

W podobny sposób można wykazać, że

$$e_b(T|n) = e_b(T-1|n-1) - f_n(n) e_f(T|n-1). \quad (2.21)$$

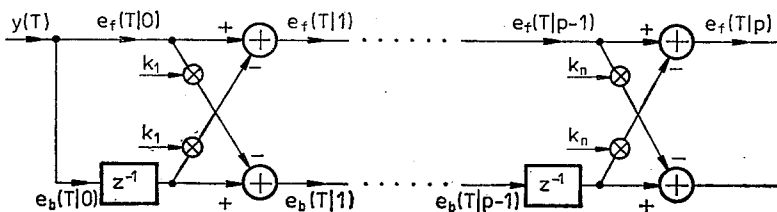
Współczynniki $f_n(n)$ występujące w równaniach (2.20) i (2.21) są nazywane współczynnikami i oznaczane zazwyczaj symbolem k_n . Przy tych oznaczeniach równania (2.20) i (2.21) przyjmują postać:

$$e_f(T|n) = e_f(T|n-1) - k_n e_b(T-1|n-1), \quad e_f(T|0) = y(T) \quad (2.22)$$

$$e_b(T|n) = e_b(T-1|n-1) - k_n e_f(T|n-1), \quad e_b(T|0) = y(T), \quad (2.23)$$

z której bezpośrednio wynika struktura kratowa filtra predykcyjnego (rys. 3).

Należy podkreślić, że optymalne (w sensie kryterium MMSE) współczynniki odbicia można wyznaczać niejako samodzielnie, bez konieczności ich wiązania z optymalnymi współczynnikami (2.8) filtra transversalnego. Jeśli przyjmiemy, że współczynniki k_n są



Rys. 3. Struktura kratowa filtra predykcyjnego

nieznane, to stosując kryterium MMSE do zależności (2.22) i (2.23), tzn. minimalizując błędy średniokwadratowe predykcji odpowiednio w przód i wstecz otrzymamy

$$k_{n\text{opt}} = \frac{E[e_f(T|n-1)e_b(T-1|n-1)]}{E[e_b^2(T-1|n-1)]} \quad (2.24)$$

oraz

$$k_{n\text{opt}} = \frac{E[e_f(T|n-1)e_b(T-1|n-1)]}{E[e_f^2(T|n-1)]}. \quad (2.25)$$

Z porównania tych wzorów wynika, że dla każdego m zachodzi równość $E[e_f^2(T|m)] = E[e_b^2(T-1|m)]$. Wzór (2.24) można zatem przepisać w postaci równoważnej

$$k_{n\text{opt}} = \frac{E[e_f(T|n-1)e_b(T-1|n-1)]}{\sqrt{E[e_f^2(T|n-1)]E[e_b^2(T-1|n-1)]}}, \quad (2.26)$$

z której wynika, że optymalny współczynnik odbicia $k_{n\text{opt}}$ można interpretować jako unormowany współczynnik korelacji między błędem predykcji w przód rzędu $n-1$ i opóźnionym⁵⁾ błędem predykcji wstecz rzędu $n-1$. Z tego względu współczynniki odbicia są często nazywane współczynnikami częściowej korelacji (współczynnikami PARCOR [1]).

⁵⁾ Sygnał $\{v(T)\}$ jest z założenia stacjonarny, zatem $E[e_b^2(T-1|n-1)] = E[e_b^2(T|n-1)]$. Wyróżnienie indeksów czasowych zostało podyktowane potrzebami dalszych rozważań, w których współczynniki odbicia estymuje się iteracyjnie dla kolejnych chwil czasu.

Praktyczne znaczenie struktury kratowej wynika z możliwości iteracyjnego (rekursywnego po czasie) obliczenia estymatorów współczynnika odbicia (por. [12]), a następnie wykorzystania drugiej rekursji Levinsona-Durbina. Ponadto filtry kratowe wykazują wiele innych korzystnych właściwości, które sprawiają, że w wielu zastosowaniach są one częściej wykorzystywane niż filtry transversalne. Pokróćce omówimy te właściwości.

1. Wyznaczenie optymalnego w sensie MMSE filtru kratowego rzędu p jest równoznaczne z wyznaczeniem wszystkich optymalnych filtrów kratowych rzędu $n < p$; optymalne współczynniki odbicia $k_{n\text{opt}}$, $n < p$, są bowiem niezależne od rzędu filtru p . Kolejne ogniwa filtru predykcyjnego mogą wobec tego być „dodawane” sukcesywnie, bez zmiany poprzednich ogniw⁶⁾.

2. Ze wzoru (2.26) wynika, że

$$|k_{n\text{opt}}| \leq 1 \quad (2.27)$$

Jeśli sygnał nie zawiera wyłącznie składników sinusoidalnych, to nierówność ta jest nierównością ostrą, a optymalny filtr predykcyjny jest układem minimalno-fazowym (wszystkie zera jego transmitancji leżą wewnątrz okręgu jednostkowego). Filtr odwrotny jest zatem układem stabilnym. Dodajmy, że stwierdzenie powyższe jest prawdziwe również wtedy, gdy współczynniki k_n są estymowane na podstawie próbek sygnału, o ile tylko $|k_n| < 1$ dla $n = 1, \dots, p$.

3. Ponieważ $|k_{n\text{opt}}| \leq 1$, więc błędy średniokwadratowe predykcji tworzą ciąg nierosnący (por. ostatnią rekursję Levinsona-Durbina)

$$E[e_f^2(T|1)] \geq E[e_f^2(T|2)] \geq \dots \geq E[e_f^2(T|p)] > 0 \quad (2.28)$$

Jeśli $\{y(T)\}$ jest sygnałem AR(p), to ciąg ten osiąga swoje minimum dokładnie dla $n = p$. Właściwość (2.28) można wykorzystać do śledzenia zmian błędu średniokwadratowego i ustalenia na tej podstawie rzędu filtru, niezbędnego do uzyskania założonej dokładności modelowania nieznanego sygnału modelem AR.

Struktura kratowa jest, obok struktury transversalnej, podstawową strukturą w jakiej realizowane są filtry predykcyjne. Należy jednak podkreślić, że algorytmy estymacji parametrów filtrów kratowych na podstawie próbek sygnału są zwykle bardziej złożone pod względem obliczeniowym od ich odpowiedników transversalnych. Problem wyboru typu filtru będzie dyskutowany w dalszych częściach pracy.

3. KLASYFIKACJA ALGORYTMÓW ESTYMACJI PARAMETRÓW FILTRÓW PREDYKCYJNYCH

Z dotychczasowych rozważań wynika, że do wyznaczenia optymalnych (w sensie MMSE) współczynników (2.8) filtru transversalnego lub współczynników (2.26) kratowego filtru predykcyjnego wymagana jest znajomość funkcji autokorelacji odpowiednich sygnałów. W praktyce jedyną dostępną informacją, na podstawie której projektujemy

⁶⁾ W ujęciu geometrycznym teorii filtrów predykcyjnych (por. [45]), właściwość ta odpowiada znalezieniu bazy ortogonalnej w odpowiedniej p -wymiarowej przestrzeni Hilberta. Dzięki tej właściwości algorytmy wyznaczania filtrów kratowych są z reguły szybciej zbieżne od ich odpowiedników transversalnych.

filtr predykcyjny, jest skończony zbiór próbek pojedynczej realizacji sygnału. Rozwiązania (2.8) i (2.26) należy wówczas zastąpić ich estymatorami (średnimi czasowymi) w taki sposób, aby były one optymalne w sensie innych kryteriów optymalności.

W rozdziale tym przedstawimy klasyfikację poszczególnych kryteriów i wynikających z nich algorytmów oraz podamy ich ogólną charakterystykę.

Algorytmy estymacji parametrów filtru predykcyjnego można podzielić według czterech zasadniczych kryteriów klasyfikacji.

1. Ze względu na sposób przetwarzania dostępnej informacji o sygnale algorytmy te można podzielić na blokowe i rekursywne.

W algorytmach blokowych wszystkie próbki należące do bloku danych $\{y(T): T = 0, \dots, M-1\}$ o długości M są przetwarzane równocześnie. Jako wynik otrzymuje się jeden dla całego bloku filtr predykcyjny, optymalny dla tego bloku w określonym sensie. W algorytmach rekursywnych natomiast, w danej chwili T w przetwarzaniu biorą udział wszystkie próbki poprzednie $y(T-1), \dots, y(0)$ (lub ciąg ostatnich próbek o ustalonej i zawsze jednakowej długości) oraz dodawana każdorazowo nowa próbka $y(T)$. Algorytmy rekursywne wyznaczają w sposób iteracyjny ciąg optymalnych w sensie określonego kryterium parametrów filtrów predykcyjnych „dopasowanych” do przetwarzanych w danej chwili danych. Proces dopasowywania się współczynników filtru ma charakter adaptacyjny i z tego względu algorytmy, a zarazem i filtry tej klasy, są nazywane adaptacyjnymi.

Adaptacyjny charakter mogą mieć także algorytmy typu blokowego, jeżeli blok danych jest dzielony na podbloki (rozłączne lub zachodzące na siebie) i optymalne filtry są wyznaczane dla kolejnych podbloków. Tego typu przetwarzanie jest stosowane niekiedy dla dostatecznie długich ciągów danych.

2. Ze względu na zastosowane kryterium optymalności filtru wyróżniamy algorytmy typu LS i algorytmy typu LMS.

W algorytmach LS (Least Squares) miarą błędu jest suma kwadratów błędów określonych dla kolejnych chwil T , $\varepsilon(N) = \sum_T e_f^2(T|N)$, a optymalny filtr wynika z minimalizacji tej sumy ze względu na dobór współczynników filtru $\{f_j(N)\}$ lub $\{k_n\}$:

$$\min \varepsilon(N) = \min \sum_T e_f^2(T|N), \quad (3.1)$$

gdzie indeks N oznacza rząd poszukiwanego filtru.

W zależności od zakresu sumowania w kryterium (3.1) rozróżniamy cztery przypadki szczególne algorytmów LS: algorytmy autokorelacyjne, algorytmy kowariancyjne, algorytmy z oknem początkowym oraz algorytmy z oknem końcowym.

W algorytmach LS jest często stosowany wariant kryterium (3.1), w którym w skład sumy wchodzi również błąd predykcji wstecz

$$\min \varepsilon(N) = \min \sum_T [e_f^2(T|N) + e_b^2(T|N)]. \quad (3.2)$$

Algorytmy tego typu są nazywane algorytmami forward-backward, podczas gdy algorytmy, w których stosowane jest kryterium (3.1), są nazywane algorytmami forward.

W algorytmach LMS (Least-Mean Square) miarą błędu jest kwadrat błędu predykcji

w przód $\varepsilon(T|N) = e_f^2(T|N)$, lub suma kwadratu błędu predykcji w przód i kwadratu błędu predykcji wstecz, a odpowiednie kryteria optymalizacji filtru przyjmują postać

$$\min \varepsilon(T|N) = \min e_f^2(T|N) \quad (3.3)$$

lub

$$\min \varepsilon(T|N) = \min [e_f^2(T|N) + e_b^2(T|N)]. \quad (3.4)$$

Algorytmy LMS są algorytmami rekursywnymi gradientowymi (typu forward — kryterium (3.3), lub typu forward-backward — kryterium (3.4)).

Algorytmy LS mogą być zarówno algorytmami blokowymi jak i rekursywnymi. W tym drugim przypadku miary błędów występujących w kryteriach (3.1) i (3.2) są obliczane dla kolejnych chwil czasu i z tego względu w oznaczeniach tych miar musi występować dodatkowy indeks czasowy, podobnie jak to ma miejsce w kryteriach (3.3) i (3.4).

3. Ze względu na strukturę filtru algorytmy predykcyjne dzielimy na algorytmy transwersalne i kratowe. Jeżeli N jest rzędem szukanego filtru, to w algorytmach transwersalnych wyznaczany jest zbiór optymalnych współczynników predykcyjnych $\{f_j(N)\}$ (algorytmy blokowe), lub ciąg zbiorów $\{f_j(T|N)\}$, $T = 1, 2, \dots$ (algorytmy rekursywne), zaś w algorytmach kratowych — zbiór optymalnych współczynników odbicia $\{k_n\}$ (algorytmy blokowe), lub ciąg zbiorów $\{k_n(T)\}$, $T = 1, 2, \dots$ (algorytmy rekursywne).

4. Ze względu na rodzaj zmiennych występujących w algorytmach algorytmy predykcyjne dzielimy na algorytmy nieznormalizowane i znormalizowane (por. p. 7).

Przeprowadzony podział algorytmów predykcyjnych wynika z czterech zasadniczych kryteriów klasyfikacji. Nie obejmuje on jednakże wszystkich możliwych linii podziału. Burzliwy rozwój teorii filtrów predykcyjnych, a zwłaszcza filtrów adaptacyjnych, owocował w ostatnich latach opracowaniem wielu interesujących algorytmów, w stosunku do których można zastosować dalsze kryteria klasyfikacji. Zostaną one omówione w ramach prezentacji konkretnych algorytmów.

4. ALGORYTMY BLOKOWE

W algorytmach blokowych LS przyjmuje się generalnie, że dostępny jest blok próbek $\{y(0), \dots, y(M-1)\}$ o długości M , oraz że próbki spoza bloku ($T < 0$ i $T \geq M$) są równe zeru. Odpowiada to zastosowaniu do danych okna prostokątnego o długości M . W przetwarzaniu biorą udział jednocześnie wszystkie próbki bloku.

Idea algorytmów blokowych polega na zastąpieniu rozwiązań teoretycznych (2.8) lub (2.26) odpowiednimi estymatorami wynikającymi z kryterium (3.1) lub (3.2), przy czym ich postać zależy od przyjętych granic sumowania we wzorach (3.1) i (3.2). Przyjmując, że rząd filtru jest równy $N \leq M-1$, wyróżnia się cztery różne kryteria LS optymalizacji filtru

$$\min \sum_{T=0}^{M+N-1} e_f^2(T|N) \text{ — kryterium autokorelacyjne,} \quad (4.1)$$

$$\min \sum_{T=N}^{M-1} e_f^2(T|N) \text{ — kryterium kowariancyjne,} \quad (4.2)$$

$$\min \sum_{T=0}^{M-1} e_f^2(T|N) \text{ — kryterium z oknem początkowym,} \quad (4.3)$$

$$\min \sum_{T=N}^{M+N-1} e_f^2(T|N) \text{ — kryterium z oknem końcowym.} \quad (4.4)$$

W przypadku algorytmów *forward-backward* kryteria optymalizacji mają postać (3.2), przy czym granice sumy są ustalane jak w jednym z podanych wyżej wariantów.

Z powyższych kryteriów wynikają nie tylko rozwiązania optymalne dla filtrów transwersalnych i kratowych, lecz także sposób estymacji macierzy autokorelacyjnej R i wektora współczynników autokorelacyjnych r w równaniu (2.8) oraz wielkości oczekiwanych występujących w równaniu (2.26). Aby to wykazać, wystarczy przeanalizować najbardziej ogólny przypadek kryterium autokorelacyjnego, w którym zakres sumowania jest najszerszy.

4.1. ALGORYTMY TRANSVERSALNE

Jako pierwsze rozważymy transwersalne algorytmy blokowe LS, przy założeniu, że w kryterium optymalizacji uwzględnione są tylko błędy predykcji w przód.

Założmy, że rząd filtru jest równy N i rozważmy ciąg błędów predykcji w przód (2.16) obliczonych dla chwil $T = 0, \dots, M+N-1$

$$e_f(T|N) = y(T) - \sum_{j=1}^N f_j(N) y(T-j). \quad (4.5)$$

Współczynniki $f_j(N)$, $j = 1, \dots, N$, występujące w równaniu (4.5) należy wyznaczyć tak, aby miara błędu (4.1) osiągała minimum. W wyniku obliczeń otrzymujemy układ równań

$$\sum_{j=1}^N f_j(N) \sum_{T=0}^{M+N-1} y(T-j) y(T-k) = \sum_{T=0}^{M+N-1} y(T) y(T-k), \quad k = 1, \dots, N, \quad (4.6)$$

który można zapisać w postaci macierzowej

$$(Y_1^T Y_1) f(N) = Y_1^T y_1 \quad (4.7)$$

gdzie

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y(0) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & y(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & y(0) \\ y(M-1) & y(M-1) & \cdots & y(M-1) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y(M-1) \end{bmatrix}_{(M+N, N)} \quad (4.8)$$

$$f(N) = [f_1(N), \dots, f_N(N)]_{(1, N)}^T, \quad (4.9)$$

$$y_1 = [y(0), \dots, y(M-1), 0, \dots, 0]_{(1, M+N)}^T. \quad (4.10)$$

Rozwiązanie

$$f(N) = (Y_1^T Y_1)^{-1} Y_1 y_1 \quad (4.11)$$

równania macierzowego (4.7) jest równokształtne z rozwiązaniem (2.8). Można zatem uznać, że estymatorem macierzy autokorelacyjnej R jest macierz $\hat{R}_1 = Y_1^T Y_1$, zaś estymatorem wektora współczynników autokorelacyjnych r — wektor $\hat{r}_1 = Y_1^T y_1$.⁷⁾

Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla pozostałych trzech kryteriów optymalizacji (4.2), (4.3) i (4.4). We wszystkich czterech przypadkach rozwiązanie można zapisać w jednolitej postaci

$$f(N) = (Y_i^T Y_i)^{-1} Y_i^T y_i = \hat{R}_i^{-1} \hat{r}_i \quad (4.12)$$

gdzie indeks $i = 1, 2, 3, 4$ specyfikuje konkretny przypadek.

Macierze Y_i i wektory y_i są zdefiniowane następująco:

$$Y_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ y(0) & 0 & 0 & 0 \\ y(1) & y(0) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y(N-1) & \dots & y(0) & 0 \\ y(N) & \dots & y(1) & y(0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y(M-1) & \dots & y(M-N-1) & y(M-N) \\ 0 & y(M-1) & y(M-N) & y(M-1) \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & y(M-1) & y(M-1) \end{bmatrix}$$

$$y_i^T = [y(0), y(1), \dots, y(N-1), y(N), \dots, y(M-2), y(M-1), 0, \dots, 0]$$

Diagram illustrating the structure of the matrices Y_i and vectors y_i for $i = 1, 2, 3, 4$. The matrix Y_i is shown as a block matrix with four columns. The first column contains $y(0), y(1), \dots, y(N-1), y(N), \dots, y(M-1), 0, \dots, 0$. The second column contains $0, y(0), \dots, y(N-1), y(N), \dots, y(M-1), 0, \dots, 0$. The third column contains $0, 0, \dots, 0, y(0), y(1), \dots, y(M-N-1), y(M-N), \dots, y(M-1)$. The fourth column contains $0, 0, \dots, 0, y(0), y(1), \dots, y(M-N-1), y(M-N), \dots, y(M-1)$. The vectors y_i are shown as horizontal bars below the matrix, indicating their corresponding rows. y_1 is the longest, followed by y_2, y_3, y_4 .

Jeżeli wybierzemy $i = 1$, otrzymamy omówiony wyżej przypadek autokorelacyjny. Dla $i = 2, 3, 4$ otrzymamy odpowiednio algorytmy: kowariancyjny, z oknem początkowym i z oknem końcowym.

⁷⁾ Dokładniej rzecz biorąc, estymatorem macierzy R jest macierz $\hat{R} = \frac{1}{M} Y_1^T Y_1$ a wektora r — wektor

$\hat{r} = \frac{1}{M} Y_1^T y_1$. Czynn timer $1/M$ redukuje się w równaniu (4.11).

Najbardziej naturalnym estymatorem macierzy R wydaje się być estymator kowariancyjny $\hat{R}_2 = Y_2^T Y_2$. W tym przypadku macierz Y_2 ma wszystkie elementy niezerowe, a błędy $e_j(T|N)$ uwzględnione w sumie (4.2) są błędami estymacji próbek należących do okna danych za pomocą kombinacji liniowych próbek, z których wszystkie również należą do okna danych. W przypadku estymatora autokorelacyjnego macierz Y_1 zawiera elementy zerowe, a ponadto w sumie (4.1) uwzględnia się błędy estymacji próbek (pierwsze N błędów) kombinacjami liniowymi próbek, z których część leży poza oknem, a także, w sposób nieco sztuczny, błędy estymacji zerowych próbek spoza okna danych (ostatnich N błędów) — kombinacjami liniowymi próbek należących do okna danych. Podobna sytuacja ma miejsce dla dwóch pozostałych sposobów estymacji macierzy R .

Zawężenie granic sumowania w kryterium kowariancyjnym eliminuje efekty krańcowe wywołane wpływem niezerowych próbek spoza bloku danych. Dzięki temu, przy wznacaniu modelu AR sygnału algorytm kowariancyjny daje najdokładniejsze rezultaty [16] spośród wszystkich czterech typów algorytmów. Estymator kowariancyjny $\hat{R}_2$ macierzy R nie jest jednakże — jak nietrudno sprawdzić — macierzą Toeplitza. Tym samym rozwiązanie (4.12) nie można uzyskać za pomocą algorytmu Levinsona-Durbina, który umożliwia ominięcie bezpośredniego odwracania macierzy $\hat{R}_2$. Konsekwencją tego jest ponadto fakt, że wyznaczony za pomocą algorytmu kowariancyjnego filtr predykcyjny nie musi być automatycznie minimalno-fazowy.

Te same niedogodności występują w algorytmach z oknem początkowym i z oknem końcowym (macierze $\hat{R}_3$ i $\hat{R}_4$ nie są macierzami Toeplitza). Macierze $\hat{R}_2$, $\hat{R}_3$ i $\hat{R}_4$ charakteryzują się jednak strukturą zbliżoną do toeplitzowskiej. Właściwość tę wykorzystuje się w specjalnych metodach rozwiązywania układu równań typu (4.7) [17, 18], które są wprawdzie bardziej skomplikowane od algorytmu Levinsona-Durbina, ale mają nadal złożoność obliczeniową rzędu $O(N^2)$.

Jedynie dla algorytmów autokorelacyjnych macierz estymująca $\hat{R}_1$ jest macierzą Toeplitza. Jest to następstwem sztucznego rozszerzenia granic sumowania w kryterium (4.1). W tym przypadku filtr predykcyjny jest minimalno-fazowy, a rozwiązanie (4.11) można uzyskać za pomocą algorytmu Levinsona-Durbina. Efekty krańcowe powodują jednak, że dla algorytmu autokorelacyjnego uzyskuje się najmniej dokładną estymację modelu AR sygnału, zwłaszcza dla krótkich bloków danych. W szczególności, jeżeli algorytmy blokowe wykorzystuje się do estymacji widma sygnału, to algorytm autokorelacyjny daje w efekcie widmo o najmniejszej rozdzielczości. W celu zmniejszenia wpływu efektów krańcowych stosuje się niekiedy do danych okno różne od prostokątnego, łagodniej dążące do zera na obu krańcach bloku.

Poprawę dokładności estymacji modelu sygnału uzyskuje się także stosując kryterium *forward-backward*. W algorytmach blokowych wyznaczania filtrów transwersalnych *forward-backward*, tj. optymalnych z punktu widzenia kryterium (3.2), zakłada się, że współczynniki predykcyjne w przód $f_j(N)$ są zwierciadlanym odbiciem współczynników predykcyjnych wstecz — por. wzór (2.19). Zależność ta jest konsekwencją właściwości toeplitzowskiej macierzy autokorelacyjnej, a więc w rzeczywistości będzie spełniona jedynie dla algorytmu autokorelacyjnego *forward-backward*. W pozostałych przypadkach zagadnienie optymalizacji filtru w sensie kryterium (3.2) należy traktować jako optymalizację z ograniczeniami narzuconymi przez równość (2.19).

Jak nietrudno wykazać (szczegóły pomijamy), uogólnienie otrzymanych uprzednio rezultatów na przypadek forward-backward prowadzi, przy przyjętym wyżej założeniu, do rozwiązania optymalnego o postaci

$$f(N) = (Y_{fi}^T Y_{fi} + Y_{bi}^T Y_{bi})^{-1} (Y_{fi}^T y_{fi} + Y_{bi}^T y_{bi}), \quad (4.13)$$

gdzie indeks $i = 1, 2, 3, 4$ określa rodzaj kryterium, wektor $y_{fi} = y_i$ oraz macierz $Y_{fi} = Y_i$ są zdefiniowane jak we wzorze (4.12), natomiast wektor y_{bi} oraz macierz Y_{bi} są zdefiniowane następująco

$$y_{bi} = [0, \dots, 0, y(0), y(1), \dots, y(M-N-1), y(M-N), \dots, y(M-1)]$$

The diagram illustrates the structure of the matrix Y_{bi} and the vectors y_{b2} , y_{b3} , y_{b4} , and y_{b1} . The matrix Y_{bi} is shown as a block matrix with two columns. The first column contains elements $0, \dots, 0, y(0), y(1), \dots, y(M-N), \dots, y(M-1), 0$. The second column contains elements $0, \dots, 0, y(0), y(1), y(2), \dots, y(M-1), 0, 0$. The vectors y_{b2} , y_{b3} , y_{b4} , and y_{b1} are shown as horizontal bars above the matrix, indicating their corresponding rows. The vectors y_{b2} , y_{b3} , and y_{b4} are shown as vertical bars to the right of the matrix, indicating their corresponding columns. The vector y_{b1} is shown as a vertical bar to the right of the matrix, indicating its corresponding column.

Jedynie dla $i = 1$ (kryterium autokorelacyjne) macierz $Y_{fi}^T Y_{fi} + Y_{bi}^T Y_{bi}$ jest macierzą Toeplitza. W pozostałych przypadkach efektywne uzyskanie rozwiązania (4.13) napotyka na podobne trudności jak w przypadku algorytmów typu *forward*.

Najdokładniejszy model sygnału, a przede wszystkim najlepszy estymator widma, daje blokowy algorytm transwersalny *forward-backward* z kryterium kowariancyjnym (brak wpływu efektów krańcowych). Algorytm ten został zaproponowany w pracach [19, 20] jako uogólnienie algorytmu tego samego typu, ale wcześniejszego chronologicznie i zarazem jednego z pierwszych algorytmów klasy LS, a mianowicie algorytmu Burga⁵⁾. Ze względu na to, że dla kryterium kowariancyjnego macierz $Y_{f2}^T Y_{f2} + Y_{b2}^T Y_{b2}$ nie jest macierzą Toeplitza, uzyskanie efektywnego rozwiązania jest bardziej pracochłonne.

⁵⁾ Algorytm ten omówimy przy prezentacji algorytmów kratowych.

Macierz ta może być jednakże zdekomponowana w odpowiedni sposób na sumę macierzy Toeplitza i Hankela. Korzystając z tej dekompozycji Marple [21] opracował algorytm o złożoności obliczeniowej rzędu $O(N^2)$, niewiele bardziej skomplikowany niż algorytm Levinsona-Durбина stosowany w przypadku macierzy toeplitzowskiej.

4.2. ALGORYTMY KRATOWE

Podobnie jak dla algorytmów transversalnych, tak i dla blokowych algorytmów kratowych, sposób estymacji parametrów filtru wynika wprost z przyjętego kryterium optymalizacji.

Podstawiając do jednego z kryteriów typu *forward* (4.1)–(4.4) zależność rekursywną (2.22) i minimalizując sumę względem k_n otrzymuje się następujące estymatory współczynników odbicia:

$$k_n = \frac{\sum_T [e_f(T|n-1)e_b(T-1|n-1)]}{\sum_T e_b^2(T-1|n-1)}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (4.14)$$

Zakres sumowania zależy od przyjętego rodzaju kryterium. Ze względu na to, że współczynniki odbicia są wyznaczone dla kolejnych rzędów filtru $n = 1, \dots, N$, zakres sumowania będzie w tym przypadku zmienny i zależny od n . Jedynie dla kryterium z oknem początkowym granice sumy we wzorze (4.14) są stałe. Dla poszczególnych typów algorytmu sumowanie przebiega w następujących granicach:

- algorytm autokorelacyjny: od $T = 0$ do $T = M+n-1$,
- algorytm kowariancyjny: od $T = n$ do $T = M-1$,
- algorytm z oknem początkowym: od $T = 0$ do $T = M-1$,
- algorytm z oknem końcowym: od $T = n$ do $T = M+n-1$.

Niekiedy jako kryterium optymalizacji filtru kratowego przyjmuje się kryterium LS dla błędów predykcji wstecz (kryterium *backward*):

$$\min \sum_T e_b^2(T|N), \quad (4.15)$$

gdzie wybór granic sumowania determinuje typ algorytmu.

W tym przypadku otrzymujemy następujące estymatory współczynników odbicia

$$k_n = \frac{\sum_T [e_f(T|n-1)e_b(T-1|n-1)]}{\sum_T e_f^2(T|n-1)}, \quad n = 1, \dots, N \quad (4.16)$$

Podkreślmy, że jedynie dla algorytmu autokorelacyjnego oba estymatory (4.14) i (4.16) przyjmują te same wartości. Z tego względu współczynniki k_n określone wzorami (4.14) i (4.16) są dla pozostałych trzech typów algorytmów nazywane niekiedy współczynnikami odbicia odpowiednio w przód i wstecz oraz oznaczane k_n^f i k_n^b . Rozróżnienie to nie jest wymagane dla algorytmu autokorelacyjnego, podobnie jak nie było wymagane w przypadku teoretycznym przy kryterium średniokwadratowym MMSE, jeśli tylko modelowany sygnał jest rzeczywistym sygnałem stacjonarnym. W przypadku sygnału zespolonego dla obu tych kryteriów zachodzi zależność $k_n^f = (k_n^b)^*$.

Ponadto, jedynie dla algorytmu autokorelacyjnego estymatory (4.16) spełniają warunki $|k_n| \leq 1$, której w przypadku gdy sygnał nie jest sumą sinusoid zapewniają, że otrzymane filtry są minimalno-fazowe. Gwarancji takiej nie mamy, jeżeli przy kryterium typu *forward* lub typu *backward* zastosowany jest jeden z trzech pozostałych rodzajów algorytmów.

