

POLSKA AKADEMIA NAUK  
KOMITET ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI

ych  
h

KWARTALNIK  
ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI  
ELECTRONICS AND  
TELECOMMUNICATIONS  
QUARTERLY

TOM 46 — ZESZYT 3

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN  
WARSZAWA 2000

---

## RADA REDAKCYJNA

### *Przewodniczący*

Prof. dr hab. inż. STEFAN HAHN  
czł. koresp.

### *Członkowie*

prof. dr hab. inż. DANIEL JÓZEF BEM — czł. koresp. PAN, prof. dr hab. inż. MICHAŁ BIAŁKO — czł. rzecz. PAN, prof. dr hab. inż. JAN CHOJCAN, prof. dr hab. inż. MAREK DOMAŃSKI, prof. dr hab. inż. ANDRZEJ HAŁAS, prof. dr inż. WŁADYSŁAW MAJEWSKI, prof. dr hab. inż. JÓZEF MODELSKI, prof. dr inż. JERZY OSIOWSKI, prof. dr hab. inż. EDWARD SĘDEK, prof. dr hab. inż. MICHAŁ TADEUSIEWICZ, prof. dr hab. inż. WIESŁAW WOLIŃSKI — czł. koresp. PAN, prof. dr inż. MARIAN ZIENTAŁSKI

### REDAKCJA

#### *Redaktor Naczelny*

prof. dr hab. inż. WIESŁAW WOLIŃSKI

#### *Zastępca Redaktora Naczelnego*

doc. dr inż. KRYSTYN PLEWKO

#### *Sekretarz Odpowiedzialny*

mgr ELŻBIETA SZCZEPANIAK

### ADRES REDAKCJI

00-665 Warszawa, ul. Nowowiejska 15/19 Politechnika, pok. 470  
Instytut Telekomunikacji, Gmach im. prof. JANUSZA GROSZKOWSKIEGO

Dyżury Redakcji: środy i piątki, godz. 14–16  
tel/fax (022) 660 77 37

Telefony domowe: Redaktora Naczelnego: 812 17 65  
Zast. Red. Naczelnego: 826 83 41  
Sekretarza Odpowiedzialnego: 633 92 52

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN SA  
Warszawa, ul. Miodowa 10

|                                  |                                           |
|----------------------------------|-------------------------------------------|
| Ark. wyd. 13,5 Ark. druk. 11,25  | Podpisano do druku w październiku 2000 r. |
| Papier offset. kl. III 70 g. B-1 | Druk ukończono w listopadzie 2000 r.      |

SKŁAD I ŁAMANIE: PHOTOTEXT, Warszawa, ul. Chmielna 120  
DRUK I OPRAWA: Drukarnia Braci Grodzickich, Piaseczno, ul. Geodetów 47a

## Szanowni Autorzy

„Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji” — Electronics and Telecommunications Quarterly jest kontynuatorem tradycji powstałego 46 lat temu kwartalnika p.t. „Rozprawy Elektrotechniczne”.

Kwartalnik jest czasopismem Komitetu Elektroniki i Telekomunikacji Polskiej Akademii Nauk. Wydawany jest przez Wydawnictwo Naukowe PWN SA w Warszawie. Kwartalnik jest czasopismem naukowym, na którego łamach są publikowane artykuły i komunikaty prezentujące wyniki oryginalnych prac teoretycznych i doświadczalnych, a także przeglądowych. Związane są one z szeroko rozumianymi dziedzinami współczesnej elektroniki, telekomunikacji, mikroelektroniki, optoelektroniki, radiotechniki i elektroniki medycznej.

Autorami publikacji są wybitni naukowcy, znani specjaliści o wieloletnim doświadczeniu, a także młodzi badacze — głównie doktoranci.

Artykuły charakteryzują się oryginalnym ujęciem zagadnienia, interesującymi wynikami badań, krytyczną oceną teorii lub metod, omówieniem aktualnego stanu, lub postępu danej gałęzi techniki oraz omówieniem perspektyw rozwojowych. Sposób pisania matematycznej części artykułów zgodny jest z wytycznymi IEC (International Electronics Commission) oraz ISO (International Organization of Standardization).

Wszystkie publikowane w Kwartalniku artykuły są recenzowane przez znanych krajowych specjalistów, co zapewnia że publikacje te są uznawane jako autorski dorobek naukowy. Opublikowanie w kwartalniku wyników prac naukowych zrealizowanych w ramach „GRANTów” Komitetu Badań Naukowych spełnia więc jeden z wymogów stawianych tym pracom.

Czasopismo dociera do wszystkich zajmujących się elektroniką i telekomunikacją krajowych ośrodków naukowych oraz technicznych, a także szeregu instytucji zagranicznych. Jest ponadto prenumerowane przez liczne grono specjalistów i biblioteki.

Każdy Autor otrzymuje bezpłatnie 20 egzemplarzy nadbitek swojego artykułu, co ułatwia przesłanie go do indywidualnych wybranych przez Autora osób i instytucji w kraju lub za granicą. Ułatwia to dodatkowo fakt, że w Kwartalniku są publikowane artykuły w języku angielskim.

Nadesłane do redakcji artykuły są publikowane w terminie około pół roku, w przypadku sprawnej współpracy Autora z Redakcją. Wytyczne dla Autorów dotyczące formy publikacji są zamieszczone w zeszytach Kwartalnika, można je także otrzymać w siedzibie Redakcji.

Artykuły można dostarczać osobiście, lub pocztą pod adresem zamieszczanym na stronie redakcyjnej w każdym zeszycie.

Redakcja

KO — czł.  
dr hab. inż.  
SKI, prof. dr  
USIEWICZ,  
TALSKI

A  
netw  
diffe  
been  
locat  
are b  
regio  
elim  
expl  
assu  
cann  
is p  
cons



## **Finding all the DC solutions of MOS transistor circuits described by original nonlinear equations**

Michał Tadeusiewicz, Stanisław Hałgas

*Technical University of Lodz*

*Otrzymano 2000.04.03*

*Autoryzowano 2000.06.25*

A broad class of nonlinear electronic circuits, containing MOS transistors, having multiple operating points, is considered in the paper. The transistors are represented by a model which is built up in Level 1 of SPICE and is transformed to an equivalent Ebers-Moll type form. The nonlinearities of this model are polynomial type and no piecewise-linear approximation is used. An idea of successive contraction, division and elimination is applied and a new contraction procedure is developed. The results are correct to at least three decimal places. Numerical examples of circuits encountered in practice, including a CNN 'full range' cell containing 16 MOS transistors, are given. They show effectiveness of this approach.

*Key words:* nonlinear circuits, multiple DC solutions, MOS transistors, numerical analysis

### **1. INTRODUCTIOC**

A broad class of electronic circuits including flip-flops, logic circuits and neural networks has multiple DC solutions. Many papers have been recently devoted to different aspects of the analysis of this class of circuits [1–25]. Special attention has been focused on the problem of finding all the DC solutions [3–12, 18–24] or their location [14–17]. Most algorithms for finding all the DC solutions of nonlinear circuits are based on piecewise-linear approximations [3–12]. The algorithms operate on some regions arising in piecewise-linear analysis. The general idea of the algorithms is to eliminate as many regions or superregions, including no solution, as possible. They exploit linear description of a circuit in any of the regions (superregions). Thus, the assumption concerning piecewise-linear representation of the circuits is essential and cannot be relaxed. The regions (superregions) are predefined and the elimination process is performed on them. If their number is large the computation process is time consuming. Therefore only rather small-sized circuits can be analysed.

Another approach to piecewise-linear analysis of circuits having multiple DC solutions is based on the idea of successive contraction, division and elimination [18–23]. The contraction procedures use some auxiliary functions bounding from above and below the piecewise-linear functions. Consequently, the description is linear in any considered area which can include many regions (superregions) of linearity. The effectiveness of the algorithm depends on the effectiveness of the contraction procedure.

It should be stressed that the piecewise-linear representation of electronic circuits constitutes an approximation of real nonlinearities. Therefore, the solutions are approximations to appropriate solutions as the original circuit has. Consequently the results can be inaccurate and even the number of the solutions can be incorrect.

In this paper the idea of successive contraction, division and elimination is adopted to circuits including MOS transistors represented by models used in electronic circuits analysis. The circuits are described by nonlinear functions of the polynomial form and no piecewise-linear representation is used. A very effective contraction procedure, including two contracting methods, is developed and embedded into the algorithm. The algorithm is very effective as it is illustrated by numerical examples in Section 4.

In Section 2 the model of MOS transistors is introduced, the circuit equation is written and the idea of the algorithm is described. The main result of the paper is a contraction procedure developed in Section 3. Section 4 gives description of the algorithm, numerical examples and conclusions.

## 2. PRELIMINARIES

Let us consider a circuit  $\mathcal{N}$  consisting of  $n_t$  MOS transistors, linear positive resistors and independent voltage and current sources. An N-channel MOS transistor, modeled as shown in Fig. 1, is described by equation

$$i_{dr} = f(v_{ds}, v_{gs}) = \begin{cases} 0 & \text{for } v_{gs} - v_{to} < 0 \\ K(2(v_{gs} - v_{to})v_{ds} - v_{ds}^2) & \text{for } v_{ds} \leq v_{gs} - v_{to} \\ K(v_{gs} - v_{to})^2 & \text{for } 0 \leq v_{gs} - v_{to} \leq v_{ds} \end{cases} \quad (1)$$

where  $v_{to}$  is a threshold voltage. Generally the threshold voltage depends on bulk-source voltage, but in simplified version of the model it is assumed to be constant and equal to  $v_{to}$ . Relationship (1) is valid for  $v_{ds} \geq 0$ . In the other case ( $v_{ds} < 0$ ) it holds

$$i_{rd} = f(v_{sd}, v_{gd}) \quad (2)$$

Above model is built up in Level 1 of SPICE.

It can be shown [26] that both relationships (1) and (2) are satisfied by the Ebers-Moll type model as depicted in Fig. 2, where the nonlinear resistors are diode-type, described by equations

multiple DC  
elimination  
om above  
is linear  
linearity.  
contraction

c circuits  
s are ap-  
he results

s adopted  
ic circuits  
form and  
procedure,  
ithm. The  
n 4.  
quation is  
paper is  
on of the

$$i_1 = f_1(v_{gs}) = \begin{cases} K(v_{gs} - v_{to})^2 & \text{for } v_{gs} \geq v_{to} \\ 0 & \text{for } v_{gs} < v_{to} \end{cases} \quad (3)$$

$$i_2 = f_2(v_{gd}) = \begin{cases} K(v_{gd} - v_{to})^2 & \text{for } v_{gd} \geq v_{to} \\ 0 & \text{for } v_{gd} < v_{to} \end{cases} \quad (4)$$

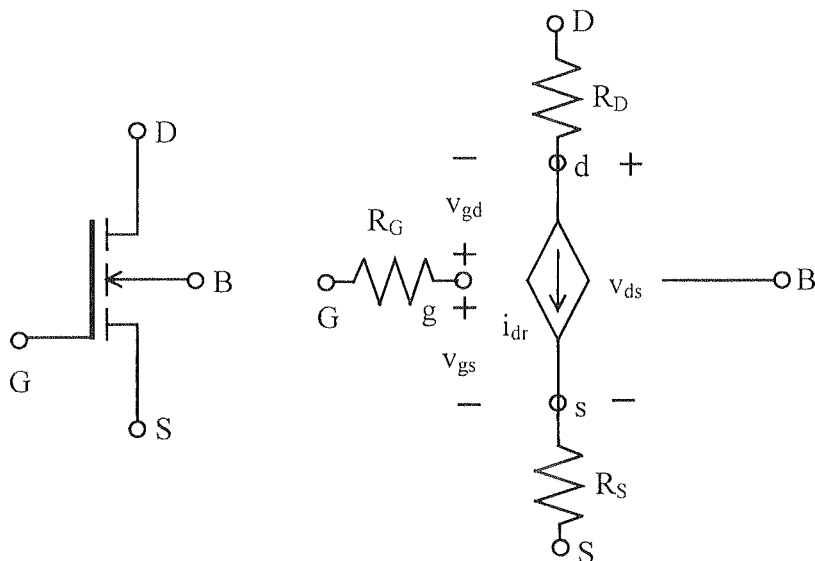


Fig. 1. An N-channel MOS transistor DC model

e resistors  
odeled as

(1)

ulk-source  
d equal to

(2)

d by the  
istors are

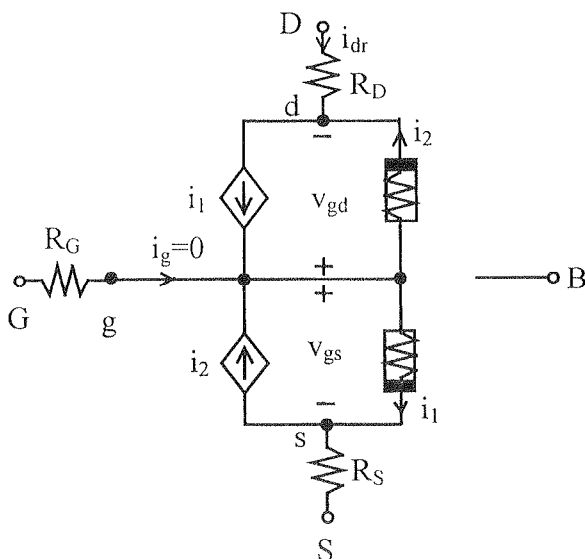


Fig. 2. The Ebers-Moll type circuit equivalent to the model of Fig. 1

where  $K$  is a constant factor which depends on the dimensions of the device and other physical constants. The current controlled current sources have the gains equal to 1, hence, it holds  $i_g = 0$ .

It should be stressed that the N-channel MOS transistor model shown in Fig. 2 is equivalent to the model of Fig. 1 and leads to the description (1). Similar Ebers-Moll type model arises for P-channel MOS transistors.

To describe the circuit  $\mathcal{N}$  we replace each MOS transistor by the introduced above model. Next we extract all the nonlinear resistor — controlled source combinations associated with the models. Consequently, a linear  $n$ -port is created ( $n = 2n_t$ ) consisting of linear resistors and independent sources. Using the admittance representation of this  $n$ -port we obtain

$$\mathbf{i} + \mathbf{G}\mathbf{v} = \mathbf{b} \quad (5)$$

where  $\mathbf{G} = [G_{ij}]_{n \times n}$  is a short circuit admittance matrix,  $\mathbf{b}$  is a source vector,  $\mathbf{i} = [i_1 \dots i_n]^T$  ( $\mathbf{v} = [v_1 \dots v_n]^T$ ) is a vector of the port currents (voltages). We consider only the circuits where  $G_{ii} > 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Any current  $i_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) is described by one of the following equations

$$i_{dr} = f_1(v_{gs}) - f_2(v_{gd}) \quad (6)$$

$$i_{rd} = -f_1(v_{gs}) + f_2(v_{gd}) \quad (7)$$

Hence, we obtain the following description of the circuit  $\mathcal{N}$

$$\mathbf{h}(\mathbf{v}) + \mathbf{G}\mathbf{v} = \mathbf{b} \quad (8)$$

where  $\mathbf{h}(\mathbf{v}) = [h_1(\mathbf{v}) \dots h_n(\mathbf{v})]^T$ . On the basis of (6) and (7) we write

$$h_{2i-1}(\mathbf{v}) = f_{2i-1}(v_{2i-1}) - f_{2i}(v_{2i}) \quad (9)$$

$$h_{2i}(\mathbf{v}) = -f_{2i-1}(v_{2i-1}) + f_{2i}(v_{2i}) \quad (10)$$

where  $f_{2i-1}$  and  $f_{2i}$  are functions given by (3) and (4). The functions are continuously differentiable, monotonically increasing and convex. Constants  $K$  and  $v_{to}$  included in these functions may be different for different transistors.

The algorithm of successive contraction, division and elimination is a very useful tool for finding all the DC solutions of nonlinear circuits. In Refs. 20–23 this algorithm has been applied to piecewise-linear circuits. The algorithm, exploiting appropriate contraction procedure, enables us to eliminate some regions of linearity arising in piecewise-linear analysis. In the remainder regions the circuit is solved using effective techniques for linear analysis and next it is checked whether the solution is contained in this region.

In the applied described a case of region i procedure obtain a then 10<sup>3</sup> voltages V can be enables

We = [1<sup>(0)</sup>, u<sup>(0)</sup>] defining relation and a contra

Two and elim

Contract

We consider

We frame by approach through  $f_{2i-1}$  belong other on way we following

and other  
ual to 1,

Fig. 2 is  
ers-Moll

ed above  
binations  
onsisting  
n of this

(5)

$[i_1 \dots i_n]^T$   
e circuits  
e of the

In this paper the algorithm of successive contraction, division and elimination is applied to the circuits described by equation (8) where nonlinear functions which describe MOS transistors have the polynomial form (3) and (4). The idea is similar as in a case of piecewise — linear representation. In the division process the largest size of region is divided into two parts using a middle point and a very effective contraction procedure, developed in this paper, is applied. The division process is finished if we obtain a region having the largest size, for junction voltages which exceed  $v_{to}$ , smaller then  $10^{-3}$  V. From an engineering point of view two solutions, specified by transistors voltages, belonging to an  $n$  — dimension box so that its largest size is less than  $10^{-3}$  V can be considered to be the same solution. Under this interpretation the method enables us to find all the solutions correct to three decimal places.

We wish to find all the solutions to equation (8) contained in the set  $[I^{(0)}, u^{(0)}] = [1_1^{(0)}, u_1^{(0)}] \times [1_2^{(0)}, u_2^{(0)}] \times \dots \times [1_n^{(0)}, u_n^{(0)}]$ , where  $1_i^{(0)}$  and  $u_i^{(0)}$  are arbitrary numbers satisfying relation  $1_i^{(0)} \leq u_i^{(0)}$  ( $i = 1, \dots, n$ ), using the algorithm of successive division, contraction and elimination as described above. The crucial point of this algorithm is a contraction procedure described in Section 3.

(6)

### 3. CONTRACTION METHODS

(7)

Two contraction methods used in the algorithm of successive contraction, division and elimination are developed below.

#### Contraction method 1

(8)

We divide the set of  $n$  equations of the representation (8) into 2-equation blocks and consider the block corresponding to  $i$ -th transistor.

(9)

$$f_{2i-1}(v_{2i-1}) - f_{2i}(v_{2i}) + \sum_{j=1}^n G_{2i-1,j} v_j = b_{2i-1}$$

(10)

$$-f_{2i-1}(v_{2i-1}) + f_{2i}(v_{2i}) + \sum_{j=1}^n G_{2i,j} v_j = b_{2i} \quad (11)$$

inuously  
cluded in

eful tool  
ithm has  
e contra-  
cewise-  
iques for  
gion.

We frame the function  $f_{2i-1}(v_{2i-1})$  in the interval  $[1_{2i-1}^{(0)}, u_{2i-1}^{(0)}]$ , from above and below by appropriate straight lines as depicted in Fig. 3. The line framing  $f_{2i-1}$  above passes through the points  $(1_{2i-1}^{(0)}, f_{2i-1}(1_{2i-1}^{(0)}))$  and  $(u_{2i-1}^{(0)}, f_{2i-1}(u_{2i-1}^{(0)}))$ . One of the lines framing  $f_{2i-1}$  below is a tangent line which passes through the point  $(1_{2i-1}^{(0)}, f_{2i-1}(1_{2i-1}^{(0)}))$ . The other one is the tangent line passing through the point  $(u_{2i-1}^{(0)}, f_{2i-1}(u_{2i-1}^{(0)}))$ . In a similar way we frame the function  $f_{2i}(v_{2i})$  in the interval  $[1_{2i}^{(0)}, u_{2i}^{(0)}]$  (see Fig. 4). Hence, the following inequalities hold

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m_{2i-1,2}^- & -m_{2i}^+ \\ -m_{2i-1}^+ & m_{2i,2}^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2i-1} \\ v_{2i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{2i-1,2}^- & -c_{2i}^+ \\ c_{2i,2}^- & -c_{2i-1}^+ \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} f_{2i-1}(v_{2i-1}) - f_{2i}(v_{2i}) \\ -f_{2i-1}(v_{2i-1}) + f_{2i}(v_{2i}) \end{bmatrix} \leq \\
 & \leq \begin{bmatrix} m_{2i-1}^+ & -m_{2i,1}^- \\ -m_{2i-1,1}^- & m_{2i}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2i-1} \\ v_{2i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{2i-1}^+ & -c_{2i,1}^- \\ c_{2i}^+ & -c_{2i-1,1}^- \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (12)$$

for  $l_{2i-1}^{(0)} \leq v_{2i-1} \leq u_{2i-1}^{(0)}$  and  $l_{2i}^{(0)} \leq v_{2i} \leq u_{2i}^{(0)}$ .

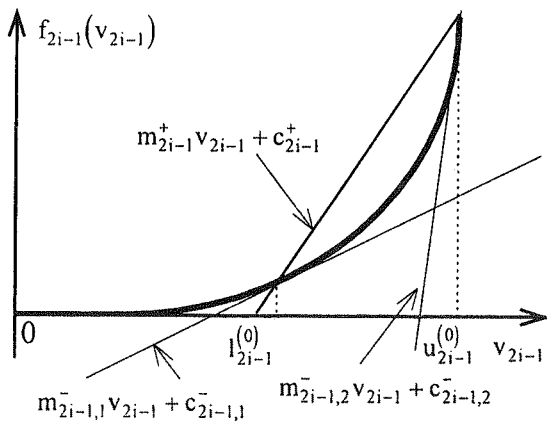


Fig. 3. Construction of the straight lines framing  $f_{2i-1}(v_{2i-1})$

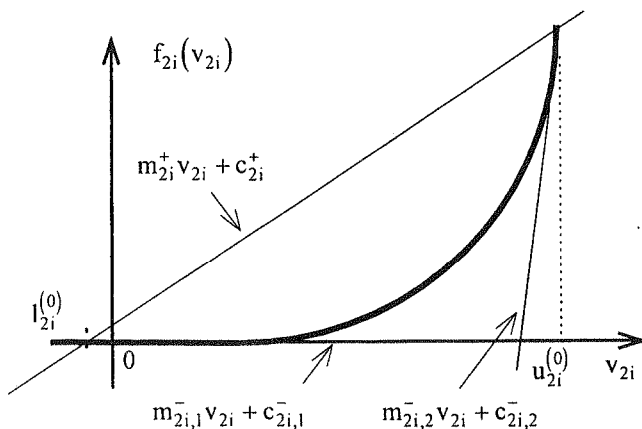


Fig. 4. Construction of the straight lines framing  $f_{2i}(v_{2i})$

If  $\mathbf{v}^* = [v_1^* \ v_2^* \ \dots \ v_n^*]^T$  is an arbitrary solution belonging to the set  $[\mathbf{l}^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)}]$  then referring to (11) we find

$$(12) \quad \begin{bmatrix} L_{2i-1} \\ L_{2i} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} f_{2i-1}(v_{2i-1}^*) - f_{2i}(v_{2i}^*) \\ -f_{2i-1}(v_{2i-1}^*) + f_{2i}(v_{2i}^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{2i-1, 2i-1} & G_{2i-1, 2i} \\ G_{2i, 2i-1} & G_{2i, 2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2i-1}^* \\ v_{2i}^* \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} M_{2i-1} \\ M_{2i} \end{bmatrix} \quad (13)$$

where

$$\begin{bmatrix} L_{2i-1} \\ L_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{2i-1} \\ b_{2i} \end{bmatrix} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2i-1, j \neq 2i}}^n \begin{bmatrix} G_{2i-1, j} q_j^{(2i-1)} \\ G_{2i, j} q_j^{(2i)} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$q_j^{(2i-1)} = \begin{cases} u_j^{(0)} & \text{if } G_{2i-1, j} \geq 0 \\ l_j^{(0)} & \text{if } G_{2i-1, j} < 0 \end{cases} \quad q_j^{(2i)} = \begin{cases} u_j^{(0)} & \text{if } G_{2i, j} \geq 0 \\ l_j^{(0)} & \text{if } G_{2i, j} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} M_{2i-1} \\ M_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{2i-1} \\ b_{2i} \end{bmatrix} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2i-1, j \neq 2i}}^n \begin{bmatrix} G_{2i-1, j} p_j^{(2i-1)} \\ G_{2i, j} p_j^{(2i)} \end{bmatrix} \quad (15)$$

where

$$p_j^{(2i-1)} = \begin{cases} u_j^{(0)} & \text{if } G_{2i-1, j} < 0 \\ l_j^{(0)} & \text{if } G_{2i-1, j} \geq 0 \end{cases} \quad p_j^{(2i)} = \begin{cases} u_j^{(0)} & \text{if } G_{2i, j} < 0 \\ l_j^{(0)} & \text{if } G_{2i, j} \geq 0 \end{cases}$$

Combining (12) and (13) we obtain the following relations:

$$\begin{bmatrix} m_{2i-1}^+ + G_{2i-1, 2i-1} & -m_{2i-1}^- + G_{2i-1, 2i} \\ -m_{2i-1, 1}^- + G_{2i, 2i-1} & m_{2i}^+ + G_{2i, 2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2i-1}^* \\ v_{2i}^* \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \tilde{L}_{2i-1} \\ \tilde{L}_{2i} \end{bmatrix} \quad (16)$$

where

$$\begin{bmatrix} \tilde{L}_{2i-1} \\ \tilde{L}_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{2i-1} \\ L_{2i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{2i-1}^+ - c_{2i, 1}^- \\ c_{2i}^+ - c_{2i-1, 1}^- \end{bmatrix} \quad (17)$$

and

$$\begin{bmatrix} m_{2i-1, 2}^- + G_{2i-1, 2i-1} & -m_{2i}^+ + G_{2i-1, 2i} \\ -m_{2i-1}^+ + G_{2i, 2i-1} & m_{2i, 2}^- + G_{2i, 2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2i-1}^* \\ v_{2i}^* \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \tilde{M}_{2i-1} \\ \tilde{M}_{2i} \end{bmatrix} \quad (18)$$

where

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}_{2i-1} \\ \tilde{M}_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{2i-1} \\ M_{2i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{2i-1, 2}^- - c_{2i}^+ \\ c_{2i, 2}^- - c_{2i-1}^+ \end{bmatrix} \quad (19)$$

en referring

Now we consider the square matrix on the left hand side of relation (16)

$$\mathbf{P}_+ = \begin{bmatrix} m_{2i-1}^+ + G_{2i-1, 2i-1} & -m_{2i, 1}^- + G_{2i-1, 2i} \\ -m_{2i-1, 1}^- + G_{2i, 2i-1} & m_{2i}^+ + G_{2i, 2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{2i-1, 2i-1}^+ & p_{2i-1, 2i}^+ \\ p_{2i, 2i-1}^+ & p_{2i, 2i}^+ \end{bmatrix} \quad (20)$$

Under rather mild restrictions the following inequalities hold:

$$G_{2i-1, 2i-1} > 0 \quad G_{2i, 2i} > 0$$

$$G_{2i-1, 2i} = G_{2i, 2i-1} \leq 0$$

$$G_{2i-1, 2i-1} \geq |G_{2i-1, 2i}| = |G_{2i, 2i-1}| \quad G_{2i, 2i} \geq |G_{2i, 2i-1}| = |G_{2i-1, 2i}|$$

where at least one of the above two inequalities is strong, i.e. either  $G_{2i-1, 2i-1} > |G_{2i-1, 2i}| = |G_{2i, 2i-1}|$  or  $G_{2i, 2i} > |G_{2i, 2i-1}| = |G_{2i-1, 2i}|$  or both. It should be stressed that this assumption is usually satisfied in practical transistor circuits and only such circuits will be considered.

Now we take into account the functions  $f_{2i-1}$  and  $f_{2i}$ . On the basis of (3) and (4) we see that each of the functions is continuous, monotonically increasing and convex. The above properties lead to the following conclusions:

- (i) All the coefficients  $m_{2i-1}^+$ ,  $m_{2i-1, 1}^-$ ,  $m_{2i-1, 2}^-$ ,  $m_{2i}^+$ ,  $m_{2i, 1}^-$ ,  $m_{2i, 2}^-$  are nonnegative.
- (ii) The following inequalities hold

$$m_{2i-1}^+ \geq m_{2i-1, 1}^- \quad m_{2i}^+ \geq m_{2i, 1}^-$$

Summarising above discussion we obtain

$$p_{2i-1, 2i-1}^+ > 0 \quad p_{2i, 2i}^+ > 0 \quad p_{2i, 2i-1}^+ \leq 0 \quad p_{2i-1, 2i}^+ \leq 0$$

$$p_{2i-1, 2i-1}^+ \geq |p_{2i, 2i-1}^+| \quad p_{2i, 2i}^+ \geq |p_{2i-1, 2i}^+|$$

where at least one of last two inequalities is strong.

These relations state that matrix  $\mathbf{P}_+$  is nonsingular and its inverse has all elements nonnegative. On the basis of this property and relation (16) we find

$$\begin{bmatrix} v_{2i-1}^* \\ v_{2i}^* \end{bmatrix} \geq \mathbf{P}_+^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{L}_{2i-1} \\ \tilde{L}_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{2i-1} \\ \lambda_{2i} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Thus,  $\lambda_{2i-1}(\lambda_{2i})$  is another lower bound on  $v_{2i-1}^*(v_{2i}^*)$ . If  $\lambda_{2i-1} \geq 1_{2i-1}^{(0)}$  and/or  $\lambda_{2i} \geq 1_{2i}^{(0)}$  then we set  $1_{2i-1} = \lambda_{2i-1}$ , and/or  $1_{2i} = \lambda_{2i}$  obtaining new bounds on the location of  $v_{2i-1}^*$  and  $v_{2i}^*$ .

The approach presented above, properly modified, is next used for determining new upper bounds  $u_{2i-1}$  and  $u_{2i}$  on  $v_{2i-1}^*$  and  $v_{2i}^*$ , respectively.



(20) The procedure is performed for  $n_i = \frac{n}{2}$  two-equation blocks leading to the bounds  $\mathbf{1} = [1_1 \dots 1_n]^T$  and  $\mathbf{u} = [u_1 \dots u_n]^T$ .

### Contraction method 2

Let us consider  $i$ -th pair of equation (11) and add both equations together. As a result we obtain the linear equation

$$\sum_{j=1}^n (G_{2i-1,j} + G_{2i,j}) v_j = b_{2i-1} + b_{2i} \quad (22)$$

Next we form a new pair of equations including the first equation of the set (11) and equation (22). Thus, one equation creating the pair is nonlinear and the other is linear.

Let us take into account the first equation and frame function  $f_{2i-1}(v_{2i-1})$  by two parallel lines as shown in Fig. 5. The straight line framing  $f_{2i-1}$  from above is a line connecting the points  $(1_{2i-1}^{(0)}, f_{2i-1}(1_{2i-1}^{(0)}))$  and  $(u_{2i-1}^{(0)}, f_{2i-1}(u_{2i-1}^{(0)}))$ . The line framing  $f_{2i-1}$  from below is a parallel tangent line.

negative.

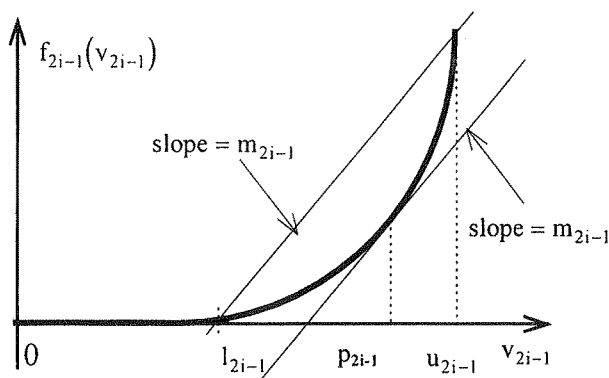


Fig. 5. Creation of the two parallel straight lines framing  $f_{2i-1}(v_{2i-1})$

1 elements

Similarly we frame the function  $f_{2i}(v_{2i})$  by two parallel straight lines (see Fig. 6). As a result we obtain

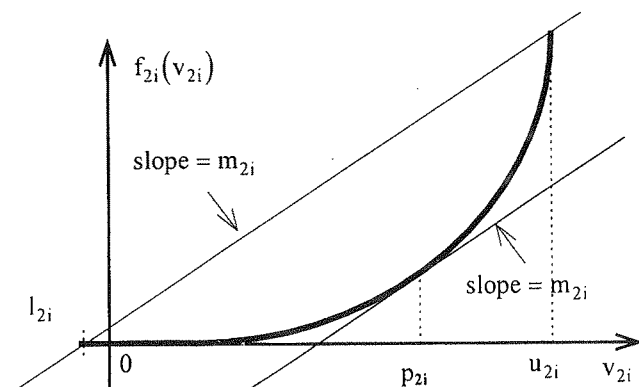
$$\begin{aligned} m_{2i-1} v_{2i-1} + \tilde{c}_{2i-1}^- &\leq f_{2i-1}(v_{2i-1}) \leq m_{2i-1} v_{2i-1} + \tilde{c}_{2i-1}^+ \\ m_{2i} v_{2i} + \tilde{c}_{2i}^- &\leq f_{2i}(v_{2i}) \leq m_{2i} v_{2i} + \tilde{c}_{2i}^+ \end{aligned} \quad (23)$$

or  $\lambda_{2i} \geq 1_{2i}^{(0)}$   
location of

where

aining new

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{2i-1}^- &= f_{2i-1}(p_{2i-1}) - m_{2i-1} p_{2i-1} & \tilde{c}_{2i-1}^+ &= f_{2i-1}(1_{2i-1}^{(0)}) - m_{2i-1} 1_{2i-1}^{(0)} \\ \tilde{c}_{2i}^- &= f_{2i}(p_{2i}) - m_{2i} p_{2i} & \tilde{c}_{2i}^+ &= f_{2i}(1_{2i}^{(0)}) - m_{2i} 1_{2i}^{(0)} \end{aligned}$$

Fig. 6. Creation of the two parallel straight lines framing  $f_{2i}(v_{2i})$ 

On the basis of (23) we find

$$m_{2i-1} v_{2i-1}^* - m_{2i} v_{2i}^* + \hat{c}_{2i-1}^- \leq f_{2i-1}(v_{2i-1}^*) - f_{2i}(v_{2i}^*) \leq m_{2i-1} v_{2i-1}^* - m_{2i} v_{2i}^* + \hat{c}_{2i-1}^+$$

where

$$\hat{c}_{2i-1}^- = \tilde{c}_{2i-1}^- - \tilde{c}_{2i}^+ \quad \hat{c}_{2i-1}^+ = \tilde{c}_{2i-1}^+ - \tilde{c}_{2i}^-$$

Hence, it holds

$$f_{2i-1}(v_{2i-1}^*) - f_{2i}(v_{2i}^*) = m_{2i-1} v_{2i-1}^* - m_{2i} v_{2i}^* + e_{2i-1} \quad (24)$$

where

$$\hat{c}_{2i-1}^- < e_{2i-1} \leq \hat{c}_{2i-1}^+$$

Thus,  $i$ -th pair of equations in as follows:

$$\begin{bmatrix} m_{2i-1} & -m_{2i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2i-1}^* \\ v_{2i}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{2i-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} G_{2i-1,j} v_j^* \\ (G_{2i-1,j} + G_{2i,j}) v_j^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{2i-1} \\ b_{2i-1} + b_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

We repeat above procedure to each 2-equation block. Hence, we obtain

$$\mathbf{M} \mathbf{v}^* + \mathbf{e} + \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{v}^* - \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad (26)$$

where  $\mathbf{M}$  is a block diagonal matrix consisting of  $2 \times 2$  blocks

$$\begin{bmatrix} m_{2i-1} & -m_{2i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n_t = \frac{n}{2}$$

$\mathbf{e} = [e_1 \dots e_n]^T$  where  $e_{2i} = 0$  and  $e_{2i-1} \in [e_{2i-1}^-, e_{2i-1}^+]$  where  $e_{2i-1}^- = \hat{e}_{2i-1}^-$ ,  $e_{2i-1}^+ = \hat{e}_{2i-1}^+$  ( $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ ),  $\tilde{\mathbf{G}} = [\tilde{G}_{ij}]$  is an  $n \times n$  matrix, where

$$\tilde{G}_{2i-1,j} = G_{2i-1,j} \quad \tilde{G}_{2i,j} = G_{2i,j} + G_{2i-1,j} \quad j = 1, \dots, n$$

and  $\tilde{\mathbf{b}} = [\tilde{b}_1 \dots \tilde{b}_n]$  is an  $n$ -vector where

$$\tilde{b}_{2i-1} = b_{2i-1} \quad \tilde{b}_{2i} = b_{2i} + b_{2i-1}$$

If matrix  $(\mathbf{M} + \tilde{\mathbf{G}})$  is nonsingular we obtain

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{Z}\mathbf{d} \quad (27)$$

where

$$\mathbf{Z} = [z_{ij}]_{n \times n} = (\mathbf{M} + \tilde{\mathbf{G}})^{-1} \quad \mathbf{d} = [d_1 \dots d_n]^T = \tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{e}$$

with

$$d_j \in [d_j^-, d_j^+] = [\tilde{b}_j - e_j^+, \tilde{b}_j - e_j^-] \quad \text{for } j = 2i-1$$

and

$$d_j^- = d_j^+ = \tilde{b}_j \quad \text{for } j = 2i \quad \left(i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}\right)$$

(24)

Defining

$$t_j = \begin{cases} d_j^+ & \text{if } z_{ij} < 0 \\ d_j^- & \text{if } z_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad k_j = \begin{cases} d_j^- & \text{if } z_{ij} < 0 \\ d_j^+ & \text{if } z_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

we obtain on the basis of (27)

$$\mathbf{v}_i^* \in [\gamma_i, \delta_i]$$

(25)

where

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^n z_{ij} t_j, \quad \delta_i = \sum_{j=1}^n z_{ij} k_j$$

Next, we determine new bounds on the solutions

(26)

$$l_i = \max\{l_i^{(0)}, \gamma_i\} \quad u_i = \min\{u_i^{(0)}, \delta_i\} \quad i = 1, \dots, n$$

and create the set  $[\mathbf{l}, \mathbf{u}] \subseteq [\mathbf{l}^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)}]$ , where  $\mathbf{l} = [l_1 \dots l_n]^T$ ,  $\mathbf{u} = [u_1 \dots u_n]^T$  containing the same solutions as  $[\mathbf{l}^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)}]$ .

Note

If matrix  $(\mathbf{M} + \tilde{\mathbf{G}})$  is singular the contraction method 2 fails.

## 4. DESCRIPTION OF THE ALGORITHM AND NUMERICAL EXAMPLES

Both contraction methods, developed in Section 3, have been embedded into the known algorithm of successive contraction, division and elimination [20] adopted to original, polynomial type, nonlinearities. Method 1 is used for the preliminary contraction of the regions having the greatest side which is smaller than 1 V as well as in a case when matrix  $(\mathbf{M} + \tilde{\mathbf{G}})$  is singular. Method 2 is applied, in the regions mentioned above, for further improvement of the contraction and as the only method in any other regions where matrix  $(\mathbf{M} + \tilde{\mathbf{G}})$  is nonsingular.

The division of a region into two smaller ones is accomplished dividing the largest side, including  $v_{i_0}$  or placed to the right from  $v_{i_0}$ , by half. The division process is finished when the largest side is smaller than 0.001 V. Such a region either has all sides smaller than 0.001 and is considered as a point or has some sides greater than 0.001 but they are placed to the left from  $v_{i_0}$  where the nonlinear functions are equal to zero (see (3) and (4)). In the first case we check if the obtained result is the solution by substituting into the equation. In the second case we solve the appropriate set of linear equations and check whether the solution belongs to this region.

The algorithm is illustrated via two numerical examples.

**Example 1.**

Let us consider two CMOS flip-flops made of 8 MOS transistors as shown in Fig. 7. We use the transistor model specified by (1), having the form as depicted in Fig. 2, where  $K = 0.5 \text{ mA/V}^2$ ,  $v_{i_0} = 1 \text{ V}$ ,  $R_D = R_G = 1 \Omega$ ,  $R_S = 0$ . We wish to find all the solutions in the set  $[\mathbf{1}^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)}]$ , where  $1_i^0 = -5$ ,  $u_i^0 = 5$  ( $i = 1, \dots, 16$ ). Using the algorithm developed in this paper we find 9 solutions as follows:

$$\mathbf{v}^{(1)} = [2.4785 \quad 0.0016 \quad 2.4779 \quad 0.0006 \quad 2.4786 \quad 0.0016 \quad 2.4780 \quad 0.0006 \quad 2.4778 \quad 0.0006 \quad 2.4783 \quad 0.0016 \quad 2.4777 \quad 0.0006 \quad 2.4782 \quad 0.0016]^T$$

$$\mathbf{v}^{(2)} = [0.0320 - 4.9319 \quad 4.9639 \quad 4.9320 \quad 2.4474 - 0.0568 \quad 2.5052 \quad 0.0590 \quad 4.9450 \quad 4.9319 \quad 0.0131 - 4.9319 \quad 2.5295 \quad 0.0590 \quad 2.4717 - 0.0567]^T.$$

$$\mathbf{v}^{(3)} = [4.9447 \quad 4.9311 \quad 0.0136 - 4.9311 \quad 2.5304 \quad 0.0600 \quad 2.4715 - 0.0578 \quad 0.0323 - 4.9311 \quad 4.9634 \quad 4.9312 \quad 2.4466 - 0.0578 \quad 2.5054 \quad 0.0600]^T$$

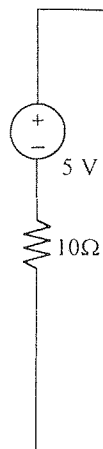
$$\mathbf{v}^{(4)} = [2.4717 - 0.0568 \quad 2.5296 \quad 0.0590 \quad 0.0132 - 4.9324 \quad 4.9455 \quad 4.9324 \quad 2.5052 \quad 0.0590 \quad 2.4474 - 0.0568 \quad 4.9638 \quad 4.9325 \quad 0.0314 - 4.9324]^T$$

$$\mathbf{v}^{(5)} = [0.0624 - 4.9085 \quad 4.9709 \quad 4.9087 \quad 0.0256 - 4.9090 \quad 4.9346 \quad 4.9091 \quad 4.9341 \quad 4.9086 \quad 0.0257 - 4.9085 \quad 4.9709 \quad 4.9092 \quad 0.0620 - 4.9090]^T$$

$$\mathbf{v}^{(6)} = [4.9990 \quad 4.9984 \quad 0.0006 - 4.9984 \quad 0.0004 - 4.9996 \quad 4.9999 \quad 4.9996 \quad 0.0010 - 4.9984 \quad 4.9994 \quad 4.9984 \quad 4.9996 \quad 4.9996 \quad 0.0000 - 4.9996]^T$$

$$\mathbf{v}^{(7)} = [2.5059 \quad 0.0600 \quad 2.4470 - 0.0579 \quad 4.9636 \quad 4.9317 \quad 0.0320 - 4.9316 \quad 2.4710 - 0.0578 \quad 2.5300 \quad 0.0601 \quad 0.0133 - 4.9316 \quad 4.9449 \quad 4.9316]^T$$

$$\mathbf{v}^{(8)} = [0.0007 - 4.9991 \quad 4.9998 \quad 4.9991 \quad 4.9994 \quad 4.9988 \quad 0.0006 - 4.9988 \quad 4.9992 \quad 4.9991 \quad 0.0001 - 4.9991 \quad 0.0005 - 4.9988 \quad 4.9993 \quad 4.9988]^T$$



$$\mathbf{v}^{(9)} = [4 \quad -4.9076]$$

During t  
divisions  
2.31 sec  
(addition

**Example**

Let us c  
Fig. 8. V  
Fig. 2 w  
 $T_4$  and  $T$   
the solu  
algorithm  
 $\mathbf{v}^{(1)} = [1 \quad 0.0001 \quad 2.2225 \quad 0.0003 \quad \mathbf{v}^{(2)} = [1 \quad 0.0158 \quad 0.1448 \quad 0.0109]$

# MPLES

ed into the  
adopted to  
ry contrac-  
as in a case  
ned above,  
her regions

the largest  
process is  
as all sides  
n 0.001 but  
o zero (see  
olution by  
et of linear

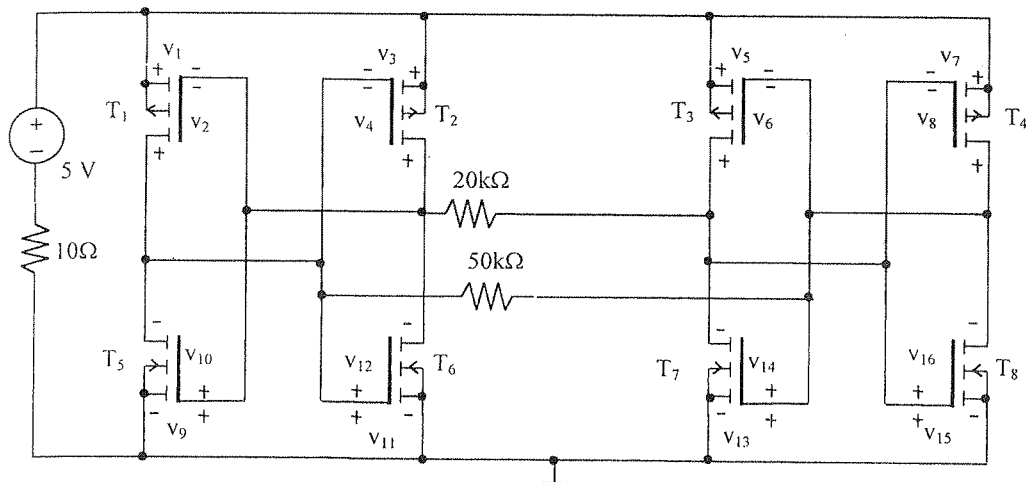


Fig. 7. Two CMOS flip-flops made of 8 MOS transistors

$$\mathbf{v}^{(9)} = [4.9338 \quad 4.9077 \quad 0.0262 - 4.9076 \quad 4.9708 \quad 4.9084 \quad 0.0626 - 4.9082 \quad 0.0627 - \\ - 4.9076 \quad 4.9703 \quad 4.9079 \quad 0.0257 - 4.9082 \quad 4.9339 \quad 4.9083]^T$$

During the computation process 9 appropriate linear equations have been solved and 755 divisions of the domain areas have been made. Total time consumed by the algorithm is 2.31 seconds (on PC Pentium II 333). The number of all the arithmetic operations (addition, multiplication and division) is equal to  $20.9 \cdot 10^6$ .

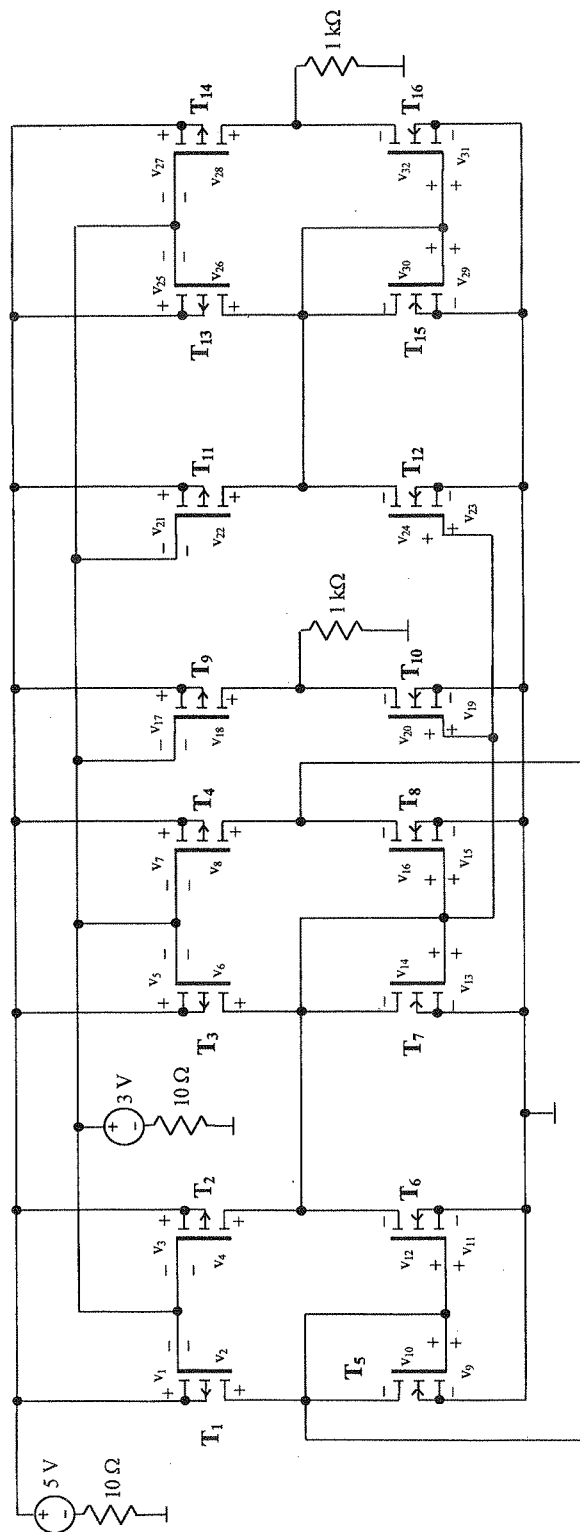
## Example 2.

Let us consider CNN „full range” cell [27] created of 16 MOS transistors as shown in Fig. 8. We use the transistor model, specified by (1), having the form as depicted in Fig. 2 where  $K = 0.5 \text{ mA/V}^2$  for all the transistors except  $T_4$  and  $T_8$ ,  $K = 1 \text{ mA/V}^2$  for  $T_4$  and  $T_8$ ,  $v_{to} = 1 \text{ V}$ ,  $R_D = R_G = 1 \Omega$ ,  $R_S = 0$  for all the transistors. We wish to find all the solutions in the set  $[\mathbf{1}^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)}]$ , where  $1_i^0 = -8$ ,  $u_i^0 = 8$  ( $i = 1, \dots, 32$ ). Using the algorithm developed in this paper we find 3 solutions as follows:

$$\mathbf{v}^{(1)} = [1.9505 - 2.3613 \quad 1.9508 - 0.5909 \quad 1.9508 - 0.5909 \quad 1.9505 - 2.3568 \quad 0.6392 \\ 0.0001 \quad 0.6388 - 1.7710 \quad 2.4077 \quad 0.0078 \quad 2.4098 \quad 1.7845 \quad 1.9509 - 2.8098 \quad 2.4103 \\ 2.2225 \quad 1.9505 - 1.9078 \quad 2.4098 \quad 1.3266 \quad 1.9505 - 1.9078 \quad 1.9510 - 2.5506 \quad 1.0929 \\ 0.0003 \quad 1.0924 \quad 0.6430]^T$$

$$\mathbf{v}^{(2)} = [1.9519 - 0.2739 \quad 1.9518 - 2.4102 \quad 1.9518 - 2.4102 \quad 1.9519 - 0.2693 \quad 2.7266 \\ 0.0158 \quad 2.7258 \quad 2.1442 \quad 0.5893 - 0.0006 \quad 0.5898 - 2.1359 \quad 1.9521 - 2.5543 \quad 0.5900 \\ 0.1448 \quad 1.9518 - 0.5782 \quad 0.5896 - 1.8319 \quad 1.9518 - 0.5782 \quad 1.9523 - 2.8003 \quad 2.4223 \\ 0.0109 \quad 2.4213 \quad 2.2249]^T$$

8 4.9992



$$\mathbf{v}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.9650 - \\ -1.0008 \end{bmatrix}$$

During the  
3950 div  
algorithm  
operation

## Conclus

The  
A model  
type no  
presente

Opponent's predefined strategy operates effectively in real time.

The  
and they

## ACKNO

This work  
8T11B0

1. N. T a  
ECCTI
2. M. T a  
*phenom*
3. L.O. C  
1982,
4. C. G ü  
ISCAS
5. Q. H ü  
Trans.
6. T. N i  
1989,
7. K. Y  
*resisti*
8. S. P a  
*points*

$$\mathbf{v}^{(3)} = [1.9511 - 1.0349 \ 1.9513 - 1.0108 \ 1.9513 - 1.0108 \ 1.9511 - 1.0304 \ 1.9657 \ 0.0053 \\ 1.9650 - 0.0200 \ 1.9879 \ 0.0031 \ 1.9896 \ 0.0343 \ 1.9515 - 2.7647 \ 1.9901 \ 1.7570 \ 1.9511 - \\ -1.0008 \ 1.9895 - 0.0049 \ 1.9511 - 1.0008 \ 1.9516 - 2.7553 \ 1.9998 \ 0.0056 \ 1.9990 \ 1.7569]^T$$

During the computation process 3 appropriate linear equations have been solved and 3950 divisions of the domain areas have been made. Total time consumed by the algorithm is 67 second (on PC Pentium II 333). The number of all the arithmetic operations (addition, multiplication and division) is equal to  $714 \cdot 10^6$ .

## Conclusions

The algorithm developed in this paper can be applied to MOS transistor circuits. A model of MOS transistors, built up in Level 1 of SPICE, is applied with polynomial-type nonlinearities and no piecewise-linear approximation is used. This model is presented in an completely equivalent form of the Ebers-Moll type circuit.

Opposite to the alternative algorithms based on piecewise-linear description and predefined regions (or superregions) of linearity the developed in this paper algorithm operates on original, polynomial-type, nonlinearities. Thus, the algorithm avoids possibility of inaccurate results and incorrect number of solutions. The algorithm is very effective and enables us to find all the DC solutions of many practical circuits in short time.

The restrictions concerning circuit description, made throughout this paper, are weak and they are satisfied by a broad class of MOS transistor circuits.

## ACKNOWLEDGEMENT

This work was supported by the State Committee for Research (KBN) under Grant 8T11B01915.

## REFERENCES

1. N. Takahashi, T. Nishi: *Equilibrium points of mutually coupled symmetrical neural networks*. Proc. ECCTD'93, 1993, pp. 1059–1064.
2. M. Tadeusiewicz: *DC analysis of circuits with idealized diodes considering reverse bias breakdown phenomenon*. IEEE Trans. Cir. Syst., 1997, vol. 44, pp. 312–326.
3. L.O. Chua, R.L.P. Ying: *Finding all solutions of piecewise-linear circuits*. Int. J. Cir. Theor. Appl., 1982, vol. 10 pp. 201–229.
4. C. Güzelis, I.C. Gökna: *Finding multiple solutions of piecewise — affine resistive circuits*. Proc. ISCAS'88, 1988, pp. 1229–1232.
5. Q. Huanag, R. Liu: *A simple algorithm of finding all solutions for piecewise-linear networks*. IEEE Trans. Cir. Syst., 1989, vol. 36, pp. 600–609.
6. T. Nishi: *An efficient method to find all solutions of piecewise-linear resistive circuits*. Proc. ISCAS'89, 1989, pp. 2052–2055.
7. K. Yamamura, M. Ochiai: *An efficient algorithm for finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits*. IEEE Trans. Cir Syst., 1992, vol. 39, pp. 213–221.
8. S. Pastore, A. Premoli: *Polyhedral elements: A new algorithm for capturing all the equilibrium points of piecewise-linear circuits*. IEEE Trans. Cir. Syst., 1993, vol 40, pp. 124–132.

9. S. Pastore, A. Premoli: *Finding all DC solutions of nonlinear resistive circuits by exploring both polyhedral and rectangular circuits*. IEEE Proc. Cir. Dev. Syst., 1997, vol. 144, pp. 17–21.
10. L. Vandenberghe, B.L. Moor, J. Vandewalle: *The generalised linear complementarity problem applied to the complete analysis of resistive piecewise-linear circuits*. IEEE Trans. Cir. Syst., 1989, vol. 36, pp. 1382–1391.
11. K. Yamamura, M. Mishina: *An algorithm for finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits*. Proc. ECCTD'95, 1995, pp. 123–126.
12. K. Yamamura, N. Sekiguchi: *Finding all solutions of piecewise-linear resistive circuits containing sophisticated transistor models*. IEICE Trans., 1995, vol. E 78-A, pp. 117–122.
13. L. Kronenberg, L. Trajković, W. Mathis: *Analysis of feedback structures and their effect on multiple DC operating points*. Proc. ECCTD'99, 1999, pp. 683–686.
14. J. Cel: *Bounds on solutions of non-linear resistive networks*. Int. J. Cir. Theor. Appl., 1990, vol. 18, pp. 475–484.
15. M. Tadeusiewicz: *A method for finding bounds on the location of all the solutions of D.C. piecewise-linear circuits*. Int. J. Cir. Theor. Appl., 1990, vol. 18, pp. 165–174.
16. M. Tadeusiewicz: *A method for finding bounds on all the D.C. solutions of transistor circuits*. IEEE Trans. Cir. Sys., 1992, vol. 39, pp. 557–564.
17. T. Nishi, Y. Kawane: *An extension of the Tadeusiewicz method for finding bounds on all solutions of piecewise-linear equations*. Proc. ISCAS'95, 1995, pp. 916–919.
18. L.V. Kolev, V.M. Mladenov: *An interval method for finding all operating points of nonlinear resistive circuits*. Int. J. Cir. Theor. Appl., 1990, vol. 18, pp. 257–267.
19. L.V. Kolev: *A general interval method for global non-linear DC analysis*. Proc. ECCTD'97, 1997, pp. 1460–1463.
20. M. Tadeusiewicz, K. Głowienka: *A contraction algorithm for finding all the DC solutions of piecewise-linear circuits*. J. Cir. Dys. Comp., 1994, vol. 4, pp. 319–336.
21. M. Tadeusiewicz, K. Głowienka: *An algorithm for finding all operating points of electronic circuits containing intricate models of transistors*. Proc. ECCTD'95, 1995, pp. 127–130.
22. M. Tadeusiewicz, S. Hałgas: *An effective algorithm for finding all the DC solutions of MOS transistor circuits represented by original polynomial nonlinearities*. Proc. ECCTD'99, 1999, pp. 467–470.
23. M. Tadeusiewicz, S. Hałgas: *Finding all the DC solutions of a certain class of piecewise-linear circuits*. J. Cir. Syst. Signal Processing, 1999, vol. 18, pp. 89–110.
24. M. Tadeusiewicz, M. Jagocki, S. Hałgas: *Improvement of the sign test for finding all the DC solutions of piecewise-linear circuits*. Int. J. Cir. Theor. Appl. 1998, vol. 26, pp. 531–538.
25. M. Tadeusiewicz: *A method for identification of asymptotically stable equilibrium points of a certain class of dynamic circuits*. IEEE Trans. Cir. Syst., 1999, vol. 46, pp. 1101–1109.
26. M. Tadeusiewicz: *Modeling and stability in MOS transistor circuits*. Proc. 1998 IEEE Int. Conf. Electron. Cir. Syst., 1998, pp. 71–74.
27. A. Rodríguez-Vazquez, S. Espejo, R. Dominguez-Castro, J.L. Huertas, E. Sanchez-Sinencio: *Current-mode techniques for the implementation of continuous- and discrete-time cellular neural networks*. IEEE Trans. Cir. Syst., 1993, vol. 40, pp. 132–146.

M. TADEUSIEWICZ, S. HAŁGAS

## WYZNACZANIE WSZYSTKICH ROZWIĄZAŃ DC UKŁADÓW Z TRANZYSTORAMI MOS OPISANYMI ORYGINALNYMI RÓWNIANAMI NIELINIOWYMI

### Streszczenie

Obszerna klasa obwodów dynamicznych zawierających tranzystory MOS charakteryzuje się tym, że poszczególne obwody mają wiele punktów równowagi, np. przerzutniki, sieci neuronowe, układy logiczne. Te punkty równowagi są rozwiązaniami modelu DC otrzymanego w wyniku zwarcia cewek i usunięcia

kondensatorów  
rozwiązań a m

W pracy  
tranzystory M  
Wspomniany  
Występujące  
nionych w or  
nieliniowe. D  
cji, którego  
zawężania i d  
tranzystorów  
Przeprowadz  
zapropnowa  
neuronowej z

Słowa kluczowe



kondensatorów. Stąd wynika ważny i aktualny problem wyznaczania wszystkich wymienionych wyżej rozwiązań a następnie identyfikacji tych spośród nich, które są stabilnymi punktami równowagi.

W pracy przedstawiono efektywny algorytm obliczania wszystkich rozwiązań obwodów DC, w których tranzystory MOS są reprezentowane za pomocą modelu występującego w programie SPICE na poziomie 1. Wspomniany model został przekształcony do postaci równoważnej o konfiguracji typu Ebersa-Molla. Występujące w modelu nieliniowości są wielomianami. W opisie obwodu nie użyto żadnych, rozpowszechnionych w omawianych zagadnieniach, aproksymacji odcinkowo-liniowych zachowując oryginalne funkcje nieliniowe. Do obliczania wszystkich rozwiązań zastosowano algorytm kolejnych zawężeń, podziału i eliminacji, którego kluczowym ogniwem jest metoda zawężania. Opracowano nową, bardzo skuteczną metodę zawężania i dokonano jej implementacji. Przy założeniu, że utożsamia się rozwiązania (napięcia GS i GD tranzystorów MOS) różniące się mniej niż  $10^{-3}$  V algorytm gwarantuje wyznaczenie wszystkich rozwiązań. Przeprowadzone eksperymenty numeryczne obejmujące praktyczne układy MOS potwierdziły efektywność zaproponowanego algorytmu. W pracy przytoczono dwa przykłady obliczeniowe, w tym model komórki sieci neuronowej zawierający 16 tranzystorów MOS.

*Słowa kluczowe:* układy nieliniowe, wiele rozwiązań, tranzystory MOS, analiza numeryczna

W  
elektro  
koncep  
oblicza  
izoterm  
model  
realiza  
na prz  
prakty  
statycz  
Symul  
niej za

*Słowa*  
tów el

Poważn  
estymacja w  
staniem me  
celu (zmie  
algorytmy  
poszukiwan  
liniowych,

## **Algorytm estymacji wartości parametrów elektrotermicznego stałoprądowego makromodelu tranzystora Darlingtona mocy**

JANUSZ ZARĘBSKI, KRZYSZTOF GÓRECKI

*Wyższa Szkoła Morska w Gdyni, Katedra Radioelektroniki Morskiej*

*Otrzymano 2000.06.30*

*Autoryzowano 2000.07.11*

W pracy zaproponowano oryginalny algorytm wyznaczania wartości parametrów elektrycznych elektrotermicznego makromodelu tranzystora Darlingtona mocy. W algorytmie tym wykorzystano koncepcję tzw. lokalnej estymacji parametrów, co oznacza, że wartości poszczególnych parametrów są obliczane na podstawie współrzędnych punktów pomiarowych leżących na odpowiednich odcinkach izotermicznych charakterystyk statycznych badanego tranzystora, dla których słuszny jest uproszczony model lokalny opisany za pomocą niewielkiej liczby parametrów. Przedstawiono ideę oraz sposób realizacji algorytmu i oceniono wpływ dokładności wyznaczenia wartości poszczególnych parametrów na przebieg nieizotermicznych charakterystyk statycznych tranzystora Darlingtona. Oceniono też praktyczną przydatność opracowanego algorytmu przez porównanie nieizotermicznych charakterystyk statycznych wybranych typów tranzystora Darlingtona mocy, otrzymanych z pomiarów i z symulacji. Symulacje przeprowadzono z wykorzystaniem wartości parametrów makromodelu, uzyskanych wcześniej za pomocą przedstawionego w pracy algorytmu.

*Słowa kluczowe:* tranzystor Darlingtona mocy, estymacja wartości parametrów, modelowanie elementów elektronicznych

### **1. WSTĘP**

Poważnym problemem w procesie modelowania elementu półprzewodnikowego jest estymacja wartości parametrów modelu. Typowo problem ten rozwiązuje się z wykorzystaniem metod optymalizacyjnych, poszukując rozwiązania pewnej nieliniowej funkcji celu (zmiennymi są parametry modelu), np. [1, 2], lub stosując modne ostatnio algorytmy genetyczne, np. [3]. W pewnych szczególnych przypadkach, zagadnienie poszukiwania wartości parametrów udaje się sprowadzić do rozwiązania układu równań liniowych, np. przy wyznaczaniu wartości parametrów modelu współczynnika wzmoc-

nienia prądowego tranzystora bipolarnego [4], czy też do liniowego zagadnienia najmniejszych kwadratów zastosowanego, dla przykładu, przy identyfikacji wartości parametrów modelu przejściowej impedancji termicznej tego elementu [5, 6].

Alternatywna metodologia wyznaczania wartości parametrów sprowadza się do sekwencyjnego wyznaczania tych wartości z wykorzystaniem punktów pomiarowych, leżących na odpowiednich fragmentach charakterystyk badanego elementu, np. [7, 8]. Takie podejście wymaga jednak dobrej znajomości fizyki działania elementu oraz poprawnej interpretacji kształtu jego charakterystyk zaciskowych, tzn. określenia parametrów modelu decydujących o przebiegu poszczególnych odcinków rozważanych charakterystyk.

W warunkach statycznej pracy elementu elektronicznego, jego właściwości opisują tzw. nieizotermiczne charakterystyki statyczne. Każdemu punktowi, leżącemu na takich charakterystykach odpowiada inna wartość temperatury wnętrza, w przeciwieństwie do charakterystyk izotermicznych, odpowiadających jednej, ustalonej wartości tej temperatury. W celu poprawnego zamodelowania charakterystyk nieizotermicznych stosuje się specjalne modele elementów, nazywane modelami elektrotermicznymi, w których uwzględniono wpływ wydzielanej w elemencie mocy oraz warunków odprowadzania ciepła na wartość temperatury wnętrza.

Tranzystor Darlingtona mocy jest popularnym elementem półprzewodnikowym, który ze względu na swą złożoną strukturę wewnętrzną, przedstawioną na rys.1, może być traktowany jako układ scalony małej skali integracji. Struktura tranzystora Darlingtona zawiera tranzystory bipolarne T1, T2, rezystory R1, R2 i diodę D. Opracowany przez autorów elektrotermiczny stałoprądowy makromodel tranzystora Darlingtona mocy (EMTD) [9, 10], stanowi połączenie elektrotermicznych modeli elementów składowych, to znaczy rezystorów, tranzystorów i diody, przy uwzględnieniu własnych i wzajemnych oddziaływań termicznych między nimi. W elektrotermicznym modelu elementu składowego występują trzy typy zależności:

- model elektryczny w postaci zależności prądowo-napięciowo-temperaturowych, opisujących zaciskowe charakterystyki elektryczne elementu,
- model termiczny, opisujący zależność temperatury wnętrza elementu od mocy wydzielanej w rozważanym elemencie oraz w elementach sprzężonych z nim termicznie,
- zależność mocy czynnej wydzielanej w elemencie od napięć i prądów zaciskowych.

W powyższych zależnościach występują zarówno parametry elektryczne, jak i termiczne. W niniejszej pracy rozważane są wyłącznie parametry elektryczne elektrotermicznego makromodelu tranzystora Darlingtona, to znaczy parametry opisujące modele elektryczne wszystkich elementów składowych. Rozważany makromodel zawiera łącznie 54 elektryczne parametry stałoprądowe, których wartości muszą być znane przed wykonaniem analizy układu elektronicznego, w którym wykorzystano ten element.

Celem pracy jest zaprezentowanie prostego i efektywnego algorytmu wyznaczania wartości parametrów elektrycznych EMTD. Zadanie to nie było trywialne, ponieważ nie wszystkie końcówki elementów składowych są dostępne dla użytkownika tranzystora Darlingtona, a zatem nie można dokonać bezpośredniego pomiaru wartości prądów

płynących  
wartości  
wyznaczo  
wych wy  
umożliwi  
parametr

W pra  
czania wa  
metru  $\beta_{01}$   
T2 w za  
tranzystor  
uzasadnio  
więc prz  
tranzystor  
stawie ob

Algor  
powiedni  
potrzebny  
nich wzo  
w ogranic  
dziale dr  
przedstaw  
gorytmu

Punkt  
terystyk  
i  $T_{a2} = T$

nienia naj-  
wartości para-  
dza się do  
miarowych,  
np. [7, 8].  
mentu oraz  
lenia para-  
zważanych

ści opisują  
u na takich  
eństwie do  
ci tej tem-  
ych stosuje  
w których  
rowadzania

dnikowym,  
rys.1, może  
ra Darling-  
pracowany  
ngtona mo-  
ów składo-  
własnych  
ym modelu

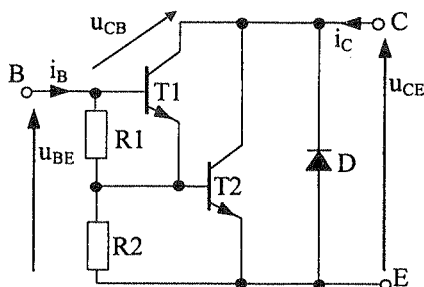
owych, opi-

od mocy  
ych z nim

ciskowych.  
e, jak i ter-  
elektroter-  
ące modele  
wiera łącz-  
mane przed  
ement.

yznaczania  
onieważ nie  
tranzystora  
ści prądów

płynących przez końcówki poszczególnych elementów składowych. Dostępne są jedynie wartości prądów i napięć na zaciskach całego tranzystora Darlingtona (rys.1). Tak więc, wyznaczenie wartości parametrów elektrycznych poszczególnych elementów składowych wymaga odpowiedniego doboru warunków polaryzacji tranzystora Darlingtona, umożliwiających określenie rozptyłu prądów w strukturze i lokalną estymację wartości parametrów.



Rys. 1. Struktura wewnętrzna rozważanego tranzystora Darlingtona mocy.

W pracy przedstawiono opracowany przez autorów oryginalny algorytm IDEN wyznaczania wartości wszystkich parametrów elektrycznych EMTD, z wyjątkiem wartości parametru  $\beta_{OR(T2)}$  występującego w opisie współczynnika wzmocnienia prądowego tranzystora T2 w zakresie inwersyjnym. Wartość tego parametru jest istotna głównie przy pracy tranzystora bipolarnego w zakresie inwersyjnym oraz w zakresie nasycenia. Ponieważ, jak uzasadniono w pracy [9], tranzystor wyjściowy T2 nie pracuje w żadnym z tych zakresów, więc przyjęcie a priori ustalonej wartości tego parametru odpowiadającej typowemu tranzystorowi małej mocy (przyjęto  $\beta_{OR(T2)} = 5$ ) nie wpływa (co potwierdzono na podstawie obliczeń numerycznych) na pogorszenie dokładności rozważanego makromodelu.

Algorytm IDEN realizowany jest w dwóch etapach, obejmujących pomiary odpowiednich charakterystyk izotermicznych tranzystora Darlingtona wraz z wyborem potrzebnych punktów pomiarowych (Etap I) oraz obliczenia parametrów z odpowiednich wzorów, wynikających z przekształcenia i uproszczenia równań modelu, słusznych w ograniczonym zakresie zmian punktu pracy tranzystora Darlingtona (Etap II). W rozdziale drugim opisano oba etapy algorytmu IDEN, natomiast w rozdziale trzecim przedstawiono przykładowe wyniki obliczeń i pomiarów, ilustrujące przydatność algorytmu IDEN do wyznaczania wartości parametrów elektrycznych EMTD.

## 2. ALGORYTM IDEN

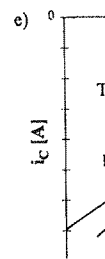
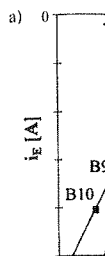
Punktem wyjścia przy realizacji algorytmu IDEN jest pomiar izotermicznych charakterystyk statycznych tranzystora Darlingtona dla dwóch temperatur otoczenia  $T_{a1}$  i  $T_{a2} = T_{a1} + \Delta T$  oraz określenie współrzędnych odpowiednich punktów leżących w wy-

branych zakresach tych charakterystyk. Przyjęto oznaczenia A1, A2, A3, ... dla punktów leżących na charakterystykach odpowiadających temperaturze  $T_{a1}$  oraz B1, B2, B3, ... dla punktów leżących na charakterystykach odpowiadających temperaturze  $T_{a2}$ . Przyjęto  $T_{a1} = 300$  K oraz  $\Delta T = 100$  K.

Izotermiczne charakterystyki statyczne, niezbędne przy realizacji algorytmu IDEN wyznaczono przy użyciu układu pomiarowego, opisanego w pracy [8]. W układzie tym charakterystyki izotermiczne są mierzone impulsowo, tzn. badany tranzystor Darlingtona pobudzany jest ciągiem impulsów prostokątnych o krótkim czasie trwania, rzędu jednej milisekundy, małym współczynniku wypełnienia — rzędu  $10^{-3}$  i narastającej z impulsu na impuls amplitudzie.

