYWNEGO WSPÓŁCZYNNIKA ZAŁAMANIA

Analiza pola elektromagnetycznego w laserze o nowoczesnej konstrukcji, czyli w laserze paskowym, wymaga możliwie dokładnego określenia występującego w nim efektu falowodowego. Ograniczenie promieniowania w płaszczyźnie prostopadłej do złącza p - n ,

czyli wzdłuż osi x na rys. 2, jest w strukturach heterozłączowych związane z rozkładem współczynnika załamania $n_R(x)$. Skokowa zmiana n_R na krawędziach obszaru czynnego jest spowodowana zmianą składu warstw, a konkretnie w laserach (AlGa)As większą molową zawartością AlAs w warstwach ograniczających.



Rys. 2. Rezonator planarnego lasera złączowego z kontaktem paskowym

Wprowadźmy znormalizowaną stałą propagacji b [43]:

$$b = \frac{\gamma^2 - N_{R1}^2 k_0^2}{k_0^2 (N_{R2}^2 - N_{R1}^2)}, \quad (38)$$

gdzie

$$N_{R1} = n_{R1} - ik_{e1}; \quad (39)$$

$$N_{R2} = n_{R2} - ik_{e2}. \quad (40)$$

Indeksy 1 i 2 odpowiadają warstwom ograniczającym i warstwie czynnej (por. Rys. 2) w symetrycznej biheterostrukturze.

Ograniczenie promieniowania w płaszczyźnie złącza, tj. wzdłuż osi y na Rys. 2, w strukturze wielowarstwowej wygodnie jest rozpatrywać za pomocą efektywnego zespolonego współczynnika załamania $N_{R,ef}$ danego modu [3], który dla przypadku falowodu symetrycznego wyraża się wzorem [25]:

$$N_{R,ef} = n_{R,ef} - ik_{e,ef} = [bN_{R2}^2 + (1-b)N_{R1}^2]^{1/2}. \quad (41)$$

Znormalizowana stała propagacji b jest dla modu podstawowego rozwiązaniem równania na wartości własne o następującej postaci [44] (por. Dodatek):

$$\nu \sqrt{1-b} = \arctan \sqrt{\frac{b}{1-b}} \quad (42)$$

ze znormalizowaną częstotliwością ν :

$$\nu = \frac{1}{2} k_0 d \sqrt{N_{R2}^2 - N_{R1}^2}. \quad (43)$$

Uwzględniając, że w realnych strukturach laserów złączowych spełnione są nierówności [7]:

$$k_{e1} \ll n_{R1} \quad (44a)$$

$$k_{e2} \ll n_{R2} \quad (44b)$$