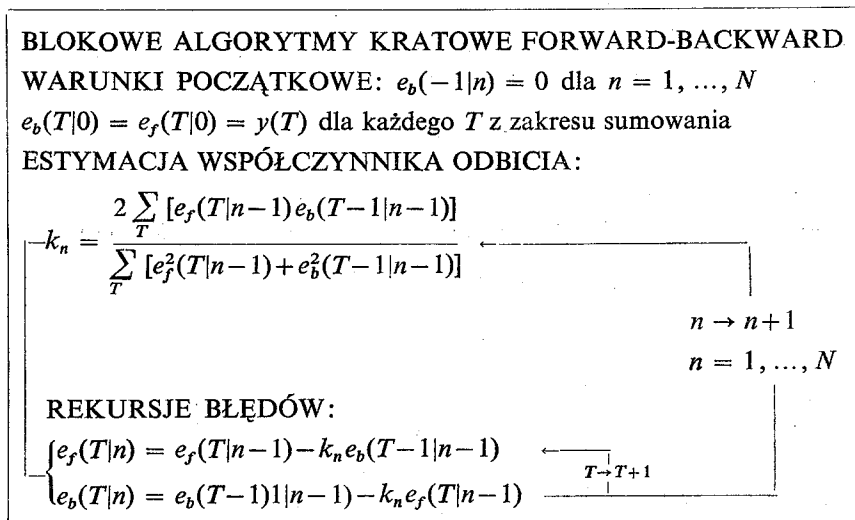
Szczególne właściwości algorytmu autokorelacyjnego są następstwem właściwości toeplitzowskiej estymatora $\hat{R}_1$ macierzy autokorelacyjnej i świadczą o wyraźnych podobieństwach między zagadnieniami wyznaczania filtru optymalnego przy przyjęciu kryteriów MMSE oraz autokorelacyjnego LS. W istocie rzeczy związek między tymi zagadnieniami jest bardzo ścisły. W ujęciu geometrycznym teorii filtrów predykcyjnych dowodzi się, że zagadnienia te są izomorficzne [15].

W celu poprawy dokładności estymacji modelu sygnału, w blokowych algorytmach kratowych stosuje się bardzo często kryterium *forward-backward* (3.2). Dla wszystkich wariantów tego kryterium przyjmuje się $k_n^f = k_n^b = k_n$. Podstawiając przy tym założeniu zależności rekursywne (2.22) i (2.23) do wzoru (3.2) i przyrównując pochodne miar błędów (obliczone względem współczynników k_n) do zera, otrzymujemy

$$k_n = \frac{2 \sum_T [e_f(T|n-1)e_b(T-1|n-1)]}{\sum_T [e_f^2(T|n-1) + e_b^2(T-1|n-1)]}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (4.17)$$

Zwróćmy uwagę, że dla każdego z czterech wariantów kryterium *forward-backward* spełnione są warunki $|k_n| \leq 1$. Zaletą tą przesądza dodatkowo o częstym stosowaniu kryteriów *forward-backward* w blokowych algorytmach kratowych.

Schemat tych algorytmów ma następującą postać:



Z warunków początkowych obliczamy współczynnik k_1 . Współczynnik ten podstawiamy do rekursji na błędy predykcji w przód i wstecz i obliczamy wartości $e_f(T|1)$ i $e_b(T|1)$

dla każdego T z zakresu sumowania w przyjętym kryterium. Na podstawie tych wartości obliczamy współczynnik k_2 itd. Podkreślimy, że algorytmy tej klasy są algorytmami rekursywnymi po rzędzie i nie wymagają, w przeciwieństwie do blokowych algorytmów transwersalnych, rozwiązywania układu równań typu (4.7). Są to zatem algorytmy prostsze obliczeniowo.

Po raz pierwszy kryterium *forward-backward* w algorytmach blokowych zastosował Burg [22]. Algorytm Burga, bardzo popularny i często stosowany w praktyce, jest blokowym algorytmem transwersalnym typu kowariancyjnego, w którym wykorzystany jest kowariancyjny blokowy algorytm kratowy. W celu obliczenia współczynników predykcyjnych $f_j(B)$ Burg przyjął, że spełniona jest druga rekursja Levinsona-Durbina dla każdego $n = 1, \dots, N$. Wyznaczony za pomocą algorytmu Burga filtr transwersalny jest więc filtrem optymalnym w sensie kowariancyjnego kryterium LS *forward-backward* przy ograniczeniu, że spełniona jest druga rekursja Lewinsona-Durbina. Przyjęte ograniczenie zapewnia, że otrzymany filtr jest minimalnofazowy. Pełny algorytm Burga, w którym dodatkowo uwzględniona jest trzecia rekursja Levinsona-Durbina na miarę błędu ma następującą postać:

ALGORYTM BURGA

WARUNKI POCZĄTKOWE: $e_b(-1|n) = 0, n = 1, \dots, N$

$$e_f(T|0) = e_b(T|0) = y(T), T = 0, \dots, M-1, \varepsilon(0) = 2 \sum_{T=0}^{M-1} y^2(T)$$

ESTYMACJA WSPÓŁCZYNNIKA ODBICIA:

$$-k_n = \frac{2 \sum_{T=n}^{M-1} e_f(T|n-1)e_b(T-1|n-1)}{\sum_{T=n}^{M-1} [e_f^2(T|n-1) + e_b^2(T-1|n-1)]}$$

REKURSJE LEVINSONA-DURBINA:

$$\rightarrow f_j(n) = f_j(n-1) - k_n f_{n-j}(n-1), \quad j = 1, \dots, n-1 \quad \begin{matrix} n \rightarrow n+1 \\ n = 1, \dots, N \end{matrix}$$

$$\rightarrow \varepsilon(n) = (1 - k_n^2) \varepsilon(n-1)$$

REKURSJE BŁĘDÓW ($T = n, \dots, M-1$):

$$\begin{cases} e_f(T|n) = e_f(T|n-1) - k_n e_b(T-1|n-1) \\ e_b(T|n) = e_b(T-1|n-1) - k_n e_f(T|n-1) \end{cases}$$

ZŁOŻONOŚĆ OBLICZENIOWA:

$N(3M-N) - M + 4N$ mnożeń, $N(3M-N) - 2M - N$ dodawań

Algorytm Burga wymaga ponadto pamiętania $3M+N+2$ liczb. Przy obliczeniu złożoności algorytmu dzielenie potraktowano jako mnożenie. Możliwa jest także modyfikacja

algorytmu zaproponowana przez Andersona [23], polegająca na rekursywnym obliczaniu mianownika estymatora k_n :

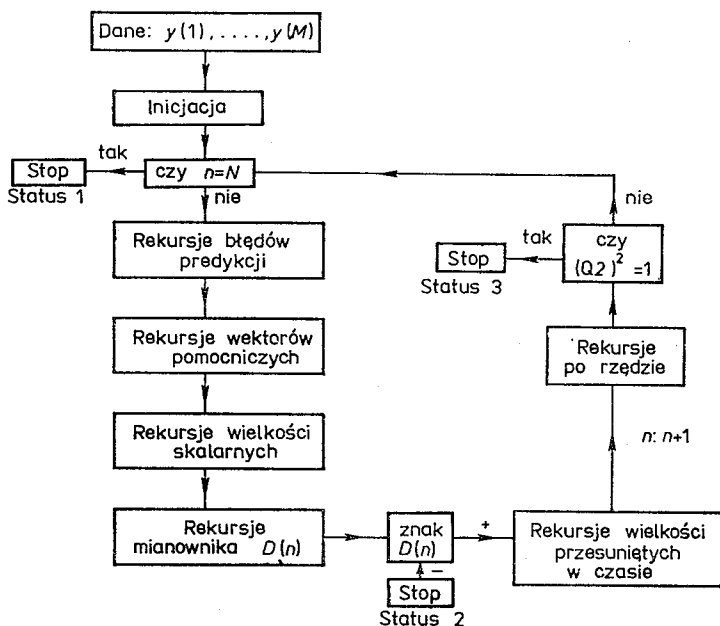
$$M(n) = (1 - k_{n-1}^2)M(n-1) - e_f^2(n|n-1) - e_b^2(M-n|n-1). \quad (4.18)$$

Trzecią rekursję Levinsona-Durbina obliczamy tylko wtedy, gdy zachodzi potrzeba śledzenia miary błędu predykcji.

Należy podkreślić, że w algorytmie Burga optymalizacja sprowadza się do doboru tylko ostatnich współczynników $k_n = f_n(n)$, natomiast pozostałe współczynniki $f_j(n)$, $j = 1, \dots, n-1$ są wyznaczone z rekursji Levinsona-Durbina. Ograniczenia te ominął Marple [21] i zaproponował algorytm, wynikający z faktu, że macierz $Y_{f2}^t Y_{f2} + Y_{b2}^t Y_{b2}$ jest sumą macierzy Toeplitza i Hankela, który umożliwia optymalizację filtra transwersalnego ze względu na dobór wszystkich współczynników predykcyjnych. W rezultacie algorytm Marple'a ma wyraźną przewagę nad algorytmem Burga z punktu widzenia dokładności wyznaczonego modelu. Jest on szczególnie korzystny w zastosowaniu do estymacji widma sygnału (mniejsze obciążenie i mniejsza wariancja estymatora widma; niewystępowanie charakterystycznego dla algorytmu Burga zjawiska, polegającego na rozszczepianiu prążków widmowych). Algorytm Burga jest natomiast nieco prostszy pod względem obliczeniowym i w odróżnieniu od algorytmu Marple'a, gwarantuje minimalnofazowość filtra.

Algorytm Marple'a ma następującą postać (wyprowadzenie i znaczenie poszczególnych zależności jest przedstawione w pracy [21]):

ALGORYTM MARPLE'A



INICJACJA

$$\varepsilon(0) = 2 \sum_{k=1}^M y^2(k)$$

$$Q1 = 1/\varepsilon(0)$$

$$Q2 = Q1y(1)$$

$$g(0) = Q1y^2(1)$$

$$u(0) = w(0) = Q1y^2(M)$$

$$D(0) = 1 - g(0) - w(0)$$

$$e_f(1, 0) = y(1)$$

$$e_b(M, 0) = y(M)$$

$$s(0) = h(0) = Q2y(M)$$

$$v(0) = Q2y(1)$$

$$Q4 = 1/D(0)$$

$$Q5 = 1 - g(0)$$

$$Q6 = 1 - w(0)$$

$$\varepsilon'(0) = \varepsilon(0)D(0)$$

$$Q1 = 1/\varepsilon'(0)$$

$$c'(0, 0) = Q1y(1)$$

$$d'(0, 0) = Q1y(M)$$

$$n = 1$$

$$R(0, 1) = 2 \sum_{k=1}^{M-1} y(k+1)y(k)$$

$$a(1, 1) = -R(0, 1)Q1$$

$$\varepsilon(1) = \varepsilon'(0)[1 - a^2(1, 1)]$$

REKURSJE BŁĘDÓW PREDYKCJI

$$e_f(1, n) = y(n+1) + \sum_{k=1}^n a(k, n)y(n-k+1)$$

$$e_b(M-n, n) = y(M-n) + \sum_{k=1}^n a(k, n)y(M-n+k)$$

REKURSJE WEKTORÓW POMOCNICZYCH

$$Q1 = 1/\varepsilon(n)$$

$$\text{Dla } k = 1, \dots, n$$

$$Q2 = Q1e_f(1, n)$$

$$c(k, n) = c'(k-1, n-1) + Q2a(k, n)$$

$$Q3 = Q1e_b(M-n, n)$$

$$d(k, n) = d'(k-1, n-1) + Q3a(k, n)$$

$$c(0, n) = Q2$$

$$d(0, n) = Q3$$

REKURSJE WIELKOŚCI SKALARNYCH

$$Q7 = s^2(n-1)$$

$$g(n) = g(n-1) + e_f^2(1, n)Q1 + Q4[v^2(n-1)Q6 + Q5Q7 + 2v(n-1)h(n-1)s(n-1)]$$

$$w(n) = w(n-1) + e_b^2(M-n, n)Q1 + Q4[u^2(n-1)Q5 + Q6Q7 + 2u(n-1)h(n-1)s(n-1)]$$

$$h(n) = \sum_{k=0}^n c(k, n)y(M-n+k) \quad u(n) = \sum_{k=0}^n d(k, n)y(M-k)$$

$$s(n) = \sum_{k=0}^n c(k, n)y(M-k) \quad v(n) = \sum_{k=0}^n c(k, n)y(k+1)$$

REKURSJE MIANOWNIKA

$$Q5 = 1 - g(n) \quad Q6 = 1 - w(n) \quad D(n) = Q5Q6 - h^2(n)$$

REKURSJE WIELKOŚCI PRZESUNIĘTYCH W CZASIE

$$Q4 = 1/D(n) \quad Q1 = Q1Q4$$

$$\alpha(n) = \{1 + [e_f^2(1, n)Q6 + e_b^2(M-n, n)Q5 + 2h(n)e_f(1, n)e_b(M-n, n)]Q1\}^{-1}$$

Dla $k = 1, \dots, n$

$$a'(k, n) = \alpha(n) \{a(k, n) + Q4[e_f(1, n)Q6 + e_b(M-n, n)h(n)]c(k, n) + \\ + Q4[e_b(M-n, n)Q5 + e_f(1, n)h(n)]d(k, n)\}$$

Dla $k = 0, \dots, n$

$$c'(k, n) = c(k, n) + Q4[v(n)Q6 + h(n)s(n)]c(n-k, k) + \\ + Q4[s(n)Q5 + v(n)h(n)]d(n-k, k)$$

$$d'(k, n) = d(k, n) + Q4[s(n)Q6 + h(n)u(n)]c(n-k, k) + \\ + Q4[v(n)Q5 + s(n)h(n)]d(n-k, k)$$

REKURSJE PO RZĘDZIE

Dla $k = 1, \dots, n-1$

$$R(k, n) = R(k-1, n-1) - y(M-k+1)y(M-n+1) - y(n)y(k)$$

$$R(0, n) = 2 \sum_{k=1}^{M-n} y(k+n)y(k)$$

$$\Delta(n) = R(0, n) + \sum_{k=1}^{n-1} R(k, n)a'(k, n-1)$$

$$Q2 = -\Delta(n)/\varepsilon'(n-1) \quad a(n, n) = Q2$$

Dla $k = 1, \dots, n-1$

$$a(k, n) = a'(k, n-1) + Q2a'(n-k, n-1)$$

$$\varepsilon(n) = \varepsilon'(n-1) [1 - a^2(n, n)]$$

Algorytmy blokowe LS znajdują m.in. zastosowanie w przetwarzaniu sygnałów mowy [13, 35], a więc sygnałów o szybko zmieniających się charakterystykach. W takim przypadku problemy związane z niestacjonarnością sygnału rozwiązuje się dzieląc zbiór próbek na podbloki, w ramach których sygnał uważa się w przybliżeniu za stacjonarny. Dla kolejnych podbloków oblicza się kolejne optymalne filtry. Tego typu przetwarzanie informacji o sygnale ma charakter adaptacyjny.

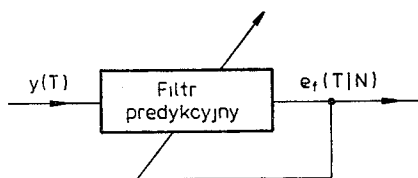
W algorytmach blokowych stosuje się najczęściej kryteria autokorelacyjne i kowariancyjne *forward-backward*. Krytycznymi problemami dla tej klasy algorytmów jest ich stosunkowo duża złożoność obliczeniowa oraz problem stabilności filtru. Wprowadzie niektóre z omawianych algorytmów blokowych gwarantują otrzymanie stabilnego filtru modelu-

jącego, nie można jednak zapominać, że wnioski dotyczące stabilności były sformułowane przy milczącym założeniu, że obliczenia są przeprowadzane z nieskończoną dokładnością. Należy podkreślić, że algorytmy blokowe są bardzo wrażliwe na błędy zaokrąglania i w przypadku niedostatecznej dokładności obliczeń prowadzą często do filtrów niestabilnych. Ogólnie rzecz biorąc, algorytmy blokowe nie wykazują najlepszych właściwości numerycznych i tylko przy dużej dokładności obliczeń otrzymuje się sensowne estymatory parametrów modelu AR sygnału.

5. ALGORYTMY GRADIENTOWE

Algorytmy gradientowe należą do klasy algorytmów rekursywnych LMS, tzn. algorytmów, w których zastosowano kryterium (3.3) lub (3.4). Współczynniki filtru są w tych algorytmach iterowane dla każdej kolejnej chwili — w zależności od przeszłej informacji o sygnale i od bieżącej próbki. Algorytmy gradientowe mają zatem charakter adaptacyjny.

Wspólną cechą wszystkich algorytmów adaptacyjnych jest wykorzystanie w procesie adaptacji sygnału wyjściowego filtru predykcyjnego, tj. sygnału błędu $e_f(T|N)$, do sterowania zmianami współczynników filtru (rys. 4). Struktura filtru może być zarówno trans-



Rys. 4. Adaptacyjny filtr predykcyjny

wersalna jak i kratowa. Atrakcyjność algorytmów gradientowych wynika m.in. stąd, że ich złożoność obliczeniowa przypadająca na jedną iterację jest rzędu $O(N)$.

5.1. TRANSVERSALNE ALGORYTMY GRADIENTOWE

Koncepcję algorytmów tej klasy wyjaśnimy na przykładzie transversalnego algorytmu gradientowego, optymalnego w sensie kryterium MMSE.

Rozumowanie jest typowe dla wszystkich metod gradientowych. Przyjmuje się, że wektor współczynników $f(T+1|N)$ filtru predykcyjnego rzędu N , obliczony w chwili $T+1$, jest równy wektorowi

$$f(T|N) = [f_1(T|N), \dots, f_N(T|N)]^T \quad (5.1)$$

w chwili T , pomniejszonemu o wektor proporcjonalny do gradientu błędu średniokwadratowego predykcji, tzn. o wektor skierowany w kierunku największego wzrostu błędu. Tak więc

$$f(T+1|N) = f(T|N) - \frac{\beta}{2} \nabla_{f(T|N)} \{E[e_f^2(T|N)]\}, \quad (5.2)$$

gdzie

$$e_f(T|N) = y(T) - f'(T|N)y(T-1) \quad (5.3)$$

jest błędem predykcji w przód,

$$y(T) = [y(T), \dots, y(T-N+1)]^T \quad (5.4)$$

est wektorem danych, a β jest odpowiednio dobraną stałą. Ponieważ dla $j = 1, \dots, N$ mamy

$$\frac{\partial}{\partial f_j(T|N)} E[e_f^2(T|N)] = 2E \left[e_f(T|N) \frac{\partial}{\partial f_j(T|N)} e_f(T|N) \right] = -2E[e_f(T|N)y(T-j)],$$

zatem wzór (5.2) możemy zapisać w postaci

$$f(T+1|N) = f(T|N) + \beta E[e_f(T|N)y(T-1)]. \quad (5.5)$$

lub — korzystając ze związku (5.3) — w formie macierzowej

$$f(T+1|N) = (I - \beta R)f(T|N) + \beta r, \quad (5.6)$$

gdzie I jest macierzą jednostkową rzędu N . Macierz korelacyjna R sygnału $\{y(T)\}$ i wektor r są identyczne jak we wzorze (2.8) dla $p = N$.

Algorytm gradientowy, opisany wzorem (5.6) ma charakter konstruktywny jedynie wówczas, gdy znanych jest N pierwszych wartości $R_p(k)$, $k = 0, \dots, N-1$, funkcji auto-korelacji sygnału $\{y(T)\}$. Ponieważ wielkości te nie są w praktyce znane, to wartość oczekiwaną $E[e_f(T|N)y(T-1)]$ występującą w zależności (5.5) zastępuje się jej estymatorem. W algorytmie gradientowym LMS estymatorem tym jest po prostu wielkość $e_f(T|N)y(T-1)$, która — jak nietrudno prześledzić — wynika z zastąpienia gradientu występującego we wzorze (5.2) estymatorem $\nabla_{f(T|N)}[e_f^2(T|N)]$. Estymator ten jest oczywiście wielkością stochastyczną i z tego względu omawiany algorytm jest niekiedy nazywany w literaturze algorytmem gradientu stochastycznego (SG). Minimalizacji podlega wówczas nie błąd średniokwadratowy $E[e_f^2(T|N)]$, lecz kwadrat błędu $e_f^2(T|N)$ dla $T = 1, 2, \dots$ (por. kryterium (3.3)).

Przy przyjętych założeniach transwersalny algorytm gradientowy, zwany również algorytmem Widrowa-Hoffa [24], ma następującą postać

TRANSWERSALNY ALGORYTM GRADIENTOWY WIDROWA-HOFFA

WARUNKI POCZĄTKOWE: $e_f(0|N) = y(0)$, $f(0|N) = f(1|N) = 0$,

$$e_f(1|N) = y(1)$$

REKURSJE: dla $T = 1, 2, \dots$

$$e_f(T|N) = y(T) - f'(T|N)y(T-1)$$

$$f(T+1|N) = f(T|N) + \beta e_f(T|N)y(T-1)$$

STAŁA ALGORYTHU: β

ZŁOŻONOŚĆ OBLICZENIOWA: $2N+1$ mnożeń, $2N$ dodawań

Należy podkreślić, że w adaptacyjnych algorytmach gradientowych trajektoria, po której porusza się wektor $f(T|N)$ jest stochastyczna i nawet po zbliżeniu się do rozwiązania optymalnego fluktuuje wokół niego z pewną niezerową wariancją. Algorytmy adaptacyjne nie prowadzą zatem do rozwiązania optymalnego (w sensie kryterium MMSE), a jedynie do rozwiązania przybliżonego.

Istotną cechą algorytmu gradientowego, decydującą m.in. o jego jakości, jest szybkość zbieżności. Pojęcie zbieżności algorytmu należy tu rozumieć jako zbieżność oczekiwanej trajektorii do rozwiązania optymalnego. Nie oznacza to, że do rozwiązania optymalnego są zbieżne poszczególne realizacje trajektorii.

O zbieżności transwersalnego algorytmu gradientowego decyduje wybór stałej β . Można wykazać [25], że dla zapewnienia zbieżności tego algorytmu musi ona spełniać warunek

$$0 < \beta < \frac{2}{\lambda_{\max}}, \quad (5.7)$$

gdzie $\lambda_{\max}$ jest największą wartością własną macierzy autokorelacyjnej R sygnału. Wybór większych wartości β z tego przedziału zapewnia szybszą zbieżność w początkowym okresie adaptacji. Jest jednak regułą, że dla większych wartości β obserwuje się dużą wariancję fluktuacji wektora $f(T|N)$ w stanie ustalonym wokół wektora optymalnego. Wartość stałej β wybiera się zatem wyraźnie mniejszą od $2/\lambda_{\max}$, ale większą od pewnego progu, zapewniającego wymaganą szybkość zbieżności. Jako wartość tego progu przyjmuje się zwykle $2/\lambda_{\min}$, gdzie $\lambda_{\min}$ jest najmniejszą wartością własną macierzy R .

Problem wymiennosci między szybkością zbieżności a dokładnością estymacji modelu (mierzoną wariancją fluktuacji wektora $f(T|N)$) jest charakterystyczny dla wszystkich adaptacyjnych algorytmów predykcyjnych [26]. Szybkość adaptacji i dokładność estymacji modelu sygnału można zwiększyć, stosując w algorytmie Widrowa-Hoffa tzw. zmienny krok $\beta(T)$, tzn. uzależniając stałą β od momentu iteracji. Jeśli zmienny krok $\beta(T)$ spełnia warunki

$$\sum_{T=0}^{\infty} \beta(T) = \infty, \quad \sum_{T=0}^{\infty} \beta^2(T) < \infty, \quad (5.8)$$

to dla sygnału stacjonarnego zapewniona jest zbieżność (w sensie średniokwadratowym) do rozwiązania optymalnego [25]. Najbardziej znanym algorytmem o zmiennym kroku spełniającym podane warunki jest algorytm Robbinsa-Monro [27], zwany także algorytmem stochastycznej aproksymacji (SA).

Należy podkreślić, że dla sygnału niestacjonarnego o wolno zmieniających się charakterystykach spełnienie warunków (5.8) nie zapewnia zbieżności (w jakimkolwiek sensie). Dla tego typu sygnałów algorytm stochastycznej aproksymacji traci sens, gdyż nie jest w stanie śledzić zmian charakterystyk sygnału.

ALGORYTM STOCHASTYCZNEJ APROKSYMACJI ROBBINSA-MONRO

WARUNKI POCZĄTKOWE: $e_f(0|N) = y(0)$, $f(0|N) = f(1|N) = 0$,

$$e_f(1|N) = y(1)$$

REKURSJE:

$$e_f(T|N) = y(T) - f^t(T|N)y(T-1)$$

$$f(T+1|N) = f(T|N) + \beta(T)e_f(T|N)y(T-1)$$

$$\beta(T) = \frac{\beta}{T}$$

STAŁA ALGORYTMU: β ZŁOŻONOŚĆ OBLICZENIOWA: $2N+2$ mnożeń, $2N$ dodawań

Dla sygnałów stacjonarnych można w ogólnym przypadku stosować tzw. technikę „gear shift” ustalania zmienności kroku. Polega ona na wyborze stosunkowo dużej wartości stałej β w początkowej fazie algorytmu (zapewniającej odpowiednio szybką początkową zbieżność), a następnie na zmniejszeniu wartości β w celu uzyskania małych fluktuacji wektora $f(T|N)$.

W transwersalnym algorytmie gradientowym występuje niepożądana zależność szybkości zbieżności od mocy sygnału. Jeżeli rekursję dla wektora współczynników filtru zapiszemy w postaci skalarnej

$$f_j(T+1|N) = f_j(T|N) + \beta e_f(T|N)y(T-j), \quad j = 1, \dots, N, \quad (5.9)$$

to nietrudno zauważyć, że k -krotny wzrost próbki $y(T-j)$ powoduje k^2 -krotny wzrost jednego z wyrazów składnika modyfikującego j -ty współczynnik filtru (błąd $e_f(T|N)$ zależy również od $y(T-j)$). Algorytm jest więc wrażliwy na nagłe zmiany wartości sygnału i może być niestabilny przy dużej dynamice tych zmian. Efekt ten można wyeliminować poprzez uzależnienie zmiennego kroku od estymowanej na bieżąco mocy sygnału. Przykładem może być następujący wybór zmiennego kroku:

$$\beta(T) = \frac{A}{\sigma^2(T) + B}, \quad (5.10)$$

gdzie A i B są odpowiednio dobranymi stałymi, a $\sigma^2(T)$ jest estymatorem mocy sygnału w chwili T . Sensownym nieobciążonym estymatorem mocy sygnału jest wykładniczo ważona średnia czasowa mocy poszczególnych próbek

$$\sigma^2(T) = (1-\alpha) \sum_{k=0}^T \alpha^k y^2(T-k), \quad \alpha \in (0, 1). \quad (5.11)$$

Zaletą tego estymatora jest możliwość obliczania go w sposób rekursywny

$$\sigma^2(T) = \alpha \sigma^2(T-1) + (1-\alpha) y^2(T) \quad (5.12)$$

Stała B we wzorze (5.10) zabezpiecza przed zbyt dużymi wartościami kroku $\beta(T)$, mogącymi spowodować niestabilną pracę algorytmu. Złożoność obliczeniowa znormalizowanego transwersalnego algorytmu gradientowego jest niewiele większa od algorytmu nieznormalizowanego, a jak wynika z badań symulacyjnych [28] — jego stabilność numeryczna jest znacznie lepsza. Z badań przeprowadzonych przez autorów wynika także, że dla prawidłowej pracy algorytmu bardzo istotny jest właściwy dobór stałych A, B i α w zależności od typu modelowanego sygnału.

ZNORMALIZOWANY TRANSVERSALNY ALGORYTM GRADIENTOWY**WARUNKI POCZĄTKOWE:** $e_f(0|N) = y(0)$, $e_f(1|N) = y(1)$,

$$f(0|N) = f(1|N) = 0, \sigma^2(0) = (1-\alpha)y^2(0)$$

REKURSJE: $T = 1, 2, \dots$

$$e_f(T|N) = y(T) - f'(T|N)y(T-1)$$

$$f(T+1|N) = f(T|N) + \beta(T)e_f(T|N)y(T-1)$$

$$\beta(T) = \frac{A}{\sigma^2(T) + B}$$

$$\sigma^2(T) = \alpha\sigma^2(T-1) + (1-\alpha)y^2(T)$$

STAŁE ALGORYTMU: A, B, α **ZŁOŻONOŚĆ OBLICZENIOWA:** $2N+4$ mnożeń, $2N+2$ dodawań

W niektórych zastosowaniach praktycznych, gdy czas obliczeń jest czynnikiem krytycznym a nie jest wymagana duża dokładność, stosuje się tzw. znakowy algorytm gradientowy, w którym druga rekursja algorytmu Widrowa-Hoffa jest zastąpiona rekursją

$$f(T+1|N) = f(T|N) + \beta \operatorname{sgn}[e_f(T|N)]y(T-1). \quad (5.13)$$

Implementacja tego algorytmu jest szczególnie prosta, wymagane jest bowiem mnożenie tylko przez stałe β i $-\beta$. Szybkość zbieżności tego nieliniowego algorytmu maleje tylko w nieznacznym stopniu w porównaniu z algorytmem Widrowa-Hoffa [29]. W algorytmie znakowym można oczywiście stosować zmienny krok.

Podstawową wadą transversalnych algorytmów gradientowych jest ich wolna zbieżność w porównaniu z algorytmami rekursywnymi LS. Dobierając odpowiednio strategię zmienności kroku $\beta(T)$ uzyskuje się wprawdzie zwiększenie szybkości zbieżności, ale poprawa jest nieznaczna. Ostatnio zaproponowany został [30] interesujący transversalny algorytm gradientowy o zmiennych krokach $\beta_j(T)$, $j = 1, \dots, N$, wybieranych niezależnie dla każdego współczynnika predykcyjnego $f_j(T|N)$. Dodatkową zaletą algorytmu jest adaptacyjny dobór kroków $\beta_j(T)$. Koncepcja tego algorytmu polega na zastąpieniu stałej β występującej w klasycznym algorytmie Widrowa-Hoffa macierzą

$$B(T) = \begin{bmatrix} \beta_1(T) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2(T) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \beta_N(T) \end{bmatrix}$$

Otrzymuje się wówczas zależność:

$$f(T+1|N) = f(T|N) + e_f(T|N) B(T) y(T-1). \quad (5.14)$$

Elementy macierzy $B(T)$ wybiera się z przedziału $\beta_{\min} < \beta_j(T) < \beta_{\max}$. Ograniczenie prawostronne zapewnia zbieżność algorytmu, a lewostronne określa najmniejszą dopuszczalną szybkość zbieżności. Dla każdej chwili T wartość $\beta_j(T)$ jest zmniejszana o ustaloną wartość $\Delta\beta$ (poza przypadkiem, gdy $\beta_j(T) = \beta_{\min}$), jeśli tylko składowa gradientu

$\nabla_j[e_f^2(T|N)] = -2e_f(T|N)y(T-j)$ zmienia znak dla każdej z kolejnych l_1 próbek. Jeśli natomiast j -ta składowa gradientu ma ten sam znak dla l_2 kolejnych próbek, to wartość $\beta_j(T)$ jest zwiększana o wartość $\Delta\beta$ (poza przypadkiem, gdy $\beta_j(T) = \beta_{\max}$).