W pierwszym etapie algorytmu IDEN należy wykonać pomiary charakterystyk, których typowe przebiegi wraz z lokalizacją punktów pomiarowych pokazano na rys.2. A zatem realizacja pierwszego etapu algorytmu IDEN obejmuje pomiary:

1. charakterystyk  $i_E(u_{BE})$  przy  $i_C = 0$ , dla dwóch temperatur otoczenia  $T_{a1}$  i  $T_{a2}$  (rys. 2a), przy czym:
  - a) w zakresie I (zakres, w którym żadne ze złącz nie uległo przebiciu) należy wybrać punkty A1, A2 oraz B1, B2,
  - b) w zakresie II (zakres, w którym w przebiciu pracuje tylko złącze baza-emiter tranzystora T1) należy wybrać punkty A3, A4, A5, A6 oraz B3, B4, B5, B6,
  - c) w zakresie III (zakres, w którym złącza baza-emiter obu tranzystorów pracują w przebiciu) należy wybrać punkty A7, A8, A9, A10 oraz B7, B8, B9, B10,
2. charakterystyk  $i_C(u_{CB})$  przy  $i_E = 0$  dla dwóch temperatur otoczenia  $T_{a1}$  oraz  $T_{a2}$  (rys. 2b), przy czym:
  - a) w zakresie I (zakres aktywny normalny dla  $u_{CB} < U_{Z1}/2$ ) należy wybrać punkty A11, A12, gdzie  $U_{Z1}$  oznacza napięcie przebicia złącza baza-kolektor,
  - b) w zakresie II (zakres przebicia złącza kolektorowych) należy wybrać punkty A13, A14 oraz B13,
3. charakterystyk  $i_C(u_{BE})$  przy  $u_{CE} = \text{const} = 5$  V, dla dwóch temperatur otoczenia  $T_{a1}$  oraz  $T_{a2}$  (rys. 2c), przy czym w zakresie I (zakres, w którym tylko tranzystor T1 pracuje w zakresie aktywnym normalnym) należy wybrać punkty A15, A16 oraz B15, B16,
4. charakterystyk  $i_C(u_{BE})$  przy  $u_{CE} = \text{const} > 5$  V, dla temperatury otoczenia  $T_{a1}$  (rys. 2c) przy czym w zakresie I (zakres, w którym tylko tranzystor T1 pracuje w zakresie aktywnym normalnym) należy wybrać punkty A17, A18,
5. charakterystyki  $i_C(u_{CE})$  przy  $i_B = i_{B_{\text{sr}}}$  dla temperatury otoczenia  $T_{a1}$  (rys. 2d), gdzie  $i_{B_{\text{sr}}}$  jest wartością prądu bazy odpowiadającą średniej wartości prądu kolektora między punktami A15 oraz A16 (rys. 2c); przy czym punkty A19, A20 i A21 leżą w zakresie aktywnym normalnym,
6. charakterystyk  $i_C(u_{CE})$  przy  $i_B = 0$  dla temperatury otoczenia  $T_{a1}$  oraz  $T_{a2}$  w zakresie inwersyjnym (rys. 2e), przy czym punkty A22 i A23 oraz B22 i B23 leżą na liniowym odcinku charakterystyki, który wynika z niezerowej wartości rezystancji szeregowej diody,



...la punktów  
B2, B3, ...  
...a<sub>2</sub>. Przyjęto  
...ytmu IDEN  
...kładzie tym  
...Darlingtona  
...zędu jednej  
...j z impulsu

...arakterystyk,  
...no na rys.2.

$T_{a1}$  i  $T_{a2}$

...ciu) należy

...baza-emiter  
...B5, B6,

...ów pracują  
...9, B10,

...a<sub>1</sub> oraz  $T_{a2}$

...brać punkty

...punkty A13,

...oczenia  $T_{a1}$

...anzystor T1

...6 oraz B15,

$T_{a1}$  (rys. 2c)

...w zakresie

...2d), gdzie

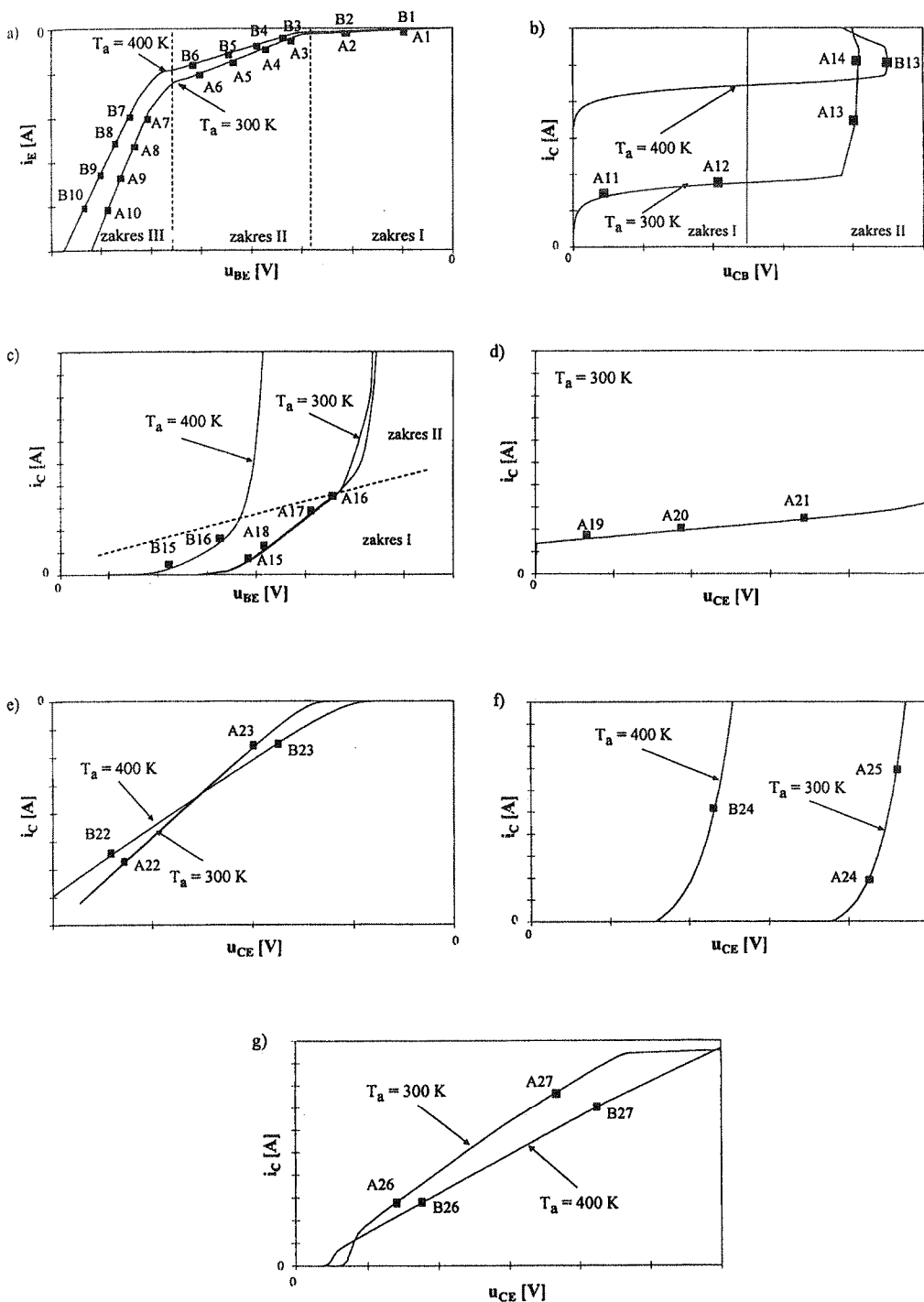
...u kolektora

...i A21 leżą

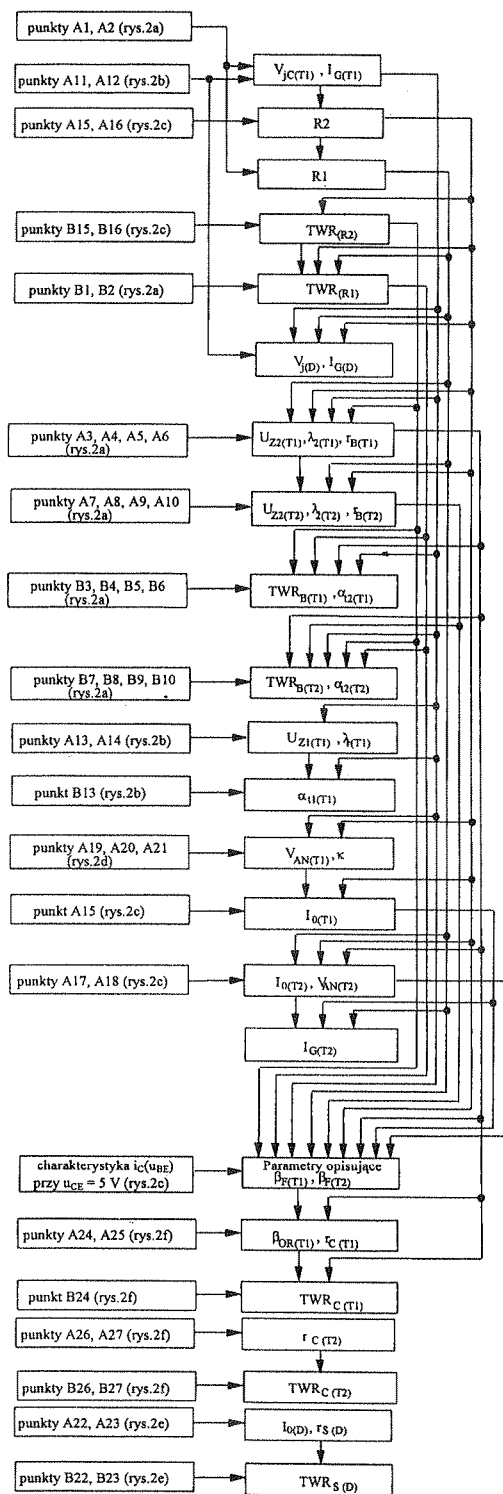
...w zakresie

...23 leżą na

...rezystancji



Rys. 2. Typowy kształt charakterystyk statycznych tranzystora Darlingtona wykorzystywanych w procedurze estymacji wartości parametrów.



Rys. 3. Schemat wyznaczania wartości parametrów stałoprądowego makromodelu tranzystora Darlingtona.

7. charakterystyki tranzystora (rys. 2g), punktów: a) w zakresie napięć zasilania, należących do grupy parametrów; b) w zakresie dopływów, należących do grupy parametrów.

Realizacja tych warunków z odpowiednimi pomiarami zgodnymi ze standardem.

Na rysunku 3 przedstawiono sposób wyznaczania parametrów stałoprądowych tranzystora, z uwzględnieniem zależności między nimi. Wzrost czynnika zmniejszenia napięcia, wykorzystujący wcześniejsze dane z grupy parametrów.

Jak widoczne z kolejności i Przykładowe wartości i, wartości re...

Ze schematu opisujących nie wartości przebiegu tranzystora opisujących normalnym koniec wy temperaturę terystykę d procedury odpowiedn...

Zaproponowany doświadczenia przykłady i...



7. charakterystyk  $i_C(u_{CE})$  przy dużej wartości prądu bazy  $i_B$ , która zapewnia wejście tranzystora T1 w obszar nasycenia dla temperatury otoczenia  $T_{a1}$  oraz  $T_{a2}$  (rys. 2f i 2g), przy czym
- a) w zakresie prądów kolektora, dla których włączony jest tylko tranzystor T1 należy wybrać punkty A24 i A25 oraz B24 (rys. 2f),
  - b) w zakresie dużych prądów kolektora (o wartości porównywalnej z maksymalnym dopuszczalnym prądem kolektora tranzystora Darlingtona) należy wybrać punkty A26 i A27 oraz B26 i B27 (rys. 2g).

Realizacja drugiego etapu algorytmu IDEN obejmuje obliczenia wartości parametrów z odpowiednio przekształconych zależności stanowiących stałoprądowy EMTD zgodnie ze schematem przedstawionym na rys. 3.

Na rysunku tym, w poszczególnych blokach oznaczono parametry, których wartości są wyznaczane w jednym cyklu obliczeniowym. Nazwy elementów składowych, występujące w indeksie dolnym nazw parametrów, określają, z jakim elementem składowym związany jest rozważany parametr, np.  $TWR_{(R1)}$  oznacza temperaturowy współczynnik zmian rezystancji rezystora R1. Dodatkowo, strzałki wskazują punkty pomiarowe, wykorzystywane w obliczeniach oraz wartości parametrów, wyznaczonych we wcześniejszych krokach algorytmu, niezbędnych do wyliczenia wartości rozważanej grupy parametrów.

Jak widać, wartości poszczególnych parametrów są wyznaczane w ściśle określonej kolejności i przy wykorzystaniu uprzednio wyznaczonych wartości innych parametrów. Przykładowo wartość rezystancji rezystora R1 wyznaczana jest na podstawie charakterystyki  $i_E(u_{BE})$  przy  $i_C = 0$  (rys. 2a), przy wykorzystaniu wyznaczonej uprzednio wartości rezystancji R2.

Ze schematu widać, że w pierwszej kolejności wyznaczane są wartości parametrów opisujących prąd generacyjny złącza baza-kolektor tranzystora wejściowego T1, następnie wartości parametrów rezystorów bocznikujących, wartości parametrów opisujących przebiecie złącza baza-emiter obu tranzystorów oraz przebiecie złącza baza-kolektor tranzystora wejściowego. W dalszej kolejności wyznaczane są wartości parametrów opisujących charakterystyki wyjściowe tranzystorów składowych w zakresie aktywnym normalnym i wartości parametrów modelu współczynnika wzmocnienia prądowego. Na koniec wyliczane są rezystancje szeregowo kolektora wraz z ich współczynnikami temperaturowymi dla obu tranzystorów oraz wartości parametrów opisujących charakterystykę diody w zakresie przewodzenia. Szczegółowo sposób realizacji drugiego etapu procedury estymacji wartości parametrów wraz z nazwami tych parametrów oraz odpowiednimi wzorami przedstawiono w Dodatku.

### 3. WYNIKI SYMULACJI I POMIARÓW

Zaproponowany w pracy algorytm identyfikacji parametrów EMTD był weryfikowany doświadczalnie dla różnych typów tranzystorów Darlingtona. Zamieszczone poniżej przykłady ilustrują skuteczność tego algorytmu oraz czułość kształtu nieizotermicznych

charakterystyk statycznych tranzystora Darlingtona na dokładność wyznaczenia wartości wybranych parametrów makromodelu. Wyniki symulacji zweryfikowano doświadczalnie, przy czym wszystkie pomiary zrealizowano z wykorzystaniem układu pomiarowego opisanego w pracach [9, 11].

Celem wykazania poprawności realizacji algorytmu IDEN, najpierw obliczono odpowiednie izotermiczne charakterystyki hipotetycznego tranzystora Darlingtona, przyjmując arbitralnie „wzorcowe” wartości parametrów modelu, a następnie wybierając na tych charakterystykach odpowiednie punkty, zrealizowano algorytm IDEN krok po kroku, otrzymując kolejne wartości parametrów makromodelu.

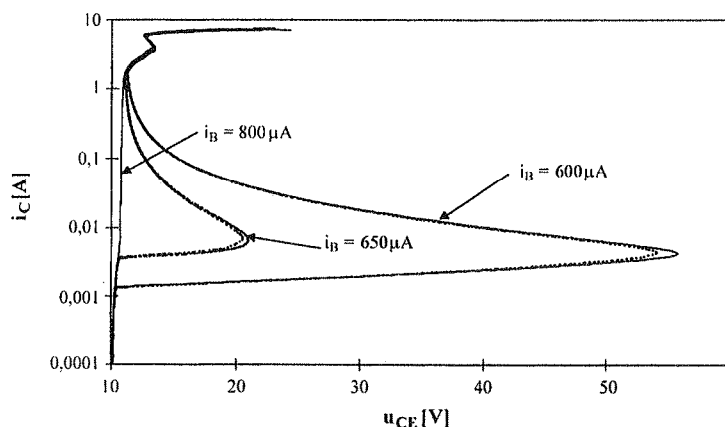
W tabelicy 1 porównano wartości wybranych parametrów otrzymanych z algorytmu IDEN z wartościami wzorcowymi. Jak widać, otrzymano zadowalającą zgodność wartości porównywanych parametrów.

Tabela 1

Wartości wybranych „wzorcowych” i wyznaczonych za pomocą algorytmu IDEN parametrów tranzystora Darlingtona

| parametr          | R1 [ $\Omega$ ] | R2 [ $\Omega$ ] | $I_{0(T1)}$ [A]   | $I_{0(T2)}$ [A]   | $\beta_{0F(T1)}$ | $\beta_{0F(T2)}$ | $\gamma_{1(T1)}$ | $\gamma_{2(T1)}$ | $\gamma_{1(T2)}$ | $\gamma_{2(T2)}$ |
|-------------------|-----------------|-----------------|-------------------|-------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| wartość wzorcowa  | 1000            | 100             | $5 \cdot 10^7$    | $2 \cdot 10^8$    | 100              | 80               | 0,4              | 0,6              | 0,4              | 0,6              |
| wartość obliczona | 999,83          | 100,17          | $4,99 \cdot 10^7$ | $2,11 \cdot 10^8$ | 97,89            | 84,12            | 0,31             | 0,69             | 0,46             | 0,54             |

Z kolei na rys. 4 porównano nieizotermiczne charakterystyki wyjściowe  $i_C(u_{CE})$  tranzystora Darlingtona otrzymane z wykorzystaniem parametrów wzorcowych (linia ciągła) oraz parametrów otrzymanych z algorytmu IDEN (linia kreskowa). Widać, że porównywane charakterystyki pozostają w bardzo dobrej zgodności.



Rys. 4. Obliczone charakterystyki wyjściowe  $i_C(u_{CE})$  tranzystora Darlingtona, otrzymane dla parametrów wzorcowych (linia ciągła) i obliczonych (linia kreskowa).

Algorytm  
rzeczywisty  
wartości p  
rys. 5 prze

Rys. 5

tranzystor  
peratury o  
ciom prac  
przedstawi  
symulacji  
tyfikacji p  
prądu bazy  
między wy  
dowana p  
tona od pu

nia wartości  
oświadczal-  
miarowego

obliczono  
gtona, przy-  
bierając na  
N krok po

z algorytmu  
zgodność

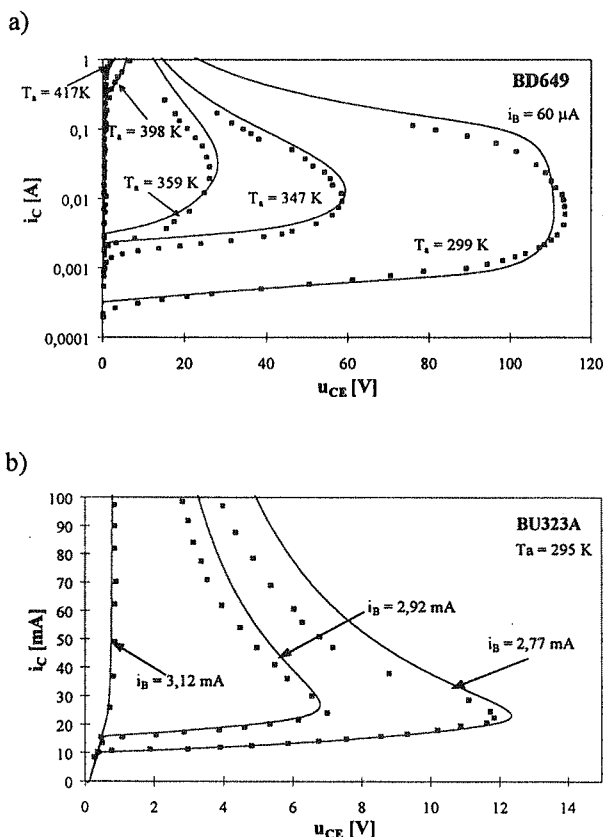
Tablica 1

| $\gamma_2(\tau_2)$ | $\gamma_2(\tau_2)$ |
|--------------------|--------------------|
| 0,4                | 0,6                |
| 0,46               | 0,54               |

$i_{CE}$ ) tranzys-  
inia ciągła)  
że porów-

a parametrów

Algorytm IDEN wykorzystano także przy identyfikacji parametrów elementów rzeczywistych — tranzystorów BD649 oraz BU323A. Otrzymane zgodnie z algorytmem wartości parametrów zamieszczono odpowiednio w tablicach 2 i 3, natomiast na rys. 5 przedstawiono obliczone i pomierzone nieizotermiczne charakterystyki wyjściowe



Rys. 5. Obliczone i pomierzone nieizotermiczne charakterystyki tranzystorów Darlingtona mocy.

tranzystorów Darlingtona BD649 (rys. 5a), odpowiadające różnym wartościom temperatury otoczenia oraz tranzystora BU323A (rys. 5b), odpowiadające różnym wartościom prądu bazy. W obliczeniach wykorzystano zestaw parametrów makromodelu przedstawiony w tablicach 2 i 3. Jak widać, uzyskano zadawalającą zgodność wyników symulacji i pomiarów, co świadczy o poprawności zaproponowanej procedury identyfikacji parametrów makromodelu. Na rys. 5b, w przypadku najmniejszej wartości prądu bazy, występuje w obszarze ujemnej rezystancji różniczkowej znacząca różnica między wynikami obliczeń i pomiarów, sięgająca nawet 20%, prawdopodobnie spowodowana pominięciem zależności parametrów modelu termicznego tranzystora Darlingtona od punktu pracy.

Tablica 2

Wartości parametrów tranzystora Darlingtona BD649

| parametr | R <sub>1</sub> [Ω]     | TWR <sub>(R1)</sub> [K <sup>-1</sup> ]  | R <sub>2</sub> [Ω]                    | TWR <sub>(R2)</sub> [K <sup>-1</sup> ] | I <sub>0(T1)</sub> [A]                  | I <sub>G(T1)</sub> [A]                  | V <sub>JC</sub> C <sub>(T1)</sub> [V]  |
|----------|------------------------|-----------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------|----------------------------------------|
| wartość  | 11,4 · 10 <sup>3</sup> | 8,5 · 10 <sup>-3</sup>                  | 90                                    | 5,5 · 10 <sup>-3</sup>                 | 1 · 10 <sup>8</sup>                     | 20                                      | 0,8                                    |
| parametr | r <sub>B(T1)</sub> [Ω] | TWR <sub>B(T1)</sub> [K <sup>-1</sup> ] | U <sub>Z2(T1)</sub> [V]               | α <sub>i2(T1)</sub> [K <sup>-1</sup> ] | λ <sub>2(T1)</sub>                      | U <sub>Z1(T1)</sub> [V]                 | α <sub>i1(T1)</sub> [K <sup>-1</sup> ] |
| wartość  | 10                     | 2,031 · 10 <sup>-3</sup>                | 13                                    | 6,53 · 10 <sup>-4</sup>                | 0,05                                    | 165                                     | 1,2 · 10 <sup>-3</sup>                 |
| parametr | λ <sub>1(T1)</sub>     | V <sub>AN(T1)</sub> [V]                 | β <sub>OF(T1)</sub>                   | b <sub>(T1)</sub> [A <sup>-1</sup> ]   | a <sub>(T1)</sub> [K <sup>-1</sup> ]    | c <sub>(T1)</sub> [K <sup>-1</sup> ]    | β <sub>OR(T1)</sub>                    |
| wartość  | 0,4                    | 120                                     | 70                                    | 0,3                                    | 0,012                                   | 0,005                                   | 1,5                                    |
| parametr | γ <sub>1(T1)</sub>     | γ <sub>2(T1)</sub>                      | α <sub>1(T1)</sub> [A <sup>-1</sup> ] | α <sub>2(T1)</sub> [A <sup>-1</sup> ]  | r <sub>C(T1)</sub> [Ω]                  | TWR <sub>C(T1)</sub> [K <sup>-1</sup> ] | V <sub>JE(T1)</sub> [V]                |
| wartość  | 0,6                    | 0,4                                     | 2000                                  | 120                                    | 0,1                                     | 3,33 · 10 <sup>-3</sup>                 | 0,8                                    |
| parametr | I <sub>0(T2)</sub> [A] | I <sub>G(T2)</sub> [A]                  | V <sub>JC(T2)</sub> [V]               | r <sub>B(T2)</sub> [Ω]                 | TWR <sub>B(T2)</sub> [K <sup>-1</sup> ] | U <sub>Z2(T2)</sub> [V]                 | α <sub>i2(T2)</sub> [K <sup>-1</sup> ] |
| wartość  | 2 · 10 <sup>8</sup>    | 40                                      | 0,8                                   | 2                                      | 2,031 · 10 <sup>-3</sup>                | 13                                      | 6,53 · 10 <sup>-4</sup>                |
| parametr | λ <sub>2(T2)</sub>     | V <sub>AN(T2)</sub> [V]                 | β <sub>OF(T2)</sub>                   | b <sub>(T2)</sub> [A <sup>-1</sup> ]   | a <sub>(T2)</sub> [K <sup>-1</sup> ]    | c <sub>(T2)</sub> [K <sup>-1</sup> ]    | γ <sub>1(T2)</sub>                     |
| wartość  | 0,05                   | 120                                     | 80                                    | 0,1                                    | 0,015                                   | 0,005                                   | 0,6                                    |
| parametr | γ <sub>2(T2)</sub>     | α <sub>1(T2)</sub> [A <sup>-1</sup> ]   | α <sub>2(T2)</sub> [A <sup>-1</sup> ] | r <sub>C(T2)</sub> [Ω]                 | TWR <sub>C(T2)</sub> [K <sup>-1</sup> ] | V <sub>JE(T1)</sub> [V]                 | I <sub>0(D)</sub> [A]                  |
| wartość  | 0,4                    | 2000                                    | 250                                   | 0,1                                    | 3,33 · 10 <sup>-3</sup>                 | 0,8                                     | 4 · 10 <sup>7</sup>                    |
| parametr | I <sub>G(D)</sub> [A]  | V <sub>J(D)</sub> [V]                   | r <sub>S(D)</sub> [Ω]                 | TWR <sub>S(D)</sub> [K <sup>-1</sup> ] |                                         |                                         |                                        |
| wartość  | 20                     | 0,8                                     | 0,3                                   | 3,33 · 10 <sup>-3</sup>                |                                         |                                         |                                        |

Tablica 3

Wartości parametrów tranzystora Darlingtona BU323A

| parametr | R <sub>1</sub> [Ω]     | TWR <sub>(R1)</sub> [K <sup>-1</sup> ]  | R <sub>2</sub> [Ω]                    | TWR <sub>(R2)</sub> [K <sup>-1</sup> ] | I <sub>0(T1)</sub> [A]                  | I <sub>G(T1)</sub> [A]                  | V <sub>JC</sub> C <sub>(T1)</sub> [V]  |
|----------|------------------------|-----------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------|----------------------------------------|
| wartość  | 245,5                  | 4,35 · 10 <sup>-3</sup>                 | 21,15                                 | 4,35 · 10 <sup>-3</sup>                | 1 · 10 <sup>7</sup>                     | 16                                      | 1                                      |
| parametr | r <sub>B(T1)</sub> [Ω] | TWR <sub>B(T1)</sub> [K <sup>-1</sup> ] | U <sub>Z2(T1)</sub> [V]               | α <sub>i2(T1)</sub> [K <sup>-1</sup> ] | λ <sub>2(T1)</sub>                      | U <sub>Z1(T1)</sub> [V]                 | α <sub>i1(T1)</sub> [K <sup>-1</sup> ] |
| wartość  | 2,2                    | 3,3 · 10 <sup>-3</sup>                  | 15                                    | 7 · 10 <sup>-4</sup>                   | 0,05                                    | 600                                     | 1,2 · 10 <sup>-3</sup>                 |
| parametr | λ <sub>1(T1)</sub>     | V <sub>AN(T1)</sub> [V]                 | β <sub>OF(T1)</sub>                   | b <sub>(T1)</sub> [A <sup>-1</sup> ]   | a <sub>(T1)</sub> [K <sup>-1</sup> ]    | c <sub>(T1)</sub> [K <sup>-1</sup> ]    | β <sub>OR(T1)</sub>                    |
| wartość  | 0,8                    | 180                                     | 85                                    | 0,5                                    | 0,02                                    | 0,01                                    | 5,5                                    |
| parametr | γ <sub>1(T1)</sub>     | γ <sub>2(T1)</sub>                      | α <sub>1(T1)</sub> [A <sup>-1</sup> ] | α <sub>2(T1)</sub> [A <sup>-1</sup> ]  | r <sub>C(T1)</sub> [Ω]                  | TWR <sub>C(T1)</sub> [K <sup>-1</sup> ] | V <sub>JE(T1)</sub> [V]                |
| wartość  | 0,7                    | 0,3                                     | 3500                                  | 500                                    | 0,5                                     | 3,33 · 10 <sup>-3</sup>                 | 0,5                                    |
| parametr | I <sub>0(T2)</sub> [A] | I <sub>G(T2)</sub> [A]                  | V <sub>JC(T2)</sub> [V]               | r <sub>B(T2)</sub> [Ω]                 | TWR <sub>B(T2)</sub> [K <sup>-1</sup> ] | U <sub>Z2(T2)</sub> [V]                 | α <sub>i2(T2)</sub> [K <sup>-1</sup> ] |
| wartość  | 5 · 10 <sup>7</sup>    | 80                                      | 1                                     | 0,3                                    | 3,3 · 10 <sup>-3</sup>                  | 14                                      | 7 · 10 <sup>-4</sup>                   |
| parametr | λ <sub>2(T2)</sub>     | V <sub>AN(T2)</sub> [V]                 | β <sub>OF(T2)</sub>                   | b <sub>(T2)</sub> [A <sup>-1</sup> ]   | a <sub>(T2)</sub> [K <sup>-1</sup> ]    | c <sub>(T2)</sub> [K <sup>-1</sup> ]    | γ <sub>1(T2)</sub>                     |
| wartość  | 0,05                   | 200                                     | 130                                   | 1,3                                    | 0,02                                    | 0,015                                   | 0,6                                    |
| parametr | γ <sub>2(T2)</sub>     | α <sub>1(T2)</sub> [A <sup>-1</sup> ]   | α <sub>2(T2)</sub> [A <sup>-1</sup> ] | r <sub>C(T2)</sub> [Ω]                 | TWR <sub>C(T2)</sub> [K <sup>-1</sup> ] | V <sub>JE(T1)</sub> [V]                 | I <sub>0(D)</sub> [A]                  |
| wartość  | 0,4                    | 1950                                    | 350                                   | 0,3                                    | 3,33 · 10 <sup>-3</sup>                 | 0,5                                     | 1 · 10 <sup>7</sup>                    |
| parametr | I <sub>G(D)</sub> [A]  | V <sub>J(D)</sub> [V]                   | r <sub>S(D)</sub> [Ω]                 | TWR <sub>S(D)</sub> [K <sup>-1</sup> ] |                                         |                                         |                                        |
| wartość  | 16                     | 1                                       | 0,255                                 | 3,33 · 10 <sup>-3</sup>                |                                         |                                         |                                        |

W pracy  
rów elektry  
gtona mocy  
leżących na  
elementu, c  
wykorzysta

Jak wyn  
estymacji p  
metrów ma  
termicznych

Bardzo  
zmian warto  
kterystyk st  
dotyczące t  
zapewnienia  
nie istotne  
obliczenia r  
wpływają n  
wykorzysty

1. W. Janke  
Zesz. Nauk.
2. R. Fletc  
Computer J
3. R. Galar  
Electronic N
4. W. Janke  
nr 374, Elek
5. J. Zarębs  
tions. Int. C
6. J. Zarębs  
półprzewod  
1996.
7. K. Górec  
termicznego  
puterów w E
8. J. Zarębs  
Transistor. 7
9. K. Górec  
nych. Praca

Tablica 2

|                                      |
|--------------------------------------|
| $V_{JC(T1)}$ [V]                     |
| 0,8                                  |
| $\alpha_{T1(T1)}$ [K <sup>-1</sup> ] |
| $1,2 \cdot 10^{-3}$                  |
| $\beta_{0R(T1)}$                     |
| 1,5                                  |
| $V_{JE(T1)}$ [V]                     |
| 0,8                                  |
| $\alpha_{T2(T2)}$ [K <sup>-1</sup> ] |
| $6,53 \cdot 10^{-4}$                 |
| $\gamma_{T2}$                        |
| 0,6                                  |
| $I_{0(D)}$ [A]                       |
| $4 \cdot 10^7$                       |
|                                      |
|                                      |

W pracy zaproponowano prosty i efektywny algorytm estymacji wartości parametrów elektrycznych stałoprądowego elektrotermicznego makromodelu tranzystora Darlingtona mocy. Realizacja tego algorytmu wymaga pomiarów współrzędnych punktów leżących na wybranych izotermicznych charakterystykach statycznych rozważanego elementu, dla dwóch wartości temperatury otoczenia oraz stosownych obliczeń przy wykorzystaniu wzorów przedstawionych w Dodatku.

Jak wynika z przykładów przedstawionych w rozdziale 3, zaproponowana procedura estymacji parametrów makromodelu zapewnia poprawne wyznaczenie wartości parametrów makromodelu, co ilustruje dobra zgodność obliczonych i pomierzonych nieizotermicznych charakterystyk statycznych rozważanego typu tranzystora Darlingtona.

Bardzo ważnym, chociaż nie poruszonym w niniejszej pracy problemem jest wpływ zmian wartości poszczególnych parametrów EMTD na kształt nieizotermicznych charakterystyk statycznych tranzystora Darlingtona. Przedstawione w pracy [12] rozważania dotyczące tego zagadnienia, pozwalają stwierdzić, że prezentowana procedura wymaga zapewnienia dużej dokładności pomiaru prądów i napięć zaciskowych. Jest to szczególnie istotne w przypadku pomiaru charakterystyk stanowiących dane wejściowe do obliczenia rezystancji rezystorów bocznikujących R1 oraz R2. Wartości R1, R2 silnie wpływają na przebieg charakterystyk statycznych tranzystora Darlingtona i są one wykorzystywane przy obliczaniu wartości innych parametrów.

Tablica 3

|                                      |
|--------------------------------------|
| $V_{JC(T1)}$ [V]                     |
| 1                                    |
| $\alpha_{T1(T1)}$ [K <sup>-1</sup> ] |
| $1,2 \cdot 10^{-3}$                  |
| $\beta_{0R(T1)}$                     |
| 5,5                                  |
| $V_{JE(T1)}$ [V]                     |
| 0,5                                  |
| $\alpha_{T2(T2)}$ [K <sup>-1</sup> ] |
| $7 \cdot 10^{-4}$                    |
| $\gamma_{T2}$                        |
| 0,6                                  |
| $I_{0(D)}$ [A]                       |
| $1 \cdot 10^7$                       |
|                                      |
|                                      |

## BIBLIOGRAFIA

1. W. Janke, J. Zarębski: *Problemy identyfikacji parametrów modeli elementów półprzewodnikowych*. Zesz. Nauk. WSM Gdynia, 1985, s. 18.
2. R. Fletcher, M.J.D. Powell: *A Rapidly Convergent Descent Method for Minimalization*. The Computer Journal, Vol. 7, 1964, p. 149.
3. R. Galar: *Soft Selection in Global Optimisation*. XVII National Conference Circuit Theory and Electronic Networks, Polanica-Zdrój, 1994, Vol. 1, p. 9.
4. W. Janke: Modele elektrotermiczne elementów półprzewodnikowych. Zesz. Nauk. Polit. Gdańskiej, nr 374, Elektronika LVII, 1984.
5. J. Zarębski, K. Górecki: *Thermal Transients in Bipolar Transistors; Measurements and Simulations*. Int. Conf. on Information, Systems Methods Applied to Engineering Problems, Malta, 1993, Vol. 2, p. 111.
6. J. Zarębski: *Modelowanie, symulacja i pomiary przebiegów elektrotermicznych w elementach półprzewodnikowych i układach elektronicznych*. Prace Naukowe Wyższej Szkoły Morskiej, Gdynia, 1996.
7. K. Górecki, J. Zarębski: *System komputerowy do automatycznej identyfikacji parametrów elektrotermicznego modelu tranzystora bipolarnego*. II Konferencja Naukowo-Techniczna Zastosowanie Komputerów w Elektrotechnice ZKwE'97, Kiekrz-Poznań, 1997, s. 269.
8. J. Zarębski, K. Górecki: *Parameters Estimation of the D.C. Electrothermal Model of the Bipolar Transistor*. 7-th International Conference Mixed Design of Integrated Circuits and Systems MIXDES 2000, Gdynia, 2000, p. 351.
9. K. Górecki: *Elektrotermiczny makromodel tranzystora Darlingtona do analizy układów elektronicznych*. Praca doktorska, Politechnika Gdańska, 1999.

10. J. Zarębski, K. Górecki: *Modelowanie tranzystora Darlingtona mocy z uwzględnieniem oddziaływań elektrotermicznych*. Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji, t. 45, z.3-4, 1999, s. 455.
11. K. Górecki, J. Zarębski: *Układ do automatycznego pomiaru nieizotermicznych charakterystyk statycznych elementów półprzewodnikowych*. Metrologia i Systemy Pomiarowe, t. VII, z. 1, 2000, s. 45.
12. K. Górecki, J. Zarębski, W.J. Stepowicz: *Influence of Model Parameters on the D.C. Nonisothermal Characteristics of the Power Darlington Transistor*. 4th International Seminar on Power Semiconductors ISPS'98, Praga (Czechy) 1998, p. 185.

## DODATEK

Poniżej przedstawiono szczegółowo sposób realizacji drugiego etapu procedury estymacji wartości parametrów wraz z odpowiednimi wzorami. Jego realizacja wymaga wykonania 22 następujących kroków. Poniższe wzory uzyskano po uproszczeniu modelu globalnego tranzystora Darlingtona do postaci odpowiedniego modelu lokalnego, a następnie algebraicznym przekształceniu go do żądanej postaci.

### 1. Wyznaczenie wartości parametrów opisujących prąd generacyjny tranzystora T1:

$I_{G(T1)}$  — współczynnik,  $V_{JC(T1)}$  — napięcie bariery

$$V_{JC(T1)} = \frac{u_{BE11}^2 \cdot u_{BC12} - u_{BC11} \cdot u_{BE12}^2}{u_{BE11}^2 - u_{BE12}^2} \quad (1)$$

$$I_{G(T1)} = \frac{u_{BE11} \cdot (i_{E1} - i_{E2})}{(u_{BE1} - u_{BE2}) \cdot \sqrt{1 - u_{BC11}/V_{JC(T1)}}} \cdot \exp\left(\frac{U_{go}}{2 \cdot h \cdot T_{a1}}\right) \quad (2)$$

prądy i napięcia we wzorach (1, 2) odnoszą się do punktów pomiarowych A1( $u_{B1}$ ,  $i_{E1}$ ), A2( $u_{BE2}$ ,  $i_{E2}$ ), A11( $u_{BC11}$ ,  $i_{C11}$ ,  $u_{BE11}$ ), oraz A12( $u_{BC12}$ ,  $i_{C12}$ ,  $u_{BE12}$ ),  $U_{go}$  wynosi 1,206 V dla krzemu, natomiast  $h$  oznacza iloraz stałej Boltzmanna przez ładunek elektronu.

### 2. Wyznaczenie wartości rezystancji rezystorów bocznikujących R2 i R1

$$R2 = \frac{-h \cdot T_{a1} \cdot \ln\left(\frac{i_{C1} - I_{CB0}(T_{a1})}{i_{C2} - I_{CB0}(T_{a1})}\right) + u_{BE1} - u_{BE2}}{i_{C1} + i_{B1} - i_{C2} - i_{B2}} \quad (3)$$

$$R1 = \frac{u_{BE11} - u_{BE12}}{i_{E11} - i_{E12}} - R2 \quad (4)$$

gdzie

$$I_{CB0}(T) = I_{G(T1)} \cdot \sqrt{1 - u_{BC}/V_{JC(T1)}} \cdot \exp\left(-\frac{U_{go}}{2 \cdot h \cdot T}\right) \quad (5)$$

ędnieniem od-  
s. 455.

charakterystyk  
, 2000, s. 45.

s on the D.C.  
inar on Power

natomiast odpowiednie prądy i napięcia są współrzędnymi punktów pomiarowych  $A1(u_{BE11}, i_{E11})$ ,  $A2(u_{BE12}, i_{E12})$ ,  $A15(u_{BE1}, i_{C1}, i_{B1})$  oraz  $A16(u_{BE2}, i_{C2}, i_{B2})$ .

3. Wyznaczenie wartości temperaturowego współczynnika zmian rezystancji  $R2$ :  $TWR_{(R2)}$

$$TWR_{(R2)} = \frac{R21 - R2}{R2 \cdot \Delta T} \quad (6)$$

gdzie

procedury  
ja wymaga  
ni modelu  
nego, a na-

$$R21 = - \frac{h \cdot T_{a2} \cdot \ln \left( \frac{i_{C1} - I_{CB0}(T_{a2})}{i_{C2} - I_{CB0}(T_{a2})} \right) + u_{BE1} - u_{BE2}}{i_{C1} + i_{B1} - i_{C2} - i_{B2}} \quad (7)$$

We wzorze (7) wykorzystano współrzędne punktów pomiarowych  $B15(u_{BE1}, i_{C1}, i_{B1})$  oraz  $B16(u_{BE2}, i_{C2}, i_{B2})$

ora  $T1$ :

4. Wyznaczenie wartości temperaturowego współczynnika zmian rezystancji  $R1$ :  $TWR_{(R1)}$

$$(1) \quad TWR_{(R1)} = \frac{\frac{u_{BE1} - u_{BE2}}{i_{E1} - i_{E2}} - R21 - R1}{R1 \cdot \Delta T} \quad (8)$$

(2)

We wzorze (8) wykorzystano współrzędne punktów pomiarowych  $B1(u_{BE1}, i_{E1})$  oraz  $B2(u_{BE2}, i_{E2})$ .

$A1(u_{B1}, i_{E1})$ ,  
osi 1,206 V  
ktronu.

5. Wyznaczenie parametrów opisujących prąd generacyjny diody:  $I_{G(D)}$  — współczynnik,  $V_{j(D)}$  — napięcie bariery

(3)

$$V_{j(D)} = \frac{\left( i_{C11} - \frac{u_{BE11}}{R1 + R2} \right)^2 \cdot u_{CB2} - u_{CB1} \cdot \left( i_{C12} - \frac{u_{BE12}}{R1 + R2} \right)^2}{\left( i_{C11} - \frac{u_{BE11}}{R1 + R2} \right)^2 - \left( i_{C12} - \frac{u_{BE12}}{R1 + R2} \right)^2} \quad (9)$$

(4)

$$I_{G(D)} = \frac{i_{C11} - \frac{u_{BE11}}{R1 + R2}}{\sqrt{1 - u_{CB1}/V_{j(D)}}} \cdot \exp \left( \frac{U_{go}}{2 \cdot h \cdot T_{a1}} \right) \quad (10)$$

(5)

odpowiednie prądy i napięcia dotyczą punktów pomiarowych  $A11(u_{BC11}, i_{C11}, u_{BE11})$  oraz  $A12(u_{BC12}, i_{C12}, u_{BE12})$ .

6. Wyznaczenie napięcia przebicie złącza emiterowego tranzystora T1  $U_{Z20(T1)}$ , parametru modelującego twardość charakterystyki tego złącza w zakresie przebicia  $\lambda_{2(T1)}$  oraz rezystancji szeregowej bazy  $r_{B(T1)}$

$$\lambda_{2(T1)} = \frac{(Y_4 - Y_3) \cdot (X_1 - X_2) + (Y_1 - Y_2) \cdot (X_3 - X_4)}{(X_1 - X_2) \cdot \ln(X_3/X_4) - (X_3 - X_4) \cdot \ln(X_1/X_2)} \quad (11)$$

$$U_{Z02(T1)} = r_{B(T1)} \cdot X_1 - Y_1 - \lambda_{2(T1)} \cdot \left[ \ln\left(\frac{X_1}{-I_{G(T1)}}\right) + \frac{U_{go}}{2 \cdot h \cdot T_{a1}} \right] \quad (12)$$

$$r_{B(T1)} = \frac{Y_1 - Y_2 + \lambda_{2(T1)} \cdot \ln(X_1/X_2)}{(X_1 - X_2)} \quad (13)$$

gdzie

$$X_i = i_{Bi} - (u_{BEi} - i_{Bi} \cdot R2)/R1 \quad Y_i = u_{BEi} - i_{Bi} \cdot R2 \quad (14)$$

oraz  $i = 1, 2, 3, 4$ , natomiast odpowiednie prądy i napięcia dotyczą punktów pomiarowych A3( $u_{BE1}, i_{E1}, i_{B1}$ ), A4( $u_{BE2}, i_{E2}, i_{B2}$ ), A5( $u_{BE3}, i_{E3}, i_{B3}$ ), A6( $u_{BE4}, i_{E4}, i_{B4}$ ).

7. Wyznaczenie napięcia przebicie złącza emiterowego tranzystora T2  $U_{Z02(T2)}$ , parametru modelującego twardość charakterystyki tego złącza w zakresie przebicia  $\lambda_{2(T2)}$  oraz rezystancji szeregowej bazy  $r_{B(T2)}$

$$\lambda_{2(T2)} = \frac{(Y_4 - Y_3) \cdot (X_1 - X_2) + (Y_1 - Y_2) \cdot (X_3 - X_4)}{(X_1 - X_2) \cdot \ln(X_3/X_4) - (X_3 - X_4) \cdot \ln(X_1/X_2)} \quad (15)$$

$$U_{Z02(T2)} = r_{B(T2)} \cdot X_1 - Y_1 - \lambda_{2(T2)} \cdot \left[ \ln\left(\frac{X_1}{-I_{G(T1)}}\right) + \frac{U_{go}}{2 \cdot h \cdot T_{a1}} \right] \quad (16)$$

$$r_{B(T2)} = \frac{Y_1 - Y_2 + \lambda_{2(T2)} \cdot \ln(X_1/X_2)}{(X_1 - X_2)} \quad (17)$$

gdzie

$$i_{Bi} = -I_{G(T1)} \cdot \exp\left(-\frac{U_{go}}{2 \cdot h \cdot T_{a1}}\right) \cdot \exp\left(\left(-u_{BE(T1)i} - U_{Z2(T1)} + r_{B(T1)} \cdot \left(i_{Bi} - \frac{u_{BE(T1)i}}{R1}\right)\right)\right) / \left(\lambda_{2(T1)} + \frac{u_{BE(T1)i}}{R1}\right) \quad (18)$$

oraz  $i =$   
dotyczą  
A10( $u_{BE}$

8. Wyzn  
wej b  
złącza

gdzie

$U_{Z21(T1)} =$

odpowie  
B4( $u_{BE}$

9. Wyzn  
wych  
złącza

gdzie

$U_{Z21(T2)}$



(T1), parametry przebiecia  $\lambda_{2(T1)}$

$$X_i = i_{Bi} - u_{BE(T2)i} / R2 \quad Y = u_{BE(T1)i} \quad (19)$$

oraz  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $u_{BE(T2)i} = u_{BEi} - u_{BE(T1)i}$ , natomiast odpowiednie prądy i napięcia dotyczą punktów pomiarowych A7( $u_{BE1}, i_{E1}, i_{B1}$ ), A8( $u_{BE2}, i_{E2}, i_{B2}$ ), A9( $u_{BE3}, i_{E3}, i_{B3}$ ), A10( $u_{BE4}, i_{E4}, i_{B4}$ ). (11)

8. Wyznaczenie wartości temperaturowych współczynników zmian rezystancji szerego-  
wej bazy  $TWR_{B(T1)}$  oraz temperaturowych współczynników zmian napięcia przebiecia  
złącza baza-emiter  $\alpha_{i2(T1)}$  tranzystora T1 (12)

$$TWR_{B(T1)} = \frac{Y_1 - Y_2 + \lambda_{2(T1)} \cdot \ln(X_1/X_2) - r_{B(T1)} \cdot (X_1 - X_2)}{r_{B(T1)} \cdot \Delta T \cdot (X_1 - X_2)} \quad (20)$$

$$\alpha_{i2(T1)} = \frac{U_{Z21(T1)} - U_{Z02(T1)}}{U_{Z02(T1)} \cdot \Delta T} \quad (21)$$

ów pomiaro-  
4).

gdzie

$$U_{Z21(T1)} = \frac{Y_1 - Y_2 + \lambda_{2(T1)} \cdot \ln(X_1/X_2)}{(X_1 - X_2)} \cdot X_1 - Y_1 - \lambda_{2(T1)} \cdot \left[ \ln\left(\frac{X_1}{-I_{G(T1)}}\right) + \ln\left(\frac{U_{go}}{2 \cdot h \cdot T_{a2}}\right) \right] \quad (22)$$

(T1), parametry przebiecia  $\lambda_{2(T2)}$

$$X_i = i_{Bi} - (u_{BEi} - i_{Bi} \cdot R21) / R11 \quad Y_i = u_{BEi} - i_{Bi} \cdot R21 \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (23)$$

odpowiednie prądy i napięcia dotyczą punktów pomiarowych B3( $u_{BE1}, i_{E1}, i_{B1}$ ),  
B4( $u_{BE2}, i_{E2}, i_{B2}$ ), B5( $u_{BE3}, i_{E3}, i_{B3}$ ), B6( $u_{BE4}, i_{E4}, i_{B4}$ ). (15)

9. Wyznaczenie wartości temperaturowych współczynników zmian rezystancji szerego-  
wych bazy  $TWR_{B(T2)}$  oraz temperaturowych współczynników zmian napięcia przebiecia  
złącza baza-emiter  $\alpha_{i2(T2)}$  tranzystora T2 (16)

$$TWR_{B(T2)} = \frac{Y_1 - Y_2 + \lambda_{2(T2)} \cdot \ln(X_1/X_2) - r_{B(T2)} \cdot (X_1 - X_2)}{r_{B(T2)} \cdot \Delta T \cdot (X_1 - X_2)} \quad (24)$$

$$\alpha_{i2(T2)} = \frac{U_{Z21(T2)} - U_{Z02(T2)}}{U_{Z02(T2)} \cdot \Delta T} \quad (25)$$

))) /

gdzie (18)

$$U_{Z21(T2)} = \frac{Y_1 - Y_2 + \lambda_{2(T2)} \cdot \ln(X_1/X_2)}{(X_1 - X_2)} \cdot X_1 - Y_1 - \lambda_{2(T2)} \cdot \left[ \ln\left(\frac{X_1}{-I_{G(T1)}}\right) + \ln\left(\frac{U_{go}}{2 \cdot h \cdot T_{a2}}\right) \right] \quad (26)$$

$$i_{Bi} = -I_{G(T1)} \cdot \exp\left(-\frac{U_{go}}{2 \cdot h \cdot T_{a2}}\right) \cdot \exp\left(\left(-u_{BE(T1)i} - U_{Z2(T1)} + r_{B(T1)} \cdot \left(i_{Bi} - \frac{u_{BE(T1)i}}{R1}\right)\right)\right) / \left(\lambda_{2(T2)}\right) + \frac{u_{BE(T1)i}}{R1} \quad (27)$$

$$X_i = i_{Bi} - u_{BE(T2)i} / R2 \quad Y_i = u_{BE(T2)i} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (28)$$

oraz  $u_{BE(T2)i} = u_{BE1} - u_{BE(T1)i}$ , natomiast odpowiednie prądy i napięcia dotyczą punktów pomiarowych B7( $u_{BE1}$ ,  $i_{E1}$ ,  $i_{B1}$ ), B8( $u_{BE2}$ ,  $i_{E2}$ ,  $i_{B2}$ ), B9( $u_{BE3}$ ,  $i_{E3}$ ,  $i_{B3}$ ), B10( $u_{BE4}$ ,  $i_{E4}$ ,  $i_{B4}$ ).

10. Wyznaczenie napięcia przebicia złącza baza-kolektor  $U_{Z01(T1)}$  tranzystora T1 oraz parametru modelującego twardość charakterystyki tego złącza  $\lambda_{1(T1)}$  w zakresie przebicia

$$\lambda_{1(T1)} = (u_{CB1} - u_{CB2}) / \ln(i_{C1} / i_{C2}) \quad (29)$$

$$U_{Z01(T1)} = u_{CB1} - \lambda_{1(T1)} \cdot \ln\left(i_{C1} \left/ \left(-I_{G(T1)} \cdot \exp\left(-\frac{U_{go}}{2 \cdot h \cdot T_{a1}}\right) \cdot \sqrt{1 - \frac{u_{BC1}}{V_{JC(T1)}}}\right)\right.\right) \quad (30)$$

W powyższych wzorach wykorzystano współrzędne punktów pomiarowych A13( $u_{BC1}$ ,  $i_{C1}$ ) oraz A14( $u_{BC2}$ ,  $i_{C2}$ ).

11. Wyznaczenie temperaturowego współczynnika zmian napięcia przebicia złącza baza-kolektor  $\alpha_{i1(T1)}$  tranzystora T1

$$\alpha_{i1(T1)} = \frac{u_{CB1} - \lambda_{1(T1)} \cdot \left[ \ln(i_{C1}) - \ln\left(-I_{G(T1)} \cdot \frac{T_{a2}}{T_{a1}} \exp\left(-\frac{U_{go}}{2 \cdot h \cdot T_{a2}}\right) \cdot \sqrt{1 - \frac{u_{BC1}}{V_{JC(T1)}}}\right) \right] - U_{Z01(T1)}}{U_{Z01(T1)} \cdot \Delta T} \quad (31)$$

gdzie odpowiednie prądy i napięcia dotyczą punktu pomiarowego B13( $u_{BC1}$ ,  $i_{C1}$ ).

12. Wyznaczenie wartości napięcia Early'ego  $V_{AN(T1)}$  oraz wykładnika  $K$  w modelu przebicia złącza kolektorowego tranzystora T1 wymaga rozwiązania ze względu na te zmienne układu równań nieliniowych

$$\begin{cases} \frac{i_{C1}}{i_{C2}} = \exp\left(\frac{u_{BE1} - u_{BE2} - R2 \cdot (i_{C1} - i_{C2})}{h \cdot T_{a1}}\right) \cdot \frac{V_{AN(T1)} + u_{CE1}}{V_{AN(T1)} + u_{CE2}} \cdot \frac{U_{Z01(T1)}^K + u_{CB1}^K}{U_{Z01(T1)}^K + u_{CB2}^K} \\ \frac{i_{C1}}{i_{C3}} = \exp\left(\frac{u_{BE1} - u_{BE3} - R2 \cdot (i_{C1} - i_{C3})}{h \cdot T_{a1}}\right) \cdot \frac{V_{AN(T1)} + u_{CE1}}{V_{AN(T1)} + u_{CE3}} \cdot \frac{U_{Z01(T1)}^K + u_{CB1}^K}{U_{Z01(T1)}^K + u_{CB3}^K} \end{cases} \quad (32)$$

gdzie  $u_{CBi} = u_{CEi} - u_{BEi}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , natomiast odpowiednie prądy i napięcia dotyczą punktów pomiarowych A19( $u_{CE1}$ ,  $i_{C1}$ ,  $i_{BE1}$ ), A20( $u_{CE2}$ ,  $i_{C2}$ ,  $i_{BE2}$ ) oraz A21( $u_{CE3}$ ,  $i_{C3}$ ,  $i_{BE3}$ ).

13. Wyznaczenie wartości parametru  $I_{0(T1)}$  opisującego prąd nasycenia tranzystora T1

$$I_{0(T1)} = \frac{i_{C1} \cdot \exp\left(\frac{U_{go} - u_{BE1} + R2 \cdot (i_{C1} + i_{B1})}{h \cdot T_{a1}}\right)}{1 + u_{CE1}/V_{AN(T1)}} \quad (33)$$

gdzie odpowiednie prądy i napięcia dotyczą punktu pomiarowego A15( $u_{CE1}$ ,  $i_{C1}$ ,  $i_{BE1}$ ,  $u_{BE1}$ ).

14. Wyznaczenie wartości parametru  $I_{0(T2)}$  opisującego prąd nasycenia oraz napięcia Early'ego  $V_{AN(T2)}$  tranzystora T2

$$I_{0(T2)} = \frac{XI}{(1 + u_{CE1}/V_{AN(T1)})} \quad (34)$$

$$V_{AN(T2)} = \frac{u_{CE1} - u_{CE2} \cdot X1/X2}{X1/X2 - 1} \quad (35)$$

gdzie

$$Xi = i_{C(T2)i} \cdot \exp\left(\frac{U_{go} - u_{BE(T2)i}}{h \cdot T_{a1}}\right) \quad (36)$$

$$u_{BE(T1)i} = u_{BEi} - R2 \left( i_{Bi} + I_{S1} \cdot \left( 1 + \frac{u_{CEi}}{V_{AN(T1)}} \right) \exp\left(\frac{R1 \cdot u_{BE(T1)i} - r_{B(T1)} \cdot (R1 \cdot i_{Bi} - u_{BE(T1)i})}{h \cdot T_{a1} \cdot R1}\right) \right) \quad (37)$$

$$i_{C(T1)i} = I_{0(T1)} \cdot \left(\frac{T_{a1}}{T_0}\right)^2 \cdot \exp\left(-\frac{U_{go}}{h \cdot T_{a1}}\right) \cdot \exp\left(\frac{R1 \cdot u_{BE(T1)i} - r_{B(T1)} \cdot (R1 \cdot i_{Bi} - u_{BE(T1)i})}{h \cdot T_{a1} \cdot R1}\right) \quad (38)$$

$$u_{BE(T2)i} = u_{BEi} - u_{BE(T1)i} \quad i_{C(T2)i} = i_{Ci} - i_{C(T1)i} \quad i = 1, 2 \quad (39)$$

natomiast odpowiednie prądy i napięcia dotyczą punktów pomiarowych A17( $u_{BE1}$ ,  $i_{C1}$ ,  $i_{B1}$ ) oraz A18( $u_{BE2}$ ,  $i_{C2}$ ,  $i_{B2}$ ). Rozwiązanie równania (37) wymaga postępowania iteracyjnego. •

15. Wyznaczenie wartości parametru  $I_{G(T2)}$  opisującego prąd generacyjny tranzystora T2 ze wzoru

$$I_{G(T2)} = I_{G(T1)} \cdot I_{0(T2)} / I_{0(T1)} \quad (40)$$

16. Wyznaczenie parametrów opisujących współczynnik wzmocnienia prądowego tranzystorów T1 oraz T2:  $\beta_{0F(T1)}$ ,  $\beta_{0F(T2)}$ ,  $b_{(T1)}$ ,  $b_{(T2)}$ ,  $a_{(T1)}$ ,  $a_{(T2)}$ ,  $c_{(T1)}$ ,  $c_{(T2)}$ ,  $\alpha_{1(T1)}$ ,  $\alpha_{1(T2)}$ ,  $\alpha_{2(T1)}$ ,  $\alpha_{2(T2)}$ ,  $\gamma_{1(T1)}$ ,  $\gamma_{1(T2)}$ ,  $\gamma_{2(T1)}$ ,  $\gamma_{2(T2)}$ .

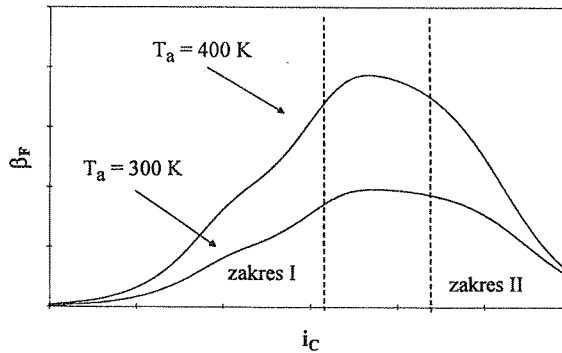
Obliczenie wartości wymienionych parametrów wymaga wyznaczenia charakterystyk

$$\beta_{F(T1)}(i_{C(T1)}) = i_{C(T1)}/i_{B(T1)} \quad (41)$$

oraz

$$\beta_{F(T2)}(i_{C(T2)}) = i_{C(T2)}/i_{B(T2)} \quad (42)$$

których typowe przebiegi w dwóch temperaturach otoczenia  $T = T_{a1}$  oraz  $T = T_{a2}$  przedstawiono na rys. 6. Występujące w zależnościach (41) oraz (42) wartości zmiennych ( $i_{C(T1)}$ ,  $i_{C(T2)}$ ,  $i_{B(T1)}$ ,  $i_{B(T2)}$ ) wyznaczane są poprzez rozwiązanie układu równań nieliniowych o postaci



Rys. 6. Typowy kształt zależności współczynnika wzmocnienia prądowego od prądu kolektora w skali logarymiczno-liniowej

$$\begin{cases} i_C = I_{S(T1)} \cdot \exp\left(\frac{R1 \cdot u_{BE(T1)} - r_{B(T1)} \cdot (R1 \cdot i_B - u_{BE(T1)})}{R1 \cdot h \cdot T}\right) + \\ + I_{S(T2)} \cdot \exp\left(\frac{u_{BE} - u_{BE(T1)} - r_{B(T2)} \cdot i_{B(T2)}}{h \cdot T}\right) \\ i_{C(T2)} = i_C - i_{C(T1)} \\ i_{B(T2)} = I_{S(T1)} \cdot \exp\left(\frac{R1 \cdot u_{BE(T1)} - r_{B(T1)} \cdot (R1 \cdot i_B - u_{BE(T1)})}{R1 \cdot h \cdot T}\right) + i_B - \frac{u_{BE} - u_{BE(T1)}}{R2} \\ i_{C(T1)} = i_B - u_{BE(T1)}/R1 \\ i_{C(T1)} = I_{0(T1)} \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 \cdot \exp\left(-\frac{U_{go}}{h \cdot T}\right) \cdot \exp\left(\frac{R1 \cdot u_{BE(T1)} - r_{B(T1)} \cdot (R1 \cdot i_B - u_{BE(T1)})}{R1 \cdot h \cdot T}\right) \end{cases} \quad (43)$$

Wystę  
współrzę  
wartości

Ponie  
sie współ  
identyczn  
metrów t  
znaczone  
sem (T2)

Wybi  
wysokop  
oraz T =  
temperatu  
metodą n

Z kolei, v

Param  
charakter  
Ponieważ  
dłatego s

ego tran-

2)  $\alpha_{1(T1)}$ 

erystyk

(41)

(42)

 $T = T_{a2}$ 

ci zmien-

a równań

Występujące w powyższym układzie równań prądy i napięcia ( $i_C$ ,  $i_B$ ,  $u_{BE}$ ) są współrzędnymi punktów leżących na pomierzonej charakterystyce  $i_C(u_{BE})$  przy stałej wartości napięcia  $u_{CE}$  (rys. 2c).

Ponieważ dalsze postępowanie przy wyznaczaniu parametrów występujących w opisie współczynnika wzmocnienia prądowego dla obu tranzystorów składowych jest identyczne, dlatego poniżej podano zależności pozwalające na wyznaczenie tych parametrów tylko dla tranzystora T1 — wzory (44–53). Parametry tranzystora T2 wyznaczane są z analogicznych zależności, w których indeks (T1) należy zastąpić indeksem (T2).

Wybierając po N punktów leżących na charakterystykach  $\beta_{F(T1)}(i_{C(T1)})$  w zakresie wysokoprądowym (zakres II na rys. 6), odpowiadających dwom temperaturom  $T = T_{a1}$  oraz  $T = T_{a2}$ , ze wzorów (41–43) wartości parametrów  $\beta_{OF(T1)} = \beta_{OF}$  i  $b_{(T1)} = b$  dla temperatury  $T_{a1}$  oraz  $\beta_{OF1(T1)} = \beta_{OF}$  i  $b_{1(T1)} = b$  (dla temperatury  $T_{a2}$ ) wyznaczane są metodą najmniejszych kwadratów

$$b = \frac{\left( \sum_{i=1}^N \beta_{F(T1)i}^{-1} \right)^2 - N \cdot \sum_{i=1}^N (\beta_{F(T1)i}^{-1})^2}{\sum_{i=1}^N (\beta_{F(T1)i}^{-1})^2 \cdot \sum_{i=1}^N i_{C(T1)i} - \sum_{i=1}^N (\beta_{F(T1)i}^{-1}) \cdot \sum_{i=1}^N (\beta_{F(T1)i}^{-1}) \cdot i_{C(T1)i}} \quad (44)$$

$$\beta_{OF} = b \frac{N \cdot \sum_{i=1}^N (\beta_{F(T1)i}^{-1} \cdot i_{C(T1)i}) - \sum_{i=1}^N \beta_{F(T1)i}^{-1} \sum_{i=1}^N i_{C(T1)i}}{N \cdot \sum_{i=1}^N (\beta_{F(T1)i}^{-1})^2 - \left( \sum_{i=1}^N \beta_{F(T1)i}^{-1} \right)^2} \quad (45)$$

tora

Z kolei, wartości parametrów  $a_{(T1)}$  oraz  $c_{(T1)}$  wyznaczane są ze wzorów

$$a_{(T1)} = \frac{\beta_{OF1(T1)} - \beta_{OF(T1)}}{\Delta T \cdot \beta_{OF(T1)}} \quad (46)$$

$$c_{(T1)} = \frac{b_{1(T1)} - b_{(T1)}}{\Delta T \cdot b_{(T1)}} \quad (47)$$

(43)

Parametry  $\alpha_{i(T1)}$  oraz  $\gamma_{i(T1)}$  wyznaczane są przy wykorzystaniu punktów leżących na charakterystykach  $\beta_{F(T1)}(i_{C(T1)})$  w zakresie niskoprądowym (zakres I na rys. 6). Ponieważ, jak wynika z doświadczenia autorów, zachodzi nierówność  $\alpha_{1(T1)} \ll \alpha_{2(T1)}$ , dlatego słuszne są następujące zależności

$$\alpha_{1(T1)} = \frac{y_1 - y_2}{i_{C(T1)2} - i_{C(T1)1}} \quad (48)$$

$$\gamma_{1(T1)} = \exp(\gamma_1 - \alpha_{1(T1)} \cdot i_{C(T1)1}) \quad (49)$$

gdzie

$$y_i(i_{C(T1)}) = \ln(1 - \beta_{0F(T1)}^{-1} \cdot \beta_{F(T1)i} \cdot (1 + b_{(T1)} \cdot i_{C(T1)i})), \quad i = 1, 2 \quad (50)$$

natomiast

$$\alpha_{2(T1)} = \frac{y_3 - y_4}{i_{C(T1)4} - i_{C(T1)3}} \quad (51)$$

$$\gamma_{2(T1)} = 1 - \gamma_{1(T1)} \quad (52)$$

gdzie

$$y_i(i_{C(T1)}) = \ln(1 - \beta_{0F(T1)}^{-1} \cdot \beta_{F(T1)i} \cdot (1 + b_{(T1)} \cdot i_{C(T1)}) - \gamma_{1(T1)} \cdot \exp(-\alpha_{1(T1)} \cdot i_{C(T1)i})), \quad i = 3, 4 \quad (53)$$

We wzorach (48–53) prądy  $i_{C(T1)i}$  oraz wartości współczynnika wzmocnienia prądowego  $\beta_{F(T1)i}$  są współrzędnymi punktów na charakterystyce  $\beta_{F(T1)}(i_{C(T1)})$ , odpowiadającym wybranym punktom na prostoliniowych odcinkach charakterystyk danych wzorami (50, 53).

17. Wyznaczenie wartości rezystancji szeregowej kolektora  $r_{C(T1)}$  oraz współczynnika wzmocnienia prądowego w zakresie inwersyjnym tranzystora wejściowego  $\beta_{0R(T1)}$  wymaga rozwiązania ze względu na te zmienne układu równań nieliniowych o postaci

$$\begin{cases} u_{CE1} = -V_T \cdot \ln \left[ \frac{1 - \frac{i_{C1}}{i_B} \cdot \frac{1}{\beta_{F(T1)}}}{1 - \frac{\beta_{0F(T1)}}{\beta_{0R(T1)} \cdot \beta_{F(T1)}} \cdot \left(1 + \frac{i_{C1}}{i_B}\right)} \right] + r_{C(T1)} \cdot i_{C1} - R2 \cdot i_{C1} \\ u_{CE2} = -V_T \cdot \ln \left[ \frac{1 - \frac{i_{C2}}{i_B} \cdot \frac{1}{\beta_{F(T1)}}}{1 - \frac{1}{\beta_{0R(T1)}} \cdot \frac{\beta_{0F(T1)}}{\beta_{0F(T1)}} \cdot \left(1 + \frac{i_{C2}}{i_B}\right)} \right] + r_{C(T1)} \cdot i_{C2} - R2 \cdot i_{C2} \end{cases} \quad (54)$$

gdzie odpowiednie prądy i napięcia są współrzędnymi punktów pomiarowych A24( $u_{CE1}$ ,  $i_{C1}$ ,  $i_B$ ) oraz A25( $u_{CE2}$ ,  $i_{C2}$ ,  $i_B$ ).

- (49) 18. Wyznaczenie temperaturowego współczynnika zmian rezystancji szeregowej kolektora  $TWR_{C(T1)}$  tranzystora T1

$$(50) \quad TWR_{C(T1)} = \frac{\frac{1}{i_C} \cdot \left( u_{CE} + h \cdot T_{a2} \cdot \ln \left[ \frac{1 - i_C/i_B}{\beta_{F(T1)}(T_{a2}) - \beta_{0F(T1)} \cdot \beta_{0R(T1)}^{-1} \cdot (1 + i_C/i_B)} \right] + R2 \cdot (1 + TWR_{(R1)} \cdot \Delta T) \cdot i_C \right) - r_{C(T1)}}{r_{C(T1)} \cdot \Delta T} \quad (55)$$

- (51) odpowiednie prądy i napięcia są współrzędnymi punktu pomiarowego B24( $u_{CE}$ ,  $i_C$ ,  $i_B$ ).

- (52) 19. Wyznaczenie wartości rezystancji szeregowej kolektora  $r_{C(T2)}$  tranzystora wyjściowego

$$r_{C(T2)} = \frac{u_{CE2} - u_{CE1}}{i_{C2} - i_{C1}} \quad (56)$$

$i_{C1}$ ),  $i = 3, 4$

- (53) gdzie odpowiednie prądy i napięcia są współrzędnymi punktów pomiarowych A26( $u_{CE1}$ ,  $i_{C1}$ ,  $i_B$ ) oraz A27( $u_{CE2}$ ,  $i_{C2}$ ,  $i_B$ ).

a prądowego  
odpowiadają-  
ych wzorami

20. Wyznaczenie temperaturowego współczynnika zmian rezystancji szeregowej kolektora  $TWR_{C(T1)}$  tranzystora T1

współczynnika  
wego  $\beta_{0R(T1)}$   
nieliniowych

$$TWR_{C(T2)} = \frac{\frac{u_{CE2} - u_{CE1}}{i_{C2} - i_{C1}} - r_{C(T2)}}{r_{C(T2)} \cdot \Delta T} \quad (57)$$

odpowiednie prądy i napięcia są współrzędnymi punktów pomiarowych B26( $u_{CE1}$ ,  $i_{C1}$ ,  $i_B$ ) oraz B27( $u_{CE2}$ ,  $i_{C2}$ ,  $i_B$ ).

21. Wyznaczenie wartości parametru opisującego prąd nasycenia  $I_{0(D)}$  oraz rezystancji szeregowej  $r_{S(D)}$  diody antyrównoległej

$$(54) \quad r_{S(D)} = \frac{u_{CE1} - u_{CE2} + h \cdot T_{a1} \cdot \ln(i_{C1}/i_{C2})}{i_{C1} - i_{C2}} \quad (58)$$

$i_{C2}$

$$I_{0(D)} = -i_{C1} \cdot \exp \left( \frac{u_{go} - u_{CE1} + r_{S(D)} \cdot i_{C1}}{h \cdot T_{a1}} \right) \quad (59)$$

miarowych

gdzie odpowiednie prądy i napięcia są współrzędnymi punktów pomiarowych A22( $u_{CE1}$ ,  $i_{C1}$ ) oraz A23( $u_{CE2}$ ,  $i_{C2}$ ).

22. Wyznaczenie temperaturowego współczynnika zmian rezystancji szeregowej diody antyrównoległej  $TWR_{S(D)}$

$$TWR_{S(D)} = \frac{u_{CE1} - u_{CE2} + h \cdot T_{a2} \cdot \ln(i_{C1}/i_{C2}) - r_{S(D)} \cdot (i_{C1} - i_{C2})}{r_{S(D)} \cdot \Delta T \cdot (i_{C1} - i_{C2})} \quad (60)$$

gdzie odpowiednie prądy i napięcia są współrzędnymi punktów pomiarowych B22( $u_{CE1}$ ,  $i_{C1}$ ) oraz B23( $u_{CE2}$ ,  $i_{C2}$ ).

J. ZARĘBSKI, K. GÓRECKI

PARAMETER VALUES ESTIMATION ALGORITHM  
OF THE D.C. ELECTROTHERMAL MACROMODEL  
OF THE DARLINGTON POWER TRANSISTOR

S u m m a r y

In the paper an original algorithm IDEN for the estimation of all electrical parameters of the d.c. electrothermal Darlington transistor macromodel is proposed. In this algorithm, conception of the local parameter values estimation is used, it means that the values of parameters are calculated on the basis of the coordinates of selected points, lying on the proper parts of the isothermal d.c. characteristics of the investigated transistor. These parts of characteristics can be described by the local models and searched parameters. In the paper, the idea and realisation of IDEN are presented. The influence of accuracy of the selected parameter values calculation on the shape of the Darlington transistor d.c. characteristics is examined and the practical usefulness of the elaborated algorithm is shown by comparing the nonisothermal d.c. characteristics of the selected types of the Darlington transistors, obtained after measurements and calculations with the use of the parameter values obtained from IDEN.

*Key words:* Darlington power transistor, parameter values estimation, modelling of electronic devices

conc  
cons  
mirr  
exte  
of c  
teste  
simu  
high  
usin

Key

Cellu  
processor  
signal/im  
space-inv  
makes th  
attractive  
its param  
This is w  
mable bu



## Cellular Neural Network Implementation Based on Continuously Programmable Gain CMOS Current Amplifier

TOMASZ KACPRZAK, JACEK KOWALSKI

*Technical University of Łódź  
Institute of Electronics*

*Otrzymano 2000.01.25*

*Autoryzowano 2000.05.25*

ers of the d.c.  
n of the local  
he basis of the  
he investigated  
ameters. In the  
cted parameter  
d the practical  
teristics of the  
the use of the

devices

A new architecture of current-mode Cellular Neural Network (CNN) based on application of novel concept of CMOS current amplifier with continuously programmable gain is presented. The amplifier constitutes a main block of the cell and is composed of NMOS and PMOS current mirrors of which mirrored factors depend on the size of input and output transistors and are controlled by means of one external voltage while the output current depends linearly on the input current. In the paper an example of current amplifier implemented in CMOS MIETEC 2.4  $\mu\text{m}$  n-well technology was manufactured and tested. The new CNN architecture designated for optimization task using time-varying cells was simulated using SPICE software. The proposed approach enables designing and building powerful high speed programmable analog Cellular Neural Networks for real-time signal and image processing using standard CMOS technologies.

*Key words:* cellular neural networks, CMOS circuits, current amplifier, VLSI

### 1. INTRODUCTION

Cellular Neural Networks (CNNs) is a paradigm of regular array of nonlinear analog processors, which was formulated 10 years ago [1] and developed next in many signal/image processing applications [2]. The two-dimensional version of the CNN with space-invariant connections between the cells can be realized in VLSI technology which makes this idea attractive in advanced real-time parallel processing systems. The attractiveness of this approach increases significantly when the system enables to change its parameters providing in this way more flexibility in execution of processing task. This is why development of a new VLSI electronic discrete or continuously programmable building blocks suitable for application in CNN systems is a very important

challenge for the circuitry designers. So far there are several proposals concerning this issue [3–15], however no one has been accepted as a standard approach and much work has to be done to optimize the design procedure in view of given task that the CNN is expected to perform. From among many new circuitry approaches suitable for VLSI implementation a so called current-mode technique seems to be very attractive regarding such objectives like low silicon area and power consumption as well as fast transient response [16]. The fundamental block for this technique is based on MOSFET current mirror, for which analysis many papers have been devoted [17–21]. In this paper we develop new Cellular Neural Network architecture based on application of a novel concept of CMOS current amplifier with continuously voltage-controlled gain [22]. For a given value of the programming voltage the gain factor of the circuit is constant for wide range of currents and depends only on the size of input and output transistors. The transfer current-to-current static characteristic is highly linear and does not depend on process parameters. This enables easy application in low power supply systems.

This paper is organized as follows. A short basic analysis of CNN architecture in current-mode concept is presented in Section 2. In Section 3 we provide a detailed analysis of a novel continuously programmable MOSFET current mirror and current amplifier and we show selected results of measurements of VLSI current amplifier circuit realized using CMOS 2.4  $\mu\text{m}$  MIETEC technology. In Section 4 we analyse the results of computer simulation of a simple time-varying Cellular Neural Network designed using the proposed continuously programmable CMOS current amplifier. In conclusion some recommendations for future work are described.

## 2. CNN CELL MODE IN CURRENT-MODE VERSION

The derivation of current-mode version of CNNs starts from the observation that according to classical theory given in [1] the dynamics of the cell  $c(i, j)$  equivalent circuit (see Fig. 1) is expressed by the following nonlinear differential equation:

$$C \frac{dV_{xij}}{dt} = -\frac{V_{xij}}{R_x} + \sum_{c(k, l) \in Nr(i, j)} A(i, j; k, l) V_{xij} + \sum_{c(k, l) \in Nr(i, j)} B(i, j; k, l) V_{ukl} + I \quad (1)$$

where the state signal  $V_{xij}$  is the voltage existing at the cell lossy capacitor and the input signal  $V_{ukl}$  and the output signal  $V_{ykl}$  are also voltages of respective elements. The CNN can be implemented in VLSI technology using voltage-based circuits like for example transconductance amplifiers [3,5,8,15]. On the other hand, by means of a simple mathematical manipulation, the equation (1) can be expressed in terms of the current  $i_{xij}$  flowing through the resistor  $R_x$  of the lossy capacitor:

$$CR_x \frac{di_{xij}}{dt} = -i_{xij} + \sum_{c(k, l) \in Nr(i, j)} A(i, j; k, l) i_{xij} + \sum_{c(k, l) \in Nr(i, j)} B(i, j; k, l) V_{ukl} + I \quad (2)$$



where the c

and the  $I_Q$   
saturation I  
cell circuit.  
denote:  $c(k$   
 $c(i, j)$ ,  $A_1(i$   
by the valu  
a resistance  
represents n  
n-th cell of



concerning this  
and much work  
at the CNN is  
able for VLSI  
ative regarding  
fast transient  
SFET current  
this paper we  
n of a novel  
gain [22]. For  
s constant for  
ansistors. The  
ot depend on  
ystems.

architecture in  
de a detailed  
and current  
ent amplifier  
e analyse the  
ral Network  
amplifier. In

ervation that  
) equivalent  
ation:

$$V_{ukl} + I \quad (1)$$

and the input  
s. The CNN  
for example  
of a simple  
e current  $i_{xij}$

$$V_{ukl} + I \quad (2)$$

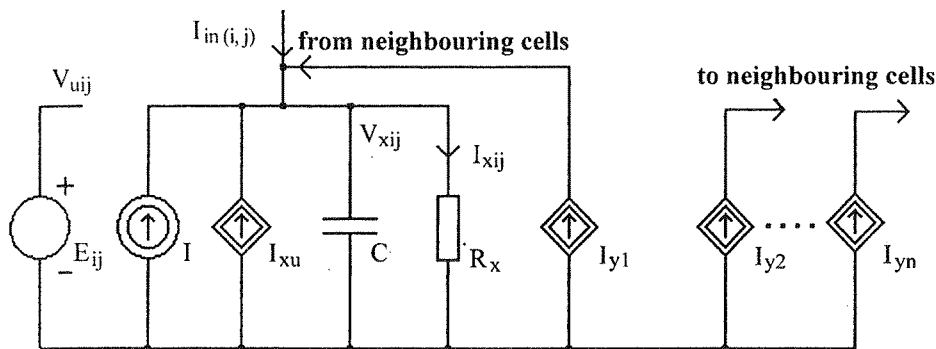


Fig. 1. CNN cell equivalent circuit

where the output  $i_{yij}$  is given by:

$$i_{yij} = \frac{1}{2} (|i_{xij} + I_Q| - |i_{xij} - I_Q|) \quad (3)$$

and the  $I_Q = V_Q/R_x$  denotes the saturation level of the current corresponding to the saturation level of voltage-to-voltage piecewise-linear output function of the classical cell circuit. Referring to the equations (1), (2) and (3), and Fig. 1 the following symbols denote:  $c(k, 1)$  is the cell in the neighbourhood  $N_r(i, j)$  of radius  $r$  of the central cell  $c(i, j)$ ,  $A_i(i, j; k, 1) = A(i, j; k, 1)R_x$  is an element of the feedback template  $A$  multiplied by the value  $R_x$ ,  $B(i, j; k, 1)$  is an element of the feedforward template,  $I$  is a bias,  $R_x$  is a resistance and  $C$  is the capacitance of the cell equivalent circuit. The current source  $i_{yn}$  represents  $n$ -th output signal multiplied by the template  $A_i$  and connected to the  $n$ -th cell of the neighbourhood, the current source  $I_{xu}$  encompasses the total input signal

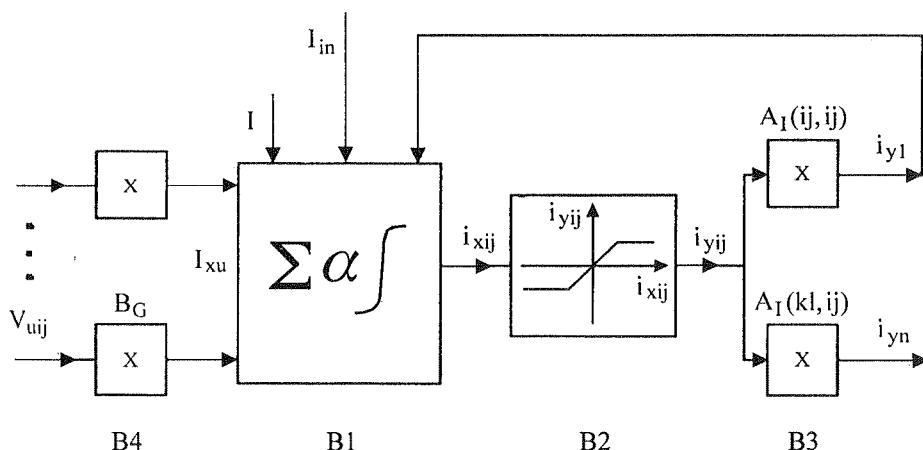


Fig. 2. Block architecture of the CNN cell

of the template B to the cell  $c(i, j)$  while the current  $I_{in(i, j)}$  represents total inputs of template  $A_i$  to the cell  $c(i, j)$ . The respective block architecture of the cell circuit is shown in Fig. 2. Here blocks B4 realize template B by which the input signals of the neighbouring cells are multiplied and connected to the input node of summer-integrator block B1. The other input signals of the block B1 are the feedback signals originating from the output of neighbouring cells and the bias signal I. The output  $i_{xij}$  (state" signal) of this block is connected to the input of the piecewise linear block B2 of which the output  $i_{xij}$  is multiplied by the template  $A_i$  in the blocks B3 and connected to the inputs of neighbouring cells. Blocks B4 can be realized using transconductance amplifiers while blocks B1, B2 and B3 — using current mirrent mirrors and current amplifiers.

### 3. CONTINUOUSLY ADJUSTABLE GAIN CMOS CURRENT AMPLIFIER

Fundamental block of any current-mode circuit is a current mirror. Therefore, we start the analysis from a continuously adjustable gain current mirror assuming that all MOSFET devices operate in saturation region of their I-V characteristics and that the channel length modulation of each device can be ignored (i.e. the SPICE MOSFET model Level 1 with zero Lambda parameter is assumed). Consider simple MOSFET current mirror circuit shown in Fig. 3 whose gate electrodes of the reference transistor M1 and the output transistor M2 are biased by the voltage source  $V_R$  through the resistor divider composed of resistors  $R_1$  and  $R_2$ . Introducing the following voltage division factor  $\alpha = R_2/(R_1 + R_2)$ , the gate-to-source voltage of the transistor M2 is then given by:

$$V_{GS2} = \alpha V_{GS1} + (1 - \alpha) V_R \quad (4)$$

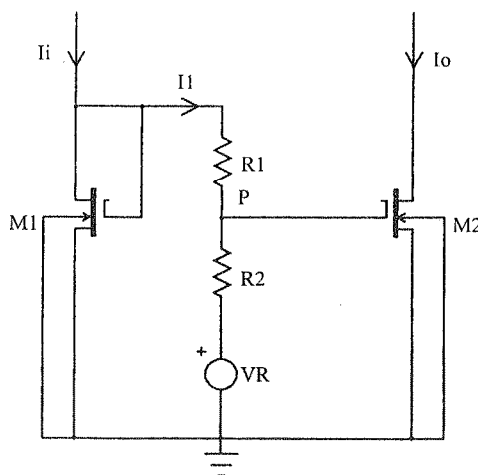


Fig. 3. MOSFET current mirror with voltage divider

al inputs of  
all circuit is  
signals of the  
f summer-  
ack signals  
e output  $i_{xij}$   
r block B2  
connected  
conductance  
and current

When assuming that the current flowing through the resistors  $I_1$  is much smaller then the input current  $I_i$  ( $I_1 \ll I_i$ ), the gate-to-source voltage  $V_{GS1}$  of the device M1 can be expressed by:

$$V_{GS1} = V_T + \sqrt{\frac{2I_i}{\beta_1}} \quad (5)$$

In equation (5) the voltage  $V_T$  represents the threshold voltage of NMOS,  $\beta_1$  is the MOSFET model parameter given by  $\beta_1 = \mu C_{ox}(W_1/L_1)$ , where  $\mu$  is an effective surface carrier mobility in the channel,  $C_{ox}$  is the gate capacitance per unit area,  $W_1$  and  $L_1$  are the channel width and the channel length, respectively.

If the value of the voltage source  $V_R$  is equal to the MOSFET threshold voltage  $V_T$ , then substituting (5) into (4) one can obtain the following expression for the gate-to-source voltage of the device M2:

$$V_{GS2} = V_T + \alpha \sqrt{\frac{2I_i}{\beta_1}} \quad (6)$$

Now, substituting (6) into the equation for the drain current of the output transistor M2:  $I_{D2} = 0.5\beta_2 (V_{GS2} - V_T)^2$ , it is easy to show, that the output current of the circuit  $I_0 = I_{D2}$  is a linear function of the input current  $I_i$ :

$$I_0 = \alpha^2 \frac{\beta_2}{\beta_1} L_1 = \left( \alpha^2 \frac{L_1 W_2}{L_2 W_1} \right) I_i \quad (7)$$

- (4) The current gain of this circuit depends on the channel width to length ratios of the devices M1 and M2, and on the division factor  $\alpha$ . The value of the division factor varies when one or both resistors vary. The VLSI realization of this circuit is shown in Fig. 4. The resistors  $R_1$  and  $R_2$  are substituted by two MOSFETs M5 and M4 operating in nonsaturated regions while the voltage source  $V_R$  is substituted by the device M3 operating with its electrodes gate and drain short circuited (a so called „diode connection” circuit). The effective resistance of M4 and therefore the value of the factor  $\alpha$  is controlled by its gate voltage  $V_G$ . If due to the channel length modulation of devices M1 and M2 the output resistance of the current mirror is not large enough making the circuit not accepted in analog applications then a cascoded configuration as shown in Fig. 5 can be used. Transistors M6, M7 together with M1 and M2 make the output resistance of the current mirror very high, while the transistor M8 improves the circuit linearity and bandwidth. Transistor M8 operates in a common drain configuration (voltage follower) and its source potential is almost equal to the gate potential of M6. The current  $I_i$  of the potentiometer is not a part of the input current  $I_i$  therefore its value can be relatively large in comparison to the former case (Fig. 3 and Fig. 4) and the channel lengths of the transistors M4 and M5 do not have to be very large. This results in saving silicon area. Also, due to smaller resistance, the frequency bandwidth of this current mirror increases.

IFIER

erefore, we  
ing that all  
nd that the  
MOSFET  
MOSFET  
e transistor  
the resistor  
ge division  
n given by:



titude with measurements of devices with channel lengths down to 0.25  $\mu\text{m}$ . This enables an analytical treatment of circuit operations, which helps to understand its behavior. Using notation applied in [23], the formula for the drain current of MOSFET operating in saturation region is given by:  $I_D = (W/L)B(V_{GS} - V_T)^n$ , where  $B$ ,  $n$ , and  $V_T$  are model parameters extracted from measurements. For a long channel devices these parameters take values:  $B = 0.5 (L/W) \beta$  and  $n = 2$  where  $\beta$  is a well-known factor of quadratic model (e.g. SPICE Model Level 1). On the other side, for short-channel devices the parameter  $n$  takes value equal to 1 which results in linear dependency of the drain on the gate-to-source voltage. This behavior is expected since for very short channels the drift velocity in the channel is not dependent on the longitudinal channel field. Using this model of MOSFET to the devices included in the circuit schematic of current mirror shown in Fig. 3, one can easily derive the following formula for the output current as a function of the input current:

$$I_0 = \left( \alpha^n \frac{L_1 W_2}{L_2 W_1} \right) I_i \quad (8)$$

which is similar to the formula (7) except that the exponent of  $\alpha$  is equal to  $n$  instead of 2. Therefore this analysis shows that the proposed MOSFET current mirror with voltage controlled mirror coefficient is a linear circuit, no matter what kind of transistor models are used.

The programmable current mirror as described above can process input signals of one polarity only (e.g. positive), which does not satisfy requirements for application in CNNs since in these networks both negative and positive signals are processed. The two opposite polarities of the current can be processed in a programmable current amplifier of which a simple version is shown in Fig. 6a. The circuit consists of two programmable current mirrors: (PCM) realized with NMOS devices (lower block) and PMOS devices (upper block) connected in cascade mode. Each block acts as a driver or as a load dependently on the current direction, namely: in the first quadrant of the current-to-current characteristics the NMOS mirror acts as a driver while the PMOS one — as a load, and in the third quadrant the role of each circuit reverses. However, such a configuration possesses two drawbacks. Firstly it requires two programming voltages  $V_{cp}$  and  $V_{cn}$  for adjusting PMOS and NMOS blocks separately and secondly, a mismatching in the parameter values of these transistors prevents to design a perfectly symmetrical output characteristics. To overcome these difficulties a new configuration as shown in Fig. 6b is proposed. In this configuration we have two identical programmable NMOS current mirrors controlled simultaneously by one common external voltage  $V_c$ , and two identical constant PMOS current mirrors acting as a loads. The current mirror PCM1 plays the role of the driver controlled by voltage  $V_c$  while the rest three blocks as a whole act as a PMOS load controlled by the same voltage  $V_c$ . The current mirror CM1 of constant gain provides the output current which is a reference current (input current) for the programmable current mirror PCM2. Next, the output

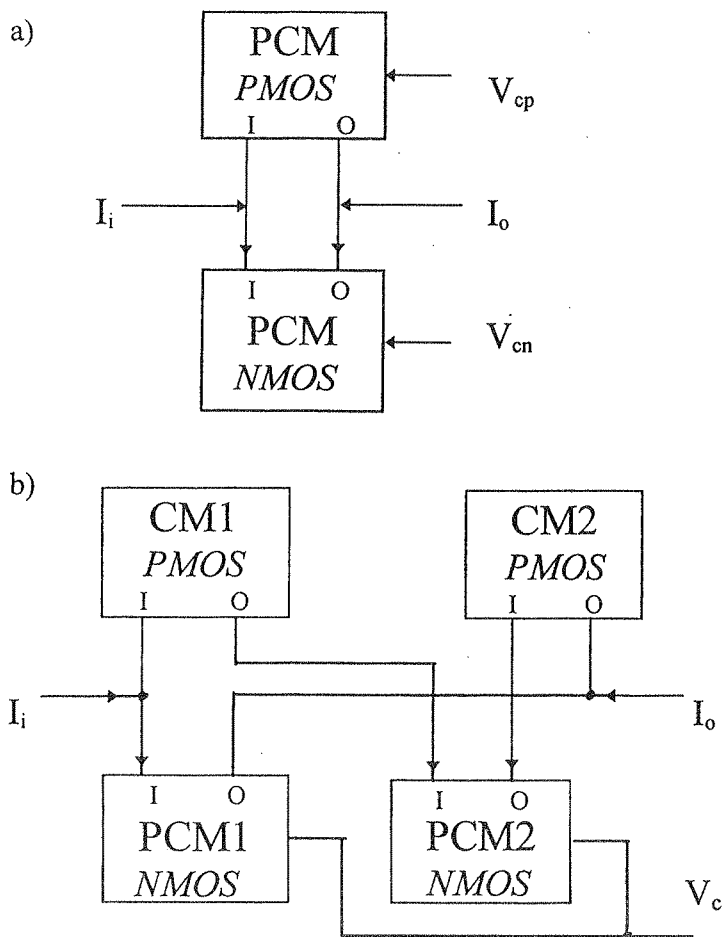


Fig. 6. a) A simple architecture of programmable CMOS current amplifier, b) an improved version of programmable CMOS current amplifier

current of PCM2 is mirrored in CM2 with the same gain as in CM1 and the result is summed in the output node of the driver PCM1. In this way the current of the load is fitted to the current of the driver making the input-to-output characteristics symmetrical in the first and third quadrant. The resulting circuit schematic of the CMOS current amplifier with continuously programmable gain is shown in Fig. 7. The amplifier was manufactured using MIETEC 2.4  $\mu\text{m}$  n-well CMOS technology of which essential parameters are: NMOS— $K_{p_{\min}} = 40 \mu\text{A}/\text{V}^2$ , PMOS— $K_{p_{\min}} = 11 \mu\text{A}/\text{V}^2$ ,  $V_{T_{\min}} = 0.6 \text{ V}$ ,  $V_{T_{\max}} = 1.2 \text{ V}$ . Layout of this circuit is shown in Fig. 8. Transistors M2 and M7 were designed using parallel 5 identical devices in order to get a maximum value of the current gain  $K_{i_{\max}} = 5$ . Silicon area of the circuit is about  $74900 \mu\text{m}^2$ . Computer PSPICE simulation for various controlling voltages  $V_c$  is presented in Fig 9. The dc





characteristics of this amplifier measured using the set-up shown in Fig. 10 are given in Fig. 11.

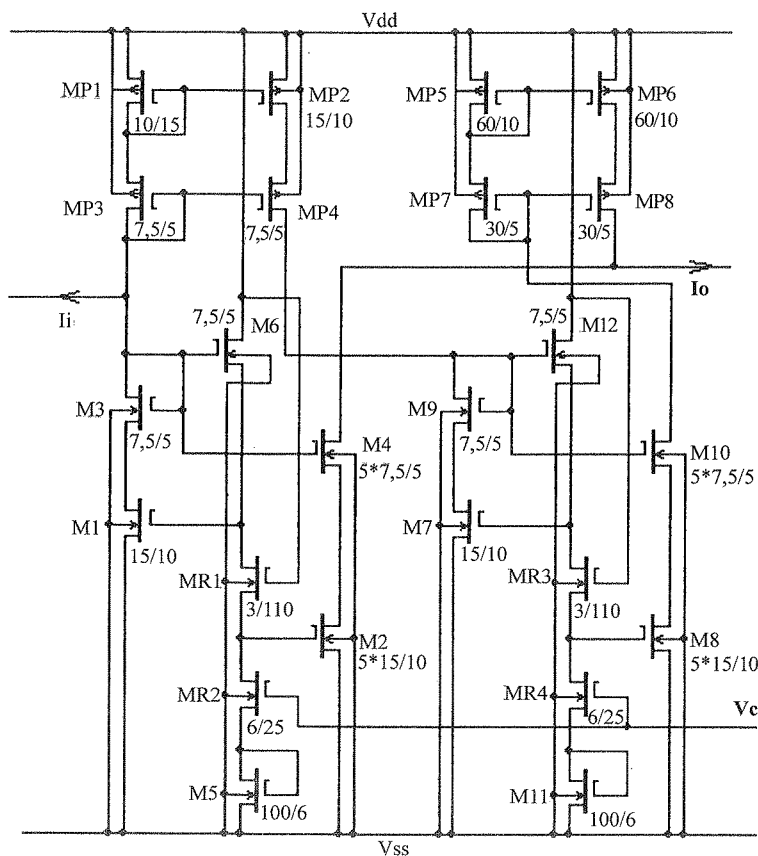


Fig. 7. Circuit schematic of continuously programmable gain CMOS current amplifier

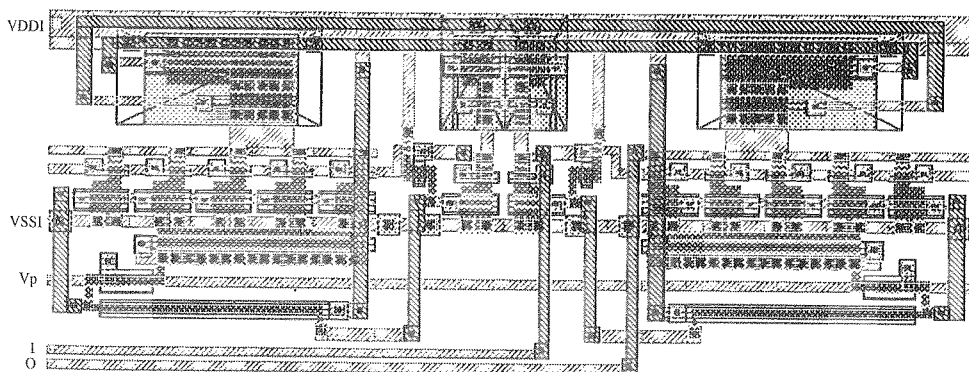


Fig. 8. Designed layout of the current amplifier with continuously programmable gain

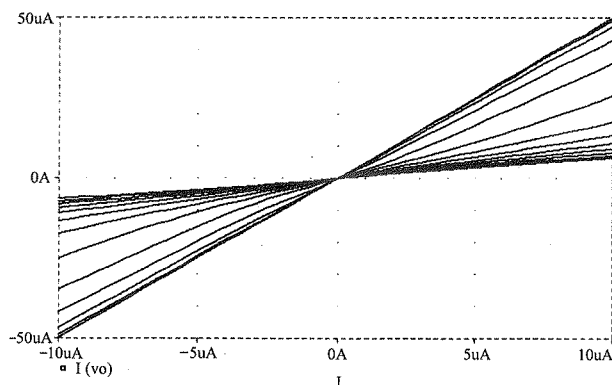


Fig. 9. SPICE computer simulation of the current amplifier of Fig. 7

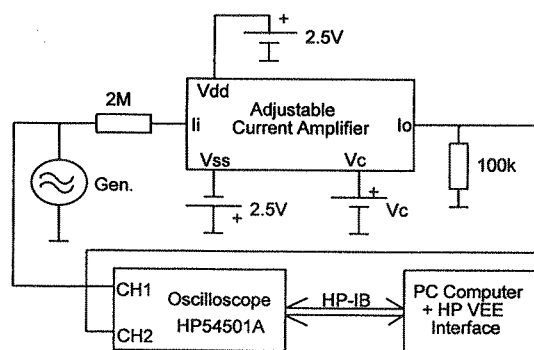
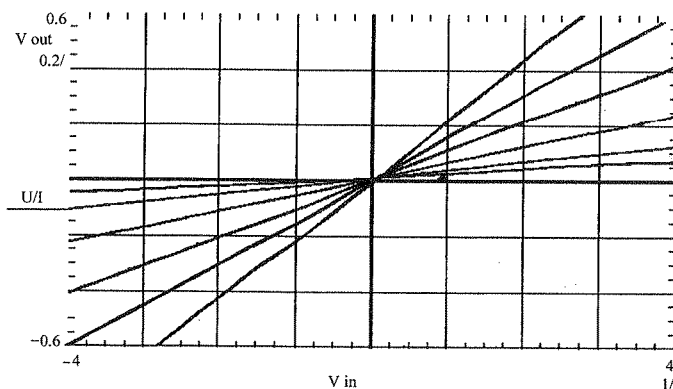


Fig. 10. Test set-up of the VLSI MOSFET current amplifier

Fig. 11. Measured characteristics  $I_o(I_i)$  of the MOSFET current amplifier under test

The  
been ap  
perform  
main id  
was pro  
circuit c  
minimum  
of the c  
architec  
Each ce  
current  
with un  
which re  
and all r  
current  
sources  
circuits  
simulati  
first one  
signal (-  
time-po  
in start  
time-per  
gain of  
unannea  
 $\mu A$ ,  $-1$   
and last  
slowly c  
 $\mu sec$ . D  
amplifie  
highest  
observe  
point w  
energy f  
see this,  
following  
 $E = -0$   
signals,  
 $A_1 = -0$   
 $-(u_1^2 + u$

#### 4. TWO CELL CNN COMPUTER EXPERIMENT

The continuously adjustable gain MOSFET current amplifier as described above has been applied in a computer SPICE simulation of CMOS Cellular Neural Network, performing optimization task using a so called „hardware annealing” concept [26]. The main idea of this concept is based on application of CNN with time-varying cell gain. It was proved and confirmed by many computer simulations [26–29] that such a CNN circuit can perform different tasks (e.g. image processing) while searching of a global minimum of energy function of the CNN. The experiment described here is a repetition of the computer simulation of the problem of two cells CNN described in [29]. The architecture of the network, drawn using Intusoft SpiceNet tool [24] is given in Fig.12. Each cell consists of the following blocks: PWP is a continuously programmable gain current amplifier with the controlling voltage  $V_c$ , PWL is a piecewise linear function with unity gain in the vicinity of the input signal, and SW is synaps weight function which realizes the values of feedback template A, namely: self-feedback of value  $A_0 = 2$  and all neighbour-feedback of value  $A_1 = -0.25$ . Initial conditions are introduced using current sources II1 and II2, while input voltages  $V_{u1}$  and  $V_{u2}$  throught the current sources IB1 and IB2 (the all entries of B template is equal to 1 and bias  $I = 0$ ). The circuits of the blocks PWL and SW are presented in Figures 13 and 14. The results of simulation are presented in Fig.15. The simulation is divided into three parts. During the first one which spans time-period from 0 to 10  $\mu\text{sec}$  the initial conditions of the state signal ( $-0.8 \text{ A}$ ,  $-0.9 \text{ A}$ ) and the input signals ( $-0.5 \mu\text{A}$ ,  $0.2 \mu\text{A}$ ) are set up. At the time-point 10  $\mu\text{sec}$  transistor-switches MP, MN and M2, M3 are switched-off resulting in start up of the network time-evolution. During the second part which spans time-period from 10  $\mu\text{sec}$  to 15  $\mu\text{sec}$  the programming voltage VC maintains the current gain of the current amplifier PWP at the highest level enabling in this way the unannealed processig. This stage ends quickly resulting in the stable output signals ( $-1 \mu\text{A}$ ,  $-1 \mu\text{A}$ ). The third part spans time-period starting from the time-point of 15  $\mu\text{sec}$  and lasting up to the end of the processing phase. The programming voltage VC is slowly decreasing time function starting from +5 volts and ending to 0V at the point 40  $\mu\text{sec}$ . During this period — called here annealing processing — the gain of the current amplifier PWP is an increasing function of time starting from almost zero level to the highest possible level which is equal to 1 at the end of the simulation. One has to observe that when the annealing phase is completed the CNN stays in another stable point where the output signals have new values ( $+1 \mu\text{A}$ ,  $-1 \mu\text{A}$ ). In this point the energy function of the two-cells CNN is of lower value than in the unannealed case. To see this, one has to observe that the energy function in our case can be expressed by the following formula:

$$E = -0.5[(A_0 - 1/R_x)(y_1^2 + y_2^2) + A_1(y_1^2 + y_1 y_2) - (u_1^2 + u_2^2)],$$
 where  $y_1$  and  $y_2$  are output signals,  $u_1$  and  $u_2$  are constant input signals. Substituting values for  $A_0 = 2$  and  $A_1 = -0.25$  we obtain:  $E = P + 0.125 (y_1^2 + y_1 y_2)$ , where  $P = -0.5(2 - 1/R_x)(y_1^2 + y_2^2) - (u_1^2 + u_2^2)$  takes constant value for any stable binary equilibrium point. Therefore, since

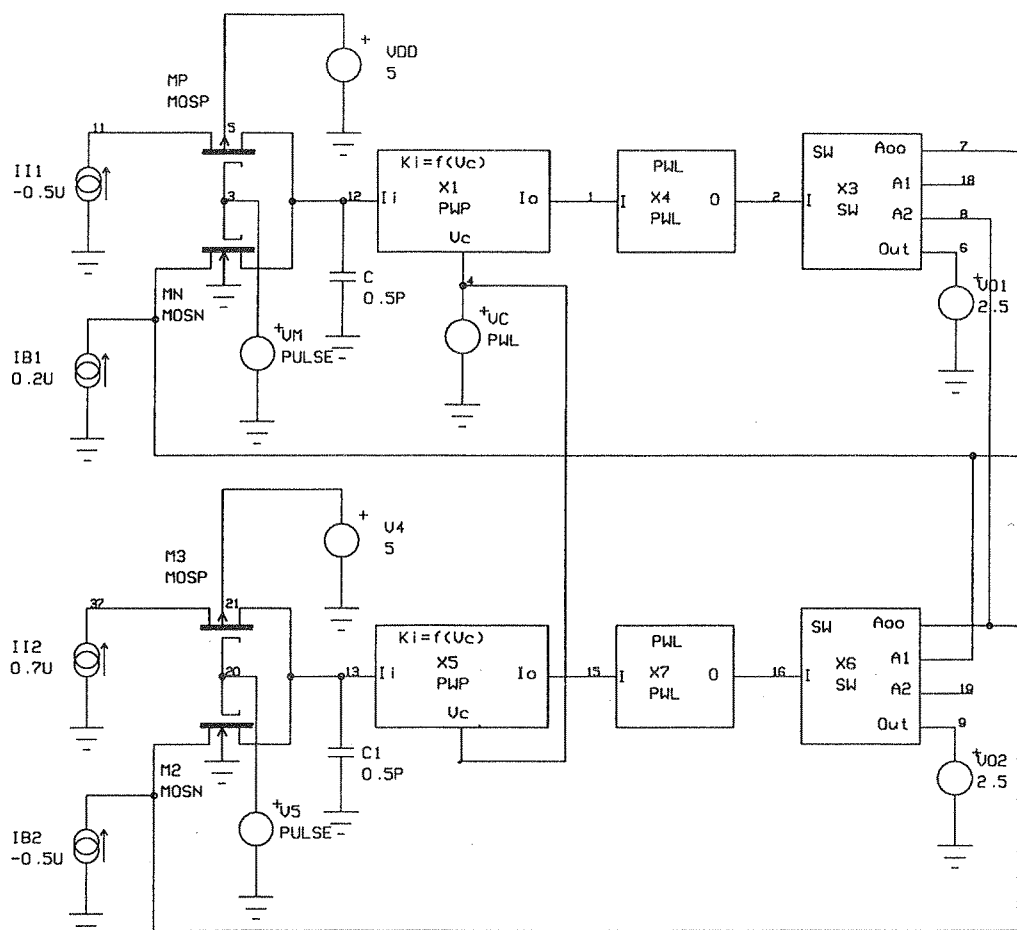


Fig. 12. Architecture of two cells CNN for computer simulation (SPICE)

after annealing the product of output signals  $y_1 y_2$  is negative, the respective energy function for annealing case  $E_{\text{anneal}}$  is smaller then in the unannealed one  $E_{\text{unanneal}}$ . In this way the VLSI CNN implemented based on the CMOS current amplifier with continuously programmable gain as proposed in this paper can realize, amongst other, a specific cases of global optimization tasks.

The silicon areas of each block of the cell as well as the current and power consumption are presented in the Table 1. From the an analysis of the data one can conclude that using the CMOS technology  $2.4 \mu\text{m}$  it is possible to realise the CNN circuit consisting of almost 7 cells per  $1 \text{ mm}^2$ . The size of the circuit can increase when using updated technology, and for example for CMOS  $0.8 \mu\text{m}$  technology the number of cells per  $1 \text{ mm}^2$  increases to 15. Also, the power dissipated per one cell does not exceed  $200 \mu\text{W}$ , which results in  $0.00143 \text{ W/mm}^2$  density of power dissipated in the chip. This makes hardware realisation acceptable.

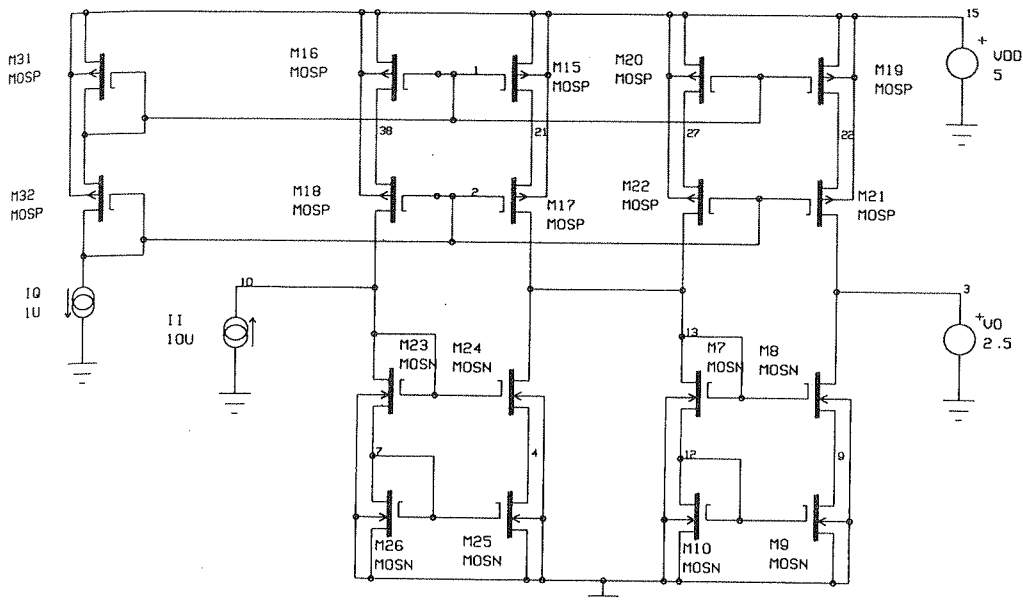
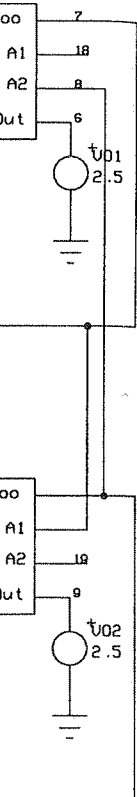


Fig. 13. Circuit schematic of piecewise linear block

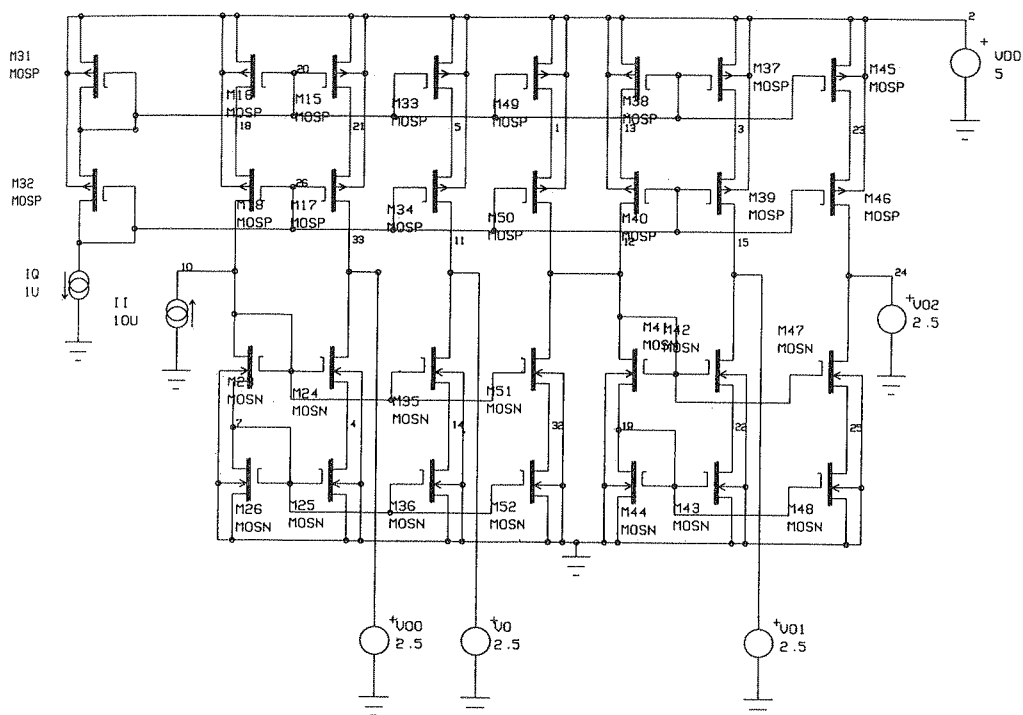


Fig. 14. Circuit schematic of synapse-weight function

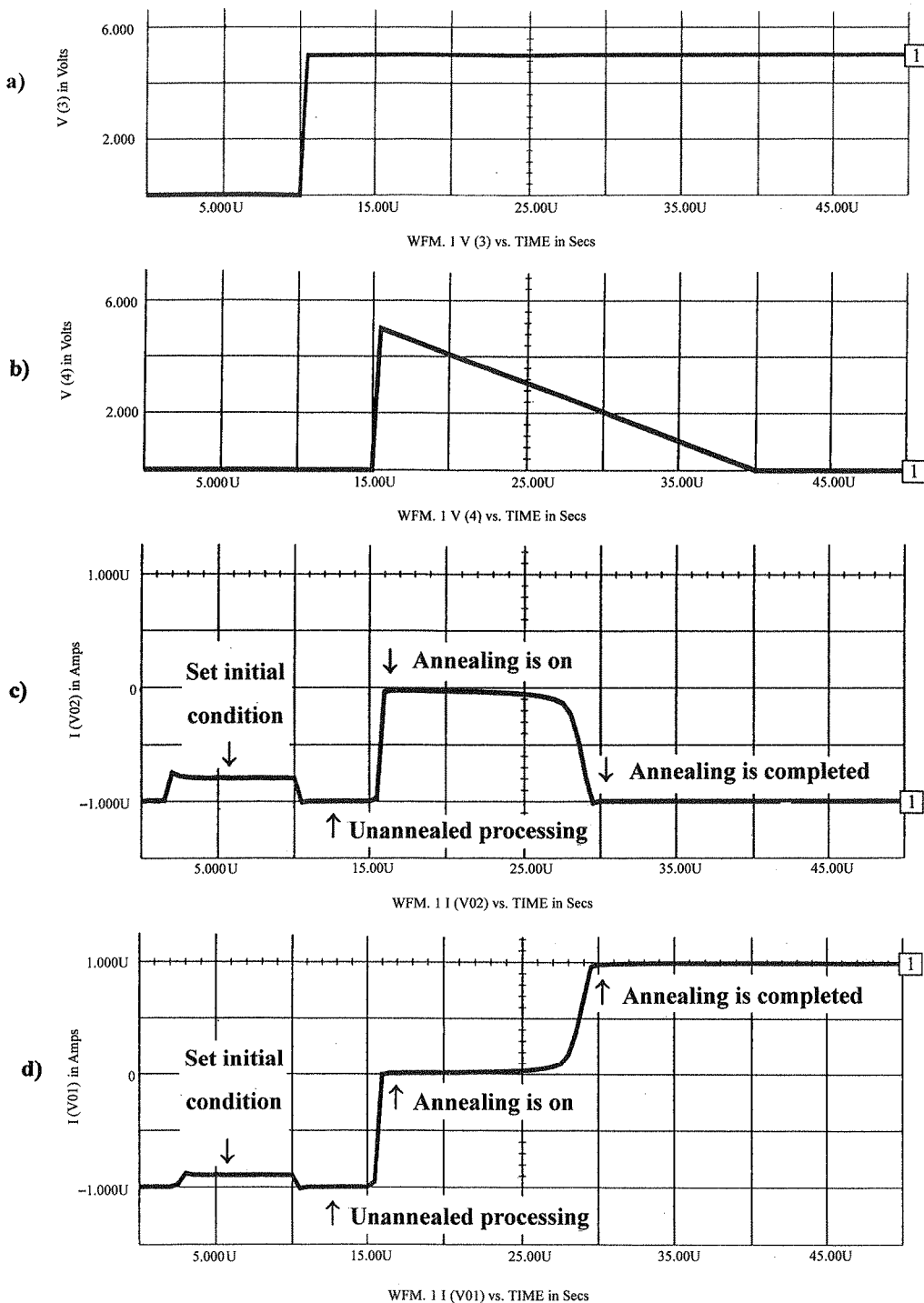


Fig. 15. SPICE simulation results of two cells CNN experiment shown in Fig.12; a) controlling signal VM, b) controlling signal VC, c) the output signal of the cell 2, d) the output signal of the cell 1.

We de  
Networks  
controlled  
current-mo  
extending  
easily des  
optimize a

1. L.O. C. I. and Syst
2. B.J. Sh
3. J.M. C r Systems,
4. J.L. Hu Neural N Munich,
5. T. Ka c tation in Applicati
6. H. Ha r Networks
7. A. Ro c Sanch rete-Time Processing
8. D.F.G. B Program Signal Pr
9. I.A. Ba Circuits a
10. A. Pa a Curent M Applicati

Table 1.

Power consumption and layout area

| Block       | Supply current<br>[ $\mu\text{A}$ ] | Supply power<br>[ $\mu\text{W}$ ] | Silicon area<br>[ $\mu\text{m}^2$ ] |
|-------------|-------------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| PWP         | 21                                  | 105                               | 74 900                              |
| PWL         | 5                                   | 25                                | 14 300                              |
| SW          | 12                                  | 60                                | 50 900                              |
| Single cell | 38                                  | 190                               | 140 100                             |

## 5. CONCLUSION

We demonstrated feasibility of the realisation of programmable Cellular Neural Networks based on CMOS current amplifier with continuously programmable gain controlled by separate voltage signal. This concept enables to process CNN signals in current-mode fashion which results in less power and silicon area consumption while extending the performance and flexibility of the system. The proposed circuitry can be easily designed, however to gain all positive aspects, a further work must be done to optimize and verify the prototype systems of large cell arrays.

## REFERENCES

1. L.O. Chua, L. Yang: *Cellular Neural Networks: Theory and Applications*. IEEE Trans. Circuits and Systems, CAS-35, October 1988, pp. 1257–1290.
2. B.J. Sheu, J. Choi: *Neural Information Processing and VLSI*. Kluwer Academic Publishers, London 1995.
3. J.M. Cruz, L.O. Chua: *A CNN Chip for Connected Component Detection*. IEEE Trans. Circuits and Systems, CAS-38, July 1991, pp. 812–817.
4. J.L. Huertas, A. Rodriguez-Vasquez, S. Espejo: *Analog VLSI Implementation of Cellular Neural Networks*. Second Int. Workshop on Cellular Neural Networks and their Applications CNNA'92, Munich, Germany, October 14–16, 1992, pp. 141–150.
5. T. Kacprzak, K. Ślot: *Multiple-Input OTA-Based Circuit for Cellular Neural Network Implementation in VLSI CMOS Technology*. Second Int. Workshop on Cellular Neural Networks and their Applications CNNA'92, Munich, Germany, October 14–16, 1992, pp. 157–162.
6. H. Harrer, J.A. Nosek, R. Stelzt: *An Analog Implementation of Discrete-Time Cellular Neural Networks*. IEEE Trans. on Neural Networks, vol. 3, 1992, pp. 446–477.
7. A. Rodriguez-Vasquez, S. Espejo, R. Domínguez-Castro, J.L. Huertas, E. Sánchez-Sinencio: *Current-Mode Techniques for the Implementation of Continuous and Discrete-Time Cellular Neural Networks*. IEEE Trans. Circuits and Systems — II. Analog and Digital Signal Processing, vol. 40, no. 3, March 1993, pp. 132–146.
8. D.F.G. Betta, S. Graffi, M. Kovacs, G. Masetti: *CMOS Implementation of an Analogically Programmable Cellular Neural Network*. IEEE Trans. Circuits and Systems — II. Analog and Digital Signal Processing, vol. 40, no. 3, March 1993, pp. 206–215.
9. I.A. Baktir, M.A. Tan: *Analog CMOS Implementation of Cellular Neural Networks*. IEEE Trans. Circuits and Systems — II. Analog and Digital Signal Processing, vol. 40, no. 3, March 1993, pp. 200–206.
10. A. Paasio, A. Dawidziuk, K. Halonen, V. Porra: *Digitally Controllable Weights in Current Mode Cellular Neural Networks*. Third IEEE Int. Workshop on Cellular Neural Networks and their Applications (CNNA-94), Rome, Italy, December 18–21, 1994, pp. 73–78.

11. R. Dominguez-Castro, S. Espejo, A. Rodriguez-Vazquez, R. Carmona: *A CNN Universal Chip in CMOS Technology*. Third IEEE Int. Workshop on Cellular Neural Networks and their Applications (CNNA-94), Rome, Italy, December 18–21, 1994, pp. 91–96.
12. J. Kowalski, K. Ślot, T. Kacprzak: *A CMOS Current-Mode VLSI Implementation of Cellular Neural Network for and Image Objects Area Estimation*. Third IEEE Int. Workshop on Cellular Neural Networks and their Applications (CNNA-94), Rome, Italy, December 18–21, 1994, pp. 351–352.
13. P. Kinget, M.S.J. Steyaert: *A Programmable Analog Cellular Neural Network CMOS Chip for High Speed Image Processing*. IEEE Journal of Solid-State Circuits, vol. 30, no. 3, March 1995, pp. 235–243.
14. K. Ślot, J. Kowalski, J. Pacholik, P. Dębiec: *Cellular Neural Network Based VLSI Architecture for Image Processing*. 4<sup>th</sup> IEEE Int. Workshop on Cellular Neural Networks and their Applications (CNNA-96), Sevilla, Spain, June 24–26, 1996, pp. 24–26.
15. T. Kacprzak: *Multiple-Input Transconductance CMOS Amplifier for Implementation of Continuously Programmable Cellular Neural Networks*. 5<sup>th</sup> IEEE Int. Conference on Electronics, Circuits and Systems, Lisboa, Portugal, September 7–10, 1998.
16. C. Toumazou, F.J. Lidgey, D.G. Haigh: *Analog IC Design: The Current-Mode Approach*. London, Peter Peregrinus, 1990.
17. E.A.M. Klumperink, E. Seevinck: *MOS Current Gain Cells with Electronically Variable Gain and Constant Bandwidth*. IEEE Journal of Solid-State Circuits, vol. 24, no. 5, pp. 1465–1467, Oct. 1989.
18. Z. Wang: *Two CMOS Large Current-Gain Cells with Linearly Variable Gain and Constant Bandwidth*. IEEE Trans. on Circuits and Systems- I: Fundamental Theory and Applications, vol. 39, pp. 1021–1024, Dec. 1992.
19. T. Serrano, B. Linares-Barranco: *The Active-Input Regulated-Cascode Current Mirror*. IEEE Trans. on Circuits and Systems — I: Fundamental Theory and Applications, vol. 41, pp. 464–467, June 1994.
20. J. Ramirez-Angulo: *Wide Range Gain Programmable Class AB Linear Current Mirrors for Low Supply Operation*. IEEE Trans. Circuits Syst. — II: Analog and Digital Signal Processing, vol. 41, no. 9, pp. 631–634, Sept. 1994.
21. A.K. Gupta, J.W. Haslett, F.N. Trofimenkoff: *A Wide Dynamic Range Continuously Adjustable CMOS Current Mirror*. IEEE Journal of Solid-State Circuits, vol. 31, no. 8, August 1996, pp. 1208–1213.
22. J. Kowalski, T. Kacprzak: *Continuously Adjustable MOSFET Current Amplifier*. 1997 European Conference on Circuits Theory and Design, Budapest, Hungary, August 30 — September 3, 1997, pp. 196–199.
23. T. Sakurai, A.R. Newton: *A Simple MOSFET Model for Circuit Analysis*. IEEE Trans. on Electron Devices, vol. 38, no. 4, April 1991, pp. 887–893.
24. Intusoft, IsSpice3 User's Guide and Tools, 1993, p. 128.
25. C. Das: *MIETEC 2  $\mu$ m CMOS MPC, MIE/F/06, IMEC/EUROCHIP*. March 1993.
26. S.H. Bang, B.J. Sheu, T.H.-Y. Wu: *Optimal Solutions for Cellular Neural Networks by Paralleled Hardware Annealing*. IEEE Trans. on Neural Networks, vol. 7, no. 2, March 1996, pp. 440–454.
27. M. Gilli, P.P. Civalleri, T. Roska, L.O. Chua: *Global Optimization Through Time-Varying Cellular Neural Networks*. Fourth IEEE Int. Workshop on Cellular Neural Networks and their Applications, Seville, Spain, June 24–26, 1996, pp. 417–422.
28. N.N. Kamiss Al-Ani, T. Kacprzak: *Image Processing Using Time-Varying Cellular Neural Networks*. Fifth IEEE Int. Workshop on Cellular Neural Networks and their Applications, London, UK, 14–17 April, 1998, pp. 319–324.
29. E.Y. Chou, B.J. Sheu, R.C. Chang: *VLSI Design of Optimization and Image Processing Cellular Neural Networks*, IEEE Trans. Circuits and Systems — I: Fundamental Theory and Applications, vol. 44, no. 1, January 1997, pp. 19–20.

REALIZ

W a  
nowych k  
niacz pr  
współcy  
zewnętr  
przykład  
symulacji  
w czasie  
do projek  
większych  
rzeczywis

Słowa klu



Carmona;  
Neural Networks

tion of Cellular  
Cellular Neural  
51–352.

S Chip for High  
pp. 235–243.

rk Based VLSI  
works and their

n Continuously  
ts and Systems,

rent-Mode Ap-

Variable Gain  
467, Oct. 1989.

ant Bandwidth.  
pp. 1021–1024,

urrent Mirror.  
, pp. 464–467,

Mirrors for Low  
vol. 41, no. 9,

e Continuously  
August 1996,

1997 European  
er 3, 1997, pp.

ns. on Electron

l Networks by  
arch 1996, pp.

Time-Varying  
and their Ap-

ellular Neural  
, London, UK,

essing Cellular  
ations, vol. 44,

T. KACPRZAK, J. KOWALSKI

## REALIZACJA SIECI NEURONOWYCH KOMÓRKOWYCH Z WYKORZYSTANIEM WZMACNIACZY PRĄDOWYCH CMOS Z PROGRAMOWALNYM WZMOCNIENIEM

### Streszczenie

W artykule przedstawiono koncepcję obwodową i realizację w technologii CMOS VLSI sieci neuronowych komórkowych, opartą na wykorzystaniu wzmacniaczy prądowych o zmiennym wzmocnieniu. Wzmacniacz prądowy jest głównym blokiem komórki i składa się ze zwierciadeł prądowych NMOS i PMOS, których współczynniki odbicia zależą od rozmiarów tranzystorów wejściowych i wyjściowych oraz są sterowane zewnętrznym napięciem, przy uzyskaniu liniowej zależności prądowej zwierciadeł. W artykule przedstawiono przykład implementacji wzmacniacza w technologii CMOS MIETEC 2.4  $\mu\text{m}$ . Przedstawiono również wyniki symulacji komputerowej SPICE prostej sieci niestacjonarnej zastosowanej do optymalizacji globalnej w czasie rzeczywistym funkcji celu o dwóch zmiennych. Proponowane rozwiązanie może być wykorzystane do projektowania i wykonania w postaci układu scalonego sieci neuronowych komórkowych o znacznie większych rozmiarach, w szczególności do zastosowań w przetwarzaniu sygnałów i obrazów w czasie rzeczywistym.

*Słowa kluczowe:* sieci neuronowe komórkowe, układy CMOS, wzmacniacz prądowy, ULSI

Re  
circuits  
resonan  
were di  
applicat  
measur

*Key wo*

Elect  
FDNCap  
classical  
valid for  
circuits i

2. F

Let u  
Britannic

---

<sup>1</sup> Freq

<sup>2</sup> Freq

<sup>3</sup> Freq

<sup>4</sup> Freq

## Resonance phenomena in chosen II and III order circuits

LECH TOMAWSKI, MAREK MAŃKA

*Instytut Fizyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach*

*Otrzymano 1999.11.29*

*Autoryzowano 2000.05.20*

Resonance phenomena in parallel and series circuits containing RLC elements and electronic circuits realising  $FDNC^1$ ,  $FDNCap^2$ ,  $FDNR^3$  and  $FDNInd^4$  two-terminals are analysed. Four cases of the resonance phenomena in II order circuits and four cases of resonance phenomena in III order circuits were divided into two groups according to their properties and the shape of their resonant curves. The application of the circuits with the conductive resonance phenomenon in bridges for capacitance measuring with a high dissipation factor is postulated.

*Key words:* Resonance,  $FDNC$ ,  $FDNCap$ ,  $FDNR$ ,  $FDNInd$ .

### 1. INTRODUCTION

Electronic circuits realising two-terminals with negative immitances such a  $FDNC^1$ ,  $FDNCap^2$ ,  $FDNR^3$ , and  $FDNInd^4$  can be used to from other resonant circuits with classical RLC elements. However not all concepts taken from RLC resonant circuits, are valid for such a wide range of elements and it seems advisable to divide all resonant circuits into two groups according to their properties.

### 2. RESONANT PHENOMENON AND QUALITY FACTOR DEFINITIONS

Let us take the definition of the resonance phenomenon from the Encyclopaedia Britannica [1]: „Resonance, in physics, relatively large selective response of an object or

---

<sup>1</sup> Frequency Dependent Negative Conductance:  $Y(s) = s^2D$  (often denoted as  $FDNR$  also),

<sup>2</sup> Frequency Dependent Negative Capacitance:  $Y(s) = s^3F$

<sup>3</sup> Frequency Dependent Negative Resistance:  $Z(s) = s^2E$  (often denoted as  $FDNC$  also),

<sup>4</sup> Frequency Dependent Negative Inductance:  $Z(s) = s^3H$

a system that vibrates in step (or phase) with an externally applied oscillatory force". This definition is obligatory for all cases of resonant phenomena.

It is interesting to notice, that there is no reference to the passive energy flowing between resonating elements which is an essential characteristic of the resonance phenomenon.

In this paper RLC, DCG, FDCG and HELR circuits with various resonance phenomena are discussed. DCG circuit can be obtained by Bruton's transformation [2] from RLC circuit. Similarly the quality factor for DCG circuit equal  $\omega D/C$  can be derived from the formula for the RLC circuit equal  $\omega C/G$  since capacitance  $C$  transforms to supercapacitance  $D$  and conductance  $G$  transforms to capacitance  $C$ . Simultaneously, in both cases the quality factor can be viewed as a ratio of the length of one of the resonating vectors to the length of the parasitic vector — for DCG circuit it is  $\omega^2 D/\omega C$ . In FDCG and HELR circuits there are two parasitic parameters. However, let us assume for our purposes that the quality factor is the ratio of the length of one of the resonating vectors to the length of the main parasitic vector. By omitting the second parasitic parameter a certain inaccuracy appears but it makes the procedure clear and give a simple formulas for defining the quality factors.

### 3. VECTOR DIAGRAMS AND BASIC FORMULAS FOR CHOSEN RESONANT CIRCUITS

In this paper elements with parallel equivalent diagrams are used to from parallel resonant circuits whereas elements with series equivalent diagrams are applied to from series resonant circuits (first row in Tab.1). Such an approach is used in literature [3].

Vector diagrams at a given resonant frequency for the considered resonant circuits are shown in the third row of Tab.1. From comparing the two resonating vectors formulas for resonant frequency are derived. The quotient of the admittance or impedance of one of resonating vectors and the most parasitic vector gives the formula of the quality factor.

In column 3 of Tab.1 the classical LCG parallel circuit, with its well known properties is shown. In column 4 the DCG parallel resonant circuit in which conductance  $G$  resonates with negative conductance  $-\omega^2 D$  realised by FDNC circuit is presented. Since in Bruton's transformation  $D$  is formed from  $C$  and  $G$  from  $L$ , it can be assumed, that after this transformation the resonance should occur between  $D$  and  $G$  similarly as it occurred between  $C$  and  $L$  before the transformation. On the other hand resonance between  $D$  and  $G$  can be explained by the specific properties of FDNC. It is a source of real energy in which the phase shift between voltage and current is  $180^\circ$ . At resonant frequency the total real energy equals zero. Oscillation dumping depends on capacitance  $C$ , the parasitic parameter of FDNC circuit. Measurements show that the quality factors of DCG resonant circuit are between 10 and 500. Such  $Q$  values are similar to  $Q$  values obtained for LCG resonant circuits. When capacitance  $C$  becomes negative (at a corresponding high frequency) the circuit begins to oscillate.

In the I  
shown in Ta  
capacitance

The con  
resonant an

The capacit  
angular freq

For  $F > 0$ , I  
following c

It is worth r

Inequality (  
the circuit  
frequencies,  
conductive

The III  
be observed  
terminals:

The full cor  
Fig. 1 is sh  
since  $C_4 =$

In the III order circuits (FDCG and HELR) two resonance phenomena occur as shown in Tab.1. In circuit FDCG conductance  $-\omega^2 D$  can resonate with conductance  $G$  or capacitance  $-\omega^2 F$  can resonate with capacitance  $C$ .

The conductive resonance phenomenon occurs when  $-\omega_{r_g}^2 D + G = 0$  and hence the resonant angular frequency is:

$$\omega_{r_g} = \sqrt{\frac{G}{D}} \quad (1)$$

The capacitive resonance phenomenon occurs when  $-j\omega_c^3 F + j\omega C = 0$  and the resonant angular frequency in this case is:

$$\omega_{r_c} = \sqrt{\frac{C}{F}} \quad (2)$$

For  $F > 0$ ,  $D > 0$ ,  $C > 0$  and  $G > 0$  the Hurwitz criterion of circuit stability gives the following condition:

$$\frac{C}{F} > \frac{G}{D} \quad (3)$$

It is worth noticing that  $\omega_{r_c}^2 = \frac{C}{F}$  and  $\omega_{r_g}^2 = \frac{G}{D}$ . Then inequality (3) can be described as:

$$\omega_{r_c} > \omega_{r_g} \quad (4)$$

Inequality (4) suggests that both resonance phenomena cannot appear simultaneously if the circuit is to be stable, however both phenomena can appear at different angular frequencies, but always the capacitive resonance frequency will be greater than the conductive one.

The III order circuit in which capacitive and conductive resonance phenomena can be observed is shown in Fig. 1 [4]. The following formula describes  $Y_{1-1}(s)$  at the input terminals:

$$Y_{1-1}(s) = s^3 R_1 R_2 C_1 C_2 C_4 + s^2 R_1 C_1 \left( C_2 \frac{R_2}{R_3} - C_3 \right) = s^3 F + s^2 D \quad (5)$$

The full conductive resonant circuit in which parameter  $D$  is induced by the circuit from Fig. 1 is shown in Fig. 2a. For the case shown in the Fig. 2a parameter  $F$  equals zero, since  $C_4 = 0$ , however it is possible to introduce  $C_4 = 100$  pf for example.

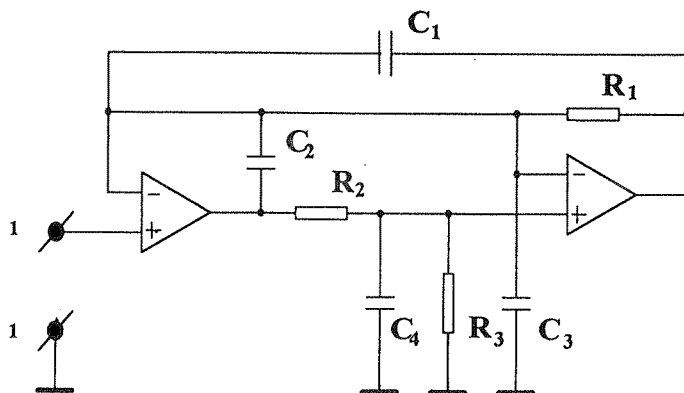


Fig. 1. One of the III order circuits in which conductive resonance or capacitive resonance can be observed

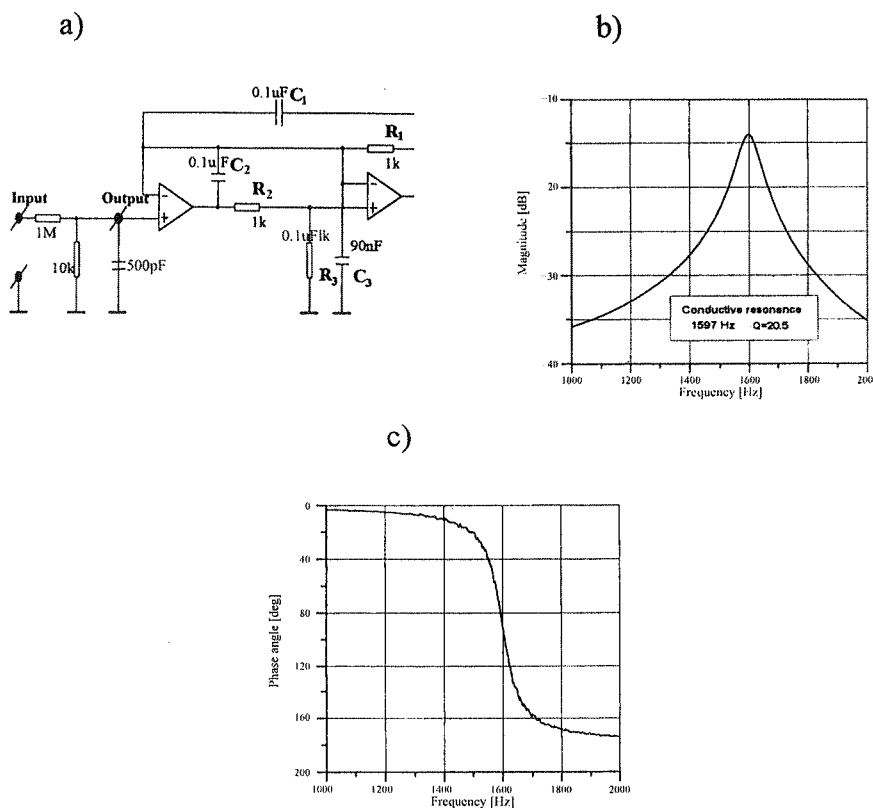


Fig. 2. Conductive resonance phenomenon: resonant circuit — a), resonant curve — b), phase angle characteristic — c)

According to (5)  $D = R_1 C_1 (C_2 \frac{R_2}{R_3} - C_3) = 10^{-12} \text{ As}^2/\text{V}$ , and  $-\omega^2 D$  resonates with conductance  $10^{-4} \text{ S}$  connected to the input terminals of the circuit from Fig.1. Resonant

frequency

circuit. If

The quality

the parasit

The co

frequency

introduced

data were

(at 3 dB b

The ca

to capacit

$C_4 = 0.1$

$D = 1e-1$

neglected)

The reson

Results of

Fig.3c. Pa

curves sho

obtained.

Similarly

Let us ass

resonance

when  $\omega_{r_u}^2 I$

and:

Expressio

resonance

is confirm

frequency  $f_{r_i} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{G}{D}} = 1592$  Hz. The capacitance 500 pF guarantees stability of the circuit. If  $C_4 = 100$  pF, then inequality (3) gives:  $5 \times 10^8 > 10^8$ .

The quality factor  $Q$  as the ratio of the resonating parameter admittance  $G$  (or  $\omega_{r_i}^2 D$ ) to the parasitic parameter admittance  $\omega_{r_i} C$  is  $Q = \frac{G}{\omega_{r_i} C} = \frac{\omega_{r_i} D}{C} = 25$ .

The computer simulation of this circuit in the MicroCap programme giving two frequency responses: the magnitude and the phase is shown in Fig.2 b and 2c. The introduced parameters of the operational amplifiers were closed to ideal. The following data were also obtained: the resonant frequency 1597 Hz and the quality factor 20.5 (at 3 dB bandwidth).

The capacitive resonance phenomenon occurs when the circuit from Fig.1 is parallel to capacitance  $1 \mu F$  and resistance  $10 k\Omega$  as is shown in Fig.3a. Since capacitance  $C_4 = 0.1 \mu F$ , parameter  $F = R_1 R_2 C_1 C_2 C_4 = 1e-15$  As<sup>3</sup>/V. Other parameters are:  $D = 1e-12$  As<sup>2</sup>/V,  $C = 1e-6$  F and  $G = 1e-4$  S (when the series resistor  $1 M\Omega$  can be neglected).

The resonant frequency  $f_{r_c} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{F}} = 5035$  Hz and the quality factor  $Q_c = \frac{\omega_{r_c} F}{D} = 32$ .

Results of computer simulation for the circuit from Fig.3a are shown in Fig.3b and Fig.3c. Parameters of operational amplifiers were also given as close to ideal. From curves shown in Fig.3b and Fig.3c the following values:  $f_{r_c} = 5035$  Hz,  $Q = 34.3$  were obtained.

Similarly in the III order circuit HELR the condition of stability is:

$$\frac{E}{R} > \frac{H}{L} \quad (6)$$

Let us assume the following denotations:  $\omega_{r_i}$  — angular resonant frequency for inductive resonance when  $\omega_{r_i}^2 H = L$  and  $\omega_{r_r}$  — angular resonant frequency for resistive resonance when  $\omega_{r_r}^2 E = R$ . Thus:

$$\omega_{r_i} = \sqrt{\frac{L}{H}} \quad (7)$$

and:

$$\omega_{r_r} = \sqrt{\frac{R}{E}} \quad (8)$$

Expression (6-8) suggest that both resonance phenomena (inductive and resistive resonance) cannot appear at the same angular frequency if the circuit is to be stable. This is confirmed by a simple calculation:

$$\omega_{r_i} > \omega_{r_r} \quad (9)$$

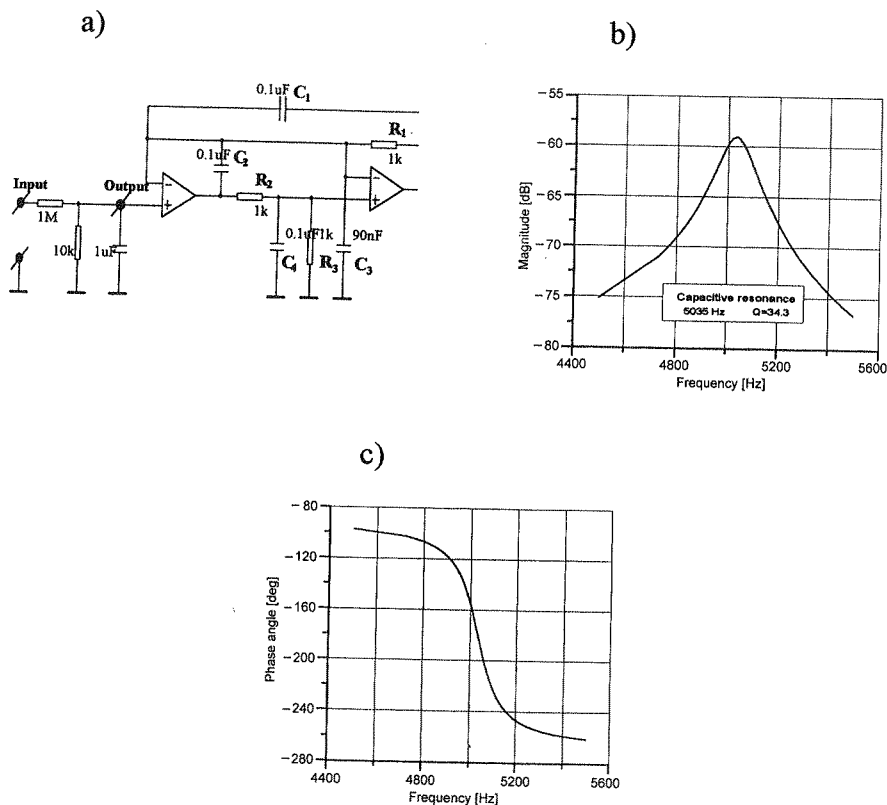


Fig. 3. Capacitive resonance phenomenon: resonant circuit — a), resonant curve — b), phase angle characteristic — c)

The last row of Table 1 contains formulas describing the shape of the resonant curve. The well known formula:

$$\left| \frac{U}{U_r} \right| \text{ or } \left| \frac{I}{I_r} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{f}{f_r} - \frac{f_r}{f} \right)^2}} \quad (10)$$

exists for all II order resonant circuits, independent of the kind of resonance phenomenon. Formula (10) is modified by the correction factor  $a$ , which depends on the quotient of corresponding admittances or impedances of parasitic parameters in the III order circuits. The influence of this correction factor divides all the III order resonant circuits into two groups:

— resonant circuits with resistive (conductive) resonance. The corresponding formula is:



$$\left| \frac{U}{U_r} \right| \text{ or } \left| \frac{I}{I_r} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \delta - \frac{1}{\delta} \right)^2 \left( \frac{1}{1 - a\delta^2} \right)^2}} \quad (11)$$

The resonant curves calculated from (11) for  $Q = 50$  are shown in Fig. 4.