Najbardziej charakterystyczne są cztery przypadki wyboru liczb l_1 i l_2 :

- $l_1 = 1, l_2 = \infty$ — możliwe jest tylko zmniejszanie kroków $\beta_j(T)$, które następuje dla każdej zmiany znaku składowych gradientu $\nabla_j[e_f^2(T|N)]$,
- $l_1 > 1, l_2 = \infty$ — możliwe jest tylko zmniejszanie kroków $\beta_j(T)$ co l_1 kolejnych zmian znaków wartości $\nabla_j[e_f^2(T|N)]$,
- $l_2 > l_1 > 1$ — przeważa tendencja do zmniejszania wartości $\beta_j(T)$; przypadek użyteczny dla sygnałów stacjonarnych,
- $l_1 = l_2 \geq 1$ — tendencje do zmniejszania i zwiększania wartości kroków są jednakowo uprzywilejowane; przypadek użyteczny dla sygnałów niestacjonarnych.

Zazwyczaj przyjmuje się $\beta_j(0) = \beta_{\max}^*$. Z wyników badań symulacyjnych przeprowadzonych w [30] wynika, że transwersalny algorytm gradientowy z niezależną adaptacją składowych wektora kroku charakteryzuje się w niektórych zastosowaniach (np. do odsumowania sygnału) 10-krotnym wzrostem szybkości zbieżności w porównaniu z klasycznym algorytmem gradientowym w przypadku dużego poziomu szumu i aż 50-krotnym — w przypadku małego poziomu szumu.

5.2. KRATOWE ALGORYTMY GRADIENTOWE

Algorytmy gradientowe LMS można również stosować do wyznaczania współczynników filtru kratowego. Sformułowanie problemu jest analogiczne; gradient występujący w równaniu opisującym iteracyjny sposób wyznaczania optymalnych (w sensie MMSE) współczynników odbicia należy zastąpić odpowiednim estymatorem. Pojawia się tu jednak pewna trudność. We wzorze

$$\mathbf{k}(T+1|N) = \mathbf{k}(T|N) - \frac{\beta}{2} \nabla_{\mathbf{k}(T|N)} \{E[e_f^2(T|N)]\}, \quad (5.15)$$

gdzie $\mathbf{k}(T|N) = [k_1(T), \dots, k_N(T)]^T$ jest wektorem współczynników odbicia filtru rzędu N , nie istnieje niestety tak prosta zależność błędu predykcji w przód od współczynników filtru. Jednakże, jeżeli uwzględni się, że dla filtru kratowego współczynniki odbicia wyższych rzędów są niezależne od współczynników odbicia niższych rzędów (jeśli tylko te ostatnie zostały wyznaczone optymalnie), wówczas postawione na wstępie zagadnienie gradientowe można sformułować w postaci

$$k_n(T+1) = k_n(T) - \frac{\beta}{2} \frac{\partial}{\partial k_n(T)} \{E[e_f^2(T|N)]\}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (5.16)$$

Zastępując następnie pochodne błędu średniokwadratowego pochodnymi stochastycznymi kwadratu błędu, otrzymamy zależność opisującą iteracyjny sposób wyznaczania współczynników odbicia. Można przy tym stosować wszystkie trzy wersje kryterium LMS, tj. kryteria *forward*, *backward* oraz *forward-backward*.

Ograniczymy się do omówienia algorytmów gradientowych typu *forward-backward*, ponieważ są one najszybciej zbieżne. Pozostałe typy algorytmów można wyprowadzić w analogiczny sposób.

Podstawiając we wzorze (5.16) w miejsce błędu średniokwadratowego sumę kwadratów błędów predykcji w przód i wstecz, obliczając następnie pochodne tej sumy względem współczynników $k_n(T)$, $n = 1, \dots, N$, i uwzględniając zależności rekursywne (2.22) i (2.23), otrzymujemy następujący algorytm

KRATOWY ALGORYTM GRADIENTOWY

WARUNKI POCZĄTKOWE: $e_f(T|0) = e_b(T|0) = y(T)$, $T = -1, 0, 1, \dots$

REKURSJE: $n = 1, \dots, N$

$$\left. \begin{aligned} e_f(T|n) &= e_f(T|n-1) - k_n(T)e_b(T-1|n-1) \\ e_b(T|n) &= e_b(T-1|n-1) - k_n(T)e_f(T|n-1) \\ k_n(T+1) &= k_n(T) \{1 - \beta[e_f^2(T|n-1) + e_b^2(T-1|n-1)]\} + \\ &\quad + 2\beta e_f(T|n-1)e_b(T-1|n-1) \end{aligned} \right\} T \rightarrow T+1$$

STAŁA ALGORYTMU: β

ZŁOŻONOŚĆ OBLICZENIOWA: $7N$ mnożeń, $6N$ dodawań

W celu inicjacji algorytmu należy przyjąć niezerową wartość próbki $y(-1)$.

Stały krok β steruje szybkością zbieżności algorytmu. Podobnie jak dla algorytmów transversalnych krok ten można zmieniać adaptacyjnie, w zależności od estymowanej na bieżąco sumy mocy sygnałów błędu, przyjmując na przykład:

$$\beta_n(T) = \frac{1}{B(T|n-1)} \quad (5.17)$$

$$B(T+1|n-1) = (1-\alpha)B(T|n-1) + e_f^2(T|n-1) + e_b^2(T-1|n-1). \quad (5.18)$$

Zauważmy, że tak zdefiniowany zmienny krok zależy zarówno od numeru współczynnika odbicia jak i od chwili T . Ponieważ, jak nietrudno wykazać

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E[\beta_n(T)] = \frac{\alpha}{E[e_f^2(T|n-1) + e_b^2(T-1|n-1)]}, \quad (5.19)$$

zatem stała α steruje szybkością zbieżności nie tylko estymatora (5.18), lecz również estymatorów współczynników $k_n(T)$. Algorytm znormalizowany ma postać

ZNORMALIZOWANY KRATOWY ALGORYTM GRADIENTOWY (I WERSJA)

WARUNKI POCZĄTKOWE: $e_f(T|0) = e_b(T|0) = y(T)$, $T = -1, 0, 1, \dots$

$$\sigma^2(1|0) = y^2(0) + y^2(-1)$$

REKURSJE: $n = 1, \dots, N$

$$\left. \begin{aligned} e_f(T|n) &= e_f(T|n-1) - k_n(T)e_b(T-1|n-1) \\ e_b(T|n) &= e_b(T-1|n-1) - k_n(T)e_f(T-1|n-1) \\ k_n(T+1) &= k_n(T) \{1 - \beta_n(T)[e_f^2(T|n-1) + e_b^2(T-1|n-1)]\} + \\ &\quad + 2\beta_n(T)e_f(T|n-1)e_b(T-1|n-1) \\ \beta_n(T) &= 1/B(T|n-1) \\ B(T+1|n-1) &= (1-\alpha)B(T|n-1) + e_f^2(T|n-1) + e_b^2(T-1|n-1) \end{aligned} \right\}$$

STAŁA ALGORYTMU: α

ZŁOŻONOŚĆ OBLICZENIOWA: $10N$ mnożeń, $7N$ dodawań

Alternatywnym sposobem wyprowadzenia kratowego algorytmu gradientowego jest wyznaczenie optymalnego rozwiązania $k_{n\text{opt}}$ przy założeniu kryterium MMSE *forward-backward*, a następnie zastąpienie wielkości oczekiwanych występujących w tym rozwiązaniu odpowiednimi estymatorami rekursywnymi.

Uogólniając rozumowanie z rozdz. 2 na kryterium *forward-backward*, otrzymujemy — por. również wzory (2.24) i (2.25):

$$k_{n\text{opt}} = \frac{2E[e_f(T|n-1)e_b(T-1|n-1)]}{E[e_f^2(T|n-1) + e_b^2(T-1|n-1)]} \quad (5.20)$$

Zastępując licznik i mianownik wzoru (5.20) zależnościami rekursywnymi w czasie

$$K_n(T+1) = (1-\beta)K_n(T) + 2e_f(T|n-1)e_b(T-1|n-1) \quad (5.21)$$

$$M_n(T+1) = (1-\beta)M_n(T) + e_f^2(T|n-1) + e_b^2(T-1|n-1) \quad (5.22)$$

otrzymuje się estymatory współczynników odbicia (5.20) o postaci

$$k_n(T) = \frac{K_n(T)}{M_n(T)} \quad (5.23)$$

Można wykazać, przeprowadzając odpowiednie przekształcenia, że sposób estymacji współczynników odbicia (5.20) za pomocą wzorów (5.21)–(5.23) jest w pełni równoważny procedurze estymacji z pierwszej wersji znormalizowanej kratowego algorytmu gradientowego, jeśli tylko $\beta = \alpha$. Licznik $K_n(T)$, opisany wzorem (5.21) jest niekiedy nazywany nieunormowanym współczynnikiem odbicia.

ZNORMALIZOWANY KRATOWY ALGORYTM GRADIENTOWY (II WERSJA)

WARUNKI POCZĄTKOWE: $e_f(T|0) = e_b(T|0) = y(T)$, $T = -1, 0, 1, \dots$

$$K_n(0) = M_n(0) = 0, \quad n = 1, \dots, N$$

REKURSJE: ($n = 1, \dots, N$):

$$k_n(T) = K_n(T)/M_n(T)$$

$$K_n(T+1) = (1-\beta)K_n(T) + 2e_f(T|n-1)e_b(T-1|n-1)$$

$$M_n(T+1) = (1-\beta)M_n(T) + e_f^2(T|n-1) + e_b^2(T-1|n-1)$$

$$e_f(T|n) = e_f(T|n-1) - k_n(T)e_b(T-1|n-1)$$

$$e_b(T|n) = e_b(T-1|n-1) - k_n(T)e_f(T|n-1)$$

STAŁA ALGORYTMU: β

ZŁOŻONOŚĆ OBLICZENIOWA: $8N$ mnożeń, $6N$ dodawań

W literaturze spotykane są różne mutacje kratowych algorytmów gradientowych. W szczególności możliwe jest stosowanie kryteriów typu *forward* lub *backward*. Jeden z wariantów, użyteczny zwłaszcza dla sygnałów niestacjonarnych, zakłada różne wartości

współczynników odbicia w przód $k_n^f(T)$ i wstecz $k_n^b(T)$. Oba współczynniki są estymowane niezależnie. Współczynnik $k_n^f(T)$ jest wyznaczony zgodnie z kryterium *backward*, zaś współczynnik $k_n^b(T)$ — zgodnie z kryterium *forward*. Otrzymuje się wówczas następujące rekursje:

$$k_n^f(T) = [1 - \beta e_f^2(T|n-1)]k_n^f(T-1) + \beta e_f(T|n-1)e_b(T-1|n-1) \quad (5.24)$$

$$k_n^b(T+1) = [1 - \beta e_b^2(T-1|n-1)]k_n^b(T) + \beta e_f(T|n-1)e_b(T-1|n-1). \quad (5.25)$$

Podobnie jak poprzednio, stała β w rekursji (5.24) może być unormowana względem estymowanej mocy błędu predykcji wstecz, a w rekursji (5.25) — względem estymowanej mocy błędu predykcji w przód.

Kratowe algorytmy gradientowe są bardziej złożone niż ich odpowiedniki transwersalne, ale za to szybciej zbieżne i na ogół wykazują lepsze właściwości numeryczne. Dlatego też są one stosowane w wielu zagadnieniach praktycznych.

6. ALGORYTMY REKURSYWNE LS

Drugą, obok algorytmów gradientowych, grupą rekursywnych algorytmów są algorytmy rekursywne LS. Należą one do najnowszych, stosunkowo niedawno opracowanych algorytmów wyznaczania współczynników adaptacyjnych filtrów predykcyjnych. Intensywny rozwój problematyki filtrów adaptacyjnych LS jest związany z zastosowaniem do ich analizy aparatu matematycznego przestrzeni Hilberta. Umożliwiło to stworzenie jednolitej, dobrze już ugruntowanej teorii tej klasy filtrów.

Spośród wymienionych w rozdz. 4 czterech kryteriów typu LS w algorytmach rekursywnych LS stosowane są tylko dwa: kryterium z oknem początkowym i kryterium kowariancyjne. Pozostałe dwa nie są użyteczne, ze względu na założenie zerowych wartości próbek na prawym krańcu rozpatrywanego ciągu danych.

Transwersalne rekursywne algorytmy LS z oknem początkowym są w literaturze nazywane często szybkimi algorytmami Kalmana; sposób ich działania jest bowiem ściśle związany z koncepcją filtru kalmanowskiego. Pierwsza próba wykorzystania teorii filtracji kalmanowskiej w problematyce adaptacyjnych filtrów predykcyjnych została podjęta przez Godarda [31] w zastosowaniu do adaptacyjnej korekcji charakterystyki kanału transmisyjnego. Algorytm Godarda nie znalazł jednak szerszego zastosowania ze względu na jego dużą złożoność obliczeniową, związaną ze skomplikowanymi operacjami macierzowymi. Z drugiej jednak strony, wykazana przez Godarda możliwość uzyskania wyraźnej poprawy w działaniu algorytmu LS w porównaniu z algorytmami gradientowymi spowodowała szerokie zainteresowanie rekursywnymi metodami LS. Doprowadziło to do opracowania efektywnych obliczeniowo transwersalnych rekursywnych algorytmów LS z oknem początkowym [32, 33], oraz kratowych wersji tych algorytmów [34, 35].

W niedługim czasie pojawiły się prace [36, 37, 38], w których zastosowane zostało kryterium kowariancyjne. W zależności od sposobu przetwarzania próbek algorytmy kowariancyjne LS można podzielić na dwie grupy, a mianowicie na algorytmy z ruchomym oknem (sliding window) i algorytmy ze wzrastającą pamięcią (growing memory).

Prawdziwy przełom w teorii adaptacyjnych filtrów LS przyniosło ujęcie geometryczne

w kategoriach przestrzeni Hilberta [26, 36, 39, 40]. Zaletą metody geometrycznej jest nie tylko eleganckie pod względem formalnym ujęcie teorii filtrów rekursywnych LS oraz interesująca interpretacja geometryczna rekursywnych zależności, lecz przede wszystkim możliwość głębszego wniknięcia w sam mechanizm wyprowadzania tych rekursji. Stwarza to szerokie możliwości generowania różnych algorytmów i ich optymalizacji pod względem złożoności obliczeniowej.

W ujęciu geometrycznym teorii filtrów predykcyjnych LS [26] definiuje się różnego rodzaju wektory (próbek, błędów predykcji, współczynników predykcyjnych itd.) i rozważa się je jako elementy euklidesowskich przestrzeni liniowych z iloczynem skalarnym, a więc przestrzeni Hilberta. Na zbiorach tych wektorów rozpina się z kolei odpowiednie podprzestrzenie liniowe i problem minimalizacji błędu LS sprowadza się do poszukiwania rzutu ortogonalnego danego wektora na odpowiednią przestrzeń. Kluczową rolę odgrywają przy tym tzw. operator rzutu (ortogonalnego) i operator błędu.

Zasadą generalną jest rekursywne wyznaczanie ciągu operatorów rzutu i ciągu operatorów błędu. Rozróżnia się trzy typy rekursji:

- rekursje po rzędzie,
- rekursje po czasie w przód,
- rekursje po czasie wstecz.

Rekursje druga i trzecia mogą być także wykorzystane do rekursywnego obliczania odpowiednich iloczynów skalarnych. Daje to w sumie osiem typów formuł rekursywnych. Formuły te, zastosowane do operatorów rzutu różnego rodzaju wektorów na odpowiednie przestrzenie oraz do odpowiadających im operatorów błędu, a także do iloczynów skalarnych różnego rodzaju wektorów, umożliwiają, poprzez ich umiejętne powiązanie, tworzenie różnorodnych algorytmów rekursywnych typu LS.

6.1. PODSTAWOWE ZALEŻNOŚCI

Niech Y będzie wektorem w m -wymiarowej rzeczywistej przestrzeni Hilberta $\mathcal{R}^m$, a M — podprzestrzenią tej przestrzeni rozpiętą na wektorach $Y_1, \dots, Y_n$. Przyjmijmy notację $M = \overline{\{Y_1, \dots, Y_n\}}$.

Rzut ortogonalny wektora Y na przestrzeń M będziemy oznaczać $P_M Y$. Operator P nazwiemy operatorem LS rzutu. Wektor błędu rzutu ortogonalnego będziemy oznaczać

$$P_M^\perp Y = Y - P_M Y. \quad (6.1)$$

Operator $P_M^\perp$ nazwiemy operatorem błędu.

Ponieważ $P_M Y \in M$, więc istnieją takie liczby rzeczywiste $f_1, \dots, f_n$, że

$$P_M Y = \sum_{j=1}^n f_j Y_j = S f, \quad (6.2)$$

gdzie S jest macierzą $m \times n$, której kolumny są wektorami Y_j , tzn. $S = [Y_1, \dots, Y_n]$ oraz $f = [f_1, \dots, f_n]^t$.

Dla każdego $j = 1, \dots, n$ mamy

$$\langle Y_j, P_M^\perp Y \rangle = \langle Y_j, Y - P_M Y \rangle = 0, \quad (6.3)$$

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza iloczyn skalarny. Wynika stąd, że

$$\langle Y_j, Y \rangle = \langle Y_j, P_M Y \rangle = \langle Y_j f S, \rangle = Y_j^T S f, \quad j = 1, \dots, n, \quad (6.4)$$

lub w zapisie macierzowym

$$S^T Y = (S^T S) f. \quad (6.5)$$

Zakładając, że macierz $S^T S$ jest nieosobliwa, rozwiązanie względem wektora f możemy zapisać w postaci

$$f = (S^T S)^{-1} S^T Y. \quad (6.6)$$

Rzut LS można zapisać jako

$$P_M Y = S(S^T S)^{-1} S^T Y. \quad (6.7)$$

Rozwiązanie (6.6) jest optymalne w sensie minimum normy wektora błędu $P_M^\perp Y$. Podkreślimy formalne podobieństwo wzorów (6.6) i (4.12).

Rozważmy obecnie wektory $Y, Y_1, \dots, Y_n$ i przestrzeń M , określone jak poprzednio, i dodatkowo wektor $X \in \mathcal{R}_M^m$. Niech $M \oplus \bar{X}$ oznacza przestrzeń rozpiętą na przestrzeni M i wektorze X . Przestrzeń ta może być zdekomponowana na dwie przestrzenie ortogonalne

$$M \oplus \bar{X} = M \oplus \overline{P_M^\perp X}. \quad (6.8)$$

Z ortogonalności przestrzeni M i $\overline{P_M^\perp X}$ wynika natychmiast, że

$$P_{M \oplus \bar{X}} Y = P_M Y + P_{\overline{P_M^\perp X}} Y. \quad (6.9)$$

Wzór (6.9) jest ogólną formułą rekursywną dla operatora rzutu P względem rzędu przestrzeni, na którą rzutujemy wektor Y .

Odejmując obie strony wzoru (6.9) od wektora Y , otrzymujemy podobną formułę rekursywną dla operatora błędu

$$P_{M \oplus \bar{X}}^\perp Y = P_M^\perp Y - P_{\overline{P_M^\perp X}}^\perp Y. \quad (6.10)$$

Formuły rekursywne (6.9) i (6.10) są podstawą do wyprowadzania wszystkich rekursji po rzędzie, wykorzystywanych przy konstrukcji algorytmów rekursywnych LS. Wystarczy odpowiednio zdefiniować przestrzeń M i wektory X oraz Y . Wektor Y jest w konkretnych algorytmach wektorem próbek i w ogólnym przypadku ma postać $Y(T) = [y(T), y(T-1), \dots, y(T_0)]^T \in \mathcal{R}^{T-T_0+1}$. Wektory $Y_1, \dots, Y_n$ i X są odpowiednio przesuniętymi w czasie wersjami wektora Y .

Przy wyprowadzaniu rekursji po czasie dla operatora LS rzutu należy do rozważanych wyżej wielkości wprowadzić indeks T bieżącej chwili czasu i indeks T_0 początkowej chwili czasu w bloku próbek tworzących odpowiednie wektory.

Zdefiniujmy wektory:

$$\begin{aligned} u(T) &= [1, 0, \dots, 0]^T \in \mathcal{R}^{T-T_0+1} \\ Y(T) &= [y(T), y(T-1), \dots, y(T_0)]^T \in \mathcal{R}^{T-T_0+1} \\ \tilde{Y}(T) &= [0, y(T-1), \dots, y(T_0)]^T \in \mathcal{R}^{T-T_0+1} \end{aligned}$$

oraz macierze

$$S(T) = [Y_1(T) \dots Y_n(T)]$$

$$\tilde{S}(T) = [\tilde{Y}_1(T) \dots \tilde{Y}_n(T)].$$

Oznaczmy przestrzenie rozpięte na kolumnach macierzy $S(T)$ i $\tilde{S}(T)$ odpowiednio przez $M(T)$ i $\tilde{M}(T)$. Macierz $\tilde{S}(T)$ powstaje z macierzy $S(T)$ przez wyzerowanie jej pierwszego wiersza. Wektory $Y_j(T)$ są opóźnionymi o j taktów wersjami wektora $Y(T)$.

Wprowadźmy pojęcie kąta $\vartheta(T)$ między przestrzeniami $M(T)$ i $\tilde{M}(T)$. Można wykazać [36], że $\sin \vartheta(T) = \|P_{M(T)} u(T)\| = \langle u(T), M_{M(T)} u(T) \rangle$. Oznaczmy ponadto przez $P_{M_{T-1}(T)} Y(T)$ rzut ortogonalny wektora $Y(T)$ na przestrzeń $M(T)$, wyznaczony za pomocą współczynników wektora f obliczonych w chwili $T-1$ (tzn. za pomocą rozwiązania równania (6.5) w chwili poprzedniej na podstawie macierzy $\tilde{S}(T)$ zawierającej tylko próbki $y(T-1), \dots, y(T_0)$):

$$P_{M_{T-1}(T)} Y(T) = S(T) [\tilde{S}'(T) \tilde{S}(T)]^{-1} \tilde{S}'(T) Y(T). \quad (6.11)$$

Rzut ortogonalny wektora $Y(T)$ na przestrzeń $M(T)$ wyznaczony na podstawie pełnej macierzy $S(T)$ jest, zgodnie ze wzorem (6.7), równy

$$P_{M(T)} Y(T) = S(T) [S'(T) S(T)]^{-1} S'(T) Y(T). \quad (6.12)$$

Przy wprowadzonych nowych pojęciach i oznaczeniach rekursje po czasie w przód dla operatora LS rzutu i operatora błędu można zapisać wzorami

$$P_{M(T)} Y(T) = P_{M_{T-1}(T)} Y(T) + P_{M(T)} u(T) \langle u(T), P_{M(T)}^\perp Y(T) \rangle \sec^2 \vartheta(T) \quad (6.13)$$

$$P_{M(T)}^\perp Y(T) = P_{M_{T-1}(T)}^\perp Y(T) - P_{M(T)} u(T) \langle u(T), P_{M(T)}^\perp Y(T) \rangle \sec^2 \vartheta(T). \quad (6.14)$$

W podobny sposób wprowadza się rekursje po czasie wstecz. Zdefiniujmy wielkości

$$u(T_0) = [0, 0, \dots, 0, 1]^t \in \mathcal{R}^{T-T_0+1}$$

$$\tilde{\tilde{Y}}(T) = [y(T), y(T-1), \dots, y(T_0+1), 0]^t \in \mathcal{R}^{T-T_0+1}$$

$$\tilde{\tilde{S}}(T) = [\tilde{\tilde{Y}}_1(T) \dots \tilde{\tilde{Y}}_n(T)]$$

$$\tilde{\tilde{M}} = \overline{\tilde{\tilde{S}}(T)}$$

$$\nu(T) = \angle (M(T), \tilde{\tilde{M}}(T)),$$

$$\sin \nu(T) = \|P_{M(T)} u(T_0)\| = \langle u(T_0), P_{M(T)} u(T_0) \rangle.$$

Macierz $\tilde{\tilde{S}}(T)$ powstaje z macierzy $S(T)$ przez wyzerowanie jej ostatniego wiersza.

Rzut ortogonalny wektora $Y(T)$ na przestrzeń $M(T)$, wyznaczony za pomocą współczynników wektora f obliczonych na podstawie macierzy $\tilde{\tilde{S}}(T)$ zawierającej tylko próbki $y(T), \dots, y(T_0+1)$, oznaczmy przez

$$P_{M_{T_0+1}(T)} Y(T) = S(T) [\tilde{\tilde{S}}'(T) \tilde{\tilde{S}}(T)]^{-1} \tilde{\tilde{S}}'(T) Y(T). \quad (6.15)$$

Rekursje po czasie w tył dla operatora LS rzutu i operatora błędu, będące odpowiednikami rekursji (6.13) i (6.14), przyjmują postać

$$P_{M(T)} Y(T) = P_{MT_0+1(T)} Y(T) + P_{M(T)} u(T_0) \langle u(T_0), P_{M(T)}^\perp Y(T) \rangle \sec^2 \nu(T) \quad (6.16)$$

$$P_{M(T)}^\perp Y(T) = P_{MT_0+1(T)}^\perp Y(T) - P_{M(T)} u(T_0) \langle u(T_0), P_{M(T)}^\perp Y(T) \rangle \sec^2 \nu(T). \quad (6.17)$$

W konstrukcji algorytmów rekursywnych LS są wykorzystywane ponadto następujące formuły rekursywne dla iloczynów skalarnych w przód

$$\begin{aligned} \langle v(T), P_{M(T)}^\perp Y(T) \rangle &= w \langle v(T-1), P_{M(T-1)}^\perp Y(T-1) \rangle + \\ &+ \langle u(T), P_{M(T)}^\perp v(T) \rangle \langle u(T), P_{M(T)}^\perp Y(T) \rangle \sec^2 \vartheta(T) \end{aligned} \quad (6.18)$$

odpowiednio wstecz

$$\begin{aligned} \langle \tilde{v}(T), P_{M(T)}^\perp Y(T) \rangle &= w \langle \tilde{v}(T), P_{M(T)}^\perp \tilde{Y}(T) \rangle + \\ &+ \langle u(T_0), P_{M(T)}^\perp \tilde{v}(T) \rangle \langle u(T_0), P_{M(T)}^\perp Y(T) \rangle \sec^2 \vartheta(T), \end{aligned} \quad (6.19)$$

gdzie $v(T)$ jest dowolnym wektorem, zaś $w \in (0, 1)$ jest współczynnikiem wagi.

Rekursje (6.9), (6.10), (6.13), (6.14), (6.16), (6.17), (6.18) i (6.19) są podstawą projektowania każdego ze znanych dotychczas algorytmów rekursywnych LS. Umożliwiają one także poszukiwanie nowych algorytmów.

6.2. ALGORYTMY Z OKNEM POZĄTKOWYM

Zasady stosowania okna początkowego zostały już omówione w przypadku algorytmów blokowych LS. W algorytmach z oknem początkowym dopuszcza się wykorzystanie próbek leżących przed oknem, przy czym zakłada się, że ich wartości są zerowe. Próbkę zerową będą więc uwzględniane w definicji miary błędów.

Zagadnienie wyznaczania optymalnego filtra predykcyjnego dla tej klasy filtrów jest formułowane następująco. Należy wyznaczyć wektory $f(T|N)$ i $b(T|N)$ współczynników predykcyjnych odpowiednio w przód i wstecz, lub zbiory współczynników odbicia $\{k_1^f, \dots, k_N^f\}$ i $\{k_1^b, \dots, k_N^b\}$ tak, aby zminimalizować miary błędów (por. wzory (4.3) i (3.2)):

$$\sum_{j=0}^T (j|e_f^2|N) \text{ lub } \sum_{j=0}^T e_f^2(j|N) \text{ lub } \sum_{j=0}^T [e_f^2(j|N) + e_b^2(j|N)]. \quad (6.20)$$

Odpowiednie wektory występujące w ogólnych formułach rekursywnych z p. 6.1 są w tym przypadku zdefiniowane następująco ($T_0 = 0$):

$$\begin{aligned} Y(T) &= [y(T), y(T-1), \dots, y(0)]^t \in \mathcal{R}^{T+1} \\ Y_j(T) &= z^{-j} Y(T) = [y(T-j), \dots, y(0), 0, \dots, 0]^t \in \mathcal{R}^{T+1}, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

gdzie z^{-j} jest operatorem opóźnienia o j taktów. Ponadto definiuje się macierz ($l < n$):

$$S(T|l, n) = [z^{-l} Y(T) z^{-l-1} Y(T) \dots z^{-n} Y(T)]_{(T+1) \times (n-l+1)}$$

W algorytmie wykorzystuje się szczególnie przypadki tej macierzy, a mianowicie macierze: $S(T|1, n)$, $S(T|0, n-1)$ i $S(T|1, n+1)$. Rozważa się również przestrzenie rozpięte na kolumnach tych macierzy: $M(T|1, n)$, $M(T|0, n-1)$ i $M(T|1, n+1)$.

Przykładowo, macierz $S(T|1, n)$ ma postać

$$S(T|1, n) = \begin{bmatrix} y(T-1) & \dots & y(T-n) \\ y(T-2) & & \vdots \\ \vdots & & y(0) \\ y(0) & \nearrow & 0 \\ 0 & \longleftarrow & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz ta jest identyczna z macierzą Y_3 występującą w algorytmach blokowych (rozdz. 4) z dokładnością do odwrotnej kolejności zapisu kolumn i przy przyjęciu $M = T$ oraz $N = n$.