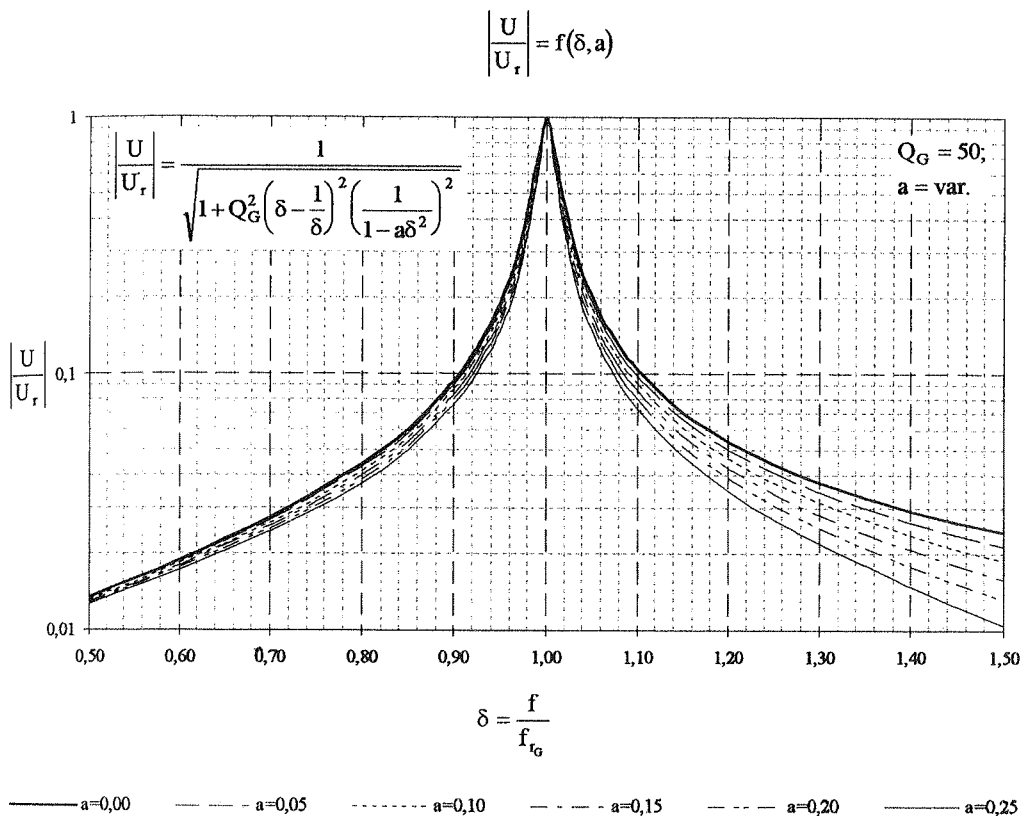


Fig. 4. Resonant curves for resonance phenomenon in III order circuit, between real elements, calculated from formula (11)

— resonant circuits with resonance phenomenon between imaginary components. The shape of the resonant curves is described by:

$$\left| \frac{U}{U_r} \right| \text{ or } \left| \frac{I}{I_r} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \delta - \frac{1}{\delta} \right)^2 \left( \frac{1}{1 - \frac{a}{\delta^2}} \right)^2}} \quad (12)$$

Dependencies described by (12) are shown in Fig.5.

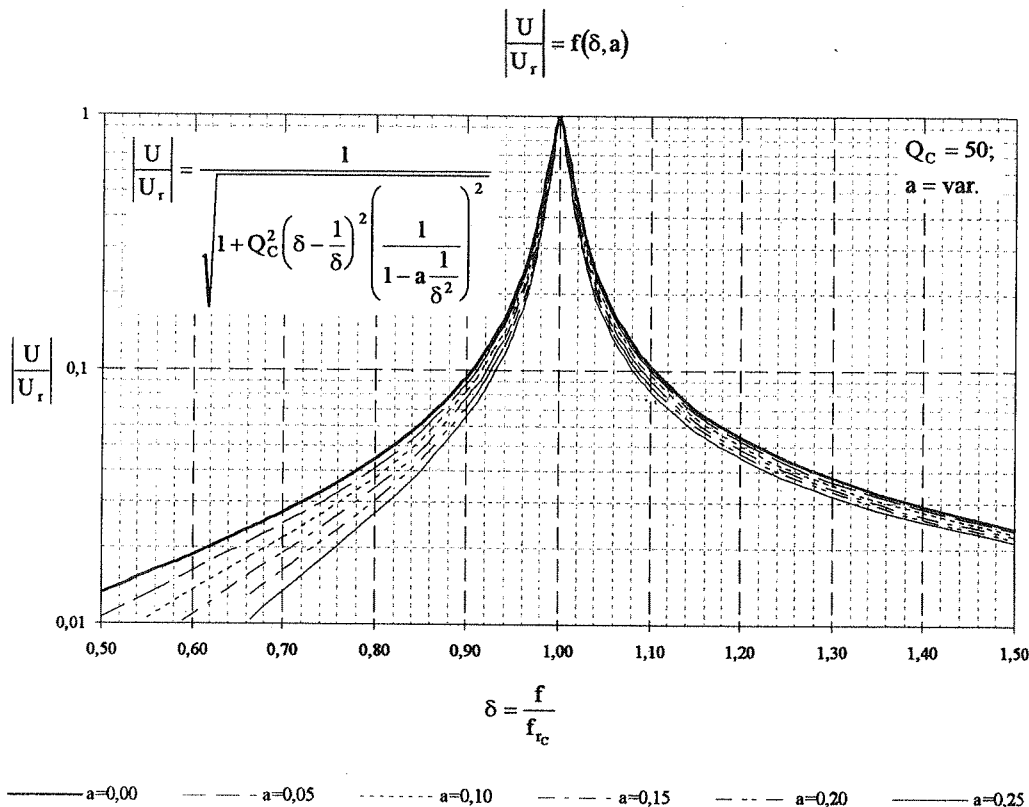


Fig. 5. Resonant curves for resonance phenomenon in III order circuit, between imaginary elements, calculated from formula (12).

Resonant curves shown in Fig. 2b and Fig. 3b are described by formulas (11) and (12). Correction factor  $a = GF/CD$  for the circuit from Fig. 3a equals 0.1.

#### 4. OBSERVABILITY OF BOTH RESONANT CURVES IN III ORDER CIRCUITS

Let us obtain the product of quality factors for both resonance phenomena in circuit FDCG:

According  
be less than

Similar co

In ord  
quality fa  
observed.  
Let us con  
3b. In the  
Hz and at  
does not  
 $C_4 = 100p$   
change of  
However  
increase b  
according

The fir  
circuit cont  
ce Convert  
7.], L.T. B  
which 18 M  
5 FDNR an  
Genin [12]  
originate fr  
and FDNR

The FD  
three FDNR  
Fig.1. In al  
these circuit  
of theoretic  
[15, 16, 17]  
FDNC, and

$$Q_C \cdot C_G = \frac{C}{\omega_{rc} D} \cdot \frac{\omega_{rg} D}{C} = \frac{\omega_{rg}}{\omega_{rc}} \quad (13)$$

According to (4) the stability condition requires  $\omega_{rc} > \omega_{rg}$  and thus the product (13) must be less than one:

$$Q_C \cdot Q_G < 1 \quad (14)$$

Similar considerations can be done for HELR circuit. Then:

$$Q_L \cdot Q_R < 1 \quad (15)$$

In order to observe one of the resonant curves well in practice we set one of the quality factors at a high value, then however the other resonant curve cannot be observed.

Let us consider the possibility of observing the resonant curves shown in Fig. 2b and Fig 3b. In the circuit from Fig. 2a the conductive resonance appears at the frequency 1592 Hz and at  $Q_G = 25$ . If no values of the elements are changed the capacitive resonance does not appear since now the capacitive resonant frequency equals 3560 Hz (if  $C_4 = 100\text{pF}$ ), whereas the quality factor is  $Q_C = 6.28 \cdot 3560 \cdot 10^{-18} / 10^{-12} = 0.02$ . The change of capacitance  $C_4$  to value 0.1  $\mu\text{F}$  (as in Fig. 3a) causes a certain increase of  $Q_C$ . However the resonant frequency is too small and finally it becomes necessary to increase both capacitance  $C_4$  and the additional capacitance from 500 pF to 1  $\mu\text{F}$  according to Fig. 3a in order to observe the capacitive resonance freely.

## 5. REALISATION OF THE FDNC, FDNR, FDNCap and FDNInd

The first electronic circuit realising FDNC was proposed by L.T. Bruton [2]. His circuit contained two operational amplifiers and was adapted from Generalised Impedance Converter (GIC). Work conducted by D.G. Haigh and R. Jeffers [5], A. Antoniou, [6, 7], L.T. Bruton [8], Riordan [9], led to the formulation of six GIC structures out of which 18 FDNC circuits and 6 FDNR circuits can be drawn, yet only 9 FDNC and 5 FDNR are stable. All of them have been compiled in [10] and FDNR also in [11]. R. Genin [12] presented a FDNC circuit with two operational amplifiers which did not originate from GIC structures. In 1979 Horn and Moshytz [13] proposed several FDNC and FDNR circuits with one operational amplifier only.

The FDNCap circuit was proposed by Selichi Noguchi [14]. Three FDNCap and three FDNInd circuits have been described in [4]. One of them (FDNCap) is shown in Fig.1. In all the implementations described above operational amplifiers were used, but these circuits can also be built with the use of current conveyors. A substantial number of theoretical solutions (without practical data) can be obtained from Soliman's papers [15, 16, 17], published in the years 1972-76. A universal circuit realising capacitance C, FDNC, and FDNCap in the same structure was proposed in [18].



a=0,25

ents, calculated

1) and (12).

ha in circuit

Nonidealities of the operational amplifiers and current conveyors used in electronic circuits realising FDNC, FDNR, FDNCap and FDNInd limit their application to a frequency not more than 100 kHz.

## 6. CHARACTERISTIC PROPERTIES OF CIRCUITS WITH THE RESISTIVE RESONANCE PHENOMENON

The division of III order resonant circuits into two groups suggested in chapter III can also refer to II order circuits, since it appears, that properties of the resonant circuit with resonance between real elements (resistive and conductive resonance) are different than the ones in resonant circuits with resonance between imaginary elements (LC resonance, capacitive and inductive resonance).

Let us consider the possibility of measuring capacitance  $C_X$  in parallel connection with small resistance  $R_X$ . If the sample  $R_X - C_X$ , whose dissipation factor  $\tan \delta = \frac{1}{\omega R_X C_X}$  on assumption will be high e.g. 10000 is connected to the classical RLC resonant circuit then the resonance phenomenon will be completely dumped. This disadvantage does not occur in a resonant circuit with resistive resonance.

Tabl. 2 shows the parallel resonant circuits described above supplied by a generator from resistor  $R_g$  or capacitor  $C_g$ . The resistor is used in the case of resonance between imaginary elements and the capacitor in the case of conductive resonance. This makes it possible to obtain the phase shift between the voltage drop in the resonant circuit and the generator  $0^\circ$  or  $180^\circ$ , which is essential if these resonant circuits are to be used in resonant bridges. Resistor  $R_g$  or capacitor  $C_g$  and corresponding resonant circuit can constitute two arms of the bridge and the remaining two arms can be resistive.

Formulas describing transfer functions  $H(j\omega) = \left( \frac{U}{U_g} \right) (j\omega)$  of these circuits, are compiled in the second row of Tabl. 2. and the formulas for the angular resonant frequency when the resonance phenomenon also includes the sample are presented in the third row.

It is easy to show that radii of the polar plots of transfer functions are equal to the real part of the corresponding transmittance  $H(j\omega)$  for the resonant angular frequency. Formulas for these radii  $\Re$  are given in the fourth row of Tabl. 2. They are similar for both the RLC circuit and the FDCG circuit provided capacitive resonance occurs in. The remaining formulas concern the conductive resonance phenomena and are also similar to one another.

The high value of the sample dissipation factor is due to small values of  $C_X$  and  $R_X$ . It is clear that the fall of  $C_X$  and  $R_X$  causes a decrease of polar plot radii for RLC and FDCG with capacitive resonance circuits and their increase for DCG and FDCG with conductive resonance circuits. The radius of a polar plot is proportional to the voltage drop in the resonant circuit. Quantitative calculations show that if the voltage drop in the RLC

in electronic  
application to

in chapter III  
onant circuit  
are different  
elements (LC

nection with  
 $\frac{1}{\omega R_x C_x}$  on  
onant circuit  
age does not

y a generator  
nce between  
This makes it  
circuit and the  
be used in  
t circuit can  
ive.

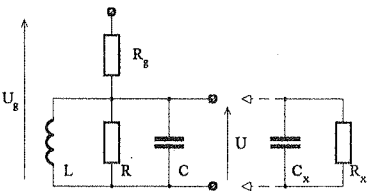
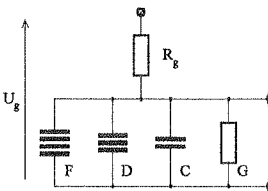
circuits, are

lar resonant  
sented in the

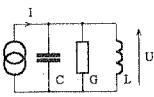
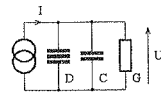
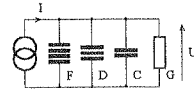
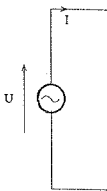
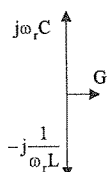
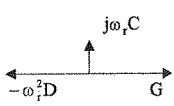
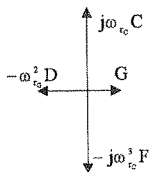
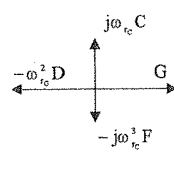
al to the real  
r frequency.  
e similar for  
ccurs in. The  
so similar to

and  $R_x$ . It is  
C and FDCG  
with conduc-  
tance drop in  
in the RLC

Comparison of the transfer functions of the resonant divider

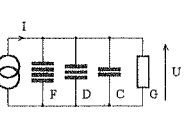
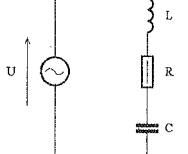
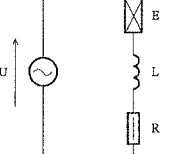
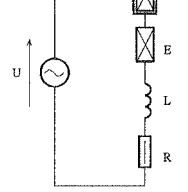
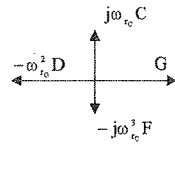
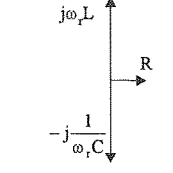
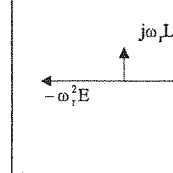
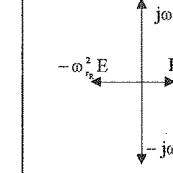
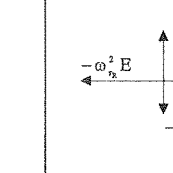
|                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Resonant voltage divider schemes                                                    |                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                             |
| 2. Transfer functions<br>$H(j\omega) = \frac{U}{U_g}(j\omega)$ for<br>voltage dividers | $H(j\omega) = \frac{U}{U_g} = \frac{\frac{1}{R_g} \left( \frac{1}{R_g} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_x} \right)^{-1}}{\left( \frac{1}{R_g} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_x} \right)^{-1} + \frac{j\omega}{R_g} \left( C + C_x - \frac{1}{\omega^2 L} \right)} \dots$ | $H(j\omega) = \frac{U}{U_g} = \frac{\frac{1}{R_g} \left( \frac{1}{R_g} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_x} \right)^{-1}}{\left( \frac{1}{R_g} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_x} \right)^{-1} - \frac{j\omega}{R_g} \left( C + C_x - \frac{1}{\omega^2 D} \right)} \dots$ |
| 3. Resonant angular frequencies                                                        | LC resonance<br>$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L(C + C_x)}}$                                                                                                                                                                                                       | capacitive resonance<br>$\omega_{rc} = \sqrt{\frac{C + C_x}{F}}$                                                                                                                                                                                               |
| 4. Circle radii of polar plots of $H(j\omega)$                                         | $\Re = \frac{1}{2R_g \left( \frac{1}{R_g} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_x} \right)}$                                                                                                                                                                              | $\Re = \frac{1}{2R_g \left( \frac{1}{R_g} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_x} - \omega^2 D \right)}$                                                                                                                                                                 |

Schemes of chosen II and III orders resonant circuits, their vector diagrams and basic formulas describing resonance

|    |                                                 |                                                                                                                                  |                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                  |
|----|-------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | Resonant circuit schemes                        |                                                 |                                                                             |                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                       |                                                                                                                                  |
| 2. | Definitions of the non-typical elements         |                                                                                                                                  | <br>FDNC - Frequency<br>Dependent Negative<br>Conductance<br>$Y(s) = s^2 D$ | <br>FDNCap - Frequency Dependent Negative Capacitance<br>$Y(s) = s^3 F$                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                  |
| 3. | Vector diagrams for resonant frequency          |                                                |                                                                            | <div>capacitive resonance</div>                                                                                                                                 | <div>conductive resonance</div>                                                                                                                       |                                              |
| 4. | Formulas for resonant frequency                 | $f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$                                                                                                  | $f_r = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{G}{D}}$                                                                                                                     | $f_{rc} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C}{F}}$                                                                                                                                                                                                       | $f_{ro} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{G}{D}}$                                                                                                                                                                                              | $f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$                                                                                                  |
| 5. | Formulas for quality factors                    | $Q = \frac{1}{\omega_r LG}$                                                                                                      | $Q = \frac{\omega_r D}{C} = \frac{G}{\omega_r C}$                                                                                                            | $Q_c = \frac{\omega_{rc} F}{D} = \frac{C}{\omega_{rc} D}$                                                                                                                                                                                         | $Q_o = \frac{\omega_{ro} D}{C} = \frac{G}{\omega_{ro} C}$                                                                                                                                                                                | $Q_r = \frac{\omega_r L}{R}$                                                                                                     |
| 6. | Formulas describing the shape of resonant curve | $\left  \frac{U}{U_r} \right  = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \delta - \frac{1}{\delta} \right)^2}}$<br>$\delta = \frac{f}{f_r}$ | $\left  \frac{U}{U_r} \right  = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \delta - \frac{1}{\delta} \right)^2}}$<br>$\delta = \frac{f}{f_r}$                             | $\left  \frac{U}{U_r} \right  = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_c^2 \left( \delta - \frac{1}{\delta} \right)^2 \left( \frac{1}{1 - \frac{a}{\delta^2}} \right)^2}}$<br>$\delta = \frac{f}{f_{rc}}$<br>$a = \frac{G}{\omega_{rc}^2 D}$<br>$a = \frac{GF}{CD}$ | $\left  \frac{U}{U_r} \right  = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_o^2 \left( \delta - \frac{1}{\delta} \right)^2 \left( \frac{1}{1 - a\delta^2} \right)^2}}$<br>$\delta = \frac{f}{f_{ro}}$<br>$a = \frac{\omega_{ro}^2 F}{C}$<br>$a = \frac{GF}{CD}$ | $\left  \frac{U}{U_r} \right  = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \delta - \frac{1}{\delta} \right)^2}}$<br>$\delta = \frac{f}{f_r}$ |

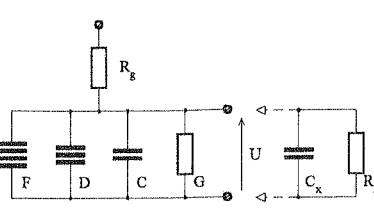
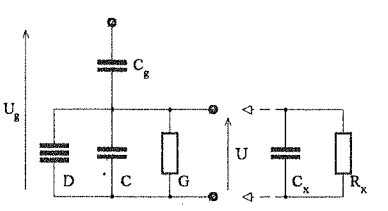
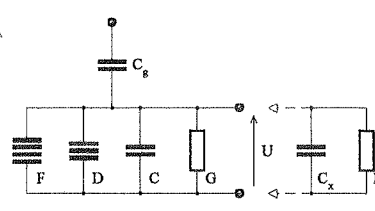
vector diagrams and basic formulas describing resonant frequency, quality factor and shape of the resonant curve.

Table 1

|                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                          |                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                    |  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|--|
|                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                         |                                                                                                                            |                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                          |  |  |
|  <p>Frequency Dependent Negative Capacitance</p> <p><math>Y(s) = s^3 F</math></p> |                                                                                                                                                                                                                          |  <p>FDNR - Frequency Dependent Negative Resistance</p> <p><math>Z(s) = s^2 E</math></p> |                                                                                                                            |  <p>FDNInd - Frequency Dependent Negative Inductance</p> <p><math>Z(s) = s^3 H</math></p>                                                       |                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                    |  |
| resonance                                                                                                                                                         | conductive resonance                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                          |                                                                                                                            | inductive resonance                                                                                                                                                                                                               | resistive resonance                                                                                                                                                                                                      |                                                                                    |  |
|                                                                                   |                                                                                                                                        |                                                                                        |                                          |                                                                                                                                                 |                                                                                                                                       |                                                                                    |  |
|                                                                                                                                                                   | $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{G}{D}}$                                                                                                                                                                                | $f_r = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$                                                                                                                                         | $f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{R}{E}}$                                                                                  | $f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{L}{H}}$                                                                                                                                                                                         | $f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{R}{E}}$                                                                                                                                                                                |                                                                                    |  |
| $\frac{C}{D}$                                                                                                                                                     | $Q_0 = \frac{\omega_0 D}{C} = \frac{G}{\omega_0 C}$                                                                                                                                                                      | $Q = \frac{\omega_r L}{R}$                                                                                                                                               | $Q = \frac{R}{\omega_r L} = \frac{\omega_r E}{L}$                                                                          | $Q_1 = \frac{L}{\omega_r H} = \frac{\omega_r H}{E}$                                                                                                                                                                               | $Q_r = \frac{R}{\omega_r L} = \frac{\omega_r E}{L}$                                                                                                                                                                      |                                                                                    |  |
| $\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 \left(\frac{1-a}{1-\delta^2}\right)^2$                                                                                           | $\left \frac{U}{U_r}\right  = \frac{1}{\sqrt{1+Q_0^2 \left(\delta - \frac{1}{\delta}\right)^2 \left(\frac{1}{1-a\delta^2}\right)^2}}$<br>$\delta = \frac{f}{f_0}$<br>$a = \frac{\omega_0^2 F}{C}$<br>$a = \frac{GF}{CD}$ | $\left \frac{J}{J_r}\right  = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2 \left(\delta - \frac{1}{\delta}\right)^2}}$<br>$\delta = \frac{f}{f_r}$                                               | $\left \frac{J}{J_r}\right  = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2 \left(\delta - \frac{1}{\delta}\right)^2}}$<br>$\delta = \frac{f}{f_r}$ | $\left \frac{J}{J_r}\right  = \frac{1}{\sqrt{1+Q_1^2 \left(\delta - \frac{1}{\delta}\right)^2 \left(\frac{1}{1-\frac{a}{\delta^2}}\right)^2}}$<br>$\delta = \frac{f}{f_r}$<br>$a = \frac{R}{\omega_r^2 H}$<br>$a = \frac{RH}{LE}$ | $\left \frac{J}{J_r}\right  = \frac{1}{\sqrt{1+Q_r^2 \left(\delta - \frac{1}{\delta}\right)^2 \left(\frac{1}{1-a\delta^2}\right)^2}}$<br>$\delta = \frac{f}{f_r}$<br>$a = \frac{\omega_r^2 H}{L}$<br>$a = \frac{RH}{EL}$ |                                                                                    |  |

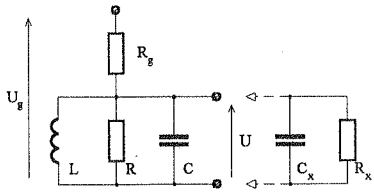
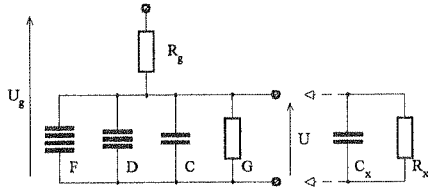
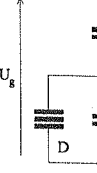
ctions of the resonant dividers with resonance phenomena between imaginary and real elements.

Table 2

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                      |
| $H(j\omega) = \frac{U}{U_g} = \frac{\frac{1}{R_g} \left( \frac{1}{R_g} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_x} - \omega^2 D \right) - \dots}{\left( \frac{1}{R_g} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_x} - \omega^2 D \right)^2 + \dots} \dots$ $\dots \frac{j\omega \frac{C}{R_g} (C + C_x - \omega^2 F)}{\omega^2 (C + C_x - \omega^2 F)^2}$ | $H(j\omega) = \frac{U}{U_g} = \frac{\omega^2 C_g (C_g + C + C_x) + \dots}{\left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_x} - \omega^2 D \right)^2 + \dots}$ $\dots \frac{j\omega C_g \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_x} - \omega^2 D \right)}{\omega^2 (C_g + C + C_x)^2}$ | $H(j\omega) = \frac{U}{U_g} = \frac{\omega^2 C_g (C_g + C + C_x - \omega^2 F) + \dots}{\left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_x} - \omega^2 D \right)^2 + \dots}$ $\dots \frac{j\omega C_g \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_x} - \omega^2 D \right)}{\omega^2 (C_g + C + C_x - \omega^2 F)^2}$ |
| <p>inductive resonance</p> $\omega_r = \sqrt{\frac{C + C_x}{F}}$                                                                                                                                                                                                                                                            | <p>conductive resonance</p> $\omega_r = \sqrt{\frac{R + R_x}{D R R_x}}$                                                                                                                                                                                      | <p>conductive resonance</p> $\omega_{r0} = \sqrt{\frac{R + R_x}{D R R_x}}$                                                                                                                                                                                                             |
| $\Re = \frac{1}{2 R_g \left( \frac{1}{R_g} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_x} - \omega^2 D \right)}$                                                                                                                                                                                                                             | $\Re = \frac{C_g}{2 (C_g + C + C_x)}$                                                                                                                                                                                                                        | $\Re = \frac{C_g}{2 (C_g + C + C_x - \omega^2 F)}$                                                                                                                                                                                                                                     |

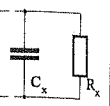


Comparison of the transfer functions of the resonant dividers with resonance phenomena between

|    |                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                      |
|----|----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | Resonant voltage divider schemes                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                          |   |
| 2. | Transfer functions<br>$H(j\omega) = \frac{U}{U_g}(j\omega)$ for voltage dividers | $H(j\omega) = \frac{U}{U_g} = \frac{\frac{1}{R_g} \left( \frac{1}{R_g} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_x} \right) - \dots}{\left( \frac{1}{R_g} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_x} \right)^2 + \dots} \dots$ $\dots \frac{j \frac{\omega}{R_g} \left( C + C_x - \frac{1}{\omega^2 L} \right)}{\omega^2 \left( C + C_x - \frac{1}{\omega^2 L} \right)^2}$ | $H(j\omega) = \frac{U}{U_g} = \frac{\frac{1}{R_g} \left( \frac{1}{R_g} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_x} - \omega^2 D \right) - \dots}{\left( \frac{1}{R_g} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_x} - \omega^2 D \right)^2 + \dots} \dots$ $\dots \frac{j \frac{\omega}{R_g} (C + C_x - \omega^2 F)}{\omega^2 (C + C_x - \omega^2 F)^2}$ | $H(j\omega) = \frac{U}{U_g} = \frac{\omega^2 C}{\left( \frac{1}{R} + \dots \right)}$ |
| 3. | Resonant angular frequencies                                                     | LC resonance<br>$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L(C + C_x)}}$                                                                                                                                                                                                                                                                                       | capacitive resonance<br>$\omega_{rc} = \sqrt{\frac{C + C_x}{F}}$                                                                                                                                                                                                                                                           | conductive resonance<br>$\omega_r = \sqrt{\frac{R + R_x}{D R R_x}}$                  |
| 4. | Circle radii of polar plots of $H(j\omega)$                                      | $\Re = \frac{1}{2R_g \left( \frac{1}{R_g} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_x} \right)}$                                                                                                                                                                                                                                                              | $\Re = \frac{1}{2R_g \left( \frac{1}{R_g} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_x} - \omega^2 D \right)}$                                                                                                                                                                                                                             | $\Re = \frac{C_g}{2(C_g + C + C_x)}$                                                 |

and DCG circuits are equal to one another for  $\tan\delta = 1$ , then increasing its value to some thousands causes a rapid decrease of the voltage drop in the RLC circuit and a certain increase of this voltage drop in the DCG circuit.

Table 2



|  |
|--|
|  |
|  |
|  |
|  |

## 7. CONCLUSIONS

1. From Fig. 2b, 3b, Fig. 4 and Fig. 5 it can be seen that the shape of the resonant curve, when  $a = 0$ , for all considered resonance phenomena is the same and term 'resonance' according to encyclopedic definition of this phenomenon can be applied to them. In III order circuits the influence of the correction factor  $a$  is beyond detection for values smaller than 0,01. Small values of factor  $a$  (for example  $a = 0.1$ ) are obtained without any problems in practice which is confirmed by the shape of curves from Fig. 2b and 3b. These curves are described by different formulas (11) and (12), but their shapes are similar to one another.
2. There are two groups of resonant circuits whose properties differ. The first group with resonance phenomenon between imaginary elements exhibits the same properties as classical RLC resonant circuits. The second group with resonance phenomenon between real elements exhibits new properties and can be used in the apparatus for measuring the capacitance or inductance with very high losses [19], since these losses do not damp the oscillations in the resonant circuit.
3. The use of resonant circuits with resonance between real components can form a new group of resonant bridges for measuring capacitance or inductance [11] with very high losses.

## Appendix

Resulting from the formulas describing resonant curves for conductive and capacitive resonance.

### 1. Conductive resonance phenomenon

Let us consider the parallel circuit FDCG, shown in column 6 of the Tabl. 1. The complex voltage  $U$  in the resonant circuit for harmonic excitation is:

$$U = \frac{I}{-j\omega^3 F - \omega^2 D + j\omega C + G} \quad (16)$$

When the resonance phenomenon occurs between conductances  $-\omega^2 D$  and  $G$  the resonant voltage  $U_r$  can be described as:

$$U_r = \frac{I}{-j\omega^3 F + j\omega C} \quad (17)$$

and then the resonant angular frequency  $\omega_{rG}$  is:

$$\omega_{rG} = \sqrt{\frac{G}{D}} \quad (18)$$

Let us assume that the frequency offset parameter  $\delta$  is as follows:

$$\omega = \omega_{rG} \delta \quad \text{or} \quad \delta = \frac{f}{f_{rG}} \quad (19)$$

After introducing parameter  $\delta$  into (16) and (17) the quotient  $\frac{U}{U_r}$  has the form:

$$\frac{U}{U_r} = \frac{-j\omega_{rG}^3 \delta^3 F + j\omega_{rG} \delta C}{-j\omega_{rG}^3 \delta^3 F - \omega_{rG}^2 \delta^2 D + j\omega_{rG} \delta C + G} \quad (20)$$

A simple calculation lead to the form:

$$\frac{U}{U_r} = \frac{1}{1 - j \frac{\omega_{rG}^2 \delta^2 D}{\omega_{rG}^3 \delta^3 F - \omega_{rG} \delta C} + j \frac{G}{\omega_{rG}^3 \delta F - \omega_{rG} \delta C}} \quad (21)$$

According to chapter II, the quality factor is defined as a ratio of admittance  $\omega_{rG}^2 D$  (or  $G$ ) of one of the resonating parameters to admittance  $\omega_{rG} C$ , the main of parasitic parameter. Thus:

$$Q_G = \frac{\omega_{rG} D}{C} \quad \text{or} \quad Q_G = \frac{G}{\omega_{rG} C} \quad (22)$$

After introducing formulas (22) into (21) the following expression can be given:

$$\frac{U}{U_r} = \frac{1}{1 + jQ_G \left( \frac{1}{\delta} - \delta \right) \frac{1}{\frac{\omega_{rG}^2 \delta^2 F}{C} - 1}} \quad (23)$$

Let us denote that  $\frac{\omega_{rG}^2 F}{C} = a$ . According to (1) the correction factor  $a$  is equal:

$$a = \frac{\omega_{rG}^2 F}{C} = \frac{GF}{CD} \quad (24)$$

Finally:

$$(18) \quad \frac{U}{U_r} = \frac{1}{1 + jQ_G \left( \frac{1}{\delta} - \delta \right) \frac{1}{a\delta^2 - 1}} \quad (25)$$

and:

$$(19) \quad \left| \frac{U}{U_r} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_G^2 \left( \frac{1}{\delta} - \delta \right)^2 \left( \frac{1}{a\delta^2 - 1} \right)^2}} \quad (26)$$

orm:

## 2. Capacitive resonance phenomenon.

(20) Formula (16) suggests that capacitive resonance phenomenon can appear when  $-j\omega_{rc}^2 F + j\omega_{rc} C = 0$ . Hence, the resonant frequency is:  $\omega_{rc} = \sqrt{\frac{C}{F}}$ .

(21) The ratio  $\frac{U}{U_r}$  can be described as:

$$\frac{U}{U_r} = \frac{1}{1 - j \frac{\omega_{rc}^3 \delta^3 F}{G - \omega_{rc}^2 \delta^2 D} + j \frac{\omega_{rc} \delta C}{G - \omega_{rc}^2 \delta^2 D}} \quad (27)$$

ance  $\omega_{rc}^2 D$  (or  
of parasitic

Similar to (22) the quality factor  $Q_c$  can be described as a ratio of  $\omega_{rc}^3 F$  (or  $\omega_{rc} C$ ) to  $\omega_{rc}^2 D$ . Thus:

$$(22) \quad Q_c = \frac{\omega_{rc} F}{D} \quad \text{or} \quad Q_c = \frac{C}{\omega_{rc} D} \quad (28)$$

given:

After introducing both formulas (28) to (27) this expression takes the form of:

$$(23) \quad \frac{U}{U_r} = \frac{1}{1 + jQ_c \left( \delta - \frac{1}{\delta} \right) \frac{1}{1 - \frac{G}{\omega_{rc}^2 D \delta^2}}} \quad (29)$$

ual:

The correction factor  $a$  in this case is:

$$(24) \quad a = \frac{G}{\omega_{rc}^2 D} = \frac{GF}{CD} \quad (30)$$

The value  $a$  from formula (30) is different than value  $a$  from formula (24) since the parameters CDFG appropriate for capacitive resonance differ from the parameters required for conductive resonance.

After introducing factor  $a$  into (29):

$$\frac{U}{U_r} = \frac{1}{1 + jQ_c \left( \delta - \frac{1}{\delta} \right) \frac{1}{1 - \frac{a}{\delta^2}}} \quad (31)$$

Finally:

$$\left| \frac{U}{U_r} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_c^2 \left( \frac{1}{\delta} - \delta \right)^2 \left( \frac{1}{\frac{a}{\delta^2} - 1} \right)^2}} \quad (32)$$

If the values of  $Q_G$  and  $Q_C$  are the same the important difference between formulas (26) and (32) concern to the influence of the correction factor  $a$  on the resonant curves.

Formulas corresponding to (26) and (32) can be derived for inductive and resistive series resonance phenomena.

#### REFERENCES

1. *The New Encyclopaedia Britannica*. Helen Hemingway Benton, 1973-1974, vol. VIII, p. 525
2. L.T. Bruton: *Network transfer functions using the concept of frequency-dependent negative resistance*. IEEE Trans. Circuit Theory, August 1969, vol. 16, no 8, pp. 406-408
3. Fr. Molo: *Parallel resonator with a resistance and a frequency — dependent negative resistance realized with a single operational amplifier*. IEEE Trans. Circuit and Systems, CAS-21, Nov. 1974, pp. 783-78
4. L. Tomawski: *Negative capacitances and negative inductances III order*. XIII Nat. Conf. on Circuit Theory and Electronic Networks, Bielsko-Biala, Oct. 16-18, 1990, pp. 405-410
5. D.G. Haigh, R. Jeffers: *The design of an audio frequency active RC bandpass filter for a specific engineering requirement*. Radio and Electronic Engineer, 1972, vol. 42, pp. 373-380
6. A. Antoniou: *Realization of gyrators using operational amplifiers and their use in RC active network synthesis*. Proc. IEEE, 1969, vol. 11, pp. 1838-1850
7. A. Antoniou: *Novel RC active network synthesis using generalized imittance converters*. IEEE Trans, Circuit Theory, May 1970, CT-17, pp. 212-217
8. L.T. Bruton: *Frequency selectivity using positive impedance converter type networks*. Proc. IEEE, 1968, vol. 56, pp. 1378-1379
9. R.H.S. Riordan: *Simulated inductors using differential amplifiers*. Electron. Lett., 1967, vol. 3, pp. 50-51
10. N.C. Bui, L.T. Huynh: *Realization de FDNR et FDNC avec des convertisseurs de courant*. AGEN Mitteilungen, 1976, vol. 20, pp. 29-40

11. L. Tomawski and M. Mańka: *Negative capacitances and negative inductances III order*. XIII Nat. Conf. on Circuit Theory and Electronic Networks, Bielsko-Biala, Oct. 16-18, 1990, pp. 405-410
12. R. Genies: *Realization of gyrators using operational amplifiers and their use in RC active network synthesis*. Proc. IEEE, 1969, vol. 11, pp. 1838-1850
13. P. Horn: *Realization of gyrators using operational amplifiers and their use in RC active network synthesis*. Proc. IEEE, 1969, vol. 11, pp. 1838-1850
14. S. Noguera: *Realization of gyrators using operational amplifiers and their use in RC active network synthesis*. Proc. IEEE, 1969, vol. 11, pp. 1838-1850
15. A.M. Soliman: *Realization of gyrators using operational amplifiers and their use in RC active network synthesis*. Proc. IEEE, 1969, vol. 11, pp. 1838-1850
16. S. Noguera: *Realization of gyrators using operational amplifiers and their use in RC active network synthesis*. Proc. IEEE, 1969, vol. 11, pp. 1838-1850
17. S. Noguera: *Realization of gyrators using operational amplifiers and their use in RC active network synthesis*. Proc. IEEE, 1969, vol. 11, pp. 1838-1850
18. L. Tomawski: *Negative capacitances and negative inductances III order*. XIII Nat. Conf. on Circuit Theory and Electronic Networks, Bielsko-Biala, Oct. 16-18, 1990, pp. 405-410
19. L. Tomawski: *Negative capacitances and negative inductances III order*. XIII Nat. Conf. on Circuit Theory and Electronic Networks, Bielsko-Biala, Oct. 16-18, 1990, pp. 405-410

W artykule  
cyfrowych elementach  
przypadki zjawiska  
dwie grupy,  
proponowane  
pojemności c

Słowa kluczowe

11. L. Tomawski: *Resonant bridge with frequency dependent negative resistance*. IEEE Trans. on Instrum. and Measur., March 1988, vol. 37, pp. 45–48
12. R. Genin: *A sine wave generator using a frequency-dependent negative conductance*. Proc. IEEE, Nov. 1975, vol. 63, pp. 1611–1612
13. P. Horn, G.S. Moshytz: *Active RC single-opamp design of driving-point impedances*. IEEE Trans. on Circuit and Systems, CAS-26, 1979, vol. 1, pp. 22–29
14. S. Noguchi: *The concept of higher -order impedance and simulation of third-order admittance FDNCap*. Proc. ISCAS, 1985, pp. 103–104
15. A.M. Soliman: *Active RC realisation fo current transfer functions using voltage generalised- imittance converters*. Int. J. Electronics, vol. 33, No. 3, 1972, pp. 273–280
16. *ibid.* *New generalised- imittance converter circuits obtained by using the current conveyor*. Int. J. Electronics, vol. 32, No. 6, 1972, pp. 673–679
17. *ibid.* *Generalized imittance inverters and their realizations*. Int J. Electronics, vol. 41, No. 1, 1976, pp. 59–64.
18. L. Tomawski: *Generalised Imittance Converter for the realisation of „admittance” two-poles*. XXI Nat. Conf. on Circuit Theory and Electronic Networks, Poznań–Kiekrz, Oct. 22–24, 1998, pp. 105–110
19. L. Tomawski, M. Mańka, J. Dąbrowski: *Nonlinear negative capacitance in oscillator circuit*. Electronic and Telecommunications Quarterly, 43, z. 3, 1997, pp. 321–332

L. TOMAWSKI, M. MAŃKA

## ZJAWISKA REZONANSOWE W WYBRANYCH OBWODACH II I III RZĘDU

### Streszczenie

W artykule są analizowane zjawiska rezonansowe w równoległych i szeregowych obwodach zawierających elementy RLC i układy elektroniczne realizujące dwójniki  $FDNC^1$ ,  $FDNCap^2$ ,  $FDNR^3$  i  $FDNInd^4$ . Cztery przypadki zjawisk rezonansowych w obwodach II rzędu i również cztery w obwodach III rzędu podzielono na dwie grupy, których właściwości są różne. Różny jest także kształt ich krzywych rezonansowych. Zaproponowano użycie obwodów z rezonansem konduktancyjnym w mostkach przeznaczonych do pomiaru pojemności o dużym współczynniku strat.

Słowa kluczowe: Rezonans,  $FDNC$ ,  $FDNCap$ ,  $FDNR$ ,  $FDNInd$

Ko

O  
nych.  
tów F  
pojedy  
Otrzy

*Słowa*  
kompe

Model  
wykorzysty  
sygnałów j  
lasera opty  
propagując  
ralnego jak  
może pow  
opisie, bad  
staci stacjo  
tradycją jał  
które powi  
jak i eksp  
rzeczywist

\* Praca wyko

## Koherentna analiza korelacyjna niestacjonarnych sygnałów zmodulowanych\*

IGOR JAWORSKI, ZBIGNIEW ZAKRZEWSKI

*Instytut Telekomunikacji, Akademia Techniczno-Rolnicza, Bydgoszcz  
Instytut Fizyczno-Mechaniczny NAN Ukrainy, Lwów*

*Otrzymano 1999.11.30  
Autoryzowano 2000.06.29*

Omówiono koherentną metodę estymacji charakterystyk niestacjonarnych sygnałów zmodulowanych. Rozpatrzono własności estymatorów wartości oczekiwanej, funkcji autokorelacji i ich komponentów Fouriera, które zostały obliczone na podstawie uśrednienia próbek co okres korelowania realizacji pojedynczej. Zostały wprowadzone wyrażenia asymptotyczne na obciążenia i wariancje estymatorów. Otrzymano zależności charakterystyk sygnałów amplitudowo i fazowo zmodulowanych.

*Słowa kluczowe:* okresowo korelowane sygnały losowe, wartość oczekiwana, funkcja autokorelacji, komponenty korelacyjne, estymatory, obciążenie, wariancja, parametry obróbki.

### 1. WPROWADZENIE

Model matematyczny drgania harmonicznego zmodulowanego szumem jest szeroko wykorzystywany w telekomunikacji. Przy jego stosowaniu opisane są właściwości sygnałów jako nośników informacji, drgań samowzbudnych elektrycznego źródła oraz lasera optycznego, szumów w układach modulacyjnych i szumów odbiornika, fali propagującej w środowiskach statystycznie niejednorodnych, szumów pochodzenia naturalnego jak też innych procesów fizycznych. Bez względu na to, że harmoniczna nośna może powodować okresowe zmiany charakterystyk probabilistycznych, przy takim opisie, badania w większości przypadków przeprowadzone są w ramach modelu w postaci stacjonarnego procesu losowego. Taką sytuację można usprawiedliwić istniejącą tradycją jak też niedostatecznym wyjaśnieniem w literaturze tych właściwości procesów, które powiązane są z ich niestacjonarnością. Dotyczy to również badań teoretycznych jak i eksperymentalnych, wykonanych na podstawie obróbki statystycznej danych rzeczywistych. Procesy losowe, których wartość średnia  $m(t) = E\xi(t)$ ,  $E$  — operator

\* Praca wykonana w ramach grantu KBN Nr 8 T11D01519



wartości oczekiwanej oraz funkcja autokorelacji  $b(t, u) = E\dot{\xi}(t)\dot{\xi}(t+u)$ ,  $\dot{\xi}(t) = \dot{\xi}(t) - m(t)$ , zmieniają się względem czasu  $t$  okresowo, nazywane są okresowo korelowanymi procesami losowymi (OKPL)<sup>1</sup> [1,2]. Przy założeniu bezwzględnej całkowalności funkcji  $m(t)$  i  $b(t, u)$  względem  $t$  w przedziale  $[0, T]$ ,  $T$  — okres, mogą być one przedstawione w postaci szeregów Fouriera  $m(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k e^{ik\omega_0 t}$ ,  $b(t, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k(u) e^{ik\omega_0 t}$ , przy tym  $|m_k| \rightarrow 0$  i  $|B_k(u)| \rightarrow 0$  jeżeli  $k \rightarrow \infty$ . Funkcje  $B_k(u)$  nazywane są komponentami korelacyjnymi<sup>2</sup> [1, 2]. Model w postaci OKPL został zaproponowany, w celu opisu sygnałów telekomunikacyjnych, przez W. Bennett'a [3] już w 1958 r., jak też L. Franks'a [3] w 1969 r., jednak dopiero od 1980 r. model ten jest coraz szerzej stosowany przy rozwiązywaniu problemów w telekomunikacji (filtracja, modulacja, detekcja, synchronizacja i inne). W pracach, liczba których rośnie każdego roku, wykazano osiągnięcie większej efektywności metod i układów w przetwarzaniu sygnałów przy uwzględnieniu okresowej niestacjonarności sygnałów w porównaniu z metodami ich nie uwzględniającymi [3]. Należy podkreślić, że model ten może być weryfikowany tylko z wykorzystaniem adekwatnych metod obróbki statycznej realizacji tych sygnałów. Problemy statystyki okresowo niestacjonarnych sygnałów zmodulowanych są niedostatecznie opracowane w literaturze, z czego wynika aktualność oraz waga danej pracy.

Już w 1949 r. K. Shannon [4] zaznaczył, że operacja modulacji nie jest inwariantna względem przesunięcia w czasie, ponieważ faza nośnej tworzy pewną czasową strukturę. Jednakże modulacja jest inwariantna względem wszystkich przesunięć, których wartości oraz okres nośnej są współmierne. W przypadku modulacji stochastycznej taka inwariantność umożliwia szacowanie okresowo zmiennych w czasie probabilistycznych charakterystyk sygnałów [1] na podstawie uśrednienia próbek, uzyskanych co okres nośnej. Taka metoda estymacji nazywana jest metodą kohorentną [2]. Korelacyjna analiza koherentna niestacjonarnych sygnałów zmodulowanych, których własności mogą być opisane w oparciu o modele w postaci OKPL [2,3], zawiera wiele zagadnień. Po pierwsze, jest to estymacja okresowej w czasie wartości oczekiwanej dla  $t \in [0, T]$ , jak też współczynników Fouriera  $m_k$ , które są optymalnymi parametrami służącymi do opisanego regularnego przebiegu sygnału. Po drugie, jest to estymacja wartości funkcji autokorelacji  $b(t, u) = E\dot{\xi}(t)\dot{\xi}(t+u)$ ,  $\dot{\xi}(t) = \xi(t) - m(t)$ , lub  $k(t, u) = E\dot{\xi}\left(t - \frac{u}{2}\right)\dot{\xi}\left(t + \frac{u}{2}\right)$  [1], które są zależne od dwóch argumentów: czasu  $t$  oraz przesunięcia  $u$ . Odmienne cechy zmian funkcji autokorelacji względem  $t$  i  $u$  powodują, że podejście do szacowania tych zmian w czasie  $t$  jest inne od szacowania w przesunięciu  $u$ . Okresowość funkcji autokorelacji względem  $t$  daje możliwość zastosowania przy szacowaniu okresowego przebiegu, dla pewnych wartości przesunięcia  $u$ , uśrednienia w okresie  $T$  iloczynów

<sup>1</sup> W literaturze stosowane są także terminy cyklostacjonarne procesy losowe, okresowo niestacjonarne, procesy o okresowej strukturze.

<sup>2</sup> W.A. Gardner [3] stosuje termin „cyclic autocorrelation function”, H.L. Hard [3] — „coefficient function”.

odpowiedr  
zmieniać.  
estymację  
Wzory na  
funkcji au  
okresowo

$\varphi_n(t) = e^{ik}$   
efektywno  
charaktery  
wartości c  
współczyn  
niesieniu c  
poświęcon  
wyprowad  
zakładamy  
czwartego

2. E

Przypu  
 $\theta = NT, N$

Powyższy

Dla varian

Jeżeli pow

<sup>3</sup> Statyst  
cytowanych v

$\xi(t) -$   
 owanymi  
 ci funkcji  
 stawione  
 przy tym  
 ni korela-  
 sygnałów  
 jak też  
 z szerzej  
 modulacja,  
 go roku,  
 warzaniu  
 równaniu  
 może być  
 j realiza-  
 zmodulo-  
 ność oraz

wariantna  
 wą struk-  
 , których  
 cznej taka  
 stycznych  
 co okres  
 relacyjna  
 ści mogą  
 dni. Po  
 $[0, T]$ , jak  
 acymi do  
 ci funkcji  
 $\xi\left(t + \frac{u}{2}\right)$   
 Odmienne  
 acowania  
 ści funkcji  
 resowego  
 loczynów

stacjonarne,

„coefficient

odpowiednich próbek. Przesunięcie  $u$  występuje wtedy jako parametr, który można zmieniać. Znajomość funkcji autokorelacji dla chwil czasowych  $t \in [0, T]$ , umożliwia estymację komponentów korelacyjnych [1,2] na podstawie przekształcenia Fouriera. Wzory na estymatory komponentów są wtedy podobne do wzorów dla estymatorów funkcji autokorelacji stacjonarnego procesu losowego z tą różnicą, że w przypadku okresowo korelowanych procesów przy uśrednieniu stosowane są funkcje wagowe

$$\varphi_n(t) = e^{ik\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Możliwości koherentnej metody estymacji oraz jej efektywność mogą być zbadane tylko na podstawie analizy właściwości statystycznych charakterystyk estymatorów. Właśnie analizie właściwości koherentnych estymatorów wartości oczekiwanej, funkcji autokorelacji, jak też szacowanych na ich podstawie współczynników Fouriera (rozdziały 2, 3 i 4), konkretyzacji tych właściwości w odniesieniu do amplitudowo i fazowo zmodulowanych sygnałów (rozdziały 5 i 6) jest poświęcona niniejsza praca. Przy tej analizie okres  $T$  uważamy jako znany apriori<sup>3</sup>. Przy wyprowadzaniu wzorów na wariancję estymatorów charakterystyk korelacyjnych, także zakładamy, że sygnały są sygnałami gaussowskimi. W takim przypadku momenty czwartego rzędu mogą być wyrażone za pośrednictwem ich funkcji autokorelacji.

## 2. ESTYMACJA WARTOŚCI OCZEKIWANEJ I JEJ KOMPONENTÓW

Przypuśćmy, że uśrednienie zostanie wykonane w przedziale odcinka realizacji  $\theta = NT$ ,  $N$  — liczba naturalna. Koherentny estymator wartości oczekiwanej ma postać:

$$\hat{m}(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \xi(t+nT), \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

Powyższy estymator jest nieobciążony, gdyż

$$E\hat{m}(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} m(t+nT) = m(t). \quad (2)$$

Dla wariancji mamy

$$D[\hat{m}(t)] = E[\hat{m}(t) - E\hat{m}(t)]^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) b(t, nT). \quad (3)$$

Jeżeli powiązania korelacyjne sygnału maleją wraz ze wzrostem przesunięcia  $u$

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} b(t, u) = 0, \quad (4)$$

<sup>3</sup> Statystyka OKPL, przy nieznanym okresie  $T$ , została rozpatrzona w pracy [5], jak też w artykułach cytowanych w tej pracy.

to  $D[\hat{m}(t)] \rightarrow 0$  przy  $\theta \rightarrow \infty$ , tj. estymator (1) jest zgodny. Tak więc, warunek (4) jest warunkiem wystarczającym dla zgodności koherentnego estymatora wartości oczekiwanej okresowo korelowanego sygnału losowego.

Wariancja  $D[m(t)]$ , jak widać, jest okresową funkcją czasu. Przedstawmy ją w postaci szeregu Fouriera

$$D[\hat{m}(t)] = \gamma_0 + \sum_{l \in \mathbf{N}} (\gamma_l^c \cos \omega_0 t + \gamma_l^s \sin \omega_0 t). \quad (5)$$

Współczynniki tego szeregu określimy, podstawiając do równania (3) przedstawienie [1]

$$b(t, nT) = B_0(nT) + \sum_{l \in \mathbf{N}} [B_l^c(nT) \cos \omega_0 t + B_l^s(nT) \sin \omega_0 t]. \quad (6)$$

Ponieważ [2]

$$B_0(-u) = B_0(u), \quad B_l^c(-u) = B_l^c(u) \cos \omega_0 u - B_l^s(u) \sin \omega_0 u, \quad (7)$$

$$B_l^s(-u) = B_l^s(u) \cos \omega_0 u + B_l^c(u) \sin \omega_0 u, \quad (8)$$

to  $B(-nT) = B(nT)$ ,  $B_l^c(-nT) = B_l^c(nT)$ ,  $B_l^s(-nT) = B_l^s(nT)$ . Wtedy

$$\gamma_0 = \frac{1}{N} \left[ B_0(0) + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \left( 1 - \frac{n}{N} \right) B_0(nT) \right], \quad (9)$$

$$\gamma_l^c = \frac{1}{N} \left[ B_l^c(0) + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \left( 1 - \frac{n}{N} \right) B_l^c(nT) \right], \quad (10)$$

$$\gamma_l^s = \frac{1}{N} \left[ B_l^s(0) + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \left( 1 - \frac{n}{N} \right) B_l^s(nT) \right]. \quad (11)$$

Średnia wartość wariancji określa się zerowym współczynnikiem

$$\gamma_0 = \mu_t \{ D[\hat{m}(t)] \} = \frac{1}{T} \int_0^T D[\hat{m}(t)] dt, \quad (12)$$

który zależy tylko od zerowego komponentu korelacyjnego  $B_0(u)$ . Amplitudy tych składowych harmonicznych zależą tylko od komponentów korelacyjnych o tych samych numerach. Jeżeli powiązania korelacyjne sygnału gasną do zera, w przedziale o długości mniejszej niż okres  $T$ , to wyrażenia dla współczynników można przepisać w postaci

$$\gamma_0 = \frac{B_0(0)}{N}, \quad \gamma_2^c = \frac{B_2^c(0)}{N}, \quad \gamma_2^s = \frac{B_2^s(0)}{N}. \quad (13)$$

Warunek (4) jest  
ściśle oczekiwa-

Wymy ją w po-

W tym przypadku czasowy przebieg wariancji  $D[\hat{m}(t)]$  z dokładnością do mnożnika powtarza przebieg czasowy wariancji sygnału  $b(t, 0)$ .

Założmy, że estymator wartości oczekiwanej sygnału jest obliczony dla wszystkich  $t \in [0, T]$  i skonstruujemy statystyki

$$(5) \quad \hat{m}_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{m}(t) dt, \quad \hat{m}_i^c = \frac{2}{T} \int_0^T \hat{m}(t) \cos \omega_0 t dt, \quad \hat{m}_i^s = \frac{2}{T} \int_0^T \hat{m}(t) \sin \omega_0 t dt. \quad (14)$$

Stawienie [1]

Powyższe estymatory po uwzględnieniu wzoru (1) oraz wprowadzeniu nowej zmiennej całkowania  $s = t + nT$  przybierają postać

$$(6) \quad \hat{m}_0 = \frac{1}{\theta} \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^T \xi(t + nT) dt = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \xi(t) dt, \quad (15)$$

$$(7) \quad \hat{m}_i^c = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \xi(t) \cos \omega_0 t dt, \quad \hat{m}_i^s = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \xi(t) \sin \omega_0 t dt. \quad (16)$$

(8) Widać więc, iż estymatory są nieobciążone:  $E\hat{m}_0 = m_0$ ,  $E\hat{m}_i^c = m_i^c$ ,  $E\hat{m}_i^s = m_i^s$ . Ich wariancje są równe

$$(9) \quad D[\hat{m}_0] = E(\hat{m}_0 - E\hat{m}_0)^2 = \frac{1}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta b(t, s-t) dt ds. \quad (17)$$

$$(10) \quad D[\hat{m}_i^c] = E(\hat{m}_i^c - E\hat{m}_i^c)^2 = \frac{4}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta b(t, s-t) \cos \omega_0 t \cos \omega_0 s dt ds, \quad (18)$$

$$(11) \quad D[\hat{m}_i^s] = E(\hat{m}_i^s - E\hat{m}_i^s)^2 = \frac{4}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^\theta b(t, s-t) \sin \omega_0 t \sin \omega_0 s dt ds. \quad (19)$$

Jeżeli warunek (4) jest spełniony, to  $D[\hat{m}_0] \rightarrow 0$ ,  $D[\hat{m}_i^c] \rightarrow 0$ ,  $D[\hat{m}_i^s] \rightarrow 0$  przy  $\theta \rightarrow 0$ . Tak więc, estymatory (14) są zgodne.

(12) Biorąc pod uwagę właściwości funkcji autokorelacji  $b(t, s-t)$ , przekształcamy wyrażenia (17)–(19). Wprowadźmy zmienną  $u = s-t$  i odwróćmy kolejność całkowania. Wariancje estymatorów przyjmują wtedy następujące postacie

amplitudy tych  
tych samych  
ale o długości  
w postaci

$$D[\hat{m}_0] = \frac{2}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^{\theta-u} b(t, u) dt du, \quad (20)$$

$$(13) \quad D[\hat{m}_i^c] = \frac{4}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^{\theta-u} b(t, u) [\cos \omega_0 u + \cos \omega_0 (2t+u)] dt du, \quad (21)$$

$$D[\hat{m}_l^s] = \frac{4}{\theta^2} \int_0^{\theta} \int_0^{\theta-u} b(t, u) [\cos \omega_0 u - \cos \omega_0 (2t+u)] dt du. \quad (22)$$

Podstawmy do równań (20) przedstawienie funkcji autokorelacji w postaci szeregu Fouriera. Po całkowaniu względem  $t$  dla dużych  $u$  otrzymujemy

$$D[\hat{m}_0] \approx \frac{2}{\theta} \int_0^{\theta} \left(1 - \frac{u}{\theta}\right) B_0(u) du, \quad (23)$$

$$D[\hat{m}_l^c] \approx \frac{4}{\theta} \int_0^{\theta} \left(1 - \frac{u}{\theta}\right) B_0(u) \cos \omega_0 u du - \quad (24)$$

$$- \frac{2}{\theta} \int_0^{\theta} \left(1 - \frac{u}{\theta}\right) [B_{2l}^s(u) \sin \omega_0 u - B_{2l}^c(u) \cos \omega_0 u] du,$$

$$D[\hat{m}_l^s] \approx \frac{4}{\theta} \int_0^{\theta} \left(1 - \frac{u}{\theta}\right) B_0(u) \cos \omega_0 u du - \quad (25)$$

$$- \frac{2}{\theta} \int_0^{\theta} \left(1 - \frac{u}{\theta}\right) [B_{2l}^c(u) \cos \omega_0 u - B_{2l}^s(u) \sin \omega_0 u] du.$$

Tak więc, zasadniczą charakterystyką, określającą wariancję estymatora zerowego komponentu wartości oczekiwanej, jest zerowy komponent korelacyjny. Wariancje estymatorów wyższych komponentów wartości oczekiwanej są funkcjami zerowego komponentu korelacyjnego i komponentów korelacyjnych, których numery są dwa razy większe od numerów komponentów wartości oczekiwanej, które zostały oszacowane. Składniki wariancji estymatorów komponentów kosinusowych i sinusowych, które opisują zależności od wyższych komponentów korelacyjnych, mają różne znaki. Ponieważ estymatory amplitudy zespolonej  $m_l$  mają postać

$$\hat{m}_l = \frac{1}{2} (\hat{m}_l^c - i \hat{m}_l^s), \text{ to ich wariancja jest równa } D[\hat{m}_l] = \frac{1}{4} [D[\hat{m}_l^c] + D[\hat{m}_l^s]].$$

Z powyższego wynika, że ta wielkość nie zależy od wyższych komponentów korelacyjnych

$$D[\hat{m}_l] = \frac{2}{\theta} \int_0^{\theta} \left(1 - \frac{u}{\theta}\right) B_0(u) \cos \omega_0 u du. \quad (26)$$

Zależność od numeru  $l$  uwidacznia się przy zmianie argumentu ( $\omega_0 u$ ) kosinusowej funkcji wagowej.

### 3. WŁAŚCIWOŚCI ESTYMATORA FUNKCJI AUTOKORELACJI

Koherentny estymator funkcji autokorelacji zapiszemy w postaci

$$\hat{b}(t, u) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [\xi(t+u+nT) - \hat{m}(t+u+nT)][\xi(t+nT) - \hat{m}(t+nT)]. \quad (27)$$

Jak wynika z tego wzoru, dla dowolnego przesunięcia  $u$  ilość okresów uśrednienia  $N$  jest jednakowa. Istnieje więc potrzeba zwiększenia długości odcinka realizacji do wartości  $u$ . Przy analizie będziemy zakładali, że  $\theta = NT + u_m$ , gdzie  $u_m$  — największa wartość przesunięcia, dla której jest szacowana funkcja autokorelacji. Jeżeli wartość oczekiwana jest szacowana tylko dla  $t \in [0, T]$ , a dla wszystkich innych  $t$  obliczenie jest wykonane na podstawie równania  $\hat{m}(t+nT) = \hat{m}(t)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , to biorąc pod uwagę statystykę (1), mamy

$$\hat{b}(t, u) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \xi(t+u+nT) \xi(t+nT) - \hat{m}(t) \hat{m}(t+u). \quad (28)$$

Stąd otrzymujemy

$$E\hat{b}(t, u) = b(t, u) - \frac{1}{N^2} \sum_{m, n=0}^{N-1} b[t, u + (m-n)T]. \quad (29)$$

Dla obciążenia estymatora funkcji autokorelacji  $\varepsilon[\hat{b}(t, u)] = E\hat{b}(t, u) - b(t, u)$  po zamianie wskaźnika  $m = k + n$  i sumowaniu względem  $n$  uzyskujemy

$$\varepsilon[\hat{b}(t, u)] = -\frac{1}{N} \sum_{n=N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) b(t, u+nT). \quad (30)$$

Powyższe wyrażenie przy  $u = 0$  z dokładnością do znaku zbieżne jest ze wzorem na wariancję estymatora wartości oczekiwanej. Zmiany okresowe w czasie funkcji autokorelacji powodują te same zmiany obciążenia. Zatem

$$\varepsilon[\hat{b}(t, u)] = \varepsilon_0(u) + \sum_{l \in \mathbb{N}} [\varepsilon_l^c(u) \cos \omega_0 t + \varepsilon_l^s(u) \sin \omega_0 t]. \quad (31)$$

Widać więc, że

$$\varepsilon_0(u) = -\frac{1}{N} \sum_{n=N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) B_0(u+nT), \quad \varepsilon_l^c(u) = -\frac{1}{N} \sum_{n=N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) B_l^c(u+nT), \quad (32)$$

$$\varepsilon_l^s(u) = -\frac{1}{N} \sum_{n=N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) B_l^s(u+nT). \quad (33)$$

Z warunku (4) wynikają równania graniczne

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} B_0(u) = 0, \quad \lim_{|n| \rightarrow \infty} B_l^c(u) = 0, \quad \lim_{|n| \rightarrow \infty} B_l^s(u) = 0. \quad (34)$$

Przy ich spełnieniu mamy  $\varepsilon_0(u) \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_l^c(u) \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon_l^s(u) \rightarrow 0$  i  $\varepsilon[(t, u)] \rightarrow 0$  przy założeniu, że  $N \rightarrow \infty$ . Tak więc, estymator (28) jest asymptotycznie nieobciążony.

Estymator funkcji autokorelacji  $k(t, u)$  może być obliczony na podstawie estymatora funkcji autokorelacji  $b(t, u)$ :  $\hat{k}(t, u) = \hat{b}\left(t - \frac{u}{2}, u\right)$ . Dla wartości oczekiwanej tego estymatora mamy

$$E\hat{k}(t, u) = E\hat{b}\left(t - \frac{u}{2}, u\right) = b\left(t - \frac{u}{2}, u\right) - \frac{1}{N} \sum_{n=N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) b\left(t - \frac{u}{2}, u + nT\right). \quad (35)$$

Uwzględniając przedstawienia

$$b\left(t - \frac{u}{2}, u + nT\right) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} B_l(u + nT) e^{il\omega_0\left(t - \frac{u}{2}\right)}, \quad B_l(u) = \frac{1}{2} [B_l^c(u) - iB_l^s(u)], \quad (36)$$

oraz równania [1]

$$B_l(u + nT) = K_l(u + nT) e^{il\omega_0 \frac{1}{2}(u + nT)} = (-1)^{ln} K_l(u + nT) e^{il\omega_0 \frac{u}{2}}, \quad (37)$$

$$K_l(u) = \frac{1}{2} [K_l^c(u) - iK_l^s(u)],$$

dla obciążenia estymatora  $\hat{k}(t, u)$  znajdujemy

$$\varepsilon[\hat{k}(t, u)] = \tilde{\varepsilon}_0(u) + \sum_{l \in \mathbf{N}} [\tilde{\varepsilon}_l^c(u) \cos \omega_0 t + \tilde{\varepsilon}_l^s(u) \sin \omega_0 t], \quad (38)$$

gdzie

$$\tilde{\varepsilon}_0(u) = -\frac{1}{N} \sum_{n=N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) K_0(u + nT), \quad (39)$$

$$\tilde{\varepsilon}_l^c(u) = -\frac{1}{N} \sum_{n=N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) (-1)^{ln} K_l^c(u + nT), \quad (40)$$

$$\tilde{\varepsilon}_l^s(u) = -\frac{1}{N} \sum_{n=N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) (-1)^{ln} K_l^s(u + nT). \quad (41)$$

Przy spełnieniu warunku (4) obciążenie  $\varepsilon[\hat{k}(t, u)]$  dąży do zera przy  $N \rightarrow \infty$  czyli estymator  $\hat{k}(t, u)$  jest asymptotycznie nieobciążony.

(34) Znajdźmy teraz wariancje estymatorów  $\hat{b}(t, u)$  i  $\hat{k}(t, u)$ . W pierwszym przybliżeniu mamy

$$D[\hat{b}(t, u)] = E\left[\hat{b}(t, u) - [E\hat{b}(t, u)]^2\right] = \frac{1}{N} \sum_{m, n=0}^{N-1} E\overset{\circ}{\xi}(t+u+nT)\overset{\circ}{\xi}(t+nT) \times \\ \times \overset{\circ}{\xi}(t+mT)\overset{\circ}{\xi}(t+u+mT) - E[\hat{b}(t, u)]^2, \quad (42)$$

Przyjmijmy, że sygnał  $\xi(t)$  jest gaussowskim procesem losowym. Wtedy czwarty moment centralny jest sumą iloczynów funkcji korelacji wszystkich możliwych par

$$(35) \quad E\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)\overset{\circ}{\xi}(t_3)\overset{\circ}{\xi}(t_4) = b(t_1, t_2 - t_1)b(t_3, t_4 - t_3) + \\ + b(t_1, t_4 - t_1)b(t_2, t_3 - t_2) + b(t_1, t_3 - t_1)b(t_2, t_4 - t_2). \quad (43)$$

(36) Stosując to równanie oraz uwzględniając okresowość funkcji korelacji względem  $t$ , otrzymujemy

$$(37) \quad D[\hat{b}(t, u)] = \frac{1}{N^2} \sum_{m, n=0}^{N-1} [b[t, (m-n)T]b[t+u, (m-n)T] + \\ + b[t, u + (m-n)T]b[t, u - (m-n)T]]. \quad (44)$$

Składowe pod znakiem sumy są funkcjami autokorelacji procesu  $\eta(t, u) = \overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t+u)$ :

$$(38) \quad b_\eta(t, s-t, u) = E[\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t+u) - b(t, u)][\overset{\circ}{\xi}(s)\overset{\circ}{\xi}(s+u) - b(s, u)] = \\ = b(t, s-t)b(t+u, s-t) + b(t, u+s-t)b(t+u, s-t-u). \quad (45)$$

(39) Funkcja  $b_\eta(t, u_1, u)$  jest okresową funkcją czasu i spełnia równanie  $b_\eta(t, -u_1, u) = b_\eta(t - u_1, u_1, u)$ . Można tego dowieść stosując wyrażenie (45) oraz własność symetrii funkcji autokorelacji OKPL  $b(t, -u) = b(t-u, u)$ .

(40) Przedstawmy funkcję  $b_\eta(t, u_1, u)$  w postaci szeregu Fouriera:

$$(41) \quad b_\eta(t, u_1, u) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} \tilde{B}_k(u_1, u) e^{ik\omega_0 t}. \quad (46)$$

Współczynniki  $\tilde{B}_k(u_1, u)$  można znaleźć na podstawie rozwinięcia w szereg funkcji



autokorelacji  $b(t, u)$ . Załóżmy, że liczba komponentów korelacyjnych jest skończona i równa  $N_2$ :

$$b(t, u) = \sum_{l=-N_2}^{N_2} B_l(u) e^{il\omega_0 t}. \quad (47)$$

Korzystając z tego wzoru, na podstawie równania (45) otrzymujemy

$$\tilde{B}_k(u_1, u) = \begin{cases} \sum_{q=-N_2-k}^{N_2} e^{-iq\omega_0 u} [B_{q+k}(u_1+u)B_q^*(u_1-u) + B_{q+k}(u_1)B_q^*(u_1)], & k \leq 0, \\ \sum_{p=-N_2}^{N_2} e^{-iq\omega_0 u} [B_{q+k}(u_1+u)B_q^*(u_1-u) + B_{q+k}(u_1)B_q^*(u_1)], & k > 0, \end{cases} \quad (48)$$

gdzie  $B_q^*(u_1-u)$ ,  $B_q^*(u_1)$  — wielkości sprzężone,  $k \in [-2N_2, 2N_2]$ . Ponieważ  $b_\eta(t, -u_1, u) = b_\eta(t-u_1, u_1, u)$ , to

$$\sum_{k=-2N_2}^{2N_2} \tilde{B}_k(-u_1, u) e^{ik\omega_0 t} = \sum_{k=-2N_2}^{2N_2} \hat{B}_k(u_1, u) e^{-ik\omega_0 u_1} e^{ik\omega_0 t}. \quad (49)$$

Stąd wynika, że

$$\tilde{B}_k(-u_1, u) = \tilde{B}_k(u_1, u) e^{ik\omega_0 u_1}. \quad (50)$$

Podstawiając do tego równania  $u_1 = -nT$ , mamy  $\tilde{B}_k(-nT, u) = \tilde{B}_k(nT, u)$ . Tak więc, komponenty  $\tilde{B}_k(nT, u)$  są parzystymi funkcjami  $n$ . Wykorzystajmy tą własność w celu uproszczenia wyrażenia na wariancję estymatora funkcji autokorelacji. Jak widać ze wzoru (44), wielkość ta jest okresową funkcją czasu  $t$  i może być przedstawiona w postaci szeregu Fouriera:

$$D[\hat{b}(t, u)] = \alpha_0(u) + \sum_{l=1}^{2N_2} [\alpha_l^c(u) \cos l\omega_0 t + \alpha_l^s(u) \sin l\omega_0 t], \quad (51)$$

gdzie

$$\alpha_0(u) = \frac{1}{N^2} \sum_{m,n=0}^{N-1} \tilde{B}_0[(m-n)T, u], \quad \alpha_l^c(u) = \frac{1}{N^2} \sum_{m,n=0}^{N-1} \tilde{B}_l^c[(m-n)T, u], \quad (52)$$

$$\alpha_l^s(u) = \frac{1}{N^2} \sum_{m,n=0}^{N-1} \tilde{B}_l^s[(m-n)T, u], \quad (53)$$

oraz  $\tilde{B}_l^c(u_1, u) - i\tilde{B}_l^s(u_1, u) = 2\tilde{B}_l(u_1, u)$ . Po zamianie  $m = k+n$ , uwzględnieniu równań  $\tilde{B}_0(-nT, u) = \tilde{B}_0(nT, u)$ ,  $\tilde{B}_l^c(-nT, u) = \tilde{B}_l^c(nT, u)$  oraz przekształceniach uzyskujemy

Z warunków  
mających prz

tj. do stop  
 $D[\hat{b}(t, u)]$   
autokorelac

Uśredn  
 $\alpha_0(u)$ , zależ  
komponent  
OKPL, to c  
tyk probabi  
tyk jego pr

Poniew

$D[\hat{k}]$

Stąd otrzy  
rzeczywiste

gdzie

st skończona

(47)

$k \leq 0$ ,

(48)

$k > 0$ ,

$\hat{b}_\eta(t, -u_1, u) =$

(49)

(50)

. Tak więc,  
sność w celu  
ak widać ze  
przedstawiona

(51)

$\hat{b}_\eta(t, u)$ ,

(53)

eniu równań  
uzyskujemy

$$\alpha_0(u) = \frac{1}{N} \left[ \tilde{B}_0(0, u) + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \left( 1 - \frac{n}{N} \right) \tilde{B}_0(nT, u) \right], \quad (54)$$

$$\alpha_i^c(u) = \frac{1}{N} \left[ \tilde{B}_i^c(0, u) + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \left( 1 - \frac{n}{N} \right) \tilde{B}_i^c(nT, u) \right], \quad (55)$$

$$\alpha_i^s(u) = \frac{1}{N} \left[ \tilde{B}_i^s(0, u) + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \left( 1 - \frac{n}{N} \right) \tilde{B}_i^s(nT, u) \right]. \quad (56)$$

Z warunku (4) oraz równań (48) wynika, że współczynniki  $\tilde{B}_0(nT, u)$  oraz  $B_i^{c,s}(nT, u)$  maleją przy  $n \rightarrow \infty$ . Prowadzi to do spełnienia równań granicznych

$$\lim_{|N| \rightarrow \infty} \alpha_0(u) = 0, \quad \lim_{|N| \rightarrow \infty} \alpha_i^{c,s}(u) = 0, \quad \lim_{|N| \rightarrow \infty} D[\hat{b}(t, u)] = 0, \quad (57)$$

tj. do stopniowego zmniejszenia współczynników  $\alpha_0(u)$ ,  $\alpha_i^{c,s}(u)$  oraz samej wariancji  $D[\hat{b}(t, u)]$  ze wzrostem liczby okresów odcinka realizacji, na podstawie którego funkcja autokorelacji jest szacowana.

Uśredniona w czasie wsartość wariancji, która jest określona współczynnikiem  $\alpha_0(u)$ , zależy, jak widać ze wzoru (48), nie tylko od zerowego, ale także wyższych komponentów korelacyjnych. Stąd wynika istotny wniosek: jeżeli sygnał jest opisany OKPL, to dokładność estymacji nawet uśrednionych w czasie wartości jego charakterystyk probabilistycznych nie może być określona przy wyłącznym stosowaniu charakterystyk jego przybliżenia stacjonarnego.

Ponieważ  $\hat{k}(t, u) = \hat{b}\left(t - \frac{u}{2}, u\right)$ , to

$$D[\hat{k}(t, u)] = D\left[\hat{b}\left(t - \frac{u}{2}, u\right)\right] = \sum_{l=-2N_2}^{2N_2} \alpha_l(u) e^{il\omega_0 \frac{u}{2}} e^{il\omega_0 t} = \sum_{l=-2N_2}^{2N_2} \beta_l(u) e^{il\omega_0 t}. \quad (58)$$

Stąd otrzymujemy  $\beta_l(u) = \alpha_l(u) e^{-il\omega_0 \frac{u}{2}}$ . Szereg (58) może być przepisany w postaci rzeczywistej

$$D[\hat{k}(t, u)] = \beta_0(u) + \sum_{l=1}^{2N_2} [\beta_l^c(u) \cos \omega_0 t + \beta_l^s(u) \sin \omega_0 t], \quad (59)$$

gdzie

$$\beta_0(u) = \alpha_0(u), \quad \beta_l^c(u) = \alpha_l^c(u) \cos \omega_0 \frac{u}{2} - \alpha_l^s(u) \sin \omega_0 \frac{u}{2}, \quad (60)$$

$$\beta_l^s(u) = \alpha_l^s(u) \cos \omega_0 \frac{u}{2} + \alpha_l^c(u) \sin \omega_0 \frac{u}{2}. \quad (61)$$

Wzory (59) – (61) razem z równaniami (54) – (56) określają wariancję estymatora  $\hat{k}(t, u)$  w zależności od ilości okresów uśrednienia  $N$ . Oczywiście jest, że  $D[\hat{k}(t, u)] \rightarrow 0$  przy  $N \rightarrow \infty$  i spełnieniu warunku (4).

#### 4. ESTYMATORY KOMPONENTÓW KOLERACYJNYCH

Założmy, że estymator funkcji autokorelacji  $\hat{b}(t, u)$  jest obliczony dla wszystkich  $t \in [0, T]$  i przesunąć  $u$ , które należą do pewnego przedziału  $[0, u_m]$ , gdzie  $u_m$  — punkt obciążenia korelogramu. Dla tych wartości przesunąć mogą być skonstruowane estymatory komponentów korelacyjnych

$$\hat{B}_0(u) = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{b}(t, u) dt, \quad (62)$$

$$\hat{B}_l^c(u) = \frac{2}{T} \int_0^T \hat{b}(t, u) \cos \omega_0 t dt, \quad \hat{B}_l^s(u) = \frac{2}{T} \int_0^T \hat{b}(t, u) \sin \omega_0 t dt. \quad (63)$$

Biorąc pod uwagę wyrażenia na obciążenie estymatora funkcji autokorelacji oraz przedstawienie funkcji autokorelacji w postaci szeregu Fouriera, po całkowaniu względem  $t$  otrzymujemy

$$\varepsilon[\hat{B}_0(u)] = \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon[\hat{b}(t, u)] dt = -\frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) B_0(u + nT), \quad (64)$$

$$\varepsilon[\hat{B}_l^c(u)] = \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon[\hat{b}(t, u)] \cos \omega_0 t dt = -\frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) B_l^c(u + nT), \quad (65)$$

$$\varepsilon[\hat{B}_l^s(u)] = \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon[\hat{b}(t, u)] \sin \omega_0 t dt = -\frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) B_l^s(u + nT), \quad (66)$$

Przy obciążeniu estymatorów komponentów korelacyjnych, jak widać, określone są tylko wielkości tych komponentów, które są szacowane. Wyprowadzone wzory są analogiczne do tych, które określają odpowiednie współczynniki Fouriera szeregu dla obciążenia estymatora funkcji autokorelacji.

Dla obciążeń estymatorów komponentów korelacyjnych  $K_l(u)$ , stosując związek  $\hat{K}_l(u) = \hat{B}_l(u) e^{i\omega_0 \frac{u}{2}}$ , znajdujemy

$$\varepsilon[\hat{K}_0(u)] = \varepsilon[\hat{B}_0(u)], \quad \varepsilon[\hat{K}_l^s(u)] = -\frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) (-1)^{ln} K_l^s(u+nT), \quad (67)$$

$$\varepsilon[\hat{K}_l^s(u)] = -\frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) (-1)^{ln} K_l^s(u+nT). \quad (68)$$

Obliczmy wariancje estymatorów. Po podstawieniu wyrażenia (28) do wzorów (62)–(63), uwzględniając okresowość estymatora wartości oczekiwanej  $\hat{m}(t+nT) = \hat{m}(t)$  oraz zamianę  $s = t+nT$ , uzyskujemy

$$\hat{B}_0(u) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \left[ \hat{\xi}(s) \hat{\xi}(s+u) - \hat{m}(s+u) \hat{m}(s) \right] ds, \quad (69)$$

$$\hat{B}_l^c(u) = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left[ \hat{\xi}(s) \hat{\xi}(s+u) - \hat{m}(s+u) \hat{m}(s) \right] \cos \omega_0 s ds, \quad (70)$$

$$\hat{B}_l^s(u) = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left[ \hat{\xi}(s) \hat{\xi}(s+u) - \hat{m}(s+u) \hat{m}(s) \right] \sin \omega_0 s ds. \quad (71)$$

Dla sygnałów gaussowskich w pierwszym przybliżeniu mamy

$$D[\hat{B}_0(u)] = \frac{2}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^{\theta-u_1} b_\eta(t, u_1, u) dt du_1, \quad (72)$$

$$D[\hat{B}_l^c(u)] = \frac{4}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^{\theta-u_1} b_\eta(t, u_1, u) [\cos \omega_0 u_1 + \cos \omega_0 (2t + u_1)] dt du_1, \quad (73)$$

$$D[\hat{B}_l^s(u)] = \frac{4}{\theta^2} \int_0^\theta \int_0^{\theta-u_1} b_\eta(t, u_1, u) [\cos \omega_0 u_1 + \cos \omega_0 (2t + u_1)] dt du_1. \quad (74)$$

Podstawmy do równań (72)–(74) przedstawienie funkcji  $b_\eta(t, u_1, u)$  w postaci szeregu Fouriera oraz scałkujmy względem  $t$ . Wtedy dla dużych  $\theta$

$$D[\hat{B}_0(u)] \approx \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \tilde{B}_0(u_1, u) du_1, \quad (75)$$

$$D[\hat{B}_l^c(u)] \approx \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \times \quad (76)$$

$$\times [2\tilde{B}_0(u_1, u) \cos \omega_0 u_1 + \tilde{B}_{2l}^c(u_1, u) \cos \omega_0 u_1 - \tilde{B}_{2l}^s(u_1, u) \sin \omega_0 u_1] du_1,$$

$$D[\hat{B}_l^s(u)] \approx \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \times \quad (77)$$

$$\times [2\tilde{B}_0(u_1, u) \cos \omega_0 u_1 - \tilde{B}_{2l}^c(u_1, u) \cos \omega_p u_1 + \tilde{B}_{2l}^s(u_1, u) \sin \omega_0 u_1] du_1.$$

Postacie wzorów (75)–(77) są podobne do postaci wyrażeń na wariancję estymatorów komponentów wartości oczekiwanej z tą różnicą, że pierwsze zamiast współczynników Fouriera funkcji autokorelacji sygnału, zawierają współczynniki Fouriera funkcji  $b_\eta(t, u_1, u)$ . Zerowy komponent  $B_0(u_1, u)$ , jak wynika z równania (48), zależy od wszystkich komponentów korelacyjnych sygnału, dlatego obliczenie dokładności estymacji zerowego komponentu korelacyjnego za pomocą zwykłego uśrednienia nie może być przeprowadzone bez uwzględnienia wyższych komponentów. Podkreśla to szczególną rolę wyboru modelu sygnału do badań statystycznych. Wariancje estymatorów kosinusowych i sinusowych komponentów korelacyjnych zależą od wyższych komponentów funkcji autokorelacji  $b_\eta(t, u_1, u)$ . Należy zaznaczyć, iż taka zależność jest niewłaściwa dla wariancji estymatorów amplitud  $\hat{B}_l(u) = \frac{1}{2}[\hat{B}_l^c(u) - i\hat{B}_l^s(u)]$ :

$$D[\hat{B}_l(u)] = \frac{1}{4}[D[\hat{B}_l^c(u)] + D[\hat{B}_l^s(u)]] = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \hat{B}_0(u_1, u) \cos \omega_0 u_1 du_1. \quad (78)$$

Skonstruujmy estymatory dla komponentów funkcji autokorelacji  $k(t, u)$ , stosując zależność między funkcjami  $K_l(u)$  i  $B_l(u)$ :  $K_l(u) = B_l(u)e^{i\omega_0 \frac{u}{2}}$ . Mamy więc

$$\hat{K}_0(u) = \hat{B}_0(u), \quad \hat{K}_l^c(u) = \hat{B}_l^c(u) \cos \omega_0 \frac{u}{2} - \hat{B}_l^s(u) \sin \omega_0 \frac{u}{2}, \quad (79)$$

$$\hat{K}_l^s(u) = \hat{B}_l^c(u) \sin \omega_0 \frac{u}{2} + \hat{B}_l^s(u) \cos \omega_0 \frac{u}{2}. \quad (80)$$

Oczywiste jest, iż  $D[\hat{K}_0(u)] = D[\hat{B}_0(u)]$ . Biorąc pod uwagę równania (79)–(80), znajdujemy

$$D[\hat{K}_l^c(u)] = \frac{1}{2}[D[\hat{B}_l^c(u)] + D[\hat{B}_l^s(u)]] + \quad (81)$$

$$+ \frac{1}{2}[D[\hat{B}_l^c(u)] - D[\hat{B}_l^s(u)]] \cos \omega_0 u - E\hat{B}_l^c(u)\hat{B}_l^s(u) \sin \omega_0 u,$$

$$D[\hat{K}_l^s(u)] = \frac{1}{2}[D[\hat{B}_l^c(u)] + D[\hat{B}_l^s(u)]] - \quad (82)$$

$$- \frac{1}{2}[D[\hat{B}_l^c(u)] - D[\hat{B}_l^s(u)]] \cos \omega_0 u + E\hat{B}_l^c(u)\hat{B}_l^s(u) \sin \omega_0 u.$$

(77)

Korelacja między estymatorami kosinusowych i sinusowych komponentów dla dużych  $\theta$  wyraża się wzorem

$$E\hat{B}_i^c(u)\hat{B}_i^s(u) = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) [\tilde{B}_{2i}^c(u_1, u) \sin \omega_0 u_1 + \tilde{B}_{2i}^s(u_1, u) \cos \omega_0 u_1] du_1. \quad (83)$$

estymatorów  
wzrostu  
funkcji  
zależy od  
właściwości es-  
tymatorów  
nie od  
określenia to-  
żności es-  
tymato-  
rów  
wyższych  
różnic jest

Uwzględniając równanie (78) uzyskujemy

$$D[\hat{K}_i^c(u)] = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) [2\tilde{B}_0(u_1, u) \cos \omega_0 u_1 + \quad (84)$$

$$+ \tilde{B}_{2i}^c(u_1, u) \cos \omega_0(u + u_1) - \tilde{B}_{2i}^s(u_1, u) \sin \omega_0(u + u_1)] du_1,$$

$$D[\hat{K}_i^s(u)] = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) [2\tilde{B}_0(u_1, u) \cos \omega_0 u_1 - \quad (84)$$

$$- \tilde{B}_{2i}^c(u_1, u) \cos \omega_0(u + u_1) + \tilde{B}_{2i}^s(u_1, u) \sin \omega_0(u + u_1)] du_1.$$

(78)

zależ-

Wariancje estymatorów komponentów zespolonych  $K_i(u) = \frac{1}{2}[K_i^c(u) - iK_i^s(u)]$ , jak wynika z wyprowadzonych równań, są określone tylko zerowym współczynnikiem  $\tilde{K}_0(u_1, u)$ :

$$D[\hat{K}_i(u)] = \frac{1}{4} [D[\hat{K}_i^c(u)] + D[\hat{K}_i^s(u)]] = \quad (86)$$

(79)

$$= \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \tilde{K}_0(u_1, u) \cos \omega_0 u_1 du_1.$$

(80)

(80), znaj-

Wariancje  $D[\hat{K}_i(u)]$  i  $D[\hat{B}_i(u)]$ , jak widać, są równe. Wariancje kosinusowych i sinusowych komponentów odróżniają się tylko obecnością funkcji oscylacyjnych, które nie wpływają na efektywność estymatorów.

(81)

## 5. ESTYMATORY CHARAKTERYSTYK SYGNAŁÓW ZMODULOWANYCH AMPLITUDOWO

(82)

Amplitudowo zmodulowany sygnał  $\xi(t) = \eta(t)f(t)$ , gdzie  $f(t)$  — zdeterminowana funkcja okresowa, opisująca nośną, zaś  $\eta(t)$  — stacjonarny proces losowy, jest jednym z najprostszych typów okresowo korelowanych procesów losowych. Jeżeli  $f(t) = \cos \omega_0 t$ , to wartość oczekiwania i funkcja autokorelacji sygnału są odpowiednio równe

$$m(t) = m \cos \omega_0 t, \quad b(t, u) = B_0(u) + B_2^c(u) \cos 2\omega_0 t + B_2^s(u) \sin 2\omega_0 t, \quad (87)$$

$$k(t,u) = K_0(u) + K_2^c(u)\cos 2\omega_0 t + K_2^s(u)\sin 2\omega_0 t, \quad (88)$$

gdzie

$$m = E\eta(t), \quad B_0(u) = B_2^c(u) = \frac{1}{2}R_\eta(u)\cos\omega_0 u, \quad (89)$$

$$B_2^s(u) = -\frac{1}{2}R_\eta(u)\sin\omega_0 u,$$

$$K_0(u) = \frac{1}{2}R_\eta(u)\cos\omega_0 u, \quad K_2^c(u) = \frac{1}{2}R_\eta(u), \quad K_2^s(u) = 0, \quad (90)$$

$$R_\eta(u) = E\dot{\eta}(t)\dot{\eta}(t+u), \quad \dot{\eta}(t) = \eta(t) - m.$$

Koherentne estymatory wartości oczekiwanej i funkcji autokorelacji  $b(t,u)$  obliczamy na podstawie uśrednienia odczytów co okres  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  (wzory (1) i (28)). Obciążenie estymatora wartości oczekiwanej jest równe zero, a jego wariancja wyraża się wzorem

$$D[\hat{m}(t)] = \gamma_0 + \gamma_2^c \cos 2\omega_0 t + \gamma_2^s \sin 2\omega_0 t, \quad (91)$$

gdzie

$$\gamma_0 = \gamma_2^c = \frac{1}{2N} \left[ R_\eta(0) + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \left( 1 - \frac{n}{N} \right) R_\eta(nT) \right], \quad \gamma_2^s = 0. \quad (92)$$

Założmy, że  $R_\eta(u) = De^{-\alpha|u|}$ . Wtedy mamy

$$\gamma_0 = \gamma_2^c = \frac{D}{2N} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \left( 1 - \frac{n}{N} \right) e^{-\alpha nT} \right] = \frac{D}{2N} [1 + 2S(\alpha T, N)], \quad (93)$$

gdzie

$$S(\alpha T, N) = \sum_{n=0}^{N-1} \left( 1 - \frac{n}{N} \right) e^{-\alpha nT} = \frac{e^{-\alpha T}}{1 - e^{-\alpha T}} \left[ 1 - \frac{1 - e^{-\alpha NT}}{N(1 - e^{-\alpha T})} \right]. \quad (94)$$

Dla dużych  $N$

$$S(\alpha T, N) \approx \frac{e^{-\alpha T}}{1 - e^{-\alpha T}}. \quad (95)$$

(88) Wyrażenie na wariancję (91) w tym przypadku przybiera postać

$$(89) \quad D[\hat{m}(t)] = \frac{D}{2N} \frac{1 + e^{-\alpha T}}{1 - e^{-\alpha T}} (1 + \cos 2\omega_0 t). \quad (96)$$

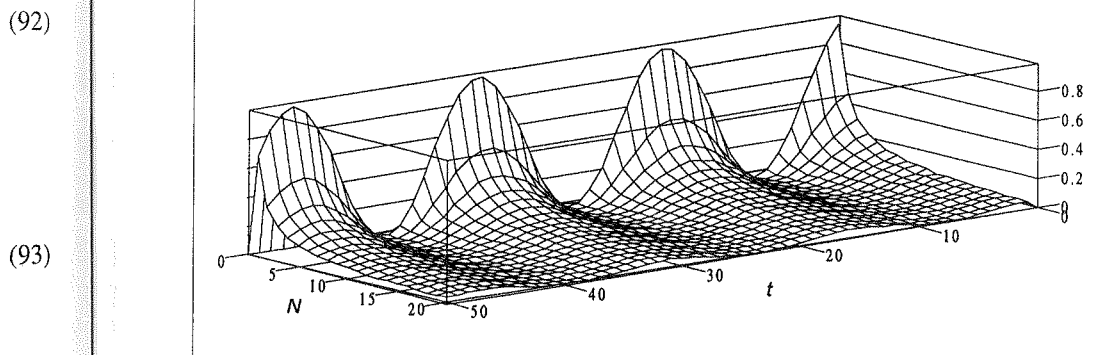
(90) Wariancja  $D[\hat{m}(t)]$ , jak widać, ma zerowe wartości w punktach  $t_k = \frac{(2k+1)T}{4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (rys. 1). Oznacza to, że wartość oczekiwana w takich punktach powinna być znana. Wynik taki można uzyskać wychodząc z wyrażenia na wartość oczekiwaną  $m(t) = m \cos \omega_0 t$ . W tych właśnie chwilach funkcja  $m(t)$  przyjmuje wartości zerowe, które można przewidzieć apriori.

liczamy na  
Obciążenie  
ię wzorem

Tablica 1  
Przykładowe wartości wariancji estymatora wartości oczekiwanej w zależności od  $N$  ( $t = T/2$ ,  $\omega_0 = 0.2$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $D = 1$ ).

| $D[\hat{m}(t)]$ | 1 | 0.522 | 0.214 | 0.108 | 0.072 | 0.054 | 0.043 | 0.036 |
|-----------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $N$             | 1 | 2     | 5     | 10    | 15    | 20    | 25    | 30    |

(91) Wariancja  $D[\hat{m}(t)]$ , jak wynika z obliczeń, szybko zmniejsza się wraz ze wzrostem liczby okresów uśrednienia (tablica 1).



(94) Rys. 1. Wariancja estymatora wartości oczekiwanej w zależności od liczby okresów  $N$  i czasu  $t$  dla  $\omega_0 = 0.2$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $D = 1$ .

(95) Jak było wspomniane wyżej, komponenty Fouriera wartości oczekiwanej mogą być obliczone za pomocą przekształceń Fouriera estymatora tej charakterystyki. Bez względu na to, że wartość oczekiwana w danym przypadku zawiera tylko jeden komponent kosinusowy, zakładamy, iż są szacowane składowa  $m_0$  oraz amplitudy kosinusowego  $m_c$  i sinusowego  $m_s$  komponentu:



$$\hat{m}_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{m}(t) dt, \quad \hat{m}_c = \frac{2}{T} \int_0^T \hat{m}(t) \cos \omega_0 t dt, \quad \hat{m}_s = \frac{2}{T} \int_0^T \hat{m}(t) \sin \omega_0 t dt. \quad (97)$$

Powyższe estymatory są nieobciążone, a ich wariancje przy  $R_\eta(u) = D e^{-\alpha|u|}$  wyrażają się wzorami

$$D[\hat{m}_0] = \frac{D}{N} r_1(\alpha T, N), \quad D[\hat{m}_c] = \frac{D}{N} [2r_0(\alpha T, N) + r_2(\alpha T, N)], \quad (98)$$

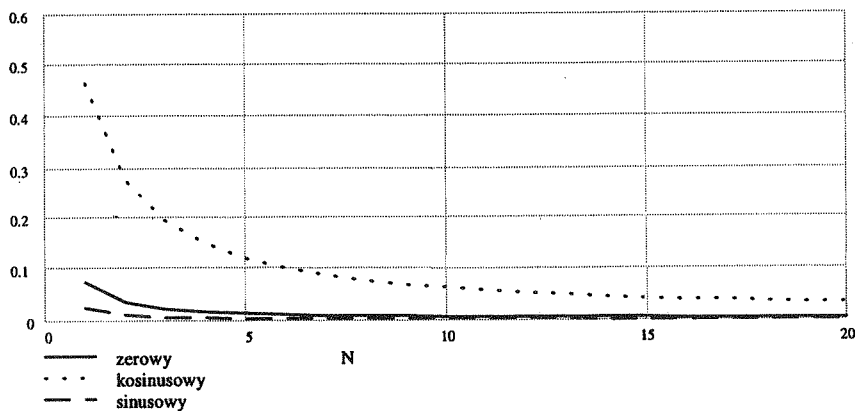
$$D[\hat{m}_s] = \frac{D}{N} r_2(\alpha T, N),$$

gdzie

$$\begin{aligned} r_1(\alpha T, N) &= \frac{1}{T} \int_0^{NT} \left( 1 - \frac{u}{NT} \right) e^{-\alpha u} \cos \omega_0 u du = \\ &= \frac{1}{\alpha^2 T^2 + 4l^2 \pi^2} \left[ \alpha T - \frac{\alpha^2 T^2 - 4l^2 \pi^2}{N(\alpha^2 T^2 + 4l^2 \pi^2)} (1 - e^{-\alpha NT}) \right]. \end{aligned} \quad (99)$$

Dla dużych  $N$  w przybliżeniu

$$\begin{aligned} r_0(\alpha T, N) &\approx (\alpha T)^{-1}, \quad r_1(\alpha T, N) = \alpha T (\alpha^2 T^2 + 4\pi^2)^{-1}, \\ r_2(\alpha T, N) &= \alpha T (\alpha^2 T^2 + 16\pi^2)^{-1}. \end{aligned} \quad (100)$$



Rys. 2. Wariancje estymatorów komponentów wartości oczekiwanej  $D[\hat{m}_0]$ ,  $D[\hat{m}_c]$  i  $D[\hat{m}_s]$  dla  $\omega_0 = 0.2$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $D = 1$ .

yrażają się

(97) Iloczyn  $\alpha T$  jest tą wielkością, która określa zależność wariancji estymatorów komponentów od szybkości zanikania powiązań korelacyjnych sygnału. Na podstawie wyprowadzonych wzorów mogą być obliczone konkretne wartości liczbowe wariancji dla pewnych wartości iloczynu  $\alpha T$  oraz liczby okresów uśrednienia  $N$  (rys. 2, tablica 2).

(98)

Przykładowe wartości wariancji estymatorów komponentów wartości oczekiwanej ( $\omega_0 = 0.2$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $D = 1$ ) w zależności od  $N$ .

Tablica 2

|                |       |       |        |        |        |
|----------------|-------|-------|--------|--------|--------|
| $D[\hat{m}_c]$ | 0.466 | 0.013 | 0.0065 | 0.0043 | 0.0032 |
| $D[\hat{m}_s]$ | 0.024 | 0.004 | 0.0019 | 0.0013 | 0.0009 |
| $D[\hat{m}_0]$ | 0.075 | 0.123 | 0.064  | 0.043  | 0.032  |
| $N$            | 1     | 5     | 10     | 15     | 20     |

(99)

Rozważmy teraz właściwości estymatora funkcji autokorelacji  $b(t, u)$ . Jego obciążenia jest równe

$$\varepsilon[\hat{b}(t, u)] = \varepsilon_0(u) + \varepsilon_2^c(u)\cos 2\omega_0 t + \varepsilon_2^s(u)\sin 2\omega_0 t, \quad (101)$$

przy tym

$$\varepsilon_0(u) = \varepsilon_2^c(u) = -\frac{D}{2N} S_0(\alpha T, N, u) \cos \omega_0 u, \quad (102)$$

(100)

$$\varepsilon_2^s(u) = \frac{D}{2N} S_0(\alpha T, N, u) \sin \omega_0 u,$$

gdzie

$$S_0(\alpha T, N, u) = \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e^{-\alpha|u+nT|}. \quad (103)$$

Dla zerowego przesunięcia  $u = 0$   $S_0(\alpha T, N, u) = S(\alpha T, N)$ . Wyrażenia dla współczynników  $\varepsilon_0(0)$  i  $\varepsilon_2^c(0)$  są zbieżne, z dokładnością do znaku, ze wzorami odpowiednich współczynników Fouriera wariancji estymatora wartości oczekiwanej.

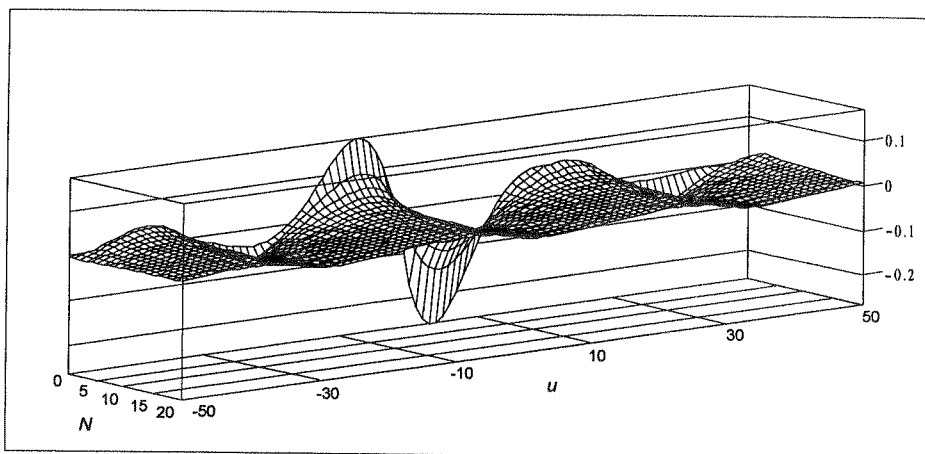
Funkcja  $S_0(\alpha T, N, u)$  maleje ze wzrostem przesunięcia. Jednak szybkość jej zanikania jest mniejsza, niż szybkość zanikania samej funkcji autokorelacji. Oczywiście jest, iż stosuje się to do samego obciążenia  $\varepsilon[b(t, u)]$ , które przedstawiono na rys. 3. Zatem

względna wartość  $\frac{|\varepsilon[\hat{b}(t, u)]|}{|b(r, u)|}$  powiększa się ze wzrostem przesunięcia (tablica 3). Daje to możliwość obliczenia funkcji autokorelacji o pewnej dokładności tylko dla przesunięć, które należą do skończonego przedziału  $[0, u_m]$ .

Tablica 3

Przykładowe względne wartości obciążenia estymatora funkcji autokorelacji  
( $\omega_0 = 0.2$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $D = 1$ ,  $t = 10$ ) w zależności od  $N$ .

|                                          |       |       |       |       |       |       |        |        |          |
|------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|----------|
| $\frac{ \varepsilon[b(t,u)] }{ b(t,u) }$ | 0.214 | 0.108 | 0.054 | 0.036 | 0.027 | 0.022 | 0.011  | 0.0054 | $u = 0$  |
|                                          | 0.220 | 0.111 | 0.056 | 0.037 | 0.028 | 0.023 | 0.0113 | 0.006  | $u = 3$  |
|                                          | 0.789 | 0.433 | 0.226 | 0.153 | 0.116 | 0.093 | 0.047  | 0.024  | $u = 22$ |
| $N$                                      | 5     | 10    | 20    | 30    | 40    | 50    | 100    | 200    |          |



Rys. 3. Obciążenie estymatora funkcji autokorelacji w zależności od liczby okresów uśrednienia  $N$  i przesunięcia  $u$  dla  $\omega_0 = 0.2$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $D = 1$ .

Obciążenie estymatora funkcji autokorelacji  $k(t,u)$  posiada postać podobną do postaci równania (101)

$$\varepsilon[\hat{k}(t,u)] = \tilde{\varepsilon}(u) + \tilde{\varepsilon}_2^c(u) \cos 2\omega_0 t + \tilde{\varepsilon}_2^s(u) \sin 2\omega_0 t. \quad (104)$$

Wzory dla współczynników  $\tilde{\varepsilon}_0(u)$ ,  $\tilde{\varepsilon}_2^c(u)$  i  $\tilde{\varepsilon}_2^s(u)$  otrzymujemy na podstawie wyrażeń (39)–(41), skąd wynika, że  $\tilde{\varepsilon}_0(u) = \varepsilon_0(u)$ ,  $\tilde{\varepsilon}_2^s(u) = 0$ , jak też

$$\tilde{\varepsilon}_2^c(u) = -\frac{D}{2N} S_0(\alpha T, N, u). \quad (105)$$

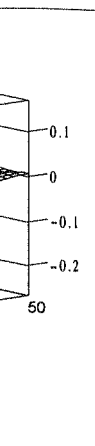
Przejdźmy do analizy wariancji estymatorów funkcji autokorelacji. Stosując wyrażenie (48), dla współczynników Fouriera funkcji  $b_\eta(t, u_1, u)$  w danym przypadku otrzymujemy:

$$\tilde{B}_0(u_1, u) = \frac{1}{8} \tilde{R}_\eta(u_1, u) (1 + \cos 2\omega_0 u + \cos 2\omega_0 u_1), \quad (106)$$

$$\tilde{B}_2^c(u_1, u) = \frac{1}{8} \tilde{R}_\eta(u_1, u) [1 + \cos 2\omega_0 u + \cos 2\omega_0 u_1 + \cos 2\omega_0 (u_1 + u)], \quad (107)$$

Tablica 3

|          |
|----------|
| $u = 0$  |
| $u = 3$  |
| $u = 22$ |
|          |



odnieniu  $N$

podobną do

(104)

wie wyrażeń

(105)

jąc wyrażenie  
rzymujemy:

(106)

(107)

$$\tilde{B}_2^s(u_1, u) = \frac{1}{8} \tilde{R}_\eta(u_1, u) [\sin 2\omega_0 u + \sin 2\omega_0 u_1 + \sin 2\omega_0 (u_1 + u)], \quad (108)$$

$$\tilde{B}_4^c(u_1, u) = \frac{1}{8} \tilde{R}_\eta(u_1, u) \cos 2\omega_0 (u_1 + u), \quad \tilde{B}_4^s(u_1, u) = \frac{1}{8} \tilde{R}_\eta(u_1, u) \sin 2\omega_0 (u_1 + u), \quad (109)$$

gdzie  $\tilde{R}_\eta(u_1, u) = R_\eta^2(u_1) + R_\eta(u + u_1)R_\eta(u - u_1)$ . Wariancja estymatora funkcji autokorelacji  $b(t, u)$  wtedy określona jest wzorem

$$D[\hat{b}(t, u)] = \alpha_0(u) + \sum_{l=2,4} [\alpha_l^c(u) \cos l\omega_0 t + \alpha_l^s(u) \sin l\omega_0 t], \quad (110)$$

przy tym

$$\alpha_0(u) = \frac{D^2}{8N} \tilde{S}(\alpha T, N, u) (2 + \cos 2\omega_0 u), \quad (111)$$

$$\alpha_2^c(u) = \frac{D^2}{4N} \tilde{S}(\alpha T, N, u) (1 + \cos 2\omega_0 u), \quad \alpha_2^s(u) = -\frac{D^2}{4N} \tilde{S}(\alpha T, N, u) \sin 2\omega_0 u, \quad (112)$$

$$\alpha_4^c(u) = \frac{D^2}{8N} \tilde{S}(\alpha T, N, u) \cos 2\omega_0 u, \quad \alpha_4^s(u) = -\frac{D^2}{8N} \tilde{S}(\alpha T, N, u) \sin 2\omega_0 u, \quad (113)$$

gdzie

$$\tilde{S}(\alpha T, N, u) = 1 + e^{-2\alpha|u|} + 2S(2\alpha T, N) + 2S_1(\alpha T, N, u), \quad (114)$$

$$S_1(\alpha T, N, u) = \sum_{n=1}^{N-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \exp[-\alpha(|u + nT| + |u - nT|)]. \quad (115)$$

Współczynniki  $\alpha_0(u)$ ,  $\alpha_2^c(u)$ ,  $\alpha_4^c(u)$  są parzystymi funkcjami przesunięcia  $u$ , a  $\alpha_2^s(u)$  i  $\alpha_4^s(u)$  — nieparzystymi. Przy  $u = 0$  współczynniki  $\alpha_0(u)$ ,  $\alpha_2^c(u)$  i  $\alpha_4^c(u)$  posiadają wartości maksymalne, a  $\alpha_2^s(u)$  i  $\alpha_4^s(u)$  — zerowe, przy czym

$$\alpha_0(0) = \frac{3D^2}{4N} [1 + 2S(2\alpha T, N)], \quad (116)$$

$$\alpha_2^c(0) = \frac{D^2}{N} [1 + 2S(2\alpha T, N)], \quad \alpha_4^c(0) = \frac{D^2}{4N} [1 + 2S(2\alpha T, N)]. \quad (117)$$

Widać, że  $\alpha_2^s(0) = \alpha_0^s(0) + \alpha_4^s(0)$ . Dla wariancji estymatora korelacji sygnału wtedy otrzymujemy

$$D[\hat{b}(t, 0)] = \frac{D^2}{4N} [1 + 2S(2\alpha T, N)](3 + 4\cos 2\omega_0 t + \cos 4\omega_0 t). \quad (118)$$

Na podstawie powyższego wzoru wnioskujemy, że w punktach  $t_k = \frac{(2k+1)T}{4}$  wariancja  $D[\hat{b}(t, 0)]$  przyjmuje wartości zerowe (rys. 4). Uzyskany wynik można wyjaśnić tym, iż w danych punktach wariancja sygnału jest znana apriori. Oczywiście wartości te mogą być wyłącznie zerowe, co wynika z wyrażenia  $b(t, 0) = \frac{D}{2}(1 + \cos 2\omega_0 t)$ .

Wszystkie współczynniki (112)–(113) dla małych wartości przesunięć mają postacie zanikających oscylacji. Jeżeli  $u \rightarrow \infty$ , to  $\tilde{S}(\alpha T, N, u) \rightarrow 0$  i wtedy

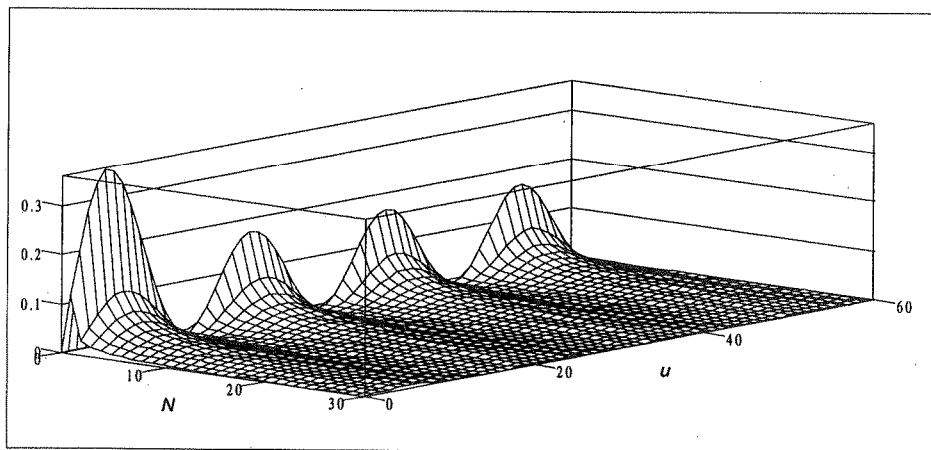
$$\tilde{\alpha}_0(u) = \frac{D^2}{8N} [1 + 2S(2\alpha T, N)] (2 + \cos 2\omega_0 u), \quad (119)$$

$$\tilde{\alpha}_2^s(u) = \frac{D^2}{4N} [1 + 2S(2\alpha T, N)] (1 + \cos 2\omega_0 u),$$

$$\tilde{\alpha}_4^s(u) = \frac{D^2}{8N} [1 + 2S(2\alpha T, N)] \cos 2\omega_0 u, \quad (120)$$

$$\tilde{\alpha}_2^s(u) = -\frac{D^2}{4N} [1 + 2S(2\alpha T, N)] \sin 2\omega_0 u,$$

$$\tilde{\alpha}_4^s(u) = -\frac{D^2}{8N} [1 + 2S(2\alpha T, N)] \sin 2\omega_0 u. \quad (121)$$



Rys. 4. Wariancja estymatora funkcji autokorelacji dla  $\omega_0 = 0.2$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $D = 1$ .

Z powyższych  
są funkcjami  
mniejsze o  
zmniejszają  
że wariancja  
niezanikają  
uśrednionyc  
być uwzglę

zanikają do

wraz ze wz  
gramu. War  
wiarygodnoś  
liczby okres

Przykładowo

|                                                   |
|---------------------------------------------------|
| $\frac{\sqrt{D[\hat{b}(t, u)]}}{ \hat{b}(t, u) }$ |
| $N$                                               |

Analizując  
riancji estym  
jonarności sy  
wa zerowego

Przy zerowym

a wtedy

alu wtedy

(118)

$T$  warian-

aśnić tym,  
ci te mogą

ją postacie

(119)

(120)

(121)

Z powyższych granicznych równości wynika, że dla dużych  $u$  wszystkie współczynniki są funkcjami okresowymi. Największe wartości  $\tilde{\alpha}_0(u)$ ,  $\tilde{\alpha}_2^s(u)$  i  $\tilde{\alpha}_4^s(u)$  są dwa razy mniejsze od wartości początkowych w punkcie  $u = 0$ . W przybliżeniu dwukrotnie zmniejszają się także największe wartości funkcji  $\tilde{\alpha}_2^s(u)$  i  $\tilde{\alpha}_4^s(u)$ . Z powyższego wynika, że wariancja  $D[\tilde{b}(t, u)]$  nie dąży do zera ze wzrostem przesunięcia oraz posiada charakter niezanikających oscylacji. Amplitudy tych oscylacji zmniejszają się ze wzrostem liczby uśrednionych okresów  $N$ . Ta istotna cecha wariancji estymatora koniecznie powinna być uwzględniona przy obróbce sygnałów. Ponieważ powiązania korelacyjne sygnału

zanikają do zera, to względny błąd średniokwadratowy  $\frac{[D[\tilde{b}(t, u)]]^{\frac{1}{2}}}{|b(t, u)|}$  szybko wzrasta wraz ze wzrostem przesunięcia (tablica 4) co powoduje konieczność obcięcia korelogramu. Wartości  $u$ , dla których może być oszacowana funkcja autokorelacji o pewnej wiarygodności, należą do pewnego przedziału  $[0, u_m]$ , przy tym  $u_m$  wzrasta ze wzrostem liczby okresów uśrednienia  $N$ .

Tablica 4

Przykładowe względne błędy średniokwadratowe autokorelacji ( $\omega_0 = 0.2$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $D = 1$ ,  $t = 10$ ) w zależności od  $N$ .

| $\frac{\sqrt{D[\tilde{b}(t, u)]}}{ b(t, u) }$ | 0.805 | 0.569 | 0.403 | 0.329 | 0.285 | 0.255 | 0.180 | 0.127 | $u = 4$ |
|-----------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|
|                                               | 0.633 | 0.448 | 0.317 | 0.259 | 0.224 | 0.200 | 0.142 | 0.100 | $u = 0$ |
| $N$                                           | 5     | 10    | 20    | 30    | 40    | 50    | 100   | 200   |         |

Analizując wyrażenie (48) wnioskujemy, że niezanikający okresowy przebieg wariancji estymatora funkcji autokorelacji jest uwarunkowany charakterystykami niestacjonarności sygnału — jego drugimi komponentami korelacyjnymi  $B_2^s(u)$  i  $B_2^c(u)$ . Składowa zerowego komponentu  $\tilde{B}_0(u_1, u)$ , który zależy od tych charakterystyk, ma postać

$$\begin{aligned} \tilde{B}_0^{(n)}[u_1, u] &= \frac{1}{2} \left[ [B_2^c(u_1)]^2 + [B_2^s(u_1)]^2 + B_2^c(u_1 + u)B_2^c(u_1 - u) + \right. \\ &\quad \left. + B_2^s(u_1 + u)B_2^s(u_1 - u) \right] \cos 2\omega_0 u + B_2^c(u_1 - u)B_2^s(u_1 + u) \sin 2\omega_0 u = \\ &= \frac{1}{8} \left[ R_\eta(u_1 + u)R_\eta(u_1 - u) + \frac{1}{8} R_\eta^2(u_1) \right] \cos 2\omega_0 u. \end{aligned} \quad (122)$$

Przy zerowym przesunięciu  $u = 0$  mamy

$$\tilde{B}_0^{(n)}(u_1, 0) = \frac{1}{4} R_\eta^2(u_1), \quad (123)$$

a wtedy

$$\alpha_0^{(n)}(0) = \frac{D}{4N} [1 + 2S(2\alpha T, N)]. \quad (124)$$

Dla dużych  $u$

$$\tilde{\alpha}_0^{(n)}(u) = \frac{D}{8N} [1 + 2S(2\alpha T, N)] \cos 2\omega_0 u. \quad (125)$$

Amplituda okresowych oscylacji, jak widać, jest dwa razy mniejsza od wartości początkowej przy  $u = 0$ .

Zerowy współczynnik  $\alpha_0(u)$  określa uśrednioną w czasie wariancję estymatora funkcji autokorelacji

$$\alpha_0(u) = \mu, \{D[\hat{b}(t, u)]\} = \frac{1}{T} \int_0^T D[\hat{b}(t, u)] dt. \quad (126)$$

Jak zostało wspomniane, jego wartość określa się nie tylko zerowym komponentem korelacyjnym, ale także drugimi komponentami  $B_2^s(u)$  i  $B_2^i(u)$ . Oznacza to, że nawet uśredniona w czasie wariancja estymatora funkcji autokorelacji nie może być określona na podstawie charakterystyk przybliżenia stacjonarnego, które są średnioczasowymi wartościami charakterystyk sygnału zmodulowanego [1]. Składowa komponentu  $\tilde{B}_0(u_1, u)$ , która zależy tylko od funkcji autokorelacji przybliżenia stacjonarnego  $B_0(u)$ , ma postać

$$\begin{aligned} \tilde{B}_0^{(s)}[u_1, u] &= \frac{1}{8} R_\eta^2(u_1) (1 + \cos 2\omega_0 u_1) + \\ &+ \frac{1}{8} R_\eta(u_1 + u) R_\eta(u_1 - u) (\cos 2\omega_0 u_1 + \cos 2\omega_0 u). \end{aligned} \quad (127)$$

Dla uzależnionej od niej składowej współczynnika  $\alpha_0(u)$  otrzymujemy

$$\alpha_0^{(s)}(u) = \frac{D^2}{8N} [2[1 + 2S(2\alpha T, N)] + e^{-2\alpha|u|} + 2S_1(\alpha T, N, u)] (1 + \cos 2\omega_0 u). \quad (128)$$

Druga składowa współczynnika jest równa

$$\alpha_0^{(i)}(u) = \frac{D^2}{8N} [e^{-2\alpha|u|} + \cos \omega_0 u + 2S(2\alpha T, N) \cos 2\omega_0 u + 2S_1(\alpha T, N, u)]. \quad (129)$$

Dla zerowego przesunięcia  $u = 0$ :

$$\alpha_0^{(s)}(0) = \frac{D^2}{2N} [1 + 2S(2\alpha T, N)]. \quad (130)$$

(125)

Stosunek wielkości (124) i (130):  $\frac{\alpha_0^{(n)}(0)}{\alpha_0^{(s)}(0)} = 0.5$ . Dla dużych  $u$

d wartości

estymatora

(126)

$$\tilde{\alpha}_0^{(s)}(u) = \frac{D^2}{4N} [1 + 2S(2\alpha T, N)]. \quad (131)$$

Porównując równania (125) i (131), wnioskujemy, że stosunek amplitudy przebiegu okresowego względem przesunięcia do wielkości stałej jest także równy 0.5.

Widzimy więc, iż niestacjonarność sygnału gra istotną rolę przy analizie wiarygodności estymacji. Nieuwzględnienie jej nawet przy obliczeniu uśrednionej w czasie wariancji powoduje znaczny błąd dla wszystkich możliwych wartości przesunięć.

komponentem

, że nawet

ć określona

oczasowymi

komponentu

nego  $B_0(u)$ ,

Rozważmy teraz właściwości estymatorów komponentów korelacyjnych. Wzory na obciążenie estymatorów zbiegają się z równaniami, które określają odpowiednie współczynniki Fouriera obciążenia estymatorów funkcji autokorelacji. Dla wariancji estymatorów komponentów  $\hat{B}_0(u)$ ,  $\hat{B}_2^c(u)$  i  $\hat{B}_2^s(u)$  w pierwszym przybliżeniu mamy

$$D[\hat{B}_0(u)] = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) \hat{B}_0(u_1, u) du_1, \quad (132)$$

(127)

$$D[\hat{B}_2^c(u)] = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) [2\hat{B}_0(u_1, u) \cos 2\omega_0 u_1 + \tilde{B}_4^c(u_1, u) \cos 2\omega_0 u_1 - \tilde{B}_4^s(u_1, u) \sin 2\omega_0 u_1] du_1, \quad (133)$$

u).

(128)

$$D[\hat{B}_2^s(u)] = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) [2\hat{B}_0(u_1, u) \cos 2\omega_0 u_1 + \tilde{B}_4^s(u_1, u) \sin 2\omega_0 u_1 - \tilde{B}_4^c(u_1, u) \cos 2\omega_0 u_1] du_1. \quad (134)$$

Po podstawieniu do równania (132) wyrażenia komponentu  $\tilde{B}_0(u_1, u)$  (106) znajdujemy

b)]. (129)

$$D[\hat{B}_0(u)] = \frac{D^2}{4N} [r_0(2\alpha T, N) + \tilde{r}_0(\alpha T, N, u)] \times \times (1 + \cos 2\omega_0 u_1) + r_2(2\alpha T, N) + \tilde{r}_2(\alpha T, N, u)], \quad (135)$$

gdzie

(130)

$$\tilde{r}_l(\alpha T, N, u) = \frac{1}{T} \int_0^{NT} \left(1 - \frac{u_1}{\theta}\right) e^{-\alpha(|u_1+u|+|u_1-u|)} \cos \omega_0 u_1 du_1. \quad (136)$$



Przy  $u = 0$  funkcje  $\tilde{r}_l(\alpha T, N, u)$  i  $r_l(2\alpha T, N)$  są równe:  $\tilde{r}_l(\alpha T, N, 0) = r_l(2\alpha T, N)$ . Z równania (135) można wydzielić trzy składowe. Pierwsza z nich nie zależy od przesunięcia  $u$

$$D^{(1)}[B_0(u)] = \frac{D^2}{4N} [r_0(2\alpha T, N) + r_2(2\alpha T, N)], \quad (137)$$

druga zanika wraz ze wzrostem przesunięcia

$$D^{(2)}[\hat{B}_0(u)] = \frac{D^2}{4N} [\tilde{r}_0(\alpha T, N, u)(1 + \cos 2\omega_0 u) + \tilde{r}_2(\alpha T, N, u)], \quad (138)$$

a trzecia zmienia się okresowo względem przesunięcia

$$D^{(2)}[\hat{B}_0(u)] = \frac{D^2}{4N} r_0(2\alpha T, N) \cos 2\omega_0 u. \quad (139)$$

Przy  $u = 0$

$$D^{(2)}[\hat{B}_0(0)] = \frac{D^2}{4N} [2r_0(2\alpha T, N) + r_2(2\alpha T, N)], \quad (140)$$

$$D^{(3)}[\hat{B}_0(0)] = \frac{D^2}{4N} r_0(2\alpha T, N),$$

i wtedy

$$D[\hat{B}_0(0)] = \frac{D^2}{2N} [2r_0(2\alpha T, N) + r_2(2\alpha T, N)]. \quad (141)$$

Dla dużych wartości przesunięć  $D^{(2)}[\hat{B}_0(u)] \approx 0$ , zatem w tych przypadkach

$$D[\hat{B}_0(u)] = \frac{D^2}{4N} [r_0(2\alpha T, N)(1 + \cos 2\omega_0 u) + r_2(2\alpha T, N)]. \quad (142)$$

Okresowe zmiany funkcji (142) mają znaczną amplitudę i istotnie wpływają na wartość wariancji  $D[\hat{B}_0(u)]$  (rys. 5). Zmiany te powodowane są okresową niestacjonarnością sygnału. Charakterystyki niestacjonarności wpływają nie tylko na zachowanie funkcji  $D[\hat{B}_0(u)]$  w asymptocie, ale także na jej własności przy małych wartościach przesunięć.

a)

0.15

0.1

0.05

0

b)

0.2

0.1

0

c)

0.1

0.05

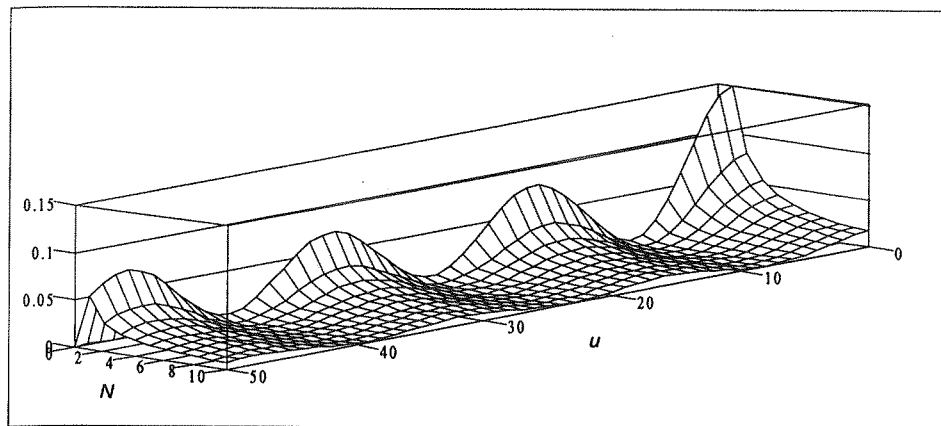
0

Rys. 5. Waria

(137)

(138)

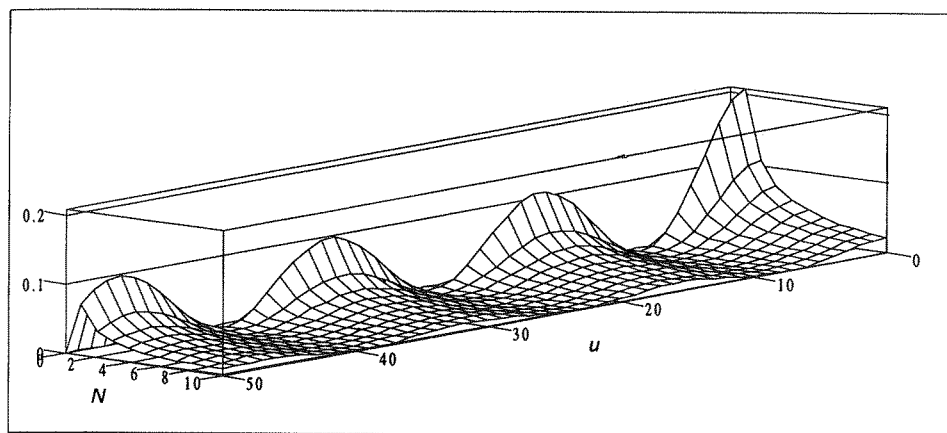
a)



b)

(139)

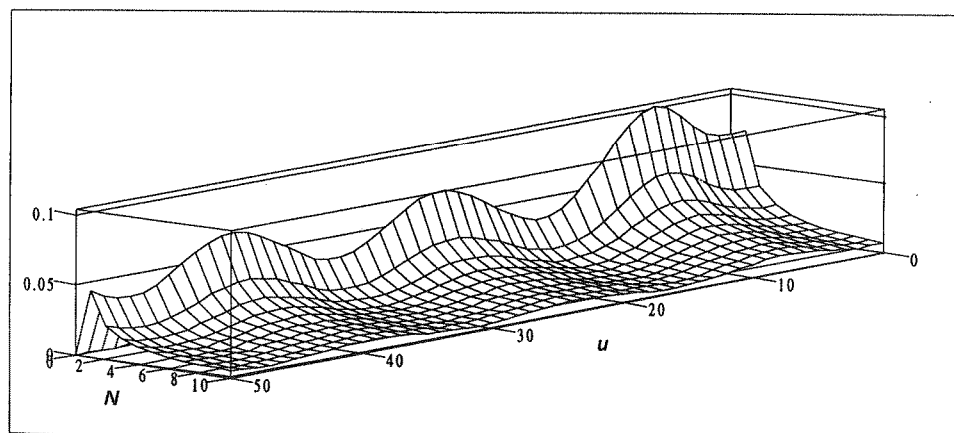
(140)



c)

(141)

(142)



Rys. 5. Wariancje estymatorów komponentów korelacyjnych (a)  $D[\hat{B}_0(u, N)]$ , b)  $D[\hat{B}_2^c(u, N)]$ , c)  $D[\hat{B}_2^s(u, N)]$  dla  $\omega_0 = 0.2$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $D = 1$ .

Wydzielimy składową, która zależy tylko od funkcji korelacji przybliżenia stacjonarnego  $B_0(u)$  oraz składową, która zależy od drugich komponentów korelacyjnych:

$$D^{(s)}[\hat{B}_0(u)] = \frac{D^2}{4N} [r_0(2\alpha T, N) + \tilde{r}_0(\alpha T, N, u) \cos 2\omega_0 u + r_2(2\alpha T, N) + \tilde{r}_0(\alpha T, N, u)], \quad (143)$$

$$D^{(n)}[\hat{B}_0(u)] = \frac{D^2}{4N} [r_0(2\alpha T, N) \cos 2\omega_0 u + \tilde{r}_0(\alpha T, N, u)]. \quad (144)$$

Składowa (143) zawiera funkcje, które od przesunięcia  $u$  nie zależą, jak też funkcje, które zanikają wraz ze wzrostem przesunięcia. Składowa (144) wyraża się za pośrednictwem funkcji malejącej ze wzrostem przesunięcia oraz za pomocą funkcji okresowej. Stosunek tych składowych określa wpływ niestacjonarności sygnału na wiarygodność estymacji funkcji autokorelacji przybliżenia stacjonarnego  $B_0(u)$ .

Dla zerowego przesunięcia  $u = 0$ :

$$D^{(s)}[\hat{B}_0(0)] = \frac{D^2}{2N} [r_0(2\alpha T, N) + r_2(2\alpha T, N)], \quad (145)$$

$$D^{(n)}[\hat{B}_0(0)] = \frac{D^2}{2N} r_0(2\alpha T, N).$$

Ponieważ  $|r_2(2\alpha T, N)| \leq r_2(2\alpha T, N)$ , to  $\frac{D^{(n)}[\hat{B}_0(0)]}{D^{(s)}[\hat{B}_0(0)]} \geq 0.5$ . Nieuwzględnienie niestacjonarności sygnału, jak widać, powoduje znaczny błąd przy obliczeniu wariancji estymatora. Dla dużych  $u$  część stacjonarna jest niezależna od przesunięcia

$$D^{(s)}[\hat{B}_0(0)] = \frac{D^2}{4N} [r_0(2\alpha T, N) + r_2(2\alpha T, N)], \quad (146)$$

a część niestacjonarna jest okresową funkcją przesunięcia

$$D^{(n)}[\hat{B}_0(u)] = \frac{D^2}{4N} r_0(2\alpha T, N) \cos 2\omega_0 u. \quad (147)$$

Wielkość (146) jest dwa razy mniejsza od wartości początkowej  $D^{(s)}[\hat{B}_0(0)]$ , amplituda okresowych oscylacji niestacjonarnej części (147) jest także dwa razy mniejsza od początkowej wartości  $D^{(n)}[\hat{B}_0(0)]$ . Tak więc, niestacjonarność sygnału istotnie zmienia wartość wariancji estymatora, jak też zachowanie względem przesunięcia  $u$ .

Właściwości wariancji estymatorów drugich komponentów korelacyjnych określone są, jak widać ze wzorów (133)–(134), również zerowym i drugimi komponentami korelacyjnymi. Uwzględniając wyrażenie (106) i (109), znajdujemy

$$D[\hat{B}_2^c(u)] = \frac{D^2}{4N} [r_0(2\alpha T, N) + \tilde{r}_0(\alpha T, N, u) + \\ + 2[r_2(2\alpha T, N) + \tilde{r}_2(\alpha T, N, u)](1 + \cos 2\omega_0 u) + r_4(2\alpha T, N) + \tilde{r}_4(\alpha T, N, u)], \quad (148)$$

$$D[\hat{B}_2^s(u)] = \frac{D^2}{4N} [r_0(2\alpha T, N) + \tilde{r}_0(\alpha T, N, u)](1 - \cos 2\omega_0 u) + \\ + 2[r_2(2\alpha T, N) + \tilde{r}_2(\alpha T, N, u)](1 + \cos 2\omega_0 u) + r_4(2\alpha T, N) + \tilde{r}_4(\alpha T, N, u)]. \quad (149)$$

Stąd dla przesunięcia  $u = 0$  otrzymujemy

$$D[\hat{B}_2^c(0)] = \frac{D^2}{2N} [r_0(2\alpha T, N) + 2r_0(\alpha T, N) + r_4(2\alpha T, N)], \quad (150)$$

$$D[\hat{B}_2^s(0)] = \frac{D^2}{2N} [2r_0(2\alpha T, N) + r_4(2\alpha T, N)], \quad (151)$$

a dla dużych wartości  $u$

$$\tilde{D}[\hat{B}_2^c(u)] = \frac{D^2}{4N} [r_0(2\alpha T, N) + r_4(2\alpha T, N) + r_2(2\alpha T, N)\cos 2\omega_0 u], \quad (152)$$

$$\tilde{D}[\hat{B}_2^s(u)] = \frac{D^2}{4N} [r_0(2\alpha T, N)(1 + \cos 2\omega_0 u) + \\ + 2r_2(2\alpha T, N)(1 + \cos 2\omega_0 u) + r_4(2\alpha T, N)]. \quad (153)$$

Wariancje (152) i (153), zmniejszają się dwukrotnie w porównaniu ze swoimi początkowymi wartościami. Stosuje się to także do stałej i okresowej składowej.

Szybkość zanikania wariancji  $D[\hat{B}_0(u)]$ ,  $D[\hat{B}_2^c(u)]$  i  $D[\hat{B}_2^s(u)]$  jest mniejsza ze wzrostem przesunięcia niż samych komponentów korelacyjnych dla małych  $u$ . Obecność stałej i okresowej składowej w dziedzinie dużych wartości  $u$  powoduje zwiększenie względnych błędów średniokwadratowych  $\frac{[D[\hat{B}_0(u)]]^{\frac{1}{2}}}{|B_0(u)|}$ ,  $\frac{[D[\hat{B}_2^c(u)]]^{\frac{1}{2}}}{|B_2^c(u)|}$ , ze wzrostem  $u$

(tablica 5) i uniemożliwia wiarygodne szacowanie komponentów korelacyjnych dla wartości przesunięć, nie należących do pewnego przedziału  $[0, u_{\max}]$ . Wartość  $u_{\max}$  rośnie przy zwiększeniu liczby szacowanych okresów  $N$ .

Tablica 5

Przykładowe względne błędy średniokwadratowe komponentów korelacyjnych w zależności od  $N$  ( $\omega_0 = 0.2$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $D = 1$ ).

|                                                     |       |       |       |       |       |       |       |          |
|-----------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $\frac{\sqrt{D[\hat{B}_0(u)]}}{ \hat{B}_0(u) }$     | 0.643 | 0.526 | 0.456 | 0.408 | 0.289 | 0.204 | 0.129 | $u = 15$ |
|                                                     | 0.186 | 0.152 | 0.132 | 0.118 | 0.084 | 0.059 | 0.031 | $u = 0$  |
| $\frac{\sqrt{D[\hat{B}_2^c(u)]}}{ \hat{B}_2^c(u) }$ | 0.723 | 0.591 | 0.512 | 0.458 | 0.324 | 0.229 | 0.145 | $u = 15$ |
|                                                     | 0.213 | 0.174 | 0.151 | 0.135 | 0.095 | 0.067 | 0.043 | $u = 0$  |
| $\frac{\sqrt{D[\hat{B}_2^s(u)]}}{ \hat{B}_2^s(u) }$ | 0.349 | 0.286 | 0.248 | 0.221 | 0.156 | 0.111 | 0.070 | $u = 8$  |
| $N$                                                 | 20    | 30    | 40    | 50    | 100   | 200   | 500   |          |

Podobne właściwości, do omówionych powyżej, mają także wariancje estymatorów funkcji autokorelacji  $k(t, u)$  i jej komponentów. Wzory na nie mogą być wyprowadzone z wykorzystaniem wyrażeń (59)–(61), (84)–(85) i (106)–(113).

## 6. KOHERENTNA ANALIZA SYGNAŁÓW ZMODULOWANYCH AMPLITUDOWO I FAZOWO

Jednym z najprostszych modeli sygnałów zamodulowanych amplitudowo i fazowo jest model kwadraturowy

$$\xi(t) = \xi_c(t)\cos\omega_0 t + \xi_s(t)\sin\omega_0 t. \quad (154)$$

Wartość oczekiwana takiego sygnału ma postać

$$m(t) = m_c \cos\omega_0 t + m_s \sin\omega_0 t, \quad m_c = E\xi_c(t), \quad m_s = E\xi_s(t),$$

a funkcje autokorelacji wyrażają się wzorami [1]

$$b(t, u) = B_0(u) + B_2^c(u)\cos 2\omega_0 t + B_2^s(u)\sin 2\omega_0 t, \quad (155)$$

$$k(t, u) = K_0(u) + K_2^c(u)\cos 2\omega_0 t + K_2^s(u)\sin 2\omega_0 t, \quad (156)$$

gdzie

$$B_0(u) = \frac{1}{2}[R_c(u) + R_s(u)]\cos\omega_0 u + R_{cs}^{(n)}(u)\sin\omega_0 u, \quad (157)$$

ch dla  
ć  $u_{\max}$

blica 5  
od

= 15

= 0

= 15

= 0

= 8

nato-  
ypro-

fazo-

(154)

(155)

(156)

(157)

$$B_2^c(u) = \frac{1}{2}[R_c(u) - R_s(u)]\cos\omega_0 u + R_{cs}^{(p)}(u)\sin\omega_0 u, \quad (158)$$

$$B_2^s(u) = R_{cs}^{(p)}(u)\cos\omega_0 u - \frac{1}{2}[R_c(u) - R_s(u)]\sin\omega_0 u, \quad (159)$$

$$K_0(u) = B_0(u), \quad K_2^c(u) = \frac{1}{2}[R_c(u) - R_s(u)], \quad K_2^s(u) = R_{cs}^{(p)}(u), \quad (160)$$

przy tym  $R_c(u) = E\dot{\xi}_c(t)\dot{\xi}_c(t+u)$ ,  $R_s(u) = E\dot{\xi}_s(t)\dot{\xi}_s(t+u)$  — funkcje autokorelacji składowych kwadraturowych, a  $R_{cs}^{(p)}(u)$  i  $R_{cs}^{(n)}(u)$  — parzysta i nieparzysta część funkcji korelacji wzajemnej  $R_{cs}(u) = E\dot{\xi}_c(t)\dot{\xi}_s(t+u)$ .

Zgodnie z równaniami (5) i (155) wariancja estymatora wartości oczekiwanej może być przedstawiona w postaci

$$D[\hat{m}(t)] = \gamma_0 + \gamma_2^c \cos 2\omega_0 t + \gamma_2^s \sin 2\omega_0 t. \quad (161)$$

Współczynniki  $\gamma_0$ ,  $\gamma_2^c$  i  $\gamma_2^s$  określone są wzorami

$$\gamma_0 = \frac{1}{2N}[D_c[1 + 2S(\alpha_c T, N)] + D_s[1 + 2S(\alpha_s T, N)]], \quad (162)$$

$$\gamma_2^c = \frac{1}{2N}[D_c[1 + 2S(\alpha_c T, N)] - D_s[1 + 2S(\alpha_s T, N)]], \quad (163)$$

$$\gamma_2^s = \frac{D_{cs}}{N}[1 + 2S(\alpha_{cs} T, N)]. \quad (164)$$

Jeżeli  $R_c(u) = D_c e^{-\alpha_c |u|}$ ,  $R_s(u) = D_s e^{-\alpha_s |u|}$ ,  $R_{cs}^{(p)}(u) = D_{cs} e^{-\alpha_{cs} |u|}$ ,  $R_{cs}^{(n)}(u) = 0$ .

Porównując równania (162)–(164) z wyrażeniami współczynników Fouriera wariancji estymatora wartości oczekiwanej sygnału zmodulowanego amplitudowo (93), wnioskujemy, że w danym przypadku współczynnik zerowy  $\gamma_0$  jest równy sumie wariancji estymatorów wartości oczekiwanej amplitudowo zmodulowanych składowych sygnału (154), współczynnik kosinusowy  $\gamma_2^c$  — ich różnicy, a sinusowy jest określony parametrami parzystej części funkcji korelacji wzajemnej.

Dla dużych  $N$  w przybliżeniu

$$S(\alpha_c T, N) \approx \frac{e^{-\alpha_c T}}{1 - e^{-\alpha_c T}}, \quad S(\alpha_s T, N) \approx \frac{e^{-\alpha_s T}}{1 - e^{-\alpha_s T}}, \quad S(\alpha_{cs} T, N) \approx \frac{e^{-\alpha_{cs} T}}{1 - e^{-\alpha_{cs} T}}. \quad (165)$$

Podstawiając powyższe wzory do równań (162)–(164) oraz (161), otrzymujemy wyrażenia określające wariancję estymatora wartości oczekiwanej dla dowolnej chwili czasu  $t$

w zależności od liczby okresów uśrednienia  $N$  i parametrów korelacyjnych modulujących procesów (rys. 6, tablica 6). Przy  $D_s = 0$  i  $D_{cs} = 0$  wyrażenia te zbiegają się ze wzorem na wariancję estymatora wartości oczekiwanej sygnału zmodulowanego amplitudowo.

Tablica 6

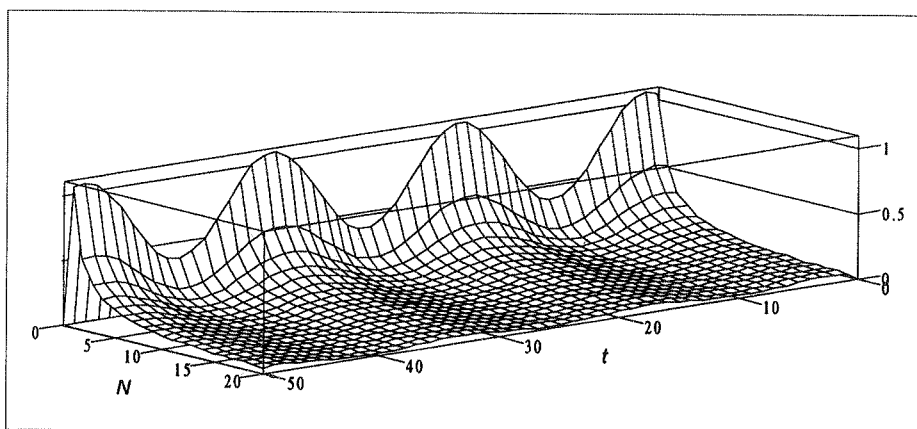
Przykładowe wartości wariancji estymatora wartości oczekiwanej w zależności od  $N$   
( $t = T$ ,  $\omega_0 = 0.2$ ,  $D_c = 1$ ,  $D_s = 0.5$ ,  $D_{cs} = 0.25$ ,  $\alpha_s = 0.2$ ,  $\alpha_c = 0.2$ ,  $\alpha_{cs} = 0.1$ ).

| $D[\hat{m}(t)]$ | 1 | 0.501 | 0.201 | 0.100 | 0.067 | 0.050 | 0.040 | 0.033 |
|-----------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $N$             | 1 | 2     | 5     | 10    | 15    | 20    | 25    | 30    |

Znajdźmy wariancję estymatorów komponentów wartości oczekiwanej. Przypuśćmy, że szacowanym komponentem jest komponent kosinusowy  $m_c$  i sinusowy  $m_s$  oraz, że zachodzi równość  $R_{cs}^{(n)}(u) = 0$ . Biorąc pod uwagę wzory (20)–(22), uzyskujemy

$$D[\hat{m}_c] = \frac{1}{N} [D_c[2r_0(\alpha_c T, N) + r_2(\alpha_c T, N)] + D_s r_2(\alpha_s T, N)], \quad (166)$$

$$D[\hat{m}_s] = \frac{1}{N} [D_s[2r_0(\alpha_s T, N) + r_2(\alpha_s T, N)] + D_c r_2(\alpha_c T, N)]. \quad (167)$$



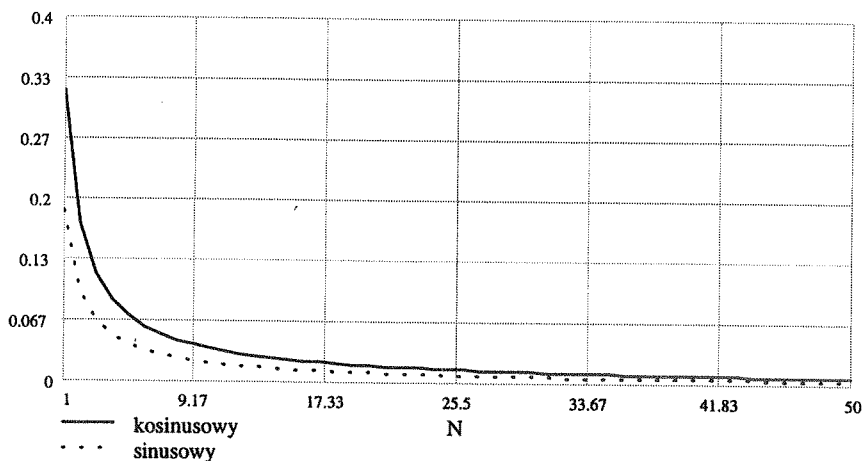
Rys. 6. Wariancja estymatora wartości oczekiwanej dla  $D_c = 1$ ,  $D_s = 0.5$ ,  $D_{cs} = 0.25$ ,  
 $\alpha = 0.2$ ,  $\alpha_c = 0.2$ ,  $\alpha_{cs} = 0.1$ .