W algorytmie LS z oknem początkowym rozważa się następujące wielkości:

— wektory błędów predykcji w przód i wstecz

$$E_f(T|n) = [e_f(T|n), e_f(T-1|n), \dots, e_f(0|n)]^t = Y(T) - S(T|1, n)f(T|n) = P_{M(T|1, n)}^\perp Y(T)$$

$$E_b(T|n) = [e_b(T|n), e_b(T-1|n), \dots, e_b(0|n)]^t = z^{-n}Y(T) - S(T|0, n-1)b(T|n) = P_{M(T|0, n-1)}^\perp Y(T)$$

gdzie $f(T|n)$ i $b(T|n)$ są wektorami współczynników predykcyjnych odpowiednio w przód i wstecz,

— miary błędów predykcji w przód i wstecz

$$\varepsilon_f(T|n) = \sum_{j=0}^T e_f^2(j|n) = \|E_f(T|n)\|^2$$

$$\varepsilon_b(T|n) = \sum_{j=0}^T e_b^2(j|n) = \|E_b(T|n)\|^2,$$

— wektory błędów predykcji w przód i wstecz, obliczone w chwili $T-1$

$$E_f^0(T|n) = Y(T) - S(T|1, n)f(T-1|n) = P_{M_{T-1}(T|1, n)}^\perp Y(T)$$

$$E_b^0(T|n) = z^{-n}Y(T) - S(T|0, n-1)b(T-1|n) = P_{M_{T-1}(T|0, n-1)}^\perp Y(T),$$

— błędy predykcji w przód i wstecz obliczone w chwili $T-1$

$$e_f^0(T|n) = \langle u(T), E_f^0(T|n) \rangle$$

$$e_b^0(T|n) = \langle u(T), E_b^0(T|n) \rangle,$$

— współczynnik

$$\gamma(T-1|n) = \sin^2 \vartheta(T-1|0, n-1),$$

$$\text{gdzie } \vartheta(T-1|0, n-1) = \angle (M(T-1|0, n-1), \tilde{M}(T-1|0, n-1)),$$

— wektor n ostatnich próbek

$$y(T|n) = [y(T), y(T-1), \dots, y(T-n+1)]^t,$$

— wektor wzmocnienia (Kalmana)

$$g(T|n) = S^*[(T+1|1, n)S(T+1|1, n)]^{-1}y(T|n),$$

- nieunormowany współczynnik korelacji wzajemnej między wektorami błędów predykcji w przód i wstecz

$$K_{n+1}(T) = \langle E_f(T|n), z^{-1}E_b(T|n) \rangle,$$

- współczynniki odbicia w przód i wstecz

$$k_{n+1}^f(T) = \frac{K_{n+1}(T)}{\varepsilon_f(T|n)}, \quad k_{n+1}^b(T) = \frac{K_{n+1}(T)}{\varepsilon_b(T-1|n)}.$$

W celu wyznaczenia transwersalnego rekursywnego filtra predykcyjnego LS z oknem początkowym wyprowadza się na podstawie ogólnych formuł rekursywnych po czasie, opisanych wzorami (6.14), (6.17), (6.18) i (6.19), rekursje po czasie następujących wielkości: $e_f^0(T|N)$, $f(T|N)$, $e_f(T|N)$, $\varepsilon_f(T)$, $[g(T|N+1)]_1$, $[g(T|N+1)]_{2,N+1}$, $e_b^0(T|N)$, $b(T|N)$ i $g(T|N)$. Oznaczenie $[g(T|N+1)]_1$ jest tu rozumiane jako pierwszy element wektora $g(T|N+1)$, zaś oznaczenie $[g(T|N+1)]_{2,N+1}$ — jako wektor $g(T|N+1)$ z pominięciem jego pierwszego elementu; N oznacza rząd filtru.

Rekursje wymienionych wielkości składają się na transwersalny algorytm rekursywny LS z oknem początkowym (szybki algorytm Kalmana). Podkreślimy, że w algorytmie tym rząd filtru N jest ustalony i wszystkie rekursje są rekursjami po czasie.

TRANSVERSALNY ALGORYTM REKURSYWNY LS Z OKNEM POCZĄTKOWYM

(SZYBKI ALGORYTM KALMANA)

N — rząd filtru

$$e_f^0(T|N) = y(T) - f^t(T-1|N)y(T-1|N)$$

$$f(T|N) = f(T-1|N) - e_f^0(T|N)g(T-1|N)$$

$$e_f(T|N) = y(T) - f^t(T|N)y(T-1|N)$$

$$\varepsilon_f(T|N) = w\varepsilon_f(T-1|N) + e_f(T|N)e_f^0(T|N)$$

$$[g(T|N+1)]_1 = \frac{e_f(T|N)}{\varepsilon_f(T|N)}$$

$$[g(T|N+1)]_{2,N+1} = g(T-1|N) - [g(T|N+1)]_1 f(T|N)$$

$$e_b^0(T|N) = y(T-N) - b^t(T-1|N)y(T|N)$$

$$b(T|N) = \frac{b(T-1|N) + e_b^0(T|N)[g(T|N+1)]_{1,N}}{1 - e_b^0(T|N)[g(T|N+1)]_{N+1}}$$

$$g(T|N) = [g(T|N+1)]_{1,N+1} [g(T|N+1)]_{N+1} b(T|N)$$

STAŁA ALGORYTMU: w

INICJACJA: $f(0|N) = b(0|N) = g(0|N) = 0$, $\varepsilon_f(0|N) = \delta$

δ — mała stała dodatnia

ZŁOŻONOŚĆ: $8N+5$ mnożeń, $7N+2$ dodawań

Złożoność obliczeniowa jest podana dla ustalonego stanu pracy algorytmu, tzn. dla $T > N$. Inicjacja polegająca na przyjęciu miary błędu predykcji w przód w chwili $T = 0$, równej

małej stałej dodatniej δ (dobranej tak, aby zapewniona była stabilna praca algorytmu) nie zapewnia minimum miary błędu predykcji $e_f(T|N)$ dla $T = 1, \dots$. Możliwa jest także druga, rekursywna po rzędzie, procedura inicjacji szybkiego algorytmu Kalmana zastosowana do jego zmodyfikowanej wersji, w której rekursję na $e_f(T|N)$ zastępuje się innymi rekursjami [41].

ZMODYFIKOWANY SZYBKIE ALGORYTM KALMANA (I WERSJA)

Szybki algorytm Kalmana, za wyjątkiem rekursji dla $e_f(T|N)$ i dodatkowo:

$$e_f(T|N) = e_f^0(T|N) [1 - \gamma(T-1|N)]$$

$$\gamma(T|N) = \frac{\gamma(T-1|N) + e_f(T|N) [g(T|N+1)]_1 - e_b^0(T|N) [g(T|N+1)]_{N+1}}{1 - e_b^0(T|N) [g(T|N+1)]_{N+1}}$$

ZŁOŻONOŚĆ: $7N+10$ mnożeń, $6N+6$ dodawań

PROCEDURA INICJACJI DLA ZMODYFIKOWANEGO (I WERSJA) SZYBKIEGO ALGORYTMU KALMANA

$$f(0|j) = b(0|j) = g(0|j) = 0, j = 0, 1, \dots, N; \gamma(0|0) = 0$$

Dla $T = 1, 2, \dots, N$:

$$e_f^0(T|T-1) = y(T) - f'(T-1|T-1)y(T-1|T-1)$$

$$[f(T|T)]_T = \frac{e_f^0(T|T-1)}{y(0)}$$

$$[f(T|T)]_{1,T-1} = f(T-1|T-1)$$

$$f(T|T-1) = f(T-1|T-1) + e_f^0(T|T-1)g(T-1|T-1)$$

$$e_f(T|T-1) = e_f^0(T|T-1) [1 - \gamma(T-1|T-1)]$$

$$\varepsilon_f(T|T-1) = wy^2(0) + e_f(T|T-1)e_f^0(T|T-1)$$

$$[g(T|T)]_1 = \frac{e_f(T|T-1)}{\varepsilon_f(T|T-1)}$$

$$[g(T|T)]_{2,T} = g(T-1|T-1) - [g(T|T)]_1 f(T|T-1)$$

$$b(T|T) = y(0)g(T|N) \text{ — tylko dla } T = N$$

$$\gamma(T|T) = \gamma(T-1|T-1) + [g(T|T)]_1 e_f(T|T-1)$$

Ponieważ w stanie przejściowym ($T < N$) jest obliczanych tylko T elementów wektorów f , b i g , zatem podana tu procedura inicjacji wymaga jedynie 20% nakładu obliczeniowego niezbędnego w stanie ustalonym. W przypadku zastosowania tej procedury inicjacji wyraźnie poprawiają się właściwości numeryczne algorytmu w porównaniu z procedurą inicjacji podaną w tabelce niezmodyfikowanego szybkiego algorytmu Kalmana (małeje m.in. wrażliwość na błąd zaokrąglenia).

W nowszych pracach [41, 42] podano szereg dalszych, ulepszonych wersji szybkiego algorytmu Kalmana, z których najciekawszą propozycją wydaje się być algorytm [43].

o jeszcze lepszych właściwościach numerycznych. W algorytmie tym występuje zmodyfikowany wektor wzmocnienia, zdefiniowany zależnością

$$\tilde{g}(T|N) = \frac{1}{1-\gamma(T|N)} g(T|N).$$

Zastosowanie tej modyfikacji pozwoliło zmniejszyć w sposób dość istotny złożoność obliczeniową algorytmu. Jest to szczególnie wyraźne dla dużych rzędów filtru. Algorytm ten ma następującą postać.

ZMODYFIKOWANY SZYBKI ALGORYTM KALMANA (II WERSJA)

$$e_f^0(T|N) = y(T) - f^t(T-1|N)y(T-1|N)$$

$$e_f(T|N) = e_f^0(T|N) [1 - \gamma(T-1|N)]$$

$$\varepsilon_f(T|N) = w\varepsilon_f(T-1|N) + e_f(T|N)e_f^0(T|N)$$

$$1 - \gamma(T|N+1) = w \frac{\varepsilon_f(T-1|N)}{\varepsilon_f(T)} [1 - \gamma(T-1|N)]$$

$$\tilde{g}(T|N+1) = \begin{bmatrix} 0 \\ g(T-1|N) \end{bmatrix} + \frac{e_f^0(T|N)}{\varepsilon_f(T-1|N)} \begin{bmatrix} 1 \\ -f(T-1|N) \end{bmatrix}$$

$$f(T|N) = f(T-1|N) + e_f(T|N)g(T-1|N)$$

$$e_b^0(T|N) = w\varepsilon_b(T-1|N)\tilde{g}(T-1|N)$$

$$1 - \gamma(T|N) = \frac{1 - \gamma(T|N+1)}{1 - e_b^0(T|N) [1 - \gamma(T|N+1)] [\tilde{g}(T|N+1)]_{N+1}}$$

$$e_b(T|N) = e_b^0(T|N) [1 - \gamma(T|N)]$$

$$\varepsilon_b(T|N) = w\varepsilon_b(T-1|N) + e_b^0(T|N)e_b(T|N)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{g}(T|N) \\ 0 \end{bmatrix} = \tilde{g}(T|N+1) + [\tilde{g}(T|N+1)]_{N+1} \begin{bmatrix} -b(T-1|N) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b(T|N) = b(T-1|N) + e_b(T|N)g(T|N)$$

STAŁA ALGORYTMU: w

INICJACJA: jak w wersji I oraz $\gamma(0|N) = 0$

ZŁOŻONOŚĆ: $5N+13$ mnożeń, $5N+3$ dodawań

Jak widać, złożoność obliczeniowa II wersji zmodyfikowanego szybkiego algorytmu Kalmana jest mniejsza niż w algorytmie niezmodyfikowanym już dla $N > 3$.

W istocie rzeczy szybkie algorytmy Kalmana polegają na rekursywnym wyznaczaniu wektorów f , b i g (lub $\tilde{g}$). Wektor wzmocnienia g jest związany bezpośrednio z estymatorem macierzy autokorelacji (por. wzór definicyjny). Dzięki wyznaczaniu wektora g w sposób rekursywny, unika się odwracania tej macierzy.

Złożoność obliczeniowa wszystkich algorytmów rekursywnych jest rzędu $O(N)$.

Jeżeli zastosujemy ogólną formułę rekursywną po rzędzie (6.10) do wielkości: e_f , e_b , ε_f , ε_b i γ oraz ogólną formułę rekursywną na iloczyn skalarny w przód (6.18) do współczynnika $K_n(T)$, to otrzymamy kratowy algorytm rekursywny LS z oknem początkowym:

KRATOWY ALGORYTM REKURSYWNY LS Z OKNEM POCZĄTKOWYM

$$K_{n+1}(T) = wK_{n+1}(T-1) + e_f(T|n)e_b(T-1|n) \frac{1}{1-\gamma(T-1|n)}$$

$$k_{n+1}^f(T) = \frac{K_{n+1}(T)}{\varepsilon_f(T|n)}, \quad k_{n+1}^b(T) = \frac{K_{n+1}(T)}{\varepsilon_b(T-1|n)}$$

$$e_f(T|n+1) = e_f(T|n) - k_{n+1}^b(T)e_b(T-1|n)$$

$$e_b(T|n+1) = e_b(T-1|n) - k_{n+1}^f(T)e_f(T|n)$$

$$\varepsilon_f(T|n+1) = \varepsilon_f(T|n) - k_{n+1}^b(T)K_{n+1}(T)$$

$$\varepsilon_b(T|n+1) = \varepsilon_b(T-1|n) - k_{n+1}^f(T)K_{n+1}(T)$$

$$\gamma(T|n+1) = \gamma(T|n) + \frac{e_b^2(T|n)}{\varepsilon_b(T|n)}$$

STAŁA ALGORYTMU: w

INICJACJA: $\gamma(-1|n) = e_b(-1|n) = K_{n+1}(-1) = 0, n = 0, \dots, N$

$$\left. \begin{aligned} \gamma(T|0) &= 0, \quad e_f(T|0) = e_b(T|0) = \gamma(T) \\ \varepsilon_f(T|0) &= \varepsilon_b(T|0) = w\varepsilon_f(T-1|0) + y^2(T) \end{aligned} \right\} T = 0, 1, \dots$$

ZŁOŻONOŚĆ: $11N$ mnożeń, $6N$ dodawań

W stanie ustalonym, a więc dla $T > N$, rekursje powyższe należy obliczyć dla $n = 0, \dots, N-1$. Dla każdej nowej iteracji w chwili T wielkości e_f , e_b , ε_f , ε_b i γ są „inicjowane” dla $n = 0$, a następnie obliczane rekursywnie po rzędzie. Wielkość K_n jest obliczana rekursywnie tylko po czasie. Rząd filtru może być ustalany dynamicznie. Ponieważ rekursje mogą być obliczane tylko do rzędu T , zatem dla $T < N$ każda nowa iteracja wymaga zwiększenia rzędu filtru o jeden.

Możliwy jest także inny sposób inicjacji, w którym przyjmuje się, że miary błędów $e_f(0|0)$ i $\varepsilon_b(0|0)$ są równe w chwili $T = 0$ pewnej stałej dodatniej δ , dobranej tak, aby zapewnić stabilność algorytmu. W takim przypadku dla każdej nowej iteracji rekursje są obliczane dla wszystkich $n = 0, \dots, N$. Otrzymujemy wówczas rozwiązanie, które różni się od rozwiązania dokładnego w sensie kryterium LS. W praktyce różnica ta jest jednak niewielka.

6.3. ALGORYTMY KOWARIANCYJNE

Algorytmy rekursywne LS typu kowariancyjnego są stosowane w przypadku krótkich ciągów danych. Z tego względu estymatory LS w algorytmach kowariancyjnych są konstruowane tylko na podstawie dostępnych niezerowych próbek należących do okna danych. Unika się tym samym wpływu zerowych próbek spoza okna na jakość estymatorów.

Z tych samych względów sumowanie w miarach błędów przebiega nie od chwili początkowej T_0 (w szczególności od $T = 0$), lecz od $T_0 + n$, gdzie n jest rzędem filtru.

Dla ciągu danych $y(T_0), y(T_0+1), \dots, y(T)$ szukamy zatem wektorów predykcyjnych

$f(T|n)$ i $b(T|n)$ lub zbiorów współczynników odbicia $\{k_1^f, \dots, k_n^f\}$ i $\{k_1^b, \dots, k_n^b\}$ minimalizujących miary błędów:

$$\varepsilon_f(T|n) \triangleq \sum_{j=T_0+n}^T [y(j) - f^t(T|n)y(j-1|n)]^2 \quad (6.21)$$

$$\varepsilon_b(T|n) = \sum_{j=T_0+n}^T [y(j-n) - b^t(T|n)y(j|n)]^2. \quad (6.22)$$

Zmienność dolnej granicy sumowania powoduje, że algorytmy kowariancyjne są bardziej złożone od algorytmów z oknem początkowym.

W wielkościach występujących uprzednio w algorytmach z oknem początkowym musimy teraz uwzględnić dodatkowy indeks T_0 . Zdefiniujemy wektory:

$$z^{-j}Y(T_0+n, T) \triangleq [y(T-j), y(T-j-1), \dots, y(T_0+n-j)]^t$$

oraz macierz ($l < n$):

$$S(T_0+n, T|l, n) \triangleq [z^{-l}Y(T_0+n, T) \dots z^{-n}Y(T_0+n, T)].$$

W szczególności dla $l = 0$ macierz ta ma postać

$$S(T_0+n, T|0, n) = \begin{bmatrix} y(T) & y(T-1) & \dots & y(T-n) \\ y(T-1) & y(T-2) & \dots & y(T-n-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(T_0+n) & y(T_0+n-1) & \dots & y(T_0) \end{bmatrix}.$$

Macierz ta z dokładnością do odwróconego porządku kolumn jest równa macierzy Y_2 występującej w algorytmach blokowych (rozdz. 4) przy $T_0 = 0$, $T = M-1$ oraz $n = N-1$. Podkreślimy, że wszystkie elementy tej macierzy są niezerowe.

W algorytmach kowariancyjnych korzysta się także z macierzy $S(T_0+n, T|0, n-1)$ oraz $S(T_0+n, T|1, n)$. Macierz

$$\hat{R}(T_0+n, T|n) = S^t(T_0+n, T|0, n-1)S(T_0+n, T|0, n-1)$$

jest nazywana macierzą kowariancyjną (porównaj macierz $\hat{R}_2 = Y_2^t Y_2$ z rozdziału 4).

Oprócz wielkości, które występowały poprzednio w algorytmach z oknem początkowym, definiuje się w algorytmach kowariancyjnych pięć nowych wielkości: wektor

$$h(T_0+1, T|n) \triangleq [\hat{R}(T_0+n, T|n)]^{-1}y(T_0+n|n),$$

oraz wielkości skalarne

$$e_f^1(T_0, T|n) \triangleq y(T_0+n) - f^t(T_0, T|n)y(T_0+n-1|n)$$

$$e_b^1(T_0, T|n) \triangleq y(T_0) - b^t(T_0, T|n)y(T_0+n|n)$$

$$\gamma^1(T_0+1, T|n) \triangleq \langle u(T_0), P_{M(T|0, n-1)} u(T_0) \rangle$$

$$\alpha(T_0+1, T|n) \triangleq \langle u(T_0), P_{M(T|0, n-1)} u(T_0) \rangle.$$

Dla wielkości tych konstruuje się podobne rekursje jak dla pozostałych wielkości. Korzystając z kompletu rekursji można otrzymać różnorodne algorytmy kowariancyjne LS typu transwersalnego lub kratowego. Do najbardziej znanych należą algorytmy z ruchomym oknem (*sliding window*) i ze wzrastającą pamięcią (*growing memory*).

Przedstawimy najpierw algorytmy kowariancyjne LS z ruchomym oknem. Dla tego typu algorytmów zakładamy, że w każdej rozważanej chwili jest dostępny ciąg danych o tej samej długości M . Na przykład:

dla chwili T : $y(T-M+1), y(T-M+2), \dots, y(T)$

dla chwili $T+1$: $y(T-M+2), y(T-M+3), \dots, y(T+1)$ itd.

Poprzednie próbki są zatem zapomniane, co jest korzystne przy zmieniających się charakterystykach sygnału.

Poniżej podamy zestaw rekursji składających się na transwersalny algorytm kowariancyjny LS z ruchomym oknem. Ruchomą chwilę początkową oznaczymy przez T_0 . Chwila ta jest związana z chwilą aktualną równością $T_0 = T - M + 1$. Jeżeli rząd danej wielkości jest równy rzędowi filtru N , to indeks ten nie będzie wymieniany w oznaczeniu wielkości. W każdym innym przypadku indeks ten będzie podawany. Dla $T > N$ obliczamy następujące rekursje:

TRANSWERSALNY ALGORYTM KOWARIANCYJNY LS Z RUCHOMYM OKNEM

$$e_f^0(T_0, T) = y(T) - f^t(T_0, T-1)y(T-1)$$

$$f(T_0, T) = f(T_0, T-1) + g(T_0, T-1)e_f^0(T_0, T)$$

$$e_f(T_0, T) = e_f^0(T_0, T)[1 - \gamma(T_0, T-1)]$$

$$e_f^1(T_0, T) = y(T_0+N) - f^t(T_0, T)y(T_0+N-1)$$

$$\varepsilon_f(T_0, T) = \varepsilon_f(T_0, T-1) + e_f^0(T_0, T)e_f(T_0, T)$$

$$[g(T_0, T|N+1)]_1 = \frac{e_f(T_0, T)}{\varepsilon_f(T_0, T)}$$

$$[g(T_0, T|N+1)]_{2,N+1} = g(T_0, T-1) - [g(T_0, T|N+1)]_1 f(T_0, T)$$

$$[h(T_0, T|N+1)]_1 = \frac{e_f^1(T_0, T)}{\varepsilon_f(T_0, T)}$$

$$[h(T_0, T|N+1)]_{2,N+1} = h(T_0, T-1) - [h(T_0, T|N+1)]_1 f(T_0, T)$$

$$f(T_0+1, T) = f(T_0, T) - h(T_0, T-1) \frac{e_f^1(T_0, T)}{1 - \gamma^1(T_0, T-1)}$$

$$\varepsilon_f(T_0+1, T) = \varepsilon_f(T_0, T) - \frac{[e_f^1(T_0, T)]^2}{1 - \gamma^1(T_0, T-1)}$$

$$b(T_0, T) = \frac{b(T_0, T-1) + e_b^0(T_0, T)[g(T_0, T|N+1)]_{1,N}}{1 - e_b^0(T_0, T)[g(T_0, T|N+1)]_{N+1}}$$

$$e_b^1(T_0, T) = y(T_0) - b^t(T_0, T)y(T_0+N)$$

$$g(T_0+1, T) = [g(T_0, T|N+1)]_{1,N} + [g(T_0, T|N+1)]_{N+1} b(T_0, T)$$

$$h(T_0+1, T) = [h(T_0, T|N+1)]_{1,N} + [h(T_0, T|N+1)]_{N+1} b(T_0, T)$$

$$\gamma(T_0+1, T) = \frac{\gamma(T_0, T-1) + e_f(T_0, T)[g(T_0, T|N+1)]_1 - e_b^0(T_0, T)[g(T_0, T|N+1)]_{N+1}}{1 - e_b^0(T_0, T)[g(T_0, T|N+1)]_{N+1}}$$

$$\gamma^1(T_0+1, T) = \gamma^1(T_0, T-1) + e_f^1(T_0, T)[h(T_0, T|N+1)]_1 - e_b^1(T_0, T)[h(T_0, T|N+1)]_N$$

$$b(T_0+1, T) = b(T_0, T) - h(T_0+1, T) \frac{e_b^1(T_0, T)}{1 - \gamma^1(T_0+1, T)}$$

$$\text{INICJACJA: } f(0, 0) = b(0, 0) = g(0, 0) = h(0, 0) = 0$$

$$\gamma(0, 0) = \gamma^{-1}(0, 0) = 0, \quad \varepsilon_f(0, -1) = \delta$$

$$\text{ZŁOŻONOŚĆ: } 13N+13 \text{ mnożeń, } 12N+7 \text{ dodawań}$$

W podobny sposób są wyprowadzane rekursje dla odpowiednika drabinkowego tego algorytmu. Dla wygody zapisu w większości rekursji pomijamy indeks początkowej chwili czasu. Jest on bowiem jednoznacznie związany z indeksem górnym, z długością okna i z rzędem zmiennej i jest równy $T_0 + N - n$. Do obliczania rekursji wykorzystuje się wszystkie dane z okna tylko dla $n = N$. Podkreślimy, że liczba próbek z okna, wykorzystywanych do obliczenia zmiennej rzędu n w chwili T jest różna od liczby próbek wykorzystywanych do obliczenia zmiennej rzędu $k \neq n$ w tej samej chwili. Dla $T > N$ obliczane są wszystkie rekursje dla kolejnych $n = 0, \dots, N$.

KRATOWY ALGORYTM KOWARIANCYJNY LS Z RUCHOMYM OKNEM

$$K_n(T_0 + N - n, T) =$$

$$= K_n(T_0 + N - n, T-1) + e_f(T|n-1)e_b(T-1|n-1) \frac{1}{1 - \gamma(T_0 + N - n + 1, T-1|n-1)}$$

$$k_n^f(T) = \frac{K_n(T_0 + N - n, T)}{\varepsilon_f(T|n-1)}, \quad k_n^b(T) = \frac{K_n(T_0 + N - n, T)}{\varepsilon_b(T-1|n-1)}$$

$$e_f(T|n) = e_f(T|n-1) - k_n^b(T)e_b(T-1|n-1)$$

$$e_b(T|n) = e_b(T-1|n-1) - k_n^f(T)e_f(T|n-1)$$

$$\varepsilon_f(T|n) = \varepsilon_f(T|n-1) - k_n^b(T)K_n(T_0 + N - n, T)$$

$$\varepsilon_b(T|n) = \varepsilon_b(T-1|n-1) - k_n^f(T)K_n(T_0 + N - n, T)$$

$$\gamma(T_0 + N - n, T|n+1) = \gamma(T_0 + N - n + 1, T|n) + \frac{[e_b(T|n)]^2}{\varepsilon_b(T|n)}$$

$$e_f^1(T|n) = e_f^1(T|n-1) - k_n^b(T)e_b^1(T-1|n-1)$$

$$e_b^1(T|n) = e_b^1(T-1|n-1) - k_n^f(T)e_f^1(T|n-1)$$

$$\gamma^1(T_0 + N - n, T|n+1) = \gamma^1(T_0 + N - n + 1|n) + \frac{[e_b^1(T|n)]^2}{\varepsilon_b(T|n)}$$

$$K_n(T_0 + N - n + 1, T) =$$

$$= K_n(T_0 + N - n, T) - e_f^1(T|n-1)e_b^1(T-1|n-1) \frac{1}{1 - \gamma^1(T_0 + N - n + 1, T-1|n-1)}$$

$$\text{INICJACJA: } K_{n+1}(-1) = e_b(-1|n) = e_b^1(-1|n) =$$

$$= \gamma^1(-1, n) = \gamma(-1, n) = 0, \text{ dla } n = 0, \dots, N$$

Dla $T = 0, 1, \dots$

$$e_f(T|0) = e_b(T|0) = y(T)$$

$$e_f^1(T|0) = e_b^1(T|0) = y(T_0 + N)$$

$$\gamma(T_0 + N + 1, T|0) = \gamma^1(T_0 + N + 1, T|0) = 0$$

$$\varepsilon_f(T|0) = \varepsilon_b(T|0) = \varepsilon_f(T-1|0) + y^2(T) - y^2(T_0 + N - 1)$$

ZŁOŻONOŚĆ: $16N$ mnożeń, $10N$ dodawań

Działanie algorytmów z ruchomym oknem rozpoczyna się zawsze w chwili $T = 0$. Dopóki T nie będzie większe od N , algorytmy muszą wykorzystywać siłą rzeczy próbki zerowe $y(T)$ dla $T < 0$. W początkowej fazie inicjacji dla $T < M - N - 1$ algorytmy działają więc jak algorytmy z oknem początkowym. Dopiero w stanie ustalonym oba algorytmy stają się faktycznie algorytmami z ruchomym oknem. Należy podkreślić, że w obu algorytmach wymagane jest zapamiętanie całego okna danych $y(T - M + 1), \dots, y(T)$.

Drugim rodzajem algorytmów kowariancyjnych LS są algorytmy ze wzrastającą pamięcią. W tym przypadku zakłada się, że T_0 jest ustalone i równe zeru. Dolne granice sumowania we wzorach (6.21) i (6.22) są zatem równe n , gdzie n jest rzędem filtru.

Zdefiniujemy — dla wygody zapisu — wielkości:

$$\beta(0, T|n) \triangleq \frac{\alpha(0, T|n)}{1 - \gamma(0, T|n)}, \quad \beta^1(0, T|n) \triangleq \frac{\alpha(0, T|n)}{1 - \gamma^1(0, T|n)}.$$

W przypadku algorytmu transwersalnego ze wzrastającą pamięcią indeksy $T_0 = 0$ oraz N będą opuszczone. W algorytmie tym należy dla $T > N$ obliczyć następujące rekursje:

TRANSWERSALNY ALGORYTM KOWARIANCYJNY LS ZE WZRASTAJĄCĄ PAMIĘCIĄ

$$e_f^0(T) = y(T) - f^t(T-1)y(T-1)$$

$$f(T) = f(T-1) + g(T-1)e_f^0(T)$$

$$e_f(T) = y(T) - f^t(T)y(T-1)$$

$$\varepsilon_f(T) = \varepsilon_f(T-1) + e_f(T)e_f^0(T)$$

$$[g(T|N+1)]_1 = \frac{e_f(T)}{\varepsilon_f(T)}$$

$$[g(T|N+1)]_{2, N+1} = g(T-1) - [g(T|N+1)]_1 f(T)$$

$$e_b^0(T) = y(T-N) - b^t(T-1)y(T)$$

$$b(T) = \frac{b(T-1) + e_b^0(T)[g(T|N+1)]_{1, N}}{1 - e_b^0(T)[g(T|N+1)]_{N+1}}$$

$$g(1, T) = [g(T|N+1)]_{1, N} + [g(T|N+1)]_{N+1} b(T)$$

$$\beta(T) = y^t(T)h(T-1)$$

$$\beta^1(T) = y^t(N-1)g(1, T)$$

$$g(T) = \frac{g(1, T) - \beta^1(T)h(T-1)}{1 - \beta(T)\beta^1(T)}$$

$$h(T) = h(T-1) - \beta(T)g(T)$$

INICJACJA: jak w algorytmie transwersalnym z ruchomym oknem

ZŁOŻONOŚĆ: $13N+6$ mnożeń, $11N+1$ dodawań

UWAGA: pierwsze N próbek należy przechować w pamięci

Odpowiednik kratowy tego algorytmu tworzą następujące rekursje, które należy obliczać dla $n = 1, \dots, N$, dla każdego $T > N$.