Wariancje estymatorów komponentów, jak widać z powyższego, zależą tylko od parametrów funkcji autokorelacji składowych kwadraturowych. Przy tym na wartość wariancji estymatora komponentu kosinusowego więcej wpływają parametry funkcji autokorelacji kosinusowej składowej kwadraturowej, a na wartość wariancji estymatora komponentu sinusowego parametry funkcji autokorelacji składowej sinusowej (rys. 7, tablica 7).

Tablica 7

Przykładowe wartości wariancji estymatorów komponentów wartości oczekiwanej ( $\omega_0 = 0.2$ ,  $D_c = 1$ ,  $D_s = 0.5$ ,  $D_{cs} = 0.25$ ,  $\alpha_s = 0.2$ ,  $\alpha_c = 0.2$ ,  $\alpha_{cs} = 0.1$ ) w zależności od  $N$ .

|                |       |       |       |       |       |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $D[\hat{m}_c]$ | 0.320 | 0.071 | 0.036 | 0.024 | 0.018 |
| $D[\hat{m}_s]$ | 0.186 | 0.041 | 0.020 | 0.014 | 0.010 |
| $N$            | 1     | 5     | 10    | 15    | 20    |



Rys. 7. Wariancje estymatorów komponentów wartości oczekiwanej  $D[\hat{m}_c]$  i  $D[\hat{m}_s]$  dla  $D_c = 1$ ,  $D_s = 0.5$ ,  $D_{cs} = 0.25$ ,  $\alpha_s = 0.2$ ,  $\alpha_c = 0.2$ ,  $\alpha_{cs} = 0.1$ .

Dla dużych  $N$  w przybliżeniu mamy

$$r_0(\alpha_c T, N) \approx (\alpha_c T)^{-1}, \quad r_2(\alpha_c T, N) \approx \alpha_c T(\alpha_c^2 T^2 + 16\pi^2), \quad (168)$$

$$r_0(\alpha_s T, N) \approx (\alpha_s T)^{-1}, \quad r_2(\alpha_s T, N) \approx \alpha_s T(\alpha_s^2 T^2 + 16\pi^2). \quad (169)$$

Jeżeli w równaniach (166)–(167) założymy, że  $D_s = 0$ ,  $D_{cs} = 0$ , to otrzymamy wyrażenia na wariancję estymatorów wartości oczekiwanej sygnału zmodulowanego amplitudowo (98).

Obciążenia estymatora funkcji autokorelacji, jak w przypadku sygnału zmodulowanego amplitudowo, może być przedstawione w postaci

$$\varepsilon[\hat{b}(t, u)] = \varepsilon_0(u) + \varepsilon_2^c(u)\cos 2\omega_0 t + \varepsilon_2^s(u)\sin 2\omega_0 t, \quad (170)$$

gdzie teraz

$$\varepsilon_0(u) = -\frac{1}{N}[D_c S_0(\alpha_c T, N, u) + D_s S_0(\alpha_s T, N, u)]\cos \omega_0 u, \quad (171)$$



$$\varepsilon_2^c(u) = -\frac{1}{2N} [[D_c S_0(\alpha_c T, N, u) - D_s S_0(\alpha_s T, N, u)] \times \\ \times \cos \omega_0 u + 2D_{cs} S_0(\alpha_{cs} T, N, u)], \quad (172)$$

$$\varepsilon_2^s(u) = -\frac{1}{2N} [[D_s S_0(\alpha_c T, N, u) - D_c S_0(\alpha_c T, N, u)] \times \\ \times \sin \omega_0 u + 2D_{cs} S_0(\alpha_{cs} T, N, u)]. \quad (173)$$

Zerowy współczynnik  $\varepsilon_0(u)$  jest wyrażony za pośrednictwem parametrów korelacyjnych stacjonarnego przybliżenia sygnału, a współczynniki  $\varepsilon_2^c(u)$  i  $\varepsilon_2^s(u)$  — za pośrednictwem parametrów, określających jego właściwości niestacjonarne. Te ostatnie są równe zero, gdy jest nieobecna okresowa w czasie część funkcji autokorelacji, tj. przy  $D_c = D_s$ ,  $\alpha_c = \alpha_s$ , jak też  $D_{cs} = 0$ .

Wszystkie współczynniki mają postacie zanikających oscylacji. Jak wynika ze wzorów (171)–(173), szybkości ich zanikania są mniejsze od szybkości zanikania komponentów korelacyjnych. Powoduje to szybkie zwiększenie względnego błędu estymacji wraz ze wzrostem przesunięcia. Przedział  $[0, u_m]$ , dla którego względny błąd estymacji jest mniejszy od pewnej zadanej wartości, może być określony na podstawie równań (171)–(173) dla konkretnych wartości parametrów sygnału i liczby okresów uśrednienia  $N$ . Zależność obciążenia estymatora funkcji autokorelacji od czasu i przesunięcia dla pewnych parametrów sygnału przedstawiono na rys. 8 a względnego obciążenia w tablicy 8.

Współczynniki Fouriera obciążenia funkcji autokorelacji parzyste

$$\varepsilon[\hat{k}(t, u)] = \tilde{\varepsilon}_0(u) + \tilde{\varepsilon}_2^c(u) \cos 2\omega_0 t + \tilde{\varepsilon}_2^s(u) \sin 2\omega_0 t \quad (174)$$

znajdujemy, korzystając z równań (39)–(41):

$$\tilde{\varepsilon}_0(u) = \varepsilon_0(u), \quad \tilde{\varepsilon}_2^c(u) = -\frac{1}{2N} [D_c S_0(\alpha_0 T, N, u) - D_s S_0(\alpha_s T, N, u)], \quad (175)$$

$$\tilde{\varepsilon}_2^s(u) = -\frac{1}{N} D_{cs} S_0(\alpha_{cs} T, N, u). \quad (176)$$

Tablica 8

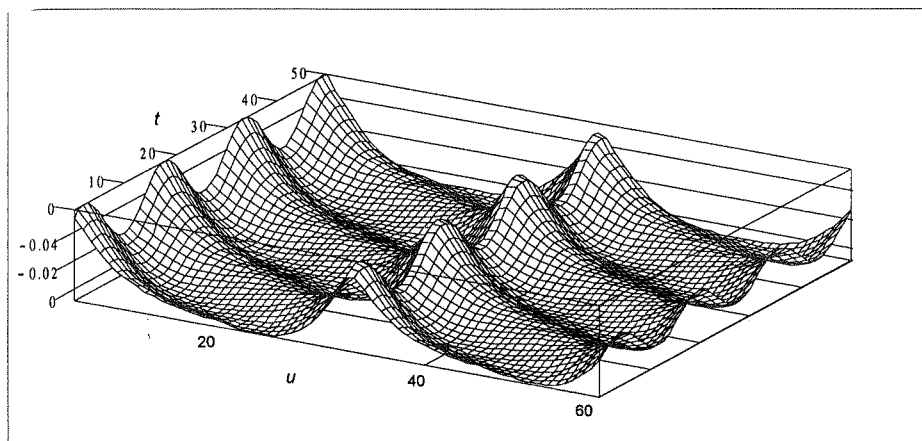
Przykładowe względne wartości obciążenia estymatora funkcji autokorelacji ( $\omega_0 = 0.2$ ,  $D_c = 1$ ,  $D_s = 0.5$ ,  $D_{cs} = 0.25$ ,  $\alpha_s = 0.2$ ,  $\alpha_c = 0.2$ ,  $\alpha_{cs} = 0.1$ ,  $t = 10$ ) w zależności od  $N$ .

|                                                  |       |       |       |       |       |       |       |       |          |
|--------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $\frac{ \varepsilon[\hat{b}(t, u)] }{ b(t, u) }$ | 0.337 | 0.225 | 0.168 | 0.135 | 0.067 | 0.034 | 0.022 | 0.013 | $u = 0$  |
|                                                  | 0.483 | 0.327 | 0.248 | 0.199 | 0.101 | 0.051 | 0.034 | 0.020 | $u = 33$ |
| $N$                                              | 20    | 30    | 40    | 50    | 100   | 200   | 300   | 500   |          |

(172)

Współczynnik  $\tilde{\varepsilon}_2^c(u)$  zależy tylko od parametrów funkcji autokorelacji składowych kwadraturowych, a  $\tilde{\varepsilon}_2^s(u)$  — tylko od parametrów funkcji korelacji wzajemnej. Są to funkcje zanikające wraz ze wzrostem przesunięcia, jednak w odróżnieniu od współczynników  $\varepsilon_2^c(u)$  i  $\varepsilon_2^s(u)$  są nieoscylujące. Oczywiście jest, iż szybkość zanikania ich ze wzrostem przesunięcia jest także mniejsza od szybkości zanikania komponentów korelacyjnych, co powoduje podobne do omówionych wyżej właściwości względnego błędu estymacji.

(173)



Rys. 8. Obciążenie estymatora funkcji autokorelacji dla  $N = 20$ ,  $D_c = 1$ ,  $D_s = 0.5$ ,  $D_{cs} = 0.25$ ,  $\alpha_s = 0.2$ ,  $\alpha_c = 0.2$ ,  $\alpha_{cs} = 0.1$ .

(174)

Wariancja estymatora funkcji autokorelacji w danym przypadku także ma postać (110), przy czym współczynniki  $\alpha_0(u)$ ,  $\alpha_2^{c,s}(u)$  i  $\alpha_4^{c,s}(u)$  określone są wzorami (54)–(56). Składowa zerowego komponentu  $\tilde{B}_0^{(n)}[u_1, u]$ , określająca się charakterystykami, które opisują jego własności niestacjonarne, oczywiście, jest równa zero, jeżeli  $R_c(u) = R_s(u)$  i  $R_{cs}^{(p)}(u) = 0$ . Zerowe są w tym przypadku także wyższe komponenty  $\tilde{B}_k^{c,s}(u_1, u)$ . Zauważmy, że wszystkie komponenty są niezerowe, jeżeli jest niespełniona jedna z tych równości.

(175)

Dla zerowego współczynnika  $\alpha_0(u)$  znajdujemy

(176)

$$\begin{aligned} \alpha_0(u) = & \frac{1}{8N} \left[ [D_c^2(1 + e^{-2\alpha_c|u|}) + D_s^2(1 + e^{-2\alpha_s|u|})](2 + \cos 2\omega_0 u) + \right. \\ & + 2D_c D_s (2 - \cos 2\omega_0 u) + 2[D_c D_s e^{-(\alpha_c + \alpha_s)|u|} + 2D_{cs}^2] \cos 2\omega_0 u + 4D_{cs}^2 e^{-2\alpha_{cs}|u|} + \\ & + 2[D_c^2[S(2\alpha_c T, N) + S_1(\alpha_c T, N, u)] + D_s^2[S(2\alpha_s T, N) + S_1(\alpha_s T, N, u)]] \times \\ & \times (2 + \cos 2\omega_0 u) + 2D_c D_s S[(\alpha_c + \alpha_s)T, N](2 - \cos 2\omega_0 u) + \\ & + D_c D_s [S^*(\alpha_c T, \alpha_s T, N, u) + S^*(\alpha_s T, \alpha_c T, N, u)] + \\ & \left. + 4D_{cs}^2 S(2\alpha_{cs} T, N) \cos 2\omega_0 u + 4D_{cs}^2 S_1(2\alpha_{cs} T, N, u) \right]. \end{aligned} \quad (177)$$

Tablica 8

1,  $D_s = 0.5$ ,

|      |
|------|
| = 0  |
| = 33 |
|      |

Funkcje  $S(2\alpha T, N)$  i  $S_1(2\alpha T, N, u)$  określone są wzorami (94) i (115), a funkcja  $S^*(\alpha_c T, \alpha_s T, N, u)$  jest równa

$$S^*(\alpha_c T, \alpha_s T, N, u) = \sum_{n=1}^{N-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \exp(-\alpha_c |u + nT| - \alpha_s |u + nT|). \quad (178)$$

Największą wartość współczynnik  $\alpha_0(u)$  osiąga przy  $u = 0$ :

$$\begin{aligned} \alpha_0(0) = & \frac{1}{4N} [3D_c^2 [1 + 2S(2\alpha_c T, N)] + 3D_s^2 [1 + 2S(2\alpha_s T, N)] + \\ & + 2D_c D_s [1 + 2S[(\alpha_c + \alpha_s)T, N]] + 4D_{cs}^2 [1 + 2S(2\alpha_{cs} T, N)]]. \end{aligned} \quad (179)$$

W wyrażeniu (177) można wyróżnić trzy części. Pierwsza z nich nie zależy od przesunięcia i określona jest tylko parametrami sygnału oraz liczbą okresów uśrednienia. Druga część jest zanikającą funkcją przesunięcia, a trzecia — okresową. Szybkość zanikania i amplituda okresowych oscylacji są określone parametrami sygnału i liczbą okresów uśrednienia. Składowa stała jest uwarunkowana tylko funkcją autokorelacji przybliżenia stacjonarnego sygnału  $B_0(u)$ , a okresowa — tylko drugimi komponentami korelacyjnymi  $B_2^s(u)$  i  $B_2^c(u)$ . Składowa zanikająca jest utworzona na podstawie charakterystyk stacjonarności i niestacjonarności. Dla dużych wartości  $u$  równanie (177) można zastąpić przybliżeniem

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_0(u) = & \frac{1}{8N} [2(D_c + D_s)^2 + (D_c - D_s)^2 \cos 2\omega_0 u + 4D_{cs}^2 \cos 2\omega_0 u + \\ & + 2[D_c^2 S(2\alpha_c T, N) + D_s^2 S(2\alpha_s T, N)](2 + \cos 2\omega_0 u) + \\ & + 2D_c D_s S[(\alpha_c + \alpha_s)T, N](2 - \cos 2\omega_0 u) + 8D_{cs}^2 S(2\alpha_{cs} T, N) \cos 2\omega_0 u]. \end{aligned} \quad (180)$$

Wyrażenia (179) i (180) można przedstawić w postaci sum stacjonarnej i niestacjonarnej składowej  $\alpha_0(0) = \alpha_0^{(s)}(0) + \alpha_0^{(n)}(0)$  i  $\tilde{\alpha}_0(u) = \tilde{\alpha}_0^{(s)}(u) + \tilde{\alpha}_0^{(n)}(u)$ , przy tym

$$\begin{aligned} \alpha_0^{(s)}(0) = & \frac{1}{2N} [D_c^2 [1 + 2S(2\alpha_c T, N)] + \\ & + D_s^2 [1 + 2S(2\alpha_s T, N)] + 2D_c D_s [1 + 2S[(\alpha_c + \alpha_s)T, N]]], \end{aligned} \quad (181)$$

$$\begin{aligned} \alpha_0^{(n)}(0) = & \frac{1}{4N} [D_c^2 [1 + 2S(2\alpha_c T, N)] + \\ & + D_s^2 [1 + 2S(2\alpha_s T, N)] - 2D_c D_s [1 + 2S[(\alpha_c + \alpha_s)T, N]] + \\ & + 4D_{cs}^2 [1 + 2S(2\alpha_{cs} T, N)]], \end{aligned} \quad (182)$$

$S^*(\alpha_c T,$ 

jak też

(178)

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_0^{(s)}(u) = & \frac{1}{4N} [D_c^2 [1 + 2S(2\alpha_c T, N)] + \\ & + D_s^2 [1 + 2S(2\alpha_s T, N)] + 2D_c D_s [1 + 2S[(\alpha_c + \alpha_s)T, N]]], \end{aligned} \quad (183)$$

(179)

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_0^{(n)}(u) = & \frac{1}{8N} [D_c^2 [1 + 2S(2\alpha_c T, N)] + \\ & + D_s^2 [1 + 2S(2\alpha_s T, N)] - 2D_c D_s [1 + 2S[(\alpha_c + \alpha_s)T, N]] + \\ & + 4D_{cs}^2 [1 + 2S(2\alpha_{cs} T, N)] \cos 2\omega_0 u. \end{aligned} \quad (184)$$

ży od  
nienia.  
ybkosć  
liczbą  
orelacji  
entami  
charak-  
można

Stosunek składowych  $\frac{\alpha_0^{(n)}(u)}{\alpha_0^{(s)}(u)}$  określa wpływ niestacjonarności sygnału na wartość uśrednionej w czasie wariancji estymatora funkcji autokorelacji. Jak w przypadku sygnału zmodulowanego amplitudowo wpływ ten jest istotny dla dowolnych przesunięć  $u$ . Konkretnie wartości tego stosunku mogą być obliczone na podstawie otrzymanych wzorów dla zadanych parametrów sygnałów modulujących i liczby okresów uśrednienia  $N$ .

Przejdźmy teraz do analizy właściwości wyższych współczynników  $\alpha_i^{c,s}(u)$ . Po przekształceniach otrzymujemy

(180)

$$\begin{aligned} \alpha_2^c(u) = & \frac{1}{4N} [D_c^2 (1 + e^{-\alpha_c |u|}) - D_s^2 (1 + e^{-\alpha_s |u|})] (1 + \cos 2\omega_0 u) + \\ & + 2[D_c D_{cs} (1 + e^{-(\alpha_c + \alpha_s) |u|}) + 2D_s D_{cs} [1 + e^{-(\alpha_c + \alpha_s) |u|}]] \sin 2\omega_0 u + \\ & + 2[D_c^2 [S(2\alpha_c T, N) + S_1(\alpha_c T, N, u)] - D_s^2 [S(2\alpha_s T, N) + S_1(\alpha_s T, N, u)]] \times \\ & \times (2 + \cos 2\omega_0 u) + 2[D_c D_{cs} [2S[(\alpha_c + \alpha_{cs})T, N] + \\ & + S^*(\alpha_{cs} T, \alpha_c T, N, u) + S^*(\alpha_s T, \alpha_{cs} T, N, u)] + \\ & + D_c D_{cs} [2S[(\alpha_c + \alpha_{cs})T, N] + \\ & + S^*(\alpha_{cs} T, \alpha_s T, N, u) + S^*(\alpha_s T, \alpha_{cs} T, N, u)]] \sin 2\omega_0 u, \end{aligned} \quad (185)$$

onarnej

(181)

$$\begin{aligned} \alpha_2^s(u) = & -\frac{1}{4N} [D_c^2 (1 + e^{-\alpha_c |u|}) - D_s^2 (1 + e^{-\alpha_s |u|})] \sin 2\omega_0 u - \\ & - 2[D_c D_{cs} (1 + e^{-(\alpha_c + \alpha_s) |u|}) + D_s D_{cs} [1 + e^{-(\alpha_c + \alpha_{cs}) |u|}]] (1 + \cos 2\omega_0 u) + \\ & + 2[D_c^2 [S(2\alpha_c T, N) + S_1(\alpha_c T, N, u)] - D_s^2 [S(2\alpha_s T, N) + S_1(\alpha_s T, N, u)]] \times \end{aligned} \quad (186)$$

(182)

$$\begin{aligned} & \times \sin 2\omega_0 u - 2[D_c D_{cs} [2S[(\alpha_c + \alpha_{cs})T, N] + \\ & + S^*(\alpha_{cs} T, \alpha_c T, N, u) + S^*(\alpha_c T, \alpha_{cs} T, N, u)] + D_s D_{cs} [2S(\alpha_s + \alpha_{cs})T, N] + \\ & + S^*(\alpha_{cs} T, \alpha_s T, N, u) + S^*(\alpha_s T, \alpha_{cs} T, N, u)]] (1 + \cos 2\omega_0 u). \end{aligned}$$

Jeżeli  $u = 0$ , to

$$\alpha_2^c(0) = \frac{1}{N} [D_c^2 [1 + 2S(2\alpha_c T, N)] - D_s^2 [1 + 2S(2\alpha_s T, N)]], \quad (187)$$

$$\alpha_2^s(0) = \frac{2D_{cs}}{N} [D_c [1 + 2S[(\alpha_c + \alpha_{cs})T, N]] + D_s [1 + 2S[(\alpha_s + \alpha_{cs})T, N]]]. \quad (188)$$

Dla dużych wartości  $u$  przy zaniedbaniu składników, które zawierają zanikające funkcje  $S^*(\alpha_{cs}T, \alpha_cT, N, u)$  i  $S_1(\alpha T, N, u)$ , otrzymamy

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_2^c(u) = & \frac{1}{4N} [ [D_c^2 [1 + 2S(2\alpha_c T, N)] - \\ & - D_s^2 [1 + 2S(2\alpha_s T, N)] ] (1 + \cos 2\omega_0 u) + \\ & + 2[D_c D_{cs} [1 + 2S[(\alpha_c + \alpha_{cs})T, N]] + \\ & + D_s D_{cs} [1 + 2S[(\alpha_s + \alpha_{cs})T, N]] ] \sin 2\omega_0 u ], \end{aligned} \quad (189)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_2^s(u) = & \\ = -\frac{1}{4N} [ [D_c^2 [1 + 2S(2\alpha_c T, N)] - D_s^2 [1 + 2S(2\alpha_s T, N)] ] \sin 2\omega_0 u - \\ & - 2[D_c D_{cs} [1 + 2S[(\alpha_c + \alpha_{cs})T, N]] + \\ & + D_s D_{cs} [1 + 2S[(\alpha_s + \alpha_{cs})T, N]] ] (1 + \cos 2\omega_0 u) ]. \end{aligned} \quad (190)$$

Funkcje  $\tilde{\alpha}_2^c(u)$  i  $\tilde{\alpha}_2^s(u)$  zawierają składowe, które nie zależą od przesunięcia  $u$  i składowe, które zmieniają się względem przesunięcia okresowo. Składowe stałe są mniejsze od początkowych wartości  $\alpha_2^c(0)$  i  $\alpha_2^s(0)$  cztery razy, jak też mniejsze cztery razy od wartości amplitudy kosinusowych oscylacji każdego współczynnika. Ze wzorów (189)–(190) widać, że amplituda okresowych drgań obu współczynników są jednakowe, a różnica faz między nimi jest równa  $\frac{\pi}{2}$ .

Na podstawie równań (55)–(56) uzyskujemy

$$\alpha_4^c(u) = \frac{1}{N} [ [G_0^c(u) + G_N^c(u)] \cos 2\omega_0 u + [G_0^s(u) + G_N^s(u)] \sin 2\omega_0 u ], \quad (191)$$

$$\alpha_4^s(u) = \frac{1}{N} [ [G_0^s(u) + G_N^s(u)] \cos 2\omega_0 u - [G_0^c(u) + G_N^c(u)] \sin 2\omega_0 u ], \quad (192)$$

gdzie

Współcz.  
wzorc.

Dla duż.

gdzie

(187)

$$G_0^c(u) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} [D_c^2(1 + e^{-2\alpha_c|u|}) + D_s^2(1 + e^{-2\alpha_s|u|}) - 2D_c D_s [1 + e^{-2(\alpha_c + \alpha_s)|u|}]] - D_{cs}^2(1 + e^{-2\alpha_{cs}|u|}) \right], \quad (193)$$

(188)

$$G_0^s(u) = \frac{D_{cs}}{2} [D_c [1 + e^{-\alpha_{cs} + \alpha_s|u|}] - D_s [1 + e^{-(\alpha_{cs} + \alpha_c)|u|}]], \quad (194)$$

funkcje

(189)

$$G_N^c(u) = \frac{1}{4} [D_c^2 [S(2\alpha_c T, N) + S_1(\alpha_c T, N, u)] + D_s^2 [S(2\alpha_s T, N) + S_1(\alpha_s T, N, u)] - D_c D_s [2S[(\alpha_c + \alpha_s)T, N] + S^*(\alpha_c T, \alpha_s T, N, u) + S^*(\alpha_s T, \alpha_c T, N, u)]], \quad (195)$$

$$G_N^s(u) = \frac{D_{cs}}{2} [D_c [2S[(\alpha_c + \alpha_{cs})T, N] + S^*(\alpha_c T, \alpha_{cs} T, N, u) + S^*(\alpha_{cs} T, \alpha_c T, N, u)] - D_s [2S[(\alpha_s + \alpha_{cs})T, N] + S^*(\alpha_s T, \alpha_{cs} T, N, u) + S^*(\alpha_{cs} T, \alpha_s T, N, u)]]. \quad (196)$$

Współczynniki wariancji estymatora wariancji otrzymamy, jeżeli w wyprowadzonych wzorach założymy, że  $u = 0$ . Wtedy

(190)

$$\alpha_4^c(0) = \frac{1}{4N} [D_c^2 [1 + 2S(2\alpha_c T, N)] + D_s^2 [1 + 2S(2\alpha_s T, N)] - 2D_c D_{cs} [1 + 2S[(\alpha_c + \alpha_{cs})T, N]] - 4D_{cs}^2 [1 + 2S(2\alpha_{cs} T, N)]], \quad (197)$$

kładowe,  
iejsze od  
razy od  
wzorów  
dnakowe,

$$\alpha_4^s(0) = \frac{D_{cs}}{N} [D_c [1 + 2S[(\alpha_c + \alpha_s)T, N]] - D_s [1 + 2S[(\alpha_s + \alpha_{cs})T, N]]]. \quad (198)$$

Dla dużych wartości przesunięć  $u$ :

$$\tilde{G}_0^c(u) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} (D_c^2 + D_s^2 - 2D_c D_s) - D_{cs}^2 \right], \quad \tilde{G}_0^s(u) = \frac{D_{cs}}{2} (D_c - D_s), \quad (199)$$

(191)

$$\tilde{G}_N^c(u) = \frac{1}{4} [D_c^2 S(2\alpha_c T, N) + D_s^2 S(2\alpha_s T, N) - 2D_c D_s S[(\alpha_c + \alpha_s)T, N] - D_{cs}^2 S(2\alpha_{cs} T, N)], \quad (200)$$

(192)

$$\tilde{G}_N^s(u) = D_{cs} [D_c S[(\alpha_c + \alpha_{cs})T, N] - D_s S[(\alpha_s + \alpha_{cs})T, N]]. \quad (201)$$

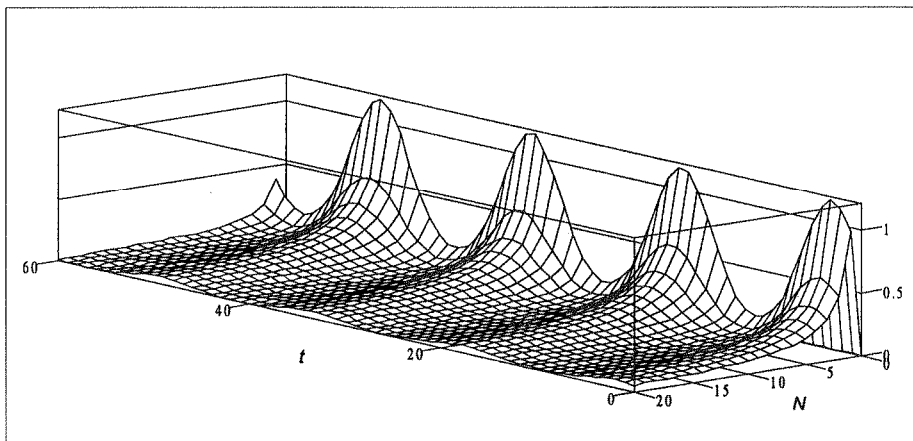
Wartości wszystkich funkcji (199)–(201), jak widać, są dwa razy mniejsze od ich wartości w punkcie  $u = 0$ . W odróżnieniu od współczynników  $\alpha_2^c(u)$  i  $\alpha_2^s(u) - \alpha_4^c(u)$  i  $\alpha_4^s(u)$  w asymptocie zawierają tylko składowe okresowe. Okresowe oscylacje obu współczynników mają jednakową amplitudę i niezmienną względem przesunięcia różnicę faz  $-\frac{\pi}{2}$ .

Tak więc, wariancja estymatora funkcji autokorelacji sygnału zmodulowanego amplitudowo i fazowo ma właściwości podobne do właściwości tej wariancji w przypadku sygnału zmodulowanego amplitudowo. Jak wynika z tych właściwości, wymagana wiarygodność estymacji funkcji autokorelacji może być osiągnięta tylko dla takich wartości przesunięć, które należą do skończonego przedziału  $[0, u_{\max}]$ . Wartość  $u_{\max}$  może być zwiększona tylko przy obróbce odcinków realizacji o większej długości. Wprowadzone wzory umożliwiają obliczenie wariancji  $D[\hat{b}(t, u)]$  dla zadanych okresów uśrednienia  $N$ . Zachowanie w czasie tej wariancji w zależności od  $N$  dla  $u = 0$  i pewnych parametrów przedstawiono na rys. 9 a wartości względnego błędu średniokwadratowego w tablicy 9.

Tablica 9

Przykładowe względne błędy średniokwadratowe autokorelacji ( $\omega_0 = 0.2$ ,  $D_c = 1$ ,  $D_s = 0.5$ ,  $D_{cs} = 0.25$ ,  $\alpha_s = 0.2$ ,  $\alpha_c = 0.2$ ,  $\alpha_{cs} = 0.1$ ,  $t = 2$ ) w zależności od  $N$ .

|                                                   |       |       |       |       |       |       |       |       |         |
|---------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|
| $\frac{\sqrt{D[\hat{b}(t, u)]}}{ \hat{b}(t, u) }$ | 0.867 | 0.708 | 0.613 | 0.548 | 0.388 | 0.274 | 0.224 | 0.173 | $u = 8$ |
|                                                   | 0.173 | 0.141 | 0.122 | 0.109 | 0.077 | 0.055 | 0.045 | 0.035 | $u = 0$ |
| $N$                                               | 20    | 30    | 40    | 50    | 100   | 200   | 300   | 500   |         |



Rys. 9. Wariancja estymatora funkcji autokorelacji dla  $D_c = 1$ ,  $D_s = 0.5$ ,  $D_{cs} = 0.25$ ,  $\alpha_s = 0.2$ ,  $\alpha_c = 0.2$ ,  $\alpha_{cs} = 0.1$ .

C  
k(t, u

a jego  
(185)  
R  
Obcia  
obcia  
zując  
właśn

Oczyw  
z niez  
wzrost  
składni  
Dla u =

Omówione powyżej własności dotyczą również estymatora funkcji autokorelacji  $k(t, u)$ . Estymator funkcji autokorelacji ma postać:

$$D[\hat{k}(t, u)] = \beta_0(u) + \sum_{l=2;4} [\beta_l^c(u) \cos \omega_0 t + \beta_l^s(u) \sin \omega_0 t], \quad (202)$$

a jego współczynniki mogą być obliczone na podstawie wzorów (60)–(61), jak też (177), (185)–(186) i (191)–(192).

Rozważmy teraz właściwości estymatorów komponentów korelacyjnych (62)–(63). Obciążenie tych estymatorów określa się odpowiednimi współczynnikami Fouriera obciążenia funkcji autokorelacji  $b(t, u)$ , a wariancje — równaniami (132)–(134). Analizując wariancję estymatora zerowego komponentu, wydzielimy składowe, zależne właśnie od niego oraz składowe, określone drugimi komponentami korelacyjnymi:

$$\begin{aligned} D^{(s)}[\hat{B}_0(u)] &= \\ &= \frac{1}{4N} [D_c^2[r_0(2\alpha_c T, N) + r_2(2\alpha_c T, N) + \\ &\quad + \tilde{r}_0(\alpha_c T, N, u) \cos 2\omega_0 u + \tilde{r}_2(\alpha_c T, N, u)] + \\ &\quad + D_s^2[r_0(2\alpha_s T, N) + r_2(2\alpha_s T, N) + \tilde{r}_0(\alpha_s T, N, u) \cos 2\omega_0 u + \tilde{r}_2(\alpha_s T, N, u)] + \\ &\quad + D_c D_s [2[r_0[(\alpha_c + \alpha_s)T, N] + r_2[(\alpha_c + \alpha_s)T, N]] + r_2^*(\alpha_c T, \alpha_s T, N, u) + \\ &\quad + r_2^*(\alpha_s T, \alpha_c T, N, u) + [r_0^*(\alpha_c T, \alpha_s T, N, u) + r_0^*(\alpha_s T, \alpha_c T, N, u)] \cos 2\omega_0 u], \end{aligned} \quad (203)$$

$$\begin{aligned} D^{(n)}[\hat{B}_0(u)] &= \\ &= \frac{1}{4N} [D_c^2[r_0(2\alpha_c T, N) \cos 2\omega_0 u + \tilde{r}_0(\alpha_c T, N, u)] + \\ &\quad + D_s^2[r_0(2\alpha_s T, N) \cos 2\omega_0 u + \tilde{r}_0(\alpha_s T, N, u)] - \\ &\quad - D_c D_s [2r_0[(\alpha_c + \alpha_s)T, N] \cos 2\omega_0 u + \\ &\quad + r_0^*(\alpha_c T, \alpha_s T, N, u) + r_0^*(\alpha_s T, \alpha_c T, N, u)] + \\ &\quad + 4D_{cs}^2[r_0(2\alpha_{cs} T, N) \cos 2\omega_0 u + \tilde{r}_0(\alpha_{cs} T, N, u)]. \end{aligned} \quad (204)$$

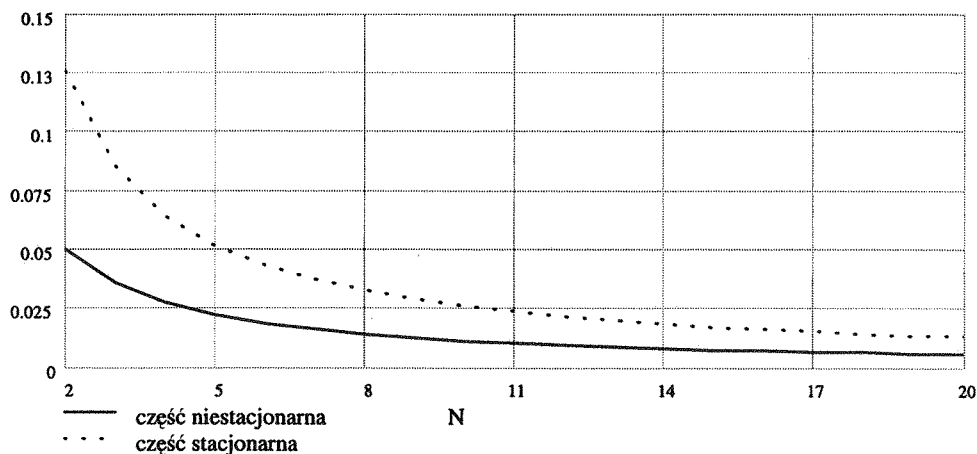
Oczywiste jest, iż  $D[\hat{B}_0(u)] = D^{(s)}[\hat{B}_0(u)] + D^{(n)}[\hat{B}_0(u)]$ . Część stacjonarna składa się z niezależnych od przesunięcia  $u$  składników, jak też składników, zanikających ze wzrostem przesunięcia — także w sposób oscylacyjny. Część niestacjonarna stałych składników nie zawiera, lecz zawiera składniki okresowe oraz oscylacyjnie zanikające. Dla  $u = 0$  mamy



$$\begin{aligned}
 D^{(s)}[\hat{B}_0(0)] = & \frac{1}{2N} [D_c^2[r_0(2\alpha_c T, N) + r_2(2\alpha_c T, N)] + \\
 & + D_s^2[r_0(2\alpha_s T, N) + r_2(2\alpha_s T, N)] + \\
 & + 2D_c D_s[r_0[(\alpha_c + \alpha_s)T, N] + r_2[(\alpha_c + \alpha_s)T, N]]],
 \end{aligned} \quad (205)$$

$$\begin{aligned}
 D^{(n)}[\hat{B}_0(0)] = & \frac{1}{2N} [D_c^2 r_0(2\alpha_c T, N) + D_s^2 r_0(2\alpha_s T, N)] - \\
 & - 2D_c D_s r_0[(\alpha_c + \alpha_s)T, N] + 4D_{cs}^2 r_0(2\alpha_{cs} T, N).
 \end{aligned} \quad (206)$$

Zależności tych funkcji od  $N$  dla pewnych parametrów sygnału podano na rys. 10.



Rys. 10. Wariancje estymatora zerowego komponentu  $D^{(n)}[\hat{B}_0(0)]$  i  $D^{(s)}[\hat{B}_0(0)]$  dla  $D_c = 1$ ,  $D_s = 0.5$ ,  $D_{cs} = 0.25$ ,  $D_{csp} = 0.7$ ,  $D_{csn} = 0$ ,  $\alpha_s = 0.2$ ,  $\alpha_c = 0.2$ ,  $\alpha_{cs} = 0.1$ ,  $\alpha_{csp} = 0.1$ .

Dla dużych wartości przesunięć części  $D^{(s)}[\hat{B}_0(u)]$  i  $D^{(n)}[\hat{B}_0(u)]$  można przekształcić do postaci

$$\begin{aligned}
 \tilde{D}^{(s)}[\hat{B}_0(u)] = & \frac{1}{4N} [D_c^2[r_0(2\alpha_c T, N) + r_2(2\alpha_c T, N)] + \\
 & + D_s^2[r_0(2\alpha_s T, N) + r_2(2\alpha_s T, N)] + \\
 & + 2D_c D_s[r_0[(\alpha_c + \alpha_s)T, N] + r_2[(\alpha_c + \alpha_s)T, N]]],
 \end{aligned} \quad (207)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{D}^{(n)}[\hat{B}_0(u)] = & \frac{1}{4N} [D_c^2 r_0(2\alpha_c T, N) + D_s^2 r_0(2\alpha_s T, N)] - \\
 & - 2D_c D_s r_0[(\alpha_c + \alpha_s)T, N] + 4D_{cs}^2 r_0(2\alpha_{cs} T, N) \cos 2\omega_0 u.
 \end{aligned} \quad (208)$$

Tak więc, funkcja  $\tilde{D}^{(s)}[\hat{B}_0(u)]$  jest wielkością stałą o wartości dwa razy mniejszej od początkowej  $\tilde{D}^{(n)}[\hat{B}_0(0)]$ . Funkcja  $\tilde{D}^{(n)}[\hat{B}_0(u)]$  jest okresowa względem przesunięcia, jej

kosinusowe oscylacje mają amplitudę, wartość której jest dwa razy mniejsza od wartości  $\tilde{D}^{(n)}[\hat{B}_0(0)]$ . Zauważmy, że ten wynik zależy od liczby okresów uśrednienia  $N$ . Wartość  $N$  wpływa tylko na wartości bezwzględne rozpatrywanych funkcji.

Ze wzorów (205)–(206) oraz (207)–(208) wynika, że stosunek wzajemny między funkcjami  $\tilde{D}^{(n)}[\hat{B}_0(u)]$  i  $\tilde{D}^{(s)}[\hat{B}_0(u)]$  zależy od stopnia niestacjonarności sygnału, tj. od różnicy  $D_c - D_s$ , jak też wartości  $D_{cs}$ . Im wartości tych wielkości są większe, tym większa jest konieczność uwzględnienia niestacjonarności przy obliczeniu wiarygodności estymacji funkcji przybliżenia stacjonarnego sygnału  $B_0(u)$ .

Wariancje estymatorów drugich komponentów korelacyjnych obliczmy stosując wzory (133)–(134). Na ich podstawie dla estymatorów komponentów wariancji sygnału otrzymujemy:

$$D[\hat{B}_2^c(0)] = \frac{1}{2N} [D_c^2[2r_0(2\alpha_c T, N) + 4r_2(2\alpha_c T, N) + r_4(2\alpha_c T, N)] + \\ + D_s^2[2r_0(2\alpha_s T, N) + 4r_2(2\alpha_s T, N) + r_4(2\alpha_s T, N)] + \\ + D_{cs}^2[8r_2(2\alpha_{cs} T, N) - 4r_0(2\alpha_{cs} T, N)] + 2D_c D_s r_4[(\alpha_c + \alpha_s)T, N]], \quad (209)$$

$$D[\hat{B}_2^s(0)] = \frac{1}{2N} [D_c^2[4r_2(2\alpha_c T, N)] + \\ + D_s^2[4r_2(2\alpha_{cs} T, N) + r_4(2\alpha_c T, N)] + \\ + 2D_c D_s [2r_2[(\alpha_c + \alpha_s)T, N] + r_4[(\alpha_c + \alpha_s)T, N]] + \\ + 4D_{cs}^2[r_0(2\alpha_{cs} T, N) + 2r_2(2\alpha_{cs} T, N)]]. \quad (210)$$

Tablica 10

Przykładowe względne błędy średniokwadratowe komponentów korelacyjnych w zależności od  $N$  ( $\omega_0 = 0.2$ ,  $D_c = 1$ ,  $D_s = 0.5$ ,  $D_{cs} = 0.25$ ,  $\alpha_s = 0.2$ ,  $\alpha_c = 0.2$ ,  $\alpha_{cs} = 0.1$ ).

|                                                     |       |       |       |       |       |       |       |
|-----------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\frac{\sqrt{D[\hat{B}_0(0)]}}{ \hat{B}_0(0) }$     | 0.105 | 0.086 | 0.074 | 0.066 | 0.047 | 0.033 | 0.021 |
| $\frac{\sqrt{D[\hat{B}_2^c(0)]}}{ \hat{B}_2^c(0) }$ | 0.405 | 0.331 | 0.286 | 0.256 | 0.181 | 0.128 | 0.081 |
| $\frac{\sqrt{D[\hat{B}_2^s(0)]}}{ \hat{B}_2^s(0) }$ | 0.136 | 0.111 | 0.096 | 0.086 | 0.061 | 0.043 | 0.027 |
| $N$                                                 | 20    | 30    | 40    | 50    | 100   | 200   | 500   |

Wraz ze wzrostem  $N$  wielkości te stopniowo gasną (rys. 11, tablica 10). Dla dużych wartości przesunięcia  $u$  przy pominięciu składników zanikających uzyskujemy

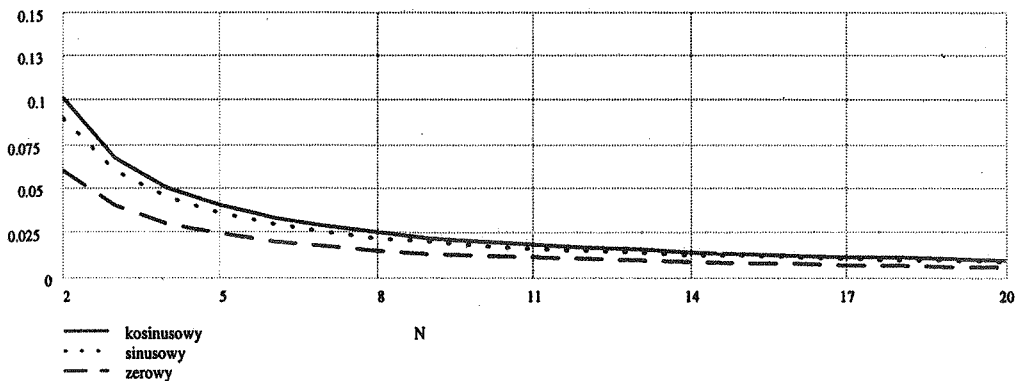
$$D[\hat{B}_2^c(u)] = \\ = \frac{1}{N} \left[ \frac{D_c^2}{4} [r_0(2\alpha_c T, N) + 2r_2(2\alpha_c T, N)](1 + \cos 2\omega_0 u) + r_4(2\alpha_c T, N) \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{D_s^2}{4} [r_0(2\alpha_s T, N) + 2r_2(2\alpha_s T, N)](1 + \cos 2\omega_0 u) + r_4(2\alpha_s T, N) + \\
& + \frac{D_c D_s}{2} [[2r_2(\alpha_c + \alpha_s)T, N] + r_0[(\alpha_c + \alpha_s)T, N]] \times \\
& \quad \times (1 - \cos 2\omega_0 u) + 2r_4[(\alpha_c + \alpha_s)T, N] + \\
& + D_{cs}^2 [2r_2(2\alpha_{cs} T, N) - r_0(2\alpha_{cs} T, N)] \cos 2\omega_0 u + \\
& + D_{cs} [D_c r_0[(\alpha_c + \alpha_{cs})T, N] - D_s r_0[(\alpha_{cs} + \alpha_s)T, N]] \sin 2\omega_0 u,
\end{aligned} \tag{211}$$

$$\begin{aligned}
D[\hat{B}_2^s(u)] = \\
& = \frac{1}{N} \left[ \frac{D_c^2}{4} [r_0(2\alpha_c T, N)(1 - \cos 2\omega_0 u) + \right. \\
& \quad + 2r_2(2\alpha_c T, N)(1 + \cos 2\omega_0 u) + r_4(2\alpha_c T, N)] + \\
& + \frac{D_s^2}{4} [r_0(2\alpha_s T, N)(1 - \cos 2\omega_0 u) + 2r_2(2\alpha_s T, N) \times \\
& \quad \times (1 + \cos 2\omega_0 u) + r_4(2\alpha_s T, N)] + \\
& + \frac{D_c D_s}{2} [[r_0[(\alpha_c + \alpha_s)T, N] + 2r_2[(\alpha_c + \alpha_s)T, N]] \times \\
& \quad \times (1 - \cos 2\omega_0 u) + r_4[(\alpha_c + \alpha_s)T, N]] + \\
& + D_{cs}^2 [r_0(2\alpha_{cs} T, N) + r_2(2\alpha_{cs} T, N)] \cos 2\omega_0 u - \\
& - D_{cs} [D_c r_0[(\alpha_c + \alpha_{cs})T, N] - D_s r_0[(\alpha_{cs} + \alpha_s)T, N]] \sin 2\omega_0 u].
\end{aligned} \tag{212}$$

Wariancje estymatorów, jak widać, zawierają również składniki stałe i okresowe względem przesunięcia  $u$ , dla których mogą być oszacowane komponenty korelacyjne  $B_2^c(u)$  i  $B_2^s(u)$  o pewnej dopuszczalnej dokładności, należą do takiego przedziału, gdzie wariancje są funkcjami zanikającymi. Konkretnie zalecenia wyboru punktu odcięcia korelogramu  $u_{\max}$  oraz liczby okresów uśrednienia  $N$  można opracować na podstawie wyprowadzonych wzorów przy zadanych wartościach parametrów modulujących sygnałów.

Wyrażenia wariancji estymatorów komponentów  $K_2^c(u)$  i  $K_2^s(u)$  można wyprowadzić, stosując równania (84)–(85). Właściwości tych wariancji są podobne do właściwości wariancji estymatorów komponentów korelacyjnych  $B_2^c(u)$  i  $B_2^s(u)$ . Stosując podobne wzory, możemy obliczyć wartości liczbowe wariancji estymatorów, jak też względnych błędów średniokwadratowych dla pewnych parametrów modulujących sygnałów i na tej podstawie mogą być ustalone parametry ich etymacji — długość odcinka realizacji i punkt odcięcia korelogramu, zapewniające określoną wiarygodność estymacji.



Rys. 11. Wariancje estymatorów drugich komponentów korelacyjnych dla  $D_c = 1$ ,  $D_s = 0.5$ ,  $D_{cs} = 0.25$ ,  $\alpha_s = 0.2$ ,  $\alpha_c = 0.2$ ,  $\alpha_{cs} = 0.1$ .

## 7. PODSUMOWANIE

Otrzymanie ilościowych charakterystyk wiarygodności estymacji charakterystyk probabilistycznych niestacjonarnych sygnałów zmodulowanych jest jednym z podstawowych zagadnień ich analizy statystycznej. Umożliwiają one uzasadniony wybór parametrów obróbki, co oznacza obiektywną interpretację wyników i weryfikację modelu. W pracy wiarygodność koherentnej obróbki statystycznej określona jest za pomocą obciążenia i wariancji estymatorów wartości oczekiwanej, funkcji autokorelacji, współczynników Fouriera tych charakterystyk, jak też wielkości, skonstruowanych na ich podstawie. Wyprowadzone wzory opisują zależność obciążenia i wariancji estymatorów od długości odcinka realizacji, jak też komponentów korelacyjnych sygnałów. Konkretyzacja wzorów analitycznych komponentów korelacyjnych dla pewnych typów niestacjonarnych sygnałów zmodulowanych umożliwiła otrzymanie zależności od parametrów określających korelacyjne właściwości sygnałów modulujących, a w tym dokładniejsze zbadanie właściwości estymatorów i obliczenie wskaźników wiarygodności dla zadanych parametrów obróbki i długości odcinka realizacji. Wykazano, że niestacjonarność istotnie zmienia wartości ilościowe wskaźników wiarygodności (do 50%), jak też ich zachowanie wraz ze wzrostem przesunięcia. Wariancje estymatorów charakterystyk korelacyjnych ze wzrostem przesunięcia przybierają postacie niezanikających drgań, amplituda których jest określona charakterystykami niestacjonarności sygnału, a ich wartość średnia charakterystykami przybliżenia stacjonarnego. Takie zachowanie wariancji względem przesunięcia świadczy o tym, że wiarygodna estymacja charakterystyk korelacyjnych możliwa jest tylko dla przesunięć, należących do pewnego przedziału  $[0, u_m]$ . W tym przedziale wariancje estymatorów mają postacie zanikających drgań. Konkretnie wartości  $u_m$  mogą być obliczone z wykorzystaniem otrzymanych wzorów.

Wzory te były podstawą do opracowania oprogramowania, celem którego jest obliczenie wskaźników wiarygodności estymacji wartości oczekiwanej, funkcji autokorelacji, ich współczynników Fouriera dla pewnej liczby okresów uśrednienia  $N$  oraz pewnych wartości parametrów sygnałów modulujących. Przykłady takich obliczeń podano w pracy. Oprogramowanie to umożliwia także rozwiązanie zagadnienia odwrotnego — wyboru liczby okresów uśrednienia  $N$  w celu otrzymania pożądanej wiarygodności obróbki.

## BIBLIOGRAFIA

1. J. Jaworski, Z. Drzycimski, Z. Zakrzewski, J. Majewski: *Własności korelacyjne i widmowe niestacjonarnych sygnałów zmodulowanych*. Kwartalnik Elektroniki i Telekomunikacji, nr 44, z. 2, Warszawa, 1998, s. 155+192.
2. Я. П. Драган, В. А. Рожков, И. Н. Яворский: *Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов*. Гидрометеониздат, Ленинград, 1987.
3. *Cyclostationarity in Communications and Signal Processing*. Ed. by W.A. Gardner, IEEE, Inc., New York, 1994.
4. C.E. Shannon: *The mathematical Theory of Communications*. Univ. of Illinois Press, Urbana, 1949.
5. I. Jaworski, W. Mychajlyszyn, O. Drabycz: *Własności estymatorów okresu korelowania okresowo niestacjonarnych sygnałów losowych*. Krajowe Sympozjum Telekomunikacji, B, Bydgoszcz, 1999, s. 11–20.

J. JAWORSKI, Z. ZAKRZEWSKI

COHERENT CORRELATION ANALYSIS OF NONSTATIONARY  
MODULATED SIGNALS

## Summary

Coherent estimation method of nonstationary modulated signals is considered. The properties of the estimates of mean, correlation function and Fourier components was analysed. The formulas for biases and variances of estimates was received.

*Key words:* periodically correlated stochastic signals, mean, correlation function, correlation components, estimates, bias, variance, processing parameters.

Metoda  
działach  
we ucze  
i w anal  
ukrytych  
[12Ros90  
decyzyjn  
zwalają e  
[10LuS95  
metod de  
liczeniow

## Dekompozycja funkcji i relacji boolowskich w syntezie logicznej i analizie danych

PIOTR SAPIECHA, MICHAŁ PLEBAN, BOGDAN ZBIERZCHOWSKI

*Instytut Telekomunikacji, Politechnika Warszawska*

*Otrzymano 2000.06.02  
Autoryzowano 2000.06.30*

W pracy wykazano, że problem dekompozycji dowolnej funkcji skończonej  $f(A,B)$  do postaci  $h(g(A),B)$ , gdzie  $g$  jest funkcją boolowską, jest rozstrzygalny w czasie wielomianowym względem rozmiaru problemu. Równocześnie wykazano, że pominięcie założenia dotyczącego funkcji  $g$  powoduje znaczne skomplikowanie problemu. Tak ogólny problem należy do klasy problemów NP-trudnych. W pracy przedstawiono sprowadzenie problemu dekompozycji funkcji skończonych do problemu wierzchołkowego kolorowania grafu. Opisano także, sprowadzenie problemu dekompozycji relacji do problemu wyznaczania kolorowania wierzchołkowego hipergrafu. W celu wykazania poprawności obu redukcji, wykorzystano kombinatoryczną własność Helly.

*Słowa kluczowe:* synteza logiczna, algorytmy, dekompozycja funkcjonalna.

### 1. WSTĘP

Metody dekompozycji funkcji skończonych mają szerokie zastosowanie w wielu działach informatyki. Wymieńmy tylko sztuczną inteligencję, a dokładniej — maszynowe uczenie, syntezę logiczną oraz analizę obrazów. W maszynowym uczeniu, jak i w analizie obrazów, metody dekompozycji mogą wspomagać proces uczenia się ukrytych własności analizowanych danych przez maszynę-komputer [19Zup97], [12Ros90]. Poza tym metody te mogą być również pomocne w procesie kompresji reguł decyzyjnych [16Sel97], [13Sap96]. W syntezie logicznej metody dekompozycji pozwalają efektywnie projektować (mapować) układy cyfrowe w technologii CPLD/FPGA [10ŁuS95], [15Sel97], [18Wan92]. Biorąc pod uwagę ilość praktycznych zastosowań metod dekompozycji funkcjonalnej, uzasadnione stają się pytania o złożoność obliczeniową określonych problemów dekompozycji, jak również o efektywność używa-

nych do dekompozycji algorytmów. Czasami poza pytaniami analitycznymi, można próbować zadać pytania syntetyczne: na ile istniejące algorytmy są ogólne i czy można je uogólnić? W pracy jest rozważany problem dekompozycji relacji, będący uogólnieniem problemu dekompozycji funkcji. Niepełne rozwiązanie tego problemu przedstawiono w artykule [11Per97]. W celu udzielenia odpowiedzi na powyżej sformułowane pytania autorzy musieli odwołać się do pewnych pojęć kombinatorycznych, mianowicie własności Helly.

## 2. POJĘCIA PODSTAWOWE

**Grafem**  $G = (V, E)$  jest para zbiorów  $V$  i  $E$ , gdzie  $V$  jest ustalonym zbiorem, a  $E$  jest relacją binarną określoną na  $V$ . Elementy zbioru  $V$  są nazywane **wierzchołkami**, natomiast elementy zbioru  $E$  nazywane są **krawędziami**. Dowolny podzbiór wierzchołków, którego żadne dwa wierzchołki nie są połączone krawędzią ze zbioru  $E$  nazywamy **zbiorem niezależnym**. Przez całkowite i poprawne **kolorowanie wierzchołków** grafu  $G$  będziemy rozumieli całkowitą funkcję  $c: V \rightarrow \text{Kolory}$ , taką że: jeśli  $\{v, w\} \in E$ , to  $c(v) \neq c(w)$ . Jeśli zbiór kolorów jest  $k$ -elementowy, to wówczas mówimy, że graf jest  **$k$ -kolorowalny**. Najmniejsza liczba naturalna  $k$ , dla której graf jest  $k$ -kolorowalny nazywamy **liczbą chromatyczną** grafu  $G$  i oznaczamy  $\chi(G) = k$ . Zatem, dowolny zbiór niezależny wierzchołków może być monochromatyczny. Problem wyznaczenia  $\chi(G)$  dla danego dowolnego grafu  $G$  jest problemem NP-trudnym [2Ber90], [5Hal93], [6Joh74].

**Hipergraf**  $H = (X, F)$  jest rozszerzeniem pojęcia grafu. Krawędzie hipergrafu  $H$  mogą zawierać dowolną liczbą wierzchołków  $X$ , to znaczy  $F \subseteq P(X)$ . Dowolny podzbiór  $T$  wierzchołków hipergrafu  $H$ , który jest incydentny z każdą krawędzią hipergrafu, nazywamy **transwersalą**. Moc najmniejszej transwersali (w sensie liczności zbioru) dla danego hipergrafu  $H$  oznaczamy  $\tau(H)$ . Problem wyznaczenia  $\tau(H)$  dla danego dowolnego hipergrafu  $H$  jest problemem NP-trudnym [4Gar79], [6Joh74]. Poprzez analogię do powyżej podanych definicji mówimy, że dowolny podzbiór wierzchołków  $V$  który nie zawiera żadnej z hiperkrawędzi ze zbioru  $F$  nazywamy **zbiorem niezależnym** oraz dowolną funkcję całkowitą która nie jest monochromatyczna na wierzchołkach dowolnej hiperkrawędzi nazywamy **kolorowaniem hipergrafu**.

Niech  $\text{Card}(X)$  oznacza moc zbioru  $X$ . Powiemy, że hipergraf  $H = (X, F)$  ma **własność Helly** (patrz [1Ber89]), jeśli każda podrodzina rodziny  $F$  jest **gwiazdą** (*star*):

$$\forall J \subseteq \{1, 2, \dots, \text{Card}(F)\} \quad \forall i, j \in J : E_i \cap E_j \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{k \in \{1, \dots, n\}} E_k \neq \emptyset$$

Niech będzie dany hipergraf  $H = (X, F)$ . Graf  $G_H = (V, E)$  nazywamy **grafem reprezentacji** hipergrafu  $H$ , jeśli:  $V = F$  oraz  $(f_1, f_2) \in E \Leftrightarrow f_1 \cap f_2 \neq \emptyset$ .

**Fakt 1.1.** Niech hipergraf  $H$  ma własność Helly. Jeśli  $co-G = (V, V^2, E)$  oznacza *co-graf* dla dowolnego grafu  $G = (V, E)$ , to wówczas rodzina zbiorów generujących wierzchołki zbioru niezależnego w  $co-G_H$  jest gwiazdą.

**Dowód.** Patrz [1Ber89].

**Fakt 1.2.** Niech hipergraf  $H$  ma własność Helly. Wówczas zachodzi następująca równość:

$$\tau(H) = \chi(co-GH).$$

**Dowód.** Patrz [14Sap98].

Własność Helly ma swoje uogólnienie, **własności  $k$ -Helly**. Mówimy, że hipergraf  $H = (X, F)$  ma własność  $k$ -Helly, jeśli każda podrodzina rodziny  $F$  jest  **$k$ -gwiazdą** ( $k$ -star):

$$\forall J \subseteq \{1, 2, \dots, \text{Card}(F)\} \quad \forall I \subseteq J \text{ \& Card}(I) \leq k \quad \bigcap_{k \in I} E_k \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{k \in \{1, \dots, n\}} E_k \neq \emptyset$$

Własność Helly jest zatem tym samym co własność 2-Helly. Jako prosty wniosek z podanych definicji otrzymujemy następujący fakt.

**Fakt 1.3.** Jeśli hipergraf  $H = (X, F)$  jest  $k$ -Helly oraz  $k \leq h$ , to też jest  $h$ -Helly.

Własność  $k$ -Helly pojawiła się po raz pierwszy w geometrii kombinatorycznej i wiąże się przede wszystkim z klasycznym twierdzeniem związanym z nazwiskiem Helly [1Ber89].

**Fakt 1.4. (Helly)** Skończona rodzina zbiorów wypukłych w  $R^{n-1}$  ma własność  $n$ -Helly. Stąd otrzymujemy prosty kombinatoryczny wniosek.

**Fakt 1.5.** Jeśli dany jest hipergraf  $H = (X, F)$  taki, że  $X = [n]$ , to jest on  $n$ -Helly.

Niech będzie dany hipergraf  $H = (X, F)$ . Hipergraf  $H_k = (V, E)$  nazywamy **hipergrafem  $k$ -reprezentacji** hipergrafu  $H$ , jeśli:  $V = F$  oraz

$$I \in E \Leftrightarrow (I \subseteq \{1, \dots, \text{Card}(F)\} \text{ \& Card}(I) \leq k \text{ \& } \bigcap_{k \in I} E_k \neq \emptyset)$$

Stąd  $H_2 = G_H$ . Poprzez analogię do faktów 1.1 i 1.2 otrzymujemy następujące fakty.

**Fakt 1.6.** Niech hipergraf  $H$  ma własność  $k$ -Helly. Wówczas rodzina zbiorów generujących wierzchołki zbioru niezależnego w *co*-hipergrafie reprezentacji  $co-H_k$  jest  $k$ -gwiazdą.

**Fakt 1.7.** Niech hipergraf  $H$  ma własność  $k$ -Helly. Wówczas zachodzi następująca równość:

$$\tau(H) = \chi(co-H_k).$$



## 3. DEKOMPOZYCJA FUNKCJI SKOŃCZONYCH

W rozdziale tym zostaną przedstawione podstawowe fakty dotyczące problemu dekompozycji częściowych funkcji skończonych. Niech będzie dana rodzina funkcji skończonych  $F: [m]^n \rightarrow [m]^k$  ( $F = \{f_i\}_{i \in [k]}$ , gdzie  $f_i: [m]^n \rightarrow [m]$ ) oraz pewien podział zbioru zmiennych  $\text{Var}(F)$  tych funkcji na dwa rozłączne zbiory  $A$  (*bound set*) i  $B$  (*free set*). **Tablicą dekompozycji** (*decomposition chart*) zbioru funkcji  $F$  nazywamy macierz dwuwymiarową o kolumnach etykietowanych wartościami zmiennych funkcji  $F$  ze zbioru  $A$  oraz o wierszach etykietowanych wartościami zmiennych funkcji  $F$  ze zbioru  $B$ . Elementami macierzy  $m_{ij}$  są wartości jakie przyjmują funkcje  $F$  na wektorach złożonych z odpowiednich etykiet  $i$ -tego wiersza i  $j$ -tej kolumny. **Liczbę istotnie różnych kolumn** (*column multiplicity*) tej macierzy ze względu na ich zawartość oznaczamy symbolem  $v(B|A)$ .

**Fakt 2.1.** Niech będzie dana rodzina częściowych funkcji skończonych  $F: [m]^n \rightarrow [m]^k$  ( $F = \{f_i\}_{i \in [k]}$ , gdzie  $f_i: [m]^n \rightarrow [m]$ ) oraz pewien podział zmiennych  $\text{Var}(F)$  na dwa rozłączne zbiory  $A$  i  $B$ , wówczas:

$$F(A, B) = H(G(A), B) \Leftrightarrow v(B|A) \leq d^j,$$

gdzie:  $G = \{g_k(A)\}_{k=1, \dots, j}$  dla  $g_k: [m]^{\text{Card}(A)} \rightarrow [d]$  oraz

$$H = \{h_i(G(A), B)\}_{i=1, \dots, n}, \text{ dla } h_i: [u]^{j + \text{Card}(B)} \rightarrow [m], u = \max\{d, m\}.$$

**Dowód.** Patrz książka [9Łub97].

Twierdzenie to sugeruje, że podstawowym problemem dekompozycji skończonych funkcji *częściowych* jest wyznaczanie takich ekspansji funkcji dla których wartość  $v(B|A)$  jest najmniejsza:

**Problem  $k$  — dekompozycji dla częściowych funkcji skończonych dla danej pary rozłącznych zbiorów zmiennych wejściowych**

**Dane:** skończona rodzina funkcji skończonych  $F$  oraz podział zbioru zmiennych wejściowych na dwa zbiory  $A$  i  $B$  oraz  $k \in \mathbb{N}$ ,

**Zadanie:** czy istnieje taka ekspansja funkcji  $F$ , dla której  $v(B|A) = k$ ?

Problem wyznaczania ekspansji funkcji dla których wartość  $v(B|A)$  jest najmniejsza można sprowadzić do problemu kolorowania grafu [18Wan92].

**Fakt 2.2.** Problem  $k$  — dekompozycji częściowych funkcji skończonych sprowadza się do problemu  $k$ -kolorowania grafu (w PTIME).

**Szkic dowodu.** Jak łatwo zaobserwować kolumny w macierzy dekompozycji mogą być traktowane jako odcinki w kracie  $K = ([m]^n, \leq_n)$ , gdzie  $n$  i  $m$  są pewnymi liczbami naturalnymi, natomiast  $\leq_n$  jest porządkiem leksykograficznym. Naszym celem jest stwierdzenie czy istnieje takie „sklejenie” kolumn aby w efekcie zostało ich tylko  $k$ . Problem ten jest równoważny odpowiedzi na pytanie czy istnieje  $k$  — elementowa transwersala hipergrafu złożonego z wymienionych odcinków. To zaś pytanie, jest równoważne (patrz fakt 1.2., odcinki w dowolnej kracie mają własność 2-Helly) pytaniu o istnienie  $k$ -kolorowania grafu incydencji (oznaczonego  $G_{F(A,B)}$ ) tego hipergrafu. Stąd redukcja opiera się na skonstruowaniu grafu incydencji. Wymaga to czasu rzędu  $O(k^2w)$ , gdzie  $k$  i  $w$  są odpowiednio liczbą kolumn i liczbą wierszy macierzy dekompozycji.

Na podstawie powyższego sprowadzenia można zaproponować następujący schemat dekompozycji funkcji skończonych.

### Schemat dekompozycji

**Wejście:** skończona rodzina funkcji skończonych  $F$  oraz podział zbioru zmiennych wejściowych na dwa zbiory  $A$  i  $B$ ;

**Wyjście:** dekompozycja  $F(A,B) = H(G(A),B)$  minimalizująca wartość  $v(B|A)$ ;

1. wyznaczyć graf  $G_{F(A,B)}$  niezgodności kolumn zawartych w tablicy dekompozycji;
2. wyznaczyć minimalne kolorowanie grafu  $G_{F(A,B)}$ ;
3. wyznaczyć dekompozycję funkcji  $F$  postaci  $H(G(A),B)$  na podstawie wyników otrzymanych w kroku 2.

**Fakt 2.3.** Problem  $k$  — dekompozycji dla  $k = 1, 2$  dla częściowych funkcji boolowskich (jak również dla częściowych funkcji skończonych) należy do PTIME.

**Szkic dowodu.** Twierdzenie jest wnioskiem z faktu 2.2 oraz z tego, że problem stwierdzenia czy dany graf jest dwu — kolorowalny można rozstrzygnąć w czasie wielomianowym.

**Fakt 2.4.** Problem  $k$  — dekompozycji dla  $k \geq 3$  dla częściowych funkcji skończonych należy do klasy problemów NP — zupełnych.

**Szkic dowodu.** Dowód tego faktu oparty jest na dwóch spostrzeżeniach. Pierwsze orzeka, że problem  $k$ -dekompozycji funkcji skończonych należy do klasy NP. Drugie spostrzeżenie można wyrazić następująco: problem  $k$ -kolorowania grafu redukuje się (w PTIME) do problemu  $k$ -dekompozycji częściowych funkcji skończonych. Procedura redukcji opisana jest w Algorytmie 1. Procedura redukcji generuje tablicę dekompozycji dla danego grafu  $G$ , tak aby zachodziła równość  $\chi(G) = v(B|A)$ .

## Algorytm 1.

```

procedure Redukcja KD;
begin
  for  $i := 1$  to  $n$  do
    begin
      for  $k := 1$  to  $(i-1)$  do  $v[k, i] := \text{"-"};$ 
       $v[i, i] := \text{"1"};$ 
      for  $k := (i+1)$  to  $n$  do
        if  $\{v_i, v_k\} \in E$  then  $v[k, i] := \text{"0"}$ 
        else  $v[k, i] := \text{"-"};$ 
      end;
    end;

```

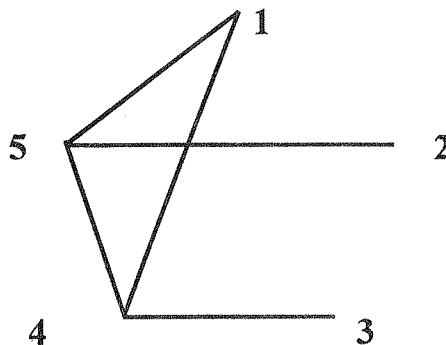
**Uwaga:** symbol '-' oznacza *don't-care value*

**Przykład.** Obecnie przedstawiony zostanie przykład działania opisanego procedury redukcji dla pewnego grafu  $G$  (patrz rysunek 1).

W efekcie otrzymujemy:

Tablica 1  
Tablica dekompozycji

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | - | - | 0 | 0 |
| - | 1 | - | - | 0 |
| - | - | 1 | 0 | - |
| - | - | - | 1 | 0 |



Rys. 1. Graf  $G$

#### 4. DEKOMPOZYCJA RELACJI SKOŃCZONYCH

Obecnie zostanie przedstawione uogólnienie problemu dekompozycji częściowych funkcji skończonych do problemu dekompozycji relacji skończonych. Przez relację skończoną będziemy rozumieli funkcję postaci  $r: X^n \rightarrow P(X)$ . Ponieważ obrazy relacji skończonych są podzbiórmi pewnego ustalonego zbioru  $X$ , to *nie muszą one mieć własności 2-Helly* (np.  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{2, 3\}$ ), w przeciwieństwie do obrazów rodzin częściowych funkcji — które były odcinkami z kraty  $K = ([m]^n, \leq_n)$ . Zatem aby

rozwiązać problem dekompozycji relacji trzeba będzie użyć bardziej subtelnych narzędzi. Fakty te nie zostały uwzględnione w pracy [11Per97].

Przy zachowaniu definicji podanych w rozdziale trzecim i zamianie pojęcia funkcji na pojęcie relacji otrzymamy następujące sformułowanie problemu dekompozycji relacji:

**Problem  $k$  — dekompozycji dla relacji skończonych dla danej pary rozłącznych zbiorów zmiennych wejściowych**

*Dane:* skończona relacja  $r$  oraz podział zbioru zmiennych wejściowych na dwa zbiory  $A$  i  $B$  oraz  $k \in \mathbb{N}$ ,

*Zadanie:* czy istnieje taka ekspansja relacji  $r$ , dla której  $v(B|A) = k$ ?

**Fakt 4.1.** Niech będzie dana relacja  $r: X^n \rightarrow P(X)$ . Problem dekompozycji relacji  $r$  sprowadza się do problemu kolorowania hipergrafu.

*Dowód.* W myśl faktu 1.7 musimy na podstawie naszej wiedzy o tablicy dekompozycji dla relacji  $r$  zbudować  $k$ -hipergraf incydencji dla  $k = \text{Card}(X)$ . Poniżej podano Algorytm 2 redukcji problemu dekompozycji relacji do problemu kolorowania hipergrafu. Jeżeli w tablicy dekompozycji jest odpowiednio  $w$ -wierszy i  $k$ -kolumn, to złożoność algorytmu szacuje się przez  $O(kw^{k+1})$ . W algorytmie symbole  $X|_A$  oznaczają rzut zbioru  $X$  na składowe ze zbioru  $A$ .

**Algorytm 2**

**procedura Construct  $H_{r(A,B)}$ ;**

**begin**

$k := \text{Card}(Y)$ ;

$X_{r(A,B)} := X|_A$ ;  $F_{r(A,B)} := \emptyset$ ;

**for**  $i := 2$  **to**  $k$  **do**

**begin**

$V :=$  kolejny  $i$ -elementowy podzbiór wektorów ze zbioru  $X_{r(A,B)}$   
w porządku leksykograficznym;

**if** ( $V$  stanowi zbiór niezależny w hipergrafie  $H_{r(A,B)}$ )

**and** ( $\exists w \in X|_B \bigcap_{v \in V} r(v,w) = \emptyset$ )

**then**  $F_{r(A,B)} := F_{r(A,B)} \cup \{V\}$ ;

**end;**

**end;**

Opisane powyżej algorytmy dekompozycji wykorzystano w pakiecie oprogramowania opracowanym w Instytucie Telekomunikacji na Politechnice Warszawskiej. Obecnie omówimy efekty działania tego pakietu.

W tablicy 2 przedstawiono wyniki z dziedziny syntezy logicznej, dotyczące dekompozycji układów cyfrowych na układy PLA. Rozmiary układów (*silicon area*) mierzone są z wykorzystaniem wzoru  $S = P(4n_v + 2n_b + m)$ , gdzie  $P$  — liczba termów,  $n_v$  — liczba wejść 4-wartościowych,  $n_b$  — liczba wejść 2-wartościowych,  $m$  — liczba wyjść. Litera 'b' oznacza dekompozycję w systemie binarnym, natomiast litera 'm' oznacza dekompozycję w systemie wielowartościowym.

Tablica 2

Wyniki dekompozycji układów cyfrowych

| Nazwa funkcji | Wielkość oryginalna | Wielkość po dekompozycji (b) | Wielkość po dekompozycji (m) |
|---------------|---------------------|------------------------------|------------------------------|
| Rd84          | 5120                | 1280                         | 1408                         |
| Rd73          | 2178                | 776                          | 1142                         |
| Alu2          | 26624               | 24399                        | 25124                        |
| Misex1        | 5888                | 1984                         | 1984                         |
| Sao           | 24576               | 8192                         | 8192                         |

W tablicy 3 przedstawiono wyniki z dziedziny dekompozycji systemów informatycznych specyfikowanych przy pomocy reguł typu „*if then else*”. Adekwatnie, rozmiary systemów mierzone są na podstawie wzoru  $S = p \sum q_i$ , gdzie  $p$  — liczba reguł,  $q_i$  — liczba bitów potrzebnych do reprezentacji  $i$ -tego atrybutu.

Tablica 3

Wyniki dekompozycji tablic decyzyjnych

| Nazwa przykładu | Wielkość przed dekompozycją | Wielkość po dekompozycji |
|-----------------|-----------------------------|--------------------------|
| Monks1te        | 4752                        | 487                      |
| Monks2te        | 4752                        | 507                      |
| Monks1tr        | 1364                        | 933                      |
| Monks2tr        | 1859                        | 1095                     |
| Monks3tr        | 1342                        | 929                      |
| House           | 3944                        | 1049                     |
| Nurse           | 1365                        | 475                      |

Jak widać, zastosowanie metod dekompozycji pozwoliło istotnie zmniejszyć rozmiary badanych układów. Równocześnie można zaobserwować, że użyte uogólnione algorytmy dekompozycji — metody dekompozycji funkcji wielowartościowych nie ustępują klasycznym — binarnym metodom dekompozycji.

ekom-  
rzone  
liczba  
Litera  
ekom-

Dodatkowo, tablica 4 zawiera wyniki zastosowania metody dekompozycji z wykorzystaniem różnych algorytmów kolorowania wierzchołkowego grafów (dokładnie: prostego algorytmu sekwencyjnego, algorytmu sekwencyjnego pierwszy-większy, algorytmu sekwencyjnego najmniejszy-ostatni, algorytmu największych zbiorów niezależnych) do projektowania układów cyfrowych na układy PLA

Tablica 4

Wyniki dekompozycji uzyskane z wykorzystaniem różnych metod kolorowania wierzchołków grafu

| Example | Original size | After SSA | After LFSA | After SLSA | After MISA |
|---------|---------------|-----------|------------|------------|------------|
| Bbtas   | 210           | 157       | 171        | 162        | 162        |
| Ex7     | 306           | 288       | 288        | 288        | 208        |
| 9sym    | 1615          | 530       | 541        | 515        | 543        |
| Tra11   | 340           | 335       | 335        | 335        | 335        |
| Opus    | 588           | 544       | 544        | 549        | 576        |
| Sqrt8   | 760           | 386       | 386        | 386        | 386        |
| Alu2    | 3666          | 3320      | 3548       | 3548       | 3320       |
| Adr4    | 1575          | 593       | 574        | 593        | 620        |
| Clip    | 2691          | 1414      | 1393       | 1337       | 1421       |
| Z4      | 1062          | 377       | 366        | 366        | 424        |
| Sao2    | 1392          | 810       | 820        | 792        | 774        |
| Root    | 1197          | 879       | 99         | 873        | 864        |
| Rd84    | 5100          | 724       | 750        | 750        | 750        |

atycz-  
miary  
guł,  $q_i$

## 5. WNIOSKI

W pracy wykazano, że problem dekompozycji dowolnej funkcji skończonej  $f(A,B)$  do postaci  $h(g(A),B)$ , gdzie  $g$  jest funkcją boolowską, jest rozstrzygalny w czasie wielomianowym względem rozmiaru problemu. Wykazano również, że pominięcie założenia dotyczącego funkcji  $g$  powoduje znaczne skomplikowanie problemu. Tak ogólny problem należy do klasy problemów NP-trudnych. W pracy przedstawiono sprowadzenie problemu dekompozycji funkcji skończonych do problemu wierzchołkowego kolorowania grafu. Opisano także, sprowadzenie problemu dekompozycji relacji do problemu wyznaczania kolorowania wierzchołkowego hipergrafu. Opisane w pracy algorytmy dekompozycji funkcji wielowartościowych wykorzystano w pakiecie oprogramowania opracowanym na Politechnice Warszawskiej. Wnioski płynące z testów komputerowych omawianego pakietu są dwojakie. Po pierwsze, zastosowanie metod dekompozycji pozwoliło zmniejszyć rozmiar badanych układów, zaczerpniętych zarów-

miary  
lgoryt-  
stępują

no z dziedziny syntezy logicznej jak i wielowartościowych systemów informacyjnych. Po drugie, wykorzystanie bardziej ogólnych metod — metod dekompozycji funkcji wielowartościowych zamiast metod dekompozycji funkcji boolowskich nie wpłynęło negatywnie na efektywność działania omawianego systemu. W efekcie otrzymano bardziej elastyczne oprogramowanie, mogące analizować szersze spektrum danych.

#### Bibliografia

1. C. Berge: *Hypergraphs, Combinatorics of Finite Sets*. North-Holland, 1989.
2. B. Berger, J. Rompel: *A Better Performance Guarantee for Approximate Graph Coloring*. *Algorithmica*, No 5, 1990.
3. E. Boros, V. Guvich, P.L. Hammer, T. Ibaraki, A. Kogan: *Decompositions of Partially Defined Boolean Functions*, DIMACS-TR-94-9, 1994.
4. M.R. Garey, D.S. Johnson: *Computers and Intractability: a guide to the theory of NP-Completeness*, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1979.
5. M.M. Halldórsson: *A still better performance guarantee for approximate coloring*. *Infor. Process. Letters* 45, 1993.
6. D.S. Johnson: *Approximation algorithms for combinatorial problems*. *J. Comput. System and Science*, No 9, 1974.
7. C. Lund, M. Yannakakis: *On the Hardness of Approximating Minimization Problems*. *J. of the ACM*, Vol. 41, No. 5, September, 1994.
8. T. Łuba: *Decomposition of Multiple-Valued Functions*. 25 International Symposium on Multiple-Valued Logic. Bloomington, USA, 1995.
9. T. Łuba, M. Nowicka, M. Perkowski, M. Rawski: *Nowoczesna Synteza Logiczna*. Warszawa, Oficyna Wydawnicza PW, 1997.
10. T. Łuba, H. Selvaraj: *A General Approach to Boolean Function Decomposition and its Applications in FPGA-based Synthesis*. *VLSI Design. Special Issue on Decompositions in VLSI Design*, vol. 3, No 3-4, 289-300, 1995.
11. M. Perkowski, M. Marek-Sadowska, L. Jóźwiak, T. Łuba, S. Grygiel, M. Nowicka, R. Malivi, Z. Wang, J.S. Zhang: *Decomposition of Multiple-Valued Relations*. *Proc. International Symposium on Multiple-Valued Logic*, Antigonish, Canada, 1997.
12. T. Ross, Noviskey, T. Taylor, D. Gadd: *Pattern Theory : An Engineering Paradigm For Algorithm Design*. Wright Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, 1990.
13. P. Sapiecha, M. Perkowski, T. Łuba: *Decomposition of Information Systems Based on Graph Coloring Heuristics*. *Proc.CESA'96 IMACS Multiconference*, France, 1996.
14. P. Sapiecha: *Algorytmy syntezy funkcji i relacji boolowskich w aspekcie metod reprezentacji i kompresji danych*. Ph.D. Thesis (in Polish), Warsaw University of Technology, 1998.
15. H. Selvaraj, T. Łuba, B. Bignall, M. Venkatesan: *Disjoint Serial Decomposition using Variable Rejection*. *Proc. IFIP Workshop on Logic and Architecture Synthesis*, Grenoble, Dec. 1996.
16. H. Selvaraj, T. Łuba, M. Nowicka, B. Bignall: *Multiple-Valued Decomposition and its Applications in Data Compression and Technology Mapping*. *International Conference on Computational Intelligence and Multimedia Applications*, Australia, 1997.
17. H. Selvaraj, M. Nowicka, T. Łuba: *Non-Disjoint Decomposition Strategy in Decomposition-Based Algorithms and Tools*. *Proc. International Conference on Computational Intelligence and Multimedia Applications*. Eds: Selvaraj H. and Verma B., World Scientific, Singapore 1998.
18. W. Wan, M.A. Perkowski: *A New Approach to the Decomposition of Incompletely Specified Multi-Output Functions Based on Graph Coloring and Local Transformations and Its Applications to FPGA Mapping*. *Proc. European Design Automation Conference*, 1992.
19. B. Zupan, M. Bohanec, I. Bratko, Demšar: *Machine Learning by Function Decomposition*. *ICML*, 1997.

P. SAPIECHA, M. PLEBAN, B. ZBIERZCHOWSKI

DECOMPOSITION OF BOOLEAN RELATIONS AND FUNCTIONS IN  
LOGIC SYNTHESIS AND DATA ANALYSIS

## Summary

This paper shows that the problem of decomposing a finite function  $f(A,B)$  into the form  $h(g(A),B)$ , where  $g$  is a Boolean function, can be resolved in polynomial time, with respect to the size of the problem. It is also shown that omission of the characteristic of the  $g$  function can significantly complicate the problem. Such a general problem belongs to the NP-hard class of problems. The work shows how the problem of decomposition of a finite function can be reduced to the problem of coloring the vertices of a graph. It is also shown that the problem of decomposition of relations can be reduced to coloring the vertices of their hypergraphs. In order to prove the validity of the theorems, combinatory properties of Helly are used.

*Key words:* logic synthesis, algorithms, functional decomposition.



au  
ne  
pr  
ja  
un  
op  
z  
cy  
me  
na  
ka

*Sto*

Auto  
wieloeta  
wśród k  
• Poz  
• Wstę  
ewer  
szum  
posia  
• Segn  
ident

## **Rozpoznawanie obrazów metodą minimalnoodległościową**

MIROSŁAW GAJER

*Katedra Automatyki, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie*

*Otrzymano 2000.04.04*

*Autoryzowano 2000.05.30*

W artykule omówiono sposób funkcjonowania systemu wizyjnego przeznaczonego do automatycznego rozpoznawania typów układów scalonych. System taki może znaleźć praktyczne zastosowanie na stanowiskach automatycznego montażu układów scalonych przez robota przemysłowego, bądź też może zostać wykorzystany na stanowisku automatycznej kontroli jakości produkcji, gdzie zachodzi konieczność zapewnienia, że w danym miejscu został umieszczony układ scalony o pożądanym typie. W artykule opisano szczegółowo wszystkie operacje wykonywane w celu rozpoznania typu układu scalonego, takie jak: pozyskanie obrazu z kamery, przetworzenie wstępne obrazu, segmentacje obrazu, pomiar wartości cech opisujących rozpoznawane obiekty oraz wybór klasy przynależności rozpoznawanego obiektu. Jako metodę rozpoznawania wybrano metodę minimalnoodległościową, polegającą na poszukiwaniu najbliższego sąsiada w przestrzeni cech opisujących obiekty podlegające automatycznej klasyfikacji.

*Słowa kluczowe:* systemy wizyjne, rozpoznawanie obrazów, metody minimalnoodległościowe

### **1. WSTĘP**

Automatyczna identyfikacja obiektów w systemie wizyjnym jest zawsze procesem wieloetapowym, składającym się z szeregu następujących kolejno po sobie czynności wśród których można wyróżnić [1]:

- Pozyskanie obrazu z kamery i jego umieszczenie w odpowiednim buforze pamięci.
- Wstępne przetworzenie obrazu, mające na celu poprawę jego jakości, eliminacje ewentualnych zakłóceń bądź dodanego do sygnału obrazu w torze transmisyjnym szumu, a także zaakcentowanie i uwypuklenie w obrazie tych jego elementów, które posiadają istotne znaczenie z punktu widzenia dalszego procesu rozpoznawania.
- Segmentację obrazu, polegającą na wydzieleniu z obrazu obiektów podlegających identyfikacji.

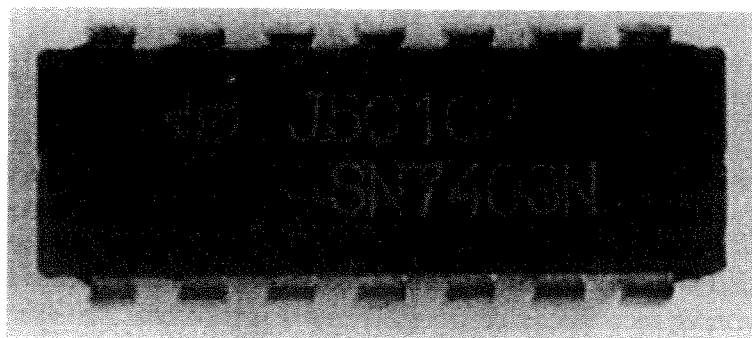
- Pomiar wartości cech opisujących badane obiekty, którego celem jest uzyskanie wartości liczbowych, w oparciu, o które przeprowadzone zostanie rozpoznanie obiektów.
- Automatyczną klasyfikację, polegającą na przypisaniu badanego obiektu do jednej ze zdefiniowanych uprzednio klas przynależności.

Spośród wymienionych powyżej operacji jedynie pozyskanie obrazu z kamery i jego umieszczenie w buforze pamięci są realizowane na drodze czysto sprzętowej za pomocą kart z układami akwizycji obrazu (ang. frame-grabber). Natomiast wszystkie pozostałe z wymienionych powyżej operacji wymagają już opracowania i realizacji odpowiedniego algorytmu.

W artykule opisano sposób funkcjonowania systemu wizyjnego przeznaczonego do automatycznego rozpoznawania typów układów scalonych. Założono, że wszystkie rozpoznawane układy scalone posiadają identyczny typ plastikowej obudowy o czternastu wyprowadzeniach. Zatem rozpoznanie tych układów musi zostać oparte na analizie oznaczeń, zamieszczonych na wierzchniej stronie ich obudowy.

## 2. PRZETWARZANIE WSTĘPNE

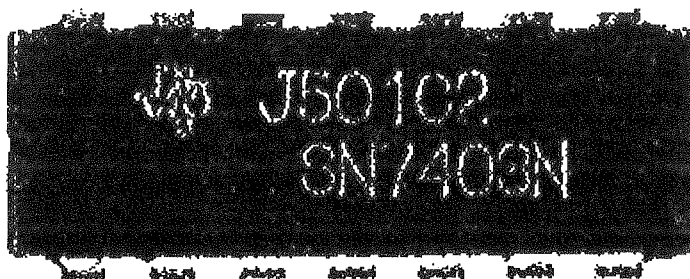
Obrazy oglądanej przez system wizyjny sceny zostały pozyskane z kamery jako obrazy monochromatyczne o 256 dostępnych poziomach jasności pikseli oraz o rozdzielczości przestrzennej 512 na 512 pikseli. Zapewniono stały poziom oświetlenia analizowanej w systemie wizyjnym sceny, poprzez jej oświetlenie dodatkowym źródłem światła w postaci lampy halogenowej o mocy 20 W. Zapewniono także stałe oddalenie kamery od obserwowanej sceny, poprzez umieszczenie jej na nieruchomym statywie. Kamera została ponadto wyposażona w funkcję samoogniskowania obiektywu (ang. *autozoom*). Przykładowy obraz analizowanej sceny zawierającej układ scalony został pokazany na rys. 1. Założono, że w danym momencie w polu widzenia kamery może



Rys. 1. Obraz pozyskany z kamery

znajdować się tylko jeden układ scalony, którego brzegi obudowy muszą być równoległe do linii brzegowych obrazu.

Pozyskany z kamery obraz następnie został poddany procesowi binaryzacji, polegającemu na przypisaniu każdemu z pikseli maksymalnego bądź minimalnego poziomu jasności (barwy białej bądź czarnej), w zależności od tego czy poziom jasności danego piksela znajdował się poniżej, czy też powyżej zadanej wartości progowej [2]. Wartość progu dla procesu binaryzacji została ustalona eksperymentalnie na 80 poziomie jasności. Obraz po binaryzacji został zamieszczony na rys. 2.



Rys. 2. Obraz po binaryzacji.

W kroku kolejnym obraz binarny został poddany filtracji, której celem była eliminacja zakłóceń występujących najczęściej w postaci pojedynczych czarnych pikseli usytuowanych na białym tle bądź też mających formę niewielkich zgrupowań takich pikseli.

W celu realizacji postawionego zadania, zastosowano operację erozji binarnej obrazu. Sposób działania rozważanej operacji polega na sprawdzeniu sąsiedztwa badanego piksela. Jeżeli badany piksel (x) posiada kolor czarny, wówczas po erozji binarnej piksel ten będzie w dalszym ciągu posiadał kolor czarny, tylko w przypadku, gdy wszystkie piksele sąsiednie (a, b, c, d) również posiadają kolor czarny. Postać maski wyznaczającej obszar sąsiedztwa piksela (x) została przedstawiona na rys. 3.

|   |   |   |
|---|---|---|
|   | a |   |
| b | x | c |
|   | d |   |

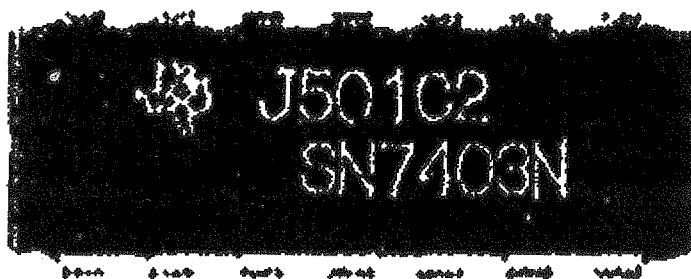
Rys. 3. Maski wyznaczająca obszar sąsiedztwa piksela.

Obraz po erozji binarnej został zamieszczony na rys. 4.



Rys. 4. Obraz po erozji binarnej.

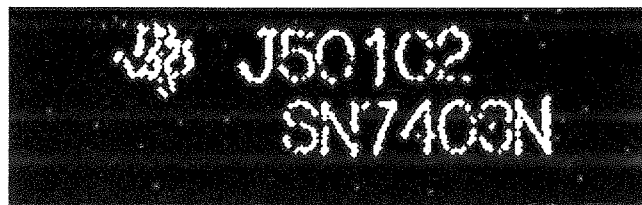
Erozja binarna prowadzi do eliminacji zakłóceń w postaci drobnych zgrupowań czarnych pikseli rozrzuconych na białym tle, ale jednocześnie prowadzi do widocznego zwężenia i pomniejszenia analizowanych obiektów. W celu eliminacji powyższego mankamentu obraz poddany został dylatacji binarnej, która to operacja prowadzi do ponownego poszerzenia obiektów. Dla potrzeb dylatacji binarnej wykorzystywany jest obszar sąsiedztwa, zdeterminowany postacią maski przedstawionej na rys. 3. Podczas realizacji operacji dylatacji binarnej obrazu, badany biały piksel (x) uzyskuje kolor czarny, jeżeli co najmniej jeden z jego najbliższych sąsiadów (a, b, c, d) posiada również kolor czarny. Obraz po dylatacji został przedstawiony na rys. 5.



Rys. 5. Obraz po dylatacji binarnej.

### 3. SEGMENTACJA

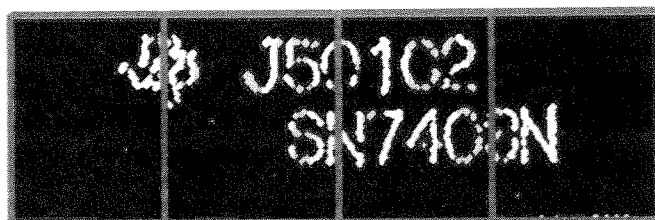
Celem segmentacji jest wydzielenie z obrazu jedynie jego fragmentu, zawierającego oznaczenia typu układu scalonego. Segmentacja obrazu dokonywana jest w taki sposób, że analizowane są kolejne wiersze obrazu (od góry do dołu), aż do napotkania pierwszego czarnego piksela. Następnie analizowane są kolejne kolumny obrazu (od prawej do lewej), aż do napotkania pierwszego czarnego piksela. W oparciu o współrzędne powyższych pikseli, na całość obrazu nakładana jest prostokątna maska o rozmiarach 100 na 3209 pikseli. Przykładowy obraz po nałożeniu maski został przedstawiony na rys. 6.



Rys. 6. Przykładowy obraz po segmentacji.

#### 4. POMIAR WARTOŚCI CECH

Dla potrzeb procesu pomiaru wartości cech, opisujących rozpoznawane układy scalone, ich obrazy (już po operacji maskowania), zostały podzielone na cztery równe sektory o wymiarach 100 na 80 pikseli każdy. Sposób podziału obrazu na sektory został przedstawiony na rys. 7. Jako wartości cech opisujących rozpoznawane układy scalone przyjęto liczby białych pikseli zliczonych w kolejnych sektorach obrazu. Powyższe rozwiązanie odznacza się dużą elastycznością, ponieważ pozwala na prawidłowe rozpoznanie układów scalonych, nie tylko w przypadku umieszczenia na ich obudowach znaków alfanumerycznych, ale także w przypadku dowolnego innego typu wzorca, byle tylko wzorec ten był w miarę wiernie powtarzalny na wszystkich układach scalonych tego samego typu.



Rys. 7. Podział obrazu na sektory.

#### 5. ROZPOZNAWANIE

Spośród wielu różnych metod wykorzystywanych do rozpoznawania obrazów, autor artykułu wybrał metodę minimalno-odległościową (zwaną także metodą poszukiwania najbliższego sąsiada) z uwagi na jej matematyczną prostotę oraz dobre wyniki, uzyskiwane w przypadku zastosowania tej metody do rozwiązania podobnej klasy problemów.

Procesowi rozpoznawania poddane zostały układy scalone ośmiu różnych typów. Autor zgromadził po 20 egzemplarzy układów scalonych każdego typu. Przy czym zbiór układów został podzielony na dwa rozłączne podzbiory. Po 10 układów każdego typu

weszło w skład tzw. zbioru treningowego, wykorzystywanego do nauki systemu wizyjnego rozpoznawania poszczególnych klas przynależności. Pozostałe 10 układów każdego typu stanowiło tzw. zbiór testowy, w oparciu, o który dokonywano sprawdzenia poprawności funkcjonowania systemu wizyjnego.

Dla przykładu, w przypadku prezentowanego na kolejnych rysunkach układu scalonego typu SN7403N uzyskano zamieszczone w tabl. 1 wyniki pomiarów wartości cech dla 10 kolejnych egzemplarzy tego układu.

Tablica 1

Pomiar wartości cech dla 10 różnych egzemplarzy układu SN7403N (zbiór treningowy)

| Układ nr | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Sektor 1 | 327 | 286 | 285 | 300 | 303 | 296 | 308 | 312 | 324 | 325 |
| Sektor 2 | 659 | 622 | 621 | 603 | 608 | 623 | 623 | 621 | 610 | 616 |
| Sektor 3 | 840 | 810 | 785 | 782 | 780 | 825 | 810 | 814 | 852 | 836 |
| Sektor 4 | 278 | 263 | 264 | 262 | 273 | 286 | 260 | 255 | 257 | 266 |

Na podstawie wyników pomiarów wartości cech dla 10 różnych egzemplarzy układu SN7403N zamieszczonych w tabl. 1, można wyliczyć średnie wartości liczby białych pikseli znajdujących się w poszczególnych sektorach obrazu tego układu. Wyliczone wartości średniej liczby białych pikseli w kolejnych sektorach układu SN7403N wynoszą odpowiednio:

- Sektor 1 = 306,6
- Sektor 2 = 620,6
- Sektor 3 = 813,4
- Sektor 4 = 265,4

Wyznaczono także wariancję wokół wartości średnich dla wyników pomiarów zebranych w tabl. 1:

- Sektor 1 = 214,843
- Sektor 2 = 209,040
- Sektor 3 = 577,440
- Sektor 4 = 88,820

Obliczono także odchylenia standardowe odpowiadające powyższym wariancjom:

- Sektor 1 = 14,658
- Sektor 2 = 14,458
- Sektor 3 = 24,030
- Sektor 4 = 9,424

Analizując uzyskane wartości widać, że dla poszczególnych egzemplarzy układów scalonych tego samego typu, odchyłka liczby białych pikseli w danym sektorze w stosunku do wartości przyjętej jako średnia jest niewielka i procentowo wynosi:

- Sektor 1 = 4,781%
- Sektor 2 = 2,330%
- Sektor 3 = 2,954%
- Sektor 4 = 3,551%

Spostrzeżenie powyższe stanowi podstawę do przeprowadzenia rozpoznawania układów scalonych w oparciu o analizę liczb, reprezentujących białe piksele zliczone w poszczególnych sektorach obrazu.

Wartości średnie liczb białych pikseli w poszczególnych sektorach obrazu dla ośmiu typów badanych układów scalonych zebrano w tabl. 2.

Tablica 2

Średnie wartości liczby białych pikseli w sektorach obrazu dla różnych typów układów

| Układ    | UCY7417 | UCA6410 | UCY7453 | SN7406N | UCY7404 | SN7403N | UL1201 | UCY7438 |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|---------|
| Sektor 1 | 4,7     | 1,1     | 45,8    | 361,9   | 37,4    | 306,6   | 28,1   | 60,7    |
| Sektor 2 | 383,3   | 114,1   | 577,2   | 1074,5  | 363,7   | 620,6   | 568,6  | 484,4   |
| Sektor 3 | 465,0   | 152,7   | 590,8   | 637,9   | 744,0   | 813,4   | 704,9  | 233,7   |
| Sektor 4 | 8,1     | 32,1    | 97,1    | 248,7   | 102,5   | 266,4   | 27,5   | 77,5    |

Przedstawione w tabl. 2 średnie wartości liczby białych pikseli w poszczególnych sektorach obrazu, stanowią tzw. punkty charakterystyczne dla ośmiu różnych klas przynależności rozpoznawanych układów scalonych.

Natomiast w tabl. 3 zamieszczono wyniki pomiarów, w których zliczono białe piksele w poszczególnych sektorach 10 układów typu SN7403N, wchodzących w skład zbioru testowego.

Tablica 3

Pomiar wartości cech dla 10 różnych egzemplarzy układu SN7403N (zbiór testowy)

| Układ nr | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Sektor 1 | 295 | 294 | 307 | 310 | 314 | 319 | 335 | 298 | 340 | 313 |
| Sektor 2 | 644 | 629 | 640 | 653 | 646 | 686 | 667 | 644 | 657 | 666 |
| Sektor 3 | 824 | 831 | 823 | 819 | 852 | 837 | 828 | 836 | 844 | 859 |
| Sektor 4 | 285 | 269 | 269 | 273 | 275 | 293 | 282 | 279 | 265 | 282 |

Z kolei w tabl. 4 zamieszczono wyniki obliczeń, podające o ile liczba białych pikseli w danym sektorze obrazu, uzyskana w kolejnym pomiarze, różni się od wartości przyjętych jako współrzędne punktu charakterystycznego klasy przynależności układów scalonych typu SN7403N.

Następnie dla każdego z 10 układów scalonych wszystkich typów, wchodzących w skład zbioru treningowego przeprowadzono eksperymenty rozpoznawania metodą minimalno-odległościową, poszukując dla nich najbliższego sąsiada. Przy czym odległość do poszczególnych klas przynależności mierzona była w czterowymiarowej przestrzeni euklidesowej przy użyciu różnych typów metryk.



Tablica 4

Różnica liczby białych pikseli pomiędzy wartościami przyjętymi dla punktu charakterystycznego, a kolejnymi wynikami pomiarów dla 10 układów należących do zbioru testowego.

| Układ nr | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Sektor 1 | 11,6  | 12,6  | -0,4  | -3,4  | -7,4  | -12,4 | -28,4 | 8,6   | -33,4 | -6,4  |
| Sektor 2 | -23,4 | -8,4  | -19,4 | -32,4 | -25,4 | -65,4 | -46,4 | -23,4 | -36,4 | -45,4 |
| Sektor 3 | -10,6 | -17,6 | -9,6  | -5,6  | -38,6 | -23,6 | -14,6 | -22,6 | -30,6 | -45,6 |
| Sektor 4 | -19,6 | -3,6  | -3,6  | -7,6  | -9,6  | -27,6 | -16,6 | -13,6 | 0,4   | -16,6 |

### 5.1. METRYKA EUKLIDESOWA

W metryce Euklidesowej odległość pomiędzy punktami  $x$  i  $y$  dana jest wzorem [3]:

$$\varrho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2} \quad (1)$$

W tabl. 5 zamieszczono, zmierzone przy zastosowaniu metryki euklidesowej, odległości pomiędzy punktami charakterystycznymi dla ośmiu różnych klas przynależności układów scalonych.

Tablica 5

Odległości pomiędzy punktami charakterystycznymi dla poszczególnych klas przynależności układów scalonych

|         | UCY7417 | UCA6410 | UCY7453 | SN7406N | UCY7404 | SN7403N | UL1201 | UCY7438 |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|---------|
| UCY7417 | —       | 413,0   | 251,1   | 832,5   | 297,0   | 579,1   | 304,7  | 267,7   |
| UCA6410 | —       | —       | 642,4   | 1115,4  | 646,7   | 917,0   | 715,7  | 386,4   |
| UCY7453 | —       | —       | —       | 610,3   | 263,0   | 384,8   | 135,1  | 369,8   |
| SN7406N | —       | —       | —       | —       | 802,0   | 490,5   | 648,7  | 794,7   |
| UCY7404 | —       | —       | —       | —       | —       | 412,2   | 221,9  | 525,5   |
| SN7403N | —       | —       | —       | —       | —       | —       | 386,2  | 671,4   |
| UL1201  | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —      | 482,4   |
| UCY7438 | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —      | —       |

Z kolei w tabl. 6 zamieszczono odległości jakie dzielą, w przypadku zastosowania metryki euklidesowej, wyniki pomiarów uzyskanych dla 10 układów typu SN7403N ze zbioru testowego (tabl. 3), od poszczególnych punktów charakterystycznych dla wszystkich klas przynależności układów.

Tablica 6

Odległości pomiędzy punktami charakterystycznymi poszczególnych klas przynależności układów scalonych, a kolejnymi wynikami pomiarów dla układów SN7403N ze zbioru testowego.

|    | UCY7417 | UCA6410 | UCY7453 | SN7406N | UCY7404 | SN7403N     | UL1201 | UCY7438 |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|-------------|--------|---------|
| 1  | 598,2   | 939,0   | 395,3   | 475,1   | 429,7   | <b>33,8</b> | 396,8  | 686,9   |
| 2  | 588,3   | 931,2   | 389,3   | 490,7   | 414,1   | <b>23,4</b> | 385,5  | 684,7   |
| 3  | 594,6   | 935,7   | 394,5   | 475,9   | 427,8   | <b>21,8</b> | 393,9  | 684,7   |
| 4  | 601,2   | 942,3   | 398,2   | 462,3   | 438,9   | <b>33,7</b> | 399,8  | 686,6   |
| 5  | 621,0   | 963,8   | 420,2   | 482,1   | 444,6   | <b>47,6</b> | 413,1  | 715,2   |
| 6  | 640,3   | 982,1   | 430,7   | 440,9   | 477,6   | <b>75,5</b> | 431,67 | 719,6   |
| 7  | 629,6   | 967,3   | 426,8   | 451,7   | 468,9   | <b>58,4</b> | 428,7  | 709,6   |
| 8  | 604,2   | 947,0   | 401,6   | 479,1   | 431,4   | <b>35,9</b> | 398,7  | 696,5   |
| 9  | 630,1   | 970,4   | 430,4   | 466,4   | 426,6   | <b>58,1</b> | 425,3  | 717,9   |
| 10 | 636,6   | 981,4   | 430,6   | 468,2   | 461,3   | <b>66,5</b> | 423,3  | 727,6   |

## 5.2. METRYKA ULIC

W przypadku zastosowania metryki ulic odległość dzieląca punkt  $x$  od punktu  $y$  wyraża się wzorem [4]:

$$\varrho(x,y) = \sum_{i=1}^N |x_i - y_i| \quad (2)$$

W tabl. 7 zamieszczono, zmierzone przy zastosowaniu metryki ulic, odległości pomiędzy punktami charakterystycznymi dla ośmiu różnych klas przynależności układów scalonych.

Tablica 7

Odległości pomiędzy punktami charakterystycznymi dla poszczególnych klas przynależności układów scalonych

|         | UCY7417 | UCA6410 | UCY7453 | SN7406N | UCY7404 | SN7403N | UL1201 | UCY7438 |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|---------|
| UCY7417 | —       | 609,1   | 449,8   | 1461,9  | 425,7   | 1145,9  | 468,0  | 457,8   |
| UCA6410 | —       | —       | 1010,9  | 2023,0  | 947,6   | 1707,0  | 1038,3 | 556,3   |
| UCY7453 | —       | —       | —       | 1012,1  | 380,5   | 696,1   | 210,0  | 484,4   |
| SN7406N | —       | —       | —       | —       | 1287,6  | 702,4   | 1127,9 | 1466,7  |
| UCY7404 | —       | —       | —       | —       | —       | 759,4   | 328,3  | 679,3   |
| SN7403N | —       | —       | —       | —       | —       | —       | 677,9  | 1150,7  |
| UL1201  | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —      | 638,0   |
| UCY7438 | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —      | —       |

Z kolei w tabl. 8 zamieszczono odległości jakie dzielą, w przypadku zastosowania metryki ulic, wyniki pomiarów uzyskanych dla 10 układów typu SN7403N ze zbioru testowego (tabl. 3), od poszczególnych punktów charakterystycznych dla wszystkich klas przynależności układów.

Tablica 8

Odległości pomiędzy punktami charakterystycznymi poszczególnych klas przynależności układów scalonych, a kolejnymi wynikami pomiarów dla układów SN7403N ze zbioru testowego.

|    | UCY7417 | UCA6410 | UCY7453 | SN7406N | UCY7404 | SN7403N      | UL1201 | UCY7438 |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|--------------|--------|---------|
| 1  | 1186,9  | 1748,0  | 731,1   | 719,8   | 800,4   | <b>64,2</b>  | 718,9  | 1191,7  |
| 2  | 1161,9  | 1723,0  | 712,1   | 726,8   | 775,4   | <b>41,2</b>  | 693,9  | 1166,7  |
| 3  | 1177,9  | 1739,0  | 728,1   | 694,8   | 791,4   | <b>32,0</b>  | 709,9  | 1182,7  |
| 4  | 1193,9  | 1755,0  | 744,1   | 678,8   | 807,4   | <b>48,0</b>  | 725,9  | 1198,7  |
| 5  | 1225,9  | 1787,0  | 776,1   | 716,8   | 839,4   | <b>80,0</b>  | 757,9  | 1230,7  |
| 6  | 1273,9  | 1835,0  | 842,1   | 674,8   | 887,4   | <b>128,0</b> | 805,9  | 1278,7  |
| 7  | 1250,9  | 1812,0  | 801,1   | 657,8   | 864,4   | <b>105,0</b> | 782,9  | 1255,7  |
| 8  | 1195,9  | 1757,0  | 740,1   | 722,8   | 809,4   | <b>67,2</b>  | 727,9  | 1200,7  |
| 9  | 1244,9  | 1806,0  | 795,1   | 661,8   | 858,4   | <b>101,8</b> | 776,9  | 1249,7  |
| 10 | 1258,9  | 1820,0  | 809,1   | 711,8   | 872,4   | <b>113,0</b> | 790,9  | 1263,7  |

### 5.3. METRYKA CZEBYSZEWA

W metryce Czebyszewa odległość pomiędzy punktami  $x$  i  $y$  dana jest wzorem [5]:

$$\varrho(x, y) = \max_{1 \leq i \leq N} |x_i - y_i| \quad (3)$$

Tablica 9

Odległości pomiędzy punktami charakterystycznymi dla poszczególnych klas przynależności układów scalonych

|         | UCY7417 | UCA6410 | UCY7453 | SN7406N | UCY7404 | SN7403N | UL1201 | UCY7438 |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|---------|
| UCY7417 | —       | 312,3   | 193,9   | 691,2   | 297,0   | 348,4   | 239,9  | 231,3   |
| UCA6410 | —       | —       | 463,1   | 960,4   | 591,3   | 660,7   | 552,2  | 370,3   |
| UCY7453 | —       | —       | —       | 497,3   | 213,5   | 260,8   | 114,1  | 357,1   |
| SN7406N | —       | —       | —       | —       | 710,8   | 453,9   | 505,9  | 590,1   |
| UCY7404 | —       | —       | —       | —       | —       | 269,2   | 204,9  | 510,3   |
| SN7403N | —       | —       | —       | —       | —       | —       | 278,5  | 579,7   |
| UL1201  | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —      | 471,2   |
| UCY7438 | —       | —       | —       | —       | —       | —       | —      | —       |

owania  
zbioru  
ystkich

Tablica 8

go.

Y7438

191,7

166,7

182,7

198,7

230,7

278,7

255,7

200,7

249,7

263,7

W tabl. 9 zamieszczono, zmierzone przy zastosowaniu metryki Czebyszewa, odległości pomiędzy punktami charakterystycznymi dla ośmiu różnych przynależności układów scalonych.

Z kolei w tabl. 10 zamieszczono odległości jakie dzielą, w przypadku zastosowania metryki Czebyszewa, wyniki pomiarów uzyskanych dla 10 układów typu SN7403N ze zbioru testowego (tabl. 3), od poszczególnych punktów charakterystycznych dla wszystkich klas przynależności układów.

Tablica 10

Odległości pomiędzy punktami charakterystycznymi poszczególnych klas przynależności układów scalonych, a kolejnymi wynikami pomiarów dla układów SN7403N ze zbioru testowego.

|    | UCY7417 | UCA6410 | UCY7453 | SN7406N | UCY7404 | SN7403N | UL1201 | UCY7438 |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|---------|
| 1  | 359,0   | 671,3   | 249,2   | 430,5   | 280,3   | 23,4    | 266,9  | 590,3   |
| 2  | 366,0   | 678,3   | 248,2   | 445,5   | 265,3   | 17,64   | 265,9  | 597,3   |
| 3  | 358,0   | 670,3   | 261,2   | 434,5   | 276,3   | 19,4    | 278,9  | 589,3   |
| 4  | 354,0   | 666,3   | 264,2   | 421,5   | 289,3   | 32,4    | 281,9  | 585,3   |
| 5  | 387,0   | 699,3   | 268,2   | 428,5   | 282,3   | 38,6    | 285,9  | 618,3   |
| 6  | 372,0   | 684,3   | 273,2   | 388,5   | 322,3   | 65,4    | 290,9  | 603,3   |
| 7  | 363,0   | 675,3   | 289,2   | 407,5   | 303,3   | 46,4    | 306,9  | 594,3   |
| 8  | 371,0   | 683,3   | 252,2   | 430,5   | 280,3   | 23,4    | 269,9  | 602,3   |
| 9  | 379,0   | 691,3   | 294,2   | 417,5   | 302,6   | 36,4    | 311,9  | 610,3   |
| 10 | 394,0   | 706,3   | 268,2   | 408,5   | 302,3   | 45,6    | 284,9  | 625,3   |

m [5]:

(3)

#### 5.4. METRYKA MINKOWSKIEGO

W metryce Minkowskiego odległość punktu  $x$  od punktu  $y$  dana jest wzorem [6, 7]:

$$p(x,y) = \left[ \sum_{i=1}^N |x_i - y_i|^t \right]^{\frac{1}{t}} \quad (4)$$

lica 9

i

7438

1,3

0,3

7,1

0,1

0,3

9,7

1,2

—

W tabl. 11 zamieszczono odległości jakie dzielą (w przypadku zastosowania metryki Minkowskiego dla  $t = 4$ ) wyniki pomiarów uzyskanych dla 10 układów typu SN7403N ze zbioru testowego (tabl. 3), od poszczególnych punktów charakterystycznych dla wszystkich klas przynależności układów.

Z kolei w tabl. 12 zamieszczono odległości jakie dzielą (w przypadku zastosowania metryki Minkowskiego dla  $t = 8$ ) wyniki pomiarów uzyskanych dla 10 układów typu SN7403N ze zbioru testowego (tabl. 3), od poszczególnych punktów charakterystycznych dla wszystkich klas przynależności układów.

Z kolei w tabl. 13 zamieszczono odległości jakie dzielą (w przypadku zastosowania metryki Minkowskiego dla  $t = 16$ ) wyniki pomiarów uzyskanych dla 10 układów typu SN7403N ze zbioru testowego (tabl. 3), od poszczególnych punktów charakterystycznych dla wszystkich klas przynależności układów.

Tablica 11

Odległości pomiędzy punktami charakterystycznymi poszczególnych klas przynależności układów scalonych, a kolejnymi wynikami pomiarów dla układów SN7403N ze zbioru testowego.

|    | UCY7417 | UCA6410 | UCY7453 | SN7406N | UCY7404 | SN7403N | UL1201 | UCY7438 |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|---------|
| 1  | 430,1   | 726,0   | 299,8   | 434,3   | 329,1   | 25,9    | 313,9  | 596,9   |
| 2  | 426,9   | 735,4   | 299,1   | 449,4   | 317,1   | 18,8    | 305,1  | 602,8   |
| 3  | 428,6   | 734,0   | 303,2   | 438,1   | 330,4   | 19,7    | 313,6  | 596,0   |
| 4  | 431,3   | 736,3   | 304,3   | 425,1   | 340,3   | 32,4    | 317,5  | 529,8   |
| 5  | 451,1   | 759,2   | 322,7   | 453,0   | 339,1   | 40,3    | 323,4  | 624,9   |
| 6  | 457,7   | 764,2   | 322,8   | 395,1   | 368,7   | 66,1    | 335,2  | 612,5   |
| 7  | 451,0   | 750,8   | 326,8   | 412,2   | 363,2   | 48,2    | 340,2  | 604,2   |
| 8  | 436,6   | 745,2   | 306,1   | 435,3   | 329,8   | 27,7    | 313,3  | 608,5   |
| 9  | 456,0   | 758,7   | 333,9   | 423,6   | 358,8   | 44,4    | 338,2  | 619,1   |
| 10 | 461,0   | 771,9   | 327,5   | 417,0   | 351,9   | 54,2    | 327,0  | 632,2   |

Tablica 12

Odległości pomiędzy punktami charakterystycznymi poszczególnych klas przynależności układów scalonych, a kolejnymi wynikami pomiarów dla układów SN7403N ze zbioru testowego.

|    | UCY7417 | UCA6410 | UCY7453 | SN7406N | UCY7404 | SN7403N | UL1201 | UCY7438 |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|---------|
| 1  | 373,9   | 683,3   | 266,1   | 430,6   | 295,9   | 23,9    | 286,3  | 590,4   |
| 2  | 376,7   | 687,3   | 267,5   | 445,6   | 285,3   | 17,7    | 278,9  | 597,3   |
| 3  | 373,6   | 681,8   | 273,0   | 434,6   | 298,2   | 19,4    | 288,7  | 589,4   |
| 4  | 373,0   | 680,6   | 274,3   | 421,6   | 307,7   | 32,4    | 292,2  | 585,4   |
| 5  | 398,5   | 708,8   | 289,6   | 428,7   | 305,3   | 38,8    | 296,0  | 618,4   |
| 6  | 393,6   | 703,0   | 287,5   | 388,7   | 334,8   | 65,4    | 305,6  | 603,4   |
| 7  | 388,3   | 691,3   | 296,9   | 407,6   | 328,1   | 46,5    | 314,8  | 594,5   |
| 8  | 383,1   | 694,0   | 272,8   | 430,6   | 296,9   | 25,1    | 285,6  | 602,4   |
| 9  | 398,5   | 703,3   | 304,4   | 417,7   | 325,4   | 39,0    | 316,2  | 610,5   |
| 10 | 405,8   | 718,0   | 292,9   | 408,9   | 317,8   | 49,6    | 297,5  | 625,4   |

Tablica 13

Odległości pomiędzy punktami charakterystycznymi poszczególnych klas przynależności układów scalonych, a kolejnymi wynikami pomiarów dla układów SN7403N ze zbioru testowego.

|    | UCY7417 | UCA6410 | UCY7453 | SN7406N | UCY7404 | SN7403N | UL1201 | UCY7438 |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|---------|
| 1  | 360,2   | 672,2   | 254,0   | 430,5   | 284,4   | 23,4    | 274,5  | 590,3   |
| 2  | 366,7   | 678,8   | 255,5   | 445,5   | 273,1   | 17,6    | 269,1  | 597,3   |
| 3  | 359,7   | 671,2   | 263,5   | 434,5   | 285,4   | 19,4    | 280,6  | 589,3   |
| 4  | 356,4   | 667,7   | 265,7   | 421,5   | 295,3   | 32,4    | 283,7  | 585,3   |
| 5  | 387,8   | 699,8   | 276,8   | 428,5   | 292,1   | 38,6    | 287,6  | 618,3   |
| 6  | 374,6   | 686,7   | 276,2   | 388,5   | 324,5   | 65,4    | 294,7  | 603,3   |
| 7  | 368,1   | 677,0   | 290,0   | 407,5   | 314,0   | 46,4    | 307,8  | 594,3   |
| 8  | 371,8   | 684,0   | 260,1   | 430,5   | 285,1   | 24,1    | 274,7  | 602,3   |
| 9  | 382,3   | 692,2   | 295,8   | 417,5   | 311,7   | 37,0    | 312,1  | 610,3   |
| 10 | 394,7   | 707,1   | 279,6   | 408,5   | 306,2   | 47,5    | 287,6  | 625,3   |

Z kolei w tabl. 14 zamieszczono odległości jakie dzielą (w przypadku zastosowania metryki Minkowskiego dla  $t = 32$ ) wyniki pomiarów uzyskanych dla 10 układów typu SN7403N ze zbioru testowego (tabl. 3), od poszczególnych punktów charakterystycznych dla wszystkich klas przynależności układów.

Tablica 14

Odległości pomiędzy punktami charakterystycznymi poszczególnych klas przynależności układów scalonych, a kolejnymi wynikami pomiarów dla układów SN7403N ze zbioru testowego.

|    | UCY7417 | UCA6410 | UCY7453 | SN7406N | UCY7404 | SN7403N | UL1201 | UCY7438 |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|---------|
| 1  | 359,0   | 671,0   | 250,1   | 430,5   | 280,7   | 23,4    | 269,2  | 590,3   |
| 2  | 366,0   | 678,3   | 250,5   | 445,5   | 267,8   | 17,6    | 266,3  | 597,3   |
| 3  | 358,1   | 670,3   | 261,4   | 434,5   | 279,6   | 19,4    | 279,0  | 589,3   |
| 4  | 354,1   | 666,3   | 264,3   | 421,5   | 290,6   | 32,4    | 282,0  | 585,3   |
| 5  | 387,0   | 699,3   | 271,2   | 428,5   | 286,0   | 38,6    | 286,0  | 618,2   |
| 6  | 372,1   | 684,4   | 273,5   | 388,5   | 322,4   | 65,4    | 291,4  | 603,3   |
| 7  | 363,5   | 675,3   | 289,2   | 407,5   | 307,5   | 46,4    | 306,9  | 594,3   |
| 8  | 371,0   | 683,3   | 254,9   | 430,5   | 281,1   | 23,6    | 270,7  | 602,3   |
| 9  | 379,2   | 691,3   | 294,3   | 417,5   | 305,6   | 36,5    | 311,9  | 610,3   |
| 10 | 394,0   | 706,3   | 273,6   | 408,5   | 302,8   | 46,5    | 285,1  | 625,3   |

## 6. Dyskusja wyników

Przeprowadzono eksperymenty rozpoznawania dla 80 układów scalonych (po 10 układów każdego typu), z których wszystkie zakończyły się wytypowaniem właściwej klasy przynależności. Każda z rozważanych metryk dała prawidłowe wyniki rozpoznawania. W celu porównania skuteczności poszczególnych metryk, należy wyznaczyć wartość stosunku odległości do kolejnej najbliższej klasy, do odległości do klasy wskazanej jako właściwa klasa przynależności układu scalonego. Metryka dająca największe wartości tego stosunku będzie zatem najlepsza do realizacji postawionego zadania. Wyniki obliczeń zebrano w tabl. 17. W kolejnych kolumnach tabl. 15 zamieszczono wyniki dla kolejnych pomiarów dla układu UCY7403N, natomiast w kolumnie ostatniej wartość średnią ze wszystkich pomiarów.

Analizując zamieszczone w tabl. 15 wyniki widać, że wszystkie z badanych metryk charakteryzują się podobną skutecznością rozpoznawania. Wszystkie metryki nadają się dobrze do realizacji postawionego zadania rozpoznawania typów układów scalonych, bowiem odległość jaka dzieli punkt wygenerowany podczas pomiaru wartości cech od kolejnej najbliższej klasy przynależności jest średnio rząd wielkości większa, od odległości do klasy wskazanej jako właściwa klasa przynależności rozpoznawanego układu.

Wynik najlepszy uzyskano dla prostej metryki ulic, charakteryzującej się ponadto najmniejszą złożonością obliczeniową. Jest to ważne spostrzeżenie zwłaszcza, gdy weźmie się pod uwagę możliwość realizacji rozważanych obliczeń w czasie rzeczywistym.

Tablica 15

Wartość stosunku odległości do kolejnej najbliższej klasy przynależności, do odległości do klasy przynależności wskazanej jako właściwa.

| Metryka           | 1     | 2     | 3     | 4     | 5    | 6    | 7    | 8     | 9    | 10   | Średnia      |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|-------|------|------|--------------|
| Euklidesowa       | 11,70 | 16,47 | 18,07 | 11,82 | 8,68 | 5,70 | 7,31 | 11,11 | 7,32 | 6,37 | <b>10,46</b> |
| Ulic              | 11,20 | 16,84 | 21,71 | 14,14 | 8,96 | 5,27 | 6,26 | 10,76 | 6,50 | 6,30 | <b>10,79</b> |
| Czebyszewa        | 11,41 | 15,07 | 13,46 | 8,15  | 6,95 | 4,18 | 6,23 | 10,78 | 8,08 | 5,88 | <b>9,02</b>  |
| Canberra          | 6,75  | 13,25 | 16,67 | 9,80  | 7,29 | 3,85 | 3,91 | 7,71  | 4,40 | 5,10 | <b>7,87</b>  |
| Minkowskiego t=4  | 11,58 | 15,91 | 15,39 | 9,39  | 8,01 | 4,88 | 6,78 | 11,05 | 7,52 | 6,03 | <b>9,65</b>  |
| Minkowskiego t=8  | 11,13 | 15,11 | 14,07 | 8,47  | 7,46 | 4,40 | 6,38 | 10,87 | 7,81 | 5,91 | <b>9,16</b>  |
| Minkowskiego t=16 | 10,85 | 14,52 | 13,58 | 8,20  | 7,17 | 4,22 | 6,25 | 10,79 | 7,99 | 5,89 | <b>8,95</b>  |
| Minkowskiego t=32 | 10,69 | 14,23 | 13,47 | 8,16  | 7,03 | 4,18 | 6,23 | 10,80 | 8,06 | 5,88 | <b>8,87</b>  |

Nieźłych wyników dostarcza również metryka Minkowskiego dla różnych wartości parametru  $t$ . Jednakże w tym przypadku można zaobserwować, że jej skuteczność wyraźnie maleje wraz ze wzrostem  $t$ , co podważa celowość stosowania dużych wartości tego parametru. Ponadto wraz ze wzrostem  $t$  znacznie wzrasta złożoność obliczeniowa zastosowanej metody.

#### 6.1. ZASTOSOWANIE WSPÓŁCZYNNIKÓW NORMALIZUJĄCYCH

W celu zniwelowania różnic rzędów wartości poszczególnych składowych wektora cech, wprowadza się tzw. współczynniki normalizujące. Współczynniki takie mogą zostać oparte np. na przedziale zmienności danej cechy i wówczas wyrażają się wzorem:

$$\lambda_i = \frac{1}{\max_{x \in U} x_i - \min_{x \in U} x_i} \quad (5)$$

Wyznaczone wartości współczynników normalizujących zamieszczono w tabl. 16.

Współczynniki normalizujące

Tablica 16

|             | Sektor 1 | Sektor 2 | Sektor 3 | Sektor 4 |
|-------------|----------|----------|----------|----------|
| $\max x_i$  | 378      | 1114     | 852      | 286      |
| $\min x_i$  | 0        | 84       | 117      | 4        |
| $\lambda_i$ | 0,002646 | 0,000971 | 0,001361 | 0,003546 |

Odległości jakie dzieliły wyniki uzyskane dla układów SN7403N ze zbioru testowego, od punktów charakterystycznych dla poszczególnych klas przynależności zamieszczono w tabl. 17.

Tablica 17

Odległości pomiędzy punktami charakterystycznymi poszczególnych klas przynależności układów scalonych, a kolejnymi wynikami pomiarów dla układów SN7403N ze zbioru testowego.

|    | UCY7417 | UCA6410 | UCY7453 | SN7406N | UCY7404 | SN7403N      | UL1201 | UCY7438 |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|--------------|--------|---------|
| 1  | 2,492   | 3,103   | 1,708   | 0,977   | 1,710   | <b>0,134</b> | 1,855  | 2,314   |
| 2  | 2,427   | 3,038   | 1,644   | 0,947   | 1,645   | <b>0,075</b> | 1,790  | 2,250   |
| 3  | 2,461   | 3,072   | 1,678   | 0,891   | 1,679   | <b>0,042</b> | 1,824  | 2,283   |
| 4  | 2,491   | 3,102   | 1,707   | 0,879   | 1,709   | <b>0,071</b> | 1,854  | 2,313   |
| 5  | 2,546   | 3,157   | 1,763   | 0,927   | 1,765   | <b>0,127</b> | 1,909  | 2,369   |
| 6  | 2,642   | 3,253   | 1,858   | 0,919   | 1,860   | <b>0,223</b> | 2,005  | 2,464   |
| 7  | 2,615   | 3,226   | 1,831   | 0,844   | 1,833   | <b>0,195</b> | 1,978  | 2,437   |
| 8  | 2,495   | 3,106   | 1,711   | 0,964   | 1,713   | <b>0,121</b> | 1,858  | 2,317   |
| 9  | 2,580   | 3,191   | 1,796   | 0,802   | 1,798   | <b>0,170</b> | 1,942  | 2,402   |
| 10 | 2,597   | 3,209   | 1,814   | 0,945   | 1,816   | <b>0,178</b> | 1,961  | 2,420   |

Jak widać z danych zamieszczonych w tabl. 17, wprowadzenie współczynników normalizujących nie przyniosło widocznej poprawy wyników (zwiększenia względnej odległości do pozostałych klas przynależności). Wprawdzie odległości do klasy układów UCY7453 uległa wyraźnemu zwiększeniu, ale za to odległość do klasy układów SN7406N w niektórych przypadkach zmalała. Spowodowane jest to tym, że pomiędzy wartościami cech dla poszczególnych sektorów obrazu nie zachodzą duże różnice w rzędach przyjmowanych przez nie wielkości, a przydziały ich zmienności są podobne. Zatem wprowadzanie współczynników normalizujących nie jest w tym przypadku zasadne.

## 7. WNIOSKI

W artykule przedstawiono system wizyjny służący do rozpoznawania typów układów scalonych, na podstawie analizy oznaczeń umieszczonych na ich obudowach. Zaproponowana metoda ekstrakcji cech, oparta na pomiarze liczby białych pikseli w poszczególnych sektorach obrazu oraz zastosowanie minimalnoodległościowej metody rozpoznawania, przyniosło pożądane rezultaty. Duża skuteczność zaproponowanej metody rozpoznawania stwarza możliwości jej praktycznej implementacji na stanowiskach automatycznego montażu układów scalonych przez robota [8]. Omówiony w artykule system wizyjny może także znaleźć zastosowanie na stanowiskach automatycznej kontroli jakości produkcji. Pod uwagę brana jest w tym miejscu weryfikacja operacji montażowych, polegająca na sprawdzeniu np. czy w danym gnieździe montażowym został umieszczony układ scalony właściwego typu lub, czy układ taki nie został przypadkiem obrócony o 180 stopni [9].



Zaproponowany przez autora artykułu system wizyjny może zostać porównany z opisanym w pracy [10] systemem wizyjnym służącym do realizacji podobnego celu (identyfikacja układów scalonych podczas ich umieszczania w opakowaniach zbiorczych). Jednakże omówiony w pracy [10] system wizyjny przeprowadzał rozpoznawanie układów scalonych na podstawie identyfikacji kolejnych znaków alfanumerycznych umieszczonych na ich obudowach. Natomiast zaproponowany przez autora niniejszego artykułu system jest w stanie rozpoznać dowolny typ wzorca umieszczonego na układzie scalonym (np. logo firmy, znaki alfabety japońskiego itp.), a nie tylko znaki alfanumeryczne. Jednakże warunkiem poprawnego działania zaprezentowanego systemu wizyjnego jest dobra powtarzalność rozpoznawanego wzorca na wszystkich układach scalonych tego samego typu. Jak pokazały przeprowadzone eksperymenty rozpoznawania, producenci układów scalonych są w stanie zapewnić odpowiednio wysoką powtarzalność rozważanych wzorców.

#### BIBLIOGRAFIA

1. S. Marenka, A. Sadun: *Nowoczesne metody przetwarzania obrazów*. Warszawa, WNT, 1996
2. R. Gonzales, P. Wintz: *Digital image processing*. New York, Addison-Wesley Publishing Company, 1987
3. W. Sobczak, W. Malina: *Metody selekcji informacji*. Warszawa, WNT, 1980
4. R. Tadeusiewicz: *Przykłady wykorzystania metod cybernetycznych — Metody cyfrowej analizy sygnałów wibroakustycznych*. Wrocław, Ossolineum, 1997, ss. 225–269
5. N. Nilsson: *Maszyny uczące się*. Warszawa, PWN, 1968
6. O. Duda, P. Hart: *Pattern classification and scene analysis*. New York, Wiley, 1973
7. R. Tadeusiewicz: *Rozpoznawanie obrazów — zarys teorii*. Kraków, Skrypty uczelniane UJ, nr 499, 1985
8. F.J.M. Van der Heijden: *Assembly of small components by a vision controlled robot using Philips vision system PAPS*. Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Conference on Robot Vision and Sensory Controls. Amsterdam, North Holland, 1985.
9. D.C. Burgess: *Industrial image processing at speed*. Proceeding of the 5<sup>th</sup> International Conference on Robot Vision and Sensory Controls. Amsterdam, North Holland, 1986
10. A. Berger, P. Dunbar, C. Roberts: *Machine vision character recognition in the electronics packaging industry, three case studies*. VISION'85 — Conference Proceedings, North Holland, 1985

M. GAJER

#### IMAGE RECOGNITION BY THE USAGE OF MINIMAL-DISTANCE METHOD

#### Summary

In the paper a vision system is described. The purpose of the vision system is to recognise the types of integrated circuits. Such system can be used in a robot vision system in the automatic assembly line or can be used as a diagnostic system for montage operations verification. In the paper all the image processing

operations  
operations  
As a clas  
neighbour

Key word

operations necessary for integrated circuit recognition are thoroughly described. Special attention is paid to the operations such as: acquisition, image preprocessing, image segmentation, feature extraction and classification. As a classification method a minimal-distance method is chosen which is based on the search of nearest neighbour in the feature space.

*Key words:* vision systems, image recognition, nearest-neighbour methods

R

nych  
polar  
bada  
i pro  
poró  
znaje  
w ge

*Słowa*  
pole

Rez  
kwarco  
statowa  
sated) j  
i kącie  
mniejsz  
Rezona  
zblizon  
i dolny  
Przy  
Naj  
termost  
tempera

## Rezonatory cięcia SC pobudzane polem równoległym do drgań anharmonicznych

KRZYSZTOF WEISS, WIESŁAW SZULC, MAREK ŚWIDERSKI

*Instytut Tele- i Radiotechniczny, Warszawa*

*Otrzymano 2000.05.05*

*Autoryzowano 2000.06.16*

W artykule przedstawiono wyniki wstępnych badań i prób optymalizacji konstrukcji wysokostabilnych rezonatorów kwarcowych cięcia SC wykorzystujących drgania anharmoniczne, pobudzanych polem elektrycznym równoległym do powierzchni płytki. Zaprezentowano również oryginalne metody badania rozkładu obszarów pobudzeń płytki kwarcowej do drgań przy pobudzeniu polem równoległym i prostopadłym do powierzchni płytki. Zaprezentowane modele rezonatorów wykazują parametry porównywalne z rezonatorami klasycznymi, przy czym elektrody pobudzające wibrator do drgań znajdują się poza obszarem drgań. Stwarza to potencjalną możliwość uzyskania dla tych rezonatorów w generatorach większej stałości częstotliwości w czasie oraz niższego poziomu szumów fazowych.

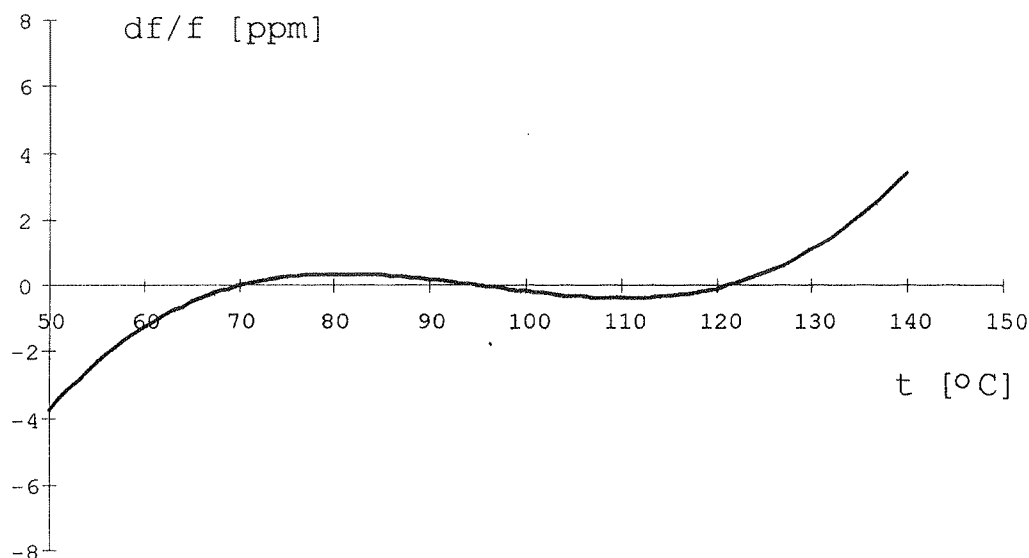
*Słowa kluczowe:* rezonator kwarcowy, rezonator wysokostabilny, cięcia SC, drgania anharmoniczne, pole równoległe.

### 1. WSTĘP

Rezonatory kwarcowe służą do stabilizacji częstotliwości drgań w generatorach kwarcowych. Najwyższą stałość częstotliwości można uzyskać w generatorach termostatowanych OCXO (Oven Controlled Crystal Oscillator). Cięcie SC (Stress Compensated) jest cięciem dwuobrotowym z grupy Y, o kącie pierwszego obrotu  $\phi$  około  $22^\circ$  i kącie drugiego obrotu  $\theta$  około  $34^\circ$ . Rezonatory tego cięcia charakteryzują się znacznie mniejszą niż rezonatory cięcia AT wrażliwością na szybkie zmiany temperatury [1, 2]. Rezonator kwarcowy cięcia SC posiada temperaturową zależność częstotliwości (TZCz) zbliżoną do funkcji trzeciego stopnia o punkcie przegięcia w temperaturze około  $95^\circ\text{C}$  i dolnym ekstremum w temperaturze zależnej od kąta  $\theta$ .

Przykładową charakterystykę TZCz rezonatora SC przedstawiono na rys. 1.

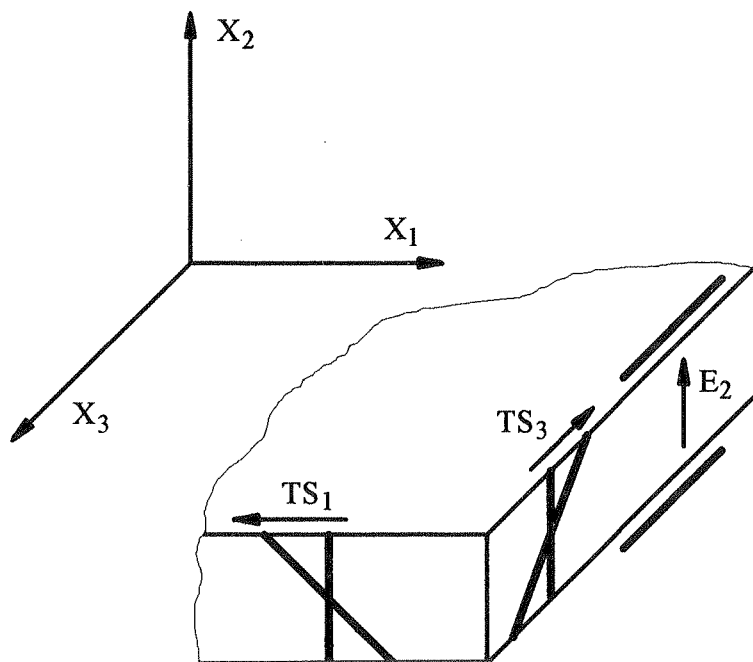
Najlepszy współczynnik stabilizacji częstotliwości rezonatora w funkcji temperatury termostatu uzyskuje się w pobliżu temperatury lokalnego ekstremum TZCz. Ponieważ temperatura pracy generatorów kwarcowych zwykle jest niższa od  $70^\circ\text{C}$ , a termostat



Rys. 1. Przykładowa charakterystyka TZCz rezonatora cięcia SC

generatora dla poprawnej pracy powinien mieć temperaturę o co najmniej  $5^\circ$  wyższą niż temperatura otoczenia, dla rezonatorów wysokostabilnych przyjmuje się na ogół temperatury ekstremum TZCz w zakresie  $75 \div 85^\circ\text{C}$ . Zaletą rezonatorów cięcia SC w porównaniu z rezonatorami cięcia AT jest między innymi bardziej płaska w tym zakresie temperatur ekstremum charakterystyka TZCz, a co za tym idzie mniejsze zmiany częstotliwości generatora w funkcji zmian temperatury otoczenia. Biorąc pod uwagę skompensowanie w tych rezonatorach wpływu dynamicznych zmian temperatury można uzyskać znaczne skrócenie czasu stabilizacji częstotliwości drgań podczas dogrzewania generatora [3]. Te zalety rezonatorów cięcia SC sprawiły, że prawie całkowicie wyparły one rezonatory cięcia AT z generatorów wysokostabilnych. Jednak rezonatory te oprócz niewątpliwych zalet posiadają również pewne wady. Poza wyższym kosztem wytwarzania najistotniejszą wadą rezonatorów cięcia SC jest występowanie w nich drgań modu B.

Zgodnie z teorią piezoelektryczności w nieskończenie rozciągniętej płytce, polem elektrycznym prostopadłym do powierzchni mogą być pobudzone tylko drgania grubościowe, czyli drganie rozciągania grubościowego oraz dwa rodzaje drgań ścinania grubościowego. W literaturze [4] drgania te określono jako drgania typu A (rozciąganie grubościowe) oraz typu B i C (ścinięcie grubościowe). Przyjmując zgodnie z konwencją Mindlina dla kwarcu układ współrzędnych prostokątnych, w którym oś  $X_1$  jest zgodna z osią symetrii dwukrotnej (oś X), oś  $X_2$  jest prostopadła do powierzchni płytki a oś  $X_3$  jest odchylona od osi symetrii trójkrotnej o kąt  $\theta$  (cięcia Y — jednoobrotowe) można drgania te określić jako  $E_2$  — (extensional) rozciąganie w kierunku osi  $X_2$ ,  $TS_1$  — (thickness shear) ścinanie grubościowe w kierunku osi  $X_1$  i  $TS_3$  — ścinanie grubościowe w kierunku osi  $X_3$  [5] (rys. 2).



Rys. 2. Drgania w płytce nieskończenie rozciąglej

W rezonatorach o cięciach z grupy Y wykorzystuje się drgania ścinania grubościowego w kierunku osi  $X$  ( $TS_1$ ) zwane drganiami modu C. W rezonatorach cięcia AT mogą być wzbudzone tylko drgania modu C, natomiast w rezonatorach cięcia SC mogą być wzbudzone wszystkie trzy rodzaje drgań, z których tylko drganie modu C posiada skompensowaną temperaturowo charakterystykę TZCz i może być wykorzystane do stabilizacji drgań generatorów.

Drgania modu B są w rezonatorach cięcia SC bardzo kłopotliwe ponieważ ich intensywność jest na ogół większa niż modu C a częstotliwość różni się od modu C zaledwie o 8%. Klasyczne rezonatory kwarcowe wykorzystujące drgania ścinania grubościowego pobudzane są do drgań polem prostopadłym do powierzchni, przykładanym poprzez elektrody umieszczone bezpośrednio na powierzchni płytki kwarcowej lub w jej bliskim sąsiedztwie (rezonatory BVA). W tym przypadku eliminacja drgań modu B może być realizowana prawie wyłącznie przez selektywne obwody elektroniczne w układzie generatora. W obwodach tych występują cewki, które powodują na ogół pogorszenie parametrów termicznych obwodu wzbudzającego.

Jeżeli rezonator pobudzany jest do drgań polem elektrycznym równoległym do powierzchni płytki (Lateral Field Excitation), wówczas możliwa jest eliminacja modu B przez dobór kierunku przyłożenia pola elektrycznego. Główną zaletą pobudzania polem równoległym jest usunięcie elektrod z obszaru drgań płytki. Zgodnie z jedną

z teorii, opisujących czynniki wpływające na długoterminową stałość częstotliwości rezonatora, głównymi czynnikami są zmiany w elektrodzie zachodzące w czasie (rekrytalizacja i dyfuzja) [6]. Tak więc usunięcie elektrod z obszaru drgań płytki powinno dać podwyższenie stałości długoterminowej rezonatora (analogicznie jak w rezonatorach BVA). Rezonatory takie wykazują jednak pewne niedogodności technologiczne.

W rezonatorach klasycznych końcowe strojenie częstotliwości pracy rezonatora jest realizowane przez kalibrację, polegającą na pogrubianiu elektrod przez naparowywanie na nie w próżni warstwy metalu (najczęściej złota), przy równoczesnym pomiarze częstotliwości drgań rezonatora. Wymagana dokładność takiej kalibracji jest zależna od częstotliwości i rzędu drgań, i wynika z faktu, że ostateczne ustalenie częstotliwości pracy generatora odbywa się przez dobór pojemności kondensatora lub diody pojemnościowej włączonej w obwód rezonansowy. Jednak rezonator pobudzany polem równoległym posiada elektrody poza obszarem drgań płytki, a ich pogrubianie nie zmienia częstotliwości drgań płytki i korekta częstotliwości drgań musi być realizowana na innej drodze (na przykład przez trawienie chemiczne), przy czym precyzja ustalenia tej częstotliwości musi być znacznie wyższa (zaledwie  $2 \div 5$  Hz). Wynika to z faktu, że pojemność dynamiczna rezonatorów pobudzanych polem równoległym jest znacznie mniejsza niż rezonatorów klasycznych, a co za tym idzie i zakres przestrajania częstotliwości w generatorze jest znacznie mniejszy.