KRATOWY ALGORYTM LS ZE WZRASTAJĄCĄ PAMIĘCIĄ

$$K_n(T) = K_n(T-1) + e_f(1, T|n-1)e_b(T-1|n-1) \frac{1}{1 - \gamma(1, T-1|n-1)}$$

$$k_n^f(T) = \frac{K_n(T)}{\varepsilon_f(1, T|n-1)}, \quad k_n^b(T) = \frac{K_n(T)}{\varepsilon_b(T-1|n-1)}$$

$$e_f(T|n) = e_f(1, T|n-1) - k_n^b(T)e_b(T-1|n-1)$$

$$e_b(T|n) = e_b(T-1|n-1) - k_n^f(T)e_f(1, T|n-1)$$

$$\varepsilon_f(T|n) = \varepsilon_f(1, T|n-1) - k_n^b(T)K_n(T)$$

$$\varepsilon_b(T|n) = \varepsilon_b(T-1|n-1) - k_n^f(T)K_n(T)$$

$$e_f^1(T|n) = e_f^1(T-1|n) - e_f(T|n) \frac{\alpha(T-1|n)}{1 - \gamma(T-1|n)}$$

$$e_f(1, T|n) = e_f(T|n) + e_f^1(T|n) \frac{\alpha(T-1|n)}{1 - \gamma^1(T-1|n)}$$

$$\varepsilon_f(1, T|n) = \varepsilon_f(T|n) - [e_f^1(T|n)]^2 \frac{1}{1 - \gamma^1(T-1|n)}$$

$$\gamma(T|n+1) = \gamma(T-1|n) + \frac{[e_f(T|n)]^2}{\varepsilon_f(T|n)}$$

$$\gamma^1(T|n+1) = \gamma^1(T-1|n) + \frac{[e_f^1(T|n)]^2}{\varepsilon_f(T|n)}$$

$$\alpha(T|n+1) = \alpha(T-1|n) + \frac{e_f^1(T|n)e_f(T|n)}{\varepsilon_f(T|n)}$$

$$\gamma(1, T|n) = \gamma(T|n+1) - \frac{[e_b(T|n)]^2}{\varepsilon_b(T|n)}$$

INICJACJA: $K_n(-1) = 0$, $n = 1, \dots, N$

$$\gamma(-1|0) = \gamma^1(-1|0) = \alpha(-1|0) = 0$$

$$e_f^1(0|n) = \begin{cases} y(0) & \text{dla } n = 0 \\ 0 & \text{dla } n > 0 \end{cases}$$

$$e_f(T|0) = e_b(T|0) = y(T)$$

$$\varepsilon_f(T|0) = \varepsilon_b(T|0) = \varepsilon_f(T-1|0) + y^2(T)$$

ZŁOŻONOŚĆ: $21N$ mnożeń, $12N$ dodawań

Inicjacja obu algorytmów ze wzrastającą pamięcią jest kłopotliwa, gdyż dla $T = n$ macierz kowariancyjna $\hat{R}(n, T|n)$ jest osobliwa. Wielkości algorytmu zależne od tej macierzy są zatem nieokreślone. Tym niemniej, stosując pojęcie uogólnionej macierzy odwrotnej [44] i modyfikując odpowiednio operator P można i w tym przypadku uzyskać rozwiązanie gwarantujące minimum błędu w sensie miary LS. Podane wyżej warunki początkowe dla algorytmu kratowego zostały wyprowadzone w [45] przy wykorzystaniu pojęcia uogólnionej macierzy odwrotnej.

Do inicjacji algorytmu transwersalnego można także wykorzystać algorytm kratowy, łącznie z rekursjami po rzędzie dla wektorów f i b . Dla $T < N$ należy wówczas zwiększać rząd filtru o jeden dla każdej kolejnej iteracji.

7. ZNORMALIZOWANE FILTRY PREDYKCYJNE

Wprowadzenie normalizacji wielkości występujących w algorytmach rekursywnych LS [46, 36, 47] ma ogólnie na celu zmniejszenie wrażliwości występujących w nich zmienności na błędy związane ze skończoną dokładnością obliczeń. Generalnie rzecz biorąc, algorytmy znormalizowane mają znacznie lepsze właściwości numeryczne niż algorytmy nieznormalizowane [48, 49]. Algorytmy znormalizowane są również mało wrażliwe na nagłe zmiany wartości próbek sygnału. W przypadku algorytmów transwersalnych normalizacja prowadzi ponadto do zmniejszenia liczby rekursji. Zalety tej nie mają jednak (z małymi wyjątkami) algorytmy kratowe.

Przed ogólnym sformułowaniem problemu normalizacji celowe jest rozważenie znormalizowanej wersji struktury kratowej. Przy założeniu kryterium MMSE błędy $e_b(T|n)$ i $e_f(T|n)$ można potraktować jako elementy przestrzeni Hilberta zmiennych losowych o skończonej wartości średniokwadratowej. Normą tej przestrzeni jest pierwiastek z wartości średniokwadratowej

$$\|e_f(T|n)\| = \sqrt{E[e_f^2(T|n)]}. \quad (7.1)$$

Jeżeli równania (2.22) i (2.23) znormalizujemy względem tej normy i uwzględnimy przy tym równości $E[e_f^2(T|n)] = E[e_b^2(T|n)]$ — por. wzory (2.16), (2.18) i (2.19) oraz $E[e_f^2(T|n)] = (1 - k_n^2)E[e_f^2(T|n-1)]$ — por. trzecia rekursja algorytmu Levinsona-Durbina, to otrzymamy następujące równania wiążące znormalizowane błędy predykcji w przód i wstecz

$$\bar{e}_f(T|n) = \frac{\bar{e}_f(T|n-1) - \bar{k}_n \bar{e}_b(T-1|n-1)}{\sqrt{1 - \bar{k}_n^2}} \quad (7.2)$$

$$\bar{e}_b(T|n) = \frac{\bar{e}_b(T-1|n-1) - \bar{k}_n \bar{e}_f(T|n-1)}{\sqrt{1 - \bar{k}_n^2}} \quad (7.3)$$

$$\bar{e}_f(T|0) = \bar{e}_b(T|0) = \frac{y(T)}{\sqrt{E[y^2(T)]}}. \quad (7.4)$$

Z równań tych wynika natychmiast znormalizowana struktura kratowa, której jedno

ogniwo jest przedstawione na rysunku. Normy błędów występujących w równaniach (7.2)—(7.4) są oczywiście równe jedności.

Problem normalizacji można przedstawić w sposób ogólny na gruncie ujęcia geometrycznego. Niech v oraz w będą dowolnymi wektorami, zaś M przestrzenią Hilberta. Rozważmy następujący iloczyn skalarny:

$$\langle v, P_M^\perp w \rangle = v^i P_M^\perp w. \quad (7.5)$$

Wybierając odpowiednio wektory v i w oraz przestrzeń M , większość zmiennych skalarnych występujących w algorytmach nieznormalizowanych można przedstawić jako iloczyny skalarne typu (7.5). Na przykład, jeśli $v = u(T)$, $w = Y(T)$ i $M = M(T|1, n)$, gdzie wielkości $u(T)$, $Y(T)$ oraz $M(T|1, n)$ są zdefiniowane jak dla algorytmów nieznormalizowanych z oknem początkowym, wówczas błąd predykcji w przód można zapisać w postaci

$$e_f(T|n) = \langle u(T), P_{M(T|1, n)} Y(T) \rangle = u(T) P_{M(T|1, n)}^\perp Y(T). \quad (7.6)$$

Znormalizowaną wersję iloczynu skalarnego (7.5) zdefiniujemy następująco

$$\varrho_M(v, w) = \frac{v^i P_M^\perp w}{\sqrt{(v^i P_M^\perp v)(w^i P_M^\perp w)}}. \quad (7.7)$$

Zastosowanie tej definicji np. do błędu $e_f(T|n)$ prowadzi do następującej znormalizowanej wersji tego błędu

$$\bar{e}_f(T|n) = \frac{e_f(T|n)}{\sqrt{[1 - \gamma(t-1|n)] \varepsilon_f(T|n)}}. \quad (7.8)$$

Podobnie można znormalizować inne wielkości będące iloczynami skalarnymi. Definicję znormalizowanego iloczynu skalarnego (7.7) wykorzystamy do wyprowadzenia znormalizowanej formuły rekursywnej dla iloczynu skalarnego dowolnego wektora v i wektora otrzymanego w wyniku zastosowania operatora błędu (6.10):

$$v^i P_{M \oplus \bar{X}}^\perp Y = v^i P_M^\perp Y - v^i P_{P_M^\perp \bar{X}}^\perp Y. \quad (7.9)$$

Zastępując we wzorze (7.9) nieznormalizowane iloczyny skalarne iloczynami znormalizowanymi, otrzymamy

$$\varrho_{M \oplus \bar{X}}(v, Y) = \frac{\varrho_M(v, Y) - \varrho_M(v, X) \varrho_M(X, Y)}{\sqrt{[1 - \varrho_M^2(v, X)][1 - \varrho_M^2(X, Y)]}}. \quad (7.10)$$

W [45] wykazano, że znormalizowana formuła rekursywna (7.10) jest podstawą do wyprowadzania wszystkich znormalizowanych rekursji po rzędzie oraz rekursji po czasie w przód i wstecz, występujących w algorytmach znormalizowanych. Należy tylko w odpowiedni sposób zdefiniować wektory v , X , Y i przestrzeń M .

7.1. ZNORMALIZOWANY REKURSYWNY ALGORYTM KRATOWY LS Z OKNEM POCZĄTKOWYM

Jako przykład zastosowania ogólnej formuły (7.10) zostanie omówiony znormalizowany rekursywny algorytm kratowy LS z oknem początkowym. Przy przyjęciu kryterium LS normę należy rozumieć jako zwykłą normę przestrzeni euklidesowej. Odpowiednikiem

zmiennej losowej $e_f(T|n)$ jest w tej przestrzeni wektor błędów predykcji w przód $E_f(T|n)$ a jego norma w kwadracie jest miarą LS błędu. Postępując zgodnie z omówioną zasadą normowania wielkości, wektor $E_f(T|n)$ należałoby zatem znormalizować względem jego normy:

$$\bar{E}_f(T|n) = \frac{E_f(T|n)}{\|E_f(T|n)\|} = \frac{E_f(T|n)}{\sqrt{\varepsilon_f(T|n)}}. \quad (7.11)$$

Tego typu normalizacja nie prowadzi jednak do zmniejszenia liczby zmiennych, które będą występować w algorytmie znormalizowanym i tym samym do zmniejszenia liczby rekursji. Okazuje się, że znacznie korzystniejsza jest normalizacja zdefiniowana wzorem (7.7). Adaptując wzór (7.7) do wektora $E_f(T|n)$, otrzymamy nieco odmiennie znormalizowany wektor błędów predykcji w przód

$$\bar{E}_f(T|n) = \frac{E_f(T|n)}{\sqrt{1 - \gamma(T-1|n) \varepsilon_f(T|n)}}. \quad (7.12)$$

Jeżeli zastosujemy tego typu normalizację do rekursji dla $e_f(T|n)$ i $e_b(T|n)$ (por. algorytm nieznormalizowany), to otrzymamy rekursję znormalizowane

$$\bar{e}_f(T|n+1) = \frac{\bar{e}_f(T|n) - \bar{k}_{n+1}(T) \bar{e}_b(T-1|n)}{\sqrt{[1 - k_{n+1}^2(T)] [1 - \bar{e}_f^2(T-1|n)]}} \quad (7.13)$$

oraz

$$\bar{e}_b(T|n+1) = \frac{\bar{e}_b(T-1|n) - \bar{k}_{n+1}(T) \bar{e}_f(T|n)}{\sqrt{[1 - k_{n+1}^2(T)] [1 - \bar{e}_f^2(T|n)]}}, \quad (7.14)$$

gdzie

$$\bar{k}_{n+1}(T) = \frac{\langle E_f(T|n), z^{-1} E_b(T|n) \rangle}{\sqrt{e_f(T|n) e_b(T-1|n)}} \quad (7.15)$$

jest znormalizowanym współczynnikiem odbicia.

Zwróćmy uwagę, że w rekursjach (7.13) i (7.14) występuje już tylko jeden współczynnik $\bar{k}_{n+1}$ w miejsce różnych współczynników k_{n+1}^f oraz k_{n+1}^b . Współczynnik ten możemy obliczać z rekursji otrzymanej w wyniku normalizacji rekursji dla $K_{n+1}(T)$ (dla nieznormalizowanego współczynnika odbicia):

$$\bar{k}_{n+1}(T) = \bar{k}_{n+1}(T-1) \sqrt{[1 - \bar{e}_f^2(T|n)] [1 - \bar{e}_b^2(T-1|n)]} + \bar{e}_f(T|n) \bar{e}_b(T-1|n). \quad (7.16)$$

Zmienna γ znika w wyniku normalizacji. Błędy znormalizowane $\bar{e}_f$ i $\bar{e}_b$ są powiązane ze sobą zależnością nieliniową, podczas gdy błędy nieznormalizowane związane były liniowo. W rekursjach znormalizowanych znika także współczynnik wagi w . Będzie on występował tylko w etapie inicjacji. Siedem rekursji algorytmu nieznormalizowanego redukuje się do trzech rekursji znormalizowanych. Mimo to rośnie złożoność obliczeniowa algorytmu, przede wszystkim ze względu na konieczność obliczania pierwiastków kwadratowych. Algorytm znormalizowany jest natomiast znacznie mniej wrażliwy na błędy zaokrąglania.

ZNORMALIZOWANY ALGORYTM KRATOWY LS Z OKNEM POCZĄTKOWYM

REKURSJE: (7.16), (7.13) i (7.14)

STAŁA ALGORYTMU: w (tylko w etapie inicjacji)

INICJACJA: $\bar{e}_b(-1|n) = \bar{k}_{n+1}(-1) = 0, \quad n = 0, \dots, N-1$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(T) &= w\varepsilon(T-1) + y^2(T), \quad \varepsilon(-1) = 0 \\ \bar{e}_f(T|0) &= \bar{e}_b(T|0) = \frac{y(T)}{\sqrt{\varepsilon(T)}} \end{aligned} \right\} T = 0, 1, \dots$$

ZŁOŻONOŚĆ: $12N$ mnożeń, $6N$ dodawań, $3N$ pierwiastkowań

7.2. ZNORMALIZOWANY ALGORYTM TRANSWERSALNY LS Z OKNEM POCZĄTKOWYM

Technika wyprowadzania rekursji niezbędnych do konstrukcji tego algorytmu jest podobna. Jeżeli zmienne zdefiniujemy tak jak w algorytmie nieznormalizowanym i przyjmujemy następujące normalizacje:

$$\bar{f}(T|N) = \frac{f(T|N)}{\sqrt{\varepsilon_f(T|N)}}, \quad \bar{b}(T|N) = \frac{b(T|N)}{\sqrt{\varepsilon_b(T|N)}}, \quad \bar{g}(T|N) = \frac{g(T|N)}{\sqrt{1-\gamma(T|N)}}$$

oraz oznaczenia pomocnicze

$$x^c = \sqrt{1-x^2}, \quad x^{-c} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad z(T) = \bar{e}_f(T)\bar{e}_f^{-c}(T)$$

wówczas algorytm ten przyjmie postać

ZNORMALIZOWANY ALGORYTM TRANSWERSALNY LS Z OKNEM POCZĄTKOWYM

$$\bar{e}_f^0(T) = \frac{y(T)}{\sqrt{\varepsilon_f(T-1)}} - \bar{f}^c(T-1)y(T)$$

$$z(T) = \frac{1}{\sqrt{w}} \bar{e}_f^0(T) \sqrt{1-\gamma(T-1|N)}$$

$$\bar{e}_f^{-c}(T) = \sqrt{1+z^2(T)}$$

$$\sqrt{1-\gamma(T|N+1)} = \bar{e}_f^c(T) \sqrt{1-\gamma(T-1|N)}$$

$$f(T) = \frac{1}{\sqrt{w}} \bar{e}_f^c(T) \bar{f}(T-1) + \bar{e}_f(T) \bar{g}(T-1)$$

$$\sqrt{\varepsilon_f(T)} = \sqrt{w} \sqrt{\varepsilon_f(T-1)} \bar{e}_f^{-c}(T)$$

$$\bar{g}(T|N+1) = \bar{e}_f^{-c}(T) \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{g}(T-1|N) \end{bmatrix} + z(T) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_f(T)}} \\ -\bar{f}(T) \end{bmatrix}$$

$$\bar{e}_b(T) = \sqrt{w} \sqrt{\varepsilon_b(T-1)} [\bar{g}(T|N+1)]_{N+1}$$

$$\bar{e}_c^b(T) = \sqrt{1 - \bar{e}_b^2(T)}$$

$$\sqrt{\varepsilon_b(T)} = \sqrt{w} \sqrt{\varepsilon_b(T-1)} \bar{e}_b^{-c}(T)$$

$$\sqrt{1 - \gamma(T|N)} = \sqrt{1 - \gamma(T|N+1)} \bar{e}_b^{-c}(T)$$

$$\bar{b}(T) = \frac{1}{\sqrt{w}} \bar{e}_b^{-c}(T) \bar{b}(T-1) + \bar{e}_b^{-c}(T) \bar{e}_b(T) [\bar{g}(T|N+1)]_{1..N}$$

$$(T|N) = \bar{e}_b^c(T) [\bar{g}(T|N+1)]_{1..N} + \bar{e}_b(T) \bar{b}(T)$$

STAŁA ALGORYTMU: w

ZŁOŻONOŚĆ: $9N+17$ mnożeń, $5N+2$ dodawań, 2 pierwiastkowania

Złożoność rekursji i zarazem złożoność obliczeniowa algorytmu znormalizowanego wzrasta w porównaniu do algorytmu nieznormalizowanego. Podobnie jest dla algorytmów znormalizowanych kowariancyjnych z ruchomym oknem i ze wzrastającą pamięcią. Algorytmy te są już bardzo „wyrafinowane”. Ze względu na dużą złożoność, ich użyteczność w praktyce nie jest jeszcze należyście sprawdzona. Badania symulacyjne potwierdzają jednak znacznie lepsze właściwości numeryczne algorytmów znormalizowanych [50, 51].

8. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawione w pracy metody należą do liniowych metod modelowania sygnałów i zostały opracowane przy założeniu, że modelowane sygnały są sygnałami rzędu 2 (tzn. są opisane charakterystykami probabilistycznymi rzędu drugiego). Liniowe metody modelowania prowadzą do rozwiązań, w których korzysta się z kryterium średniokwadratowego MMSE estymacji modelu. Jak wiadomo, estymator średniokwadratowy jest optymalny jedynie dla klasy sygnałów gaussowskich, a więc sygnałów, dla których do pełnego opisu wystarcza znajomość charakterystyk probabilistycznych rzędu drugiego.

W przypadku, gdy sygnał nie jest gaussowski, tzn. gdy do jego opisu wymagana jest znajomość charakterystyk wyższego rzędu, metody liniowe mogą prowadzić do znacznych błędów modelowania. Zwiększenie dokładności modelowania sygnałów wyższych rzędów można uzyskać w różny sposób. Jednym ze sposobów jest zastosowanie nieliniowych metod estymacji średniokwadratowej, w których wykorzystuje się nieliniowe filtry predykcyjne jako uogólnienie filtrów liniowych. Innym sposobem jest wprowadzenie składnika nieliniowego do równań liniowych, powodującego zmniejszenie wrażliwości estymatora na zmianę typu rozkładu sygnału. Ta klasa metod nosi w literaturze nazwę metod „krzepkich” (ang. robust).

Zastosowanie obu wymienionych sposobów w zagadnieniach praktycznych napotyka jednakże na szereg trudności i ograniczeń. Przede wszystkim, złożoność metod nieliniowych jest znacznie większa niż liniowych, co stawia pod znakiem zapytania ich użyteczność w modelowaniu w czasie rzeczywistym. Trwają wprawdzie prace nad metodami wyznaczania nieliniowych filtrów predykcyjnych pracujących w tzw. modularnych strukturach ortogonalnych (złożonych z jednorodnych sekcji dodawanych wraz ze wzrostem rzędu

nieliniowości bez zmiany poprzednio wyznaczonej struktury filtru), jednak złożoność obliczeniowa algorytmów jest nadal nieporównanie większa niż w przypadku liniowym. Jest to szczególnie wyraźne dla wyższych rzędów nieliniowości; złożoność struktury filtru nieliniowego rośnie bowiem bardzo szybko wraz ze stopniem nieliniowości. Ponadto w zastosowaniach praktycznych nie są z reguły znane charakterystyki probabilistyczne sygnałów, a w szczególności ich rząd. Trudno zatem rozstrzygnąć a priori, którego rzędu charakterystyki są istotne w opisie sygnału, a tym samym ile sekcji filtru nieliniowego należy uwzględnić.

Złożoność metod nieliniowych, nie w pełni jeszcze ugruntowane podstawy teoretyczne i trudności w implementacji programowej oraz realizacji sprzętowej sprawiają, że nie są one z reguły stosowane w praktyce. Póki co w zagadnieniach przetwarzania sygnałów w czasie rzeczywistym korzysta się na ogół z liniowych metod modelowania AR opisanych w niniejszej pracy, z ewentualną modyfikacją tych metod w kierunku zastosowania algorytmów typu *robust*.

Omówione metody i algorytmy znajdują zastosowanie w wielu dziedzinach techniki. Są między innymi stosowane do odszumiania sygnałów, do analizy i syntezy sygnału mowy, analizy sygnałów geofizycznych i biomedycznych, eliminacji zakłóceń w systemach radarowych i sonarowych, adaptacyjnego sterowania obiektami i procesami technologicznymi, adaptacyjnego sterowania wiązką w antenach fazowych, do przetwarzania obrazów itp. Szeroko wykorzystuje się je także w telekomunikacji do kompresji pasma w systemach DPCM, do korekcji (wyrównywania) charakterystyki kanału transmisyjnego oraz do tłumienia ech w sieciach telefonicznych.

BIBLIOGRAFIA

1. G. E. Box, G. M. Jenkins: *Analiza szeregów czasowych. Prognozowanie i sterowanie*. Warszawa: PWN, 1983 (tłum. z ang.)
2. P. Eykhoff: *System identification. Parameter and state estimation*. New York: J. Wiley and Sons, 1974
3. K. Mańczak, Z. Nahorski: *Komputerowa identyfikacja obiektów dynamicznych*. Warszawa: PWN, 1983
4. T. W. Anderson: *The statistical analysis of time series*. New York: J. Wiley, 1971
5. E. J. Hannan: *Time series analysis*. London: Methuen, 1964
6. D. R. Brillinger: *Time series data analysis and theory*. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1975
7. J. Makhoul: *Linear prediction: a tutorial review*. Proc. IEEE, 1975, 63, 561—580
8. A. Papoulis: *Predictable processes and Wold's decomposition, A review*. IEEE Trans. on ASSP-33, 1985, 933—938
9. A. Papoulis: *Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne*. Warszawa: WNT, 1972 (tłum z ang.)
10. N. Levinson: *The Wiener (root mean square) error criterion in filter design and prediction*. J. Math. Phys., 1974, vol. 25, 261—278
11. J. Durbin: *The fitting of time series models*. Rev. Inst. Int. the Stat., 1960 vol. 28, 233—244,
12. A. H. Gray, Jr., J. D. Markel: *Digital lattice and ladder filter synthesis*. IEEE Trans. on Audio Electroacoustic, 1973, 21, 491—500
13. J. D. Markel, A. H. Gray, Jr.: *Linear prediction of speech*, Springer-Verlag, 1976

14. T. Kailath: *A view of three decades of linear filtering theory*. IEEE Trans. on Inform. Theory-20, 1974, 146—181
15. A. Wojtkiewicz: *Elementy syntezy filtrów cyfrowych*, Warszawa: WNT, 1984
16. D.N. Swingler: *A comparison between Burg's maximum entropy method and a nonrecursive technique for the spectral analysis of deterministic signals*. J. Geophysical Res., 1979, vol. 84, 679—685, No. 10
17. B. Friedlander, M. Morf, T. Kailath, L. Ljung: *New inversion formulas for matrices classified in terms of their distance from Toeplitz matrices*. Linear Algebra and Its Applications, 1979 vol. 27, 31—60
18. M. Morf, B. Dickinson, T. Kailath, A. Vieira: *Efficient solution of covariance equations for linear prediction*, IEEE Trans. on ASSP, 1977, vol. 25, 429—433
19. T.J. Ulrych, R.W. Clayton: *Time series modelling and maximum entropy*. Phys. Earth Planetary Interiors, 1976, vol. 12, 188—200
20. A.H. Nuttall: *Spectral analysis of a univariable process with bad data points, via maximum entropy, and linear predictive techniques*. Naval Underwater Systems Center, Tech. Rep. 5303, New London, CT, 1976
21. S.L. Marple, Jr.: *A new autoregressive spectrum analysis algorithm*. IEEE Trans. on ASSP, 1980, vol. 28, 441—454
22. J.P. Burg: *Maximum entropy spectral analysis*; in Proc. 37th Meeting Society of Exploration Geophysicists, Oklahoma City, 1967
23. N.O. Anderson: *Comments on the performance of maximum entropy algorithms*. Proc. IEEE 1978, vol. 66, 1581—1582
24. B. Widrow, M.E. Hoff: *Adaptive switching circuits*. Wescon Conf. Record, IRE, 1960
25. D.J. Sakrison: *Stochastic approximation: a recursive method for solving regression problems*; in Advances in Communication Systems, ed. A. V. Balakrishnan, Academic Press, N.Y., 1966
26. M.L. Honig, D.G. Messerschmitt: *Adaptive filters*. Kluwer Academic Publishers, 1985
27. H. Robbins, S. Monro: *A stochastic approximation method*. Ann. Math. Statist., 1951, vol. 22
28. R.D. Gitlin, J.E. Mazo, M.G. Taylor: *On the design of gradient algorithms for digitally implemented adjustment filters*. IEEE Trans. on CT, 1973, vol. 20
29. D.L. Duttweiler: *Adaptive filter performance with nonlinearities in the correlation multiplier*. IEEE Trans. on ASSP. 1982 vol. 30, 578—586
30. R.W. Harris, D.M. Chabries, F.A. Bishop: *A variable step (VS) adaptive filter algorithm*. IEEE Trans. on ASSP, 1986 vol. 34, 309—316
31. D. Godard: *Channel equalization using Kalman filter for fast data transmission*. IBM J. of Res. and Dev., 1974, 267—273
32. L. Ljung, M. Morf, D. Falconer: *Fast calculation of gain matrices for recursive estimation schemes*. Int. J. Control 27, 1—19, 1978
33. D. Falconer, L. Ljung: *Application of fast Kalman estimation to adaptive equalization*. IEEE Trans. on Comm., 26, 1439—1446, 1978
34. M. Morf, D.T. Lee, J.R. Nickolls, A. Vieira: *A classification of algorithms for ARMA models and ladder realizations*. Proc. IEEE Conf. ASSP, 1977, 13—19
35. M. Morf, A. Vieira, D.T. Lee: *Ladder forms for identification and speech processing*. Proc. IEEE Conf. Decision and Control, 1074—1078, 1977
36. B. Friedlander: *Lattice filters for adaptive processing*. Proc. of the IEEE, 1982, 70, 829—867
37. C. Samson: *A unified treatment of fast Kalman algorithms for identification*. Int. J. of Control, 1982 53, 909—934
38. J.M. Cioffi, T. Kailath: *Fast recursive — Least-Squares, transversal filters for adaptive filtering*. IEEE Trans. on ASSP, 1984, 32
39. M.J. Shensa: *Recursive last-squares lattice algorithms. A geometrical approach*. IEEE Trans. on AC, 1981, 26, 695—702
40. D.T. Lee, M. Morf, B. Friedlander: *Recursive square-root ladder estimation algorithms*. IEEE Trans. on ASSP, 1981, 29, 627—641

41. J. M. Cioffi, T. Kailath: *Fast, fixed-order, least-squares algorithms for adaptive filtering*. Proc. IEEE Int. Conf. on ASSP, 1983
42. M. L. Honig: *Recursive fixed-order covariance least-squares algorithms*. Bell System Technical Journal-62, 1983, 2961—2992
43. N. Kalouptsidis, G. Carayannis, D. Manolakis: *Efficient recursive in order least-squares FIR filtering and prediction*. IEEE Trans. on ASSP 1985, 33
44. C. L. Lawson, R. J. Hanson: *Solving least-squares problems*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974
45. B. Porat, B. Friedlander, M. Morf: *Square root covariance ladder algorithms*. IEEE Trans. on AC-27, 1982, 813—829
46. A. H. Gray, Jr., J. D. Markel: *A normalized digital filter structure*. IEEE Trans. on ASSP-23, 1975, 268—277
47. P. Fabre, C. Gueguen: *Improvement of the fast recursive least-squares algorithms via normalization: a comparative study*. IEEE Trans. on ASSP-34, 1986
48. F. Ling, G. Proakis: *Numerical accuracy and stability: two problems of adaptive estimation algorithms caused by roundoff errors*. Proc. ICASSP, San Diego, 1984
49. D. Manolakis, G. Carayannis, N. Kalouptsidis: *On the computational organization of the fast sequential algorithms*. Proc. ICASSP, San Diego, 1984
50. D. W. Lin: *On digital implementation of the fast Kalman algorithm*. IEEE Trans. on ASSP, 1984, 32
51. S. Ljung, L. Ljung: *Error propagation properties of RL adaptation algorithms*. Automatica, 1985

J. SZABATIN, A. WOJTKIEWICZ

BLOCK AND RECURSIVE ALGORITHMS FOR THE ESTIMATION OF AR. PARAMETERS OF TIME SERIES

Summary

An overview of modern AR methods of signal modelling, using linear predictive filters, is presented. The problems, scattered in literature, are surveyed in a critical and formally unified manner. Coefficient estimation algorithms based on a finite number of samples are discussed for both transversal and lattice filters. Block and recursive algorithms using various optimisation criteria are analysed. Special attention is paid to gradient and recursive LS adaptive algorithms for calculating filter coefficients. Most of algorithms are presented in table form allowing for simple software implementation.

J. SZABATIN, A. WOJTKIEWICZ

ALGORITHMES DE BLOC ET RÉCURSIFS DE L'ESTIMATION DES PARAMÈTRES AR DES SÉRIES TEMPORALES

Résumé

Dans cet article on a passé en revue les méthodes modernes AR de modélisation des signaux par des filtres linéaires de prédiction. On a discuté d'une façon critique et uniforme les problèmes dissipés, jusqu'à présent, dans la littérature périodique du sujet. On a présenté des algorithmes d'estimation des coefficients des filtres, ayant la structure transversale et en treillis sur la base d'un nombre fini d'échantillons du signal. On a analysé des algorithmes de bloc et rékursifs, construits en utilisant des critères d'optimisation des filtres divers. L'attention particulière est portée à des algorithmes de gradient et rékursifs LS pour la détermination adaptative des coefficients du filtre. La plupart des algorithmes discutés sont présentés sous la forme de tableaux, qui rendent possible la réalisation simple des programmes correspondants.

J. SZABOTIN, A. WOJTKIEWICZ

BLOCK- UND REKURSIVE ALGORITHMEN DER PARAMETERÄSTIMATION VON AR-ZEITREIHEN

Zusammenfassung

In der Bearbeitung wird ein Überblick über die modernen AR-Methoden der Signalmodellierung mit Hilfe von linearen prädiktiven Filtern gegeben. Kritisch und unter formeller Hinsicht vereinheitlichend werden die, bisher in der periodischen Literatur zerstreuten Probleme erörtert. Es werden die Schätzalgorithmen der Filterkoeffizienten in transversaler und Lattice-Struktur auf Grund der endlichen Anzahl von Signalwerten dargestellt. Im weiteren werden die Block- und rekursive Algorithmen untersucht, die bei verschiedenen Optimierungskriterien für den Filter konstruiert worden sind. Besonders ausführlich wurden die Gradientenalgorithmen und rekursive LS-Algorithmen der adaptiven Auswertung von Koeffizienten dargestellt. Die Mehrzahl der Algorithmen wird in tabellarischer Form präsentiert, was deren einfache Programmierung ermöglicht.