Z pobudzaniem rezonatora do drgań polem równoległym związana jest dodatkowa trudność: rezonatory te posiadają znacznie wyższą rezystancję dynamiczną niż rezonatory klasyczne. W ITR udało się pokonać te trudności i opracować konstrukcję oraz technologię rezonatora SC pobudanego polem równoległym. Wykorzystanie praktyczne tego rezonatora wymagało opracowania specjalnego układu generatora umożliwiającego pracę w nim rezonatora o dużej rezystancji (około 10 razy większej niż w rezonatorach klasycznych). Badania generatora wykazały słuszność przyjętych założeń. Rezonatory pobudzone polem równoległym (LFE) wykazały w praktyce stałość długoterminową częstotliwości porównywalną z rezonatorami bezelektrodowymi BVA [7]. Jednak kalibracja częstotliwości z wymaganą precyzją okazała się bardzo pracochłonna. Alternatywnym rozwiązaniem w stosunku do rezonatorów LFE pobudzanych do drgań modu głównego może być rezonator pracujący na drganiach anharmonicznych pobudzany również polem równoległym.

## 2. DRGANIA ANHARMONICZNE

Jak podano we wstępie w nieskończenie rozciąglej płytce cięcia AT polem elektrycznym prostopadłym można wzbudzić tylko drgania  $TS_1$ . Płytke o ograniczonych rozmiarach można pobudzić również do innych rodzajów drgań. W płytce cięcia Y — jednoobrotowego, stosując różne konfiguracje elektrod, można wzbudzić 10 różnych rodzajów drgań oraz ich kombinacji [8]. Analogiczne drgania można wzbudzić również w płytkach cięć Y — dwuobrotowych, do których należy cięcie SC. Drgania

anharmoniczne powstają przez sprzężenie drgań ścinania grubościowego  $TS_1$  i  $TS_3$  z drganiami skręcania grubościowego  $TT_1$  i  $TT_3$ . W efekcie powstają w płytce obszary drgań, w których drgania zachodzą z tą samą częstotliwością, ale mają różne kierunki lub zwroty w sąsiadujących ze sobą obszarach. Dla rezonatorów cięcia SC do obliczania częstotliwości drgań anharmonicznych płytki kwarcowej okrągłej płasko wypukłej przyjęto metodę analityczną opracowaną przez Stevensa i Tierstena [9].

Częstotliwość drgań płytki wylicza się ze wzoru:

$$f = \frac{n}{2h} \sqrt{\frac{\hat{c}}{\rho}} \sqrt{1 + \frac{1}{n\pi} \sqrt{\frac{h}{R}} \left[ \sqrt{\frac{M_n}{\hat{c}}(2m+1)} + \sqrt{\frac{P_n}{\hat{c}}(2p+1)} \right]} \quad (1)$$

gdzie:  $M_n$ ,  $P_n$  — współczynniki dyspersji wyliczane teoretycznie lub wyznaczane empirycznie

$$\hat{c} = \bar{c} \left( 1 - \frac{8k_{26}^2}{n^2\pi^2} - 2\hat{R} \right) \quad (2)$$

$$\hat{R} = \frac{2p'h'}{ph} \quad (3)$$

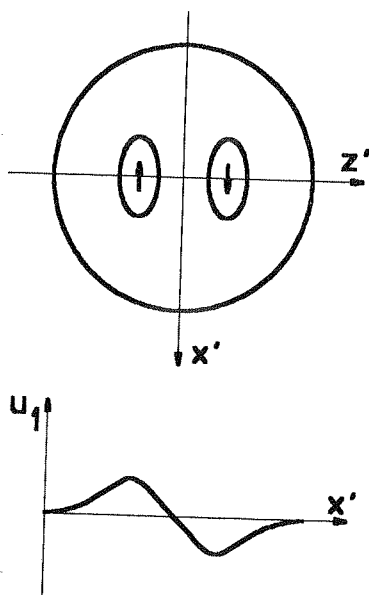
gdzie:  $k_{26}$  — współczynnik sprzężenia elektromechanicznego,  
 $R$  — promień krzywizny płytki kwarcowej,  
 $h$  — grubość płytki kwarcowej,  
 $\rho$  — gęstość kwarcu,  
 $a$  — gęstość materiału elektrody,  
 $e'$  — grubość elektrody,  
 $\bar{c}$  — współczynnik elastyczności,  
 $n$  — rząd drgania głównego,  
 $m, p$  — liczby całkowite określające rząd drgań anharmonicznych;  
 (dla drgania podstawowego  $m = p = 0$ ).

Ze wzoru tego wynika, że liczba drgań anharmonicznych występujących w płytce kwarcowej jest nieograniczona. W praktyce można zaobserwować i zidentyfikować drgania anharmoniczne o liczbach  $m$  i  $p$  rzędu 7÷8. Z tych drgań praktyczne znaczenie mogą mieć tylko drgania niskich rzędów. Liczby  $m$  i  $p$  określają liczbę węzłów odpowiednio w kierunku osi  $X'$  i  $Z'$ . Ogólnie drgania anharmoniczne można podzielić na symetryczne i antysymetryczne. Przy drganiach symetrycznych odkształcenia są symetryczne pod względem amplitudy i fazy względem płaszczyzny prostopadłej do powierzchni płytki, przechodzącej przez jej środek (przy symetrycznym kształcie płytki), natomiast drgania antysymetryczne mają przemieszczenia symetryczne co do wielkości ale w przeciwnej fazie. Drgania symetryczne zazwyczaj towarzyszą drganiu



głównemu płytki i jeden z obszarów drgań występuje na środku płytki. Przy pobudzaniu tych drgań pobudza się również drgania modu głównego. Wzbudzenie drgań antysymetrycznych w płytce przy pobudzaniu drgań głównych jest możliwe tylko przy zakłóconej symetrii elektrod. Wzbudzenie tych drgań wymaga stosowania specjalnej konfiguracji elektrod, przy której nie wzbudzają się drgania modu głównego. Z tego powodu mogą one być wzbudzane jako drgania niezależne i istnieje możliwość wykorzystania ich do stabilizacji częstotliwości generatorów. Z drgań anharmonicznych niższych rzędów mogą być wykorzystane drgania oznaczane symbolami  $n10$  i  $n01$  oraz  $n11$ .

Drgania  $n10$  i  $n01$  występują w postaci dwóch obszarów rozłożonych symetrycznie względem środka płytki (rys. 3).



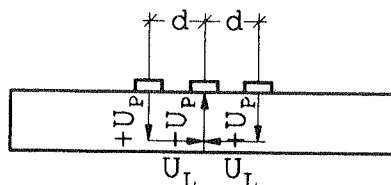
Rys. 3. Rozmieszczenie obszarów drgań modu  $n01$  w płytce kwarcowej

Polem równoległym można wzbudzić ten rodzaj drgań stosując konfigurację elektrod przedstawioną na rys. 4.

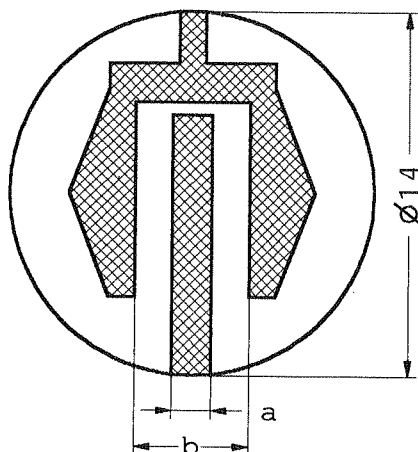
Taka konfiguracja elektrod wytwarza w płytce pole elektryczne przedstawione schematycznie na rys. 5.

Składowa pola  $U_p$  wnika w płytkę nieznacznie i ulega częściowej kompensacji w obszarach pod elektrodami zewnętrznymi i elektrodą wewnętrzną, natomiast składowa  $U_L$  obejmuje dwa obszary przypowierzchniowe płytki wymuszając w nich drgania w przeciwnej fazie. W efekcie płytka pobudzana jest do drgań modu  $n01$  i  $n10$  zależnie od kierunku elektrod względem osi krystalograficznych kryształu kwarcu. Przykładowy rozkład drgań anharmonicznych w płasko wypukłej płytce kwarcowej cięcia SC pobudzanej do drgań za pomocą elektrod przedstawionych na rysunku 6 w zależności od kąta pobudzania przedstawiono na rys. 7 i 8.

Por  
tak, ab  
drgań  
poziom  
W  
stawion

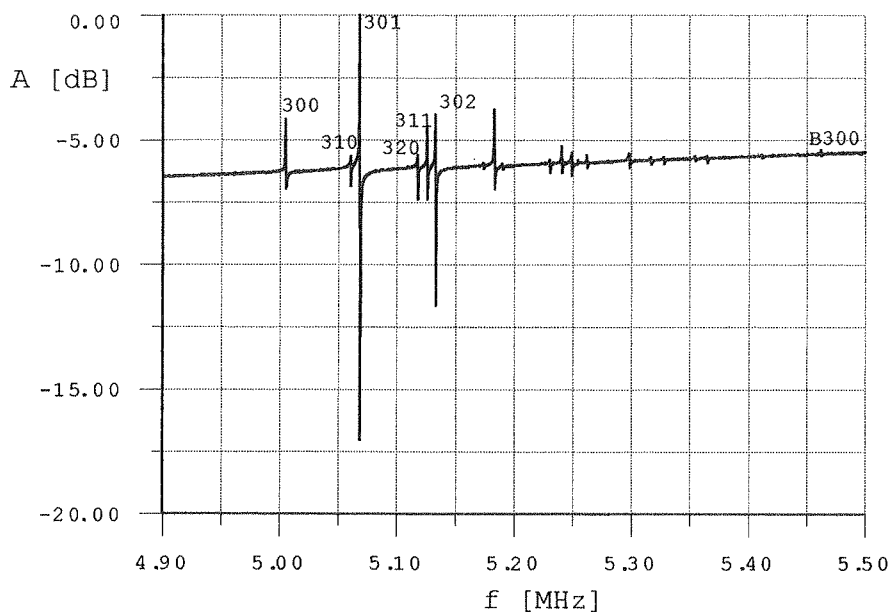
Rys. 4. Konfiguracja elektrod do pobudzania drgań modów  $n_{01}$  i  $n_{10}$ 

Rys. 5. Rozkład pola elektrycznego pod elektrodami

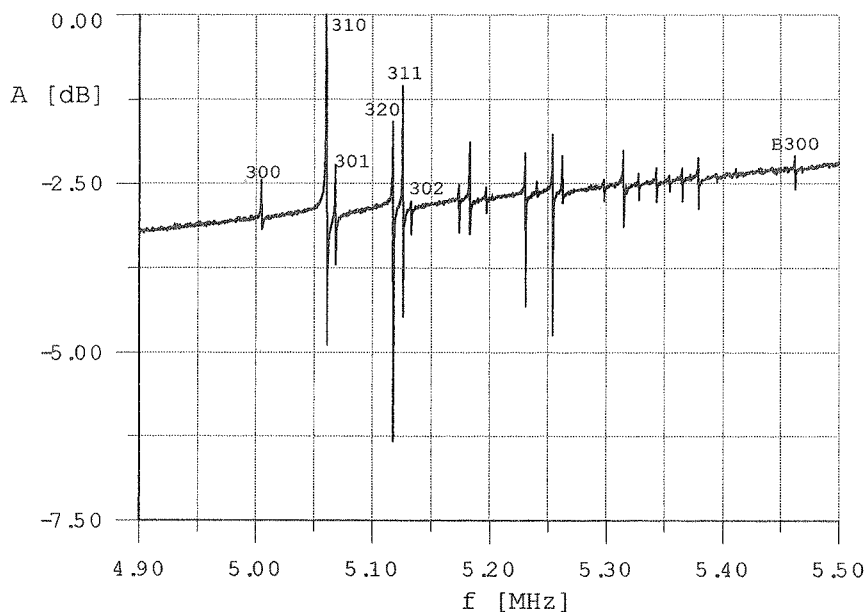
Rys. 6. Elektrody do pobudzania drgań anharmonicznych modów  $n_{10}$  i  $n_{01}$ 

Pomiary widma drgań płytki były wykonywane przy kątach pobudzania dobranych tak, aby uzyskać maksymalną intensywność drgań wybranego modu. Intensywność drgań modu 301 jest znacznie większa niż modu 310 przy zauważalnie niższym poziomie innych rodzajów drgań.

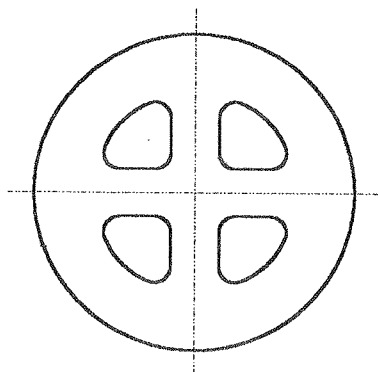
W przypadku drgań modu  $n_{11}$  w płytce występują cztery obszary drgań przedstawione schematycznie na rys. 9.



Rys. 7. Widmo drgań płytki SC 5MHz pobudzanej do drgań polem równoległym za pomocą trzech elektrod; szerokość elektrod 1 mm, odstęp między zewnętrznymi elektrodami 4,5 mm, kąt między elektrodami a osią  $X'$   $-60^\circ$



Rys. 8. Widmo drgań płytki SC 5MHz pobudzanej do drgań polem równoległym za pomocą trzech elektrod; szerokość elektrod 1 mm, odstęp między zewnętrznymi elektrodami 4,5 mm, kąt między elektrodami a osią  $Z'$   $-110^\circ$



Rys. 9. Obszary drgań modu  $n_{11}$  w płytce płasko-wypukłej cięcia AT

Drgania w tych obszarach odbywają się w różnych kierunkach i przyjmują różne kształty zależnie od orientacji krystalograficznej płytki kwarcowej. Mogą być one wzbudzone w płytce za pomocą różnych konfiguracji elektrod. Możliwe do wykorzystania konfiguracje elektrod zostaną szerzej omówione w następnym rozdziale.

### 3. WYNIKI BADAŃ EKSPERYMENTALNYCH

W początkowej fazie badań postanowiono sprawdzić możliwość wykonania rezonatorów pobudzanych do drgań anharmonicznych. Ze względu na lepsze rozpoznanie charakteru drgań modów typu  $n_{01}$  i  $n_{10}$  w pierwszej kolejności podjęto próby wykonania rezonatorów pobudzanych do drgań tych modów. Próby od początku prowadzono na płytkach cięcia SC.

Najpierw na laminacie epoksydowo-szklanym wykonano konfigurację elektrod jak na rys. 4. Umieszczając płasko-wypukłą płytkę kwarcową na tej konfiguracji elektrod, a następnie obracając ją i przesuwając po elektrodach ustalono, że rzeczywiście drgania anharmoniczne modów 301 i 310 mogą być wzbudzane. Dla identyfikacji drgań poszczególnych modów opracowano program komputerowy umożliwiający wyliczanie częstotliwości drgań poszczególnych modów anharmonicznych dla płytki cięcia SC o dowolnie wybranym promieniu krzywizny. Wykorzystano w tym celu zależności (1)÷(3). Wartości współczynników dyspersji  $M_n$  i  $P_n$  wyznaczono na podstawie pomiarów praktycznych [10].

Dla każdej z projektowanych konfiguracji elektrod maski do naparowywania elektrod na płytki kwarcowe wykonywano z blachy molibdenowej o grubości 0,05 mm metodą fotolitograficzną. Następnie wykonywano elektrody pomiarowe. Stanowiły one szklane krążki płasko-równoległe o takiej samej średnicy co płytka kwarcowa (14 mm) z naparowanymi na ich powierzchni elektrodami o takim samym kształcie jak przewidywany do stosowania na płytkach kwarcowych. Do badań wstępnych wybrano kilka-

naście płytek kwarcowych stosowanych do wykonywania klasycznych rezonatorów po kilka płytek o różnych promieniach krzywizny i każdą z płytek kolejno umieszczono na szklanych elektrodach o kształcie jak na rysunku 6. Przez obracanie płytek na elektrodach ustalano dla każdej z nich kierunek elektrod przy którym występowało maksimum amplitudy wybranego modu drgań.

Ponieważ zorientowano się, że drgania modu 301 posiadają znacznie większą intensywność niż drgania modu 310 przy lepszym wytłumieniu drgań innych modów, zdecydowano się na prowadzenie dalszych badań tylko nad rezonatorami na drganiach modu 301. Po ustaleniu kierunku optymalnego ułożenia elektrod, na krawędzi każdej z płytek wykonywane było nacięcie zaznaczające w sposób trwały ten kierunek. Płytki poddawano procesowi mycia tak jak w przypadku innych typów rezonatorów a następnie naparowywano na płytkach złote elektrody o grubości 100 nm. Wykonane w ten sposób wibratory były montowane w obudowy i zamykane przy próżni około  $10^{-2}$  Pa. Następnie mierzono podstawowe parametry wykonanych rezonatorów. Wyniki pomiarów w porównaniu z rezonatorami o innych konstrukcjach, w tym z rezonatorem pobudzonym do drgań modu 301 polem prostopadłym, przedstawiono w tablicy 1.

Tablica 1  
Porównanie parametrów rezonatora pobudzanego do drgań modu 301 polem równoległym z parametrami innych typów rezonatorów [11]

| Parametr                            | Pole równoległe mod 301 | Pole prostopadłe mod 300 | Pole równoległe mod 301 | Pole prostopadłe mod 300 [12] |
|-------------------------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------------|
| Częstotliwość [MHz]                 | 8,248                   | 8,192                    | 4,999                   | 4,999                         |
| Rezystancja dynamiczna [ $\Omega$ ] | 371                     | 54                       | 570                     | 85–100                        |
| Pojemność dynamiczna [fF]           | 0,047                   | 0,3                      | 0,035                   | 0,27                          |
| Q [E6]                              | 1,11                    | 1,2                      | 2,0                     | 2,2                           |
| Rezystancja modu B [ $\Omega$ ]     | 8200                    | 40                       | 14000                   | 90–152                        |
| fa—fr [Hz]                          | 258                     | 494                      | 135                     | 250                           |

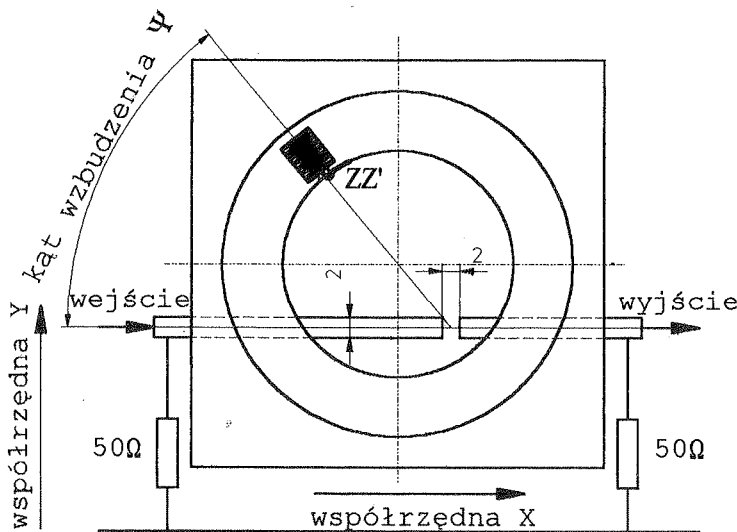
Porównując parametry rezonatora pobudzanego polem równoległym do drgań modu 301 z rezonatorem pobudzonym polem prostopadłym do drgań tego samego modu można stwierdzić, że w rezonatorze tym rezystancja drgań modu B jest znacznie wyższa niż rezystancja drgań modu głównego (mod C). Nie ma zatem konieczności stosowania w generatorze układów selektywnych eliminujących drgania modu B. Z kolei porównując ten rezonator z rezonatorem pobudzonym polem równoległym do drgań modu 300 można zauważyć, że wykazuje on znacznie większy odstęp pomiędzy częstotliwością rezonansu szeregowego i równoległego oraz prawie dwukrotnie większą pojemność dynamiczną. Oznacza to, że w generatorze będzie miał on około dwukrotnie większy zakres przestrajania, czyli możliwe będzie dopuszczenie dwukrotnie większej tolerancji częstotliwości znamionowej rezonatora.

## 3.1. REZONATORY NA DRGANIACH MODU 301

## 3.1.1. Modele rezonatorów o częstotliwości 5 MHz

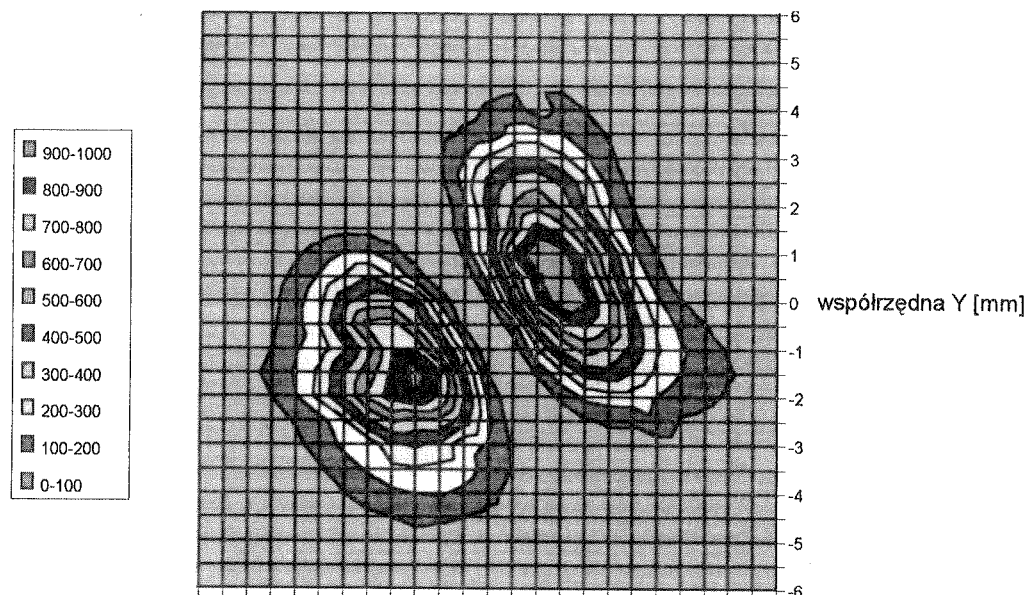
Pierwsze modele rezonatorów 5 MHz wzbudzanych na drganiu anharmonicznym modu 301 miały zbyt małą dobroć (około  $1,5 \cdot 10^6$ ), co wskazywałoby na brak optymalnej konstrukcji. Jeden z tych rezonatorów o numerze 52 umieszczono w generatorze i zbadano średnią dobową zmianę częstotliwości. W pierwszym miesiącu badania generator osiągnął stałość  $8,11 \cdot 10^{-11}$  na dobę, a po półrocznym starzeniu  $5,32 \cdot 10^{-11}$  na dobę. W badaniach tych stosowano rezonatory z elektrodami o grubości 100 nm i szerokości 0,5 mm. W celu poprawy parametrów rezonatorów postanowiono przeprowadzić badania wpływu grubości i szerokości elektrod na parametry rezonatorów oraz dokonać optymalizacji kształtu i rozmieszczenia elektrod.

Dla optymalizacji konfiguracji elektrod opracowano metodę badania rozkładu obszarów pobudzania polem równoległym płytek do drgań określonego modu. Metoda polegała na umieszczeniu płytki kwarcowej na specjalnym stoliku krzyżowym z możliwością przesuwania jej we wzajemnie prostopadłych kierunkach nad parą elektrod paskowych ułożonych w jednej osi, o szerokości 2 mm i odstępzie między nimi 2 mm. Elektrody podłączone były w układzie czwórnika do analizatora obwodów. Mierzono różnicę parametru S21 w rezonansie i poza rezonansem danego modu, przy przesuwaniu płytki nad elektrodami. Przyrząd umożliwiał badanie rozkładu obszarów pobudzeń dla dowolnego kąta pomiędzy osią Z' płytki a konfiguracją elektrod. Poglądowy schemat stolika pomiarowego przedstawiono na rysunku 10.

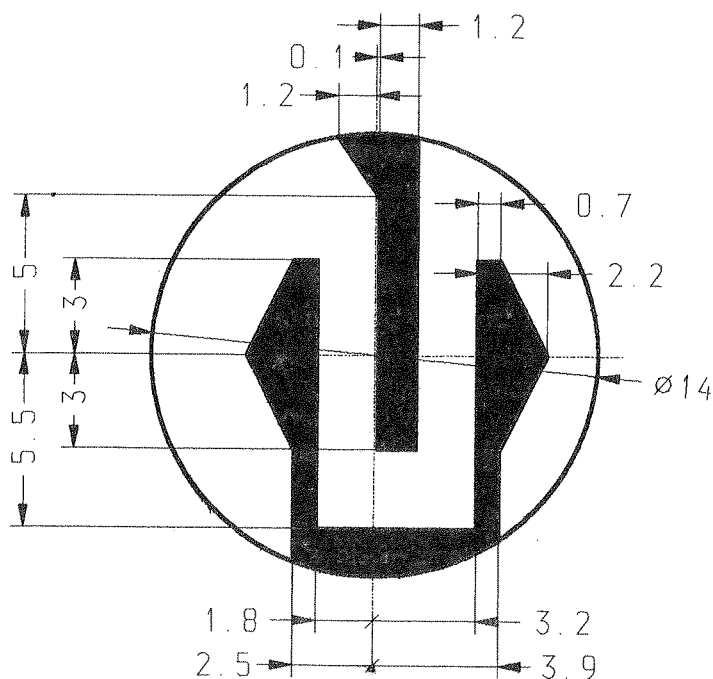


Rys. 10. Schemat stolika pomiarowego do pomiaru rozkładu obszarów pobudzeń w płytkach kwarcowych

Przykładowy rozkład obszarów pobudzenia płytki cięcia SC do drgań modu 301 przedstawiono na rys. 11.



Rys. 11. Rozkład obszarów pobudzenia modu 301 w płytce kwarcowej cięcia SC przy kącie pobudzenia  $100^\circ$



Rys. 12. Kształt elektrod niesymetrycznych rezonatora na modzie 301

301

Badanie rozkładu obszarów pobudzania do drgań modu 301 wykazały, że obydwa główne obszary nie są symetryczne. We wszystkich badanych płytkach zaobserwowano przesunięcie tych obszarów względem osi symetrii płytki o około 0,7 mm. W związku z tym zaprojektowano konfigurację elektrod uwzględniającą to przesunięcie (rys. 12).

Przy badaniu płytek na zewnętrznych elektrodach o tym kształcie zaobserwowano rzeczywiście obniżenie rezystancji przy odpowiednim ułożeniu płytki na elektrodach.

[mm]

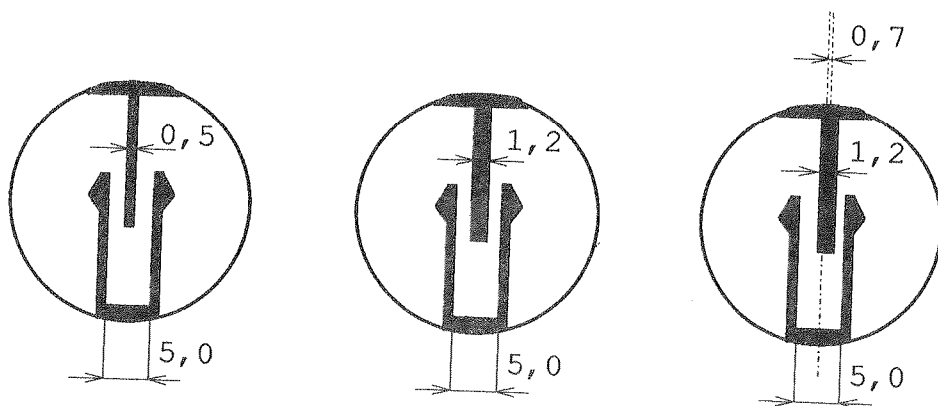
Do przeprowadzenia prób wpływu grubości i szerokości elektrod na parametry rezonatora przeznaczono płytki o krzywiznie  $R_{cz} = 100$  oznaczone jako 18 i 19. Najpierw naparowano warstwę złota 35 nm przez maskę wg rysunku B (rys. 13), zmontowano vibratory i zahermetyzowano. Po wykonaniu pomiarów rozcięto obudowę, zdemonutowano vibratory, usunięto elektrody i powtórnie wykonano nowe rezonatory zwiększając grubość warstwy złota do 50 nm. W trzecim procesie z tych samych płytek wykonano rezonatory o grubości elektrod 50 nm lecz naparowanych przez maski wg rys. B1 czyli z szerszą środkową elektrodą. Wyniki pomiarów zamieszczono w tablicy 2. Porównując wyniki trzech kolejnych wykonania widać wyraźnie, że zarówno pogrubienie warstwy złota do 50 nm jak i rozszerzenie środkowej elektrody poprawiło znacznie parametry rezonatorów. Zdecydowanie zmniejszyła się rezystancja dynamiczna, zwiększyła dobroć i prawie dwukrotnie wzrosła pojemność dynamiczna.

100°

Do sprawdzenia możliwości poprawienia parametrów rezonatora przez przesunięcie strefy drgań (przesunięcie elektrod) względem środka przeznaczono inne płytki o krzywiznach  $R_{cz} = 100$ ,  $R_{cz} = 150$  i  $R_{cz} = 200$ . Naparowano elektrody o grubości 50 nm przez maski wg rysunku B2. Uprzednio na specjalnym przyrządzie wykonanym w tym celu ustalono kierunek przesunięcia (w lewo czy w prawo). Wyniki tych badań podano również w tablicy 2.

Przeprowadzone eksperymenty potwierdzają słuszność zastosowanych zmian konstrukcyjnych, które spowodowały w rezonatorach 5MHz wzbudzanych polem równoległym na częstotliwości drgania anharmonicznego 301 zmniejszenie rezystancji dynamicznej do poziomu  $200 \div 300 \Omega$  oraz zwiększenie dobroci do wartości prawie dorównującej rezonatorom klasycznym przy ponad dwukrotnym zwiększeniu pojemności dynamicznej.

Porównując zaś rezystancję dynamiczną i pojemność dynamiczną rezonatorów modu 300 i 301 częstotliwości 5MHz wzbudzanych polem równoległym, można stwierdzić, że



Rys. 13. Warianty układu elektrod



Tablica 2

Parametry rezonatorów  $f_{301}$  5 MHz w zależności od promienia krzywizny płytki oraz grubości i kształtu elektrod

| Ozn.               | $R_{cz}$ | Grubość elektrod [nm] | $f_{s\text{ pok}}$ [Hz] | $R_1$ [ $\Omega$ ] | $C_1$ [aF] | Q 10B6  | Elektrody (rys. 13) | Te [ $^{\circ}\text{C}$ ] | $f_{sTe}$ [Hz] |
|--------------------|----------|-----------------------|-------------------------|--------------------|------------|---------|---------------------|---------------------------|----------------|
| 18                 | 100      | 35                    | 5 067 659               | 1015               | 28,56      | 1,08    | B                   |                           |                |
|                    |          | 50                    | 5 067 606               | 933                | 32,29      | 1,11    | B                   |                           |                |
|                    |          | 50                    | 5 067 493               | 344,8              | 48,91      | 1,86    | B1                  |                           |                |
| 19                 | 100      | 35                    | 5 066 043               | 746                | 28,87      | 1,46    | B                   |                           |                |
|                    |          | 50                    | 5 065 974               | 500                | 38,05      | 1,65    | B                   |                           |                |
|                    |          | 50                    | 5 065 784               | 408                | 42,81      | 1,80    | B1                  |                           |                |
| 4                  | 100      | 50                    | 4 999 591               | 370,4              | 46,05      | 1,87    | B2                  |                           |                |
| 5                  | 100      | 50                    | 4 999 773               | 489,5              | 32,66      | 1,99    | B2                  |                           |                |
| 07                 | 150      | 50                    | 5 068 286               | 292                | 62,17      | 1,73    | B2                  | 80                        | 5 068 714      |
| 08                 |          |                       | 5 072 546               | 228                | 68,32      | 2,01    | B2                  | 76                        | 5 072 632      |
| P22                |          |                       | 5 072 055               | 270,8              | 61,74      | 1,88    | B1                  | 65                        | 5 072 135      |
| 2                  | 200      | 50                    | 5 052 391               | 638,5              | 34,75      | 1,42    | B                   |                           |                |
| 3                  |          |                       | 5 052 920               | 575,5              | 38,67      | 1,42    | B                   |                           |                |
| 05                 |          |                       | 5 052 829               | 278,0              | 65,02      | 1,74    | B2                  | 75                        | 5 052 916      |
| 06                 |          |                       | 5 052 841               | 265,0              | 68,02      | 1,75    | B2                  | 79                        | 5 052 932,5    |
| PFE <sub>300</sub> | 200      | 100                   | 5 000 000               | 65–80              | 230        | 2,0–2,3 | $\phi 8$            |                           |                |
| LFE <sub>300</sub> | 150      | 50                    | 5 000 000               | 520                | 27         | 2,3     | $\phi 5/2,3$        |                           |                |

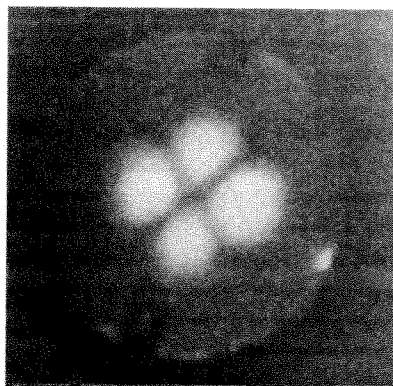
zoptymalizowane rezonatory modu anharmonicznego 301 wykazują ponad dwukrotnie wyższą pojemność dynamiczną przy około dwukrotnym zmniejszeniu rezystancji dynamicznej i nieznacznym pogorszeniu dobroci.

### 3.1.2. Modele rezonatorów o częstotliwości około 8MHz

W następnej kolejności przeprowadzono próby wykonania rezonatorów z wykorzystaniem płytek przeznaczonych do rezonatorów klasycznych pracujących na trzecim drganiu nadpodstawowym głównego modu (300) na częstotliwości 8,192 MHz. Zastosowano takie same elektrody jak do rezonatorów 5 MHz. Uzyskano rezonatory o dobroci maksymalnej  $1,33 \cdot 10^6$  dorównującej rezonatorom klasycznym i pojemności dynamicznej ponad 30aF. Zastosowanie asymetrycznych elektrod nieznacznie poprawiło dobroć rezonatorów do poziomu  $1,38 \cdot 10^6$ , ale dało pojemność dynamiczną przekraczającą 50 aF.

### 3.2. REZONATORY WYKORZYSTUJĄCE DRGANIA ANHARMONICZNE MODU 311

Skoro rezonatory na drganiach modu 301 wykazały prawie dwukrotnie niższą rezystancję i dwukrotnie większą pojemność dynamiczną niż rezonatory na drganiu modu 300 można było wysnuć wniosek, że rezonator na drganiach modu 311 powinien wykazywać jeszcze niższą rezystancję i większą pojemność dynamiczną. W przypadku drgań modu 301 charakter tych drgań i kierunki przemieszczeń były znane z publikacji francuskiej [12]. Inaczej przedstawiała się sytuacja w przypadku modu 311. Na podstawie topografii rentgenowskiej wykonanej przez prof. Rogera Bourquin z Politechniki w Besançon [13] wiadomo było tylko, że drgania tego modu odejmują cztery obszary płytki, równo uprzywilejowane pod względem przemieszczeń w kierunku osi X (rys. 14).

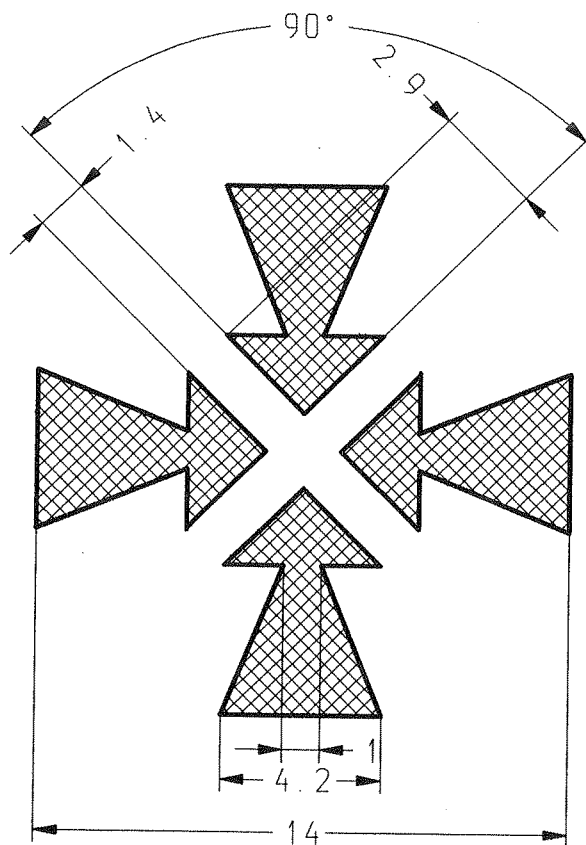


Rys. 14. Rozkład drgań modu 311 płytki kwarcowej cięcia SC (kierunek mocowania odpowiada w przybliżeniu kierunkowi osi  $Z'$  w płytce)

#### 3.2.1. Modele rezonatorów z czterema elektrodami trójkątnymi

Sugerując się tym, że wszystkie te obszary mogą być pobudzane do drgań polem równoległym skierowanym prostopadle do promienia płytki zaprojektowano konfigurację elektrod przedstawioną na rys. 15.

Przed wykonaniem rezonatorów wykonano taką konfigurację elektrod na płytkach szklanych. Następnie pomierzono poziom wzbudzenia drgań modu 311 płytek kwarcowych położonych na tych elektrodach. Na podstawie tych pomiarów ustalono ustawienie elektrod względem osi krystalograficznych w płytkach kwarcowych dające najwyższy poziom wzbudzenia. Na każdej płytce trwale zaznaczono kierunek jej ułożenia w maskach do naparowania elektrod. Następnie napyłono złote elektrody i zmontowano wibratory w podstawach czteronóżkowych tak, że każda z elektrod została podłączona do jednej nóżki podstawy. Rezonatory zahermetyzowano z próżnią wewnątrz obudowy i pomierzono ich parametry zwierając nóżki na przemian parami tak, aby naprzemiennie elektrody posiadały ten sam ładunek. Pomiary parametrów podstawowych tych rezonatorów wykazały, że przy tej konfiguracji elektrod poza modem 311 intensywnie wzbudzają się drgania modu 310. Wyniki pomiarów przedstawiono w tablicy 3.



Rys. 15. Konfiguracja czterech elektrod do pobudzania drgań modu 311

Tablica 3

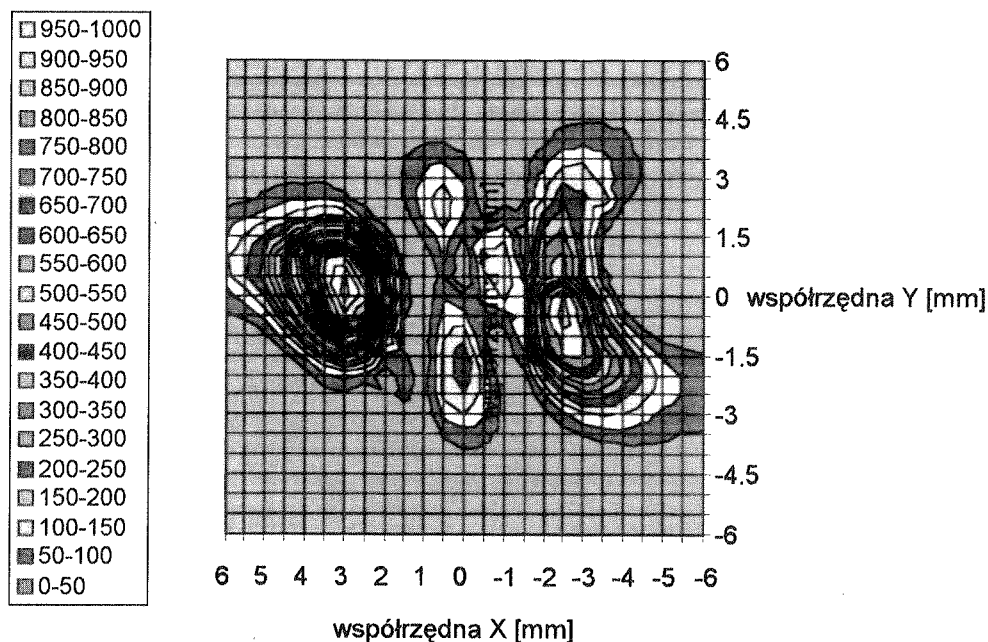
Wyniki pomiarów parametrów rezonatorów  
pobudzanych do drgań modu 311 konfiguracją  
czterech elektrod

| Mod drgań | Parametr           | Promień krzywizny [mm] |           |
|-----------|--------------------|------------------------|-----------|
|           |                    | 140                    | 150       |
| 311       | $f_s$ [Hz]         | 5 146 312              | 5 126 889 |
|           | $R_1$ [ $\Omega$ ] | 724                    | 651       |
|           | $C_1$ [af]         | 21,7                   | 27,9      |
|           | $L_1$ [H]          | 44,0                   | 34,5      |
|           | $Co$ [pf]          | 1,14                   | 1,71      |
|           | $Q$ E6             | 1,96                   | 1,71      |
| 310       | $f_s$ [Hz]         | 5 069 776              | 5 063 839 |
|           | $R_1$ [ $\Omega$ ] | 935                    | 826       |
|           | $C_1$ [af]         | 19,3                   | 22,1      |
|           | $L_1$ [H]          | 51,0                   | 44,7      |
|           | $Co$ [pf]          | 1,17                   | 1,17      |
|           | $Q$ E6             | 1,74                   | 1,72      |

W związku z takimi wynikami pomiarów przeprowadzono na kilku płytkach badanie rozkładu obszarów pobudzeń dla modu 310 i 311. Stwierdzono, że rzeczywiście kąty optymalnego pobudzenia dwóch z spośród czterech obszarów pobudzeń modu 311 są prawie identyczne jak kąt pobudzenia modu 310 (około  $60^\circ$ ). Przeprowadzono próbę zmniejszenia intensywności drgań modu 310 przez zmianę kąta pomiędzy elektrodami, ale nie uzyskano zauważalnych efektów. Równocześnie, porównując rozmieszczenie elektrod na płytce z obszarami drgań modu 311 w płytce stwierdzono, że obszary pobudzeń występują nie w obszarach drgań płytki ale pomiędzy nimi, czyli elektrody pokrywają obszary drgań płytki. Jest to niekorzystne z powodu wpływu elektrod na stałość długoterminową częstotliwości rezonatora. Z tego powodu przerwano pracę nad tą konfiguracją elektrod.

### 3.2.2. Modele rezonatorów z czterema elektrodami paskowymi

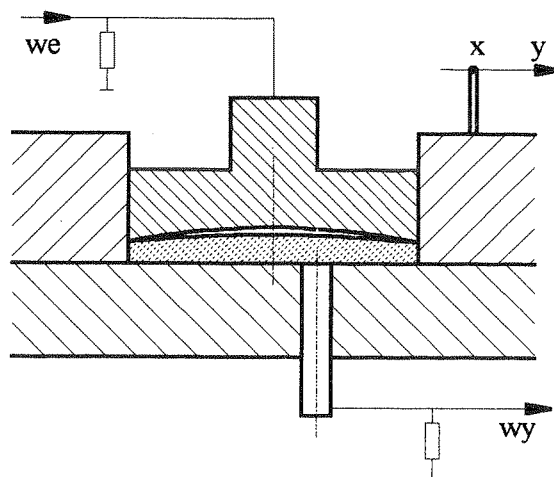
Szczegółowe badania rozkładu obszarów pobudzeń w polu równoległym wykazały, że najsilniejsze wzbudzenie drgań występuje przy kącie  $90^\circ$ . Kształt obszarów pobudzeń przy tym kącie przedstawiono na rys. 16.



Rys. 16. Obszar pobudzeń drgań modu 311 polem równoległym przy kącie pobudzania  $90^\circ$

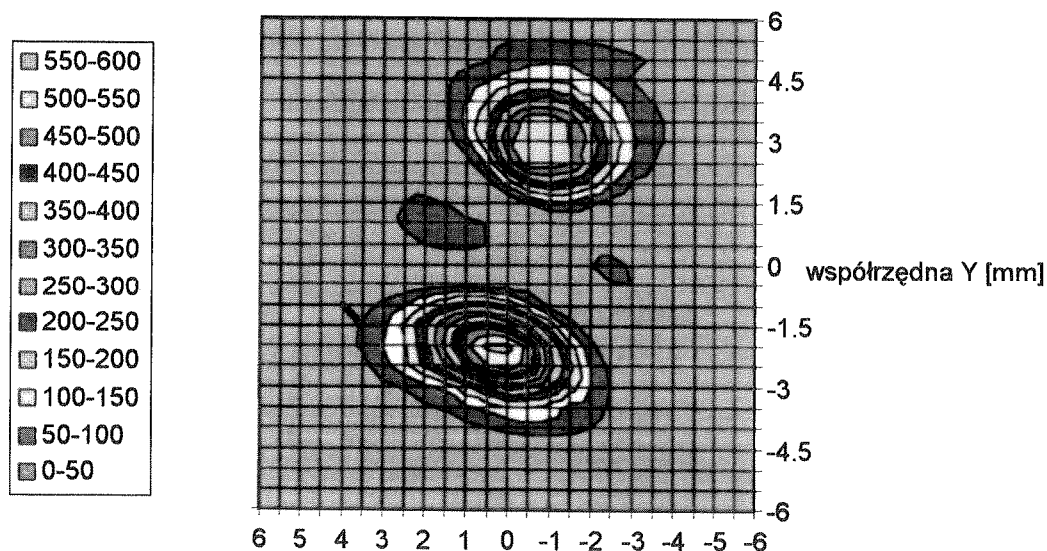
Wynik ten jednoznacznie wskazał, że w płytce występują wprawdzie cztery obszary pobudzeń ale nie są one jednakowo pobudzane poprzez pole elektryczne równoległe do powierzchni płytki.

Dla zaprojektowania właściwej konfiguracji elektrod przeprowadzono dodatkowo badania rozkładu obszarów pobudzeń w polu prostopadłym. W celu wykonania tych badań zaprojektowano stół pomiarowy przedstawiony na rys. 17.



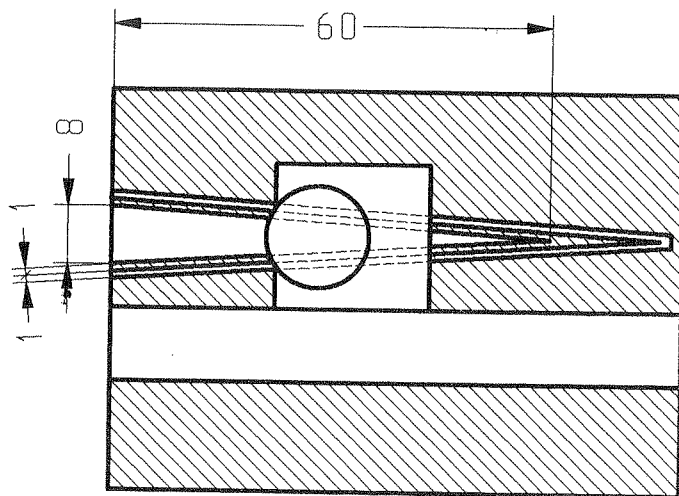
Rys. 17. Schemat poglądowy stolika do pomiaru rozkładu obszarów pobudzeń przy pobudzaniu polem prostopadłym

Zasada działania tego stolika była podobna do badań w polu równoległym z tym, że w stoliku umieszczono elektrodę o średnicy 2 mm a płytkę kwarcową nakryto wklęsłą elektrodą, posiadającą promień krzywizny nieco mniejszy niż promień krzywizny płytki kwarcowej obejmującą całą powierzchnię płytki. Płytkę wraz z górną elektrodą przesuwano nad dolną elektrodą mierząc parametr S21. Wyniki pomiarów przedstawiono na rys. 18.



Rys. 18. Rozkład obszarów pobudzania polem prostopadłym płytki SC do drgań modu 311

Uzyskane wyniki potwierdziły, że poszczególne obszary drgań w płytce nie są jednakowo intensywnie pobudzone. Obszary leżące w kierunku zbliżonym do osi  $X'$  pobudzają się znacznie słabiej (analogicznie jak przy polu równoległym). Dla dalszych prac niezbędnym okazało się określenie biegunowości obszarów pobudzania drgań modu 311 przy kącie  $90^\circ$ . W tym celu wykonano z miedziowanego laminatu epoksydowo-szklanego elektrody zewnętrzne o kształcie przedstawionym na rys. 19.

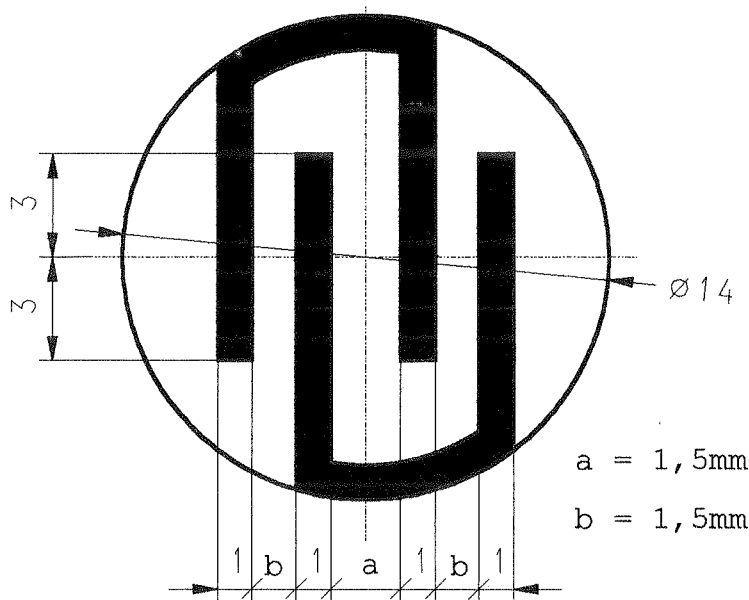


Rys. 19. Konfiguracja elektrod do badania biegunowości pobudzeń drgań modu 311

Elektrody podłączono do analizatora obwodów i mierzono wartość parametru  $S_{21}$  w rezonansie modu 311. Przesuwając płytkę wzdłuż elektrod, stwierdzono, że w pozycji, w której obszary pobudzeń pokrywają się z obszarami drgań następuje całkowity zanik sygnału. Przesuwając płytkę prostopadłe do kierunku elektrod stwierdzono, że w pozycji, w której dwa środkowe obszary drgań znajdują się nad jedną szczeliną pomiędzy elektrodami, a jeden z pozostałych obszarów znajduje się nad drugą szczeliną następuje zwiększenie intensywności pobudzenia płytki. Na tej podstawie stwierdzono, że kierunek pola pobudzającego w obu naprzemianległych obszarach pobudzeń powinien być zgodny, a przeciwny w sąsiadujących ze sobą obszarach. Wykorzystując tę informację zaprojektowano konfigurację czterech elektrod palcowych do pobudzania drgań modu 311, przedstawioną na rys. 20.

Przyjęto taki rozstaw elektrod, aby zewnętrzne elektrody obejmowały zewnętrzne obszary pobudzeń. Analogicznie jak w poprzednich wersjach najpierw wykonano elektrody na szkło i przez pomiary na nich ustalono kierunek maksymalnego pobudzenia drgań modu 311, a następnie wykonano rezonatory i pomierzono ich parametry. Wyniki pomiarów zamieszczono w tablicach 4 i 5.

Stwierdzono znaczne rozrzuty parametrów, zwłaszcza rezonatorów 5 MHz. Dobroć tych rezonatorów nie przekraczała  $1,66 \cdot 10^6$ , ale rezystancja była w najlepszym egzemplarzu tylko  $212\Omega$  a pojemność dynamiczna 90aF czyli prawie czterokrotnie większa niż



Rys. 20. Czteroelektrodowa konfiguracja elektrod paskowych do pobudzania drgań modu 311

Tablica 4  
Parametry rezonatorów 5 MHz pobudzanych za pomocą konfiguracji czterech elektrod paskowych do drgań modu 311

| N <sup>o</sup>     | R<br>[mm] | Grubość elektrod<br>[nm] | f <sub>1</sub><br>[Hz] | R <sub>1</sub><br>[Ω] | C <sub>1</sub><br>[aF] | Q<br>[10E6] | Elektrody |
|--------------------|-----------|--------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-------------|-----------|
| P 56               | 150       | 50                       | 5 130 555              | 212                   | 90,40                  | 1,66        | Rys. 20   |
| P 58               |           | 50                       | 5 119 171              | 400                   | 54,57                  | 1,41        |           |
| PFE <sub>300</sub> | 200       | 100                      | 5 000 000              | 65–80                 | 230                    | 2,0–2,3     | φ8        |
| LFE <sub>300</sub> | 150       | 50                       | 5 000 003              | 520                   | 27                     | 2,3         | φ5/2,3    |

Tablica 5  
Parametry rezonatorów 10 MHz pobudzanych za pomocą konfiguracji czterech elektrod paskowych do drgań modu 311

| N <sup>o</sup>     | R<br>[mm] | Grubość elektrod<br>[nm] | f <sub>1</sub><br>[Hz] | R <sub>1</sub><br>[Ω] | C <sub>1</sub><br>[aF] | Q<br>[10E6] | Elektrody |
|--------------------|-----------|--------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-------------|-----------|
| P.66               | 750       | 50                       | 10 081 499             | 380,2                 | 34,44                  | 1,21        | Rys. 20   |
| P.67               |           |                          | 10 077 127             | 302,8                 | 46,09                  | 1,13        |           |
| P.68               |           |                          | 10 074 478             | 328,0                 | 41,74                  | 1,15        |           |
| P.69               |           |                          | 10 074 540             | 257,2                 | 51,07                  | 1,20        |           |
| P.53               |           |                          | 10 096 570             | 456,0                 | 32,71                  | 1,06        |           |
| PFE <sub>300</sub> | 1000      | 100                      | 10 000 000             | 40–55                 | 260                    | 1,1–1,3     | φ 6,5     |
| LFE <sub>300</sub> | 750       | 50                       | 9 999 996              | 650                   | 19                     | 1,28        | φ 6/1,5   |

w rezonatorze z polem równoległym na drganiu modu 300. W rezonatorach na częstotliwości 10 MHz dla całej partii rezonatorów uzyskano dobroć  $(1,13 \div 1,21) \cdot 10^6$ , czyli stanowiącą ponad 90% dobroci rezonatora klasycznego i rezystancję  $257 \div 380 \Omega$ .

#### 4. PODSUMOWANIE

Przedstawione wyniki badań dotyczą rezonatorów modelowych, których konstrukcja (poza grubością metalizacji) nie została zoptymalizowana. Od pierwszej wzmianki na temat rezonatorów wykorzystujących drgania anharmoniczne (pobudzanych polem prostopadłym) [12] minęły zaledwie cztery lata. Przeprowadzone badania wykazały możliwość konstrukcji rezonatorów pobudzanych polem równoległym, pracujących na drganiach anharmonicznych. Rezonatory te wykazują znacznie niższą rezystancję dynamiczną i znacznie większą pojemność dynamiczną niż analogiczne rezonatory pobudzane polem równoległym do drgań modu głównego. Elektrody pobudzające znajdują się poza obszarem drgań, czyli ich wpływ na niestaość długookresową częstotliwości rezonatora powinien być bardzo mały. Istnienie w jednej płytce kwarcowej wielu obszarów drgań sugeruje możliwość zmniejszenia niestaości krótkoterminowej częstotliwości na skutek uśredniania drgań tych obszarów. Dokładne badania tych zjawisk wymagają dalszej optymalizacji konstrukcji rezonatorów i przeprowadzenia systematycznych badań na większej partii rezonatorów. Badania te mogą być wykonane w generatorach, a więc konieczne jest opracowanie generatorów dostosowanych do parametrów tych rezonatorów. Również bardzo istotne jest przebadanie charakterystyk temperaturowych rezonatorów na drganiach anharmonicznych. Wstępne pomiary wykazały, że w tych rezonatorach, w porównaniu z rezonatorami klasycznymi wykonanymi z tych samych płytek, zmienia się nie tylko temperatura punktu ekstremum ale również temperatura punktu przegięcia temperaturowej zależności częstotliwości. Na obecnym etapie badań można tylko powiedzieć, że parametry dotychczas uzyskane zachęcają do dalszych systematycznych badań. Należy przy tym podkreślić, że przedstawione rozwiązania stanowią nowość w skali światowej i zostały zgłoszone do opatentowania.

#### BIBLIOGRAFIA

1. J.A. Kusters: *Transient thermal compensation for quartz resonator*. IEEE Trans. on Sonics and Ultrasonics, Vol. SU — 23, N° 4, July 1976
2. E.P. Eer Nisse: *Calculations of stress compensated (SC-cut) quartz resonator*. Proc. of 30th AFCS, 1976
3. R.L. Filler, J.R. Vig: *The acceleration and warmup characteristics of four-point-mounted SC and AT-cut resonators*
4. R. Bechmann: *Piezoelektrische Resonatoren und Oscillatoren aus Quartz und syntetischen Kristallen*. Telefunken Zeitung, 25 Jg, N° 97, 1952
5. M. Łysakowska: *Drgania płytek piezoelektrycznych*. Rozdział IV w książce *Wstęp do piezoelektroniki* pod redakcją W. Solucha. Wyd. Komunikacji i Łączności, 1980, s. 153÷155



6. J.K.R. Vig, T.R. Meeker: *The aging of bulk accoustic wave resonatory filtres and oscillators*. Proc. of 45th ASCF, 1991
7. A. Masiukiewicz: *Analiza warunków pracy generatorów z piezoelektryczną stabilizacją częstotliwości i ich optymalizacja z punktu widzenia uzyskania maksymalnej czystości widmowej*. Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki, 1997
8. M. Łyskowska: *Drgania płytek piezoelektrycznych*. Rozdział IV w książce *Wstęp do piezoelektroniki* pod redakcją W. Solucha. Wyd. Komunikacji i Łączności, 1980, s. 175
9. D.S. Stevens, H.F. Tiersten: *On the change in orientation of the zero-temperature contoured SC-cut quartz resonator with the radius of the contour*. Proc. of 38th AFCS, 1984
10. K. Weiss, I. Mateescu, G. Pop, Ch. Ghita: *Calculation and measurement of anharmonic vibration modes in SC-cut quart resonators*. Proc. of 12th EFTF, 1998.
11. K. Weiss, W. Szulc: *The SC-cut lateral field quartz resonator working on anharmonic antisymmetric mode*. Proc. of 12th EFTF, 1998
12. R. Bourquin, B. Dulmet, J.J Boy: *SC-cut resonator operating in anharmonic modes with B mode reduction*. Proc. of 10th EFTF, 1996
13. K. Weiss, W. Szulc, B. Dulmet, R. Bourquin: *The 311 anharmonic mode vibration SC-cut resonator excited by lateral field*. Proc. of Joint Meeting EFTF-FCS, 1999

K. WEISS, W. SZULC, M. ŚWIDERSKI

#### THE SC-CUT ANHARMONIC MODE RESONATORS EXCITED BY LATERAL FIELD

##### Summary

In the paper the results of initial investigation and optimization of SC-cut anharmonic mode quartz resonators excited by lateral field are presented. The original methods of quartz plate lateral and perpendicular field excitation regions measurement are also presented. The presented resonators exhibit comparable to classical resonators parameters. In these resonators electrodes are positioned over the vibration regions. It gives potential possibility of better long term frequency stability and short term frequency stability obtain.

*Key words:* quartz resonator, precise resonator, SC-cut, anharmonic vibrations, lateral field

## SPIS TREŚCI

|                                                                                                                                                        |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| M. Tadeusiewicz, S. Hałas: Wyznaczanie wszystkich rozwiązań DC układów z tranzystorami MOS opisanymi oryginalnymi równaniami nieliniowymi . . . . .    | 281 |
| J. Zarębski, K. Górecki: Algorytm estymacji wartości parametrów elektrotermicznego stałoprądowego makromodelu tranzystora Darlingtona mocy . . . . .   | 299 |
| T. Kacprzak, J. Kowalski: Realizacja sieci neuronowych komórkowych z wykorzystaniem wzmacniaczy prądowych CMOS z programowalnym wzmocnieniem . . . . . | 321 |
| L. Tomawski, M. Mańka: Zjawiska rezonansowe w wybranych obwodach II i III rzędu . . . . .                                                              | 339 |
| I. Jaworski, Z. Zakrzewski: Koherentna analiza korelacyjna niestacjonarnych sygnałów zmodulowanych . . . . .                                           | 355 |
| P. Sapiecha, M. Pleban, B. Zbierchowski: Dekompozycja funkcji i relacji Boolowskich w syntezie logicznej i analizie danych . . . . .                   | 401 |
| M. Gajer: Rozpoznanie obrazów metodą minimalnoodległościową . . . . .                                                                                  | 413 |
| K. Weiss, W. Szulc, M. Świdorski: Rezonatory cięcia SC pobudzone polem równoległym do drgań anharmonicznych . . . . .                                  | 431 |

## CONTENTS

|                                                                                                                                                  |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| M. Tadeusiewicz, S. Hałas: Finding all the DC solutions of MOS transistor circuits described by original nonlinear equations . . . . .           | 281 |
| J. Zarębski, K. Górecki: Parameter values estimation algorithm of the DC electrothermal macro-model of the darlington power transistor . . . . . | 299 |
| T. Kacprzak, J. Kowalski: Cellular neural network implementation based on continuously programmable gain CMOS current amplifier . . . . .        | 321 |
| L. Tomawski, M. Mańka: Resonance phenomenon in chosen II and III order circuits . . . . .                                                        | 339 |
| I. Jaworski, Z. Zakrzewski: Coherent correlation analysis of nonstationary modulated signals . . . . .                                           | 355 |
| P. Sapiecha, M. Pleban, B. Zbierchowski: Decomposition of Boolean relations and functions in logic synthesis and data analysis . . . . .         | 401 |
| M. Gajer: Image recognition by the usage of minimal distance method . . . . .                                                                    | 413 |
| K. Weiss, W. Szulc, M. Świdorski: The SC-CUT anharmonic mode resonators excited by lateral field . . . . .                                       | 431 |

## INFORMACJE DLA AUTORÓW

Redakcja przyjmuje do publikowania prace oryginalne, przeglądowe i monograficzne wchodzące w zakres szeroko pojętej elektroniki. Ponieważ KWARTALNIK ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI jest czasopismem Komitetu Elektroniki i Telekomunikacji Polskiej Akademii Nauk, w związku z tym na jego łamach znajdują się prace naukowe dotyczące podstaw teoretycznych i zastosowań z zakresu elektroniki, telekomunikacji, mikroelektroniki, optoelektroniki, radiotechniki i elektroniki medycznej.

Artykuły powinny charakteryzować oryginalne ujęcie zagadnienia, własna klasyfikacja, krytyczna ocena (teorii lub metod), omówienie aktualnego stanu, lub postępu danej gałęzi techniki oraz omówienie perspektyw rozwojowych.

Artykuły publikowane w innych czasopismach nie mogą być kierowane do druku w Kwartalniku Elektroniki i Telekomunikacji w drugiej kolejności zgłoszenia.

Objętość artykułu nie powinna przekraczać 30 stron po około 1800 znaków na stronie.

**Wymagania podstawowe:** Artykuły należy nadsyłać w maszynopisie pisany jednostronnie lub na wyraźnym czarno-białym wydruku komputerowym, w 2 egzemplarzach, w języku polskim lub angielskim wybranym przez autora. Tekst artykułu musi być poprzedzony tytułem pracy, imieniem i nazwiskiem Autora wraz z podaniem miejsca jego pracy. Wszystkie strony muszą mieć numerację ciągłą.

**Sposób pisania tekstu:** Tekst powinien być pisany bez używania wyróżnień, a w szczególności nie dopuszcza się spacjiowania, podkreślania i pisania tekstu dużymi literami z wyjątkiem wyrazów, które umownie pisze się dużymi literami (np. FORTRAN). Proponowane wyróżnienia Autor może zaznaczyć w maszynopisie zwykłym ołówkiem na pomocą przyjętych znaków adiustacyjnych np. podkreślenie linią przerywaną oznacza spacjiowanie (rozstrzelenie), podkreślenie linią ciągłą — pogrubienie, podkreślenie wężym — kursywa. Tekst powinien być napisany z podwójnym odstępem między wierszami, tytuły i podtytuły małymi literami. Marginesy z każdej strony powinny mieć około 35 mm. Przy podziale pracy na rozdziały i podrozdziały cyfrowe ich oznaczenia nie powinny być większe niż III stopnia (np. 4.1.1).

**Sposób pisania tablic:** Tablice powinny być pisane na oddzielnych stronach. Tytuły rubryk pionowych i poziomych powinny być napisane małymi literami z podwójnym odstępem między wierszami. Przypisy (notki) dotyczące tablic należy pisać bezpośrednio pod tablicą. Tablice należy numerować kolejno liczbami arabskimi, u góry każdej tablicy podać tytuł. Tablice umieścić na końcu maszynopisu. Przyjmowane są tablice algorytmów i programy na wydrukach komputerowych. W tym przypadku zachowany jest ich oryginalny układ.

**Sposób pisania wzorców matematycznych:** Rozmieszczenie znaków, cyfr, liter i odstępów powinno być zbliżone do rozmieszczenia elementów druku. Wskaźniki i wykładniki potęg powinny być napisane wyraźnie i być prawidłowo obniżone lub podwyższone w stosunku do linii wiersza podstawowego. Znaki nad literami i cyframi, całkami i in. symbolami (strzałki, linie, kropki, daszki) powinny być umieszczone dokładnie nad tymi elementami, do których się odnoszą. Numery wzorów cyframi arabskimi powinny być kolejne i umieszczone w nawiasach okrągłych z prawej strony. Nazwy jednostek, symbole literowe i graficzne powinny być zgodne z wytycznymi IEE (International Electronical Commision) oraz ISO (International Organization of Standarization).

**Powołania:** Powołania na publikacje powinny być umieszczone na ostatnich stronach tekstu pod tytułem „Bibliografia”, opatrzone numeracją kolejną bez nawiasów. Numeracja ta powinna być zgodna z odnośnikami w tekście artykułu. Przykłady opisu publikacji:

- periodycznej: F. Valdoni: A new milimetre wave satelite. E.T.T. 1990, vol. 2, no 5, p. 553
- nieperiodycznej: K. Andersen: A resource allocation framework. XVI International Symposium, Stockholm (Sweden), may 1991, paper A 2.4
- książki: Y.P. Tvidis: Operation and modeling of the MOS transistors. New York, Mc Graw-Hill, 1987, pp. 141–148

**Materiały ilustracyjne:** Rysunki powinny być wykonane wyraźnie, na papierze gładkim lub milimetrowym w formacie nie mniejszym niż 9×12 cm. Mogą być także w postaci wydruku komputerowego. Fotografie lub diapozytywy przyjmowane są raczej czarno-białe w formacie nie przekraczającym 10×15 cm. Na marginesie każdego rysunku i na odwrocie fotografii powinno być napisane ołówkiem imię i nazwisko Autora oraz skrót tytułu artykułu, do którego są przeznaczone. Spis podpisów pod rysunki i fotografie powinien być umieszczony na oddzielnej stronie.

**Streszczenia:** Do każdego artykułu musi być dołączone obszerne — do 60 wierszy — streszczenie z tytułem artykułu. Streszczenia (Summary) muszą być w języku polskim i angielskim. Streszczenie powinno wyjaśniać główny cel pracy, wskazywać korzyści i ograniczenia, możliwe zastosowania i zalecenia dla dalszego rozwoju danej gałęzi techniki. Pod streszczeniami powinny być podane słowa kluczowe.

Autorowi przysługuje bezpłatnie 20 odbitek artykułu. Dodatkowe egzemplarze odbitek, lub cały zeszyt Autor może zamówić u wydawcy na własny koszt.

Autora obowiązuje korekta autorska, którą powinien wykonać w ciągu 3 dni od daty otrzymania tekstu z Redakcji zwrócić osobiście, lub listownie pod adresem Redakcji. Korekta powinna być naniesiona na przekazanych Autorowi szpaltach na marginesach ew. na osobnym arkuszu w przypadku uzupełnień tekstu większych niż dwa wiersze. W przypadku nie zwrócenia korekty w terminie, korektę przeprowadza Redakcja Techniczna Wydawcy.

Redakcja prosi Autorów o powiadomienie ją o zmianie miejsca pracy i adresu prywatnego.

## INFORMATION FOR THE AUTORS OF K.E.T.

The KWARTALNIK ELEKTRONIKI I TELEKOMUNIKACJI (K.E.T.) — ELECTRONICS AND TELECOMMUNICATION QUARTERLY is a journal of the Committee for Electronics and Telecommunication of the Polish Academy of Sciences and is a direct continuation for 46 years of the quarterly ROZPRAWY ELEKTROTECHNICZNE, that has been published also under the auspices of the Polish Academy of Sciences.

Its pages contain scientific articles concerned with theory and application of electronics, telecommunication, microelectronics, optoelectronics, radioengineering and medical electronics.

Accordingly, its pages contain scientific articles, that are original works both contributory and concerned with comparative analyses of methods or systems synthetic reviews of a given field, state-of-art discussions of a given field, and presentations of developments in a given technology.

Regular papers are accepted for publication in Polish or English, but title, the extensive summary and figure caption must be bilingual. Bilingual summary must shown the significance of the results shown in the paper, emphasizing limitations and advantages, possible applications and recommendation for further works.

K.E.T. is meant for specialists and students with above subjects.

### FORMAL PREPARATION OF MANUSCRIPT

#### Texts

Texts to be submitted to K.E.T. may be typed on one side of the paper only with double spacing between the lines and a 4 cm margin or using of wordprocessing with text formatters based on MS DOS, APPLE/MAC such as Microsoft word. In any case the text formatter must be specified on the Author/s, their Affiliations and relevant addresses.

All text pages should be numbered. Regular papers should have of no more than 30 pages.

#### Printing types and symblos

For letteral symbols, units and graphical symbols, the recommendation of IEE (International Electrotechnical Commission) and ISO (International Organisation of Standardisation) must be followed.

- In case of manuscripts conventionally typed (i.e. without wordprocessing), letters to be printed in italic should be underlined; letter to be printed in bold should be double interlined.

- Formulae and footnotes should be numbered in accordance with the quotation order followed in the text.

- The serial number of each formulae should be written at right side, between round brackets.
- The serial number of footnotes should be written between round brackets and upper.
- Mathematical details, ancillary to the main discussion of the paper may be included in one or more appendixes, that are printed after conclusions and before references.

In manuscript containing lot of symbols, a glossary may be included after introduction.

#### References

References are usually gathered at the end of the text and numbered according to the order of quotation in the text. The serial numbers should be written without square brackets (i.e. 1, 2...)

#### Illustrations

The originals of illustrations may be either drawings or photographs (black or colour). Each copy of paper must include two complete sets of illustrations.

All rights reserved. No part of the publication may be reproduced, stored in a retrieval system or transmitted, in any form or by any means: electronic, photocopying, recording or otherwise, without the prior permission of the copyright owner — Redaction K.E.T.

**Subscription for external subscribers:**

The promotional subscription price in 2000 is \$ 90 including postage for institutions. Subscriptions should be sent to the publisher, Polish Scientific Publishers PWN LTd., Journal Division, Miodowa 10, 00-250 Warsaw, POLAND, fax. (48) (22) 826 09 50, (48) (22) 826 71 63, with a copy by fast to Electronics and Telecommunications Quarterly 00-665 Warsaw, ul. Nowowiejska 15/19, 470. Subscription is occupied after showing a cheque for transfer documents. Our bank account is as follows: Bank account: PBK VIII O/Warszawa nr 11101037-1052-2700-1-43. At subscriber's request this journal will be air mailed at additional postage to 50% gross price to European countries and 65% overseas.

Subscription orders available through the local press distribution or through the Foreign Trade Enterprise ARS Polona, 00-06 Warszawa, Krakowskie Przedmieście 7, Poland.

Ruch S.A. fulfils foreign customers orders, starting from any issue in the calendar year: (48) (22) 620 120 39, fax: (48) (22) 620 17 62.