В. ШАБОТИН, А. ВОЙТКЕВИЧ

БЛОЧНЫЕ И РЕКУРСИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ AR

Резюме

Приведен обзор современных методов AR моделирования сигналов с помощью линейных прогнозирующих фильтров. Критически и одновременно с единых формальных позиций обсуждаются вопросы, до настоящего времени разбросанные в периодической литературе. Представлены алгоритмы оценки коэффициентов фильтров с трансверсальной и решетчатой структурой, проводимой на основании ограниченной выборки значений сигнала. Проведен анализ блочных и рекурсивных алгоритмов, построенных исходя их различных критериев оптимальности фильтра. Специальное внимание уделено обсуждению градиентных и рекурсивных LS алгоритмов адаптивного расчёта коэффициентов фильтра. Большая часть обсуждаемых алгоритмов представлена в форме таблиц, что упрощает их программную реализацию.

Analiza ogólnej struktury równań dynamiki układów elektromechanicznych o cyklicznie przełączanych uzwojeniach

ADAM S. JAGIEŁŁO

Instytut Maszyn i Sterowania Układów Elektroenergetycznych

Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

Otrzymano, 1987.10.22

Autoryzowano do druku 1989.02.29

W artykule przedstawiono równania dynamiki układu z więzami nieholonomicznymi liniowymi. Wybrano typy więzów, które znalazły ostatnio zastosowanie w analizie układów z przełączanymi uzwojeniami. Wykazano dalej, że niezależnie czy analizowany układ to maszyna komutatorowa, przekształtnikowa czy zasilana z układu falownikowego równania więzów wykazują pewne istotne cechy wspólne. Ma to istotny wpływ na postać rozwiązań równań modelu matematycznego. W ostatnim rozdziale artykułu oraz we wnioskach wskazano na błędną interpretację fizyczną stosowaną w literaturze naukowo-technicznej pewnych członów równań tworzących model matematyczny maszyn komutatorowych.

1. WSTĘP

Przez układy elektromechaniczne z cyklicznie przełączanymi uzwojeniami będziemy rozumieli takie układy, w których część elektryczna jest cyklicznie łączona ze źródłem zasilania lub zmienia swoją konfigurację połączeń. Pierwszy z tych przypadków zachodzi w czasie zasilania maszyn wielofazowych z układów przekształtnikowych, drugi jest przypadkiem maszyny komutatorowej prądu stałego lub zmiennego. Można przyjąć, że istnieją trzy podstawowe metody opisu układów z cyklicznie przełączanymi uzwojeniami. Pierwsza z nich to metoda „zmiennej struktury” polegająca na analizie układu w „okresach międzykomutacyjnych” przy warunkach początkowych wyliczonych oddzielnie z warunków końcowych poprzedniego okresu na podstawie „zasad zachowania”. Druga metoda ma charakter wyłącznie numeryczny i bazuje na metodzie „całkowania równań sztywnych” — trzecia metoda opisana w pracy [3] bazuje na teorii układów z więzami nieholonomicznymi. Spośród tych wymienionych metod, tylko ta ostatnia daje pewien wgląd w obiekt jeszcze na etapie modelu matematycznego, a przed przystąpieniem do obliczeń dla konkretnych danych technicznych.

2. RÓWNANIA DYNAMIKI UKŁADU Z CYKLICZNIE PRZELĄCZANYMI UZWOJENIAMI

Ogólne prawa dynamiki, w tym także i elektrodynamiki, można wyprowadzić z równań d'Alemberta-Lagrange'a:

$$\sum_{l=0}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_l} + N_l \right] \delta q_l = 0 \quad 2.1$$

gdzie: $\mathcal{L}$ jest funkcją potencjału kinetycznego, natomiast N_l jest l -tą niepotencjalną siłą działającą w układzie. Wyrażenie δq_l jest wariacją izochroniczną współrzędnej q_l . Jedynie w przypadku, gdy na współrzędne nie są narzucone więzy równanie 2.1 sprowadza się do układu równań Lagrange'a drugiego rodzaju. W przypadku nas interesującym na współrzędne są narzucone więzy nieholonomiczne liniowe w postaci:

$$\begin{aligned} \dot{q}_{M+j} - \sum_{i=1}^B a_{ji}(U_{0i}, U_{1i}, \dots, U_{Bi}) \dot{q}_i &= 0 \\ j &= 1, 2, \dots, K. \end{aligned} \quad 2.3$$

gdzie: M jest dowolną liczbą całkowitą większą od zera [3].

W przypadku takim równanie d'Alemberta-Lagrange'a sprowadza się do układu równań [3]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial q_i} - \frac{1}{\dot{q}_i} \sum_{j=0}^B \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial U_{ji}} \dot{U}_{ji} = U_i - \sum_{k=1}^B R_{ik} \dot{q}_k \quad 2.2a$$

$$i = 1, \dots, B$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial q_l} = U_l - R_l \dot{q}_l \quad l = B+1, \dots, M. \quad 2.2b$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \varphi} + \sum_{i=1}^B \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial U_{0i}} = T \quad 2.2c$$

gdzie:

$\hat{\mathcal{L}}$ — jest funkcją potencjału kinetycznego uwzględniającą równania więzów,

T — jest momentem sił niepotencjalnych działających na układ.

Dalsze rozważania wymagają bliższego rozpatrzenia funkcji $\mathcal{L}$. Zauważmy, że równanie więzów 2.3 można przedstawić w postaci macierzy:

$$\dot{q}_N = W \dot{Q}_z \quad 2.4$$

gdzie:

$$\dot{q}_N^T = [\dot{q}_{M+1} \dots \dot{q}_{M+K}]$$

$$\dot{Q}_z^T = [\dot{q}_1 \dots \dot{q}_B],$$

natomiast macierz W tworzą elementy $a_{ji}(U_{0i}, \dots, U_{Bi})$.

Funkcję potencjału kinetycznego $\mathcal{L}$ można zapisać ogólnie dla przetworników o ruchu obrotowym w postaci:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + E_{k0}(\varphi, \dot{Q}_z, \dot{q}_w, \dot{q}_N) - E_p(Q_z, q_w), \quad 2.5$$

gdzie:

J — jest momentem bezwładności

E_{k0} — funkcją koenergii magnetycznej układu

E_p — funkcją energii potencjalnej układu

$\varphi = q_0$ — kątem obrotu części ruchomej układu.

Z powyższych związków wynika, że równanie więzów 2.4 interweniuje w część funkcji Lagrange'a, określoną koenergią magnetyczną układu. Jeśli przyjąć, że obwód magnetyczny analizowanego obiektu jest liniowy, to koenergię tą można zapisać w postaci formy kwadratowej:

$$E_{k0} = \frac{1}{2} [\dot{Q}_z^T \dot{q}_w^T \dot{q}_N^T] \begin{bmatrix} L_{zz} & L_{zw} & L_{zN} \\ L_{wz} & L_{ww} & L_{wN} \\ L_{Nz} & L_{Nw} & L_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Q}_z \\ \dot{q}_w \\ \dot{q}_N \end{bmatrix}. \quad 2.6$$

Funkcja koenergii magnetycznej tylko wtedy jest zależna od współrzędnej mechanicznej φ , gdy hipermacierze utworzone z indukcyjności własnych i wzajemnych układu są zależne od tej współrzędnej.

Wylimitowanie zmiennych $\dot{q}_N$ z formy kwadratowej 2.6 za pomocą równania 2.4 pozwala napisać:

$$E_{k0} = \frac{1}{2} [\dot{Q}_z^T \dot{q}_w^T] \begin{bmatrix} \hat{L}_{zz} & \hat{L}_{zw} \\ \hat{L}_{wz} & L_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Q}_z \\ \dot{q}_w \end{bmatrix}, \quad 2.7$$

gdzie:

$$\hat{L}_{zz} = L_{zz} + 2W^T L_{Nz} + W^T L_{NN} W$$

$$\hat{L}_{zw} = \hat{L}_{wz}^T = L_{zw} + W^T L_{Nw}.$$

Zatem funkcja Lagrange'a ma teraz postać:

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + \hat{E}_{k0}(\varphi, \dot{Q}_z, \dot{q}_w, U_{0i} \dots U_{Bi}) - E_p(Q_z, q_w). \quad 2.8$$

Podstawienie funkcji 2.8 do równań 2.2 pozwala na sformułowanie modelu matematycznego układu elektromechanicznego z więzami nieholonomicznymi. Jak to wynika z relacji 2.7, postać tego modelu jest zależna w sposób istotny od kształtu równań więzów.

3. OGÓLNE POSTACIE FUNKCJI WIĘZÓW W UKŁADACH PRZELĄCZAJĄCYCH

W układach elektromechanicznych z cyklicznie przełączanymi uzwojeniami zawsze można wyodrębnić grupę obwodów, których konfiguracja pozostaje stała (obwody zewnętrzne tworników maszyn komutatorowych, obwody zasilania falowników itp). Pomiędzy

prądami płynącymi w obwodach przełączanych a obwodami o stałej strukturze w każdym i -tym przedziale międzykomutacyjnym zachodzi relacja:

$$\dot{q}_N = C_i \dot{Q}_z \quad i = 1, 2, \dots, K \quad 3.1$$

gdzie:

$\dot{q}_N^T = [\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N]$ jest macierzą kolumnową prądów w obwodach przełączanych,

$\dot{Q}_z^T = [\dot{Q}_1, \dots, \dot{Q}_B]$ — jest macierzą kolumnową prądów w obwodach nieprzełączanych,

C_i — jest i -tą macierzą więzów Krona,

K — jest maksymalną liczbą struktur układu.

Przedział obowiązywania danej struktury jest albo znany bezpośrednio, w przypadku sterowania przełączaniem zależnym od czasu lub pośrednio w przypadku sterowania zależnego od współrzędnej mechanicznej układu. W obydwu przypadkach macierz liczbowa więzów Krona możemy traktować jako macierz funkcyjną. Dokonując sklejenia tych funkcji otrzymamy w miejsce K relacji 3.1 jedną relację w postaci:

$$\dot{q}_N = W \dot{Q}_z, \quad 3.2$$

gdzie: W jest macierzą funkcyjną otrzymaną ze sklejenia funkcji tworzących macierze C_i . Macierz W jest funkcją czasu lub współrzędnej mechanicznej zależnie od przyjętego sposobu sterowania układem elektromechanicznym. Konkretnych postaci macierzy W może być bardzo wiele [3], zależnie od przyjętego rozwiązania danego obiektu technicznego. Tym niemniej mają one pewne cechy wspólne. Pierwszą z nich jest stałość wartości funkcji tworzących macierz W w przedziałach międzykomutacyjnych, drugą natomiast jest skokowa zmiana tej wartości, przy przejściu do następnego przedziału, jeśli tylko taka zmiana ma mieć miejsce. Te dwie cechy w sposób istotny wpływają na postać rozwiązań równań ruchu układów elektromechanicznych z cyklicznie przełączanymi uzwojeniami.

4. OGÓLNA STRUKTURA RÓWNAŃ DYNAMIKI UKŁADU ELEKTROMECHANICZNEGO O CYKLICZNIE PRZEŁĄCZANYCH UZWOJENIACH

Interpretacje fizyczne poszczególnych elementów struktury równań Lagrange'a II rodzaju nie przedstawia większych problemów. Zazwyczaj mamy do czynienia z równaniem napięć w oczku obwodu elektrycznego lub równaniem sił (momentów) w elementach mechanicznych układu elektromechanicznego. Zasadniczo inną problematykę mamy w przypadku równań dynamiki układów z przełączanymi uzwojeniami. Występujące tu człony

w postaci $\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial U_{ji}}$, są znacznie trudniejsze od interpretacji fizycznej, a ze względu na jednostki,

usiłowano im przypisywać interpretację, która niejako wynikała z tych jednostek [1], [2]. Rozważmy jednak dokładniej to zagadnienie. I tak:

$$\frac{\partial \hat{E}_{k0}}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} [\dot{Q}_z^T \dot{q}_w^T] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{L}_{zz} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{L}_{zw} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{L}_{wz} & \frac{\partial}{\partial \varphi} L_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Q}_z \\ \dot{q}_w \end{bmatrix} \quad 4.1$$

przy czym:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{L}_{zz} = \frac{\partial}{\partial \varphi} L_{zz} + 2 \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} W^T \right) L_{Nz} + 2 W^T \frac{\partial L_{Nz}}{\partial \varphi} + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} W^T \right) L_{NN} W + W^T \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} L_{NN} \right) W + W^T L_{NN} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} W \right) \quad 4.2$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{L}_{zw} = \frac{\partial}{\partial \varphi} L_{zw} + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} W^T \right) L_{Nw} + W^T \frac{\partial L_{Nw}}{\partial \varphi} \quad 4.3$$

Elementem szczególnie interesującym w związkach 4.1 jest pochodna macierzy więzów W względem współrzędnej mechanicznej. Zauważmy, że w przypadku sterowania zależnego od czasu pochodna ta będzie tożsamościowo równa zeru. Natomiast w przypadku sterowania zależnego od współrzędnej mechanicznej (maszyna przekształtnikowa, komutatorowa itp.) pochodna ta będzie różna od zera, i można ją zapisać w postaci:

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_{01}}{\partial \varphi} \frac{\partial a_{11}}{\partial U_{01}} & \dots & \frac{\partial U_{0B}}{\partial \varphi} \frac{\partial a_{1B}}{\partial U_{0B}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial U_{01}}{\partial \varphi} \frac{\partial a_{k1}}{\partial U_{01}} & \dots & \frac{\partial U_{0B}}{\partial \varphi} \frac{\partial a_{kB}}{\partial U_{0B}} \end{bmatrix} \quad 4.4$$

W omawianych układach, pochodna $\frac{\partial U_{0i}}{\partial \varphi}$ jest wielkością stałą i najczęściej równą jedności. Pochodne funkcji tworzących macierz W względem parametru U_{0j} są równe zeru w całym przedziale międzykomutacyjnym, natomiast różne od zera w punktach przełączeń. Ostatecznie nowa macierz pochodnych funkcji więzów będzie składała się z wyrażen, które możemy za pracą [4] określić pseudofunkcjami $\delta(U)$. Elementy pochodnej macierzy więzów określa zatem relacja:

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial U_{0j}} = \delta_{ij}(U_{0j}), \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, B \\ j = 1, \dots, B \end{matrix} \quad 4.5$$

Rozpatrzmy obecnie wyrażenie $\sum_{j=1}^B \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial U_{0j}}$. Zgodnie z relacją 2.7 będzie ono miało postać:

$$\sum_{j=1}^B \frac{\partial \hat{E}_{k0}}{\partial U_{0j}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^B [\dot{Q}_z^T \dot{q}_w^T] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial U_{0j}} \hat{L}_{zz} & \frac{\partial}{\partial U_{0j}} \hat{L}_{zw} \\ \frac{\partial}{\partial U_{0j}} \hat{L}_{wz} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Q}_z \\ \dot{q}_w \end{bmatrix}, \quad 4.6$$

przy czym:

$$\frac{\partial}{\partial U_{0j}} \hat{L}_{zz} = 2 \left(\frac{\partial}{\partial U_{0j}} W^T \right) L_{Nz} + \left(\frac{\partial}{\partial U_{0j}} W^T \right) L_{NN} W + W^T L_{NN} \left(\frac{\partial}{\partial U_{0j}} W \right) \quad 4.7$$

$$\frac{\partial}{\partial U_{0j}} \hat{L}_{zw} = \left(\frac{\partial}{\partial U_{0j}} W^T \right) L_{Nw} \quad 4.8$$

$$j = 1, \dots, B.$$

Jeśli zatem zapisać całe wyrażenie określające moment elektromagnetyczny ze wzoru 2.2c, to na podstawie powyższych rozważań otrzymamy:

$$\frac{\partial \hat{E}_{k0}}{\partial \varphi} - \sum_{j=1}^B \frac{\partial \hat{E}_{k0}}{\partial U_{0j}} = \frac{1}{2} [Q_z^T \dot{q}_w^T] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{\partial L_{zz}}{\partial \varphi} + 2W^T \frac{\partial L_{Nz}}{\partial \varphi} + W^T \frac{\partial L_{NN}}{\partial \varphi} W & \frac{\partial L_{zw}}{\partial \varphi} + W^T \frac{\partial L_{Nw}}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial L_{wz}}{\partial \varphi} + \frac{\partial L_{wN}}{\partial \varphi} W & \frac{\partial L_{ww}}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_z \\ \dot{q}_w \end{bmatrix}. \quad 4.9$$

Analogiczne problemy występują przy analizie poszczególnych członów równania 2.2a. Po podstawieniu wyrażenia 2.7 do pierwszego członu tego równania oraz wyczerpaniu wszystkich wartości współrzędnej indeksowanej otrzymamy:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_{k0}}{\partial \dot{q}_i} = \begin{bmatrix} \hat{L}_{zz} & \hat{L}_{zw} \\ \hat{L}_{wz} & \hat{L}_{ww} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{Q}_z \\ \dot{q}_w \end{bmatrix} + \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{bmatrix} \hat{L}_{zz} & \hat{L}_{zw} \\ \hat{L}_{wz} & \hat{L}_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Q}_z \\ \dot{q}_w \end{bmatrix} +$$

$$+ \sum_{j=0}^B U_{ji} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial U_{ji}} \hat{L}_{zz} & \frac{\partial}{\partial U_{ji}} \hat{L}_{zw} \\ \frac{\partial}{\partial U_{ji}} \hat{L}_{wz} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Q}_z \\ \dot{q}_w \end{bmatrix}. \quad 4.10$$

W powyższej relacji równościowej pochodna macierzy indukcyjności względem kąta obrotu wirnika φ jest równa macierzy występującej w formie kwadratowej 4.9. Szczególnie interesującym jest trzeci człon równania 2.2a, ze względu na fakt interpretowania poprzez literaturę naukowo-techniczną w tym między innymi przez prace [1], [2] jako napięcie rotacji. Jednakże, aby człon ten $\frac{1}{q_i} \sum_{j=0}^B \dot{U}_{ji} \frac{\partial \hat{E}_{k0}}{\partial U}$ zapisać w postaci hipermacierzowej,

konieczne jest wprowadzenie oznaczenia $\bar{L}$ dla macierzy o postaci

$$\bar{L} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1m} \\ M_{21} & \frac{1}{2} M_{22} & \dots & M_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{m1} & M_{m2} & \dots & \frac{1}{2} M_{mm} \end{bmatrix}. \quad 4.11$$

Teraz można napisać:

$$\frac{1}{\dot{q}_i} \sum_{j=0}^B \dot{U}_{ji} \frac{\partial \hat{E}_{k0}}{\partial U_{ji}} = \sum_{j=0}^B \dot{U}_{ji} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial U_{ji}} \hat{L}_{zz} & \frac{\partial}{\partial U_{ji}} \hat{L}_{zw} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Q}_z \\ \dot{q}_w \end{bmatrix}. \quad 4.12$$

Porównując relacje 4.10 i 4.12 można zauważyć częściową zbieżność występujących w nich wyrażeń. Ze względu na fakt, że zgodnie z równaniem 2.2a wyrażenie to należy odjąć, celowym jest oznaczenie:

$$L_D = L - \bar{L} = \frac{1}{2} \text{diag}(M_{11}, M_{22}, \dots, M_{mm})$$

Ostatecznie można napisać:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{E}_{k0}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{1}{\dot{q}_i} \sum_{j=0}^B \dot{U}_{ji} \frac{\partial \hat{E}_{k0}}{\partial U_{ji}} &= \begin{bmatrix} \hat{L}_{zz} & \hat{L}_{zw} \\ \hat{L}_{wz} & \hat{L}_{ww} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{Q}_z \\ \dot{Q}_w \end{bmatrix} + \\ &+ \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{bmatrix} \hat{L}_{zz} & \hat{L}_{zw} \\ \hat{L}_{wz} & \hat{L}_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Q}_z \\ \dot{Q}_w \end{bmatrix} + \sum_{j=0}^B U_{ji} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial U_{ji}} \hat{L}_D & 0 \\ \frac{\partial}{\partial U_{ji}} \hat{L}_{wz} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{Q}_z \\ \dot{Q}_w \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad 4.13$$

Teraz interpretacja fizyczna poszczególnych członów równania 2.2a staje się prostsza, gdyż sprowadza się do interpretacji prawej strony równania 4.13. I tak pierwszy człon to napięcie transformacji, drugi to napięcie rotacji, trzeci człon tego równania, ze względu na relację 4.5 jest wyrażeniem opisującym przepięcia występujące w obwodach przełączanych.

WNIOSKI

Rozważania nad ogólną strukturą równań dynamiki układu elektromechanicznego o cyklicznie przełączanych uzwojeniach pozwalają na poprawną interpretację i zrozumienie modelu matematycznego. Ma to niezmiernie istotny wpływ na ocenę rezultatów otrzymywanych w wyniku rozwiązywania równań modelu. Pozostaje zatem odpowiedzieć na pytanie, dlaczego wyniki obliczeń dotyczących tej części modelu matematycznego, który jest opisany relacją 4.12 pokrywa się z wynikami obliczeń napięcia rotacji w maszynach komutatorowych prądu stałego. Jeżeli napięcie rotacji traktować jako wielkość proporcjonalną do pochodnej indukcyjności funkcji okresowej (względem kąta obrotu φ) to miałaby ona wartość średnią równą zeru. Jednak na tę zerową wartość składają się pochodne z indukcyjności występujących w układzie przed narzuceniem więzów mnożone przez macierz więzów (rzeczywiste napięcie rotacji) i pochodne z macierzy więzów mnożone przez macierz indukcyjności (por. 4.2 i 4.3). Jedyną możliwością zerowania się wartości średniej tej pochodnej jest równość wartości średnich na bezwzględną wartość obydwu jej składowych przy ich przeciwnych znakach. Istotnie zatem, jeśli ograniczyć weryfikację napięcia rotacji do jej wartości średniej, to wyrażenie 4.12 dla $j = 0$ pozwala otrzymać rezultat poprawny ilościowo lecz niemożliwy do prawidłowej interpretacji fizycznej.

BIBLIOGRAFIA

1. J. I. Nejmark, N. A. Fufajew: *Dynamika układów nieholonomicznych*. Warszawa: PWN, 1971
2. A. Puchała: *Dynamika maszyn i układów elektromechanicznych*. Warszawa: PWN, 1977
3. A. S. Jagiello: *Metoda opisu matematycznego układów elektromechanicznych o cyklicznie przełączanych uzwojeniach*. Z.N. AGH Nr 1079, Elektrotechnika 10 Kraków, 1986
4. J. Osiowski: *Zarys rachunku operatorowego*. Warszawa: W.N.T., 1975

S. JAGIELLO

ANALYSIS OF THE GENERAL STRUCTURE OF EQUATIONS OF THE DYNAMIC OF AN ELECTROMECHANICAL SYSTEM WITH PERIODICALLY SWITCHED OVER WINDINGS

Summary

Equations of the dynamics of a system with nonholonomic constraints are presented. Constraint recently applied in the analysis of a system with switched over windings are chosen. It is shown that independently of the considered system, i.e. commutator machines, brushless d.c. machines and a.c. machines fed by inverter, the equations of constraints have some essential common properties. This has an effect on the form of mathematical model equations. Also, the incorrect physical interpretation of some terms of the mathematical model equations used in literature, are pointed out.

A. JAGIELLO

ANALYSE DE LA STRUCTURE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE DU SYSTÈME ÉLECTROMÉCANIQUE AUX ENROULEMENTS COMMUTÉS CYCLIQUEMENT

Résumé

Dans l'article on traite les équations de la dynamique du système à des liaisons linéaires non holonomes. On a choisi les types des liaisons, qui avaient trouvé dernièrement l'application dans l'analyse des systèmes aux enroulements commutés. Ensuite on a démontré, qu'indépendamment du système analysé (machine à collecteur, convertisseur ou machine alimentée par le système onduleur, les équations de liaisons présentent de certains signes communs. Cela exerce une influence sensible sur la forme des solutions d'équations du modèle mathématique. Dans le dernier chapitre et dans les conclusions on a montré, que dans la littérature technique on donne une interprétation physique fautive de certains éléments d'équations formant le modèle mathématique des machines à collecteur.

A. JAGIELLO

ANALYSE DER ALLGEMEINEN STRUKTUR DER DYNAMIKGLEICHUNGEN EINES ELEKTROMECHANISCHEN SYSTEMS MIT ZYKLISCH UMSCHALTBAREN WICKLUNGEN

Zusammenfassung

Im Artikel wurden Dynamikgleichungen des Systems mit anholonomischen linearen Bindungen dargestellt. Es wurden derartige Bindungstypen gewählt, die bei Analyse der Systeme mit umschaltbaren Wicklungen letzens Anwendung finden. Im weiteren wurde nachgewiesen, daß unabhängig davon, ob es sich um Komutatormaschine, Umrichter wechselrichtergespeiste Maschine handelt, weisen Bindungsgleichungen gemeinsame, wesentliche Eigenschaften auf. Dies hat einen wesentlichen Einfluß auf die Form

der Lösungen von Gleichungen für mathematische Modelle. Im letzten Abschnitt des Artikels und in den Schlußfolgerungen wurde auf eine falsche physikalische Interpretation einiger Gleichungsglieder des mathematischen Modells hingewiesen, die in der wissenschaftlich-technischen Literatur angewandt wird.

А. ЯГЕЛЛО

АНАЛИЗ ОБЩЕЙ СТРУКТУРЫ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИ ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫМИ ОБМОТКАМИ

Р е з ю м е

Представлены уравнения динамики системы с линейными неавтономными связями. Избран тип связей применяемых в последнее время к анализу систем с переключаемыми обмотками. Далее указано, что независимо от того является ли анализируемая система коллекторной машиной с преобразователями, или питаемой инвертором, уравнения связей имеют определенные существенные общие свойства. Это существенно влияет на вид решений уравнений математической модели. В последней главе статьи и в выводах указана ошибочная физическая интерпретация некоторых элементов уравнений математической модели коллекторных машин, встречаемая в научно-технической литературе.

Deuterium in palladium lattice and cold fusion

MICHAŁ GRYZIŃSKI

Instytut Problemów Jądrowych

Received 1989.06.24

Authorized 1989.12.20

There are presented main points of the idea that electrons existing in the matter are responsible for Coulomb barrier tunneling. It is shown that adopting this idea one can explain cold fusion process and give satisfactory description of various aspects of the problem in particular, lack of neutrons and γ -rays fusion.

A hint to theoretical solution of the cold fusion enigma was given by the author over two months ago [1]. Since that time the problem has been carefully investigated and the author has arrived to the conclusion, that the cold fusion do really exists (the two detailed papers on the problem: the one entitled „Deterministic theory of the Coulomb barrier tunneling” has been sent on 10th April to International Journal of Theoretical Physics, and the other „Molecular Mechanism of Cold Fusion in Condensed Matter” to „Nature”). Although details of this research will be published else — where — it seems worthy to present briefly the main points of the problem now, as the topic is very hot.

The present idea of cold fusion comes out from the fact that electrons present in the matter can in the low energy range modify appreciably dynamics of the nuclear collision, in particular two nuclei and an electron can form a stable hydrogen molecule [2]. To understand the role of electrons in nuclear collision one must investigate the very difficult three body problem. Fortunately, because of the large difference in the mass of the electron and the proton, and very simple initial conditions, which are defined by simple motion of the electron in the hydrogen atom [3], theoretical analysis can be effectively carried out on the grounds of the perturbed two center problem. In fact the whole problem can be reduced to the following set of equations: the one describing fast oscillatory motion of the electron between two fixed centers of force, the other describing relatively slow translations of heavy centers, and the last one describing the exchange of kinetic energy between slowly moving centers and frequently oscillating electron.

Thus, equation describing a slow motion of the two nuclei (we assume those have the same mass M and the same charge Ze) has the form:

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} = \left(\frac{Ze}{2X} \right)^2 + \frac{2mv_0}{T} - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{Ze}{(X+|x|)^2} dt, \quad (1)$$

where $2X$ is the distance between nuclei, v_0 is the velocity of the electron on half of the way between them (at $x = 0$), and T is the period of motion of the electron. In the above equation, the first right-hand side term represents the repulsive interaction of two nuclei, and the second term describes a gaso-kinetic pressure of the electron. The both terms contribute to the force which tends to expand the system. The force which tends to contract the system is given by the third term of the equation. Within the assumption $\dot{X} \ll v_0$, the distance between two centers may be at one trip of the electron from one center to the other considered constant, and the motion of the electron may be simply derived from the energy conservation law:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{Ze^2}{X-x} - \frac{Ze^2}{X+x} = W(X) + \Delta E_k \cdot \delta(X-x) \cdot \delta(X+x)|_{X=\text{const}}, \quad (2)$$

where W is the binding energy of the electron, which in the time interval $0 < t < T/2$ is considered constant and, ΔE_k is the change of the kinetic energy of the electron in a collision with the moving nucleus. Applying the momentum conservation law one can easily derive the equation describing the evolution of W with time (with X):

$$\frac{1}{2} \frac{dW}{dX} = -\frac{2mv_0}{T} + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \frac{Ze}{(X+|x|)^2} dt. \quad (3)$$

Since the integration over the fast variable $x(t)$ can be effectively carried out one arrives to the following two equations describing time evolution of the considered quasi-molecule:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{M\dot{X}^2}{2} - \frac{Ze^2}{2} \left(1 - \frac{w}{4} \right) \right] = 0 \quad (4)$$

and

$$\frac{dw}{dX} = \frac{w}{X} \cdot \frac{E(\sqrt{w})}{K(\sqrt{w}) - E(\sqrt{w})}, \quad (5)$$

where K and E are complete elliptic integrals of the first and second kind. The dimensionless parameter w

$$w = \frac{X \cdot W}{2Ze^2}, \quad (6)$$

describes the state of the system. Applying quantisation rules in their standard form one can determine radiationless states of the considered quasi-molecule. Finally, it has been found that two deuterons and an electron can form linear quasi-molecule and the length of this quasi-molecule is not much different from the distance between tetrahedral vacancies in the Pd-cell ($l_{D_2^+} \simeq 2.160 \text{ \AA}$ while $l_{D^+}^{\text{vac}} \simeq 1.945 \text{ \AA}$). Since the derived relation enable to calculate the absolute value of Young's modulus of the considered H_2^+ quasi-molecule it has been found, that the difference in the two lengths $l_{D_2^+}$ and $l_{D^+}^{\text{vac}}$ is responsible for the expansion of the Pd lattice with increase of the content of hydrogen. From the theoretically calculated value of the Young modulus for H_2^+ and known from the experiment value of Young modulus for pure Pd, one could calculate the effective value of

Table

Physical characteristic of H/Pd system

	Exp. data	Present Theory
Pd-lattice constant	$2 \times 1.945 \text{ \AA}$	—
Length of H_2^+	—	$2.160 \text{ \AA}$
Young's modulus:		
per Pd-cell	$1.77 \times 10^{-9} \text{ kg}$	—
per H_2^+ -quasi mol.	—	$8.13 \times 10^{-9} \text{ kg}$
Young's Modulus (H/Pd ≈ 0.7)	$1.04 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$	$1.01 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$
Linear Expansion (H/Pd ≈ 0.7)	$4.04 \text{ \AA}$	$4.05 \text{ \AA}$
Vibrational Amplitude		
4.2°K	$\sim 0.17 \text{ \AA}$	$\sim 0.15 \text{ \AA}$
20°K	$\sim 0.23 \text{ \AA}$	$\sim 0.22 \text{ \AA}$
Critical temperature (T_c)	$\sim 300^\circ\text{C}$	$\sim 320^\circ\text{C}$
"Resonance" in specific heat (T_{res})	$\sim 50^\circ\text{K}$	$\sim 60^\circ\text{K}$
Activation Energy of Nuclear Fusion	—	2.47 eV
Probability of fusion during phase trans. (Fleischmann, and Pons [4])	$\sim 10^{-7}$	$\sim 5 \times 10^{-7}$
Cold fusion rate induced by muons (Jones et. al. [51])	$\sim 10^{-23}$ (only neutrons)	$\sim 10^{-20}$ (total)

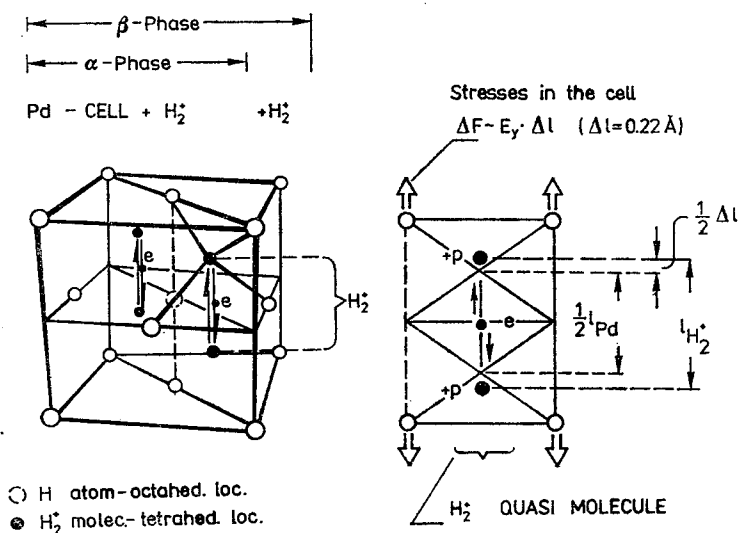


Fig. 1. Free protons in the Pd-lattice occupy octahedral vacancies in the Pd-cell while H_2^+ protons occupy tetrahedral vacancies. Figure shows positions of H-atoms and position of H_2^+ linear quasi-molecules in the Pd-cell (in the α -phase the cell contains one, and in the β -phase two H_2^+ quasi-molecules). Since the length of the H_2^+ quasi-molecule ($l_{H_2^+} = 2.160 \text{ \AA}$) is a little bit longer than the distance between the vacancies ($l_{vac} = \frac{1}{2} l_{Pd} = 1.940 \text{ \AA}$) quasi-molecule tends to extend the Pd-cell. Elongation of the cell depends upon the value of the Young modulus of palladium and Young modulus of the quasi-molecule. The presented theory enabled to calculate the value of the Young modulus of the latter ($E \approx 1.77 \times 10^6 \text{ kg per molecule}$).

There are in nature various factors, like cosmic rays, which may change the binding energy of the electron in the quasi-molecule. In the case of Fleischmann and Pons experiment collective fields generated in the lattice during the phase transitions, observed with the ratio H/Pd apperaching unity, seem to be responsible for transformation of the ordinary D_2^+ quasi-molecule into collapsing one. To initiate the collaps binding energy of the electron must be decreased by 2.47 eV. Probabilities for formation of collapsing D_2^+ quasi-molecules during phase transitions, which were estimated using the derived relations, were found to be in a surprisingly good agreement with the values presented by Jones e-all [7] and are very close to those needed to explain heat production in Fleischmann and Pons experiment — see Table.

It is a very important feature of the linear H_2^+ quasi-molecule that electron comes very closely to the nucleus and interaction between the electron and the individual components of the cunlei (neutron and proton) in the turning point may be so large that the excess of internal energy of fusing nuclei can be directly transfered to the electron which emmites this energy in the form of soft x-rays. Estimations made for emmision of soft X-rays and energy transfer from nucleus to the oscillating electron leads to a conclusion that in the case of molecular fusion, a new channel of D+D reaction with production of stable 4He is quite possible. It is worthy to note that in the exactly the same way proton and deuteron can fuse and produce 3He (in view of the quite large difference in the mass of the proton and the deuteron p+D channel of molecular fusion may be, due to smaller mass of the proton, much more efficient that D+D channel).

Summarising, it seems justified to claim that molecular collapse form the essence of cold fusion. Within this concept one can quite satisfactorilly explain:

- geophysical data on heat generation in the Earth mantle and relative abundance of light elements;
- high local concentrations of 3He in some minerals;
- heat generation in the electrolytical Pd-device;
- negligible amounts of neutrons and γ -rays in the cold fusion experiments;
- emmissions of neutrons and γ -rays in bursts and spikes.

Since the fusion activation energy of the quasi-molecule is not small (in the molecular energy scale), the initial collaps phase is very sensitive to physical conditions existing in the lattice, and the fusion goes without emmision of neutrons and γ -rays, one can understand tha lack of rapid succes in replication of Fleischmann and Pons experiment.

At the end of the paper it is worthy to note that the quasi-molecular mechanism as described above is responsible for Coulomb barrier tunneling. Starting with the same equations of motion as in the case of cold fusion one arrives to the well known Gamov for Coulomb barrier tunneling, and this was achieved without violation of energy conservation law.

Note added in the proof:

J. Maddox in the recent article commenting in Nature the actual state-of-art in cold fusion writes [6]: „*It seems that the time has come to dismiss cold fusion as an illusion of the past four months or so*”. One can, however, has doubts how far such conclusion is justified? Is the absence of neutrons and γ -rays, at lack of convincing heat measurements, a satisfactory argument disqualifying the idea? One must have in view the fact that almost

all measurements were carried out in a nervous atmosphere by scientist traying in a hurry to replicate conditions of the original experiment, and Fleischmann and Pons are still the only people who know conditions of the experiment. It would be rather unwise to expect, as the problem is too serious and perspectives of the money are to big, that they are ready to disclose for the comfort of the scientific community all the information they have. The only concrete information we have get. from them until now, (they still refuse to describe details of the experiment) is a very laconic a statement that large amounts of heat were realised in palladium electrode (they appeared to be very pragmatic, as this statement, which does not disclose „*know how*”, gives them scientific priority and funds for further research [7]).

Since the both authors are not beginners in chemical-physics their laconic information must be considered seriously, particulary the figures describing the produced heat. How, therefore, it may be possible to explain the lack of success of many other well experienced chemists and physicists? The first part of the answer to the question seems to be hidden in the acknowledgments at the end of Fleischmann and Pons paper, where it is said that precious metals were in the experiment used. There are reasons to think that in the original experiment electrode was made from a properly cut, and properly oriented in the electrolitical device, piece of monocrystalic palladium, and in the all other, until now carried out experiments, polycrystalic paladium was used. A second part of the answer may find explanation in a quite reasonable assumption that the mechanism of cold fusion, which if exists, must be quite different from that in high energy nuclear collisions and small emmision, even lack of neutrons and γ -rays, may be a characteristic feature of the cold fusion process.

REFERENCES

1. Maddox J., Nature, 340, 15 (1989)
2. Gryziński M., Phys. Lett., 76A, 28—30 (1980)
3. Gryziński M., J. Chem. Phys., 62, 2610—2036 (1975)
4. Fleischmann M. and Pons S. J., J. Electroanalit. Chem., 261, 301—308 (1989)
5. Jones S. E., et al., Nature, 338, 737—740 (1989)
6. Lindley D., Nature, 6324, 492 (1989)
7. Gryziński M., Nature, 338, 712 (1989)

M. GRYZIŃSKI

DEUTER W SIECI KRYSTALICZNEJ PALLADU A ZIMNA SYNTEZA JĄDROWA

Przedstawione są główne punkty koncepcji stwierdzającej, że elektrony istniejące w ośrodku są odpowiedzialne za efekt tunelowy bariery kolumbowskiej. Pokazano, że w ramach tej koncepcji można wyjaśnić proces zimnej syntezy jądrowej, przedstawić zadawalający opis różnych aspektów problemu — szczególności, brak neutronów i promieniowania γ .

M. GRYZIŃSKI

LE DEUTERIUM DANS LE RESEAU CRISTALIN DU PALLADIUM ET LA FUSION NUCLEAIRE FROIDE

On a présenté les grandes lignes d'une conception confirmant la thèse d'après laquelle les électrons existant dans le milieu sont responsables de l'effet tunnel de la barrière de Coulomb. On a montré aussi qu'elle rend compte du processus de la fusion nucléaire froide dans le palladium tout en présentant une description raisonnable de différents phénomènes en particulier du manque de neutrons et de rayonnement γ .

M. GRYZIŃSKI

DEUTERIUM IN PALLADIUM KRISTALL-GITTER UND DIE KALTE KERNFUSION

Das sind die wichtigsten Ausgangspunkte einer Konzeption welche stellt fest, dass die Elektronen die sich in den Festkörper befinden für das Tunneleffekt durch die coulombische Barriere verantwortlich sind. Es wurde gezeigt, dass im Rahmen dieser Konzeption kann man den Prozess der kalten Kernfusion in Palladium erklären und eine zufriedenstellende Beschreibung der verschiedenen Aspekten des Problems besonders Mangel der Neutronen und Gamma-Strahlung vorstellen.

М. ГРЫЗИНСКИ

ДЕЙТЕРИЙ В КРИСТАЛЛИЧЕСКОМ РЕШЕТКЕ ПАЛЛАДИЯ И ХОЛОДНЫЙ СИНТЕЗ

В работе представлены основы концепции, утверждающей, что электроны среды ответственны за туннелирование кулоновского барьера. Показано что в рамках этой концепции можно объяснить процесс холодного синтеза в палладий и дать удовлетворительный опис разных аспектов проблемы, в частности. отсутствие нейтронов и жесткого γ — излучения.

SPIS TREŚCI

M. Piontas: Wielomianowa metoda obliczania logarytmów dyskretnych w ciałach Galois charakterystyki dwa	747
K. Jasiński: Redukcja matryc logicznych typu PLA metodą składania	757
W. Nakwaski: Sprężone równania kinetyczne laserów złączowych	775
J. Mindykowski: Zagadnienie pomiaru odchyłki częstotliwości i koncepcje stosownych przetworników optoelektronicznych	785
T. Karczmarczyk: Proces interpolacji w optoelektronicznych przyrządach do pomiaru długości	829
T. Morawski, J. Zborowska: Wielodiodowe szerokopasmowe układy odbijające do przełączanych systemów mikrofalowych	841
K. Bergiel: Model transmisyjnego obwodu szynowego uwzględniający udział ziemi w przewodnictwie prądu sygnałowego i współpracę z obwodem kontroli zajętości	855
W. Witek: Układ do pomiaru pojemności z wykorzystaniem metody przetwarzania na czas	867
A. Królikowski: Lokalizacja uszkodzeń wielokrotnych w obwodach stałoprądowych wykorzystująca pomiary przy pobudzeniach wielokrotnych	885
A. Napieralski, J.M. Dorkel, P. Leturq: Nowa metoda analizy i zastosowanie termografii w podczerwieni do badań układów hybrydowych mocy	901
S. Nowak: Nieliniowość rezystorów grubowarstwowych	927
M. Noga, Z. Głowacz: Model matematyczny i algorytm obliczeniowy dla analizy stanów awaryjnych złożonych układów elektromechanicznych	965
J. Szabatin, A. Wojtkiewicz: Blokowe i rekursywne algorytmy estymacji parametrów AR szeregów czasowych	993
A. S. Jagiełło: Analiza ogólnej struktury równań dynamiki układu elektromechanicznego o cyklicznie przełączanych uzwojeniach	1047
M. Gryziński: Deuter w krystalicznej sieci palladu a zimna fuzja jądrowa	1057

CONTENTS — TABLES DES MATIERES — INHALT

M. Piontas: A polynomial method of obtaining a discrete logarithm in Galois field of characteristic two	747
Utilisation des fonctions polynômes pendant le calcul des logarithmes dans les corps de Galois des characteristic 2	
Eine polynommethode zur Lösung diskreter Logarithmen in Galoisfeldern der Charakteristik zwei	
K. Jasiński: Compaction of programmable logic arrays by folding	757
Réduction des matrices logiques du type PLA par méthode d'assemblage	
Reduktion logischer PLA-Matrizen mittels Zusammenfallen	
W. Nakwaski: Coupled rate equations for laser diodes	775
Equations cinétique accouplées des lasers conjugués	
Konjungierte Geschwindigkeitsgleichungen für Laserdioden	
J. Mindykowski: Problem of frequency deviation measurement and the idea of appropriate optoisolator converters	
Problème de mesure de l'écart de fréquence et conceptions des convertisseurs optoélectroniques convenables	785
Messproblem bei einer Frequenzabweichung und die Idee der Anwendung optoelektronischer Umsetzer	

T. Karczmarczyk: Interpolation process in optoelectronic length gauges	829
Procédé de l'interpolation dans les mesureurs optoélectroniques de longueur	
Interpolationsverfahren der für Längenmessungen bestimmten optoelektronischen Geräte	
T. Morawski, J. Zborowska: Multidiode wide-band reflection systems for switched microwave systems	841
Systèmes multidiodes réfléchissants à larges bandes pour les circuits microondes commutés	
Abschlagende breitbändige Mehrdiodensysteme für umgeschaltete Mikrowellensysteme	
K. Bergiel: Model of rail transmission system involving the earth in signal current flow and its co-operation with track occupancy control circuit	855
Modèle du circuit de rails pour transmission où sont prises en considération la conductivité du courant, assurée par la mise à terre, et la collaboration du circuit de contrôle d'occupation	
Modell für einen Schienenkreis unter Berücksichtigung der Erdbodenbeteiligung an der Signalstromleitfähigkeit	
W. Witek: Capacitance meter using time conversion	867
Système de mesure de capacité des condensateurs avec utilisation de la conversion capacité-temps	
System für die Messung der Kondensatorenkapazität unter Anwendung der Zeitverarbeitungsmethode	
A. Królikowski: Multiple-fault location in d.c. circuits using multiple excitation records	885
Localisation des endommagements multiples dans les circuits de courant continu mettant en profit les mesures prises lors des excitations multiples	
Lokalisierung der mehrmaligen Beschädigungen bei Gleichstromkreisen unter Nutzung der Messungen bei mehrmaligen Anregungen	
A. Napieralski, J. Dorkel, P. Leturq: A new theoretical approach and application of IR thermography to power hybrid circuits	901
Nouvelle méthode d'analyse et l'application de la thermographie dans l'infrarouge pour étudier les circuits hybrides de puissance	
Neue Methode für Analyse und Anwendung der Thermographie im Infrarotbereich beim Untersuchen der Leistungshybridensysteme	
S. Nowak: Nonlinearity of thick film resistors	927
Non-linéarité des résistances à couches épaisses	
Nichtlinearität dickschichtiger Resistoren	
M. Noga, Z. Głowacz: Mathematical model and computer algorithm for the analysis of fault states of complex electromechanical systems	965
Modèle mathématique et algorithme de calculs pour l'analyse des états de panne des systèmes électromécaniques composés	
Mathematisches Modell und Berechnungsalgorithmus für die Analyse von Havariezuständen an komplizierten elektromechanischen Systemen.	
J. Szabatin, A. Wojtkiewicz: Block and recursive algorithms for the estimation of A.R. parameters of time series	993
Algorithmes de bloc et récursifs de l'estimation des paramètres AR des séries temporelles	
Block- und rekursive Algorithmen der Parameterästimation von AR-Zeitreihen	
S. Jagiello: Analysis of the general structure of equations of the dynamic of an electromechanical system with periodically switched over windings	1047
Analyse de la structure générale des équations de la dynamique du système électromécanique aux enroutements commutés cycliquement	
Analyse der allgemeinen Struktur der Dynamikgleichungen eines elektromechanischen Systems mit zyklisch umschaltbaren Wicklungen	
M. Gryziński: Deuterium in palladium lattice and cold fusion	1057
Le deuterium dans le réseau cristalin du palladium et la fusion nucléaire froide	
Deuterium in Palladium Kristall-Gitter und die Kalte Kernfusion	

СОДЕРЖАНИЕ

М. П и о н т а с: Многочленный метод нахождения дискретного логарифма в полях Галуа характеристики два	747
К. Я с и н ь с к и: Редукция программируемых логических матриц типа ПЛЛА методом составления	757
В. Н а к в а с к и: Сопряжённые кинетические уравнения лазерных диодов.	775
Я. М и н д ы к о в с к и: Вопросы измерения отклонения частоты и концепции соответствующих оптоэлектронных преобразователей	785
Т. К а р ч м а р ч и к: Интерполяционный процесс в оптоэлектронных приборах предназначенных для измерения длины (в оптоэлектронных длиномерах)	829
Т. М о р а в с к и, И. З б о р о в с к а: Многодиодные широкополосные отражающие схемы для переключаемых микроволновых систем	841
К. Б е р г е л ь: Модель контура железнодорожного полотна с учетом участия земли в проводимости для сигнального тока	855
В. В и т е к: Измерительная схема ёмкости конденсаторов с использованием временного преобразования	867
А. К р у л ь к о в с к и: Диагностика аналоговых систем	885
А. Н а п е р а л ь с к и: Новый метод анализа и применение томографии в инфракрасном диапазоне к исследованию гибридных схем мощности	901
С. Н о в а к: Нелинейность толсто пленочных резисторов	927
М. Н о г а, З. Г л о в а ч: Математическая модель и расчетный алгоритм для анализа аварийных состояний электромеханических систем	965
Е. Ш а б а т и н, А. В о й т к е в и ч: Блочные и рекурсивные алгоритмы оценки параметров временных рядов А. Я	993
А. Я г е л л о: Анализ общей структуры уравнений динамики электромеханической системы с периодически переключаемыми обмотками	1047
М. Г р у з и н с к и: Дейтерий в кристаллической решетке палладия и холодный ядерный синтез	1057

NOTATKI

NOTATKI

WYTYCZNE DLA AUTORÓW

Komitet Redakcyjny prosi o przestrzeganie następujących wytycznych przy przygotowywaniu maszynopisów artykułów nadsyłanych do opublikowania.

1. *Tematyka i charakter artykułów.* Redakcja przyjmuje do druku prace przeglądowe, kompilacyjne i monograficzne, wchodzące w zakres szeroko pojętej elektroniki, które powinny jednak zawierać własny wkład twórczy Autora polegający na: oryginalnym ujęciu zagadnienia, własnej klasyfikacji, krytycznej ocenie (teorii lub metod), wyciągnięciu wniosków co do celowości takiego lub innego działania, prognoście itp. Autorów obowiązuje jak najdalej posunięta zwięzłość.

2. *Wymagania podstawowe.* Artykuły należy nadsyłać w maszynopisie, w dwóch egzemplarzach, w zasadzie w języku polskim; dopuszczalne są jednak również artykuły w językach: angielskim, francuskim, niemieckim i rosyjskim. Maszynopis powinien być napisany jednostronnie przez czarną taśmę, na maszynie do pisania z niezabrudzonymi i nieuszkodzonymi znakami. Dopuszcza się odręczne czytelne uzupełnianie tekstu atramentem lub długopisem kolorem czarnym lub ciemnoniebieskim znaków specjalnych oraz znaków w językach, których alfabetów nie ma na maszynach do pisania, np. znaków matematycznych, chemicznych, liter greckich. Maszynopis powinien być napisany na papierze do maszyny do pisania koloru białego, formatu A4; numeracja ciągła na wszystkich stronach.

3. *Sposób pisania tekstu.* Tekst w maszynopisie powinien być pisany bez używania wyróżnień, a w szczególności nie dopuszcza się spacjiowania (rozstrzelania), podkreślania i pisania tekstów dużymi literami, z wyjątkiem wyrazów, które umownie pisze się dużymi literami (np. FORTRAN). Proponowane wyróżnienia Autor może zaznaczyć w maszynopisie (zwykłym ołówkiem) za pomocą przyjętych znaków adiustacyjnych (podkreślenie linią przerywaną — spaciowanie, podkreślenie linią ciągłą — pogrubienie, podkreślenie wężykiem — kursywa itp.). Na jednej stronie maszynopisu powinno być 30 wierszy po około 60 znaków łącznie z odstępami. Marginesy każdej strony powinny mieć następujące wymiary: górny — ok. 25 mm, lewy — ok. 35 mm. Tekst maszynopisu powinien być napisany z podwójnym odstępem między wierszami; tytuły i podtytuły małymi literami. Akapity należy rozpoczynać z wcięciem równym trzem uderzeniom maszyny do pisania.

4. *Sposób pisania tablic.* Tablice powinny być napisane w układzie zbliżonym do układu zecerskiego. Tytuły rubryk pionowych i poziomych powinny być napisane małymi literami z podwójnym odstępem między wierszami. Przypisy (notki) dotyczące tablic należy pisać bezpośrednio pod tablicą. Tablice należy numerować kolejno liczbami arabskimi; u góry każdej tablicy podać tytuł. Tablice umieścić na końcu maszynopisu.

5. *Sposób pisania wzorów matematycznych.* Rozmieszczenie znaków, cyfr, liter i odstępów powinno być zbliżone do rozmieszczenia elementów druku. Wskaźniki i wykładniki potęg powinny być napisane wyraźnie i być prawidłowo obniżone lub podwyższone w stosunku do linii wiersza podstawowego. Znaki nad literami i cyframi: strzałki, linie, kropki, daszki itp. powinny być napisane dokładnie nad tymi elementami, do których się odnoszą. Numery wzorów należy umieszczać z prawej strony.

6. *Przygotowanie materiału ilustracyjnego.* Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonywać zgodnie z obowiązującymi normami Polskiego Komitetu Normalizacji, Miar i Jakości (oznaczonymi literą E i numeracją od 01200 do 01245; przydatna może się okazać książka K. Michela, T. Sapińskiego: „Rysunek techniczny elektryczny”), na oddzielnych arkuszach, z podaniem kolejnych numerów rysunków. W maszynopisie artykułu na marginesie, obok właściwego tekstu, należy podać jedynie odnośny numer rysunku, a na oddzielnym arkuszu wykaz podpisów pod rysunki. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót: rys.). U samego dołu rysunku (a przy fotografiach na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, tytuł pracy i nazwisko autora. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.

7. *Streszczenia.* Do każdej nadsyłanej pracy należy dołączyć krótkie streszczenie (analizę) w języku polskim (w 3 egz.) oraz streszczenie (w 2 egz.) w języku angielskim. W razie

niemożności przygotowania streszczenia w języku obcym Autor powinien podać przynajmniej terminy obcojęzyczne niezbędne do wykonania tłumaczenia.

8. *Bibliografia*. Na końcu maszynopisu należy podać w przyjętej przez Autora kolejności (np. chronologicznej, alfabetycznej itp.) wykaz publikacji, na które Autor w tekście się powołuje, lub które uważa za słuszne wymienić z innych powodów. W każdej pozycji wykazu należy podać w następującej kolejności: pierwsze litery imion, nazwisko autora, po czym po przecinku pełny tytuł dzieła lub artykułu; dalej, w przypadku książki — wydawcę, miejsce wydania i rok, a w przypadku artykułu — tytuł czasopisma, numer zeszytu, rok wydania i ewent. numer strony. Pozycje wykazu powinny być ponumerowane.

9. *Informacje dodatkowe*.

— Niezastosowanie się Autora do podanych wyżej wytycznych pociągnie za sobą konieczność potrącenia z honorarium autorskiego kosztów związanych z doprowadzeniem dostarczonych materiałów do postaci wymaganej przez Redakcję.

— Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egz. odbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze Autor może zamówić w Redakcji na własny koszt.

— **Autora obowiązuje korekta autorska, którą należy zwracać w ciągu 3 dni pod adresem Redakcji.**

— Redakcja prosi Autorów o podawanie miejsca pracy i adresu prywatnego, a także o powiadamianie o zmianie adresu.

POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE

KWARTALNIK

SPIS TREŚCI DO TOMU XXXV — 1989

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA

SPIS TREŚCI DO TOMU XXXV — 1989

NR 1

K. Aniserowicz: Rozwiązanie zagadnienia własnego $[K]\{\Phi\} = \lambda[M]\{\Phi\}$ metodą iteracji podprzestrzennych przy nieokreślonej macierzy $[K]$	5
M. Tadeusiewicz, M. Ossowski: Analiza odcinkowo-liniowa rezystancyjnych obwodów nieliniowych za pomocą blokowych metod Gaussa-Seidela i Jacobiego	28
M. Brodzki, M. Pasko: Definicje pewnych mocy dla układów wielozaciskowych o przebiegach odkształconych	31
A. Barański: Środki i sposoby ujednolicenia miary napięcia przemiennego	45
A. Michalski, J. Sikora, St. Wincenciak: Metoda projektowania optymalnego kształtu cewki wzbudzającej przepływomierzy elektromagnetycznych dla kanałów otwartych	61
A. Harasiewicz, J. Krupka: Zastosowanie cylindrycznych rezonatorów quasi TE_{0nm} i quasi TM_{010} do pomiaru zespolonej przenikalności elektrycznej cylindrycznych próbek dielektryków o dowolnych wymiarach	77
A. Krzywaźnia, J. Ociepka: Zastosowanie DPF w dynamicznym testowaniu torów przetwarzania analogowo-cyfrowego	89
J. M. Woźnicki: Problemy automatyzacji projektowania optycznych układów obrazujących	101
B. Więcek: Rozpoznawanie konturów obrazów przedmiotów płaskich	125
S. Paszczyński: Piezorezystywne właściwości rezystorów grubowarstwowych	133
W. Nakwaski: Degradacja lutu stosowanego do mocowania kryształów laserów złączowych i diod elektroluminescencyjnych do obudowy	149
L. Weiss, T. Wysocki, T. Wysocki Jr. F. Wysocka: Aproksymacja charakterystyki statycznej diody tunelowej funkcją wykładniczą	159
M. Piontas, D. Rutkowski: Dobór optymalnej wielkości pakietów w sieci z integracją usług	175
D. Sankowski: Identyfikacja w układzie zamkniętym elektrycznych pieców oporowych	193
M. Strzelecki: Straty mocy i impedancji jednofazowych torów wieloprądowych	211

NR 2

W. Nakwaski: Prąd progowy laserów złączowych (InGa)(AsP)/InP. Cz. I: Warunek progowy, wzmocnienie lokalne, rekombinacja powierzchniowa, wyznaczenie prądu progowego	227
W. Nakwaski: Prąd progowy laserów złączowych (InGa)(AsP)/Inp. Cz. II: Straty wewnętrzne, progowa koncentracja nośników, prądy ucieczki, zależność prądu progowego od temperatury	239
J. Klamka: Mikrofalowe przyrządy z fosforku indu na zakres fal milimetrowych	253
J. Mulawka, Z. Soporek: Realizacja rezystancji w filtrach scalonych MOS	267
W. Dziech: Metoda wyznaczania optymalnych parametrów adaptacyjnej dyskretyzacji sygnałów pomiarowych	285
K. Pacholski: Analiza dynamicznych właściwości amplitudowo-częstotliwościowych operacyjnych przetworników wartości średniej	295
M. Luft: Charakterystyki dynamiczne wybranych przetworników elektromechanicznych w automatycznych systemach pomiarowych	323

J. Szmítkowski: Analiza pracy wybranych układów różnicowych analogowego przetwor- nika ciśnienia z diodą tunelową	333
M. Nowak: Wspomagane komputerem projektowanie obwodów komutacji w falownikach o modulowanej szerokości impulsów napięcia wyjściowego	345
K. T. Januszkiewicz: Nagrzewanie indukcyjne w przesuwie rur niemagnetycznych	371
M. Kaźmierski, I. Kersz: Efektywność podłużnych ekranów przewodzących. Cz. I: Pole elektromagnetyczne i straty	387
M. Kaźmierski, I. Kersz: Efektywność podłużnych ekranów przewodzących. Cz. II: Przy- rosty temperatury w układach ekranowanych	413
Z. Gacek: Zarys metodyki obliczania niezawodności zabrudzeniowej izolatorów napowietrz- nych	437
A. Kamińska-Pranke: Model matematyczny łuku elektrycznego stabilizowanego wirowym strumieniem gazu w plazmotronie prądu przemiennego	449
A. Kamińska-Pranke: Przebiegi napięć i prądów w obwodzie zasilania plazmotronu prądu przemiennego	467
K. Rzymkowski: Współczynniki efektywności obsługi zgłoszeń w systemach modularnych .	483
K. Rzymkowski: Przepustowość magistrali systemu modularnego	491
K. Rzymkowski: Współczynniki efektywności wykorzystania magistrali w systemach modu- larnych	495

NR 3

C. Rajsکی: O pewnym zastosowaniu zasady minimum mocy	515
R. Nawrowski: Rozkład pola elektrycznego i wytrzymałość elektryczna układu płyta-ostrze hiperboidalne z uwzględnieniem ładunku przestrzennego	523
K. Noga: Estymacja parametrów rozkładu Nakagami na podstawie danych pomiarowych sygnału	531
F. Wysocka-Schillak: Zastosowanie programowania nieliniowego do równomiernie falistej aproksymacji stałego opóźnienia grupowego skutecznym opóźnieniem grupowym dolno- przepustowego filtra RC	541
M. Głowacki, M. Pierzchała, J. Stanclik: Warunki eliminacji dynamicznych zniekształceń intermodulacyjnych we wzmacniaczach z ujemnym sprzężeniem zwrotnym oraz kompensacja biegunem i zerem	555
M. Sadowski: Stabilizacja częstotliwości generatora przestrajanego w dyskretnej pętli sprzę- żenia fazowego	565
R. Artiuch: Kształtowanie transmitancji pętli synchronizacji fazy	581
W. Nakwaski: Efekt falowodowy w laserach paskowych z rezonatorami Fabry'ego-Perota .	595
S. Nowak: Wpływ czynników konstrukcyjnych i technologicznych na temperaturowy współ- czynnik rezystancji scalonych sieci rezystywnych grubowarstwowych	615
S. Paszczyński: Model opisujący efekty pierorezystywne w rezystorach grubowarstwowych .	645
K. Zamyłński: Modelowanie termicznego sprzężenia zwrotnego w monolitycznych układach scalonych przy pomocy programu SPICE-2G	673
A. Lewińska-Romicka, S. Piskorski: Właściwości przetworników wiropądowych do nieniszczących badań prętów ferromagnetycznych	693
Z. Muszalski, L. Golusiński, W. Rafalska, W. Rafalski: Generacja impul- sów wysokonapięciowych w zestyku ślizgowym maszyn elektrycznych. Część III	723

NR 4

M. Piontas: Wielomianowa metoda obliczania logarytmów dyskretnych w ciałach Galois charakterystyki dwa	747
K. Jasiński: Redukcja macierzy logicznych typu PLA metodą składania	757

W. Nakwaski: Sprężone równania kinetyczne laserów złączowych	775
J. Mindykowski: Zagadnienie pomiaru odchyłki częstotliwości i koncepcje stosownych przetworników optoelektronicznych	785
T. Karczmarczyk: Proces interpolacji w optoelektronicznych przyrządach do pomiarów długości	829
T. Morawski, J. Zborowska: Wielodiodowe szerokopasmowe układy odbijające do przełączanych systemów mikrofalowych	841
K. Bergiel: Model transmisyjnego obwodu szynowego uwzględniający udział ziemi w przewodnictwie prądu sygnałowego i współpracę z obwodem kontroli zajętości	855
W. Witek: Układ do pomiaru pojemności z wykorzystaniem metody przetwarzania na czas	867
A. Królikowski: Lokalizacja uszkodzeń wielokrotnych w obwodach stałoprądowych wykorzystująca pomiary przy pobudzeniach wielokrotnych	885
A. Napieralski, P. Leturcq, J. M. Dorkel: Nowa metoda analizy i zastosowanie termografii w podczerwieni do badań układów hybrydowych mocy	901
S. Nowak: Nieliniowość rezystorów grubowarstwowych	927
M. Noga, Z. Głowacz: Model matematyczny i algorytm obliczeniowy dla analizy stanów awaryjnych złożonych układów elektromechanicznych	965
J. Szabatin, A. Wojtkiewicz: Blokowe i rekursywne algorytmy estymacji parametrów AR szeregów czasowych	993
A. S. Jagiełło: Analiza ogólnej struktury równań dynamiki układu elektromechanicznego o cyklicznie przełączanych uzwojeniach	1047
M. Gryziński: Deuter w sieci krystalicznej palladu a zimna synteza jądrowa	1057

SUMMARY — RÉSUMÉ — ZUSAMMENFASSUNG

NR 1

K. Aniserowicz: Solution by subspace iteration of the eigenproblem $[K]\{\Phi\} = \lambda[M]\{\Phi\}$ with an indefinite matrix $[K]$	5
Resolution du probleme propre $[K]\{\Phi\} = \lambda[M]\{\Phi\}$ par méthode d'iteration sous-espaces pour la matrice indéfinie $[K]$	
Lösung des Eigenwertproblems $[K]\{\Phi\} = \lambda[M]\{\Phi\}$ mittels simultaner Vektoriteration bei indefinitiver Matrix $[K]$	
M. Tadeusiewicz, M. Ossowski: Piecewise-linear analysis of nonlinear resistive circuits using the block Gauss-Seidel and Jacobi methods	28
Analyse linéaire par morceaux des circuit résistant non-linéaires où l'on a appliqué les méthodes de bloc de Gauss-Seidel et Jacobi	
Stückweise lineare Analyse der nichtlinearen Resistanzkreise mittels Gauss-Seidelschen — und Jacobi — Blockverfahren	
M. Brodzki, M. Pasko: Definitions of certain powers of multiterminal systems with distorted signals	31
Définitions de certaines puissances pour les systèmes multipôles à phénomènes périodiques	
Definitionen für gewisse Leistungen bei Mehrklemmensystemen mit deformierten Verlauf	
A. Barański: Instruments and methods of the standarization of alternating voltage measurement	45
Moyens et méthodes de l'unification des mesures de la tension alternative	
Mittel und Methoden der Messvereinheitlichung der Wechselspannung	
A. Michalski, J. Sikora, S. Wincenciak: Algorithm for designing the optimum shape of the exciting coil for an electromegnetic flowmeter	61
Algorithme pour l'établissement du projet d'une bobine inductrice du débitmètre électromagnétique	
Methode für die optimale Projektierung der Form einer Wandlerer-regelspule für elektromagnetischen Durchlassvoltmeters	
A. Harasiewicz, J. Krupka: Application of quasi-TE _{0nm} and quasi-TM ₀₁₀ cylindrical resonators to measuring the complex permittivity of cylindrical dielectric samples of arbitrary dimensions	77
Application des résonateurs cylindriques quasi, TE _{0nm} and quasi-TM ₀₁₀ à la mesure de la permittivité complexe des échantillons cylindriques des diélectriques à dimensions arbitraires . .	
Anwendung zylindrischer quasi-TE _{0nm} und quasi-TM ₀₁₀ — Resonatoren zur Messung der elektrischen Gesamtdurchlässigkeit von dielektrischen zylindrischen Proben mit beliebigen Ausmassen	
A. Krzywaźnia, J. Ociepka: Application of the DFT to dynamic testing of analog-to-digital converting systems	89
Application de la discrète transformée de Fourier (DFT) au test dynamique des chaînes de conversion analogique-digitale	
Anwendung der DFT bei dynamischer Testmethode des analog-digitalen Messverarbeitungs-pfades	
M. Woźnicki: Problems of automation of designing optical imaging systems	101

Problemes de l'automatisation de l'établissement des projets des systèmes optiques d'images	
Probleme der Automatisierung der Projektierung von optischen Abbildungssystemen	
B. Więcek: Image processing for shape defects detection	125
Reconnaissance des contours des images des objets plats	
Umrissabtastung von Bildern flacher Gegenstände	
S. Paszczyński: Piezoresistive properties of thick film resistors	133
Piezorésistives propriétés des résistors à couche épaisse	
Piezoresistive Eigenschaften von Dickschichtwiderständen	
W. Nakwaski: Degradation of a solder used for bonding laser diodes and light-emitting diodes	149
Dégradation de la soudure utilisée à la fixation des cristaux des lasers de jonction et des diodes électroluminescentes au boîtier	
Weichlötendegradierung von Injektionslasern und Elektrolumineszenzdioden	
L. J. Weiss, F. Wysocka, T. Wysocki, T. Wysocki Jr: Approximation of stationary characteristics of a tunnel diode by an exponential function	159
Approximation de la courbe caractéristique statique de la fonction exponentielle	
Anwendung der Exponentialfunktion zur Approximation der statischen Kennlinie einer Tunnel-diode	
D. Rutkowski, M. Piontas: Choice of the optimum pack magnitude in an integrated service network	175
Choix de la grandeur du paquet dans le réseau téléphonique	
Wahl der optimalen Paketgrösse im Netz mit integrierten Dienstleistungen	
D. Sankowski: Closed loop identification of electric resistance furnaces	193
Identification dans un système bouclé des fours électriques à resistance	
Identifizierung von elektrischen Widerstandsöfen im geschlossenen Regelkreis	
M. Strzelecki: Power losses and impedance of single-phase busbars	211
Pertes de puissance et impédance des lignes monophasées des courants forts	
Leistungsverluste und Impedanzen einphasiger Startstromleitungen	

NR 2

W. Nakwaski: Threshold current of (InGa)(AsP)/InP junction lasers. Part I: Threshold condition, local gain, interfacial recombination, threshold current	227
Courant de seuil des lasers conjugués (InGa)(AsP)/InP. P. I: Condition de seuil, amplification locale, recombination superficielle, détermination du courant de seuil	
Schwellenstrom der (InGa)(AsP)/InP — Laserdioden. Teil I: Schwellenbedingung, Platzstärkung, Flächenrekombination, Schwellenstrombestimmung	
W. Nakwaski: Threshold current of (InGa)(AsP)/InP junction lasers. Part II: Internal losses, threshold carrier concentration, leakage currents, simplified model, temperature dependence of threshold current	239
Courant de seuil des lasers conjugués (InGa)(AsP)/InP. P. II: Pertes internes, densité de seuil des porteurs, courants de fuite, dépendance du courant de seuil de la température	
Schwellenstrom der (InGa)(AsP)/InP — Laserdioden. Teil II: Inne Verluste, Schwellenkonzentration der Ladungsträger, Fluchtströme, Vereinfachtes Modell, Temperaturabhängigkeit des Schwellenstroms	
J. Klamka: Indiumphosphide microwave devices for millimeter-waves	253
Les composants microondes de phosphore d'indium dans le niveau des ondes millimétriques	
Mikrowellenbauelemente aus Indiumphosphid für den Längenbereich der Millimeterwellen	
J. Mulawka, Z. Soporek: The resistance in MOS Integrated filters	267
Réalisation de la résistance en filtres intégrés MOS	
Resistanzrealisationen in integrierten Filtern MOS	
W. Dziech: Method of determining optimum parameters of adaptively sampled measuring signals	285

Méthode de détermination des paramètres optimaux d'échantillonnage adaptatif des signaux mesurés	
Bestimmungsmethode für die Optimalkenndaten der adaptiven Messignalablastung	
K. Pacholski: Analysis of frequency characteristics of operational rectifiers	295
Analyse des propriétés fréquentielles des redresseurs opérationnels pleine-onde	
Analyse der dynamischen Eigenschaften der Amplitude und des Einflusses der Frequenz bei Operationswandlern des Mittelwertes	
M. Luft: Dynamic characteristics of selected electro-mechanical transducers in automatic measuring systems	323
Caractéristiques dynamiques des convertisseurs électromécaniques choisis dans les systèmes de mesure automatiques	
Dynamische Charakteristiken gewählter elektromechanischer Wandler in automatischen Messsystemen	
J. Szmitkowski: Analysis of the operation of certain differential systems of an analog pressure transducer provided with tunnel diode	333
Analyse du travail des systèmes différentiels choisis du transducteur de pression à diode tunnel	
Arbeitsanalyse gewählter Differentialsysteme eines Analogdruckumsetzers mit Tunnel diode	
M. Nowak: Computer aided design of commutation circuits for PWM inverters	345
Etablissement du projet des circuits de commutation à l'aide d'un ordinateur, dans les onduleurs à modulation d'impulsions de tension de sortie en largeur	
Komputergestütztes Entwerfen von Löserschaltungen für Pulswechselrichter	
K. T. Januszkiewicz: Continuous induction heating of non-magnetic tubes	371
Chauffage par induction des tubes non-magnétiques en continu	
Induktive Vorschubserwärmung der nichtmagnetischen Röhren	
M. Kaźmierski, I. Kersz: Effectivity of longitudinal conducting screens. Part I. Electromagnetic field and stray losses	387
Efficacité des écrans conducteurs longitudinaux. Partie I. Champ électromagnétique et les pertes	
Wirksamkeit der leitenden Längsabschirmung. Teil I. Elektromagnetisches Feld und Verluste	
M. Kaźmierski, I. Kersz: Effectivity of longitudinal conducting screens. Part II. Temperature rise in screened systems	413
Efficacité des écrans conducteurs longitudinaux. Part II: Elévations de la température dans les systèmes blindés	
Wirksamkeit der leitenden Längsabschirmung. Teil II. Temperaturastieg in Abschirmungssystemen	
Z. Gacek: Outline of the methodology allowing to calculate the pollution reliability of overhead insulators	437
Esquisse de la méthodologie permettant de calculer la fiabilité des isolateurs aériens pollués	
Wahl des Berechnungsverfahrens für die Verschmutzungsbeständigkeit von Freiluftisolatoren	
A. Kamińska-Pranke: Mathematical model of an electric arc in a plasmatron with a vortex gas stabilisation	449
Modèle mathématique d'un arc électrique stabilisé d'un vortex dans un plasmatron du courant alternatif	
Mathematisches Modell eines durch Gasstromwirbel im Wechselstromplasmatron stabilisierten Lichtbogens	
A. Kamińska-Pranke: Calculation of the arc voltage and current intensity in the power circuit of an A.C. plasmatron	467
Tensions et courants dans le circuit d'alimentation du plasmatron du courant alternatif	
Strom- und Spannungsverlauf im Speisekreis eines Wechselstromplasmatrons	
K. Rzymkowski: Effectivity factors of handling entries in modular systems	483
Coefficients d'efficacité de la desserte des appels dans les systèmes modulaires	
Effektivitätsfaktoren der Bedienung von Meldungen in Modularsystemen	

K. Rzymkowski: Efficiency factors of the bus throughput of modular systems	491
Transmittance des conduites principales de système modulaire	
Durchverlaßvermögen einer Magistrale des Modularensystems	
K. Rzymkowski: Bus throughput capability of modular systems	495
Coefficients d'efficacité de l'exploitation les conduites principales du systèmes modulaires . .	
Effektivitätsfaktoren der Ausnutzung einer Magistrale in Modularensystemen	

NR 3

C. Rajski: On application of minimum power principle	515
Sur une certaine application du principe du pouvoir minimal	
Über gewisse Anwendung des Prinzips minimaler Leistung	
R. Nawrowski: Electric field distribution and electric withstand strength of a plate-hyperboloid point system with account taken of space charge	523
Répartition du champ électrique et de la rigidité diélectrique du système d'électrode plaque — pointe d'hyperboloïde prenant en considération la charge d'espace	
Verteilung des elektrischen Feldes und elektrische Festigkeit des Systems Platte-Hyperboloid- spitze unter Berücksichtigung einer Raumladung	
K. Noga: Estimation of the Nakagami distribution parameters basing on measured signal data	531
Estimation des paramètres de répartition de Nakagami en tenant compte des données de mesure du signal	
Parametersestimation der Nakagami-Verteilung auf Grund von Messdaten eines Signals	
F. Wysocka-Schillak: Application of nonlinear programming to the equiripple approximation of constant group delay by an effective group delay of a low-pass filter	541
Application de la programmation non linéaire à l'approximation ondulée uniformément du délai de groupe constant par le délai de groupe effectif du filtre passe-bas LC	
Anwendung nichtlinearen Programmierung für die gleichmäßig wellige Approximation der konstanten Gruppenlaufzeit mittels wirksam verzögerter Gruppenlaufzeit eines LC-Tiefpasses	
M. Głowacki, M. Pierzchała, J. Stanclik: Conditions of elimination of the dynamic intermodulation distortion in feedback, pole-zero compensated amplifiers	555
Conditions de l'élimination des distorsions dynamiques d'intermodulation dans un amplificateur avec contre réaction et compensation à l'aide des pôles et des zéros	
Bedingungen für die Ausscheidung dynamischer Intermodulationsverzerrungen bei Verstärkern mit Gegenkopplung und Pol-Null-Kompensierung	
M. Sadowski: Stabilisation of a tuned oscillator frequency in a discrete phase-locked loop	565
Stabilisation de fréquence d'un générateur réaccordé dans une boucle discrète de couplage de phase	
Frequenzstabilisierung eines spannungsgesteuerten Generators mittels PLL-Technik	
R. Artiuch: Shaping of phase locked loop transfer function	581
Formation de la fonction de transfert d'une boucle de verrouillage de phase	
Gestaltung der Übergangsfunktion einer Phasensynchronisierungsschleife	
W. Nakwaski: Waveguiding effect in stripe-geometry Fabry-Perot laser diodes	595
Effet de guide d'ondes dans les lasers longitudinaux avec résonateurs de Fabry-Perot	
Wellenleitereffekt in Streifendiodelnlasern mit dem Fabry-Perot Resonator	
S. Nowak: Effect of structure and manufacturing on the temperature factor of integrated thick-film resistance	615
Influence des agents constructifs et technologiques sur le coefficient de température de la résis- tance des réseaux intégrés résistifs à couches épaisses	
Temperaturkoeffizienten der Resistanz integrierter dickschichtiger Resistivnetze	
S. Paszczyński: A model describing piezoresistive effects in thick film resistor	645

Modèle dérivant les effets piézorésistifs dans les résistances à couches épaisses	
Modell für die Beschreibung piezoresistiver Effekte in Dickschichtwiderständen	
K. Z a m ł y ń s k i: Modelling of thermal feedback in monolithic integrated systems by means of the program SPICE-2G	673
Modelage de la rétroaction thermique dans les circuits intégrés monolithiques à l'aide du programme SPICE-2G	
Thermische Modellierung der Rückkopplung mittels Programm SPICE-2G bei integrierten Monolithsystemen	
A. L e w i ń s k a - R o m i c k a, S. P i s k o r s k i: Properties of eddy-current transducers for non-destructive testing of ferromagnetic rods	693
Propriétés des convertisseurs centrifuges pour les essais non-destructifs des barres ferromagnétiques	
Eigenschaften der Wirbelstromwandler für zerstörungsfreie Prüfungen ferromagnetischer Stäbe	
Z. M u s z a l s k i, L. G o l u s i ń s k i, W. R a f a l s k a, W. R a f a l s k i: High voltage impulses generation in the slide contact of electrical machines. Part III	723
Processus du développement des impulsions de haute dans le contact glissant des machines électriques. III partie	
Erzeugung von Hochspannungsimpulsen im Gleitkontakt elektrischer Maschinen. Teil III	

NR 4

M. P i o n t a s: A polynomial method of obtaining a discrete logarithm in Galois field of characteristic two	747
Utilisation des fonctions polynômes pendant le calcul des logarithmes dans les corps de Galois des characteristic deux	
Eine polynommethode zur Lösung diskreter Logarithmen in Galoisfeldern des charakteristik zwei	
K. J a s i ń s k i: Compaction of programmable logic arrays by folding	757
Réduction des matrices logiques du type PLA par méthode d'assemblage	
Reduktion logischer PLA-Matrizen mittels Zusammenfalten	
W. N a k w a s k i: Coupled rate equations for laser diodes	775
Equations cinétique accouplées des lasers conjugués	
Konjungierte Geschwindigkeitsgleichungen für Laserdioden	
J. M i n d y k o w s k i: Problem of frequency deviation measurement and the idea of appropriate optoisolator converters	785
Problème de mesure de l'écart de fréquence et conceptions des convertisseurs optoélectroniques convenables	
Messproblem bei einer Frequenzabweichung und die Idee der Anwendung optoelektronischer Umsetzer	
T. K a r c z m a r c z y k: Interpolation process in optoelectronic length gauges	829
Procédé de l'interpolation dans les mesureurs optoélectroniques de longueur	
Interpolationsverfahren der für Längenmessungen bestimmten optoelektronischer Geräte	
T. M o r a w s k i, J. Z b o r o w s k a: Multidiode wide-band reflection systems for switched microwave systems	841
Systèmes multidiodes réfléchants à larges bandes pour les circuits microondes commutés	
Abschagende breitbandige Mehrdiodensysteme für umgeschaltete Mikrowellensysteme	
K. B e r g i e l: Model of rail transmission system involving the earth in signal current flow and its co-operation with track occupancy.	855
Modele du circuit de rails pour transmission où sont prises en considération la conductivité du courant, assurée par la mise à terre, et la collaboration du circuit de contrôle d'occupation	
W. W i t e k: Capacitance meter using time conversion	867

	Système de mesure de capacité des condensateurs avec utilisation de la conversion capacité — temps	
	System für die Messung der Kondensatorenkapazität unter Anwendung der Zeitverarbeitungsmethode	
A. Królikowski:	Multiple-fault location in d.c. circuits using multiple excitation records	885
	Localisation des endommagements multiples dans les circuits de courant continu mettant en profit les mesures prises lors des excitations multiples	
	Lokalisierung der mehrmaligen Bäschädigungen bei Gleichstromkreisen unter Nitzung der Messungen bei mehrmaligen Anregungen	
A. Napieralski, J. Dorkel, P. Leturq:	A new theoretical approach and application of IR Thermography to power hybrid circuits	901
	Nouvelle méthode d'analyse et l'application de la thermographie dans l'infrarouge pour étudier les circuits hybrides de puissance	
	Neue Methode für Analyse und Anwendung der Thermographie im Infrarotbereich beim Untersuchen der Leistungshybridensysteme	
S. Nowak:	Nonlinearity of thick film resistors	927
	Non-linéarité des résistances à couches épaisses	
	Nichtlinearität dickschichtiger Resistoren	
M. Noga, Z. Głowacz:	Mathematical model and computer algorithm for the analysis of fault states of complex electromechanical systems	965
	Modèle mathématique et algorithme de calculs pour l'analyse des états de panne des systèmes électromécaniques composés	
	Mathematisches Modell und Berechnungsalgorithmus für die Analyse von Havariezuständen an komplizierten elektromechanischen Systemen	
J. Szabatin, A. Wojtkiewicz:	Block and recursive algorithms for the estimation of A.R. Parameters of time series	993
	Algorithmes de bloc et récurifs de l'estimation des paramètres AR des séries temporaires	
	Block- und rekursive Algorithmen der Parameterästimation von AR-Zeitreihen	
S. Jagiełło:	Analysis of the general structure of equations of the dynamic of an electromechanical system with periodically switched over windings	1047
	Analyse de la structure générale des équations de la dynamique du système électromécanique aux enroulements commutés cycliquement	
	Analyse der allgemeinen Struktur der Dynamikgleichungen eines elektromechanischen Systems mit zyklisch umschaltbaren Wicklungen	
M. Gryziński:	Deuterium in palladium lattice and cold fusion	1057
	Le deuterium dans le réseau cristalin du palladium et la fusion nucléaire froide	
	Deuterium in Palladium Kristall-Gitter und die Kalte Kernfusion	

СОДЕРЖАНИЕ

№ 1

К. Анисерович: Решение проблемы собственных значений $[K]\{\Phi\} = \lambda[M]\{\Phi\}$ методом подпространственных итераций в случае неопределённой матрицы $[K]$	5
М. Тадеусевич, М. Оссовски: Кусочно-линейный анализ резистивных нелинейных цепей при помощи блочных методов Гаусса-Зейделя и Якоби	28
М. Броцки, М. Паско: Дефиниции надёжных мощностей для многозажимных систем с деформированными пробегамми	31
А. Барански: Средства и способы обеспечения единства меры напряжения тока	45
А. Михальски, Я. Сикора, С. Винценцяк: Метод проектирования оптимальной возбуждающей катушки электромагнитных расходомеров для открытых каналов	61
А. Харасевич, Е. Крупка: Применение цилиндрических резонаторов квази $TE_{0,1m}$ квази $TM_{0,10}$ к измерению сопряженной электрической проницаемости цилиндрических образцов диэлектриков произвольных размеров	77
А. Живазня, Я. Оцепка: Использование ДПФ в динамических тестах систем аналого-цифрового преобразования	89
Е. Возницки: Проблемы автоматизации проектирования оптических изображающих систем	101
Б. Венцек: Распознавание контуров плоских изображений	125
С. Пашиньски: Пьезорезистивные свойства толстопленочных резисторов	133
В. Накваски: Деградация припои связывающего кристаллы лазерных диодов и светоизлучающих диодов с корпусом	149
Л. Я. Вайс, Ф. Высоцка, Т. Высоцки, Т. Высоцки мл.: Аппроксимация вольтамперной характеристики туннельного диода с помощью экспоненциальной функции	175
М. Пионтас, Д. Рутковски: Выбор длины пакета в сети интегрального обслуживания	193
Д. Санковски: Идентификация электрических печей в замкнутой системе	193
М. Стжелецки: Потери мощности и импедансы однофазных шинопроводов	211

№ 2

В. Накваски: Пороговый ток лазерных диодов на основе (InGa) (AsP)/InP. Часть 1. Пороговое условие, местное усиление, поверхностная рекомбинация, пороговый ток	227
В. Накваски: Пороговый ток лазерных диодов на основе (InGa) (AsP)/InP. Часть 2. Внутренние потери, пороговая концентрация носителей, токи утечки, упрощенная модель, температурная зависимость порогового тока	239
Е. Клямка: Микроволновые приборы из фосфида индия, работающие в диапазоне миллиметровых волн	253
Я. Мулявка, З. Сопорек: О реализации активных сопротивлений в интегральных фильтрах MOS	267

В. Дзех: Метод определения оптимальных параметров адаптивной дискретизации измерительных сигналов	285
К. Пахольски: Анализ динамических амплитудно-частотных свойств операционных преобразователей среднего значения	295
М. Люфт: Динамические характеристики некоторых электромеханических датчиков измерительных систем	323
Ю. Шмитковски: Анализ работы избранных схем разностного аналогового преобразователя давления с туннельным диодом	333
М. Новак: Проектирование с помощью вычислительных машин схем коммутации инверторов работающих с модуляцией импульсов выходного напряжения	345
К. Янушкевич: Индукционный нагрев при передвижении немагнитных труб	371
М. Казьмерски, И. Керш: Эффективность продольных проводящих экранов. Часть 1. Электромагнитное поле и потери	387
М. Казьмерски, И. Керш: Эффективность продольных проводящих экранов. Часть 2. Перегрев в экранируемых системах	413
З. Гацек: Эскиз методики вычисления надёжности загрязнённых воздушных изоляторов	437
А. Каминьска - Пранке: Математическая модель электрической дуги стабилизированной вихревым потоком газа в плазмотроне переменного тока	449
А. Каминьска - Пранке: Напряжения и силы тока в цепи плазмотрона переменного тока	467
К. Жимковски: Коэффициенты эффективности обслуживания впадов в модульных системах	483
К. Жимковски: Пропускная способность магистрали модульной системы	491
К. Жимковски: Коэффициенты эффективности использования магистрали модульных систем	495

№ 3

Ч. Райски: Об одном из применений принципа минимум мощности	515
Р. Навровски: Образ электрического поля и электрическая прочность системы плоскость-гиперболоидальное острие с учетом пространственного заряда	523
К. Нога: Оценка параметров разложения Накагамы на основании данных измерения сигнала	531
Ф. Высоцка - Шиллак: Применение нелинейного программирования для решения задачи равноволновой аппроксимации постоянного группового времени запаздывания характеристикой рабочего времени запаздывания фильтра LC нижних частот	541
М. Гловацки, М. Пешхала, Ю. Станцлик: Условия элиминации динамических искажений в усилителе мощности с обратной связью и компенсацией полюсом и нулём	555
М. Садовски: Стабилизация частоты генератора перестраиваемого в дискретном контуре обратной связи	565
Р. Артюх: Формирование трансмитанса контура синхронизации фазы	581
В. Накваски: Волноводный эффект в полосковых лазерных диодах с резонатором Фабри-Перо	595
С. Новак: Влияние конструкционных и технологических параметров на коэффициент сопротивления интегральных резистивных сетей	615
С. Пащиньски: Модель описывающая пьезорезистивные эффекты в толстоплёночных резисторах	645
К. Замлынски: Моделирование температурной обратной связи в монолитных интегральных схемах при помощи программы SPICE-2	673

А. Левиньска-Ромицка, С. Пискорски: Свойства вихретоковых переходных трансформаторных преобразователей для нерозрушающих испытаний ферромагнитных стержней	693
З. Мушальски, Л. Гольусиньски, В. Рафальска, В. Рафальски: Генерирование высокочастотных импульсов в скользящем контакте электрических машин. Часть 3	723

№ 4

М. Пионтас: Многочленный метод нахождения дискретного логарифма в полях Галуа характеристики два	747
К. Ясиньски: Редукция программируемых логических матриц типа ПЛА методом составления	757
В. Накваски: Сопряжённые кинетические уравнения лазерных диодов	775
Я. Миндыковски: Вопросы измерения отклонения частоты и концепции соответствующих оптоэлектронных преобразователей	785
Т. Карчмарчик: Интерполяционный процесс в оптоэлектронных приборах предназначенных для измерения длины (в оптоэлектронных длиномерах)	829
Т. Моравски, И. Зборовска: Многодиодные широкополосные отражающие схемы для переключаемых микроволновых систем	841
К. Бергель: Модель контура железнодорожного полотна с учетом участия земли в проводимости для сигнального тока	855
В. Витек: Измерительная схема ёмкости конденсаторов с использованием временного преобразования	867
А. Круликовски: Диагностика аналоговых систем	885
А. Наперальски: Новый метод анализа и применение томографии в инфракрасном диапазоне к исследованию гибридных схем мощности	901
С. Новак: Нелинейность толстоплёночных резисторов	827
М. Нога, З. Гловач: Математическая модель и расчетный алгоритм для анализа аварийных состояний электромеханических систем	965
Е. Шабатин, А. Войткевич: Блочные и рекурсивные алгоритмы оценки параметров временных рядов AR	993
А. Ягелло: Анализ общей структуры уравнений динамики электромеханической системы с периодически переключаемыми обмотками	1047
М. Грызиньски: Деутер в палладий сети и холоднослияние	1057

Cena w wolnej sprzedaży zł 2000,—

Kwartalnik

Prenumeratę przyjmują:

- oddziały kolportażowe właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora — odbioru zamówionych egzemplarzy dokonuje prenumerator w wyznaczonych punktach sprzedaży lub w inny, uzgodniony sposób,
- urzędy pocztowe i listonosze — od prenumeratorów z terenów wiejskich lub innych miejscowości, w których nie ma oddziałów kolportażowych, a w miastach tylko od osób niepełnosprawnych — poczta zapewnia dostawę zamówionych egzemplarzy pod wskazany adres pod warunkiem uiszczenia dodatkowej opłaty za każdy doręczony egzemplarz; Wysokość opłat za każdy kwartał ustala poczta,
- Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 — tylko od prenumeratorów zlecających dostawę za granicę.

Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą — koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumeratę.

Terminy przyjmowania prenumeraty:

- | | | |
|------------------------|-------------|--------------------------------------|
| — na kraj i za granicę | — do 20.XI. | na I kw ₂ roku następnego |
| | do 20.II. | na II kw. |
| | do 20.V. | na III kw. |
| | do 20.VIII. | na IV kw. |

Bieżące i wcześniejsze numery można nabyć w Księgarni Państwowego Wydawnictwa Naukowego, ul. Miodowa 10, Warszawa. Również można je nabyć, a także zamówić (przesyłka za zaliczeniem pocztowym) we Wzorcowni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN, Pałac Kultury i Nauki, 00-901 Warszawa.

Subscription orders for all the magazines published in Poland available through the local press distributors or directly through the

Foreign Trade Enterprise

ARS POLONA

00-068 Warszawa, Krakowskie Przedmieście 7, Poland,

Our bankers:

BANK HANDLOWY S.A; 20 1061-710-15107-787

Indeks 37483

Rozpr. Elektrot., T. 35, z. 4, 745—1072, Warszawa 1990